



HAL
open science

Prédiction de la stabilité en contact rotor-stator dans les turboréacteurs d'avion

Marie-Océane Parent

► **To cite this version:**

Marie-Océane Parent. Prédiction de la stabilité en contact rotor-stator dans les turboréacteurs d'avion. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 2015. Français. NNT : . tel-01215180

HAL Id: tel-01215180

<https://theses.hal.science/tel-01215180>

Submitted on 13 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE DE LYON (UCBL/INSA/ECL)

par

Marie-Océane PARENT

**Prédiction de la stabilité en contact rotor-stator
dans les turboréacteurs d'avion**

Présentée et soutenue publiquement le 6 mars 2015, devant le jury d'examen :

Régis DUFOUR, Professeur, LaMCoS, INSA de Lyon,	Président
Jean-Claude GOLINVAL, Professeur, LTAS, Université de Liège,	Rapporteur
Patrice CARTRAUD, Professeur, GeM, Ecole Centrale de Nantes,	Rapporteur
Fabrice CHEVILLOT, Ingénieur méthodes, SNECMA,	Examineur
Fabrice THOUVEREZ, Professeur, LTDS, École Centrale de Lyon,	Directeur de thèse

Remerciements

Cette thèse a pu voir le jour et aboutir grâce au concours de personnes auxquelles je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance.

En premier lieu, je remercie Patrice Cartraud et Jean-Claude Golinval qui ont accepté de rapporter mes travaux et Régis Dufour pour avoir présidé mon jury.

Mes profonds remerciements vont à mon directeur, Fabrice Thouverez, qui a su me guider avec humanité, me laisser autonome tout en étant présent dans les moments clés et me transmettre l'art de la modélisation au « juste nécessaire ».

Merci également à toute l'équipe D2S, qui m'a chaleureusement accueillie, même si mes passages au labo étaient souvent brefs ; un merci tout particulier aux aquariophiles, aux habitants du G8bis-ter-phare et à Isabelle Tixier.

Cette thèse est le fruit d'une collaboration avec la société Snecma du Groupe SAFRAN, je remercie donc mon encadrement industriel. Un grand merci à l'équipe des méthodes de la division intégration, pour leur soutien et pour avoir toujours su trouver une analyse artistico-psychologique constructive aux nombreux graphiques bariolés que j'ai pu produire.

Je souhaite remercier particulièrement Marion Gruin, d'abord pour les cafés d'encouragement tout au long de la thèse, puis pour m'avoir fait confiance et permis de découvrir la « dreamteam » qui m'a immédiatement accueillie et soutenue dans l'aboutissement de la thèse.

C'est avec une pensée à ma famille que je voudrais terminer ces remerciements. Vous voir aussi nombreux à ma soutenance m'a tellement touchée. Le tout dernier merci pour Vincent, son soutien sans faille et sa distribution quotidienne de bonheur.

Résumé - Abstract

L'objectif de ces travaux est de prédire la stabilité dynamique d'un moteur d'avion de type turbofan, lors de contacts légers entre l'extrémité des aubes et le carter en regard. Une voie d'amélioration des performances des turboréacteurs d'avion consiste, en effet, à réduire les jeux entre les extrémités des aubes en rotation et le carter. Réduction qui s'accompagne d'une augmentation des possibilités de contact entre ces parties tournantes et fixes pouvant conduire à des phénomènes vibratoires instables. La démarche proposée s'appuie sur un modèle hybride qui introduit de manière simplifiée une roue aubagée et un carter flexible à un modèle de ligne d'arbres. Une formulation dite 3D du contact a également été implémentée, elle intègre la cinématique des différents organes du modèle et introduit de manière précise la géométrie locale de la zone de contact. Le comportement du modèle lors de contacts aubes-carter est alors étudié en distinguant les analyses menées en supposant un contact permanent et celles autorisant l'intermittence des contacts. Les résultats obtenus mettent en évidence l'importance des couplages introduits dans l'apparition des phénomènes instables et la pertinence de la formulation 3D dans la prédiction de la stabilité du système.

Mots clés : dynamique des rotors, roues aubagées, contact aube-carter, stabilité.

This work aims to predict the dynamic stability of a turbofan engine submitted to light contacts between blade tips and casing. Reducing the clearance between the rotating blades and the casing improves indeed the performances of turbomachines; however, it also increases the possible contacts between rotating and stationary parts, which can cause unstable dynamic behavior. The approach is based on a hybrid model which introduces a simplified bladed wheel and a flexible casing to a rotor-shaft model. A 3D contact formulation has also been implemented; it considers the model kinematic and introduces the local geometry of the contact area. The model behavior with blade-to-casing contacts is analyzed through two approaches : the first one assumes permanent contacts while the other one allows contact intermittence. The results highlight the importance of couplings in the outbreak of unstable phenomena and the relevance of the 3D contact formulation in predicting the stability of the system.

Keywords : rotordynamics, bladed-disks, blade-to-casing contact, stability.

Table des matières

Résumé - Abstract	v
Table des matières	vii
Introduction	1
I Dynamique des machines tournantes	5
1 Généralités sur les turboréacteurs	6
1.1 Principe de fonctionnement	6
1.2 Sources d'excitation dynamique	7
2 Dynamique d'un corps élastique en rotation	10
2.1 Cinématique d'une particule	11
2.2 Formulation des équations du mouvement	13
3 Dynamique des rotors	16
3.1 Éléments de base d'un modèle de rotor	16
3.2 Phénoménologie des rotors	18
4 Dynamique des ensembles aubagés	26
4.1 Effets de la rotation sur une aube seule	26
4.2 Propriétés des structures à symétrie cyclique	28
5 Dynamique couplée des rotors aubagés	33
6 Conclusion	35
II Analyse et état de l'art du phénomène de contact rotor-stator	37
1 Synthèse bibliographique	38
1.1 Dynamique d'interaction rotor-stator sans aubages (<i>rubbing</i>)	39
1.2 Dynamique d'interaction roue aubagée-carter	43
1.3 Positionnement de notre étude	45
2 Implémentation du contact	46
2.1 Relations de contact	47
2.2 Méthodes de gestion du contact	49
3 Résolution du problème non-linéaire	50
3.1 Intégration temporelle	51
3.2 Résolution de systèmes algébriques non-linéaires	54
3.3 Obtention des cycles limites	55
4 Stabilité des solutions	56

4.1	Stabilité locale des points fixes	57
4.2	Stabilité locale des solutions périodiques	58
4.3	Bifurcations locales	59
5	Conclusion	60
III Dynamique d'ensemble de l'interaction Rotor-Stator		63
1	Description du modèle sans contact	64
1.1	Formulation analytique du modèle	64
1.2	Comportement du modèle sans contact	77
1.3	Conclusion	90
2	Implémentation du contact aube-carter	90
2.1	Détection des touches	91
2.2	Efforts de contact	94
3	Comportement en contact permanent	99
3.1	Études qualitatives de stabilité pour un système conservatif	100
3.2	Stabilité pour un contact induit par le balourd	111
3.3	Conclusion	120
4	Comportement en contact non-permanent	121
4.1	Résultats transitoires à la frontière de stabilité	122
4.2	Contenu fréquentiel des signaux temporels	127
4.3	Description de scénarios instables	131
4.4	Conclusion	146
IV Application industrielle		149
1	Description du modèle sans contact	151
1.1	Dynamique linéaire du <i>WEM</i> 1D	151
1.2	Implémentation des aubes et du carter souples	156
2	Prédiction de la stabilité lors de contacts aube-carter	160
2.1	Stabilité en contact permanent : jeux fixés	160
2.2	Etudes d'influences et outils de conception d'un système stable	164
3	Conclusion	167
Conclusion		169
Bibliographie		184
Table des figures		185
A Jacobienne des efforts de contact (formulation 2D)		187

Introduction

Ces travaux de thèse, co-financés par l'ANRT (Association Nationale de la Recherche et de la Technologie), s'inscrivent dans le cadre d'un partenariat entre la société Snecma, Groupe SAFRAN et le Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon.

Les moteurs d'avions sont des produits complexes et fortement contraints. Leur fonction principale est de fournir la poussée nécessaire pour propulser l'avion, mais ces systèmes propulsifs doivent aussi résister aux sollicitations extrêmes imposées par leur environnement et par leur propre fonctionnement. Leur conception intègre également le respect des réglementations environnementales en vigueur et doit garantir un coût de mise en œuvre et d'exploitation minimum.

Le fonctionnement des turboréacteurs s'appuie sur une succession d'étages aubagés qui assurent la transmission de l'énergie mécanique en énergie aérodynamique : les aubages permettent un transfert d'énergie entre la rotation de l'arbre, auquel ils sont connectés, et l'air qui traverse le moteur. La qualité de ce transfert d'énergie contribue grandement aux performances du moteur ; les concepteurs de turbomachine veillent donc à en minimiser les pertes. Une voie d'amélioration des performances réside ainsi dans la réduction du jeu fonctionnel entre les extrémités de ces éléments tournants et les carters fixes qui les entourent. Réduire cette distance entre parties tournantes (*rotor*) et fixes (*stator*) limite les écoulements de fuite qui réduisent le transfert d'énergie assuré par les aubes. Cette amélioration des performances s'accompagne d'une contrepartie : l'augmentation des risques de contacts entre les sommets des aubes tournantes et la surface interne du carter qui les entoure. Le rotor contient en effet beaucoup d'énergie du fait de sa rotation propre, et les prises de contacts avec le carter peuvent conduire à des niveaux vibratoires importants ou même mener à des phénomènes instables pouvant endommager le turboréacteur. Pour améliorer les performances tout en s'assurant de concevoir des turbomachines sûres, il faut atteindre une meilleure compréhension des phénomènes en jeu ; dans l'optique de prédire, au plus tôt du cycle de développement, les caractéristiques dynamiques de la turbomachine lors de contacts aubes-carter.

L'étude du comportement dynamique des turbomachines est communément séparée en deux domaines d'investigation associés à deux niveaux de modélisation. Les modèles locaux (dits *de module*), se focalisent sur la description fine du com-

portement d'un ou de quelques organes spécifiques; tandis que les modèles d'ensemble s'appuient sur une description simplifiée des différents organes pour étudier le comportement global de la turbomachine et notamment les interactions entre les différents éléments. La première catégorie s'appuie généralement sur des modèles éléments finis 3D qui décrivent les déformations du disque, des aubes ou du carter tandis que les mouvements générés par l'interaction avec le reste des éléments composant le moteur sont écartés : notamment les vibrations de ligne d'arbre. La seconde catégorie se focalise sur les vibrations de ligne d'arbres et les mouvements d'ensemble des stators, et néglige la flexibilité des disques aubagés et des carters, qui sont introduits uniquement à travers leurs propriétés d'inertie.

Cette distinction de niveau de modélisation persiste dans la plupart des investigations rencontrées sur le thème du contact rotor-stator. Nous retrouvons d'une part, les investigations du type *module*, qui s'intéressent aux phénomènes induits par les contacts aubes-carter, notamment aux interactions entre les vibrations de la roue aubagée et celles du carter [Sch97b; Leg05]. Ces études peuvent intégrer une modélisation fine du contact avec la prise en compte de l'usure ou des échauffements liés au frottement [Mil10]; elles peuvent s'attacher également à caractériser le matériau abrasable qui recouvre la surface interne du carter [BLP11; SBL13].

D'autres investigations traitent le problème du point de vue de la dynamique d'ensemble et s'intéressent à l'impact des contacts sur la dynamique des rotors [Ehr69; Mus89]. La modélisation du contact y est moins fine car la description locale du système est simplifiée. La nature des contacts traités par ces investigations s'élargit à d'autres types de contact rotor-stator, dits sans aubages, pouvant apparaître entre les joints et l'arbre ou encore au niveau des paliers [Mus86].

En aéronautique, la recherche de meilleures performances passe également par le développement de designs plus légers. Cet allègement des composants du moteur conduit à des couplages entre les différents composants. Pour ces designs modernes, les concepteurs se confrontent aux limitations de la modélisation à deux niveaux, qui interdit notamment les couplages entre les vibrations des aubes et celles de l'arbre. Dans le cadre de ces travaux, nous nous intéressons spécifiquement aux contacts aubes-carter qui interviennent au niveau de la *soufflante* (ou *fan*). Il s'agit du premier étage aubagé du moteur, celui visible lorsque l'on monte dans un avion. Cette limite de la modélisation à deux niveaux est accrue pour l'étage aubagé considéré dans notre étude : c'est en effet au fan que se trouvent les aubes les plus longues du moteur, qui sont donc susceptibles d'interagir le plus avec la dynamique de ligne d'arbre.

L'objectif de ces travaux est donc de mieux comprendre les phénomènes en jeu, pour fournir les moyens de mieux prédire la stabilité d'un système propulsif, lors de contacts entre le sommet des aubes fan et le matériau abrasable qui recouvre la surface interne du carter fan. Afin de s'affranchir du verrou imposé par la modélisation à deux niveaux, la démarche proposée s'appuie sur une modélisation hybride qui

introduit de manière simplifiée une roue aubagée et un carter flexible à un modèle de ligne d'arbres.

Pour répondre à cette problématique, le mémoire se décompose en quatre chapitres.

Le premier chapitre présente le principe de fonctionnement des turboréacteurs et décrit les aspects théoriques permettant d'en étudier la dynamique dans le cadre linéaire. Les notions propres aux deux approches de la dynamique, y sont abordées : les spécificités de la dynamiques des rotors et celles de la dynamique des roues aubagées.

Le deuxième chapitre aborde plus spécifiquement la thématique du contact rotor-stator. Une synthèse bibliographique y est présentée en distinguant la phénoménologie des lignes d'arbres de celle des ensembles aubagés. Une fois l'étude placée dans le contexte bibliographique, les méthodes permettant d'introduire les effets non linéaires du contact au système d'équations sont présentées, pour décrire ensuite, les méthodes de résolution adaptées. Les techniques permettant d'étudier la stabilité locale des solutions obtenues y sont également évoquées.

Le troisième chapitre constitue le cœur du document. Il présente tout d'abord le modèle hybride simplifié sur lequel s'appuie la démarche : la formulation analytique et son comportement dans le cadre linéaire. L'implémentation du contact y est ensuite présentée, notamment la mise en place d'une gestion de contact dite *3D* permettant de compenser certaines des simplifications du modèle, pour recouvrer de la précision dans la détection des contacts et l'application des efforts associés. Le comportement du modèle lors de contacts aubes-carter est alors étudié en distinguant les analyses menées en supposant un contact permanent et celles autorisant l'intermittence des contacts.

Le dernier chapitre présente l'application industrielle de la démarche développée au chapitre III. Les enrichissements structuraux et la gestion de contact, définis et étudiés pour le modèle simplifié, sont implémentés au modèle de dynamique d'ensemble d'un système propulsif existant.

Chapitre I

Dynamique des machines tournantes

Notre étude se focalise sur les turboréacteurs qui assurent la propulsion des avions. Ce chapitre permettra d'en présenter le principe de fonctionnement et d'exposer les aspects théoriques fondamentaux permettant d'en étudier la dynamique dans le cadre linéaire. Une fois le système étudié décrit, la formulation générale de la dynamique d'un corps élastique en rotation sera développée. Puis les notions associées à différentes approches de la dynamique des turbomachines seront présentées : nous décrirons d'abord à travers un exemple simple, les spécificités de la dynamique des rotors, pour aborder ensuite les aspects propres à la dynamique des roues aubagées. Enfin, les modélisations hybrides qui associent les deux approches seront décrites.

Sommaire

1	Généralités sur les turboréacteurs	6
1.1	Principe de fonctionnement	6
1.2	Sources d'excitation dynamique	7
2	Dynamique d'un corps élastique en rotation	10
2.1	Cinématique d'une particule	11
2.2	Formulation des équations du mouvement	13
3	Dynamique des rotors	16
3.1	Éléments de base d'un modèle de rotor	16
3.2	Phénoménologie des rotors	18
4	Dynamique des ensembles aubagés	26
4.1	Effets de la rotation sur une aube seule	26
4.2	Propriétés des structures à symétrie cyclique	28
5	Dynamique couplée des rotors aubagés	33
6	Conclusion	35

1 Généralités sur les turboréacteurs

Les turboréacteurs d'avion sont apparus en Europe au début du 20^{ième} siècle. Coanda présente le premier avion à réaction au salon du Bourget de 1910, puis le français Guillaume dépose en 1921, le premier brevet concernant « la propulsion par réaction sur l'air ». Les premières véritables applications apparaissent dans les années 1930 avec les travaux de Frank Whittle en Angleterre et de Hans von Ohain en Allemagne. Ces premiers moteurs étaient munis de compresseurs centrifuges qui présentent l'inconvénient de nécessiter un moteur de grand diamètre. Les compresseurs axiaux, qui autorisent une section frontale plus restreinte, sont alors introduits par Franz en 1940 et les premiers turboréacteurs construits en série sont utilisés à la fin de la seconde guerre mondiale. Après la guerre, l'utilisation des turboréacteurs s'intensifie et s'étend à l'aviation civile; le premier vol commercial a lieu en 1952. Le développement des turboréacteurs se poursuit alors jusqu'à nos jours dans une recherche de meilleures performances et de réduction du niveau de bruit. Ce développement est marqué de deux ruptures technologiques majeures conduisant aux architectures actuelles. Dans les années 1960, apparaissent les moteurs dits *double corps* qui comportent deux rotors indépendants entraînés à des vitesses de rotation différentes. Puis, les années 1970 marquent l'apparition des architectures dites *double flux* qui consistent à séparer le flux d'air pour n'en enflammer qu'une partie et augmenter ainsi le débit de gaz tout en limitant la consommation de carburant.

Dans les paragraphes suivants, nous expliquerons brièvement le principe de fonctionnement d'un turboréacteur et en s'attachant à décrire l'architecture de type *double corps / double flux* dont notre étude fait l'objet. Puis, nous décrirons les divers types d'excitations auxquelles sont soumises ces structures.

1.1 Principe de fonctionnement

Le fonctionnement des turboréacteurs s'appuie sur le principe d'action-réaction : il s'agit d'accélérer une masse d'air pour créer une force de poussée qui, par réaction, va propulser l'avion. Toutes les architectures de turboréacteurs reposent sur les 3 mêmes étapes, à savoir : Compression - Combustion - Détente. Le flux d'air qui pénètre dans le moteur traverse d'abord un compresseur où sa pression et sa température sont accrues avant d'entrer dans la chambre de combustion. L'air comprimé y est mélangé à du carburant et le mélange s'enflamme. Les gaz produits dans la combustion sont alors détendus dans une turbine qui récupère une partie de l'énergie cinétique du flux pour entraîner le compresseur par l'intermédiaire de l'arbre central. Les gaz sont enfin éjectés à l'arrière du moteur pour produire la poussée. La force de poussée obtenue est le produit du débit massique des gaz et de la différence des vitesses d'entrée et de sortie.

Les étapes de compression et de détente sont assurés par des ensembles aubagés constitués d'un rotor comprenant un arbre tournant sur lequel sont fixées des aubages, et d'un stator constitué d'un carter pouvant comporter des aubages fixes appelés redresseurs. Dans les premières architectures de turboréacteurs, les par-

ties tournantes du compresseur et de la turbine sont solidaires; le moteur, qui ne comporte qu'un seul arbre tournant, est dit *simple corps*. Par la suite, des architectures comportant deux arbres sont développées et permettent d'augmenter les performances en séparant le compresseur en deux parties successives : la première dite *basse pression* puis l'autre dite *haute pression*. Les turboréacteurs *double corps* comprennent ainsi deux arbres : l'arbre *bp* sur lequel sont connectées les roues aubagées du compresseur *bp* et de la turbine *bp* et l'arbre *hp* qui comporte le compresseur et la turbine *hp*. Ces deux arbres concentriques, schématisés figure. I.1, tournent à des vitesses de rotations différentes, parfois même dans des directions opposées.

Le schéma présenté figure. I.1, comporte aussi une soufflante (fan) située en amont du compresseur *bp* et connectée à l'arbre *bp*. Ce composant est propre aux turboréacteurs dits *double flux*, pour lesquels le flux d'air entrant dans le moteur se divise en deux parties : le flux primaire et le flux secondaire. A la sortie de la soufflante, le flux primaire va entrer dans le compresseur *bp* puis *hp* pour ensuite suivre les étapes de combustion et détente décrites précédemment. Le flux secondaire va lui, traverser le moteur par sa périphérie pour être directement éjecté au niveau de la tuyère. A la poussée issue des étapes de Compression-Combustion-Détente, s'ajoute la poussée résultant du flux secondaire. Cette dernière est générée uniquement par le petit incrément de vitesse communiqué par la soufflante. L'architecture *double flux* permet de réduire la consommation de carburant et présente aussi l'avantage de réduire le niveau de bruit en noyant le jet primaire à la sortie de la tuyère.

Les moteurs *double corps* / *double flux* équipent la plupart des avions civils modernes pour lesquels environ 80% de la poussée est généré par le flux secondaire. Le taux de dilution ou By Pass Ratio (BPR) se définit comme le rapport entre le débit du flux secondaire et celui du flux primaire. Pour limiter la consommation des moteurs, il faut augmenter le taux de dilution tout en tenant compte des contraintes aérodynamiques et mécaniques. C'est pourquoi les moteurs actuels comportent une soufflante de grand diamètre (jusqu'à 3,1 m pour le GE90) dont les aubes sont particulièrement optimisées.

Lors du développement d'un turboréacteur, les ingénieurs doivent satisfaire la fonction principale du moteur, c'est-à-dire, de fournir la poussée nécessaire pour propulser l'avion. Il s'agit d'obtenir cette poussée, tout en limitant au maximum la consommation de carburant, et en respectant les réglementations en vigueur qui fixent des limites de bruit et de pollution. Le turboréacteur doit également être dimensionné pour résister à une grande diversité de chargements, dus à son propre fonctionnement ou liés à son environnement. Dans la section suivante, nous aborderons les principaux chargements qui conduisent à des vibrations dans le moteur.

1.2 Sources d'excitation dynamique

Les moteurs d'avions sont soumis à de multiples phénomènes vibratoires dont les origines sont diverses. Les principales sources de vibrations et les phénomènes associés sont abordés ici en dissociant les phénomènes d'origine aérodynamique de

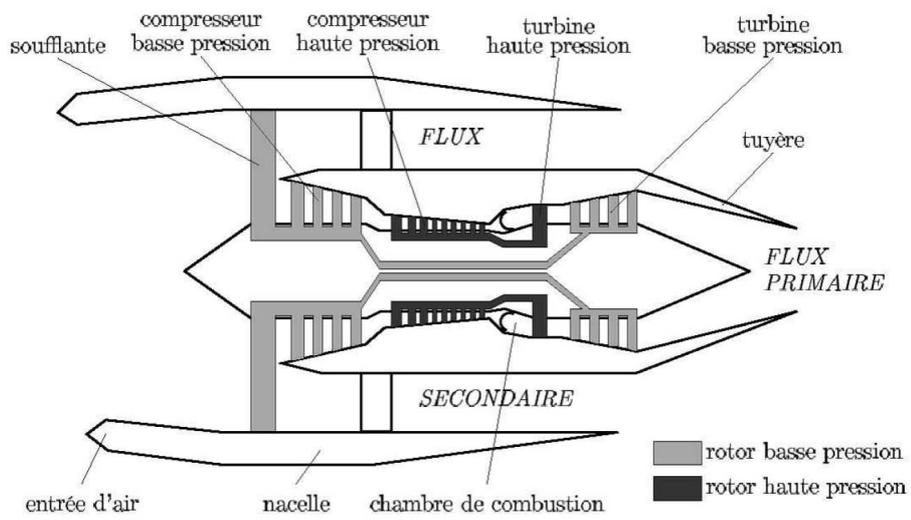


FIGURE I.1: Coupe schématique d'un turboréacteur *double corps / double flux*



FIGURE I.2: Le LEAP : turboréacteur civil de dernière génération

ceux d'origine mécanique.

1.2.1 Sources d'excitation aéroélastiques

L'aéroélasticité dans les turbomachines comporte deux problématiques majeures : les phénomènes synchrones, liés à la vitesse de rotation, et les phénomènes asynchrones.

Les phénomènes synchrones sont liés aux variations des caractéristiques de l'écoulement fluide. Un étage aubagé, fixe ou mobile, se trouve excité par le fluide qui le traverse et dont l'écoulement comporte des sillages générés par les obstacles situés en amont et en aval des aubages considérés. L'excitation est proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur multipliée par le nombre d'obstacles. Les aubes peuvent alors entrer en résonance si l'une de leurs fréquences propres coïncide avec une harmonique de l'excitation. Ces phénomènes sont, en général, correctement prédits et les étages aubagés sont dimensionnés pour éviter ces comportements liés aux régimes de fonctionnement moteur.

Les autres phénomènes aéroélastiques, asynchrones, sont moins bien maîtrisés. Les efforts aérodynamiques en jeu sont liés aux vibrations des aubes, d'où leur désignation de phénomènes auto-entretenus. Parmi ces phénomènes, le flottement fait l'objet de nombreuses recherches [HKT06]. Il s'agit d'une instabilité dynamique qui apparaît au voisinage d'une fréquence propre de la roue aubagée et durant laquelle les vibrations des aubes et les forces aérodynamiques s'auto-entretiennent et conduisent alors à des niveaux vibratoires incontrôlables.

Le phénomène de décollement tournant est également une source d'instabilité vibratoire d'origine aéroélastique. Il se caractérise par l'apparition de cellules d'écoulement décollé responsables de fortes différences de pression entre les différentes aubes d'une roue mobile et conduisant à des niveaux vibratoires importants. Le décollement tournant peut être le précurseur d'une instabilité plus grave appelée pompage. Le pompage se caractérise par l'apparition de fortes fluctuations de pressions pouvant conduire à une inversion globale du sens de l'écoulement. Ce phénomène instable est très énergétique et s'accompagne de fortes sollicitations mécaniques [RW96].

D'autres sources d'excitation sont aussi possibles, comme les phénomènes de résonance acoustiques [HS08] ou d'autres types de couplages multiphysiques.

1.2.2 Sources d'excitation mécaniques

Les efforts de balourd sont les sollicitations mécaniques principales des machines tournantes. Il s'agit des efforts d'inertie générés par la rotation de masses excentrées et non équilibrées du rotor. La présence de balourd conduit à une force d'excitation synchrone dont l'amplitude est proportionnelle à sa masse, son excentrement et au carré de la vitesse de rotation de l'arbre. Les sources de balourd sont variées et interviennent dès la fabrication du moteur où les erreurs d'usinage ou d'assemblage engendrent un balourd résiduel. Pour le minimiser, les constructeurs imposent des tolérances de fabrication très sévères et des équilibrages sont réalisés à différentes

étapes de montage. Le balourd peut aussi apparaître au cours de l'exploitation du moteur du fait du vieillissement et de l'érosion de certains composants. Enfin, certains éléments du rotor peuvent être endommagés lors de l'ingestion de corps étrangers tels que des grêlons ou des oiseaux. De tels événements peuvent causer des détériorations importantes et entraîner la perte d'une ou plusieurs aubes générant ainsi un balourd sévère. Une préoccupation supplémentaire s'ajoute alors pour dimensionner les carters de manière à prévenir le risque d'éjection de débris pouvant endommager l'avion. Lors de tels événements accidentels, l'alimentation du moteur concerné est automatiquement coupée. Néanmoins, les rotors continuent de tourner à faible vitesse à cause du flux d'air entrant. Un phénomène de *windmilling* peut alors apparaître lorsque l'effort de balourd persistant vient exciter un mode de l'aile [GE00].

Le contact rotor-stator est une autre source d'excitation dans les turbomachines. Il intervient lorsqu'un contact continu ou intermittent s'établit entre une partie tournante et fixe du moteur. Ces contacts peuvent apparaître à différents endroits du moteur et générer des phénomènes très divers dont la caractérisation prend une importance grandissante du fait de l'amélioration des performances obtenue lorsque les jeux entre parties fixes et tournantes sont réduits. Ces phénomènes, au cœur de ce projet de thèse, seront abordés plus en détail dans le chapitre suivant.

D'autres sollicitations d'origines mécaniques peuvent également être mentionnées, notamment les effets d'inerties lors des manœuvres de l'avion qui amènent des vibrations transitoires de basses fréquences venant se moduler avec les vibrations synchrones du balourd [Sak+95], [Oka+95]. Enfin les supports des rotors peuvent aussi être la source d'excitations dynamiques : les roulements à billes peuvent générer des excitations paramétriques [TGP00] et les paliers hydrodynamiques donnent lieu à des phénomènes vibratoires spécifiques [Chi93].

Cette section nous a permis d'introduire les principes de fonctionnement d'un turboréacteur et de décrire brièvement les enjeux de conception qui lui sont associés. Nous allons à présent, détailler la formulation des équations et les spécificités de modélisation propres aux systèmes en rotation.

2 Dynamique d'un corps élastique en rotation

Dans cette section sont décrites les étapes conduisant à l'obtention de l'équation matricielle de la dynamique d'un solide élastique en rotation [Gmu07 ; GR93]. Tout d'abord, nous écrirons de façon rigoureuse la cinématique d'une particule d'un solide élastique en rotation qui conduit aux formes continues des énergies du solide. L'équation matricielle sera alors obtenue en s'appuyant sur le principe de Hamilton et la discrétisation du champ de déplacement.

2.1 Cinématique d'une particule

Considérons un corps déformable de volume Ω et de frontière $\partial\Omega$ par rapport à un repère fixe inertiel orthonormé $\mathfrak{R}_f = (O, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$. Dans sa configuration de référence (voir figure I.3 (a)), une particule P_{ref} du solide est décrite dans \mathfrak{R}_f par le vecteur-lieu $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$. À l'instant initial $t = 0$ (voir figure I.3 (b)), la particule est située au point P_0 de vecteur-position :

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{I.1})$$

où $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \{u_{01}, u_{02}, u_{03}\}^T$ est le vecteur-déplacement initial.

À un instant $t > 0$ (voir figure I.3 (c)) la particule est déplacée par un mouvement et une déformation appliqués au solide. Elle se situe alors au point P de vecteur-lieu $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \{y_1, y_2, y_3\}^T$ dans le repère \mathfrak{R}_f .

La position de la particule peut également être identifiée dans un repère orthonormé non galiléen lié au solide : $\mathfrak{R}_m = (\bar{O}, \bar{\mathbf{X}}_1, \bar{\mathbf{X}}_2, \bar{\mathbf{X}}_3)$ et confondu, au temps $t = 0$, au repère inertiel \mathfrak{R}_f . Dans ce référentiel mobile, le vecteur position de P peut s'écrire :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2})$$

Où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ est le vecteur déplacement au temps t .

Le changement du repère fixe \mathfrak{R}_f au repère lié au solide \mathfrak{R}_m se caractérise par une translation de l'origine du repère : $\mathbf{s}(t) = \{s_1, s_2, s_3\}^T$ et une rotation autour d'un axe quelconque passant par \bar{O} et dont la vitesse angulaire est caractérisée dans le repère mobile par $\boldsymbol{\omega}(t) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}^T$.

Le changement de repère est caractérisé par la matrice de passage $\mathbf{R}(t)$ dont les colonnes sont les vecteurs directeurs du repère mobile \mathfrak{R}_m projetés dans le repère inertiel \mathfrak{R}_f . La matrice de passage est orthogonale : $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$.

Le vecteur lieu $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ du point P dans le repère inertiel a pour expression :

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t)[\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \quad (\text{I.3})$$

Pour décrire le comportement dynamique de la particule, il faut également connaître sa vitesse définie par la dérivée temporelle du vecteur $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$:

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{R}}(t)(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{u}} \quad (\text{I.4})$$

où $\dot{\mathbf{R}}(t)$, la dérivée temporelle de la matrice de passage est définie par :

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\Omega} \text{ avec } \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.5})$$

$\boldsymbol{\Omega}$ est la matrice antisymétrique englobant les composantes du tenseur des vitesses de rotation $\boldsymbol{\omega}$ dans le repère lié au solide \mathfrak{R}_m

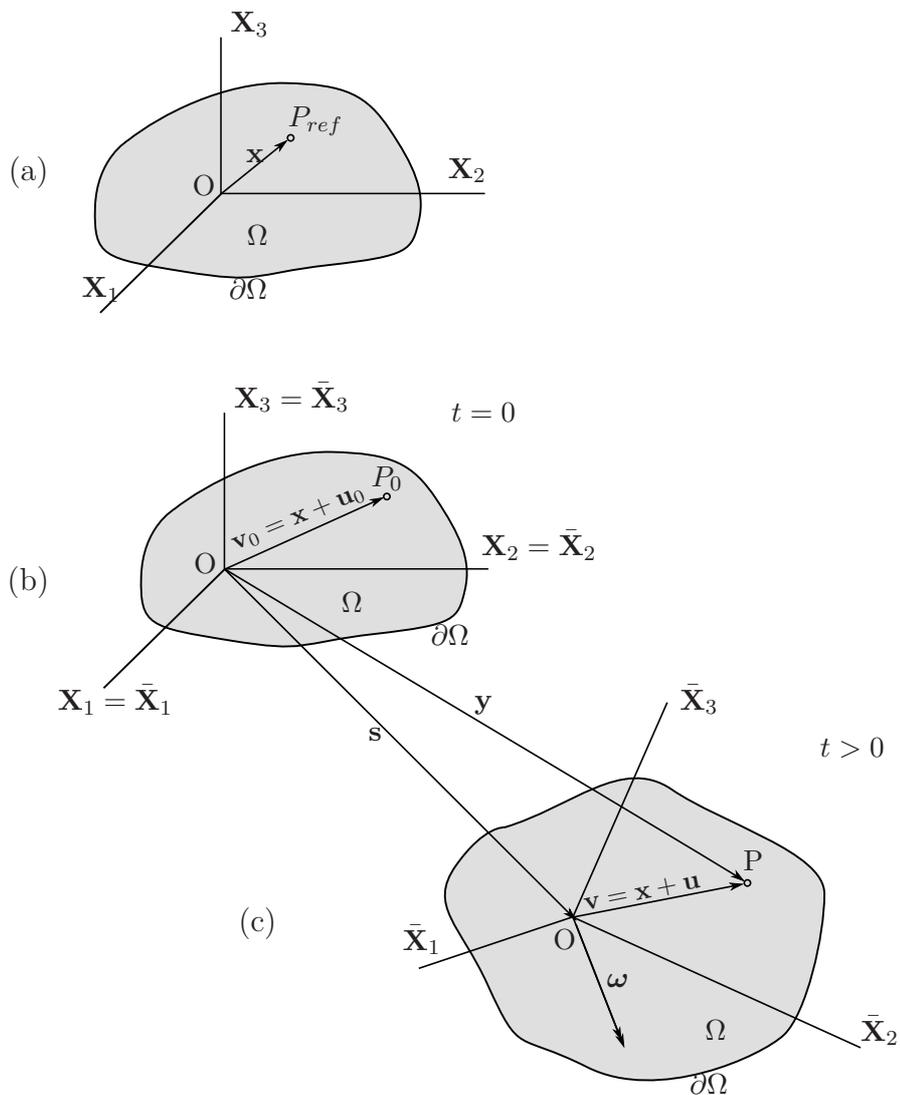


FIGURE I.3: Configurations d'un système continu : (a) Configuration de référence ; (b) Configuration initiale ; (c) Configuration déformée. [Gmu07]

2.2 Formulation des équations du mouvement

La formulation faible des équations du mouvement s'appuie sur le principe variationnel d'Hamilton exprimant la stationnarité de la fonctionnelle énergétique suivante :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{U}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta (\mathcal{W} - \mathcal{F}) dt = 0 \quad (\text{I.6})$$

avec \mathcal{T} l'énergie cinétique, \mathcal{U} le potentiel de déformation, \mathcal{W} le travail des forces non conservatives et \mathcal{F} la fonction de dissipation.

L'énergie cinétique est exprimée dans le repère inertiel \mathfrak{R}_f par :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{y}}^T \dot{\mathbf{y}} d\Omega \quad (\text{I.7})$$

En introduisant l'expression (I.4), on obtient l'énergie cinétique en fonction des déplacements exprimés dans le repère corotationnel \mathfrak{R}_m :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{s}}^T \dot{\mathbf{s}} + 2\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

En faisant l'hypothèse d'un matériau élastique soumis à de petites perturbations, l'énergie potentielle de déformation élastique peut s'écrire :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \frac{1}{2} \int (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{E} \nabla \mathbf{u} d\Omega \quad (\text{I.9})$$

où \mathbf{E} est le tenseur d'élasticité linéaire du matériau qui exprime la loi de comportement reliant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ au tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{I.10})$$

L'hypothèse des petites déformations permet de considérer une relation linéaire entre déformations et déplacements :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.11})$$

où ∇ est l'opérateur différentiel suivant :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.12})$$

Le travail des forces extérieures associés aux efforts volumiques \mathbf{f}_v et aux efforts surfaciques \mathbf{f}_s s'exprime par :

$$\mathcal{W} = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_s d(\partial\Omega) \quad (\text{I.13})$$

Enfin, en adoptant l'hypothèse d'un amortissement visqueux, la fonction de dissipation s'écrit :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T \mathbf{E} \nabla \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad (\text{I.14})$$

Grâce aux expressions des énergies qui viennent d'être définies, nous pouvons écrire les équations du mouvement en formulation continue. Or, dans de nombreux cas, la résolution de la forme continue des équations est difficile et une démarche de discrétisation est adoptée pour faciliter la résolution. Nous nous appuyons ici sur une démarche de type Rayleigh-Ritz qui consiste à approcher le champ de déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ par une base de fonctions de formes cinématiquement admissibles :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{q}(t) \quad (\text{I.15})$$

où $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ est la matrice des fonctions de forme et $\mathbf{q}(t)$ est le vecteur des coordonnées généralisées qui constituent les nouvelles inconnues du problème.

L'application du principe d'Hamilton revient alors à vérifier les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial (\mathcal{T} - \mathcal{U})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (\text{I.16})$$

Les formulations discrètes des énergies sont obtenues en introduisant I.15 dans les formes continues définies précédemment :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G} \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{N} \mathbf{q} \\ & - \mathbf{q}^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) \, d\Omega + \dot{\mathbf{q}}^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) \, d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{s}}^T \dot{\mathbf{s}} + 2\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (\text{I.18})$$

$$\mathcal{W} = \mathbf{q}^T \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f}_v \, d\Omega + \mathbf{q}^T \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f}_s \, d(\partial\Omega) \quad (\text{I.19})$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{I.20})$$

L'application des équations de Lagrange conduit alors à l'équation matricielle régissant le comportement dynamique du système exprimé dans le repère mobile \mathfrak{R}_m :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N} + \mathbf{P}) \mathbf{q} = \mathbf{r} + \mathbf{F} \quad (\text{I.21})$$

où \mathbf{M} est la matrice de masse, \mathbf{D} la matrice d'amortissement visqueux et \mathbf{K} la matrice de raideur élastique. À ces matrices classiques de la dynamique des systèmes « non tournants », s'ajoutent les matrices provenant de la rotation : \mathbf{G} est la matrice

gyroscopique, \mathbf{N} la matrice d'assouplissement centrifuge et \mathbf{P} la matrice d'accélération angulaire. \mathbf{r} est le vecteur des excitations dues à l'entraînement du système de coordonnées \mathfrak{R}_m et \mathbf{F} le vecteur des excitations par les efforts volumiques et surfaciques. Le détail de chacun de ces éléments est donné par les expressions suivantes :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.22})$$

$$\mathbf{D} = \int_{\Omega} \eta_b (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{E} \nabla \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.23})$$

$$\mathbf{G} = 2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.24})$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{E} \nabla \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.25})$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.26})$$

$$\mathbf{N} = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{H} \, d\Omega \quad (\text{I.27})$$

$$\mathbf{r} = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T [\mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}] \, d\Omega \quad (\text{I.28})$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f}_v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f}_s \, d(\partial\Omega) \quad (\text{I.29})$$

Notons que les matrices \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} et \mathbf{N} sont symétriques tandis que \mathbf{G} et \mathbf{P} sont antisymétriques. Par la suite, nous ferons l'hypothèse de vitesse de rotation constante supprimant ainsi la matrice \mathbf{P} du système d'équations.

Nous avons décrit ici les étapes conduisant à la formulation générale, tridimensionnelle de la dynamique d'un solide élastique en rotation. Ces expressions mathématiques s'adaptent donc à toutes les structures tournantes. Or, en modélisation mécanique, il est souvent judicieux, voire indispensable, d'identifier sur la structure étudiée, les directions privilégiées autorisant certaines hypothèses simplificatrices. Ces formulations adaptées à la géométrie et aux propriétés mécaniques du système étudié permettent d'une part, de limiter la taille des modèles et faciliter la résolution. D'autre part, elles permettent de sélectionner et mettre en évidence certains phénomènes pour les comprendre plus aisément, avant d'élargir à des modèles plus représentatifs des comportements réels d'une machine industrielle. Dans ce contexte, deux domaines d'analyse du comportement dynamique des machines tournantes se distinguent :

- la *dynamique des rotors* qui se caractérise par l'hypothèse de disques rigides et s'intéresse donc à la dynamique des arbres, notamment à leurs vibrations de flexion.
- la *dynamique des ensembles aubagés* qui néglige la dynamique d'arbre pour s'intéresser aux vibrations dans les disques et les aubages.

Ces applications « restreintes » seront abordées dans les sections suivantes.

3 Dynamique des rotors

L'étude du comportement dynamique des rotors débute à la fin du 19^{ème} siècle. Les machines tournantes, dont les vitesses de rotations croissent du fait des avancées technologiques de la révolution industrielle, nécessitent alors une meilleure compréhension de leur phénoménologie. Les premiers modèles mathématiques sont connus sous le nom de rotor de Jeffcott-Laval [Jef19] et Stodola-Green [Sto27; Gre48]. Le premier est constitué d'un arbre flexible sans masse supporté par des paliers rigides et comportant un disque rigide en son milieu. Le second est un rotor en port à faux constitué d'un arbre flexible encastré à l'une de ses extrémités et connecté à un disque rigide à l'autre extrémité. Ces modèles de base ont par la suite été largement enrichis mais leurs architectures élémentaires sont encore couramment utilisées aujourd'hui [KPW03; IH10; ZWE14]. De plus, même lorsqu'ils sont plus élaborés, pour être plus représentatifs des machines industrielles, certains modèles de dynamique des rotors conservent les mêmes éléments constitutifs, à savoir : des poutres flexibles représentatives des arbres et des masses ponctuelles modélisant les disques rigides, auxquels s'ajoutent des liens visco-élastiques représentatifs des suspensions. Dans cette section, nous décrirons d'abord la mise en équation de ces éléments constitutifs. Puis, en s'appuyant sur un modèle élémentaire à 2 ddls, nous décrirons les phénomènes propres à la dynamique des rotors depuis les deux repères d'études possibles.

3.1 Éléments de base d'un modèle de rotor

Les principaux organes constitutifs d'un rotor sont : l'arbre, les disques et les paliers. En s'appuyant sur la démarche générale décrite dans la section précédente, nous allons exprimer dans un repère inertiel, les énergies associées à ces différents organes [LF98; LF96].

L'arbre est modélisé par une poutre élancée de section circulaire en rotation autour de sa fibre neutre. Seules ses vibrations transverses sont prises en compte : le modèle ne comporte pas de degré de liberté associé à la torsion ou à la traction-compression dans la direction axiale. Les disques sont supposés infiniment rigides et les paliers sont modélisés par des éléments de raideur et d'amortissement ponctuels.

3.1.1 Disque

Les disques rigides sont caractérisés uniquement par leur énergie cinétique. Nous définissons un repère inertiel $R_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ et un repère $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ attaché au disque. Le passage du repère $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au repère $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ est assuré par trois rotations successives : Ωt , ψ et ϕ .

Ωt représente la rotation propre de l'arbre autour de l'axe \mathbf{Z} , dit *axe moteur*. La vitesse de rotation de l'arbre Ω est constante. ψ et ϕ sont des petites rotations associées aux fléchissements de l'arbre dans les directions transverses à l'axe moteur. Ces angles et les repères intermédiaires $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ et $(\mathbf{x}_{ii}, \mathbf{y}_{ii}, \mathbf{z}_{ii})$ sont schématisés

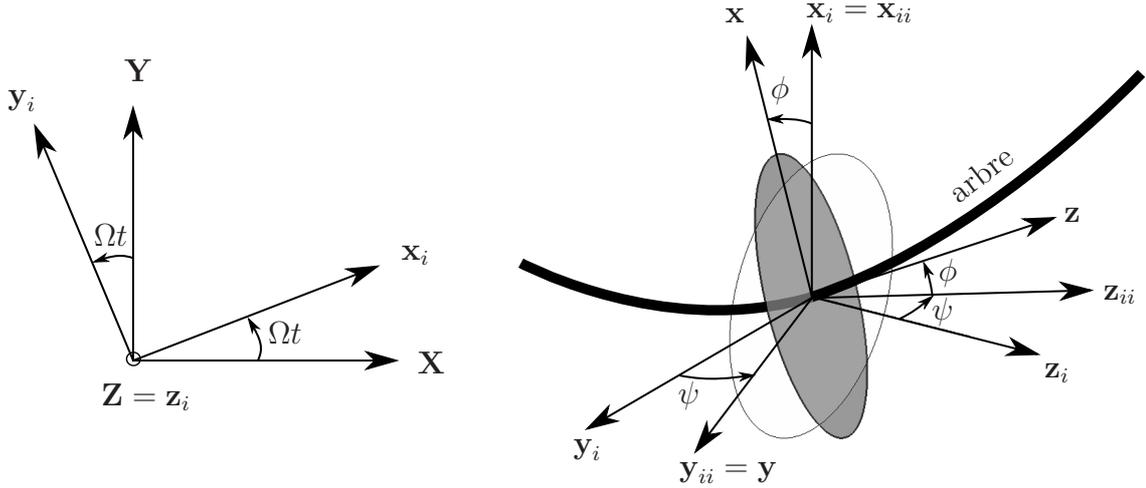


FIGURE I.4: Rotations du disque et repères associés

figure I.4.

Le vecteur de vitesse instantanée de rotation du repère R par rapport au repère R_0 s'écrit :

$$\boldsymbol{\omega}_{R/R_0} = \Omega \mathbf{Z} + \dot{\psi} \mathbf{x}_i + \dot{\phi} \mathbf{y} \quad (\text{I.30})$$

En projetant ses composantes dans le repère R , il devient :

$$\boldsymbol{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \cos \phi - \Omega \sin \phi \cos \psi \\ \dot{\phi} + \Omega \sin \psi \\ \Omega \cos \psi \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (\text{I.31})$$

Outre ces rotations, la flèche de l'arbre supportant le disque est introduite grâce aux déplacements u et v respectivement suivant les directions \mathbf{X} et \mathbf{Y} . L'énergie cinétique du disque s'obtient alors en ajoutant l'énergie de translation à l'énergie de rotation :

$$\mathcal{T}_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \frac{1}{2} (I_{d,d} (\omega_x^2 + \omega_y^2) + I_{d,p} \omega_z^2) \quad (\text{I.32})$$

où $I_{d,d}$ et $I_{d,p}$ désignent respectivement les inerties diamétrale et polaire du disque. En introduisant les composantes issues de l'équation (I.31) et en supposant les rotations ψ et ϕ , suffisamment petites pour approcher leurs fonctions trigonométriques, il vient :

$$\mathcal{T}_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \frac{1}{2} I_{d,d} (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} I_{d,p} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \phi) \quad (\text{I.33})$$

Les premiers termes proportionnels à la masse et à l'inertie diamétrale constituent l'expression classique d'un disque « non tournant ». Le terme $\frac{1}{2} I_{d,p} \Omega^2$ est constant et n'a pas d'effet sur les équations du mouvement. Le terme $\Omega \dot{\psi} \phi$ représente les effets gyroscopiques qui couplent les basculements du disque dans les deux directions transverses à l'axe moteur.

3.1.2 Arbre

Le disque dont l'expression de l'énergie cinétique vient d'être développée, possède la même cinématique que chacune des sections droites d'un arbre. L'expression de l'énergie cinétique de l'arbre est donc construite de la même façon que (I.33) :

$$\mathcal{T}_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dz + \frac{\rho I_{s,d}}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2) dz + \rho I_{s,p} \Omega \int_0^L \dot{\psi} \dot{\phi} dz + \frac{\rho I_{s,p} L \Omega^2}{2} \quad (\text{I.34})$$

avec ρ la masse volumique de l'arbre, L sa longueur, S l'air de sa section droite et $I_{s,d}$ et $I_{s,p}$ les inerties diamétrales et polaires de sa section droite.

On retrouve la même distribution des termes que dans l'équation du disque (I.33). Les deux premières intégrales sont les expressions classiques d'une poutre en flexion « non tournante » et la troisième intégrale introduit les effets gyroscopiques. Le dernier terme est constant et n'est pas pris en compte dans l'équation du mouvement.

Le potentiel et la fonction de dissipation associées aux déformations de l'arbre sont données par :

$$\mathcal{U}_s = \frac{EI_{s,d}}{2} \int_0^L \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 \right) dz \quad (\text{I.35})$$

$$\mathcal{F}_s = \frac{\eta_s EI_{s,d}}{2} \int_0^L \left(\left(\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial z^2} \right)^2 \right) dz + \frac{\eta_s EI_{s,d} \Omega}{2} \int_0^L \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial z} dz \quad (\text{I.36})$$

La rotation propre de l'arbre n'a pas d'effet sur le potentiel de déformation de l'arbre car il est circulaire et isotrope, mais introduit des termes de circulation liés à l'amortissement visqueux.

3.1.3 Palier

La contribution des paliers peut s'exprimer en terme d'énergie de déformation et de fonction de dissipation. Nous supposons ici que les paliers sont alimentés uniquement en translation et connectés à un élément stator comportant les mêmes degrés de liberté.

$$\mathcal{U}_p = \frac{1}{2} \left(k_{xx}(u_1 - u_2)^2 + k_{yy}(v_1 - v_2)^2 \right) \quad (\text{I.37})$$

$$\mathcal{F}_p = \frac{1}{2} \left(c_{xx}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)^2 + c_{yy}(\dot{v}_1 - \dot{v}_2)^2 \right) \quad (\text{I.38})$$

où k_{xx} et k_{yy} sont les coefficients de raideur du palier dans les directions \mathbf{X} et \mathbf{Y} , c_{xx} et c_{yy} ses coefficients d'amortissement visqueux. Notons que les termes croisés : k_{xy} et k_{yx} sont ici écartés. $\mathbf{u}_1 = \{u_1, v_1\}^T$ représente le déplacement du rotor à l'abscisse z_p du palier et $\mathbf{u}_2 = \{u_2, v_2\}^T$ représente le déplacement du stator en regard.

3.2 Phénoménologie des rotors

Pour présenter les phénomènes spécifiques de la dynamique des rotors, nous nous appuyerons sur le modèle élémentaire formulé dans [LF98]. Le modèle schématisé

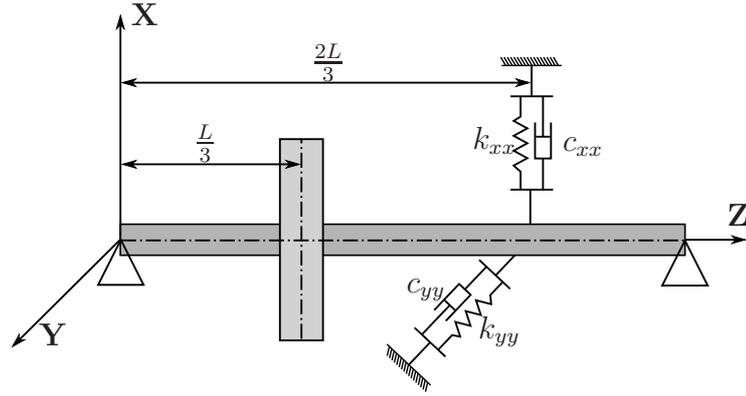


FIGURE I.5: Modèle de rotor élémentaire [LF98]

figure I.5, comporte un arbre flexible en appui aux deux extrémités, un disque et un palier visco-élastique. Pour simplifier les écritures, nous supposons ici que la masse de l'arbre est négligeable vis-à-vis de celle du disque.

L'équation du mouvement est obtenue en développant les expressions (I.33) à (I.38). Les déplacements $u(z, t)$ et $v(z, t)$ dans les directions \mathbf{X} et \mathbf{Y} , sont discrétisés par la fonction de déplacement $f(z)$ décrivant le premier mode de flexion d'une poutre en flexion en condition appuyée-appuyée.

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= f(z)q_1(t) \\ v(z, t) &= f(z)q_2(t) \end{aligned} \right\} \text{ avec } f(z) = \sin \frac{\pi z}{L} \quad (\text{I.39})$$

q_1 et q_2 sont les coordonnées généralisées du système dans le repère fixe.

Les pentes ψ et ϕ associées aux fléchissements de l'arbre sont exprimées grâce aux hypothèses d'Euler-Bernoulli :

$$\left. \begin{aligned} \psi(z, t) &= -\frac{\partial v}{\partial z} = -f'(z)q_2(t) \\ \phi(z, t) &= \frac{\partial u}{\partial z} = f'(z)q_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.40})$$

Après application de la formule de Lagrange, la formulation matricielle des équations du mouvement dans le repère fixe peut s'écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{C})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{I.41})$$

avec $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}^T$ le vecteur des coordonnées généralisées du système dans le repère fixe. \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{G} , \mathbf{K} , \mathbf{C} représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement visqueux, gyroscopique, de raideur élastique et de circulation de l'amortissement. Leurs expressions sont détaillées ci-dessous :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \text{ avec } m = \frac{3m_d}{4} + \frac{I_{d,d}\pi^2}{4L^2} \quad (\text{I.42})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_m + c_{f1} & 0 \\ 0 & c_m + c_{f2} \end{bmatrix} \text{ avec } c_m = \frac{\eta_s E I_{s,d} \pi^4}{2L^3}; c_{f1} = \frac{3\pi^4 c_{xx}}{4L^4}; c_{f2} = \frac{3\pi^4 c_{yy}}{4L^4} \quad (\text{I.43})$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -a\Omega \\ a\Omega & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } a = \frac{I_{d,p} \pi^2}{4L^2} \quad (\text{I.44})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_s + k_{p1} & 0 \\ 0 & k_s + k_{p2} \end{bmatrix} \text{ avec } k_s = \frac{\pi^4 E_s I_{s,d}}{2L^3}; k_{p1} = \frac{3\pi^4 k_{xx}}{4L^4}; k_{p2} = \frac{3\pi^4 k_{yy}}{4L^4}; \quad (\text{I.45})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega c_m \\ \Omega c_m & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.46})$$

L'équation (I.41) décrit le comportement dynamique du système dans le repère fixe, mais nous pouvons aussi choisir de formuler l'équation du système dans le repère mobile $R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Ce choix de repère d'étude est généralement dicté par les dissymétries du système étudié. En effet, la présence de dissymétries dans le repère fixe (paliers anisotropes par exemple) conduit, dans le repère mobile, à l'apparition de termes périodiques dépendant du temps ce qui rend le système plus compliqué à traiter. Inversement, lorsque la structure présente des dissymétries mobiles, la modélisation sera faite dans le repère mobile pour éviter les termes périodiques qui seraient obtenus dans le repère fixe. Enfin, lorsque le rotor est axisymétrique, son comportement pourra être décrit indifféremment dans l'un ou l'autre des repères. Pour présenter ici les particularités de chacun des repères, nous supposons donc par la suite que le modèle élémentaire est parfaitement axisymétrique ($k_{xx} = k_{yy}$ et $c_{xx} = c_{yy}$) et décrivons en parallèle les deux modélisations possibles.

On note ainsi $\mathbf{q}^* = \{q_1^*, q_2^*\}^T$ le vecteur des degrés de liberté du modèle dans le repère mobile. La formulation matricielle des équations du mouvement dans ce repère peut s'écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^* + (\mathbf{D} + \mathbf{G}^*)\dot{\mathbf{q}}^* + (\mathbf{K} + \mathbf{C}^* + \mathbf{N}^*)\mathbf{q}^* = \mathbf{0} \quad (\text{I.47})$$

Les matrices issues ou altérées par le changement de repère sont marquées d'une étoile. Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{D} et \mathbf{K} , indépendantes de la rotation, ne sont pas affectées par la transposition du système dans le repère mobile. Les matrices \mathbf{G}^* et \mathbf{C}^* et la matrice d'assouplissement centrifuge \mathbf{N}^* s'écrivent :

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} 0 & -(a - 2m)\Omega \\ (a - 2m)\Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.48})$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 0 & \Omega c_f \\ -\Omega c_f & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.49})$$

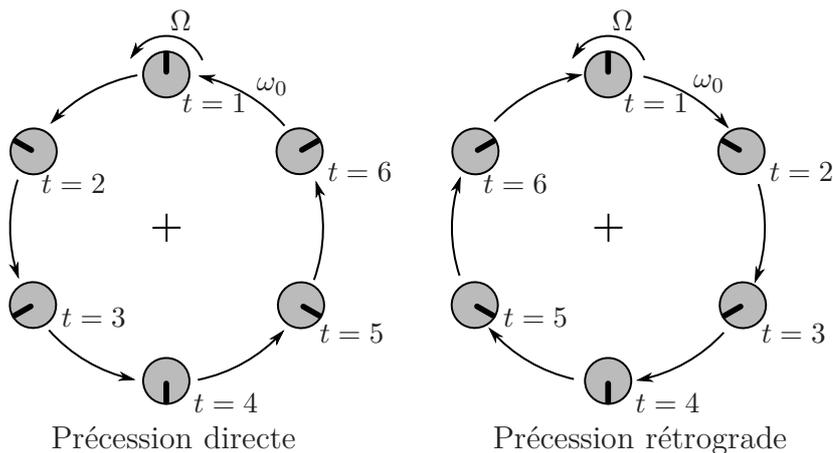


FIGURE I.6: Schéma des directions de précessions possibles. Ω décrit la vitesse de rotation de l'arbre et ω_0 est la pulsation propre du mode concerné [SPW05]

$$\mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} (a-m)\Omega^2 & 0 \\ 0 & (a-m)\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.50})$$

Notons que les matrices de \mathbf{C} et \mathbf{C}^* (I.46) et (I.49) illustrent la circulation de l'amortissement observé depuis chacun des repères. Dans le repère mobile, l'amortissement des paliers c_f est vu comme l'amortissement tournant tandis que, dans le repère fixe, c'est l'amortissement interne de l'arbre c_m .

Les expressions matricielles des équations du mouvement sont définies dans les deux repères. Nous pouvons à présent, nous intéresser aux propriétés modales du système tournant.

Les modes propres d'un système en rotation sont complexes et deux à deux conjugués [Gmu07; Chi93; Mus05]. Ces propriétés proviennent des termes gyroscopiques qui couplent les déplacements dans les deux plans transverses à l'axe moteur. Les modes propres complexes conjugués peuvent alors être associés pour obtenir deux types de modes qualifiés de *direct* ou *rétrograde*. Ils se caractérisent par un mouvement de précession dans un sens identique ou contraire à la rotation de l'arbre. Ces mouvements sont schématisés figure I.6 pour une section droite de l'arbre.

Les termes gyroscopiques affectent aussi les fréquences propres de ces modes qui dépendent alors de la vitesse de rotation du système. Les fréquences propres sont donc généralement tracées dans un graphique qui décrit leur évolution en fonction de la vitesse de rotation Ω : le diagramme de Campbell. Les diagrammes tracés dans le repère fixe et mobile sont présentés figure I.7, ils sont obtenus pour le jeu de paramètres suivant : $m = 1$, $k_s = 0.5$, $k_p = 0.5$, $a = 0.5$, $c_f = 0.1$ et $c_m = 0$.

A vitesse nulle, le système étant parfaitement axisymétrique, il existe une pulsation propre double associée à des déformées modales identiques dans chacun des plans orthogonaux incluant l'axe moteur. Lorsque l'arbre tourne, les forces gyroscopiques « ouvrent » les pulsations propres et séparent les modes pour donner naissance aux modes rétrograde et direct. Dans le repère fixe (diagramme de gauche

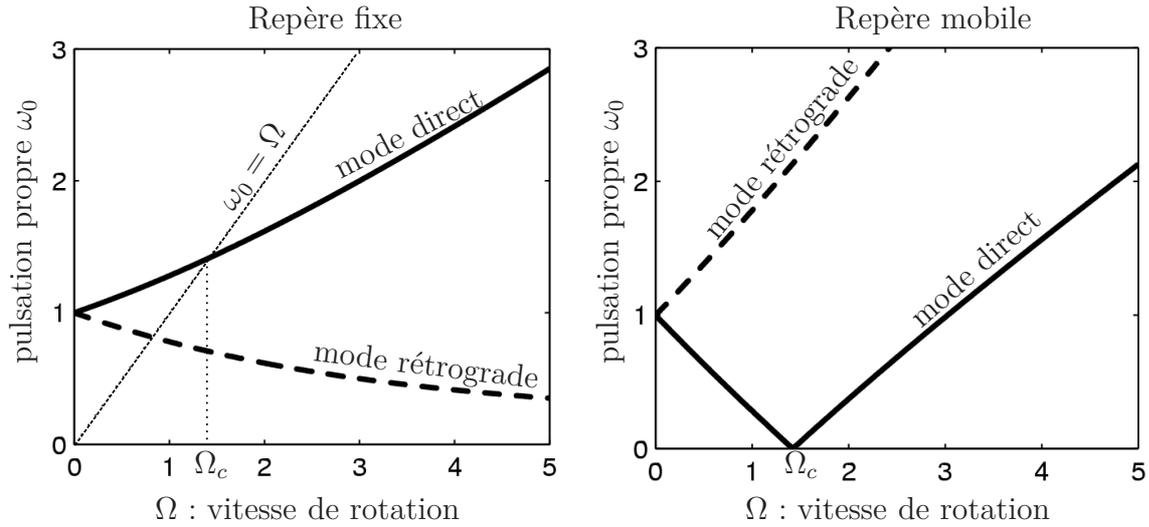


FIGURE I.7: Diagrammes de Campbell obtenus dans chacun des repères

de figure I.7), la pulsation propre du mode direct croît avec la vitesse rotation : le mode direct est rigidifié par les effets gyroscopiques tandis que le mode rétrograde est assoupli. Ces effets gyroscopiques seront d'autant plus importants que l'inertie polaire du système tournant est grande (voir l'expression du terme d'inertie a dans l'équation (I.44)). Dans le repère mobile, l'interprétation est inversée du fait de la rotation de l'observateur : les pulsations des modes rétrogrades sont translatées de Ω par rapport au repère fixe et les pulsations des modes directs sont translatées de $-\Omega$.

Les diagrammes de Campbell constituent un outil de base pour analyser le comportement dynamique du système tournant et, en particulier, la réponse à une sollicitation harmonique de type *balourd*. Comme nous l'avons évoqué dans la section I.1.2, les efforts synchrones de balourd sont les sollicitations mécaniques principales des turbomachines.

En reportant la droite d'excitation synchrone ($\omega_0 = \Omega$) sur le diagramme de Campbell, il est possible de détecter la vitesse de rotation pour laquelle la fréquence d'excitation synchrone coïncide avec la fréquence propre de l'un des modes. A ce régime, dénommé *vitesse critique*, le mode correspondant pourra résonner et conduire à des déformations importantes. Notons que dans le cas de structures linéaires et parfaitement symétriques, seul le mode direct répond à une excitation synchrone.

Pour observer l'effet de cette excitation depuis chacun des repères, reprenons le modèle de rotor élémentaire schématisé figure I.5 et développé dans [LF98]. Dans le repère fixe, l'expression de l'effort de balourd associé à la masse m_b distante de e de l'axe de rotation est de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = m_b e \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos(\Omega t + \alpha) \\ \sin(\Omega t + \alpha) \end{Bmatrix} \quad (\text{I.51})$$

où α est la position angulaire du balourd dans le plan du disque. Les composantes du vecteur des efforts de balourd appliqués en $z = L/3$ sont alors projetées sur les

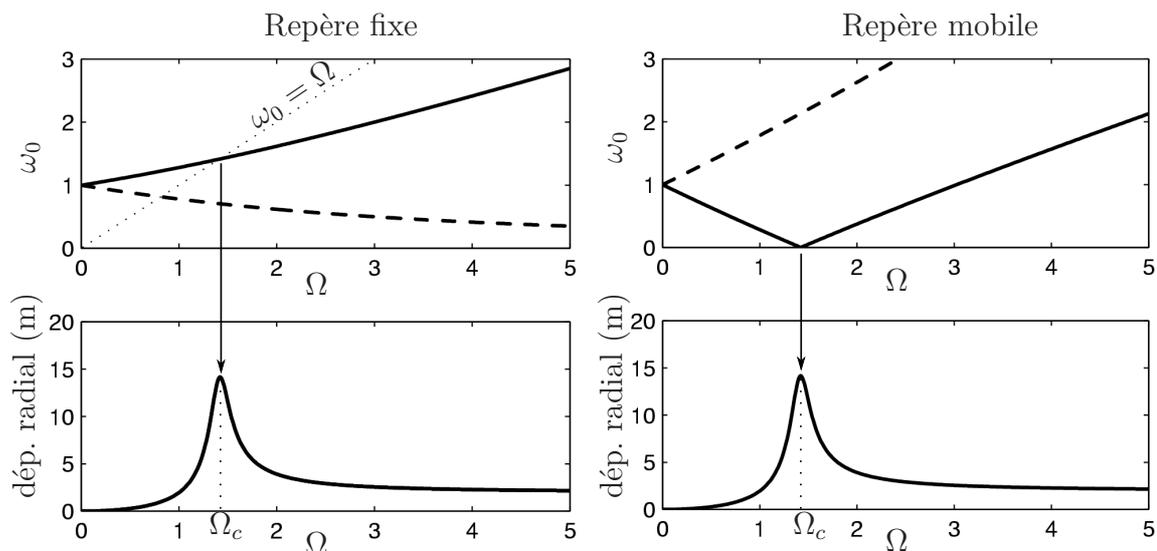


FIGURE I.8: Diagramme de Campbell (en haut) et réponse à balourd (en bas) dans les repères fixes (à gauche) et mobile (à droite)

degrés de liberté généralisés (q_1, q_2) et la réponse à balourd est obtenue en résolvant l'équation suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{C})\mathbf{q} = f\left(\frac{L}{3}\right) m_b e \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos(\Omega t + \alpha) \\ \sin(\Omega t + \alpha) \end{Bmatrix} \quad (\text{I.52})$$

La résolution peut alors être menée en s'appuyant sur le principe de superposition : le système étant linéaire, la réponse vibratoire sera de la même forme que l'excitation.

Depuis le repère mobile, les efforts de balourd, synchrones de la rotation de l'arbre, sont vus comme des efforts statiques :

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = m_b e \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (\text{I.53})$$

Ainsi, la réponse à balourd dans le repère mobile est obtenue en résolvant l'équation statique suivante :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{C}^* + \mathbf{N}^*)\mathbf{q}^* = f\left(\frac{L}{3}\right) m_b e \Omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (\text{I.54})$$

Les réponses obtenues dans chacun des repères sont tracées en regard de chacun des diagrammes de Campbell dans la figure I.8. Le déplacement radial tracé en fonction du régime, représente le rayon de la précession directe et circulaire de l'arbre sous l'effet du balourd. La réponse obtenue contient un seul pic qui correspond à la résonance du mode direct. Enfin, les réponses obtenues dans chacun des repères sont parfaitement identiques ce qui illustre l'équivalence des représentations en repère fixe et mobile pour un système axisymétrique.

Intéressons-nous maintenant à l'effet des dissymétries sur le comportement dynamique des systèmes tournants, en commençant par l'anisotropie des supports. Le

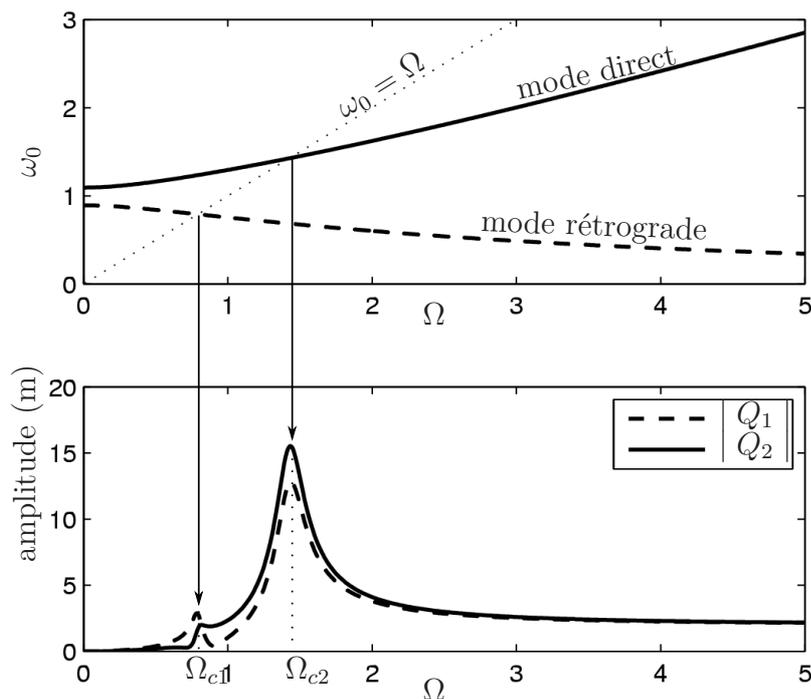


FIGURE I.9: Diagramme de Campbell et réponse à balourd du modèle comportant un support-palier anisotrope

modèle précédent est repris, en apportant une dissymétrie de la raideur du support-palier : $k_{p1} = 0.3$ et $k_{p2} = 0.7$. Le comportement sera alors étudié dans le repère fixe pour s'affranchir des termes périodiques qui proviendraient de la description dans le repère mobile de ces anisotropies fixes. Le diagramme de Campbell et la réponse au même balourd que précédemment sont tracés figure I.9. Remarquons tout d'abord, qu'à l'arrêt, les modes propres dans le plan vertical et horizontal ont des pulsations propres distinctes, du fait des raideurs transversales différentes dans les deux directions principales. La réponse aux efforts de balourd est également affectée par cette dissymétrie. Les amplitudes Q_1 et Q_2 qui décrivent le déplacement du rotor ($q_1(t) = Q_1 \cos \Omega t$ et $q_2(t) = Q_1 \sin \Omega t$), étaient parfaitement identiques pour le système axisymétrique. Elles sont maintenant distinctes ce qui signifie que le mouvement du rotor ne décrit plus une trajectoire circulaire mais elliptique. De plus, l'orientation de la précession sera rétrograde pour la plage de régime autour la première vitesse critique Ω_{c1} [LF98], ce qui conduira à des contraintes axiales alternées sollicitant le rotor en fatigue. Ces plages de régime sont cependant étroites et le phénomène peut être limité par un apport d'amortissement suffisant. L'anisotropie de raideur des supports peut, au contraire, s'avérer positive pour le concepteur car elle permet d'inhiber certains phénomènes instables ou d'en éloigner les vitesses d'apparition [Ehr92; Chi93].

Du côté rotor, la présence de dissymétries est plus rare, et on cherche généralement à l'éviter car elle est à l'origine de vibrations, voire même de phénomènes instables ou auto-entretenus. Nous avons vu que la principale sollicitation mécanique

des systèmes tournants est liée à une dissymétrie de la distribution d'inertie du rotor autour de l'axe moteur conduisant aux efforts de balourd. Or, une dissymétrie inertielle n'est pas toujours à l'origine d'un balourd et certaines machines tournantes peuvent présenter une dissymétrie tout en étant parfaitement équilibrées : c'est le cas notamment des hélices à deux pales, qui ne possèdent pas la même inertie diamétrale dans les deux directions transverses à l'axe moteur. Il a été démontré [Gen88 ; YI01] que pour ce type de rotors, des zones d'instabilité se trouvent entre les vitesses critiques dédoublées.

Les dissymétries peuvent aussi apparaître au cours de la vie de la machine avec la fatigue ou lors d'évènements accidentels. La présence de fissures notamment, conduit à des propriétés élastiques anisotropes qui enrichissent considérablement le comportement dynamique et peuvent générer des plages de régime instables [Wau90 ; YI01]. De plus, les contacts entre parties fixes et tournantes, qui nous intéressent tout particulièrement dans ce projet, peuvent également s'interpréter comme des apports de raideur tournante qui dissymétrisent le système. Ces contacts rotor-stator sont à l'origine d'une grande variété de comportements parfois instables dont les mécanismes et les investigations rencontrées dans la littérature, seront présentés au chapitre suivant.

Enfin, une autre source d'instabilité des systèmes tournants provient de l'amortissement interne des rotors [Kan04]. Dans le repère fixe, les forces d'amortissement des éléments tournants se décomposent en deux termes (voir equation (I.36)). L'un est proportionnel au champ de vitesses et provient de la matrice d'amortissement « classique » \mathbf{D} . L'autre est proportionnel au champ de déplacements et dépend de la vitesse de rotation de l'arbre, il provient des termes circulatoires de la matrice antisymétrique \mathbf{C} . Ces efforts circulatoires de l'amortissement s'opposent aux efforts d'amortissement externe et à partir d'un certain seuil de vitesse, peuvent causer une précession instable.

Cette section nous a permis de décrire les mises en équations et les phénomènes de base de la dynamique des rotors en s'appuyant sur un modèle simple à 2 ddls. Le modèle élémentaire utilisé n'est évidemment pas représentatif du comportement réel d'une turbomachine industrielle. Pour dimensionner leurs turbomachines, les ingénieurs utilisent des modèles de taille plus importante qui doivent représenter le comportement dynamique du système complet (on parle de *Whole Engine Model* ou *WEM*). Ces WEM peuvent comporter plusieurs rotors qui tournent à des vitesses différentes et incluent également la dynamique des stators. Ces modèles de plusieurs centaines de ddls sont néanmoins construits à partir des mêmes éléments que ceux présentés ici et les analyses mises en œuvre pour prédire leur comportement sont identiques.

Comme nous l'avons vu, la dynamique des rotors se caractérise par l'hypothèse de disques rigides permettant de se focaliser sur la dynamique de ligne d'arbres. Nous allons à présent adopter la démarche inverse qui consiste à négliger la dynamique des arbres pour prendre en compte les aspects spécifiques de la dynamique des disques et des ensembles aubagés.

4 Dynamique des ensembles aubagés

Dans la section précédente, nous avons abordé les techniques de modélisation et les phénomènes associés à la dynamique d'ensemble de la turbomachine en négligeant la flexibilité des éléments aubagés. Or, les aubes sont des éléments-clefs dans la conception des turbomachines et comme nous l'avons évoqué en début de chapitre (voir section I.1.2), elles subissent des chargements importants d'origine mécanique ou aérodynamique. Nous nous intéresserons ici aux seuls aspects mécaniques des phénomènes et techniques de modélisation des ensembles aubagés. Tout d'abord, nous analyserons à travers un exemple simple, les effets de la rotation sur le comportement dynamique d'une aube seule. Puis, les techniques de modélisation et les comportements particuliers aux ensembles à symétrie cyclique que constituent les roues aubagées seront présentés.

4.1 Effets de la rotation sur une aube seule

Avant d'étudier le comportement dynamique d'ensemble aubagés complets, nous identifions les effets de la rotation sur le comportement dynamique d'une aube seule. Pour cela, nous appliquons les formulations développées dans le cas général (voir section I.2) à un modèle simple académique [Lai10]. Le modèle est schématisé figure I.10 et comporte une poutre de section rectangulaire encastree sur un cylindre rigide entrainé en rotation.

Les formulations sont développées dans le repère tournant $\mathfrak{R}_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. L'axe de rotation \mathbf{z} est confondu avec l'axe du cylindre de rayon R . L'axe \mathbf{x} passe par la fibre moyenne de la poutre de longueur L et de section droite $S = b \times h$. L'ensemble est entrainé en rotation uniforme à la vitesse Ω .

La section droite de l'aube positionnée à l'abscisse x possède deux déplacements possibles :

- $u(x, t)$: le déplacement de traction/compression dans la direction \mathbf{x}
- $v(x, t)$: le fléchissement dans la direction \mathbf{y}

La déformation en torsion et le fléchissement dans la direction \mathbf{z} sont négligés.

Les déplacements sont discrétisés par des fonctions de déplacements compatibles avec les conditions aux limites cinématiques de la poutre encastree-libre :

$$\begin{Bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{TC}(x) & 0 \\ 0 & \psi_F(x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}(x)} \begin{Bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{Bmatrix} \text{ avec } \psi_{TC}(x) = \frac{x - R}{L} \text{ et } \psi_F(x) = \frac{(x - R)^2}{L^2} \quad (\text{I.55})$$

Les matrices du système discrétisé s'obtiennent en introduisant (I.55) dans les expressions (I.22), (I.24), (I.25) et (I.27).

La matrice de masse \mathbf{M} est de la forme :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m/3 & 0 \\ 0 & m/5 \end{bmatrix} \text{ avec } m = \rho SL \quad (\text{I.56})$$

où ρ est la masse volumique de la poutre.

La matrice de raideur élastique est donnée par :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix} \text{ avec } k_{xx} = \frac{E_{xx}S}{L}; \quad k_{yy} = \frac{4E_{yy}I_z}{L^3}; \quad (\text{I.57})$$

avec E_{xx} et E_{yy} les modules d'Young dans les directions \mathbf{x} et \mathbf{y} (le matériau est supposé orthotrope), I_z est le moment quadratique de la section droite de la poutre suivant la direction \mathbf{z} .

Enfin, les matrices associées à la rotation propre du système s'expriment par :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega m/2 \\ \Omega m/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\Omega^2 m/3 & 0 \\ 0 & -\Omega^2 m/5 \end{bmatrix} \quad (\text{I.58})$$

La matrice \mathbf{G} introduit les effets de Coriolis, analogues aux effets gyroscopiques observés en dynamique des rotors (voir section I.3). Les termes de Coriolis viennent ici coupler les deux déplacements dans le plan perpendiculaire à la rotation : l'élongation de la poutre et le fléchissement suivant \mathbf{y} . Ces effets de Coriolis propres aux aubages se distinguent de ceux observés en dynamique des rotors. Rappelons qu'en dynamique de ligne d'arbres, les déplacements couplés par les termes gyroscopiques sont les rotations de l'arbre dans les deux directions orthogonales à l'axe moteur et l'intensité du couplage dépend de l'inertie polaire apportée par les disques (voir équation (I.44)). Or, dans le cas de l'aubage présenté ici, les déplacements couplés mettent en jeu deux déformations de nature différente : la traction/compression et la flexion. Pour une poutre élancée fabriquée avec un matériau isotrope, la rigidité en traction/compression sera beaucoup plus importante que la rigidité en flexion ; c'est aussi valable pour le disque auquel les aubes sont connectées. Les effets de Coriolis seront ainsi le plus souvent négligés. Néanmoins, selon les propriétés matériau et la géométrie de l'aubage considéré, ils devront être introduits et auront pour effet de rigidifier le mode de traction/compression et d'assouplir le mode de flexion dans la direction \mathbf{y} .

La poutre entraînée en rotation est également soumise à l'effet centrifuge qui génère un effort dans la direction \mathbf{x} , proportionnel au carré de la vitesse de rotation. A la section droite d'abscisse x , l'effort centrifuge appliqué est représentatif de la masse accrochée, c'est-à-dire de la portion d'aube restante depuis x jusqu'à son extrémité libre, il est de la forme suivante :

$$F_c(x) = \int_x^{R+L} \Omega^2 \rho S x dx = \Omega^2 \rho S \frac{(R+L)^2 - (R+x)^2}{2} \quad (\text{I.59})$$

Le potentiel de précontrainte associé est donné par :

$$U_{stif} = \frac{1}{2} \int_R^{R+L} F_c(x) \left(\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (\text{I.60})$$

Ce qui conduit à la matrice de rigidification centrifuge suivante :

$$\mathbf{K}_{stif} = \Omega^2 \begin{bmatrix} k_{stif,TC} & 0 \\ 0 & k_{stif,F} \end{bmatrix} \text{ avec } k_{stif,TC} = \frac{m(3R+2L)}{6L} \text{ et } k_{stif,F} = \frac{m(5R+4L)}{15L} \quad (\text{I.61})$$

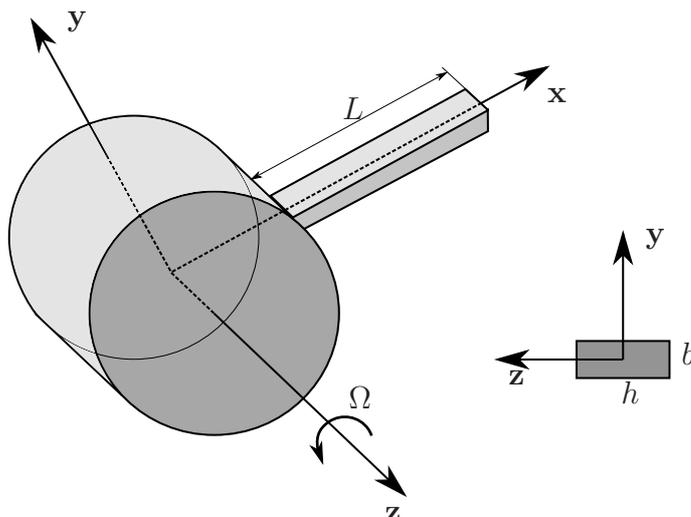


FIGURE I.10: Poutre de section rectangulaire encastrée sur un cylindre rigide en rotation [Lai10]

Afin d'observer l'effet de chacun des termes issus de la rotation, nous traçons, en figure I.4.1, le diagramme de Campbell qui décrit l'évolution de la pulsation propre du premier mode de flexion avec la vitesse de rotation Ω . Les résultats sont obtenus pour la mise en données suivante : $L = 50$ cm ; $R = 20$ cm ; $b = 0.8$ cm ; $E_{yy} = 1.8 \times 10^{11}$ Pa ; $E_{xx} = E_{yy}/2$; $\rho = 5800$ kg/m³

Chacun des effets de la rotation est dissocié pour en illustrer l'effet sur la pulsation propre ω_0 . Notons que la seule courbe représentative du comportement réel est celle obtenue en considérant tous les effets de la rotation, elle est identifiée par la lettre E.

Cet exercice simple nous a permis d'illustrer les effets de la rotation sur le comportement dynamique d'un aubage en rotation. Nous allons maintenant décrire le comportement d'un système aubagé complet à travers les propriétés des structures à symétrie cyclique.

4.2 Propriétés des structures à symétrie cyclique

Les ensembles aubagés sont des structures dites à *symétrie cyclique*, c'est-à-dire qu'elles sont constituées de N secteurs identiques répétés autour d'un axe de symétrie. La figure I.12 présente une illustration d'une roue aubagée et son secteur de référence. De telles structures peuvent être modélisées en profitant de cette répétition cyclique pour exprimer le champ de déplacement de la structure complète à partir d'un seul secteur, on parle de modélisation en symétrie cyclique [Tho79 ; Wil79 ; Hen80 ; VO85].

Le champ de déplacement discret \mathbf{q}_j associé au secteur $j = 0, \dots, N - 1$, est exprimé par une superposition de fonctions harmoniques :

$$\mathbf{q}_j = \tilde{\mathbf{q}}_0^0 + \sum_{k=1}^K \left(\tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\cos} \cos(jk\alpha) + \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\sin} \sin(jk\alpha) \right) + (-1)^j \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2} \quad (\text{I.62})$$

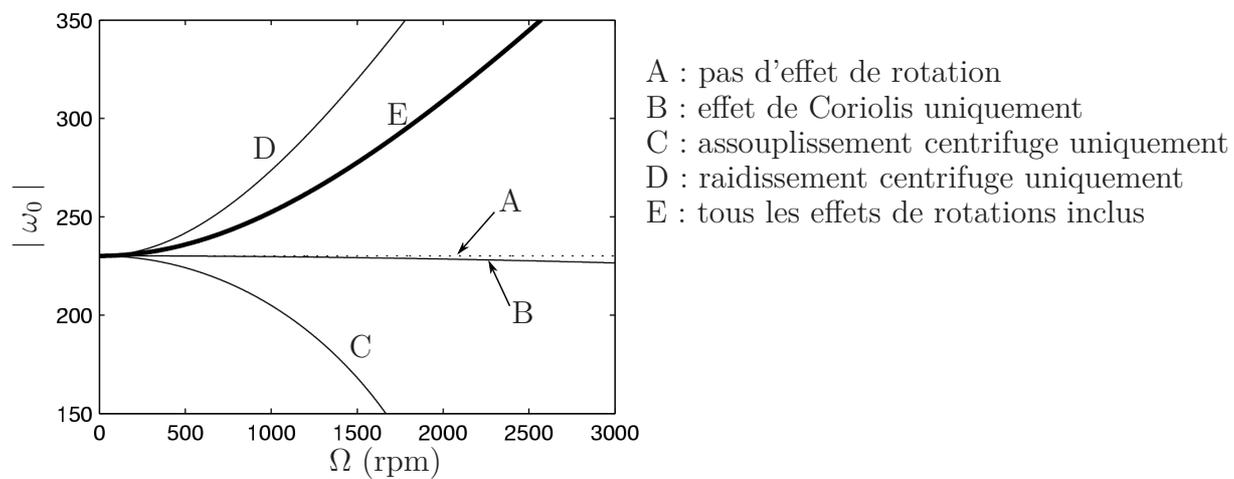


FIGURE I.11: Effets de la rotation sur la pulsation propre du premier mode de flexion d'une poutre en rotation

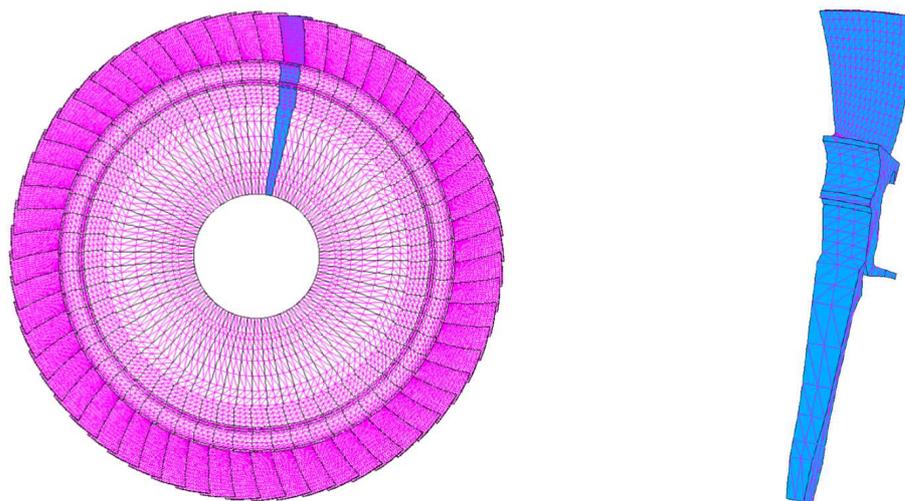


FIGURE I.12: Roue aubagée et son secteur de référence (illustration issue de [Gru12])

où $\alpha = 2\pi/N$ représente la taille angulaire d'un secteur. $\{\tilde{\mathbf{q}}_0^0 \dots \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\cos} \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\sin} \dots \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2}\}$ sont les composantes cycliques du champ de déplacement du secteur de référence. Elles sont reliées au champ de déplacement défini en base physique par une transformée de Fourier discrète. L'indice harmonique prend successivement les valeurs $k = 0, \dots, K$ avec :

$$K = \begin{cases} \frac{N}{2} - 1 & \text{si } N \text{ est pair} \\ \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases} \quad (\text{I.63})$$

Notons que le dernier terme de cette équation (I.62) associé à l'harmonique spatiale $k = N/2$ n'intervient que si le nombre de secteurs N est pair, nous supposons par la suite, que c'est le cas.

L'équation de la dynamique de la structure cyclique, non amortie, s'écrit en base physique :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_e \quad (\text{I.64})$$

où \mathbf{q} est le vecteur des déplacements discrétisés de la structure complète, \mathbf{M} et \mathbf{K} sont les matrices de masse et de raideur et \mathbf{F}_e les efforts extérieurs. Le problème (I.64) peut être reformulé en base cyclique conduisant à un ensemble de K sous-systèmes matriciels indépendants définis sur le secteur de référence :

$$\tilde{\mathbf{M}}^k \ddot{\tilde{\mathbf{q}}_0^k} + \tilde{\mathbf{K}}^k \tilde{\mathbf{q}}_0^k = \tilde{\mathbf{F}}_{e0}^k \quad (\text{I.65})$$

Ces K sous-systèmes s'accompagnent de conditions aux limites cycliques qui introduisent les conditions de continuité à l'interface entre deux secteurs. Comme l'illustre le schéma figure I.13, les degrés de liberté du secteur de référence peuvent être partitionnés en degrés de liberté appartenant à la frontière droite, à la frontière gauche ou en degrés de liberté internes :

$$\mathbf{q}_0 = \left\{ {}^g \mathbf{q}_0 \quad {}^d \mathbf{q}_0 \quad {}^i \mathbf{q}_0 \right\}^T \quad (\text{I.66})$$

L'écriture des conditions de continuité dans la base cyclique conduit aux relations suivantes :

$${}^g \tilde{\mathbf{q}}_0^0 = {}^d \tilde{\mathbf{q}}_0^0 \text{ pour } k = 0 \quad (\text{I.67a})$$

$$\begin{Bmatrix} {}^g \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\cos} \\ {}^g \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\sin} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^d \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\cos} \\ {}^d \tilde{\mathbf{q}}_0^{k,\sin} \end{Bmatrix} \text{ pour } k = 1, \dots, K \quad (\text{I.67b})$$

$${}^g \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2} = -{}^d \tilde{\mathbf{q}}_0^{N/2} \text{ pour } k = N/2 \quad (\text{I.67c})$$

Les propriétés modales de la structure sont obtenues en résolvant les $N/2$ sous-problèmes aux valeurs propres $(\lambda, \tilde{\mathbf{Q}}_0^k)$ suivants :

$$\left(\tilde{\mathbf{K}}^k - \lambda^2 \tilde{\mathbf{M}}^k \right) \tilde{\mathbf{Q}}_0^k = \mathbf{0} \quad (\text{I.68})$$

Pour les harmoniques $k = 0$ et $k = N/2$, les sous-problèmes à résoudre sont réels et de dimension n (où n est le nombre de degrés de liberté du secteur de référence).

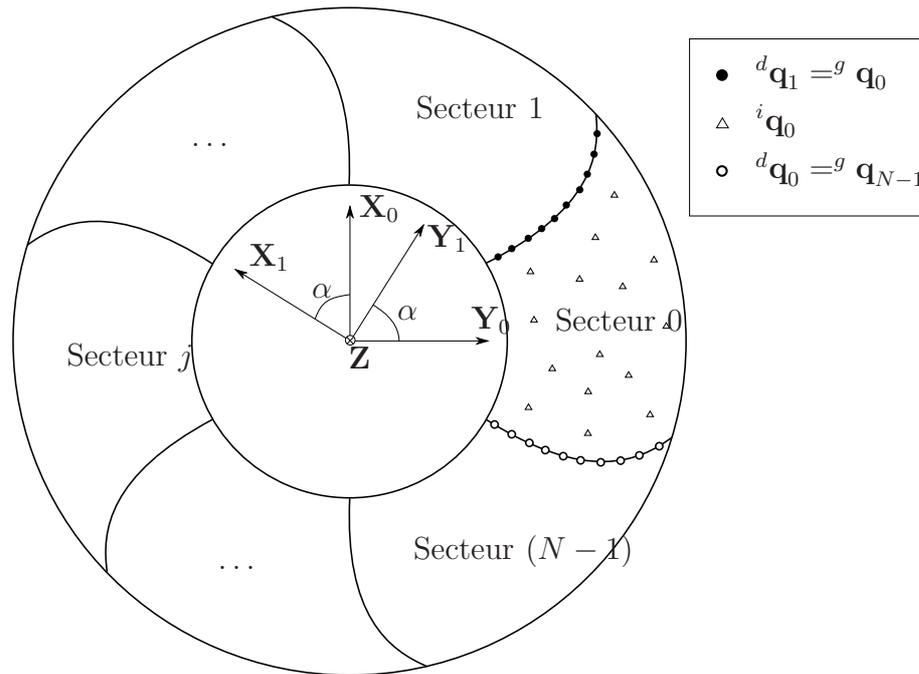


FIGURE I.13: Schéma de définition des degrés de liberté frontières sur le secteur de référence

Pour les harmoniques $k = 1, \dots, K$, les problèmes sont écrits ici en découplant l'inconnue complexe en partie réelle et imaginaire conduisant à des sous-problèmes réels de dimension $2n$. Les solutions de ces sous-systèmes sont dites *dégénérées* et comportent des fréquences propres doubles auxquelles sont associées des vecteurs propres orthogonaux. Les vecteurs propres exprimés dans la base cyclique peuvent alors être projetés dans la base physique pour obtenir le champ de déplacement correspondant sur la structure complète.

Pour une structure comportant $N = 36$ secteurs, les déformées propres obtenues pour des modes non-dégénérés $k = 0$ et $k = 18$ sont présentées figure I.14. Pour

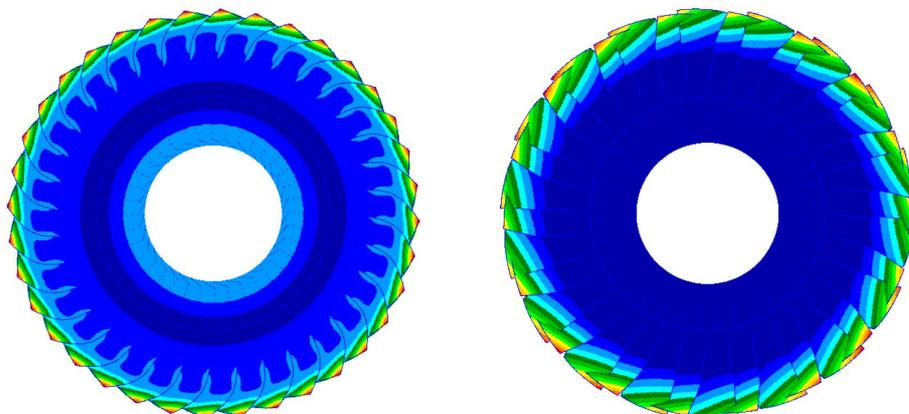


FIGURE I.14: Déformées de modes non dégénérés : $k = 0$ à gauche et $k = 18$ à droite (illustration issue de [Lax07])

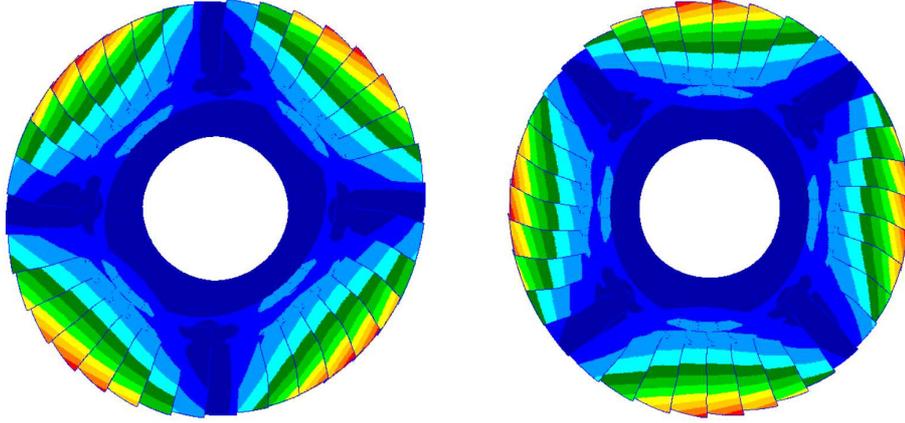


FIGURE I.15: Déformées de modes dégénérés : $k = 2$ (illustration issue de [Lax07])

l'harmonique $k = 0$ tous les aubages fléchissent en même temps dans la même direction, on parle aussi de déformation à 0 diamètre nodal. Pour l'harmonique maximal : $k = 18$, chacune des 36 aubages vibre en opposition de phase avec ses voisines, il s'agit d'un mode à 18 diamètres nodaux.

Figure I.15 sont illustrées les déformées modales obtenues pour le couple de mode dégénérés correspondant à l'harmonique $k = 2$, les deux lignes nodales caractéristiques de la déformée à deux diamètres nodaux apparaissent clairement.

Les modes doubles comme ceux illustrés figure I.15, sont orthogonaux et de même fréquence propre. Ils peuvent être combinés pour construire des modes tournants d'orientation co et contra-rotatives, indiquée respectivement par les exposants + et - :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_j^{k+} &= \mathbf{Q}_{(1)}^k \cos \omega_k t + \mathbf{Q}_{(2)}^k \sin \omega_k t \\ \mathbf{q}_j^{k-} &= \mathbf{Q}_{(1)}^k \cos \omega_k t - \mathbf{Q}_{(2)}^k \sin \omega_k t \end{aligned} \quad (\text{I.69})$$

où ω_k est la pulsation propre du couple de modes d'harmonique spatiale $k = 1, \dots, N/2 - 1$. $\mathbf{Q}_{(1)}^k$ et $\mathbf{Q}_{(2)}^k$ sont les vecteurs propres projetés dans la base physique de chacun des deux modes d'harmonique k . Notons que les indications co ou contra-rotatif décrivent l'orientation directe ou indirecte de l'onde tournante dans le repère attaché à la structure cyclique. Dans ce repère, la vitesse de propagation de l'onde sera de $+\omega_k/k$ pour le mode co-rotatif et de $-\omega_k/k$ pour le mode contra-rotatif. Si la roue aubagée tourne, dans le sens direct, à la vitesse Ω , les vitesses de propagation vues dans un repère inertiel seront respectivement $\Omega + \omega_k/k$ pour l'onde co-rotative et $\Omega - \omega_k/k$ pour l'onde contra-rotative. Suivant la valeur de ω_k , le mode contra-rotatif pourra donc conduire à un mouvement d'avance vu depuis le repère inertiel.

Les propriétés des structures à symétrie cyclique peuvent s'étendre aux structures axisymétriques comme les disques ou les carters cylindriques. Ces structures à symétrie de révolution constituent en effet des cas-limites des structures à symétrie cyclique, pour lesquels la taille des secteurs tend vers zéro quand leur nombre

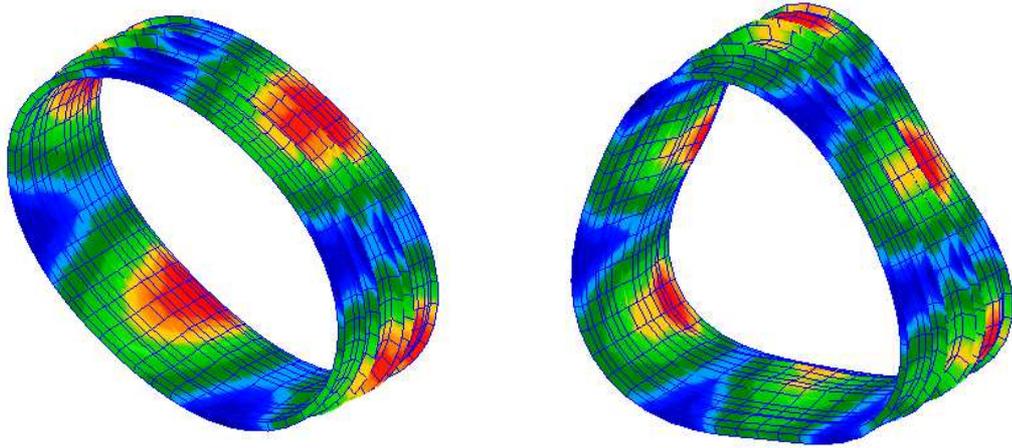


FIGURE I.16: Modes de carter à deux (à gauche) et trois (à droite) diamètres nodaux

tend vers l'infini. Les mêmes propriétés modales se rencontrent avec notamment la présence de modes de type *ondes tournantes*, combinaisons linéaires de deux modes propres orthogonaux de déformées et fréquences propres identiques. Les déformées d'un carter, obtenues pour les harmoniques $k = 2$ et $k = 3$, sont tracées figure I.16.

5 Dynamique couplée des rotors aubagés

Dans les deux sections précédentes, nous avons présenté les propriétés dynamiques des rotors d'une part et des ensembles aubagés de l'autre. D'un point de vue plus industriel et si nous élargissons aux éléments stators, ces deux domaines d'étude se distinguent par les caractéristiques suivantes :

- La description du comportement dynamique d'un ensemble propulsif au travers de la dynamique de ligne d'arbres, s'appuie sur des modèles *poutres-masses-ressorts*. Les disques aubagés et les carters y sont rigides et introduits par leurs masses et leurs inerties en rotation. Les éléments, centrés sur l'axe moteur, doivent représenter le comportement dynamique global de la turbomachine. Ils prennent en compte généralement les ddls associés à la flexion de l'arbre (translations et basculements dans les deux directions transverses à l'axe moteur) et peuvent aussi inclure les déplacements longitudinal et de torsion suivant l'axe moteur. Ces modèles restent relativement légers : pour un ensemble propulsif complet, un modèle de ce type pourra contenir de quelques centaines de ddls à quelques milliers de ddls.
- Depuis le second point de vue, les modèles dits, *de modules*, représentent le comportement dynamique d'un étage aubagée donné ou d'un carter isolé. Ces modèles sont généralement construits en éléments finis 3D. Même s'ils peuvent profiter des propriétés de la symétrie cyclique qui permet de réduire le modèle à un secteur de référence (voir section I.4.2), ils peuvent prendre des tailles importantes, jusqu'à plusieurs centaines de milliers de ddls.

Le dimensionnement des turbomachines est donc réalisé à travers ces deux démarches distinctes. Cette approche dissociée s'appuie sur l'hypothèse que le comportement dynamique des disques aubagés est découplé de celui des rotors. Or, les références citées ci-après montrent que lorsque les modes d'arbre et ceux des ensembles aubagés sont de fréquences comparables, des interactions fortes peuvent être observées entre les deux types de structures.

Pour identifier les modes en jeu, certaines investigations analysent les couplages possibles entre les modes de roue aubagée et les mouvements de corps rigide du disque [LK84 ; CM84 ; KL90 ; TB06] et les instabilités dynamiques qu'ils peuvent générer [CD81 ; GT97]. Ces études indiquent que les modes de roue aubagés qui pourront interagir avec la dynamique d'arbre sont les modes à zéro et à un diamètre nodal ($k = 0$ et $k = 1$). Ces modes sont en effet, les seuls compatibles avec la cinématique attribuée à la section droite de l'arbre, ou en d'autres termes, les seuls qui pourront conduire à une résultante non nulle au centre du disque. Les interactions possibles vont également dépendre de la nature de la déformée d'aubage concernée (on parle aussi de *famille modale*). Le mode dit *parapluie* : mode à zéro diamètre mettant en jeu la flexion des aubes dans la direction axiale, pourra se coupler avec la déformation longitudinale de l'arbre, tandis que le mode à zéro diamètre mettant en jeu la flexion des aubes dans le plan du disque interagira avec les modes de torsion de l'arbre. Pour les modes à un diamètre nodal, les couplages vont faire intervenir les modes de flexion de l'arbre. Remarquons en effet que, si on observe la cinématique d'une section droite de l'arbre, les modes de précession décrits du point de vue de la dynamique des rotors peuvent être interprétés comme des modes d'harmonique $k = 1$ par les outils d'analyse de la dynamique des ensembles aubagés. Ces interactions à un diamètre nodal sont démontrées analytiquement et confirmées expérimentalement dans [CM84 ; CDM86], avec une étude d'influence de l'orientation des aubages sur la nature des mouvements couplés.

D'autres analyses rencontrées dans la littérature, complètent ces investigations en incluant également la dynamique de ligne d'arbres, construisant ainsi des modèles hybrides de rotors aubagés flexibles [Sak+89 ; FR93 ; CL96]. Sakata [Sak+89] s'intéresse à ces couplages aubes-arbre lorsque des effets gyroscopiques forts sont induits par les manœuvres de l'avion. Dans un domaine qui nous intéressera tout particulièrement, Sinha [Sin04] et Lesaffre [Les07] utilisent des modèles hybrides pour étudier le comportement dynamique lors de contacts entre les sommets d'aube fan et le carter. Si la plupart de ces investigations considèrent une roue aubagée très simplifiée : poutres flexibles encastrées sur un disque rigide, Gruin [Gru12] construit un modèle hybride plus élaboré en connectant un modèle de roue aubagée 3D réduit à un modèle bi-rotors.

Enfin, certains auteurs proposent des approches globales permettant de construire des modèles de rotors aubagés flexibles complets en éléments 3D [GK84 ; JRFR96 ; GT97 ; CDJR05]. Trop couteux en temps de calcul pour le type d'analyses menées dans ce projet, nous leur préférons ici les modèles hybrides plus légers et plus faciles à manipuler pour des études phénoménologiques.

6 Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de présenter les notions nécessaires à l'étude du comportement dynamique linéaire des turboréacteurs d'avion. Dans un premier temps, nous avons introduit leur principe de fonctionnement et identifié les principales sollicitations dynamiques subies par ces structures. Ensuite, la formulation de la dynamique d'un solide élastique en rotation a été développée pour aboutir à l'équation matricielle régissant le comportement dynamique d'un système discrétisé en rotation. A partir de cette mise en équation générale, nous avons décrit les spécificités des deux grandes approches utilisées pour caractériser le comportement dynamique d'une turbomachine, à savoir, la dynamique des rotors et la dynamique des ensembles aubagés. Ces deux approches, dissociées la plupart du temps, doivent parfois se mêler pour rendre compte des interactions qui peuvent exister entre les comportements dynamiques de ces différents organes. Des modèles hybrides de rotors aubagés flexibles ont donc été présentés pour terminer ce chapitre.

Les notions nécessaires pour traiter les aspects linéaires de notre étude viennent donc d'être abordées. Le chapitre qui suit s'intéressera aux aspects non-linéaires et plus particulièrement aux non-linéarités liées aux contacts entre parties fixes et tournantes dans les turboréacteurs.

Chapitre II

Analyse et état de l'art du phénomène de contact rotor-stator

Le chapitre précédent a permis de présenter les notions nécessaires pour étudier le comportement dynamique des turboréacteurs dans le cadre linéaire. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement aux spécificités du contact rotor-stator. Tout d'abord, une synthèse de la littérature sera proposée en distinguant, comme au chapitre précédent, la phénoménologie des rotors de celle des ensembles aubagés. Une fois notre étude placée dans ce contexte bibliographique, nous présenterons les notions et techniques de modélisation nécessaires à sa mise en œuvre. Les méthodes permettant d'introduire les effets non-linéaires du contact dans le système d'équation du système seront ainsi présentées. Puis, nous nous intéresserons aux méthodes numériques permettant d'obtenir une solution particulière de l'équation non-linéaire. Enfin, nous rappellerons les notions générales permettant de caractériser la stabilité des solutions d'un système dynamique.

Sommaire

1	Synthèse bibliographique	38
1.1	Dynamique d'interaction rotor-stator sans aubages (<i>rubbing</i>)	39
1.2	Dynamique d'interaction roue aubagée-carter	43
1.3	Positionnement de notre étude	45
2	Implémentation du contact	46
2.1	Relations de contact	47
2.2	Méthodes de gestion du contact	49
3	Résolution du problème non-linéaire	50
3.1	Intégration temporelle	51
3.2	Résolution de systèmes algébriques non-linéaires	54
3.3	Obtention des cycles limites	55
4	Stabilité des solutions	56
4.1	Stabilité locale des points fixes	57
4.2	Stabilité locale des solutions périodiques	58
4.3	Bifurcations locales	59
5	Conclusion	60

1 Synthèse bibliographique

Réduire les distances entre parties fixes et tournantes dans une turbomachine limite les écoulements de fuite et permet ainsi d'accroître les performances. Les concepteurs de turboréacteurs voudraient donc voir ces jeux réduits au minimum, mais la contrepartie réside dans l'augmentation des possibilités de contacts entre les parties fixes et tournantes. Le rotor contenant beaucoup d'énergie du fait de sa rotation propre, les transferts vers les éléments stator, par le biais de ces contacts, peuvent conduire à des niveaux de vibration importants ou même à des phénomènes dynamiques instables. Les phénomènes liés aux contacts rotor-stator font donc l'objet de nombreuses investigations, pour fournir aux constructeurs les moyens de concevoir des turboréacteurs plus performants, tout en s'assurant d'écarter les risques de comportements dynamiques dangereux.

Ces contacts peuvent être induits par de nombreux phénomènes : les niveaux de vibrations liées à un balourd (résiduel ou accidentel), une manœuvre de l'avion ou encore une déformation thermique des carters. De plus, ils peuvent apparaître à différents endroits et faire intervenir des organes très divers du turboréacteur. La figure II.1 présente une vue en coupe d'un turbofan industriel illustrant ainsi la succession des étages aubagés fixes et mobiles et la diversité des zones de possibles contacts. Les principaux éléments structuraux du module compresseur basse pression sont aussi schématisés figure II.2, pour mettre en valeur les éléments stator et rotor et identifier les configurations de contact possibles.

Les contacts identifiés par c1 et c2 dans la figure II.2 surviennent entre le sommet des aubes mobiles et la surface interne du carter en regard. Pour en améliorer les conditions et limiter l'endommagement des aubes, cette surface est parfois recouverte d'une couche de matériau abrasable. Les aubes impliquées peuvent être grandes et élancées (c1) ou plus petites et plus courtes (c2).

Le contact localisé par c3 dans la figure II.2, fait intervenir les étages d'aubages fixes (ou redresseurs). Les redresseurs étant connectés à des viroles, cette configuration s'interprète comme un contact entre deux cylindres concentriques : l'un est fixe et représentatif de la virole interne et du joint statorique associé, l'autre est l'arbre en rotation. Une configuration analogue peut être observée lorsque des aubages (tournants) présentent un talon et sont liées en leur sommet : on se rapproche alors d'un contact de type disque-carter.

La figure permet aussi d'illustrer la possibilité d'un contact dans la direction axiale, il y est identifié par c4.

Enfin, les contacts pouvant survenir au niveau des paliers sont identifiés par c5. Les paliers sont des organes clés dans l'interaction rotor-stator, ils connectent rotors et stators à travers des roulements (à billes ou rouleaux) ou par l'intermédiaire d'un film d'huile ou encore, au travers d'efforts électromagnétiques. La phénoménologie qui leur est associée est vaste et constitue un domaine de recherche à part entière. Nous nous intéressons ici uniquement aux contacts frottants qui peuvent apparaître lorsqu'il a des jeux importants dans les roulements ; ou lorsqu'il y a rupture du film

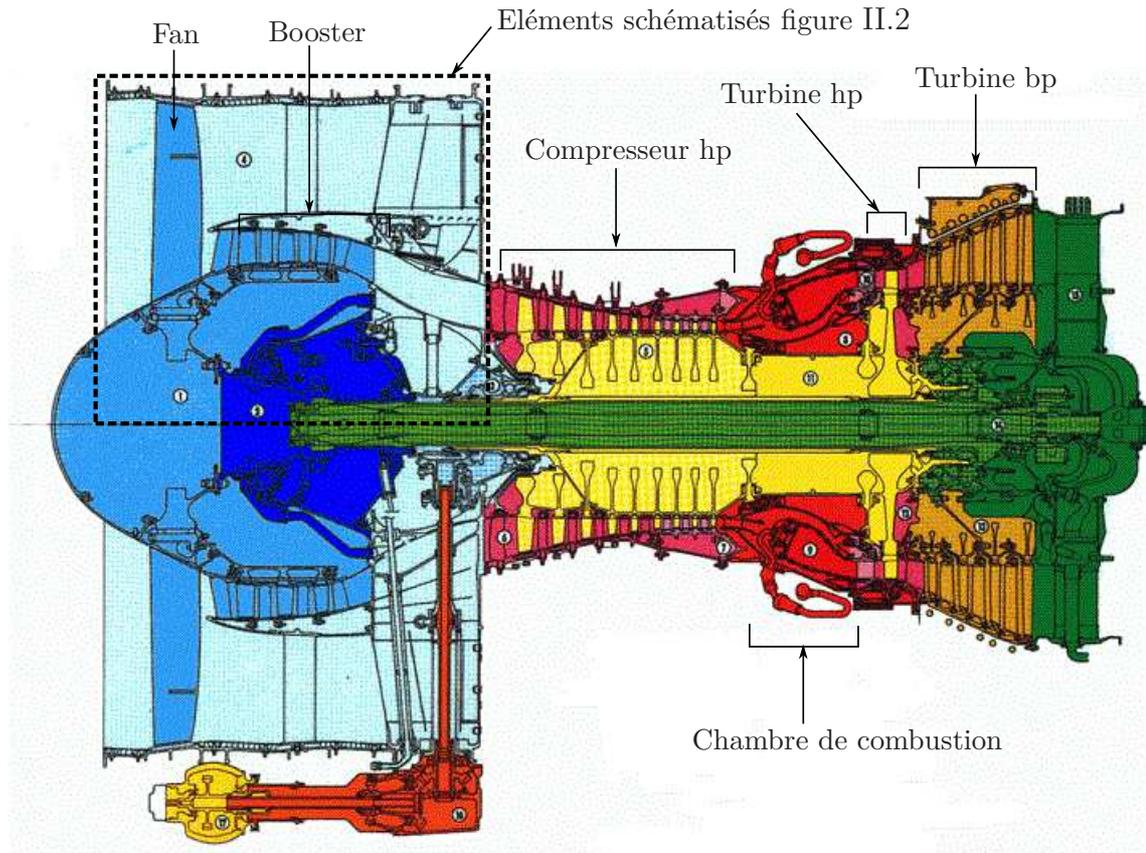


FIGURE II.1: Vue en coupe du turbofan CFM56 série 3

d'huile dans les paliers fluides ; ou encore en cas de défaillance de paliers magnétiques.

Cette diversité de configurations de contact s'accompagne d'un spectre de phénomènes très large. Suivant la configuration et les phénomènes étudiés, les analyses sont abordées à travers chacune des approches décrites au chapitre précédent : les analyses traitant du contact rotor-stator sans aubages (on parle aussi de *rubbing*) font intervenir les outils de la dynamique des rotors (section I.3) ; tandis que les études traitant du contact aube-carter s'appuient sur les notions de la dynamique des ensembles aubagés (section I.4). Les références rencontrées appartenant à chacune de ces approches seront donc décrites successivement.

1.1 Dynamique d'interaction rotor-stator sans aubages (*rubbing*)

La dynamique d'interaction rotor-stator sans aubages comprend une phénoménologie très riche décrite et investiguée par de nombreux auteurs. Les revues bibliographiques proposées dans [Mus89], [Ahm10] et [JR+13] présentent une synthèse des contributions apportées tant du point de vue numérique qu'expérimental. Parmi le spectre très large des scénarios observés, nous pouvons distinguer trois types de comportement dynamique :

- Un **mouvement synchrone en précession directe** pour lequel un frottement

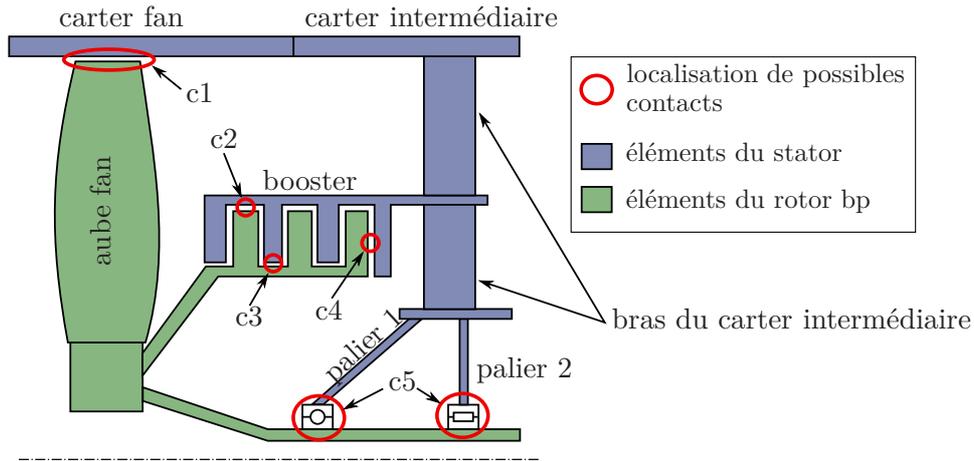


FIGURE II.2: Demi-vue schématique du module compresseur basse pression : principaux éléments structuraux et localisation des possibles contacts

annulaire est établi : on parle aussi de *synchronous full annular rub* [Mus05]. Ce régime stabilisé est obtenu pour un contact induit par la présence de balourd. Il s'agit d'un état d'équilibre de la réponse non-linéaire du rotor soumis aux efforts de balourd et de contact [Ehr92].

- Un **mouvement en précession rétrograde** peut être obtenu lorsque les efforts de frottement, dirigés dans la direction opposée à la rotation propre de l'arbre, sont suffisants (voir figure II.3). Il peut alors s'agir d'une configuration stable impliquant du roulement sans glissement : *dry whirl*, ou d'une configuration instable impliquant un glissement permanent : *dry whip*. Dans le cas du *dry whirl*, le rotor roule sans glisser sur la surface interne du stator. La vitesse de la précession ω est alors déterminée par la contrainte cinématique déduite de cette condition de roulement sans glissement : $\omega = \Omega \times R/g$ (avec R le rayon du rotor et g le jeu). Le *dry whip* est un phénomène auto-entretenu au cours duquel les efforts de frottement établissent un transfert d'énergie depuis la rotation propre du rotor vers le mouvement latéral de précession. La vibration s'amplifie alors de manière continue jusqu'à ce que la vitesse circonférentielle du rotor change de signe et inverse la direction des efforts de frottement. La précession liée au *dry whip* est asynchrone et sa fréquence correspond approximativement à la fréquence naturelle du système couplé, pour lequel rotor et stator sont connectés.

- Les deux types de comportements décrits précédemment constituent des régimes établis pour lesquels un contact est maintenu de façon permanente entre rotor et stator. Or, la réponse dynamique lors de contacts rotor-stator se caractérise aussi par la présence de **rebonds** ou de **contacts intermittents**. Ce type de comportement peut être obtenu de manière transitoire lors de l'initiation de l'un des phénomènes décrits ci-dessus ou lors d'une transition entre deux phénomènes. L'intermittence des contacts peut aussi être observée en régime permanent et être associée à des solutions périodiques, quasi-périodiques ou chaotiques du système.

L'une des premières contributions mentionnant la présence de phénomènes auto-

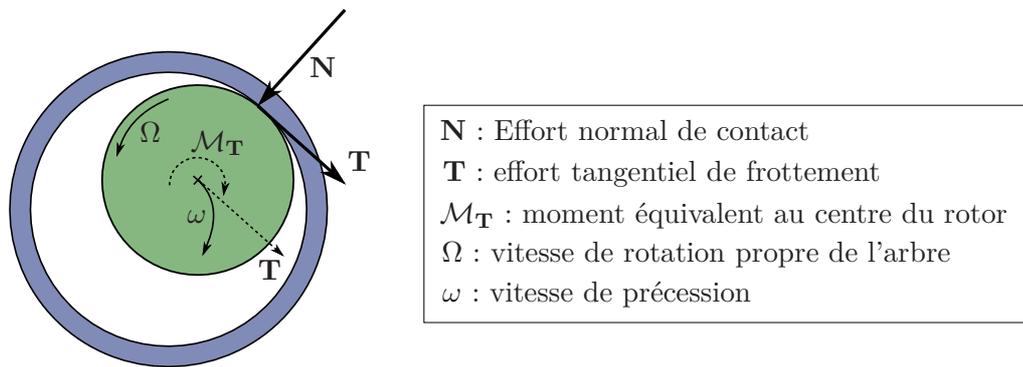


FIGURE II.3: Précession de l'arbre générée par le frottement : efforts agissants sur le rotor

entretenus dans le cas d'un contact rotor-stator fut apportée par Den Hartog [DH56]. A travers un bilan d'efforts tel que celui présenté figure II.3, il met en évidence le phénomène auto-entretenu en précession rétrograde. Des analyses de stabilité sont alors conduites par Black [Bla66] et Ehrich [Ehr69] qui mettent en évidence une plus grande richesse de phénomènes et définissent les premiers critères de stabilité.

De nombreux travaux étudient alors les phénomènes de *dry whip* et *dry whirl* avec une attention particulière sur la transition du *whirl* (roulement sans glissement) au *whip* (glissement permanent). Crandall [Cra90] conduit des expérimentations sans introduire de balourd, le contact y est initié en apportant une légère perturbation sur le rotor. Il étudie l'influence du coefficient de frottement μ sur les régimes d'apparition des phénomènes de *dry whip* et *dry whirl* et trace une courbe des coefficients de frottement limites permettant de maintenir le *dry whirl*. Choi [Cho02] s'intéresse aussi à l'influence du coefficient de frottement et conclut qu'il s'agit du paramètre majeur qui décide de l'apparition des phénomènes de *dry whirl* et *whip*, tandis que l'excentricité du rotor influe sur la vitesse de précession. D'autres travaux s'intéressent à ces phénomènes de *dry whirl* et *whip* pour prédire la stabilité d'un rotor lors d'une brusque défaillance d'un palier magnétique [Fum97 ; Bar00]. Bartha [Bar00] indique que le critère établi dans [Bla66] n'est pas suffisant pour prédire correctement les réponses obtenues expérimentalement. Childs et Bhattacharya [CB07] reprennent ce critère et mettent en évidence la nécessité de prendre en compte davantage de modes de rotor et stator pour atteindre une prédiction correcte des plages de comportements, ces travaux sont poursuivis par Wilkes [Wil+10]. Bently et al. [Ben+02] s'intéressent à l'influence de la raideur des supports sur l'apparition du *dry whip*, les résultats expérimentaux indiquent que plus les supports sont raides, plus le *dry whip* est obtenu facilement. D'autres auteurs étudient l'influence de l'asymétrie des supports et montrent que des supports anisotropes limitent l'apparition du *dry whip* [Lin90 ; GFW96].

D'autres contributions s'intéressent plus particulièrement aux solutions mettant en jeu des contacts intermittents. Muszynska [Mus84] met en évidence expérimentalement et analytiquement la présence de composantes synchrones, super et sub-harmoniques dans les réponses avec contacts intermittents. Par une approche fré-

quentielle, Kim et Noah [KN96] mettent en évidence la présence de réponses quasi-périodiques et les simulations transitoires conduites par Choy et Padovan [CP87] font apparaître différentes phases de comportements depuis l'initiation des contacts jusqu'au comportement en régime permanent. Cole [Col08] décrit également qu'un mouvement de précession directe peut donner lieu à des rebonds (*bouncing whirl*) puis au *dry whip* et détermine les frontières paramétriques entre ces phénomènes. Popprath [PE07] s'intéresse aux solutions chaotiques, quasi-périodiques et périodiques obtenues en contact intermittent et étudie l'influence de l'amortissement stator. Il montre que lorsque cet amortissement décroît, les solutions périodiques avec peu de touches laissent place à un comportement chaotique.

Enfin, certains auteurs s'intéressent aux transitions brutales observées entre les différents comportements qui correspondent à un saut entre deux solutions coexistantes. Wilkes [Wil08] observe expérimentalement des sauts pour des transitions *whip/whirl* ou entre deux phénomènes de *whip* de fréquences distinctes. Jiang et Shang [Jia09 ; SJH11] mettent en évidence des plages de régime où coexistent plusieurs comportements, ils identifient jusqu'à 10 types de coexistences.

Notons que la plupart des études mentionnées ci-dessus s'appuient sur des modèles de dynamique des rotors qui n'incluent que les degrés de liberté latéraux permettant d'étudier le comportement en flexion du rotor. Les auteurs supposent aussi pour la plupart, que les contacts n'ont pas d'effet sur la rotation propre de l'arbre et font l'hypothèse d'une vitesse de rotation constante. Edwards [ELF99] introduit la torsion de l'arbre et montre que sa prise en compte a un effet stabilisant sur la réponse obtenue ; Roques [Roq07] considère un transitoire de vitesse pour illustrer la décélération induite par un fort contact (situation accidentelle).

Enfin, les analyses présentées se concentrent sur les aspects purement structuraux et certains phénomènes liés au contact rotor-stator doivent être traités par une approche pluri-disciplinaire, permettant notamment d'inclure les effets thermiques. En effet, les échauffements liés à la dissipation d'une partie de l'énergie de rotation par le frottement, produisent un phénomène de précession en spirale appelé *thermal bowing* ou *effet de Newkirk* [New26 ; GM95 ; BPV07].

Cette section propose une brève synthèse de la littérature rencontrée qui traite la problématique du contact rotor-stator depuis le point de vue de la dynamique des rotors. Les phénomènes décrits sont complexes et nombreux et cette synthèse nous a permis de dégager les propriétés qui les caractérisent :

- la nature de la solution : périodique, quasi-périodique ou chaotique.
- la nature du contact impliqué : intermittent ou permanent, glissant ou roulant.
- le sens de la précession obtenue : rétrograde ou directe.
- la vitesse de la précession : asynchrone, synchrone, sous-harmonique, sub-harmonique.
- le comportement transitoire du phénomène : amorti, établi ou instable.

Ces propriétés seront utilisées pour caractériser les comportements rencontrés dans notre étude et nous permettre de les comparer à ceux décrits dans la littérature. Des paramètres influents ont aussi été identifiés avec notamment l'importance

majeure du coefficient de frottement que nous garderons à l'esprit dans nos investigations.

Notre projet étudie le problème du contact rotor-stator par une approche hybride incluant la dynamique d'ensemble du moteur et la dynamique du module fan. Nous venons de traiter les aspects propres à la dynamique des rotors et nous allons, dans la section suivante, adopter la même démarche pour dégager les phénomènes et les paramètres influents de la littérature traitant du contact aube-carter.

1.2 Dynamique d'interaction roue aubagée-carter

La dynamique d'interaction roue aubagée-carter s'attache à décrire l'effet induit par les contacts de type c1 et c2 (voir figure II.2) sur la dynamique « locale » : roue aubagée-carter. L'effet de ces mêmes contacts sur la dynamique d'ensemble est traité soit par les approches décrites dans la section précédente soit par des approches hybrides que nous aborderons dans la section suivante.

Ces phénomènes d'interaction roue aubagée-carter font l'objet d'une littérature plus récente que pour le contact rotor-stator traité du point de vue de la dynamique des rotors. La première contribution majeure a été apportée par Schmiechen [Sch97b] qui s'intéresse au phénomène de *travelling wave speed coincidence*. Il s'agit d'une interaction modale entre deux modes tournants : l'un sur la roue aubagée et l'autre sur le carter. Comme nous l'avons expliqué en section I.4.2, les propriétés géométriques du carter et de la roue aubagée favorisent l'apparition de déformées propres tournantes. Du fait de la proximité entre les deux structures, ces modes tournants peuvent alors interagir par l'intermédiaire des contacts et échanger de l'énergie. Pour s'établir, ce phénomène doit faire intervenir des déformées modales géométriquement compatibles et dont les vitesses de propagation coïncident : ces deux critères sont illustrés figure II.4. Pour mieux comprendre ce phénomène, Legrand [Leg05 ; Leg+09] développe un modèle planaire de roue aubagée-carter dont l'illustration est reproduite figure II.4. Les aubes y sont modélisées par des poutres d'Euler-Bernoulli disposées de manière à créer une courbure permettant un déplacement radial du sommet d'aube. Batailly [Bat08] reprend la démarche sur un étage de compresseur bp et y introduit une étude de méthodes de réduction de modèle. Le phénomène est également observé et étudié sur les rouets centrifuges [Mei14 ; Mei+13 ; Alm+14a].

D'autres investigations se concentrent sur le comportement des aubes lors des contacts. Sinha [Sin05] calcule la réponse transitoire d'une poutre de Timoshenko en rotation soumise à des efforts impulsionsnels à son extrémité libre. Legrand et al. [Leg+12] prennent en compte un modèle éléments finis 3D d'un secteur de roue aubagée en contact avec un carter rigide présentant une déformation statique. La déformation introduite correspond aux distorsions causées par les gradients thermiques. Certaines études prennent en compte l'interaction à travers l'usure du matériau abrasable qui en recouvre la surface interne : Batailly et al. [Bat+12] étudient les lobes d'usures obtenus dans le matériau abrasable et montrent une bonne corré-

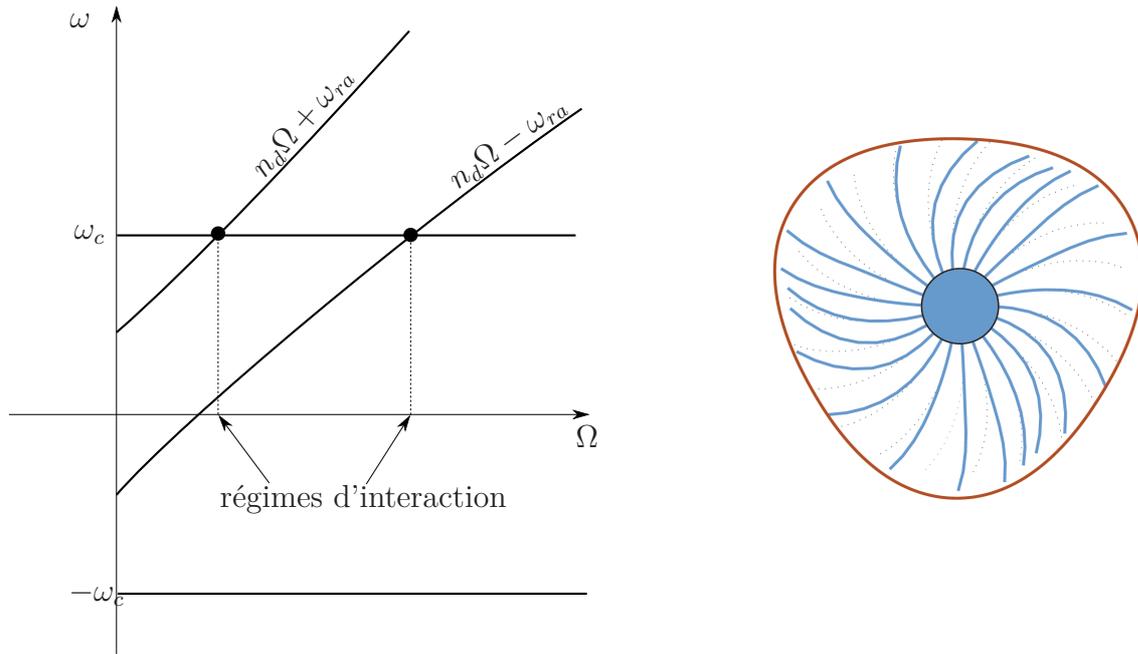


FIGURE II.4: Critères de l'interaction modale : à gauche, coïncidence des vitesses de propagation (diagramme tracé dans le repère fixe) ; à droite, compatibilité géométrique, modes à 3 diamètres nodaux (illustration provenant de [Leg05])

lation numérique-expérimental. La loi plastique introduite pour modéliser l'usure de l'abradable est également décrite dans [LBP12]. Millecamps et al. [Mil+09] et Almeida et al. [Alm+14b] utilisent une loi d'Archard pour introduire l'usure et incluent les effets thermiques liés au frottement. Salvat et al. [SBL13] considèrent l'usure comme une découpe d'usinage et adaptent les méthodes de résolution développées pour ce domaine. Des études expérimentales cherchent également à caractériser les propriétés des abradables et leur évolution avec la température, ainsi que les efforts de contact en jeu [Sch97a ; Foi+14 ; Man+14].

Enfin, les analogies à d'autres domaines ne se limitent pas aux outils numériques et peuvent être aussi conduites en termes de phénoménologie. Pour étudier l'effet des aubes en contact sur la dynamique du carter, Lesaffre et al. [LST07b] étudient la stabilité d'un anneau élastique soumis à des chargements tournants. Ils observent les mêmes instabilités que Vangipuram et al. [VCP05] qui s'intéressent au comportement des trains d'engrenage et retrouvent les phénomènes observés pour les systèmes pion-disque [CJ92 ; Ouy+98].

La littérature rencontrée traite donc le problème du contact aube-carter par trois approches distinctes :

- L'étude du phénomène d'interaction modale ou *travelling wave speed coincidence* qui nécessite que le modèle inclue la dynamique de la roue aubagée et du carter.
- L'étude plus fine du contact et de l'interaction avec l'abradable ou de la dynamique d'aubage pour lesquelles les modèles écartent la contribution dynamique

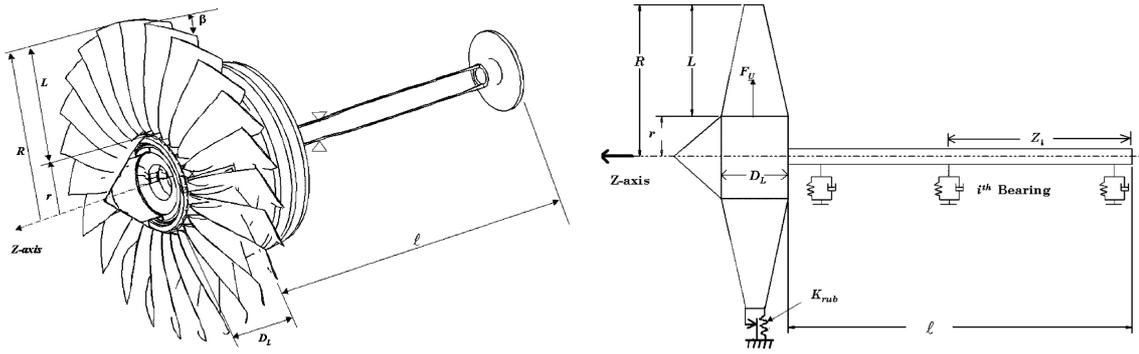


FIGURE II.5: Schémas du modèle proposé par Sinha [Sin04]

du carter.

– L'étude du comportement dynamique du carter soumis aux efforts de contact tournants pour laquelle la dynamique des aubes peut être simplifiée ou écartée. Ces différentes approches abordées dans cette synthèse, nous ont permis de dégager les phénomènes et de recueillir les paramètres influents identifiés par les auteurs. Comme dans la section précédente, l'importance du coefficient de frottement dans l'apparition des phénomènes et la stabilité du système est mise en évidence.

1.3 Positionnement de notre étude

L'étude proposée dans ce mémoire aborde le contact rotor-stator par une approche hybride incluant certains des aspects de l'interaction roue aubagée-carter et de l'interaction rotor-stator du point de vue de la dynamique d'ensemble. Nous décrivons à présent, les études hybrides rencontrées, sur lesquelles se basent nos investigations et expliquons notre positionnement vis-à-vis des auteurs présentés.

Sinha [Sin04] développe un modèle de rotor flexible aubagé pour étudier l'effet du contact entre les sommets d'aube fan et le carter. Pour cela, il construit un modèle analytique, schématisé figure II.5, qui comporte un arbre flexible connecté à un disque rigide représentatif du disque fan. Sur ce dernier, sont encastrées des aubes flexibles modélisées par des poutres de section rectangulaire. La prise de contact est initiée par l'apparition soudaine d'un balourd important (perte d'aube) et les efforts de contacts sont introduits par des raideurs.

Lesaffre [LST07a; Les07] s'appuie sur le modèle de rotor aubagé proposé par Sinha, dont il écrit la mise en équation par la méthode énergétique. Il complète le modèle par la prise en compte de la dynamique du carter modélisé par un anneau élastique inextensible. La stabilité est d'abord étudiée en statique pour des contacts supposés permanents, et des instabilités avec et sans frottement sont mises en évidence. Des analyses dynamiques qui autorisent les décollements, sont aussi réalisées dans le domaine temporel et fréquentiel.

Nos investigations s'appuient sur les travaux de Sinha et Lesaffre et s'en détachent sur trois points principaux :

– *Architecture du modèle* : Les modèles construits par Sinha et Lesaffre intro-

duisent la dynamique de l'arbre bp mais en limitent la cinématique en dehors du module fan : le rotor est en condition appuyée à son extrémité avale. Dans le modèle proposé, l'aval du rotor est libéré et connecté à un disque représentatif de la turbine bp afin de rendre les déformations de l'arbre plus représentatives du comportement réel du moteur. De plus, des degrés de liberté d'ensemble sont pris en compte pour le carter et un lien de raideur est introduit entre le carter et l'arbre. Il modélise la connection assurée par les deux premiers paliers et les bras du carter intermédiaire (voir figures II.1 et II.2). Ces enrichissements apportés au modèle, introduisent un couplage supplémentaire (arbre-carter) et permettent d'obtenir des configurations de contact originales qui conduisent à un spectre plus large de comportements.

– *Gestion du contact* : Nous proposons une gestion de contact originale qui permet d'améliorer la précision du modèle dans la détection des contacts et d'application des efforts. Les aubes et le carter sont modélisés respectivement par des poutres et un anneau élastique. Cette modélisation simplifiée suppose une perte d'information en termes de détection des touches et de prise en compte des efforts de contact. La méthode proposée permet de récupérer une partie de l'information dans ces aspects de gestion du contact tout en conservant la taille du modèle.

– *Application industrielle* : Le chapitre IV de ce document présente l'application de la méthode développée à un *Whole Engine Model* industriel. Le modèle *poutre-masse-ressorts* décrivant la dynamique d'un ensemble propulsif industriel comportant deux rotors, est enrichi d'aubes fan flexibles. La démarche de prédiction y est alors implémentée pour fournir des études paramétriques de la stabilité du moteur lors de contacts entre les sommets d'aube fan et le carter. Petrov [Pet12] a également conduit une étude basée sur un WEM de turboréacteur Rolls Royce, mais il conserve des aubages rigides et une gestion de contact simplifiée pour réaliser des analyses dans le domaine fréquentiel.

Cette section nous a permis de présenter une synthèse de la bibliographie traitant du contact rotor-stator et de positionner nos travaux en matière de phénomènes étudiés et de physique prise en compte. Nous aborderons par la suite les techniques de modélisation nécessaires à la mise en œuvre de l'étude. Les notions permettant d'introduire le contact dans le système d'équations seront présentées dans la section suivante. Pour ensuite, aborder les méthodes de résolution adaptées à ces non-linéarités et s'intéresser à la stabilité des solutions obtenues.

2 Implémentation du contact

La prise de contact entre deux solides élastiques implique de nombreux phénomènes physiques. Tout d'abord, des efforts qui s'opposent à l'interpénétration des solides apparaissent et se répercutent sur les champs de déplacements. Selon le matériau et l'intensité du contact ils peuvent également conduire à des déformations plastiques. De plus, le mouvement relatif des solides en contact induit du frottement qui s'accompagne d'échauffement et selon le matériau et la géométrie des solides,

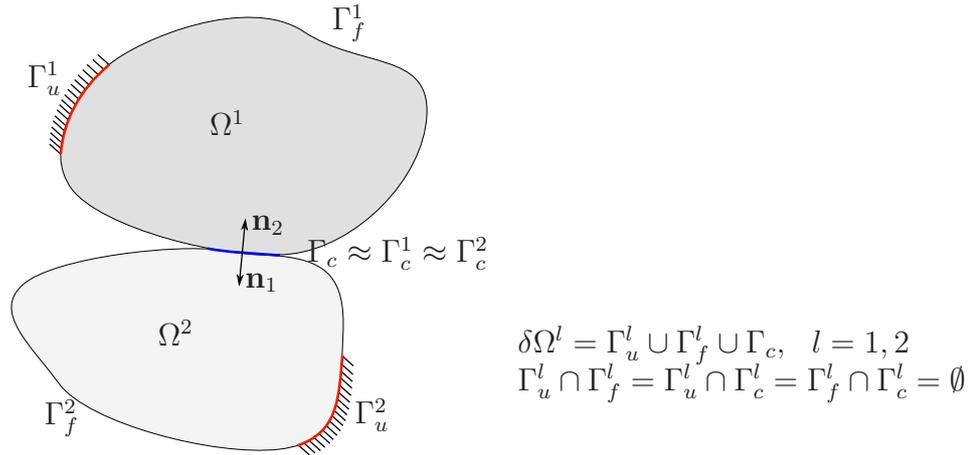


FIGURE II.6: Deux solides élastiques en contact

d'usure ou d'arrachement. Dans le cadre de notre étude, nous nous focalisons sur les aspects mécaniques du contact en écartant les effets thermiques et l'usure.

Dans cette section, les relations de contact seront d'abord définies. Puis, des méthodes de gestion du contact permettant d'introduire les efforts de contact dans le système d'équation matriciel du système seront décrites.

2.1 Relations de contact

Soit deux corps déformables, Ω^1 et Ω^2 potentiellement en contact (voir figure II.6). Le corps Ω^1 est défini comme « maître » et le corps Ω^2 comme « esclave » : les relations de contact seront ainsi définies en fonction des paramètres de Ω^1 (le principe d'action-réaction permettant d'interchanger les rôles). Chacun des solides est soumis à une densité d'efforts volumique et leur frontière $\delta\Omega^l$ ($l = 1, 2$) est divisée en trois parties distinctes suivant la nature des conditions aux limites : Γ_u^l représente la portion de frontière où les déplacements sont imposés, Γ_f^l celle où s'appliquent des efforts surfaciques et Γ_c est la zone de contact entre les solides.

Fonction de distance minimum : A chaque point P^1 , de vecteur lieu \mathbf{x}^1 , appartenant à la surface de contact du solide maître Γ_c^1 , correspond le point P^2 , de vecteur lieu \mathbf{x}^2 , le plus proche de P^1 appartenant la surface de contact du solide esclave Γ_c^2 . La position du point P^2 est obtenue en résolvant l'équation suivante :

$$\mathbf{x}^2(\mathbf{x}^1) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}^i \in \Gamma_c^2} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^i\|_2 \quad (\text{II.1})$$

La distance minimum entre le point P^1 et la surface du solide esclave est alors donnée par l'expression suivante :

$$g(\mathbf{u}) = g_0 + (\mathbf{u}^2(P^2) - \mathbf{u}^1(P^1)) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{II.2})$$

où g_0 désigne la distance entre les deux solides à l'instant initial et \mathbf{u} est le champ de déplacement du système.

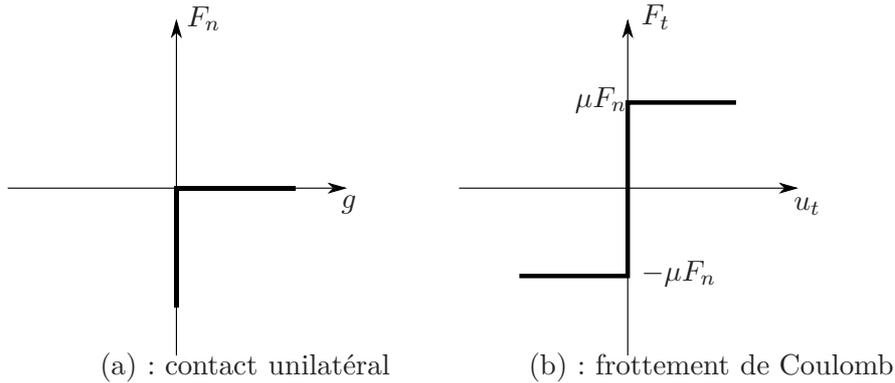


FIGURE II.7: Illustration des relations de contact

Contact unilatéral : La loi de contact unilatéral définit les relations entre les efforts de pression de contact et le déplacement relatif des solides dans la direction normale. Elles sont décrites par les conditions de Hertz-Signorini-Moreau [Wri06] :

$$g(\mathbf{u}) \geq 0; F_n \leq 0; F_n g(\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{II.3})$$

Où F_n est l'effort normal de contact.

La première inégalité de (II.3) constitue la condition de non-pénétration des solides l'un dans l'autre. La seconde inégalité indique que les efforts normaux liés au contact, ne peuvent être que compressifs. Enfin, la dernière inégalité est la condition de compatibilité qui indique qu'en un point, il ne peut y avoir simultanément contact et décollement.

Frottement de Coulomb : Le frottement introduit des efforts qui s'opposent au mouvement relatif entre les surfaces en contact. Pour les caractériser, nous adopterons ici la loi de Coulomb qui est la formulation la plus répandue. Cette loi définit les conditions pour lesquels les solides en contact adopteront un état collé ou glissant, et peut s'écrire sous la forme :

$$f(F_n, F_t) = |F_t| + \mu F_n \leq 0; |u_t| \geq 0; |u_t| f = 0 \quad (\text{II.4})$$

où le paramètre μ est appelé coefficient de frottement, il est considéré ici comme constant.

La phase collée pour laquelle $u_t = 0$, correspond à $|F_t| < -\mu F_n$ et il y a glissement lorsque $|F_t| = -\mu F_n$.

Les conditions de contact unilatéral avec frottement de Coulomb sont résumées figure II.7.

Formulation du problème dynamique avec contact : Le détail de la mise en équation du problème mécanique avec contact dans le cadre de la mécanique des milieux continus, est présenté dans [DL72; Duv90] ainsi que dans les mémoires de

thèse suivants : [Cha06 ; Nac02 ; Leg05 ; Les07]. Nous présentons ici uniquement la forme faible discrète de l'égalité variationnelle :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{NL}} \quad (\text{II.5})$$

Où $\mathbf{q}(t)$ est le vecteur des coordonnées généralisées qui permettent d'approcher le champ de déplacement réel (voir section I.2). \mathbf{F}_{NL} est le vecteur des efforts de contact, comme $\mathbf{q}(t)$, il est une inconnue du problème et doit vérifier les contraintes associées au contact unilatéral et à la loi de Coulomb. Différentes gestions de contact permettent d'exprimer \mathbf{F}_{NL} , elles sont présentées ci-après.

2.2 Méthodes de gestion du contact

Différentes façons d'exprimer les efforts de contact existent. Elles permettent de s'adapter à la physique du contact que l'on souhaite modéliser ou peuvent être choisies en fonction de la résolution numérique envisagée. Nous présenterons ici les deux méthodes les plus utilisées dans les problèmes de contact rotor-stator, à savoir : la méthode de pénalité et la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La synthèse bibliographique proposée par [BK05] présente de façon plus exhaustive les algorithmes de contact existants et leur cadre d'utilisation.

Méthode de pénalité : Utiliser la pénalisation pour exprimer l'effort normal de contact consiste à remplacer la loi de contact unilatérale par une loi approchée. L'effort de contact est supposé proportionnel au résidu de la contrainte d'impénétrabilité, c'est-à-dire, à la pénétration entre les solides en contact. Le vecteur des efforts non-linéaires de contact de l'équation (II.5) peut donc prendre la forme suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{NL}} = (\mathbf{B}_n^T + \mu\mathbf{B}_t^T) k_c \mathbf{g} \text{ pour } \mathbf{g} < \mathbf{0} \quad (\text{II.6})$$

où k_c est le coefficient de pénalisation, \mathbf{B}_n et \mathbf{B}_t sont les matrices de contraintes de contact qui définissent l'application des réactions de contact normales et tangentielles sur les coordonnées généralisées du système. \mathbf{g} est le vecteur jeu discrétisé contenant les pénétrations distribuées sur les coordonnées généralisées.

Le contact introduit donc une raideur à l'interface des solides et les effort de contact sont exprimés comme des forces de rappel. Cette méthode, simple à mettre en œuvre, permet de transformer le problème de contact en un problème d'optimisation sans contrainte. Cependant, la valeur du coefficient de pénalisation k_c (équivalent à une raideur normale de contact) est très influente et est difficile à estimer ou mesurer. Une valeur trop importante de ce paramètre de régularisation conduit à un mauvais conditionnement du problème numérique tandis qu'une valeur trop faible conduit à des valeurs de pénétrations incohérentes.

Cette méthode est adoptée dans la plupart des problèmes de contact rotor-stator sans aubages [Bla66 ; CP87 ; ZWL03 ; Col08 ; SJH11] et sera choisie ici pour sa simplicité de mise en œuvre et car elle permettra de considérer facilement les paramètres connus qui caractérisent les abrasables.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange : La contribution du contact est exprimée à l'aide de nouvelles inconnues : les multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode permet de respecter strictement les conditions de contact (II.3), mais accroît la taille du problème à résoudre. Le vecteur des efforts de contact généralisés peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{NL}} &= (\mathbf{B}_n^T + \mu \mathbf{B}_t^T) \boldsymbol{\lambda} \\ \text{avec } \mathbf{g} &\geq 0; \quad \boldsymbol{\lambda} \leq 0; \quad \mathbf{g}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Où $\boldsymbol{\lambda}$ sont les multiplicateurs de Lagrange ou *lagrangiens* qui correspondent aux réactions de contact inconnues. Cette gestion de contact est utilisée par [Leg05; Les07; Roq07; Bat08]. Des variantes de la méthode des multiplicateurs de Lagrange existent, on peut mentionner la méthode des Lagrangiens augmentés qui consiste à traiter le problème à l'aide de multiplicateurs auxquels un terme de pénalisation est ajouté [Kus08].

Cette section a permis d'exposer les relations de contact et certaines des méthodes permettant d'intégrer les efforts de contact au système d'équations du mouvement. Le problème dynamique à traiter est donc maintenant non-linéaire et nous aborderons dans la section qui suit, les méthodes de résolution permettant d'en obtenir les solutions.

3 Résolution du problème non-linéaire

Le contact étant introduit dans les équations du mouvement, nous nous intéressons à présent à la résolution du système rendu non-linéaire. A la différence des systèmes linéaires, on ne peut connaître a priori ni le nombre, ni la nature de ses solutions. Des méthodes globales qui permettent d'identifier toutes les solutions existent [Sar08; SGT11], mais ces techniques sont récentes et peu d'exemples s'éloignent des applications académiques. Nous nous focaliserons ici sur les méthodes locales permettant de trouver une solution particulière du système à partir d'une position initiale donnée. De nombreuses méthodes existent, le choix dépend de la nature des non-linéarités, de la taille des modèles et du type de solution recherchée. Quand la non-linéarité est faible et régulière, le problème peut être traité par des méthodes analytiques comme celle des perturbations [NB95]. Pour des problèmes de taille plus importante ou dont les non-linéarités sont fortes et irrégulières, comme c'est le cas ici, le problème est traité par des méthodes numériques.

Rappelons que le système d'équation dont on souhaite obtenir les solutions prend la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \quad (\text{II.8})$$

Les solutions de (II.8) peuvent être de quatre types [NB95] :

- Les *points fixes* ou *points d'équilibre* sont des solutions stationnaires, indépendantes du temps.

- Les *solutions périodiques* ou *cycles limites* reproduisent un même motif à une fréquence constante.
- Les *solutions quasi-périodiques* sont caractérisées par plusieurs fréquences dont le rapport est irrationnel.
- Enfin, les *solution chaotiques* présentent un comportement qui semble aléatoire bien qu'il soit déterminé par l'équation du système.

Nous présenterons dans un premier temps les méthodes dites d'intégration temporelle qui permettent d'obtenir indifféremment chacun de ces types de solutions. Dans le cas explicite, ces techniques se basent sur une relation de récurrence qui, à partir de conditions initiales, permet de calculer pas à pas, la solution du problème dynamique sur l'intervalle de temps souhaité.

En faisant certaines hypothèses, il est parfois possible de transformer le système d'équations différentielles en un système algébrique. De nombreux algorithmes permettent alors de rencontrer les solutions stationnaires plus rapidement que par l'intégration temporelle. Nous nous intéresserons plus spécifiquement aux algorithmes basés sur le calcul du gradient.

Enfin, lorsque la solution attendue est un cycle limite, des méthodes spécifiques existent. On peut citer notamment la méthode de tir (temporelle) [SN97] ou les méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel basées sur le principe de la balance harmonique [CG89 ; Nac02].

3.1 Intégration temporelle

Les schémas d'intégration temporelle sont des méthodes classiques de résolution des systèmes d'équations différentielles dépendant du temps [GR93 ; Gmu07]. La démarche associée est assez intuitive et consiste à construire une solution pas à pas, progressivement dans le temps, à partir d'une position initiale connue. L'équation (II.8) est discrétisée en temps et l'intégrateur temporel vérifie l'équation en plusieurs instants consécutifs t_n . Des hypothèses, propres à chaque schéma d'intégration, permettent d'estimer les variations du champ de déplacement, vitesse et accélération durant chaque intervalle de temps $[t_n; t_{n+1}]$, qui peut être fixé ou varier au cours du calcul.

On distingue deux types de schémas d'intégration : les *schéma explicites* et les *schémas implicites*. Les schémas dits *explicites* construisent la solution à l'instant t_{n+1} à partir de la solution à l'instant t_n uniquement, tandis que les schémas dits *implicites* s'appuient aussi sur l'équation du mouvement à l'instant t_{n+1} . Les schémas d'intégration se caractérisent aussi par leur *stabilité* et leur *consistance* :

- La *consistance* d'un schéma d'intégration assure que la solution issue des expressions discrétisées (hors erreurs numériques) tend vers la solution exacte de l'équation différentielle lorsque le pas de temps tend vers 0. Elle est assurée si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{h} = \dot{\mathbf{x}}_n \quad (\text{II.9})$$

où \mathbf{x} est le vecteur d'état $\{\dot{\mathbf{q}}^T, \mathbf{q}^T\}^T$.

– Un schéma d'intégration est *stable* s'il existe un pas d'intégration $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in [0, h_0]$, toute perturbation finie de \mathbf{x}_n au temps t_n n'entraîne qu'une modification non-croissante de \mathbf{x}_{n+j} calculé à un instant ultérieur t_{n+j} . Si le schéma d'intégration est *stable* et *consistant* alors il est *convergent*.

Le système d'équation (II.8) est une équation différentielle de second ordre mais peut être reformulé dans l'espace d'état pour obtenir une forme plus compacte du premier ordre. En introduisant, le vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$, (II.8) peut prendre la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \text{ avec } \mathbf{f} : (\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}^*(\mathbf{x})) \quad (\text{II.10})$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}} \\ \tilde{\mathbf{K}} & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{F}^* = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{NL}} \end{array} \right\} \quad (\text{II.11})$$

La taille du système d'équation a ainsi doublé mais l'équation différentielle n'est plus que du premier ordre. Cette forme permet d'utiliser des schémas d'intégration adaptés aux équations différentielles du premier ordre.

Équations différentielles du premier ordre : L'équation (II.10) peut être traitée par les algorithmes d'intégration temporelle adaptés à la résolution des équations différentielles du premier ordre. Le plus rudimentaire d'entre eux est le schéma d'Euler. Dans sa forme explicite, la solution recherchée est de la forme :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n) \quad (\text{II.12})$$

où h est le pas de temps : $h = t_{n+1} - t_n$. Les quantités à déterminer dépendent ici uniquement des quantités obtenues au pas de temps précédent. Cette méthode est rapide mais peut présenter des problèmes de stabilité. Pour un schéma d'Euler implicite, la solution au temps t_{n+1} est de la forme :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1}) \quad (\text{II.13})$$

Dans le cas implicite, l'obtention de la solution au pas de temps suivant n'est plus immédiate et nécessite la résolution d'une équation algébrique intermédiaire. Les schémas d'Euler explicite ou implicite sont d'ordre 1, c'est-à-dire qu'il n'implique qu'une seule évaluation de \mathbf{f} par pas de temps, ce qui peut poser des problèmes de précision et de stabilité. Les méthodes d'ordre supérieur, comme les schémas de Runge-Kutta [Pre+07, chap 17], leur sont donc généralement préférés.

Équations différentielles du second ordre : Les schémas d'intégration adaptés aux équations différentielles du premier ordre présentent l'inconvénient de nous contraindre à formuler l'équation du système dans l'espace d'état (II.10), ce qui double la taille du problème à résoudre. D'autres méthodes existent et permettent de résoudre le système d'équation sous sa forme du second ordre (II.8). La famille de schémas la plus connue et la plus largement utilisée, est la famille de schéma de Newmark [New59]. Elle repose sur le développement de Taylor au premier ordre des

déplacements et des vitesses et sur l'approximation des restes (intégrales d'accélération) par quadrature numérique. Un schéma général d'intégration de Newmark, appliqué à la résolution d'un système dynamique linéaire, est constitué des relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + (1 - \gamma)h\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma h\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \\ \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{\mathbf{q}}_n + \beta h^2\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

β et γ sont les paramètres de quadrature utilisés pour approcher les intégrales d'accélération, ils sont caractéristiques du schéma d'intégration utilisé. Lorsque β est nul, l'état du système au temps t_{n+1} est obtenu uniquement à partir de l'état du système au temps t_n : le schéma associé est donc explicite.

Une étude détaillée de la stabilité des algorithmes de Newmark, appliqué à un système linéaire non amorti, est donnée dans [GR93] : les propriétés obtenues sont résumées ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta & \text{schéma inconditionnellement stable} \\ \frac{1}{2} \leq \gamma \text{ et } 2\beta \leq \gamma & \text{schéma stable si } h \leq \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\gamma}{2}-\beta}} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

[Com07; Hug87; GR93] montrent également que les schémas de Newmark sont consistants.

L'algorithme d'intégration que nous utiliserons par la suite est le schéma des *différences finies centrées*. Ce schéma explicite est équivalent à un schéma de Newmark pour $\gamma = 1/2$ et $\beta = 0$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h}{2}(\ddot{\mathbf{q}}_n + \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}) \\ \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{q}}_n \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

On peut alors mettre ce système sous une forme à trois pas en exprimant les relations (II.16) au temps t_n à partir des quantités au pas précédent. Cela conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{2h}(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_{n-1}) \\ \ddot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{h^2}(\mathbf{q}_{n+1} - 2\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n-1}) \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

En introduisant alors (II.17) dans l'équation du système (II.8) dépourvue des efforts non-linéaires, le champ de déplacement au temps t_{n+1} est donné par :

$$\mathbf{q}_{n+1} = \left(\frac{1}{h^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2h}\tilde{\mathbf{D}}\right)^{-1} \left(\mathbf{F}_{\text{ex}}^{(n)} + \left(\frac{2}{h^2}\mathbf{M} - \tilde{\mathbf{K}}\right)\mathbf{q}_n + \left(\frac{1}{2h}\tilde{\mathbf{D}} - \frac{1}{h^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{q}_{n-1}\right) \quad (\text{II.18})$$

Mise en œuvre pour le système non-linéaire : Dans la pratique, l'algorithme s'articule, à chaque pas de temps, d'une étape de prédiction, de détermination des efforts non-linéaires, suivie d'une étape de correction :

1. Calcul des prédicteurs des champs de déplacements et de vitesses :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_{n+1} = \left(\frac{1}{h^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2h} \tilde{\mathbf{D}} \right)^{-1} \left(\mathbf{F}_{\text{ex}}^{(n)} + \left(\frac{2}{h^2} \mathbf{M} - \tilde{\mathbf{K}} \right) \mathbf{q}_n + \left(\frac{1}{2h} \tilde{\mathbf{D}} - \frac{1}{h^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{q}_{n-1} \right) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{n+1} = \frac{1}{h} (\tilde{\mathbf{q}}_{n+1} - \mathbf{q}_n) \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

2. Les jeux entre les sommets de chacune des aubes et la surface du carter en regard sont alors calculés, si des touches sont détectées, alors les efforts de contact associés sont obtenus par la méthode de pénalité (II.6) $\rightarrow \mathbf{F}_{\text{NL}}^{(n)}$. La correction à appliquer au champ de déplacement est alors donnée par :

$$\Delta \mathbf{q} = \left(\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\tilde{\mathbf{D}}}{2h} \right)^{-1} \mathbf{F}_{\text{NL}}^{(n)} \quad (\text{II.20})$$

3. Les quantités sont corrigées :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{n+1} = \tilde{\mathbf{q}} + \Delta \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{1}{h} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) \\ \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{F}_{\text{ex}}^{(n+1)} - \tilde{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{q}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q}_{n+1} \right) \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Il est important de préciser que les critères analytiques de convergence des schémas de Newmark établis pour des systèmes linéaires, ne sont plus valables lorsque les schémas sont appliqués à la résolution de systèmes non-linéaires. Ce schéma des différences finies centrées est utilisé par de nombreux auteurs pour des applications comparables à la notre [Vor+95b; Vor+95a; Leg05; Les07; Roq07; Bat08], nous reprendrons donc leurs tests de validation.

3.2 Résolution de systèmes algébriques non-linéaires

Lorsque l'on souhaite obtenir la solution stationnaire d'un système, la résolution par intégration temporelle peut s'avérer coûteuse en temps de calcul. En effet, le schéma d'intégration temporelle fournit toute l'évolution des champs de déplacements, vitesses et accélérations depuis les conditions initiales et la durée d'intégration nécessaire pour atteindre un état stationnaire peut être longue. En faisant certaines hypothèses, il est parfois possible de transformer le système d'équations différentielles en un système algébrique. La résolution de l'équation statique non-linéaire peut alors se ramener à un problème de minimisation. Dans notre cas, il prendrait la forme suivante :

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \text{ avec } \mathbf{R}(\mathbf{q}) = \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q} - \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_{\text{ex}} \quad (\text{II.22})$$

De nombreux algorithmes existent alors pour rechercher efficacement la solution stationnaire \mathbf{q} qui minimise le résidu \mathbf{R} [Pre+07; RR78]. Nous nous intéressons ici aux algorithmes itératifs basés sur le calcul du gradient. Ces méthodes s'articulent toutes de la même façon : à partir d'un point de départ donné, il s'agit de rechercher

les corrections à apporter jusqu'à atteindre itérativement une solution satisfaisante du système algébrique non-linéaire. Le succès dépend alors fortement de la qualité du point de départ choisi et de la taille du pas utilisé lors des itérations. Le calcul des corrections à apporter repose sur le développement de l'équation (II.22) au premier ordre. A partir d'un point de départ $\mathbf{q}^{(0)}$, on cherche la correction $\Delta\mathbf{q}$ à apporter pour obtenir $\mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q}) = 0$. La correction est obtenue en résolvant l'équation linéaire suivante :

$$\Delta\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_q \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) = -\mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)}) \quad (\text{II.23})$$

où $\mathbf{J}_q \mathbf{R}(\mathbf{q}^{(0)})$ est la matrice jacobienne de \mathbf{R} en $\mathbf{q}^{(0)}$. La solution suivante $\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{q}^{(0)} + \Delta\mathbf{q}$ est alors obtenue et l'opération est répétée jusqu'à ce que la condition fixée sur le résidu soit satisfaite : $\|\mathbf{R}(\mathbf{q}^{(i)})\| < \epsilon$.

Cette démarche constitue la base des méthodes dites de *Newton* ou *Newton-Raphson*. De nombreuses variantes existent avec des raffinements ou des développements à un ordre supérieur. Toutes présentent l'inconvénient que la convergence dépende fortement du point de départ choisi. Nous utiliserons dans nos travaux un algorithme à région de confiance qui permet de renforcer la convergence [CGT00].

3.3 Obtention des cycles limites

Un système linéaire soumis à une excitation harmonique, fournira, une fois le régime permanent atteint, une réponse harmonique. Cette propriété n'est plus toujours vraie pour les systèmes non-linéaires, mais il est parfois légitime de supposer que la réponse forcée d'un système non-linéaire reste périodique. Nous aborderons donc ici les méthodes qui recherchent la solution permanente périodique et permettent de s'affranchir du calcul de la phase transitoire, exigé dans le cas d'une résolution par intégration temporelle.

Une solution périodique ou cycle limite se définit par la répétition d'un motif donné à un intervalle de temps constant. La méthode de tir ou *shooting* est une méthode temporelle qui s'appuie sur cette propriété, elle consiste à rechercher directement une solution initiale se situant sur le motif périodique. Il s'agit d'apporter des corrections à la solution de départ ($t = t_0$) jusqu'à obtenir une solution finale ($t = t_0 + T$) identique. La résolution se ramène alors à un problème algébrique traité par les méthodes décrites à la section précédente et l'intégration temporelle n'est réalisée que sur une période. Des exemples d'application en dynamique des rotors sont proposés par [SN97 ; Dem03].

D'autres méthodes recherchent la solution périodique en projetant le problème dans l'espace de Fourier, autrement dit dans le domaine fréquentiel. Ces méthodes s'appuient sur l'hypothèse que la solution peut être approchée par une série de Fourier :

$$\mathbf{q}(t) \approx \sum_{k=0}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos k\omega t + \mathbf{b}_k \sin k\omega t) \quad (\text{II.24})$$

N_h est le nombre d'harmonique conservées. Les coefficients de Fourier \mathbf{a}_k et \mathbf{b}_k sont les nouvelles inconnues du problème. Cette relation et ses dérivées temporelles sont

substituées dans l'équation du mouvement (II.8). Le système d'équations est alors projeté sur la base des fonctions trigonométriques, c'est la procédure de Galerkin ou équilibrage harmonique. Cette procédure permet de supprimer la dépendance au temps pour se ramener à un problème algébrique non-linéaire résoluble par les méthodes abordées dans la section précédente. Les méthodes qui s'appuient sur cette démarche sont appelées méthodes de la Balance Harmonique ou HBM (pour *Harmonic Balance Method*).

Selon le problème traité, l'expression dans la base harmonique, des efforts extérieurs et des efforts non-linéaires peut être d'obtention difficile. Des méthodes permettent de contourner cette difficulté en gardant l'expression de ces efforts dans l'espace temporel : la méthode de *collocation trigonométrique* et la méthode AFT (pour *Alternating Frequency-Time*) sont décrites et utilisées dans [CG89 ; Dem03]

Une partie des outils numériques utiles pour obtenir les solutions permanentes d'un système dynamique non-linéaire ont été présentés. D'autres méthodes existent, des méthodes plus globales sont notamment présentées dans [Sar08].

Nous allons à présent nous focaliser sur l'étude de la stabilité de ces solutions.

4 Stabilité des solutions

D'une façon générale, la stabilité d'un état d'équilibre caractérise la faculté de cet équilibre à revenir à son état de base lorsqu'il est soumis à une perturbation. Suivant la nature de la solution étudiée et l'amplitude de la perturbation, différents concepts et méthodes d'analyse sont définis pour caractériser cette propriété. Une fois quelques définitions posées, nous présenterons les méthodes d'étude locales de la stabilité des points fixes et des cycles limites. Enfin, les phénomènes de bifurcations locales seront définis et présentés pour ces deux types de solution.

Dans ce qui va suivre, la formulation compacte du système d'équation non-linéaire tel que décrit par les équations (II.10) et (II.11), sera adoptée :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{II.25}$$

La stabilité d'un équilibre peut dépendre de la perturbation initiale, on distingue trois cas de figure [NB95] :

- *Stabilité inconditionnelle* : une solution stable quelle que soit la perturbation initiale est dite inconditionnellement stable. Elle est alors unique.
- *Stabilité conditionnelle* : lorsque la stabilité de la solution dépend de l'amplitude et la forme de la perturbation introduite, elle est dite conditionnellement stable. L'ensemble des perturbations pour lesquelles la solution perturbée revient à son état de base, est appelé *bassin d'attraction* et la solution concernée est un *attracteur*.
- *Instabilité inconditionnelle* : lorsque l'équilibre ne peut se maintenir, la solution est dite inconditionnellement instable.

La définition de stabilité inconditionnelle la plus courante, est celle de Lyapunov (1892) : une solution \mathbf{x} de (II.25) est stable au sens de Lyapunov si :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall \mathbf{y} \text{ solution de (II.10),} \\ \|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta \implies \forall t > t_0, \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

Si une solution \mathbf{x} est stable au sens de Lyapunov et que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0$, elle est dite asymptotiquement stable.

Pour caractériser la stabilité des solutions périodiques, on utilise la notion de stabilité orbitale introduite par Poincaré. Une solution périodique $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$ est associé à la trajectoire \mathcal{C} qui désigne l'ensemble des points qu'elle visite. Une solution périodique $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$ de trajectoire \mathcal{C} est orbitalement stable si :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall \mathbf{y} \text{ solution de (II.10),} \\ d(\mathbf{y}(t_0), \mathcal{C}) < \delta \implies \forall t > t_0, d(\mathbf{y}(t), \mathcal{C}) < \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\mathbf{y}(t), \mathcal{C}) = 0$, la solution est dite orbitalement attractive.

En pratique, la stabilité globale est difficile à déterminer et on cherche le plus souvent, à démontrer la stabilité locale d'une solution. On considère alors une perturbation suffisamment petite pour linéariser le problème au voisinage de l'équilibre.

4.1 Stabilité locale des points fixes

Soit \mathbf{x}_0 , un point fixe solution de l'équation (II.25). Pour déterminer sa stabilité, on introduit une petite perturbation $\mathbf{z}(t)$. Le système (II.25) au point $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}(t)$, s'écrit :

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}, t) \quad (\text{II.28})$$

La perturbation \mathbf{z} étant petite, (II.28) peut être approché par son développement de Taylor au premier ordre :

$$\dot{\mathbf{z}} \approx \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{z} \quad (\text{II.29})$$

Où $\mathbf{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ est la jacobienne de \mathbf{f} au point \mathbf{x}_0 . $\mathbf{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ est constante, l'équation (II.29) se ramène donc à un problème aux valeurs propres et \mathbf{z} est de la forme :

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^{2N} z_i e^{\lambda_i t} \quad (\text{II.30})$$

Où $\lambda_i = \sigma_i - i\omega_i$ sont les valeurs propres de $\mathbf{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ et z_i les vecteurs propres associés. La décroissance de \mathbf{z} qui assure la stabilité locale du point d'équilibre \mathbf{x}_0 , va donc dépendre du signe des parties réelles σ_i de chacun des modes propres. Tandis que la présence ou non de la partie imaginaire ω_i va traduire le caractère oscillant ou stationnaire du mode concerné.

L'ensemble de ces valeurs va permettre de caractériser la nature du point d'équilibre. Si toutes les valeurs propres λ_i possèdent une partie réelle, il s'agit d'un *point d'équilibre hyperbolique*. Il en existe plusieurs sortes :

- Si toutes les valeurs propres possèdent des parties réelles négatives, la solution est asymptotiquement stable et est appelée *puit* :
 - Si toutes les valeurs propres sont réelles, la solution est un *nœud stable*.
 - Si $\mathbf{J}_x \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ possède une ou plusieurs valeurs propres complexes, la solution est un *foyer stable*.
- Si toutes les valeurs propres possèdent des parties réelles positives, la solution est instable et est appelée *source* :
 - Si toutes les valeurs propres sont réelles, la solution est un *nœud instable*.
 - Si une ou plusieurs valeurs propres sont complexes, la solution est un *foyer instable*.
- Si les valeurs propres possèdent à la fois des parties réelles négatives et positives, la solution est instable et est appelée *point selle*.

Si $\mathbf{J}_x \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ possède une ou plusieurs valeurs propres dont la partie réelle est nulle, la solution est un point d'équilibre non hyperbolique :

- Si une ou plusieurs valeurs propres ont une partie réelle positive, le point fixe est instable.
- Si toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives ou nulles, le point fixe est *neutre ou marginalement stable*.
- Si toutes les parties réelles sont nulles, le point fixe est appelé un *centre*.

Pour juger de la stabilité d'un point fixe neutre ou d'un centre, il faut accroître l'ordre du développement de Taylor introduit en (II.29).

4.2 Stabilité locale des solutions périodiques

Soit $\mathbf{x}_0(t)$, une solution T_0 périodique de (II.25). Il lui est ajoutée une petite perturbation $\mathbf{z}(t)$, le système (II.25) au point $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{z}(t)$ peut être approché par son développement de Taylor au premier ordre :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}_0(t) + \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), t) + \mathbf{J}_x \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \cdot \mathbf{z}(t) + O(\|\mathbf{z}\|^2) \quad (\text{II.31})$$

En introduisant l'expression $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$, on obtient :

$$\dot{\mathbf{z}}(t) \approx \mathbf{J}_x \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \cdot \mathbf{z}(t) \quad (\text{II.32})$$

A la différence d'une solution de type point fixe, $\mathbf{J}_x \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t))$ la jacobienne de \mathbf{f} en $\mathbf{x}_0(t)$ dépend du temps et est périodique de période T_0 .

L'analyse de stabilité doit alors être menée grâce à une méthode adaptée aux systèmes linéaires paramétriques. Le théorème de Floquet permet de faire abstraction de la dépendance au temps, associée à la périodicité pour ne s'intéresser qu'à l'évolution globale de croissance ou décroissance de \mathbf{z} [SN98]. Considérons une base de solutions linéairement indépendantes $\mathbf{z}(t) = [z_1, \dots, z_{2N}]$, les solutions étant périodiques de période T_0 , on peut montrer que si $\mathbf{z}(t)$ est solution, $\mathbf{z}(t+T_0)$ est également solution et que les $z_i(t+T_0)$ sont des combinaisons linéaires des $z_i(t)$:

$$\mathbf{z}(t+T_0) = \mathbf{z}(t)\Phi \quad (\text{II.33})$$

En choisissant pour base de départ, $\mathbf{z}(t = 0) = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{z}(T_0) = \Phi \quad (\text{II.34})$$

Cette matrice Φ est appelée *matrice de monodromie*. Les solutions $\mathbf{z}(t)$ du système d'équation $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t))\mathbf{z}$ peuvent s'écrire :

$$\mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{Z}}(t)e^{\gamma t} \quad (\text{II.35})$$

Où $\hat{\mathbf{Z}}(t)$ est une matrice périodique et γ une matrice constante dont les valeurs propres γ_i vont caractériser la tendance à la croissance ou décroissance de $\mathbf{z}(t)$, indépendamment de son caractère périodique. Ses valeurs propres sont appelées *exposants de Floquet*. En reprenant les expressions précédentes, on peut faire le lien entre les valeurs propres de la matrice monodrome Φ et les γ_i :

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{I} = \hat{\mathbf{Z}}(0) \text{ et } \mathbf{z}(T_0) = \Phi = \hat{\mathbf{Z}}(T_0)e^{\gamma T_0} = \hat{\mathbf{Z}}(T_0)e^{\gamma T_0} \Rightarrow \Phi = e^{\gamma T_0} \quad (\text{II.36})$$

Les valeurs propres notées ρ_i de la matrice Φ sont appelés *coefficients de Floquet* et sont donc liés aux exposants de Floquet γ_i par la relation :

$$\rho_i = e^{\gamma_i T_0} \quad (\text{II.37})$$

La position dans le plan complexe des valeurs propres de la matrice monodrome ρ_i renseigne alors sur la stabilité de la solution périodique :

- Si tous les ρ_i se situent à l'intérieur du cercle unité, $\mathbf{z}(t)$ va décroître et $\mathbf{x}_0(t)$ est stable, c'est un cycle dit *attracteur*.
- Si l'un au moins des ρ_i se situe à l'extérieur du cercle unité, $\mathbf{x}_0(t)$ est instable.
- Si l'un des ρ_i se situe sur le cercle unité, la solution est *non hyperbolique* et il faut pousser plus loin le développement de Taylor pour analyser la stabilité de la solution.

D'autres méthodes permettent d'étudier la stabilité des solutions périodiques, nous pouvons citer notamment la méthode de Hill [NB95 ; GE01] et les variantes proposées par Laxalde [Lax07] ou plus récemment par Peletan [Pel12].

4.3 Bifurcations locales

Les deux paragraphes précédents ont consisté à caractériser la nature des solutions du système pour un jeu de paramètres donnés. Il est aussi possible d'étudier l'évolution de la nature de ces solutions lorsqu'un (ou plusieurs) paramètre varie. Si au cours de l'évolution, une solution hyperbolique (statique ou périodique) devient non-hyperbolique : la solution a subi une *bifurcation* et le point de transition entre les deux natures de la solution est appelé *point de bifurcation*. L'allure de ces bifurcations s'illustre dans un *diagramme de bifurcation* où est tracé l'évolution des solutions en fonction du paramètre choisi. Nous reprendrons ici les notations de Nayfeh et Balachandran [NB95] où la grandeur caractéristique de la solution est notée x et le paramètre de contrôle est μ .

Bifurcations locales des points fixes : A partir d'une solution de type point fixe, il existe quatre familles de bifurcations, elles sont illustrées figure II.8. Les bifurcations *col-nœud*, *pitchfork* et *transcritiques* sont dites *statiques* car elles correspondent au croisement ou à l'apparition/disparition de solutions de type points fixes. Les bifurcations de *Hopf* sont dites *dynamiques* car elles correspondent à l'apparition/disparition d'une solution périodique.

Au point (\mathbf{x}_0, μ_0) , deux conditions sont nécessaires à l'obtention d'une bifurcation statique :

1. $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mu_0) = 0$ qui signifie que la solution est bien un point fixe.
2. Une des valeurs propres réelle de $\mathbf{J}_x \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ s'annule.

La première condition intervient aussi dans le cas d'une bifurcation dynamique qui apparaît lorsque $\mathbf{J}_x \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ possède deux valeurs propres complexes conjuguées purement imaginaires. Ces différentes conditions sont illustrées dans la figure II.9 (a).

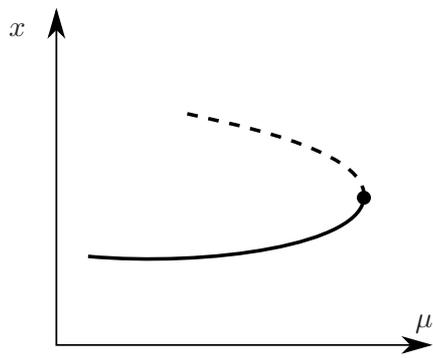
Bifurcations locales des cycles limites : Les différentes bifurcations locales possibles pour les solutions périodiques sont illustrées figure II.9 (b). La perte de stabilité d'un cycle limite provient de la sortie du cercle unité de l'un des coefficients de Floquet, les modes de sortie possibles sont notés (1), (2) et (3) dans la figure et sont associés aux bifurcations suivantes :

- (1) : lorsqu'un multiplicateur quitte le cercle unité par $+1$, les bifurcations associées sont de type *cyclic fold*, *transcritique* ou *pitchfork*.
- (2) : lorsqu'un multiplicateur quitte le cercle unité par -1 , il engendre une bifurcation de type *period doubling*.
- (3) : lorsque deux multiplicateurs complexes conjugués sortent du cercle unité, on obtient une bifurcation *secondaire de Hopf* appelée aussi bifurcation de *Neimark*.

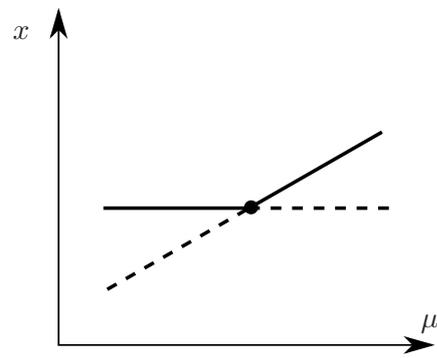
Ces bifurcations et leurs conditions d'obtention sont décrites de façon détaillée dans [NB95] ou en français, dans le mémoire de thèse de Demailly [Dem03].

5 Conclusion

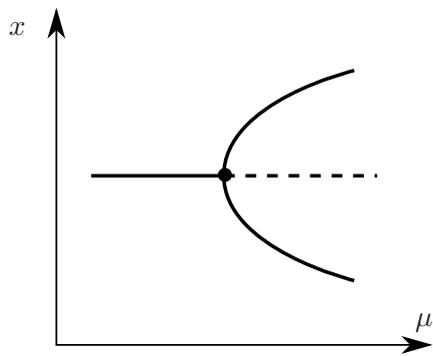
Sur la base des notions générales de la dynamique des machines tournantes présentées au premier chapitre, ce second chapitre a permis de développer les notions permettant d'aborder la modélisation du système tournant avec contact. Tout d'abord, une synthèse de la littérature rencontrée sur le thème du contact rotor-stator, tant observé du point de vue de la dynamique des rotors que de la dynamiques des aubages, a été proposée et nous a permis de positionner nos travaux dans ce contexte bibliographique. Puis, nous avons présenté les relations générales du contact et méthodes d'implémentation qui permettent d'introduire ces non-linéarités dans les équations du mouvement. Les méthodes numériques permettant d'obtenir les solutions d'un système dynamique non-linéaire ont alors été décrites. Enfin, nous avons



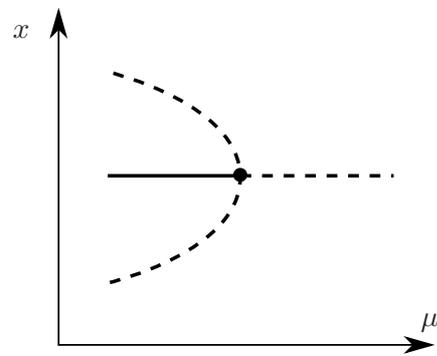
(a) bifurcation col-noeud



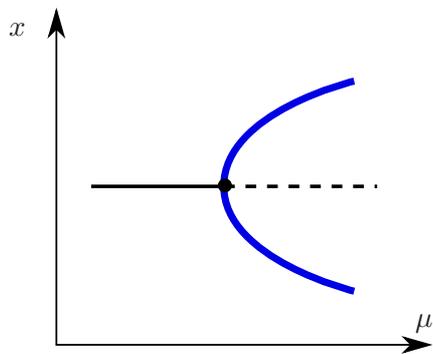
(b) bifurcation transcritique



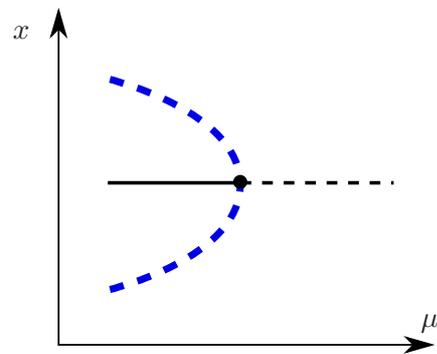
(c) bifurcation pitchfork sur-critique



(d) bifurcation pitchfork sous-critique



(e) bifurcation de Hopf sur-critique



(f) bifurcation de Hopf sous-critique

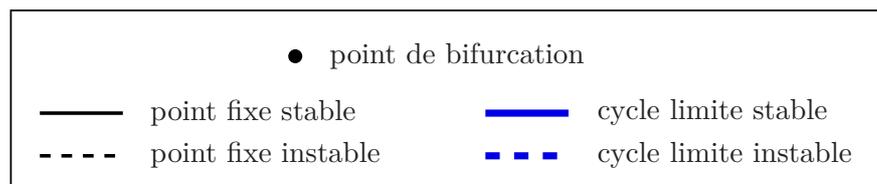


FIGURE II.8: Bifurcations locales des points fixes [NB95 ; Sar08]

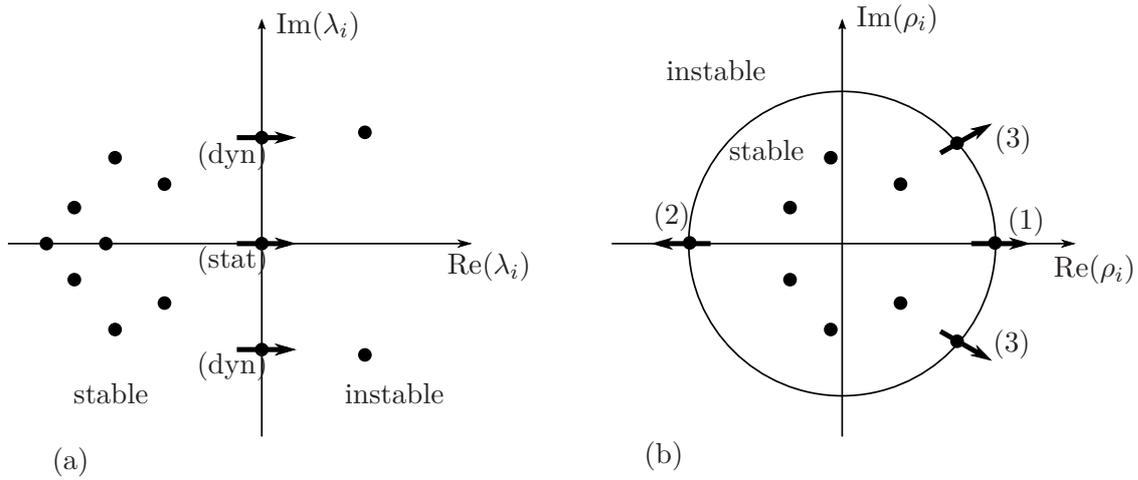


FIGURE II.9: Bifurcations des points fixes (a) et des solutions périodiques (b) (schéma issu de [Man04])

présenté les notions et méthodes permettant de caractériser la stabilité des solutions et les bifurcations observées.

Nous disposons à présent de toutes les notions et outils nécessaires pour décrire la mise en œuvre de notre méthode de prédiction des instabilités en contact aube fan - abradable. Une démarche phénoménologique sera développée au chapitre suivant pour être appliquée au chapitre IV, à un modèle de turboréacteur industriel.

Chapitre III

Dynamique d'ensemble de l'interaction Rotor-Stator

Ce chapitre décrit la construction d'un modèle simplifié pour l'analyse de la dynamique d'ensemble de l'interaction rotor-stator. La formulation analytique du modèle est d'abord présentée : il se compose d'un arbre aubagé flexible connecté à un carter déformable. Puis, l'étude de son comportement linéaire permet de mettre en évidence les couplages naturellement présents entre la dynamique de la roue aubagée et de l'arbre, ainsi qu'entre les mouvements de l'arbre et du carter. Le contact entre les sommets des aubes et la surface interne du carter est alors implémenté et une formulation originale dite 3D est proposée. Le comportement du modèle soumis à ces contacts, est enfin étudié, d'abord en considérant un contact permanent puis les résultats transitoires permettant d'inclure les décollements possibles sont analysés.

Sommaire

1	Description du modèle sans contact	64
1.1	Formulation analytique du modèle	64
1.2	Comportement du modèle sans contact	77
1.3	Conclusion	90
2	Implémentation du contact aube-carter	90
2.1	Détection des touches	91
2.2	Efforts de contact	94
3	Comportement en contact permanent	99
3.1	Études qualitatives de stabilité pour un système conservatif .	100
3.2	Stabilité pour un contact induit par le balourd	111
3.3	Conclusion	120
4	Comportement en contact non-permanent	121
4.1	Résultats transitoires à la frontière de stabilité	122
4.2	Contenu fréquentiel des signaux temporels	127
4.3	Description de scénarios instables	131
4.4	Conclusion	146

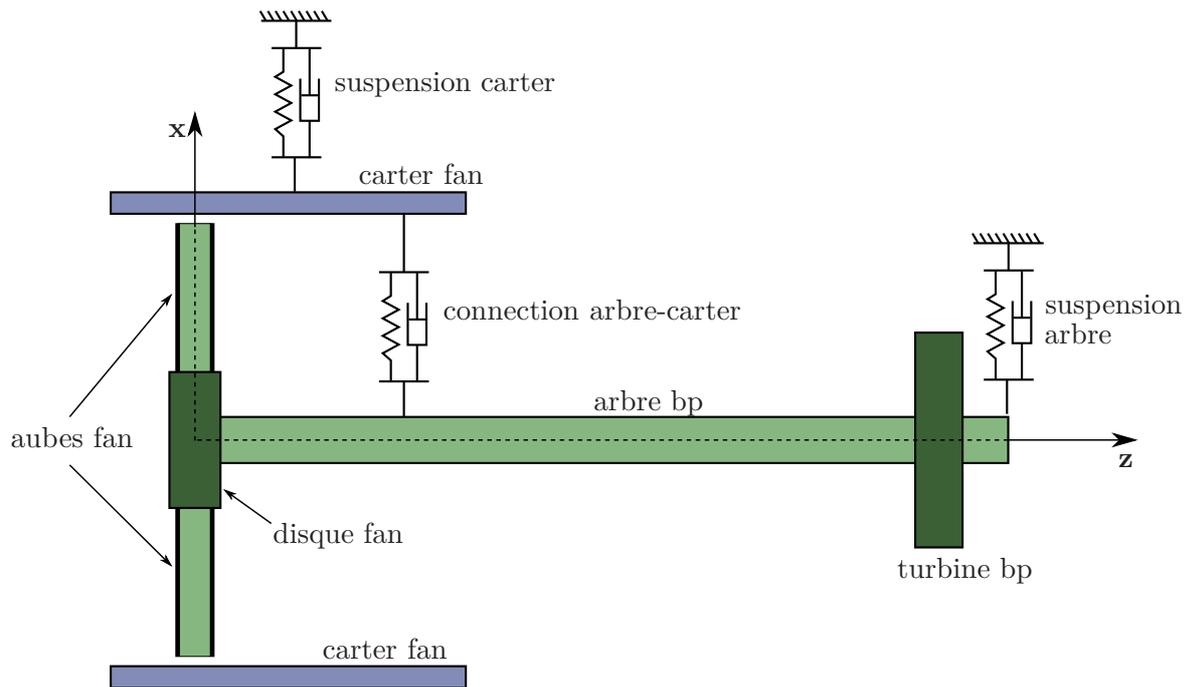


FIGURE III.1: Architecture globale du modèle

1 Description du modèle sans contact

L'architecture globale du modèle est schématisée figure III.1 et une visualisation 3D du modèle est proposée figure III.2. Il se compose d'un arbre flexible supporté par un palier visco-élastique et auquel sont connectés deux disques rigides, l'un représente la turbine bp et l'autre, le disque fan. C'est sur ce dernier disque, que sont encastrées des aubes flexibles. Le modèle comprend également un carter flexible qui entoure la partie amont de l'arbre. Il est supporté par un élément visco-élastique et comporte un lien visco-élastique qui le connecte à l'arbre.

Le modèle analytique construit s'appuie sur une formulation énergétique de Rayleigh-Ritz. Nous développerons les expressions des énergies et potentiels associés à chacun de ses organes (section III.1.1), avant d'en décrire le comportement linéaire (section III.1.2).

1.1 Formulation analytique du modèle

Pour s'affranchir des termes périodiques qui seraient induits par la description des aubes flexibles dans un repère galiléen, l'ensemble du modèle est développé dans le repère mobile lié à l'arbre.

L'Arbre flexible est modélisé par une poutre d'Euler-Bernoulli de section circulaire creuse supportée par un palier visco-élastique isotrope. Il peut fléchir dans les deux directions orthogonales contenues dans le plan transverse à son axe de révolution. Les degrés de liberté associés ($x_s(z, t)$ et $y_s(z, t)$) sont définis dans le repère mobile.

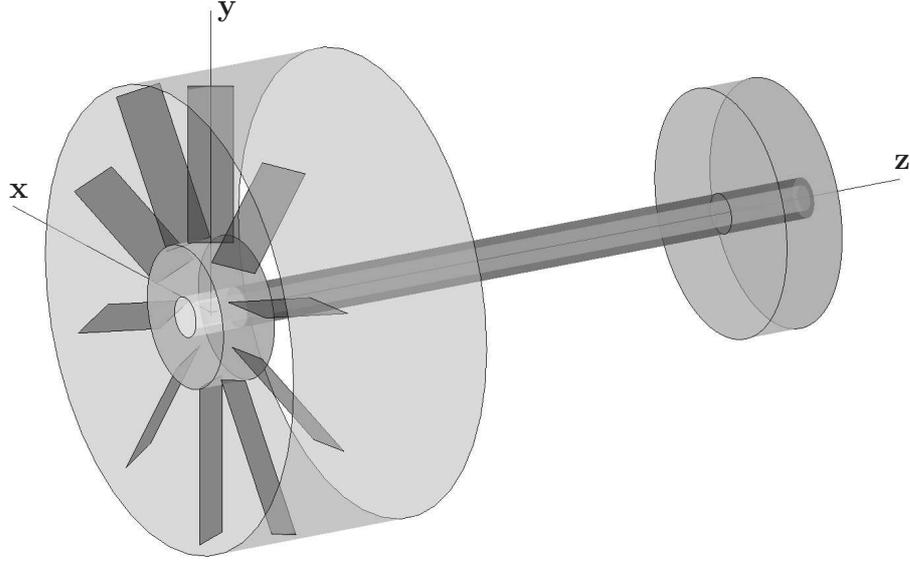


FIGURE III.2: Visualisation 3D du modèle

Les énergies sont formulées de la même façon que dans l'exemple proposé en section I.3.1, la différence réside dans l'expression des vitesses, altérée par la mise en équation dans le repère mobile. L'énergie cinétique apportée par l'arbre est donnée par :

$$\mathcal{T}_s = \frac{1}{2} \rho_s S_s \int_0^{L_s} \mathbf{V}_s^T(z, t) \mathbf{V}_s(z, t) dz + \frac{1}{2} \rho_s \int_0^{L_s} \boldsymbol{\Omega}_s^T(z, t) \mathbf{I}_s \boldsymbol{\Omega}_s(z, t) dz \quad (\text{III.1})$$

où ρ_s , L_s , S_s et \mathbf{I}_s sont respectivement la masse volumique de l'arbre, sa longueur, l'aire et la matrice d'inertie de sa section droite. \mathbf{V}_s et $\boldsymbol{\Omega}_s$ sont les vecteurs vitesse et rotation du centre de gravité de la section droite de l'arbre à l'abscisse z . Pour formuler correctement ces vitesses, nous définissons les repères associés aux rotations subies par sa section droite. En partant du repère inertiel $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, trois rotations sont à introduire pour caractériser le mouvement de la section droite en z , elles sont illustrées figure III.3. Le système étant décrit depuis le repère mobile, la première rotation Ωt à appliquer, est la rotation propre de l'arbre qui relie le repère inertiel au repère mobile $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, où sont observés ses degrés de liberté. Puis ϕ_{x_s} et ϕ_{y_s} , les rotations associées aux fléchissements de l'arbre dans les directions \mathbf{x} et \mathbf{y} , construisent successivement les repères $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ et $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$. Le torseur des vitesses à l'abscisse z est ainsi donné par les expressions suivantes :

$$\mathbf{V}_s(z, t) = \frac{d}{dt} (x_s(z, t) \mathbf{x} + y_s(z, t) \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \dot{x}_s - \Omega y_s \\ \dot{y}_s + \Omega x_s \\ 0 \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} \quad (\text{III.2})$$

$$\boldsymbol{\Omega}_s(z, t) = \dot{\phi}_{x_s} \mathbf{x}_1 + \dot{\phi}_{y_s} \mathbf{y}_2 + \Omega \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{x_s} \cos \phi_{y_s} - \Omega \sin \phi_{y_s} \cos \phi_{x_s} \\ \dot{\phi}_{y_s} + \Omega \sin \phi_{x_s} \\ \Omega \cos \phi_{x_s} \cos \phi_{y_s} + \dot{\phi}_{x_s} \sin \phi_{y_s} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)} \quad (\text{III.3})$$

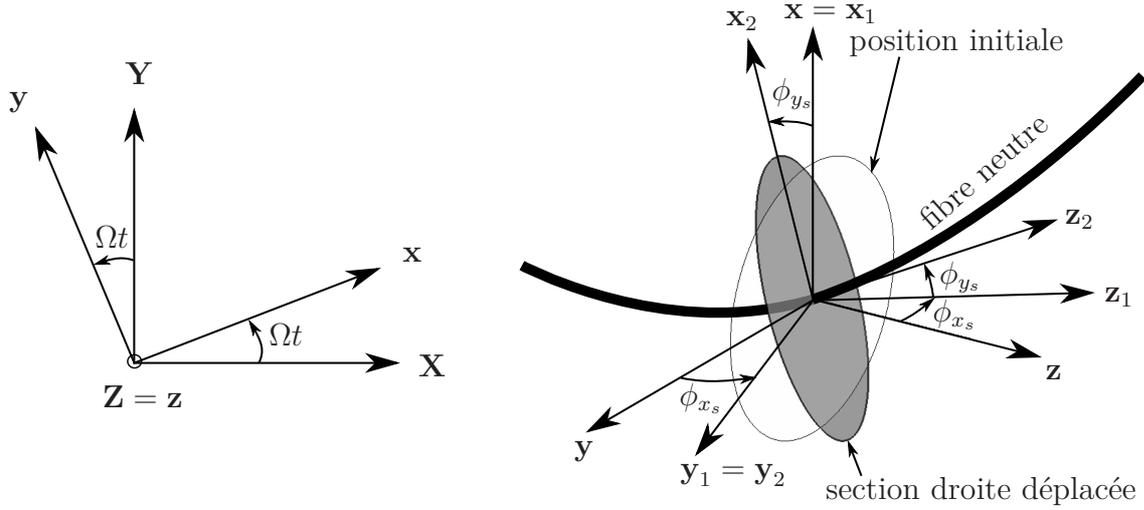


FIGURE III.3: Rotations subies par la section droite de l'arbre et repères associés

Le potentiel de déformation de l'arbre est donné par :

$$\mathcal{U}_s = \frac{E_s I_s}{2} \int_0^{L_s} (x_s''^2(z, t) + y_s''^2(z, t)) dz \quad (\text{III.4})$$

où E_s est le module d'Young de l'arbre et I_s le moment quadratique de sa section droite. La notation ' indique la différentiation par rapport à la variable d'espace z . Notons que le potentiel de déformation n'est pas affecté par la rotation du repère d'observation : les équations (III.4) et (I.35) sont équivalentes.

Le potentiel de déformation apporté par le palier est indépendant de la rotation Ω du fait de l'axisymétrie du support, il est donné par :

$$\mathcal{U}_p = \frac{1}{2} k_p (x_s^2(z_p, t) + y_s^2(z_p, t)) \quad (\text{III.5})$$

où k_p est la raideur du palier dans les direction \mathbf{x} et \mathbf{y} et z_p est sa position sur l'axe \mathbf{z} .

La fonction de dissipation liée à l'amortissement interne de l'arbre est de la forme :

$$\mathcal{F}_s = \frac{\eta_s E_s I_s}{2} \int_0^{L_s} (\dot{x}_s''^2(z, t) + \dot{y}_s''^2(z, t)) dz \quad (\text{III.6})$$

où η_s est le facteur d'amortissement visqueux de l'arbre. Les termes de circulation de l'amortissement qui intervenait pour un système tournant décrit dans le repère fixe (voir équation (I.36)), n'interviennent plus. En revanche, des termes circulatoires apparaissent pour l'amortissement fixe apporté par le palier, dont la fonction de dissipation s'exprime par :

$$\mathcal{F}_p = \frac{1}{2} c_p ((\dot{x}_s(z_p, t) - \Omega y_s(z_p, t))^2 + (\dot{y}_s(z_p, t) + \Omega x_s(z_p, t))^2) \quad (\text{III.7})$$

où c_p est le coefficient d'amortissement visqueux du palier.

Les énergies cinétiques et potentiels apportés par l'arbre et son palier sont maintenant définis, nous pouvons introduire les fonctions de Ritz qui nous permettront

de discrétiser les déplacements de l'arbre pour mener, après application des équations de Lagrange, à l'équation matricielle du système. Les déplacements $x_s(z, t)$ et $y_s(z, t)$ le long de l'arbre sont définis par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} x_s(z, t) &= X_0(t) + \sum_{m=1}^{m_{\text{tot}}} X_m(t) W_m(z) \\ y_s(z, t) &= Y_0(t) + \sum_{m=1}^{m_{\text{tot}}} Y_m(t) W_m(z) \\ \text{avec } W_m(z) &= \left(\frac{z}{L_s} \right)^m \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

$X_0(t)$, $Y_0(t)$, $X_m(t)$ et $Y_m(t)$ sont les coordonnées généralisées de l'arbre et $W_m(z)$ sont les fonctions de forme choisies pour caractériser la distribution des déplacements suivant \mathbf{z} . Le modèle étant axisymétrique, les mêmes fonctions décrivent les déplacements dans les deux directions transverses. m_{tot} est le nombre de fonctions de forme introduites pour décrire les déformations de l'arbre. Plus m_{tot} est grand, plus les déformations de l'arbre pourront être complexes et les fréquences des modes propres associées élevées.

Les rotations ϕ_{x_s} et ϕ_{y_s} sont définies par les hypothèses d'Euler-Bernoulli et peuvent donc être exprimées grâce aux mêmes inconnues :

$$\begin{aligned} \phi_{x_s}(z, t) &= -y'_s(z, t) = - \sum_{m=1}^{m_{\text{tot}}} Y_m(t) W'_m(z) \\ \phi_{y_s}(z, t) &= x'_s(z, t) = \sum_{m=1}^{m_{\text{tot}}} X_m(t) W'_m(z) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Le vecteur des coordonnées généralisées, qui constitue les inconnues du problème est alors mis sous la forme suivante :

$$\mathbf{q}_s = \{X_0, Y_0, X_1, Y_1, \dots, X_{m_{\text{tot}}}, Y_{m_{\text{tot}}}\}^T \quad (\text{III.10})$$

Les disques rigides sont introduits par une démarche identique à celle de l'arbre. Ne se déformant pas, ils apportent uniquement de l'énergie cinétique au système :

$$\mathcal{T}_d = \sum_{d=d_f, d_t} \left(\frac{m_d}{2} \mathbf{V}_s^T(z_d, t) \mathbf{V}_s(z_d, t) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_s^T(z_d, t) \mathbf{I}_d \boldsymbol{\Omega}_s(z_d, t) \right) \quad (\text{III.11})$$

où m_d , \mathbf{I}_d et z_d sont respectivement la masse, le tenseur d'inertie et l'abscisse de chacun des disques. L'indice d_f décrit les propriétés du disque fan et l'indice d_t de celui représentatif de la turbine bp. Les vitesses instantanées et les déplacements discrétisés correspondent à ceux de l'arbre aux abscisses z_d .

Les aubes flexibles sont prises en compte de la même façon. La subtilité réside dans l'expression correcte des vitesses instantanées qui permet de construire le lien inertiel entre les déplacements du disque fan et ceux des aubes. Les expressions

présentées ici proviennent des travaux de Gruin [Gru12] et Lesaffre [Les07]. L'énergie cinétique apportée par la $j^{\text{ième}}$ aube peut s'écrire :

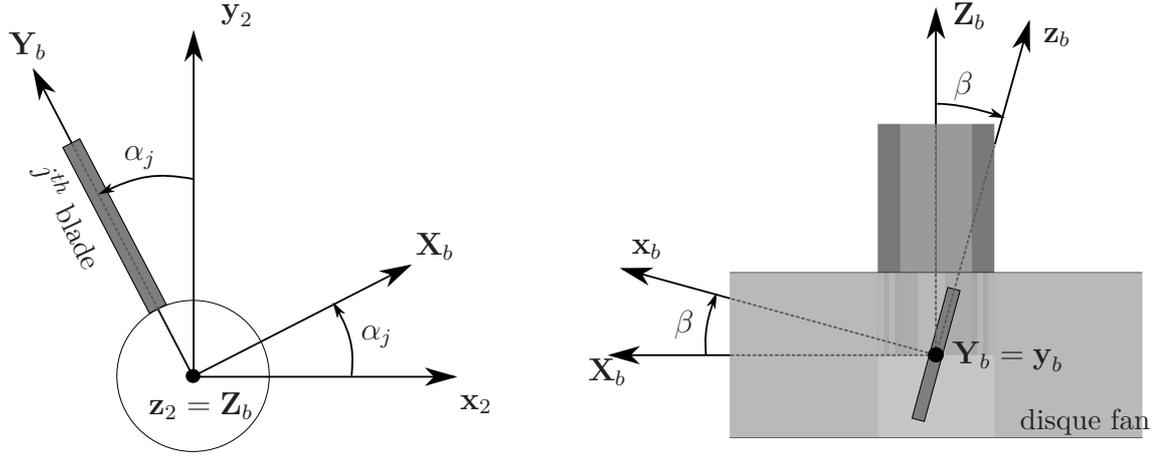
$$\mathcal{T}_{bj} = \frac{1}{2}\rho_b S_b \int_0^{L_b} \mathbf{V}_b^T(s, t) \mathbf{V}_b(s, t) ds + \frac{1}{2}\rho_b \int_0^{L_b} \boldsymbol{\Omega}_b^T(s, t) \mathbf{I}_b \boldsymbol{\Omega}_b(s, t) ds \quad (\text{III.12})$$

où ρ_b , L_b , S_b et \mathbf{I}_b sont respectivement la masse volumique des aubes, leur longueur, l'aire et la matrice d'inertie de leur section droite. Pour exprimer les vitesses instantanées \mathbf{V}_b et $\boldsymbol{\Omega}_b$ du centre de gravité de la section droite de l'aube à l'abscisse s , nous définissons deux nouvelles rotations illustrées figure III.4 qui positionnent l'aube j sur le disque. A partir du repère du disque basculé $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$, la rotation α_j suivant \mathbf{z}_2 définit la position angulaire de l'aube sur le disque et construit le repère $(\mathbf{X}_b, \mathbf{Y}_b, \mathbf{Z}_b)$. Une rotation supplémentaire β suivant \mathbf{Y}_b oriente alors la section droite de la poutre et définit le repère $(\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)$. L'aube concernée fléchit donc suivant \mathbf{x}_b (sa direction la plus souple) et sa flèche à l'abscisse s sur \mathbf{y}_b est notée $x_{bj}(s, t)$. Son fléchissement bascule également sa section droite d'une rotation $\psi_{bj}(s, t)$ suivant \mathbf{z}_b . Les vitesses instantanées doivent prendre en compte les déplacements liés aux déplacements et basculements du disque tout comme ceux liés à son propre fléchissement. Elles sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_b(s, t) &= \frac{d}{dt} (x_d(t)\mathbf{x} + y_d(t)\mathbf{y} + (r_d + s)\mathbf{y}_b + x_{bj}(s, t)\mathbf{x}_b) \\ &= \frac{d}{dt} \left(x_d(t)\mathbf{x} + y_d(t)\mathbf{y} + \mathbf{P}_{\phi_{x_d}}^T \mathbf{P}_{\phi_{y_d}}^T \mathbf{P}_{\alpha_j}^T \mathbf{P}_{\beta}^T \begin{Bmatrix} x_{bj}(s, t) \\ r_d + s \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_b(s, t) &= \boldsymbol{\Omega} \mathbf{z} + \dot{\phi}_{x_d}(t)\mathbf{x}_1 + \dot{\phi}_{y_d}(t)\mathbf{y}_2 + \dot{\psi}_b(s, t)\mathbf{z}_b \\ &= \dot{\psi}_{bj}(s, t)\mathbf{z}_b + \mathbf{P}_{\psi_b} \mathbf{P}_{\beta} \mathbf{P}_{\alpha_j} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_{y_d}(t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathbf{P}_{\psi_b} \mathbf{P}_{\beta} \mathbf{P}_{\alpha_j} \mathbf{P}_{\phi_{y_d}} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_{x_d}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &\quad + \mathbf{P}_{\psi_b} \mathbf{P}_{\beta} \mathbf{P}_{\alpha_j} \mathbf{P}_{\phi_{y_d}} \mathbf{P}_{\phi_{x_d}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{\Omega} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Pour simplifier les écritures, nous avons exprimé les vitesses grâce aux différentes matrices de passage associées aux nombreuses rotations subies par le système. Elles

FIGURE III.4: Rotations qui positionnent l'aube j et repères associés

sont définies ci-après :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{\psi_b} &= \begin{bmatrix} \cos \psi_b(s, t) & \sin \psi_b(s, t) & 0 \\ -\sin \psi_b(s, t) & \cos \psi_b(s, t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{P}_{\beta} &= \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_{\alpha_j} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_j & \sin \alpha_j & 0 \\ -\sin \alpha_j & \cos \alpha_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{P}_{\phi_{x_d}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_{x_d}(t) & \sin \phi_{x_d}(t) \\ 0 & -\sin \phi_{x_d}(t) & \cos \phi_{x_d}(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_{\phi_{y_d}} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{y_d}(t) & 0 & -\sin \phi_{y_d}(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi_{y_d}(t) & 0 & \cos \phi_{y_d}(t) \end{bmatrix};
 \end{aligned} \tag{III.15}$$

Le potentiel de déformation de la $j^{\text{ième}}$ aube est d'obtention plus facile :

$$\mathcal{U}_{bj} = \frac{E_b I_{b/z_b}}{2} \int_0^{L_b} x_{bj}''^2(s, t) ds \tag{III.16}$$

où E_b est le module d'Young des aubes et I_{b/z_b} le moment quadratique de la section rectangulaire dans la direction \mathbf{z}_b .

Un potentiel supplémentaire doit être introduit pour rendre compte du raidissement de centrifugation des aubes lorsque le système est mis en rotation (voir les équations (I.59) et (I.60) de la section I.4.1). Le potentiel de précontrainte associé est donné par :

$$\mathcal{U}_{bj, \text{raid}} = \Omega^2 \rho_b S_b \int_0^{L_b} \frac{(r_d + L_b)^2 - (r_d + s)^2}{2} x_{bj}''^2(s, t) ds \tag{III.17}$$

La fonction de dissipation apportée par l'amortissement interne de l'aube j s'exprime par :

$$\mathcal{F}_{bj} = \frac{\eta_b E_b I_{b/z_b}}{2} \int_0^{L_b} \dot{x}_{bj}''^2(s, t) ds \tag{III.18}$$

où η_b est le facteur d'amortissement visqueux des aubes.

Un dernier potentiel de déformation est considéré dans la roue aubagée pour introduire un élément de raideur liant chacune des aubes avec ses voisines. L'ajout d'une raideur qui lie le fléchissement des aubes consécutives est nécessaire pour organiser les modes d'aubages en diamètres nodaux (voir section I.4.2). Dans la réalité, ces couplages sont assurés par la flexibilité du disque et les efforts aérodynamiques. Le potentiel apporté par la raideur k_b qui lie la flèche des aubes j et $j + 1$ en $s = L_b$ est donné par :

$$\mathcal{U}_{b,j \rightarrow j+1} = \frac{1}{2} k_b (x_{bj+1}(L_b, t) - x_{bj}(L_b, t))^2 \quad (\text{III.19})$$

Les énergies définies, nous pouvons, comme pour l'arbre, discrétiser la déformation des aubes à l'aide de fonctions de Ritz :

$$\begin{aligned} x_{bj}(s, t) &= \sum_{n=1}^{n_{\text{tot}}} X_{nj}(t) Y_n(s) \\ Y_n(s) &= \sin(a_n s) + b_n s + c_n s^2 \\ a_n &= \frac{(2n-1)\pi}{2L_b}; \quad b_n = -a_n; \quad c_n = \frac{b_n^2}{2} \sin(b_n L_b) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Les $X_{nj}(t)$ sont les coordonnées généralisées propres aux aubes et $Y_n(s)$ sont les fonctions de forme choisies pour exprimer leurs déformations. Elles respectent les conditions aux limites géométriques : $Y_n(0) = 0$ et $Y'_n(0) = 0$, et ont été utilisées par [Sin04] et [Gru12]. n_{tot} correspond au nombre de modes introduits pour exprimer le fléchissement des aubes. Comme pour l'arbre, la rotation $\psi_{bj}(s, t)$ est obtenue grâce aux hypothèses d'Euler-Bernoulli :

$$\psi_{bj}(s, t) = -x'_b(s, t) = -\sum_{n=1}^{n_{\text{tot}}} X_{nj}(t) Y'_n(s) \quad (\text{III.21})$$

Le vecteur des coordonnées généralisées \mathbf{q}_s de l'arbre est donc complété par celles des aubes pour construire le vecteur \mathbf{q}_{bs} du rotor aubagé :

$$\mathbf{q}_{bs} = \left\{ \mathbf{q}_s^T, X_{11}, \dots, X_{n_{\text{tot}}1}, \dots, X_{1N_b}, \dots, X_{n_{\text{tot}}, N_b} \right\}^T \quad (\text{III.22})$$

Nous regroupons alors toutes énergies apportées par le rotor aubagé :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{bs} = \mathcal{T}_s + \mathcal{T}_d + \sum_{j=1}^{N_b} \mathcal{T}_{bj} \\ \mathcal{U}_{bs} = \mathcal{U}_s + \mathcal{U}_p + \sum_{j=1}^{N_b} (\mathcal{U}_{bj} + \mathcal{U}_{bj, \text{raid}} + \mathcal{U}_{b,j \rightarrow j+1}) \\ \mathcal{F}_{bs} = \mathcal{F}_s + \mathcal{F}_p + \sum_{j=1}^{N_b} \mathcal{F}_{bj} \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Après introduction des degrés de liberté discrétisés (III.8), (III.9), (III.20) et (III.21), dans les expressions des énergies de (III.23) et application des équations de Lagrange,

nous obtenons l'équation matricielle qui régit le comportement dynamique du rotor aubagé :

$$\mathbf{M}_{bs}\ddot{\mathbf{q}}_{bs} + (\mathbf{D}_{bs} + \mathbf{G}_{bs}(\Omega))\dot{\mathbf{q}}_{bs} + (\mathbf{K}_{bs} + \mathbf{N}_{bs}(\Omega^2) + \mathbf{K}_{b,\text{raid}}(\Omega^2) + \mathbf{C}_{bs}(\Omega))\mathbf{q}_{bs} = \mathbf{0} \quad (\text{III.24})$$

Où \mathbf{M}_{bs} est la matrice de masse du rotor aubagé, \mathbf{D}_{bs} sa matrice d'amortissement, \mathbf{G}_{bs} la matrice gyroscopique, \mathbf{K}_{bs} la matrice de raideur élastique, \mathbf{N}_{bs} la matrice d'assouplissement centrifuge, $\mathbf{K}_{b,\text{raid}}$ la matrice de raidissement centrifuge et \mathbf{C}_{bs} la matrice de circulation de l'amortissement visqueux des paliers. Les expressions détaillées du contenu de ces matrices ne sont pas présentées dans ce mémoire, mais elles sont proposées dans les travaux de Lesaffre [LST06 ; Les07] avec des notations et des choix de repères différents. Nous avons fait le choix d'explicitier ici l'écriture des énergies et notamment de détailler l'obtention des torseurs des vitesses. Les expressions présentées peuvent ainsi être implémentées dans un outil de calcul formel pour construire le système matriciel (nous avons utilisé la *toolbox symbolic* proposée dans *Matlab*).

Au système d'équation du rotor aubagé obtenu, il faut apporter les contributions du carter, de son support et du lien élastique arbre-carter pour compléter la construction du modèle.

Le carter est fixe, il est donc plus simple de développer sa mise en équation dans le repère inertiel, pour ensuite transposer son système d'équation dans le repère mobile où est construit le reste du modèle.

La suspension du carter apporte quatre degrés de liberté de corps rigide : les deux translations et les deux rotations dans le plan transverse à l'axe moteur. Observés dans le repère fixe, ces degrés de liberté sont notés $\{X_c(t), Y_c(t), \Phi_{X_c}(t), \Phi_{Y_c}(t)\}^T$. Le carter est également déformable, il peut subir une déformation normale $u(\theta, t)$ et tangentielle $w(\theta, t)$ en chaque point de position angulaire θ . Les rotations d'ensemble et l'orientation des déformations sont schématisées figure III.5. A partir d'un repère inertiel $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ dont l'origine coïncide avec le centre de gravité du carter, le basculement d'ensemble $\Phi_{X_c}(t)$ suivant \mathbf{X} crée le repère $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Z}_1)$. Puis de la même façon, la rotation $\Phi_{Y_c}(t)$ suivant \mathbf{Y}_1 construit le repère $(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_2)$. Dans ce repère du carter déplacé, les déformations à la position angulaire θ sont alors dirigées suivant \mathbf{u} et \mathbf{w} .

La déformation tangentielle de l'anneau élastique en θ est donnée par l'expression suivante [Gra75 ; Cel90] :

$$w(\theta, t) = \sum_{n_d} A_{n_d}(t) \cos(n_d\theta) + B_{n_d}(t) \sin(n_d\theta) \quad (\text{III.25})$$

Où $A_n(t)$ et $B_n(t)$ sont les coordonnées généralisées qui décrivent les déformations du carter et n_d sont les diamètres nodaux des modes introduits (voir section I.4.2). Le caractère inextensible de l'anneau introduit une relation entre les déplacements

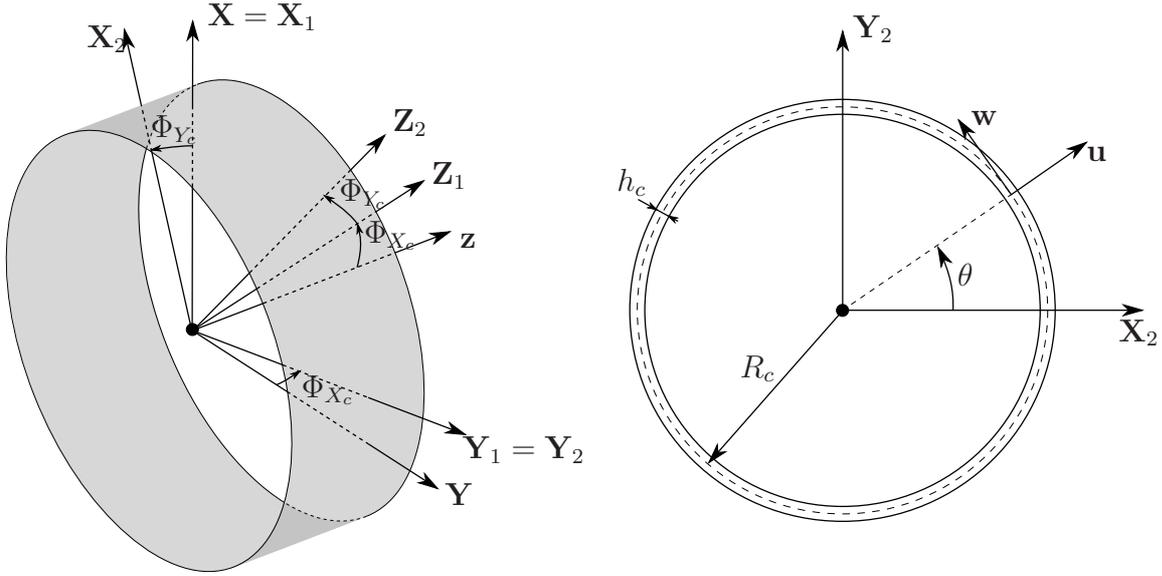


FIGURE III.5: Rotations du carter et repères associés

tangents et radiaux :

$$u(\theta, t) = \frac{\partial w(\theta, t)}{\partial \theta} = \sum_{n_d} -n_d A_{n_d}(t) \sin(n_d \theta) + n_d B_{n_d}(t) \cos(n_d \theta) \quad (\text{III.26})$$

Nous introduirons au modèle les modes à deux diamètres nodaux ou plus ($n_d > 2$). Le mode à zéro diamètre n'est en effet pas compatible avec l'inextensibilité du carter et le mode à un diamètre est apporté par les degrés de libertés d'ensemble : $X_c(t)$ et $Y_c(t)$. Le mode suspension décrit par $X_c(t)$ et $Y_c(t)$ est équivalent à celui qui serait introduit par $A_1(t)$ et $B_1(t)$. Remarquons en effet, que le potentiel de déformation défini dans l'équation (III.33) est nul lorsque $n_d = 1$.

L'énergie cinétique du carter est donnée par :

$$\mathcal{T}_c = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho_c S_c \mathbf{V}_c^T \mathbf{V}_c R_c d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho_c \boldsymbol{\Omega}_c^T \mathbf{I}_c \boldsymbol{\Omega}_c R_c d\theta \quad (\text{III.27})$$

où ρ_c est la masse volumique du carter, S_c et \mathbf{I}_c sont respectivement l'aire et le tenseur d'inertie de la section droite rectangulaire du carter. \mathbf{V}_c et $\boldsymbol{\Omega}_c$, les vitesses instantanées au centre de gravité de la section droite positionnée par θ sont de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_c = \frac{d}{dt} (X_c(t) \mathbf{X} + Y_c(t) \mathbf{Y} + R_c \mathbf{u} + u(\theta, t) \mathbf{u} + w(\theta, t) \mathbf{w}) \\ \boldsymbol{\Omega}_c = \dot{\Phi}_{x_c} \mathbf{X}_1 + \dot{\Phi}_{y_c} \mathbf{Y}_2 \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Une fois développée et les déformations du carter substituées, l'énergie cinétique du carter dépend des coordonnées généralisées suivantes :

$$\mathbf{q}_c = \{X_c(t), Y_c(t), \Phi_{X_c}(t), \Phi_{Y_c}(t), A_2(t), B_2(t), \dots, A_{n_d, \text{tot}}, B_{n_d, \text{tot}}\}^T \quad (\text{III.29})$$

L'application des équations de Lagrange conduit alors à la matrice de masse :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}_c} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}_c}{\partial \mathbf{q}_c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{q}}_c = \mathbf{0} \quad (\text{III.30})$$

Du fait de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques et de la linéarisation des termes de l'énergie cinétique, la matrice de masse obtenue dissocie les degrés de liberté du système. Les termes associés aux degrés de liberté de corps rigide ont la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} m_c & & & \\ & m_c & & \\ & & I_{d,c} & \\ & & & I_{d,c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_c \\ \ddot{Y}_c \\ \ddot{\Phi}_{X_c} \\ \ddot{\Phi}_{Y_c} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

où m_c est la masse du carter et $I_{d,c}$ son inertie diamétrale. Les termes associés aux déformations du mode à n_d diamètres prennent la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{m_c}{2}(1+n_d^2) & 0 \\ 0 & \frac{m_c}{2}(1+n_d^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{A}_{n_d} \\ \ddot{B}_{n_d} \end{Bmatrix} \quad \text{avec } n_d > 2 \quad (\text{III.32})$$

Le potentiel de déformation du carter s'écrit [Cel90] :

$$\mathcal{U}_c = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{E_c I_z}{R_c^4} \left(\frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 R_c d\theta \quad (\text{III.33})$$

où E_c est le module d'Young du carter et I_z le moment quadratique de sa section droite suivant \mathbf{z} . La matrice de raideur obtenue pour la déformation en n_d diamètres est de la forme :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_c}{\partial \mathbf{q}_c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} kn_d^2(n_d^2 - 1)^2 & 0 \\ 0 & kn_d^2(n_d^2 - 1)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{n_d} \\ B_{n_d} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{avec } k = \frac{E_c I_z \pi}{R_c^3} \quad (\text{III.34})$$

La fonction de dissipation apportée par l'amortissement visqueux du carter est de la forme :

$$\mathcal{F}_c = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\eta_c E_c I_z}{R_c^4} \left(\frac{\partial^2 \dot{u}(\theta, t)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \dot{w}(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 R_c d\theta \quad (\text{III.35})$$

où η_c est le facteur d'amortissement visqueux du carter. La matrice d'amortissement obtenue pour n_d a une forme semblable à la matrice de raideur (III.34) :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}_c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} cn_d^2(n_d^2 - 1)^2 & 0 \\ 0 & cn_d^2(n_d^2 - 1)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A}_{n_d} \\ \dot{B}_{n_d} \end{Bmatrix} \quad \text{avec } c = \frac{\eta_c E_c I_z \pi}{R_c^3} \quad (\text{III.36})$$

La suspension visco-élastique apporte aussi un potentiel de déformation et une énergie de dissipation qui conduisent aux contributions matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} c_c & & & \\ & c_c & & \\ & & c_{c,\phi} & \\ & & & c_{c,\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_c \\ \dot{Y}_c \\ \dot{\Phi}_{X_c} \\ \dot{\Phi}_{Y_c} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_c & & & \\ & k_c & & \\ & & k_{c,\phi} & \\ & & & k_{c,\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_c \\ Y_c \\ \Phi_{X_c} \\ \Phi_{Y_c} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{III.37})$$

où k_c et $k_{c,\phi}$ sont les propriétés de raideur en translation et en rotation, c_c et $c_{c,\phi}$ celles de l'amortissement visqueux du support.

Toutes les contributions du carter et son support sont définies, nous pouvons à présent transposer le système d'équation dans le repère mobile où est construit le

reste du modèle. Pour cela, nous profitons du découplage des degrés de liberté de corps rigide et de ceux associés à chacune des déformations à n_d diamètres nodaux introduites, pour transposer les systèmes d'équation de façon indépendante.

Commençons par les degrés de liberté de corps rigide, ils sont associés à l'équation matricielle donnée par les équations (III.31) et (III.37) où sont définies les matrices de masse \mathbf{M}_c , d'amortissement visqueux \mathbf{D}_c et de raideur élastique \mathbf{K}_c . La projection des degrés de liberté dans le repère mobile est assurée par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} X_c \\ Y_c \\ \Phi_{X_c} \\ \Phi_{Y_c} \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ \phi_{x_c} \\ \phi_{y_c} \end{Bmatrix} \text{ avec } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & & \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & & \\ & & \cos \Omega t & -\sin \Omega t \\ & & \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (\text{III.38})$$

où la vitesse de rotation Ω est supposée constante et où $\mathbf{q}_m = \{x_c(t), y_c(t), \phi_{x_c}(t), \phi_{y_c}(t)\}^T$ sont les degrés de liberté de corps rigide observés dans le repère mobile. Le système est alors transposé en introduisant (III.38) et ses dérivées dans l'équation matricielle et en pré-multipliant par \mathbf{P}^T , on obtient :

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{q}}_m + (\mathbf{D}_c + \mathbf{G}_c(\Omega)) \dot{\mathbf{q}}_m + (\mathbf{K}_c + \mathbf{C}_c(\Omega) + \mathbf{N}_c(\Omega^2)) \mathbf{q}_m = \mathbf{0} \quad (\text{III.39})$$

Les matrices gyroscopique \mathbf{G}_c , d'assouplissement centrifuge \mathbf{N}_c et de circulation \mathbf{C}_c , apportées par la transposition, sont données par les expressions suivantes :

$$\mathbf{G}_c = 2\mathbf{P}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{P}}; \quad \mathbf{N}_c = \mathbf{P}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{P}}; \quad \mathbf{C}_c = \mathbf{P}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{P}} \quad (\text{III.40})$$

Appliquons maintenant la même démarche aux degrés de libertés introduits par la déformation à n_d diamètres nodaux. Il faut pour cela, établir la relation entre les degrés de libertés $\{A_{n_d}, B_{n_d}\}^T$ définis dans le repère galiléen et ceux définis dans le repère mobile $\{A_{n_d}^*, B_{n_d}^*\}^T$. Les déplacements physiques au point de position θ dans le repère fixe (voir figure III.6) sont donnés par :

$$\mathbf{q}_{n_d} = \begin{Bmatrix} u(\theta, t) \\ w(\theta, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -n_d A_{n_d}(t) \sin(n_d \theta) + n_d B_{n_d}(t) \cos(n_d \theta) \\ A_{n_d}(t) \cos(n_d \theta) + B_{n_d}(t) \sin(n_d \theta) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.41})$$

Comme l'illustre la figure III.6, la position angulaire ψ désigne le même point observé depuis le repère mobile. Nous pouvons donc aussi décrire ces mêmes déplacements depuis ce repère :

$$\mathbf{q}_{n_d} = \begin{Bmatrix} -n_d A_{n_d}^*(t) \sin(n_d \psi) + n_d B_{n_d}^*(t) \cos(n_d \psi) \\ A_{n_d}^*(t) \cos(n_d \psi) + B_{n_d}^*(t) \sin(n_d \psi) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

En introduisant la relation $\theta = \Omega t + \psi$ dans (III.41), on obtient par identification :

$$\begin{Bmatrix} A_{n_d} \\ B_{n_d} \end{Bmatrix} = \mathbf{P}_{n_d} \begin{Bmatrix} A_{n_d}^* \\ B_{n_d}^* \end{Bmatrix} \text{ avec } \mathbf{P}_{n_d} = \begin{bmatrix} \cos(n_d \Omega t) & -\sin(n_d \Omega t) \\ \sin(n_d \Omega t) & \cos(n_d \Omega t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.43})$$

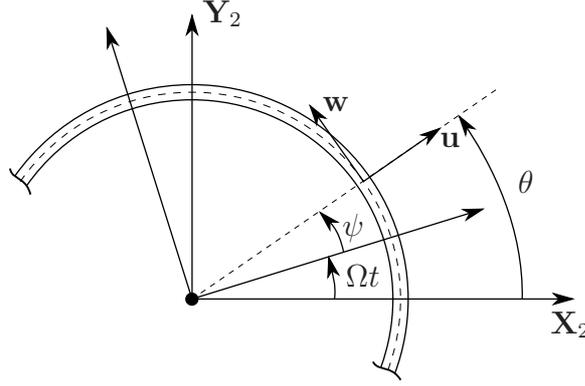


FIGURE III.6: Position angulaire d'un point du carter observé depuis le repère fixe et mobile

De la même façon que pour les degrés de liberté de corps rigide, la transposition dans le repère mobile introduit les matrices suivantes :

$$\mathbf{G}_{n_d} = 2\mathbf{P}_{n_d}^T \mathbf{M}_{n_d} \dot{\mathbf{P}}_{n_d} = \Omega \begin{bmatrix} 0 & -m_c n_d (n_d^2 + 1) \\ m_c n_d (n_d^2 + 1) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

$$\mathbf{N}_{n_d} = \mathbf{P}_{n_d}^T \mathbf{M}_{n_d} \ddot{\mathbf{P}}_{n_d} = -\Omega^2 n_d^2 \mathbf{M}_{n_d} \quad (\text{III.45})$$

$$\mathbf{C}_{n_d} = \mathbf{P}_{n_d}^T \mathbf{D}_{n_d} \dot{\mathbf{P}}_{n_d} = \Omega \begin{bmatrix} 0 & -c n_d^3 (n_d^2 - 1)^2 \\ c n_d^3 (n_d^2 - 1)^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.46})$$

Le système matriciel qui caractérise la contribution du carter : ses déplacements de corps rigide et ses déformations, est maintenant construit. Pour achever la construction du modèle, il reste à introduire la liaison mécanique entre le carter et l'arbre.

Le lien arbre-carter est une suspension visco-élastique introduite pour reproduire la liaison mécanique assurée en réalité par les premiers paliers et les bras du carter intermédiaire. Cette liaison est illustrée dans les figures II.1 et II.2 du chapitre II. Ce lien est ici modélisé par un élément visco-élastique isotrope alimenté en translation et en rotation, il connecte les degrés de liberté de corps rigide du carter, aux déplacements de la section droite de l'arbre positionnée par z_l . Le potentiel de déformation et l'énergie de dissipation apportés par cet organe sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_l &= \frac{1}{2} k_l \left((x_c(z_l, t) - x_s(z_l, t))^2 + (y_c(z_l, t) - y_s(z_l, t))^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} k_{l,\phi} \left((\phi_{x_c}(t) - \phi_{x_s}(z_l, t))^2 + (\phi_{y_c}(t) - \phi_{y_s}(z_l, t))^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_l = & \frac{1}{2}c_l \left((\dot{x}_c(z_l, t) - \Omega y_c(z_l, t) - \dot{x}_s(z_l, t) + \Omega y_s(z_l, t))^2 \right. \\
& \left. + (\dot{y}_c(z_l, t) + \Omega x_c(z_l, t) - \dot{y}_s(z_l, t) - \Omega x_s(z_l, t))^2 \right) \\
& + \frac{1}{2}c_{l,\phi} \left((\dot{\phi}_{x_c}(t) - \Omega \phi_{y_c}(t) - \dot{\phi}_{x_s}(z_l, t) + \Omega \phi_{y_s}(z_l, t))^2 \right. \\
& \left. + (\dot{\phi}_{y_c}(t) + \Omega \dot{\phi}_{y_c}(t) - \dot{\phi}_{y_s}(z_l, t) - \Omega \dot{\phi}_{x_s}(z_l, t))^2 \right)
\end{aligned} \tag{III.48}$$

où k_l et $k_{l,\phi}$ sont les propriétés de raideur en translation et rotation et c_l et $c_{l,\phi}$ les coefficients d'amortissement visqueux. Les déplacements d'ensemble du carter à l'abscisse du lien s'expriment par :

$$x_c(z_l, t) = x_c(t) + z_l \tan \phi_{y_c}(t); \quad y_c(z_l, t) = y_c(t) - z_l \tan \phi_{x_c}(t) \tag{III.49}$$

Les équations (III.49), (III.8) et (III.9) sont alors introduites dans (III.47) et (III.48) pour ensuite appliquer les équations de Lagrange et conduire à l'expression matricielle comportant la matrice de raideur \mathbf{K}_l , la matrice d'amortissement visqueux \mathbf{D}_l et la matrice circulatoire \mathbf{C}_l .

Notons que les degrés de liberté de déformation du carter ne sont pas introduits dans les expressions des énergies (III.47) et (III.48) : ils sont en effet filtrés par la cinématique de l'arbre de un diamètre nodal et se simplifient lors de l'application des équations de Lagrange.

Les différents éléments du modèle avec les liens inertiels et élastiques sont formulés, le système d'équation complet peut s'écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{D}}(\Omega)\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}}(\Omega)\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{III.50}$$

où le vecteur \mathbf{q} contient toutes les coordonnées généralisées du modèle, il est ordonné comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} = \{ & X_0, Y_0, X_1, Y_1, \dots, X_{m_{\text{tot}}}, Y_{m_{\text{tot}}}, \\
& X_{11}, \dots, X_{n_{\text{tot}}1}, \dots, X_{1N_b}, \dots, X_{n_{\text{tot}},N_b}, \\
& x_c, y_c, \phi_{x_c}, \phi_{y_c}, \\
& A_2, B_2, \dots, A_{n_d}, B_{n_d}, \dots, A_{n_d,\text{tot}}, B_{n_d,\text{tot}} \}^T
\end{aligned} \tag{III.51}$$

Les matrices globales \mathbf{M} , $\tilde{\mathbf{D}}$ et $\tilde{\mathbf{K}}$ se décomposent ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{M}_{bs} + \mathbf{M}_c + \sum_{n_d} \mathbf{M}_{n_d} \\
\tilde{\mathbf{D}}(\Omega) &= \mathbf{D}_{bs} + \mathbf{D}_c + \sum_{n_d} \mathbf{D}_{n_d} + \mathbf{D}_l + \mathbf{G}_{bs}(\Omega) + \mathbf{G}_c(\Omega) + \sum_{n_d} \mathbf{G}_{n_d}(\Omega) \\
\tilde{\mathbf{K}}(\Omega) &= \mathbf{K}_{bs} + \mathbf{K}_{b,\text{raid}}(\Omega^2) + \mathbf{K}_c + \sum_{n_d} \mathbf{K}_{n_d} + \mathbf{K}_l + \mathbf{N}_{bs}(\Omega^2) + \mathbf{N}_c(\Omega^2) + \sum_{n_d} \mathbf{N}_{n_d}(\Omega^2) \\
&+ \mathbf{C}_{bs}(\Omega) + \mathbf{C}_c(\Omega) + \sum_{n_d} \mathbf{C}_{n_d}(\Omega) + \mathbf{C}_l(\Omega)
\end{aligned} \tag{III.52}$$

Les valeurs m_{tot} , n_{tot} et $n_{d,\text{tot}}$ déterminent la taille du modèle. nddl , le nombre de degrés de liberté est donné par :

$$\text{nddl} = 4 + 2 \times m_{\text{tot}} + N_b \times n_{\text{tot}} + 4 + 2 \times (n_{d,\text{tot}} - 1) \quad (\text{III.53})$$

Le modèle construit et étudié dans la suite comporte 10 aubages qui possèdent chacun deux ddls ($n_{\text{tot}} = 2$). La roue aubagée apporte donc deux familles de 10 modes de 0 à 5 diamètres nodaux, basées sur les déformées des deux premiers modes de flexion d'une poutre encastree-libre (voir section I.4.2). Les déformations du carter sont introduites par les 4 ddls suivants : $\{A_2, B_2, A_3, B_3\}^T$ qui décrivent les modes à 2 et 3 diamètres nodaux, et auxquels s'ajoutent les 4 ddls de corps rigide, apportés par la suspension et le lien arbre-carter. Enfin, quatre fonctions de formes sont introduites pour décrire les déformations de l'arbre ($m_{\text{tot}} = 4$), 10 ddls lui sont donc attribués. Le modèle complet, dont nous allons décrire les propriétés, comporte ainsi 38 ddls.

1.2 Comportement du modèle sans contact

Avant d'étudier le modèle complet, nous observons son comportement à partir des deux points de vue de la dynamique des systèmes tournants. Pour cela, nous développons deux configurations de modèle distinctes :

- Une configuration dite « WEM » (pour *Whole Engine Model*) qui observe le comportement d'ensemble du modèle depuis le point de vue de la dynamique des rotors (voir section I.3). Les aubes sont supposées rigides et introduites uniquement à travers leurs propriétés d'inertie et les déformations du carter sont supprimées (ne sont conservés que ses ddls de corps rigide). Les paramètres considérés pour cette configuration sont listés dans le tableau III.1.
- Une configuration dite « module » qui étudie le comportement localisé à la roue fan et son carter en s'appuyant sur les propriétés des structures à symétrie de révolution (voir section I.4.2). Les degrés de liberté de l'arbre et les déplacements de corps rigide du carter sont supprimés, seules les déformations des aubages et du carter sont considérées. La mise en donnée utilisée pour cette configuration est présentée dans le tableau III.2.

Les diagrammes de Campbell obtenus pour chacune des configurations sont tracés figure III.7. Les modes « WEM » y sont identifiés par la lettre W et sont numérotés par ordre croissant des fréquences propres à 0 rpm. Les modes à diamètre de la roue aubagée et du carter sont notés respectivement B et C. Les déformées associées sont dessinées sur les figures III.8 et III.9 pour la configuration module et sur la partie haute de la figure III.10 pour les modes W. Des zébrures sont parfois observées sur la surface du carter, elles sont produites par un effet graphique et apparaissent lorsque le dessin, plus foncé, de l'anneau du carter déplacé et/ou déformé traverse le dessin, plus clair, de l'anneau représentatif du carter centré et non-déformé.

Notons que les six derniers modes WEM (W(9-14)) et la famille des modes de roue aubagée associée au deuxième mode de flexion de la poutre encastree-libre, se situent

Notation	Description	Valeur
η_s	Facteur d'amortissement visqueux de l'arbre	0
ρ_s	Masse volumique de l'arbre	7800 kg/m ³
E_s	Module d'Young de l'arbre	119 × 10 ⁹ Pa
L_s	Longueur de l'arbre	2 m
m_{tot}	Nombre de fonctions de Ritz considérées pour décrire la flexion de l'arbre	4
R_e	Rayon extérieur de la section circulaire de l'arbre	0.065 m
R_i	Rayon intérieur de la section circulaire de l'arbre	0.055 m
	Orientation de la rotation propre de l'arbre	− z
z_{d_f}	Abscisse du disque fan	0 m
M_{d_f}	Masse du disque fan	100 kg
I_{diam,d_f}	Inertie diamétrale du disque fan	1.86 kg.m ²
I_{pol,d_f}	Inertie polaire du disque fan	3.14 kg.m ²
M_b	Masse supplémentaire apportée par les 10 aubes rigides	44 kg
$I_{\text{diam},b}$	Inertie diamétrale supplémentaire	5.87 kg.m ²
$I_{\text{pol},b}$	Inertie polaire supplémentaire	11.6 kg.m ²
z_{d_t}	Abscisse du disque représentatif de la turbine bp	1.95 m
M_{d_t}	Masse du disque représentatif de la turbine bp	170 kg
I_{diam,d_t}	Inertie diamétrale du disque représentatif de la turbine bp	13.40 kg.m ²
I_{pol,d_t}	Inertie polaire du disque représentatif de la turbine bp	31.66 kg.m ²
z_p	Abscisse du palier	2 m
k_p	Raideur du palier	1 × 10 ⁸ N/m
c_p	Amortissement visqueux du palier	8 × 10 ³ N.s/m
z_c	Abscisse du centre de gravité du carter	0.2 m
m_c	Masse du carter	165 kg
$I_{\text{diam},c}$	Inertie diamétrale du carter	54.4 kg.m ²
k_c	Raideur du support du carter	1.3 × 10 ⁸ N/m
$k_{c,\phi}$	Raideur angulaire du support du carter	3 × 10 ⁸ N/rad
c_c	Amortissement visqueux du support du carter	10 × 10 ³ N.s/m
$c_{c,\phi}$	Amortissement angulaire visqueux du support du carter	6 × 10 ³ N.rad/m
z_l	Abscisse du lien arbre-carter	0.5 m
k_l	Raideur du lien arbre-carter	1.75 × 10 ⁸ N/m
$k_{l,\phi}$	Raideur angulaire du lien arbre-carter	2.5 × 10 ⁸ N/rad
c_l	Amortissement visqueux du lien arbre-carter	14 × 10 ³ N.s/m
$c_{l,\phi}$	Amortissement angulaire visqueux du lien arbre-carter	5 × 10 ³ N.s/m

TABLE III.1: Mise en donnée du modèle : configuration « WEM »

Notation	Description	Valeur
η_b	Facteur d'amortissement visqueux des aubes	4×10^{-5}
ρ_b	Masse volumique des aubes	4450 kg/m^3
E_b	Module d'Young des aubes	$114 \times 10^9 \text{ Pa}$
β	Orientation de la section droite des aubes	-10°
L_b	Longueur des aubes	0.52 m
r_{df}	Rayon du disque fan	0.23 m
b	Petit coté de la section droite	0.0165 m
h	Grand coté de la section droite	0.1165 m
k_b	Raideur inter-aubes	100 N/m
n_{tot}	Nombre de fonctions de Ritz considérées pour décrire la flexion des aubes	2
n_d	Diamètres nodaux considérés pour décrire les déformations du carter	{2, 3}
η_c	Facteur d'amortissement visqueux du carter	4×10^{-4}
ρ_c	Masse volumique du carter	2710 kg/m^3
E_c	Module d'Young du carter	$69 \times 10^9 \text{ Pa}$
R_c	Rayon du carter	0.76 m
I_z	Moment quadratique de la section droite du carter dans la direction \mathbf{z}	$5.9 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

TABLE III.2: Mise en donnée du modèle : configuration « module », dynamique des systèmes à symétrie de révolution

à des plages de fréquences plus élevées et ne seront pas décrits. De plus, pour rendre les diagrammes de Campbell plus compacts et rapides à interpréter, nous traçons la valeur absolue des fréquences propres. C'est pourquoi les courbes descendantes qui décrivent l'évolution des fréquences propres des modes directs ou co-rotatifs semblent rebondir sur l'axe des abscisses. La portion de courbe qui précède le rebond correspond, en réalité, à des parties imaginaires négatives.

Observons tout d'abord les résultats obtenus avec la configuration « WEM ». Comme attendu pour un système axisymétrique, les modes W sont, à vitesse nulle, associés par paires de valeurs propres conjuguées et de déformées orthogonales (c'est pourquoi la figure III.10 ne présente qu'une seule déformée par couple). Lorsque la vitesse de rotation croît, les fréquences propres des modes doubles s'ouvrent sous l'effet des forces gyroscopiques et du fait de la description du modèle dans le repère mobile (voir section I.3.2).

Les régions identifiées par L1, L2 et L3 sur la figure III.7 voient apparaître des phénomènes de *locus veering* : deux branches de fréquences propres associées à deux modes distincts sont sur le point de se croiser mais au lieu du croisement attendu, elles se repoussent et échangent leur pente ; ce changement de pente s'accompagne aussi d'un échange des déformées modales. Ces phénomènes ont été mis évidence et étudiés dans [Lei74 ; PJ86 ; Pie88]. Le *locus veering* identifié par L1 concerne les modes W(5) et W(7), puis le mode W(7) change à nouveau de branche au cours du *locus veering* L2 qui fait intervenir le mode W(3) et est suivi par le *locus veering* L3 entre les modes W(3) et W(5).

Deux vitesses critiques sont identifiées dans la plage de régime étudiée. Rappelons que dans le repère mobile, les fréquences synchrones de la rotation propre sont nulles et les vitesses critiques sont ainsi obtenues au croisement de l'axe des abscisses. La première vitesse critique, située à 4610 rpm, est associée au mode W(1) et la seconde située à 7180 rpm concerne le mode W(7) qui a subi les *locus veering* L1 et L2. Les déformées de ces deux modes sont tracées figure III.10, la déformée de W(1) implique une déformation importante de l'arbre au niveau du fan, tandis que le mode W(7) concentre la plus grande partie de l'énergie de déformation de l'arbre au niveau de la turbine, nous les nommons donc respectivement *mode fan* et *mode de turbine*.

Remarquons enfin, que les déformées des modes W sont globales, du fait de la liaison élastique introduite entre les déplacements du carter et la section droite de l'arbre en $z = z_l$. elles font intervenir les déplacements et fléchissements de l'arbre conjointement aux déplacements du carter. Les 4 ddls apportés par la suspension du carter et les 10 ddls associés à l'arbre conduisent ainsi à 14 modes d'ensemble qui distribuent leur énergie de déformation sur tous les ddls du modèle.

Étudions maintenant les modes propres obtenus avec la configuration « module ». Le Campbell tracé sur la partie droite de la figure III.7 décrit l'évolution des fréquences propres des modes de carter à deux et trois diamètres nodaux ($C(2n_d)$ et $C(3n_d)$) et des modes de roue aubagée associés à la déformation de première flexion des aubes ($B(0-5n_d)$).

Les déformées propres de ces 10 modes de roue aubagée sont dessinées figure III.8, depuis le mode à zéro diamètre pour lequel toutes les aubes fléchissent dans la même direction jusqu'au mode à 5 diamètres nodaux où chacune des aubes fléchit dans la direction opposée à ses voisines. Entre ses deux bornes, figurent les modes doubles, dit *dégénérés* (voir section I.4.2), de 1, 2, 3 et 4 diamètres nodaux. Le diagramme de Campbell étant tracé dans le repère mobile, les courbes qui décrivent l'évolution des fréquences propres des modes de roue aubagée forment un « paquet » de fréquences très semblables qui croissent sous l'effet combiné du raidissement et de l'assouplissement centrifuge. Leurs fréquences ne diffèrent que très légèrement du fait de la raideur inter-aube introduite pour organiser les déformées en diamètres nodaux (voir équation (III.19)).

Les branches qui décrivent l'évolution des fréquences propres des modes de carter sont parfaitement rectilignes et possèdent des pentes directement liées aux diamètres nodaux des modes concernés. Les branches seraient horizontales si le diagramme était décrit dans le repère fixe, les fréquences propres des mode co et contra-rotatifs dans les repères fixes et mobiles sont en effet, reliées par les expressions suivantes :

$$\omega_f^+ = n_d \Omega + \omega_m^+ \quad \text{et} \quad \omega_f^- = n_d \Omega - \omega_m^- \quad (\text{III.54})$$

où les indices $+$ et $-$ indiquent respectivement un mode co et contra-rotatif, f et m renseignent les fréquences propres observées depuis le repère fixe ou mobile. Les déformées propres du carter sont tracées figure III.9.

A la différence de la configuration « WEM » pour laquelle l'ensemble des ddls du modèle étaient couplés, les ddls du carter et des aubes sont ici parfaitement dissociés. Dans ce contexte, les couplages entre les déformations des aubes et du carter ne pourraient avoir lieu sans la présence de contacts aube-carter. Avec l'hypothèse de ses contacts, les régimes mis en évidence par les symboles \bullet sur la figure III.7 seraient particulièrement critiques. En effet, à ces régimes, les vitesses propagation des modes tournants sur la roue aubagée et le carter, coïncident et les contacts pourraient alors conduire au phénomène d'interaction modale abordé dans la section II.1.2.

Le diagramme de Campbell tracé figure III.11 est obtenu en considérant le modèle complet, pour lequel sont introduits : les déformations de l'arbre, des aubes et du carter ainsi que les déplacements de corps rigide du carter. Nous y retrouvons ainsi les modes d'ensemble W, les modes de roue aubagée B et les modes à diamètre du carter C. L'intérêt principal de ce diagramme est d'illustrer l'effet du couplage entre les aubes souples et l'arbre. Pour le mettre en évidence, nous avons donc superposé aux fréquences propres obtenues, les branches du modèle « WEM » pour lequel les aubes sont rigides, elles sont tracées en pointillés sur la figure III.11. De plus, les modes propres affectés par cette nouvelle configuration y sont marqués d'une étoile $*$.

Notons tout d'abord, que les modes à diamètres du carter $C(2n_d)$ et $C(3n_d)$, restent parfaitement identiques à précédemment. Les déformations du carter sont en effet, par construction, dissociés de ses ddls de corps rigides, les modes C ne

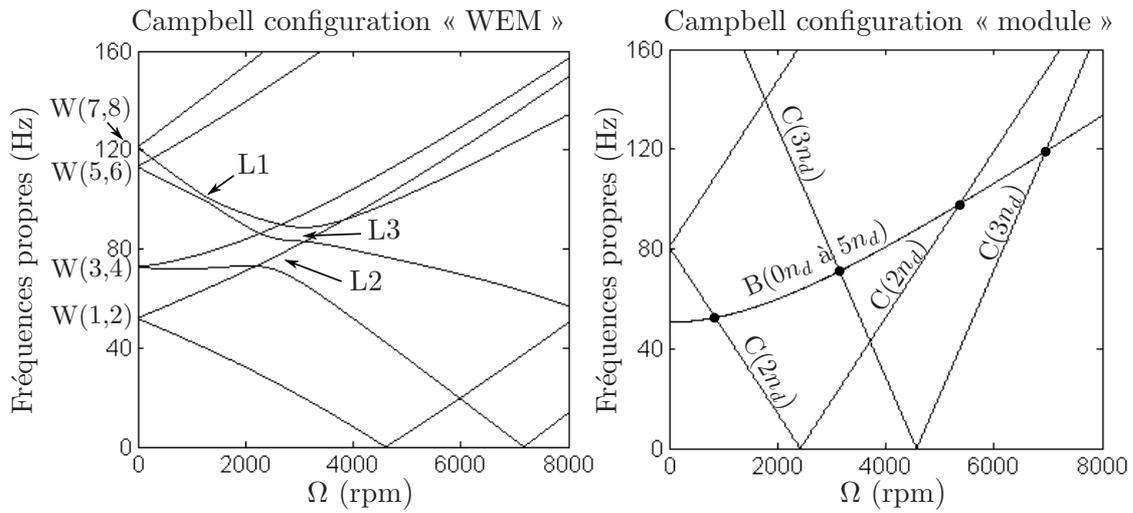


FIGURE III.7: Diagrammes de Campbell des configurations « WEM » et « module » du modèle, décrits dans le repère mobile

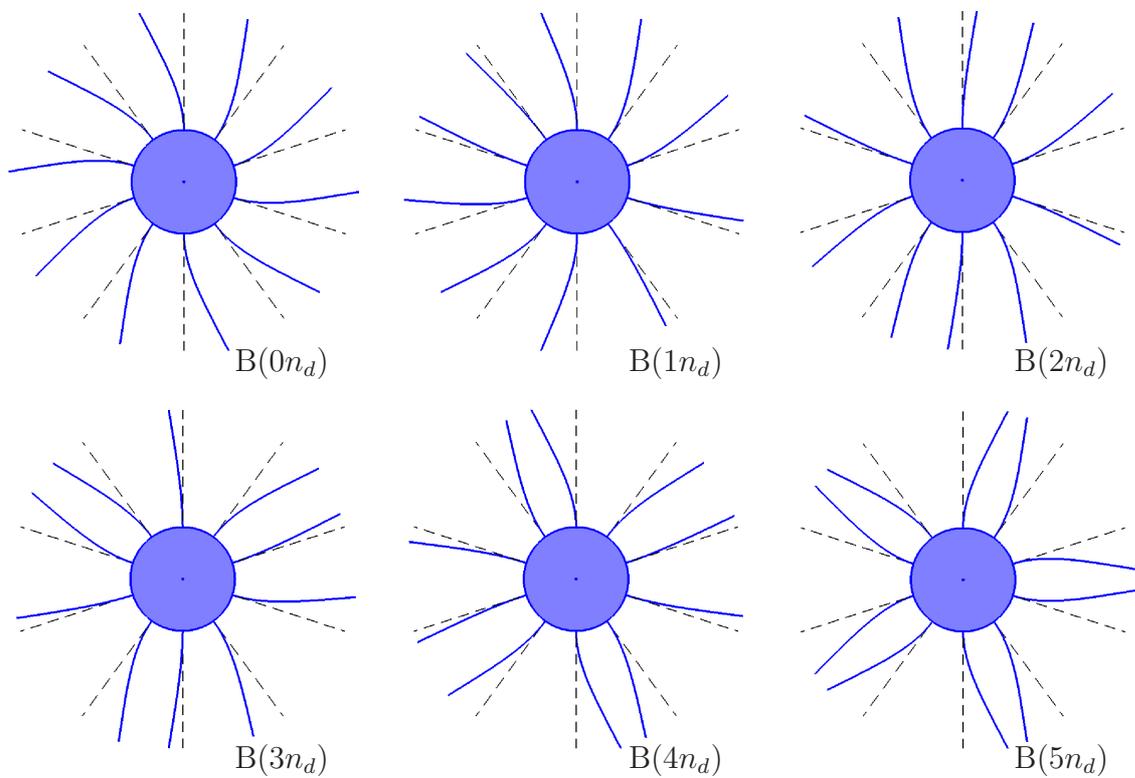


FIGURE III.8: Déformées des modes à diamètres de la roue aubagée (modèle « module »)

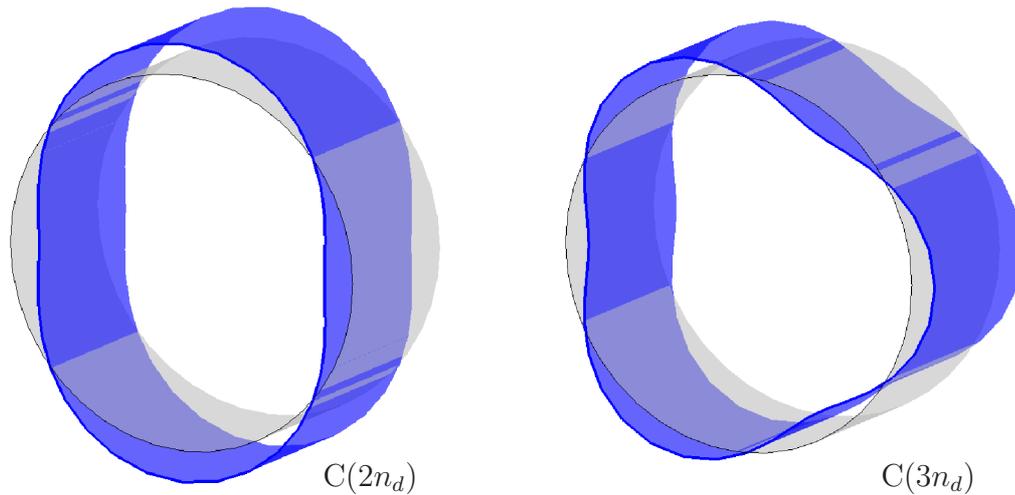


FIGURE III.9: Déformées à diamètres du carter (modèle « module »)

peuvent donc pas être affectés par l'introduction des ddls « WEM », et en absence de contact, rien ne les lie aux ddls des aubes.

En revanche, l'impact des aubes souples sur les modes « WEM » est important. Il s'observe nettement sur les déformées modales tracées sur la partie basse de la figure III.10 : les déformations de l'arbre et les déplacements du carter y restent similaires à ceux des déformées de la configuration « WEM » dessinées au dessus, mais on remarque la participation des aubes suivant la déformée à un diamètre nodal. Cette participation est particulièrement importante pour les modes $W^*(1,2)$ qui se confondent à 0rpm avec les modes $B^*(1n_d)$. En effet, à cette vitesse, les fréquences propres des modes de roue aubagée B, sont très voisines de celles des modes fan $W(1,2)$: 50.5 contre 52 Hz. Ainsi, le modèle complet voit le couple des modes fan, $W^*(1,2)$, s'ouvrir et s'associer au couple des modes de roue aubagée à un diamètre nodal : $B^*(1n_d)$. Deux couples de modes entourent alors le « paquet » des modes de roue aubagée qui ne comprend plus que 8 modes : $B(0, 2, 3, 4$ et $5n_d)$. Les déformées de ces deux couples de modes qui sont orthogonales entre elles du fait de l'axisymétrie du modèle, sont très similaires : elles présentent les mêmes natures de contribution sur l'arbre et la roue aubagée, la différence notable est une inversion de la phase de la déformée de la roue aubagée vis-à-vis de celle de l'arbre (voir figure III.12). Nous utilisons donc les informations disponibles sur leurs déformées et fréquences propres aux régimes plus élevés, pour identifier les modes qui composent ces deux couples.

L'impact sur le Campbell est également important dans la région qui présentait les *locus veering* L1 et L2 pour la configuration « WEM » et le zoom tracé dans la figure III.11 permet de mieux le percevoir. Aux *locus veering* L2 et L3 qui faisaient intervenir respectivement les modes $W(3,7)$ et $W(3,5)$, ont succédé de nombreux *locus veering* faisant intervenir ces mêmes modes $W^*(3,5$ et $7)$, qui présentent maintenant une contribution en un diamètre sur la roue aubagée, mais aussi le mode $B^*(1n_d)$ qui possède une partie de son énergie de déformation dans l'arbre et les déplacements du carter.

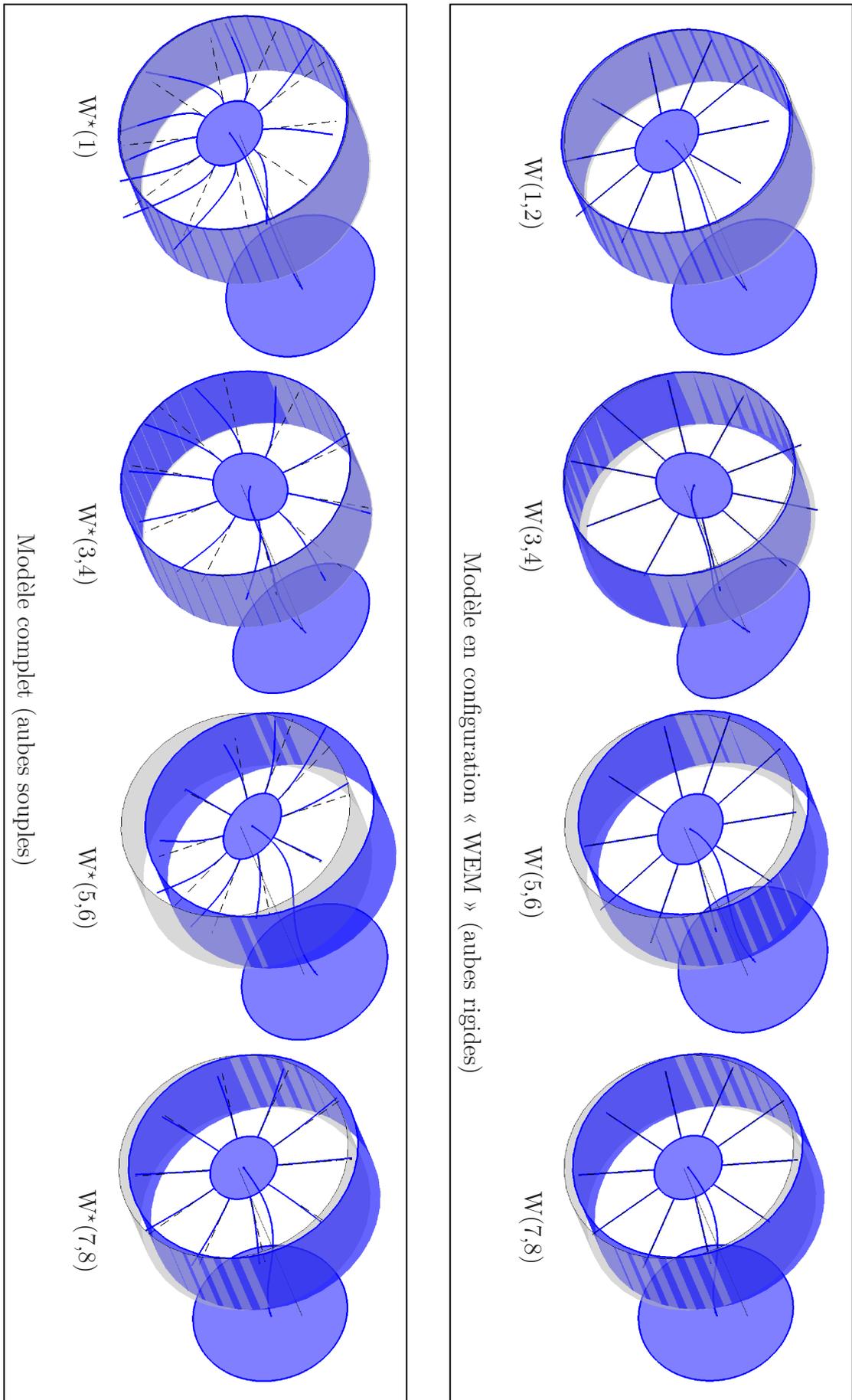


FIGURE III.10: Déformées des modes d'ensemble à 0 rpm

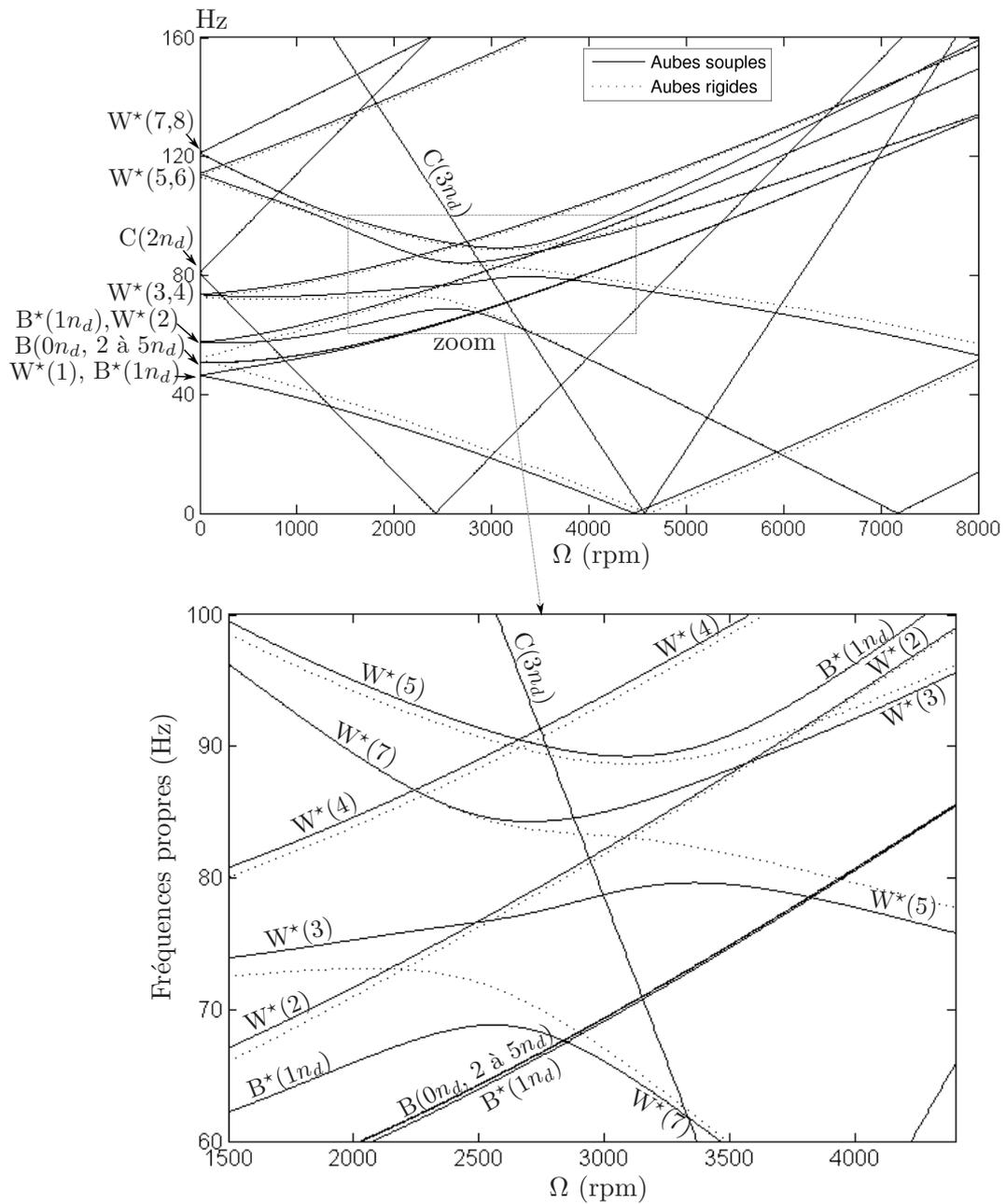


FIGURE III.11: Diagramme de Campbell du modèle complet décrit dans le repère tournant

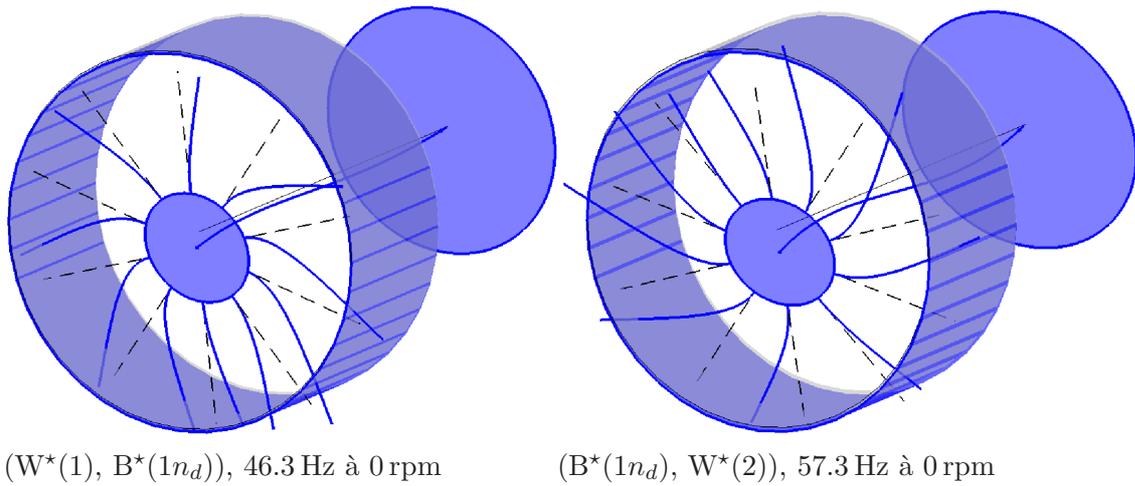


FIGURE III.12: Déformées à 0 rpm des deux couples de modes identifiés par ($W^*(1), B^*(1n_d)$) et ($B^*(1n_d), W^*(2)$)

L'ensemble des phénomènes décrits met en évidence le couplage entre les modes de roue aubagée à un diamètre nodal et les modes d'ensemble, au travers du lien d'inertie présent entre les ddls des aubes et ceux de l'arbre. Seuls les modes $B(1n_d)$ peuvent se coupler aux modes d'ensemble W , comme nous l'avons évoqué en section I.5, cela s'explique par la cinématique attribuée à la section droite de l'arbre lors de la construction du modèle. L'arbre est en effet modélisé par une poutre en flexion qui autorise à chacune de ses sections droites, quatre déplacements : les deux translations et les deux basculements dans les directions transverses à l'axe moteur. Les schémas proposés figure III.13, nous permettent d'interpréter cette cinématique en observant les déplacements des points de la circonférence du disque représentatif d'une section droite de l'arbre. Nous remarquons alors que les basculements conduisent à une déformée à un diamètre nodal impliquant un déplacement amont-aval, tandis que les translations du disque mènent aussi à une déformée à un diamètre nodal, mais construite par le déplacement radial des points distribués sur la circonférence. Ce raisonnement simple nous permet de comprendre le filtrage opéré par la cinématique de l'arbre qui ne peut s'associer qu'aux déformées à un seul diamètre nodal. Il nous renseigne également sur l'influence de l'orientation du fléchissement des aubes sur les couplages qui vont pouvoir s'opérer.

C'est le paramètre β qui positionne la section droite des aubes (voir figure III.4) et détermine par là-même, leur direction de fléchissement : les déformations des aubes seront contenues dans le plan du disque pour $\beta = 0^\circ$, tandis qu'elles fléchiront d'amont en aval pour $\beta = 90^\circ$. Ainsi, pour des valeurs de β proches de 0° , les couplages roue aubagée-arbre impliqueront davantage les modes d'ensemble comportant un déplacement radial du disque fan important ; inversement, pour des valeurs de β voisines de 90° , les couplages interviendront au travers des basculements du disque. Pour observer ce phénomène et son impact sur les modes propres du modèle complet, nous étudions ces deux configurations extrêmes : $\beta = 0^\circ$ et $\beta = 90^\circ$.

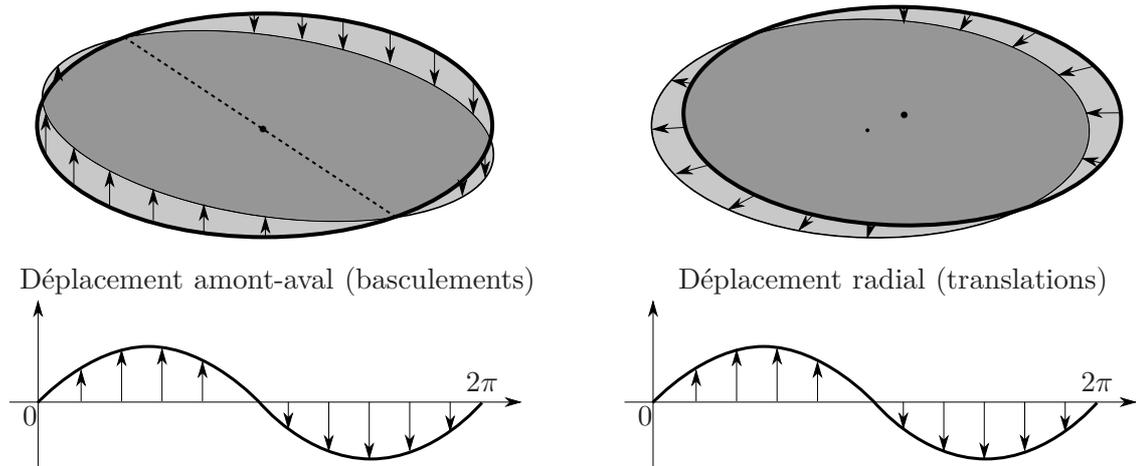


FIGURE III.13: Interprétation de la cinématique de la section droite de l'arbre sur la circonférence du disque

Avant d'étudier son influence sur les couplages, il faut remarquer que le paramètre β intervient dans les termes d'assouplissement centrifuge propres aux aubes ; il impacte donc l'évolution des fréquences propre des modes de roue aubagée. Pour expliciter son effet, reprenons l'exemple simple développé dans la section I.4.1, qui comportait une poutre de section rectangulaire encastrée sur un disque rigide en rotation et pouvant fléchir dans le plan du disque ; le terme d'assouplissement centrifuge propre au fléchissement de la poutre s'écrit : $-\Omega^2 m/5$. En inclinant sa section droite de l'angle β , ce terme devient : $-\Omega^2 m/5(\cos \beta)^2$. Cet effet de la rotation va ainsi décroître avec l'augmentation de β jusqu'à s'annuler complètement lorsque plus aucune composante de la déformation de la poutre n'est contenue dans le plan du disque. Pour la mise en donnée et la plage de régimes considérés ici, cela se traduit sur les fréquences propres des modes de roue aubagée, par les évolutions tracées figure III.14 ; plus β est grand, plus les fréquences des modes d'aube croissent avec le régime car les termes d'assouplissement diminuent et ne compensent plus autant les termes de raidissement centrifuge indépendants de β .

Les diagrammes de Campbell obtenus avec le modèle complet pour des valeurs $\beta = 0^\circ$ et $\beta = 90^\circ$ sont tracés figure III.15. Notons que les modes de déformation du carter étant découplés du reste du modèle, leur fréquences propres sont supprimées des diagrammes de Campbell pour ne pas les encombrer inutilement. De plus, pour fournir un élément de comparaison, les fréquences propres du modèle en configuration « WEM » (aubes rigides) sont tracées en pointillés sur les deux diagrammes.

Les écarts les plus importants sur l'évolution des fréquences propres sont obtenus pour les modes $W^*(3,4)$ et $W^*(5,6)$: si pour $\beta = 0^\circ$, les fréquences propres s'éloignent peu de celles obtenues pour des aubes rigides et sont à 0 rpm, de 73 Hz pour $W^*(3,4)$ et 113 Hz pour $W^*(5,6)$; lorsque $\beta = 90^\circ$, les fréquences propres sont très impactées et valent à 0 rpm, 82 Hz pour $W^*(3,4)$ et 138 Hz pour $W^*(5,6)$. Ces différences s'expliquent par la nature des déformées concernées qui impliquent un

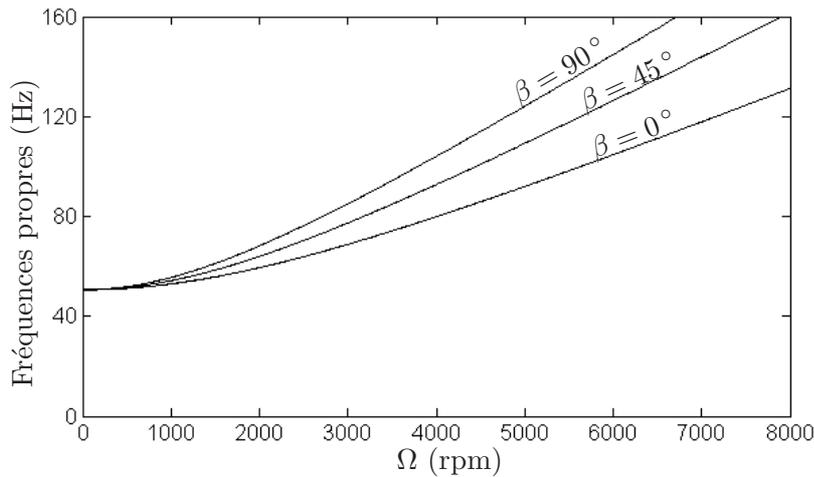


FIGURE III.14: Influence de l'orientation de la flexion des aubes β sur l'évolution des fréquences propres des modes de roue aubagée

basculement important du disque fan (voir figure III.10). Les déformées du couple $W^*(5,6)$ sont également dessinées figure III.16 pour les deux valeurs de β étudiées; nous permettant d'observer la contribution nettement plus importante des aubages lorsque $\beta = 90^\circ$.

L'impact sur les fréquences propres des modes $W^*(1,2)$ et $B^*(1n_d)$ semble en revanche, être lié davantage à la variation de l'évolution des fréquences propres des modes de roue aubagée qu'à la nature des déformées modales impliquées. En effet, si l'impact à 0 rpm et au niveau des croisements sources de nombreux *locus veering* (zone située environ entre 2000 et 3500 rpm et de 60 à 100 Hz), est important. Une fois des régimes suffisants atteints, les branches de fréquences propres suivent des trajectoires similaires quelle que soit la valeur de β . La vitesse critique du mode fan $W^*(1)$ est de 4460 rpm pour $\beta = 0^\circ$ et de 4480 rpm pour $\beta = 90^\circ$, contre 4610 rpm lorsque les aubes sont rigides. L'observation des déformées obtenues indique une participation équivalente de la déformation des aubes pour $\beta = 0^\circ$ et 90° car la déformée des modes fan $W(1,2)$ fait intervenir de manière équilibrée les basculements et les translations du disque fan (voir figure III.10).

Cette étude qualitative met en évidence l'influence de l'orientation des aubes sur les couplages aubes-arbre obtenus et traduit l'importance de ce paramètre β , qui doit donc être choisi avec attention. Le choix de ce paramètre est aussi compliqué par l'approximation importante que constitue la modélisation des aubes fan par des poutres de section rectangulaire constante. En effet, les turboréacteurs modernes comportent des aubes fan de forme fortement 3D : elles sont vrillées, de forme creusée et l'allure de leur section droite évolue fortement depuis le pied de l'aube jusqu'au sommet. La valeur de -10° est choisie pour notre mise en donnée.

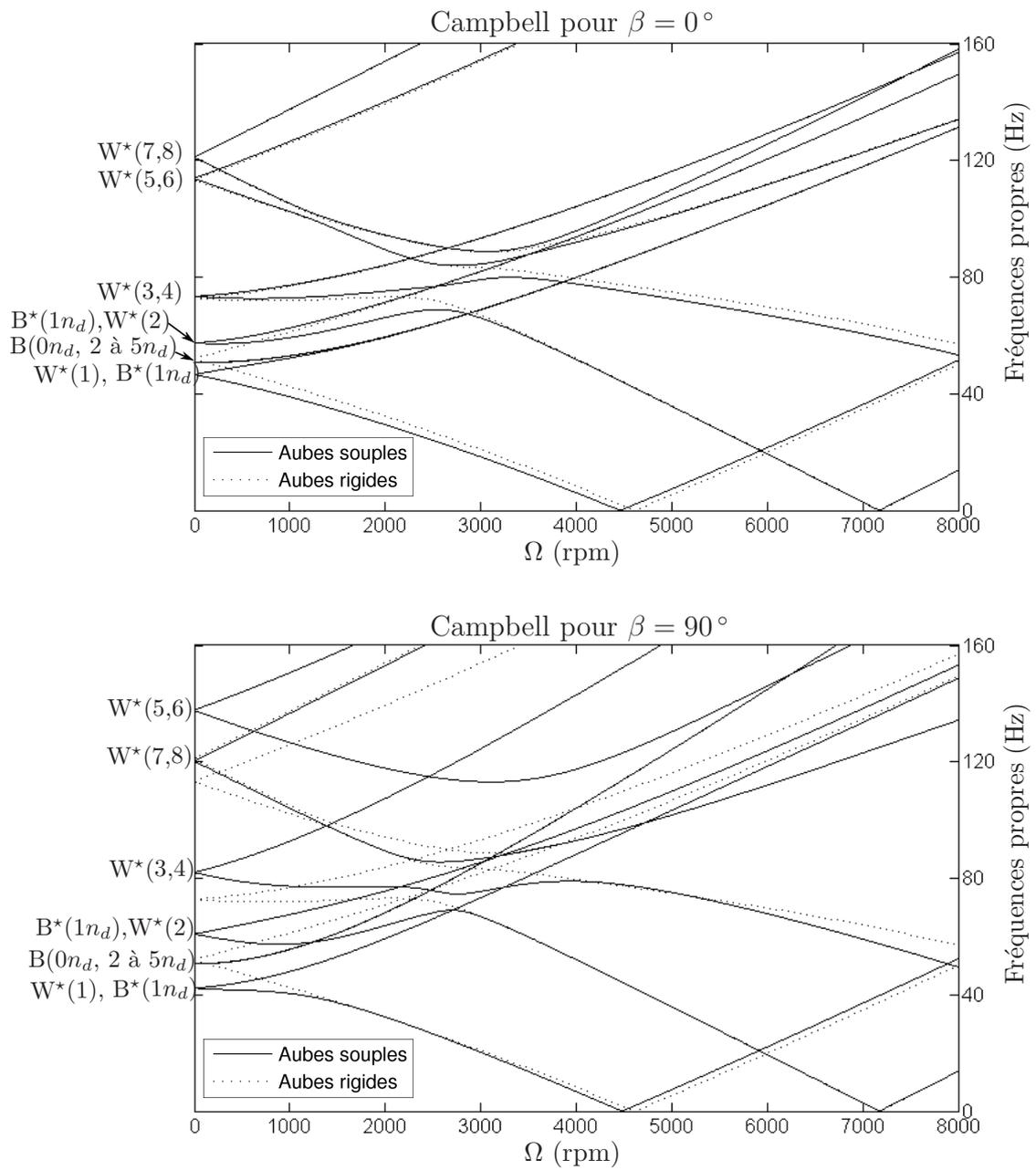


FIGURE III.15: Diagrammes de Campbell obtenus pour $\beta = 0^\circ$ et $\beta = 90^\circ$

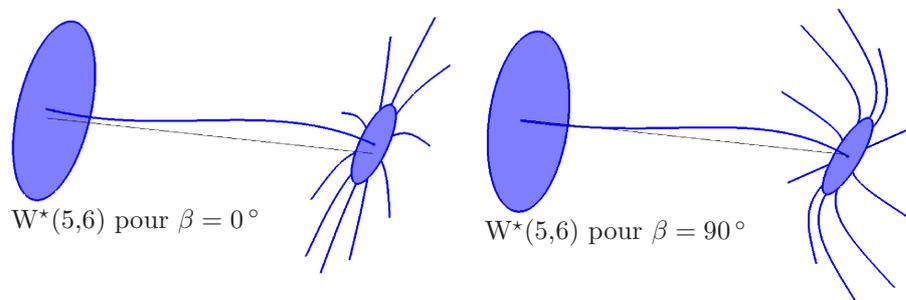


FIGURE III.16: Partie rotor des déformées modales $W^*(5,6)$ à 0 rpm pour $\beta = 0^\circ$ et $\beta = 90^\circ$

1.3 Conclusion

Cette section décrit le comportement linéaire du modèle qui sera au centre des investigations développées dans la suite de ce chapitre. Pour étudier son comportement et s'assurer de sa cohérence, nous l'avons tout d'abord observé depuis les deux points de vue de la dynamique des systèmes tournants. Une configuration dite « WEM » pour laquelle les déformations des aubes et du carter sont supprimées, a permis de dégager le comportement du modèle du point de vue de la dynamique des rotors : d'identifier les vitesses critiques de deux modes présentes dans la plage de régime étudiée et d'observer les modes d'ensemble qui font intervenir le fléchissement de l'arbre et les déplacements du carter liés par un élément visco-élastique. Une configuration dite « module » qui contient uniquement des ddls de déformation du carter et des aubes, a permis d'observer le comportement associé à la dynamique des systèmes à symétrie de révolution : d'observer les déformées à diamètres sur le carter et la roue aubagée et d'identifier les vitesses auxquelles des contacts aubes-carter sont susceptibles de mener à un phénomène d'interaction modale.

Puis les propriétés modales du modèle complet ont été étudiées. Au lien arbre-carter déjà présent dans la configuration « WEM », s'est ainsi ajouté le lien inertiel entre les aubes et l'arbre flexibles. Les comportements observés mettent en évidence les couplages aubes-arbre : les déformées des modes d'ensembles voient apparaître une participation en un diamètre nodal de la roue aubagée et inversement, celles des modes de roue aubagée à un diamètre font intervenir l'arbre et les déplacements du carter. Les seuls modes qui ne sont pas affectés, sont les modes à diamètres du carter qui restent, par construction, dissociés du reste du modèle et les modes de roue aubagée de diamètre différent de un, qui sont filtrés par les contraintes cinématiques de la section droite de l'arbre. Une étude d'influence qualitative est aussi proposée pour observer l'influence de l'orientation du fléchissement des aubes, régi par le paramètre β , sur les couplages obtenus. Les phénomènes décrits sont cohérents avec les observations de [Les07] et [Gru12], sur les travaux desquels s'appuient le modèle de rotor-aubagé. D'autres auteurs décrivent également ces couplages pour des modèles hybrides différents (voir section I.5), les observations de l'influence de β sont notamment analogues à celles rapportées dans [CM84].

Le modèle construit qui contient seulement 38 ddls, comporte des modes propres qui constituent naturellement des interactions à un diamètre nodal. Ils mettent en jeu les déformations des aubes, de l'arbre et les déplacements du carter. Ce comportement naturel élaboré pourra ainsi conduire à des scénarios originaux lorsque les contacts aubes-carter seront considérés.

2 Implémentation du contact aube-carter

Le modèle linéaire construit, nous pouvons à présent introduire les contacts aubes-carter. Les relations de contact et les méthodes qui permettent d'introduire ses effets dans le système d'équations ont été présentées dans la section II.2, nous aborderons

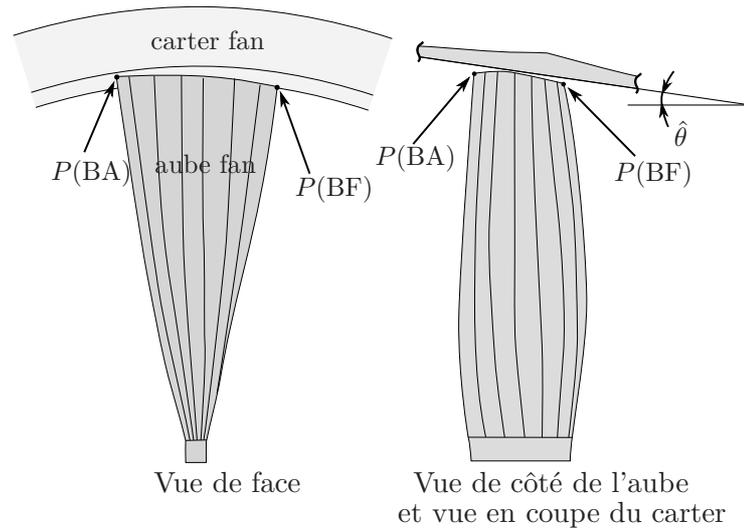


FIGURE III.17: Schémas de la géométrie de la zone de contact

ici leur implémentation à notre modèle par la méthode de pénalité.

Les contacts rotor-stator étudiés font intervenir le sommet des aubes fan et la surface interne du carter fan recouverte de matériau abrasable. Les aubes fan des turboréacteurs modernes sont à large corde et présentent une géométrie fortement 3D ; de plus, la surface interne du carter n'est pas cylindrique mais légèrement conique. Ces particularités de la géométrie locale des contacts étudiés schématisées figure III.17, n'apparaissent pas dans notre modèle simplifié où le carter est un anneau cylindrique et les aubes, des poutres de section rectangulaire constante. Nous proposons donc dans cette section, une gestion de contact qui permet de regagner en précision dans la détection du contact et l'application des efforts. Cette gestion de contact, dite *3D*, sera comparée à une gestion de contact plus simple, dite *2D*.

2.1 Détection des touches

Pour regagner en précision, la gestion de contact *3D* introduit des éléments de la géométrie de la région de contact et prend en compte toute la cinématique du module fan apportée par le modèle. Le jeu est calculé aux deux extrémités de la corde au sommet de l'aube, les points considérés sont identifiés sur la figure III.17 par $P(BA)$ pour le point du Bord d'Attaque et $P(BF)$ pour le point du Bord de Fuite. Les coordonnées dans l'espace de ces deux points sont mesurées sur la maquette numérique d'un module fan industriel et l'inclinaison de la surface interne du carter, notée $\hat{\theta}$, est obtenue de la même façon.

Avant de calculer le jeu à proprement parler, nous exprimons la position de ces points en fonction des déplacements du système. La position finale P' d'un point de position initiale P est donnée dans le repère du carter, par l'expression suivante :

$$P' = \mathbf{P}_{\phi_{yc}} \mathbf{P}_{\phi_{xc}} \left(\mathbf{P}_{\phi_{xd}}^T \mathbf{P}_{\phi_{yd}}^T \mathbf{P}_{\alpha_j}^T \left(P + \mathbf{P}_{\beta}^T \begin{Bmatrix} x_b(L_b, t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} x_d(t) - x_c(t) \\ y_d(t) - y_c(t) \\ -z_c \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{III.55})$$

Les matrices de passage $\mathbf{P}_{\phi_{x_d}}$, $\mathbf{P}_{\phi_{y_d}}$, \mathbf{P}_{α_j} et \mathbf{P}_β sont données dans (III.15) et les matrices de passage liées aux rotations d'ensemble du carter sont de la forme suivante :

$$\mathbf{P}_{\phi_{x_c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_{x_c} & \sin \phi_{x_c} \\ 0 & -\sin \phi_{x_c} & \cos \phi_{x_c} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_{\phi_{y_c}} = \begin{bmatrix} \cos \phi_{y_c} & 0 & -\sin \phi_{y_c} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi_{y_c} & 0 & \cos \phi_{y_c} \end{bmatrix} \quad (\text{III.56})$$

La position $P' = \{P'_x, P'_y, P'_z\}^T$ connue grâce à l'équation (III.55), le jeu au point correspondant est obtenu en calculant la distance minimale entre un point et un cône et en introduisant la déformation radiale du carter :

$$g_j^{(3D)}(P) = \left(-\frac{R_b}{h} P'_z + R_b - \sqrt{P'^2_x + P'^2_y} + u(\alpha(P), t) \right) \cos \hat{\theta} \quad (\text{III.57})$$

où R_b , h et $\hat{\theta}$ sont les propriétés du cône qui représente la surface interne du carter : R_b est son rayon de base, h sa hauteur et $\hat{\theta}$ son angle d'ouverture. $\alpha(P)$ est la position angulaire initiale du point considéré, à laquelle la déformation radiale du carter est mesurée. Notons que la fonction de distance minimum présentée prend en compte uniquement la déformation radiale du carter est calculée à la position angulaire initiale du sommet d'aube. Nous supposons les déplacements suffisamment faibles pour autoriser cette approximation.

La fonction de distance minimum constituée par les expressions (III.55) et (III.57) est validée par comparaison avec la maquette numérique paramétrée sous Catia.

Pour évaluer l'efficacité de la méthode proposée, nous comparons les jeux obtenus par les expressions (III.55) et (III.57), à une expression plus simple qui fait intervenir uniquement la géométrie et les déformations contenues dans le plan transverse à l'axe moteur. Le jeu au sommet ponctuel de l'aube j est alors donné par :

$$g_j^{(2D)} = g_0 + L_b + r_{d_j} + u\left(\alpha_j + \frac{\pi}{2}, t\right) + \cos \alpha_j (x_c(t) - x_d(t)) + \sin \alpha_j (y_c(t) - y_d(t)) \quad (\text{III.58})$$

Pour comparer les deux formulations présentées dans leur capacité à détecter les contacts, nous appliquons un effort de balourd d'amplitude 0.225 m.kg au niveau du disque représentatif de la turbine bp. Ce balourd est choisi pour exciter suffisamment le mode fan W(1) et le mode de turbine W(7), pour produire des déplacements notables au niveau du module fan. Il s'agit d'un balourd assez important et les niveaux obtenus à la turbine peuvent atteindre 1.5 cm. Ces déplacements seraient incompatibles avec un comportement admissible en fonctionnement moteur, néanmoins, nous nous intéressons ici davantage aux déplacements perçus au niveau du fan et cette astuce nous permet, pour un même jeu de paramètre d'exciter deux modes distincts à des amplitudes suffisantes pour obtenir des déplacements non négligeables au fan ; cela nous permet donc d'étudier plus facilement, des scénarios plus riches.

Les translations obtenues au disque fan sous l'effet du balourd appliqué sont tracées figure III.18, les deux pics associés aux vitesses critiques des modes W*(1) et W*(7) apparaissent nettement à 4500 rpm et 7200 rpm. La réponse linéaire du système est alors introduite dans les expressions des jeux développées. Pour identifier

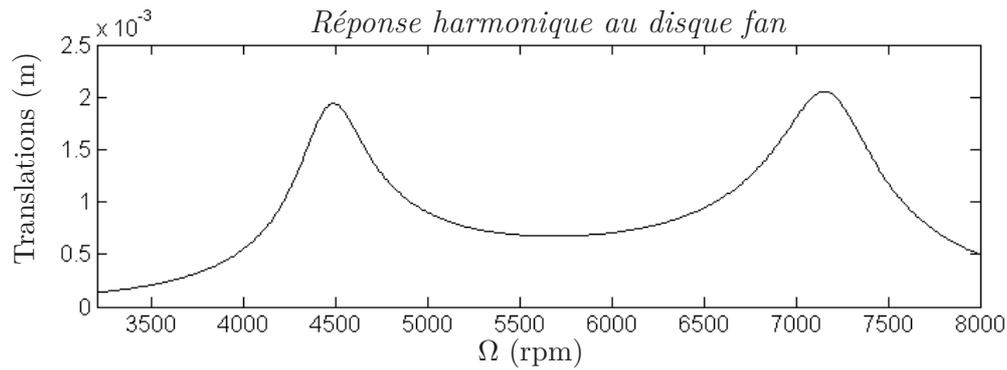


FIGURE III.18: Réponse à un balourd turbine mesurée au disque fan

clairement l'effet des enrichissements produit par la gestion $3D$, deux formulations supplémentaires, dites $3D$ dégradées, sont étudiées :

- Une gestion $3D$ sans géométrie, pour laquelle les aspects de la géométrie $3D$ sont écartés : $\hat{\theta} = 0^\circ$ et le sommet d'aube est supposé ponctuel.
- Une gestion $3D$ sans cinématique qui conserve ces aspects géométriques mais néglige les basculements du carter et du disque ainsi que le fléchissement des aubes : seuls les mouvements dans le plan du disque sont considérés.

A partir du champ de déplacement du système soumis au balourd, chacune de ces formulations fournit les valeurs des jeux au sommet des aubes distribuées sur la roue aubagée. Pour les comparer, nous traçons figure III.19, les consommations de jeu maximales obtenues.

Comme attendu, les courbes tracées ne sont pas sans rapport avec les déplacements mesurés au disque fan (tracés figure III.18) et nous observons les deux pics associés aux résonances des modes $W^*(1)$ et $W^*(7)$. Le pic de consommation de jeu associé à la vitesse critique du mode $W^*(7)$ est plus faible que celui du mode $W^*(1)$, car sa déformée modale implique un déplacement d'ensemble du carter important qui compense l'effet de celui du disque (voir figure III.10). Les courbes indiquent aussi clairement que les consommations de jeu mesurées par la méthode $3D$ sont plus importantes que celles obtenues en $2D$, l'écart dépasse 0.5 mm à 4500 rpm et représente une augmentation de près de 50 % : les contacts seront donc mieux détectés par la formulation $3D$. Enfin, les deux formulations dégradées ont des courbes très proches voire même inférieures à la gestion $2D$: la formulation $3D$ proposée perd donc son intérêt lorsque l'un de ces aspects $3D$ est écarté.

La gestion $3D$ proposée présente aussi l'avantage d'introduire plus de paramètres dont nous pouvons étudier l'effet : figure III.20, III.21 et III.22, sont tracées les consommations de jeux maximales obtenues pour différentes valeurs de l_c (largeur de corde en sommet d'aube), de $\hat{\theta}$ (conicité du carter) et de β (orientation du fléchissement des aubes). Les valeurs attribuées à ces paramètres pour chacune des études d'influence, sont choisies pour correspondre à des variations comparables par rapport à la valeur de référence retenue pour le modèle. Ces valeurs usuelles sont d'environ 20 cm pour l_c et 5° pour $\hat{\theta}$ et de -10° pour β . Les valeurs exactes considé-

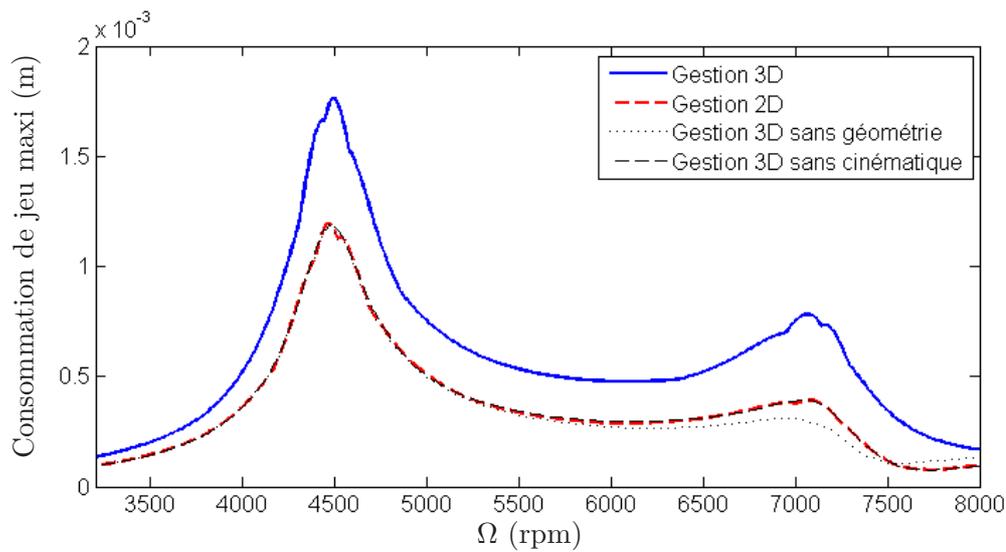


FIGURE III.19: Comparaison des consommations de jeu obtenues pour différentes méthodes de calcul

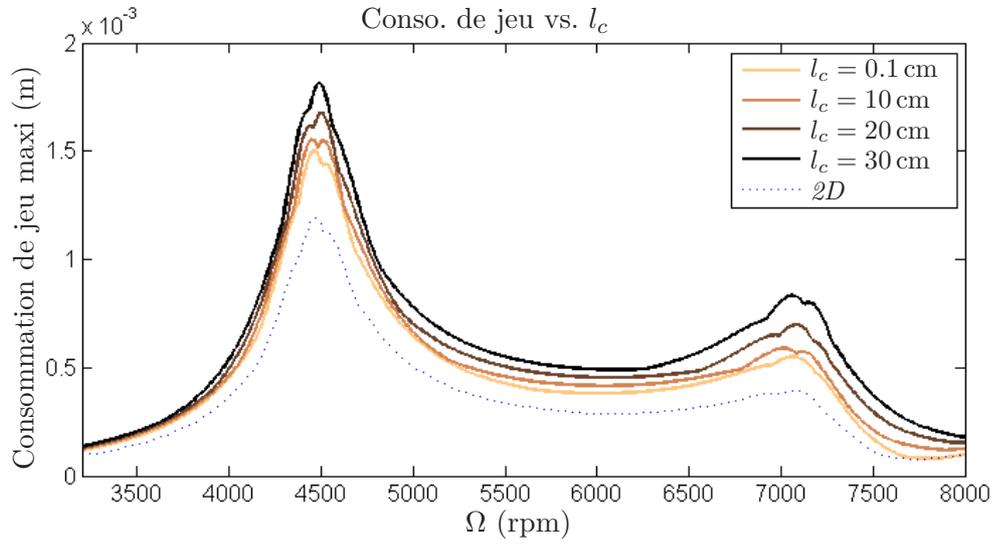
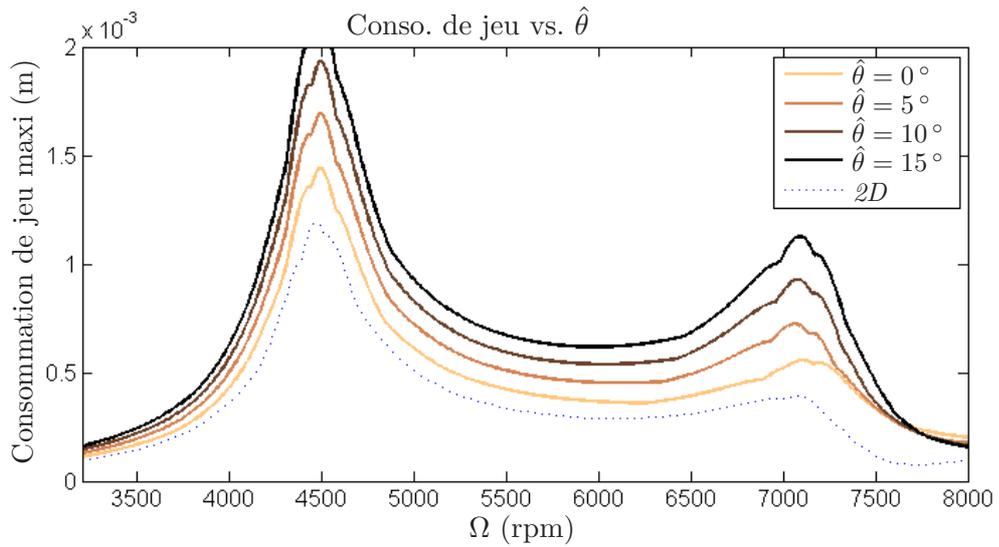
rées pour la longueur de corde et la conicité du carter ne sont pas données dans ce mémoire, car elles correspondent à des données industrielles confidentielles.

Notons tout d'abord que les tendances sont similaires pour les trois paramètres, plus leur valeur est grande, plus la consommation de jeu est importante. Pour les plages de variation retenues, c'est la conicité du carter qui présente l'influence la plus grande. Remarquons enfin qu'à la différence des deux premiers, β est un paramètre structural qui, comme nous l'avons expliqué en section III.1.2, influe sur le comportement dynamique du modèle; c'est pourquoi les consommations de jeu obtenues par la formulation 2D sont également affectées par ses variations.

Nous avons ainsi montré l'intérêt de la formulation 3D proposée pour détecter les contacts, et observé l'influence de certains paramètres géométriques et cinématiques. Néanmoins, les consommations de jeu calculées, ne prennent pas en compte les effets non-linéaires du contact : dans la réalité, lorsque les jeux sont consommés, des efforts viennent s'appliquer sur le sommet d'aube et la portion de carter concernée, pour exprimer l'impénétrabilité entre les solides et le frottement (voir section II.2). Les résultats présentés ici ne tiennent pas compte de ces efforts et ne peuvent donc pas être interprétés autrement que pour comparer l'efficacité des fonctions de distance minimum développées. Les consommations de jeu maximales calculées peuvent s'interpréter comme le jeu initial minimum à introduire pour éviter les touches, mais ne correspondent pas aux valeurs réelles qui seraient obtenues pour des conditions de contact respectées.

2.2 Efforts de contact

Jusqu'à présent, nous n'avons fait que détecter des contacts sans en introduire les effets sur la dynamique du système. Pour étudier le comportement du modèle

FIGURE III.20: Consommations de jeu obtenues pour différentes valeurs de l_c FIGURE III.21: Consommations de jeu obtenues pour différentes valeurs de $\hat{\theta}$

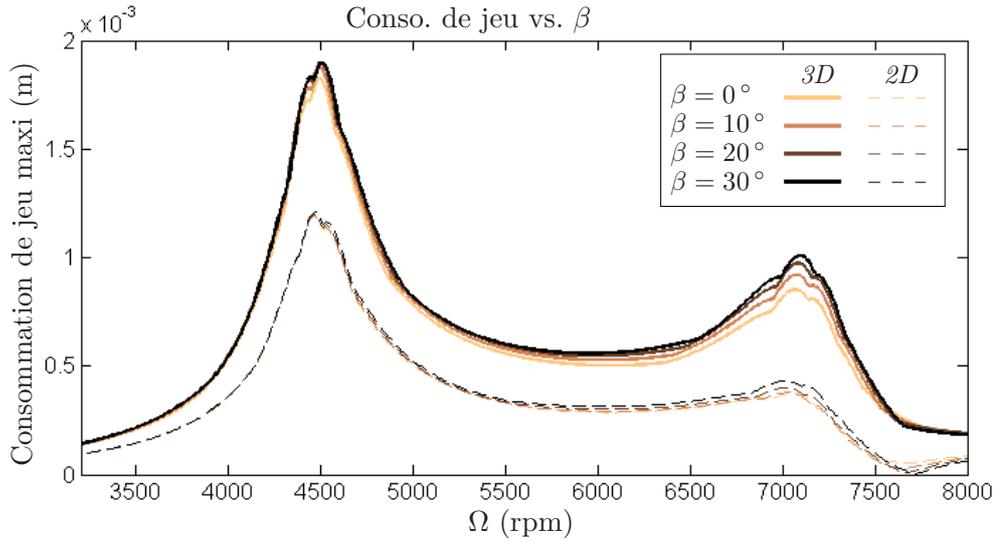


FIGURE III.22: Consommations de jeu obtenues pour différentes valeurs de β

lors de contacts aube-carter, il faut construire les efforts non-linéaires qui agissent sur le système lorsque des contacts sont détectés. Pour les deux gestions de contact proposées, les efforts de contact sont introduits par pénalisation et le frottement est pris en compte grâce à la loi de Coulomb, conformément aux développements présentés en section II.2.2.

Pour la gestion 3D, les jeux calculés au BA et au BF vont nous permettre d'interpoler le jeu distribué sur la corde en sommet d'aube, pour ensuite appliquer une pression le long de la corde en contact avec le carter. Cette démarche est schématisée dans les figures III.23 et III.24. Les pressions de contact normales et tangentielles à l'abscisse c sur la corde sont données par :

$$p_{jN}(c) = \frac{k_r}{l_c}(\zeta c + \eta) \quad \text{et} \quad p_{jT}(c) = -\text{sgn}(V)\mu p_{jN}(c) \quad (\text{III.59})$$

$$\text{où } \zeta = \frac{g_j^{(3D)}(BF) - g_j^{(3D)}(BA)}{l_c} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{g_j^{(3D)}(BF) + g_j^{(3D)}(BA)}{2}$$

où l_c est la longueur de corde au sommet des aubes, c'est-à-dire la distance entre les points $P(BA)$ et $P(BF)$. k_r est la raideur radiale de contact, μ le coefficient de frottement et V la vitesse relative entre les surfaces. Dans le cadre de notre étude, cette vitesse est supposée constante et déterminée par la rotation propre de l'arbre. Nous pourrions par la suite, utiliser le paramètre k_t pouvant être interprété comme une raideur tangentielle et défini par $k_t = -\text{sgn}(V)\mu k_r$.

Notons que l'interpolation linéaire choisie ici, suppose que la corde au sommet de l'aube est rectiligne. Cette hypothèse restrictive est compensée par le fait que l'on suppose aussi que la portion de carter en regard de cette aube est rectiligne. Cependant, une distribution plus précise pourra être envisagée par une interpolation à un ordre supérieur et/ou sur plus de points de mesure.

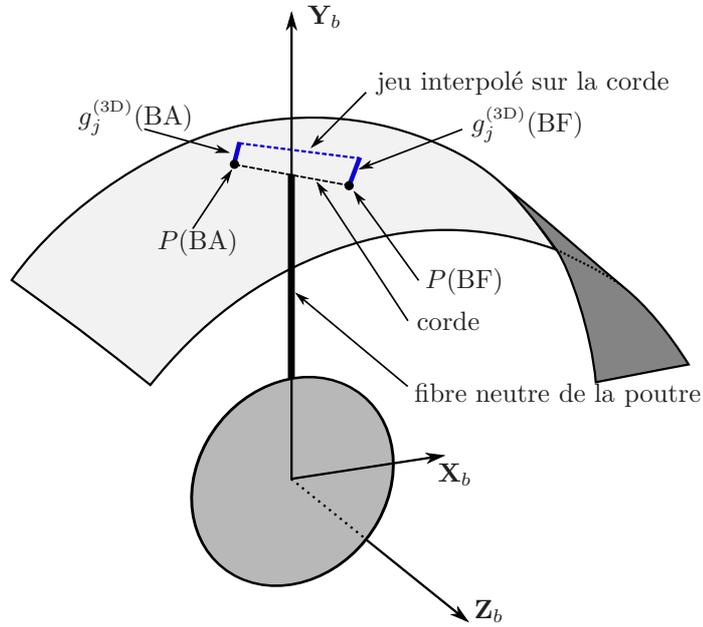


FIGURE III.23: Schéma de l'interpolation du jeu sur la corde au sommet d'aube

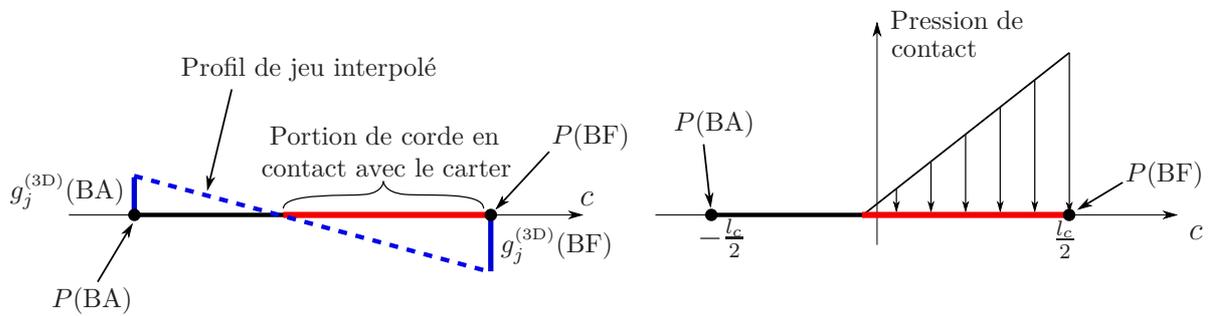


FIGURE III.24: Pressions de contact appliquées sur la corde

Une fois les pressions de contact connues, les réactions à appliquer sur les degrés de liberté du modèle sont obtenues comme suit :

$$F_{jN} = \int_{c_1}^{c_2} p_{jN}(c)dc \text{ et } F_{jT} = \int_{c_1}^{c_2} p_{jT}(c)dc \quad (\text{III.60})$$

La distribution des pressions sur la corde génère également des moments de réaction :

$$M_{jN} = \int_{c_1}^{c_2} c p_{jN}(c)dc \text{ et } M_{jT} = \int_{c_1}^{c_2} c p_{jT}(c)dc \quad (\text{III.61})$$

c_1 et c_2 sont les bornes d'intégration, leur valeur dépend des conditions de jeux aux extrémités de la corde :

$$\begin{cases} g_j^{(3D)}(TE) \leq 0 \text{ and } g_j^{(3D)}(LE) \leq 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{l_c}{2}; c_2 = \frac{l_c}{2} \\ g_j^{(3D)}(TE) \leq 0 \text{ and } g_j^{(3D)}(LE) \geq 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{l_c}{2}; c_2 = -\frac{\eta}{\zeta} \\ g_j^{(3D)}(TE) \geq 0 \text{ and } g_j^{(3D)}(LE) \leq 0 \Rightarrow c_1 = \frac{\eta}{\zeta}; c_2 = \frac{l_c}{2} \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

Les réactions de contact données par (III.60) et (III.61) sont alors projetées sur les coordonnées généralisées pour construire le vecteur des efforts de contact à introduire dans l'équation matricielle (III.52) :

$$\mathbf{F}_{j,\text{nl}}^{(3D)} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ X_m \\ Y_m \\ X_{nj} \\ x_c \\ y_c \\ \phi_{x_c} \\ \phi_{y_c} \\ A_{n_d} \\ B_{n_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{jT} \cos \alpha_j - F_{jN} \sin \alpha_j \\ -F_{jT} \sin \alpha_j + F_{jN} \cos \alpha_j \\ (-F_{jT} \cos \alpha_j - F_{jN} \sin \alpha_j) W_m(z_d) \dots \\ + \cos \gamma W'_m(z_d) (-M_{jT} \cos \alpha_j - M_{jN} \sin \alpha_j) \\ (-F_{jT} \sin \alpha_j + F_{jN} \cos \alpha_j) W_m(z_d) \dots \\ + \cos \gamma W'_m(z_d) (-M_{jT} \sin \alpha_j + M_{jN} \cos \alpha_j) \\ -F_{jT} \cos \beta Y_n(L_b) \\ F_{jT} \cos \alpha_j + F_{jN} \sin \alpha_j \\ F_{jT} \sin \alpha_j - F_{jN} \cos \alpha_j \\ z_c (F_{jT} \sin \alpha_j - F_{jN} \cos \alpha_j) \dots \\ + \cos \gamma (-M_{jT} \sin \alpha_j + M_{jN} \cos \alpha_j) \\ z_c (-F_{jT} \cos \alpha_j + F_{jN} \sin \alpha_j) \dots \\ + \cos \gamma (M_{jT} \cos \alpha_j + M_{jN} \sin \alpha_j) \\ -F_{jT} \cos n_d \alpha_j + n_d F_{jN} \sin n_d \alpha_j \\ -F_{jT} \sin n_d \alpha_j - n_d F_{jN} \cos n_d \alpha_j \end{pmatrix} \quad (\text{III.63})$$

où γ est l'angle de calage au sommet d'aube, à ne pas confondre avec le paramètre β qui définit l'orientation du fléchissement. β est un paramètre structurel, tandis que γ caractérise la position angulaire du segment formé par les points $P(\text{BA})$ et $P(\text{BF})$.

Pour la configuration 2D, la construction du vecteur des efforts de contact suit une démarche plus simple. Les réactions de contact sont directement obtenues

à partir de la valeur du jeu mesuré au point du sommet d'aube. Si $g_j^{(2D)}$ est négatif, alors l'aube touche le carter et les réactions de contact sont données par :

$$F_{jN}^{(2D)} = k_r \times g_j^{(2D)} \text{ et } F_{jT}^{(2D)} = k_t \times g_j^{(2D)} \quad (\text{III.64})$$

En absence des moments de réaction, le vecteur des efforts non-linéaires de la formulation $2D$ prend la forme suivante :

$$\mathbf{F}_{j,\text{nl}}^{(2D)} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ X_m \\ Y_m \\ X_{nj} \\ x_c \\ y_c \\ \phi_{x_c} \\ \phi_{y_c} \\ A_{n_d} \\ B_{n_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{jT}^{(2D)} \cos \alpha_j - F_{jN}^{(2D)} \sin \alpha_j \\ -F_{jT}^{(2D)} \sin \alpha_j + F_{jN}^{(2D)} \cos \alpha_j \\ \left(-F_{jT}^{(2D)} \cos \alpha_j - F_{jN}^{(2D)} \sin \alpha_j \right) W_m(z_d) \\ \left(-F_{jT}^{(2D)} \sin \alpha_j + F_{jN}^{(2D)} \cos \alpha_j \right) W_m(z_d) \\ -F_{jT}^{(2D)} \cos \beta Y_n(L_b) \\ F_{jT}^{(2D)} \cos \alpha_j + F_{jN}^{(2D)} \sin \alpha_j \\ F_{jT}^{(2D)} \sin \alpha_j - F_{jN}^{(2D)} \cos \alpha_j \\ z_c \left(F_{jT}^{(2D)} \sin \alpha_j - F_{jN}^{(2D)} \cos \alpha_j \right) \\ z_c \left(-F_{jT}^{(2D)} \cos \alpha_j + F_{jN}^{(2D)} \sin \alpha_j \right) \\ -F_{jT}^{(2D)} \cos n_d \alpha_j + n_d F_{jN}^{(2D)} \sin n_d \alpha_j \\ -F_{jT}^{(2D)} \sin n_d \alpha_j - n_d F_{jN}^{(2D)} \cos n_d \alpha_j \end{pmatrix} \quad (\text{III.65})$$

Tous les éléments nécessaires à l'implémentation du contact sont maintenant développés. Les résultats obtenus pour le modèle soumis aux contacts aube-carter seront donc présentés, en abordant dans un premier temps, les études statiques s'appuyant sur l'hypothèse d'un contact permanent (section III.3) pour traiter ensuite les résultats dynamiques obtenus en autorisant les décollements (section III.4).

3 Comportement en contact permanent

L'équation de la dynamique de notre modèle soumis à un effort de balourd et pouvant subir des contacts aube-carter s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{D}}(\Omega)\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}(\Omega)\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}_b(\Omega) + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{q}(t)) \quad (\text{III.66})$$

Le système est décrit dans le repère mobile, ce qui signifie que les efforts de balourd synchrones de la vitesse de rotation, constituent un chargement statique. Supposer que les contacts sont maintenus nous permet alors de faire l'hypothèse d'une solution de type *point fixe*. La contribution de la dynamique est écartée et l'équation non-linéaire à résoudre prend la forme :

$$\tilde{\mathbf{K}}(\Omega)\mathbf{q}_0 = \mathbf{F}_b(\Omega) + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{q}_0) \quad (\text{III.67})$$

Cette équation est résolue par un algorithme à région de confiance basé sur le principe des méthodes de *Newton-Raphson* abordées en section II.3.2. Une fois la solution \mathbf{q}_0 obtenue, l'étude de la stabilité locale de ce point d'équilibre se ramène au problème de valeurs propres suivant (voir section II.4.1) :

$$\det \left(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \tilde{\mathbf{D}}(\Omega) + (\Omega) - \mathbf{J}_{\mathbf{q}} \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{q}_0) \right) = 0 \quad (\text{III.68})$$

où $\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}_0)$ est la matrice jacobienne du vecteur des efforts de contact en \mathbf{q}_0 . Cette matrice est calculée par différenciation numérique lors de la recherche de la solution \mathbf{q}_0 et peut aussi être obtenue analytiquement. Pour une gestion du contact en $2D$, la jacobienne des efforts de contact est indépendante du champ de déplacements \mathbf{q}_0 , elle ne dépend que des paramètres de contact (k_r et μ) et des positions angulaires α_j des aubes en contact avec le carter (l'expression analytique de $\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}$ est donnée en Annexe A). La linéarisation du problème non-linéaire revient ainsi à introduire des liens alimentés en raideur radiale et tangentielle entre les sommets d'aube concernés et la surface interne du carter en regard. Dans le cas de la gestion de contact $3D$, la forme élaborée de l'expression des jeux (III.57), fait apparaître une dépendance de la Jacobienne par rapport au champ de déplacements, ce qui n'est pas vrai pour la formulation $2D$. Son expression analytique est obtenue grâce à la toolbox de calcul formel de Matlab.

3.1 Études qualitatives de stabilité pour un système conservatif

Une aube en contact par la formulation $2D$

L'indépendance de $\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}$ vis-à-vis du champ de déplacement, permet de considérer les contacts directement dans le problème aux valeurs propres (III.68), sans avoir à résoudre l'équation non-linéaire statique (III.67). De cette façon, la prise en compte des contacts revient à une modification structurelle du modèle. Nous pouvons ainsi définir une configuration de contact (choix des aubes concernées et des paramètres de contact) et étudier la stabilité du système sur la plage de régimes souhaitée. Notons que pour mieux observer l'effet des contacts sur les parties réelles des valeurs propres, les amortissements de l'ensemble des organes du modèle sont supprimés. Ainsi, toute partie réelle $\text{Re}(\lambda)$ non-nulle obtenue sera générée par l'introduction du contact aube-carter.

Pour commencer, nous considérons une seule aube en contact non frottant : les paramètres de contact introduits sont : $k_r = 10^7 \text{ N/m}$ et $\mu = 0$. Les diagrammes illustrant l'évolution avec le régime des parties imaginaires et réelles des valeurs propres, apparaissent figure III.25. Pour mieux observer l'effet du contact sur les fréquences propres, les résultats du modèle sans contact sont tracés en pointillés sur le diagramme de Campbell.

Les fréquences propres des couples de modes décrits précédemment ne sont plus conjuguées ; les branches sont ouvertes dès 0 rpm, ce qui est caractéristique de la perte d'axisymétrie du modèle liée à l'introduction de la raideur de contact. Tous les modes propres sont affectés par la raideur de contact introduite et sont marqués d'un prime '. Les modes à diamètres du carter, notés maintenant $C'(2n_d)$ et $C'(3n_d)$ et qui restaient dissociés du reste du modèle dans le cas sans contact, sont maintenant associés à de nombreux phénomènes de *veering*. Plusieurs instabilités sont également identifiées, elles sont de deux sortes : les divergences de modes (no-

tées D) sont des instabilités à fréquence nulle et constituent ainsi des bifurcations statiques (voir section II.4.3); les coalescences de modes ou *flutter* (notées F). Elles apparaissent aux croisements des branches des fréquences propres de deux modes, ils adoptent alors des fréquences propres identiques, l'un de ses modes étant stable et l'autre instable. Les principaux phénomènes instables identifiés sont listés dans le tableau III.3, où sont mentionnés les plages de fréquences et régimes et les modes concernés. Nous remarquons ainsi que les modes à diamètres du carter sont impliqués dans tous ces phénomènes, à l'exception de la divergence du mode fan $W'(1)$. Ces mêmes comportements sont rencontrés dans la littérature qui traite de la stabilité d'un système à symétrie de révolution soumis à un chargement tournant. [VCP05; LST07b] s'intéressent à la stabilité d'un anneau élastique soumis à un chargement représentatif du mouvement d'un train d'engrenage pour [VCP05], ou du contact d'un aubage flexible pour [LST07b]; ils observent les mêmes types de divergences et coalescences de modes. Le système de type pion-disque représentatif d'un disque dur et sa tête de lecture et décrit par [Cra95], présente aussi ces comportements. Ces études analytiques démontrent que l'ajout de la raideur normale tournante génère ces phénomènes instables. Dans [LST07b], Lesaffre et al. en définissent les frontières d'apparition par le critère de Routh-Hurwitz. Ainsi, pour un contact non frottant, le système est déstabilisé uniquement pour les régimes concernés par les phénomènes de divergence ou de coalescence. Cette conclusion analytique se trouve légèrement approchée dans le cas étudié ici. En effet, la matrice Jacobienne des efforts de contact $\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}$, possède des termes dissymétriques liés aux approximations faites lors du calcul des jeux vis-à-vis des efforts de contact appliqués sur les degrés de liberté du modèle : Pour la gestion de contact $2D$, les basculements du carter (ϕ_{x_c}, ϕ_{y_c}) sont écartés de l'expression des jeux (voir (III.58)). Or, une fois les contacts détectés, des efforts viennent s'appliquer sur ces mêmes dds, du fait de la distance z_c , entre l'abscisse du centre gravité du disque et celle de celui du carter (voir (III.65)). Cette approximation se traduit par des termes dissymétriques dans la Jacobienne : remarquons ainsi en Annexe A, que le terme $\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(x_c, \phi_{x_c})$ est nul car le jeu et donc l'amplitude des efforts appliqués sur le ddl x_c , ne dépendent pas du basculement ϕ_{x_c} ; tandis que son symétrique $\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(\phi_{x_c}, x_c)$ est non-nul, car un effort dont l'amplitude dépend de x_c , est appliqué sur le ddl ϕ_{x_c} . Néanmoins, pour le jeu de données considéré, ces termes dissymétriques se traduisent par un écart sur les parties réelles qui n'excède pas 0.15, alors que la divergence D2, qui est le phénomène décrit, associé à la plus faible augmentation de partie réelle, induit une partie réelle de 3.2 du mode $W'(1)$. L'effet de cette légère dissymétrie ne remet donc pas en cause les interprétations qualitatives menées et lorsque l'amortissement du modèle sera rétabli, pour les études en conditions plus réalistes abordées dans la section suivante, il sera couvert par les amortissements apportés.

Introduisons maintenant du frottement avec un coefficient μ de 0.1. Le contact n'est toujours établi que sur une seule aube et la raideur normale de contact est de $k_r = 10^7$ N/m. L'évolution des parties réelles obtenue est tracée figure III.26, nous y retrouvons les divergences et coalescences identifiées dans le cas non frottant,

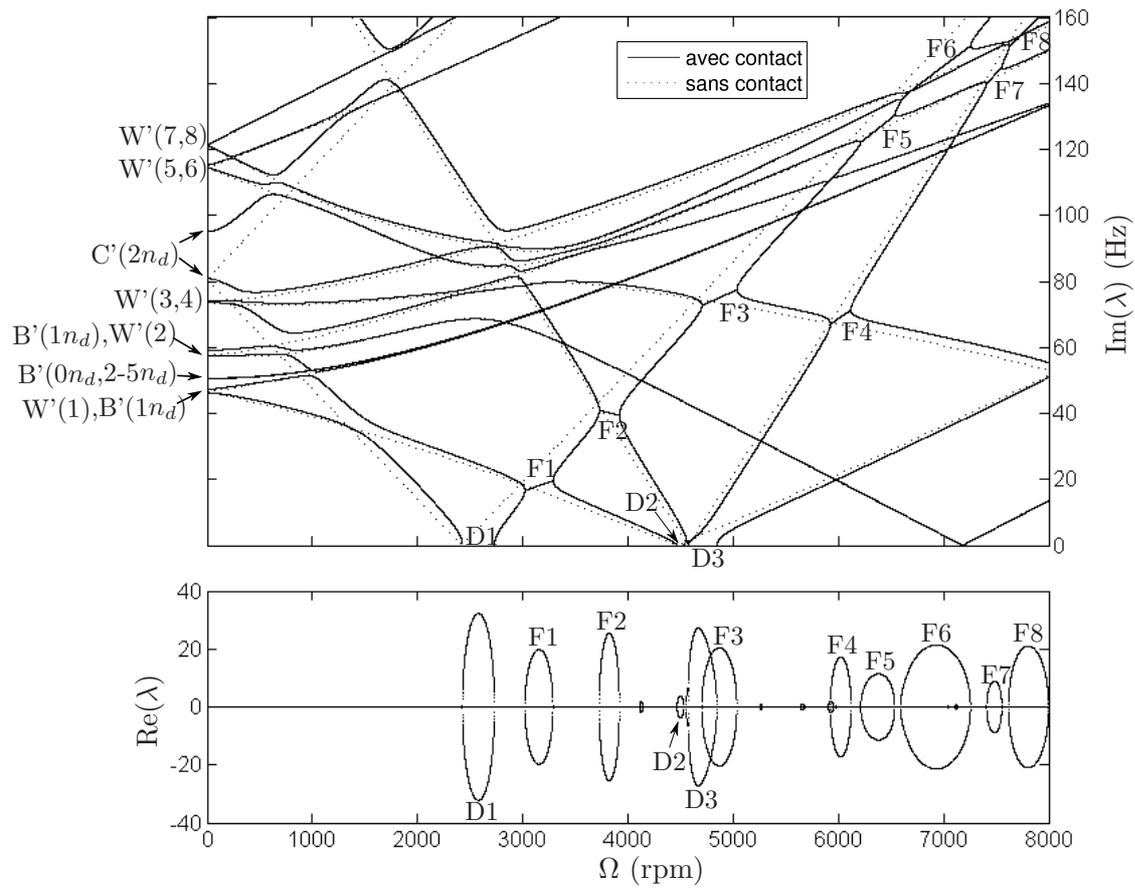
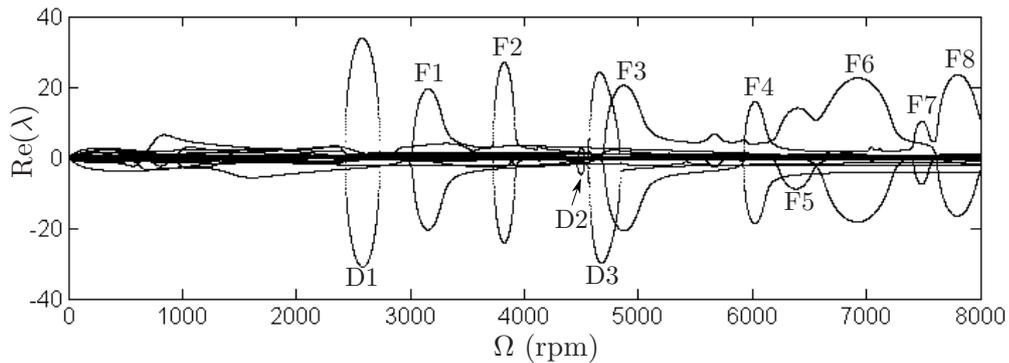


FIGURE III.25: Analyse de stabilité pour une aube en contact non-frottant, formulation $2D$

	Ω en rpm	$\text{Im}(\lambda)$ en Hz	Description
D1	2400-2700	0	Divergence du mode $C'(2n_d)$
F1	3000-3300	17-20	Coalescence des modes $W'(1)$ et $C'(2n_d)$
F2	3700-3900	40-39	Coalescence des modes $C'(2n_d)$ et $C'(3n_d)$
D2	4470-4530	0	Divergence du mode $W'(1)$
D3	4580-4840	0	Divergence du mode $C'(3n_d)$
F3	4700-5000	73-77	Coalescence des modes $C'(2n_d)$ et $W'(5)$
F4	5900-6100	67-71	Coalescence des modes $C'(3n_d)$ et $W'(5)$
F5	6200-6500	122-130	Coalescence des modes $C'(2n_d)$ et $W'(2)$
F6	6600-7250	135-150	Coalescence des modes $C'(2n_d)$ et $W'(4)$
F7	7410-7550	140-145	Coalescence des modes $C'(3n_d)$ et $W'(2)$
F8	7600-8000	150-160	Coalescence des modes $C'(3n_d)$ et $W'(4)$

TABLE III.3: Principaux phénomènes instables identifiés figure III.25

FIGURE III.26: Evolution des parties réelles avec le régime pour une aube en contact frottant : formulation $2D$

mais constatons également que les parties réelles s'écartent de l'axe des abscisses en dehors des plages de régimes concernées par ces instabilités. Cet effet est lié aux termes antisymétriques introduits dans la matrice Jacobienne lorsque le frottement est considéré (voir annexe A) et viennent déstabiliser le système dès $\Omega > 0$. Cet effet est observé dans [LST07b] et démontré analytiquement par le critère de Routh-Hurwitz. Notons également que le frottement produit un effet stabilisant sur les modes directs et déstabilisant sur les modes rétrogrades.

Chacun des paramètres de contact produit donc des phénomènes distincts et ces effets sont cohérents avec les résultats rencontrés dans la littérature. La raideur k_r , qui traduit l'impénétrabilité entre les solides en contact, engendre les divergences et coalescences de modes principalement associées aux modes à diamètres du carter ; le coefficient de frottement μ déstabilise le système d'une manière plus homogène, dès que la rotation est non nulle.

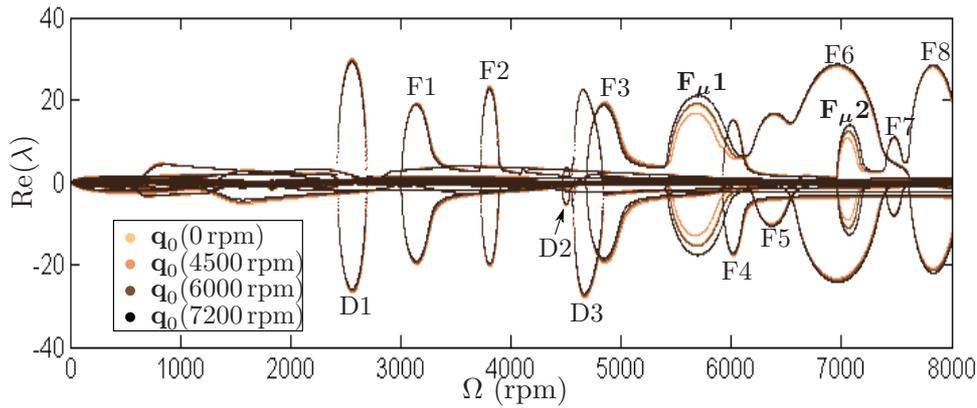


FIGURE III.27: Influence du champ de déplacement considéré pour le calcul de $\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(3D)}(\mathbf{q}_0)$, sur les parties réelles obtenues

Résultats pour la formulation 3D du contact

Ces effets sont maintenant comparés à ceux obtenus pour la gestion de contact 3D. Comme nous l'avons expliqué, la matrice jacobienne des efforts de contact obtenue pour la formulation 3D ($\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(3D)}(\mathbf{q}_0)$), conserve une dépendance au champ de déplacements solution de l'équation (III.67). Avant de comparer les résultats obtenus avec les deux gestions de contact, évaluons l'effet de ce champ de déplacements sur les résultats des études qualitatives proposées ici et pour lesquelles une configuration de contact est étendue à toute la plage de régimes. Pour cela, nous introduisons différents champs de déplacements dans l'expression analytique de $\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(3D)}(\mathbf{q}_0)$ qui correspond à une aube en contact sur toute sa corde : un champ de déplacement nul et ceux résultant de la réponse harmonique linéaire à 4500, 6000 et 7200 rpm. Rappelons que 4500 et 7200 rpm sont proches des vitesses critiques respectives des modes fan $W^*(1)$ et de turbine $W^*(7)$, ils correspondent donc à des champs de déplacements bien distincts. Les parties réelles obtenues sont tracées figure III.27. L'influence du \mathbf{q}_0 introduit sur les parties réelles, n'est pas négligeable et est particulièrement visible pour les phénomènes identifiés par $\mathbf{F}_{\mu 1}$ et $\mathbf{F}_{\mu 2}$. Cependant, cette influence ne remet pas en cause les interprétations qualitatives que nous souhaitons faire ici. Pour simplifier les calculs, nous considérerons donc dans la suite de cette section, la matrice Jacobienne obtenue pour un champ de déplacements nul.

Figure III.28 est tracée l'évolution des parties imaginaires et réelles des valeurs propres obtenues avec la formulation 3D, en considérant une aube en contact permanent sur toute sa longueur de corde et un champ de déplacements nul. Pour comparer plus facilement les résultats obtenus avec chacune des formulations de contact, les parties réelles calculées précédemment avec la formulation 2D sont reportées dans le diagramme placé au bas de la figure.

Notons tout d'abord, que l'allure des diagrammes des parties réelles sont analogues. Les divergences et coalescences de modes attribuées à l'introduction de la raideur radiale sont également observées avec la formulation de contact 3D; de même, l'ouverture des branches des parties réelles, induite par le frottement, est

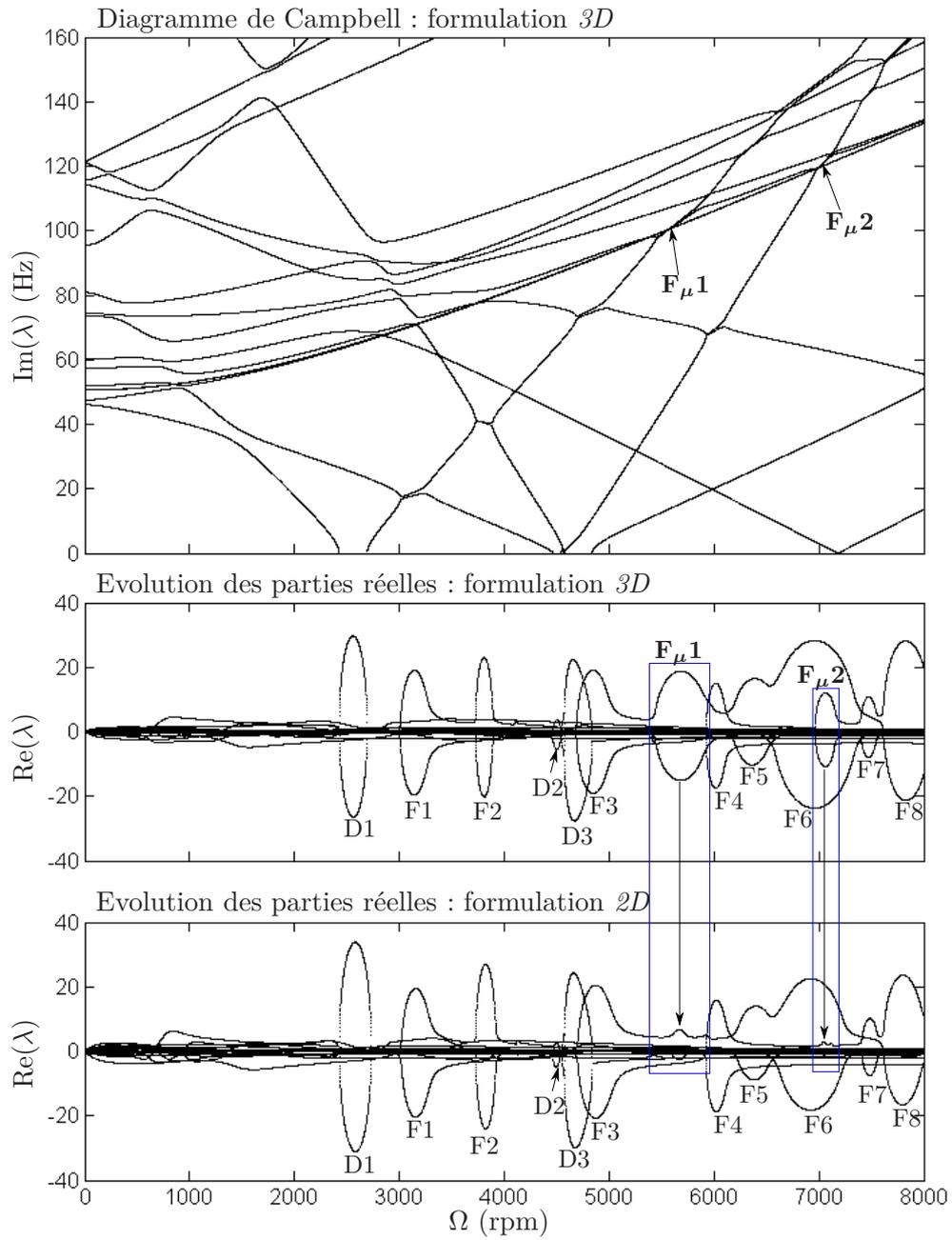


FIGURE III.28: Valeurs propres obtenues pour une aube en contact frottant : comparaison des formulations du contact $2D$ et $3D$

comparable. Néanmoins, certains écarts de niveaux peuvent être constatés : la divergence D1 du mode $C'(2n_d)$ et la coalescence F2 des modes $C'(2n_d)$ et $C'(3n_d)$ concerne une plage de régimes plus étroite et induit des niveaux de parties réelles moins importants avec la formulation $3D$. Inversement, les coalescences F5, F6 et F8 qui concernent respectivement les modes $(C'(2n_d); W'(2))$, $(C'(2n_d); W'(4))$ et $(C'(3n_d); W'(4))$, se voient accentuées.

La différence la plus notable concerne les coalescences de modes identifiées par $\mathbf{F}_\mu\mathbf{1}$ et $\mathbf{F}_\mu\mathbf{2}$. La première $\mathbf{F}_\mu\mathbf{1}$ fait intervenir le mode de déformation du carter $C'(2n_d)$ et l'un des modes de roue aubagée B', dont la déformation fait participer tous les diamètres nodaux (de 0 à $5n_d$) ; les déformées à diamètres sur la roue aubagée sont en effet, fortement affectées par la dissymétrie apportée par le contact et ne sont plus clairement différenciées. La seconde $\mathbf{F}_\mu\mathbf{2}$ fait coalescer le même mode de roue aubagée B' avec le mode de déformation du carter à trois diamètres nodaux $C'(3n_d)$. Ces phénomènes concernent les plages de régimes 5400-6000 rpm et 6900-7200 rpm, et conduisent à des parties réelles atteignant respectivement 18 et 12, pour des valeurs propres obtenues en introduisant la matrice Jacobienne donnée par la formulation $3D$; tandis que les mêmes coalescences sont presque imperceptibles avec la formulation $2D$, elles concernent des plages de régimes plus étroites (5600-5800 rpm et 7020-7070 rpm) et ne provoquent pas une variation très importante des parties réelles des valeurs propres (6 et 3).

Ces coalescences $\mathbf{F}_\mu\mathbf{1}$, $\mathbf{F}_\mu\mathbf{2}$ peuvent être associées aux phénomènes d'interaction modale décrits dans la section II.1.2. Rappelons que ce phénomène est observé lorsque deux modes de déformation sur la roue aubagée et le carter, ont des vitesses de propagation semblables et des déformées géométriquement compatibles ; les échanges d'énergie liés aux contacts entre ces deux organes peuvent alors conduire à une instabilité vibratoire. Les bilans énergétiques écrits par Schmiechen [Sch97b] et Legrand [Leg05], indiquent que l'échange d'énergie de la roue aubagée vers le carter est lié principalement aux efforts de frottement. L'examen des matrices Jacobiennes des efforts de contact associées aux formulations $2D$ et $3D$, permet alors de comprendre pourquoi ces coalescences sont considérablement réduites avec la formulation $2D$; comme pour les termes résiduels décrits dans le cas sans frottement (figure III.25), c'est lié aux approximations adoptées pour le calcul des jeux vis-à-vis des efforts de contact appliqués sur les ddls du modèle.

Pour la formulation $2D$, le fléchissement de l'aube n'est pas pris en compte dans le calcul des jeux et n'intervient donc pas dans l'expression de l'amplitude des efforts. Or, des efforts de frottement viennent s'appliquer sur les ddls des aubes. Les termes associés ne sont donc pas distribués de façon équilibrée dans la matrice Jacobienne : remarquons par exemple que $\mathbf{J}_q\mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_0, X_{nj})$ donné dans l'annexe A, est nul alors que son symétrique $\mathbf{J}_q\mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_{nj}, X_0)$ est non-nul lorsque le frottement est introduit.

Les termes de la matrice Jacobienne des efforts de contact calculés par la formulation $3D$ sont trop longs pour être donnés dans ce mémoire, du fait de la complexité de l'expression des jeux qui prend en compte, cinématique et géométrie 3D de la zone de contact (voir équations (III.57)). Nous pouvons néanmoins suivre le même

raisonnement et constater que le jeu $3D$, donc l'amplitude des efforts de frottement, dépend du fléchissement des aubes ; les termes sont ainsi distribués de façon plus équilibrée dans la matrice Jacobienne. Dans la section III.2.1, nous avons montré que les contacts sont mieux détectés lorsque la formulation $3D$ est utilisée. Nous constatons maintenant que la formulation développée enrichit également les phénomènes obtenus lors de contacts aubes-carter.

Remarquons enfin que les coalescences $\mathbf{F}_{\mu 1}$ et $\mathbf{F}_{\mu 2}$ sont identifiées figure III.27, comme les plus sensibles à la variation du champ de déplacements introduit dans la matrice Jacobienne des efforts de contact. La formulation $3D$ constitue un progrès vis-à-vis de la formulation $2D$, mais contient néanmoins des approximations qui conduisent, comme pour les expressions $2D$, à des termes mal distribués dans la matrice Jacobienne et qui induisent cette sensibilité au champ de déplacement. La déformation tangentielle du carter n'est notamment pas prise en compte dans le calcul des jeux alors que des efforts de frottement sont appliqués sur ces mêmes dds. La formulation $3D$ proposée constitue ainsi un compromis qui permet d'améliorer la détection des contacts et d'enrichir les phénomènes décrits, tout en conservant une taille de modèle raisonnable et une démarche de résolution simple et peu coûteuse.

Influence des paramètres de contact

Poursuivons les études qualitatives pour observer l'effet de la variation des paramètres de contact. Figure III.29 sont tracées les parties réelles des valeurs propres obtenues avec la formulation $3D$ en considérant une aube en contact permanent sur toute sa corde. Trois couples de paramètres de contact sont comparés. Le diagramme situé en haut de la figure correspond aux valeurs utilisées précédemment à savoir : $k_r = 10^7 \text{ N/m}$ et $k_t = 10^6 \text{ N/m}$ ce qui revient à un coefficient de frottement μ de 0.1.

Le diagramme placé au centre de la figure III.29 a été obtenu en réduisant de moitié la raideur radiale considérée, soit $k_r = 5 \times 10^7 \text{ N/m}$ et $\mu = 0.2$. Les divergences et coalescences de modes attribuées à la raideur radiale (voir figures III.25 et III.26) sont ainsi réduites : elles impactent des plages de régimes plus faibles et impliquent des niveaux moindres des parties réelles. En revanche, l'augmentation du coefficient de frottement conduit à élargir les branches des parties réelles sur toute la plage de régimes étudiée qui se trouvent ainsi plus éloignées de l'axe des abscisses.

Le diagramme tracé au pied de la figure III.29 reprend les paramètres de contact en doublant le coefficient de frottement, soit $\mu = 0.4$ et une raideur tangentielle $k_t = 2 \times 10^6 \text{ N/m}$. Les branches des parties réelles s'éloignent ainsi encore davantage de l'axe des abscisses ; tandis que la plupart des divergences et coalescences de modes conservent des formes similaires à celles obtenues dans le diagramme central, qui correspond à une raideur radiale de contact identique. Les coalescences F5 et F6 paraissent amplifiées du fait du décalage de la branche supérieure (instable) sous l'effet de l'augmentation du coefficient de frottement, mais la variation par rapport à la branche horizontale reste similaire à celle observée sur le diagramme précédent. Des amplifications importantes sont en revanche, observées pour les coalescences

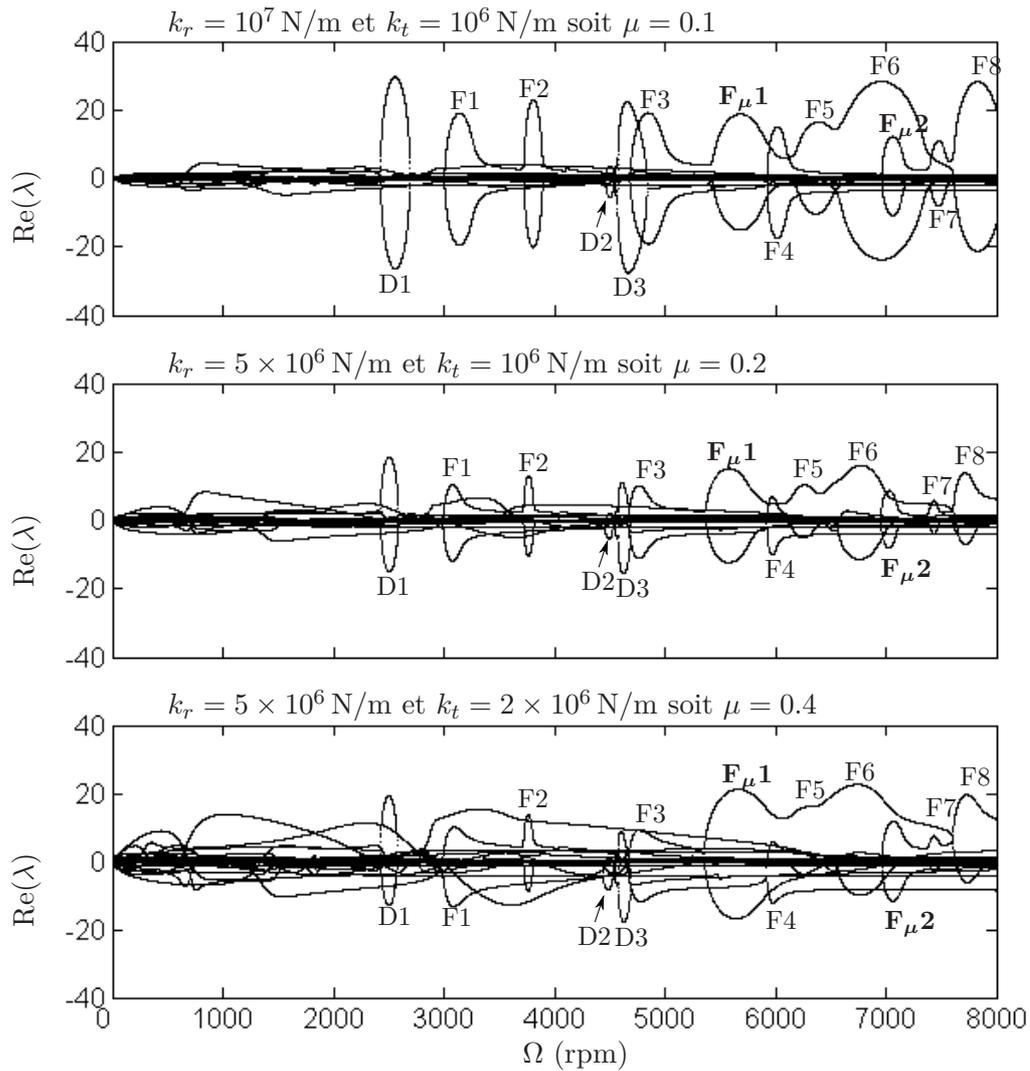


FIGURE III.29: Evolution des parties réelles avec le régime pour différents paramètres de contact (formulation $3D$, contact sur une seule aube)

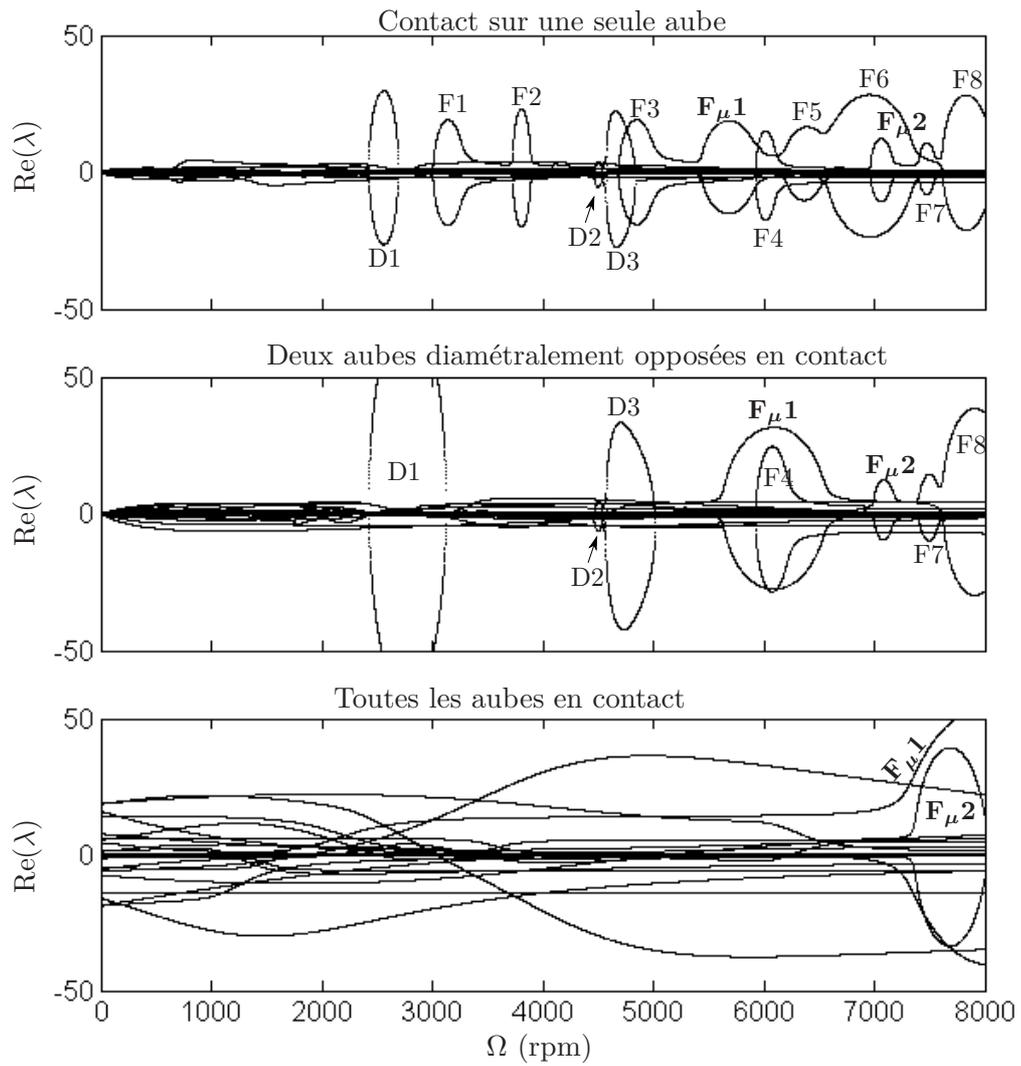


FIGURE III.30: Phénomènes instables filtrés par le positionnement des contacts (formulation 3D)

$\mathbf{F}_{\mu 1}$ et $\mathbf{F}_{\mu 2}$; cela illustre le lien de ces phénomènes avec le frottement. En effet, les aubes modélisées ne se déformant pas dans la direction longitudinale, le seul moyen d'échange d'énergie entre les déformations du carter et celles de la roue aubagée sont les efforts de frottement.

Influence de la disposition des touches

Pour clore ces études qualitatives, observons comment la disposition des touches peut filtrer les comportements obtenus. Sont tracés figure III.30, les diagrammes des parties réelles calculées pour les mêmes paramètres de contact, mais trois configurations de contact distinctes. Le diagramme tracé en haut de la figure est celui étudié jusqu'à présent, pour lequel une seule aube est en contact sur toute sa longueur de corde.

Au-dessous de ce graphique, sont tracées les parties réelles obtenues lorsque le contact est établi sur deux aubes diamétralement opposées. Les deux diagrammes sont très différents et nous constatons tout d'abord que la divergence D1 du mode $C'(2n_d)$ est fortement amplifiée. La déformée à deux diamètres nodaux du carter (dessinée figure III.9) possède en effet une géométrie particulièrement propice à cette disposition des touches. Ce mode sera donc facilement excité par des efforts tournants diamétralement opposés et de surcroît, synchrones de sa vitesse de propagation. La coalescence $\mathbf{F}_{\mu 1}$ est aussi amplifiée par cette disposition des touches particulièrement favorable à une déformée à deux diamètres nodaux, ainsi que par la raideur de frottement supplémentaire apportée par cette seconde aube en contact. Notons également que, du fait de cet apport de raideur tangentielle supplémentaire, les branches horizontales sont plus écartées de l'axe des abscisses. D'autres phénomènes instables sont amplifiés : la divergence D3 du mode $C'(3n_d)$ et les coalescences F4 et F8 qui concernent respectivement les modes $(C'(3n_d); W'(5))$ et $(C'(3n_d); W'(4))$. La déformée du carter, observée lors de ces phénomènes, n'est pas purement à trois diamètres nodaux et contient une contribution importante de la déformation à deux diamètres. Enfin, la divergence D2 du mode fan $W'(1)$ et la coalescence F7 entre les modes $C'(3n_d)$ et $W'(2)$, subissent des modifications dans les déformations concernées qui font participer davantage le deux diamètres, tant sur la roue aubagée que sur le carter; tandis que l'évolution de leur parties réelles est semblable au cas comportant une seule aube en contact. En revanche, tous les autres phénomènes instables sont filtrés par cette disposition des contacts et ne sont plus visibles sur le diagramme.

Le diagramme placé au pied de la figure décrit l'évolution des parties réelles des valeurs propres obtenues lorsque toutes les aubes sont en contact avec le carter. Aucune des instabilités listées précédemment n'est visible à l'exception des coalescences $\mathbf{F}_{\mu 1}$ et $\mathbf{F}_{\mu 2}$. Les raideurs normales introduites pour chacune des aubes en contact, sont pour cette configuration, réparties sur la circonférence du carter. Elles n'induisent donc plus de perte d'axisymétrie et n'engendrent donc pas les instabilités rencontrées lorsqu'une ou deux aubes sont en contact; le comportement dynamique

du système est simplement raidi par les liens de raideur introduits au module fan. En revanche, les phénomènes liés au frottement sont considérablement amplifiés. Les raideurs tangentielles de frottement introduites ouvrent considérablement les branches des parties réelles et les coalescences $\mathbf{F}_\mu\mathbf{1}$ et $\mathbf{F}_\mu\mathbf{2}$ sont élargies. Elles apparaissent aussi à des vitesses plus grandes, du fait des modifications structurelles importantes que constituent les raideurs de contact introduites.

Les analyses décrites dans cette section ont permis d'identifier les bifurcations et d'analyser l'influence des paramètres de contact et de la disposition des touches. Nous avons également constaté la cohérence des comportements obtenus vis-à-vis des résultats rencontrés dans la littérature. Dans la suite, nous chercherons à prédire la stabilité du système dans un contexte plus réaliste.

3.2 Stabilité pour un contact induit par le balourd

L'objectif de notre étude est de fournir les informations nécessaires au dimensionnement d'un turboréacteur. Les études qualitatives menées dans la section précédente ont permis d'identifier les phénomènes en jeu et de dégager des paramètres influents, et nous appliquons ici la même démarche dans des conditions plus proches de celles du fonctionnement d'un moteur : l'amortissement visqueux du modèle est ainsi rétabli, un jeu initial de 0.5 mm est introduit (il est identique sur toute la longueur de corde). La mise en contact est assurée par un balourd de 0.225 m.kg appliqué au niveau de la turbine, il est identique à celui introduit pour la réponse tracée figure III.18. Les paramètres de contact considérés sont $k_r = 5 \times 10^6$ N/m et $k_t = 10^6$ N/m, soit $\mu = 0.2$.

Les valeurs propres calculées autour de chacun des équilibres statiques rencontrés de 3000 à 8000 rpm sont tracées dans la figure III.31. A la différence des diagrammes présentés dans la section précédente, chaque nouveau point de régime correspond ici à une nouvelle résolution de l'équation statique, les configurations de contact peuvent ainsi changer d'un régime à l'autre ce qui conduit aux variations importantes observées sur les valeurs propres calculées autour de chaque nouveau point fixe.

Les plages de régimes associées à trois natures de résultats distincts sont mises en valeur sur la figure III.31 :

- Lorsque la réponse aux efforts de balourd ne conduit pas à un déplacement suffisant pour consommer le jeu initial de 0.5 mm, il n'y a pas contact et aucun effort n'est appliqué. Nous retrouvons alors les propriétés modales du modèle linéaire décrites dans la section III.1.2. Sur ces plages de régimes, dites *sans contact*, le fond du diagramme est blanc.
- Les zones grisées sont notées *contact et stable*, elles indiquent les régimes pour lesquels des contacts sont détectés mais l'amortissement du système est suffisant pour compenser l'effet des dissymétries apportées par les contacts et toutes les parties réelles des valeurs propres restent négatives.
- Les plages colorées en rouge et notées sur la légende *contact et instable*, indiquent les régimes pour lesquels les points fixes obtenus sont instables ; cer-

taines valeurs propres calculées autour des points fixes ont des parties réelles positives.

Pour mieux percevoir les écarts par rapport au comportement du modèle sans contact, ses résultats sont superposés en traits pointillés sur les diagrammes. Notons également que les valeurs propres des modes instables sont marquées d'un point dont la couleur traduit la valeur de la partie réelle associée, plus elle est grande, plus le point est foncé. Cela permet d'illustrer de manière simplifiée l'intensité de l'instabilité. En effet, une partie réelle positive mais d'amplitude faible pourra être facilement compensée par un léger apport d'amortissement. Inversement, une partie réelle importante sera plus difficilement compensée.

Remarquons tout d'abord, que l'allure générale du diagramme et notamment la répartition des plages de régimes (*sans contact*, *contact et stable* et *contact et instable*), est en accord avec les consommations de jeu calculées en section III.2.1 pour une réponse linéaire (voir figure III.19). Les deux vitesses critiques contenues dans la plage de régimes étudiée (4450 rpm pour le mode fan $W^*(1)$ et 7150 rpm pour le mode de turbine $W^*(7)$) sont en effet associés aux niveaux de réponse les plus importants et donc aux consommations de jeu les plus grandes. C'est au voisinage de ces régimes que les configurations de contact sont les plus critiques, avec un grand nombre d'aubages en contact sur de larges portions de leur corde ; les plages de régimes instables se rencontrent donc naturellement au niveau de ces vitesses critiques. Ces zones instables sont ensuite entourées par des plages plus ou moins étroites, pour lesquelles les consommations de jeu sont encore suffisantes pour générer du contact, mais les raideurs tournantes introduites sont compensées par l'amortissement visqueux du système. Puis en s'éloignant encore des vitesses critiques, des plages de régimes pour lesquelles la réponse est insuffisante pour consommer le jeu initial, sont atteintes. L'instabilité du système sur la plage située autour de la première vitesse critique est associée aux parties réelles des valeurs propres de deux modes rétrogrades : le mode $B'(1n_d)$ et dans une moindre mesure à le mode $W'(4)$. Leurs déformées sont affectées par l'introduction des contacts et font apparaître des contributions différentes du $1n_d$ sur la roue aubagée ; elles font également participer les déformations à diamètres du carter. Pour la plage de régimes autour de la seconde vitesse critique, nous parvenons à reconnaître le phénomène de coalescence F6 entre les modes $C'(3n_d)$ et $W'(4)$, identifié dans la section précédente. Sur une plage de régimes plus étroite, le mode rétrograde $B'(1n_d)$ qui était déjà déstabilisé autour de la première vitesse, devient ici aussi instable. Enfin, la partie réelle de la valeur propre du mode $W'(2)$ change également de signe pour quelques points.

Le retour à une observation plus globale permet de constater que même s'ils restent stables, les modes à diamètres sur la roue aubagée et le carter sont ceux dont les fréquences propres varient le plus sous l'effet des contacts. En absence de contacts, ces modes concentrent en effet, leur énergie de déformation dans le fléchissement des aubes ou les déformations du carter. A l'interface directe des contacts, ils sont donc fortement affectés par leur apparition. Pour les modes de roue aubagée, les variations des fréquences propres alternent entre raidissement et assouplissement

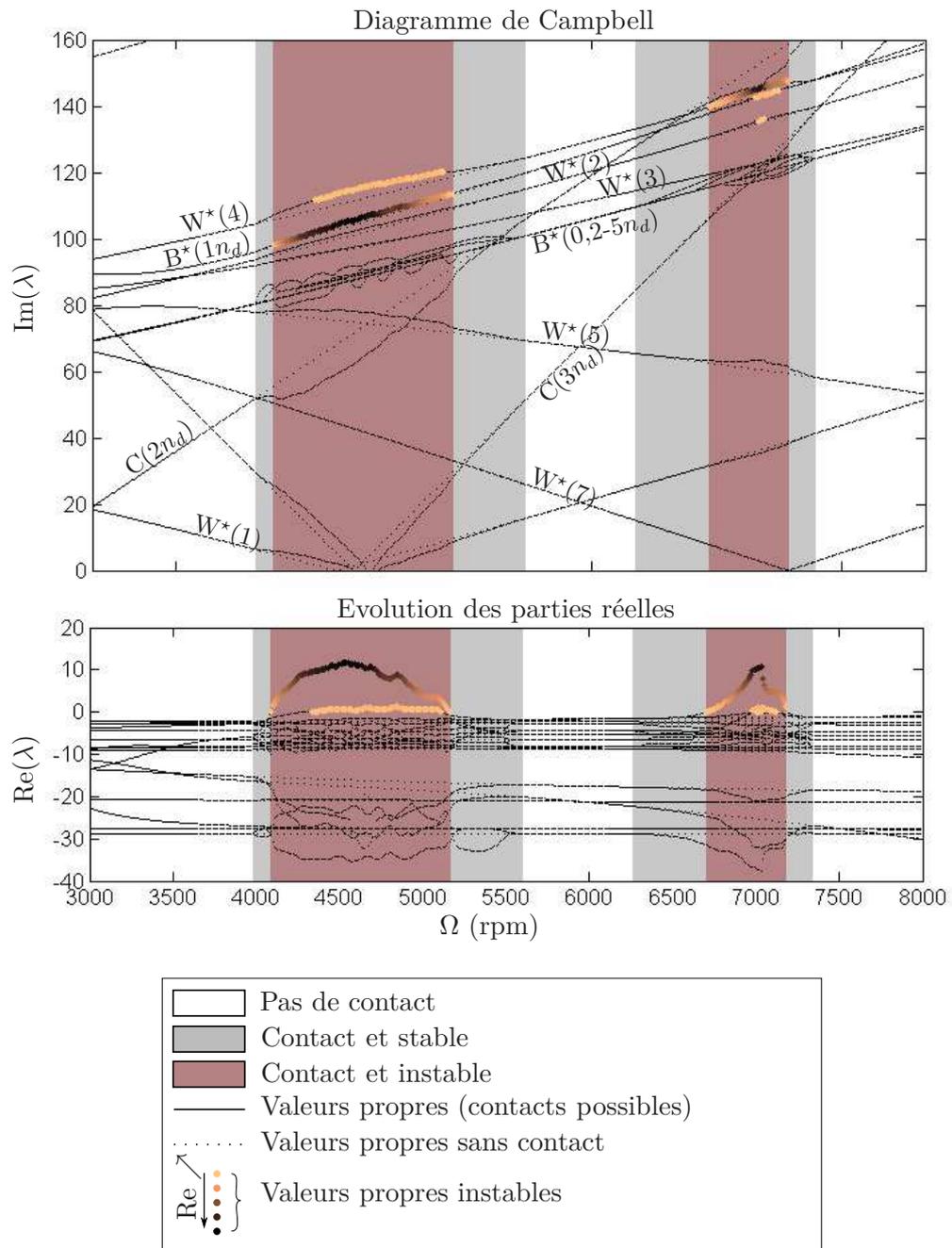


FIGURE III.31: Stabilité des positions d'équilibres statiques pour un contact induit par le balourd, jeu initial de 0.5 mm sur toute la corde.

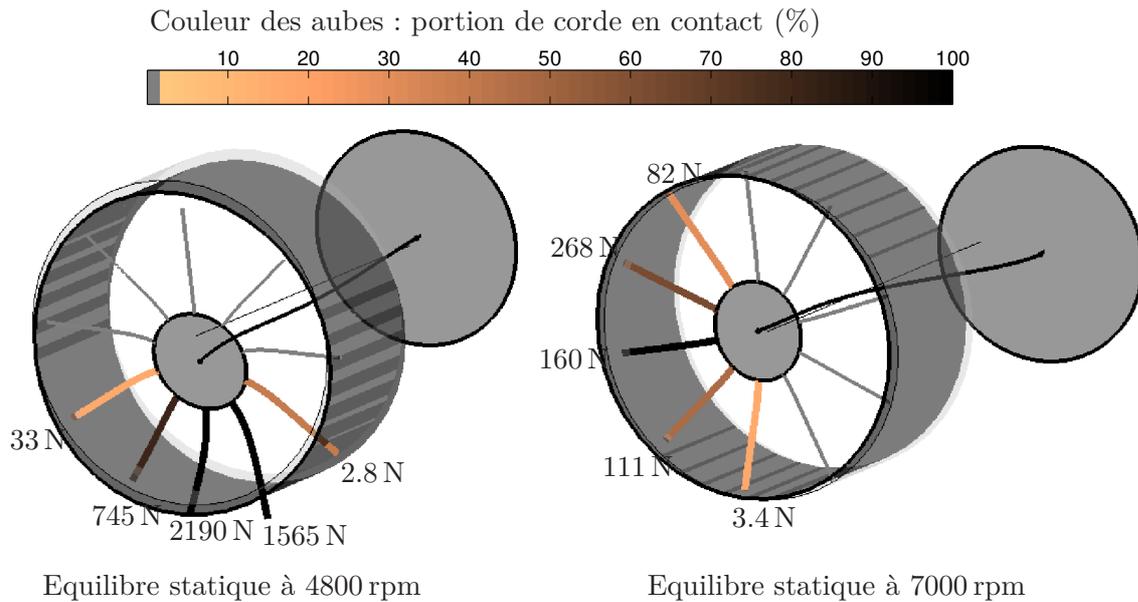


FIGURE III.32: Équilibres statiques obtenus pour $\Omega = 4800$ rpm et 7000 rpm

avec l'évolution des configurations de contact, tandis que les modes de déformations du carter sont assouplis de façon plus homogène sur les plages de régimes concernées par les contacts. Cela s'explique par les formes respectives des déformées propres. Dans l'étude menée ici, les contacts sont induits par la réponse au balourd, ce qui signifie que les touches vont s'établir d'un côté de la roue aubagée, sur une ou deux aubes et jusqu'à environ la moitié de la roue aubagée à mesure que les régimes de calcul s'approchent des vitesses critiques. Du point de vue du carter, la prise ou perte de contact revient donc à une modification de la répartition des raideurs tournantes sur sa surface interne. Du point de vue de la roue aubagée, le changement est plus radical pour ses modes à diamètres de 0 à $5n_d$, qui voient une nouvelle aube se connecter à la surface interne du carter ou à l'inverse, être libérée. De même, si pour les modes de 2 et $3n_d$ du carter, les liens de raideur apportent des appuis qui conduisent à une baisse de fréquence, pour les modes de la roue aubagée, l'effet raidissant ou assouplissant va dépendre de la disposition des touches vis-à-vis de la déformée propre concernée.

Les déformées associées aux équilibres statiques calculés à 4800 et 7000 rpm sont dessinées figure III.32. Nous pouvons y reconnaître les déformées des modes $W^*(1)$ et $W^*(7)$ excitées par les efforts synchrones de balourd (voir figure III.10). Ces deux points fixes sont instables et les parties réelles de leurs valeurs propres atteignent respectivement 8 et 10 points.

Les aubes concernées par un contact sont tracées en trait plus épais, dont la couleur traduit la distribution du contact sur la corde. Rappelons que pour les calculs présentés ici, le contact est géré par la formulation $3D$ décrite dans la section III.2. Pour cette gestion du contact, les jeux sont calculés sur les deux points extrêmes (BA et BF) de la corde en sommet d'aube, puis interpolés linéairement pour donner la distribution du jeu sur la corde. Une aube dessinée en noir indique donc que le

contact est établi sur toute sa corde, tandis qu'une aube plus claire, ne touche le carter que sur une faible portion de la corde, au niveau du BA ou du BF.

Les amplitudes des réactions normales F_{jN} induites par les contacts sont annotées au niveau des sommets d'aube concernés. Nous remarquons ainsi les écarts entre la distribution des contacts et celle des efforts normaux. Les portions de corde en contact présentent en effet des distributions comparables pour les deux équilibres dessinés : même si les portions de corde en contact sont plus faibles pour 7000 rpm, dans les deux cas, le contact est établi sur cinq aubes consécutives dont les trois centrales présentent la plus grande portion de corde en contact avec le carter. Les réactions normales sont en revanche, environ dix fois plus importantes pour l'équilibre statique obtenu à 4800 rpm. Cet écart considérable de l'amplitude des efforts de contact ne se traduit pas sur le diagramme des parties réelles. La stabilité des points fixes est en effet obtenue en linéarisant les efforts de contact autour de l'équilibre ; elle est donc affectée par les raideurs de contact introduites et non par l'amplitude des réactions. Pour la formulation $3D$, ces raideurs apportées par les contacts sont proportionnelles à la portion de corde en contact (voir équations (III.63)). Notons enfin que le niveau des parties réelles des valeurs propres n'est pas mécaniquement relié à ces apports de raideur. Nous pouvons le constater pour les points fixes dessinés : les raideurs introduites sont plus importantes à 4800 rpm qu'à 7000 rpm, tandis que la partie réelle la plus élevée est 20 % plus faible à 4800 rpm qu'à 7000 rpm. Le niveau des parties réelles des valeurs propres obtenues autour d'un équilibre statique, va évidemment dépendre du niveau d'amortissement des modes concernés, mais aussi des comportements décrits dans la section précédente, à savoir les plages de régimes associé aux phénomènes de divergences ou coalescences de modes.

Cette analyse met en évidence les effets croisés de différents paramètres influents ainsi que la multiplicité de ces paramètres. Les paramètres de contact sont de toute première importance, notamment le coefficient de frottement qui entraîne une augmentation des parties réelles sur toute la plage de régimes et n'est pas filtré par la disposition des touches ; mais, l'ensemble des paramètres structuraux du système jouent aussi un rôle plus ou moins important dans sa stabilité. Notons en effet, que la stabilité du système est affectée par la forme même du diagramme de Campbell ; modifier un des paramètres structuraux, change la position des modes et donc des croisements entre les branches, pouvant ainsi déplacer les plages de régimes concernés par des coalescences de modes ; cela affecte également la position des vitesses critiques (associées aux prises de contact les plus importantes) vis-à-vis de ces phénomènes instables.

Les calculs statiques présentés ici, présentent l'avantage de nécessiter un temps de calcul faible : les courbes de la figure III.31 ont demandé moins de deux minutes de calcul. Nous disposons ainsi d'un outil permettant d'évaluer à peu de frais, la stabilité de la turbomachine, sur de vastes plages de variation des paramètres souhaités ; et pouvons alors cartographier la stabilité du système en fonction de ces paramètres.

Cartes de contact et de stabilité

Figure III.33 sont dessinées les cartes des contacts et de la stabilité en fonction du régime et du jeu initial introduit. A chaque pixel dessiné sur les cartes correspond la résolution de l'équation statique non linéaire (III.67) et le calcul modal du système linéarisé autour du point fixe obtenu (III.68). Les paramètres de contact sont identiques à précédemment ($k_r = 5 \times 10^6$ N/m et $\mu = 0.2$); cela signifie que les résultats obtenus pour la ligne horizontale associée à un jeu initial de 0.5 mm sont parfaitement équivalents à ceux étudiés dans la figure III.31.

Examinons tout d'abord, la carte des contacts placée en haut de la figure III.33 et qui renseigne sur le nombre d'aubes en contact pour chacun des équilibres statiques obtenus. Nous y définissons la *zone de contact*, comme l'ensemble des couples de valeurs jeu initial/régime, associés à un pixel coloré : c'est-à-dire, pour lesquels une aube au moins touche la surface interne du carter. Le contour supérieur qui délimite cette zone de contact correspond exactement à la courbe des consommations de jeu maximales calculée en section III.2.1 et tracée figure III.19. Les mêmes efforts de balourd sont appliqués, donc à un régime donné, tout jeu initial inférieur à cette consommation de jeu induira une prise de contact. La répartition des teintes au sein de la zone de contact, indique tout d'abord que, plus les jeux sont fermés, plus il y aura d'aubes en contact : la carte se fonce à mesure que l'on s'approche de l'axe des abscisses. Nous pouvons également observer les prises et pertes de contact successives qui s'opèrent autour des vitesses critiques et forment des pointes verticales, associées à l'évolution de la phase de la réponse harmonique en fonction du régime.

La carte disposée sur la partie basse de la figure III.33, nous informe de la stabilité des points fixes obtenus pour les conditions de jeu initial/régime donnés. La couleur d'un pixel dépend de la somme des parties réelles positives des valeurs propres calculées autour du point fixe concerné : plus il est foncé, plus la somme des parties réelles instables est grande. Comme l'indique le diagramme tracé figure III.31, faire la somme des parties réelles positives nous prive de l'information sur le nombre de modes instables et les niveaux associés à chacun de ces modes; cela semble néanmoins un compromis acceptable pour traduire, en une seule valeur, la criticité de l'instabilité du point fixe concerné et nous permettre ainsi de facilement dégager des tendances qualitatives. Nous définissons sur cette carte, la *zone d'instabilité* : contenue dans la zone de contact, elle réunit l'ensemble des couples de valeurs jeu initial/régime pour lesquels les équilibres statiques rencontrés sont instables. La bande de pixels stables qui entoure cette zone et est contenue dans la zone de contact, correspond aux configurations *contact et stable*, déjà identifiées pour la figure III.31. La distribution des couleurs de la zone instable semble globalement suivre celle de la carte des contacts : les zones foncées associées à des points fixes fortement instables correspondent généralement aux zones pour lesquels un grand nombre d'aubages est en contact.

Comparons maintenant ces résultats, aux cartes obtenues avec la formulation de contact $2D$ (décrite section III.2). Les cartes dessinées figure III.34, sont calculées

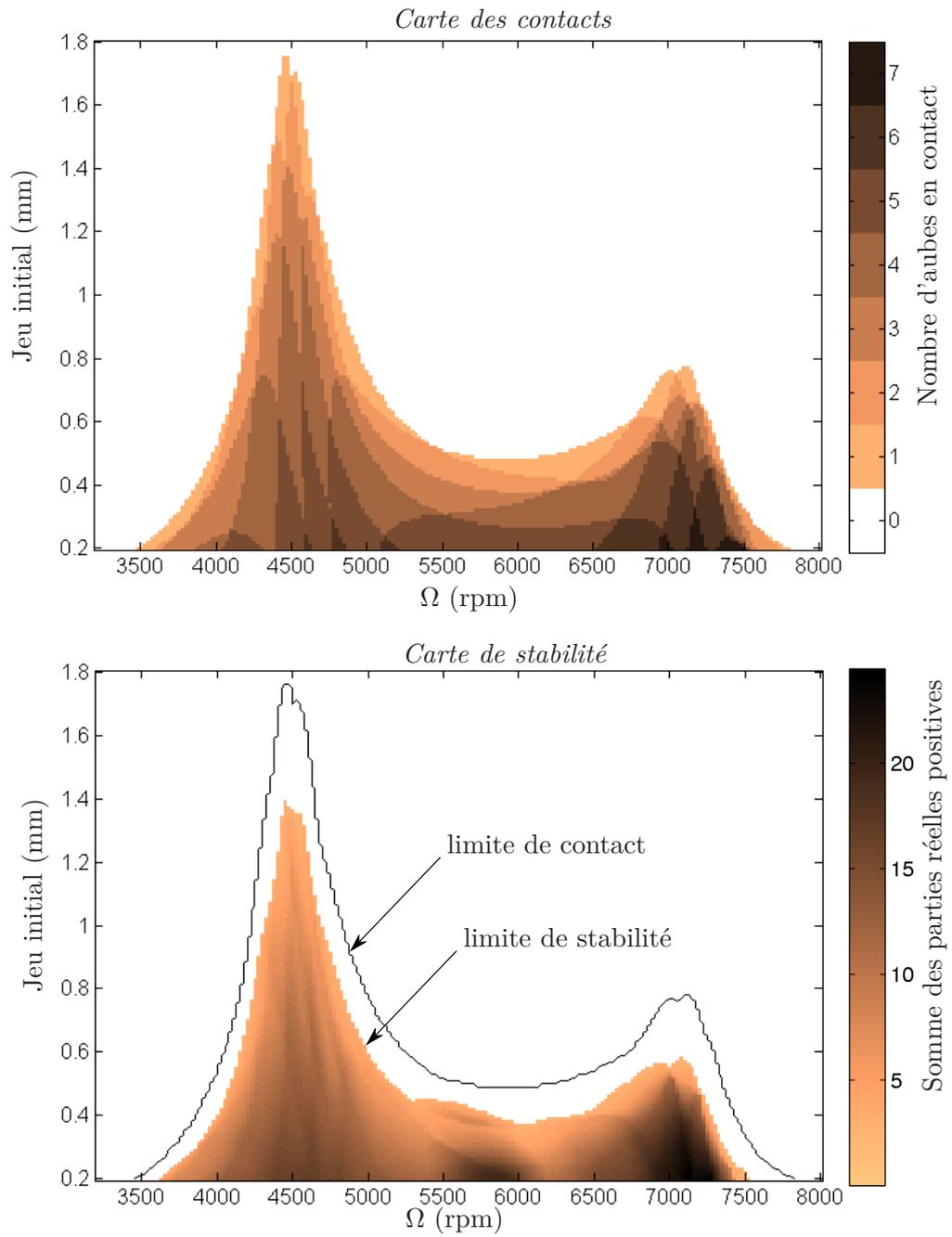


FIGURE III.33: Carte des contacts et carte de stabilité pour gestion 3D, $k_r = 5 \times 10^6$ N/m et $\mu = 0.2$

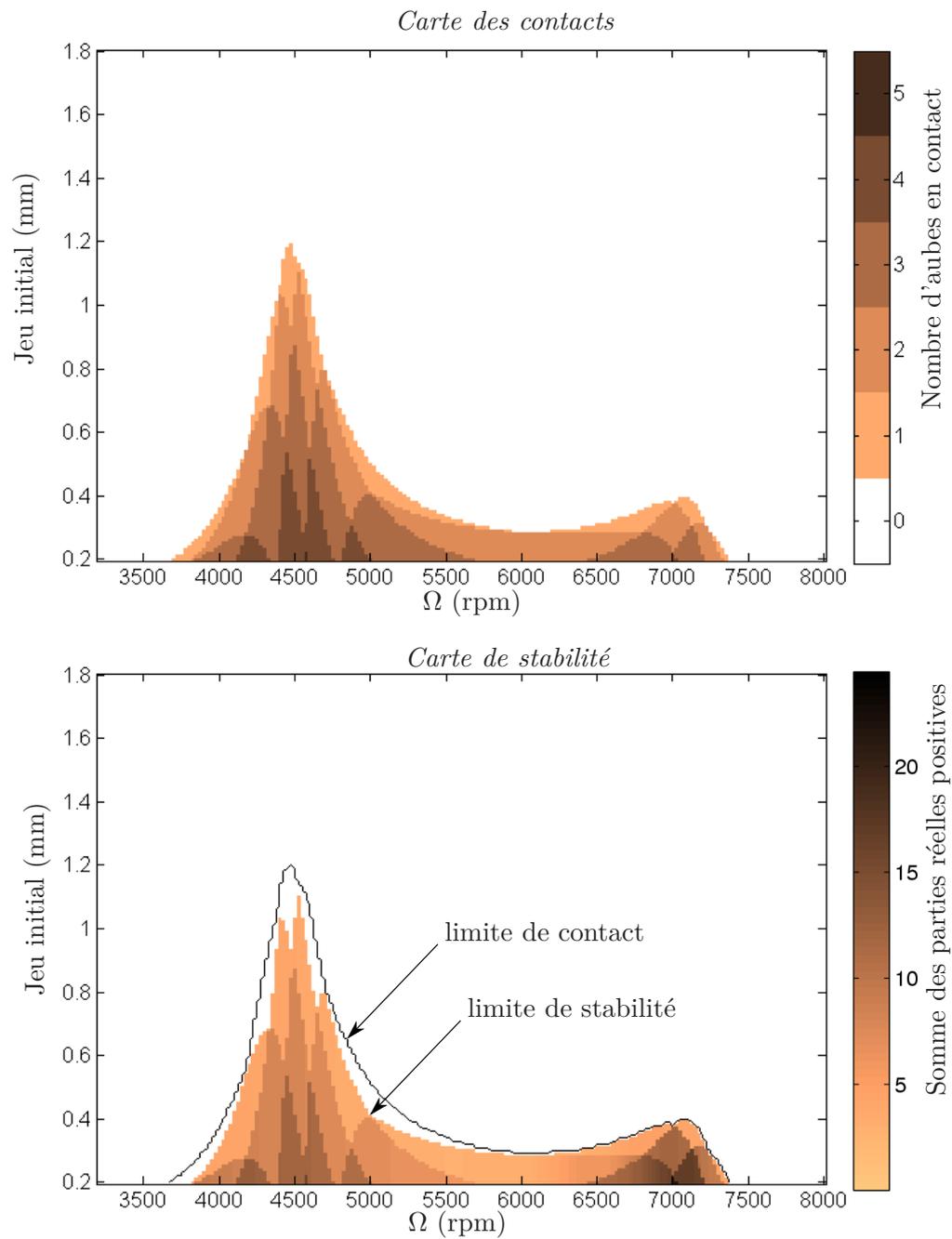


FIGURE III.34: Carte des contacts et carte de stabilité pour gestion $2D$, $k_r = 5 \times 10^6$ N/m et $\mu = 0.2$

pour des conditions de balourd et de paramètres de contact identiques à précédemment. Comme pour la formulation $3D$, le contour de la zone de contact suit la courbe de consommation de jeu maximale tracée figure III.19. La zone de contact $2D$ est moins étendue ; nous avons montré section III.2.1, l'intérêt de la formulation $3D$ dans la détection des touches. Remarquons également, que si la carte de stabilité obtenue avec la formulation $3D$ présente une répartition des couleurs diffuse qui suit globalement les teintes de la carte des contact associée ; pour la formulation $2D$, la carte de stabilité est plus discrète et se compose d'aplats uniformes clairement délimités, dont les frontières s'accordent avec celles des configurations de contact. Cet effet provient des expressions des réactions de contact données par l'équation (III.64) pour la formulation $2D$ et par les équations (III.59), (III.60) et (III.61) pour la formulation $3D$. En $2D$, chaque nouvelle aube en contact se ramène, lors du calcul de la matrice Jacobienne des efforts de contact, à l'introduction d'un élément de raideur radial et tangentiel alimenté par k_r et k_t ; tandis qu'en $3D$, l'engagement de l'aube peut être partiel et introduire ainsi des raideurs équivalentes modulées par la portion de corde en contact avec le carter. Pour la formulation $2D$, une même configuration de contact conduit ainsi à un apport de raideur constant ; puis la perte ou prise de contact entraîne un changement brutal dans la matrice Jacobienne qui se traduit par une évolution soudaine des parties réelles des valeurs propres. Pour la formulation $3D$ en revanche, l'évolution est lissée par la distribution des pressions de contact sur la longueur de la corde. Cette évolution graduelle traduit de manière plus réaliste l'engagement progressif des aubes et pourra conduire, pour certains couples de valeurs jeu initial/régime, à un point fixe dont la somme des parties réelles positives est plus grande en $2D$ qu'en $3D$. Pour les résultats proposés dans ce mémoire, ce type de situation ne se rencontre que sur quelques points et avec des écarts faibles : ils atteignent 0.8 pour couple jeu/régime de 0.2 mm/3850 rpm. Cependant, les résultats présentés lors du congrès EUROODYN [PTC14a], pour une mise en donnée du modèle différente, qui induisait des écarts de détection des contacts plus faibles entre les deux formulations, comportaient des zones stables pour une formulation $3D$ et instables en $2D$.

Pour achever ces études d'influences, nous avons tracé figure III.35, les cartes de stabilité obtenues pour trois jeux de paramètres de contact : la carte centrale, obtenue pour $k_r = 5 \times 10^6$ N/m et $\mu = 0.2$, est une version réduite de celle présentée figure III.33 ; à sa gauche est dessinée la carte de stabilité obtenue pour une raideur radiale deux fois plus grande $k_r = 10^7$ N/m conduisant, pour une raideur tangentielle fixée, à un coefficient de frottement plus faible : $\mu = 0.1$; à sa droite est dessinée la carte de stabilité obtenue pour un coefficient de frottement doublé : $k_r = 5 \times 10^6$ N/m et $\mu = 0.4$.

L'évolution des couleurs depuis la carte de gauche jusqu'à celle de droite, illustre l'impact du coefficient de frottement : plus il croît, plus les points fixes sont instables, ce qui se traduit par une zone instable plus foncée. Ces résultats sont cohérents avec les investigations expérimentales ou numériques rencontrées [Mus89 ; VCP05 ; Cra95] Si cette observation est très claire sur la carte dessinée à droite et obtenue

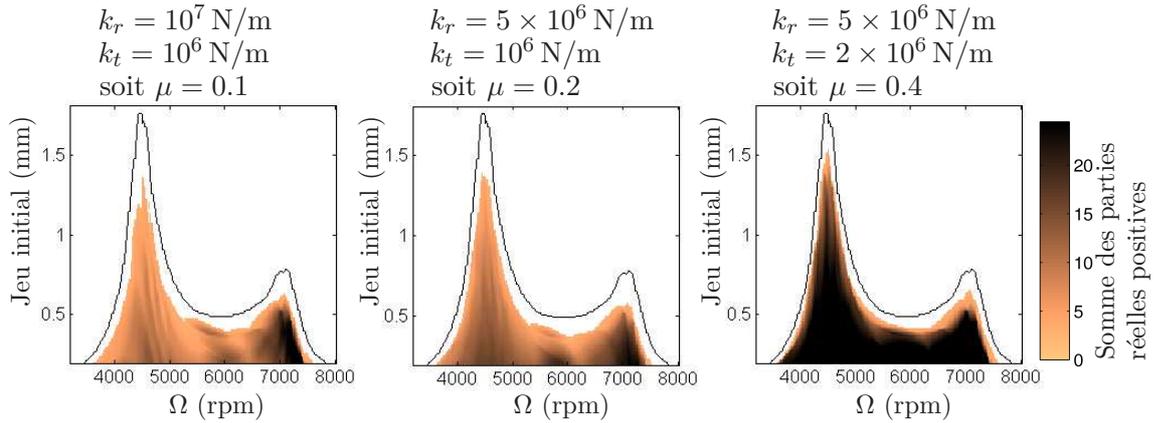


FIGURE III.35: Cartes de stabilité pour différents paramètres de contact (formulation $3D$)

pour $\mu = 0.4$, elle doit être nuancée par une comparaison plus locale des deux autres cartes. La zone située au niveau de la seconde vitesse critique (7000 rpm), est en effet plus foncée donc vraisemblablement plus instable, sur la carte dessinée à gauche pour laquelle $\mu = 0.1$, que sur la carte centrale qui considère $\mu = 0.2$. Cela s'explique par l'influence de la raideur radiale, qui pilote la plupart des phénomènes de coalescences et divergences de modes identifiés lors des études qualitatives menées section III.3.1. Dans ce cas précis, il s'agit de la coalescence F6 entre les modes $C'(3n_d)$ et $W'(4)$, déjà identifiée figure III.31 comme le facteur principal responsable de l'instabilité du système pour les régimes proches de 7000 rpm; elle se trouve amplifiée par la raideur radiale plus grande considérée pour la carte tracée à gauche.

Ces dernières études d'influence menées grâce aux cartes de contacts et de stabilité, nous permettent donc de visualiser et confirmer les phénomènes en jeu et les effets respectifs de paramètres du contact, que nous avons évoqué pour des jeux initiaux fixés à 0.5 mm (voir figures III.31 et III.32). Ces cartes ont également mis en valeur un intérêt supplémentaire de la formulation $3D$. Notons enfin, que seules des cartes de type jeu initial/régime ont été présentées ici, mais la démarche peut être déclinée à l'infini en fixant certains des paramètres pour en faire varier d'autres. Nous verrons ainsi au chapitre IV, une plus grande variété de ces cartes et montrerons leur utilisation comme outil de conception.

3.3 Conclusion

Les investigations présentées dans cette section sont mises en œuvre grâce à l'hypothèse d'une solution de type point fixe dans le repère mobile : cela permet d'inclure les non-linéarités de contact dans une équation algébrique, facile à résoudre, puis d'étudier, par un calcul de valeurs propres, la stabilité des équilibres statiques obtenus.

Cette démarche a en premier lieu, été appliquée pour des études qualitatives, menées sur un système conservatif et pour une configuration de contact étendue à

toute la plage des régimes. Nous avons ainsi identifié de nombreux phénomènes de coalescence et divergence de modes associés à la forte densité modale du modèle. Ces analyses ont également mis en évidence le rôle primordial des paramètres de contact : la raideur radiale k_r qui pilote la plupart des phénomènes de coalescence et divergence de modes et le coefficient de frottement μ qui conduit à une déstabilisation plus globale du système sur toute la plage de régimes. Elles ont enfin montré l'importance de la disposition des contacts qui peut filtrer ou amplifier certaines des coalescences et divergences.

Dans un second temps, nous avons appliqué la démarche à des conditions de fonctionnement plus réalistes. L'amortissement rétabli et un jeu initial introduit, le contact est induit par la réponse du système à des efforts de balourd. Nous étudions alors point par point la stabilité des équilibres obtenus à chaque pas de régime et identifions des plages de vitesses associées à trois natures de solutions : les régimes pour lesquels les niveaux ne sont pas suffisants pour consommer les jeux, ceux pour lesquels une ou plusieurs aubes sont en contact mais le point fixe reste stable et enfin les régimes associés à des solutions statiques instables. Cette analyse traduit également les effets des paramètres de contacts identifiés lors des études qualitatives. Enfin, nous avons élargi ces investigations en cartographiant les configurations de contact et la stabilité du système, nous permettant de renforcer les conclusions sur l'influence des raideurs de contact et de montrer l'intérêt de la formulation $3D$ pour son application plus réaliste des chargements.

Supposer une solution de type point fixe restreint néanmoins les informations obtenues sur le comportement du système. Le système étant non linéaire, on ne peut en effet, connaître a priori, ni la nature, ni le nombre de ses solutions. Les points fixes rencontrés ne sont donc pas nécessairement les solutions uniques du système ; et un point fixe instable peut, avec la prise en compte des effets dynamiques, correspondre à un cycle limite (stable ou non) ou à une solution chaotique. L'autre inconvénient de cette hypothèse est qu'elle nous prive de la possibilité de décollement et suppose ainsi que le contact est maintenu entre les sommets d'aube et la surface interne du carter. Or, comme décrit dans la synthèse bibliographique proposée section II.1, des contacts intermittents sont identifiés dans plusieurs des investigations rencontrées dans la littérature, principalement pour des cas d'interaction rotor-stator sans aubages (*rubbing*). La section suivante sera donc consacrée à la mise en œuvre d'intégrations temporelles pour étudier le comportement du système en autorisant les décollements. Notons que les schémas d'intégration présentent aussi l'avantage de s'adapter à tous les types de solutions. Les calculs transitoires réalisés à partir de conditions initiales réalistes, nous permettrons ainsi de vérifier les conclusions déduites des résultats statiques.

4 Comportement en contact non-permanent

L'ensemble des investigations proposées dans cette section, s'appuient sur des résultats transitoires obtenus par intégration temporelle ; nous utilisons le schéma

explicite des différences finies centrées dont la mise en œuvre est décrite dans la section II.3.1.

Si l'intégration temporelle est moins restrictive sur la nature des solutions recherchées et les hypothèses de contact, sa mise en œuvre est beaucoup plus coûteuse que la démarche statique présentée dans la section précédente. Une carte de stabilité telle que celle présentée figure III.33 contient environ 30000 points de résolution distincts et demande 2 à 3 heures de calcul par la démarche statique. Une analyse transitoire sur une durée de 5 sec nécessite environ 4 minutes, il faudrait donc plus de 80 jours de calcul pour construire la même carte. L'intégration temporelle n'autorise donc pas la mise en œuvre d'études d'influence très larges, permises en supposant une solution de type point fixe. C'est pourquoi les analyses transitoires serviront tout d'abord à valider les conclusions obtenues en statique et confirmer la frontière de stabilité obtenue précédemment. Puis, nous utiliserons le contenu du signal temporel pour mener une analyse spectrale, en miroir de l'étude de stabilité opérée pour un jeu initial de 0.5 mm (voir figure III.31). La richesse des informations disponibles en intégration temporelle, qui nous permet de suivre le système depuis un champ de déplacement nul, jusqu'aux premiers contacts puis à la divergence, nous permettra enfin, de décrire les scénarios conduisant à des configurations instables.

Les intégrations sont réalisées à un régime constant sur une durée de 5 sec. Le contact est géré par la formulation $3D$ et la mise en contact est assurée par un effort de balourd appliqué progressivement au cours d'une rampe de 1 sec. Lorsqu'il est pleinement introduit, le balourd appliqué au niveau du disque turbine, est identique à celui considéré dans l'ensemble du chapitre, soit une amplitude de 0.225 m.kg, Le pas de temps considéré est de 5×10^{-4} sec et la simulation transitoire est stoppée lorsque le champ de déplacement diverge ou que l'hypothèse d'une vitesse de glissement constante n'est plus respectée.

4.1 Résultats transitoires à la frontière de stabilité

Pour confirmer les résultats statiques obtenus sur la carte présentée figure.III.33 sans mettre en œuvre les 30000 simulations qui correspondent à chacun des points de la carte, nous sélectionnons des points le long de la frontière de stabilité. Ceux de la frontière extérieure identifiés par des ronds sur la figure III.36 devront mener à un champ de déplacement convergé et indiqueront que la zone de stabilité est correctement délimitée. Pour les points de la frontière interne identifiés par un triangle, les intégrations temporelles devront diverger pour indiquer que les résultats statiques ne sont pas trop restrictifs.

La figure III.37 présente l'évolution des réactions normales appliquées sur les aubes et le dessin de la déformée stabilisée pour le couple jeu initial/régime de 0.2 mm/6000 rpm. Rappelons que les efforts de balourd sont appliqués sur une rampe de 1 sec et qu'à $t = 0$, le champ de déplacement est nul. De 0 à 0.83 sec, les réactions de contact sont nulles : les niveaux de la réponse au balourd ne sont pas suffisants pour consommer les jeux. Un premier contact est détecté à 0.83 sec, le balourd

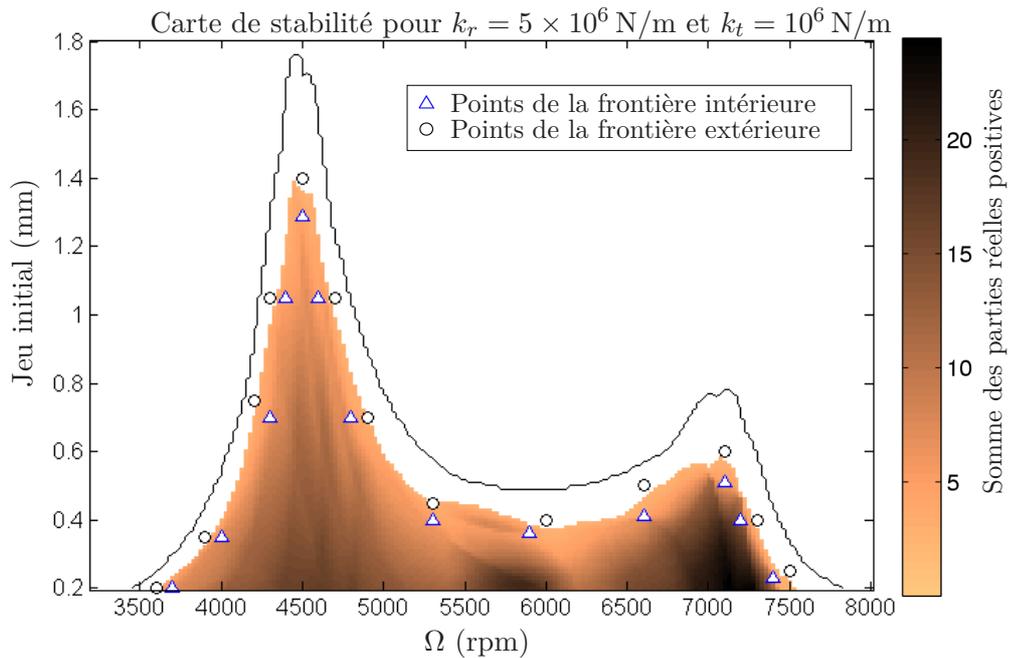


FIGURE III.36: Repérage des points de vérification de la frontière de stabilité

poursuit alors sa rampe et la réaction normale qui limite la pénétration du sommet d'aube dans le carter augmente. A $t = 0.92$ sec, les niveaux de réponse au balourd sont suffisants pour qu'une seconde aube entre en contact. Les réactions de contact continuent de croître jusqu'à la fin de la rampe de balourd à $t = 1$ sec. Les vibrations sont alors rapidement amorties pour conduire à des niveaux constants. La déformée tracée sur la partie droite illustre l'état stabilisé obtenu dès $t = 2$ sec, et permet d'identifier la déformée du mode $W^*(7)$ associé à la vitesse critique la plus proche (la déformée modale de $W^*(7)$ à 0 rpm est dessinée figure III.10).

Par le même scénario que celui que nous venons de décrire, toutes les simulations réalisées pour les couples jeu initial/régime de la frontière externe, mènent à un champ de déplacement convergé. Outre ce statut commun sur la stabilité du système, chacune des simulations transitoires converge vers le même équilibre que celui obtenu en statique. La figure III.38 met en évidence ces similitudes en comparant la distribution des réactions normales de contact. Pour chacun des couples jeu initial/régime de la frontière externe, l'état stabilisé issu de la simulation transitoire, est ainsi comparé au point fixe solution de l'équation algébrique non linéaire. La partie haute de la figure III.38 fait apparaître sur un histogramme, les niveaux des réactions normales obtenus pour chacun des états stabilisés issus des intégrations temporelles. Les différents rectangles colorés permettent d'identifier le sommet d'aube sur lequel chaque réaction est appliquée; la roue aubagée dessinée sur la partie droite de la figure définit la couleur associée à chaque aubage et nous permet ainsi de reconstruire la distribution des efforts. L'histogramme placé au pied de la figure fournit les écarts relatifs obtenus pour chacun de ces efforts, entre la solution stabilisée obtenue en temporel et le point fixe solution de l'équation statique. Nous

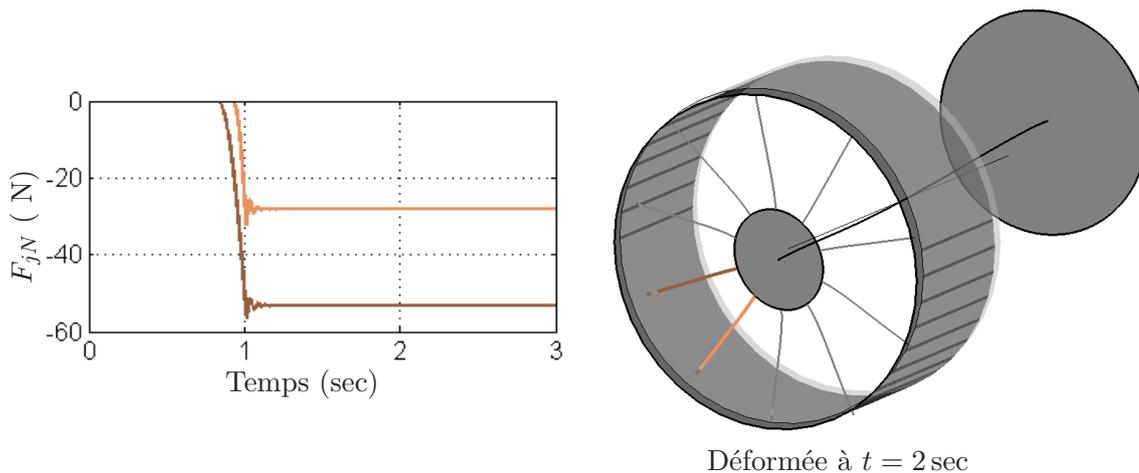


FIGURE III.37: Efforts normaux et déformée stabilisée, obtenus au point de la frontière externe à 6000 rpm et 0.4 mm de jeu initial

constatons ainsi que les écarts ne dépassent pas 0.2 % et concluons que les résultats transitoires et statiques se confirment. Pour le jeu de données considéré, ces concordances offrent ainsi une confirmation satisfaisante que les points extérieurs à la zone d'instabilité identifiée en statique, seront effectivement stables.

Comparons à présent les résultats associés aux couples jeu initial/régime définis pour la frontière interne (voir figure III.36). Comme attendu, les simulations transitoires mises en œuvre à tous ces points, conduisent à un champ de déplacements divergent. De plus, comme pour les points de la frontière externe, les similitudes ne se limitent pas au statut stable ou instable associé à chacun des points de calculs. La figure III.39 compare le contenu fréquentiel du signal temporel issu de la simulation transitoire avec les fréquences propres des modes instables identifiés en statique. Le spectre fréquentiel du signal temporel est calculé par fft sur la fenêtre de temps suivante : de 0.5 sec après le premier contact, jusqu'à l'instant où l'amplitude de l'une des réactions normales de contact atteint 8000 N. La fréquence associée au coefficient de Fourier le plus élevé, est marquée par un triangle sur la figure III.39. Cette fréquence est alors comparée aux fréquences propres des modes instables identifiés lors de l'analyse de stabilité du point fixe obtenu en statique, pour le même couple jeu initial/régime. Ces fréquences sont indiquées par un bâtonnet horizontal dont la couleur traduit l'amplitude de la partie réelle positive associée. Nous observons ainsi que le pic principal du contenu fréquentiel du signal temporel, coïncide avec la fréquence du mode le plus instable identifié en statique. Les écarts relatifs entre ces deux fréquences sont tracés sur la partie basse de la figure, ils ne dépassent pas 1.5 %.

Les 26 points de vérification de la frontière de stabilité confirment les conclusions des analyses statiques. Pour la frontière externe qui correspond aux configurations de contact stables, les champs de déplacements convergent vers les mêmes équilibres statiques que ceux solutions de l'équation algébrique non linéaire (III.67). Pour la frontière interne, la fréquence la plus instable identifiée en statique, est retrouvée

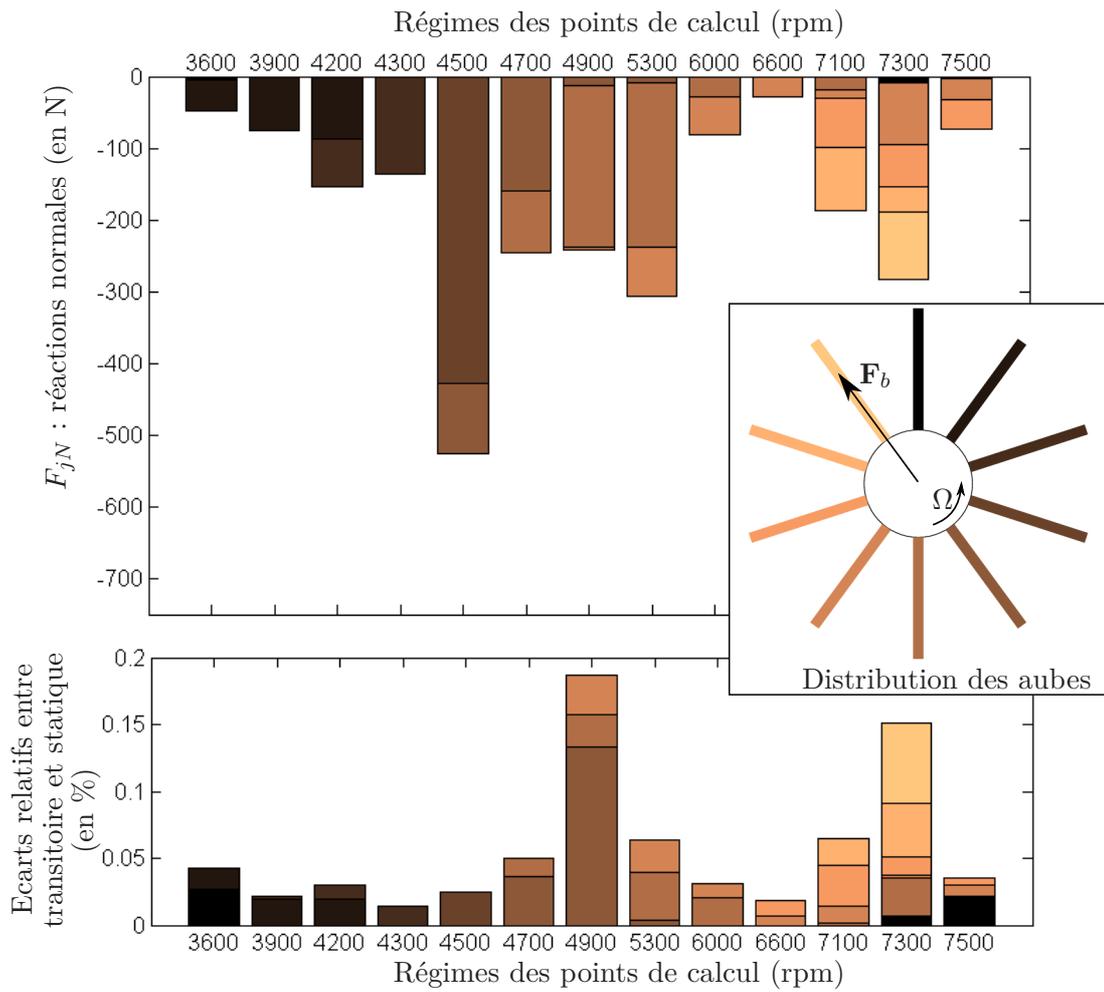


FIGURE III.38: Résultats stables de frontière externe : comparaison statique/transitoire de la distribution des réactions normales de contact

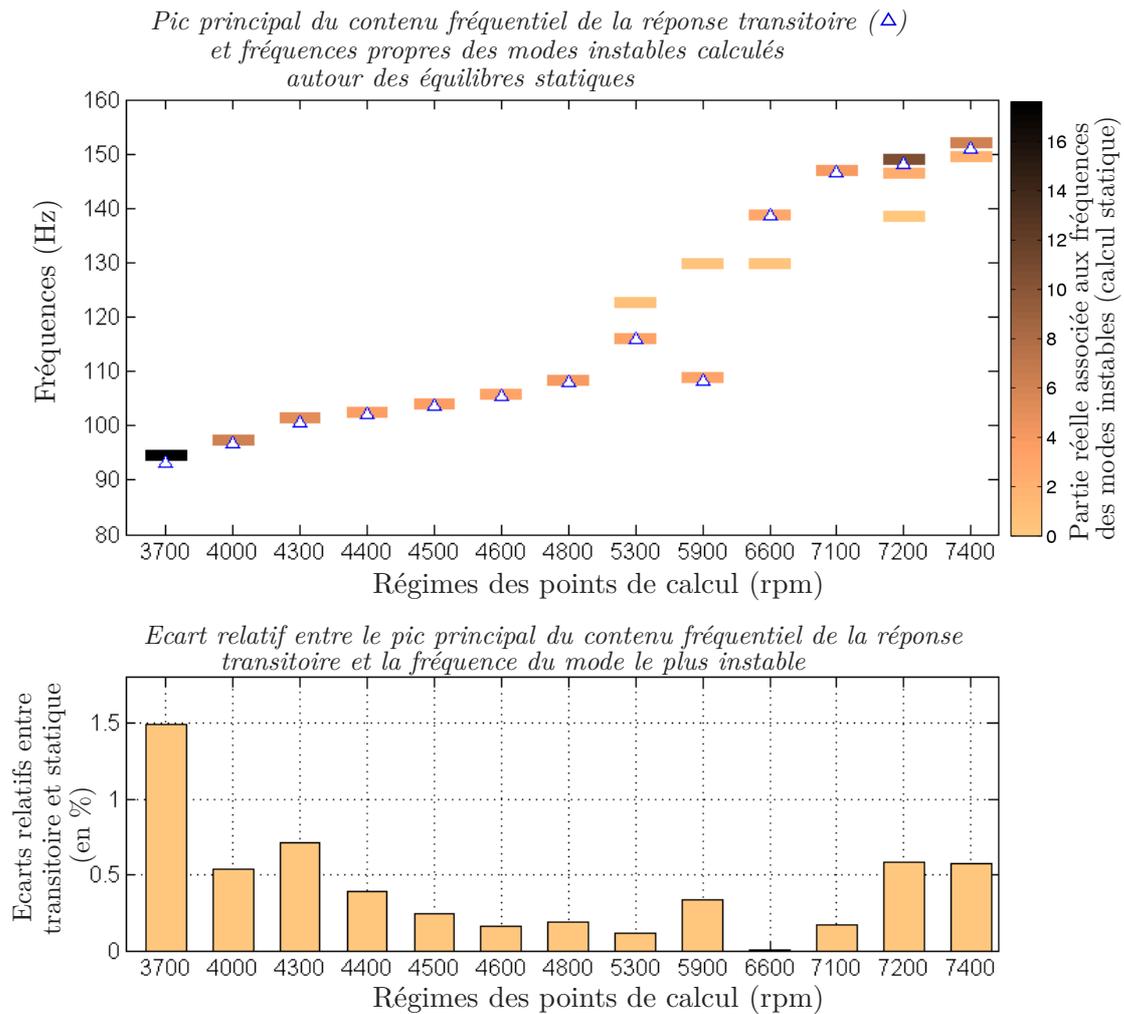


FIGURE III.39: Résultats instables de la frontière intérieure : comparaison du contenu fréquentiel de la réponse transitoire avec les fréquences propres des modes instables calculés autour de chaque équilibre statique

comme composante principale du spectre du signal temporel. Pour le modèle et le jeu de données considéré, l'hypothèse d'une solution de type point fixe semble donc acceptable et permet de correctement tracer la frontière de stabilité du système. Nous poursuivrons les simulations transitoires, dans la section suivante, pour étudier plus en détail le contenu spectral des signaux temporels.

4.2 Contenu fréquentiel des signaux temporels

Dans la section précédente, la dft (Discrete Fourier Transform) du signal temporel des résultats instables a mis en évidence la corrélation entre son contenu fréquentiel et les fréquences propres des modes instables identifiées par le calcul modal du système linéarisé autour des points fixes. Pour approfondir cette analyse, nous reprenons les conditions appliquées pour les analyses statiques présentées figure III.31 : les efforts de balourd et les paramètres de contact sont identiques à précédemment et un jeu initial de 0.5 mm est introduit. Des intégrations temporelles, d'une durée maximale de 5 sec, sont réalisées à intervalles réguliers de 200 rpm, de 3200 jusqu'à 7600 rpm. Nous retrouvons alors les trois types de résultats évoqués précédemment, à savoir : les solutions pour lesquelles aucun contact n'est détecté ; celles qui malgré des contacts, conduisent à un équilibre statique stable et enfin les solutions instables pour lesquelles le champ de déplacement diverge.

La fenêtre temporelle traitée est définie suivant les conditions décrites figure III.40. Un exemple de chacun des types de résultats y est présenté. Pour chaque exemple, sont tracés : l'évolution dans le temps des réactions normales de contact F_{jN} sur la partie gauche et celle de la flèche au sommet de l'aube $x_{b1}(L_b)$ dans le diagramme de droite.

- L'exemple présenté sur la partie haute de la figure (intégration temporelle à 6000 rpm), traite le cas où aucun contact n'est détecté. Les réactions normales sont nulles au cours de toute la simulation ; tandis que le diagramme de droite traduit la montée progressive du niveau du fléchissement des aubes, à mesure que les efforts de balourd sont introduit, et à partir de la fin de la rampe de balourd ($t = 1$ sec), le niveau se stabilise rapidement vers une constante. Pour ce cas de figure, la fenêtre traitée débute 0.5 sec après la fin de l'application du balourd et se termine à $t = 5$ sec.
- Les résultats du type *contact et stable* sont décrits sur la partie centrale de la figure (intégration temporelle à 6400 rpm). Nous observons les mêmes comportements statiques que pour l'exemple précédent, mais les réactions normales de contact sont non-nulles. Dans ce cas, la fenêtre traitée débute 0.5 sec après le premier contact détecté et se termine à $t = 5$ sec.
- Le dernier exemple, présenté sur la partie basse de la figure, traite une configuration instable. Nous y observons la divergence des efforts normaux et de la flèche des aubes. La simulation est stoppée à environ $t = 3.2$ sec. Pour ce cas de figure, la fenêtre temporelle démarre 0.5 sec après le premier contact détecté et s'achève lorsque l'une des réactions normales de contact atteint 8000 N, pour

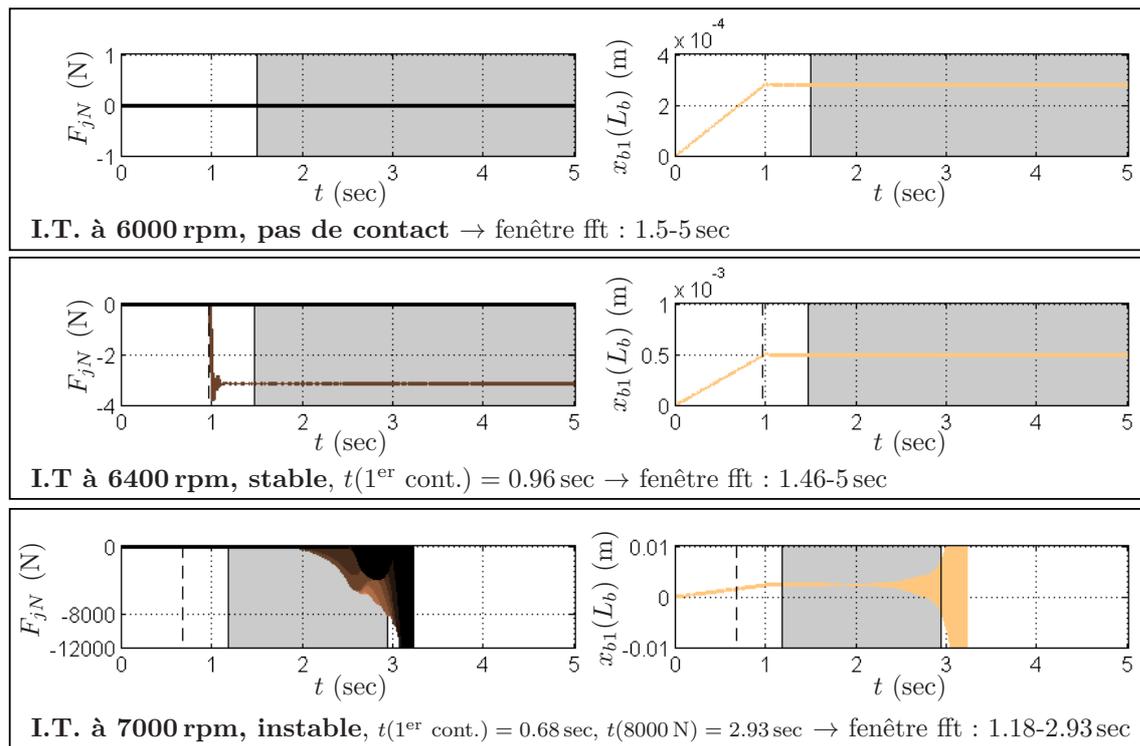


FIGURE III.40: Choix de la fenêtre temporelle traitée par fft pour différentes natures de résultats : sans contact, contact stable et instable

limiter l'amplitude des déplacements.

La figure III.41 présente les spectres fréquentiels ainsi obtenus pour chacune des intégrations temporelles réalisées de 3200 à 7600 rpm. Certaines informations provenant des résultats statiques figurant dans la section III.3.2 ont été reportées sur le graphique. Les zones caractérisant la nature du résultat (*sans contact*, *contact et stable* et *contact et instable*) sont indiquées par des aplats colorés sur la base du graphique. Notons que, comme nous l'avons vérifié précédemment, la nature du résultat obtenu en temporel et en statique, est identique. Les niveaux des équilibres statiques sont également tracés dans le plan de fréquence nulle qui correspond à la contribution statique du signal. Enfin, les fréquences des modes les plus instables (associés aux valeurs propres qui possèdent les parties réelles les plus grandes) sont indiquées par des points dont la couleur traduit la valeur de la partie réelle associée.

La figure III.41 offre donc une comparaison des résultats issus de chacune des méthodes, en matière de contenu fréquentiel et de contribution statique. Remarquons ainsi que lorsque le système est instable (plages de régimes colorées), le pic du spectre du signal obtenu en intégration temporelle, coïncide avec la fréquence du mode le plus instable identifié par la démarche statique. Inversement, lorsque le système est stable (avec ou sans contact), le signal temporel est constant et le spectre associé est donc plat sur toutes les fréquences à l'exception de 0 Hz, où l'amplitude traduit la composante statique du signal temporel. Ces composantes statiques données par le pic à 0 Hz semblent suivre la courbe des niveaux issus des équilibres statiques,

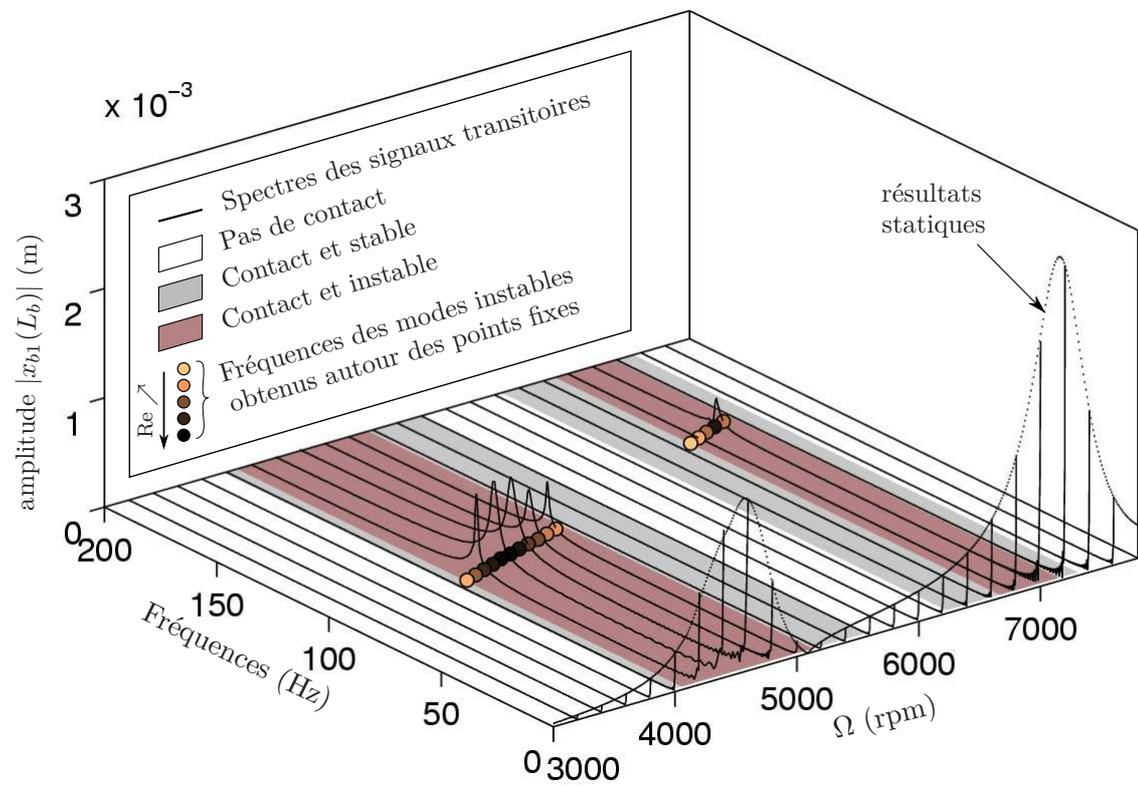


FIGURE III.41: Spectres fréquentiels des intégrations temporelles réalisées de 3200 à 7600 rpm : comparaison avec les résultats issus des équilibres statiques (voir figure III.31)

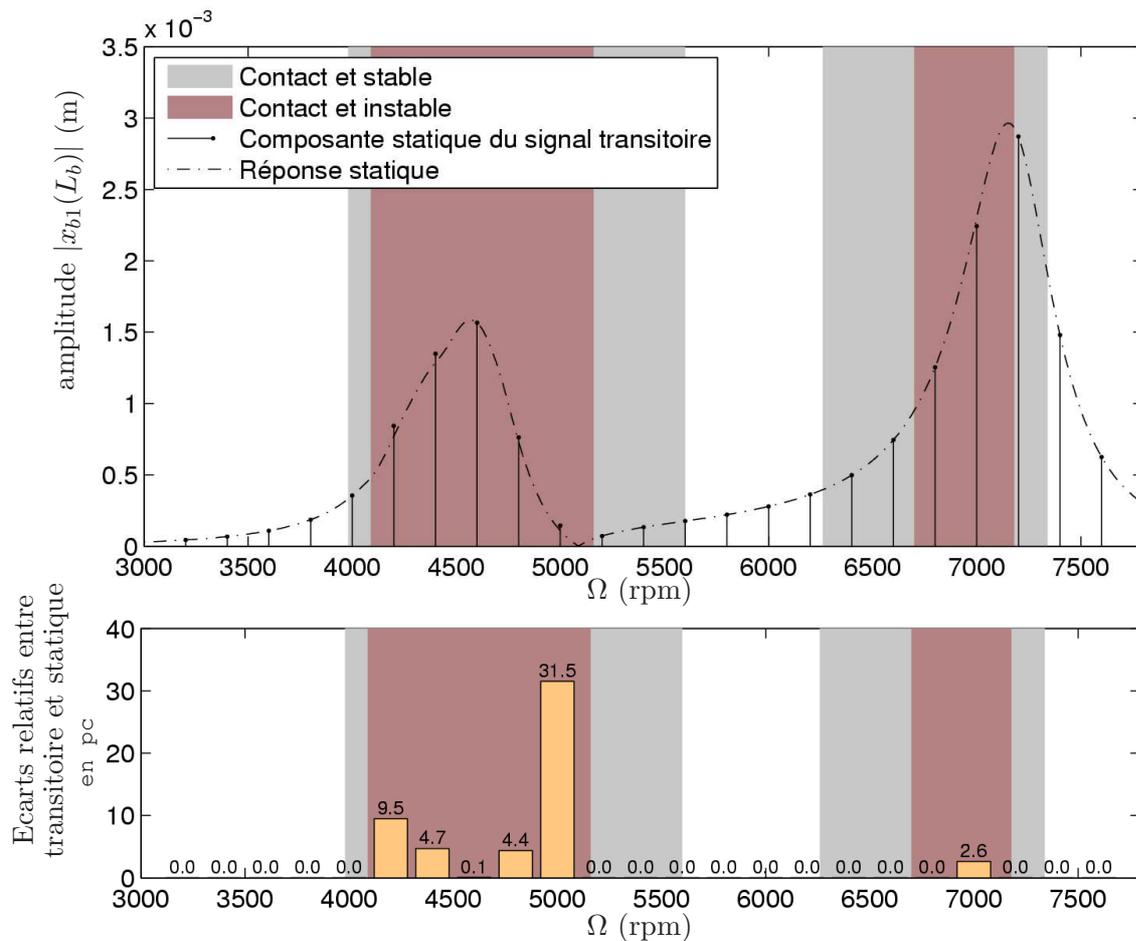


FIGURE III.42: Composantes statiques de la flèche au sommet de l'aube 1 issue des calculs transitoires : comparaison avec les résultats issus des équilibres statiques

tracée dans le même plan. L'observation des contributions à fréquence nulle et aux fréquences plus hautes sont approfondies dans des figures distinctes dans la suite (figure III.42 et III.43).

Avant d'approfondir ces comparaisons, notons que tous les ddls du modèle présentent qualitativement les mêmes résultats. Nous avons choisi d'afficher figure III.41, le spectre du signal donné par la flèche d'une aube à son extrémité libre; car pour cette donnée, les contributions à fréquence nulle et celles obtenues à des fréquences plus élevées (pour les résultats instables) présentent des niveaux équilibrés. Cela permet ainsi de comparer simultanément les contributions statiques et celles de fréquences plus grandes.

La figure III.42 permet une comparaison plus approfondie des contributions statiques. Le diagramme tracé sur la partie haute, correspond au plan de fréquence nulle visible sur la figure III.41. La composante statique du signal temporel obtenu pour chacune des simulations transitoires, est indiquée par un trait vertical terminé par un point. La correspondance avec les résultats provenant de la démarche statique (courbe tracée en pointillés), apparaît clairement. Sur la partie basse de la figure, l'histogramme indique les écarts relatifs obtenus pour chacune des simu-

lations transitoires, entre le niveau issu de l'intégration temporelle et le résultat calculé en statique au même régime. Qu'il y ait contact ou non, lorsque le système est stable, les écarts sont inférieurs à 0.1 %. Cela traduit la convergence des simulations transitoires vers les points fixes stables identifiés par la démarche statique ; cette correspondance a été aussi mise en évidence pour les points de la frontière extérieure de la zone de stabilité (voir figure III.38). Lorsque le système est instable, les niveaux issus du signal temporel suivent aussi la courbe obtenue en statique, mais les correspondances sont moins précises : à 5000 rpm, l'écart relatif atteint 31.5 % pour une différence absolue de 0.034 mm et à 4200 rpm, un écart de 0.73 mm est constatée, qui correspond à une augmentation de 9.5 %. Les effets non linéaires sur le comportement dynamique et la prise en compte des décollements ont donc un impact sur la contribution statique de la réponse.

Intéressons-nous maintenant, au spectre fréquentiel des résultats instables. Pour mieux observer les contributions de fréquences non-nulles, la figure III.43 trace les spectres des signaux temporels sur une plage de fréquences de 20 à 600 Hz : la contribution statique n'apparaît plus et les niveaux des fréquences plus hautes sont étudiés. Comme pour la figure III.41, le diagramme est augmenté de certaines informations issues des calculs statiques : les plages de régimes instables sont colorées et à chaque régime, la fréquence propre du mode le plus instable est marquée d'un point dont la couleur traduit la valeur de la partie réelle associée ; les harmoniques de ces fréquences (de $2f$ à $5f$) sont aussi indiquées de cette façon. Comme remarqué précédemment, les spectres des signaux temporels calculés en dehors des plages instables, sont plats : ils ne présentent aucune contribution dynamique. Aux régimes instables, en revanche, les contributions dynamiques sont clairement visibles. Les spectres font apparaître un premier pic à une fréquence coïncidente de celle du mode propre le plus instable ; puis des pics sont observés au niveau des multiples entiers de cette fréquence principale. Ces contributions harmoniques sont introduites par les effets non linéaires liés aux contacts.

A la différence des diagrammes précédents, le signal traité figure III.43 provient de la coordonnée généralisée $B_3(t)$. Il s'agit d'un des deux ddls qui apportent la déformation à 3 diamètres nodaux du carter (voir section III.1.1). Comme précédemment, ce ddl est choisi pour permettre une observation plus facile des phénomènes décrits : les niveaux aux harmoniques de la fréquence principale y sont en effet plus élevés et donc plus visibles que pour d'autres ddls.

4.3 Description de scénarios instables

L'étude du contenu fréquentiel des signaux transitoires a permis de découvrir les similitudes avec les résultats statiques pour valider cette démarche peu coûteuse. Nous allons maintenant profiter de la richesse des informations disponibles en intégration temporelle pour suivre le déroulement des phénomènes instables, depuis l'initiation des contacts jusqu'à la divergence du champ de déplacement.

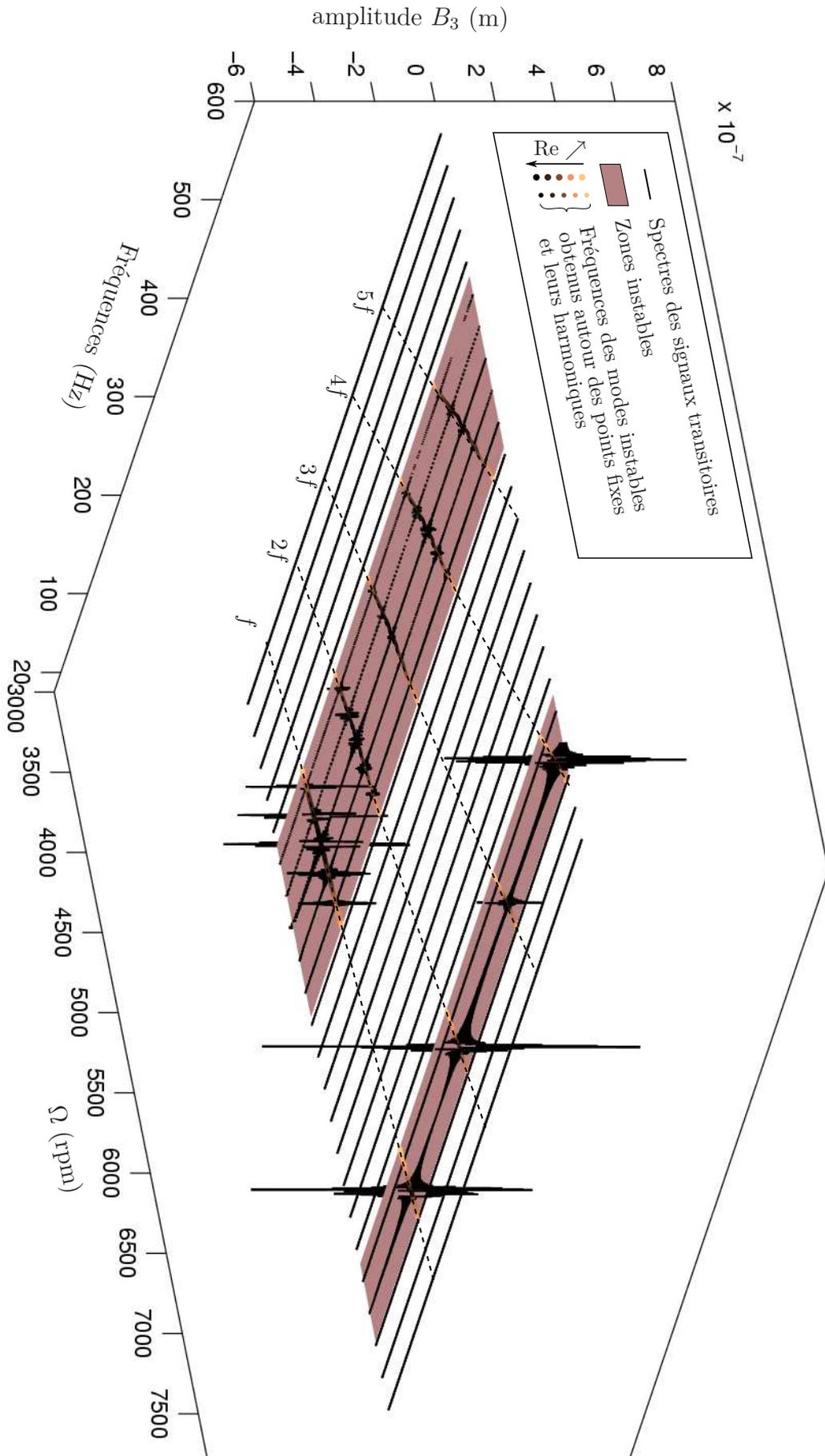


FIGURE III.43: Contenu fréquentiel des signaux transitoires de 20 à 600 Hz

Scénario à 4800 rpm

La simulation temporelle conduite à 4800 rpm est d'abord étudiée. L'évolution du comportement du système en termes de configuration de contact est décrite en premier lieu ; puis l'évolution du contenu fréquentiel du signal est présentée. Nous observons enfin le déroulement de l'instabilité du point de vue des trajectoires des centres de gravité du disque et du carter, et de celui des diamètres nodaux obtenus sur la roue aubagée et le carter.

Evolution des configurations de contact : Durant la première partie de la simulation, les aubes entrent successivement en contact sous l'effet de l'application progressive du balourd, puis maintiennent un contact établi avec la surface interne du carter. La figure III.44 décrit cette mise en contact progressive. Le graphique placé au centre traduit l'évolution des réactions normales de contact. Il est complété par le zoom placé en haut de la figure, qui permet d'observer les réactions normales sur les aubes 3 et 7, dont les amplitudes sont très inférieures à celles des autres aubes en contact.

Trois déformées sont dessinées sous ces graphiques, elles correspondent à trois instants dans la chronologie de la mise en contact. Notons que ces déformées sont tracées avec un facteur de normalisation identique et rappelons que la couleur des aubes en contact traduit la portion de corde qui touche effectivement le carter : l'aube est noire si le contact est distribué sur toute la corde ; beige clair si la portion de l'aube en contact est faible et grise s'il n'y a pas de contact. La déformée à l'instant $t = 0.65$ sec est dessinée à gauche. A cet instant, le balourd n'est pas pleinement appliqué et deux aubes seulement touchent le carter. Un autre état intermédiaire est dessiné au centre ; à $t = 0.8$ sec, les niveaux de réponse au balourd croissant ont consommé les jeux pour les aubes 4 à 7. Puis, la déformée à l'instant $t = 1.3$ sec, dessinée à droite, illustre l'état pseudo-stabilisé obtenu après la fin de l'application du balourd et avant que les vibrations ne s'amplifient pour conduire à des contacts intermittents (soit de 1.1 à 1.8 sec). Le contact y est établi sur 5 sommets d'aubes et les trois contributions principales concernent les aubes 4 à 6. Par une observation plus globale, nous pouvons également percevoir l'amplification de la déformée du mode fan ($W^*(1)$) à mesure que l'excitation liée au balourd croît (rappelons que la vitesse critique de ce mode est d'environ 4500 rpm).

La phase initiale de la simulation est ainsi très similaire à celle décrite pour un système stable (voir figure III.37). Les aubes entrent progressivement en contact lors de l'application du balourd, jusqu'à atteindre un état stabilisé consistant en une déformation synchrone, donc statique lorsque décrite dans repère mobile. Cette réponse est proche de la réponse linéaire obtenue sans prise en compte des contacts et les mêmes aubes y maintiennent un glissement permanent sur la surface interne du carter. Dans le cas stable, l'amortissement des différents organes absorbe l'énergie transmise par ces contacts et le système converge vers un équilibre statique, identique au point fixe solution de l'équation statique non linéaire (III.67). Dans le cas instable décrit ici, l'amortissement n'est pas suffisant pour compenser l'effet

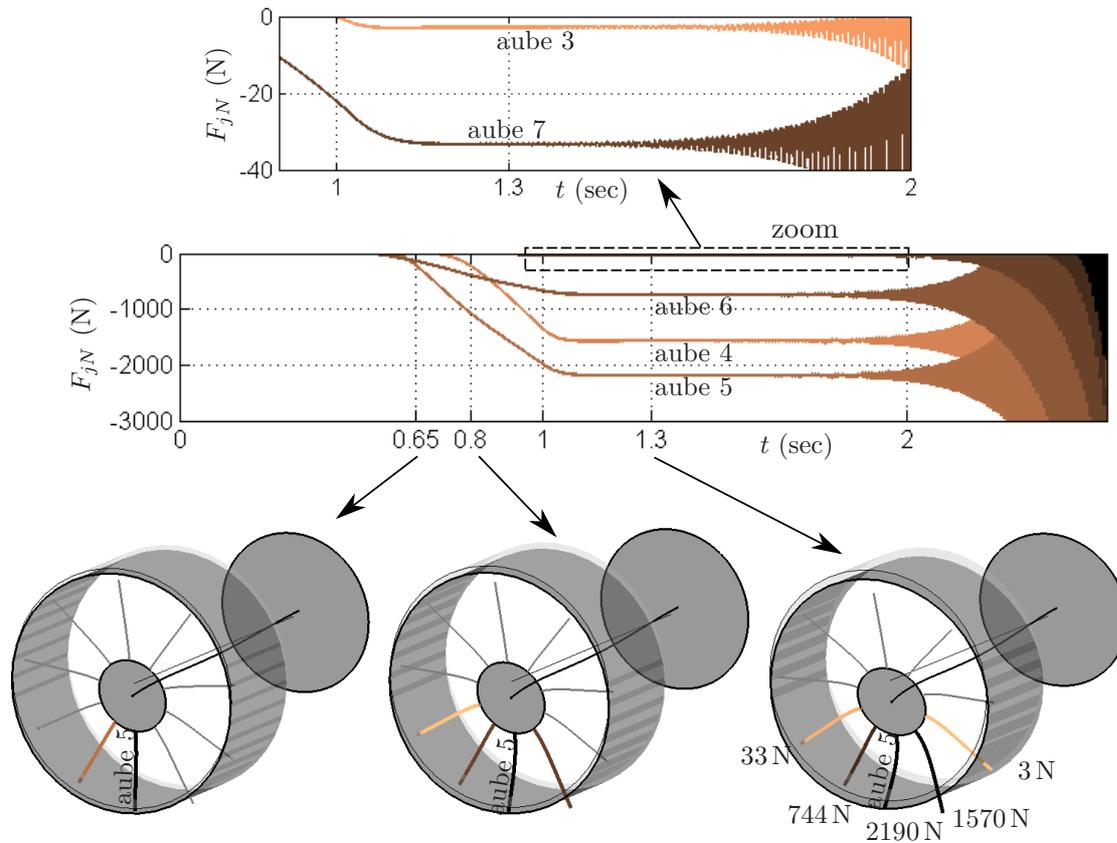


FIGURE III.44: Intégration temporelle à 4800 rpm, prises de contact successives lors de l'application du balourd

des contacts et l'énergie de la rotation propre de l'arbre est transmise au système et le fait vibrer. Dans la simulation, les vibrations s'amplifient indéfiniment jusqu'à ce que le critère sur l'amplitude des déplacements ou la vitesse de glissement ne la stoppe. En réalité, ces amplitudes sont limitées par les échauffements qui dissipent une partie de l'énergie, l'usure des matériaux qui ouvre les jeux, des contacts survenant à d'autres endroits du moteur et encore le ralentissement du rotor freiné par les efforts de frottement.

La figure III.45 permet d'observer le système lorsque les vibrations s'amplifient et conduisent des contacts intermittents. Nous y retrouvons le graphique de l'évolution des réactions normales au cours de la simulation ; un zoom sur la fenêtre de temps examinée est tracé au-dessous. Aux instants considérés, les vibrations autour de l'état statique, ne sont pas suffisantes pour observer des décollements au niveau des contacts principaux qui concernent les aubes 4, 5 et 6. En revanche, les aubes 3 et 7, sur lesquelles les contacts étaient plus légers, perdent et reprennent le contact de façon régulière. Les déformées dessinées sur la figure permettent de suivre ses évolutions sur une période de vibration.

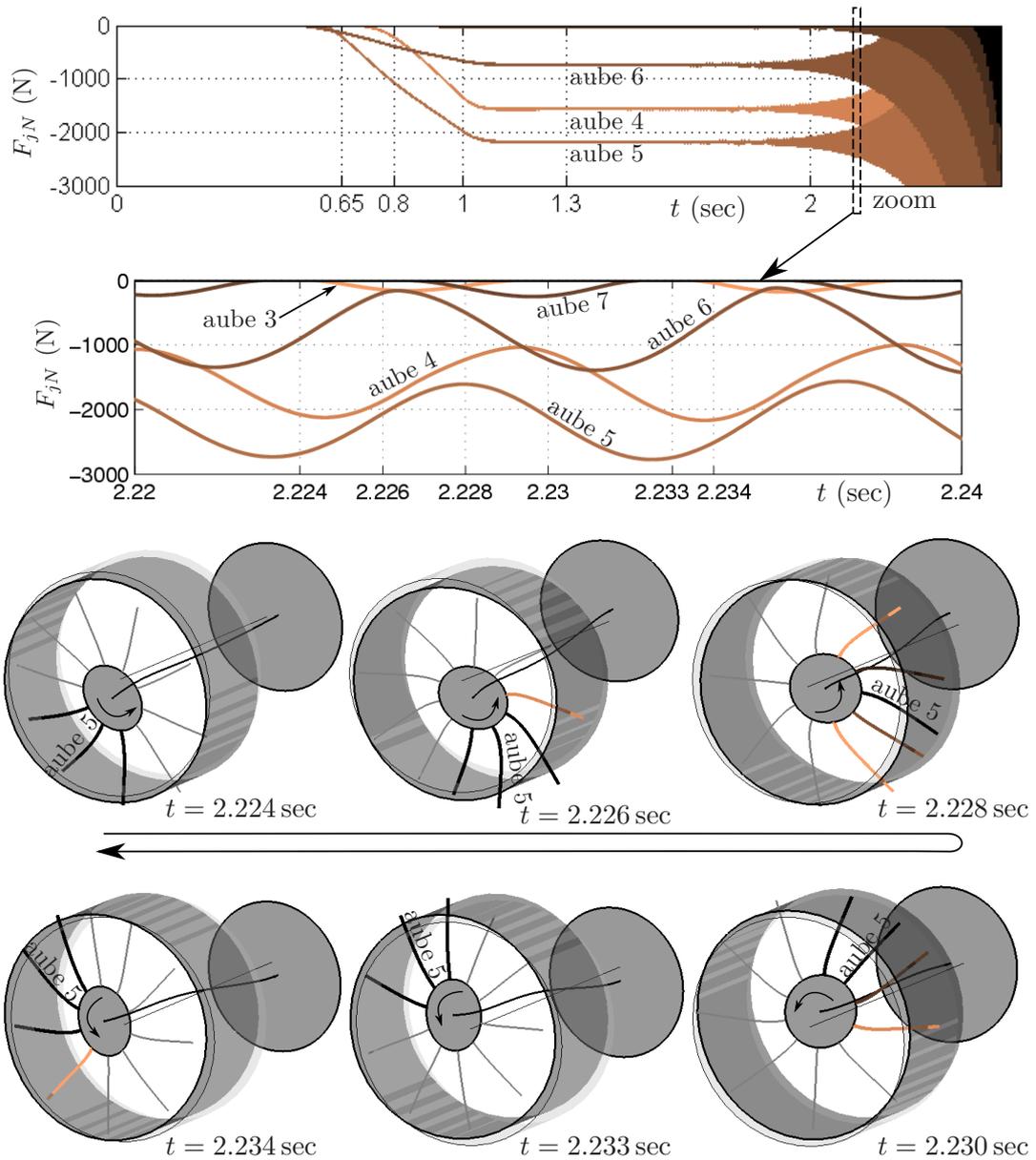


FIGURE III.45: Intégration Temporelle (I.T.) à 4800 rpm, description des prises et pertes de contact

Evolution du contenu fréquentiel : Cette évolution périodique associée à l'intermittence des contacts et l'augmentation des amplitudes de vibration peut également être analysée en observant l'évolution du contenu fréquentiel en fonction du temps. Cette information est obtenue ici par une transformée en ondelettes [Chu92], basée sur l'ondelette de Morlet avec le nombre d'onde $k_0 = 20$. Les densités spectrales de puissance issues de la transformée en ondelettes du signal de $B_2(t)$ et $B_3(t)$ sont tracées figure III.46. Ces degrés de liberté traduisent respectivement l'amplitude des déformations du carter à 2 et 3 diamètres nodaux (voir section III.1.1). Notons également que les zones hachurées sur les figures délimitent le cône d'influence, au delà duquel les effets de bord deviennent importants et le signal perd de sa validité.

Le diagramme tracé sur la partie haute permet d'observer qu'une contribution en $2n_d$ du carter existe dès 1.2sec et s'amplifie au cours de la simulation. La fréquence principale identifiée correspond à la fréquence propre du mode le plus instable calculé en statique. L'harmonique $2f$ de cette fréquence apparaît à environ $t = 1.8$ sec, l'instant qui correspond aux premiers contacts intermittents sur les aubes 3 et 7 (voir figure III.44 et III.45). Puis, les harmoniques de 3 à $6f$ apparaissent successivement à partir de 2.1sec environ.

Le diagramme tracé sur la partie basse fournit la densité spectrale de puissance du ddl B_3 . Nous constatons ainsi que la participation de la déformation en $3n_d$ du carter débute plus tard que celle en $2n_d$ (à $t = 1.6$ sec). La fréquence est identique à celle du $2n_d$ et correspond donc à la fréquence propre du mode $B^*(1n_d)$ obtenu en statique et qui possède la plus grande partie réelle. L'harmonique $2f$ de cette fréquence principale intervient à partir de 2.1sec environ et les harmoniques supérieures apparaissent peu après.

Evolution des trajectoires : Etudions maintenant le déroulement de la simulation en observant les trajectoires des centres de gravité (cdg) du disque fan et du carter, décrites dans le repère mobile. Elles sont tracées figure III.47 sur deux fenêtres de temps : de 0 à $t = 1.5$ sec sur la partie haute et de 0 à 2.55sec sur la partie basse de la figure.

Les trajectoires de 0 à 1.5sec traduisent le comportement statique du système lors de l'application du balourd et jusqu'à la fin de l'état pseudo-stabilisé évoqué précédemment. Cette contribution statique correspond dans le repère fixe, à voir s'élargir, à mesure que le balourd progresse, une précession circulaire directe et synchrone. Les premiers contacts qui surviennent à environ $t = 0.6$ sec impactent les trajectoires que l'on voit dévier légèrement. La précession directe liée au balourd poursuit néanmoins son élargissement jusqu'à $t = 1$ sec, puis maintient une trajectoire stable : statique dans le repère mobile et qui revient à une précession circulaire d'amplitude constante dans le repère fixe. Ces trajectoires correspondent aux configurations de contact décrites figure III.44, pour lesquelles les aubes maintiennent un contact permanent avec la surface interne du carter. Notons également que le déplacement du disque est plus de deux fois plus grand que celui du carter : le rayon de la précession du disque est de 1.27mm, contre 0.55mm pour le carter. Cela provient

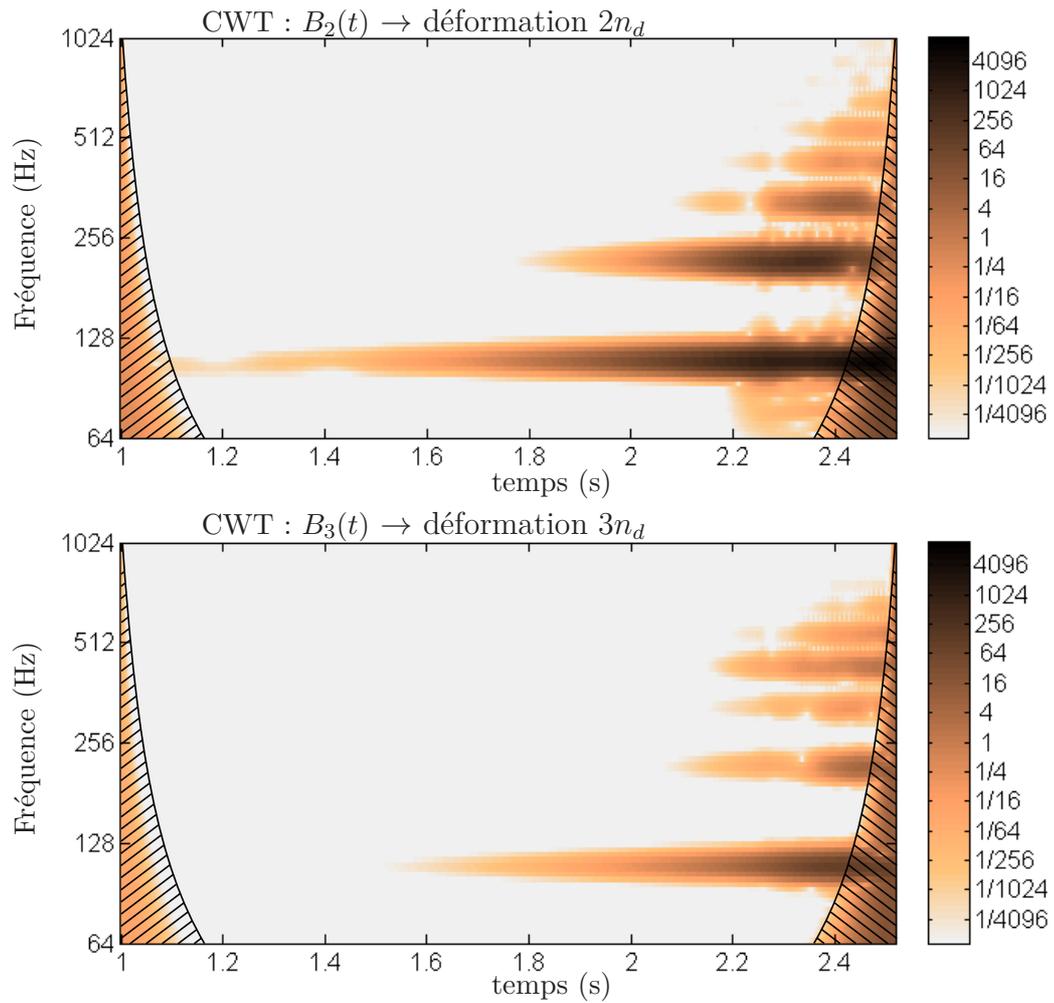


FIGURE III.46: I.T. à 4800 rpm, contenu fréquentiel en fonction du temps obtenu par transformée en ondelettes (CWT, *Continuous Wavelet Transform*)

de la déformée propre du mode $W'(1)$ dont la vitesse critique est la plus proche (voir III.10) : le déplacement du carter y est inférieur à celui du disque aubagé.

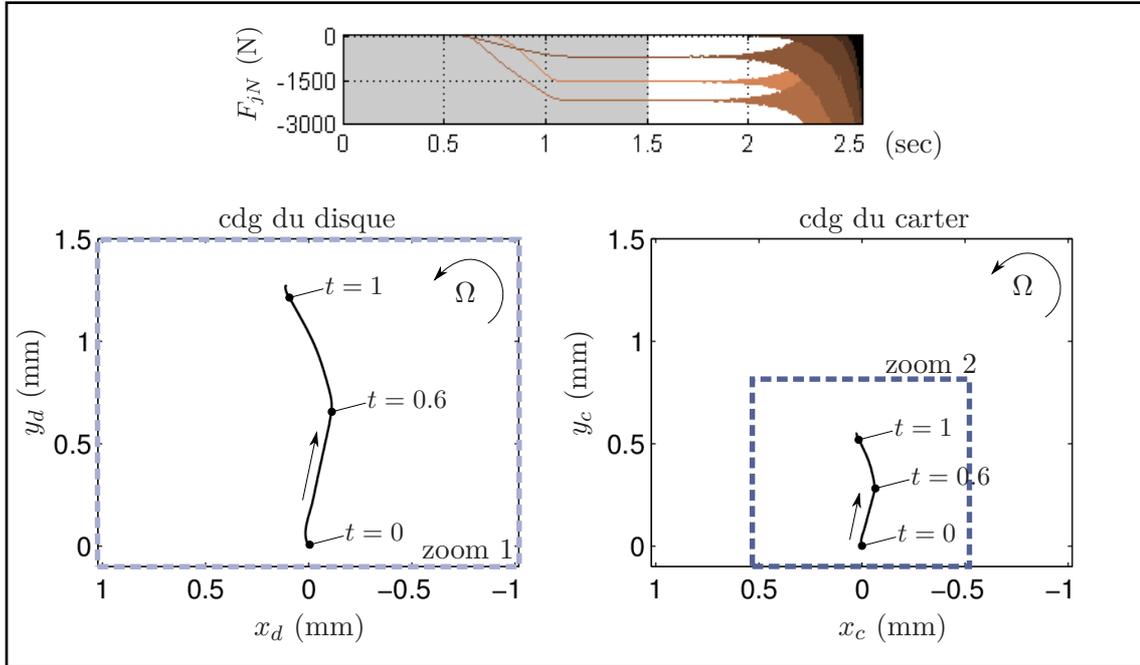
Les trajectoires de 0 à 2.55 sec tracées au-dessous, incluent ainsi les instants pour lesquels les contacts deviennent intermittents et les déplacements s'amplifient. Nous pouvons y observer des trajectoires circulaires, plus ou moins centrées sur la résultante statique de l'état pseudo-stabilisé décrit plus haut. Ces précessions asynchrones, vues dans le repère mobile, sont induites par les contacts. Elles sont directes pour les deux organes décrits, ce qui est inhabituel pour un problème de contact rotor-stator. En effet, lorsque les déplacements du disque et du carter sont pris en compte, les études rencontrées dans la littérature traitent généralement des contacts rotor-stator sans aubages (*rubbing*). Pour ces configurations, les efforts de frottement induisent une instabilité en précession rétrograde sur le rotor (voir le phénomène de *dry whirl* décrit section II.1.1) ; et les mouvements du stator, lorsqu'ils sont considérés, se traduisent de manière réciproque par une précession directe. Dans le modèle construit ici, la souplesse de la roue aubagée et du carter et le lien arbre-carter introduits, compliquent la cinématique en jeu et conduisent pour cette simulation à une précession directe du disque et du carter.

Le mouvement des centres de gravité se compose donc d'une précession directe dans le repère mobile induite par les contacts et d'une précession directe dans le repère fixe liée à la réponse au balourd. A mesure que les vibrations causées par les contacts s'amplifient, l'importance de la précession vue dans le repère mobile croît et son amplitude dépasse celle de la précession synchrone due au balourd. A $t = 2.55$ sec, le rayon de la précession du cdg du disque causée par les contacts représente plus du double du déplacement radial induit par le balourd (dont nous percevons l'amplitude grâce au cadre du tracé supérieur retranscrit sur la figure). Au même instant, le rayon de la précession du carter est moins grand que celle du disque, et ne dépasse pas la contribution statique, toujours clairement visible sur la figure.

Remarquons enfin que la précession vue dans le repère mobile n'est pas exactement centrée sur la réponse pseudo-statique obtenue à $t = 1.5$ sec : on observe un décalage progressif du centre de la trajectoire (visible particulièrement pour la trajectoire du carter). Cette contribution statique supplémentaire, observée pour des contacts intermittents, explique les écarts obtenus lorsque nous comparions figure III.42, la contribution statique du signal temporel, avec les points fixes issus de la résolution statique.

Evolution des diamètres nodaux : Pour compléter la description de cette simulation transitoire, nous observons son déroulement en termes de diamètres nodaux perçus sur la roue aubagée et le carter. Figure III.48 sont tracées les contributions des différents diamètres nodaux en fonction du temps. Les valeurs $|Q_c|$ et $|Q_f|$ tracées, traduisent les niveaux résultant d'une *fft spatiale* réalisée à chaque instant de la simulation. En effet, les diamètres nodaux caractérisent la distribution sinusoïdale des déplacements sur une structure à symétrie de révolution. Pour obtenir

Trajectoires de 0 à 1.5 sec



Trajectoires de 0 à 2.55 sec

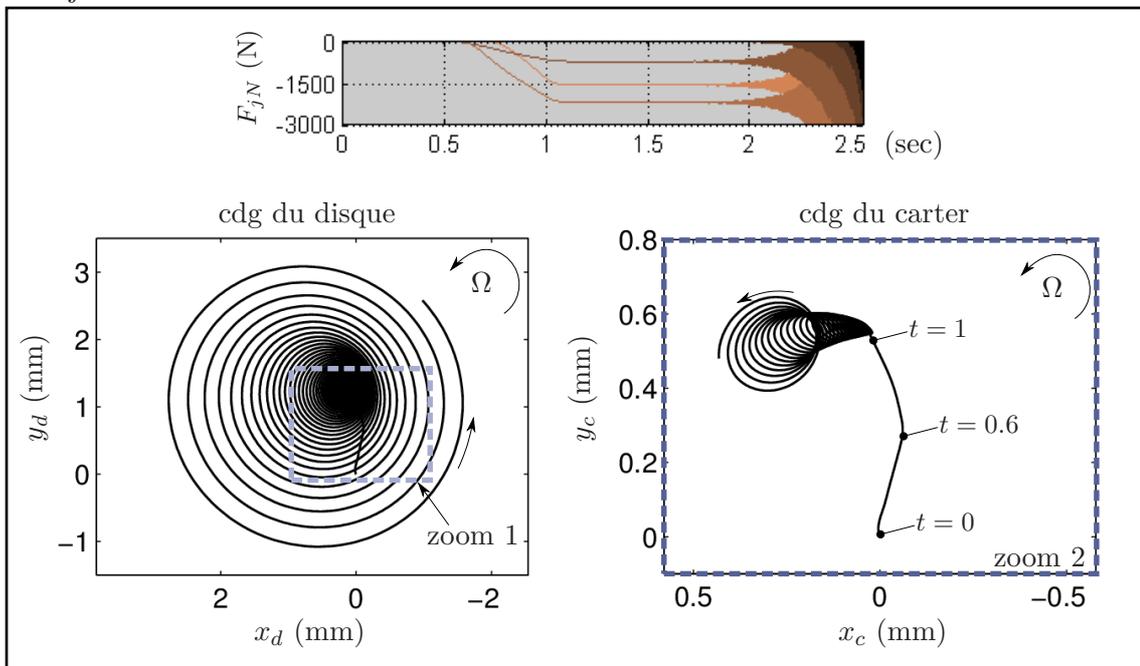


FIGURE III.47: I.T. à 4800 rpm, trajectoires des centres de gravité (cdg) du disque fan et du carter tracées dans le repère mobile

ces informations, nous calculons donc à chaque instant, la dft du signal distribué spatialement sur le carter ou la roue aubagée. Pour le carter, le signal traité correspond au déplacement radial mesuré sur 40 points répartis sur sa surface. Pour la roue aubagée, il s'agit du fléchissement mesuré à chaque extrémité des dix aubages du modèle. Notons que, si sur la roue aubagée, le signal traduit uniquement le fléchissement des aubes, pour le carter, le déplacement radial perçu se compose de la déformation à diamètres du carter et de ses déplacements de corps rigides. Ces deux sources de déplacement radial d'un point positionné sur le carter, sont dissociées par la construction même du modèle (voir section III.1.1). Les contributions du $2n_d$ et $3n_d$ proviennent des déformations de l'anneau représentatif du carter et la contribution en $1n_d$ traduit exclusivement ses déplacements de corps rigide.

Le ruban qui décrit l'évolution de la contribution du $1n_d$ au cours de la simulation, fournit ainsi une information équivalente à celle donnée par la trajectoire du centre de gravité du carter tracée figure III.47. Les contributions en 2 et $3n_d$ indiquent, comme nous l'avions évoqué précédemment, qu'en absence de contact, le carter ne se déforme pas. Ses déformations sont en effet dissociées des autres ddls du modèle. Des contributions sont obtenues dès les premiers contacts, à environ 0.6 sec, puis les niveaux associés croissent légèrement au cours de la simulation, mais restent très inférieurs à ceux du $1n_d$. Cette *dft spatiale* permet de décrire les déformations à diamètres obtenues au cours de la simulation, mais nous prive de l'information sur l'orientation des déformées à diamètres. En effet, chaque pas de temps est traité de façon distincte ce qui supprime l'information sur le caractère co ou contra-rotatif de l'onde tournante observée sur le carter et la roue aubagée.

Pour retrouver l'information sur l'orientation des ondes tournantes, nous procédons à une transformée de Fourier à deux dimensions tel que développé dans [Alm+14a]. Une *dft spatiale* est calculée à partir du spectre fréquentiel du signal, permettant ainsi, de filtrer le contenu fréquentiel en fonction des diamètres nodaux. Les diagrammes fréquences- n_d ainsi obtenus sont tracés figure III.49.

Le diagramme situé sur la partie supérieure de la figure concerne les déplacements radiaux mesurés sur le carter. Nous remarquons ainsi que les contributions principales sur le carter sont co-rotatives (diamètres nodaux positifs). Le pic le plus important apparaît à 80 Hz pour le $1n_d$ co-rotatif : il correspond à la composante synchrone liée à la réponse au balourd. En effet, pour obtenir des orientations cohérentes des ondes tournantes, nous avons mesuré les déplacements radiaux du carter depuis le repère fixe. La contribution à $1n_d$ statique dans le repère mobile se traduit donc ici par une onde directe synchrone à un diamètre nodal. Toujours sur le ruban qui décrit le contenu fréquentiel associé à l'onde $+1n_d$, nous identifions également la contribution de la vibration du mode instable identifié en statique (109 Hz) ; elle est décalée par le changement de repère et apparaît à $\Omega + f$. Cette fréquence et son harmonique $2f$ sont visibles pour l'onde contra-rotative $-1n_d$ où elles constituent les pics à $-\Omega + f$ et $-\Omega + 2f$. Si les modes à 2 et 3 diamètres nodaux du carter ne sont pas excités par les efforts de balourd, ils sont en revanche, sollicités par le glissement permanent des aubes sur la surface du carter, lors de l'état pseudo-

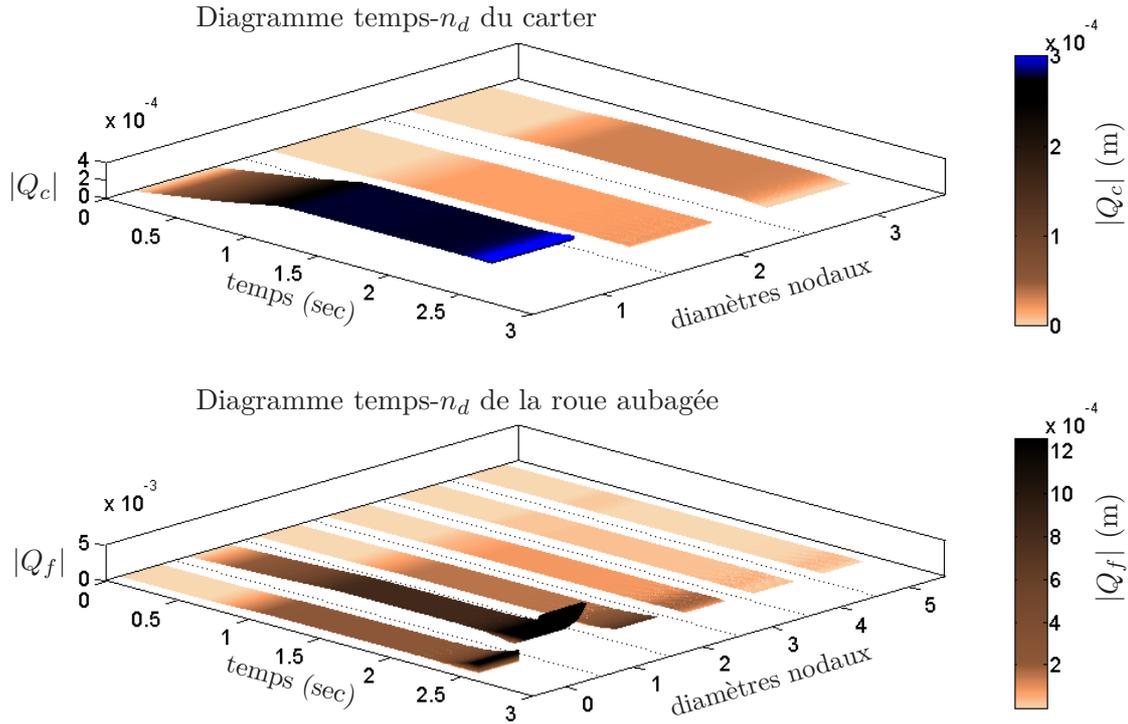


FIGURE III.48: I.T 4800 rpm, évolution des diamètres nodaux sur le carter et la roue aubagée en fonction du temps

statique décrit précédemment. Cette contribution synchrone se traduit par les pics à 2Ω et 3Ω identifiés sur les rubans respectivement associés aux ondes directes à 2 et 3 diamètres nodaux. De plus, nous identifions, comme pour le $1n_d$, la fréquence du mode instable et ses harmoniques, décalées de 2 et 3Ω sous l'effet du changement de repère. Notons enfin que la contribution à $0n_d$ est nulle : les déformations du carter sont en effet modélisées grâce à l'hypothèse d'un anneau élastique inextensible. Les contributions des diamètres nodaux supérieurs au $3n_d$ sont également nulles du fait de la modélisation choisie, qui n'inclue que les déformations à 2 et 3 diamètres nodaux.

Sur la roue aubagée, l'interprétation est plus facile car la description reste dans le repère mobile. Les contributions synchrones provenant de la réponse à balourd (pour le $1n_d$) et de l'état stabilisé de glissement permanent, apparaissent à 0 Hz. Puis, les vibrations suivant la fréquence du mode instable et de ces harmoniques sont identifiées (f , $2f$, $3f$, $4f$). La principale contribution concerne l'onde contra-rotative à un diamètre nodal ($-1n_d$). En miroir de celles observées sur le carter, les contributions les plus grandes concernent pour la roue aubagée, les ondes contra-rotatives.

L'analyse détaillée de la simulation mise en œuvre à 4800 rpm a fourni de nombreuses informations sur le déroulement de l'instabilité : l'évolution du contenu fréquentiel, des trajectoires et des déformations à diamètres du module fan. Pour élargir le spectre des comportements obtenus lorsque le système est instable, nous étudions maintenant les résultats obtenus à une vitesse différente. Pour illustrer un com-

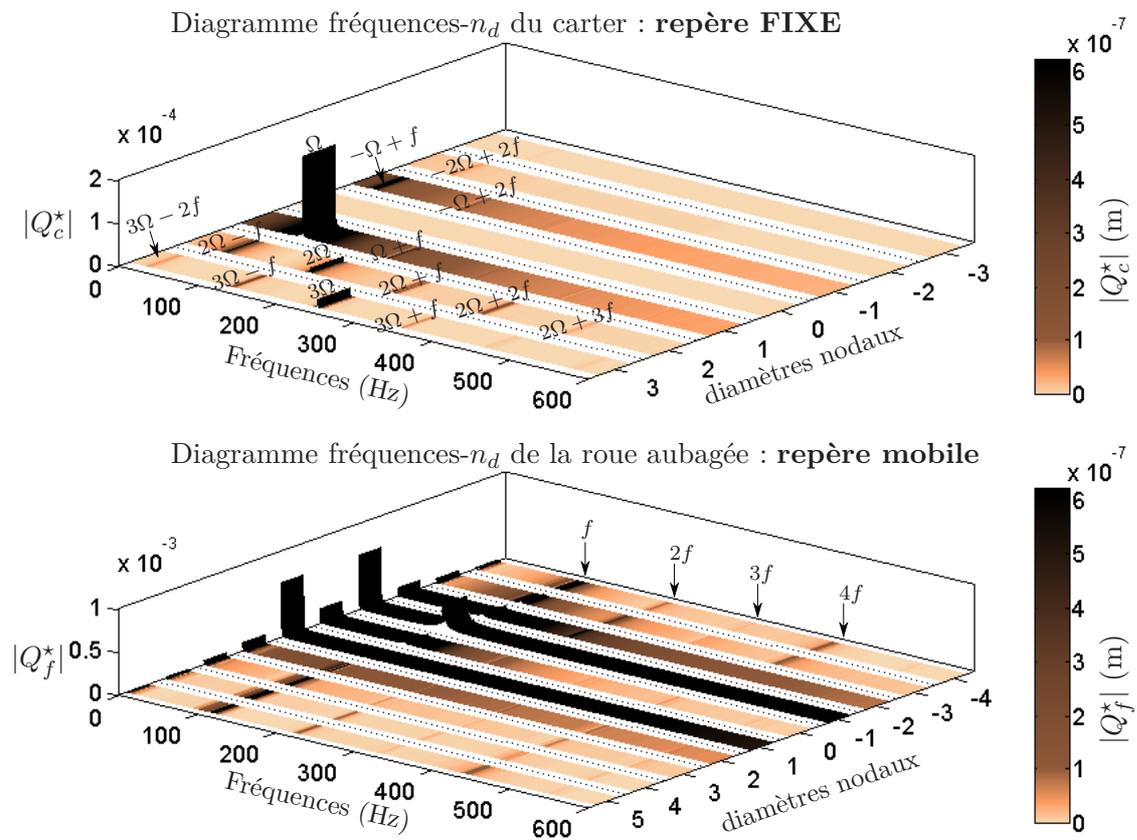


FIGURE III.49: I.T. 4800 rpm, contenu fréquentiel filtré en diamètres nodaux pour le carter et la roue aubagée

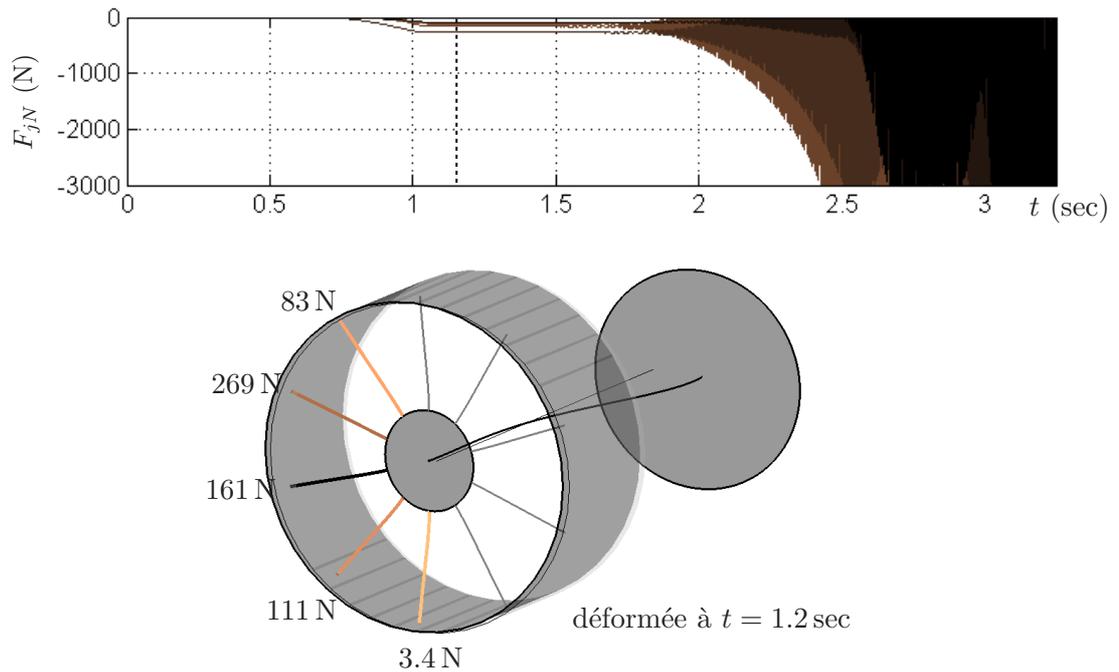


FIGURE III.50: I.T. à 7000 rpm et réactions normales de contact et déformée à $t = 1.2$ sec

portement mettant en jeu le mode associé à la seconde vitesse critique contenue dans la plage de régimes, nous décrivons les spécificités observées pour l'intégration temporelle menée à 7000 rpm.

Scénario à 7000 rpm

Evolution des configurations de contact : La figure III.50 présente l'évolution des réactions normales de contact ainsi que la déformée à $t = 1.2$ sec. Nous y observons les mêmes phases qu'à 4800 rpm, à savoir : la montée en balourd (de 0 à 1 sec) suivie d'un état pseudo-statique (de 1 à 1.5 sec) puis l'augmentation des vibrations jusqu'à l'intermittence des contacts et la divergence. La déformée à l'état pseudo-statique met en évidence la contribution du mode de turbine $W^*(7)$ dont la vitesse critique est proche (voir sa déformée modale figure III.10). Comme pour la simulation menée à 4800 rpm, le contact est établi sur la moitié de la roue aubagée et la distribution des contacts est en phase avec le déplacement radial induit par le balourd. En revanche, l'amplitude des réactions normales appliquées sur les sommets d'aube est environ 10 fois moins grande que pour la simulation menée à 4800 rpm. Le mode excité par le balourd à cette vitesse possède en effet moins d'énergie de déformation au niveau du fan et conduit donc à des niveaux de pénétration moindres.

Evolution des trajectoires : Des différences notables sont également observées dans les trajectoires décrites par les centres de gravité du carter et du disque : elles

sont dessinées figure III.51. De 0 à 1.5 sec, les trajectoires restent qualitativement similaires à celles obtenues à 4800 rpm : on observe l'augmentation progressive de la précession directe induite par le balourd et qui, dans le repère mobile, se traduit par un déplacement statique. Puis l'état pseudo-statique est obtenu jusqu'à environ $t = 1.5$ sec. Le déplacement du carter vis-à-vis de celui du disque est ici plus important que pour la simulation menée à 4800 rpm : c'est lié aux déformées des modes impliqués dans chacune de ces simulations.

Puis, de 1.5 à 2.5 sec, une précession rétrograde dans le repère mobile s'amplifie pour le disque et le carter. La trajectoire du cdg du disque est presque circulaire tandis que celle du carter est plus irrégulière : elle s'aplatit et le centre de la précession se déplace. L'observation des trajectoires à environ 3.25 sec, indiquent qu'elles divergent toutes les deux dans le sens direct : les précessions ont changé d'orientation au cours de la simulation. Les changements de sens ne sont pas simultanés. Celui du carter se produit à environ 2.9 sec ; sa trajectoire devient de plus en plus irrégulière, s'aplatit et forme un 8 pour finalement s'élargir à nouveau dans le sens direct. Disque et carter maintiennent alors des trajectoires d'orientations inverses jusqu'à environ 3.2 sec, lorsque la précession du disque change de sens de la même façon.

Evolution des diamètres nodaux : Les contributions des diamètres nodaux observées sur le carter au cours de la simulation sont tracées figure III.52 et celles associées au contenu fréquentiel sont présentées figure III.53. Les différences majeures notées entre les deux simulations concernent les déformations du carter ; pour ne pas encombrer inutilement ce document, nous présentons donc uniquement les résultats obtenus sur le carter et écartons ceux mesurés sur la roue aubagée.

En début de simulation, l'évolution de la contribution en $1n_d$ sur le carter est semblable à celle obtenue à 4800 rpm : une augmentation progressive qui traduit les déplacements du carter lors de l'application du balourd. En revanche, la répartition des contributions diffère par la suite. A 4800 rpm (voir figure III.48), les contributions en 2 et 3 diamètres apparaissent dès les premiers contacts puis évoluaient peu après la fin de l'application du balourd ; la divergence du champ de déplacements s'accompagnait principalement de l'augmentation de la contribution en $1n_d$. A 7000 rpm, la contribution des 2 et $3n_d$ est très faible lors de l'état pseudo-statique, mais elle croît en fin de simulation, lorsque les mouvements vibratoires divergent. Cette augmentation est particulièrement importante pour le $2n_d$ qui atteint un niveau de participation comparable au $1n_d$. Ainsi, à 7000 rpm, les déformées à 2 et 3 diamètres nodaux sont moins sollicitées lors du glissement permanent des aubes sur la surface interne du carter ; nous avons remarqué figure III.50, que les réactions normales associées à l'état pseudo-statique étaient de l'ordre de 10 fois inférieures à celles obtenues à 4800 rpm. En revanche, elles participent davantage, notamment pour le $2n_d$, dans les mouvements générés lors de l'instabilité.

Les mêmes conclusions sont données par le contenu fréquentiel filtré en diamètres, présenté dans la figure III.53. Comme à 4800 rpm, nous repérons le pic synchrone de

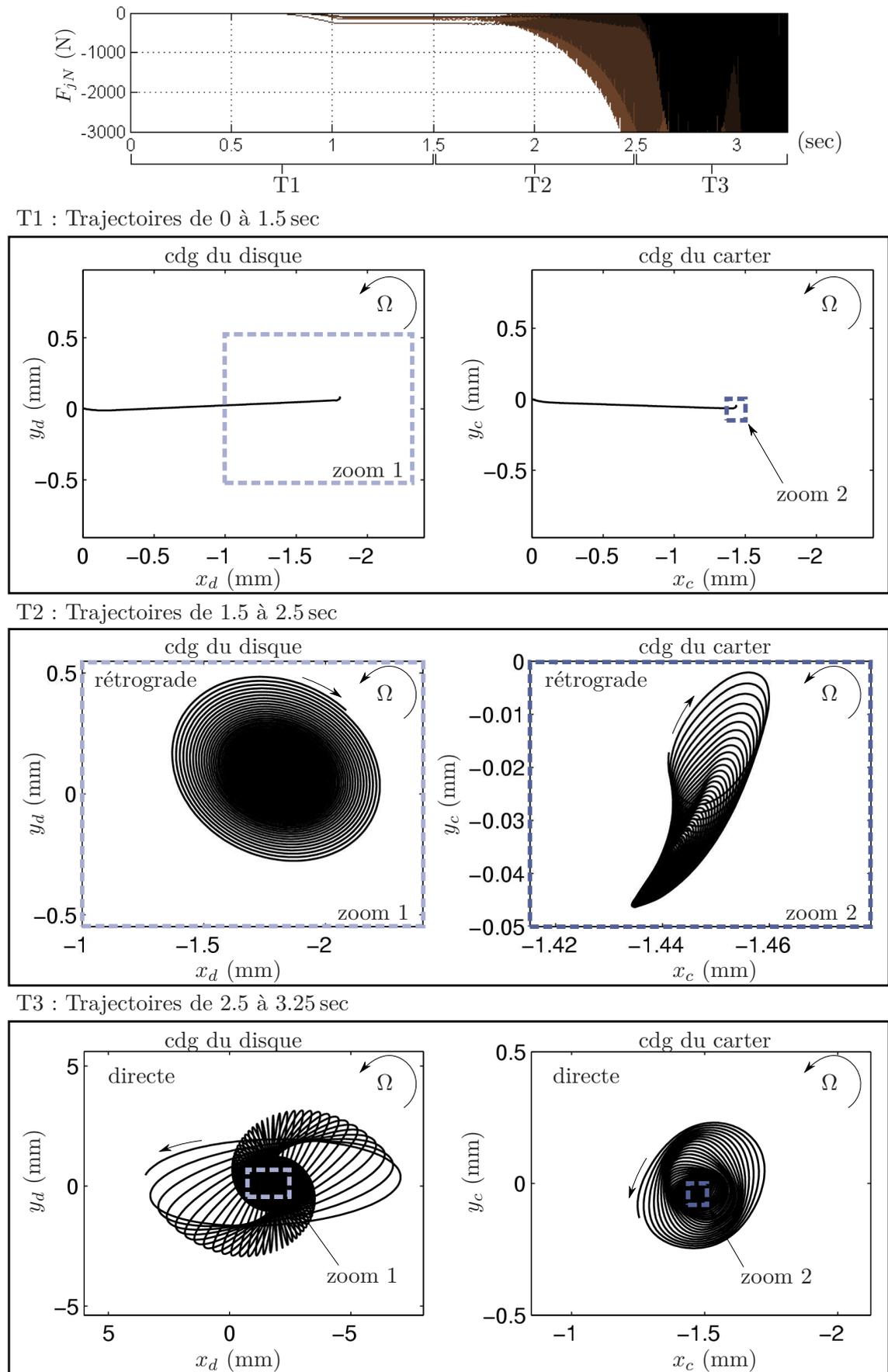


FIGURE III.51: I.T. à 7000 rpm, trajectoires des centres de gravité du disque fan et du carter tracées dans le repère mobile

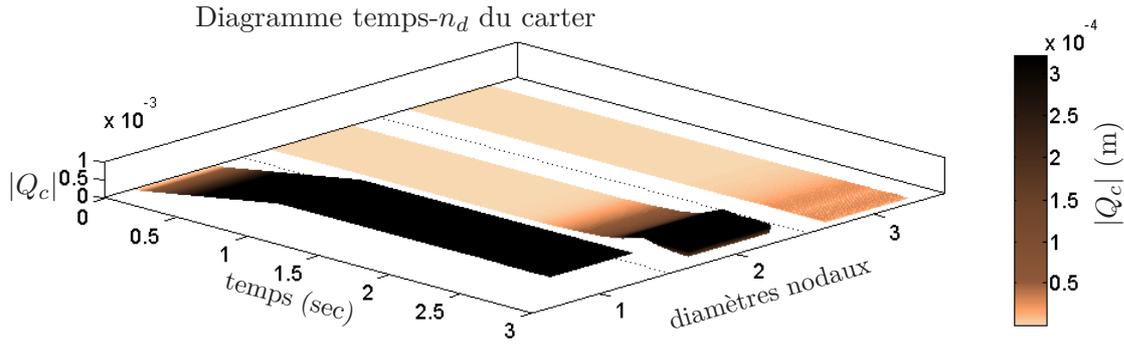


FIGURE III.52: I.T. à 7000 rpm, évolution des diamètres nodaux sur le carter en fonction du temps

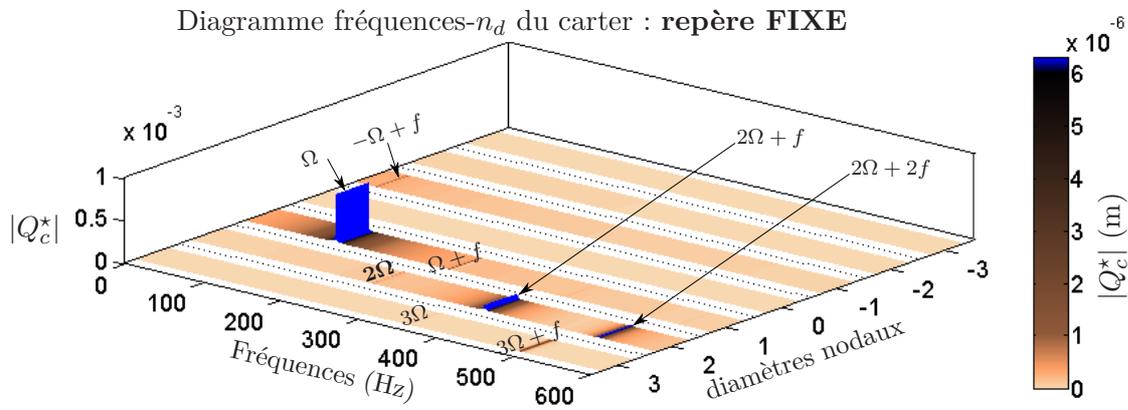


FIGURE III.53: I.T. à 7000 rpm, contenu fréquentiel filtré en diamètres nodaux (carter uniquement)

la vitesse de rotation ($\Omega = 116.7\text{Hz}$) qui traduit la contribution statique observée dans le repère mobile. En revanche, à la différence de la simulation à 4800 rpm, la contribution synchrone de la vitesse de rotation est très faible pour les diamètres 2 et $3n_d$; tandis que les niveaux à la fréquence du mode instable et ses harmoniques sont plus importants, c'est particulièrement vrai pour le $2n_d$ où ces contributions, transcrites dans le repère fixe, apparaissent à $2\Omega + f$ et $2\Omega + 2f$.

L'explication de cette forte participation de la déformation $2n_d$ du carter apparaît dans les résultats obtenus en supposant une solution de type point fixe. Nous avons en effet remarqué, figure III.31, le rôle de la coalescence F6 entre les modes $C^*(2nd)$ et $W^*(4)$ comme principal facteur déstabilisant du système.

4.4 Conclusion

Cette section a été consacrée à la mise en œuvre et l'interprétation de simulations transitoires mettant en jeu des contacts, avec décollements possibles, entre les sommets d'aube et la surface interne du carter fan.

Nous avons tout d'abord montré la concordance entre les résultats obtenus par la démarche statique développée dans la section précédente et qui suppose une configu-

ration de glissement permanent, et ceux issus des simulations transitoires. La frontière de stabilité qui délimite l'ensemble des couples jeu initial/régime pour lesquels les équilibres statiques rencontrés sont instables, a été confirmée par les intégrations temporelles. Le statut sur la stabilité est identique pour les deux méthodes et une correspondance plus quantitative est également constatée :

- Lorsque le système est stable : la simulation transitoire converge vers le champ de déplacement solution de l'équation statique.
- Lorsque le système est instable, c'est-à-dire qu'au moins une des valeurs propres calculée autour du point fixe possède une partie réelle positive, la simulation diverge et la correspondance est observée dans le contenu fréquentiel du signal temporel. Les composantes statiques correspondent au point fixe rencontré par la démarche statique ; lors de la divergence, le système vibre à la fréquence du mode le plus instable obtenu en statique (celui associé à la plus grande partie réelle).

Outre cette confirmation des résultats statiques, les simulations transitoires renseignent sur le déroulement de l'instabilité depuis les premiers contacts jusqu'à la divergence. Nous avons notamment constaté les orientations originales des précessions des centres de gravité du disque et du carter fan. Le modèle proposé ne comporte que 38 ddls, mais possède une cinématique élaborée qui prend en compte les déformations du carter, des aubes et introduit un lien élastique entre les fléchissements de l'arbre et les déplacements du carter. Toutes ces contributions conduisent à des scénarios divers associés à des précessions dont l'orientation peut même changer au cours de la simulation. Deux scénarios ont été choisis décrits dans ce chapitre, d'autres comportements ont aussi été présentés lors du congrès TurboExpo 2014 [PTC14b].

Nous verrons dans le chapitre suivant, comment la démarche a été appliquée à un modèle industriel décrivant la dynamique d'un ensemble propulsif complet.

Chapitre IV

Application industrielle

La démarche développée au chapitre précédent à partir d'un modèle simplifié, est appliquée dans ce dernier chapitre, à un modèle industriel. L'application se base sur le WEM (Whole Engine Model) d'un turboréacteur existant : ce modèle décrit le comportement dynamique de l'ensemble du moteur, du point de vue de la dynamique des rotors. Les propriétés de ce modèle industriel sont d'abord décrites, puis nous y implémentons des aubes et un carter flexibles, tels que ceux définis pour le modèle simplifié. La formulation 3D du contact, développée au chapitre précédent est alors introduite et la stabilité du système soumis aux contacts aube-carter est étudiée.

Sommaire

1	Description du modèle sans contact	151
1.1	Dynamique linéaire du WEM 1D	151
1.2	Implémentation des aubes et du carter souples	156
2	Prédiction de la stabilité lors de contacts aube-carter	160
2.1	Stabilité en contact permanent : jeux fixés	160
2.2	Etudes d'influences et outils de conception d'un système stable	164
3	Conclusion	167

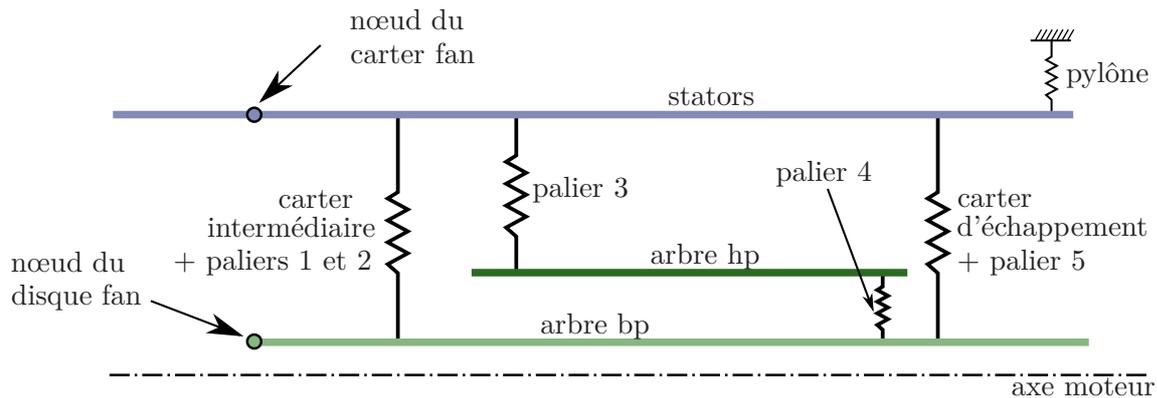


FIGURE IV.1: Vue schématique du *WEM* 1D d'un moteur bi-rotor

L'étude s'appuie sur le *WEM* d'un turboréacteur existant. Il se compose d'éléments poutre, de liens de raideur et de masses ponctuelles centrés sur l'axe moteur : on parle donc de modèle 1D. Les principaux organes du modèle sont schématisés dans une visualisation éclatée proposée figure IV.1. La géométrie du modèle y est fortement simplifiée.

L'arbre bp se compose d'une succession de masses ponctuelles représentatives de l'inertie apportée par chacun des étages aubagés. Elles sont accrochées aux éléments poutres représentatifs de l'arbre ou à des liens souples, selon la géométrie des pièces considérées. Nous repérons sur le schéma, le nœud représentatif du disque fan. L'arbre bp est connecté aux éléments fixes du moteur à l'amont et l'aval : la connexion amont est réalisée à travers les éléments de raideur représentatifs des paliers 1 et 2 et des bras du carter intermédiaire ; la connexion aval est assurée de la même façon par les éléments représentatifs du palier 5 et des bras du carter d'échappement. L'arbre bp est enfin lié à l'arbre hp, de vitesse de rotation plus grande, par l'intermédiaire du palier 4 : il s'agit du palier inter-arbre. L'arbre hp est de même constitution que celui basse pression, outre la connexion assurée par le palier inter-arbre. Il est lié aux stators par le palier 3 situé à l'amont.

Les éléments non-tournants du moteur sont aussi représentés. Nous repérons notamment le nœud représentatif du carter fan, qui se situe à la même abscisse que celui du disque. Le carter fan est connecté à la manche d'entrée d'air (*inlet*) à l'amont et au carter intermédiaire à l'aval, par des liens de raideur représentatifs des brides boulonnées. L'ensemble de la nacelle est représenté et le système est encasté à l'extrémité du pylône (le point d'accrochage sur l'avion). Le *WEM* permet ainsi d'étudier le comportement dynamique de l'ensemble propulsif complet, tel qu'il sera accroché à l'avion.

Chacun des nœuds du modèle comporte 4 ddls : les translations et les basculements dans les deux directions transverses à l'axe moteur. Les déplacements longitudinal et de torsion suivant l'axe moteur sont écartés. Le modèle considéré possède ainsi la même cinématique que celle attribuée à l'arbre et aux ddls de corps rigide du carter dans le modèle simplifié (voir section III.1.1). Notons que le modèle considéré comporte environ 250 nœuds, soit 1000 ddls.

Comme c'est généralement le cas en dynamique des rotors, le système est décrit dans le repère fixe. Il présente néanmoins l'avantage d'être parfaitement axisymétrique, nous permettant d'étudier son comportement indifféremment depuis le repère fixe ou mobile (voir section I.3.2). Une fois son comportement décrit, nous pourrons ainsi le transposer dans le repère mobile pour y implémenter les éléments développés grâce au modèle simplifié, à savoir : des aubes fan flexibles et un carter fan déformable (section III.1.1), ainsi que les contacts aube-carter par la formulation dite $3D$ (section III.2).

Notons que les mises en données utilisées pour cette application ne seront pas communiquées dans ce mémoire et les résultats obtenus avec ce modèle seront normalisés.

1 Description du modèle sans contact

Cette section décrit le comportement dynamique du modèle industriel utilisé. Dans un premier temps, nous décrivons la façon dont le modèle industriel a été adapté pour faciliter la mise en œuvre de la démarche développée précédemment : le modèle est condensé et une formulation équivalente est adoptée pour caractériser son amortissement. Les aubes et le carter flexibles sont alors introduits et leur effet sur son comportement dynamique (sans contacts) est évalué.

1.1 Dynamique linéaire du *WEM* 1D

La difficulté principale rencontrée dans la manipulation du modèle industriel a été de correctement traduire la formulation de l'amortissement.

En effet, dans le modèle considéré, l'amortissement introduit est de type hystérétique (on parle aussi d'amortissement structural). Pour cette formulation, les efforts dissipatifs dépendent de l'amplitude de la déformation et sont introduits par une matrice de rigidité complexe : $\mathbf{K}(1 + i\eta)$. Cette formulation est adaptée à l'analyse fréquentielle car la dissipation y est indépendante de la fréquence du mouvement périodique. En revanche, elle ne convient pas pour une étude dans le domaine temporel, où elle conduit à un système non-causal [Pre90], [AM02]. Outre la réalisation des simulations transitoires, cette formulation hystérétique complique également la transposition du modèle du repère fixe au mobile : les termes circulatoires de l'amortissement ne sont pas naturellement construits lors du changement de repère.

Nous choisissons donc de transformer cet amortissement hystérétique en un amortissement visqueux équivalent, pour lequel l'effort dissipatif est proportionnel à la vitesse du mouvement. Notons que l'amortissement hystérétique considéré n'est pas uniforme à l'ensemble du modèle, des facteurs d'amortissement distincts sont attribués aux différents organes :

$$\mathbf{K} + i\mathbf{K}_h = \sum (1 + i\eta_j)\mathbf{K}_j \quad (\text{IV.1})$$

La matrice d'amortissement visqueux équivalente est construite à partir des amortissements modaux obtenus à l'arrêt :

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\omega_i\xi_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ avec } 2\omega_i\xi_i = \frac{1}{w_i}\Phi_i^T\mathbf{K}_h\Phi_i \quad (\text{IV.2})$$

où ω_i et Φ_i sont les pulsations et vecteurs propres du système. Le retour dans la base physique permet alors d'obtenir la matrice visqueuse correspondante :

$$\mathbf{D} = \Phi^{-T}\mathbf{D}_m\Phi^{-1} = \mathbf{M}\Phi\mathbf{D}_m\Phi^T\mathbf{M} \quad (\text{IV.3})$$

Cette traduction de l'amortissement, qui ne pourrait être exacte qu'à l'arrêt, est compliquée dans notre cas par les spécificités du modèle. En effet, des coefficients d'amortissement hystérétique distincts sont attribués à différentes parties du modèle et la matrice d'amortissement modale n'est donc pas diagonale : une partie de l'amortissement sera ainsi négligée lors du calcul de la matrice équivalente visqueuse. De plus, tous les ddls du modèle ne sont pas alimentés en masse, la matrice de masse du système est donc singulière et la base modale est tronquée : tous les ddls ne seront donc pas alimentés en amortissement visqueux. Ces difficultés propres au caractère industriel du modèle, nous contraignent à corriger localement la matrice d'amortissement visqueux équivalent.

Pour faciliter sa manipulation et réduire les temps de calcul, le modèle est également condensé. La démarche de condensation et le choix de la méthode ont été réalisés dans le cadre du master de Raphaël Massieux [Mas11]. La méthode de Guyan a été retenue pour sa simplicité de mise en œuvre et parce que le modèle, dont certains ddls ne sont pas alimentés en inertie, s'y prête particulièrement. La condensation de Guyan, également appelée condensation statique, s'appuie en effet sur le principe de négliger les efforts d'inertie associés à certains des ddls du modèle.

L'équation matricielle du système complet peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_m \\ \ddot{\mathbf{q}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{mm} & \tilde{\mathbf{D}}_{ms} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{sm} & \tilde{\mathbf{D}}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_m \\ \dot{\mathbf{q}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{mm} & \tilde{\mathbf{K}}_{ms} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{sm} & \tilde{\mathbf{K}}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

où le vecteur des coordonnées généralisées \mathbf{q} est organisé suivant les ddls *maîtres* (indiqués par l'indice m) et les ddls *esclaves* (indiqués par l'indice s). L'hypothèse adoptée ici pour simplifier la formulation du système réduit, est de choisir les nœuds esclaves parmi les nœuds du système qui ne subissent pas de chargement extérieur : $\mathbf{F}_s = \mathbf{0}$. Pour exprimer les ddls *esclaves* \mathbf{q}_s , à partir des ddls *maîtres*, la partie inférieure de l'équation (IV.4) est résolue en négligeant les effets dynamiques :

$$\mathbf{q}_s \approx -\tilde{\mathbf{K}}_{ss}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_{sm}\mathbf{q}_m \quad (\text{IV.5})$$

La condensation du modèle correspond ainsi à la transformation associée à la matrice de passage \mathbf{H} suivante :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{K}}_{ss}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_{sm} \end{bmatrix} \mathbf{q}_m = \mathbf{H}\mathbf{q}_m \quad (\text{IV.6})$$

L'équation du système réduit est alors obtenue en introduisant (IV.6) à l'équation du système (IV.4) et en pré-multipliant par \mathbf{H}^T :

$$\mathbf{H}^T \mathbf{M} \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{H}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{H} \mathbf{q}_m = \mathbf{F}_m \quad (\text{IV.7})$$

La réduction proposée par [Mas11] divise environ par dix la taille du modèle et conduit à un modèle réduit comportant une centaine de ddls.

Pour décrire les propriétés du modèle industriel et évaluer l'effet des modifications apportées, nous traçons figure IV.2 le diagramme de Campbell et la réponse harmonique à un balourd, obtenus pour deux configurations du même modèle :

- Les résultats dits *de référence* proviennent directement du logiciel Eléments Finis (EF) dans lequel le modèle est construit ; aucune modification n'est apportée.
- Les résultats affectés au *modèle utilisé* sont obtenus pour un modèle condensé et dont l'amortissement est visqueux équivalent. Il s'agit du modèle sur lequel s'appuieront les calculs menés dans la suite de ce chapitre.

Pour ne pas encombrer ce document, les effets de la condensation et de la modification de l'amortissement sont présentés conjointement. Notons que lors de la construction du modèle industriel utilisé, chacune des étapes depuis l'extraction du modèle depuis le logiciel EF jusqu'à la transposition dans le repère du rotor bp, ont été vérifiées séparément. L'extraction du modèle et la transposition dans le repère mobile n'ont aucun impact sur les propriétés dynamiques ; la condensation et la transformation de l'amortissement induisent des écarts jugés acceptables.

Les deux premiers couples de modes dont les fréquences propres à 0 rpm se situent respectivement à 0.25 et 0.9, sont des modes dits de suspension. Le potentiel de déformation associé concentre plus de 95 % de son énergie dans les parties fixes et tout particulièrement au niveau de la suspension du pylône (voir figure IV.1). Les effets gyroscopiques n'ont que peu d'effet sur leurs fréquences propres (les branches des modes directs et rétrogrades s'ouvrent peu). Le couple des modes 5 et 6, dont la fréquence propre à 0 rpm est d'environ 2.2, impliquent davantage les éléments tournants dans leur déformée, mais concentrent toujours plus de 80 % de leur potentiel de déformation dans les éléments fixes du moteur.

Les modes 7 et 8 sont les premiers à associer près de 50 % de leur potentiel de déformation aux éléments de l'arbre bp. Il s'agit du couple des modes *fan*, qui impliquent des mouvements importants au niveau du module fan et sont donc de toute première importance pour notre étude. Rappelons que le Campbell est ici tracé dans le repère fixe, les branches croissantes appartiennent donc aux modes directs et les vitesses critiques sont indiquées par le croisement avec la synchrone bp tracée en pointillés (voir section I.3.2). La vitesse critique du mode 8 (le mode fan direct) est ainsi à l'origine du plus haut niveau de réponse mesurée au nœud du disque fan, à un balourd appliqué au même nœud.

Les modes 9 et 10 sont les modes dits, *de turbine bp*. Comme les modes 7 et 8, ils concentrent une grande partie de leur énergie de déformation dans l'arbre bp, mais

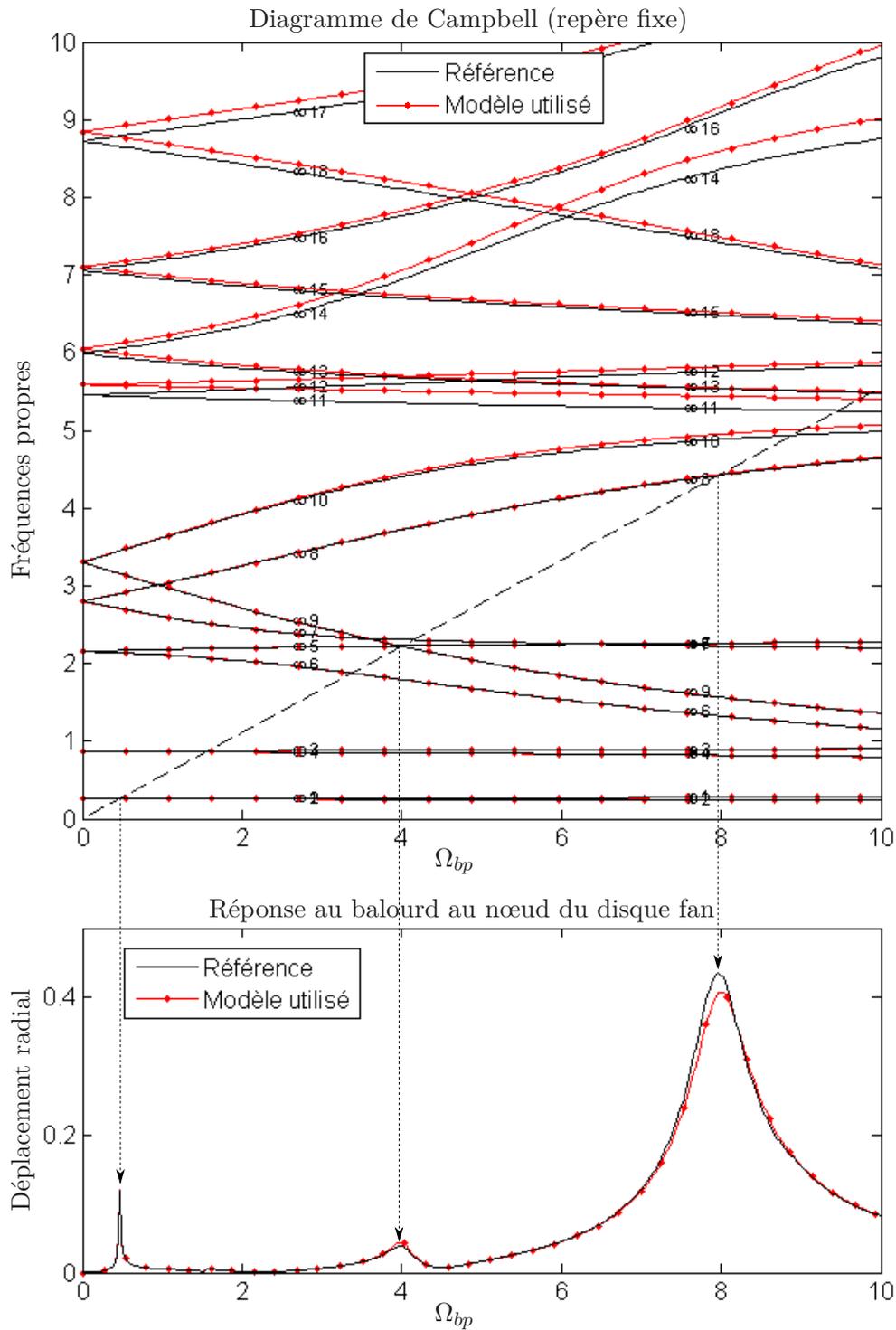


FIGURE IV.2: Diagramme de Campbell (repère fixe) et réponse au balourd du modèle industriel : comparaison entre le modèle extrait (complet et amortissement hystérique) et celui utilisé (condensé et amortissement visqueux)

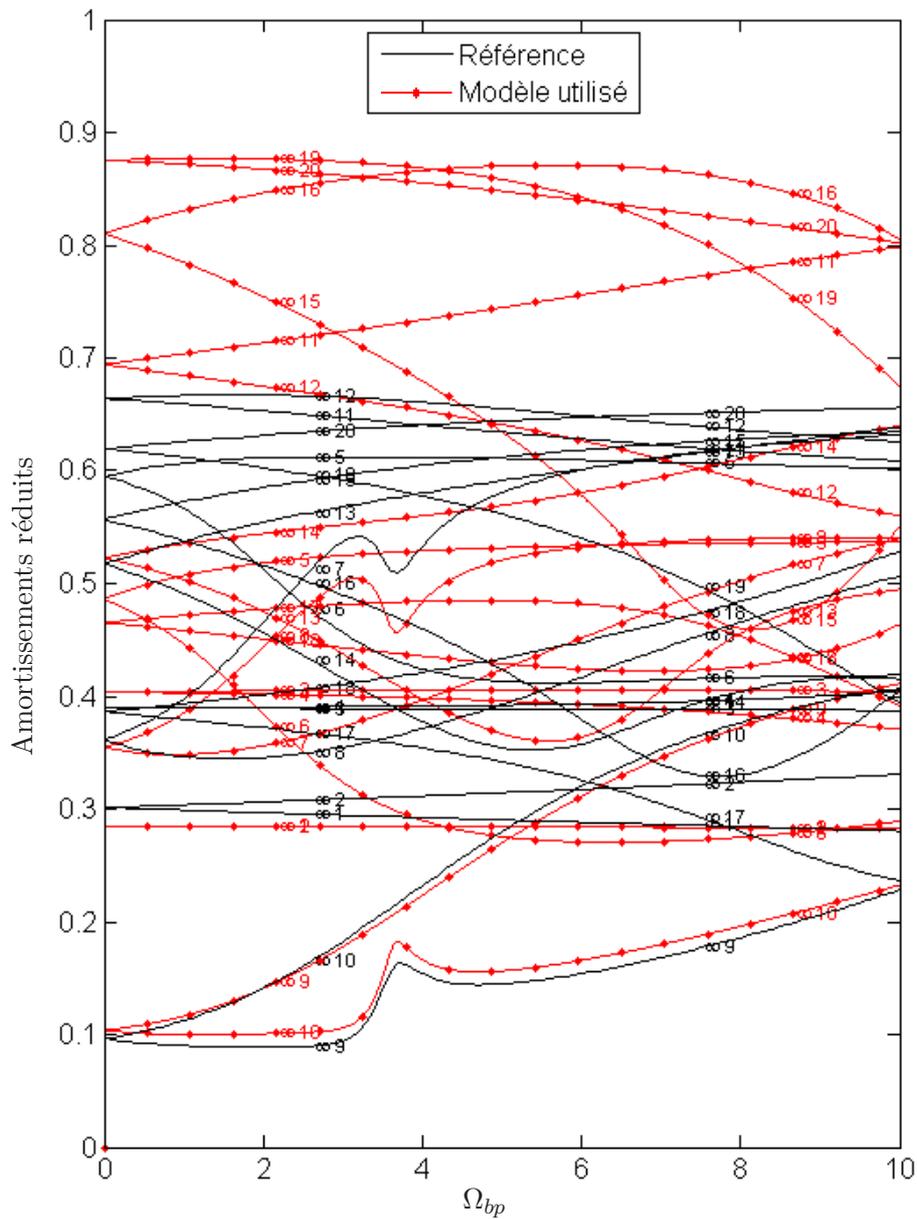


FIGURE IV.3: Amortissements réduits : comparaison entre le modèle extrait (complet et amortissement hystérique) et celui utilisé (condensé et amortissement visqueux)

font intervenir principalement les éléments situés au niveau de la turbine (à l'aval du moteur). Le mode 10 (mode de turbine direct) est donc peu excité par un balourd appliqué au fan et sa vitesse critique ne correspond à aucun pic pour la réponse mesurée au niveau du disque fan.

Pour ces dix premiers modes, les écarts sur les fréquences propres ne dépassent pas 0.2 % à l'arrêt, et atteignent 1.6 % pour le mode 10 à $\Omega_{bp} = 10$. Les modes 11 à 17, de fréquences propres plus élevées, impliquent des fléchissements plus complexes de l'arbre bp et/ou à la participation de l'arbre hp. Aucune de leurs vitesses critiques n'est contenue dans la plage de régimes étudiée et des écarts plus importants sont donc tolérés pour ces modes : une différence de 2.5 % est mesurée à l'arrêt pour les modes 11 et 12, et les écarts atteignent 3.3 % pour le mode 14 à $\Omega_{bp} = 10$.

Pour la réponse harmonique à un balourd fan, le niveau obtenu à la vitesse critique du mode fan est inférieur de 6.3 % pour le modèle condensé et dont l'amortissement est transformé. Les analyses menées dans le cadre de la thèse s'apparentent davantage à une étude de faisabilité qu'à un véritable dimensionnement industriel ; ces écarts de niveaux sont donc tolérés, mais une meilleure corrélation pourrait être obtenue en optimisant les termes correctifs de l'amortissement visqueux équivalent.

Les écarts sur les facteurs d'amortissement modaux, principalement induits par cette transposition de l'amortissement d'hystérétique à visqueux, sont visibles figure IV.3 ; où les amortissements modaux des vingt premiers modes sont tracés. Notons que, comme tous les résultats de ce modèle industriel, les amortissements réduits sont normalisés. Des différences importantes apparaissent entre les amortissements modaux issus du modèle de référence et ceux obtenus avec le modèle que nous utiliserons dans la suite. Cela illustre la difficulté de décrire par deux formulations distinctes, des propriétés de dissipation identiques et ce, sur une large plage de régimes. Remarquons néanmoins que les amortissements modaux présentent une évolution avec le régime, semblable pour les deux formulations de l'amortissement. De plus, pour les dix premiers modes, les écarts atteignent 20 % au maximum (pour les modes 5 et 6) et ne dépassent pas 6.5 % pour le mode fan direct. Ce mode est ainsi légèrement plus amorti par rapport au modèle de référence, ce qui explique le niveau de réponse harmonique plus faible, obtenu figure IV.2, à sa vitesse critique ($\Omega_{bp} \approx 8$).

Les propriétés modales du modèle industriel sont ainsi décrites et les effets des modifications apportées pour faciliter la manipulation du modèle, sont maintenant connus et tolérés. Nous poursuivons donc la démarche en introduisant, comme pour le modèle simplifié, des aubes et un carter souples.

1.2 Implémentation des aubes et du carter souples

Même si la densité modale est plus grande, le WEM industriel et le modèle simplifié dans sa configuration « WEM » possèdent des propriétés très semblables. En effet, chacun des nœuds du modèle industriel possède la même cinématique

que celle attribuée, dans le modèle simplifié, aux sections droites de l'arbre et aux déplacements de corps rigide du carter, à savoir : les deux translations et les deux basculements contenus dans le plan transverse à l'axe moteur.

Le nœud du disque fan, auquel nous connectons les aubes flexibles, possède les mêmes ddls que le disque fan du modèle simplifié. L'implémentation est donc directement menée à partir de la mise en équation développée en section III.1.1. Les aubes sont modélisées par des poutres d'Euler-Bernoulli de section rectangulaire constante et comportant une seule direction de fléchissement. La fonction de Rayleigh qui exprime la distribution des déplacements le long de la poutre est reprise (voir équation (III.20)) et les formes énergétiques également (voir équations : (III.12), (III.17), (III.18), (III.19)). La seule différence avec le modèle construit section III.1.1, consiste en réalité, en une simplification : les ddls du disque fan n'ont ici pas besoin d'être discrétisés grâce aux fonctions de forme de l'arbre (équations (III.8) et (III.9)); $x_d(t)$, $y_d(t)$, $\phi_{x_d}(t)$ et $\phi_{y_d}(t)$ correspondent pour le modèle EF industriel aux 4 ddls attribués au nœud du disque. L'implémentation des aubes flexibles s'accompagne d'une correction des termes d'inertie associés aux ddls du disque. Même si elles ne sont pas souples, les aubes fan sont en effet, bien présentes dans le WEM industriel à travers leur masse et propriétés d'inertie en rotation. Il faut donc retrancher ces termes lors de l'implémentation des aubes souples.

Nous avons constaté section III.1.1, que les coordonnées généralisées qui expriment les déformations à diamètres nodaux du carter sont dissociées de ses déplacements de corps rigide. L'implémentation des déformées à diamètres du carter au WEM industriel, est donc immédiate : nous introduisons les degrés de libertés et les termes matriciels définis dans les équations (III.25), (III.26), (III.32), (III.34), (III.36) et (III.40).

Le système transposé dans le repère mobile (bp) et auquel des aubes souples et les déformées à 2 et 3 diamètres du carter sont implémentés, peut alors être étudié. Notons que la déformabilité du carter est introduite de manière simplifiée : au travers des modes à diamètres d'un anneau élastique inextensible. Ce modèle de carter déformable est ainsi parfaitement axisymétrique et ne possède pas de conditions aux limites sur ces degrés de liberté de déformation. Le diagramme de Campbell (décrit dans le repère mobile) et la réponse à balourd au disque fan sont tracés figure IV.4. Nous y comparons les résultats du modèle aux aubes et carter rigide avec ceux du modèle comportant des aubes fan flexibles et des modes à diamètres du carter. Notons que les résultats aubes et carter rigides, tracés en traits continus noirs sur la figure IV.4, sont associés au WEM condensé et dont l'amortissement est rendu visqueux (voir section IV.1.1). Les résultats obtenus sont de même nature que ceux décrits section III.1.2 pour le modèle simplifié complet. Comme précédemment, les modes à diamètres du carter et de roue aubagée sont notés respectivement C et B.

Nous repérons tout d'abord, l'apparition des modes à deux et trois diamètres nodaux du carter, identifiés par $C(2n_d)$ et $C(3n_d)$. Ils sont découplés du reste du modèle et n'ont ainsi aucun effet sur les branches des autres modes tracés sur le

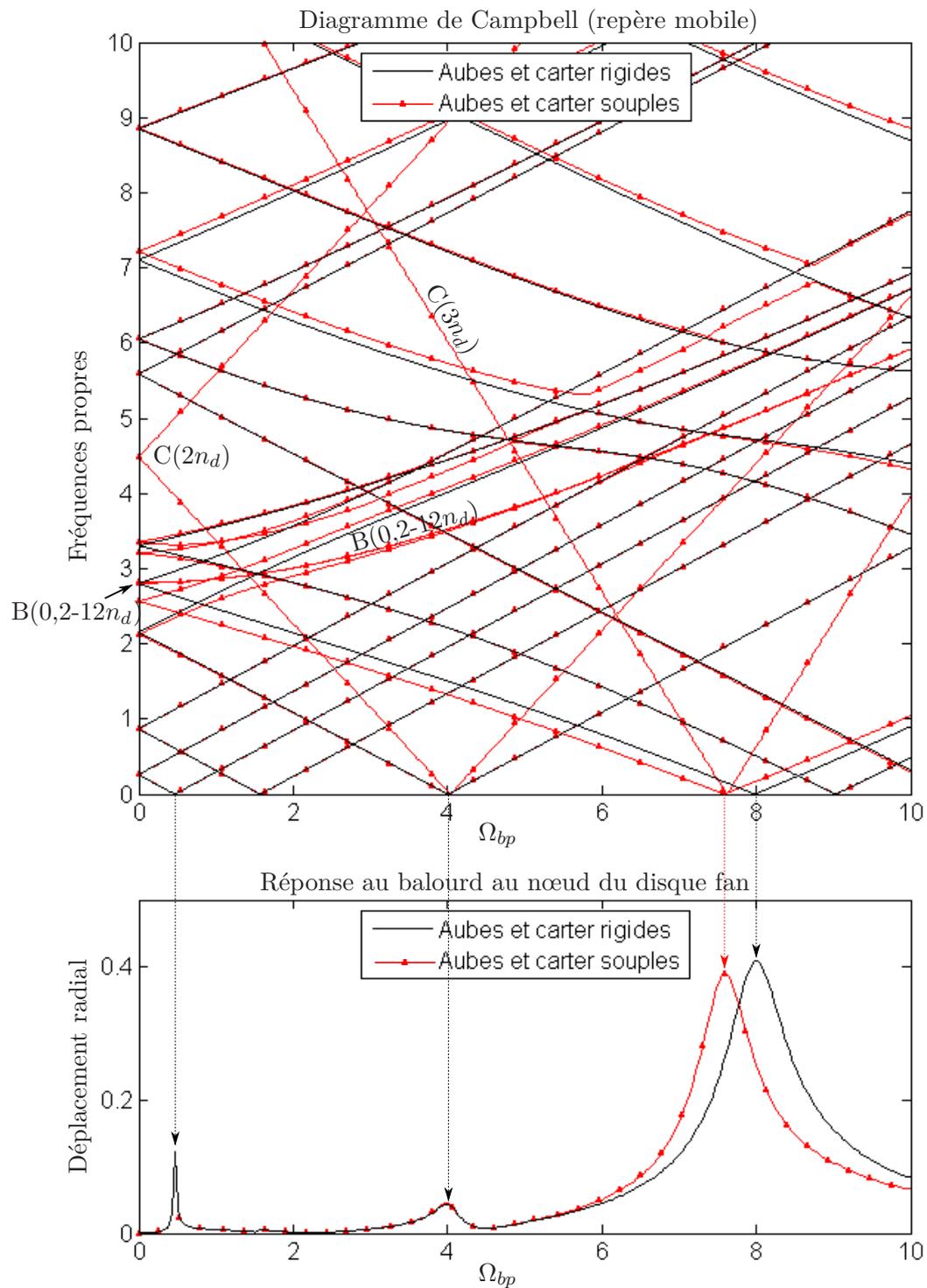


FIGURE IV.4: Diagramme de Campbell (repère mobile) et réponse au balourd du modèle utilisé avec et sans aubes et carter souple

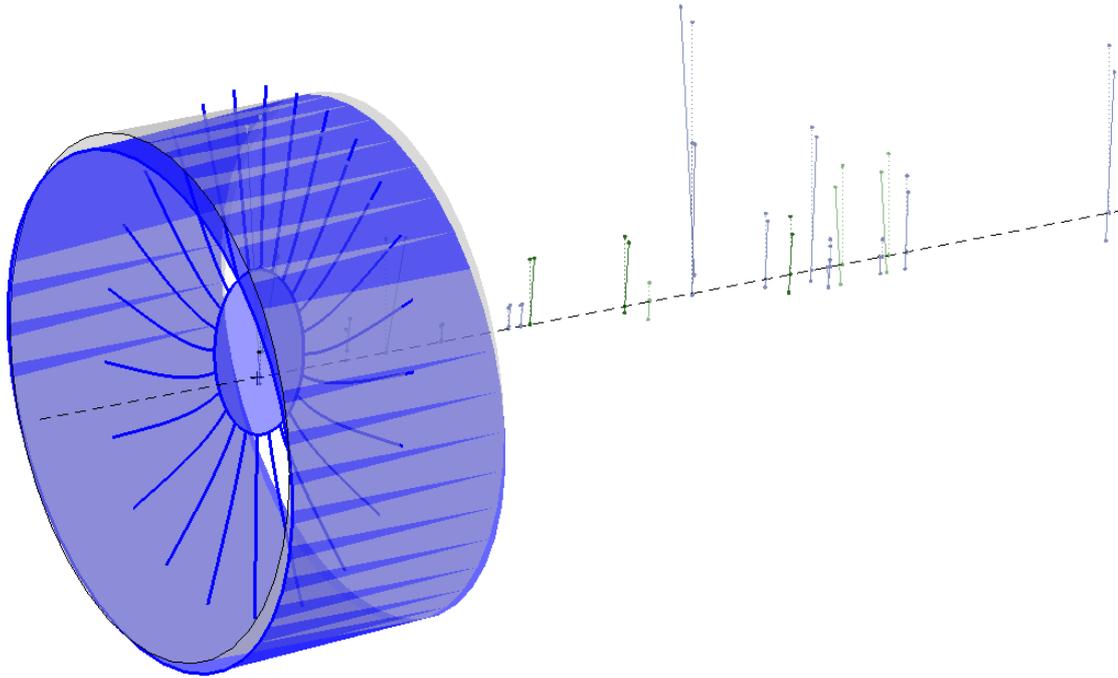


FIGURE IV.5: Déformée du mode fan à 0 rpm

Campbell ; ils ne sont pas non plus excités par le balourd et n'ont aucun impact sur la réponse tracée au bas de la figure.

L'impact des aubages flexibles est en revanche notable et leur implémentation produit les mêmes effets que ceux identifiés pour le modèle simplifié ; ils découlent du couplage entre les modes à un diamètre nodal ($1n_d$) de la roue aubagée avec les modes d'ensemble. L'identification et l'explication détaillée de l'impact des aubes souples sur les modes d'ensemble sont données section III.1.2. Nous ne retranscrivons donc ici que brièvement les effets identifiés. Nous observons ainsi, dès 0 rpm, le couple des modes *fan* s'ouvrir et s'associer au couple des modes $B(1n_d)$. Le « paquet » des modes de roue aubagée ne comprend plus que le mode à zéro diamètre nodal et les modes de 2 à 12 diamètres, dont la cinématique est incompatible avec celle du disque fan. La déformée du mode fan dessinée figure IV.5 fait apparaître la participation de la déformée à un diamètre nodal sur la roue aubagée. Le module fan (roue aubagée et carter) y est dessiné de la même façon que pour le modèle simplifié ; les nœuds *maîtres* du reste du modèle ne sont dessinés qu'à travers leur rayon de visualisation : les translations et basculements du segment vertical illustrent le mouvement de la pièce axisymétrique, modélisée par le nœud considéré. L'impact sur le mode fan se traduit également sur sa vitesse critique réduite de 5%. La réponse au balourd est ainsi fortement affectée par ce décalage.

Comme pour le modèle simplifié, le WEM industriel ainsi enrichi possède des modes globaux qui constituent naturellement des interactions à un diamètre nodal faisant intervenir la roue aubagée et l'ensemble des éléments des rotors bp, hp et stators. Ne sont exclus de ces déformées globales que les modes à diamètres 2 et 3 sur le carter et les modes de roue aubagée à 0, 2-12 diamètres nodaux.

Cette section nous a permis de présenter le modèle industriel utilisé et les transformations qui lui ont été appliquées. Les éléments structuraux supplémentaires ont été implémentés (aubes et carter flexibles) en définissant leur mise en donnée à partir des modèles industriels 3D existants. La comparaison des propriétés dynamiques réalisée aux différentes étapes de transformation puis lors de l'enrichissement du modèle permet de valider la démarche et de retrouver les couplages en $1n_d$ décrits pour le modèle simplifié (voir section III.1.2).

Il s'agit maintenant d'implémenter la formulation $3D$ du contact, développée en section III.2, pour caractériser la stabilité du système lors de contacts aubes-carter.

2 Prédiction de la stabilité lors de contacts aube-carter

Les avantages de la formulation $3D$ du contact par rapport à la formulation $2D$, plus simple, ont été montrés au chapitre précédent. Nous implémenterons donc ici exclusivement cette formulation $3D$. Rappelons que, pour cette formulation, la fonction de distance minimum qui assure la détection des touches considère la cinématique $3D$ du module fan et introduit certains éléments de la géométrie $3D$ de la zone de contact (voir section III.2.1). De plus, les efforts de contact appliqués au modèle traduisent la façon dont le contact est distribué sur la corde en sommet d'aube (voir section III.2.2).

Notons également que seuls les résultats obtenus par la démarche statique sont présentés dans ce chapitre. Cette démarche s'appuie sur l'hypothèse d'une solution de type point fixe (pour le système décrit dans le repère mobile bp), qui suppose que les sommets d'aube sont en glissement permanent sur la surface interne du carter. Les efforts de contact non linéaires sont donc pris en compte dans une équation algébrique (voir équation (III.67)). Puis, la stabilité du point fixe solution est étudiée localement par un calcul de valeurs propres (voir équation (III.68)). Ces résultats statiques ont été confirmés, au chapitre précédent, par la mise en œuvre de simulations transitoires qui autorisent l'intermittence des contacts. Les conclusions des simulations transitoires menées sur ce modèle industriel sont similaires et ne seront donc pas présentées dans ce mémoire.

2.1 Stabilité en contact permanent : jeux fixés

Pour débiter l'analyse de la stabilité en contact aube-carter sur le modèle industriel, nous réalisons un calcul semblable à celui décrit figure III.31, pour le modèle simplifié. Un jeu initial de 0.1 (unité normalisée) est considéré au sommet des aubes et un effort de balourd est introduit au niveau du disque fan. Les efforts de balourd vont ainsi exciter le système jusqu'à consommer le jeu initial et induire des contacts. A chaque régime, le point fixe solution d'équation algébrique non linéaire est calculé et sa stabilité locale étudiée. Sur la partie haute de la figure IV.6 sont tracées les parties imaginaires des valeurs propres obtenues autour des équilibres statiques.

Le diagramme placé au bas de la figure indique la consommation de jeu maximale associée à chaque équilibre. Des informations supplémentaires apparaissent sur les diagrammes. Sont indiquées tout d'abord, par des aplats de couleurs, les plages de régimes pour lesquels des touches sont détectées (en gris) et les régimes pour lesquels le point fixe est instable (en rouge sur le diagramme des fréquences uniquement). Les fréquences propres associées à une partie réelle positive sont marquées d'un point dont la couleur traduit la valeur de la partie réelle : plus le point est foncé, plus le mode associé est instable. Enfin, pour mieux évaluer l'effet des contacts, les résultats linéaires sont superposés en pointillés sur les diagrammes.

Pour les deux diagrammes, en dehors des plages de contact, les résultats obtenus suivent parfaitement les courbes des résultats linéaires : lorsque aucun contact n'est détecté, les calculs sont en effet équivalents.

Remarquons tout d'abord, que l'allure de la courbe de la consommation de jeu maximale ressemble à celle du déplacement radial mesuré au disque fan (voir figure IV.4) : le déplacement du disque est en effet, un facteur fortement contributeur de la consommation des jeux en sommet d'aube. Lorsque des contacts sont détectés, à partir de $\Omega_{bp} \approx 6.2$, la courbe obtenue lorsque les réactions de contact sont prises en compte s'écarte de celle calculée en introduisant le champ de déplacements linéaire dans la fonction de distance minimale. Comme attendu, la consommation de jeu est aplatie lorsque les réactions de contact sont appliquées : l'effort normal de contact traduit le critère d'impenétrabilité entre les solides (voir section II.2.1). Ce critère est ici approché, du fait de l'expression des réactions de contact par la méthode de pénalité (voir section II.2.2) : la pénétration du sommet d'aube dans l'abradable qui recouvre la surface interne du carter fan, est ainsi non-nulle. Notons également que les modifications structurelles que constituent les prises de contact conduisent au paradoxe d'obtenir, pour certains régimes (de 8.25 à 9.2), une consommation de jeu plus importante lorsque les efforts de contact sont appliqués. Les propriétés modales du système sont en effet affectées par les apports de raideur radiale et tangentielle générés par les contacts. Les vitesses critiques se voient donc décalées et les réponses maximales ne sont pas obtenues aux mêmes régimes.

Sur le diagramme de Campbell, malgré une densité modale bien supérieure, plusieurs points communs avec les résultats du modèle simplifié sont observés (voir figure III.31). Nous observons ainsi que les prises de contact conduisent à une baisse des fréquences propres des modes à diamètres co-rotatifs du carter ($C'(2n_d)$ et $C'(3n_d)$), qui font alors intervenir l'ensemble du modèle et particulièrement le fléchissement des aubes. L'alternance des effets raidissant et assouplissant sur les modes de roue aubagée apparaît également. Comme nous l'avons expliqué section III.3.2, ces variations traduisent le changement dans la disposition des contacts, auxquels les modes de roue aubagée sont particulièrement sensibles.

De plus, comme pour le modèle simplifié, le mode le plus instable, c'est-à-dire celui dont les parties réelles des valeurs propres sont les plus grandes, est issu du mode $B^*(1n_d)$: le mode de roue aubagée à un diamètre nodal qui inclut une participation importante de l'arbre bp à travers le couplage avec le mode fan. Lors des études

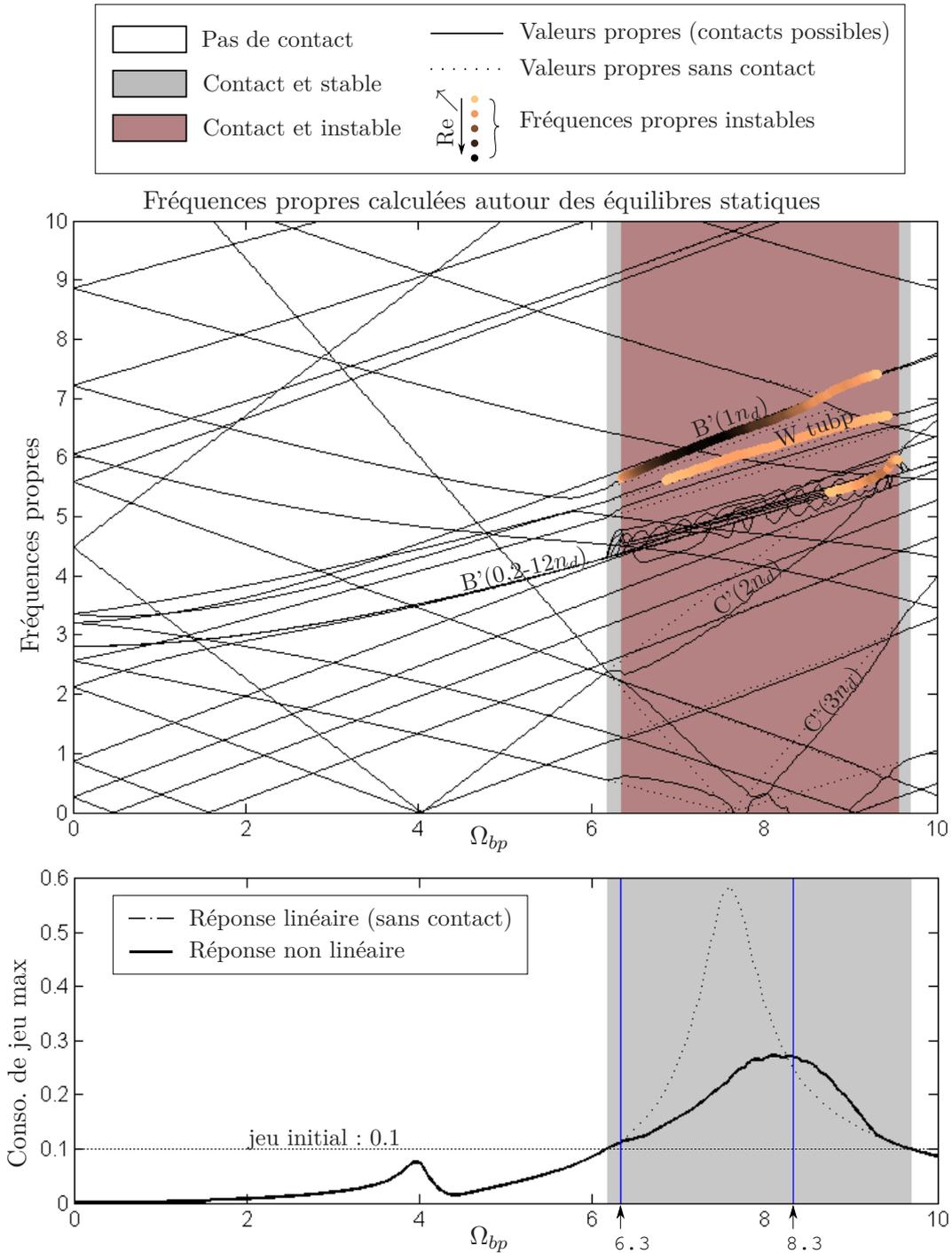


FIGURE IV.6: Stabilité des positions d'équilibre statique

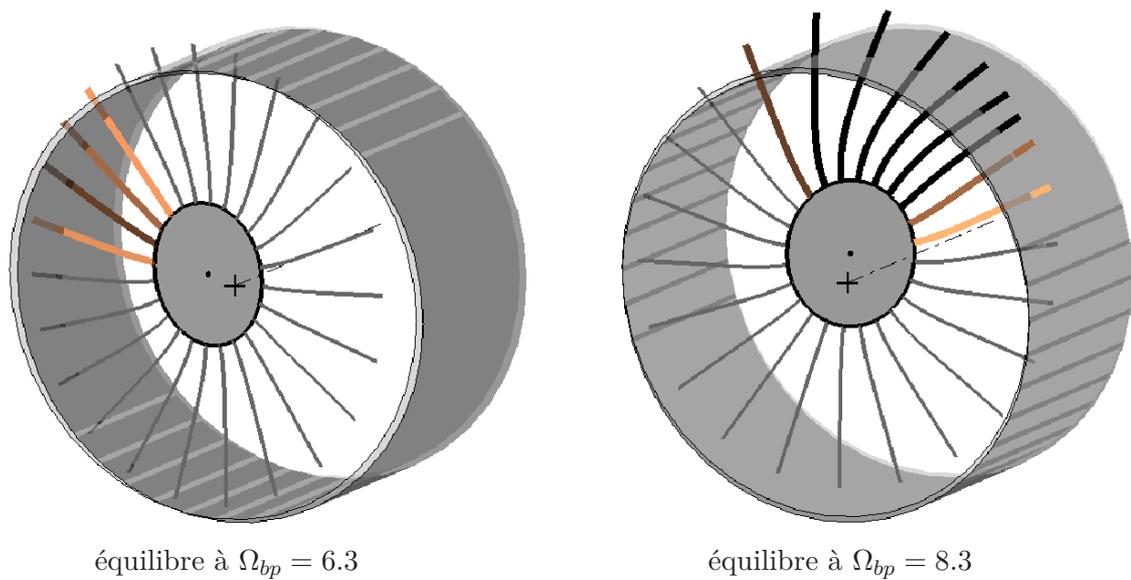


FIGURE IV.7: Dessin du module fan déformé associé aux équilibres statiques obtenus à $\Omega_{bp} = 6.3$ et 8.3

phénoménologiques menées section III.3.1 , nous l'avons identifié comme étant le mode le plus affecté par l'introduction du frottement.

Enfin, notons l'apparition d'un mode instable au sein du « paquet » des modes de roue aubagée. Cette instabilité est causée par la coalescence du mode de roue aubagée avec le mode à deux diamètres nodaux du carter. Nous l'avons identifié par $\mathbf{F}_\mu 1$, lors des études phénoménologiques menées pour un système conservatif (voir section III.3.1). Elle ne se traduisait pas par une instabilité pour l'étude sous balourd menée sur le modèle simplifié (figure III.31), mais les niveaux considérés et les paramètres de contact sont ici distincts. De plus, la roue fan comporte plus d'aubages que pour le modèle simplifié : les positions d'équilibres rencontrées impliquent donc davantage d'aubages en contact.

Pour illustrer ces équilibres, nous dessinons figure IV.7, la partie fan des déformées obtenues à $\Omega_{bp} = 6.3$ et 8.3 . Rappelons que les aubes dessinées en trait plus épais touchent le carter et leur couleur traduit la portion de leur corde concernée par le contact : plus l'aube est foncée, plus le contact est établi sur une large portion de corde. A $\Omega_{bp} = 6.3$, la solution statique est stable et conduit donc à une configuration de glissement permanent de 4 aubes partiellement en contact. A $\Omega_{bp} = 8.3$, le point fixe est instable et 9 aubes y sont concernées par des touches, dont 6 sur toute leur corde.

Cette étude de stabilité à jeu initial et à amplitude de balourd fixée, nous a permis de retrouver pour le modèle industriel, la phénoménologie identifiée pour le modèle simplifié. L'analyse sera dans la section suivante élargie en dessinant les cartes de stabilité traduisant l'influence de différents paramètres.

2.2 Etudes d'influences et outils de conception d'un système stable

Pour étendre les études d'influence nous traçons trois cartes de stabilité : figures IV.8, IV.9 et IV.10. Ces cartes sont construites suivant la même démarche qu'en section III.3.2, à savoir : chacun des pixels dessinés sur les cartes est associé à la résolution de l'équation statique non linéaire (III.67) et au calcul modal du système linéarisé autour du point fixe solution (III.68) ; la couleur d'un pixel dépend de la somme des parties réelles positives des valeurs propres calculées autour du point fixe concerné : plus il est foncé, plus la somme des parties réelles instables est grande.

Le premier diagramme, figure IV.8, décrit l'évolution de la stabilité du système en fonction du régime et du jeu initial introduit entre les sommets d'aube et le carter. Les paramètres de contact et l'amplitude du balourd sont donc fixés et, à la ligne associée à un jeu initial de 0.1, correspondent les résultats décrits précédemment (voir figure IV.6). Nous y retrouvons la frontière de contact qui délimite les couples régime/jeu initial pour lesquels des touches sont détectées ; cette frontière correspond à la consommation de jeu maximale obtenue lorsque la réponse linéaire est introduite dans la fonction de distance minimum. La frontière de stabilité qui définit les couples régimes/jeu initial associés à un système instable, se situe à l'intérieur de cette zone de contact, et délimite ainsi les points dits de contact stable : pour lesquels le système trouve un équilibre stable avec certains sommets d'aube en glissement permanent. L'allure des frontières de contact et de stabilité suit celle du niveau de réponse au balourd au fan : plus les niveaux de réponse seront importants, plus les configurations de contact seront critiques (en nombre d'aubes concernées sur de larges portions de corde), plus le système sera déstabilisé par les apports de raideurs dissymétriques induits par les contacts. Nous pouvons néanmoins observer un effet plus localisé associé à la coalescence d'un des modes de roue aubagée et du mode de carter $C'(2n_d)$ identifié précédemment (voir figure IV.6). Une zone plus sombre est en effet, identifiée sur la carte entre $\Omega_{bp} = 9$ et 10.

La deuxième carte, tracée figure IV.9 est construite à un régime fixé. Le régime d'intérêt choisi pourra être associé au niveau de réponse à balourd le plus important : vitesse critique du mode fan, ou encore à la limite supérieure de fonctionnement du moteur (*redline*). A ce point de fonctionnement, la carte tracée permet d'évaluer l'effet du jeu initial et de l'amplitude de balourd. Ainsi, plus l'amplitude du balourd appliqué est importante, plus les configurations de contact sont critiques et conduisent à un système instable. De même, plus les jeux initiaux sont fermés, plus le système sera instable. Nous retrouvons comme pour la carte précédente, la frontière de contact et celle de stabilité qui délimitent la zone pour laquelle des configurations de contact rotor-stator stables sont obtenues. Les effets qualitatifs des deux paramètres étudiés ici sont évidents et auraient pu être déduits intuitivement. L'intérêt de cette carte de stabilité s'interprète davantage comme un outil de dimensionnement. La conception d'une turbomachine est en effet, le fruit de compromis et

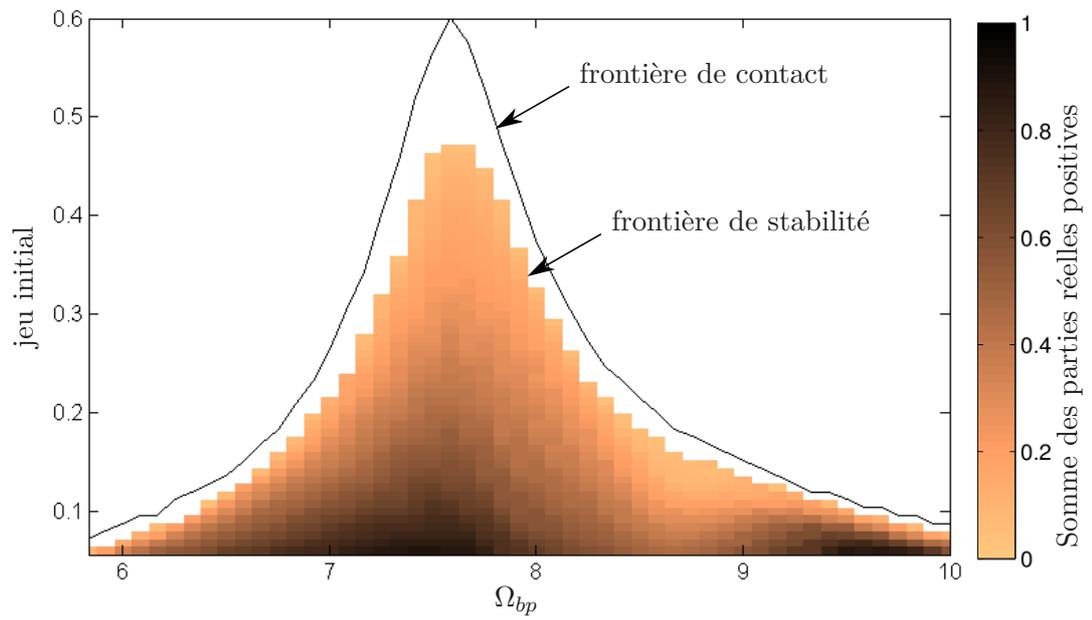


FIGURE IV.8: Carte de stabilité : régime / jeu initial

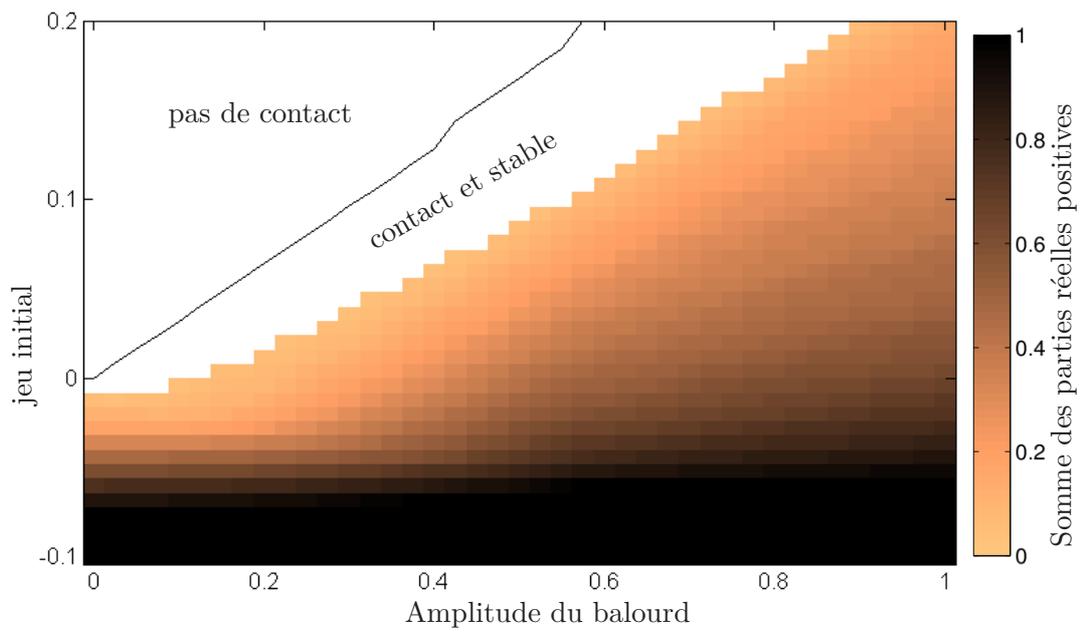


FIGURE IV.9: Carte de stabilité : balourd / jeu initial

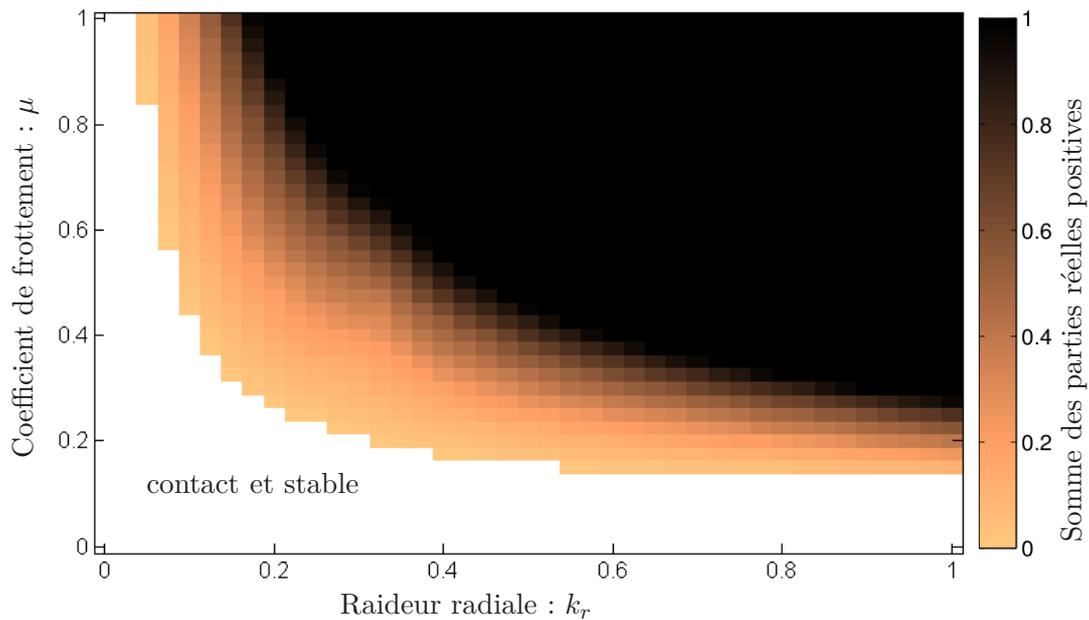


FIGURE IV.10: Carte de stabilité : k_r / μ

d'échanges entre différents métiers. Dans le contexte de l'étude, les contraintes en jeu concernent les performances aérodynamiques qui limitent l'ouverture des jeux et les contraintes de fabrication et de durée de vie qui déterminent le balourd admissible. La carte tracée figure IV.9 permet ainsi de choisir un compromis jeu initial/balourd admissible, tout en s'assurant de la stabilité du système au plus tôt du cycle de développement.

La carte dessinée figure IV.10 traite l'influence des paramètres de contact. Sont ainsi fixés le régime, le jeu initial et l'amplitude du balourd ; ces trois paramètres sont néanmoins choisis pour conduire à une situation de contact aube-carter. La stabilité des points fixes obtenus est alors étudiée en fonction de la raideur radiale de contact k_r et du coefficient de frottement μ . Les influences observées sont intuitives : plus k_r est grand, plus le système est instable ; de même, plus le coefficient de frottement est élevé, plus le système est déstabilisé par les contacts. Une étude d'influence plus fine qui identifie les effets distincts de la raideur radiale et du frottement, sur les phénomènes observés est proposée section III.3.1. Comme pour la carte présentée figure IV.9, le but de ce diagramme est davantage de fournir un outil de conception. Nous choisissons un jeu de paramètres « dimensionnants », par exemple : à la vitesse critique du mode fan, pour des jeux fermés et en appliquant le balourd maximum admissible. La carte de stabilité dessinée figure IV.10 permet alors de comparer les propriétés des différents matériaux abrasables disponibles pour recouvrir la surface interne et d'indiquer celui qui conduira à un système stable. Elle pourra également servir d'indicateur pour les paramètres de la configuration choisie : en autorisant, par exemple, à fermer davantage les jeux ; ou au contraire, en indiquant de les ouvrir. L'objectif étant, comme pour le diagramme précédent, de disposer au plus tôt du

cycle de développement, des informations permettant de concevoir la turbomachine la plus performante, tout en s'assurant de la stabilité au contact aube-carter.

3 Conclusion

Du fait de la cinématique semblable entre le modèle simplifié construit par la méthode de Rayleigh-Ritz et un modèle industriel composé d'éléments finis centrés sur l'axe moteur, la démarche développée au chapitre précédent est d'application quasi-immédiate à un *Whole Engine Model* représentatif du comportement dynamique d'un ensemble propulsif complet. Les difficultés principales rencontrées dans la mise en œuvre de cette application industrielle, l'ont été dans les étapes de préparation du modèle; notamment lors de la transformation de l'amortissement hystérétique en amortissement visqueux.

Malgré une densité modale plus grande, la phénoménologie rencontrée pour cette application industrielle est semblable à celle étudiée grâce au modèle simplifié. Les mêmes types de modes sont impliqués et les mêmes types de comportements sont obtenus. Nous avons donc orienté la présentation des résultats vers l'utilisation des cartes de stabilité comme un outil de développement d'une turbomachine performante et stable.

Cette application industrielle clôt l'étude proposée dans ce mémoire. Nous évoquerons dans la conclusion générale qui suit, les perspectives d'enrichissement et d'amélioration de la démarche que nous estimons intéressantes.

Conclusion

Cette étude a pour objet l'analyse de la phénoménologie et de la stabilité d'un système propulsif lors de contacts entre les sommets d'aubes tournantes et la surface interne du carter.

Une fois les notions utiles et le contexte bibliographique présentés, un modèle hybride simplifié a été construit. Il se compose d'un arbre flexible auquel sont connectés deux disques rigides ; des aubages flexibles sont encastrés sur celui représentatif du disque fan. Le modèle comporte également un carter fan flexible modélisé par un anneau élastique inextensible. Le carter possède des ddls de corps rigide, connectés à une section droite de l'arbre par un lien visco-élastique. Ce modèle simple, de seulement 38 ddls, est ainsi capable de représenter les couplages aubes-arbre générés par les liens d'inertie entre les mouvements du disque et le fléchissement des aubes et les couplages arbre-carter apportés par le lien élastique représentatif d'éléments structuraux du moteur. Ces différents couplages et leurs effets sont mis en évidence par l'analyse des propriétés modales du système pour différentes configurations ; cette complexification progressive du modèle nous permet aussi de nous assurer du comportement sain et cohérent de notre modèle, en comparaison avec les résultats rencontrés dans la littérature. Dans sa configuration complète, le modèle présente ainsi des modes propres qui constituent une interaction globale à un diamètre nodal entre les modes de roue aubagée, les modes de flexion de l'arbre et les modes de suspension du carter.

Une fois le comportement naturel du modèle étudié, la gestion du contact entre les sommets d'aube et le carter est implémentée. Une formulation du contact dite *3D* est proposée et comparée à une formulation plus simple. Pour limiter sa taille, le modèle développé introduit en effet, des éléments très simples pour représenter les composants à l'interface des contacts : les aubes sont modélisées par des poutres et le carter par un anneau inextensible. Or, les contacts sont des phénomènes très localisés pouvant affecter le comportement global du système. Pour recouvrer une partie de la précision perdue au travers des simplifications du modèle, la formulation *3D* du contact réintroduit certains aspects de la géométrie 3D de la zone de contact : la position de la corde en sommet d'aube et celle de la surface interne du carter en regard. Le calcul de la distance minimale entre sommets d'aube et carter prend aussi en compte toute la cinématique apportée par le modèle, notamment les différents basculements du disque et du carter et le fléchissement des aubages. Cette formulation, qui présente l'avantage de ne pas augmenter la taille du modèle, est

comparée à une formulation plus simple dite $2D$: son efficacité dans la détection des touches est mise en évidence.

Une fois l'implémentation du contact définie, le comportement du système lors de contacts aubes-carter est étudié. Deux démarches sont adoptées ; la première profite de l'observation du modèle dans le repère tournant pour supposer une solution de type point fixe et introduire les effets non linéaires du contact dans une équation statique : l'équilibre obtenu définit alors une configuration de glissement permanent des sommets d'aube concernés sur la surface interne du carter. Les prises de contact correspondent à une modification structurelle du système, représentée par un lien de raideur alimenté dans les directions normales et tangentiels, entre les sommets d'aubes en contact et la surface interne du carter. L'étude locale de la stabilité de ces équilibres statiques se ramène à un problème aux valeurs propres.

Des études qualitatives sont tout d'abord menées, pour un système conservatif et pour une même configuration de contact étendue sur la plage des régimes étudiés. Des phénomènes de coalescence et divergence de modes sont identifiés et les comportements obtenus sont cohérents avec ceux rencontrés dans la littérature qui traite de la stabilité d'un système à symétrie de révolution soumis à un chargement tournant. Sous l'effet des contacts, tous les organes du modèle sont connectés et les modes qui se trouvaient écartés des couplages naturels, interviennent : notamment les modes à diamètres nodaux du carter et les modes de roue aubagée de diamètres nodaux différents de un. Le rôle primordial des paramètres de contact est également mis en évidence : la raideur radiale qui pilote la plupart des phénomènes de coalescence et divergence de modes et le coefficient de frottement qui conduit à une déstabilisation plus globale du système sur toute la plage de régimes. Ces analyses ont enfin montré l'importance de la disposition des contacts qui peut filtrer ou amplifier certaines des coalescences et divergences.

Cette démarche statique a ensuite été appliquée pour des conditions de fonctionnement plus réalistes où les contacts sont induits par des efforts de balourd. L'amortissement rétabli, la stabilité des équilibres obtenus à chaque point de régime, est étudié pour déterminer le domaine de stabilité du système. Ces études permettent également de montrer l'intérêt de la formulation $3D$ qui conduit à une application plus réaliste des chargements : les réactions de contact appliquées traduisent en effet la portion de corde en contact avec le carter et représentent ainsi l'engagement progressif de l'aubage, qu'une formulation plus simple qui considère un sommet d'aube ponctuel, ne prend pas en compte.

L'analyse du comportement du système lors de contacts aubes-carter est ensuite complétée par la mise en œuvre de simulations transitoires. Les intégrations temporelles permettent tout d'abord de valider les conclusions de la démarche statique, beaucoup moins coûteuse en temps de calcul. La frontière de stabilité qui délimite l'ensemble des couples jeu initial/régime pour lesquels les équilibres statiques rencontrés sont instables, est confirmée par les intégrations temporelles : le statut sur la stabilité du système est identique pour les deux démarches. Une concordance plus quantitative est également observée : lorsque le système est stable, la simulation

transitoire converge vers le champ de déplacement solution de l'équation statique ; lorsque le système est instable, le contenu fréquentiel du signal temporel indique la participation de la fréquence du mode le plus instable obtenu en statique, et de ses harmoniques.

Outre cette confirmation des résultats statiques, les simulations transitoires renseignent sur le déroulement de l'instabilité depuis les premiers contacts jusqu'à la divergence. Nous avons notamment constaté des orientations originales des précessions des centres de gravité du disque et du carter fan. Le modèle comporte en effet une cinématique élaborée et traduit naturellement les couplages entre les aubes, l'arbre et le carter. Ces contributions mènent à des scénarios instables complexes pour lesquels les précessions obtenues peuvent même changer d'orientation au cours de la simulation.

Le dernier chapitre du mémoire décrit l'application de la démarche développée sur le modèle simplifié, à un modèle d'ensemble industriel. L'application s'appuie sur le *WEM* (Whole Engine Model) d'un turboréacteur existant : ce modèle, dit *1D*, décrit le comportement dynamique de l'ensemble du système propulsif depuis le point de vue de la dynamique des rotors. Du fait de la cinématique semblable entre le modèle simplifié construit par la méthode de Rayleigh-Ritz et le modèle industriel composé d'éléments poutres-masses-ressorts centrés sur l'axe moteur, la démarche développée au chapitre précédent est d'application quasi-immédiate au *WEM* industriel. Les difficultés principales rencontrées dans la mise en œuvre de cette application, l'on été dans les étapes de préparation du modèle : notamment lors de la transformation de l'amortissement hystérétique en visqueux. Les mêmes enrichissements structuraux sont apportés au *WEM* industriel, à savoir : des aubes flexibles et les déformations à diamètres du carter. La formulation *3D* du contact est aussi implémentée. Malgré une densité modale plus grande, les phénomènes rencontrés sont semblables. Des études d'influences sont alors mises en œuvre pour cartographier la stabilité du système en fonction des paramètres influents et utiliser ces cartes de stabilité comme des outils de conception d'une turbomachine à la fois performante et stable.

Perspectives

La méthodologie développée s'appuie sur un modèle d'ensemble enrichi d'une modélisation simplifiée de la roue aubagée et du carter, et sur l'implémentation du contact aube-carter. Les études réalisées ont montré l'importance de chacun de ces éléments, et des voies d'améliorations possibles sont à envisager pour chacun de ces aspects de la méthode.

Les modèles d'ensemble utilisés, tant pour le modèle simplifié que pour l'application industrielle, sont constitués d'éléments poutre-masse-ressort centrés sur l'axe moteur ; ils incluent uniquement les ddl associés aux fléchissements dans les deux directions transverses à l'axe moteur. Par cette cinématique limitée, les modèles d'ensemble filtrent les couplages possibles entre les modes de roue aubagée et les déformations de l'arbre. Inclure un ddl de torsion, permettrait de rendre compte du

couplage de l'arbre avec le mode à zéro diamètre nodal, et d'en étudier l'effet sur le comportement lors de contacts. Ce ddl supplémentaire serait également sollicité par les efforts de frottement [ELF99].

Des enrichissements possibles peuvent aussi être identifiés pour la modélisation de la roue aubagée et du carter souple. Les aubes flexibles sont ici modélisées par des poutres pouvant fléchir suivant une seule direction : cela constitue une simplification forte de la géométrie et du comportement réel des aubes, dont les géométries modernes sont fortement 3D. De plus, les aubes fan des turboréacteurs de dernière génération, sont fabriquées en matériau composite et comportent un bord d'attaque métallique, leurs propriétés mécaniques vont ainsi vers plus de complexité. Adopter la démarche proposée par [Gru12], permettrait d'introduire des aubages issus d'une modélisation éléments finis 3D réduite et décrite en symétrie cyclique, et améliorerait la description du comportement des aubes flexibles. Le même type de démarche pourrait être envisagée pour le carter et permettrait de mieux traduire ses conditions aux limites. Le carter fan est en effet connecté par des brides boulonnées, à la manche d'entrée d'air à l'amont et au carter intermédiaire à l'aval. L'effet des éléments dissymétriques fixés sur le carter, notamment le boîtier d'entraînement des accessoires (*AGB : Accessories GearBox*), pourrait également être étudié.

D'autres enrichissements envisageables traitent de la modélisation des contacts. D'un point de vue physique, l'usure de l'abradable et les échauffements causés par les frottements pourraient être considérés. Sur le plan numérique, les résultats obtenus pour différentes gestions de contact pourraient être comparés.

L'étude plus approfondie des grandeurs modales en fonction des niveaux d'amplitude grâce à des approches de types MNL (Modes Non Linéaires, [LLP09]) pourraient être une stratégie intéressante en phase de conception.

Des perspectives existent également dans le domaine expérimental. La démarche développée est en effet purement numérique et aucune donnée expérimentale n'est à ce jour disponible pour en valider les conclusions. Le projet Equipex PHARE, *Plate-formes machines tournantes pour la maîtrise des Risques Environnementaux*, pourra dans les prochaines années, fournir des données expérimentales auxquelles confronter les méthodologies numériques développées.

Bibliographie

- [Ahm10] S. AHMAD. « Rotor Casing Contact Phenomenon in Rotor Dynamics — Literature Survey ». Dans : *Journal of Vibration and Control* 16 (2010), p. 1369–1377 (cf. p. 39).
- [Alm+14a] P. ALMEIDA et al. « Experimental analysis of dynamic interaction between a centrifugal compressor and its casing ». Dans : *ASME Turbo Expo, Düsseldorf, June 16-20*. 2014 (cf. p. 43, 140).
- [Alm+14b] P. ALMEIDA et al. « On some physical phenomena involved in blade-casing contact ». Dans : *EURODYN, Porto, Portugal, June 30- July 2*. 2014 (cf. p. 44).
- [AM02] A. AL MAJID. « Dissipation de l'énergie en mécanique vibratoire. - Opérateur d'hystérésis - Phénomène métrique ». Thèse de doct. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2002 (cf. p. 151).
- [Bar00] A. R. BARTHA. « Dry Friction Backward Whirl of Rotors ». Thèse de doct. ETH, Zurich, 2000 (cf. p. 41).
- [Bat+12] A. BATAILLY et al. « Numerical-experimental comparison in the simulation of rotor/stator interaction through blade-tip/abradable coating contact ». Dans : *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134.8 (2012), p. 082504 (cf. p. 43).
- [Bat08] A. BATAILLY. « Simulation de l'interaction rotor-stator pour les turbomachines aéronautiques en configuration non-accidentelle ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes, 2008 (cf. p. 43, 50, 54).
- [Ben+02] D. BENTLY et al. « Full Annular Rub in Mechanical Seals, Part I : Experimental Results ». Dans : *International Journal of Rotating Machinery* 8 (2002), p. 319–328 (cf. p. 41).
- [BK05] N. G. BOURAGO et V. N. KUKUDZBANOV. « A review of contact algorithms ». Dans : *Mechanics of Solids* 1 (2005), p. 44–85 (cf. p. 49).
- [Bla66] H. BLACK. « Synchronous whirling of a shaft within a radially flexible annulus having small radial clearance ». Dans : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, SAGE Publications* 181 (1966), p. 65–73 (cf. p. 41, 49).

- [BLP11] A. BATAILLY, M. LEGRAND et C. PIERRE. « Influence of abradable coating wear mechanical properties on rotor stator interaction ». Dans : *ASME Turbo Expo, Vancouver, Canada, June 6-10. 2011* (cf. p. 2).
- [BPV07] N. BACHSCHMID, P. PENNACCHI et A. VANIA. « Thermally induced vibrations due to rub in real rotors ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 299.4-5 (2007), p. 683–719 (cf. p. 42).
- [CB07] D. CHILDS et A. BHATTACHARYA. « Prediction of dry-friction whirl and whip between a rotor and a stator ». Dans : *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME* 129.3 (2007), p. 355–362 (cf. p. 41).
- [CD81] S. CRANDALL et J. DUGUNDJI. « Resonant whirling of aircraft propeller-engine systems ». Dans : *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME* 48.4 (1981). cited By (since 1996) 7, p. 929–935 (cf. p. 34).
- [CDJR05] E. CHATELET, F. D’AMBROSIO et G. JACQUET-RICHARDET. « Toward global modelling approaches for dynamic analyses of rotating assemblies of turbomachines ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 282.1–2 (2005), p. 163–178 (cf. p. 34).
- [CDM86] E. CRAWLEY, E. DUCHARME et D. MOKADAM. « Analytical and experimental investigation of the coupled bladed disk/shaft whirl of a cantilevered turbofan ». Dans : *Journal of engineering for gas turbines and power* 108.4 (1986), p. 567–575 (cf. p. 34).
- [Cel90] Z. CELEP. « In-Plane Vibrations of Circular Rings on a Tensionless Foudation ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 143 (1990), p. 461–471 (cf. p. 71, 73).
- [CG89] T. CAMERON et J. GRIFFIN. « An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems ». Dans : *Journal of Applied Mechanics* 56 (1989), p. 149–154 (cf. p. 51, 56).
- [CGT00] A. R. CONN, N. I. GOULD et P. L. TOINT. *Trust region methods*. T. 1. Siam, 2000 (cf. p. 55).
- [Cha06] D. CHARLEUX. « Etude des effets de la friction en pied d’aube sur la dynamique des roues aubagées ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2006 (cf. p. 49).
- [Chi93] D. CHILDS. *Turbomachinery rotordynamics*. Wiley, New York, 1993 (cf. p. 10, 21, 24).
- [Cho02] Y. S. CHOI. « Investigation on the whirling motion of full annular rotor rub ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 258 (2002), p. 191–198 (cf. p. 41).

- [Chu92] C. K. CHUI. *An introduction to wavelets*. T. 1. Academic press, 1992 (cf. p. 136).
- [CJ92] P. CHAMBRETTE et L. JEZEQUEL. « Stability of a beam rubbed against a rotating disc ». Dans : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 11 (1992), p. 107–138 (cf. p. 44).
- [CL96] S.-B. CHUN et C.-W. LEE. « Vibration analysis of shaft-bladed disk system by using substructure synthesis and assumed modes method ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 189.5 (1996), p. 587–608 (cf. p. 34).
- [CM84] E. CRAWLEY et D. MOKADAM. « Stagger angle dependence of inertial and elastic coupling in bladed disks ». Dans : *Journal of Vibration and Acoustics* 106.2 (1984), p. 181–188 (cf. p. 34, 90).
- [Col08] M. COLE. « On stability of rotordynamic systems with rotor–stator contact interaction ». Dans : *Proceedings of the Royal Society A* 464 (2008), p. 3353–3375 (cf. p. 42, 49).
- [Com07] A. COMBESURE. *Equations de base et schémas numériques en dynamique linéaire*. INSA. 2007 (cf. p. 53).
- [CP87] F. CHOY et J. PADOVAN. « Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 113.3 (1987), p. 529–545 (cf. p. 42, 49).
- [Cra90] S. CRANDALL. « From Whirl to Whip Due to Rotor-Stator Contact ». Dans : *Transaction IFToMM 3rd International Conference on Rotordynamics, Lyon*. 1990, p. 19–26 (cf. p. 41).
- [Cra95] S. CRANDALL. « Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics ». Dans : sous la dir. de N. KLIEMANN W. ans Namachchivaya. CRC Press, 1995. Chap. Rotordynamics, p. 1–44 (cf. p. 101, 119).
- [Dem03] D. DEMAILLY. « Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Application à la dynamique rotor ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2003 (cf. p. 55, 56, 60).
- [DH56] J. DEN HARTOG. *Mechanical vibrations*. McGraw-Hill, 1956 (cf. p. 41).
- [DL72] G. DUVAUT et J.-L. LIONS. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972 (cf. p. 48).
- [Duv90] G. DUVAUT. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1990 (cf. p. 48).
- [Ehr69] F. EHRICH. « Dynamic stability of rotor/stator radial rubs in rotating machinery ». Dans : *ASME* 56 (1969). cited By (since 1996) 0, p. 1025–1028 (cf. p. 2, 41).
- [Ehr92] F. EHRICH. *Handbook of Rotordynamics*. Krieger Publishing, 1992 (cf. p. 24, 40).

- [ELF99] S. EDWARDS, A. LEES et M. FRISWELL. « The Influence of Torsion on Rotor/Stator Contact in Rotating Machinery ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 225.4 (1999), p. 767–778 (cf. p. 42, 172).
- [Foi+14] N FOIS et al. « An investigation of the relationship between wear and contact force for abradable materials ». Dans : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology* (2014), p. 1350650114545139 (cf. p. 44).
- [FR93] G. FLOWERS et S. RYAN. « Development of a set of equations for incorporating disk flexibility effects in rotordynamic analyses ». Dans : *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 115.2 (1993). cited By (since 1996) 17, p. 227–233 (cf. p. 34).
- [Fum97] M. A. FUMAGALLI. « Modelling and Measurement Analysis of the Contact Interaction between a High Speed Rotor and its Stator ». Thèse de doct. Swiss Institute of Technology Zurich, 1997 (cf. p. 41).
- [GE00] G. von GROLL et D. J. EWINS. « On the dynamics of windmilling in aero-engines ». Dans : *IMEchE Conference Transactions*. T. 6. 2000, p. 721–730 (cf. p. 10).
- [GE01] G. von GROLL et D. EWINS. « The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 241.2 (2001), p. 223–233 (cf. p. 59).
- [Gen88] G. GENTA. « Whirling of unsymmetrical rotors : A finite element approach based on complex co-ordinates ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 124.1 (1988), p. 27–53 (cf. p. 25).
- [GFW96] M. K. K. GHOURI, C. H. J. FOX et E. J. WILLIAMS. « Transient response and contact due to sudden imbalance in a flexible rotor-casing system with support asymmetry ». Dans : *IMEchE*. 1996 (cf. p. 41).
- [GK84] M GERADIN et N KILL. « A new approach to finite element modelling of flexible rotors ». Dans : *Engineering Computations* 1.1 (1984), p. 52–64 (cf. p. 34).
- [GM95] P. GOLDMAN et A. MUSZYNSKA. « Rotor-to-stator, rub-related, thermal/mechanical effects in rotating machinery ». Dans : *Chaos, Solitons & Fractals* 5.9 (1995). <ce :title>Some Nonlinear Oscillations Problems in Engineering Sciences</ce :title>, p. 1579–1601 (cf. p. 42).
- [Gmu07] T. GMUR. *Dynamique des Structures, Analyse modale numérique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2007 (cf. p. 10, 12, 21, 51).
- [GR93] M. GÉRADIN et D. RIXEN. *Théorie des Vibrations, Application à la dynamique des structures*. Masson, Collection Physique Fondamentale et Appliquée, 1993 (cf. p. 10, 51, 53).

- [Gra75] K. F. GRAFF. *Wave motion in elastic solids*. Dover Publications, 1975 (cf. p. 71).
- [Gre48] R. GREEN. « Gyroscopic Effects of the Critical Speed of Flexible Rotors ». Dans : *Journal of Applied Mechanics* 15 (1948), p. 369–376 (cf. p. 16).
- [Gru12] M. GRUIN. « Dynamique non-linéaire d’une roue de turbine Basse Pression soumise à des excitations structurales d’un turboréacteur ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2012 (cf. p. 29, 34, 68, 70, 90, 172).
- [GT97] G. GENTA et A. TONOLI. « A harmonic finite element for the analysis of flexural, torsional and axial rotordynamic behavior of blade arrays ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 207.5 (1997), p. 693–720 (cf. p. 34).
- [Hen80] R. HENRY. « Calcul des fréquences et modes des structures répétitives circulaires ». Dans : *Journal de Mécanique appliquée* 4 (1980), p. 61–82 (cf. p. 28).
- [HKT06] K. C. HALL, R. E. KIELB et J. P. THOMAS. *Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines*. Sous la dir. de SPRINGER. Springer, 2006 (cf. p. 9).
- [HS08] B. HELLMICH et J. R. SEUME. « Causes of Acoustic Resonance in a High-Speed Axial Compressor ». Dans : *Journal of Turbomachinery* 130 (2008) (cf. p. 9).
- [Hug87] T. HUGHES. *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice Hall Engelwood Cliffs New Jersey, 1987 (cf. p. 53).
- [IH10] J. INAYAT-HUSSAIN. « Bifurcations in the response of a Jeffcott rotor with rotor-to-stator rub ». Dans : *ASME*. T. 4. 2010, p. 409–418 (cf. p. 16).
- [Jef19] H. JEFFCOTT. « The lateral vibration loaded shaft in the neighborhood of a whirling speed ». Dans : *Philosophical Magazine* 6 (37) (1919), p. 304–314 (cf. p. 16).
- [Jia09] J. JIANG. « Determination of the global response characteristics of a piecewise smooth dynamical system with contact ». Dans : *Nonlinear Dynamics* 57 (2009), p. 351–361 (cf. p. 42).
- [JR+13] G. JACQUET-RICHARDET et al. « Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application ». Dans : *Mechanical Systems and Signal Processing* 40 (2013), p. 401–420 (cf. p. 39).
- [JRFR96] G. JACQUET-RICHARDET, G. FERRARIS et P. RIEUTORD. « Frequencies And Modes Of Rotating Flexible Bladed Disc-shaft Assemblies : A Global Cyclic Symmetry Approach ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 191.5 (1996), p. 901–915 (cf. p. 34).

- [Kan04] M. A. KANDIL. « On rotor internal damping instability ». dirigé par Ewins. Thèse de doct. Imperial College of London, 2004 (cf. p. 25).
- [KL90] N. KHADER et R. LOEWY. « Shaft flexibility effects on the forced response of a bladed-disk assembly ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 139.3 (1990), p. 469–485 (cf. p. 34).
- [KN96] Y.-B. KIM et S. NOAH. « Quasi-periodic response and stability analysis for a non-linear jeffcott rotor ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 190.2 (1996), p. 239–253 (cf. p. 42).
- [KPW03] E. KARPENKO, E. E. PAVLOVSKAIA et M. WIERCIGROCH. « Bifurcation analysis of a preloaded Jeffcott rotor ». Dans : *Chaos, Solitons & Fractals* 15.2 (2003), p. 407–416 (cf. p. 16).
- [Kus08] F. KUSS. « Méthodes duales pour les problèmes de contact avec frottement ». Thèse de doct. Université de Provence, 2008 (cf. p. 50).
- [Lai10] J.-P. LAINÉ. *Notes de cours : Complément de dynamique des structures*. Rap. tech. Ecole Centrale de Lyon, 2010 (cf. p. 26, 28).
- [Lax07] D. LAXALDE. « Etude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2007 (cf. p. 31, 32, 59).
- [LBP12] M. LEGRAND, A. BATAILLY et C. PIERRE. « Numerical Investigation of Abradable Coating Removal in Aircraft Engines Through Plastic Constitutive Law ». Dans : *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 7.1, 011010 (2012), p. 011010 (cf. p. 44).
- [Leg+09] M. LEGRAND et al. « Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 319.1-2 (2009), p. 366–391 (cf. p. 43).
- [Leg+12] M. LEGRAND et al. « Full three-dimensional investigation of structural contact interactions in turbomachines ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 331.11 (2012), p. 2578–2601 (cf. p. 43).
- [Leg05] M. LEGRAND. « Modèles de prédiction de l’interaction rotor/stator dans un moteur d’avion ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes, 2005 (cf. p. 2, 43, 44, 49, 50, 54, 106).
- [Lei74] A. W. LEISSA. « On a curve veering aberration ». English. Dans : *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 25.1 (1974), p. 99–111 (cf. p. 80).
- [Les07] N. LESAFFRE. « Stabilité et analyse non-linéaire du contact rotor-stator ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2007 (cf. p. 34, 45, 49, 50, 54, 68, 71, 90).
- [LF96] M. LALANNE et G. FERRARIS. « Dynamique des rotors en flexion ». Dans : *Techniques de l’Ingénieur* B5110 (1996), p. 1–39 (cf. p. 16).

- [LF98] M. LALANNE et G. FERRARIS. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. Wiley, 1998 (cf. p. 16, 18, 19, 22, 24).
- [Lin90] A. LINGENER. « Experimental investigation of reverse whirl of flexible rotor ». Dans : *Transaction IFToMM 3rd International Conference on Rotordynamics, Lyon*. 1990 (cf. p. 41).
- [LK84] R. LOEWY et N KHADER. « Structural dynamics of rotating bladed-disk assemblies coupled with flexible shaft motions ». Dans : *AIAA journal* 22.9 (1984), p. 1319–1327 (cf. p. 34).
- [LLP09] D. LAXALDE, M. LEGRAND et C. PIERRE. « Nonlinear Modal Analysis of Mechanical Systems with Frictionless Contact Interfaces ». Dans : *ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, San Diego : United States*. 2009 (cf. p. 172).
- [LST06] N. LESAFFRE, J.-J. SINOUE et F. THOUVEREZ. « Model and Stability Analysis of a Flexible Bladed Rotor ». Dans : *International Journal of Rotating Machinery* 2006 (2006), p. 1–16 (cf. p. 71).
- [LST07a] N. LESAFFRE, J.-J. SINOUE et F. THOUVEREZ. « Contact analysis of a flexible bladed-rotor ». Dans : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 26.3 (2007), p. 541 –557 (cf. p. 45).
- [LST07b] N. LESAFFRE, J.-J. SINOUE et F. THOUVEREZ. « Stability analysis of rotating beams rubbing on an elastic circular structure ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 299.4-5 (2007), p. 1005 –1032 (cf. p. 44, 101, 103).
- [Man+14] R MANDARD et al. « Interaction force estimation during blade/seal rubs ». Dans : *Tribology International* (2014) (cf. p. 44).
- [Man04] P. MANNEVILLE. « Dynamique non-linéaire appliquée au Chaos et à son contrôle. » Mém.de maîtr. Paris VI, Paris Sud, Ecole Polytechnique, 2004 (cf. p. 62).
- [Mas11] R. MASSIEUX. « Etude de stabilité d’un moteur en contact rotor-stator ». Mém.de maîtr. Ecole Centrale de Lyon, Snecma, 2011 (cf. p. 152, 153).
- [Mei+13] M. B. MEINGAST et al. « Investigation of Rotor-Casing Interactions in the Centrifugal Compressor of a Helicopter Engine ». Dans : *ASME Turbo Expo, June 3-7, San Antonio (USA)*. American Society of Mechanical Engineers. 2013 (cf. p. 43).
- [Mei14] M. B. MEINGAST. « Investigation of Rotor-Casing Interaction Phenomena in the Centrifugal Compressor of a Helicopter Engine ». Thèse de doct. McGill University, 2014 (cf. p. 43).

- [Mil+09] A. MILLECAMPS et al. « Influence of Thermal Effects During Blade-Casing Contact Experiments ». Dans : *ASME Conference Proceedings* 2009.48982 (2009), p. 855–862 (cf. p. 44).
- [Mil10] A. MILLECAMPS. « Interaction aube-carter : contribution de l'usure de l'abradable et de la thermomécanique sur la dynamique d'aube ». Thèse de doct. Université de Lille 1, 2010 (cf. p. 2).
- [Mus05] A. MUSZYNSKA. *Rotordynamics*. CRC Press, 2005 (cf. p. 21, 40).
- [Mus84] A. MUSZYNSKA. « Partial lateral rotor to stator rubs ». Dans : *Third International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*. 1984, p. 327–335 (cf. p. 41).
- [Mus86] A. MUSZYNSKA. « Whirl and whip—Rotor/bearing stability problems ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 110.3 (1986), p. 443–462 (cf. p. 2).
- [Mus89] A. MUSZYNSKA. « Rotor-to-stationary element rub-related vibration phenomena in rotating machinery : Literature survey ». Dans : *The Shock and Vibration digest* 21 (1989), p. 3–11 (cf. p. 2, 39, 119).
- [Nac02] S. NACIVET. « Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2002 (cf. p. 49, 51).
- [NB95] A. NAYFEH et B. BALACHANDRAN. *Applied Nonlinear Dynamics*. Sous la dir. d'I. JOHN WILEY & SONS. Wiley Series in Nonlinear Science, 1995 (cf. p. 50, 56, 59–61).
- [New26] B. NEWKIRK. « Shaft Rubbing. Relative Freedom of rotor Shafts from Sensitiveness from Rubbing Contact when Running above their Critical Speeds ». Dans : *Mechanical Engineering* 48 (1926), p. 830–832 (cf. p. 42).
- [New59] N. M. NEWMARK. « A method of Computation for structural dynamics ». Dans : *Journal of the Engineering Mechanics Divison* 85 (1959), p. 67–94 (cf. p. 52).
- [Oka+95] S OKAMOTO et al. « Vibration analysis of a high speed and light weight rotor system subjected to a pitching or turning motion : II : A flexible rotor system on flexible suspensions ». Dans : *Journal of sound and vibration* 184.5 (1995), p. 887–906 (cf. p. 10).
- [Ouy+98] H. OUYANG et al. « Friction-induced parametric resonances in discs : Effect of a negative friction-velocity relationship ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 209.2 (1998). cited By (since 1996) 62, p. 251–263 (cf. p. 44).
- [PE07] S. POPPRATH et H. ECKER. « Nonlinear dynamics of a rotor contacting an elastically suspended stator ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 308.3-5 (2007), p. 767–784 (cf. p. 42).

- [Pel12] L. PELETAN. « Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non-linéaire des machines tournantes. Application au contact rotor-stator ». Thèse de doct. INSA de Lyon, 2012 (cf. p. 59).
- [Pet12] E. P. PETROV. « Multiharmonic analysis of nonlinear whole engine dynamics with bladed disc-casing rubbing contact ». Dans : *ASME Turbo Expo, Copenhagen, Denmark, June 11-15*. 2012 (cf. p. 46).
- [Pie88] C. PIERRE. « Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 126.3 (1988), p. 485–502 (cf. p. 80).
- [PJ86] N. PERKINS et C. M. JR. « Comments on curve veering in eigenvalue problems ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 106.3 (1986), p. 451–463 (cf. p. 80).
- [Pre+07] W. H. PRESS et al. *Numerical recipes : The art of scientific computing : Third Edition*. Cambridge university press, 2007 (cf. p. 52, 54).
- [Pre90] A. PREUMONT. *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1990 (cf. p. 151).
- [PTC14a] M.-O. PARENT, F. THOUVEREZ et F. CHEVILLOT. « 3D interaction in bladed rotor-to-stator contact ». Dans : *EURODYN, June 30- July 2, Porto, Portugal*. 2014 (cf. p. 119).
- [PTC14b] M.-O. PARENT, F THOUVEREZ et F. CHEVILLOT. « Whole engine interaction in bladed rotor-to-stator contact ». Dans : *ASME Turbo Expo, Düsseldorf, Germany, June 15-20*. 2014 (cf. p. 147).
- [Roq07] S. ROQUES. « Modélisation du comportement dynamique couplé rotor-stator d'une turbine en situation accidentelle ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes, 2007 (cf. p. 42, 50, 54).
- [RR78] A. RALSTON et P. RABINOWITZ. *A First Course in Numerical Analysis, 2nd edition*. Mc Graw-Hill, New York, 1978 (cf. p. 54).
- [RW96] W RIESS et M WALBAUM. « Initiation and propagation of flow instabilities in multi-stage axial compressors ». Dans : *AGARD CONFERENCE PROCEEDINGS AGARD CP*. AGARD. 1996, p. 30–30 (cf. p. 9).
- [Sak+89] M. SAKATA et al. « Vibration of bladed flexible rotor due to gyroscopic moment ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 131.3 (1989), p. 417–430 (cf. p. 34).
- [Sak+95] M SAKATA et al. « Vibration analysis of a high speed and light weight rotor system subjected to a pitching or turning motion : I : A rigid rotor system on flexible suspensions ». Dans : *Journal of sound and vibration* 184.5 (1995), p. 871–885 (cf. p. 10).

- [Sar08] E. SARROUY. « Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires. Application à la dynamique des rotors ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, 2008 (cf. p. 50, 56, 61).
- [SBL13] N. SALVAT, A. BATAILLY et M. LEGRAND. « Modeling of abradable coating removal in aircraft engines through delay differential equations ». Dans : *ASME Turbo Expo, San Antonio, June 3-7. 2013* (cf. p. 2, 44).
- [Sch97a] R. K. SCHMID. « New High Temperature Abradables for Gas Turbines ». Thèse de doct. Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 1997 (cf. p. 44).
- [Sch97b] P. SCHMIECHEN. « Travelling Wave Speed Coincidence ». Thèse de doct. Imperial College London, 1997 (cf. p. 2, 43, 106).
- [SGT11] E. SARROUY, A. GROLET et F. THOUVEREZ. « Global and bifurcation analysis of a structure with cyclic symmetry ». Anglais. Dans : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46.5 (2011), p. 727–737 (cf. p. 50).
- [Sin04] S. K. SINHA. « Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with Coulomb damping due to tip-rub ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 273 (2004), p. 875–919 (cf. p. 34, 45, 70).
- [Sin05] S. K. SINHA. « Non-linear dynamic response of a rotating radial Timoshenko beam with periodic pulse loading at the free-end ». Dans : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40.1 (2005). <ce :title>Non-linear Fluid Mechanics</ce :title>, p. 113 –149 (cf. p. 43).
- [SJH11] Z. SHANG, J. JIANG et L. HONG. « The global responses characteristics of a rotor/stator rubbing system with dry friction effects ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 330.10 (2011), p. 2150 –2160 (cf. p. 42, 49).
- [SN97] P. SUNDARARAJAN et S. T. NOAH. « Dynamics of Forced Nonlinear Systems Using Shooting/Arc-Length Continuation Method - Application to Rotor Systems ». Dans : *Journal of Vibration and Acoustics* 119 (1997), p. 9–20 (cf. p. 51, 55).
- [SN98] P. SUNDARARAJAN et S. NOAH. « An algorithm for response and stability of large order non-linear systems. Application to rotor systems ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 214.4 (1998), p. 695 –723 (cf. p. 58).
- [SPW05] E. SWANSON, C. D. POWELL et S. WEISSMAN. « A Practical Review of Rotating Machinery Critical Speeds and Modes ». Dans : *Sound and Vibrations* (2005) (cf. p. 21).

- [Sto27] A. STODOLA. *Steam and Gas Turbine*. McGraw-Hill, New York, 1927 (cf. p. 16).
- [TB06] Özgür TURHAN et G. BULUT. « Linearly coupled shaft-torsional and blade-bending vibrations in multi-stage rotor-blade systems ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 296.1–2 (2006), p. 292–318 (cf. p. 34).
- [TGP00] M. TIWARI, K. GUPTA et O. PRAKASH. « Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 238.5 (2000), p. 723–756 (cf. p. 10).
- [Tho79] D. L. THOMAS. « Dynamics of rotationally periodic structures ». Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14.1 (1979), p. 81–102 (cf. p. 28).
- [VCP05] S. V. VANGIPURAM CANCHI et R. G. PARKER. « Parametric instability of a circular ring subjected to moving springs ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 293 (2005), p. 360–379 (cf. p. 44, 101, 119).
- [VO85] R. VALID et R. OHAYON. « Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques ». Dans : *La Recherche aérospatiale* 4 (1985), p. 251–263 (cf. p. 28).
- [Vor+95a] v. d. E. VORST et al. « Steady-state behaviour of nonlinear flexible rotor-bearing systems. Part 1. An efficient numerical analysis method ». Dans : *Machine vibration* 3 (1995), p. 138 (cf. p. 54).
- [Vor+95b] v. d. E. VORST et al. « Steady-state behaviour of nonlinear flexible rotor-bearing systems. Part 2. Application : influence of cavitation ». Dans : *Machine vibration* 3 (1995), p. 146 (cf. p. 54).
- [Wau90] J. WAUER. « On the Dynamics of Cracked Rotors : A Literature Survey ». Dans : *Applied Mechanics Reviews* 43 (1990), p. 13–17 (cf. p. 25).
- [Wil+10] J. C. WILKES et al. « The Numerical and Experimental Characteristics of Multimode Dry-Friction Whip and Whirl ». Dans : *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 132.5, 052503 (2010), p. 052503 (cf. p. 41).
- [Wil08] J. WILKES. « A Perspective on the Numerical and Experimental Characteristics of Multi-mode Dry-friction Whip and Whirl ». Mém.de maîtr. Texas A & M University, 2008 (cf. p. 42).
- [Wil79] S. J. WILDHEIM. « Excitation of Rotationally Periodic Structures ». Dans : *Journal of Applied Mechanics* 46.4 (1979), p. 878–882 (cf. p. 28).
- [Wri06] P. WRIGGERS. *Computational contact mechanics*. Springer, 2006 (cf. p. 48).
- [YI01] T. YAMAMOTO et Y. ISHIDA. *Linear and nonlinear rotordynamics*. John Wiley & Sons, 2001 (cf. p. 25).

- [ZWE14] A. ZILLI, R. WILLIAMS et D. EWINS. « Non-Linear dynamics of a simplified model of an overhung rotor subjected to intermittent annular rubs ». Dans : *ASME Turbo Expo, Düsseldorf, June 16-20*. 2014 (cf. p. 16).
- [ZWL03] Y. ZHANG, B. WEN et Q. LIU. « Reliability Sensitivity for Rotor-Stator Systems with Rubbing ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 259.5 (2003), p. 1095 –1107 (cf. p. 49).

Table des figures

I.1	Coupe schématique d'un turboréacteur <i>double corps / double flux</i> . . .	8
I.2	Le LEAP : turboréacteur civil de dernière génération	8
I.3	Configurations d'un système continu : (a) Configuration de référence; (b) Configuration initiale; (c) Configuration déformée. [Gmu07]	12
I.4	Rotations du disque et repères associés	17
I.5	Modèle de rotor élémentaire [LF98]	19
I.6	Schéma des directions de précessions possibles. Ω décrit la vitesse de rotation de l'arbre et ω_0 est la pulsation propre du mode concerné [SPW05]	21
I.7	Diagrammes de Campbell obtenus dans chacun des repères	22
I.8	Diagramme de Campbell (en haut) et réponse à balourd (en bas) dans les repères fixes (à gauche) et mobile (à droite)	23
I.9	Diagramme de Campbell et réponse à balourd du modèle comportant un support-palier anisotrope	24
I.10	Poutre de section rectangulaire encastrée sur un cylindre rigide en rotation [Lai10]	28
I.11	Effets de la rotation sur la pulsation propre du premier mode de flexion d'une poutre en rotation	29
I.12	Roue aubagée et son secteur de référence (illustration issue de [Gru12])	29
I.13	Schéma de définition des degrés de liberté frontières sur le secteur de référence	31
I.14	Déformées de modes non dégénérés : $k = 0$ à gauche et $k = 18$ à droite (illustration issue de [Lax07])	31
I.15	Déformées de modes dégénérés : $k = 2$ (illustration issue de [Lax07])	32
I.16	Modes de carter à deux (à gauche) et trois (à droite) diamètres nodaux	33
II.1	Vue en coupe du turbofan CFM56 série 3	39
II.2	Demi-vue schématique du module compresseur basse pression : principaux éléments structuraux et localisation des possibles contacts . .	40
II.3	Précession de l'arbre générée par le frottement : efforts agissants sur le rotor	41

II.4	Critères de l'interaction modale : à gauche, coincidence des vitesses de propagation (diagramme tracé dans le repère fixe) ; à droite, compatibilité géométrique, modes à 3 diamètres nodaux (illustration provenant de [Leg05])	44
II.5	Schémas du modèle proposé par Sinha [Sin04]	45
II.6	Deux solides élastiques en contact	47
II.7	Illustration des relations de contact	48
II.8	Bifurcations locales des points fixes [NB95 ; Sar08]	61
II.9	Bifurcations des points fixes (a) et des solutions périodiques (b) (schéma issu de [Man04])	62
III.1	Architecture globale du modèle	64
III.2	Visualisation 3D du modèle	65
III.3	Rotations subies par la section droite de l'arbre et repères associés	66
III.4	Rotations qui positionnent l'aube j et repères associés	69
III.5	Rotations du carter et repères associés	72
III.6	Position angulaire d'un point du carter observé depuis le repère fixe et mobile	75
III.7	Diagrammes de Campbell des configurations « WEM » et « module » du modèle, décrits dans le repère mobile	82
III.8	Déformées des modes à diamètres de la roue aubagée (modèle « module »)	82
III.9	Déformées à diamètres du carter (modèle « module »)	83
III.10	Déformées des modes d'ensemble à 0 rpm	84
III.11	Diagramme de Campbell du modèle complet décrit dans le repère tournant	85
III.12	Déformées à 0 rpm des deux couples de modes identifiés par $(W^*(1), B^*(1n_d))$ et $(B^*(1n_d), W^*(2))$	86
III.13	Interprétation de la cinématique de la section droite de l'arbre sur la circonférence du disque	87
III.14	Influence de l'orientation de la flexion des aubes β sur l'évolution des fréquences propres des modes de roue aubagée	88
III.15	Diagrammes de Campbell obtenus pour $\beta = 0^\circ$ et $\beta = 90^\circ$	89
III.16	Partie rotor des déformées modales $W^*(5,6)$ à 0 rpm pour $\beta = 0^\circ$ et $\beta = 90^\circ$	89
III.17	Schémas de la géométrie de la zone de contact	91
III.18	Réponse à un balourd turbine mesurée au disque fan	93
III.19	Comparaison des consommations de jeu obtenues pour différentes méthodes de calcul	94
III.20	Consommations de jeu obtenues pour différentes valeurs de l_c	95
III.21	Consommations de jeu obtenues pour différentes valeurs de $\hat{\theta}$	95
III.22	Consommations de jeu obtenues pour différentes valeurs de β	96
III.23	Schéma de l'interpolation du jeu sur la corde au sommet d'aube	97

III.24	Pressions de contact appliquées sur la corde	97
III.25	Analyse de stabilité pour une aube en contact non-frottant, formulation $2D$	102
III.26	Evolution des parties réelles avec le régime pour une aube en contact frottant : formulation $2D$	103
III.27	Influence du champ de déplacement considéré pour le calcul de $\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(3D)}(\mathbf{q}_0)$, sur les parties réelles obtenues	104
III.28	Valeurs propres obtenues pour une aube en contact frottant : comparaison des formulations du contact $2D$ et $3D$	105
III.29	Evolution des parties réelles avec le régime pour différents paramètres de contact (formulation $3D$, contact sur une seule aube) . . .	108
III.30	Phénomènes instables filtrés par le positionnement des contacts (formulation $3D$)	109
III.31	Stabilité des positions d'équilibres statiques pour un contact induit par le balourd, jeu initial de 0.5 mm sur toute la corde.	113
III.32	Equilibres statiques obtenus pour $\Omega = 4800$ rpm et 7000 rpm	114
III.33	Carte des contacts et carte de stabilité pour gestion $3D$, $k_r = 5 \times 10^6$ N/m et $\mu = 0.2$	117
III.34	Carte des contacts et carte de stabilité pour gestion $2D$, $k_r = 5 \times 10^6$ N/m et $\mu = 0.2$	118
III.35	Cartes de stabilité pour différents paramètres de contact (formulation $3D$)	120
III.36	Repérage des points de vérification de la frontière de stabilité	123
III.37	Efforts normaux et déformée stabilisée, obtenus au point de la frontière externe à 6000 rpm et 0.4 mm de jeu initial	124
III.38	Résultats stables de frontière externe : comparaison statique/transitoire de la distribution des réactions normales de contact	125
III.39	Résultats instables de la frontière intérieure : comparaison du contenu fréquentiel de la réponse transitoire avec les fréquences propres des modes instables calculés autour de chaque équilibre statique	126
III.40	Choix de la fenêtre temporelle traitée par fft pour différentes natures de résultats : sans contact, contact stable et instable	128
III.41	Spectres fréquentiels des intégrations temporelles réalisées de 3200 à 7600 rpm : comparaison avec les résultats issus des équilibres statiques (voir figure III.31)	129
III.42	Composantes statiques de la flèche au sommet de l'aube 1 issue des calculs transitoires : comparaison avec les résultats issus des équilibres statiques	130
III.43	Contenu fréquentiel des signaux transitoires de 20 à 600 Hz	132
III.44	Intégration temporelle à 4800 rpm, prises de contact successives lors de l'application du balourd	134

III.45	Intégration Temporelle (I.T.) à 4800 rpm, description des prises et pertes de contact	135
III.46	I.T. à 4800 rpm, contenu fréquentiel en fonction du temps obtenu par transformée en ondelettes (CWT, <i>Continuous Wavelet Transform</i>)	137
III.47	I.T. à 4800 rpm, trajectoires des centres de gravité (cdg) du disque fan et du carter tracées dans le repère mobile	139
III.48	I.T. 4800 rpm, évolution des diamètres nodaux sur le carter et la roue aubagée en fonction du temps	141
III.49	I.T. 4800 rpm, contenu fréquentiel filtré en diamètres nodaux pour le carter et la roue aubagée	142
III.50	I.T. à 7000 rpm et réactions normales de contact et déformée à $t = 1.2 \text{ sec}$	143
III.51	I.T. à 7000 rpm, trajectoires des centres de gravité du disque fan et du carter tracées dans le repère mobile	145
III.52	I.T. à 7000 rpm, évolution des diamètres nodaux sur le carter en fonction du temps	146
III.53	I.T. à 7000 rpm, contenu fréquentiel filtré en diamètres nodaux (carter uniquement)	146
IV.1	Vue schématique du <i>WEM</i> 1D d'un moteur bi-rotor	150
IV.2	Diagramme de Campbell (repère fixe) et réponse au balourd du modèle industriel : comparaison entre le modèle extrait (complet et amortissement hystérétique) et celui utilisé (condensé et amortissement visqueux)	154
IV.3	Amortissements réduits : comparaison entre le modèle extrait (complet et amortissement hystérétique) et celui utilisé (condensé et amortissement visqueux)	155
IV.4	Diagramme de Campbell (repère mobile) et réponse au balourd du modèle utilisé avec et sans aubes et carter souple	158
IV.5	Déformée du mode fan à 0 rpm	159
IV.6	Stabilité des positions d'équilibre statique	162
IV.7	Dessin du module fan déformé associé aux équilibres statiques obtenus à $\Omega_{bp} = 6.3$ et 8.3	163
IV.8	Carte de stabilité : régime / jeu initial	165
IV.9	Carte de stabilité : balourd / jeu initial	165
IV.10	Carte de stabilité : k_r / μ	166

Annexe A

Jacobienne des efforts de contact (formulation 2D)

Cette section présente le détail de la matrice Jacobienne des efforts de contact obtenue pour une formulation 2D, lorsque l'aube j de position α_j est en contact avec la surface interne du carter. La formulation de contact concernée est détaillée dans la section III.2, où l'équation (III.58) détermine la distance minimale entre le sommet de l'aube j et le carter, et les équations (III.64) et (III.65) expriment les efforts de contact obtenus lorsque le jeu est négatif.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(X_0, X_0) &= -\sin \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(X_0, Y_0) &= \cos \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(X_0, X_m) &= -\sin \alpha_j W_m(z_{d_f}) (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(X_0, Y_m) &= \cos \alpha_j W_m(z_{d_f}) (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(X_0, X_{nj}) &= 0; \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(X_0, x_c) &= \sin \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(X_0, y_c) &= -\cos \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(X_0, \phi_{x_c}) &= 0; \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(X_0, \phi_{y_c}) &= 0;
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(Y_0, X_0) &= \sin \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(Y_0, Y_0) &= -\cos \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(Y_0, X_m) &= \sin \alpha_j W_m(z_{d_f}) (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(Y_0, Y_m) &= -\cos \alpha_j W_m(z_{d_f}) (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(Y_0, X_{nj}) &= 0; \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(Y_0, x_c) &= -\sin \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(Y_0, y_c) &= \cos \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(Y_0, \phi_{x_c}) &= 0; \\
 \mathbf{J}_{\mathbf{q}}\mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(Y_0, \phi_{y_c}) &= 0;
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_m, X_0) &= -\sin \alpha_j W_m(z_{d_f}) (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_m, Y_0) &= \cos \alpha_j W_m(z_{d_f}) (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_m, X_M) &= -\sin \alpha_j W_m(z_{d_f}) W_M(z_{d_f}) (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_m, Y_M) &= \cos \alpha_j W_m(z_{d_f}) W_M(z_{d_f}) (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_m, X_{nj}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_m, x_c) &= \sin \alpha_j W_m(z_{d_f}) (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_m, y_c) &= -\cos \alpha_j W_m(z_{d_f}) (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_m, \phi_{x_c}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_m, \phi_{y_c}) &= 0;
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(Y_m, X_0) &= \sin \alpha_j W_m(z_{d_f}) (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(Y_m, Y_0) &= -\cos \alpha_j W_m(z_{d_f}) (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(Y_m, X_M) &= \sin \alpha_j W_m(z_{d_f}) W_M(z_{d_f}) (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(Y_m, Y_M) &= -\cos \alpha_j W_m(z_{d_f}) W_M(z_{d_f}) (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(Y_m, X_{nj}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(Y_m, x_c) &= -\sin \alpha_j W_m(z_{d_f}) (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(Y_m, y_c) &= \cos \alpha_j W_m(z_{d_f}) (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(Y_m, \phi_{x_c}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(Y_m, \phi_{y_c}) &= 0;
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_{nj}, X_0) &= k_t Y_n(L_b) \sin \alpha_j \cos \beta; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_{nj}, Y_0) &= -k_t Y_n(L_b) \cos \alpha_j \cos \beta; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_{nj}, X_m) &= k_t Y_n(L_b) W_m(z_{d_f}) \sin \alpha_j \cos \beta; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_{nj}, Y_m) &= -k_t Y_n(L_b) W_m(z_{d_f}) \cos \alpha_j \cos \beta; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_{nj}, X_{Nj}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_{nj}, x_c) &= -k_t Y_n(L_b) \sin \alpha_j \cos \beta; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_{nj}, y_c) &= k_t Y_n(L_b) \cos \alpha_j \cos \beta; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_{nj}, \phi_{x_c}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(X_{nj}, \phi_{y_c}) &= 0;
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(x_c, X_0) &= \sin \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(x_c, Y_0) &= -\cos \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(x_c, X_m) &= \sin \alpha_j W_m(z_{df}) (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(x_c, Y_m) &= -\cos \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(x_c, X_{nj}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(x_c, x_c) &= -\sin \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(x_c, y_c) &= \cos \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(x_c, \phi_{x_c}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(x_c, \phi_{y_c}) &= 0;
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(y_c, X_0) &= -\sin \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(y_c, Y_0) &= \cos \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(y_c, X_m) &= -\sin \alpha_j W_m(z_{df}) (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(y_c, Y_0) &= \cos \alpha_j W_m(z_{df}) (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(y_c, X_{nj}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(y_c, X_0) &= \sin \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(y_c, Y_0) &= -\cos \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(y_c, \phi_{x_c}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(y_c, \phi_{y_c}) &= 0;
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(\phi_{x_c}, X_0) &= z_c \sin \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(\phi_{x_c}, Y_0) &= -z_c \cos \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(\phi_{x_c}, X_0) &= z_c W_m(z_{df}) \sin \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(\phi_{x_c}, Y_0) &= -z_c W_m(z_{df}) \cos \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(\phi_{x_c}, X_{nj}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(\phi_{x_c}, x_c) &= -z_c \sin \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(\phi_{x_c}, y_c) &= z_c \cos \alpha_j (k_t \sin \alpha_j + k_r \cos \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(\phi_{x_c}, \phi_{x_c}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{\text{nl}}^{(2D)}(\phi_{x_c}, \phi_{y_c}) &= 0;
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(\phi_{y_c}, X_0) &= z_c \sin \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(\phi_{y_c}, Y_0) &= -z_c \cos \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(\phi_{y_c}, X_0) &= z_c W_m(z_{d_f}) \sin \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(\phi_{y_c}, Y_0) &= -z_c W_m(z_{d_f}) \cos \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(\phi_{y_c}, X_{n_j}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(\phi_{y_c}, x_c) &= -z_c \sin \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(\phi_{y_c}, y_c) &= z_c \cos \alpha_j (-k_t \cos \alpha_j + k_r \sin \alpha_j); \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(\phi_{y_c}, \phi_{x_c}) &= 0; \\
\mathbf{J}_q \mathbf{F}_{nl}^{(2D)}(\phi_{y_c}, \phi_{y_c}) &= 0;
\end{aligned} \tag{A.9}$$

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

Monsieur J-C. GOLINVAL
Professeur - Université de Liège - LTAS - chemin des Chevreuils, 1 - Bât. B52 - 4000 LIEGE 1
BELGIQUE

Et de

Monsieur P. CARTRAUD
Professeur - Ecole centrale de Nantes - GÉM - Institut de Recherches en Génie Civil et Mécanique
UMR CNRS 6183 - Equipe "Structure et Simulation" - BP 92101 - 44321 Nantes cedex 3

Mademoiselle PARENT Marie-Océane

est autorisée à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE , ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 23 février 2015

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes

