

Identification paramétrique en boucle fermée par une commande optimale basée sur l'analyse d'observabilité

Jun Qian

▶ **To cite this version:**

Jun Qian. Identification paramétrique en boucle fermée par une commande optimale basée sur l'analyse d'observabilité. Automatique / Robotique. Université Claude Bernard - Lyon I, 2015. Français. NNT : 2015LYO10113 . tel-01217811

HAL Id: tel-01217811

https://theses.hal.science/tel-01217811

Submitted on 20 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 113-2015 Année 2015

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON

Délivrée par

L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1

ECOLE DOCTORALE EEA

DIPLOME DE DOCTORAT (arrêté du 7 août 2006)

Spécialité

AUTOMATIQUE

soutenue publiquement le 14 Septembre 2015

par

Mlle Jun QIAN

TITRE : **Identification paramétrique en boucle fermée par une commande optimale basée sur l'analyse d'observabilité.**

devant le jury composé de

Mme	Isabelle QUEINNEC	Rapporteur, DR CNRS Toulouse
Mr	Abderrazak M. LATIFI	Rapporteur, PU Université de Lorraine
Mr	Xavier BOMBOIS	Examinateur, DR CNRS Ecole Centrale de Lyon
Mr	Pascal DUFOUR	Directeur de thèse, MCU Université Lyon 1
Mme	Marion GILSON-BAGREL	Examinateur, PU Université de Lorraine
Mme	Madiha NADRI-WOLF	Co-directeur de thèse, MCU Université Lyon 1
Mr	Alain E.E. RAPAPORT	Examinateur, DR INRA Montpellier
et		
Mr	Petru-Daniel MOROŞAN	membre invité, Docteur Acsystème Rennes

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

Président de l'Université	**M. François-Noël GILLY**
Vice-président du Conseil d'Administration	M. le Professeur Hamda BEN HADID
Vice-président du Conseil des Etudes et de la Vie Universitaire	M. le Professeur Philippe LALLE
Vice-président du Conseil Scientifique	M. le Professeur Germain GILLET
Directeur Général des Services	M. Alain HELLEU

COMPOSANTES SANTE

Faculté de Médecine Lyon Est – Claude Bernard	Directeur : M. le Professeur J. ETIENNE
Faculté de Médecine et de Maïeutique Lyon Sud – Charles Mérieux	Directeur : Mme la Professeure C. BURILLON
Faculté d'Odontologie	Directeur : M. le Professeur D. BOURGEOIS
Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques	Directeur : Mme la Professeure C. VINCIGUERRA
Institut des Sciences et Techniques de la Réadaptation	Directeur : M. le Professeur Y. MATILLON
Département de formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine	Directeur : Mme. la Professeure A-M. SCHOTT

COMPOSANTES ET DEPARTEMENTS DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Faculté des Sciences et Technologies	Directeur : M. F. DE MARCHI
Département Biologie	Directeur : M. le Professeur F. FLEURY
Département Chimie Biochimie	Directeur : Mme Caroline FELIX
Département GEP	Directeur : M. Hassan HAMMOURI
Département Informatique	Directeur : M. le Professeur S. AKKOUCHE
Département Mathématiques	Directeur : M. le Professeur Georges TOMANOV
Département Mécanique	Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID
Département Physique	Directeur : M. Jean-Claude PLENET
UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives	Directeur : M. Y.VANPOULLE
Observatoire des Sciences de l'Univers de Lyon	Directeur : M. B. GUIDERDONI
Polytech Lyon	Directeur : M. P. FOURNIER
Ecole Supérieure de Chimie Physique Electronique	Directeur : M. G. PIGNAULT
Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1	Directeur : M. le Professeur C. VITON
Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education	Directeur : M. le Professeur A. MOUGNIOTTE
Institut de Science Financière et d'Assurances	Directeur : M. N. LEBOISNE

Résumé

Dans un objectif conjoint d'identification paramétrique en ligne, les méthodes développées dans cette thèse permettent de concevoir en ligne et en boucle fermée les entrées optimales qui enrichissent les informations contenues dans l'expérience en cours. Ces méthodes reposent sur des mesures en temps réel du procédé, sur un modèle dynamique non linéaire (ou linéaire) multi-variable choisi du procédé, sur un modèle de sensibilité des mesures par rapport aux paramètres à estimer et sur un observateur non linéaire. L'analyse de l'observabilité et des techniques de commande prédictive permettent de définir la commande optimale qui est déterminée en ligne par optimisation sous contraintes. Des aspects de stabilisation sont également étudiés (via un apport de contraintes fictives ou via une technique de Lyapunov). Enfin, une loi de commande explicite pour le cas particulier du système d'ordre un est développée. Des exemples illustratifs sont traités via le logiciel ODOE4OPE : un bio-réacteur, un réacteur continu parfaitement agité et une aile delta. Ces exemples permettent de voir que l'estimation des paramètres peut être réalisée avec une bonne précision, et à moindre coût expérimental en une expérience.

Mots-Clés

Identification paramétrique en ligne en boucle fermée, commande prédictive, observation, design d'expériences optimales, observabilité, modèle de sensibilité.

Abstract

For online parameter identification, the developed methods here allow to design online and in closed loop optimal inputs that enrich the information in the current experience. These methods are based on real-time measurements of the process, on a dynamic nonlinear (or linear) multi-variable model, on a sensitivity model of measurements with respect to the parameters to be estimated and a nonlinear observer. Analysis of observability and predictive control techniques are used to define the optimal control which is determined online by constrained optimization. Stabilization aspects are also studied (by adding fictitious constraints or by a Lyapunov technique). Finally, for the particular case of a first order linear system, the explicit control law is developed. Illustrative examples are processed via the ODOE4OPE software : a bio-reactor, a continuous stirred tank reactor and a delta wing. These examples help to see that the parameter estimation can be performed with good accuracy in a single and less costly experiment.

Keywords

Online closed loop parameter identification, model based predictive control, observer, design of optimal experiment, observability, sensitivity model.

Remerciements

Cette thèse CIFRE est issue d'une collaboration entre :

- le Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés (LAGEP) UMR 5007 CNRS-UCBL1, 43 boulevard du 11 Novembre, 69100 Villeurbanne [1]
- Acsystème 4 rue René Dumont 35700 Rennes France [2]

Le ministère français de l'éducation supérieure et de la recherche, pour le soutien financier de cette thèse CIFRE 2011/0876, est remercié.

Je remercie en premier lieu Monsieur Pascal Dufour, Maître de conférences HDR à l'Université Lyon 1, pour avoir accepté de diriger ma thèse. Je tiens à vous exprimer toute ma gratitude pour votre soutien sans réserve et la confiance que vous m'avez témoignée tout au long de ces années. Je suis également profondément reconnaissant pour votre patience, votre disponibilité, vos qualités humaines et surtout vos qualités scientifiques que vous m'avez apportées au cours de ce travail. Je tiens également à remercier profondément ma co-directrice de thèse, Madame Madiha Nadri Wolf, Maître de conférences à l'Université Lyon 1, de m'avoir accompagné tout au long de cette aventure, de m'avoir donné autant de conseils avisés et de m'avoir initié aux techniques d'observation dans le domaine de l'identification paramétrique. J'ai beaucoup apprécié les longs échanges scientifiques et méthodologiques qui sont survenus tout au long de ces trois années. Grâce à l'aide de vous deux, ce travail a été possible. Ces quelques mots l'expression ne seront jamais suffisants pour présenter mes remerciements à vous deux.

J'adresse un vif remerciement à Monsieur Patrice Houizot, Président directeur général de l'entreprise Acsystème, qui m'a permis de réaliser cette thèse CIFRE et accordé la confiance et l'intérêt à mes travaux de recherche. Je suis profondément reconnaissant pour les moyens humains et financiers que vous n'avez pas hésité à mettre en œuvre afin de voir aboutir ces trois années de recherche. Je remercie très particulièrement le Docteur Petru-Daniel Moroşan, à l'entreprise Acsystème, d'avoir suivi mon travail chez Acsystème à Rennes, de m'avoir aidé énormément dans le domaine de la commande prédictive, d'avoir été présent chaque fois que nécessaire, ainsi que d'avoir accepté d'être un membre invité du jury.

Je tiens à remercier tous deux, Mme Isabelle Queinnec, directeur de recherche du LAAS-CNRS Toulouse, et Monsieur Abderrazak M.Latifi, Professeur à l'Université de Lorraine, d'avoir accepté de rapporter ma thèse et de m'avoir fait part de leurs remarques. J'ai particulièrement apprécié leurs précieux conseils et leurs sens critiques sur le domaine de l'identification paramétrique et sur les perspectives intéressantes que l'on peut mener à la suite de

[1] www-lagep.univ-lyon1.fr
[2] www.acsysteme.com

ces travaux.

Je remercie Monsieur Xavier Bombois, Directeur de Recherche de CNRS à l'École Centrale de Lyon, d'avoir présidé mon jury de thèse. Je souhaite également remercier Madame Marion Gilson Bagrel, Professeur à l'Université de Lorraine, et M. Alain E.E. Rapaport, Directeur de Recherche d'INRA Montpellier pour avoir accepté d'évaluer ce travail, pour leurs conseils et remarques très constructives.

Ensuite, je remercie chaleureusement l'ensemble du personnel qui a su "m'adopter" chez Acsystème pendant 18 mois de ces trois années. Merci également pour cette formidable aventure humaine que nous avons partagé au sein de l'entreprise, pour tous les repas du midi, pour les pauses "gâteaux" à 10h, pour me "forcer" à joindre votre équipe de volley-ball (afin de participer à l'Olympiade Rennes) et pour ces bons moments de rigolade !

Je remercie aussi tous les membres de l'équipe de recherche Systèmes Non Linéaires et Procédés du LAGEP pour m'avoir accueilli parmi eux. Merci à Hassan, Vincent, Ulysee, Cheng-Zhong et tous les autres professeurs et maîtres de conférences de l'équipe, pour leur aide,leur sympathie et leur générosité. Je pense également à tous les personnels du service technique et administratif du LAGEP : Nadia, Olivier, Sébastien et Jean-Pierre, pour leur efficacité et sérénité. Et je présente aussi un grand remerciement tous ceux qui m'ont encouragé et soutenu pendant ces trois années : Yongxin, Johan, Mariem, Weijun, Yousra, Chouaib, Tu et Jing, doctorants et docteurs du LAGEP, pour ces bons moments que nous avons partagés et l'aide que vous m'avez donnée.

Enfin, je remercie éternellement mes chers parents pour leur amour, leur confiance et leur soutien inconditionnel depuis toujours. Je dédie ce travail à eux sans qui rien n'aurait été possible.

Production scientifique et technique issues de la thèse

3 conférences internationales à comité de lecture et avec actes

- P. Dufour, J. Qian, M. Nadri, "An explicit optimal input design for first order systems identification", soumission 37 acceptée le 31 mai 2015 à l'IFAC Symposium on System Identification (SYSID) 2015, Pekin, Chine, 19-21 octobre 2015.

- J. Qian, M. Nadri, P.D. Moroşan, P. Dufour, "Closed loop optimal experiment design for on-line nonlinear system parameter identification", IFAC-IEEE European Control Conference (ECC), Strasbourg, France, pp. 1813-1818, June 24-27, 2014. OAI : hal-01023213

- J. Qian, P. Dufour, M. Nadri, "Observer and model predictive control for on-line parameter identification in nonlinear systems", Proceedings of the 10th IFAC International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems (DYCOPS), Mumbai, India, pp. 571-576, december 18-20, 2013. OAI : hal-01025666

1 conférence internationale à comité de lecture et sans acte

- J. Qian, P. Dufour, M. Nadri, P.D. Moroşan, "Identification paramétrique en ligne : ODOE4OPE, un logiciel d'optimisation en génie des procédés", 9th Congrès Francophone de Génie des Procédés (SFGP), Agadir, Maroc, papier 133, 28-30 avril 2014 OAI : hal-01025648

2 réunions nationales

- J. Qian, P. Dufour, M. Nadri, "Identification paramétrique en ligne : ODOE4OPE, un logiciel d'optimisation en génie des procédés", séminaire suite à invitation lors de la réunion du Groupe Informatique et Procédés (IEP) de la SFGP sur la journée "Planification d'expériences ou comment concevoir les bonnes expériences en relation avec un modèle de procédé en particulier non-linéaire", 3 juin 2014.

- J. Qian, P. Dufour, M. Nadri, P. Houizot, "ODOE4OPE : Design optimal du plan d'expériences pour l'estimation paramétrique en ligne", 4ième journées nationale des utilisateurs de Logiciels dédiés à la Modélisation et au Calcul Scientifique (LMCS) s'est tenue au Pôle Universitaire Léonard de Vinci à La Défense, Paris, France, 7 décembre 2012.

1 logiciel

ODOE4OPE est un logiciel couplant d'une part, l'optimisation et l'automatisation du design du plan d'expériences optimales, et d'autre part, l'estimation de paramètres d'un modèle dynamique non linéaire (ou non) d'un procédé. En général, ces deux fonctions sont réalisées l'une après l'autre. Avec ODOE4OPE (Optimal Design Of Experiments For Online Parameter Estimation), ce double objectif final est réalisé en même temps via une conduite optimale couplée à une technique de capteur logiciel (observateur), l'ensemble basé sur un modèle du procédé. Par ailleurs, pendant l'opération, l'optimisation d'un critère de sensibilité des mesures disponibles par rapport aux paramètres recherchés se fait tout en prenant en compte de diverses contraintes (sécurité, zone opératoire, ...). L'idée de ce logiciel est d'être adaptable à tout nouveau problème, quel que soit le domaine d'utilisation, pour une étude avec un simulateur du procédé ou par la suite avec l'application réelle.

Ce logiciel, crée par P. Dufour au LAGEP, a été déposé en 2012, via la cellule de valorisation de l'Université de Lyon LST (Lyon Sciences Transfert), à l'Agence de Protection des Programmes (APP) sous la référence IDDN.FR.001.480013.000.S.R2012.000.30000.

Toujours à travers Matlab[3], il a continué à être développé entre 2012 et 2015 dans le cadre de la thèse CIFRE de J. Qian (avec la société Acsystème). Ce logiciel compte ainsi à ce jour une trentaine de fichiers sources pour environ 5000 lignes de code.

Plus d'informations sur ce logiciel sont sur ODOE4OPE.univ-lyon1.fr.

[3] www.mathworks.com

Notations

$\Phi_u(t, t_0)$: une matrice de transition avec une dimension $n \times n$.

$\lambda_{min}(G)$ ou $\sigma_{min}(G)$: la plus petite valeur propre d'une matrice G.

$\lambda_{max}(G)$ ou $\sigma_{max}(G)$: la plus grande valeur propre d'une matrice G.

$\psi(.)$: un critère de sensibilité.

$\sigma(A)$: l'ensemble des valeurs propres de la matrice A.

θ : un vecteur de paramètres inconnus du modèle.

θ_o : un paramètre de réglage de l'observateur.

$\omega(.)$: une perturbation sur la sortie mesurée du procédé.

$\hat{(.)}$: l'estimation d'une variable (.).

$\frac{\partial(.)}{\partial\theta}$ ou $(.)_\theta$: la sensibilité de (.) par rapport au vecteur des paramètres estimés θ.

$||d||^2_{L_2([0,T],R^d)} := \int_0^T ||d_2(t)||^2 dt$: la norme 2 du vecteur d.

$||e||_S := e^T S e$: la norme d'un vecteur par une matrice symétrique définie positive.

I : une matrice d'identité.

$J(u)$: la fonction de coût en fonction du contrôle u.

k : l'instant discret courant.

l : les instants discrets futurs.

$L_{f_0}(h)$: la dérivée de Lie de h par rapport au champ f_0.

N_p : l'horizon de prédiction.

$\mathcal{R}_+$: l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à 0,

$\mathcal{R}^*_+$: l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathcal{R}^n$: un vecteur de réels, de dimension n.

$\mathcal{R}^{m\times n}$: l'ensemble des vecteurs de dimension $m \times n$.

u : un vecteur de commandes manipulées.

x_a : un vecteur d'états du modèle augmenté.

x_m ou x : un vecteur d'états du modèle.

x_p : un vecteur d'états du procédé.

$\bar{x}_{i\theta_j}$ ou $\bar{y}_{i\theta_j}$: la sensibilité normalisée de l'état x_i (resp. de la sortie y_i) par rapport au paramètre estimé $\hat{\theta}_j$.

y_m ou y : un vecteur de sorties du modèle.

y_p : un vecteur de sorties du procédé.

u_{min} : les contraintes minimales sur l'amplitude des entrées.

u_{max} : les contraintes maximales sur l'amplitude des entrées.

$y_{p_{min}}$: les contraintes minimales sur les sorties du procédé.

$y_{p_{max}}$: les contraintes maximales sur les sorties du procédé.

exp(.) : l'exponentiel de (.).

Acronymes

BF : Boucle Fermée

BO : Boucle Ouverte

DEO : Design d'Expériences Optimales

EMPC : Economic MPC

ESCF : Erreur de Sortie à Compensateur Fixe

ESFAO : Erreur de Sortie avec Filtrage Adaptatif des Observations

ESFO : Erreur de Sortie avec Filtrage des Observations

ESMPE : Erreur de Sortie avec Modèle de Prédiction Étendu

FKE : Filtre de Kalman Étendu

LEMPC : Lyapunov-based EMPC

LMPC : Lyapunov-based MPC

MCE : Moindres Carrés Étendus

MCG : Moindres Carrés Généralisés

MCR : Moindres Carrés Récursifs

MIF : Matrice d'Information de Fisher

MPC : Model Predictive Control

MVR : Maximum de Vraisemblance Récursif

ODOE4OPE : Optimal Design Of Experiments For Online Parameter Estimation

RCPA : Réacteur Continu Parfaitement Agité

SDP : Symétrique Définie Positive

SPBA : Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire

VIMA : Variable Instrumentale à Modèle Auxiliaire

Table des matières

Résumé **v**

Remerciements **vi**

Production scientifique et technique issues de la thèse **viii**

Notations **x**

Acronymes **xii**

Introduction générale **6**

1 Contexte et problématiques **8**
1.1 Contexte général 8
1.1.1 Approches découplées de commande et d'identification 8
1.1.2 Conception optimale des entrées pour l'identification paramétrique . . . 12
1.1.3 Techniques d'observation dans le domaine de l'identification 13
1.2 Travaux de Flila et al. 13
1.2.1 Commande prédictive à modèle non linéaire 14
1.2.2 Commande prédictive à modèle linéaire en temps variant 14
1.3 Procédés considérés 15
1.4 Classe de modèles considérés 16
1.5 Problématiques considérées 16

2 Quelques rappels fondamentaux **18**
2.1 Observabilités et observateurs pour les systèmes non linéaires 18
2.1.1 Aperçu sur l'observabilité 20
2.1.2 Synthèse d'observateurs 25
2.2 Commande prédictive 31
2.2.1 Contexte général 31
2.2.2 Principe 33

3 Approche d'identification optimale en boucle fermée **40**
3.1 Loi de commande couplant commande prédictive et observateur 40
3.1.1 Principe de l'approche 40
3.1.2 Synthèse de l'observateur pour l'estimation des paramètres 41
3.1.3 Modèle dynamique 42
3.1.4 Modèle de sensibilité 42
3.1.5 Fonction de coût 43
3.1.6 Formulation finale du problème d'identification optimale 44

3.2 Adaptation de la loi de commande pour les systèmes instables en boucle ouverte 45
3.2.1 Stabilisation par contraintes fictives . . . 46
3.2.2 Stabilisation par une approche de type Lyapunov . . . 46
3.3 Algorithme et logiciel . . . 48
3.3.1 Algorithme . . . 48
3.3.2 Logiciel . . . 49
3.4 Adaptation de la loi de commande pour le système linéaire du 1er ordre . . . 50
3.4.1 Principe de l'approche . . . 51
3.4.2 Modèle . . . 51
3.4.3 Modèle de sensibilité . . . 52
3.4.4 Synthèse de l'observateur pour l'estimation du paramètre . . . 52
3.4.5 Réponse indicielle du modèle de sensibilité . . . 52
3.4.6 Conception de l'entrée optimale sous contraintes . . . 53

4 Synthèse d'observateur et problèmes de robustesse 57
4.1 Introduction . . . 57
4.2 Formulation du problème et classe de systèmes considérée . . . 58
4.3 Observateur et robustesse : cas d'entrée constante . . . 58
4.3.1 Théorème général de robustesse . . . 59
4.3.2 Reformulation du théorème : cas avec bruit de mesure uniquement . . . 62
4.3.3 Reformulation du théorème : cas avec bruit sur la dynamique uniquement 63
4.4 Observateurs et robustesse : cas d'entrée variable . . . 64
4.4.1 Cas avec bruit de mesure uniquement . . . 64
4.4.2 Cas avec bruit sur la dynamique uniquement . . . 65
4.5 Optimisation de la robustesse . . . 66
4.5.1 Définition du coût . . . 66
4.5.2 Résolution dans le cas où $L_{d_1} = 0$ en régime permanent . . . 69
4.5.3 Résolution dans le cas où $L_{d_2} = 0$ en régime permanent . . . 74

5 Cas d'étude 78
5.1 Système du 1er ordre . . . 78
5.1.1 Implémentation de l'approche explicite . . . 78
5.1.2 Résultats et discussion . . . 79
5.2 Bioprocédé . . . 82
5.2.1 Implémentation de notre approche . . . 82
5.2.2 Résultats et discussion . . . 84
5.3 Réacteur continu parfaitement agité . . . 89
5.3.1 Travaux existants . . . 89
5.3.2 Implémentation de notre approche . . . 89
5.3.3 Résultats et discussion . . . 95
5.4 Aile delta . . . 101
5.4.1 Modélisation de l'aile delta . . . 101
5.4.2 Travaux existants . . . 101
5.4.3 Implémentation de notre approche . . . 102
5.4.4 Résultats et discussion . . . 105

Conclusions et perspectives 113

Bibliographie 115

Table des figures

1.1 Structure générale de l'approche d'identification en boucle ouverte 10
1.2 Structure générale de l'approche d'identification en boucle fermée 11
1.3 Valeur du paramètre inconnu : constant ou évolutif 17

2.1 Schéma de principe d'un observateur 19
2.2 Observabilité globale ou Distinguabilité 21
2.3 Schéma d'un observateur pour un système linéaire 26
2.4 Généalogie des algorithmes de MPC 33
2.5 Diverses paramétrisations possibles de la séquence de commande : $N_c = 1$ (en haut), $N_c > 1$ (au milieu), u forme polynomiale avec $N_c \neq 1$ (en bas) 37
2.6 Schéma de principe de la commande prédictive 38

3.1 Structure de commande en boucle fermée pour l'identification en ligne de paramètres du modèle 41
3.2 Interprétation géométrique des critères de sensibilité (zone grise : région de confiance des paramètres) (Franceschini et Macchietto (2008)) 44
3.3 Critère quadratique : interprétation géométrique 55

4.1 Vecteur d'erreur e et norme $||e||$: dans le cas optimal, avec bruit sur la dynamique et sur la mesure 69
4.2 Vecteur d'erreur e et norme $||e||$: avec l'observateur classique sans optimisation, avec bruit sur la dynamique et sur la mesure 70
4.3 Etats du modèle (x_1 et x_2) et de l'observateur ($\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$) : cas avec bruit de mesure uniquement 73
4.4 Etats du modèle (x_3) et de l'observateur ($\hat{x}_3$) et les erreurs d'estimation : cas avec bruit de mesure uniquement 73
4.5 Norme de l'erreur : cas optimal et cas non optimal, avec bruit de mesure uniquement 74
4.6 Les états du modèle (x_1 et x_2) et de l'observateur ($\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$) dans le cas avec bruit sur la dynamique uniquement 75
4.7 Les états du modèle (x_3) et de l'observateur ($\hat{x}_3$) et les erreurs d'estimation dans le cas avec bruit sur la dynamique uniquement 76
4.8 La norme de l'erreur dans le cas optimal et le cas non optimal, avec bruit sur la dynamique uniquement. 76

5.1 Système du 1$^{\text{er}}$ ordre : estimation du paramètre inconnu (cas 1 et 2) 80
5.2 Système du 1$^{\text{er}}$ ordre : sortie du procédé (cas 1 et 2) 80
5.3 Système du 1$^{\text{er}}$ ordre : commande appliquée $u^{\max}$ (en haut) et seuil de commande $u_{\min}$ (en bas) en boucle fermée (cas 2) 81
5.4 Système du 1$^{\text{er}}$ ordre : sensibilité (cas 1 et 2) 81

5.5 Bioprocédé : commande u et sortie mesurée y_p 85
5.6 Bioprocédé : cibles et estimations des paramètres inconnus du modèle 86
5.7 Bioprocédé : estimation de l'état non mesuré x_2 en BO et en BF avec les différents critères 86
5.8 Bioprocédé : sensibilités des états du modèle par rapport aux paramètre inconnus en BO et en BF avec les différents critères 87
5.9 Procédure pour choisir le meilleur critère du design d'expériences optimales . . 87
5.10 Bioprocédé : comparaison des différents critères dans les différents expériences optimales 88
5.11 RCPA sans bruit : cibles et estimations des paramètres inconnus du modèle . . 96
5.12 RCPA sans bruit : commande u et sortie mesurée y_{p1} sous contraintes 96
5.13 RCPA sans bruit : sensibilités normalisés des états du modèle par rapport aux paramètre inconnus. 97
5.14 RCPA sans bruit : critère E maximal. 97
5.15 RCPA avec bruit : cibles et estimations des paramètres inconnus du modèle . . 98
5.16 RCPA avec bruit : commande u et sortie mesurée y_{p1} sous contraintes 99
5.17 RCPA avec bruit : sensibilités normalisés des états du modèle par rapport aux paramètre inconnus. 99
5.18 RCPA avec bruit : critère E maximal. 100
5.19 Aile delta : états stationnaires x_1^0 (en haut à gauche) et x_2^0 (en haut à droite), la partie réelle de chaque valeur propre $\lambda_1(A)$ (en bas à gauche) et $\lambda_2(A)$ (en bas à droite) pour u^0 dans $[-0.01\ 0.01]$ 102
5.20 Aile delta : contrôle optimal en boucle fermée avec contraintes fictives de sortie 106
5.21 Aile delta : sorties du procédé (en haut : y_{p1}, en bas : y_{p2}) en boucle fermée avec contraintes fictives de sortie 106
5.22 Aile delta : estimation des paramètres (du haut vers le bas : θ_1, θ_2 et θ_3) en boucle fermée avec contraintes fictives de sortie 107
5.23 Aile delta : estimation des paramètres (en haut : θ_4, en bas : θ_5) en boucle fermée avec contraintes fictives de sortie 107
5.24 Aile delta : analyse de l'influence de β 108
5.25 Aile delta : contrôle optimal pour $\beta = 0.5$ avec bruit de sortie 110
5.26 Aile delta : sorties du procédé (en haut : y_{p1}, en bas : y_{p2}) pour $\beta = 0.5$ avec bruit de sortie 110
5.27 Aile delta : estimation des paramètres (en haut : θ_1, en bas : θ_2) pour $\beta = 0.5$ avec bruit de sortie 111
5.28 Aile delta : estimation des paramètres (du haut vers le bas : θ_3, θ_4 et θ_5) pour $\beta = 0.5$ avec bruit de sortie 111

Liste des tableaux

2.1 Quelques technologies industrielles de MPC 33

5.1 Système du 1er ordre : cible temps-variant du paramètre inconnu 79
5.2 Système du 1er ordre : conditions initiales et paramètres pour les simulations . 79
5.3 Système du 1er ordre : analyse des résultats 81
5.4 Bioprocédé : paramètres du modèle 82
5.5 Filtre de Kalman étendu en temps continu-discret 83
5.6 Bioprocédé : conditions initiales et paramètres du contrôleur. 85
5.7 Bioprocédé : comparaison des trois critères de sensibilités dans les quatre différents scénarios de simulation. 88
5.8 RCPA : paramètres connus du modèle. 90
5.9 RCPA : valeurs initiales et cibles des paramètres inconnus du modèle. 90
5.10 RCPA : conditions initiales et paramètres pour les simulations 95
5.11 Aile delta : valeurs normalisées des paramètres connus (en haut) et inconnus (en bas). 101
5.12 Aile delta : erreurs initiales d'estimation des paramètres. 105
5.13 Aile delta : erreur finale d'estimation des paramètres : méthode à contraintes fictives. 105
5.14 Aile delta : erreurs moyennes (en %) finales d'estimation des paramètres et stabilité des états (en gras, le meilleur compromis) : méthode Lyapunov. . . . 109

Introduction générale

Pour la simulation, le contrôle-commande ou l'optimisation des procédés industriels ou de laboratoires, la puissance croissante des matériels numériques et des algorithmes informatiques amène à considérer des modèles dynamiques de plus en plus complexes et de plus en plus réalistes. Cependant, à cause de la complexité des phénomènes mis en jeu dans ces procédés, des limitations physiques et des contraintes économiques, les paramètres du modèle ne peuvent pas toujours tous être déduits facilement de données expérimentales obtenues simplement. Par conséquent, l'utilisation des méthodes de design d'expériences et d'identification paramétrique ne peut pas être évitée pour obtenir des valeurs de paramètres plus précises satisfaisant aux objectifs de la modélisation.

Les premières méthodes d'identification étaient basées sur des modèles linéaires de type « boîte noire ». Ces méthodes étaient développées en boucle ouverte et étaient basées sur l'analyse des réponses graphiques (indicielles, impulsionnelles ou fréquentielles ...). Cependant, ce type de modèle est moins représentatif pour des comportements physiques complexes et ne permet pas d'atteindre les objectifs de modélisation. Pour des modèles plus complexes (linéaires ou non linéaires), les approches d'identification consistent généralement à concevoir d'abord les entrées d'excitation appropriées (garantissant l'identifiabilité du modèle). Ensuite, ces entrées sont appliquées au procédé réel dans le cadre de plan d'expériences pour l'identification où les données expérimentales d'entrée-sortie sont traitées par la suite afin d'identifier les paramètres inconnus du modèle. La conception de ces entrées d'excitation influe directement sur la richesse des informations contenues dans les mesures expérimentales utilisées pour l'identification, et donc sur la précision de l'estimation des paramètres inconnus.

Dans ce contexte, la première ambition de notre étude concernera le développement d'une méthode de couplage de la conception de l'entrée optimale et de l'identification des paramètres inconnus dans une seule expérience pour des systèmes dynamiques multi-variables non linéaires (ou linéaires). A l'aide de la théorie de l'observation et de la stratégie de commande prédictive, au cours d'une seule expérience, une entrée optimale variable dans le temps (le plus souvent) sera calculée à chaque instant afin de maximiser sous contraintes un critère de sensibilité, alors que les paramètres inconnus du modèle seront estimés en même temps. En modifiant le coût de notre algorithme de commande optimale, une extension de notre approche prenant en compte la stabilisation sera proposée. D'autre part, nous traiterons le cas particulier, mais très récurrent en industrie, des systèmes à modèle linéaire du premier ordre, mono entrée mono sortie mono paramètre inconnu, où nous donnerons une version explicite de la loi de commande optimale, sans avoir à résoudre en ligne un problème d'optimisation.

La propriété d'observabilité des systèmes non linéaires dépend le plus souvent de la commande : il existe des entrées interdites qui rendent le système inobservable. Ceci nous amènera à la seconde ambition de notre étude qui consistera à établir une relation entre la robustesse

d'observateurs pour les systèmes non uniformément observables et le choix d'un coût approprié pour la design d'une entrée optimale.

Enfin, notre troisième ambition consiste à illustrer l'approche d'identification en boucle fermée dans des champs d'applications assez larges. Trois exemples tirés de différents domaines (biologie, chimie et mécanique) seront présentés, notamment à travers le logiciel ODOE4OPE créé précédemment au LAGEP, et dont le développement a continué dans cette thèse.

Ce mémoire est organisé en 5 chapitres :

- Le chapitre 1 présente un contexte général pour le développement des différentes méthodes pour l'identification paramétrique : des approches découplées de commande et d'identification, le design d'expériences optimales pour l'identification paramétrique, des techniques d'observation dans le domaine de l'identification, et l'origine de nos recherches : les travaux de Flila et al. Dans ce contexte, les procédés et la classe de modèles considérés pour notre approche sont présentés. La problématique dans cette étude est également posée dans ce chapitre.

- Dans le chapitre 2, et suite à l'état sur l'art de l'identification paramétrique dans le chapitre précédent, nous savons que deux facteurs attirent plus d'attention dans le domaine de l'identification optimale : l'observateur et la commande prédictive. Quelques notions d'observabilité et la synthèse des observateurs pour les systèmes non linéaires sont alors introduites. De plus, le contexte général et les principes fondamentaux de la commande prédictive sont présentés.

- Le chapitre 3 présente la première contribution principale de cette thèse : l'approche couplant la commande optimale sous contraintes en boucle fermée et l'identification en ligne des paramètres inconnus du modèle multi-variable par une technique d'observation. Les principes de bases, la structure de commande optimale en boucle fermée pour l'identification et la formulation du problème d'identification optimale pour notre approche sont détaillés dans ce chapitre. De plus, deux extensions de la loi de commande de notre approche sont proposées : une pour un système non linéaire instable en boucle ouverte, et l'autre pour concevoir une loi de commande explicite pour le système mono-variable linéaire du 1^{er} ordre.

- Le chapitre 4 présente la seconde contribution de cette thèse. Dans ce chapitre nous nous intéresserons à la notion de robustesse d'observateurs vis-à-vis des perturbations et des incertitudes du modèle. En choisissant un coût approprié, nous proposons une approche permettant le calcul de l'entrée optimale et du paramètre de réglage de l'observateur garantissant une meilleur robustesse de l'observateur. Nous traiterons une classe de systèmes non linéaires affines en l'état.

- Dans le chapitre 5, quatre cas d'étude en simulation sont illustrés pour évaluer ces méthodes. Le premier cas d'étude est un système linéaire simple mono-variable (le système d'ordre un) pour évaluer notre approche de commande explicite déterminée hors-ligne. Deux exemple classique du génie des procédé (systèmes non linéaires multi-variables) sont ensuite étudiés par notre approche générale d'identification optimale. Le dernier exemple d'étude est un système mécanique instable en boucle ouverte qui est étudié pour évaluer notre loi de commande stabilisante avec l'analyse de Lyapunov.

Chapitre 1

Contexte et problématiques

Résumé. *Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord donner une brève vision générale des méthodes classiques d'identification paramétrique. Dans ce contexte scientifique, nous pourrons alors conclure à des problématiques sur les méthodes d'identification qui ont attiré notre attention. Ensuite, les précédents travaux de Flila et al., qui sont des étapes embryonnaires de notre recherche, seront présentés. Nous décrirons aussi le type de procédés et la classe de modèles considérés pour notre approche. Enfin, nous présenterons les problématiques abordées dans cette thèse.*

1.1 Contexte général

Les problèmes d'identifiabilité (paramètre et/ou structure) et de persistance de l'excitation se posaient depuis le début des année 50 sous un aspect plus mathématique (Koopmans (1949)). Les premiers tentatives concernaient les modèles décrits par des équation algébriques linéaires en les variables observables et en les paramètres (inconnus) avec toutefois des contraintes linéaires sur ces paramètres. Fisher (1959, 1961) ont élargi le problème au cas non linéaire en les variables observables et même incluant des contraintes non linéaires en les paramètres.

Pour les systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles, c'est uniquement en 1963 que Kalman (1963) a fait allusion à la question. Fisher (1965) a donné des définitions pour l'identifiabilité dans le cas spécial des modèles ayant l'état complètement observable. Il fallait attendre 1970 pour que Bellman et Åström (1970) donnent des définitions claires de l'identifiabilité structurelle pour les systèmes dynamiques. La question de fond de l'identifiabilité est : quand est-il possible de déterminer le vecteur des paramètres connaissant l'entrée et la sortie ? Pour répondre à cette question, les auteurs dans Grewal et Glover (1976) donnent des définitions pour l'identifiabilité locale et globale basées sur les notions de fonction de transfert. Dans notre étude, nous analysons la propriété de l'identifiabilité des systèmes non linéaires dans le sens de la sensibilité et de l'observabilité. Pour se faire, on se pose la question suivante : existe t-il une entrée optimale nous permettant d'identifier le vecteur de paramètres à partir d'une mesure partielle de l'état du système ?

1.1.1 Approches découplées de commande et d'identification

Pour l'identification (estimation) des modèles dynamiques paramétriques linéaires ou non linéaires (décrits par une fonction de transfert, un ensemble d'équations différentielles ou aux différences), plusieurs approches classiques découplant la commande et l'identification

existent. En général, on peut distinguer ce type d'approches en deux catégories : identification en boucle ouverte et en boucle fermée.

1.1.1.1 Identification en boucle ouverte

Généralement, l'approche d'identification en boucle ouverte se compose de quatre phases :

1. *Conception des entrées* : il s'agit de concevoir les entrées très riches en fréquence pour obtenir la convergence du vecteur des paramètres recherchés $\hat{\theta}$ du système vers la vrai valeur θ^* avec une bonne précision. L'entrée en échelon, quoique simple à réaliser, n'est pas toujours un bon signal d'excitation pour l'identification. En pratique, la solution standard pour établir un signal d'entrée en vue de l'identification est de réaliser soit une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) ou soit un signal en ajoutant plusieurs sinusoïdales avec des fréquences distinctes.

2. *Acquisition et traitement des données expérimentales* : en appliquant sur le système les entrées définies dans l'étape précédente, nous recueillons les sorties mesurées du procédé. Le problème se pose de comment choisir les données expérimentales pour obtenir le « meilleur » résultat d'estimation des paramètres inconnus du modèle. Premièrement, nous devons choisir la dimension des données expérimentales. Si la sphère des données expérimentales est trop petite, l'information dans les expériences n'est pas suffisamment riche pour identifier les paramètres du modèle. En revanche, si la sphère est trop grande, cela peut rendre l'identification plus difficile avec un coût énorme. La dimension des données expérimentales dépend de la structure du modèle, du nombre de paramètres inconnus à estimer et de la méthode d'identification qu'on utilise. Deuxièmement, il faut traiter les données expérimentales pour réaliser une identification correcte : élimination des composantes continues (point de fonctionnement), mise à l'échelle, filtrage.

3. *Identification des paramètres inconnus du modèle* : avec les données expérimentales acquises dans l'étape précédente (soient : la séquence d'entrée U et la séquence de sortie mesurée du procédé Y_p), en fonction de la structure de modèle , nous choisissons un algorithme d'identification paramétrique pour minimiser l'erreur de prédiction en boucle ouverte E_{BO} qui est l'erreur entre la sortie mesurée du procédé Y_p et la sortie prédite par le modèle $\hat{Y}$. La structure générale de l'approche d'identification en boucle ouverte est représentée par la figure 1.1.

   L'idée principale de ce type d'algorithme d'identification est de trouver la correction de paramètres à chaque pas d'itération i de l'algorithme jusqu'à ce que la minimisation de l'erreur de prédiction soit obtenue :

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i + correction_i. \tag{1.1}$$

   En fonction des différentes structures du modèle, il existe plusieurs méthodes pour calculer cette correction. Par exemple, pour les modèles linéaires à temps discret sous la forme :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + \omega(k), \tag{1.2}$$

   où $\omega(k)$ est une perturbation modélisée or non sur la sortie mesurée du procédé, $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sont des équations polynomiales :

$$\begin{array}{l} A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_A} q^{-n_A}; \\ B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_B} q^{-n_B}, \end{array} \tag{1.3}$$

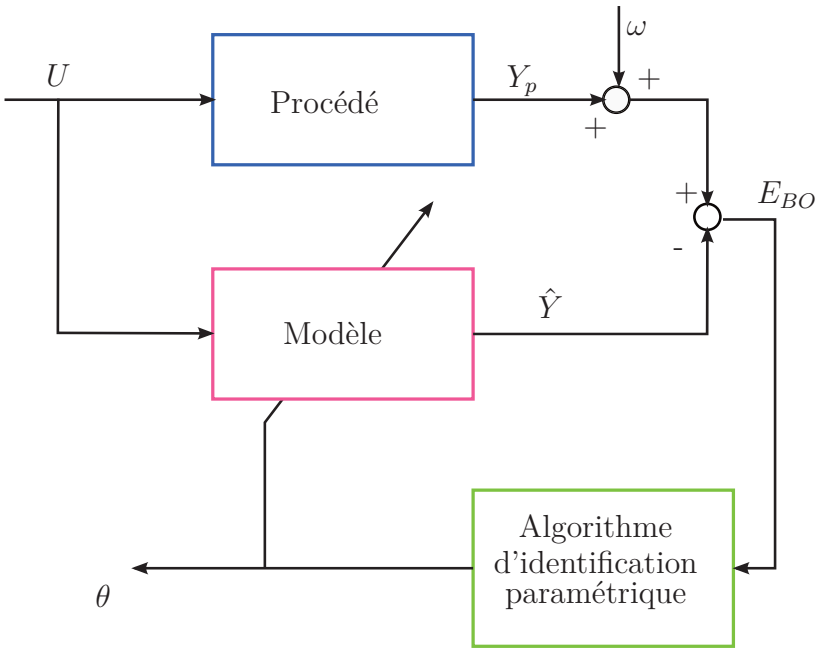


FIGURE 1.1 – Structure générale de l'approche d'identification en boucle ouverte

et le vecteur de paramètres inconnus $\theta^T = [a_1, \cdots, a_{n_A}, b_1, \cdots, b_{n_B}]$, nous pouvons distinguer les méthodes en deux catégories (Landau (2002)) :

- des méthodes d'identification basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction : moindres carrés récursifs (MCR) ; moindres carrés étendus (MCE) ; maximum de vraisemblance récursif (MVR) ; erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu (ESMPE) ; moindres carrées généralisés (MCG).
- des méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur des observations et de l'erreur de prédiction : variable instrumentale à modèle auxiliaire (VIMA) ; erreur de sortie à compensateur fixe (ESCF) ; erreur de sortie avec filtrage des observations (ESFO) ; erreur de sortie avec filtrage adaptatif des observations (ESFAO) ;

Pour les modèles non linéaires à temps continus, nous déterminons le vecteur de paramètres inconnus θ en minimisant le critère :

$$\min_{\theta} J(\theta) = E_{BO}^T E_{BO}. \tag{1.4}$$

Ce problème d'identification est résolu par des méthodes d'optimisation non linéaires, en fonction de son gradient G ou/et de son hessien H :

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta}; \\ H(\theta) &= \frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta^2}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

par exemple l'algorithme de Newton, la méthode de quasi-Newton, l'approximation de Gauss-Newton, l'algorithme de Marquardt, etc.

4. *Validation* : le principe de la validation du modèle identifié est de vérifier si la sortie du modèle converge vers la sortie mesurée du procédé en le simulant avec le même signal

d'excitation en entrée et les paramètres estimés. D'abord, les données de simulation (entrées et sorties) du modèle identifié sont enregistrées. Ensuite, les erreurs de prédiction sont calculées. Enfin, nous faisons un test de blancheur (si la séquence des erreurs de prédiction résiduelles approche les caractéristiques d'un bruit blanc) ou un test de décorrélation (si la séquence des erreurs de prédiction résiduelles et celle des sorties du modèle sont décorrélées). Plus de détails sont dans Landau (2002).

1.1.1.2 Identification en boucle fermée

Vu que la plupart des procédés industriels sont de plus en plus complexes, les méthodes d'identification en boucle ouverte ne sont pas toujours les plus adaptées. En effet, les systèmes considérés pour l'identification sont soit des systèmes couplés déjà avec un régulateur, soit des systèmes intégrateurs ou instables ou subissant une dérive importante du point de fonctionnement. Depuis quelques décennies, les recherches de l'identification en boucle fermée visent à trouver le meilleur modèle pour améliorer les performances du régulateur. Pour les systèmes linéaires sous forme discrète (1.2) et couplés avec un régulateur classique (e.g. PID, RST), les méthodes d'identification en boucle fermée sont (Landau (2002)) :

- Erreur de sortie en boucle fermée sans bruit (CLOE) ;
- Erreur de sortie en boucle fermée avec filtrage (F-CLOE) ;
- Erreur de sortie en boucle fermée avec filtrage adaptatif (AF-CLOE) ;
- Erreur de sortie étendue en boucle fermée (X-CLOE)

Le principe de ce type des méthodes est illustré par la figure 1.2. Le procédé réel et le

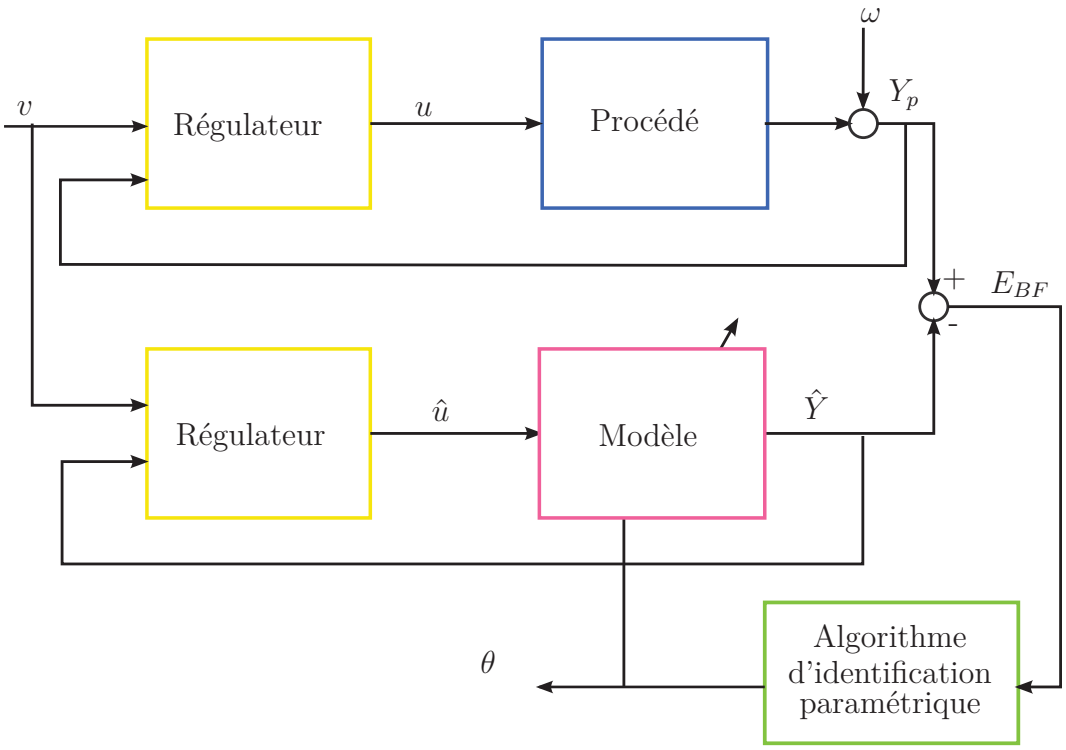


FIGURE 1.2 – Structure générale de l'approche d'identification en boucle fermée

modèle à identifier sont tous en boucle fermée avec le même régulateur. On conçoit un signal

d'excitation v, normalement une SPBA, superposé soit sur la consigne soit à la sortie du régulateur. Comme les méthodes d'identification en boucle ouverte, l'idée principale est de minimiser l'erreur de prédiction en boucle fermée E_{BF} entre la sortie mesurée du procédé et la sortie du modèle de prédiction pour obtenir les meilleurs estimations des paramètres inconnus. Enfin, une validation du modèle identifié est effectué soit en comparant les réponses mesurées (régulateur + procédé en boucle fermée) et simulées (régulateur + modèle en boucle fermée), soit par un test de décorrélation. Une des difficultés est que cela suppose que le régulateur soit aussi parfaitement connus (structure et réglage), ce qui reste à voir au cas par cas.

1.1.2 Conception optimale des entrées pour l'identification paramétrique

Dans les approches découplées de commande et d'identification, les entrées d'excitation sont déterminées hors ligne. La question qui se pose est de savoir si ces entrées permettent de garantir d'exciter par la suite les sorties mesurées afin qu'elle soient sensibles aux paramètres à identifier.

Depuis les années 1970, une technique classique pour obtenir des données pertinentes en vue de l'identification de ces paramètres de modèle est le design d'expériences optimales (DEO) (Mehra (1974); Goodwin et Payne (1977); Zarrop (1979) et le récent état de l'art de Franceschini et Macchietto (2008)). Cependant, malgré une vaste littérature sur ce sujet, la conception d'entrée optimale est souvent séparée de l'estimation des paramètres. Dans ce cas, les données expérimentales sont recueillies à partir des expériences précédentes pour l'estimation des paramètres hors ligne (Walter et Pronzato (1994); Ljung (1999); Barz et al. (2013)). Une quantité significative d'essais-erreurs sur le procédé physique pour l'identification des paramètres inconnus du modèle peut donc être nécessaire et donc coûteuse vis à vis : de la consommation de matières en alimentation à l'entrée du procédé, de la consommation d'énergie au cours de ces expériences, de la production des matières de sortie avec des propriétés indésirables, de la main d'œuvre. Ceci augmente aussi la durée d'immobilisation du procédé pour l'identification (donc, pénalise l'utilisation du procédé à des fins de production). En outre, la plupart des méthodes de DEO sont basées un modèle dynamique linéaire ou linéarisé (Keviczky (1975); Ng et al. (1977); Franceschini et Macchietto (2008)) alors que dans de nombreux domaines tels que le génie des procédés, ces modèles sont non linéaires, même parfois instables.

La caractéristique principale du DEO pour l'identification paramétrique est d'enrichir les informations contenues dans chaque expérience. En général, cette richesse de l'information est décrite par la matrice d'information de Fisher (MIF), qui est constituée par les sensibilités des sorties par rapport aux paramètres inconnus du modèle (Goodwin et Payne (1977); Walter et Pronzato (1994); Ljung (1999)). Récemment, la combinaison du DEO avec l'identification paramétrique en ligne a été développée par plusieurs auteurs pour les systèmes non linéaires multi-variables stables. En 2010, B. Jayasankar et ses collègues ont développé le DEO pour l'estimation en ligne des paramètres dans le cas non linéaire multi-variable, mais sans contrainte de sortie (Jayasankar et al. (2010)). Un an plus tard, dans Zhu et Huang (2011), ces auteurs ont utilisé l'analyse de l'équilibre d'un modèle non linéaire pour ajouter des contraintes égalitaires dans une approche basée sur un filtre de Kalman étendu, afin de réduire l'influence des mauvaises conditions initiales. Cependant, ces techniques en boucle fermée ont été utilisées sur des systèmes stables en boucle ouverte et sans contrainte entrée/sortie, alors que, pour des applications industrielles réelles, il est souvent nécessaire de tenir compte de contraintes d'exploitation (portant sur la sécurité, pour maintenir l'état du procédé dans les

limites de production, pour garder une performance économique, pour le confort de l'utilisateur, etc.). A cette fin, la stratégie de la commande prédictive est utilisée pour résoudre le problème de contrôle optimal en boucle fermée sous contraintes. Pour le DEO, l'idée principale d'une approche de type commande prédictive est de déterminer en ligne une séquence de contrôle optimale sur un horizon de prédiction en maximisant le critère de sensibilité, tout en satisfaisant des contraintes spécifiées sur les entrées et/ou sorties. Plusieurs auteurs ont combiné des techniques en ligne de DEO avec une approche de type commande prédictive pour l'estimation des paramètres dans le cas linéaire (Vuthandam et Nikolaou (1997)) ou non linéaire (Zhu et Huang (2011)).

1.1.3 Techniques d'observation dans le domaine de l'identification

Dans le cadre de l'identification des paramètres en ligne et en boucle fermée, les techniques d'observation (Besançon (2007)) jouent un rôle clef pour l'estimation en ligne des états inconnus du modèle (le cas échéant s'il y en a), mais surtout des paramètres inconnus du modèle (ce qui nous intéresse ici). Différents observateurs ont été proposées pour les systèmes dynamiques non linéaires tels que : l'observateur à grand gain (Gauthier et al. (1992)), le filtre de Kalman étendu (FKE) (Besançon (2007)) ou l'observateur à gain adaptatif (Boizot et al. (2010); Nadri et al. (2013)). Le choix du type d'observateur dépend de la structure du modèle et de la propriété d'observabilité (qui dépend, dans le cas non linéaire, des entrées). La convergence de l'observateur est importante pour l'estimation des paramètres du modèle. Par exemple, dans (Zhu et Huang (2011)), les auteurs choisissent un estimateur FKE classique pour un réacteur continu parfaitement agité. Comme nous le savons, à part quelques difficultés numériques liées à la calibration du gain de l'équation de Riccati, il n'est pas évident de vérifier mathématiquement la convergence de cet observateur. De plus, certains entrées peuvent rendent le système inobservable. Donc, une analyse d'observabilité du système non linéaire est a priori nécessaire pour réaliser une identification. Dernièrement, une approche d'optimisation en utilisant directement le Grammien d'observabilité dans la synthèse de la loi de commande persistante est proposée pour une structure de système d'état affine dans Scola et al. (2013a,b).

1.2 Travaux de Flila et al.

Dans la thèse de Flila, co-encadrée par Dufour et Hammouri et soutenue au LAGEP en 2010, une approche d'identification en ligne d'un paramètre inconnu en couplant la commande prédictive et l'observation non linéaire a été initiée, et est à l'origine de notre travail. La loi de commande y a été formulée par une fonction de coût basée sur la MIF, qui est un scalaire dans ce cas là. Deux stratégies de contrôle optimal pour l'identification ont été proposées : une stratégie concerne la structure de commande prédictive à modèle interne non linéaire et l'autre à modèle linéaire temps variant. Le principe de cette approche d'identification était de trouver en ligne le contrôle optimal qui maximise la sensibilité de la sortie mesurée par rapport au paramètre constant inconnu du modèle qui est estimé par l'observateur en même temps. L'approche proposée dans leur étude considère les systèmes dynamiques non linéaires, uniformément observable, stable et mono-variable (une seule entrée, un seul état mesuré et un seul paramètre constant inconnu). Les contraintes d'exploitation sont prises en compte dans leurs formulations du problème d'optimisation. Nous allons voir dans ce qui suit ces deux méthodes plus en détails.

1.2.1 Commande prédictive à modèle non linéaire

Dans l'article (Flila et al. (2010a,b)), les auteurs présentent une approche d'identification optimale basée sur six composantes principales : un procédé, un modèle non linéaire, deux modèles de sensibilité paramétrique (un pour déterminer les sensibilités des sorties du procédé par rapport aux paramètres estimés $\frac{\partial y_p}{\partial \theta}$ et l'autre pour les sensibilités des sorties du modèle par rapport aux paramètres estimés $\frac{\partial y_m}{\partial \theta}$), un observateur non linéaire et un algorithme de commande prédictive non linéaire. Les signaux utilisés dans la formulation du problème d'optimisation avec contraintes pour l'identification peuvent être approchés à chaque instant courant k dans les instants futures l :

$$\begin{cases} \forall k > 0,\ \forall l \in [k+1,\ k+N_p]; \\ x_p(l) = x_m(l) + (\hat{x}_p(k) - x_m(k)) \\ y_p(l) = y_m(l) + (y_p(k) - y_m(k)) \\ \frac{\partial y_p}{\partial \theta}(l) = \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(l) + (\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k) - \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k)) \\ \theta = \hat{\theta}(k), \end{cases} \tag{1.6}$$

où les prédictions prennent en compte l'écart actuel entre le procédé et le modèle qui est supposé constant sur l'horizon de prédiction N_p.
Le problème de commande optimale pour l'identification est défini par :

$$\max_u J(u) = \sum_{l=k+1}^{k+N_p} \left(\frac{\partial y_m}{\partial \theta}(l) + (\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k) - \frac{\partial y_m}{\partial \theta}(k)) \right)^2, \tag{1.7}$$

en prenant en compte des contraintes sur l'entrée, la sortie ou/et l'état. Cette approche de contrôle optimal pour l'identification en ligne est évaluée par un simple cas d'étude : un procédé de saponification avec une seule entrée, un seul état mesuré et un seul paramètre constant inconnu à identifier. Le modèle non linéaire du procédé est décrit par une équation aux dérivées ordinaires. Une comparaison entre l'identification en boucle fermée sans contrainte de sortie et l'identification en boucle fermée avec contrainte de sortie est montrée dans Flila et al. (2010a,b). La convergence de l'estimation du paramètre du modèle est obtenue. Les contraintes sur l'entrée et la sortie sont bien respectées. Cette approche peut subir des calculs très lourds pour résoudre le problème d'optimisation non linéaire qui dépend étroitement de la complexité du modèle et du nombre de contraintes sur l'entrée ou/et la sortie. De ce fait, une approche de commande prédictive à modèle linéaire en temps variant est proposée pour réduire ce temps de calcul.

1.2.2 Commande prédictive à modèle linéaire en temps variant

Dans Flila et al. (2008), une approche de commande prédictive basée sur le modèle linéarisé temps variant pour l'identification est présentée. Dans un premier temps, le modèle non linéaire et le modèle de sensibilité non linéaire sont linéarisés autour du point de fonctionnement nominal (u_0, x_0, θ_0, $x_{\theta 0}$, y_0), qui est à choisir, et qui est la résolution du modèle non linéaire et du modèle non linéaire de sensibilité obtenue hors ligne. Les variations dans les modèles linéaires temps variant sont décrites par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_0(t) = u(t) - \Delta u(t) \\ x_0(t) = x_m(t) - \Delta x_m(t) \\ \theta_0 = \theta - \Delta\theta \\ x_{\theta 0}(t) = x_{m\theta}(t) - \Delta x_{m\theta}(t) \\ y_0(t) = y_m(t) - \Delta y_m(t). \end{cases} \tag{1.8}$$

Le problème de commande prédictive à modèle non linéaire (1.7) est remplacé par le problème en ligne à base du modèle linéarisé et du modèle linéarisé de sensibilité :

$$\max_{\Delta u} J(\Delta u) = \sum_{l=k+1}^{k+N_p} \left(\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}(l) + \frac{\partial \Delta y_m}{\partial \Delta \theta}(l) + \left(\frac{\partial y_p}{\partial \theta}(k) - (\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}(k) - \frac{\partial \Delta y_m}{\partial \Delta \theta}(k)) \right) \right)^2, \qquad (1.9)$$

sous contraintes sur l'entrée et la sortie. Cette approche est illustrée sur un exemple non linéaire du génie des procédés : un procédé de cuisson radiatif des peintures en poudre avec une seule entrée, deux états du modèle, une seule sortie mesurée et un seul paramètre inconnu constant. Le modèle non linéaire du procédé est décrit par des équations aux dérivées partielles à commande frontière[1], approché en dimension finie. Une comparaison entre l'identification en boucle fermée sans contrainte de sortie et l'identification en boucle fermée avec contrainte de sortie est montrée dans Flila et al. (2008). La convergence d'estimation du paramètre est obtenue. Les contraintes sur l'entrée et la sortie sont bien respectées.

Afin de diminuer la charge de calcul, une linéarisation des modèles a donc été engagée dans cette approche. Bien que le temps de calcul en ligne est réduit, la classe des systèmes considérés pour cette approche est restreinte à des modèles mono-variables, non linéaires, stables en boucle ouverte. Pour les modèles avec une grande dimension (plusieurs états), la linéarisation peut être compliquée et introduire de larges incertitudes.

1.3 Procédés considérés

L'approche proposée dans cette thèse considère une large classe de procédés industriels multivariables (physique, chimique, biologique, électrique, ...) qui sont tout d'abord des systèmes dynamiques, c'est-à-dire des systèmes avec état évoluant avec le temps. La connaissance des caractéristiques d'un procédé est nécessaire pour la modélisation, la conception d'un régulateur, et la mise en œuvre d'un observateur dans notre approche d'identification optimale en boucle fermée. Diverses variables doivent exister sur ce procédé :

- il y a au moins une entrée exogène $u(t)$ qui agit sur le procédé et qui doit être manipulable en ligne ;
- il y a au moins une mesure en ligne en sortie $y_p(t)$ qui doit être disponible et qui caractérise l'effet de l'action sur le procédé, et qui est utilisable pour un observateur et pour une loi de commande ;
- il y a des limitations physiques inhérentes au procédé, telles que des contraintes spécifiées sur l'amplitude (voire la vitesse) des entrées manipulées, d'autres contraintes spécifiées sur les sorties mesurées ou sur les états estimés du procédé (portant sur la sécurité, pour maintenir l'état du procédé dans les limites de production, pour garder une performance économique, pour le confort de l'utilisateur, etc.).

Cela couvre donc potentiellement beaucoup d'applications, mais en interdit d'autres (comme celles où les variables manipulées sont des conditions initiales et non des conditions variables pendant l'expérimentation, comme c'est pour des réacteurs chimiques de type batch).

[1]La commande frontière est un type de commande qui apparaît dans les conditions limites du problème. Dans leur cas d'étude, cette condition est la limite supérieure.

1.4 Classe de modèles considérés

Le choix d'un type du modèle dépend de son utilité (simulation, régulation, ...). Il existe plusieurs types de modèles, principalement les modèles de connaissance d'une part, et les modèles boite noire d'autre part (ceci sera détaillé plus loin). Les modèles de connaissance sont basés sur les lois de la physique, de la chimie, de la biologie,... Ils sont souvent utilisés pour la simulation et la conception en génie des procédés. On peut appeler ce type de modèle aussi le modèle de type « boîte blanche ». Lorsqu'on ne connaît aucune loi, ni le fonctionnement du procédé à priori, le modèle est de type « boîte noire ».

En général, la plupart des modèles que nous étudions se situe entre ces deux types de modèles (boîte noire et blanche). C'est à dire que les informations sur le procédé (les mesures, les grandeurs physiques et les performances...) ne sont pas suffisantes pour définir un modèle explicite, ce qu'on l'appelle le modèle de type « boîte grise » : les modèles dynamiques sont alors construits à base des connaissances du procédé avec certaines parties mal modélisées.

L'approche proposée considère une large classe de procédés industriels décrits par un modèle dynamique mono-variable ou multi-variable, linéaire ou non linéaire, stable ou non en boucle ouverte, basé sur des équations différentielles ordinaires :

$$(M)\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t),\theta,u(t)) \\ y(t) &= h(x(t),\theta,u(t)), \end{cases} \tag{1.10}$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état, $y \in \mathcal{R}^p$ est le vecteur des sorties mesurées, $u \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$ dénote le vecteur d'entrées manipulées, $\theta \in \mathcal{R}^q$ est le vecteur de paramètres inconnus du modèle, f et h sont les fonctions non linéaires avec les dimensions appropriées. La non linéarité de ce modèle peut être vue en termes de représentation d'état et/ou en termes de paramètres.

Hypothèse 1.4.1. *Dans cette étude, les paramètres inconnus du modèle sont :*

- *soit tous constants.*
- *soit évolutifs mais constants sur des horizons donnés du temps fini d'une expérience. Autrement dit, les valeurs des paramètres inconnus $\theta(t)$ peuvent être différentes dans chaque intervalle spécifié $t_m \subset \{[t_{m_1}\ t_{m_2}],\ [t_{m_2}\ t_{m_3}],\ [t_{m_3}\ t_{m_4}],\ \cdots,\ [t_{m_k}\ t_{fin}]\}$ mais constants sur chacun de ces intervalles.*

voir la figure 1.3.

Hypothèse 1.4.2. *Dans le système* (1.10)*, f et h sont de classe C^∞ par rapport à tout leur arguments.*

1.5 Problématiques considérées

Pour les procédés et modèles considérés ci dessus, les problématiques que nous nous proposons d'aborder dans cette thèse sont :

- Dans l'approche d'identification en boucle fermée initialement proposée dans la thèse de Flila (Flila et al. (2008, 2010a,b)), il a été considéré le cas mono-variable (une seule entrée, un seul état mesuré et un seul paramètre constant inconnu) pour les systèmes non linéaires stables. Est-ce qu'on peut développer cette approche pour les systèmes dynamiques non linéaires multi-variables (multi-entrées, multi-sorties et multi-paramètres), stable ou instable, afin de pouvoir l'appliquer sur un plus grand nombre de systèmes réels ?

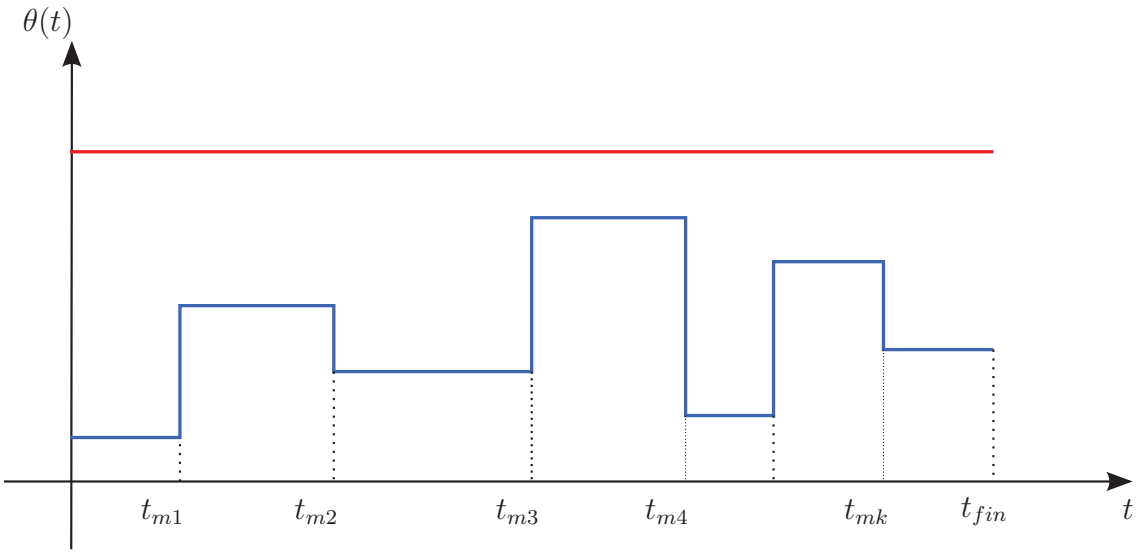


FIGURE 1.3 – Valeur du paramètre inconnu : constant ou évolutif

- Comment peut-on formuler le problème d'optimisation pour prendre en compte l'aspect désormais multi-variable ? Comment peut-on choisir un bon critère de sensibilité ?
- Comment résoudre le problème d'optimisation pour trouver une commande optimale qui permet d'exciter les sorties mesurées afin qu'elles soient sensibles aux paramètres à identifier ? La conception de cette commande optimale peut-elle permettre de prendre en compte les contraintes d'exploitation entrées/sorties ?
- Quel type d'observateur peut-on choisir pour des différents modèles spécifiés et comment construire en ligne des entrées qui rendent le système observable ?
- Notre approche proposée pour l'identification en boucle fermée est-elle toujours robustesse s'il y a des bruits de sortie ?

Conclusion. *Dans ce chapitre, nous avons présenté le contexte générale de la thèse dans le domaine de l'identification paramétrique. En travaillant sur les problématiques que nous avons proposées ici, nous envisageons de concevoir une approche d'identification optimale en ligne pour les systèmes dynamiques non linéaires et multi-variables, ce dernier point amenant une première extension des travaux de Flila et al.. Cette approche devra combiner en ligne le design d'expériences optimales et l'identification des paramètres du modèle. La conception optimale des entrées devra aussi prendre en compte les contraintes d'exploitation, voir de stabilité (ce dernier point sera aussi un apport nouveau). Cette approche reposera sur une synthèse de type commande prédictive et sur la théorie des observateurs, ce qui permettra, en une seule expérience, de trouver en ligne les entrées optimales et en même temps d'estimer les paramètres inconnus du modèle.*
Dans le chapitre suivant, quelques rappels fondamentaux nécessaires à notre approche d'identification optimale en boucle fermée seront donnés : cela concerne les observateurs et la commande prédictive.

Chapitre 2

Quelques rappels fondamentaux

Résumé. *Nous consacrerons la première partie de ce chapitre à des rappels des différentes notions d'observabilité des systèmes non linéaires. L'accent sera mis en particulier sur les systèmes non uniformément observables. Comme nous l'avons présenté dans l'introduction, l'objectif de ce travail de thèse est l'identification en boucle fermée en synthétisant les observateurs et la stratégie de commande prédictive sous contraintes. Pour cette raison, nous allons présenter dans la seconde partie de ce chapitre quelques outils fondamentaux et généraux concernant la commande prédictive, qui nous seront utiles par la suite.*

2.1 Observabilités et observateurs pour les systèmes non linéaires

Il est évident que la qualité de la conduite d'un procédé industriel est étroitement liée au nombre et à la qualité des variables d'états disponibles comme mesures en ligne. Or, les procédés industriels sont généralement limités en instrumentation en ligne robuste permettant d'accéder aux mesures pertinentes. Un moyen de surmonter cet obstacle consiste à faire appel à la théorie des observateurs pour l'estimation des états et des paramètres non accessibles (ou difficilement accessibles) à la mesure. C'est pour cela que l'observabilité et la synthèse d'observateurs est un des thèmes importants de la théorie du contrôle.

En général, les modèles dynamiques sont décrits par des équations différentielles ordinaires ou partielles qui peuvent être considérées comme des représentations d'états, dans lesquelles les états ne sont pas tous mesurés et/ou les paramètres ne sont pas tous connus. Moyennant quelques mesures en lignes (dites sorties), il s'agit de faire une analyse qualitative permettant d'aboutir, à base du modèle considéré et des mesures disponibles, à des algorithmes (estimateurs d'état). On obtient alors un système augmenté (des états et paramètres inconnus), appelé aussi système étendu.

Une première approche d'estimation concerne l'utilisation des techniques d'optimisation, par le biais d'un observateur à horizon glissant (Alamir (1999)). Dans ce cas, on peut se heurter aux problèmes de non unicité des minimas trouvés et au temps de calcul important vis à vis du temps disponible (période d'échantillonnage). Une seconde approche est basée sur l'intégration d'un modèle dynamique particulier, appelé observateur. L'utilisation de cette approche, initiée par Kalman (Kalman et Bucy (1961)), est de plus en plus fréquente, notamment en industrie, que cela soit pour l'estimation de l'état ou des paramètres. Comme dans les approches d'optimisation, l'étude de sensibilité nous renseigne a priori sur la faisabilité ou la non faisabilité du problème. L'observabilité est de la même sorte, et nous renseigne sur

la possibilité de reconstituer l'état du système. Elle permet aussi de déduire des structures particulières pour lesquels on peut synthétiser un observateur ad hoc. Dans ce manuscrit, on s'intéresse à cette seconde méthode d'estimation, dont le principe est présenté dans la figure 2.1.

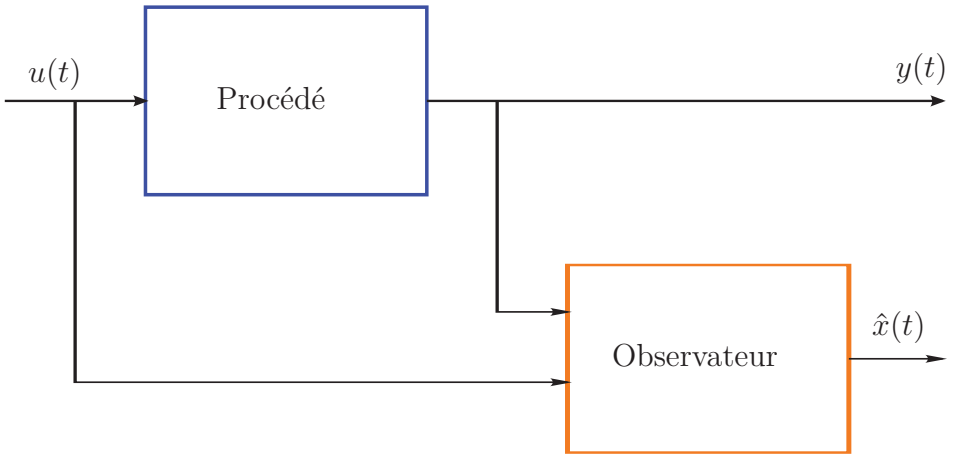


FIGURE 2.1 – Schéma de principe d'un observateur

Les premiers résultats sur l'observateur furent réalisés par Luenberger et Kalman (Luenberger (1966); Kalman et Bucy (1961)) pour les systèmes linéaires et depuis le problème ne cesse d'intéresser la communauté des automaticiens (Gauthier et Kupka (1994); Besançon (2007); Nadri et al. (2013)). Dans le cas où le système non linéaire est observable, il est assez fréquent qu'il possède des entrées à éviter (dites non universelles ou singulières) car rendant le système inobservable. En présence de ce type d'entrées, il est pratiquement impossible de reconstruire les états sauf dans le cas des systèmes détectables (cette notion sera définie plus loin). Pour cette raison, lors de la synthèse d'observateur, des hypothèses sur les entrées telles que la régularité persistante ou la régularité locale (nous donnerons plus loin les définitions de ces propriétés), sont souvent nécessaires pour assurer l'éloignement des entrées appliquées au système des entrées singulières. Dans ce cas-là, on peut alors construire un observateur asymptotique pour les systèmes linéaires (Luenberger (1967)). Dans le cas des systèmes non linéaires, le problème des entrées singulières est plus fréquent. Les approches développées sont basées sur la transformation du système non-linéaire en un système linéaire avec injection de sortie (Isidori (1995); Xia et Gao (1989)) pour éviter d'avoir des entrées singulières. Une autre approche plus raisonnable, développée par Gauthier (Gauthier et al. (1992)), traite le cas non-linéaire en présence d'entrées singulières.

Une autre utilisation de l'observateur est celle liée au problème de l'identification des paramètres du modèle. Pour cela, les paramètres à estimer sont considérés comme des variables d'état dans le modèle étendu. Leurs évolutions sont décrites à partir des connaissances disponibles sur eux. On obtient alors un système augmenté pour lequel on cherche à réaliser un observateur d'état. L'augmentation de l'état par les paramètres inconnus du modèle implique généralement la génération d'un modèle dynamique étendu non linéaire, même si le modèle était initialement linéaire. Voyons un exemple :

Exemple 2.1. *Considérons le système sous la forme suivante :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \theta u(t) \\ \dot{x}_2 = 2\theta u(t) \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

Lorsque le paramètre θ est connu, le système est linéaire, qui peut être aussi décrit sous une forme linéaire : $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\theta u(t),\ y(t) = Cx(t)$. En revanche, si le paramètre θ est inconnu, l'état du modèle initial (2.1) *est augmenté avec le paramètre constant inconnu (on écrit alors $x_a = [x_1,\ x_2,\ \theta]$) pour l'estimer et est décrit par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} \dot{x}_{a1}(t) = x_{a2}(t) + x_{a3}u(t) \\ \dot{x}_{a2} = 2x_{a3}u(t) \\ \dot{x}_{a3} = 0 \\ y_a(t) = x_{a1}(t). \end{cases} \tag{2.2}$$

Ce modèle étendu (2.2) *est clairement non linéaire, même si le modèle d'état initial* (2.1) *est linéaire.*

Pour les problèmes d'observation des systèmes non linéaires, la première difficulté réside dans le fait que l'observabilité des systèmes non linéaires est difficile à démontrer : l'observabilité dépend généralement des entrées, contrairement au cas linéaire. La deuxième difficulté réside dans le fait que la théorie des observateurs pour les systèmes linéaires est difficile à être appliquée sur les systèmes non linéaires. En d'autres termes, la théorie de l'observation des systèmes non linéaires est toujours difficile à mettre en œuvre.

Dans la section suivante, nous allons donner des éléments de la théorie liée à l'observabilité pour les systèmes linéaires et non linéaires. L'accent sera mis en particulier sur les systèmes non uniformément observables. De plus, des observateurs seront présentés pour différentes formes de systèmes dynamiques.

2.1.1 Aperçu sur l'observabilité

L'étude de l'observabilité des systèmes linéaires invariants revient à la vérification du critère de Kalman (Kalman et Bucy (1961)), ce qui n'est pas le cas pour les systèmes non linéaires où l'observabilité est basée sur la propriété de distinguabilité qui signifie la possibilité de distinguer deux conditions initiales différentes.

Définition 2.1. *(Distinguabilité) Deux états initiaux x et $\tilde{x}$ sont dits indistinguables (noté $xI\tilde{x}$) si pour tout $t \geq 0$, les sorties $y(t)$ et $\tilde{y}(t)$ sont identiques pour toute entrée $u(t)$ admissible. Ils sont dits distinguables sinon.*

L'indistinguabilité est une relation d'équivalence. Notons $I(x)$ la classe d'équivalence de x. En effet, plusieurs notions d'observabilité ont été introduites afin de généraliser la notion d'observabilité des systèmes linéaires. Ces notions (observabilité locale, locale faible, faible etc...) ont été comparées entre elles selon si le système est de classe $\mathcal{C}$ ou encore analytique ($\mathcal{C}^w$). Pour plus de détails sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur à l'article d'origine de Hermann et Krener (1977). Dans ce paragraphe, nous utilisons des définitions plus globales, qui nous mèneront à une synthèse d'observateurs.

2.1.1.1 Notion d'observabilité

Considérons le système dynamique non linéaire décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)), \end{cases} \tag{2.3}$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état, $y \in \mathcal{R}^p$ est le vecteur des sorties mesurées, $u \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$ dénote le vecteur d'entrées, f et h sont les fonctions non linéaires avec les dimensions appropriées.

Définition 2.2. *(Observabilité globale) Une entrée u définie sur $[0,\ T]$ rend (2.3) observable si pour deux conditions initiales : $x(0) \neq \bar{x}(0)$ quelconque, la sortie du système $y(x(0), u, t)$ n'est pas identique à la sortie $y(\bar{x}, u, t)$ pour $t \in [0,\ T]$ $(y(x(0), u, t) \not\equiv_{[0,\ T]} y(\bar{x}, u, t))$.*

Nous pouvons présenter cette définition schématiquement par la figure 2.2. On pourra aussi dire que u distingue tous les couples $(x(0), \bar{x}(0))$ dans le domaine de x.

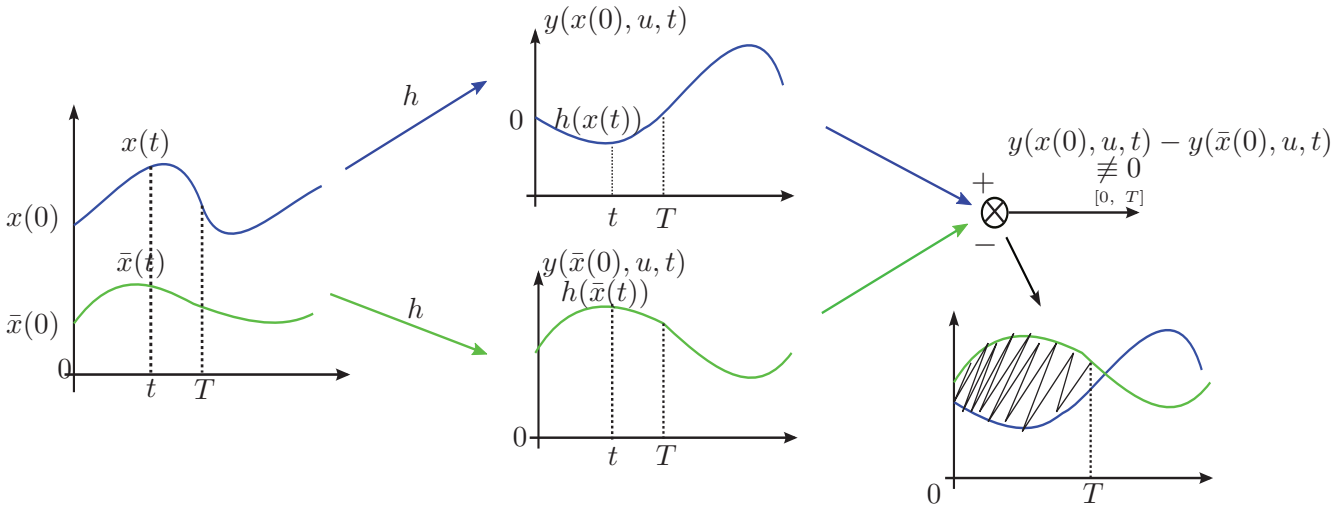


FIGURE 2.2 – Observabilité globale ou Distinguabilité

Définition 2.3. *(Observabilité faible) L'état $x_1 \in \mathcal{R}^n$ est faiblement observable, s'il existe un voisinage $V \subset \mathcal{R}^n$ contenant x_1, tel que pour tout point $x_2 \in V$, les couples (x_1, x_2) sont distinguables et les trajectoires $x(t, x_1, u(t))$ et $x(t, x_2, u(t))$ évoluent à l'intérieur de V. Le système est faiblement observable sur $\mathcal{R}^n$ s'il l'est en tout point de $\mathcal{R}^n$.*

Dans le cas des systèmes linéaires en temps invariant sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.4}$$

pour deux conditions initiales distinctes $x(0) \neq \bar{x}(0)$ et une entrée u, à l'instant $t \in [0,\ T]$, nous pouvons décrire les trajectoires correspondantes de sortie comme suit :

$$\begin{array}{l} y(t) = Cx(t) = C\exp(At)x(0) + C\int_0^t \exp((t-s)A)Bu(s)ds; \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) = C\exp(At)\bar{x}(0) + C\int_0^t \exp((t-s)A)Bu(s)ds. \end{array} \tag{2.5}$$

Si $x(0) \neq \bar{x}(0)$, on a alors $y(t) - \bar{y}(t) = C\exp(At)(x(0) - \bar{x}(0)) \neq 0$. Maintenant on peut conclure que le système linéaire en temps invariant (2.4) est observable et que l'entrée u n'intervient plus dans l'observabilité du système. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, un critère de Kalman peut être démontré pour assurer l'observabilité de ce type de système.

Théorème 2.1. *(Kalman, condition du rang) Le système linéaire* (2.4) *est observable si, et seulement si :*

$$rang[C^T,\ A^TC^T, \cdots,\ (A^{n-1})^TC^T] = n, \tag{2.6}$$

et réciproquement.

Contrairement aux systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaires dépend le plus souvent de l'entrée et il peut même y avoir des entrées qui les rendent inobservables, bien qu'ils soient observables pour d'autres entrées. L'exemple suivant nous montre simplement la relation entre l'entrée et l'observabilité pour un système non linéaire particulier.

Exemple 2.2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 0 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \tag{2.7}$$

On utilise la propriété de la distinguabilité 2.2 pour montrer l'observabilité du système (2.7)*. En effet, il est clair que tout entrée $u \not\equiv 0$ sur $[0,\ T]$ rend le système observable (ce qui permet d'estimer x_2). En revanche, une entrée nulle rend le système inobservable (x_2 est inobservable, car n'ayant aucun effet sur la mesure).*

Définition 2.4. *(Entrée universelle) Une entrée u est dite universelle sur $[0,\ T]$ si pour deux conditions initiales $x(0) \neq \bar{x}(0)$ quelconques du système* (2.3)*, $\exists t \in [0,\ T]$ tel que $y(x(0), u, t) \not\equiv y(\bar{x}, u, t)$. Dans le cas contraire, u est une entrée singulière qui rend le système inobservable.*

2.1.1.2 Observabilité des systèmes affines en l'état

Considérons les systèmes affines en l'état sous forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t))x(t) + B(u(t)) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.8}$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état, $y \in \mathcal{R}^p$ est le vecteur des sorties mesurées, $u \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$ dénote le vecteur d'entrées, $A(u)$ est une matrice de dimension $n \times n$, $B(u)$ est une matrice de dimension $n \times 1$, et C est une matrice constant de dimension $p \times n$. Les matrices $A(u)$ et $B(u)$ sont en fonction de l'entrée u.

Pour un système homogène :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t))x(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.9}$$

- si $u(t) = u^o = constante$, on a une solution $x(t) = \exp((t - t_0)A(u^o))x(t_0)$.
- si $u(t)$ n'est pas une constante, on a une solution générale $x(t) = \Phi_u(t, t_0)x(t_0)$

où $\Phi_u(t, t_0)$ est une matrice de transition avec une dimension $n \times n$ qui présente généralement des séries de Peano-Baker :

$$\Phi_u(t, t_0) = I + \int_{t_0}^{t} A(u(t_1))dt_1 + \cdots + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} \ldots \int_{t_0}^{t_{k-1}} A(u(t_1)) \ldots A(u(t_k))dt_1 \ldots dt_k + \cdots . \tag{2.10}$$

Elle satisfait toujours les équations suivantes (l'unique solution de ces équations) :

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi_u(t,t_0)}{dt} = A(u(t))\Phi_u(t,t_0); \\ \Phi(t_0,t_0) = I \text{ (conditions initiales)}, \end{cases} \tag{2.11}$$

où I est la matrice identité. Des propriétés de cette matrice de transition sont données ici :

$$\begin{array}{l} \Phi_u(t_2,t_0) = \Phi_u(t_2,t_1)\Phi_u(t_1,t_0),\ \forall(t_0,\ t_1,\ t_2); \\ \Phi_u(t,s) = \Phi_u^{-1}(s,t),\ \forall(t,s). \end{array} \tag{2.12}$$

Avec la définition et les propriétés de la matrice de transition, nous obtenons la solution du système (2.8) qui se compose de la solution générale du système homogène (2.9) et de la solution particulière du système non homogène :

$$x(t) = \Phi_u(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi_u(t,s)B(u(s))ds. \tag{2.13}$$

Basée sur la définition 2.2, si pour deux conditions initiales distinctes quelconques $x(t_0) = \bar{x}(t_0)$, on a besoin de remontrer que les deux sorties correspondantes :

$$\begin{array}{l} y(x(t_0),u,t) = C\Phi_u(t,t_0)x(t_0) + C\int_{t_0}^{t} \Phi_u(t,s)B(u(s))ds; \\ y(\bar{x}(t_0),u,t) = C\Phi_u(t,t_0)\bar{x}(t_0) + C\int_{t_0}^{t} \Phi_u(t,s)B(u(s))ds. \end{array} \tag{2.14}$$

sont distinguées sur $t \in [0,\ T]$ avec une entrée u quelconque. Cela nous donne des propositions suivantes pour l'observabilité des systèmes affines en l'état :

Proposition 2.1. *u rend le système* (2.8) *observable sur* $[t_0,\ t_0+T]$*, par définition si* $C\Phi_u(t,t_0)x(t_0) \not\equiv C\Phi_u(t,t_0)\bar{x}(t_0),\ \forall x(t_0) \neq \bar{x}(t_0),\ \forall t \in [t_0,t_0+T]$.

Proposition 2.2. *u rend le système* (2.8) *observable sur* $[t_0,\ t_0+T]$*, par définition si, et seulement si* $C\Phi_u(t,t_0)x(t_0) = 0$*, alors* $x(t_0) = 0$.

Avec les deux propositions précédentes, nous pouvons déduire une proposition associée au Grammien d'observabilité G (une matrice symétrique positive) :

$$G(u,t_0,t_0+T) = \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi_u^T(t,t_0)C^TC\Phi_u(t,t_0)dt, \tag{2.15}$$

avec une entrée u sur $[t_0,\ t_0+T]$.

Proposition 2.3. *L'entrée u rend le système* (2.8) *observable sur* $[t_0,\ t_0+T]$ *si, et seulement si le Grammien d'observabilité* $G(u,t_0,t_0+T)$ *défini par (2.15) est symétrique défini positif.*

2.1.1.3 Observabilité uniforme et formes canoniques

Définition 2.5. *Le système* (2.3) *est uniformément observable si,* $\forall T > 0$*, toute entrée u définie sur* $[0,\ T]$ *rend le système* (2.3) *observable.*

Afin de caractériser des systèmes non linéaires uniformément observables, nous mettrons en avant des formes canoniques dans les paragraphes suivants.

Considérons le système non linéaire (2.3) où le champ f prend la forme

$$f(x(t),u(t)) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)g_i(x(t)) \quad (u = (u_1,\ldots,u_m)).$$

Dans ce cas le système (2.3) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) g_i(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)). \end{cases} \tag{2.16}$$

avec $x(t) \in \mathcal{R}^n$, $u(t) \in \mathcal{R}^m$, $y(t) \in \mathcal{R}$. f_0, g_i et h sont les fonctions non linéaires avec les dimensions appropriées.

Si le système (2.16) est uniformément observable, alors en particulier, il est observable pour l'entrée nulle est on peut alors montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^n & \\ & x & \to \phi(x) = [h, L_{f_0}(h)(x), \ldots, L_{f_0}^{n-1}(h)(x)]', \end{array} \tag{2.17}$$

devient un difféomorphisme local presque partout et par conséquence $\frac{d\phi(x)}{dx}$ inversible.

Ici $L_{f_0}(h)$ est la dérivée de Lie de h par rapport au champ f_0 :

$$\begin{array}{l} L_{f_0}(h)(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{0i} \dfrac{\partial h}{\partial x_i} \\ L_{f_0}^0(h)(x) = h(x) \\ \vdots \\ L_{f_0}^{k+1}(h)(x) = L_{f_0}(L_{f_0}^k(h)(x)). \end{array} \tag{2.18}$$

Nous utilisons cette série de dérivées de Lie pour faire un changement de variable en z comme décrit dans (Gauthier et al. (1992); Gauthier et Kupka (1994)) :

$$z = \phi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ \vdots \\ L_{f_0}^{k-1}(h)(x) \\ \vdots \\ L_{f_0}^{n-1}(h)(x) \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Nous calculons les dérivées temporelles de z :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) L_{g_i}(h)(x(t)) \\ \vdots \\ \dot{z}_k(t) = z_{k+1}(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) L_{g_i}(L_{f_0}^{(k-1)}(h))(x(t)) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) = z_n(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) L_{g_i}(L_{f_0}^{(n-2)}(h))(x(t)) \\ \dot{z}_n(t) = L_{f_0}^n(h)(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) L_{g_i}(L_{f_0}^{(n-1)}(h))(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) = z_1(t). \end{cases} \tag{2.20}$$

En remplaçant x par $\phi^{-1}(z)$, nous reformulons le système sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \sum_{i=1}^{m} u_i G_{i1}(z) \\ \vdots \\ \dot{z}_k = z_{k+1} + \sum_{i=1}^{m} u_i G_{ik}(z) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n + \sum_{i=1}^{m} u_i G_{(n-1)k}(z) \\ \dot{z}_n = F_{0n}(z) + \sum_{i=1}^{m} u_i G_{nk}(z), \end{cases} \tag{2.21}$$

avec

$$G_{ik}(z) = L_{g_i}(L_{f_0}^{(k-1)}(h))(\phi^{-1}(z)) \ \forall k \in [1,\ n] \text{ et } F_{0n} = L_{f_0}^{n}(h)(\phi^{-1}(z)). \tag{2.22}$$

Finalement, système (2.21) peut être écrit sous la forme canonique annoncée le théorème suivant (pour une démonstration plus courte voir Gauthier et al. (1992)) :

Théorème 2.2. *(Forme canonique) Si le système* (2.16) *est uniformément observable, alors il se transforme localement presque partout dans un domaine ouvert D sous la forme canonique suivante :*

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + F_0(z) + \sum_{i=1}^{m} u_i G_i(z) \\ y = Cz, \end{cases}$$

$$avec\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ C = [1\ 0\ \ldots\ 0], \tag{2.23}$$

$$F_0(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_{0n}(z) \end{bmatrix} \ et\ G_i(z) = \begin{bmatrix} G_{i1}(z_1) \\ \vdots \\ G_{ik}(z_1, \ldots, z_k) \\ \vdots \\ G_{in}(z_1, \ldots, z_n) \end{bmatrix},$$

et réciproquement.

2.1.2 Synthèse d'observateurs

En général, basé sur le modèle (2.3), le problème d'observation est de trouver une estimation $\hat{x}(t)$ pour $x(t)$ à partir de la connaissance de $u(s)$ et de $y(s)$ pour $0 \leq s \leq t$. L'idée principale pour résoudre ce problème d'observation est de trouver un état initial $\hat{x}(0)$ tel qu'un critère d'optimisation :

$$\int_0^t \|y(\hat{x}(0), u, s) - y(s)\|^2 ds, \tag{2.24}$$

soit minimisé. $y(s)$ est la sortie mesurée sur $[0,\ t]$, et $y(\hat{x}(0), u, s)$ est la sortie estimée en fonction de l'estimation $\hat{x}(s)$ en intégrant (2.3) à partir de l'état initial $\hat{x}(0)$ et avec une entrée $u(s)$.
Nous donnons ci-dessous, la définition d'un observateur global et non réduit.

Définition 2.6. *(Observateur global) Un observateur pour le système (2.3) est un système dynamique de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{f}(u, y, \bar{x}) \\ \hat{x} = \bar{\Phi}(\bar{x}), \end{cases} \tag{2.25}$$

où $\bar{x} \in \mathcal{R}^{\bar{m}}$ *et* $\bar{\Phi} :\ \mathcal{R}^{\bar{n}} \to \mathcal{R}^n$ *est de classe* $C^k,\ k \geq 0$ *tel que :*
i) si $\bar{\Phi}(\bar{x}(0)) = x(0)$, *alors* $\bar{\Phi}(\bar{x}(t)) = x(t),\ \forall t \geq 0$
ii) $\forall x(0),\ \forall \bar{x}(n),\ \lim_{t \to +\infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0.$

Dans cette partie, nous allons introduire quelques types d'observateur qui nous seront utiles dans la suite de ce travail.

2.1.2.1 Observateur des systèmes linéaires en temps invariant

Considérons le système linéaire temps invariant sous forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.26}$$

où la paire (A, C) est supposée observable.

Le but est de construire un observateur asymptotique tel que $\lim_{t\to+\infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$.

Définition 2.7. *Un Observateur asymptotique pour le système* (2.26) *est donné par le système dynamique suivant :*

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A + KC)\hat{x}(t) - Ky(t) + Bu(t), \tag{2.27}$$

où $K \in \mathcal{M}_{n,p}$ est la matrice du gain calculée telle que la condition :

$$\forall x(0), \hat{x}(0) \in \mathcal{R}^n, \lim_{t\to+\infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\|$$

est vérifiée.

En utilisant cet observateur, la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par le système suivant :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = (A + KC)\epsilon(t).$$

On peut facilement constater que l'erreur tend vers zéro pour toute valeur initiale $e(0)$ si et seulement si la matrice $A + KC$ est Hurwitz. Cela nous ramène à déterminer une matrice K d'une manière duale au placement de pôles en cas de commande :

Théorème 2.3. *(Placement des pôles) Si le système linéaire* (2.26) *est observable (paire (A, C) observable), alors pour qu'il existe une matrice de gain K de dimension $n \times p$ telle que $(A + KC)$ est Hurwitz (i.e. le système (2.27) est un observateur asymptotique pour* (2.26)*).*

Le principe de cet observateur est présenté dans la figure 2.3. $u(t)$ et $y(t)$ sont considérés comme les entrées d'observateur.

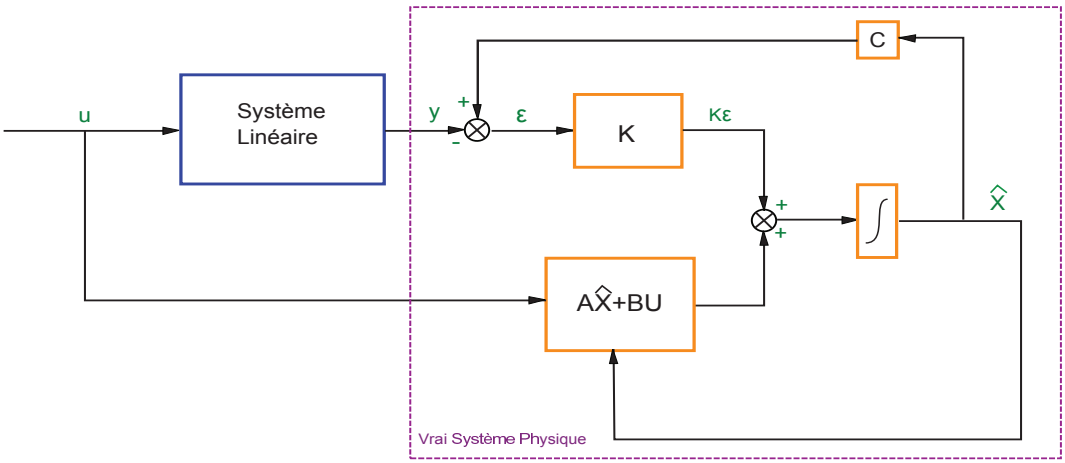


FIGURE 2.3 – Schéma d'un observateur pour un système linéaire

2.1.2.2 Observateurs pour les systèmes affines en l'état

Reprenons le système affine en l'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t))x(t) + B(u(t)); \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.28}$$

où $x \in \mathcal{R}^n$, $y \in \mathcal{R}^p$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$. Comme nous l'avons montré dans la section 2.1.1.2, l'observabilité de ce type de système dépend forcément des entrées appliquées. L'observateur sous la forme (2.27) avec un gain K constant ne s'adapte plus pour ce type de systèmes. Donc le gain de l'observateur doit dépendre nécessairement du $u(t)$.

Dans Hammouri et Morales (1990), Bornard et al. (1989) et Bornard (1991), les auteurs ont donné un observateur qui converge pour une classe d'entrée. selon la nature du système, les entrées peuvent être persistantes ou régulièrement persistantes.

Définition 2.8. *(Entrée régulièrement persistante) : Une entrée bornée* $u : I\!R^+ \to U$ *est dite persistante si,* $\exists t_0 \geq 0;\ \exists T > 0;\ \exists \alpha > 0;$ *tels que* $\forall t \geq t_0$*, le Grammien du système* (2.28) *vérifie :*

$$\lambda_{min}(G(u, t, t+T)) \leq \alpha,$$

où λ_{min} *est la plus petite valeur propre du* $G(u, t, t+T)$.
i.e. l'entrée $u(t)$ *rend le système observable sur tout intervalle* $[t, t+T]$ *pour* $t \geq t_0$.

Pour cette classe de système (2.28), deux types d'observateurs, sont principalement proposés dans la littérature :

- Observateur de type Kalman sous la forme suivante (Bornard et al. (1989)) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(u)\hat{x} + B(u) - S^{-1}C^T R(C\hat{x} - y) \\ \dot{S} = -SQS - A^T(u)S - SA(u) + C^T RC. \end{cases} \tag{2.29}$$

  La deuxième équation $\dot{S}$ de (2.29) est de type équation de Riccati. Dans le cas stochastique, Q et R présentent respectivement les matrices de covariances du bruit sur l'état avec une dimension $n \times n$ et sur la sortie mesurée avec une dimension $p \times p$. On considère que les bruits sont blancs et gaussiens et à moyenne nulle. Dans le cas déterministe, Q et R sont des matrices quelconques.

- Le deuxième type d'observateur est décrit par les équations suivantes (Hammouri et Morales (1990)) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(u)\hat{x} + B(u) - S^{-1}C^T R(C\hat{x} - y) \\ \dot{S} = -\theta S - A^T(u)S - SA(u) + C^T RC, \end{cases} \tag{2.30}$$

  où R et $S(0)$ sont des matrices symétriques définies positives (SDP) de dimension $p \times p$ et $n \times n$ respectivement. La deuxième équation de (2.30) est basée sur une équation dynamique de Lyapunov. Ce type d'observateur est obtenu en minimisant un critère quadratique avec un facteur d'oubli exponentiel :

$$\begin{aligned} &\min_{\xi} \int_0^t \exp(-\theta(t-s))\|y(\xi, u, s) - y(s)\|^2 ds, \\ &\text{avec} \qquad y(\xi, u, s) = C\Phi_u(s, 0)\xi + C\int_0^s \Phi_u(s, \tau)B(u(\tau))d\tau, \end{aligned} \tag{2.31}$$

  où ξ est un état initial du système à déterminer, $\exp(-\theta(t-s))$ est le facteur d'oubli exponentiel avec une constante $\theta > 0$.

Quand la propriété de régularité persistante de l'entrée est vérifiée, deux résultats importants sont montrés :

Proposition 2.4. *Si u est régulièrement persistante, alors $\forall t \geq 0$, la valeur propre minimum de S dans (2.30) : $\lambda_{min}(S(t)) \geq \beta$ où $\beta > \alpha$.*

Proposition 2.5. *Si u est un signal borné (ce qui est toujours le cas physiquement), alors $\exists \gamma > 0$, $\lambda_{max}(S(t)) \leq \gamma$ pour $t \geq 0$.*

Théorème 2.4. *Si u est régulièrement persistante, alors $\|\hat{x}(t) - x(t)\|^2 \leq a \exp(-\theta t)\|\hat{x}(0) - x(0)\|^2$.*

En utilisant une analyse classique de type Lyapunov, la preuve de ce théorème découle directement des deux propositions précédentes (voir la preuve en détail dans Hammouri et Morales (1990)).

Nous décrivons ici un observateur pour une extension de ce type de systèmes. Considérons les systèmes affines en l'état, modulo une injection de sortie sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), y(t))x(t) + \varphi(u(t), y(t)) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.32}$$

avec $x(t) \in \mathcal{R}^n$, $u(t) \in \mathcal{R}^m$ et $y(t) \in \mathcal{R}^p$. $A(u(t), y(t))$ est une matrice de dimension $n \times n$. $\varphi(u(t), y(t)) = \begin{bmatrix} \varphi_1(u(t), y(t)) \\ \vdots \\ \varphi_n(u(t), y(t)) \end{bmatrix}$ est un vecteur de fonctions. C est une matrice de dimension $p \times n$. Un observateur pour le système (2.32) est proposé ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(u, y)\hat{x} + \varphi(u, y) - S^{-1}C^T R(C\dot{x} - y) \\ \dot{S} = -\theta S - A^T(u, y)S - SA(u, y) + C^T RC, \end{cases} \tag{2.33}$$

où R et $S(0)$ sont des matrices SDP de dimension $p \times p$ et $n \times n$ respectivement. $\theta > 0$ est un paramètre de réglage. $u(t)$ et $y(t)$ sont considérés comme des entrées pour établir un observateur sous la forme (2.30). D'après le théorème 2.4, nous pouvons donner la proposition suivante :

Proposition 2.6. *Si $(u(t), y(t))$ est une entrée régulièrement persistante pour le système (2.32), alors $\|\hat{x}(t) - x(t)\|^2 \leq \lambda \exp(-\theta t)\|\hat{x}(0) - x(0)\|^2$ où $\lambda > 0$ et $\theta > 0$ sont des constantes.*

2.1.2.3 Observateur à grand gain

Dans cette partie, nous allons présenter un observateur classique pour des systèmes non linéaires particuliers qui peuvent être mis sous la forme canonique (2.23) (dans le cas mono-

sortie) :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(z,u) \\ y = Cz, \end{cases}$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ C = [1\ 0\ \ldots\ 0],\ \varphi(z,u) = F_0(z) + \sum_{i=1}^{m} u_i G_i(z) \tag{2.34}$$

$$\text{où } F_0(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_{0n}(z) \end{bmatrix} \text{ et } G_i(z) = \begin{bmatrix} G_{i1}(z_1) \\ \vdots \\ G_{ik}(z_1,\ldots,z_k) \\ \vdots \\ G_{in}(z_1,\ldots,z_n) \end{bmatrix}.$$

Lorsqu'on conçoit un observateur pour ce type de système, les termes non linéaires peuvent créer une influence indésirable qui doit être dominée. En général, nous cherchons une formulation de type Lyapunov qui peut garantir la stabilité de l'observateur si les gains de l'observateur sont choisis d'une manière adéquate. Une solution typique est d'utiliser des gains suffisamment grands pour garantir la stabilité. Malheureusement, la théorie des observateurs à grand gain n'est pas toujours adaptée aux systèmes sous la forme (2.34). Il faut d'abord classifier ce type de systèmes sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.1.1. *Le terme non linéaire $\varphi(z,u)$ dans le système* (2.34) *est globalement Lipschitz. En d'autres termes, il existe une constante $\alpha > 0$, $\forall z, z' \in \mathcal{R}^n$, telle que $\|\varphi(z,u) - \varphi(z',u)\| \leq \alpha\|z - z'\|$ où $\|.\|$ représente la norme euclidienne sur $\mathcal{R}^n$.*

Avec l'hypothèse ci-dessus, nous concevons un observateur à grand gain pour le système (2.34) :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \varphi(\hat{z},u) + \Delta_{\theta_o} K(C\hat{z} - y), \tag{2.35}$$

où $\Delta_{\theta_o} = \begin{pmatrix} \theta_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_o^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \theta_o^n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale $n \times n$ avec $\theta_o > 0$ et $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$

tel que $A + KC = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ k_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ a toutes ses valeurs propres qui ont leur partie réelle strictement négative.

Remarque 2.1.1. *$A + KC$ est une matrice de Hurwitz (matrice de stabilité), alors il existe une matrice P SDP telle que :*

$$(A + KC)^T P + P(A + KC) = -I, \tag{2.36}$$

où I est une matrice d'identité.

Théorème 2.5. *(Gauthier et al. (1992)) Sous l'hypothèse 2.1.1, un observateur à grand gain* (2.35) *est un observateur exponentiel pour le système* (2.34)*. Plus précisément,* $\exists \mu > 0$ *;* $\exists \lambda > 0$ *;* $\exists \theta_o > 0$ *tels que* $\forall \theta \geq \theta_o$ *;* $\forall u$ *entrée bornée,* $u \in U \subset \mathcal{R}^n$ *et* $\forall z(0),\ \hat{z}(0)$*, on a :*

$$\|\hat{z}(t) - z(t)\|^2 \leq \lambda \exp(-\mu t)\|\hat{z}(0) - z(0)\|^2, \tag{2.37}$$

où μ *est telle que* $\lim_{\theta \to +\infty} \mu(\theta) \to +\infty$*.*

L'observateur à grand gain (2.35) est basé sur le modèle qui peut se mettre sous la forme (2.34). Cette transformation n'est cependant pas toujours facile à réaliser, surtout pour des systèmes fortement non linéaires. Par exemple, considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \exp(-x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_1. \end{cases} \tag{2.38}$$

Dans un premier temps, nous mettons (2.38) sous la forme (2.16) avec $f_0(x) = \begin{pmatrix} x_2 \exp(-x_2) \\ -x_2 \end{pmatrix}$, $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $h(x) = x_1$. Et puis, nous faisons le changement de variable :

$$z = \phi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_{f_0}(h)(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 e^{-x_2} \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

le système (2.38) peut s'écrire sous la forme (2.34) :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = F_{02}(z) + uG_2(z). \end{cases} \tag{2.40}$$

Le problème est alors de savoir déterminer les fonctions $F_{02}(z)$ et $G_2(z)$. Néanmoins, bien que l'on ne connaisse pas $\phi^{-1}(x)$, on connaît la forme de l'observateur à grand gain (2.35) pour (2.40) et on a : $\hat{z}(t) = \phi(\hat{x}(t)) \Rightarrow \dot{\hat{z}} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{\hat{x}} \right] \dot{\hat{x}}(t)$. En sachant que :

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_x \right)^{-1} \left[A\phi(x) + \varphi(\phi(x), u) \right], \tag{2.41}$$

on donne la proposition suivante :

Proposition 2.7.

$$\dot{\hat{x}} = f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\hat{x}) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{\hat{x}} \right)^{-1} \Delta_{\theta_o} K(h(\hat{x}) - y) \tag{2.42}$$

est un observateur à grand gain du système initial (2.16)*.*

Pour l'exemple (2.38), on peut calculer $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-x_2) - x_2 \exp(-x_2) \end{pmatrix}$. Ensuite, en choisissant $u(t)$ telle que $|u| \leq u_{max} < 1$, un observateur à grand gain peut être écrit sous la forme :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{\hat{x}} \right)^{-1} \Delta_{\theta_o} K(\hat{x}_1 - y).$$

Il existe plusieurs extensions pour ce type d'observateur. Dans les articles (Bornard (1991); Hammouri et Farza (2003)), des observateurs à grand gain pour les systèmes affines en la commande dans le cas multi-sorties sont proposés. Basée sur les résultats de (Hammouri et Farza (2003)), la thèse de Flila (Dufour et al. (2012); Flila (2010)) a donné une contribution sur la conception d'observateurs pour des système non uniformément observable sous l'hypothèse de la régularité locale. Récemment, Besançon et al. (Scola et al. (2013a,b)) appliquent en ligne la stratégie de sélection des entrées dans la conception d'observateur pour les systèmes affines en l'état et non uniformément observables .

2.2 Commande prédictive

La stratégie de commande prédictive à base de modèle (MPC en anglais) sera utilisée pour résoudre en ligne notre problème d'identification optimale en boucle fermée sous contraintes. Avant de mettre en œuvre la stratégie de la commande prédictive dans notre approche, nous allons présenter d'abord brièvement son historique, ses technologies précédentes, et des éléments fondamentaux.

2.2.1 Contexte général

La commande prédictive a été proposée premièrement et indépendamment par plusieurs personnes au début des années 1960. Cependant, il est difficile de déclarer qui a été le premier à donner cette idée de commande optimale, car les pionniers ont été des ingénieurs industriels qui ont déjà appliqué la commande prédictive plusieurs années avant que les premières publications ne soient apparues.

L'idée de la commande prédictive provient de la commande optimale. Une des premières contributions sur des idées similaires à la commande prédictive est celle de Bellman (1957). L'idée principale a été d'utiliser un modèle de simulation rapide pour prédire le comportement du procédé sur un horizon glissant et de déterminer en même temps une commande optimale au sens d'un certain coût, le tout en respectant des contraintes. Des idées similaires ont été aussi contenues dans Coales et Noton (1956) qui a déterminé en ligne dans un temps minimal des commandes optimales « bang-bang » en utilisant un modèle interne et en générant des prédictions de comportement du procédé sur un horizon de prédiction variable. En 1960, des contributions sur la stabilité des commandes optimales ont été données dans les publications de Kalman (Kalman et Bucy (1961); Kalman (1960)). Ensuite, en 1963, l'auteur Propoï a proposé explicitement une forme de commande prédictive basée un modèle interne en utilisant une méthode de programmation linéaire (Propoï (1963)).

Cependant, le premier brevet dans ce domaine a été attribué à Martin-Sanchez en 1976 pour sa méthode « commande prédictive adaptative » (Martin-Sanchez (1976)). Il met l'accent sur l'exploitation du modèle interne pour obtenir une commande adaptative en s'appuyant sur l'optimisation pour calculer les signaux de commande appropriés. Par la suite, l'article de Richalet et al. (1978) a proposé la commande prédictive de type heuristique avec le logiciel IDCOM (identification, commande), ce qui met l'accent sur des problèmes trop difficiles à traiter par le contrôle PID classique, mais sans contrainte d'entrée. Cutler et Ramaker (1980) ont également proposé un type de commande prédictive sous le nom DMC (Dynamic Matrix Control). Ils ont souligné de calculer la commande optimale en résolvant à plusieurs reprises le problème de programmation linéaire sous contraintes. DMC est devenu le premier algorithme le plus connu sur la commande prédictive des procédés industriels. Ces 2 méthodes reposaient sur des modèles obtenus par des réponses impulsionnelles ou indicielles.

Depuis les années 1980, la commande prédictive de type DMC a été étendue pour le problème quadratique (QDMC) en prenant en compte les contraintes d'entrée et de sortie (Garcia et Morshedi (1986)). En 1988, une méthode de commande prédictive SMOC (Shell Multivariable Optimizing Control) a été proposée pour les systèmes sous forme d'état (Marquis et Broustail (1988)). Un filtre de Kalman a été utilisé pour la partie d'estimation des états et des perturbations non mesurées sur la sortie. De plus, SMOC permet de distinguer différents niveaux de contraintes, ce qui est intéressant en pratique dans les procédés industriels. Enfin, les autres méthodes similaires telles que IDCOM-M, HIECON (HIErarchical constraint CONtrol), PFC (Predictive Functional Control) et SMCA (Setpoint Multivariable Control Architecture) fournissent des solutions pour les problèmes d'infaisabilité ou les systèmes instables en boucle ouverte.

Dans les dernières années de 1990, des méthodologies de commande prédictive dans les années 1980 ont été fusionnées pour créer des techniques plus avancées : RMPCT (Robust Model Predictive Control Technology) et DMC-plus. Ces méthodes sont proposées avec des interfaces graphiques d'utilisateur sous Windows, plusieurs niveaux d'optimisation pour réaliser les objectifs de contrôle en priorité, et l'amélioration des méthodes d'identification basées sur l'erreur de prédiction. Dans le MPC non linéaire, la stabilité du système en boucle fermée est toujours difficile à prouver.

Les approches précédentes permettent de faire de la régulation ou du suivi de trajectoire de référence. Récemment, le domaine de la commande prédictive économique (EMPC en anglais) a émergé (voir les récentes publications spéciales sur ce sujet dans le Journal of Process Control 24(8) de 2014, et toutes les références dans Ellis et al. (2014)). Au lieu d'utiliser la poursuite d'une trajectoire de référence comme l'objectif de contrôle, EMPC considère directement l'objectif économique directement comme fonction du coût telle que la minimisation de la consommation d'énergie, la maximisation de production, ou la minimisation du temps de traitement. Dans (Rawlings et al. (2012)), l'EMPC vise à maintenir l'état du procédé dans un état d'équilibre particulier ou dans un état optimal et temps variant (et qui est initialement inconnu), tandis qu'il optimise une fonction coût économique tout en maintenant les opérations du procédé dans une zone spécifiée (définie par les contraintes). Dans l'approche EMPC de Diehl et al. (2011), un exemple non linéaire qui satisfait la propriété de forte dualité dans le problème de l'état équilibre a été décrit pour montrer la réalisation de la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, même si la fonction de coût économique n'est pas optimisée.

La figure 2.4, qui est inspirée de Qin et Badgwell (2003), nous liste les algorithmes les plus significatifs de MPC industriel. Quelques technologies industrielles de MPC sont présentées dans le tableau 2.1.

Jusqu'en 2003, la commande prédictive a impliqué plus de 4000 applications au total dans le monde entier, sans ajouter des solutions locales développées dans les procédés industriels (Qin et Badgwell (2003)). La plupart des applications (67%) sont dans les domaines du raffinage et de la pétrochimie, les industries chimiques et des papiers sont en deuxième et troisième position. Les applications concernent aussi sur d'autres domaines, y compris les industries alimentaires, automobile et aérospatiale... En comparant aux autres régulateurs (PID, RST, et feedback contrôle...), les capacités de la commande prédictive (telles que le traitement des problèmes de contrôle multi-variables, la considération des contraintes, les calculs de commande en ligne et les prédictions de la future performance du procédé...) attirent de plus en plus d'attention des industries, et apporte un immense espace pour le développement.

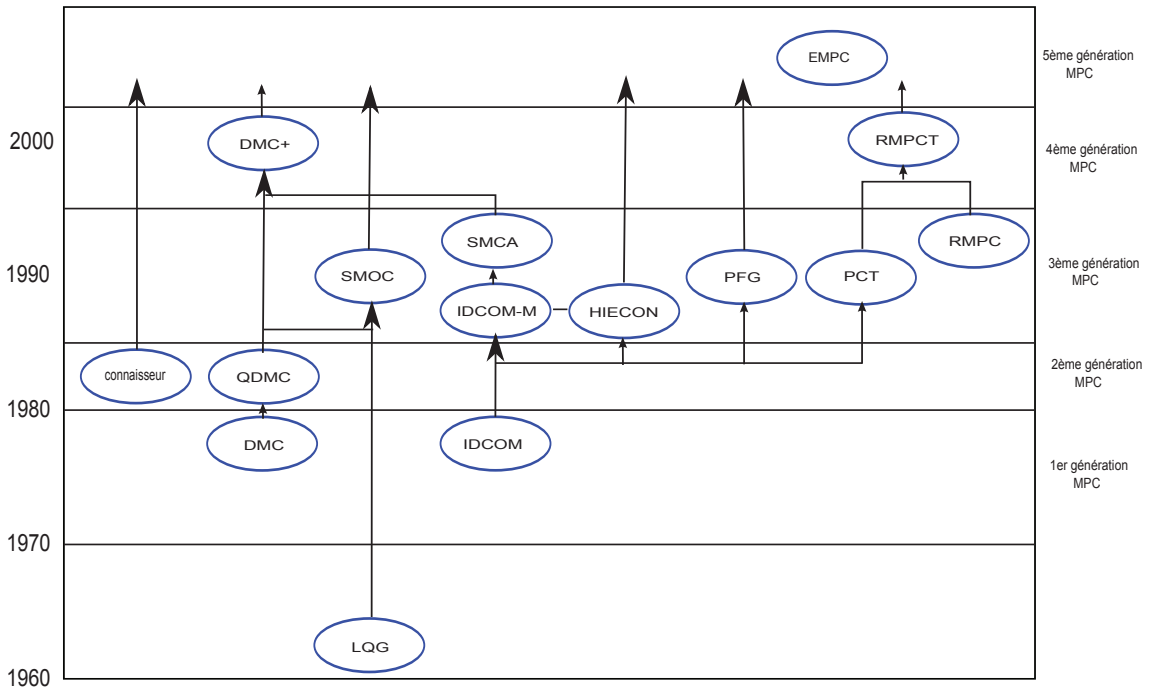


FIGURE 2.4 – Généalogie des algorithmes de MPC

Tableau 2.1 – Quelques technologies industrielles de MPC

Entreprise	Nom de produit MPC	Description (*en anglais*)
Aspen Tech	DMC	Dynamic Matrix Control
Adersa	IDCOM	Identification and Command
	HIECON	Hierarchical Constraint Control
	PFC	Predictive Functional Control
Honeywell Profimatics	RMPCT	Robust Model Predictive Control Technology
	PCT	Predictive Control Technology
Setpoint Inc.	SMCA	Setpoint Multivariable Control Architecture
	IDCOM-M	Multivariable
Treiber Controls	OPC	Optimum Predictive Control
Shell Global	SMOC-II	Shell Multivariable Optimizing Control
ABB	3dMPC	
Pavillion Technologies Inc.	PP	Process Perfecter
Simulation Sciences	Connoisseur	Control and Identification Package

2.2.2 Principe

Le cadre classique de la commande prédictive vise à conduire l'état du procédé à une valeur cible initialement souhaitée (i.e. la consigne) tout en respectant des contraintes. L'idée principale de la stratégie de commande prédictive est de prédire les futures performances du procédé, via un modèle, et de déterminer la commande optimale pour optimiser sous contraintes un critère spécifié par l'utilisateur. Pour ce faire, la méthode de commande prédictive s'appuie sur quatre points principaux :

1. un modèle de prédiction,
2. un objectif de contrôle optimal spécifié par l'utilisateur,
3. une formulation du problème d'optimisation sous contraintes,

4. une méthode de résolution pour trouver les commandes optimales appliquées au procédé et solutions de l'objectif d'optimisation désirée.

Dans les paragraphes suivants, nous allons donner les détails de chacun des points précédents.

2.2.2.1 Modèle de prédiction

Une des caractéristiques de la commande prédictive est qu'elle doit être basée sur un modèle, appelé modèle de prédiction. Ce modèle est établi pour prédire les comportements futurs du procédé dans la loi de commande. Le choix de la structure du modèle dépend des connaissances du procédé et de l'objectif du problème d'optimisation. Si le procédé est parfaitement modélisé et si toutes les perturbations autour du procédé sont connues, la commande peut être simplement obtenue en boucle ouverte (commande optimale). En revanche, si les connaissances du procédé ne sont pas suffisantes, un calcul en boucle fermée est utilisé pour trouver la commande. La commande prédictive ne nécessite pas un modèle forcément parfait du procédé, mais a toujours besoin de connaître les bonnes tendances grâce à celui-ci. Deux types de modèles existent :

- Modèle de connaissance :
  En général, il est établi à base des lois de la physique, de la chimie, de la biologie, etc. Ce type de modèle peut être linéaire ou non linéaire, et est représenté par des équations dynamiques aux dérivées ordinaires (ou discrètes) lorsque la variable de temps est la seule variable indépendante. Si les évolutions spatio-temporelles pour des grandeurs physiques du procédé sont prises en compte, le modèle est décrit par des équations dynamiques aux dérivées partielles. Les paramètres ont un sens physique. Ce type de modèle permet de donner une meilleure connaissance du procédé, ce qui permet alors de donner une meilleure prédiction du comportement du procédé. Malheureusement, une étude pluridisciplinaire est donc souvent obligatoire, ce qui peut être coûteux.

- Modèle de type « boîte noire » :
  Lorsqu'on ne connaît aucune loi, ni le fonctionnement du procédé à priori, ce type de modèle est conçu à partir de l'ensemble des données entrée-sorties. Ce modèle est généralement décrit par une (ou un ensemble) de fonction(s) de transfert qui représente(nt) simplement la relation entre les données expérimentales d'entrée-sorties. Une estimation de ses paramètres (qui n'ont pas de sens physique) est effectuée pour compléter le modèle. La linéarité et la simplicité de ce type du modèle peuvent apporter une approche plus simple et plus rapide. Néanmoins, pour un système industriel non linéaire, multi-variables et plus complexe, les divers comportements d'un procédé peuvent être difficilement représentés ou prédits fidèlement via ce type de modèle.

Comme nous pouvons le voir ci-dessus, chaque type de modèle a des avantages et inconvénients dans le contexte de la stratégie de commande prédictive. Bien que le modèle de type « boîte noire » peut être mis en œuvre plus simplement et plus rapidement dans l'approche de commande prédictive, la complexité du problème d'optimisation nécessite des informations plus précises pour atteindre l'objectif du fonctionnement. Le modèle joue évidemment un rôle essentiel dans la conception de la commande prédictive. Donc le modèle de connaissance est plus intéressant et de plus en plus souvent utilisé dans l'approche de commande prédictive. C'est ce type d'approche que nous privilégierons dans nos cas d'étude.

2.2.2.2 Objectif de fonctionnement

L'objectif de fonctionnement est défini par l'utilisateur avant de formuler le problème de contrôle optimal. Divers objectifs ont été considérés dans la commande prédictive :

- La stratégie de commande prédictive est largement utilisée depuis les années 1970 dans les applications industrielles pour des problèmes de régulation ou de suivi de trajectoire (Qin et Badgwell (2003)). Ce type de problème peut être aussi traité par d'autres types de commande, et notamment le PID. Cependant, la convergence de la sortie du procédé vers la trajectoire de référence n'est plus la seule performance souhaitée dans le problème du contrôle, la rapidité, la précision, la stabilité et le respect des contraintes sont aussi abordés et garantis dans la commande prédictive.

- D'autres objectifs d'optimisation développés dans les dernières années viennent de critères économiques : maximiser la production, augmenter le rendement, diminuer les pertes de matières premières, etc. Ceci est l'idée de départ dans la commande prédictive économique de type EMPC (Ellis et al. (2014)).

Les facteurs étroitement liés à ces objectifs de fonctionnement sont des contraintes d'exploitation (e.g. les limitations des actionneurs, la sécurité, le confort de l'utilisateur, les limites et besoins de production et l'environnement, etc) et doivent être pris en compte dans la résolution du problème du contrôle optimal. Par ailleurs (et ce n'est pas un point abordé dans cette thèse), le temps de calcul lié à la résolution du problème d'optimisation est aussi un point d'intérêt de plus en plus important, portant sur développement d'algorithmes à résolutions rapides de type FAST MPC (Alamir (2014)), afin que la commande puisse être calculée en ligne sur des problèmes d'optimisation à résoudre rapidement.

2.2.2.3 Formulation du problème d'optimisation

L'objectif de fonctionnement avec contraintes d'exploitation peut être formulé mathématiquement en un problème d'optimisation. L'idée de la stratégie de commande prédictive est de résoudre en ligne un problème d'optimisation (minimisation ou maximisation) sous contraintes basé sur un critère J :

$$J(u) = \int_{t_i}^{t_f} \psi(y_{ref}(t), y_p(t), y(t), u(t))dt. \tag{2.43}$$

Pour un système continu, le critère (ou la fonction du coût), dépend du vecteur des entrées manipulées u, du comportement de référence spécifié y_{ref} pour la sortie du procédé à contrôler y_p et de la sortie du modèle y. L'intervalle de temps $[t_i,\ t_f]$, sur lequel ce fait l'intégration, est l'intervalle de temps de prédiction, où $t_f = t_i + T_p$ permet d'introduire un élément clef de réglage de la prédiction : T_p, la durée de l'horizon de prédiction.

Remarque 2.2.1. *Les différents modèles seront ici le plus souvent formulés sous forme continue et résolus numériquement. Le problème de commande prédictive lié à* (2.43) *est toujours résolu en segments successifs du temps. Donc, les valeurs échantillonnées peuvent être prises à tout moment. La somme continue dans* (2.43) *peut être alors reformulée sous une somme discrète :*

$$J(u) = \sum_{l=k+1}^{k+N_p} \psi(y_{ref}(l), y_p(k), y(l), u(l)), \tag{2.44}$$

où k (resp. l) représente l'instant courant (resp. future) discret $k \times T_s$ (resp. $l \times T_s$), où T_s est le temps d'échantillonnage. N_p, l'horizon de prédiction, est le paramètre de réglage principal

du MPC. Un bloqueur d'ordre zéro est utilisé entre deux instants d'échantillonnage. La valeur initiale de l'état du modèle à k est obtenue à partir des mesures réelles courantes ou de l'état estimé actuel par l'observateur. Il est supposé que les données de procédé peuvent également être échantillonnées à la même vitesse.

Le problème d'optimisation (minimisation ou maximisation) est ramené, le plus souvent, à la minimisation du critère qui détermine la commande optimale sur l'horizon de prédiction fini :

$$\tilde{u}^*_{l|k} = \underset{\tilde{u}_{l|k}}{\operatorname{argmin}}(J(\tilde{u})),\ l \in [k+1,\ k+N_p] \tag{2.45}$$

où $\tilde{u}_{l|k}$ est une séquence de commandes sur l'horizon de prédiction N_p à l'instant courant k : $\tilde{u}_{l|k} = \{u(k), \ldots, u(l), \ldots, u(k+N_p)\}$. Le 1^{er} élément $u(k)^*$ de cette séquence optimale est la commande optimale qui sera appliquée à l'instant échantillonné suivant $k+1$.

En même temps, le problème d'optimisation doit prendre en compte de deux types de contraintes :

- Les entrées doivent toujours avoir un sens physique, donc elles doivent être contraintes en amplitude, et/ou sur la vitesse de variables manipulées :

$$\begin{cases} u_{min} \leqslant u(l) \leqslant u_{max} \\ \Delta u_{min} \leqslant \frac{u(l)-u(l-1)}{T_s} \leqslant \Delta u_{max}. \end{cases} \tag{2.46}$$

- Éventuellement, les performances du procédé doivent être maintenues dans une zone spécifiée. Par conséquence, les contraintes sur les états du procédé et ses sorties mesurées peuvent être contraintes par :

$$c_n(y_p(k), x(l), y(l), u(l)) \leqslant 0,\ \forall n \in I = 1, ...N_{soc}, \tag{2.47}$$

  où N_{soc} est le nombre de contraintes sur les états et/ou les sorties.

Il a été vu que la stratégie de commande prédictive économique EMPC est proposée pour optimiser directement la performance économique du procédé en temps réel. Avec un telle commande récente, la stabilité sur un horizon fini pour les systèmes non linéaires est abordée depuis peu. Ceci est fait (Rawlings et al. (2012)) en introduisant une contrainte terminale qui permet de maintenir l'état du procédé dans un état stable à la fin de l'horizon de prédiction. De fait, le problème de contrôle optimal est reformulé comme suit :

$$\begin{array}{l} \min\limits_{u} J_e(u) = \sum_{l=k+1}^{k+N_p} \phi_e(x(l), u(l)); \\ x(N_p) = x_s, \end{array} \tag{2.48}$$

où ϕ_e peut être soit une fonction de coût quadratique classique :

$$\phi_e(x(l), u(l)) = x(l)^T Q x(l) + u^T(l) R u(l) \tag{2.49}$$

(avec Q et R des matrices de pondération symétriques définies positives), soit (le plus souvent) une fonction économique non-convexe spécifiée. Dans (Heidarinejad et al. (2013)), une approche de type Lyapunov est utilisée dans une EMPC avec un contrôleur de fonctionnement bi-mode, et qui aide à stabiliser l'état du système en boucle fermée dans une région prescrite relativement grande tout en optimisant la performance économique souhaitée. Le premier mode du contrôleur de fonctionnement utilise une MPC en base d'analyse de Lyapunov (LMPC) qui est basée sur l'équation (2.49) pour réguler le comportement du procédé autour d'un état d'équilibre. Puis, basée sur la solution du problème de LMPC auxiliaire, une EMPC basée sur une fonction de Lyapunov (LEMPC) est utilisée pour résoudre le problème économique.

2.2.2.4 Méthode de résolution

La méthode de résolution d'un problème d'optimisation (cité ci-dessous (2.44) ou (2.48)) constitue le principe de fonctionnement de la commande prédictive. L'idée de la commande prédictive s'appuie sur les trois éléments principaux : la prédiction du comportement du procédé, l'optimisation d'une performance et la détermination en ligne de la commande optimale.

Avant de rentrer dans les détails de l'algorithme de la commande prédictive, deux paramètres doivent être définis dans la commande prédictive :

- l'horizon de commande N_c qui est le nombre d'arguments (variables de décision),
- l'horizon de prédiction N_p qui est la longueur sur laquelle on optimise le critère de performance en prédisant le comportement du procédé.

L'algorithme de commande prédictive vise à déterminer une séquence de commandes sur l'horizon de commande N_c à chaque instant k, qui permet de minimiser le critère de performance choisi tout en respectant les contraintes d'exploitation. Le profil de cette séquence de commande à chaque instant courant k, sur l'horizon de prédiction, peut être décrit sous différentes formes (figure 2.5) :

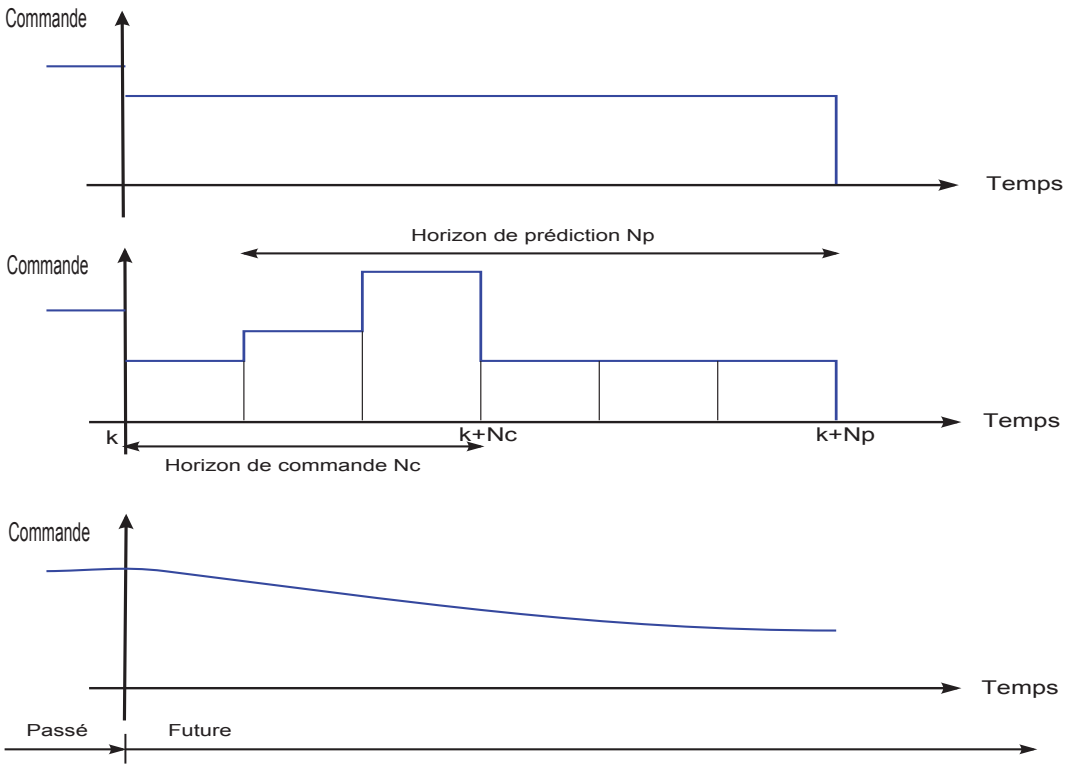


FIGURE 2.5 – Diverses paramétrisations possibles de la séquence de commande : $N_c = 1$ (en haut), $N_c > 1$ (au milieu), u forme polynomiale avec $N_c \neq 1$ (en bas)

- avec $N_c = 1$: une seule constante au long de l'horizon de prédiction N_p, c'est-à-dire $u(l) =$ constante, $\forall l \in [k,\ k + N_p]$ (figure 2.5, en haut).
- avec $N_c > 1$ (avec $N_p \geq N_c$) : une séquence de N_c commandes est déterminée à l'instant courant k jusqu'à la fin de l'horizon de commande $k + N_c$: $\{u(k), \ldots, u(l), \ldots, u(k +$

$N_c)\}$. Pour $l \in [k+N_c,\ k+N_p]$, les commandes appliquées sont égales au dernier élément de la séquence (figure 2.5, au milieu).

$$\begin{cases} \tilde{u}_{l|k} = \{u(k), \ldots, u(l), \ldots, u(k+N_c)\},\ \forall l \in [k,\ k+N_c] \\ \tilde{u}_{l|k} = u(k+N_c),\ \forall l \in [k+N_c,\ k+N_p]. \end{cases} \tag{2.50}$$

- décrit par une fonction polynomiale du temps :

$$u(t) = \sum_{i=0}^{i=N_c-1} a_i t^i, \tag{2.51}$$

où les N_c paramètres a_i deviennent les arguments à déterminer pour $t = l \times T_s$, $l \in [k,\ k+N_p]$ (figure2.5, en bas).

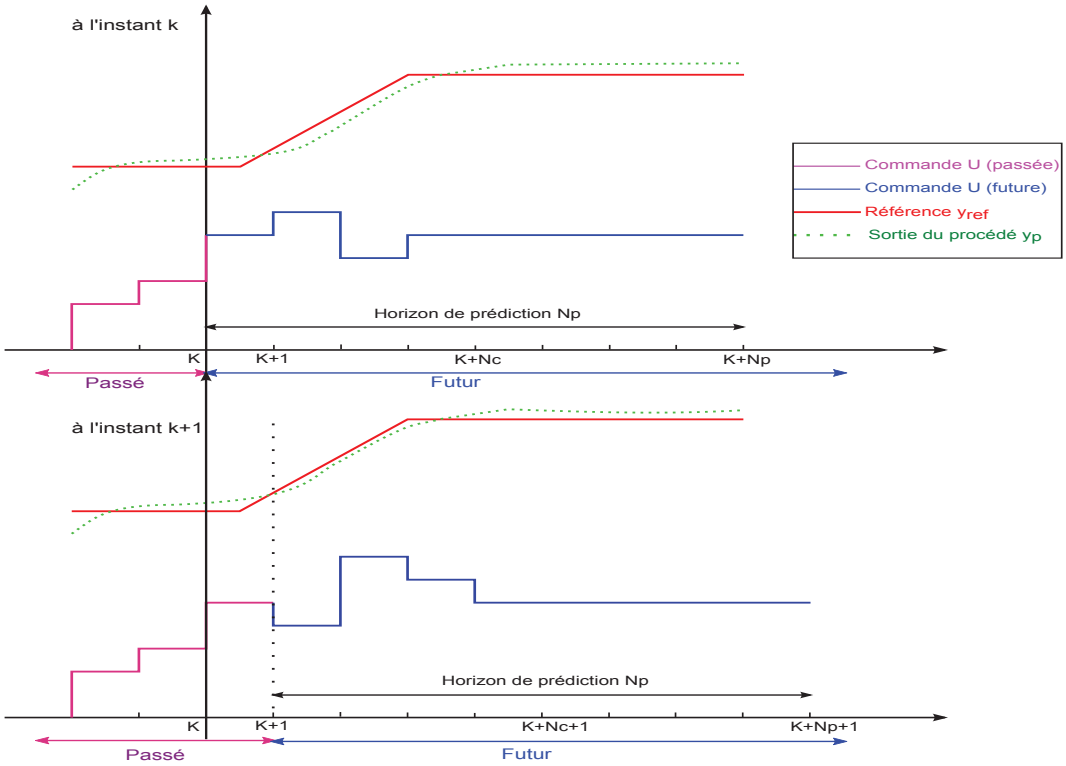


FIGURE 2.6 – Schéma de principe de la commande prédictive

Maintenant, nous prenons l'exemple du suivi d'une trajectoire de référence pour illustrer précisément les différents étapes de l'algorithme de la commande prédictive (figure 2.6) :

1. A chaque instant courant discret k, les prédictions des sorties (variables contrôlées) sont calculées sur l'horizon de prédiction grâce au modèle : $y(l|k)$ avec $l \in [k+1, k+N_p]$. Elles sont calculées en fonction des mesures et estimations connues à l'instant k ($y_p(k)$ considérée comme l'état initial) et des commandes $u(l|k)$ avec $l \in [k,\ k+N_p]$ qui doivent être choisies.

2. La meilleure séquence de commandes sur l'horizon de prédiction N_p, $\tilde{u}^*_{l|k}$ avec $l \in [k,\ k+N_p]$ est déterminée en optimisant le critère de performance choisi afin que la sortie prédite $y(l|k)$ soit la plus proche possible de la trajectoire de référence $y_{ref}(l|k)$. Pour un modèle linéaire, la solution pour un critère quadratique sans contraintes est unique et peut être obtenue explicitement. Sinon une méthode d'optimisation itérative (e.g. l'algorithme Levenberg-Marquardt) doit être utilisée.

3. A la prochaine période d'échantillonnage $k+1$, $k+1$ devient k. Seul le premier élément $u(k)^*$ de la séquence de commandes optimales $\tilde{u}^*_{l|k}$ est appliqué sur le système. Les étapes précédentes se répètent : la résolution recommence à partir de l'étape 1 en prenant en compte des nouvelles mesures actualisées du procédé.

En résumé, un modèle (qui sera pour nous le plus souvent un modèle de connaissance) est établi d'abord. Ensuite, un objectif de fonctionnement est défini et le problème de contrôle optimale est formulé. Une étape d'initialisation est nécessaire avant de rentrer dans les étapes de calcul de la commande prédictive. A chaque instant présent k, la meilleure séquence de commandes est déterminée en optimisant le critère de performance choisi sur l'horizon de prédiction N_p. Le premier élément de cette séquence est appliqué à la prochaine période d'échantillonnage. k est mis est à jour et la procédure de calcul de la commande prédictive est répétée.

Conclusion. *Dans ce chapitre, nous avons présenté brièvement dans un premier temps les notions d'observation pour les systèmes linéaires stationnaires et non linéaires affines en l'état, ce qui permet de donner une vision générale sur la relation entre l'observabilité et la commande. Pour les différentes classes de systèmes, trois types d'observateurs classiques ont été étudiés : observateur des systèmes linéaires en temps invariant, observateur des systèmes affines en l'état et observateur à grand gain. Dans une seconde partie, nous avons présenté le contexte et le principe généraux de la commande prédictive, notamment avec l'aspect de commande prédictive économique.*
Dans le chapitre suivant, nous allons présenter notre approche d'identification en ligne basée sur les observateurs non linéaires et sur la commande prédictive rappelés dans ce chapitre.

Chapitre 3

Approche d'identification optimale en boucle fermée

Résumé. *Dans ce chapitre, nous allons d'abord brièvement rappeler le besoin lié à la conception d'observateur et comment est déterminé le modèle de sensibilité. Ensuite, notre structure de commande optimale en boucle fermée pour l'identification en ligne des paramètres inconnus d'un modèle sera détaillée. Basée sur cette structure, nous nous attarderons ensuite sur deux méthodes permettant en plus de stabiliser le système en boucle fermée. L'aspect logiciel sera aussi abordé. Enfin, nous développerons la méthode sur le cas particulier du système linéaire d'ordre un pour identifier la constante de temps.*

3.1 Loi de commande couplant commande prédictive et observateur

3.1.1 Principe de l'approche

L'approche proposée combine le DEO en boucle fermée avec l'identification en ligne des paramètres constants et inconnus du modèle dynamique linéaire (ou non). Sur la base de la structure du modèle dynamique choisi, un observateur est donc conçu pour une estimation combinée des états non mesurés du modèle (le cas échéant) et des paramètres inconnus du modèle. Ensuite, un modèle dynamique de sensibilité est dérivé du modèle pour obtenir les sensibilités des mesures par rapport aux paramètres inconnus du modèle. Enfin, le problème de DEO est formulé par une fonction de coût qui maximise les informations contenues dans l'expérience. Le problème de commande est résolu par une stratégie de commande prédictive, où des contraintes sur les entrées, états estimés et mesures de sortie peuvent être spécifiées. Les entrées optimales décrivant l'expérience en cours de réalisation et les estimations des paramètres sont alors déterminées conjointement en ligne. Basé sur ces composants majeurs, le principe de notre algorithme de commande optimale pour l'identification en boucle fermée est résumé sur la figure 3.1.

Dans la suite de ce chapitre nous allons détailler les différents éléments nécessaires pour élaborer notre approche d'identification ; à savoir, l'observateur, le modèle, le modèle de sensibilité ainsi que la loi de commande prédictive.

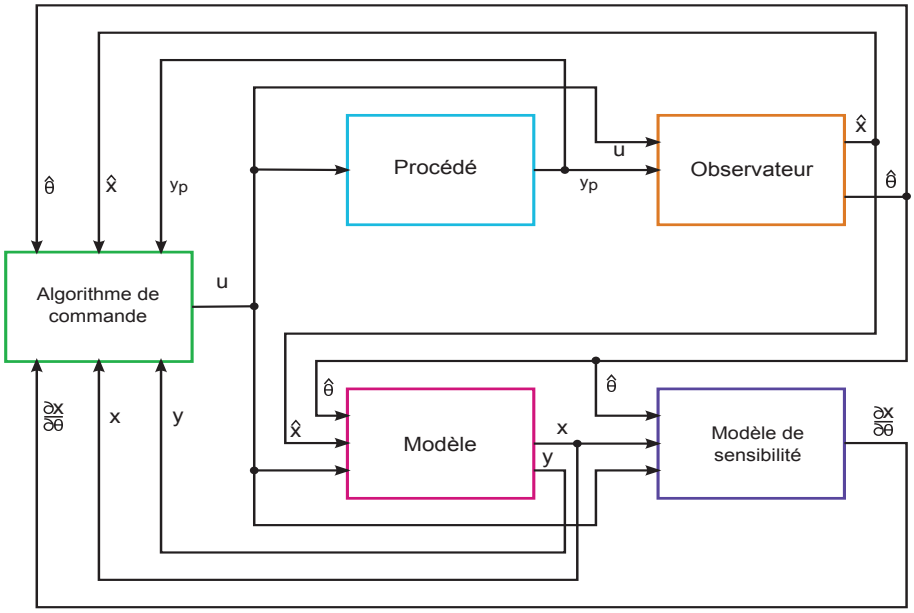


FIGURE 3.1 – Structure de commande en boucle fermée pour l'identification en ligne de paramètres du modèle

3.1.2 Synthèse de l'observateur pour l'estimation des paramètres

Un observateur est utilisé pour donner une estimation $\hat{x}(t)$ de l'état du modèle $x(t)$ à l'aide des états judicieux du modèle et des connaissances de $u(t')$ et $y(t')$ sur $0 \leq t' \leq t$. En outre, dans le domaine de l'identification paramétrique, l'observateur doit être conçu pour estimer en ligne, non seulement les états du modèle (le cas échéant), mais surtout les paramètres constants inconnus. Par conséquence, nous devons ici d'abord augmenter les états du modèle (1.10) avec les paramètres constants inconnus :

$$(M_a) \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), \theta, u(t)) \\ \dot{\theta} &= 0 \\ y(t) &= h(x(t), \theta, u(t)). \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans la suite, on note le vecteur d'état augmenté par $x_a = [x \quad \theta]^T$ et le vecteur de fonction $f_a = [f \ 0]^T$.

Définition 3.1. *Un observateur basé sur le modèle augmenté* (3.1) *peut être décrit par un système dynamique sous une forme générale suivante :*

$$(O) \begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) &= f_a(\hat{x}_a(t), u(t)) + g_a(t, h(\hat{x}_a(t), u(t)) - y_p(t)) \\ \textit{avec :} & g_a(t, 0) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

tel que :
i) si $\hat{x}_a(0) = x_a(0)$, *alors* $\hat{x}_a(t) = x_a(t), \quad \forall t \geq 0$;
ii) si $\forall x_a(0), \ \forall \hat{x}_a(0)$, *alors* $\lim_{t \to +\infty} \|\hat{x}_a(t) - x_a(t)\| = 0$,
où y_p *est le vecteur des sorties du procédé (les mesures réelles), et* g_a *est est une fonction à synthétiser telle que l'erreur d'estimation* $e(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t)$ *converge asymptotiquement vers zéro. Ceci constitue la problématique théorique principale dans l'étude des observateurs, et dépend de la forme du modèle considéré.*

Remarque 3.1.1. *En général, il n'est pas nécessaire de mesurer tous les états du modèle* $x(t)$ *pour l'approche proposée. Mais il est nécessaire et suffisant de mesurer une combinaison de*

certains états qui permettent d'établir un observateur pour les estimations des états inconnus et des paramètres inconnus, et aussi d'étudier la sensibilité de sortie du modèle par rapport aux paramètres inconnus.

Au final, cet observateur est l'outil qui permet d'obtenir en ligne, à chaque instant courant k, une estimation $\hat{\theta}(k)$ des paramètres inconnus du modèle.

3.1.3 Modèle dynamique

Comme l'illustre la figure 3.1, notre algorithme de commande nécessite à chaque instant présent k l'utilisation d'un modèle. Basé sur le modèle (1.10) et sur les estimations actuelles des états $\hat{x}(k)$ du procédé et des paramètres constants inconnus $\hat{\theta}$, il s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), \hat{\theta}(k), u(t)) \ \forall t > t_k \\ y(t) & = & h(x(t), \hat{\theta}(k), u(t)) \ \forall t > t_k, \\ x(t_k) & = & \hat{x}(k) \ \forall t_k \geq 0 \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Notons d'une part que ce modèle dépend de la dernière estimation des paramètres et d'autre part que la condition initiale de ce modèle dépend de la dernière estimation des états : ceci constitue donc un feedback dans notre structure.

Ce modèle est intégré sur l'horizon de prédiction, en appliquant la commande testée à l'itération actuelle (voir plus loin) pour obtenir la prédiction de l'état.

3.1.4 Modèle de sensibilité

Le modèle de sensibilité est explicitement déduit à partir du modèle (1.10) et est utilisé par la loi de commande comme un terme de feedback. En effet, l'analyse de sensibilité nous montre comment les paramètres constants inconnus θ influencent les états du modèle x et les sorties du modèle y. En utilisant la définition de la fonction de sensibilité $(\cdot)_\theta = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\theta}$ d'une variable par rapport aux paramètres θ, et le modèle dynamique linéaire (ou non) (1.10), nous définissons le modèle de sensibilité comme suit :

$$(M_\theta) \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_\theta(t) & = & \frac{\partial f(x(t),\theta,u(t))}{\partial x} x_\theta(t) + \frac{\partial f(x(t),\theta,u(t))}{\partial \theta} \ \forall t > t_k, \text{ avec } \theta = \hat{\theta}(k) \\ y_\theta(t) & = & \frac{\partial h(x(t),\theta,u(t))}{\partial x} x_\theta(t) + \frac{\partial h(x(t),\theta,u(t))}{\partial \theta} \ \forall t > t_k, \text{ avec } \theta = \hat{\theta}(k) \\ x_\theta(t_k) & = & x_\theta(t_k|t_{k-1}) \ \forall t_k > 0 \\ x_\theta(t_k) & = & 0 \text{ à } t_k = 0 \end{array} \right. \tag{3.4}$$

où $x_\theta \in \mathcal{R}^{p\times q}$ et $y_\theta \in \mathcal{R}^{n\times q}$ sont les matrices de sensibilité d'états (de sorties) par rapport aux paramètres inconnus évaluées en $\theta(k)$. $x_\theta(t_k|t_{k-1})$ est la valeur de la matrice de sensibilité d'états au temps t_k calculée au temps précédent t_{k-1}. En toute généralité, la résolution de ce modèle de sensibilité est couplée à la résolution du modèle (3.3) et aux valeurs estimées des paramètres constants inconnus $\hat{\theta}(k)$.

Ce modèle est utilisé dans deux intégrations :

- sur une période d'échantillonnage, en appliquant la commande optimale actuelle, pour obtenir la valeur de cet état au pas de temps suivant (i.e., les futures conditions initiales),

- sur l'horizon de prédiction, en appliquant la commande testée à l'itération actuelle (voir plus loin), pour obtenir la prédiction des sensibilités.

De plus, les états et paramètres impliqués dans le modèle ont généralement différentes échelles et unités. Ainsi, afin de redimensionner les effets des différents paramètres sur les différentes sorties du modèle, chaque sensibilité est normalisée via la fonction de sensibilité relative :

$$\begin{cases} \bar{x}_{i\theta_j} &= \frac{\hat{\theta}_j(k)}{x_i} x_{i\theta_j}; \quad i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, q \\ \bar{y}_{i\theta_j} &= \frac{\hat{\theta}_j(k)}{y_i} y_{i\theta_j}; \quad i = 1, \cdots, p; j = 1, \cdots, q. \end{cases} \tag{3.5}$$

où $x_{i\theta_j}$ (resp. $y_{i\theta_j}$) est la sensibilité de l'état x_i (resp. de la sortie y_i) par rapport le paramètre estimé $\hat{\theta}_j$.

3.1.5 Fonction de coût

Dans notre problème d'identification optimale en ligne, l'objectif est de maximiser les informations contenues dans l'expérience, à savoir de maximiser les sensibilités des états du modèle par rapport aux paramètres inconnus à chaque instant. A cette fin, la matrice d'information Fisher (MIF) est introduite. A l'instant k, sur l'horizon de prédiction N_p, pour une commande choisie, avec les mesures et les estimations obtenues par l'observateur, nous résolvons les deux modèles de prédiction ((3.3) et (3.4) dans le futur $l \in [k,\ k + N_p]$ en utilisant les sorties de l'observateur $\hat{x}_a(k)$ et du modèle de sensibilité $x_\theta(k)$ comme les états initiaux. Basée sur les sorties normalisées du modèle de sensibilité, une matrice de sensibilité $\bar{y}_\theta(l)$ est définie d'abord pour décrire, à l'instant courant k, la prédiction de la sensibilité normalisée dans le temps futur $l \geq k$:

$$\bar{y}_\theta(l) = \begin{bmatrix} \bar{y}_{1\theta_1}(l) & \bar{y}_{1\theta_2}(l) & \dots & \bar{y}_{1\theta_q}(l) \\ \bar{y}_{2\theta_1}(l) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \bar{y}_{p\theta_1}(l) & \dots & \dots & \bar{y}_{p\theta_q}(l) \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Ensuite, nous pouvons présenter la MIF comme suivant :

$$M(l) = \|\bar{y}_\theta(l)\|^2, \tag{3.7}$$

qui contient les informations prédites de l'expérience, à l'instant courant k, pour le temps futur $l \geq k$. Afin d'en maximiser les informations contenues sur l'horizon de prédiction, la fonction de coût J est considérée comme suit, basée sur la MIF (3.7) :

$$J = \frac{1}{N_p} \sum_{l=k+1}^{k+N_p} (\psi(M(l)) = \varphi(x(l), y(l), u(l), y_p(k), \hat{x}_a(k))) \tag{3.8}$$

où $\psi(.)$ est un critère de sensibilité décrit dans le paragraphe suivant et J est une fonction de coût qui représente l'information moyenne sur l'horizon de prédiction N_p à l'instant discret k. L'argument à choisir est le profil futur de commande $u(l)$. Dans le cas particulier du DEO pour l'identification paramétrique, il existe plusieurs critères de sensibilité issue de la MIF. Chaque critère a sa propre force et faiblesse (Franceschini et Macchietto (2008)). L'une des questions est de savoir comment choisir le critère le plus adapté pour un problème particulier. Pour apporter une réponse, une analyse de sensibilité sera discutée dans un cas d'étude (bioprocédé) dans le chapitre sur les cas d'étude. Trois critères ont été pris en compte dans ce travail :

1. *E*-optimalité : ce critère a pour l'objectif de maximiser la plus petite valeur propre de la matrice M. Géométriquement, il minimise la taille de l'axe principal de la région de confiance jointe.

$$\begin{cases} \tilde{u}^* = \underset{\tilde{u}}{\text{argmax}}\,(J_E(\tilde{u}) = \frac{1}{N_p}\sum_{l=k+1}^{k+N_p}\psi(M(l))),\ l \in [k+1,\ k+N_p] \\ \text{avec } \psi(M(l)) = \left|\dfrac{\lambda_{min}(M(l))}{\lambda_{max}(M(l))}\right| \end{cases} \tag{3.9}$$

2. *D*-optimalité : ce critère vise à maximiser le déterminant de la matrice M. Ceci correspond à minimiser le volume de la région de confiance jointe.

$$\begin{cases} \tilde{u}^* = \underset{\tilde{u}}{\text{argmax}}\,(J_D(\tilde{u}) = \frac{1}{N_p}\sum_{l=k+1}^{k+N_p}\psi(M(l))),\ l \in [k+1,\ k+N_p] \\ \text{avec } \psi(M(l)) = det(M(l)) \end{cases} \tag{3.10}$$

3. *A*-optimalité : Ce critère est défini pour maximiser la trace de la matrice M, ce qui signifie de minimiser la dimension du cadre enfermant la région de confiance jointe.

$$\begin{cases} \tilde{u}^* = \underset{\tilde{u}}{\text{argmax}}\,(J_A(\tilde{u}) = \frac{1}{N_p}\sum_{l=k+1}^{k+N_p}\psi(M(l))),\ l \in [k+1,\ k+N_p] \\ \text{avec } \psi(M(l)) = trace(M(l)) \end{cases} \tag{3.11}$$

Les trois critères de sensibilité sont interprétés géométriquement par la figure 3.2.

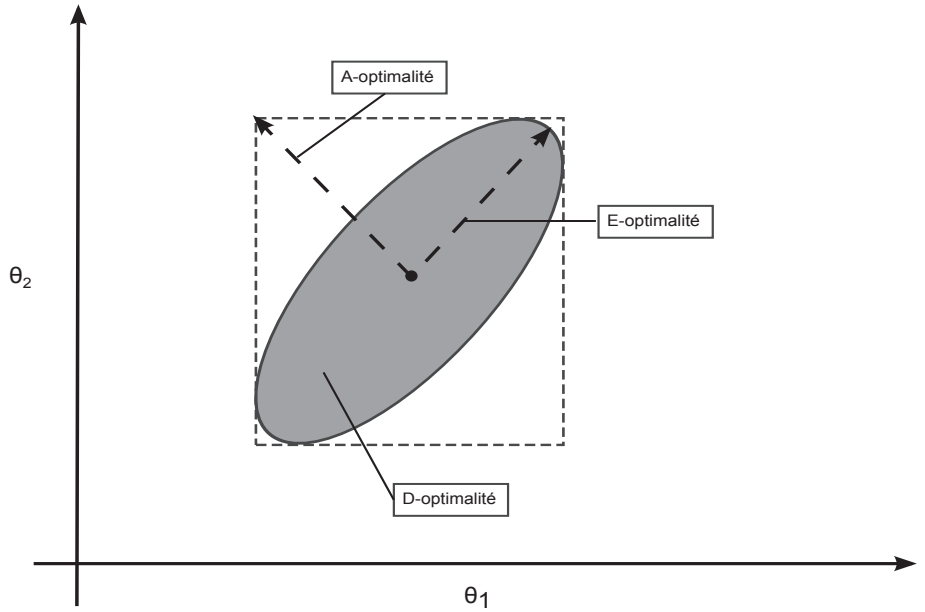


FIGURE 3.2 – Interprétation géométrique des critères de sensibilité (zone grise : région de confiance des paramètres) (Franceschini et Macchietto (2008))

3.1.6 Formulation finale du problème d'identification optimale

Finalement, le problème du DEO pour l'identification paramétrique est formulé par la fonction de coût (3.8) avec des contraintes qui sont soit des contraintes sur les entrées décrites par (2.46) (pour respecter les limitations physiques ou garantir l'observabilité du système), soit des contraintes sur les états du modèle et/ou les sorties mesurées du procédé (2.47) (pour

maintenir les performances du procédé dans une zone spécifiée et/ou stabiliser le système en boucle fermée). La formulation finale du problème d'identification optimale sous contraintes est décrite comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{u}^* = \underset{\tilde{u}}{\operatorname{argmax}}\, J(\tilde{u}) \\ \text{avec } J = \frac{1}{N_p}\sum_{l=k+1}^{k+N_p} \varphi(x(l), y(l), u(l), y_p(k), \hat{x}_a(k)) \\ \tilde{u} = \{u(k), \ldots, u(l), \ldots, u(k+N_p)\},\ l \in [k,\ k+N_p] \\ \text{sous des contraintes d'entrée, } (\forall k > 0) : \\ \left\{\begin{array}{l} u_{min} \leqslant u(l) \leqslant u_{max} \\ \Delta u_{min} \leqslant \dfrac{u(l) - u(l-1)}{T_s} \leqslant \Delta u_{max} \end{array}\right. \\ \text{sous des contraintes d'états et/ou de sorties, } (\forall k > 0) : \\ \left\{\begin{array}{l} c_n(x(l), y(l), u(l), y_p(k), \hat{x}_a(k)) \leqslant 0, \\ \forall n \in I = 1, 2, \ldots N_{soc}. \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{3.12}$$

L'approche est basée sur la résolution de l'observateur (3.2), du modèle de prédiction (3.3) et du modèle de prédiction de la sensibilité (3.4). Avec la stratégie de commande prédictive, le problème d'identification optimale sous contraintes (3.12) détermine à chaque instant courant k la commande optimale $\tilde{u}^*$ à appliquer au procédé, obtenue donc en maximisant en ligne les informations contenues dans une seule expérience. Parallèlement, la commande et les mesures sont fournies à l'observateur qui détermine en ligne l'estimation recherchée initialement des paramètres inconnus $\hat{\theta}(k)$ qui tend vers sa valeur cible.

Remarque 3.1.2. *Pour la classe de systèmes linéaires temps variants suivante :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& A(u,\theta)x + B(\theta)u \\ y &=& C(\theta)x. \end{array}\right. \tag{3.13}$$

Dans ce cas, le modèle de sensibilité est donné comme suit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_\theta &=& A(u,\theta)x_\theta + \dfrac{\partial A}{\partial \theta}(u,\theta)x + \dfrac{\partial B}{\partial \theta}(\theta)u \\ y_\theta &=& C(\theta)x_\theta + \dfrac{\partial C}{\partial \theta}(\theta)x. \end{array}\right. \tag{3.14}$$

Comme nous pouvons le remarquer, si ni la dynamique de la sensibilité de l'état ni celle de la sensibilité de la sortie dépendent de l'état du système augmenté (3.1) $[x\ \theta]'$ *, alors le modèle de sensibilité* (3.14) *devient :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_\theta &=& A(u)x_\theta + B'u \\ y_\theta &=& Cx_\theta. \end{array}\right. \tag{3.15}$$

Par conséquent, le critère de sensibilité (3.8)*, basé sur les sorties y_θ du modèle de sensibilité est découplé du modèle (3.13), des paramètres estimés et des mesures en ligne. Donc l'approche proposée, qui maximise selon la commande une norme issue de la matrice de sensibilité, sera réduite à une simple résolution du coût hors ligne (l'optimisation en ligne n'est plus nécessaire) qui donnera une commande constante (la solution unique).*

3.2 Adaptation de la loi de commande pour les systèmes instables en boucle ouverte

Dans le cas des systèmes dynamiques non linéaires instables en boucle ouverte avec des paramètres inconnus, il est toujours difficile de formuler un problème de commande optimale

qui peut garantir à la fois la convergence des erreurs d'estimation des paramètres inconnus (à zéro) et la stabilité du système en boucle fermée. Basé sur la loi de commande dans la section précédente, pour stabiliser le système en boucle fermée, nous allons proposer ici 2 approches : l'une basée sur l'introduction de contraintes fictives, l'autre plus rigoureuse basée sur une analyse de type Lyapunov.

3.2.1 Stabilisation par contraintes fictives

Comme le procédé est instable en boucle ouverte, afin de maintenir le comportement en boucle fermée dans une région stable, des contraintes de sortie supplémentaires peuvent être spécifiées. Ces contraintes de sortie dans la formulation du problème (3.12) sont définies comme suit :

$$y_{p_{min}} \leq y_p(l) \leq y_{p_{max}}. \tag{3.16}$$

Étant donné que ces contraintes sont fictives, le problème réel s'occupe du choix des limites $y_{p_{min}}$ et $y_{p_{max}}$: une connaissance physique à priori et des essais et d'erreurs avec des simulations peuvent être utilisés. D'un coté, pendant ces essais, si ces deux limites sont trop proches les uns des autres, la valeur optimale de commande n'est pas facile à trouver. Si elle l'est, elle tend donc à être de moins en moins variable et cela ne permet pas forcément d'obtenir des sorties suffisamment excitées. Par conséquent, l'estimation des paramètres n'est pas correcte et le problème d'optimisation sous contrainte peut être non réalisable. D'un autre côté, pendant ces essais, si ces deux limites sont trop éloignées les uns des autres, la commande peut donc varier largement, et la stabilité du système en boucle fermée n'est pas forcément obtenue. Cependant, cette méthode n'a pas la preuve théorique de stabilisation en boucle fermée. Cette méthode reste néanmoins assez simple, mais d'un point de vue du coût financier et du temps, cette méthode n'est pas très idéale et pratique car cela nécessite une campagne d'essais-erreurs (Qian et al. (2013)). Afin de régler ce problème, dans la section suivante, une approche d'identification optimale en ligne est développée avec une analyse de Lyapunov pour un certaine classe de système dynamiques non linéaires.

3.2.2 Stabilisation par une approche de type Lyapunov

Pour le système dynamique non-autonome, une fonction de Lyapunov est établie pour stabiliser le système en boucle fermée. Donc le problème de la stabilité consiste à trouver une telle fonction (i.e. une fonction de Lyapunov) qui vérifie certaines conditions : semi-définie positive et semi-définie négative pour sa dérivée.

Hypothèse 3.2.1. *Le système dynamique non linéaire peut être soit linéarisé autour d'un état d'équilibre, soit considéré comme un système quasi-linéaire.*

Basée sur l'hypothèse 3.2.1, pour le cas des systèmes dynamiques non linéaires instables, nous limitons la classe générale du modèle (1.10) à un cas non linéaire plus particulier :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + g(x,t), \tag{3.17}$$

où $A(.) \in \mathcal{R}^{n\times n}$ est une matrice d'état temps variant, $B(.) \in \mathcal{R}^{n\times m}$ est une matrice d'entrée temps variant, et $g(x,t)$ est une fonction continue localement lipschitzienne près de $x = 0$ telle que $g(0,t) = 0$, $\forall t \in]T, +\infty[$, ce qui peut être considérée comme une « petite perturbation » du système.

- si $g(x,t) = 0$, le système (3.17) est linéaire non-autonome.

- si $\lim_{\|x\|\to 0, x\neq 0} \frac{g(x,t)}{\|x\|} = 0$ uniformément par rapport à t, le système (3.17) est quasi-linéaire non-autonome.

Afin de stabiliser ce type de système (3.17) en boucle fermée, un lemme de stabilité de Lyapunov est introduit d'abord ci-dessous :

Lemme 3.1. *Donnons une loi de commande :*

$$u = -Kx(t), \tag{3.18}$$

où

$$K = R^{-1}B^T P \tag{3.19}$$

et P est la solution semi-définie positive d'une équation algébrique de Riccati en temps continu :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \tag{3.20}$$

où Q et R sont des matrices définies positives à régler. Supposons que A, B sont stabilisables et A, $Q^{\frac{1}{2}}$ sont détectables, alors le système en boucle fermée sera localement exponentiellement stable.

Dans notre problème de contrôle optimal, selon le lemme 3.1, à chaque instant k, sur l'horizon de prédiction N_p, nous calculons une matrice semi-définie positive $P(k)$ qui dépend des matrices $A(\hat{\theta}(k))$ et $B(\hat{\theta}(k))$ (les matrices R et Q sont définis comme matrice d'identité par défaut). Ensuite, la prédiction des états du modèle $x(l)$ ($l \in [k\ k+N_p]$) est déterminée grâce au modèle de prédiction (3.3). Finalement, une fonction de Lyapunov est établie comme suit :

$$J_L = x(l)P(k)x^T(l),\ l \in [k\ k+N_p]. \tag{3.21}$$

La fonction de Lyapunov doit être semi-définie positive et semi-définie négative dans sa dérivé pour stabiliser le système (3.17-3.18) en boucle fermée. En d'autres termes, cette fonction de Lyapunov J_L doit être décroissante. Donc, comme nous pouvons le constater, notre fonction de Lyapunov satisfait la condition de semi-définie positive parce que la matrice P est semi-définie positive. Afin de garantir la décroissance de la fonction de Lyapunov, nous devons minimiser cette fonction de Lyapunov dans notre loi de commande optimale.

3.2.2.1 Formulation finale du problème d'optimisation

Le problème de contrôle optimal est formulé par une fonction de coût dual qui combine deux parties : une partie porte sur un critère de sensibilité pour améliorer l'estimation des paramètres (comme nous l'avons vu précédemment), une autre partie est basée sur une fonction de Lyapunov pour stabiliser asymptotiquement le système en boucle fermée :

- En effet, si on considère seulement la maximisation du critère de sensibilité comme problème à résoudre, l'instabilité non contrôlée du système dynamique non linéaire (à éviter) peut soit provoquer des oscillations auto-excitées à l'excès, soit la divergence sur la réponse du système qui peut affecter les sensibilités des sorties mesurées par rapport aux paramètres constants inconnus, i.e. la précision de l'estimation des paramètres inconnus.

- D'autre part, si nous considérons seulement comme critère la stabilité du système en boucle fermée, ceci signifie de maintenir la décroissance de la fonction de Lyapunov J_L dans (3.21). Les informations contenues dans l'expérience peuvent alors ne pas être

suffisantes pour garantir toutes les estimations de paramètres avec une bonne précision, en particulier pour les paramètres qui ont besoin de plus d'excitation de la réponse du système pour obtenir la convergence de l'estimation.

Une solution pour résoudre le problème d'identification optimale dans ce cas est de trouver une commande optimale qui nous apporte un équilibre entre la bonne estimation des paramètres inconnus et la stabilité du système en boucle fermée. Par conséquent, le problème d'identification optimale sous des contraintes d'entrée est formulé comme suivant :

$$\begin{cases} \tilde{u}^* = \underset{\tilde{u}}{\text{argmax}}\,(J_{total}) \\ \tilde{u} = \{u(k)\cdots u(l)\cdots u(k+N_p)\},\ l \in [k\ k+N_p] \\ \text{avec } J_{total} = \frac{1}{N_p}\sum_{l=k+1}^{k+N_p}\left(\beta\frac{J_\theta(l)}{w_\theta} - (1-\beta)\frac{J_L(l)}{w_L}\right) \\ \text{sous des contraintes d'entrée, } (\forall k>0) : \\ \begin{cases} u_{min} \leqslant u(l) \leqslant u_{max} \\ \Delta u_{min} \leqslant \frac{u(l)-u(l-1)}{T_s} \leqslant \Delta u_{max}, \end{cases} \end{cases} \tag{3.22}$$

où J_{total} est le critère final d'optimisation, $\beta \in [0,\ 1]$ est une valeur de pondération pour les deux parties en concurrence : le critère de sensibilité J_θ (qui peut être J_E, J_D ou J_A) et le critère de stabilité de Lyapunov J_L[1]. Ces deux critères peuvent avoir différentes échelles de valeurs qui rendent le choix de la valeur de pondération plus difficile. Pour résoudre ce problème, deux poids w_θ et w_L sont définis pour normaliser J_θ et J_L, respectivement. Par conséquent, la valeur de pondération β peut être choisie dans l'intervalle $[0,\ 1]$. L'influence du réglage de β sera illustrée dans un cas d'étude (l'aile delta). Finalement, à chaque instant courant k, sur l'horizon de prédiction, le problème d'optimisation sous contraintes donné dans (3.22) est résolu pour déterminer une commande optimale u^* qui peut maximiser les informations contenues dans l'expérience, et en même temps stabiliser le système en boucle fermée. Cette approche est donc un nouvel exemple de formulation de type commande prédictive économique EMPC.

3.3 Algorithme et logiciel

3.3.1 Algorithme

Une fois que le modèle et le modèle de sensibilité sont définis et que la formulation du problème d'optimisation est faite, l'implémentation de la stratégie de commande prédictive peut être résumée comme suit, à l'instant courant k :

1. Mettre à jour les mesures $y_p(k)$.

2. Mettre à jour l'estimation $\hat{x}_a(k)$ par l'observateur.

3. Avec l'estimation des paramètres inconnus $\hat{\theta}(k)$ (considérée constante sur l'horizon de prédiction) et l'estimation des états $\hat{x}(k)$, les prédictions des sorties sont faites sur l'horizon de prédiction grâce au modèle ((3.3) et au modèle de sensibilité (3.4)) : $y(l|k)$ et $\bar{y}_\theta(l|k)$ avec $l \in [k+1,\ k+N_p]$ sont calculées en fonction de chaque commande prédite testée $\tilde{u}$.

[1]Comme l'indique la section précédente, la fonction de Lyapunov est semi-définie positive, et on a besoin de minimiser la fonction pour garantir sa décroissance. Donc, dans la fonction de coût J_{total} qui est maximisée, un signe moins est ajouté devant J_L

4. En résolvant le problème d'optimisation sous contraintes (3.12) ou (3.22), la meilleure séquence de commandes sur l'horizon de prédiction N_p $\tilde{u}^*$ est déterminée. Une méthode d'optimisation itérative doit donc être engagée pour cela.

5. Le premier élément $u^*(k)$ de la séquence optimale de commandes $\tilde{u}^*$ est appliqué à la prochaine période d'échantillonnage $k+1$ (via un bloqueur d'ordre zéro).

Cette procédure de calcul de la commande optimale est répétée avec un horizon glissant $k \rightarrow k+1$.

3.3.2 Logiciel

Les approches vues précédemment dans ce chapitre sont codées sous Matlab[2] dans ODOE4OPE. ODOE4OPE est l'acronyme pour « Optimal Design Of Experiments For Online Parameter Estimation ». Ce logiciel a commencé à être développé par Mr. Pascal Dufour au Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés (LAGEP) de l'Université Claude Bernard Lyon 1 depuis 2009. Ce logiciel a ensuite été déposé, via la cellule de valorisation de l'Université de Lyon, Lyon Sciences Transfert (LST), à l'Agence de Protection des Programmes (APP) sous la référence IDDN.FR.001.480013.000.S.R2012.000.30000.

Pendant cette thèse, ce logiciel ODOE4OPE a continué à être développé pour arriver à ce jour à une version plus complète capable d'être, comme avant appliquée sur différents systèmes dynamiques non linéaires, mais en plus multi-variables, stables ou instables en boucle ouverte. Les exemples intégrés sont aussi plus nombreux (voir le chapitre 5 de cette thèse). Au final, le logiciel comprend à ce jour de l'ordre de trente fichiers et environ 5000 lignes de code.

En terme de méthodes, ODOE4OPE est un logiciel couplant les éléments vus dans ce chapitre (hors cas particulier du modèle 1$^{\text{er}}$ ordre) :

- d'une part, l'optimisation et l'automatisation du design du plan d'expériences optimales,

- et d'autre part, l'estimation de paramètres d'un modèle dynamique d'un procédé.

En général, ces deux fonctions sont réalisées l'une après l'autre. Avec ODOE4OPE, ce double objectif final est réalisé en même temps via une conduite optimale couplée avec une technique de capteur logiciel, l'ensemble basé sur un modèle du procédé. Par ailleurs, pendant l'opération, l'optimisation d'un critère de sensibilité des mesures disponibles par rapport aux paramètres recherchés se fait tout en prenant en compte diverses contraintes (sécurité, zone opératoire, ...).

En terme de programme, les codes sont modulables facilement grâce à des *fichiers utilisateur* où ce dernier peut préciser :

- n'importe quel procédé (simulé ou réel) ayant au moins une entrée manipulable et aussi au moins une mesure de sortie,

- un modèle de ce procédé (par des équations dynamiques en dimension finie)

- un observateur spécifié pour le modèle augmenté avec les paramètres inconnus comme états non mesurés,

[2] www.mathworks.com

- un modèle de sensibilité qui décrit l'évolution dynamique des sensibilités des états et des sorties du modèle par rapport aux paramètres inconnus.
- les conditions opératoires : les paramètres connus du modèle, les états initiaux (du procédé, du modèle, de l'observateur), les paramètres de l'observateur, le choix de simulation (identification en boucle ouverte et type de commande, ou en boucle fermée), le temps de simulation, etc ...
- des contraintes spécifiques à l'utilisation.

Ces *fichiers utilisateur* sont synchronisés par quelques *fichiers standards* principaux où l'algorithme principal de notre approche est implémenté (et où l'utilisateur ne doit pas intervenir). Pour résoudre en ligne le problème d'optimisation non linéaire sous contraintes, la fonction de Matlab « *fmincon* » est utilisée et trouve de façon itérative un minimum local sous contraintes de la fonction coût spécifiée. Cette fonction utilise les méthodes à base de gradient (e.g. quasi-Newton, Levenberg-Marquardt...) où la fonction objectif et les contraintes doivent être continues (ainsi que leur première dérivation). Des options d'optimisation dans cette fonction peuvent être réglées pour adapter les différents algorithmes et les différents problèmes d'optimisation, notamment : *TolX* (la tolérance sur la variation de la variable manipulée), *TolfFun* (la tolérance sur la variation de la valeur de la fonction objectif) et *MaxIter* (le nombre maximum d'itérations autorisé)...

Dans le chapitre 5, différents cas d'étude seront discutés, où tout les résultats y ont été obtenus via ce logiciel (sauf pour le modèle du 1er ordre où la loi de commande est explicite comme cela est vu dans la suite).

3.4 Adaptation de la loi de commande pour le système linéaire du 1er ordre

Le système du 1er ordre est un système linéaire simple qui est souvent un premier départ pour évaluer ou développer une méthode de contrôle (en y ajoutant un retard). Il existe plusieurs méthodes classiques d'identification pour un système linéaire de 1er ordre avec un paramètre inconnu constant (i.e. la constante de temps). Pour un tel problème d'estimation, la méthode de la réponse indicielle en boucle ouverte est considérée dans un premier temps. Cependant, l'entrée échelon n'est pas suffisamment persistante (i.e., lorsque l'état stationnaire est atteint dans ce cas, après un certain temps, la sortie ne contient pas suffisamment d'informations sur la dynamique et la constante de temps ne peut plus être estimée). Un méthode avec une entrée en séquence binaire pseudo-aléatoire (SPBA) est plus intéressante dans ce cas car elle dispose d'un signal d'entrée assez riche. Toutefois, ces méthodes d'identification, en boucle ouverte, ne permettent pas de maintenir la sortie du procédé dans une région prescrite. Par conséquent, un design d'entrée optimal pour l'identification basée sur l'algorithme de contrôle en boucle fermée est nécessaire. Dans (Shouche et al. (2002)), les auteurs ont développé une approche de commande prédictive basée sur un modèle auto-régressif avec des entrées externes (ARX) sous une contrainte d'entrée persistante, où les paramètres sont estimés en ligne par régression. Cela a conduit à un problème non convexe simultané de l'identification en ligne et du contrôle optimal.

Dans cette section, une extension de notre approche précédemment proposée est développée spécialement pour le système linéaire du 1er ordre. Basée sur la linéarité du système et en supposant que l'argument du problème de commande prédictive est une valeur unique (donc l'horizon de commande N_c est réglé à 1), un contrôleur explicite peut être dérivé hors ligne,

ce qui évite d'avoir à résoudre en ligne une tâche d'optimisation pour trouver la commande optimale.

3.4.1 Principe de l'approche

Le principe de cette méthode est présenté ci-dessous :

Élaboration hors ligne :

- définir le modèle, le modèle de sensibilité et l'observateur pour le modèle augmenté avec le paramètre inconnu (la constante de temps), afin de déterminer $x_\theta(t_k)$ et $\hat{\theta}(t_k)$;
- déterminer la réponse indicielle explicite du modèle de sensibilité sur l'horizon de prédiction N_p. Elle est basée sur la transformée de Laplace appliquée sur le modèle et sur le modèle de sensibilité : par conséquent, la formule est paramétrée pour toutes les conditions initiales de l'état du modèle $x(t_k)$ et de l'état du modèle de sensibilité $x_\theta(t_k)$;
- à cause de la convexité du problème quadratique sous contrainte, la plus mauvaise commande $u_{min}(t_k)$ (qui minimise la fonction du coût) est déterminée, et donc la loi de commande optimale $u_{max}(t_k)$ (qui maximise la fonction de coût à maximiser dans la méthode) est explicitée pour chaque instant t_k.

Calcul en ligne :

- obtenir la sortie mesurée du procédé $y_p(t_k)$ à chaque instant courant t_k ;
- intégrer l'observateur pour déterminer l'estimation courant de la constante de temps $\hat{\tau}(t_k)$ en fonction de l'entrée appliqué $u(t_k)$ et de la sortie $y_p(t_k)$;
- sur la base de la mesure $y_p(t_k)$ et de l'estimation $\hat{\tau}(t_k)$, la commande optimale à appliquer $u^*(t_k) = u^{max}(t_k)$ (contrainte en amplitude) est calculée, tout simplement obtenue à partir de l'évaluation de la loi de commande explicite définie hors ligne basée sur $u_{min}(t_k)$ et sur les bornes d'entrée ;
- $u^{max}(t_k)$ est appliquée à partir de $t_k + \epsilon$ à t_{k+1}, où ϵ est le temps nécessaire pour prendre la mesure, intégrer l'observateur et calculer $u^{max}(t_k)$. Donc le coût principal dans le temps est l'intégration de l'observateur : il est faible dans le cas présent ; et ce d'autant plus que la période d'échantillonnage est grande (i.e., que le système réel est lent). Par conséquent, l'algorithme proposé pour ce modèle mono-entrée et mono-sortie du premier ordre est un algorithme de commande pour l'identification très rapide ;
- Cette procédure est itérée au prochain temps échantillonné.

Les étapes pour cette nouvelle conception d'entrée sont détaillés dans les parties suivantes.

3.4.2 Modèle

Considérons un modèle du 1er ordre à une entrée u, une sortie y comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{1}{\tau}(x(t) - Gu(t)),\ t > t_k \\ x(t = t_k) = x(t_k) = y_p(t_k), \end{cases} \tag{3.23}$$

où $x \in \mathcal{R}$ est l'état mesuré, u est l'entrée manipulée, la constante de temps $\tau > 0$ est le paramètre inconnu à estimer, $G \in \mathcal{R}^\star$ est le gain statique connu, $y_p(t_k)$ est la sortie mesurée du procédé à l'instant courant t_k.

3.4.3 Modèle de sensibilité

Basé sur la définition (3.4) et le modèle (3.23), nous décrivons le modèle de sensibilité comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_\theta(t) = \dfrac{1}{\tau^2}x(t) - \dfrac{1}{\tau}x_\theta(t) - \dfrac{G}{\tau^2}u(t),\ t > t_k \\ x_\theta(t = t_k) = x_\theta(t_k) \\ x_\theta(t = 0) = 0, \end{cases} \tag{3.24}$$

où $x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \tau}$ est la sensibilité de l'état de modèle x par rapport à la constante de temps τ.

3.4.4 Synthèse de l'observateur pour l'estimation du paramètre

A partir du modèle du 1er ordre (3.23), l'état augmenté est $x_a(t) = [x(t)\ \frac{1}{\tau}]^T$ dans le modèle augmenté :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) &= A_a(y_p(t), u(t))x_a(t),\ t > t_k \\ y_a(t) &= C_a x_a(t),\ t > t_k, \end{cases} \tag{3.25}$$

où :

$$A_a(y_p(t), u(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -y_p(t) + Gu(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ C_a = [1\ 0].$$

Remarque 3.4.1. *Le système* (3.25) *est observable si* $(u(t), y_p(t))$ *sont des entrées persistantes (Besançon (2007)).*

Considérons le modèle augmenté (3.25) comme un système affine en l'état avec injection de sortie. Nous concevons un observateur classique, de type filtre de Kalman étendu comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = A_a(y_p(t), u(t))\hat{x}_a(t) - \rho_o S_o^{-1}(t) C_a^T (C_a\hat{x}_a(t) - y_p(t)),\ t > t_k \\ \dot{S}_o(t) = -\theta_o S_o(t) - A_a^T(y_p(t), u(t))S_o(t) - S_o(t)A_a(y_p(t), u(t)) + \rho_o C_a^T C_a,\ t > t_k \\ \dot{\hat{x}}_a(t = t_k) = \dot{\hat{x}}_a(t_k) = \left[\hat{x}(t_k)\ \dfrac{1}{\hat{\tau}(t_k)}\right] \\ S_o(t = t_k) = S_o(t_k), \end{cases} \tag{3.26}$$

où $\theta_o > 1$, $\rho_o > 0$ et $S_o(t = 0)$ (une matrice 2×2 symétrique définie positive) sont des paramètres d'observateur à régler.

3.4.5 Réponse indicielle du modèle de sensibilité

Dans le cadre de la commande prédictive, la procédure d'optimisation vise à trouver l'entrée optimale $u^*(t_k)$ appliquée sur la prochaine période d'échantillonnage à travers la maximisation de la norme de l'état du modèle dynamique de sensibilité. Cela nécessite ici d'évaluer $x_\theta(t)$ sur l'horizon de prédiction N_p. A partir de l'instant courant $t = t_k$, un échelon $u(t_k)$ est appliqué sur l'entrée du procédé dans la procédure de commande prédictive. La formule de la

transformée de Laplace est rappelée ci-dessous, pour une fonction $f(t)$ à partir de n'importe quelle condition initiale $f(t_k)$ à tout moment initial t_k :

$$\begin{array}{rcl} L(\frac{df}{dt}(t)) & = & sL(f(t)) - f(t_k),\ t > t_k; \\ L(\frac{df}{dt}(t)) & = & sF(s) - f(t_k),\ t > t_k. \end{array} \tag{3.27}$$

Par conséquent, en appliquant la transformée de Laplace sur les systèmes (3.23) et (3.24) à l'instant courant t_k, cela conduit à :

$$X_\theta(s) = \frac{x_\theta(t_k)}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{y_p(t_k) - GsU(s)}{\tau^2(s + \frac{1}{\tau})^2}, \tag{3.28}$$

où $X_\theta(s)$ est la transformée de Laplace de $x_\theta(t)$. Basée sur la transformée de Laplace du signal (3.28), la réponse indicielle du modèle de sensibilité sur l'horizon de prédiction N_p (dans le domaine de Laplace) est :

$$X_\theta(s) = \frac{x_\theta(t_k)}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{y_p(t_k) - Gu(t_k)}{\tau^2(s + \frac{1}{\tau})^2}. \tag{3.29}$$

Donc, la réponse de sensibilité prédite dans le futur nécessite la mesure actuelle du procédé $y_p(t_k)$, la constante de temps inconnue du modèle τ et bien sûr la valeur d'entrée $u(t_k)$. Sur la base de l'inverse de la transformée de Laplace, la réponse indicielle $x_\theta(t)$ sur l'horizon de prédiction N_p peut être décrite dans le domaine temporel, où le paramètre inconnu τ est remplacé par la dernière estimation actuelle de l'observateur à t_k ($\hat{\tau}(t_k)$) :

$$x_\theta(t) = \left(x_\theta(t_k) + \frac{(y_p(t_k) - Gu(t_k))(t - t_k)}{\hat{\tau}^2(t_k)} \right) \exp(\frac{-(t - t_k)}{\hat{\tau}(t_k)}),\ t > t_k. \tag{3.30}$$

Remarque 3.4.2. *A partir de* (3.30)*, on retrouve deux cas particuliers bien connus pour le système du* 1^{er} *ordre qui doivent être évités afin d'assurer l'estimation de la constante de temps :*

1. *En boucle ouverte, à partir de n'importe quelle condition initiale* ($y_p(0)$*, si* $u(t)$ *est maintenue constante, après un certain temps, la sensibilité tend vers 0.*

2. *De plus, dans le cas précédent, si la condition initiale est un état d'équilibre (donc* $y_p(t) - Gu(t) = 0$*,* $\forall t \geq 0$ *et puisque* $x_\theta(0) = 0$*), alors la sensibilité est toujours égale à 0,* $\forall t > t_k$*.*

3.4.6 Conception de l'entrée optimale sous contraintes

Le problème de commande optimale est formulé comme suit :

$$\begin{cases} \max_{u_{inf} \leq u(t_k) \leq u^{sup}} J(u(t_k)) = \int_{t_k}^{t_k + N_p} (x_\theta(t))^2\, dt \\ \text{où } x_\theta(t) \text{ est obtenu de (3.30),} \end{cases} \tag{3.31}$$

où les bornes de commande u_{inf} et u^{sup} sont ajustées hors ligne en fonction des contraintes prescrites sur u et y_p :

$$\begin{cases} u_{inf,u} \leq u \leq u^{sup,u},\ \forall t > 0 \\ y_{inf} \leq y_p \leq y_p^{sup},\ \forall t > 0. \end{cases} \tag{3.32}$$

Remarque 3.4.3. *Dans cet algorithme de commande optimale pour le système du* 1^{er} *ordre, les contraintes sur la commande et la sortie doivent être bien définies, i.e.* $[u_{inf,u},\ u^{sup,u}] \neq [-\infty,\ +\infty]$ *et* $[y_{inf},\ y_p^{sup}] \neq [-\infty,\ +\infty]$.

Étant donné que toutes les réponses indicielles pour un système 1^{er} ordre sont monotones et prennent la valeur maximum (ou minimum) à l'état stationnaire, et en tenant compte du signe du gain statique (il peut être positif ou négatif), les bornes de commande u_{inf} et u^{sup} (3.31) peuvent être réglées simplement hors ligne à partir de (3.32) et du gain statique connu G :

$$\begin{cases} u^{sup,y} = max(\frac{y_{inf}}{G}, \frac{y^{sup}}{G}) \\ u^{sup} = min(u^{sup,y}, u^{sup,u}) \\ u_{inf,y} = min(\frac{y_{inf}}{G}, \frac{y^{sup}}{G}) \\ u_{inf} = max(u_{inf,y}, u_{inf,u}). \end{cases} \tag{3.33}$$

Du fait de la linéarité entrée-sortie dans (3.30), la sensibilité impliquée dans l'intégration de (3.31) est quadratique en l'argument d'optimisation $u(t_k)$, ce qui s'écrit ici explicitement :

$$\begin{cases} \max\limits_{u_{inf} \leq u(t_k) \leq u^{sup}} J(u(t_k)) = \int_{t_k}^{t_k+N_p} f_2(t)u(t_k)^2 + f_1(t)u(t_k) + f_0(t)dt \\ \text{où :} \\ f_2(t) = \exp(\frac{-2(t-t_k)}{\hat{\tau}(t_k)}) \left(\frac{G^2}{\hat{\tau}(t_k)^4}(t-t_k)^2 \right) \in \mathcal{R}^+ \\ f_1(t) = \exp(\frac{-(t-t_k)}{\hat{\tau}(t_k)}) \left(-2(x_\theta(t_k) + \frac{y_p(t_k)}{\hat{\tau}(t_k)^2}(t-t_k)) \frac{G}{\hat{\tau}(t_k)^2}(t-t_k)\exp(\frac{-(t-t_k)}{\hat{\tau}(t_k)}) \right) \\ f_0(t) = \exp(\frac{-(t-t_k)}{\hat{\tau}(t_k)}) \left(x_\theta(t_k) + \frac{y_p(t_k)}{\hat{\tau}(t_k)^2}(t-t_k)\exp(\frac{-(t-t_k)}{\hat{\tau}(t_k)}) \right) \end{cases} \tag{3.34}$$

Du fait du signe positif de $f_2(t)$, le problème (3.34) est convexe et peut donc être aussi réécrit sous une forme équivalente mais faisant apparaître les caractéristiques du point extremum de la parabole $J(u(t_k))$:

$$\max_{u_{inf} \leq u(t_k) \leq u^{sup}} J(u(t_k)) = c_\infty(t_k)(u(t_k) - u_{min}(t_k))^2 + J_{min}(t_k), \tag{3.35}$$

où c_∞ est un réel positif (issu de l'intégration de $f_2(t)$ dans (3.34)), et où $u_{min}(t_k)$ est la valeur de $u(t_k)$ la pire (à éviter) qui minimise à l'instant t_k le critère $J(.)$ (où $J(.) = J_{min}(t_k) \geq 0$, car J est la norme L^2 de x_θ). Donc $u_{min}(t_k)$ peut être déterminée à travers la condition d'optimalité du premier ordre :

$$\frac{\partial J}{\partial u(t_k)} = 0 \text{ à } u(t_k) = u_{min}(t_k) \tag{3.36}$$

qui permet d'arriver à :

$$u_{min}(t_k) = \frac{-\int_{t_k}^{t_k+N_p} f_1(t)dt}{2\int_{t_k}^{t_k+N_p} f_2(t)dt}. \tag{3.37}$$

Cela mène à déterminer explicitement $u_{min}(t_k)$ selon l'intégration dans le temps et à partir des 2 conditions initiales $y_p(t_k)$ et $x_\theta(t_k)$ et de l'estimation $\hat{\tau}(t_k)$:

$$u_{min}(t_k) = \frac{1}{G}y_p(t_k) + \frac{\hat{\tau}(t_k)^2}{G} \frac{\int_{t_k}^{t_k+N_p}(t-t_k)\exp(\frac{-2(t-t_k)}{\hat{\tau}(t_k)})dt}{\int_{t_k}^{t_k+N_p}(t-t_k)^2\exp(\frac{-2(t-t_k)}{\hat{\tau}(t_k)})dt} x_\theta(t_k). \tag{3.38}$$

En réalisant les deux intégrations dans (3.38), et en remplaçant $t_{k+N_p} - t_k$ par le produit $N_p T_s$ (où T_s est la période d'échantillonnage constante), cela mène à :

$$\begin{cases} u_{min}(t_k) = \dfrac{1}{G}\left(\hat{\tau}(t_k)^2 \gamma(.) x_\theta(t_k) + y_p(t_k)\right) \\ \text{avec} \\ \gamma(N_p, T_s, \hat{\tau}(t_k), \nu(N_p, T_s, \hat{\tau}(t_k))) = \dfrac{2N_p T_s \nu(.) + \hat{\tau}(t_k)(\nu(.) - 1)}{2(N_p T_s)^2 \nu(.) + 2\hat{\tau}(t_k) N_p T_s \nu(.) + \hat{\tau}(t_k)^2 (\nu(.) - 1)} \\ \text{et} \\ \quad \nu(N_p, T_s, \hat{\tau}(t_k)) = \exp(\frac{-2N_p T_s}{\hat{\tau}(t_k)}). \end{cases} \tag{3.39}$$

D'après la propriété géométrique de symétrie d'une parabole (ici le critère $J(.)$) par rapport

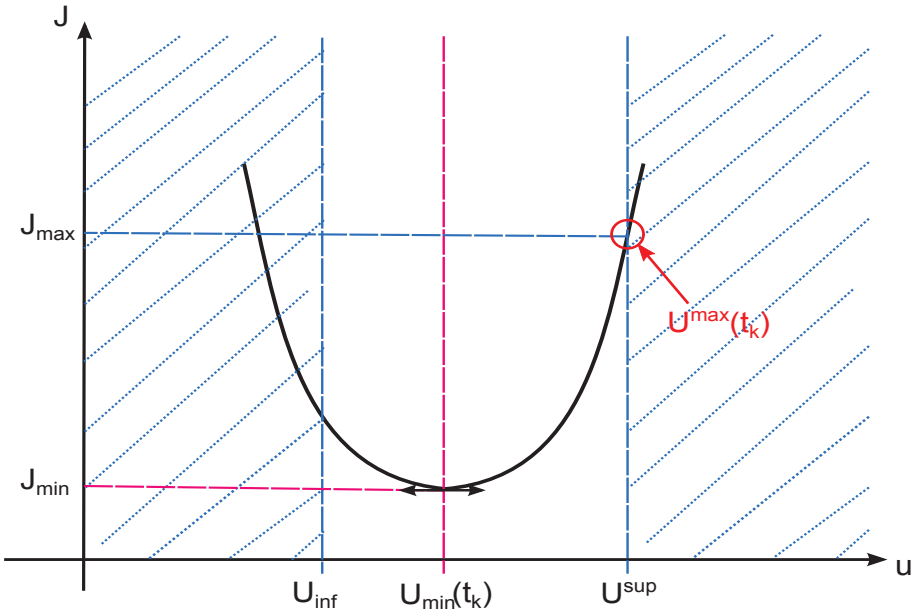


FIGURE 3.3 – Critère quadratique : interprétation géométrique

à la droite verticale passant par $(u_{min}(t_k), J_{min}(t_k))$ (voir figure 3.3), on peut conclure sur la loi de commande optimale recherchée $u^\star(t_k) = u^{max}(t_k)$

$$u^{max}(t_k) = \begin{cases} u_{inf} \text{ si } u_{min}(t_k) > u_{inf} + \dfrac{u^{sup} - u_{inf}}{2} \\ u^{sup} \text{ sinon} \\ \text{où :} \\ u^{sup} \text{ et } u_{inf} \text{ sont définies dans (3.33)} \\ \text{et } u_{min}(t_k) \text{ est définie par (3.39).} \end{cases} \tag{3.40}$$

Par conséquent, la loi de commande optimale $u^{max}(t_k)$ peut être explicitement définie hors ligne et est un contrôle de « bang-bang » dont la valeur est évaluée en ligne avec la mesure du procédé et l'estimation de la constante de temps, et est soit la valeur minimum ou la valeur maximum d'entrée autorisée.

Conclusion. *Le principe de notre approche d'identification optimale en boucle fermée a été détaillé dans ce chapitre. Le modèle de sensibilité a été développé. Cette approche combine*

la théorie de l'observation et la stratégie de commande prédictive sous contraintes, ce qui nous permet d'estimer en ligne les paramètres inconnus et de trouver en même temps la commande optimale pour résoudre notre problème d'optimisation. Une formulation générale du problème d'identification optimale pour les systèmes dynamiques multi-variables non linéaires (ou linéaires) en dimension finie a été définie. Deux adaptations de cette approche à des systèmes instables en boucle ouverte ont été proposées, soit pour stabiliser en plus des systèmes instables en boucle ouverte, soit pour maintenir stable en plus des systèmes déjà stables en boucle ouverte : la première adaptation est basée sur l'introduction de contraintes fictives sur les sorties, la seconde sur une approche de type Lyapunov. Le logiciel ODOE4OPE, où ces méthodes ont été intégrées, a été présenté. Enfin, une autre loi de commande, explicite et donc rapide à calculer et découlant de l'approche générale, a été proposée pour un système mono-variable du 1^{er} *ordre pour estimer la constante de temps.*
Dans le chapitre suivant, nous allons voir des aspects de robustesse du modèle et de bruits et leur impact sur l'observation.

Chapitre 4

Synthèse d'observateur et problèmes de robustesse

Résumé. *Dans ce chapitre nous nous intéresserons aux performances d'un observateur au sens de la robustesse vis-à-vis des perturbations et des incertitudes du modèle. Nous traiterons le cas particulier des systèmes affines en l'état sans injection de sortie, d'abord avec le cas à entrée constante et ensuite avec le cas à entrée variable. En minimisant un coût bien choisi, notre objectif est de trouver l'entrée optimale et les paramètres de réglage de l'observateur permettant d'améliorer la qualité de l'estimation.*

4.1 Introduction

La qualité de l'estimation obtenue par un observateur dépend fortement de la qualité des mesures et de la précision du modèle (structure et valeur des paramètres supposés connus). Or la modélisation ne permet qu'une représentation abstraite décrivant d'une manière imparfaite le comportement réel du système physique. Par ailleurs, tout système physique est inévitablement entaché de perturbations provenant des interactions avec son environnement affectant ainsi la structure du modèle et les mesures utilisées. Malheureusement, si une grandeur est estimée à partir de ces mesures, l'erreur d'estimation peut inclure ces erreurs. Le problème de synthèse d'observateur robuste vis-à-vis des perturbations et des incertitudes de modélisation se révèle donc fondamental en automatique.

Parmi les données accessibles à l'algorithme d'estimation, certaines quantités sont contrôlables. Il s'agit de commandes ou de signaux d'entrée du système. Dans l'objectif d'évaluer la performance de l'algorithme d'estimation, nous nous intéressons à l'optimisation de la performance de l'observateur ou du filtre à partir de quelques critères de robustesse détaillés dans Basar et Bernhard (1995) et Jazwinski (1961). Ce problème est posé dans le contexte d'un système bruité, et dans ce cas, nous nous intéressons à la robustesse du système vis-à-vis des différents bruits qui peuvent entacher le système. Nous cherchons ici à développer une méthode basée sur le choix de certains paramètres et/ou commandes afin d'améliorer les performances de l'algorithme d'observation.

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le contexte d'une classe de systèmes non linéaires affines en l'état avec des perturbations sur la dynamique et du bruit sur la sortie et nous considérons le problème de synthèse d'un observateur robuste. Inspirés par les résultats existant dans la littérature sur ce sujet : Trinh (2014), Basar et Bernhard (1995) et Jazwinski (1961) et Willems (2004), nous présentons le problème d'optimisation de l'erreur

d'estimation par l'approche du gain asymptotique et nous proposons deux algorithmes permettant d'améliorer les performances de l'estimateur. Ces nouvelles méthodes sont basées sur la minimisation d'un coût bien choisi qui permet de trouver les paramètres optimaux pour l'observateur ainsi que la commande optimale.

4.2 Formulation du problème et classe de systèmes considérée

Nous considérons un système affine en l'état avec des perturbations sur la dynamique et du bruit sur la sortie sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A(u(t))x(t) + d_1(t); \\ y(t) & = & Cx(t) + d_2(t), \end{array} \right. \tag{4.1}$$

avec $x \in \mathcal{R}^n$, $y \in \mathcal{R}$ et $u \in U \subset \mathcal{R}$ qui sont respectivement le vecteur d'état, la sortie et l'entrée. $d_1 : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^n$ et $d_2 : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}$ sont respectivement les perturbations de l'état et de la sortie qui sont deux fonctions intégrables et bornées ; $A : U \to \mathcal{R}^{n\times n}$ est une fonction matricielle continue.

Nous considérons ici le problème de synthèse d'observateurs robustes pour des systèmes non linéaires comportant des incertitudes de modèle et sujets à des perturbations. Les incertitudes considérées (paramétriques par exemple) peuvent varier dans le temps mais elles sont bornées en norme. Dans ce cas, lors de la construction d'un observateur, les erreurs entre les variables d'état du système et celles de l'observateur peuvent être importantes. Par conséquent, estimer l'intervalle de l'erreur d'estimation et ensuite le minimiser s'avère donc important pour garantir une meilleure robustesse de l'observateur.

Comme annoncé dans le chapitre 2, selon Besançon (2007) et Hammouri et Morales (1990), un observateur pour le système (4.1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\hat{x}}(t) & = & A\left(u(t)\right)\hat{x}(t) + S^{-1}(t)C^T(y(t) - C\hat{x}(t)); \\ \dot{S}(t) & = & -\theta_o S(t) - A(u(t))^T S(t) - S(t)A(u(t)) + C^T C, \end{array} \right. \tag{4.2}$$

avec $\hat{x} \in \mathcal{R}^n$ l'état estimé, $\theta_o > 0$ le paramètre de réglage de l'observateur et $S \in \mathcal{R}^{n\times n}$ la matrice de réglage avec S(0) une matrice SDP. Dans Besançon (2007) et Hammouri et Morales (1990), il est montré que sous des conditions d'excitation persistante et d'observabilité, il est possible de choisir θ_o de façon à garantir la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro. Ici nous nous intéressons à la robustesse de cet algorithme.

Pour les parties suivantes, nous notons par $e \in \mathcal{R}^n$ l'erreur d'estimation définie par $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Nous présentons une approche d'optimisation concernant la bornitude de cette erreur visant à mettre en évidence la robustesse de l'observateur vis-à-vis des perturbations considérées.

4.3 Observateur et robustesse : cas d'entrée constante

Dans un premier temps, nous considérons le cas où l'entrée u est constante ce qui est le cas dans notre approche en boucle fermée (3.12) sur l'horizon N_p (la commande optimale u calculée est mise à jour à chaque instant k).

4.3.1 Théorème général de robustesse

Nous considérons $S(t) = S_0$ où S_0 est solution de l'équation (faible) de Lyapunov :

$$\theta_o S + A^T(u)S + SA(u) - C^T C = 0 \tag{4.3}$$

qui correspond au cas stationnaire dans le seconde équation dans (4.2).

Dans ce cas particulier, le comportement asymétrique de l'erreur d'estimation est énoncé dans le théorème suivant :

Théorème 4.1. *$\forall u \in U$ tel que $-\frac{\theta_o}{2}I - A$ est Hurwitz, alors il existe une matrice S SDP solution de l'équation faible de Lyapunov (4.3).*
De plus, $\forall \beta, \gamma > 0$ tels que $-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma} < 0$, nous avons :

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq \frac{\beta^2\gamma}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)\sigma_{min}(S)} L_{d_1} + \frac{\beta\gamma^2}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)\sigma_{min}(S)} L_{d_2} \ , \tag{4.4}$$

où $\sigma_{min}(.)$, $\sigma_{max}(.)$ désignent, respectivement, la valeur propre minimale et la valeur propre maximale, et

$$\mu_1 = \frac{\sigma_{max}(S^2)}{\sigma_{min}(S)}, \ \mu_2 = \frac{\sigma_{max}(C^T C)}{\sigma_{min}(S)},$$

$$L_{d_1} = \limsup_{t\to+\infty} |d_1(t)|^2, \ L_{d_2} = \limsup_{t\to+\infty} |d_2(t)|^2.$$

Preuve. *Tout d'abord, remarquons que dans le cas où u est constante et S est stationnaire ($\dot{S}(t) = 0$), la matrice S est la solution de l'équation faible Lyapunov donnée par (4.3).*
Un simple calcul donne :

$$(-\frac{\theta_o}{2}I - A)^T S + S(-\frac{\theta_o}{2}I - A) = -C^T C$$

D'après le théorème 4.1, la solution de l'équation de Lyapunov est une matrice SDP qu'on notera S_0.
Ensuite, considérons la fonction de Lyapunov

$$\begin{array}{rccl} V: & \mathcal{R}^n & \to & \mathcal{R}_+ \\ & e & \to & V(e) = e^T S e. \end{array}$$

La dérivée de V le long des solutions satisfait :

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}(e) & = & -\theta_o V + e^T(-C^T C)e - 2e^T C^T d_2 + 2e^T S d_1 \\ & \leq & -\theta_o V + \frac{1}{\beta} e^T S^T S e + \beta |d_1|^2 + \frac{1}{\gamma} e^T C^T C e + \gamma |d_2|^2, \end{array} \tag{4.5}$$

où $\beta > 0$, $\gamma > 0$ sont deux constantes. Par ailleurs, nous avons

$$\begin{array}{rcl} e^T S^T S e \leq \sigma_{max}(S^2)|e|^2 & = & \frac{\sigma_{max}(S^2)}{\sigma_{min}(S)} \sigma_{min}(S) e^T e \\ & \leq & \frac{\sigma_{max}(S^2)}{\sigma_{min}(S)} e^T S e \\ & \leq & \mu_1 V. \end{array}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} e^T C^T C e \leq \sigma_{max}(C^T C)|e|^2 &= \frac{\sigma_{max}(C^T C)}{\sigma_{min}(S)}\sigma_{min}(S)e^T e \\ &\leq \frac{\sigma_{max}(C^T C)}{\sigma_{min}(S)}e^T S e \\ &\leq \mu_2 V. \end{aligned}$$

L'équation (4.5) peut donc se réécrire comme suit :

$$\dot{V}\left(e(t)\right) \leq \left(-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma}\right) V\left(e(t)\right) + \beta|d_1(t)|^2 + \gamma|d_2(t)|^2.$$

Nous pouvons déduire que $\forall \beta, \gamma \in \mathcal{R}_+^*$*, on a :*

$$V(e(t)) \leq \exp\left((-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma})\frac{t}{2}\right) V\left(e(\frac{t}{2})\right) + \int_{\frac{t}{2}}^{t} \exp\left((-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma})(t-s)\right)\beta|d_1(s)|^2 ds +$$

$$+ \int_{\frac{t}{2}}^{t} \exp\left((-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma})(t-s)\right)\gamma|d_2(s)|^2 ds.$$

En utilisant les propriétés de $d_1 : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^n$ *et* $d_2 : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}$ *(les bruits de l'état et de la sortie qui sont deux fonctions intégrables et bornées), on peut écrire :*

$$\lim_{t\to+\infty} \exp\left((-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma})\frac{t}{2}\right) = 0.$$

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} \exp\left((-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma})(t-s)\right)\beta|d_1(s)|^2 ds \leq \int_{\frac{t}{2}}^{t} \beta \exp\left((-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma})(t-s)\right) ds \sup_{s\in[\frac{t}{2},t]} |d_1(s)|^2.$$

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} \exp\left((-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma})(t-s)\right)\gamma|d_2(s)|^2 ds \leq \int_{\frac{t}{2}}^{t} \gamma \exp\left((-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma})(t-s)\right) ds \sup_{s\in[\frac{t}{2},t]} |d_2(s)|^2.$$

Dans le cas où $-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma} < 0$*, on a :*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{t} \exp\left((-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma})(t-s)\right) ds = \frac{\beta\gamma}{\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta}.$$

Ainsi, nous avons $\forall \beta, \gamma > 0$*,*

$$\limsup_{t\to+\infty} V(e(t)) \leq \frac{\beta^2\gamma}{\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta} \limsup_{t\to+\infty} |d_1|^2 + \frac{\beta\gamma^2}{\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta} \limsup_{t\to+\infty} |d_2|^2. \quad (4.6)$$

Cela conclu la preuve du théorème 4.1.

Dans le théorème précédent, β et γ sont des paramètres qui interviennent dans la caractérisation de la robustesse. Pour trouver la valeur de ces paramètres qui caractérisent au mieux le comportement asymptotique de l'erreur d'estimation, il faut donc minimiser la partie droite de l'équation (4.6) en fonction de L_{d_1}, L_{d_1}, u et θ_o. Malheureusement, ce problème de minimisation est difficile et nous ne pouvons pas en donner une solution explicite.

Remarque 4.3.1. *A partir de l'inégalité (4.6), le cas particulier où $\beta = \gamma$ peut être mis en évidence et permet de donner une borne supérieure indépendante de β et de γ. Dans cette caractérisation, les deux bruits (sur la mesure et sur la dynamique) affectent de la même manière le système. Ceci montre que cette caractérisation est loin d'être optimale. En effet, dans ce cas (4.6) est explicitée facilement comme suit :*

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq \frac{\beta^3}{\theta_o\beta^2 - \mu_1\beta - \mu_2\beta}\left[\limsup_{t\to+\infty} |d_1(t)|^2 + \limsup_{t\to+\infty} |d_2(t)|^2\right].$$

On en déduit,

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq \frac{\beta^2}{\theta_o\beta - (\mu_1 + \mu_2)}\left[\limsup_{t\to+\infty} |d_1(t)|^2 + \limsup_{t\to+\infty} |d_2(t)|^2\right] .$$

En posant $\mu = \mu_1 + \mu_2 = \dfrac{\sigma_{max}(S^2)}{\sigma_{min}(S)} + \dfrac{\sigma_{max}(C^TC)}{\sigma_{min}(S)}$ *et* $F(\beta) = \dfrac{\beta^2}{\beta\theta_o - \mu}$,
on obtient :

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq F(\beta)\left[\limsup_{t\to+\infty} |d_1(t)|^2 + \limsup_{t\to+\infty} |d_2(t)|^2\right].$$

De plus, un calcul simple donne :

$$\frac{dF(\beta)}{d\beta} = \beta\frac{\beta\theta_o - 2\mu}{(\beta\theta_o - \mu)^2}.$$

Cela permet d'écrire pour tout $\beta \in \mathcal{R}_+^*$ *:*

$$F(\beta) \geq F(2\frac{\mu}{\theta_o}) = 4\frac{\mu}{\theta_o^2} .$$

En utilisant ce résultat et (4.6), on obtient :

$$\limsup_{t\to+\infty} e(t) \leq 4\frac{\mu}{\theta_o^2\sigma_{min}(S)} \limsup_{t\to+\infty} |d_1(t)|^2 + 4\frac{\mu}{\theta_o^2\sigma_{min}(S)} \limsup_{t\to+\infty} |d_2(t)|^2. \tag{4.7}$$

En remplaçant la valeur $\mu = \dfrac{\sigma_{max}(S^2)}{\sigma_{min}(S)} + \dfrac{\sigma_{max}(C^TC)}{\sigma_{min}(S)}$ *dans (4.7), nous obtenons*

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq \frac{4\left(\sigma_{max}(C^TC) + \sigma_{max}(S^2)\right)}{\theta_o^2\sigma_{min}^2(S)}\left[\limsup_{t\to+\infty} |d_1(t)|^2 + \limsup_{t\to+\infty} |d_2(t)|^2\right] . \tag{4.8}$$

Dans ce cas, nous avons un même gain pour les 2 bruits, mais ceci n'est probablement pas la meilleure façon de caractériser la robustesse.

Dans la section suivante nous allons considérer les deux cas particuliers :

- le système n'est concerné que par un bruit de mesure ($L_{d_1} = 0$),

- le système n'est concerné que par un bruit sur la dynamique ($L_{d_2} = 0$).

4.3.2 Reformulation du théorème : cas avec bruit de mesure uniquement

Dans un premier temps, nous considérons toujours le cas où l'entrée u est constante mais où $L_{d_1} = 0$ et $L_{d_2} \neq 0$ (i.e. un système affine en l'état avec des incertitudes sur la sortie). Nous considérons $S(t) = S_0$ où S_0 est solution de l'équation (faible) de Lyapunov (4.3).

Corollaire 4.3.1. *$\forall u \in U$; $\forall \theta_o > 0$ tels que $-\frac{\theta_o}{2} I - A$ est Hurwitz, alors, il existe une matrice S_0 SDP, solution de l'équation faible de Lyapunov (4.3).*
De plus, nous avons :

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq \frac{4\sigma_{max}(C^TC)}{\theta_o^2 \sigma_{min}^2(S)} \limsup_{t\to+\infty} |d_2(t)|^2, \tag{4.9}$$

où $\sigma_{min}(S_0)$ la valeur propre minimale de S_0 et $\sigma_{max}(C^TC)$ la valeur propre maximale de C^TC. □

Preuve. *L'existence de la matrice SDP S est démontrée de la même façon que dans le preuve de (4.4).*

Le cas traité ici est un cas particulier du théorème général 4.1 où $L_{d_1} = 0$ et $L_{d_2} \neq 0$. Depuis le résultat dans (4.4), nous avons :

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq \frac{\beta\gamma^2}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)\sigma_{min}(S)} L_{d_2} \ .$$

Nous déduisons que :

$$\frac{\beta\gamma^2}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)} = \frac{\gamma^2}{\theta_o\gamma - \frac{\mu_1\gamma}{\beta} - \mu_2} \ ,$$

et sachant que

$$\lim_{\beta\to+\infty} \frac{\beta\gamma^2}{\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta} = \frac{\gamma^2}{\theta_o\gamma - \mu_2} \ ,$$

nous posons maintenant $F(\gamma) = \dfrac{\gamma^2}{\gamma\theta_o - \mu_2}$, et calculons la fonction

$$\frac{dF(\gamma)}{d\gamma} = \gamma \frac{\gamma\theta_o - 2\mu_2}{(\gamma\theta_o - \mu_2)^2} \ .$$

$\forall \gamma \in \mathcal{R}_+^*$, nous avons :

$$F(\gamma) \geq F(2\frac{\mu_2}{\theta_o}) = 4\frac{\mu_2}{\theta_o^2} \ .$$

Donc,

$$\limsup_{t\to+\infty} e(t) \leq 4\frac{\mu_2}{\theta_o^2 \sigma_{min}(S)} L_{d_2}. \tag{4.10}$$

Remplaçons μ_2 par sa valeur $\mu_2 = \dfrac{\sigma_{max}(C^TC)}{\sigma_{min}(S)}$ et $L_{d_2} = \limsup_{t\to+\infty} |d_2(t)|^2$ dans (4.10), nous obtenons (4.9).

4.3.3 Reformulation du théorème : cas avec bruit sur la dynamique uniquement

Dans cette partie, nous nous intéressons au système (4.1) dans le cas où l'entrée u est toujours constant et où cette fois $L_{d_2} = 0$ et $L_{d_1} \neq 0$ (i.e. un système affine en l'état avec des incertitudes sur la dynamique).

Corollaire 4.3.2. *Pour $\forall u \in U$ tel que $-\frac{\theta_o}{2}I - A$ est Hurwitz, alors, il existe S_0 SDP qui est la solution de (4.3).*

De plus, soit $\sigma_{min}(S_0)$ la valeur propre minimale de S_0 et $\sigma_{max}(S_0^2)$ la valeur propre maximale de S_0^2. Nous avons :

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq \frac{4\sigma_{max}(S^2)}{\theta_o^2\sigma_{min}^2(S)} \limsup_{t\to+\infty} |d_1(t)|^2, \tag{4.11}$$

où S_0 est solution de l'équation (faible) de Lyapunov (4.3). □

Preuve. *Le cas traité est un cas particulier du théorème général 4.1 où $L_{d_2} = 0$ et γ tend vers l'infini.*
Par conséquent, le résultat dans (4.4) s'écrit dans ce cas comme suit :

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq \frac{\beta^2\gamma}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)\sigma_{min}(S)} L_{d_1} \ .$$

Cela nous amène à

$$\frac{\beta^2\gamma}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)} = \frac{\beta^2}{\theta_o\beta - \mu_1 - \frac{\mu_2\beta}{\gamma}} \ .$$

On obtient, $\forall \beta > 0$,

$$\frac{\beta^2}{\theta_o\beta - \mu_1 - \frac{\mu_2\beta}{\gamma}} \leq \frac{\beta^2}{\theta_o\beta - \mu_1} \ .$$

De plus, lorsque γ tend vers l'infini, alors

$$\lim_{\gamma\to+\infty} \frac{\beta^2\gamma}{\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta} = \lim_{\gamma\to+\infty} \frac{\beta^2}{\theta_o\beta - \mu_1 - \frac{\mu_2\beta}{\gamma}} = \frac{\beta^2}{\theta_o\beta - \mu_1}.$$

Or en posant $F(\beta) = \frac{\beta^2}{\theta_o\beta - \mu_1}$, on obtient

$$\frac{dF(\beta)}{d\beta} = \beta\frac{\beta\theta_o - 2\mu_1}{(\beta\theta_o - \mu_1)^2}$$

Alors $\forall \gamma \in \mathcal{R}_+^*$, nous avons

$$F(\beta) \geq F(2\frac{\mu_1}{\theta_o}) = 4\frac{\mu_1}{\theta_o^2}.$$

Par conséquent,

$$\limsup_{t\to+\infty} e(t) \leq 4\frac{\mu_1}{\theta_o^2\sigma_{min}(S)} L_{d_1} \ . \tag{4.12}$$

Enfin, en utilisant le fait que $\mu_1 = \frac{\sigma_{max}(S^2)}{\sigma_{min}(S)}$ et $L_{d_1} = \limsup_{t\to+\infty} |d_1(t)|^2$, on obtient le résultat du corollaire 4.3.2.

Dans la suite, l'entrée $u(t)$ est supposée variable dans le temps.

4.4 Observateurs et robustesse : cas d'entrée variable

Nous revenons ici à notre problème initial en considérant u comme une entrée qui varie désormais dans le temps. Dans ce cas, la matrice $S(t)$ satisfait l'équation dynamique de Lyapunov ($S : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^{n\times n}$). Cela implique que, contrairement aux cas précédent, les valeurs propres de S sont aussi des fonctions du temps. Par la suite nous notons par $\sigma_1(t, S(0), \theta_o; u)$ (resp. $\sigma_2(t, S(0), \theta_o; u)$) la valeur propre minimale (resp. maximale) de $S(t)$ où $S(0)$ est une matrice SDP.

Sous l'hypothèse que $u(t)$ est une entrée régulièrement persistante, nous pouvons écrire qu'il existe deux constantes $\sigma_1 : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^{n\times n} \times \mathcal{R}_+^* \times \mathbf{U} \to R_+^*$ et $\sigma_2 : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^{n\times n} \times \mathcal{R}_+^* \times \mathbf{U} \to R_+^*$, telles que :

$$\sigma_1 I \leq S(t) \leq \sigma_2 I, \ \forall t > 0.$$

Hypothèse 4.4.1. *:*

1. *Il existe deux constantes $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}_2$ telles que :*

$$\lim_{t\to+\infty} \sigma_1(t, S(0), \theta_o, u) = \bar{\sigma}_1; \quad \lim_{t\to+\infty} \sigma_2(t, S(0), \theta_o, u) = \bar{\sigma}_2 \ . \tag{4.13}$$

2. *il existe θ_o et u tels que :*

$$\liminf_{t\to+\infty} \sigma_1 > 0; \ \textit{et} \ \limsup_{t\to+\infty} \sigma_2 < +\infty \ . \tag{4.14}$$

Remarque 4.4.1. *Concernant l'hypothèse (4.13), c'est la condition pour l'hypothèse (4.14). Nous remarquons aussi que dans le cas particulier où u est constant, $S(t)$ est stationnaire ($\dot{S} = 0$), cette hypothèse devient $-\frac{\theta_o}{2} I - A$ est Hurwitz.*

4.4.1 Cas avec bruit de mesure uniquement

Nous considérons ici le cas où $L_{d_1} = 0$ et $L_{d_2} \neq 0$.

Corollaire 4.4.1. *Sous l'hypothèse 4.4.1 (i.e. (4.13) et (4.14) vérifiées), nous avons :*

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq \frac{4\sigma_{max}(C^T C)}{\theta_o^2 \left[\limsup_{t\to+\infty} (\sigma_{min}(S(t)))\right]^2 \limsup_{t\to+\infty} |d(t)|^2}, \tag{4.15}$$

soit $\sigma_{min}(S)$ et $\sigma_{max}(C^T C)$ sont respectivement la valeur propre minimale et maximale de S et $C^T C$, θ_o>0. □

Preuve. *De même façon pour le preuve du théorème 4.1, nous considérons la fonction de Lyapunov $V : \mathcal{R}^n * \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}_+$*

$$V(e(t), t) = e^T(t) S(t) e(t)$$

Pour tout $\beta \in R_+^*$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t), t) &= -\theta_o V + e^T(-C^T C)e - 2e^T C d, \\ &\leq -\theta_o V + \frac{1}{\beta} e^T C^T C e + \beta |d_2|^2 \end{aligned}$$

Ici, il existe une fonction $\mu(t)>0$ telle que :

$$e^T C^T C e \leq \mu e^T S e. \tag{4.16}$$

En effet, l'existence de μ est assurée par l'hypothèse (4.4.1).

On peut donc écrire :

$$\dot{V}(e(t),t) \leq (-\theta_o + \frac{1}{\beta}\frac{\sigma_{max}(C^T C)}{\left[\limsup_{t\to+\infty}(\sigma_{min}(S(t)))\right]^2})V + \beta|d_2|^2 \ ,$$

où μ est choisie constante comme suit :

$$\mu = \frac{\sigma_{max}(C^T C)}{\limsup_{t\to+\infty}\sigma_{min}(S(t))} \ .$$

En utilisant (4.14) de l'hypothèse (4.4.1), on s'assure de la convergence de la matrice $S(t)$ et de l'existence de μ. Ainsi nous pouvons écrire,

$$\dot{V}(e(t),t) \leq (-\theta_o + \frac{\mu_0}{\beta})V + \beta|d_2|^2 \ .$$

Ensuite, pour obtenir (4.15), on utilise la même démarche que celle pour établir la preuve du théorème 4.1 et celle du corollaire 4.3.1.

Remarque 4.4.2. *Il est possible d'étendre ce résultat pour le système affine en l'état avec injection de mesure :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) &=& A(u(t),y(t))x(t) \\ y(t) &=& Cx(t) + d_2(t), \end{array}\right. \tag{4.17}$$

avec $x \in \mathcal{R}^n$, $y \in \mathcal{R}$ et $u \in U \subset \mathcal{R}$ respectivement les vecteur d'état, de sortie mesurée et d'entrée du système. $d_2 : \mathcal{R}_+ \longrightarrow \mathcal{R}$ est le bruit de la sortie qui est une fonction intégrable et bornée, $A : U \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}^{n\times n}$ est la matrice d'état et $C \in \mathcal{R}^{1\times n}$ est la matrice constante de la sortie.

Selon Besançon (2007) et Hammouri et Morales (1990), un observateur pour le système (4.17) s'écrit par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{x}}(t) &=& A(u(t),y(t))\hat{x}(t) + S(t)^{-1}C^T(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \dot{S}(t) &=& -\theta_o S(t) - A(u(t),y(t))^T S(t) - S(t)A(u(t),y(t)) + C^T C \end{array}\right. \tag{4.18}$$

Avec $\hat{x} \in \mathcal{R}^n$ l'état estimé de l'observateur, θ_o >0 le paramètre de réglage, $S : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^{n\times n}$ la matrice de réglage avec S(0) la matrice SDP.

Pour le cas de la classe des systèmes (4.17), la matrice S dépend maintenant aussi de la mesure y ce qui implique que ses valeurs propres sont des fonctions du temps, de θ_o, de l'entrée u et de la mesure y.

4.4.2 Cas avec bruit sur la dynamique uniquement

Nous considérons ici le cas où $L_{d_2} = 0$ et $L_{d_1} \neq 0$.

Basée sur (4.13) et (4.14), il est facile à montrer que :

- Il existe une constante $\sigma > 0$ telle que : $\lim_{t\to+\infty}\sigma_{max}(S^2(t))$;

- Il existe $\theta_o > 0$ et une entrée optimale u tels que : $\limsup_{t\to+\infty} \sigma_{max}(S^2(t)) < +\infty$.

Par conséquent on peut annoncer le résultat suivant :

Corollaire 4.4.2. *Sous l'hypothèse 4.4.1 (i.e. (4.13) et (4.14) vérifiés), nous avons :*

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq \frac{4 \limsup_{t\to+\infty} \sigma_{max}(S^2(t))}{\theta_o^2 \left[\limsup_{t\to+\infty} (\sigma_{min}(S(t)))\right]^2} \limsup_{t\to+\infty} |d_1(t)|^2 \tag{4.19}$$

où θ_o>0 ; $\sigma_{min}(S)$ et $\sigma_{min}(S)$ sont respectivement les valeurs propres minimale et maximale de S. □

Preuve. *De la même façon que pour la preuve du corollaire 2, nous considérons la fonction de Lyapunov $V : \mathcal{R}^n * \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}_+$,*

$$V(e(t), t) = e^T(t)S(t)e(t).$$

Pour tout $\beta \in R_+^*$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t), t) &= -\theta_o V + e^T(-C^TC)e + 2e^TSd_1, \\ &\leq -\theta_o V + \frac{1}{\beta} e^T S^T S e + \beta |d_1|^2. \end{aligned}$$

Ici, nous choisissons

$$\mu = \frac{\limsup_{t\to+\infty} \sigma_{max}(S^2(t))}{\limsup_{t\to+\infty} (\sigma_{min}(S(t)))},$$

Ainsi,

$$\dot{V}(e(t), t) \leq (-\theta_o + \frac{\mu}{\beta}) V(e(t), t) + \beta |d_1|^2.$$

Ensuite, une démarche identique à celle de la preuve du (4.4) *nous permet d'obtenir (4.19) et de conclure la preuve.*

4.5 Optimisation de la robustesse

A partir des résultats précédents, le problème d'optimisation des performances de nos observateurs dans le sens la robustesse peut être formuler de la manière suivante : comment peut-on choisir un coût adapté pour minimiser la borne de l'erreur lorsque le temps tend vers l'infini ?

4.5.1 Définition du coût

Nous considérons dans un premier temps le cas du système traité dans le théorème 4.1. En effet, nous avons démontré dans la section 4.3.1 que l'erreur d'estimation est bornée par :

$$\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|^2 \leq \frac{\beta^2\gamma}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)\sigma_{min}(S)} L_{d_1} + \frac{\beta\gamma^2}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)\sigma_{min}(S)} L_{d_2}.$$

Pour cette partie, nous considérons le cas u constant et S stationnaire. Nous voulons minimiser l'erreur d'estimation pour le système affine bruité dans le régime permanent (lorsque le temps tend vers l'infini). Ainsi, dans la suite, nous considérons le coût suivant :

$$J(\beta,\gamma,u,\theta_o) = \frac{\beta^2\gamma}{(\beta\theta_o\gamma-\mu_1\gamma-\mu_2\beta)\sigma_{min}(S)}L_{d_1} + \frac{\beta\gamma^2}{(\beta\theta_o\gamma-\mu_1\gamma-\mu_2\beta)\sigma_{min}(S)}L_{d_2},$$

Avec

$$S = S(u,\theta_o);$$

$$L_{d_1} = \limsup_{t\to+\infty}|d_1|^2; \quad L_{d_2} = \limsup_{t\to+\infty}|d_2|^2$$

$$\mu_1 = \frac{\sigma_{max}(S^2)}{\sigma_{min}(S)}; \quad \mu_2 = \frac{\sigma_{max}(C^TC)}{\sigma_{min}(S)}.$$

Notre objectif est de choisir les variables θ_o, u, γ et β qui satisfont les conditions du Théorème 4.1 pour minimiser le coût $J(\beta,\gamma,u,\theta_o)$.
Rappelons les contraintes sur ces paramètres :

1. $\theta_o,\beta,\gamma > 0$.
2. $-\frac{\theta_o}{2}I - A(u)$ est Hurwitz.
3. $-\theta_o + \frac{\mu_1}{\beta} + \frac{\mu_2}{\gamma} < 0$.

Une méthode pour chercher θ_o, u, γ et β peut être formulée comme suit :

1. D'abord, nous trouvons β_{min} et γ_{min} minimisant

$$J_1(\beta,\gamma) = \frac{\beta^2\gamma}{\beta\theta_o\gamma-\mu_1\gamma-\mu_2\beta}L_{d_1} + \frac{\beta\gamma^2}{\beta\theta_o\gamma-\mu_1\gamma-\mu_2\beta}L_{d_2} \ . \tag{4.20}$$

2. Nous posons :

$$g_1(u,\theta_o) = \frac{\beta_{min}^2\gamma_{min}}{\beta_{min}\theta_o\gamma_{min}-\mu_1\gamma_{min}-\mu_2\beta_{min}} \ ;$$

$$g_2(u,\theta_o) = \frac{\beta_{min}\gamma_{min}^2}{\beta_{min}\theta_o\gamma_{min}-\mu_1\gamma_{min}-\mu_2\beta_{min}} \ .$$

3. Ensuite, nous cherchons u et θ_o minimisant le critère :

$$J_2(u,\theta_o) = \frac{g_1(u,\theta_o)}{\sigma_{min}(S(u,\theta_o))}L_{d_1} + \frac{g_2(u,\theta_o)}{\sigma_{min}(S(u,\theta_o))}L_{d_2} \ .$$

D'une manière générale, nous pouvons remarquer que $g_1(u,\theta_o)$ et $g_2(u,\theta_o)$ sont des fonctions implicites de u et θ_o (parce que g_1, g_2 dépendent de μ_1, μ_2, L_{d_1} et L_{d_2}). Donc, il est très difficile d'obtenir des valeurs optimales u et θ_o pour J_2. Pour illustrer cette approche, nous proposons ci-dessous un exemple académique.

Exemple 1

Nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= ux_2 + d_1 \\ \dot{x_2} &= 0 \\ y &= x_1 + d_2, \end{cases} \tag{4.21}$$

avec les bruits d_1 et $d_2 \in \mathcal{R}$.
Le système (4.21) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(u)x + d_1 \\ y &= Cx + d_2, \end{cases} \tag{4.22}$$

avec

$$A(u) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; d_1 = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Du fait que l'entrée u est constante, nous considérons une matrice S constante SPD.

A partir de l'équation faible de Lyapunov (4.3), nous obtenons la matrice S avec ses éléments qui sont des fonctions des u et θ_o :

$$S(u, \theta_o) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_o} & -\frac{u}{{\theta_o}^2} \\ -\frac{u}{{\theta_o}^2} & \frac{2u^2}{{\theta_o}^3} \end{pmatrix},$$

alors,

$$S^{-1}C^T = \begin{pmatrix} 2\theta_o \\ \frac{{\theta_o}^2}{u} \end{pmatrix}.$$

Sachant que l'erreur d'estimation est donnée par $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, nous avons :

$$\dot{e} = (A(u) - S^{-1}C^TC)e + d_1 - S^{-1}C^Td_2.$$

- Si θ_o est grand, $S^{-1}C^Td_2$ est grand (cas du grand gain), alors $d_1 << S^{-1}C^Td_2$, alors la robustesse aux bruits de mesure est mauvaise et la robustesse aux bruits de dynamique est bonne. Nous pouvons considérer le système comme dans le cas sans bruit sur la dynamique.

- Si θ_o est petit, $S^{-1}C^Td_2$ est petit (cas du petit gain), alors $d_1 >> S^{-1}C^Td_2$, alors la robustesse aux bruits de mesure est bonne et la robustesse aux bruits de dynamique est mauvaise. Nous pouvons considérer le système comme dans le cas sans bruit sur la mesure.

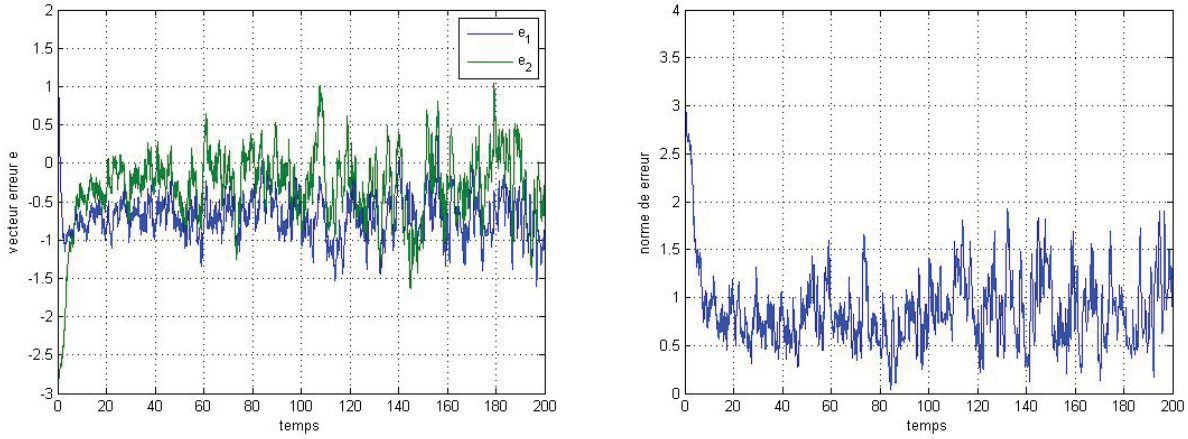
Ainsi, nous nous intéressons dans les sections suivantes au problème dans le cas où il n'y a qu'un bruit à la fois, soit sur la dynamique, soit sur la mesure. Nous utilisons Matlab pour trouver, par essais-erreurs, $\beta, \gamma, \theta_o, u$ pour minimiser le critère dans le cas général que nous avons proposé :

$$J(\beta, \gamma, u, \theta_o) = \frac{\beta^2\gamma}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)\sigma_{min}(S)}L_{d_1} + \frac{\beta\gamma^2}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)\sigma_{min}(S)}L_{d_2}.$$

Nous considérons que :

- $L_{d_1} = 1,\ L_{d_2} = 2$
- u varie entre -1 et 1 avec un pas de 0.1
- θ_o varie de 0.1 à 20 avec un pas de 0.1
- $\gamma,\ \beta$ varient de 1 à 30 avec un pas de 1

Résultat numérique : Le coût est minimal pour $\beta = 28, \gamma = 10, u = 0.3, \theta_o = 0.7$. Dans ce cas, le vecteur d'erreur e et la norme $||e||$ sont tracés sur les figures 4.1a et 4.1b, les mêmes grandeurs obtenues avant l'observateur classique sans optimisation ($u = 0.3$, $\theta_o = 3$) étant données dans les figures 4.2a et 4.2b . Nous remarquons que l'erreur d'estimation par l'approche optimale proposée est moins bruitée que celle obtenue par l'observateur classique. Nous pouvons donc conclure les bonnes performances de l'observateur proposé vis-à-vis au rejet de perturbations.



(a) Vecteur e - cas optimal

(b) $||e||$ - cas optimal

FIGURE 4.1 – Vecteur d'erreur e et norme $||e||$: dans le cas optimal, avec bruit sur la dynamique et sur la mesure

4.5.2 Résolution dans le cas où $L_{d_1} = 0$ en régime permanent

Nous nous intéressons dans cette partie au cas où $L_{d_1} = 0$. C'est un cas particulier du problème d'optimisation que nous avons étudié dans la partie précédente.
Dans ce contexte, le coût J devient :

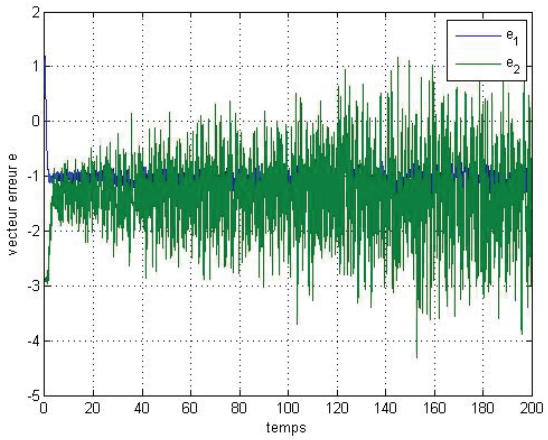
$$J(\beta, \gamma, u, \theta_o) = \frac{\beta\gamma^2}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)\sigma_{min}(S)} L_{d_2}.$$

D'après le corollaire 4.3.1 le coût devient :

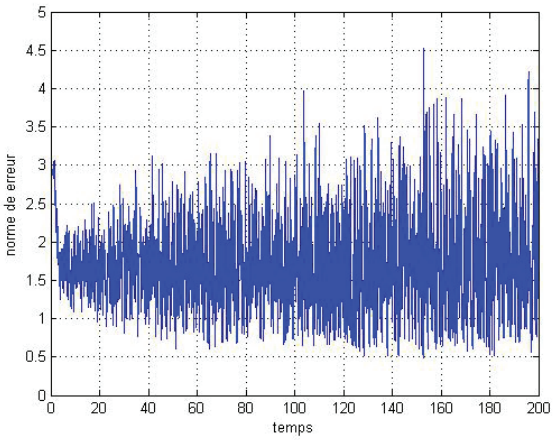
$$J_{L_{d_1=0}}(u, \theta_o) = \frac{4\sigma_{max}(C^TC)}{\theta_o^2\sigma_{min}^2(S(u, \theta_o))} L_{d_2}.$$

Ainsi, le problème d'optimisation consistera à trouver u et $\theta_o > 0$ afin de minimiser le coût qui est le coefficient de L_{d_2} suivant :

$$J_{L_{d_2}}(u, \theta_o) = \frac{4\sigma_{max}(C^TC)}{\theta_o^2\sigma_{min}^2\left(S(u, \theta_o)\right)}.$$



(a) Vecteur e avec $u = 0.3$, $\theta_o = 3$



(b) $||e||$ - avec $u = 0.3$, $\theta_o = 3$

FIGURE 4.2 – Vecteur d'erreur e et norme $||e||$: avec l'observateur classique sans optimisation, avec bruit sur la dynamique et sur la mesure

Remarquons que C est une matrice constante, alors $\sigma_{max}(C^TC)$ est toujours constant pour notre système. Ainsi, afin de minimiser $J_{L_{d_2}}$, ceci est équivalent à maximiser :

$$\begin{cases} J_{maxL_{d_2}}(u, \theta_o) = \theta_o^2 \sigma_{min}^2 \left(S(u, \theta_o)\right), \\ \textit{sous les contraintes} : \\ -\dfrac{\theta_o}{2} I - A(u) \ \textit{Hurwitz} \\ \theta_o > 0 \\ \sigma_{min}(S) > 0. \end{cases} \tag{4.23}$$

Remarque 4.5.1. *Dans cette section, nous nous posons la question suivante : s'il existe un $\theta_o = \bar{\theta}_o$ pour maximiser l'observabilité du système (4.21), alors existe t'il une entrée u_{opt} telle que $(u_{opt}, \bar{\theta}_o)$ est la solution optimale dans le cas $L_{d_1} = 0$?*
La solution l'équation de Lyapunov dans le cas de u constante est :

$$S = \int_0^\infty e^{(-A(u) - \frac{\theta_o}{2} I)^T t} C^T C e^{(-A(u) - \frac{\theta_o}{2} I)t} dt.$$

Pour une valeur très petite de θ_o, nous avons S qui devient le grammien d'observabilité (G_O).

$$S = \int_0^\infty e^{-A^T(u)t} C^T C e^{-A(u)t} dt = G_O.$$

Ainsi, la question devient : pour un θ_o petit, y a t-il toujours un u tel que θ_o et u sont solutions optimales pour le problème d'optimisation (4.23) ?
Nous considérons cette question pour un système affine en l'état sans le bruit sur la mesure suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(u)x \\ y &= Cx + d_2, \end{cases} \tag{4.24}$$

avec

$$A(u) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la solution que nous avons proposée, il faut maximiser le critère (4.23), avec :

$$S(u,\theta_o) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_o} & -\frac{u}{{\theta_o}^2} \\ -\frac{u}{{\theta_o}^2} & \frac{2u^2}{{\theta_o}^3} \end{pmatrix}.$$

Depuis un calcul simple, nous obtenons que

$$\sigma_{min}(S) = \frac{\frac{1}{\theta_o} + \frac{2u^2}{{\theta_o}^3} - \sqrt{\frac{1}{{\theta_o}^2} + \frac{4u^4}{{\theta_o}^6}}}{2}.$$

Pour maximiser $\theta_o^2\sigma_{min}^2(S(u,\theta_o))$, cela revient à maximiser $\theta_o\sigma_{min}(S(u,\theta_o))$.
On a $2\theta_o\sigma_{min}(S)$:

$$2\theta_o\sigma_{min}(S) = f(a) = 1 + 2a - \sqrt{1+4a^2}$$

où $a = \frac{|u|}{\theta_o}$, donc $a \in \mathcal{R}_+^*$.
On en déduit que, $\forall a \in \mathcal{R}_+^*$, $f'(a) = 2 - \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4a^2}+1}} > 0$.
D'où $f(a)$ est maximale pour $a = \infty$. Or $a = \frac{u}{\theta_o}$, par conséquent, θ_o doit être très petit.
Quand θ_o est petit et que nous maximisons $\theta_o\sigma_{min}(S)$, on peut déduire que que la valeur propre minimale $\sigma_{min}(S)$ est maximisée. Ainsi, l'observabilité du système est maximisée.

Cette remarque a montré que la valeur θ_o pour maximiser le Grammien d'observabilité est la solution optimale. Cependant, dans certains cas, maximiser le Grammien d'observabilité n'est pas la bonne solution, comme dans la proposition suivante :

Proposition 4.5.1. *Pour toute entrée $u \in \mathcal{U}$ telle que la matrice $-A(u) \in R^n$ est Hurwitz, nous avons : θ_o suffisamment petit n'est pas la solution optimale de notre problème.*

Preuve. *D'abord, nous avons la solution dans le cas u constant et S stationnaire suivante :*

$$S = \int_0^\infty e^{(-A(u)-\frac{\theta_o}{2}I)^T t} C^T C e^{(-A(u)-\frac{\theta_o}{2}I)t} dt,$$

avec θ_o est petit, $-A(u) - \frac{\theta_o}{2}I \approx -A(u)$,donc S devient le grammien d'observabilité (G_O) :

$$S = \int_0^\infty e^{-A^T(u)t} C^T C e^{-A(u)t} dt = G_O.$$

Alors, d'après notre approche, θ_o et u doivent être choisis tels que $\theta_o^2\sigma_{min}(S(u,\theta_o))$ soit maximale. Cela est équivalent à maximiser

$$\begin{array}{rlll} J: & U \times \mathcal{R}_+^* & \to \mathcal{R}_+^* \\ & (u,\theta_o) & \to J(u,\theta_o) = \sigma_{min}(\theta_o S(u,\theta_o)) = \sigma_{min}(M(\theta_o)), \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rlll} M: & \mathcal{R}_+ & \to \mathcal{R}^{n\times n} \\ & (u,\theta_o) & \to M(\theta_o) = \theta_o S(\theta_o) \end{array}$$

Nous calculons :

$$\frac{dM}{d\theta_o} = S + \theta_o \frac{dS}{d\theta_o}.$$

Lorsque θ_o *tend vers 0, nous avons* $\theta_o \frac{dS}{d\theta_o} \approx 0$*, nous obtenons* $\frac{dM}{d\theta_o} = S$*.*

Pour les entrées u *telles que la matrice* $-A(u)$ *est Hurwitz,* S *est SDP. Alors,* $\frac{dM}{d\theta_o}$ *l'est aussi. Il est possible de déduire que* $M(\theta_o)$ *est croissant, et que* $\sigma_{min}(M(\theta_o))$ *est croissant aussi. Ainsi,* θ_o *n'est pas la solution optimale de notre problème.*

Pour la suite, nous considérons un exemple pour le système affine en dimension 3, où nous avons appliqué la méthode proposée et montrons aussi que la question dans la remarque 4.5.1 est correcte dans cet exemple.

Exemple 2

Nous considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x_1} & = & x_2 u \\ \dot{x_2} & = & x_3(1+u) \\ \dot{x_3} & = & 0 \\ y & = & x_1 + d_2(t). \end{array}\right. \tag{4.25}$$

Nous prenons ici u telle qu'elle prenne ses valeurs dans $[-1, 1]$ et $\theta_o > 0$ pour maximiser le critère $J_{maxL_{d_2}}(u, \theta_o)$. Posons $x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$.
Le système (4.25) peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A(u)x \\ y & = & Cx + d(t), \end{array}\right. \tag{4.26}$$

avec

$$A(u) = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1+u \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $\sigma_{max}(C^T C) = 1$

Depuis l'équation de Lyapunov faible, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \theta_o s_{11} - 1 & = & 0 \\ u s_{11} + \theta_o s_{21} & = & 0 \\ (1+u)s_{21} + \theta_o s_{31} & = & 0 \\ 2u s_{21} \theta_o s_{22} & = & 0 \\ u s_{31} + (1+u)s_{22} + \theta_o s_{23} & = & 0 \\ (1+u)s_{23} + 2\theta_o s_{33} & = & 0, \end{array}\right. \tag{4.27}$$

où s_{ij} est l'élément de la ligne i et la colonne j de la matrice S. Ainsi, nous obtenons la matrice S avec les éléments qui sont des fonctions des u et θ_o.

$$S(u, \theta_o) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_o} & -\frac{u}{{\theta_o}^2} & \frac{(1+u)u}{{\theta_o}^3} \\ -\frac{u}{{\theta_o}^2} & \frac{2u^2}{{\theta_o}^3} & -\frac{3u^2(1+u)}{{\theta_o}^4} \\ \frac{(1+u)u}{{\theta_o}^3} & -\frac{3u^2(1+u)}{{\theta_o}^4} & \frac{6u^2(1+u)^2}{{\theta_o}^5} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, en utilisant Matlab, nous pouvons trouver les valeurs optimales de $u \in$[-1,1] et θ_o >0 pour maximiser

$$J_1 = \theta_o^2 \sigma_{min}^2(S).$$

Nous utilisons Matlab pour le calcul :

- u varie dans [-1,1] avec un pas de 0.01
- θ_o varie dans [0, 500] avec un pas de 1.
- Les conditions que S soit SDP et que $-\frac{\theta_o}{2}I - A$ soit Hurwitz doivent être validées.

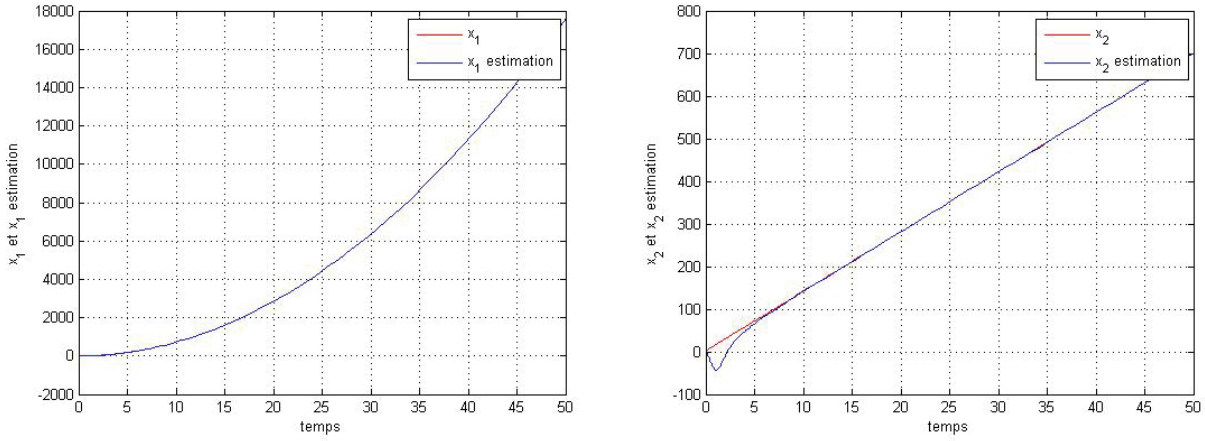


FIGURE 4.3 – Etats du modèle (x_1 et x_2) et de l'observateur ($\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$) : cas avec bruit de mesure uniquement

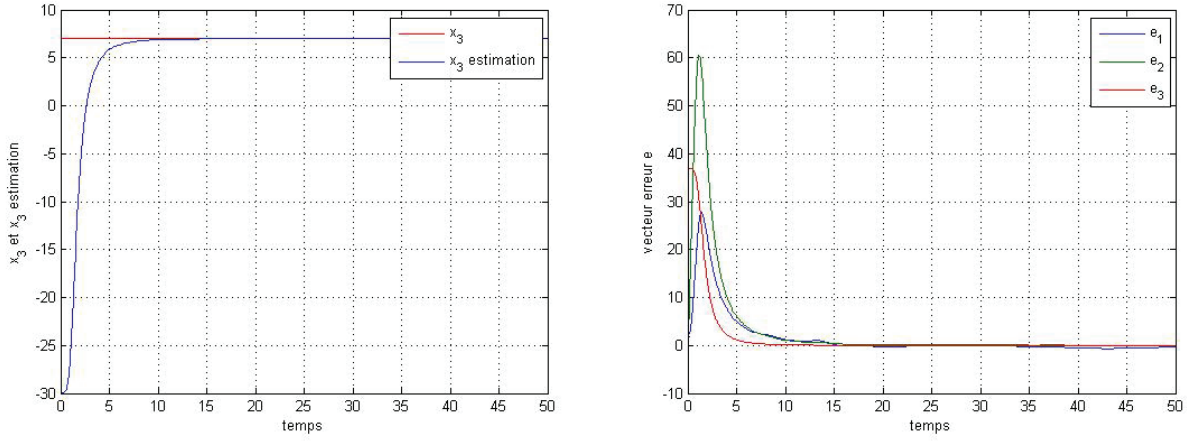


FIGURE 4.4 – Etats du modèle (x_3) et de l'observateur ($\hat{x}_3$) et les erreurs d'estimation : cas avec bruit de mesure uniquement

Les résultats montrent que :

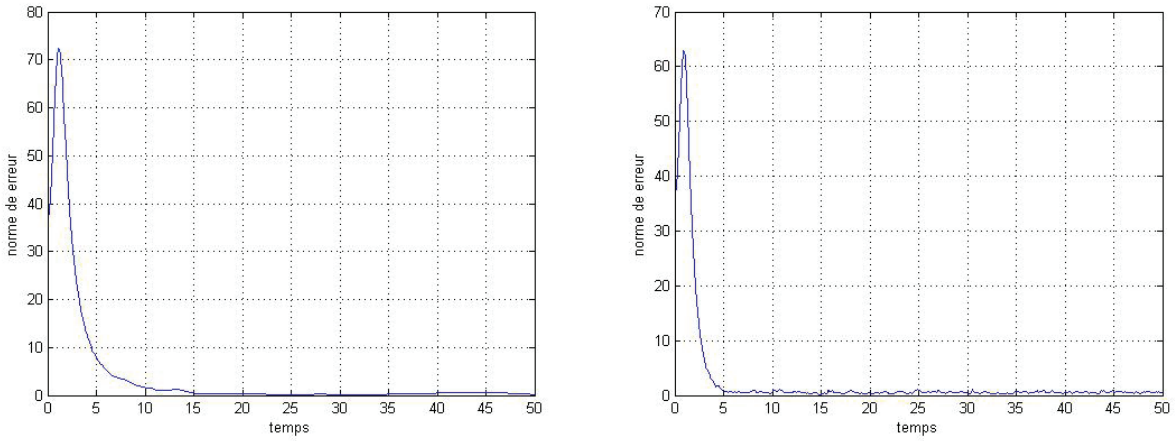


FIGURE 4.5 – Norme de l'erreur : cas optimal et cas non optimal, avec bruit de mesure uniquement

- Si θ_o varie de 1 à 500, les valeurs optimales de u et θ_o sont respectivement 1 et 1 avec $J_{1max} = 0.111$.
- Si θ_o varie de 0.001 à 1, les valeurs optimales de u et θ_o sont respectivement 1 et 0.001 avec $J_{1max} = 0.0186$.

Alors, s'il y a du bruit sur la mesure, il faut prendre θ_o minimum pour obtenir le petit gain, où $\limsup_{t\to+\infty} |e(t)|$ est le plus petit.

Les figures (4.3) et (4.4) donnent les variations des états du modèle et de l'observateur pour la valeur optimale de $\theta_o = 0.001$. La convergence de l'erreur d'estimation est bien garantie. De plus, en comparant la norme de l'erreur dans le cas optimal ($\theta_o = 0.001$) et le cas classique (sans optimisation) ($\theta_o = 0.5$ est plus grand) présentée sur la figure 4.5, nous trouvons constater que l'erreur dans le cas optimal est plus faible et moins bruitée. Par conséquence, la performance est bien améliorée avec l'optimisation de u et de θ_o.

4.5.3 Résolution dans le cas où $L_{d_2} = 0$ en régime permanent

Nous considérons dans cette partie $L_{d_2} = 0$, où il n'y a que du bruit sur la dynamique en régime permanent. C'est un cas particulier du problème d'optimisation dans la partie 4.4.2. De plus, ceci est plus général que le cas $d_2 = 0$.
Dans ce contexte, le coût J est :

$$J(\beta, \gamma, u, \theta_o) = \frac{\beta^2\gamma}{(\beta\theta_o\gamma - \mu_1\gamma - \mu_2\beta)\sigma_{min}(S)} L_{d_1},$$

D'après le corollaire 4.3.2, nous avons maintenant le coût :

$$J_{(L_{d_2}=0)}(u, \theta_o) = \frac{4\sigma_{max}(S^2)}{\theta_o^2\sigma_{min}^2(S)} L_{d_1}.$$

Ainsi, le problème d'optimisation revient à trouver u et $\theta_o > 0$ afin de minimiser le coût qui est le coefficient de L_{d_1} suivant :

$$J_{L_{d_1}}(u, \theta_o) = \frac{4\sigma_{max}(S^2)}{\theta_o^2\sigma_{min}^2(S)},$$

avec les conditions :

1. $-\frac{\theta_o}{2}I - A(u)$ est Hurwitz.
2. $\theta_o > 0$, $\sigma_{min}(S) > 0$.

Remarquons que la matrice S est SDP, alors S^2 l'est aussi.

Exemple 3

Considérons un exemple avec la même forme de (4.25), avec un bruit sur la dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(u)x + d_1(t) \\ y &= Cx \end{cases} \tag{4.28}$$

Avec

$$A(u) = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1+u \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant la solution proposée, le coût à minimiser est donné par :

$$J_{L_{d_1}} = \frac{4\sigma_{max}(S^2)}{\theta_o^2 \sigma_{min}^2(S)}.$$

Soit S la solution de l'équation de Lyapunov faible (4.3). Comme dans l'exemple précédent, un calcul simple donne :

$$S(u,\theta_o) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_o} & -\frac{u}{{\theta_o}^2} & \frac{(1+u)u}{{\theta_o}^3} \\ -\frac{u}{{\theta_o}^2} & \frac{2u^2}{{\theta_o}^3} & -\frac{3u^2(1+u)}{{\theta_o}^4} \\ \frac{(1+u)u}{{\theta_o}^3} & -\frac{3u^2(1+u)}{{\theta_o}^4} & \frac{6u^2(1+u)^2}{{\theta_o}^5} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, nous utilisons Matlab pour réaliser l'optimisation sous les contraintes :

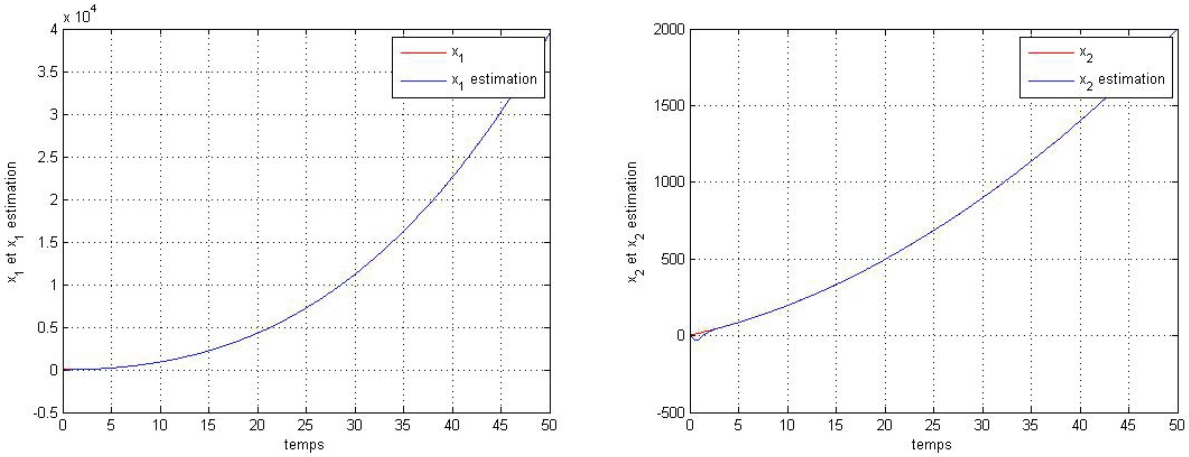


FIGURE 4.6 – Les états du modèle (x_1 et x_2) et de l'observateur ($\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$) dans le cas avec bruit sur la dynamique uniquement

- u varie entre -1 et 1 avec un pas de 0.01
- θ_o varie de 0 à 500 avec un pas de 1.
- les conditions S est SDP et $-\frac{\theta_o}{2}I - A$ est Hurwitz doivent être validées.

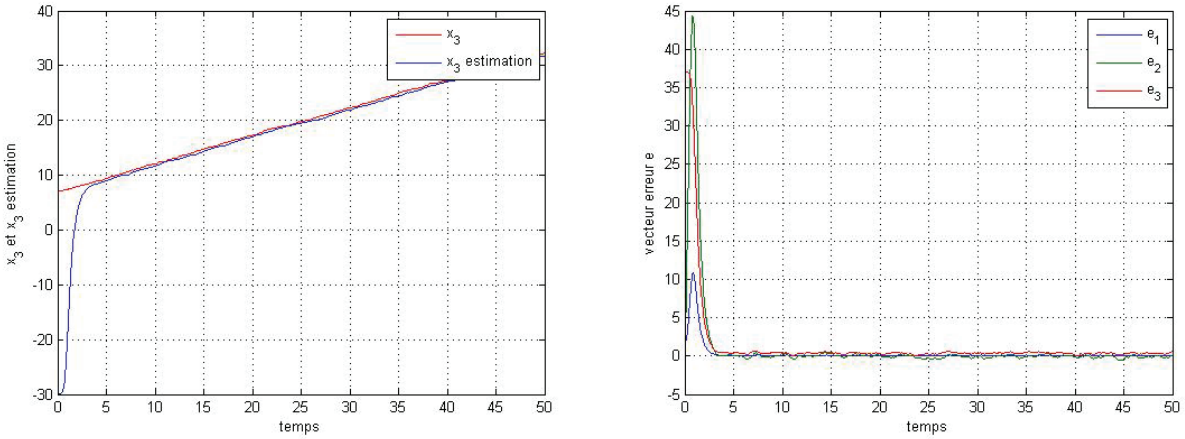
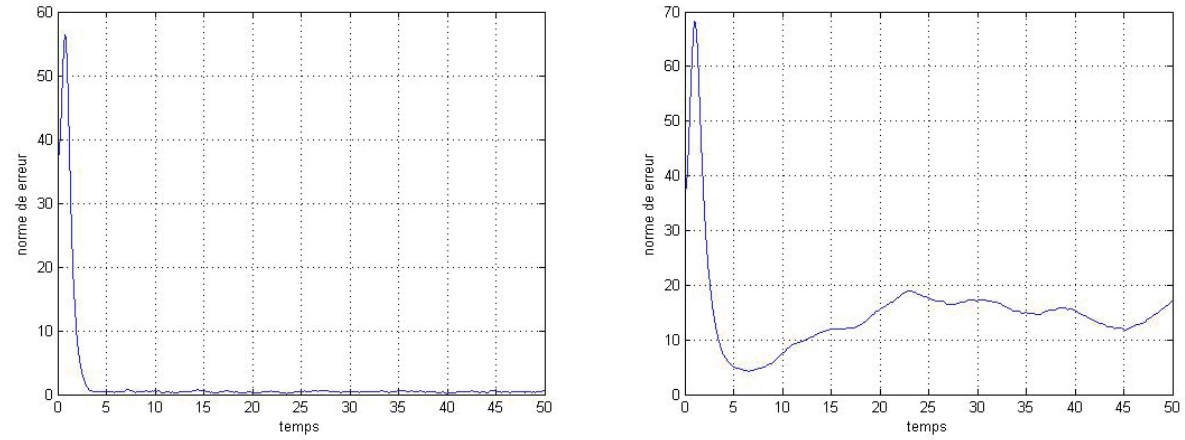


FIGURE 4.7 – Les états du modèle (x_3) et de l'observateur ($\hat{x}_3$) et les erreurs d'estimation dans le cas avec bruit sur la dynamique uniquement



(a) $||e||$ - cas optimal (b) $||e||$ - cas non optimal avec $\theta_o = 0.5$

FIGURE 4.8 – La norme de l'erreur dans le cas optimal et le cas non optimal, avec bruit sur la dynamique uniquement.

A partir des résultats de simulations, nous remarquons que si $\theta_o \in [0.01\ 500]$, les valeurs optimales de u et de θ_o sont respectivement 1 et 2.5 dans le cas de bruit sur la dynamique. Ainsi, en régime permanent, s'il y a uniquement le bruit sur la dynamique, un plus grand gain optimal que dans le cas du bruit sur la sortie est obtenu.

A partir des figures 4.6 et 4.7, nous remarquons que la convergence de l'erreur d'estimation est bien assurée par les paramètres optimaux. En outre, nous considérons la norme de l'erreur dans les deux cas (optimal où $\theta_o = 2.5$ et non optimal où $\theta_o = 0.5$ est plus petit) dans la

figure 4.8. Nous remarquons que l'erreur ainsi que le bruit est bien réduite dans le cas de l'observateur optimal comparés au cas non optimal. Donc, la performance est bien meilleure avec l'optimisation de u et de θ_o.

Conclusion. *Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude de la robustesse des observateurs pour une classe de systèmes non linéaires affines en l'état avec des bruits sur la dynamique et sur la mesure. Dans un premier temps, nous avons considéré l'observateur à grand gain, et nous avons proposé un théorème sur la bornitude de l'erreur d'estimation en régime permanent. Ensuite, nous avons formulé le problème d'amélioration de la robustesse de l'observateur sous forme d'un problème d'optimisation de l'erreur d'estimation permettant le choix du gain et de l'entrée optimale. Enfin, nous avons donné les méthodes de résolution du problème dans deux cas particuliers : un cas où la norme des bruits de mesure tends vers zéros en régime permanent et le second cas où la norme des bruits sur la dynamique tends vers zéro en régime permanent. La bonne performance obtenue sur des exemples d'illustration démontre que la méthode proposée est un outil efficace.*
Le chapitre suivant conclura cette thèse en mettant en application les méthodes vues précédemment sur divers cas d'étude.

Chapitre 5

Cas d'étude

Résumé. *Ce chapitre porte sur l'évaluation (uniquement en simulation) des approches de commande et d'observation précédemment développées sur divers cas d'étude. Dans un premier temps, l'unique cas linéaire (premier ordre mono-variable) sera étudié afin de commencer à appréhender sur un cas simple le comportement d'un tel type de contrôleur. Ensuite, deux cas du génie des procédés seront étudiés : un bio-procédé (avec une entrée, deux états, une sortie et deux paramètres à estimer) et un réacteur continu parfaitement agité (avec une entrée, deux états mesurés et deux paramètres à estimer), stables en boucle ouverte. Enfin, un système mécanique instable en boucle ouverte sera traité (avec une entrée, deux états mesurés et cinq paramètres à estimer).*

5.1 Système du 1er ordre

Dans cette section, afin de prendre en main l'esprit des méthodes proposées dans cette thèse, nous allons appliquer l'approche la plus simple : celle à commande explicite proposée précédemment uniquement pour un système linéaire d'ordre un, stable, mono-entrée, mono-sortie, avec un seul paramètre inconnu (la constante de temps).

5.1.1 Implémentation de l'approche explicite

Le design explicite de l'entrée optimale pour l'identification du système du 1er ordre a été détaillé dans la section 3.4. Les éléments de base de cette approche (le modèle (3.23), le modèle de sensibilité (3.24), le modèle augmenté (3.25) et l'observateur (3.26) en découlant et la loi de commande explicite (3.40)) y ont été déjà présentés. Enfin, des contraintes dans le problème d'optimisation sont définies comme suit :

- Les contraintes sur l'amplitude de l'entrée :

$$0 \leqslant u(k) \leqslant 1\,,\ \forall k; \tag{5.1}$$

- Les contraintes sur la sortie du procédé :

$$0 \leqslant y(k) \leqslant 4\,,\ \forall k. \tag{5.2}$$

5.1.2 Résultats et discussion

Nous considérons que le paramètre inconnu θ (la constante de temps τ) varie par morceaux dans le temps en échelons, dont les amplitudes cibles sont présentées dans le tableau 5.1. Les conditions initiales et les paramètres pour les simulations sont donnés dans le tableau 5.2. Les simulations sont faites sous Matlab.

Tableau 5.1 – Système du 1er ordre : cible temps-variant du paramètre inconnu

Temps (s)	0	1000	2000	3000	3500	4000	4500	4750	5000
θ (s)	80	100	50	80	100	50	80	100	50

Tableau 5.2 – Système du 1er ordre : conditions initiales et paramètres pour les simulations

Conditions initiales	Symbole	Valeur (uSI)
Gain statique (paramètre connu du modèle)	G	10
Valeurs initiales des paramètres estimés	$\hat{\theta}(0)$	20
États initiaux du modèle	$x(0)$	0
Estimations initiales des états du modèle	$\hat{x}(0)$	0
Paramètres d'observateur à régler	$[\rho_o \quad \theta_o]$	[1.02 0.05]
matrice SDP dans (3.26)	$S_o(0)$	$\begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$
Temps de simulation	T_{fin} (s)	5250
Période d'échantillonnage	T_s (s)	1

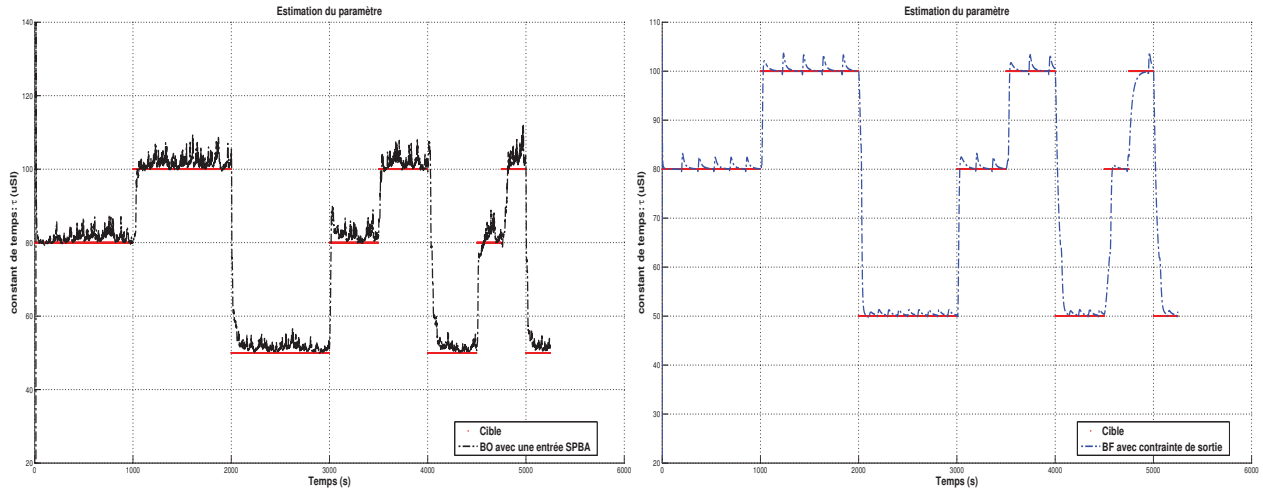
Deux scénarios différents sont simulés :

- cas 1 : identification en boucle ouverte avec les contraintes d'entrée (5.1) (et donc sans les contraintes de sortie (5.2)) ;
- cas 2 : identification en boucle fermée avec les contraintes d'entrée (5.1) et les contraintes de sortie (5.2).

D'après des essais et des erreurs, l'horizon de prédiction est réglé à chaque instant t_k basé sur :

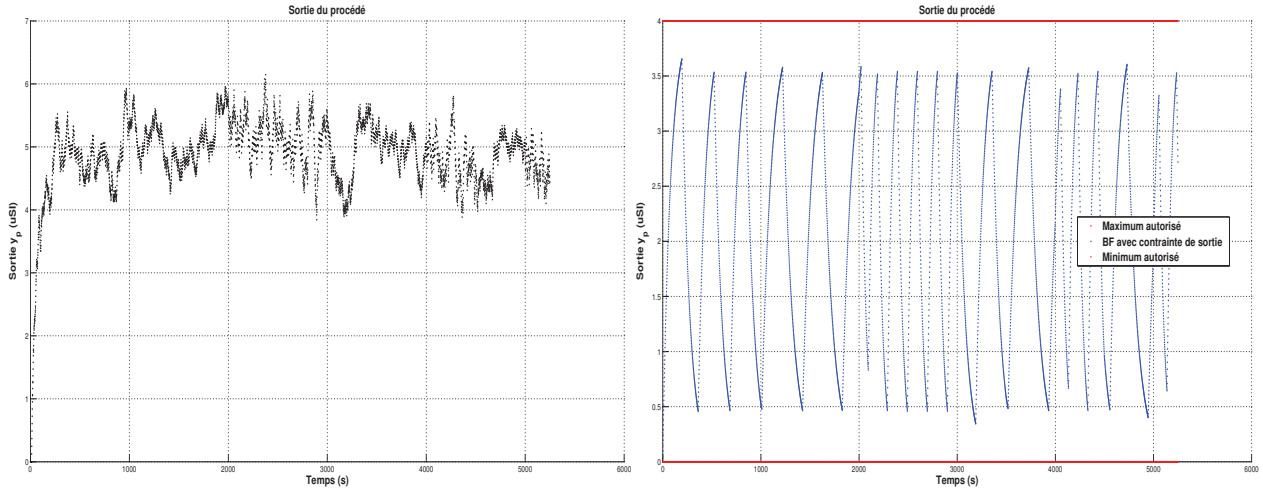
$$N_p(t_k)T_s = \hat{\tau}(t_k).$$

Les résultats de simulation sont résumés dans le tableau 5.3 : ils permettent de voir que pour les deux cas, en dépit d'une erreur initiale de 300% sur la condition initiale de la constante de temps estimée, l'estimation de la constante de temps du procédé variant en temps est obtenue avec une bonne précision pour chaque cas. Mais l'estimation est meilleure en boucle fermée avec l'erreur moyenne sur $\left[\frac{T_{fin}}{100},\ T_{fin}\right]$ de 3.6% (voir dans la figure 5.1b) plutôt que 4.62% en boucle ouverte où l'estimation est aussi plus chahutée (Figure 5.1a). Notons que dans la boucle ouverte, au début, une très grande erreur d'estimation se produit, ce qui n'est pas le cas en boucle fermée (cette courte période où cela se produit n'est pas dans $\left[\frac{T_{fin}}{100},\ T_{fin}\right]$).



(a) $\hat{\theta}$ en boucle ouverte (cas 1) (b) $\hat{\theta}$ en boucle fermée (cas 2)

FIGURE 5.1 – Système du 1er ordre : estimation du paramètre inconnu (cas 1 et 2)



(a) y_p en boucle ouverte (cas 1) (b) y_p en boucle fermée (cas 2)

FIGURE 5.2 – Système du 1er ordre : sortie du procédé (cas 1 et 2)

L'inconvénient de l'identification en boucle ouverte est que la sortie est non contrôlée (variant entre 0 et 6.14). Si ces valeurs de sortie ne sont pas acceptables, il est préférable d'utiliser l'algorithme proposée de commande explicite en boucle fermée avec des contraintes d'entrée et des contraintes de sortie où la plage obtenue de sortie est comprise entre 0.05 et 3.65 (donc les contraintes sont toujours respectées). Ces contraintes de sortie influent sur u_{inf} et u^{sup}, et donc sur les valeurs de commande appliquée $u_{min}(t)$ et $u^{max}(t)$ (voir la figure 5.3). La sensibilité maximisée en boucle fermée (voir la figure 5.4b) est 3 fois plus élevée en moyenne qu'en boucle ouverte (voir la figure 5.4a).

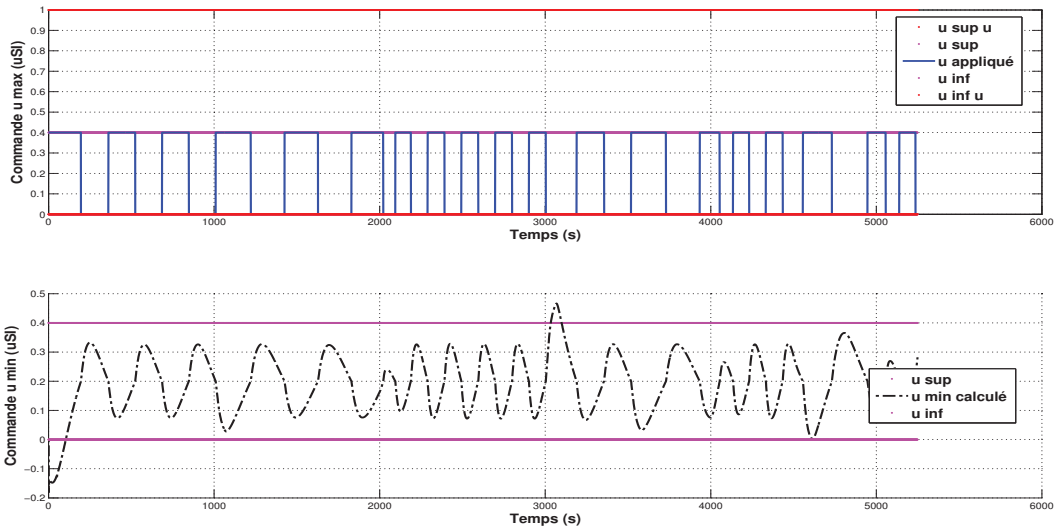
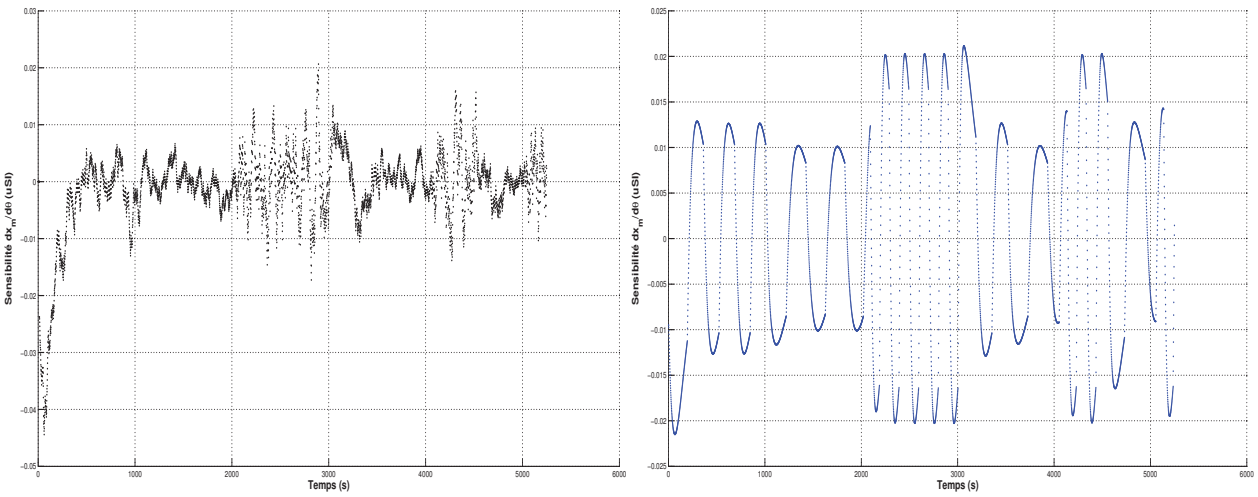


FIGURE 5.3 – Système du 1er ordre : commande appliquée $u^{\max}$ (en haut) et seuil de commande $u_{\min}$ (en bas) en boucle fermée (cas 2)



(a) x_θ en boucle ouverte (cas 1) (b) x_θ en boucle fermée (cas 2)

FIGURE 5.4 – Système du 1er ordre : sensibilité (cas 1 et 2)

Tableau 5.3 – Système du 1er ordre : analyse des résultats

	cas 1	cas 2
Valeur maximale prise par y_p	6.14	3.655
Valeur minimale prise par y_p	0.0	0.050
Sensibilité moyenne sur $\left[\frac{T_{fin}}{100},\ T_{fin}\right]$	0.004	0.011
Erreur moyenne d'estimation du paramètre θ sur $\left[\frac{T_{fin}}{100},\ T_{fin}\right]$ (%)	4.26	3.60

5.2 Bioprocédé

Dans cette section, la performance de l'approche générale proposée est illustrée à travers un bioprocédé académique, qui est un problème de référence bien connu dans le domaine du design d'expériences optimales (Gauthier et al. (1992); Telen et al. (2012)). Cet exemple d'application considère l'identification d'un modèle dynamique non linéaire avec une entrée, deux états dont un mesuré et deux paramètres inconnus. Une procédure générale pour le choix d'un critère de sensibilité entre E-optimalité, D-optimalité et A-optimalité sera donnée pour ce cas d'étude. Une comparaison entre l'identification en boucle ouverte et l'identification optimale en boucle fermée sous certaines contraintes (sur l'entrée et la sortie) sera montrée par les résultats de simulations.

5.2.1 Implémentation de notre approche

5.2.1.1 Étape 1 : Modélisation

Le bioprocédé se compose d'une culture microbienne qui implique une biomasse X (g/L) croissante sur un substrat S (g/L). Nous supposons que le bioprocédé est continu avec un taux de dilution (notre commande) $D(t)$ (h^{-1}) variant en temps et une entrée de substrat S_{in} (g/L) qui est considérée ici comme une constante.

Les équations du modèle dynamique du procédé sont données par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \dfrac{\mu_{max} S(t)}{S(t)+K} X(t) - D(t)X(t) \\ \dot{S}(t) = -\alpha \dfrac{\mu_{max} S(t)}{S(t)+K} X(t) - D(t)\left(S(t) - S_{in}\right) \ , \end{cases} \tag{5.3}$$

où la concentration de la biomasse $X(t)$ et la concentration du substrat $S(t)$ sont deux états du modèle ($[x_1(t), x_2(t)]$, respectivement). La sortie mesurée du procédé est $X(t)$. Le taux de dilution $D(t)$ est l'entrée manipulable $u(t)$ du procédé. Les paramètres K et S_{in} (notés par la suite en tant que $[a_1, a_2]$, respectivement) sont des constantes connues. Les paramètres μ_{max} et α sont les paramètres constants inconnus ($[\theta_1, \theta_2]$, respectivement) à estimer. Les valeurs des paramètres connus et les valeurs cibles des paramètres inconnus sont présentées dans le tableau 5.4.

Tableau 5.4 – Bioprocédé : paramètres du modèle

Paramètres (unités)	Symbole	Valeur
Taux spécifique maximum de croissance de la biomasse (h^{-1})	μ_{max}	0.3
Rendement de consommation du substrat(-)	α	1
Constante de saturation (g/L)	K	0.05
Concentration d'alimentation en substrat (g/L)	S_{in}	2

Nous reformulons le modèle 5.3 sous une forme plus générale basée sur la structure du

modèle (1.10) précédemment défini dans le chapitre 1 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{\theta_1 x_2(t)}{x_2(t)+a_1} x_1(t) - u(t)x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\theta_2 \dfrac{\theta_1 x_2(t)}{x_2(t)+a_1} x_1(t) - u(t)\left(x_2(t)-a_2\right) \\ y(t_k) = x_1(t_k)\ , \end{cases} \tag{5.4}$$

où $t_k = k.T_s$ est le temps d'échantillonnage de la mesure.

5.2.1.2 Étape 2 : Conception de l'observateur

Notre objectif est d'identifier en ligne le vecteur des deux paramètres constants inconnus θ. Pour ce faire, comme décrit dans la section 3.1.2, nous établissons d'abord un modèle augmenté :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{\theta_1 x_2(t)}{x_2(t)+a_1} x_1(t) - u(t)x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\theta_2 \dfrac{\theta_1 x_2(t)}{x_2(t)+a_1} x_1(t) - u(t)\left(x_2(t)-a_2\right) \\ \dot{\theta}_1 = 0 \\ \dot{\theta}_2 = 0 \\ y(t_k) = x_1(t_k). \end{cases} \tag{5.5}$$

Le FKE est considéré comme un estimateur d'état classique pour des systèmes non linéaires. Vu que ce cas d'étude est un système en temps continu-discret (dynamique continue et mesure de sortie échantillonnée), nous choisissons le FKE en temps continu-discret. L'algorithme du FKE est donné dans le tableau 5.5, où w et v sont les bruits de mesure du procédé et d'observation en supposant que ce sont des bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et de distribution normale multivariée avec les covariances Q et R, respectivement. P est la covariance des états estimés. $x_a = [x_1,\ x_2,\ \theta_1,\ \theta_2]$ est le vecteur d'état du modèle augmenté. f_a est le vecteur des fonctions d'états $\frac{\partial x_a}{\partial t}$. $h_a(x_a) = x_1$ est la fonction de sortie.

Tableau 5.5 – Filtre de Kalman étendu en temps continu-discret

Modèle	$\dot{x}_a(t) = f_a(x_a(t), u(t)) + w(t), w(t) \in \mathcal{N}(0, Q(t))$
	$y_k = h_a(x_{a_k}) + v_k, v_k \in \mathcal{N}(0, R_k)$ où $x_{a_k} = x_a(t_k)$
Initialisation	$\hat{\dot{x}}_{a_{0\|0}} = E[x_a(t_0)]$, $P_{0\|0} = Var[x_a(t_0)]$
Prédiction	$\begin{cases} \hat{\dot{x}}_a(t) = f(\hat{\dot{x}}_a(t), u(t)) \\ \dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F(t)^T + Q(t) \end{cases}$
	avec $\begin{cases} \hat{\dot{x}}_a(t_{k-1}) = \hat{\dot{x}}_{a_{k-1\|k-1}} \\ P(t_{k-1}) = P_{k-1\|k-1} \end{cases}$
	$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\dot{x}}_{a_{k\|k-1}} = \hat{\dot{x}}_a(t_k) \\ P_{k\|k-1} = P(t_k) \end{cases}$
Mise à jour	$K_k = P_{k\|k-1}H_k^T(H_k P_{k\|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$
	$\hat{\dot{x}}_{a_{k\|k}} = \hat{\dot{x}}_{a_{k\|k-1}} + K_k(y_k - h_a(\hat{\dot{x}}_{a_{k\|k-1}}))$
	$P_{k\|k} = (I - K_k H_k)P_{k\|k-1}$
	où $F(t) = \left.\frac{\partial f_a}{\partial x_a}\right\|_{\hat{\dot{x}}_a(t), u(t)}$, $H(t) = \left.\frac{\partial h_a}{\partial x}\right\|_{\hat{\dot{x}}_{a_{k\|k-1}}}$

5.2.1.3 Étape 3 : Modèle de sensibilité

D'après la définition (3.4), le modèle de sensibilité est conçu comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_{1\theta 1}(t) = \dfrac{x_2(t)x_1(t)}{x_2(t)+a_1} - u(t)x_{1\theta 1}(t) + \hat{\theta}_1(t)\dfrac{x_2(t)x_{1\theta 1}(t)(x_2(t)+a_1)+a_1x_1(t)x_{2\theta 1}(t)}{(x_2(t)+a_1)^2}, \\ \dot{x}_{1\theta 2}(t) = -u(t)x_{1\theta 2} + \hat{\theta}_1(t)\dfrac{x_2(t)x_{1\theta 2}(t)(x_2(t)+a_1)+a_1x_1(t)x_{2\theta 2}(t)}{(x_2(t)+a_1)^2}, \\ \dot{x}_{2\theta 1}(t) = -\dfrac{\hat{\theta}_2(t)x_2(t)x_1(t)}{x_2(t)+a_1} - u(t)x_{2\theta 1}(t) - \hat{\theta}_1(t)\hat{\theta}_2(t)\dfrac{x_2(t)x_{1\theta 1}(t)(x_2(t)+a_1)+a_1x_1(t)x_{2\theta 1}(t)}{(x_2(t)+a_1)^2}, \\ \dot{x}_{2\theta 2}(t) = -\dfrac{\hat{\theta}_1(t)x_2(t)x_1(t)}{x_2(t)+a_1} - u(t)x_{2\theta 2}(t) - \hat{\theta}_1(t)\hat{\theta}_2(t)\dfrac{x_2(t)x_{1\theta 2}(t)(x_2(t)+a_1)+a_1x_1(t)x_{2\theta 2}(t)}{(x_2(t)+a_1)^2}, \\ x_{1\theta 1}(0) = x_{1\theta 2}(0) = x_{2\theta 1}(0) = x_{2\theta 2}(0) = 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

où $x_{i\theta_j} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_j}$. Ces sensibilités sont ensuite normalisées comme énoncé dans (3.5).

5.2.1.4 Étape 4 : Loi de commande

En boucle fermée, nous choisissons un critère (E-optimalité, A-optimalité ou D-optimalité) pour formuler la fonction de coût (3.8) qui est maximisée pour trouver le profil optimal du taux de dilution d'entrée $D(t)$, et également pour estimer avec précision les deux paramètres inconnus μ_{max} et α en même temps. Dans la formulation finale de notre problème d'identification optimale (3.12), la commande est limitée en amplitude :

$$0\,h^{-1} \leqslant D(j) \leqslant 0.2\,h^{-1},\ \forall j \in [k, k+N_p-1] \tag{5.7}$$

et la sortie du procédé (la concentration de la biomasse) est limitée par :

$$X(j) \leqslant 1.95\,g/L,\ \forall j \in [k, k+N_p-1]. \tag{5.8}$$

5.2.2 Résultats et discussion

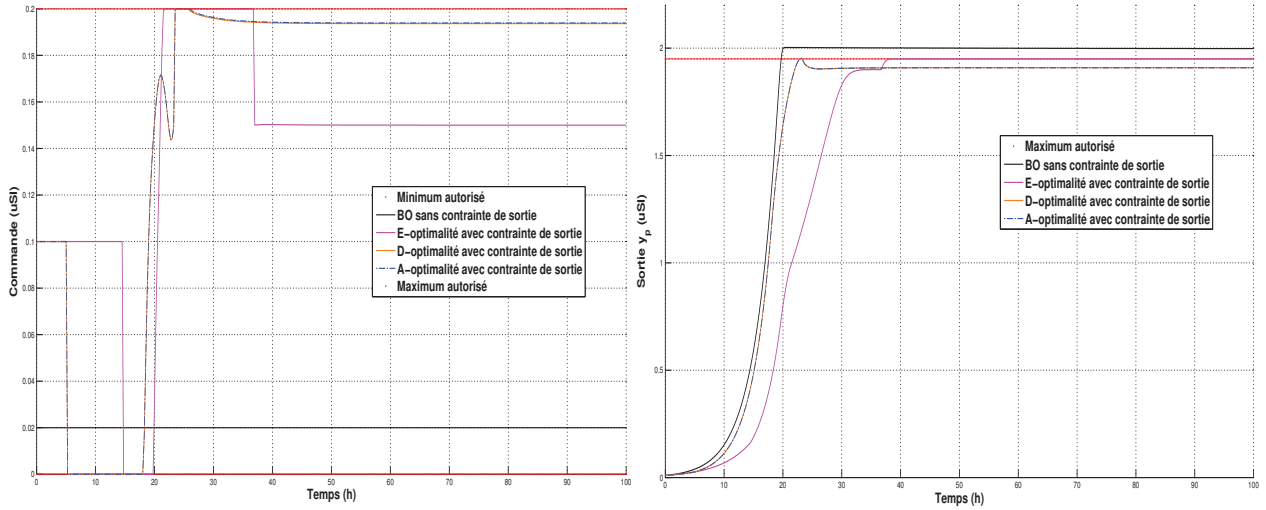
Toutes les conditions numériques pour ces simulations sont présentées dans le tableau 5.6. Puisque la concentration de substrat n'est pas mesurée, une erreur initiale de 10% est introduite entre son état initial simulé du procédé et celui du modèle et de l'observateur. Respectivement 16.7% et 20% d'erreur sont introduites pour les valeurs initiales des deux paramètres inconnus à estimer par rapport aux valeurs cibles données dans le tableau 5.4.

Quatre scénarios différents sont simulés : boucle ouverte, et boucle fermée avec (étant donné le caractère matriciel de la MIF) le critère E-optimalité, D-optimalité ou A-optimalité. Dans la boucle ouverte, l'entrée constante $u = 0.02h^{-1}$ est appliquée. Le problème de commande en boucle fermée est résolu avec ODOE4OPE, où la valeur initiale de $u(0)$ (pour fmincon) est $0.1h^{-1}$ (i.e. 50% de la pleine échelle).

Dans la figure 5.5a, les contraintes spécifiées sur l'amplitude d'entrée sont satisfaites dans chaque cas de scénario. La figure 5.5b montre que la concentration mesurée de la biomasse augmente toujours au cours du temps dans le cas de la boucle ouverte jusqu'à atteindre la valeur d'état stationnaire 2 g/L. Cette valeur a été utilisée pour régler la valeur maximale $(1,95\ g/L)$ permise dans la contrainte de sortie (5.8) pour la boucle fermée, où dans les trois cas, cette contrainte de sortie est en effet satisfaite à tout moment. En outre, dans les simulations en boucle fermée, l'entrée optimale influe directement sur la sortie du procédé (la concentration de la biomasse) qui est de plus en plus en croissance dans la plupart du

Tableau 5.6 – Bioprocédé : conditions initiales et paramètres du contrôleur.

Conditions initiales et paramètres	Symbole	Valeur (Unité)
États initiaux simulés du procédé	$[x_{p1}(0)\, x_{p2}(0)]$	[0.01 2]
États initiaux du modèle	$[x_1(0)\, x_2(0)]$	[0.01 1.8]
Estimation initiales des états du modèle	$[\hat{x}_1(0)\, \hat{x}_2(0)]$	[0.01 1.8]
Estimations initiales des paramètres inconnus	$[\hat{\theta}_1(0)\, \hat{\theta}_2(0)]$	[0.25 0.8]
Estimations initiales de la covariance	$P(0)$	$50 \times I$
Temps de simulation	T_{fin}	$100\ h$
Période d'échantillonnage	T_s	$0.25\ h$
Horizon de prédiction	N_p	8

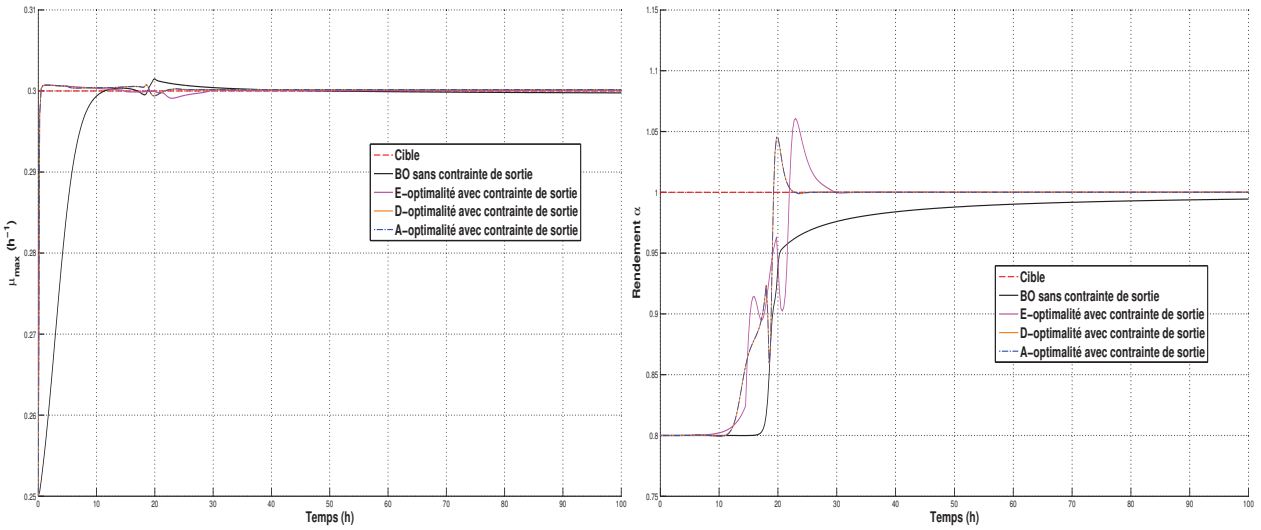


(a) u : taux de dilution en BO et en BF avec les différents critères

(b) y_p : concentration de la biomasse en BO et en BF sous contrainte avec les différents critères

FIGURE 5.5 – Bioprocédé : commande u et sortie mesurée y_p

temps, mais aussi parfois en décroissance pour satisfaire la contrainte de sortie (Figure 5.5b). La figure 5.7 montre que l'estimation de la concentration de substrat est intéressante car elle converge vers la valeur réelle (non mesurée) dans tous les cas à $t = 20\ h$. L'estimation du premier paramètre constant inconnu du modèle (le taux spécifique maximal de la biomasse) est présentée dans la figure 5.6a : les identifications en boucle fermée s'effectuent un peu plus vite (de 25 à 30 h) qu'en boucle ouverte (35 h). Dans tous les cas, la valeur cible est trouvée. Dans la figure 5.6b, l'estimation du second paramètre constant inconnu du modèle (le rendement) est montrée : les identifications en boucle fermée sont meilleures qu'en boucle ouverte, étant donné que l'estimation converge en 30 h au lieu de 100 h en boucle ouverte. Ceci peut s'expliquer par les sensibilités représentées dans la figure 5.8 : cela montre que les sensibilités sont retardées en boucle ouverte par rapport aux cas en boucle fermée. Par conséquence, les approches d'identification en boucle fermée sont meilleures que l'approche en boucle ouverte, car elles permettent d'estimer les paramètres constants inconnus avec une vitesse de convergence plus rapide tout en satisfaisant la contrainte de sortie.



(a) θ_1 : la cible et les estimations de μ_{max} en BO et en BF avec les différents critères

(b) θ_2 : la cible et les estimations du rendement α en BO et en BF avec les différents critères

FIGURE 5.6 – Bioprocédé : cibles et estimations des paramètres inconnus du modèle

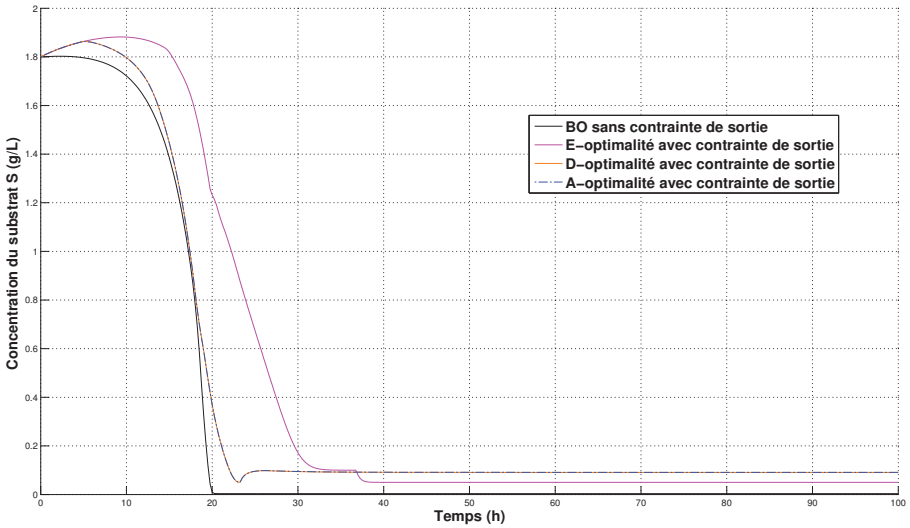


FIGURE 5.7 – Bioprocédé : estimation de l'état non mesuré x_2 en BO et en BF avec les différents critères

5.2.2.1 Influence du choix du critère de sensibilité

La figure 5.9 représente schématiquement la procédure pour choisir le meilleur critère de sensibilité. D'abord, nous définissons certains critères de sensibilité[1] à étudier et à comparer parmi lesquels nous trouvons le meilleur à retenir dans l'approche proposée. Et puis nous concevons une expérience optimale avec un des critères pour déterminer la commande optimale u^* et estimer les paramètres inconnus $\hat{\theta}$. Afin de trouver le meilleur critère à appliquer en boucle fermée, nous évaluons parallèlement (en boucle ouverte) tous les autres critères avec le même profil de commande optimale u pendant chaque simulation. Ensuite, nous calculons la valeur moyenne de chaque critère entre le temps initial et le temps de convergence des paramètres, et la normalisons entre 0 et 1. Les résultats sont montrés dans le tableau 5.7 et représentés

[1]Dans ce travail, nous ne considérons que les trois critères de sensibilité : critère E, critère D et critère A.

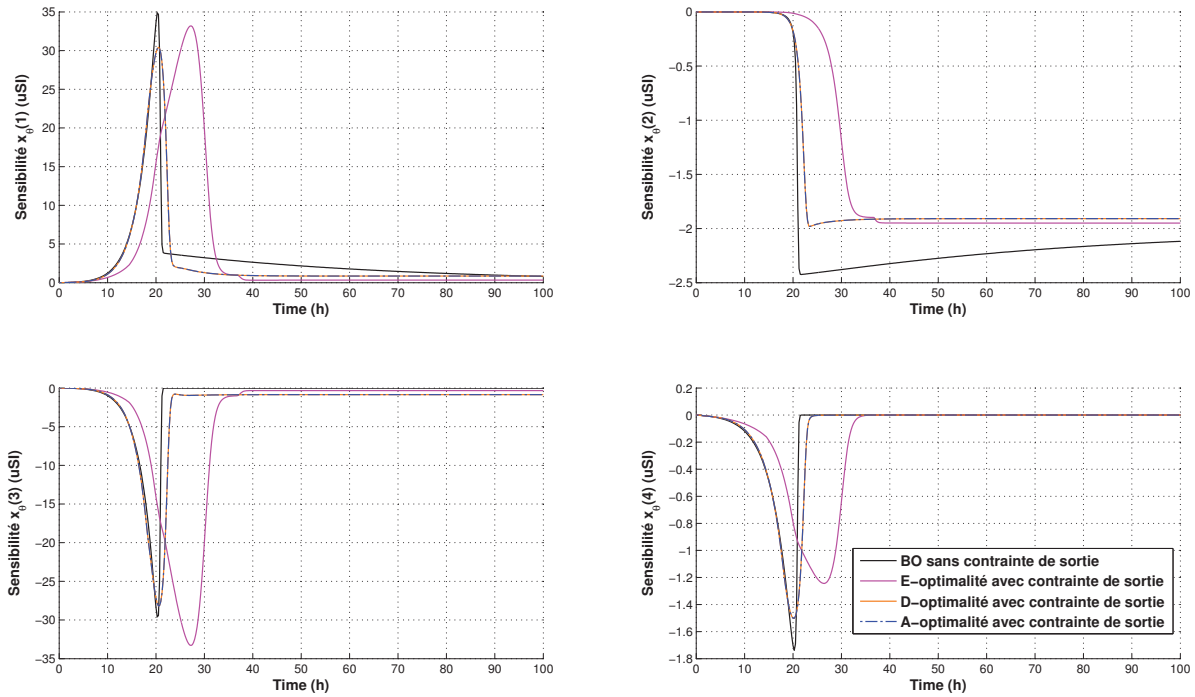


FIGURE 5.8 – Bioprocédé : sensibilités des états du modèle par rapport aux paramètre inconnus en BO et en BF avec les différents critères

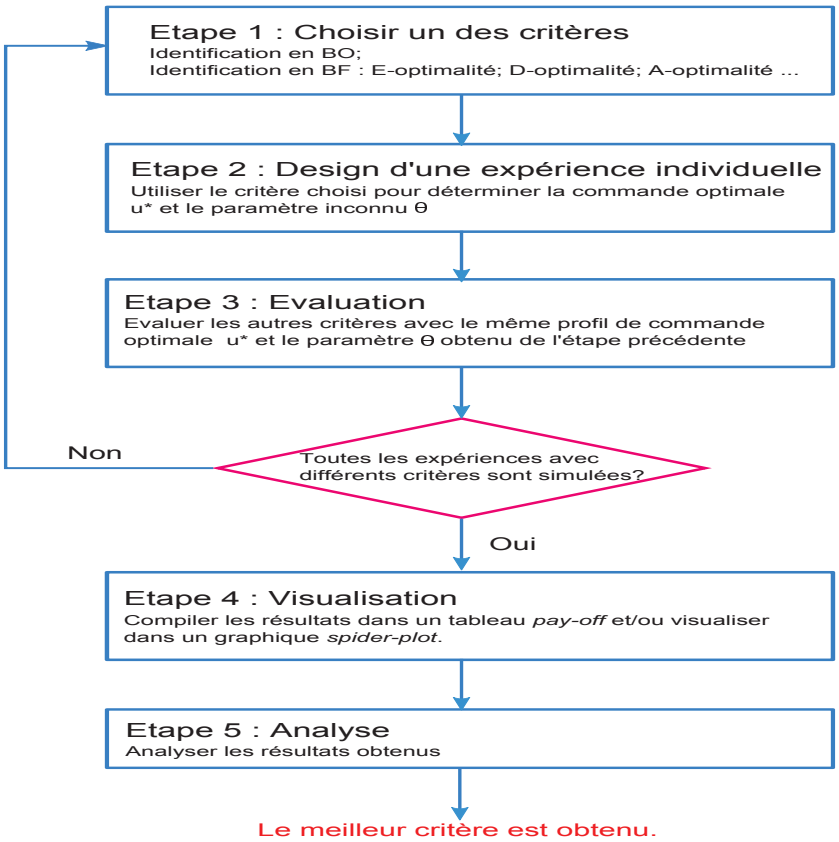


FIGURE 5.9 – Procédure pour choisir le meilleur critère du design d'expériences optimales

dans la figure 5.10. Le critère E, le critère D et le critère A atteignent bien entendu leur valeur maximale de 1 sur leur propre expérience optimale (la diagonale du tableau). Dans l'estimation en boucle ouverte, chaque critère obtient la valeur la plus faible, ce qui prouve l'avantage de l'approche d'identification en boucle fermée. Le critère A a une surface la plus grande dans le *spider plot*, ce qui signifie que le A-optimalité est le choix le plus « optimal » pour le problème de contrôle de ce système de bioprocédé. En termes de temps de calcul, toutes les approches en boucle fermée peuvent être expérimentalement appliquées vu que les valeurs maximales et moyennes du temps de calcul sont environ de 1 s, ce qui est très faible par rapport à la période d'échantillonnage (1/4 h).

Tableau 5.7 – Bioprocédé : comparaison des trois critères de sensibilités dans les quatre différents scénarios de simulation.

	Critère E	Critère D	Critère A	Moyenne/Maximal Temps de calcul (s)
Boucle ouverte	0.05	0.007	0.27	- / -
E-optimalité	1	0.82	0.97	0.97 / 2.34
D-optimalité	0.92	1	1	1.16 / 1.99
A-optimalité	0.92	1	1	1.26 / 1.96

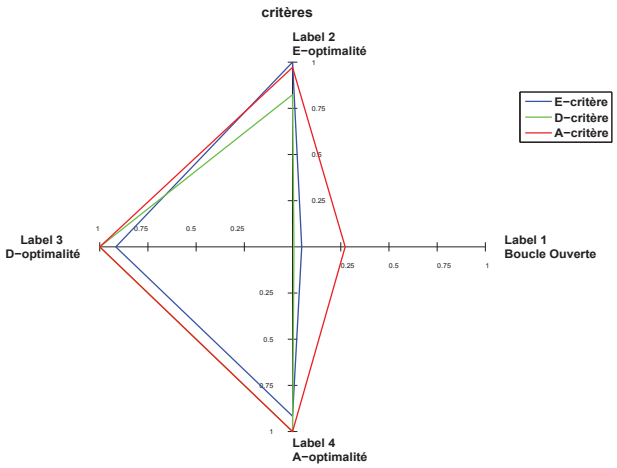


FIGURE 5.10 – Bioprocédé : comparaison des différents critères dans les différents expériences optimales

5.3 Réacteur continu parfaitement agité

L'approche proposée est maintenant détaillée pas à pas sur une étude de cas de génie de procédé chimique : un réacteur continu parfaitement agité (RCPA), qui est un système dynamique non linéaire avec une entrée, deux états mesurés et deux paramètres inconnus. Dans cette exemple d'application, des observateurs en cascade avec une preuve de convergence seront utilisés. Les résultats de simulations pour l'identification avec bruit en sortie seront représentés pour démontrer la robustesse de notre approche.

5.3.1 Travaux existants

Le problème d'identification pour le réacteur continu parfaitement agité (une réaction exothermique irréversible du premier ordre) a été traité dans (Zhu et Huang (2011)) : Y. Zhu et B. Huang ont utilisé une analyse d'état stationnaire pour ajouter des contraintes d'égalités linéaires dans une approche basée là aussi sur le FKE, qui est destiné à réduire l'influence des erreurs d'estimations initiales. Mais aucune contrainte d'exploitation réelle n'y a été spécifiée. D'autre part, le FKE y a été utilisé avec des équations de type Riccati, ce qui ne permet pas facilement de montrer la convergence de l'estimation.

5.3.2 Implémentation de notre approche

5.3.2.1 Étape 1 : Modélisation

Le même problème d'identification que dans (Zhu et Huang (2011)) est résolu ici avec notre méthode, mais en ajoutant des contraintes d'entrée/sortie et en utilisant deux observateurs en cascade ayant des preuves de convergence.

Le modèle dynamique non-linéaire de ce procédé est décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{c_A}(t) = & \frac{q}{V}(c_A^f - c_A(t)) - k_0 \exp(-\frac{E}{RT(t)})c_A(t) \\ \dot{T}(t) = & \frac{q}{V}(T_f - T(t)) + \frac{\Delta H}{\rho C_p}k_0 \exp(-\frac{E}{RT(t)})c_A(t) + \frac{UA}{\rho V C_p}(T_c(t) - T(t)), \end{cases} \tag{5.9}$$

où la concentration du composant A, $c_A(t)$, et la température du réacteur, $T(t)$, sont deux états mesurées. La température de l'enveloppe de refroidissement $T_c(t)$ est l'entrée manipulée. Le vecteur des paramètres inconnus est $\theta = [\frac{1}{\rho}\ k_0]$. Les descriptions et les valeurs des paramètres connus (respectivement, les valeurs initiales et cibles des paramètres inconnus) de ce système sont listées dans le tableau 5.8 (respectivement, tableau 5.9).

5.3.2.2 Étape 2 : Synthèse d'observateurs

En utilisant les notations $\alpha = [\frac{q}{v};\ c_A^f;\ -\frac{E}{R};\ T_f;\ \frac{\Delta H}{C_p};\ \frac{UA}{VC_p}]$ comme vecteur des paramètres connus du modèle, $x_a(t) = [c_A;\ T;\ \frac{1}{\rho};\ k_0]$ comme vecteur d'état augmenté par les paramètres inconnus, le système augmenté est le suivant :

Tableau 5.8 – RCPA : paramètres connus du modèle.

Paramètre (unité)	Symbole	Valeur
Débit volumique (m^3/s)	q	100
Volume du RCPA (m^3)	V	100
Capacité thermique du mélange A-B (J/kgK)	C_p	0.239
Chaleur de la réaction pour A-B (J/mol)	ΔH	5×10^4
- (W/K)	UA	5×10^4
U : valeur globale du coefficient de transmission thermique (W/m^2K)		
A : surface, valeur spécifiée pour le calcul du U (m^2)		
Concentration d'entrée (mol/m^3)	c_a^f	1
Température d'entrée (K)	T^f	350
Facteur exponentiel (K)	$\frac{E}{R}$	8750
E : Énergie d'activation dans l'équation d'Arrhenius (J/mol)		
R : Constante du gaz universel, 8.31451 $(J/mol/K)$		

Tableau 5.9 – RCPA : valeurs initiales et cibles des paramètres inconnus du modèle.

Paramètre (unité)	Symbole	Valeur initiale	Valeur cible
Facteur pré-exponentiel (s^{-1})	k_0	6.3×10^{10}	7.2×10^{10}
Densité du mélange A-B (kg/m^3)	ρ	1100	1000

$$\begin{cases} \dot{x}_{a1}(t) &= \alpha_1(\alpha_2 - x_{a1}(t)) - x_{a4}\exp(\dfrac{\alpha_3}{x_{a2}(t)})x_{a1}(t) \\ \dot{x}_{a2}(t) &= \alpha_1(\alpha_4 - x_{a2}(t)) + \alpha_5 x_{a3}x_{a4}\exp(\dfrac{\alpha_3}{x_{a2}(t)})x_{a1}(t) + \alpha_6 x_{a3}(u(t) - x_{a2}(t)) \\ \dot{x}_{a3}(t) &= 0 \\ \dot{x}_{a4}(t) &= 0 \\ y(t) &= \begin{bmatrix} x_{a1}(t) \\ x_{a2}(t) \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{5.10}$$

Afin d'estimer les paramètres inconnus, nous réécrirons le modèle augmenté (5.10) sous forme de deux sous-systèmes interconnectés. Pour ce faire, nous introduisons les notations suivantes[2] :

$z^1 = \begin{bmatrix} x_{a1} & x_{a4} \end{bmatrix}^T$, $z^2 = \begin{bmatrix} x_{a2} & x_{a3} \end{bmatrix}^T$;

$$A_1(y) = \begin{bmatrix} 0 & -y_1\exp\left(\dfrac{\alpha_3}{y_2}\right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \varphi_1(y) = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 y_1 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

$$A_2(u, y, z^1) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_5 z_2^1 \exp\left(\dfrac{\alpha_3}{y_2}\right) z_1^1 + \alpha_6(u - y_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

[2]Dans les équations suivantes, on ignore la dépendance du temps (t) pour la lisibilité, donc par exemple, $z^1 = z^1(t)$

$\varphi_2(y) = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_4 - \alpha_1 y_2 \\ 0 \end{bmatrix}; C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Avec ces notations, nous obtenons le système suivant formé de deux systèmes affines avec injection de sortie en cascade :

$$\begin{cases} \dot{z}^1 = A_1(y)z^1 + \varphi_1(y) \\ y_1 = C_1 z^1 \end{cases} \tag{5.11}$$

$$\begin{cases} \dot{z}^2 = A_2(u, y, z^1)z^2 + \varphi_2(y) \\ y_2 = C_2 z^2. \end{cases} \tag{5.12}$$

Supposons que pour chaque sortie du sous-système i, nous pouvons concevoir un observateur $(\mathcal{O}_i)(i = 1, 2)$. Le but est alors de concevoir un observateur pour le système entier à partir de l'interconnexion entre ces deux observateurs. Basé sur la structure des deux sous-systèmes interconnectés, nous donnons dans un premier temps un observateur pour chaque sous système :

- Le sous-système (5.11) est un cas particulier de la forme traitée dans (Farza et al. (2000)). Sous l'hypothèse que les fonctions $f_1(y, z^1) = A_1(y)z^1$ et $\varphi_1(y)$ sont globalement Lipschitz par rapport à z^1, un observateur à grand gain $(\mathcal{O}_1(\hat{z}^1))$ est donné par :

$$\dot{\hat{z}}^1 = A_1(y)\hat{z}^1 + \varphi_1(y) - G(C_1\hat{z}^1 - y_1), \tag{5.13}$$

  où $\hat{z}^1$ est le vecteur d'état estimé, G est le gain donné par $G = \Delta^{-1}S_\lambda^{-1}C_1^T$, où $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1(1,2) \end{bmatrix}$, $S_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} \\ -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{2}{\lambda^3} \end{bmatrix}$ et $\lambda > 0$ est le paramètre de réglage de l'observateur.

- Pour la synthèse d'un observateur pour le sous-système affine en l'état avec injection de sortie (5.12), nous introduisons les deux hypothèses suivantes :

  Hypothèse 5.3.1. *u est une entrée régulièrement persistante pour le sous-système (5.12) dans le sens que* $v(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ C_2\mathcal{Z}_u^2(t, z(0)) \end{pmatrix}$.

  Hypothèse 5.3.2. *(Besançon (2007)) Soit $\Phi_1(t; s)$, la matrice de transition du système (5.12) satisfaisant*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_v}{\partial t}(t; z^1) = A_2(u, y, z^1(t))\Phi_v(t; z^1) \ , \ \forall t \in \mathcal{R} \\ &\text{avec } \Phi_v(0; z^1) = I \ . \end{aligned} \tag{5.14}$$

  Pour chaque $z^1(\cdot)$, solution du sous-système en z^1 (5.11), il existe deux constantes positives T et η telles que

$$\int_{t-T}^{t} \Phi_v(s; z^1)' C_2' C_2 \Phi_v(s; z^1)\, \mathrm{d}s \geq \eta I \ , \ \forall t \in \mathcal{R} \ . \tag{5.15}$$

  Sous ces deux hypothèses, le système suivant est un observateur $(\mathcal{O}_2(\hat{z}^1, \hat{z}^2))$ pour le système (5.12) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}^2 = A_2(u, y, \hat{z}^1)\hat{z}^2 + \varphi_2(y) - S^{-1}C_2^T R(C_2\hat{z}^2 - y_2) \\ \dot{S} = -\mu S - A_2^T(u, y, \hat{z}^1)S - SA_2^T(u, y, \hat{z}^1) + C_2^T R C_2, \end{cases} \tag{5.16}$$

  où $\hat{z}^2$ est le vecteur des états estimés, S est une matrice SDP 2×2, R est une constante positive, et μ est le paramètre du grand gain de l'observateur.

Basé sur les deux résultats ci-dessus, l'observateur pour le système complet proposé est donné dans le théorème suivant :

Théorème 5.3.1. *Sous les deux hypothèses 5.3.1 et 5.3.2, il existe deux constantes positives μ^* et λ^* telles que pour chaque $\mu \geq \mu^*$ et $\lambda \geq \lambda^*$, le système suivant est un observateur asymptotique pour le système entier (5.11)-(5.12) :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}^1 = A_1(y)\hat{z}^1 + \varphi_1(u,y) - G(C_1\hat{z}^1 - y_1) \\ \dot{\hat{z}}^2 = A_2(u,y,\hat{z}^1)\hat{z}^2 + \varphi_2(y) - S^{-1}C_2^T R(C_2\hat{z}^2 - y_2) \\ \dot{S} = -\mu S - A_2^T(u,y,\hat{z}^1)S - SA_2^T(u,y,\hat{z}^1) + C_2^T RC_2 \ , \end{cases} \tag{5.17}$$

où $\hat{z}^i$ est l'état estimé, G et λ sont donnés par (5.13) et μ est donné par (5.16). □

Preuve. *Considérons d'abord le sous-système en z^1 (5.11). En supposant que ϕ_1 est globalement Lipschitz par rapport à z^1 (c'est le cas ici), une utilisation directe des résultats donnés dans (Farza et al. (2000)) nous permet de montrer que l'erreur d'estimation $e_1(t) = z^1(t) - \hat{z}^1(t)$ converge exponentiellement vers zéro. Autrement dit, on peut écrire : $\forall \sigma > 0;\ \exists \lambda_0 > 0;\ \forall \lambda > \lambda_0;\ \exists \theta_\lambda > 0;\ \exists \mu_\lambda > 0;\ \forall u \in \mathcal{U};\ \forall \hat{z}^1(0) \in \mathcal{R}^2,$ On a :*

$$\|\hat{z}^1(t) - z^1(t)\| \leq \lambda_\theta \exp(-\mu_\theta t)\|\hat{z}^1(0) - z^1(0)\|.$$

De plus, nous avons $\lim_{\lambda\to\infty} \mu_\lambda = +\infty$.

Pour achever la démonstration, nous devons étudier le comportement de la deuxième partie de l'erreur d'estimation $e_2(t) = z^2(t) - \hat{z}^2(t)$, qui dépend de la convergence de $e_1(t)$. Dans (Bornard et al. (1989)), les auteurs ont donné la preuve de la convergence de l'observateur pour la même classe de systèmes affines avec injection de sortie, mais sans interconnexion (il n'y a pas de dépendance d'un autre état inconnu, en en l'occurrence ici z^1).

Pour utiliser ce résultat, nous supposons que la fonction ϕ_2 est globalement lipschitzienne et que le long des trajectoires, nous avons

$$|A_2(u,y,z^1)| \leq A_{2max}.$$

où A_{2max} est une matrice constante. Par la suite, il suffit de montrer que si S est la solution de

$$\dot{S} = -\mu S - SA_2(\hat{z}^1) - A_2(\hat{z}^1)^T S + C_2^T RC_2,$$

alors il existe deux constantes positives a_1, a_2 telles que

$$a_1 I \leq S(t) \leq a_2 I. \tag{5.18}$$

En utilisant la notation $E_s = S - S_N$, où S_N est une matrice SDP en fonction de z^1 donnée par : $\dot{S}_N = -\mu S_N - S_N A_2(z^1) - A_2(z^1)^T S_N + C_2^T RC_2$, E_s satisfait l'équation :

$$\dot{E}_s = -A_2(z^1)^T E_s - E_s A_2(z^1) - \mu E_s + \Upsilon \ ,$$

où Υ est une matrice symétrique donnée par

$$\Upsilon = (A_2(z^1) - A_2(\hat{z}^1))'S + S(A_2(z^1) - A_2(\hat{z}^1)).$$

D'autre part, E_s satisfait, pour $t \geq r \geq 0$,

$$E_s(t) = \exp(-\mu[t-r])\Phi(t-r;\tilde{z}^1)^T E_s(r)\Phi(t-r;\tilde{z}^1) + \int_r^t \exp(-\mu[t-s])\Phi(t-s;\tilde{z}^1)^T \Upsilon(s)\Phi(t-s;\tilde{z}^1)ds \ ,$$

où $\tilde{z}^1(t) = z^1(t+r)$ *et*

$$|\Phi(t-s;\tilde{z}^1)| \leq \exp(A_{2max}(t-s)),$$

ce qui donne

$$|E_s(t)| \leq \exp([2A_{2max}-\mu][t-r])|E_s(r)| + \int_r^t \exp([2A_{2max}-\mu][t-s])ds \sup_{s\in[r,t]}\{|\Upsilon(s)|\}$$

En définissant $r = \dfrac{t}{2}$, *alors*

$$|E_s(t)| \leq \exp\left([2A_{2max}-\mu]\frac{t}{2}\right)|E_s(r)| + \frac{1-\exp\left([2A_{2max}-\mu]\frac{t}{2}\right)}{(2A_{2max}-\mu)} \sup_{s\in[\frac{t}{2},t]}\{|\Upsilon(s)|\}.$$

Étant donné que $|z^1-\hat{z}^1|$ *converge vers* 0, *la fonction* Υ *tend vers* 0. *Alors nous obtenons :*

$$\lim_{t\to+\infty}|E_s(t)| = 0.$$

Vu que la matrice E_s *est symétrique, on a*

$$\lim_{t\to+\infty} S_N(t) - S(t) = 0.$$

Par conséquent, il existe t_0 *tel que pour tout* $t > t_0$, *nous avons*

$$\frac{a_1}{2}\ I \leq S(t) \leq 2a_2\ I\ . \tag{5.19}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\dot{e}_2 = A_2(\hat{z}^1)\hat{z}^2 - A_2(z^1)z^2 + B(\hat{z}^1) - B(z^1) - S^{-1}C_2^TC_2e_2.$$

Cela peut être reformulée comme suit :

$$\dot{e}_2 = A_2(\hat{z}^1)e_2 - S^{-1}C_2^TC_2e_2 + \nu\ ,$$

où

$$\nu = \left[A_2(\hat{z}^1) - A_2(z^1)\right]z^2 + B(\hat{z}^1) - B(z^1)\ .$$

Considérons la fonction de Lyapunov donnée par :

$$V(e_2) = e_2^TSe_2\ .$$

Au long des trajectoires des systèmes et des observateurs, nous avons

$$\dot{V}(e_2) = e_2'(A_2(\hat{z}^1)^TS + SA_2(\hat{z}^1) - 2C_2^TC_2 + \dot{S})e_2 + e_2S\nu\ .$$

Cela nous donne

$$\dot{V}(e_2) = -e_2'(C_2'C_2 + \mu S)e_2 + e_2'S\nu\ .$$

En utilisant la propriété $e_2'S\nu \leq e_2'S^2e_2 + \nu'\nu$, *nous obtenons l'inégalité :*

$$\dot{V}(e_2) \leq -e_2'\left(C_2'C_2 + \mu S - S^2\right)e_2 + |\nu|^2\ .$$

En utilisant (5.19), nous avons pour tout $t \geq t_0$ *:*

$$S^2 \leq \frac{8a_2^2}{a_1}S\ .$$

Par conséquent, pour tout $t \geq t_0$, nous avons

$$\dot{V}(e_2) \leq -e_2' \left(C_2' C_2 + \left[\mu - \frac{8a_2^2}{a_1} \right] S \right) e_2 + |\nu|^2 \ .$$

Notons que $\mu^* = \frac{8a_2^2}{a_1}$, alors pour tout $\mu > \mu^*$:

$$\dot{V}(e_2) \leq -\left[\mu - \mu^*\right] V(e_2) + |\nu|^2 \ .$$

Une intégration permet d'obtenir

$$V(t) \leq \exp\left(-\left[\mu - \mu^*\right](t-r)\right) V(r) + \int_r^t \exp\left(\left[\mu - \mu^*\right][t-s]\right) |\nu(s)|^2 ds \ .$$

Ce qui donne

$$V(t) \leq \exp\left(-\left[\mu - \mu^*\right](t-r)\right) V(r) - \frac{1 - \exp(t-r)}{\mu - \mu^*} \sup_{s \in [r,t]} \left\{ |\nu(s)|^2 \right\} \ .$$

La fonction ν converge vers 0, et puis, au long de la trajectoire du système, nous obtenons

$$\lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$$

Basé sur (5.18) et en utilisant l'approche classique de Lyapunov, il est facile de démontrer que $\lim_{t \to +\infty} e_2(t) = 0$

5.3.2.3 Étape 3 : Modèle de sensibilité

Basés sur la définition (3.4) dans la section 3.1.4, nous décrivons le modèle de sensibilité :

$$\left\{ \begin{array}{rl}
\dot{x}_{1\theta 1}(t) = & -\alpha_1 x_{1\theta 1}(t) - \hat{\theta}_2(t) \exp\left(\frac{\alpha_3}{x_2(t)}\right) x_{1\theta 1}(t) + \hat{\theta}_2(t) x_1(t) \exp\left(\frac{\alpha_3}{x_2(t)}\right) \frac{\alpha_3}{x_2^2(t)} x_{2\theta 1}(t) \\
\dot{x}_{1\theta 2}(t) = & -\exp\left(\frac{\alpha_3}{x_2(t)}\right) x_1(t) - \alpha_1 x_{1\theta 2}(t) - \hat{\theta}_2(t) \exp\left(\frac{\alpha_3}{x_2(t)}\right) x_{1\theta 2}(t) \\
& + \hat{\theta}_2(t) x_1(t) \exp\left(\frac{\alpha_3}{x_2(t)}\right) \frac{\alpha_3}{x_2^2(t)} x_{2\theta 2}(t) \\
\dot{x}_{2\theta 1}(t) = & -\frac{\left[\alpha_5 \hat{\theta}_2(t) \exp\left(\frac{\alpha_3}{x_2(t)}\right) x_1(t) + \alpha_6 (u(t) - x_2(t))\right]}{\hat{\theta}_1^2(t)} + \frac{\alpha_5 \hat{\theta}_2(t)}{\hat{\theta}_1(t)} \exp\left(\frac{\alpha_3}{x_2(t)}\right) x_{1\theta 1}(t) \\
& - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_5 \hat{\theta}_2(t)}{\hat{\theta}_1(t)} \exp\left(\frac{\alpha_3}{x_2(t)}\right) x_1(t) \frac{\alpha_3}{x_2^2(t)} + \frac{\alpha_6}{\hat{\theta}_1(t)} \right) x_{2\theta 1}(t) \\
\dot{x}_{2\theta 2}(t) = & \frac{\alpha_5}{\hat{\theta}_1(t)} \exp\left(\frac{\alpha_3}{x_2(t)}\right) x_1(t) - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_5 \hat{\theta}_2(t)}{\hat{\theta}_1(t)} \exp\left(\frac{\alpha_3}{x_2(t)}\right) x_1(t) \frac{\alpha_3}{x_2^2(t)} + \frac{\alpha_6}{\hat{\theta}_1(t)} \right) \\
& x_{2\theta 2}(t) + \frac{\alpha_5 \hat{\theta}_2(t)}{\hat{\theta}_1(t)} \exp\left(\frac{\alpha_3}{x_2(t)}\right) x_{1\theta 2}(t) \ ,
\end{array} \right. \tag{5.20}$$

où $x_{i\theta_j} = \dfrac{\partial x_i}{\partial \theta_j}$. Les sensibilités sont ensuite normalisées par (3.5).

Tableau 5.10 – RCPA : conditions initiales et paramètres pour les simulations

Conditions initiales	Symbole	Valeur (uSI)
Valeurs initiales des paramètres estimés	$[\hat{\theta}_1(0)\hat{\theta}_2(0)]$	$[\frac{1}{1100}\ 6.3 \times 10^{10}]$
États initiaux du modèle	$[x_1(0)\, x_2(0)]_m$	[0.9 305]
Estimations initiales des états du modèle	$[\hat{x}_1(0)\, \hat{x}_2(0)]$	[0.9 305]
Paramètres de l'observateur	$[\lambda \quad \mu]$	[1 1]
Matrice SDP dans (5.16)	$S_l(0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matrice de poids dans (5.16)	R	3
Temps de simulation	$T_{end}\ (s)$	25 (les cas sans bruit) 50 (les cas avec bruit)
Période d'échantillonnage	$T_s\ (s)$	0.5
Horizon de prédiction	N_p	10

5.3.2.4 Étape 4 : Loi de commande

La fonction coût a été ici basée sur le critère E-optimalité (3.9). Des contraintes sur l'entrée sont considérées et sont définies comme suit :

$$250\,K \leqslant T_c(l) \leqslant 320\,K,\ \forall l \in [k, k+N_p]. \tag{5.21}$$

Pour évaluer l'efficacité de l'approche dans le cas de présence de contraintes sur la sortie en boucle fermée, la contrainte suivante est considérée :

$$c_A(l) \leqslant 0.95\,mol/m^3,\ \forall l \in [k, k+N_p]. \tag{5.22}$$

Basée sur la résolution de l'observateur (5.17), du modèle de prédiction (5.9) et du modèle de prédiction de la sensibilité (5.20), le problème d'identification optimale sous contraintes (3.12) est formulé pour déterminer à chaque instant courant k la commande optimale et pour estimer en ligne les deux paramètres inconnus.

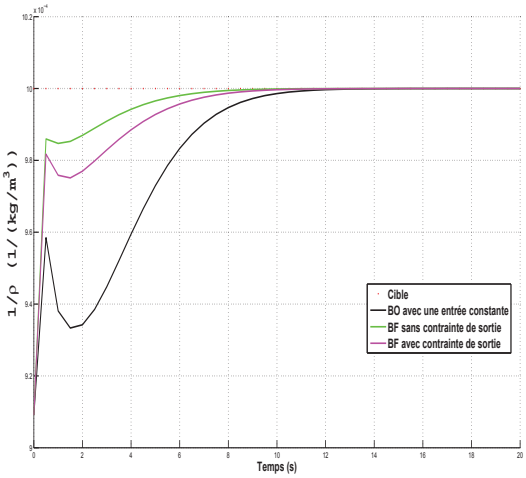
5.3.3 Résultats et discussion

5.3.3.1 Cas sans bruit de mesures

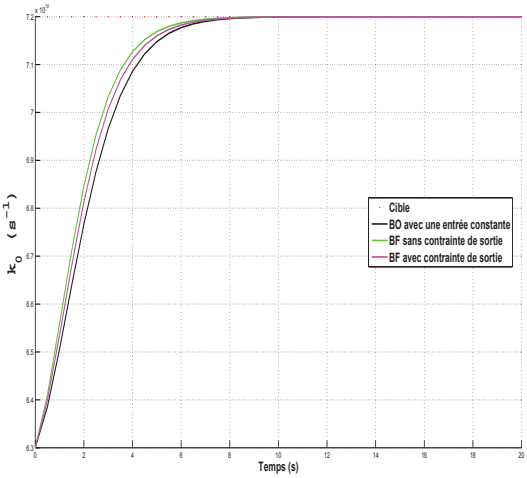
L'approche proposée pour l'identification optimale est évaluée dans 3 cas non bruités :

- Cas 1 : identification en boucle ouverte avec une entrée constante ($T_c = 300\ K$) satisfaisant les contraintes d'entrée ;
- Cas 2 : identification en boucle fermée en utilisant l'approche proposée en prenant en compte des contraintes d'entrée (5.21) uniquement ;
- Cas 3 : identification en boucle fermée en utilisant l'approche proposée en prenant en compte des contraintes d'entrée (5.21) et de la contrainte de sortie (5.22).

Ces 3 cas sont tous réalisés sous les mêmes conditions initiales et avec les mêmes valeurs de paramètres d'algorithme, qui sont définies dans le tableau 5.10.

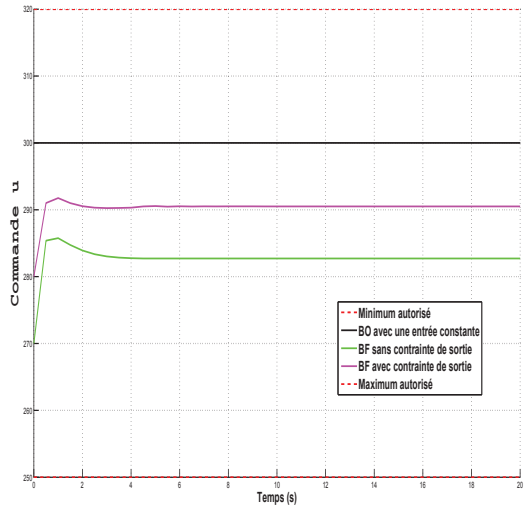


(a) θ_1 : la densité du mélange A-B, $1/\rho$.

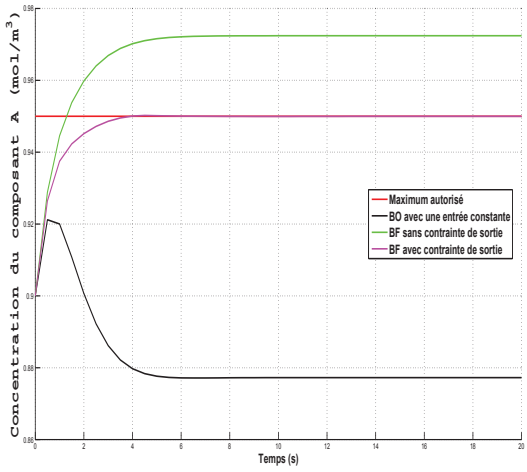


(b) θ_2 : le facteur pré-exponentiel, k_0.

FIGURE 5.11 – RCPA sans bruit : cibles et estimations des paramètres inconnus du modèle



(a) u : la température de l'enveloppe de refroidissement, T_c.



(b) y_{p1} : la concentration du composant A.

FIGURE 5.12 – RCPA sans bruit : commande u et sortie mesurée y_{p1} sous contraintes

Dans le cas 1, une entrée constante est appliquée : malgré une erreur initiale de l'ordre de 10%, les 2 paramètres estimés convergent vers leur cible (Fig. 5.11a et Fig. 5.11b). Pour le cas 2 (en boucle fermée), les deux paramètres estimés convergent plus vite vers leurs cibles qu'en boucle ouverte (entre 30% et 50% plus vite), et avec moins d'erreur avant la convergence finale. Le contrôleur est donc capable de trouver de meilleures commandes (Figure 5.12a) : dans le cas 2, le profil d'entrée temps variant augmente du point initial $u(0) = 270K$ et converge vers $282.7K$; dans le cas 3, le profil d'entrée temps variant augmente du point initial $u(0) = 280K$ et converge vers $290.5K$. La sortie (cas 2) augmente de façon monotone et s'arrête au-dessus de 0.95 mol/m^3 (Figure 5.12b) qui est la contrainte de sortie utilisée dans le cas 3, et qui est bien respectée dans ce cas 3 : les deux paramètres estimés convergent vers leur cible, mais moins rapidement que dans le cas 2 (mais toujours plus vite que dans le cas 1).

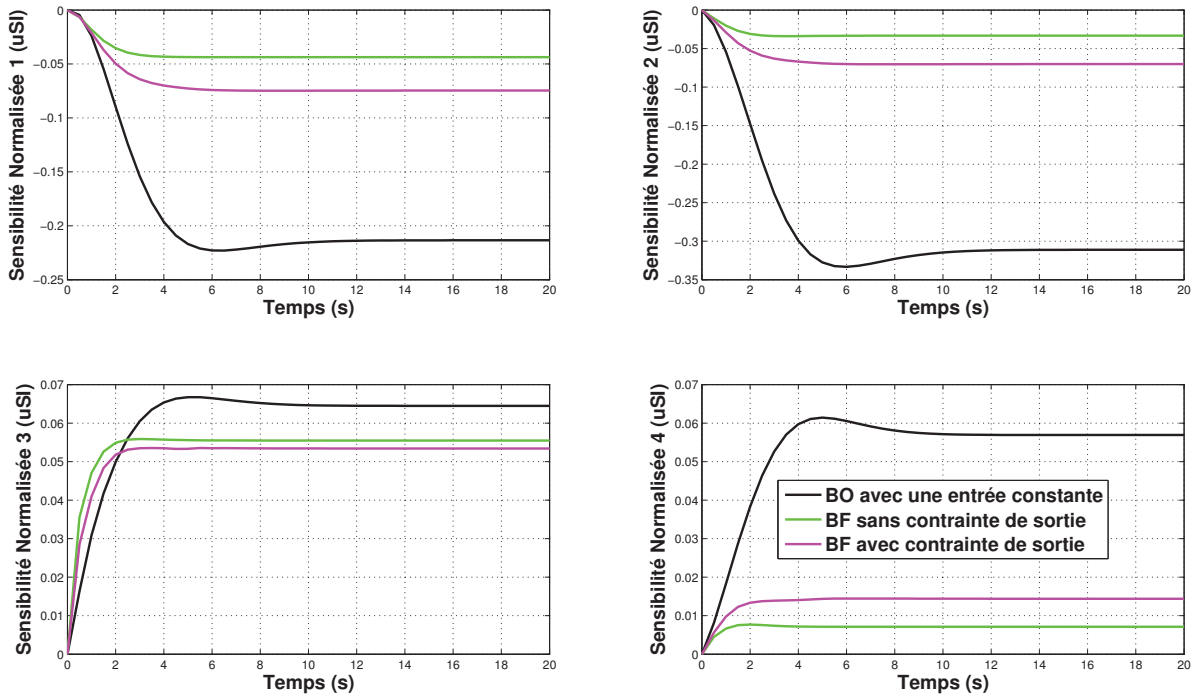


FIGURE 5.13 – RCPA sans bruit : sensibilités normalisés des états du modèle par rapport aux paramètre inconnus.

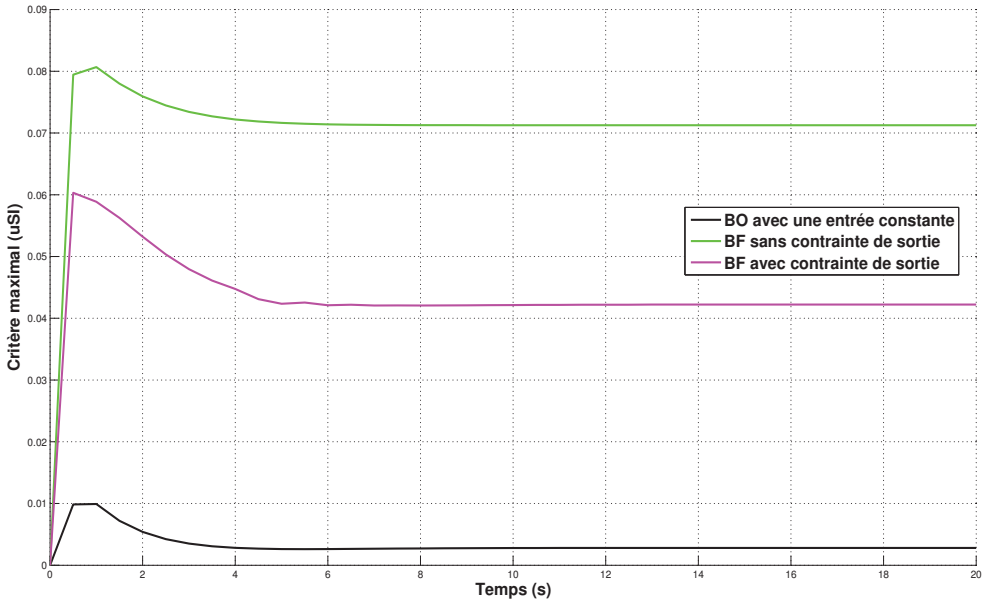
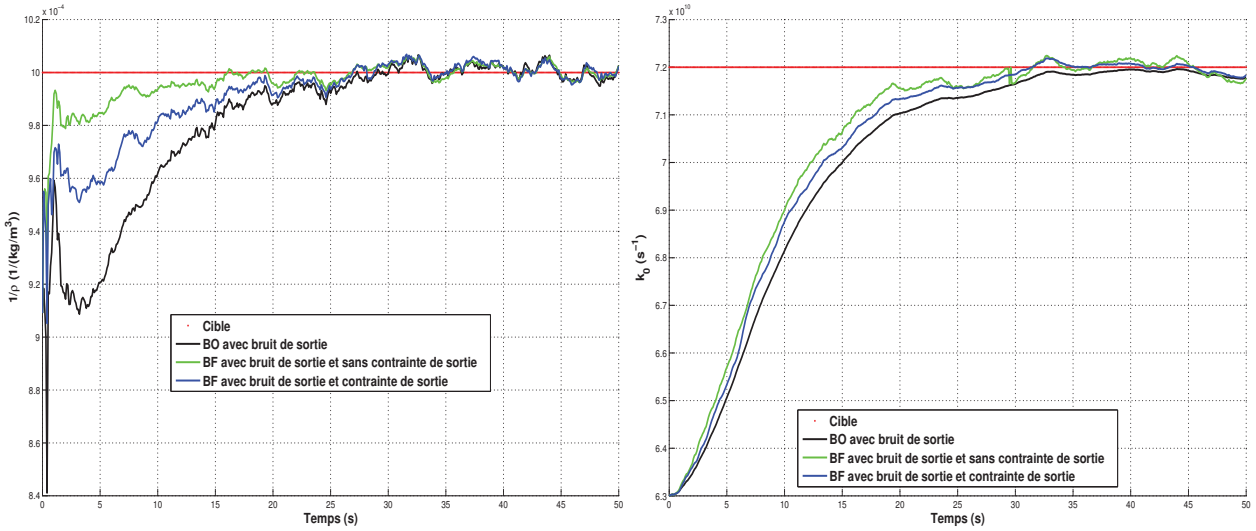


FIGURE 5.14 – RCPA sans bruit : critère E maximal.

La figure 5.13 montre que les sensibilités normalisées (toujours dans [0 1]) sont retardées en boucle ouverte par rapport aux cas en boucle fermée. Par conséquence, nos approches d'identification en boucle fermée permettent de maximiser la richesse des informations contenues dans l'expérience (figure 5.14) pour estimer les paramètres inconnus constants du modèle, avec une bonne précision, plus vite qu'en boucle ouverte et tout en maintenant la sortie dans la région prescrite.

5.3.3.2 Résultats de simulation avec bruit en sortie

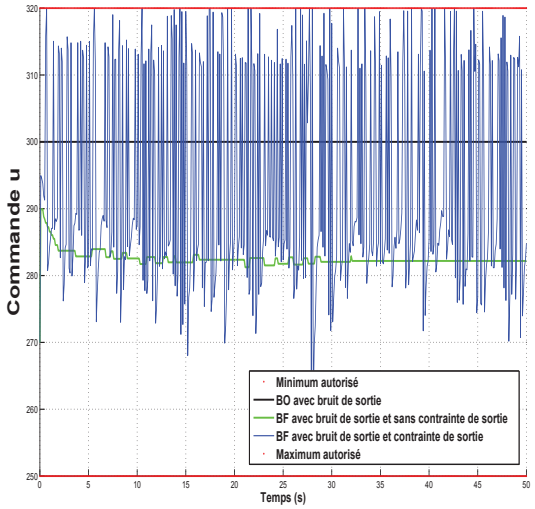
Afin de démontrer la robustesse de l'approche proposée, des bruits gaussiens sont ajoutés dans les sorties du procédé. Trois scénarios différents sont simulés comme dans la section précédente. Les conditions initiales et les valeurs de paramètres d'algorithme restent les mêmes que dans les cas sans bruit de sortie.



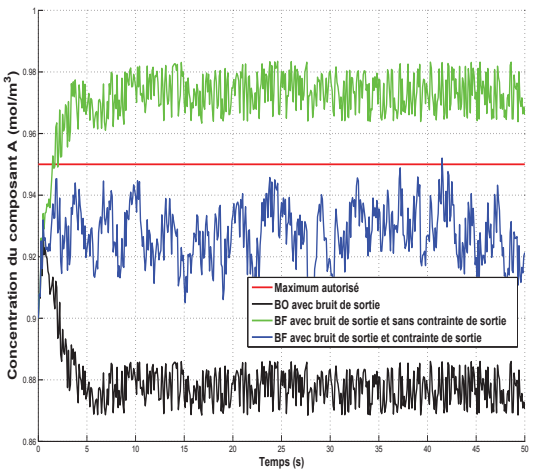
(a) θ_1 : la densité du mélange A-B, $1/\rho$. (b) θ_2 : le facteur pré-exponentiel, k_0.

FIGURE 5.15 – RCPA avec bruit : cibles et estimations des paramètres inconnus du modèle

Les figures 5.15a et 5.15b nous présentent l'estimation des deux paramètres inconnus ($\frac{1}{\rho}$ et k_0) dans ces trois cas. A cause des bruits sur la sortie, les estimations sont plus oscillantes que par rapport au cas sans bruit de sortie. En boucle ouverte, les estimations des 2 paramètres convergent vers leur cible en 30s. Pour les cas en boucle fermée, les estimations des deux paramètres convergent plus rapidement vers leurs cibles qu'en boucle ouverte (entre 17% et 33% plus vite) et avec une meilleure précision. La figure 5.16a montre les commandes appliquées dans les trois cas : 1) en boucle ouverte, la commande appliquée est une constante de $300K$; 2) en boucle fermée sans contrainte de sortie, le profil de la commande optimale augmente du point initial $u(0) = 270K$ et converge autour $282K$ avec un peu d'oscillations ; 3) en boucle fermée avec contrainte de sortie, le profil de la commande optimale est comme un signal de type bang-bang entre $270K$ et $320K$. La limite maximale de sortie est bien respectée dans le cas 3 même s'il y a des bruits injectés dans la sortie y_{p1} (Figure 5.16b). La figure 5.17 compare les sensibilités normalisées dans les trois cas : comme dans les cas sans bruit, les sensibilités en boucle ouverte sont retardées par rapport aux cas en boucle fermée mais avec beaucoup d'oscillations. Le critère de sensibilité (E-optimalité) est bien maximisé par rapport au cas en boucle ouverte (Figure 5.18). A cause de la contrainte de sortie dans le cas 3, le critère maximal est plus bas que dans le cas 2 sans contrainte de sortie. Dans les



(a) u : la température de l'enveloppe de refroidissement, T_c.



(b) y_{p1} : la concentration du composant A.

FIGURE 5.16 – RCPA avec bruit : commande u et sortie mesurée y_{p1} sous contraintes

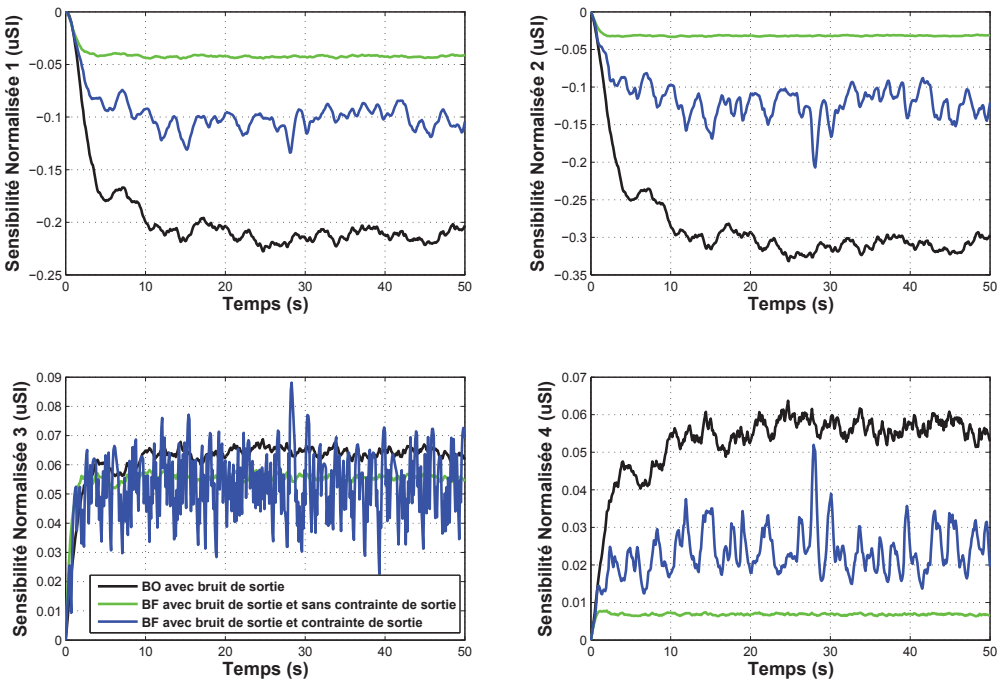


FIGURE 5.17 – RCPA avec bruit : sensibilités normalisés des états du modèle par rapport aux paramètre inconnus.

deux scénarios de simulation en boucle fermée avec le bruit de sortie, les estimations de ces deux paramètres inconnus du modèle sont obtenues avec une bonne précision, ce qui montre bien la robustesse de notre approche d'identification optimale.

Par rapport aux résultats de simulation dans (Zhu et Huang (2011)), la convergence de l'estimation des paramètres avec notre approche est plus rapide. Les résultats de simulation

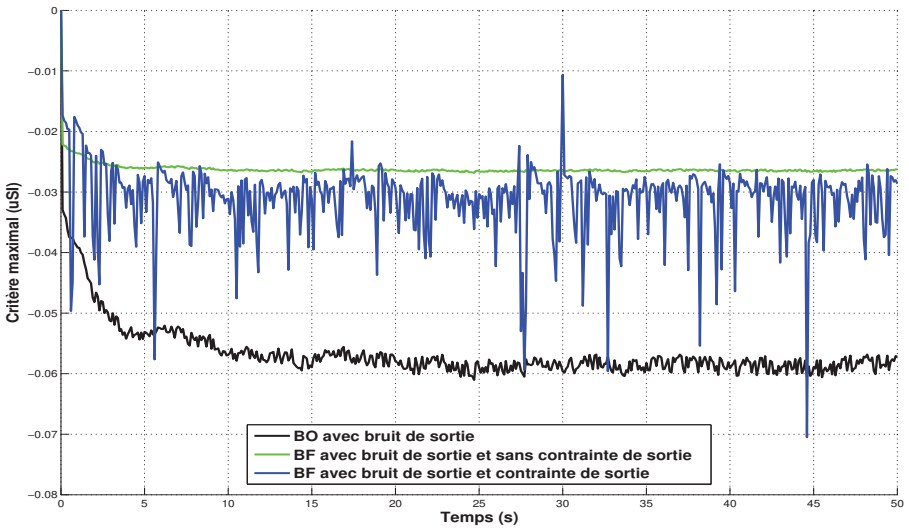


FIGURE 5.18 – RCPA avec bruit : critère E maximal.

(avec ou sans bruit de sortie) nous montrent aussi qu'avec un bon choix d'observateur, la convergence de l'estimation des paramètres est obtenue avec une bonne précision et plus rapidement qu'en boucle ouverte.

5.4 Aile delta

Dans cette section, notre approche d'identification optimale est développée pour un système mécanique instable en boucle ouverte. C'est une aile delta modélisée par un système dynamique non linéaire avec une seule entrée, deux états mesurés et cinq paramètres inconnus. Deux différentes lois de commande seront traitées pour ce cas d'étude pour réaliser conjointement la stabilisation et l'estimation en boucle fermée : d'abord, nous allons utiliser des contraintes fictives de sortie (dont les bornes seront obtenues par essais et erreurs) pour stabiliser le système en boucle fermée. Dans la seconde loi de commande, nous allons modifier le critère initial de manière à prendre en compte la stabilisation du système (donc sans utiliser de contraintes fictives de sortie) par notre approche de type Lyapunov. Finalement, nous comparerons les résultats de simulation de ces deux cas, et étendrons le deuxième cas avec bruit en sortie. Nous comparerons nos résultats à un travail publié dans (Jain et al. (2005)) traitant du problème d'estimation pour le même système.

5.4.1 Modélisation de l'aile delta

Une aile delta est un système mécanique dynamique non linéaire, instable en boucle ouverte, qui dispose d'une seule entrée u, d'un vecteur d'état x mesuré avec deux composantes et d'un vecteur de cinq paramètres constants inconnus θ (Jain et al. (2005)). Le modèle est :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x}_1(t) & = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = \alpha_1\theta_1 x_1(t) + (\alpha_1\theta_2 - \alpha_2)x_2(t)... \\ & ... + \alpha_1\theta_3 x_1^3(t) + \alpha_1\theta_4 x_1^2 x_2(t) + \alpha_1\theta_5 x_1 x_2^2(t) + \alpha_3 u(t), \end{array}\right. \tag{5.23}$$

où α est le vecteur de paramètres constants connus. Les valeurs normalisées des paramètres connus constants et les valeurs cibles des paramètres inconnus obtenus à partir de (Nayfeh et al. (1989)) sont listées dans le tableau 5.11.

Tableau 5.11 – Aile delta : valeurs normalisées des paramètres connus (en haut) et inconnus (en bas).

index	1	2	3
α	0.354	0.001	1

index	1	2	3	4	5
θ	-0.05686	0.03254	0.07334	-0.3597	1.4681

5.4.2 Travaux existants

Dans (Jain et al. (2005)), une méthode d'identification en boucle fermée des cinq paramètres inconnus du modèle est discutée. Un contrôle en boucle fermée est conçu tel que le comportement du système en boucle fermée corresponde à un modèle de référence linéaire du second ordre stable, avec une consigne de référence amortie sinusoïdale.

Une première critique est que les choix de ce modèle et de cette consigne de référence ne sont pas vraiment discutés, en terme de méthodologie. Une seconde critique est que la convergence de l'estimation des deux paramètres de la partie linéaire (θ_1 et θ_2) à leur cible est atteinte, mais que la convergence de l'estimation des trois autres paramètres (θ_3, θ_4 et θ_5) à leur cible est impossible.

5.4.3 Implémentation de notre approche

5.4.3.1 Analyse de stabilité en boucle ouverte

Pour voir l'instabilité de ce système, nous calculons d'abord le vecteur d'état d'équilibre x^0 pour chaque $u^0 \in [u_{min}\ u_{max}] = [-0.01\ 0.01]$ (qui correspond à la plage de valeurs possibles). Ensuite, nous linéarisons le système (5.23) autour les états stationnaires x^0 et les entrées correspondantes u^0 sous le forme :

$$\dot{\delta x}(t) = A(x^0, \theta^*)\delta x(t) + B\delta u(t), \tag{5.24}$$

où δx (resp. δu) est la petite variation de x (resp. u) autour de x^0 (resp. u^0) avec :

$$\begin{cases} A(x^0, \theta^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ A_{21} = \alpha_1\theta_1^* + 3\alpha_1\theta_3^* x_1^{0^2} + 2\alpha_1\theta_4^* x_1^0 x_2^0 + \alpha_1\theta_5^* x_2^{0^2} \\ A_{22} = \alpha_1\theta_2^* - \alpha_2 + \alpha_1\theta_4^* x_1^{0^2} + 2\alpha_1\theta_5^* x_1^0 x_2^0 \\ B = [0\ \alpha_3]^T. \end{cases} \tag{5.25}$$

La figure 5.19 présente chaque couple d'états stationnaires $[x_1^0\ x_2^0]$ et la partie réelle de chaque

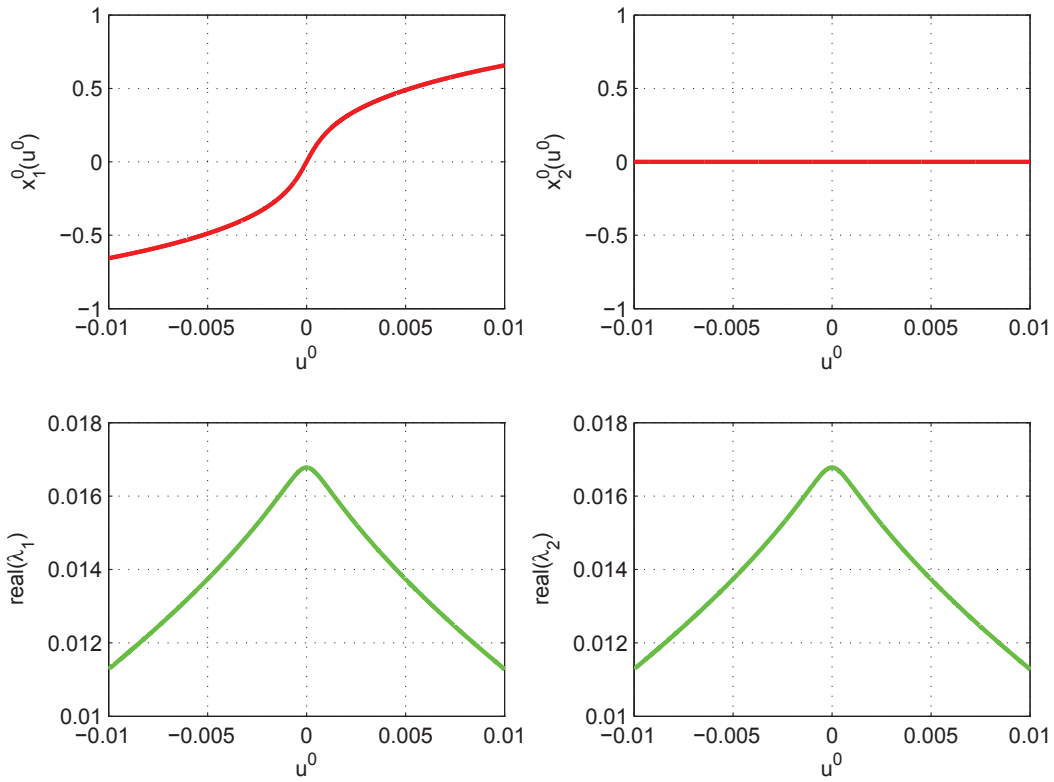


FIGURE 5.19 – Aile delta : états stationnaires x_1^0 (en haut à gauche) et x_2^0 (en haut à droite), la partie réelle de chaque valeur propre $\lambda_1(A)$ (en bas à gauche) et $\lambda_2(A)$ (en bas à droite) pour u^0 dans $[-0.01\ 0.01]$

valeur propre $\lambda_i(A)$ pour l'entrée correspondante u^0. Dans la plage $[-0.01\ 0.01]$ de l'entrée u, les parties réelles de ces deux valeurs propres de la matrice A sont toujours positives, ce qui montre l'instabilité du modèle d'aile delta en boucle ouverte dans notre zone d'utilisation.

5.4.3.2 Étape 2 : Conception de l'observateur

Comme dans (Jain et al. (2005)), les deux états du modèle sont ici mesurés en ligne. Par conséquent, le but de l'observateur est d'estimer en ligne le vecteur de paramètres inconnus constants $\theta_i (i = 1, \cdots, 5)$. Pour ce faire, selon 3.1, le système (5.23) est augmenté par l'équation $\dot{\theta} = 0$. Par conséquent, le modèle augmenté obtenu est un système non linéaire affine en l'état avec injection de sortie sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_a(t) & = & A_a(y(t))x_a(t) + B_a(u(t)) \\ y(t) & = & C_a x_a(t), \end{array} \right. \tag{5.26}$$

où

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} ;\ A_a(y(t)) = \begin{bmatrix} 0_{2\times 1} & A(y(t)) \\ 0_{5\times 1} & 0_{5\times 6} \end{bmatrix} ;\ A^T(y(t)) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 y_1(t) \\ 0 & \alpha_1 y_2(t) \\ 0 & \alpha_1 y_1^3(t) \\ 0 & \alpha_1 y_1^2(t) y_2(t) \\ 0 & \alpha_1 y_1(t) y_2^2(t) \end{bmatrix} ;$$

$$B_a(u(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha_3 u(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ;\ C_a^T = \begin{bmatrix} I_{2\times 2} \\ 0_{5\times 2} \end{bmatrix} ,$$

où $I_{2\times 2}$ est une matrice identité de dimension 2×2, $0_{a\times b}$ est une matrice de zéros avec une dimension $a \times b$. Il est évident que le système est observable dans le sens de la condition du rang dans le domaine d'application (si $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$). Alors un observateur à grand gain sur la base de l'état augmenté $x_a(t)$ peut être conçu comme suit (voir Hammouri et Morales (1990) et Besançon (2007) pour plus de détails).

Théorème 5.1. *Supposons que* $v(t) := C_a \mathcal{X}_a(t, x_a(0))$ *est régulièrement persistante*[3] *pour*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_a(t) & = & A_a(v(t))x_a(t) + B_a(u(t)) \\ y(t) & = & C_a x_a(t), \end{array} \right. \tag{5.27}$$

avec n'importe quel $x_a(0)$*, le système admet un observateur exponentiel de la forme :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_a(t) = A_a(y(t))\hat{x}_a(t) + B_a(u(t)) - RS_\mu(t)^{-1} C_a^T (C_a \hat{x}_a(t) - y_p(t)) \\ \dot{S}_\mu(t) = -\mu S_\mu(t) - A_a(y(t))^T S_\mu(t) - S_\mu(t) A_a(y(t)) + C_a^T \Gamma C_a, \end{array} \right. \tag{5.28}$$

où S_μ *est une matrice* 7×7 *SDP, la constante positive* $\mu > 0$ *et* $\Gamma > 1$ *sont des paramètres d'observateur à régler.*

[3] Les entrées régulièrement persistantes pour les systèmes affines en l'état sont celles qui font de ces systèmes des systèmes linéaires temps variant et uniformément observables dans le sens de Kalman.

5.4.3.3 Étape 3 : Modèle de sensibilité

Basé sur le modèle (5.23), nous décrivons le modèle de sensibilité comme les équations suivantes :

$$\begin{cases}
\dot{x}_{1\theta_1} = & x_{2\theta_1} \\
\dot{x}_{1\theta_2} = & x_{2\theta_2} \\
\dot{x}_{1\theta_3} = & x_{2\theta_3} \\
\dot{x}_{1\theta_4} = & x_{2\theta_4} \\
\dot{x}_{1\theta_5} = & x_{2\theta_5} \\
\dot{x}_{2\theta_1} = & \alpha_1(x_1 + \theta_1 x_{1\theta_1}) + (\alpha_1\theta_2 - \alpha_2)x_{2\theta_1} + 3\alpha_1\theta_3 x_1^2 x_{1\theta_1} ... \\
& ... + \alpha_1\theta_4(2x_1 x_{1\theta_1} x_2 + x_1^2 x_{2\theta_1}) + \alpha_1\theta_5(x_{1\theta_1}x_2^2 + 2x_1 x_2 x_{2\theta_1}) \\
\dot{x}_{2\theta_2} = & \alpha_1\theta_1 x_{1\theta_2} + (\alpha_1(x_2 + (\theta_2 x_{2\theta_2}) - \alpha_2 x_{2\theta_2})) + 3\alpha_1\theta_3 x_1^2 x_{1\theta_2} ... \\
& ... + \alpha_1\theta_4(2x_1 x_{1\theta_2} x_2 + x_1^2 x_{2\theta_2}) + \alpha_1\theta_5(x_{1\theta_2}x_2^2 + 2x_1 x_2 x_{2\theta_2}) \\
\dot{x}_{2\theta_3} = & \alpha_1\theta_1 x_{1\theta_3} + (\alpha_1\theta_2 - \alpha_2)x_{2\theta_3} + \alpha_1(x_1^3 + 3\theta_3 x_1^2 x_{1\theta_3}) ... \\
& ... + \alpha_1\theta_4(2x_1 x_{1\theta_3} x_2 + x_1^2 x_{2\theta_3}) + \alpha_1\theta_5(x_{1\theta_3}x_2^2 + 2x_1 x_2 x_{2\theta_3}) \\
\dot{x}_{2\theta_4} = & \alpha_1\theta_1 x_{1\theta_4} + (\alpha_1\theta_2 - \alpha_2)x_{2\theta_4} + 3\alpha_1\theta_3 x_1^2 x_{1\theta_4} ... \\
& ... + \alpha_1(x_1^2 x_2 + \theta_4(2x_{1\theta_4} x_1 x_2 + x_1^2 x_{2\theta_4})) + \alpha_1\theta_5(x_{1\theta_4}x_2^2 + 2x_1 x_2 x_{2\theta_4}) \\
\dot{x}_{2\theta_5} = & \alpha_1\theta_1 x_{1\theta_5} + (\alpha_1\theta_2 - \alpha_2)x_{2\theta_5} + 3\alpha_1\theta_3 x_1^2 x_{1\theta_5} + ... \\
& ... \alpha_1\theta_4(2x_{1\theta_5} x_1 x_2 + x_1^2 x_{2\theta_5}) + \alpha_1(x_1 x_2^2 + \theta_5(x_{1\theta_5}x_2^2 + 2x_1 x_2 x_{2\theta_5})).
\end{cases} \tag{5.29}$$

5.4.3.4 Étape 4 : synthèse de la commande optimale

a) Stabilisation via des contraintes fictives

Afin de stabiliser le comportement du procédé en boucle fermée, basé sur l'analyse de comportement instable du procédé en boucle ouverte, deux contraintes de sortie supplémentaires (3.16) sont imposées :

$$-0.5 \leq y_{p1}(t) \leq 0.5. \tag{5.30}$$

Le réglage des limites supérieures et inférieures dans (5.30) est déterminé par essais et erreurs avec des simulations : les bornes sont prises grandes (en valeur absolue) ce qui mène à l'instabilité, puis réduites manuellement de simulation en simulation jusqu'à ce que le système soit stabilisé en boucle fermée.

b) Stabilisation via une loi de commande locale de type Lyapunov

Dans (3.22), la fonction de coût est établie en deux parties : le critère de sensibilité et le critère de stabilité de Lyapunov. Les sorties du modèle de sensibilité sont normalisées en utilisant la fonction de sensibilité (3.5) afin d'établir le critère de sensibilité (3.21) qui maximise les informations contenues dans l'expérience. En même temps, une analyse de stabilité de Lyapunov est également nécessaire pour stabiliser le système en boucle fermée. Afin de déterminer la fonction de Lyapunov (3.21), nous considérons d'abord le système (5.23) comme un système quasi-linéaire dans lequel :

$$\begin{cases}
\text{à l'instant courant } k, \text{ sur l'horizon de prédiction } N_p : \\
A(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_1\hat{\theta}_1(k) & \alpha_1\hat{\theta}_2(k) - \alpha_2 \end{bmatrix} \\
B(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \\
g(\hat{x}, k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1\hat{\theta}_3(k)\hat{x}_1^3(k) + \alpha_1\hat{\theta}_4(k)\hat{x}_1^2(k)\hat{x}_2(k) ... \\ ... + \alpha_1\hat{\theta}_5(k)\hat{x}_1(k)\hat{x}_2^2(k) \end{bmatrix},
\end{cases} \tag{5.31}$$

où le vecteur de fonction $g(x,k)$ est supposé comme une « petite perturbation » du système, ce qui respecte la condition du système non-autonome quasi-linéaire. Puis en fonction de la matrice constante $A(k)$ et $B(k)$ sur l'horizon de prédiction, la matrice SDP $P(k)$ est calculée en résolvant l'équation algébrique de Riccati en temps continu (3.20). Enfin, en utilisant la matrice $P(k)$ calculée et la prédiction des états du modèle $x(l)$, la fonction de Lyapunov est obtenue. Le choix de la valeur de pondération β pour ces deux critères est discuté plus loin.

5.4.4 Résultats et discussion

Toutes les simulations sont effectuées dans les conditions suivantes où toutes les valeurs sont, pour rappel, sans dimension[4] :

$$\begin{cases} \text{contraintes sur l'entrée : } -0.01 \leq u(t) \leq 0.01 \\ \text{horizon de prédiction : } N_p = 5 \\ \text{temps d'échantillonnage : } T_s = 1(-) \\ \text{paramètres de réglage de l'observateur : } \mu = 0.03 \text{ et } \Gamma = 2. \end{cases} \tag{5.32}$$

Les erreurs initiales d'estimation pour θ_i sont listées dans le tableau 5.12 : afin d'évaluer la robustesse de l'approche proposée, de grandes erreurs initiales dans l'estimation de θ_i sont introduites, même avec des erreurs de signe.

Tableau 5.12 – Aile delta : erreurs initiales d'estimation des paramètres.

θ	1	2	3	4	5
Erreur initiale (%)	80	-200	200	80	-200

5.4.4.1 Méthode avec contraintes fictives

Dans un premier temps, on utilise ici la méthode de commande par stabilisation avec contraintes fictives. Comme on peut le voir, les deux objectifs sont atteints avec cette loi de commande : le contrôle optimal en boucle fermée (Figure 5.20) permet de stabiliser le comportement de l'aile delta (voir les deux sorties dans la figure 5.21), tandis que les 5 paramètres estimés $\hat{\theta}_i$ convergent vers leur cible entre les temps 300 et 600 : dans les figures 5.22 et 5.23, les cibles de ces cinq paramètres et leurs estimations sont normalisées (donc, 1 est la cible). Basé sur la valeur moyenne des 60 dernières valeurs, l'erreur finale de l'estimation de $\hat{\theta}_i$ est largement réduite (voir le tableau 5.13) des erreurs initiales de quelques dizaines ou quelques centaines de % à environ 1% au final. Par conséquent, tout les paramètres inconnus du modèle sont estimés avec une bonne précision, ce qui n'était pas du tout le cas dans (Jain et al. (2005)).

Tableau 5.13 – Aile delta : erreur finale d'estimation des paramètres : méthode à contraintes fictives.

θ	1	2	3	4	5
Erreur finale (%)	0.1	0.4	0.8	-0.26	-2.88

[4]Le temps, l'entrée et les états sont également sans dimension.

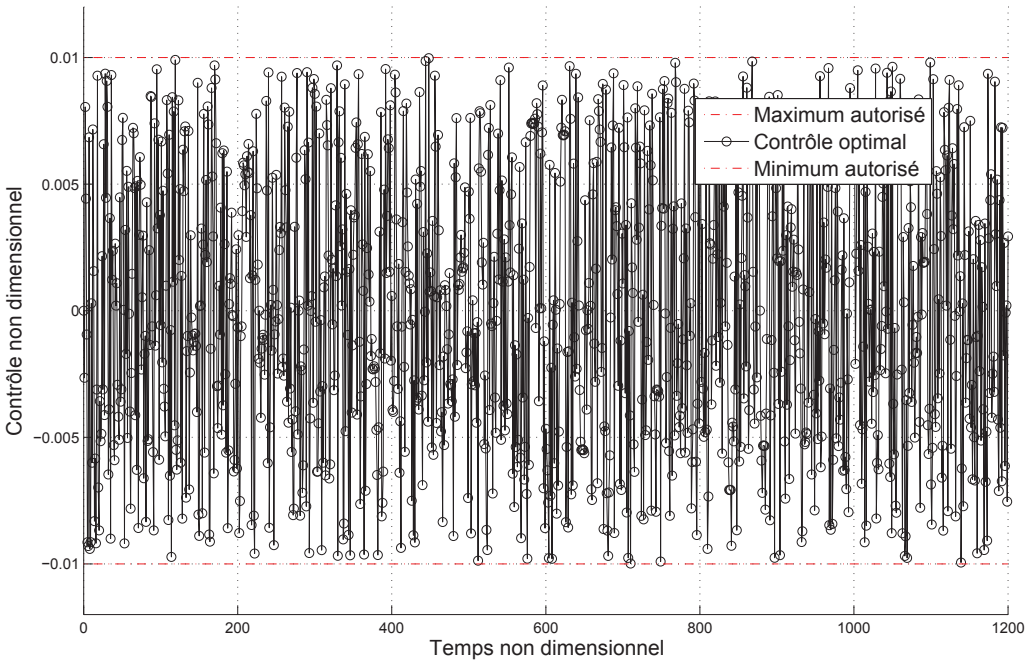


FIGURE 5.20 – Aile delta : contrôle optimal en boucle fermée avec contraintes fictives de sortie

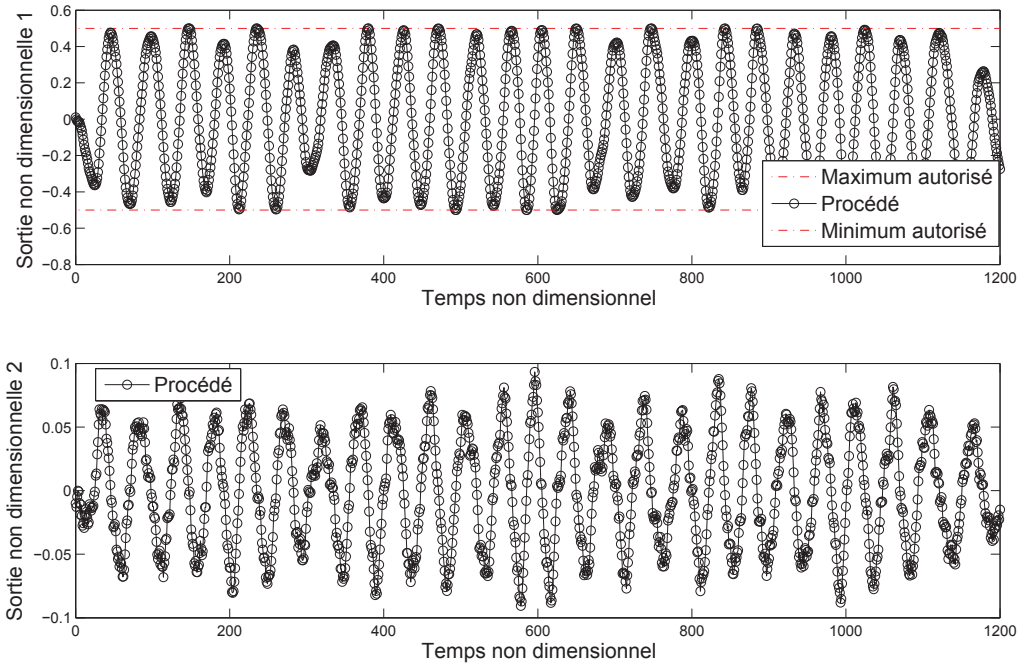


FIGURE 5.21 – Aile delta : sorties du procédé (en haut : y_{p1}, en bas : y_{p2}) en boucle fermée avec contraintes fictives de sortie

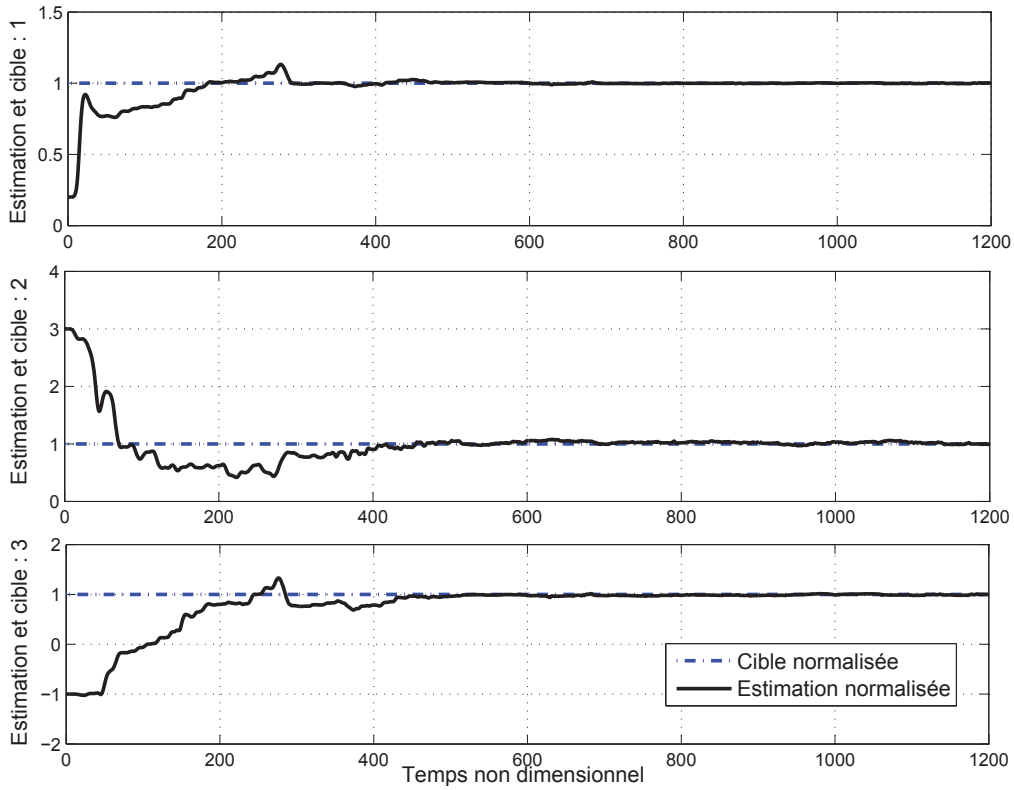


FIGURE 5.22 – Aile delta : estimation des paramètres (du haut vers le bas : θ_1, θ_2 et θ_3) en boucle fermée avec contraintes fictives de sortie

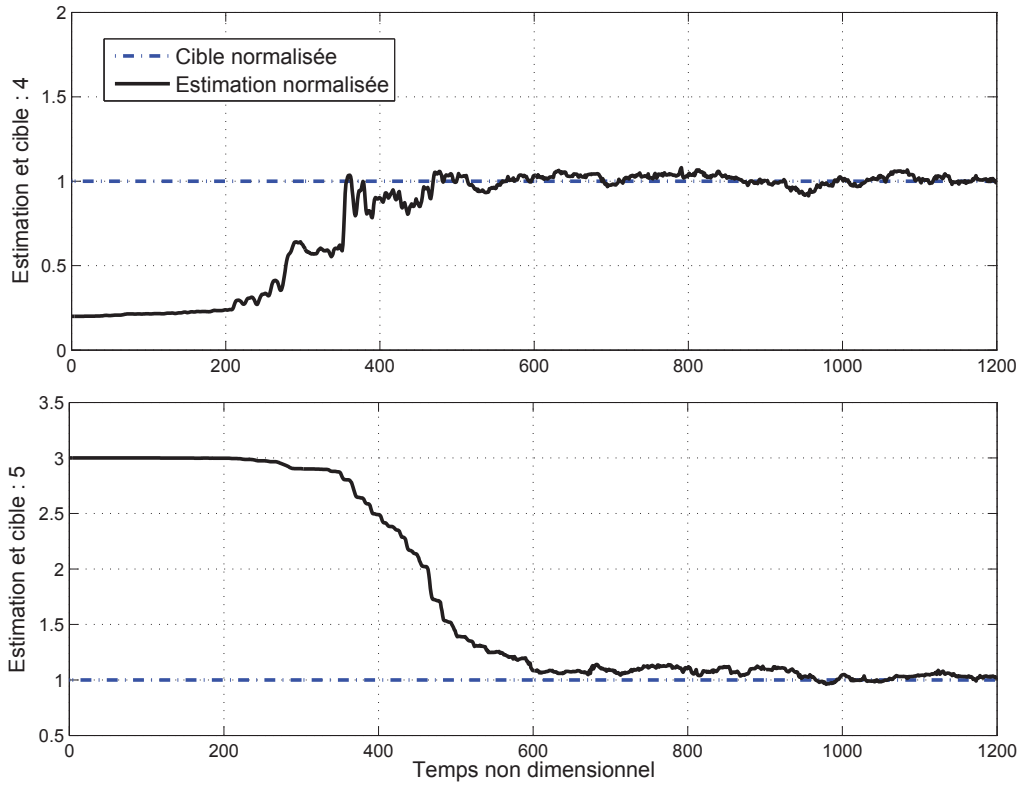


FIGURE 5.23 – Aile delta : estimation des paramètres (en haut : θ_4, en bas : θ_5) en boucle fermée avec contraintes fictives de sortie

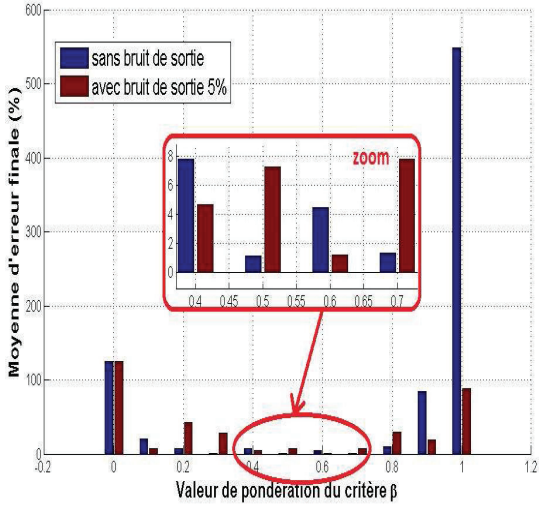
5.4.4.2 Méthode avec l'approche de type Lyapunov : sans ou avec bruit de sortie

Dans un second temps, on utilise ici la méthode de commande par stabilisation avec l'approche de type Lyapunov. La valeur de pondération β vise à réaliser un équilibre entre la fonction de coût de sensibilité (permettant d'obtenir la convergence de l'estimation des cinq paramètres inconnus) et la stabilisation du système en boucle fermée. Afin d'étudier les effets de la valeur de pondération β, une série de simulations avec des valeurs différentes de β est présentée pour comparer en même temps la convergence de l'estimation des paramètres inconnus à leur cible et la stabilité en boucle fermée. Toutes les simulations sont effectuées dans les conditions suivantes où toutes les valeurs sont toujours sans dimension[5] :

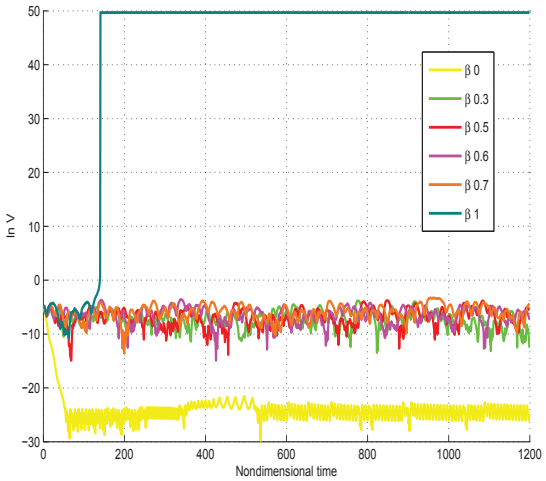
$$\begin{cases} \text{paramètres dans l'équation de Riccati : } Q = 0.01 I_{2\times 2} \text{ et } R = I \\ \text{poids dans la fonction de coût : } w_\theta = 10^{-14} \text{ et } w_L = 1. \end{cases} \tag{5.33}$$

Deux cas principaux sont étudiés pour montrer la robustesse de l'approche proposée d'identification optimale en ligne en boucle fermée :

- Cas 1 : contrôle optimal en boucle fermée pour l'identification en ligne défini dans la section 3.2, avec des contraintes d'entrée, sans bruit.
- Cas 2 : contrôle optimal en boucle fermée pour l'identification en ligne défini dans la section 3.2, avec des contraintes d'entrée, avec un bruit gaussien sur les sorties mesurées.



(a) La norme des erreurs finales d'estimation pour différents β



(b) Variation de lnV pour différents β

FIGURE 5.24 – Aile delta : analyse de l'influence de β

Basées sur les mêmes conditions initiales, plusieurs simulations sont lancées avec des valeurs différentes de β (de 0 à 1) pour concevoir l'entrée optimale et pour estimer les cinq paramètres inconnus du modèle. Le tableau 5.14 (resp. figure 5.24a) présente les erreurs moyennes (resp. la norme de la valeur moyenne) des 60 dernières valeurs de chacune des cinq estimations de paramètres dans les deux cas (sans et avec bruit de sorties).
Comme nous pouvons le voir ici, dans le cas sans bruit, pour plusieurs valeurs de pondération

[5]Le temps, l'entrée et les états sont également sans dimension.

β (c.-à-d. 0.3, 0.5, 0.6 et 0.7), et en dépit des grandes erreurs initiales d'estimation, l'erreur finale d'estimation des θ_i tend vers zéro (l'erreur maximale d'estimation finale est inférieure à 9% (souvent moins de 1%) et le minimum est inférieur à 1%), ce qui signifie que la convergence d'estimation des cinq paramètres à leur cible est atteinte, ce qui n'était pas du tout le cas dans (Jain et al. (2005)). Pour la valeur de β entre 0.2 et 0.8 dans le cas sans bruit, nous avons une robustesse suffisante pour garantir en même temps l'estimation des paramètres et la stabilité en boucle fermée. Dans le cas avec bruit, le tableau 5.14 et la figure 5.24a montrent que pour $\beta = 0.6$, l'estimation des paramètres la plus précise est obtenue : les 5 erreurs finales d'estimation sont inférieures à 3% (donc moins bien que dans le cas sans bruit).
Concernant le compromis stabilité-estimation, plus la valeur de pondération s'approche des limites 0 ou 1, plus les erreurs d'estimation des paramètres sont grandes. Pour $\beta = 0$ (fonction de Lyapunov seulement) dans les deux cas, l'entrée u et l'état de modèle x tendent vers zéro, mais les informations pour estimer les paramètres inconnus sont insuffisantes : la convergence de l'estimation des deux premiers paramètres de la partie linéaire est obtenue, mais celle des trois autres paramètres de la partie non linéaire n'est pas possible (voir dans le tableau 5.14). Dans l'autre extrême, pour $\beta \geqslant 0.8$ dans le cas sans bruit ou pour $\beta \geqslant 0.7$ dans le cas bruité (le critère de sensibilité est plus important), la réponse du système est totalement divergente. En d'autres termes, le système est instable en boucle fermée, de sorte que l'estimation des paramètres est impossible. La figure 5.24b montre la valeur logarithmique de la fonction de Lyapunov V pour des différentes valeurs de β dans le cas 1 sans bruit. Il peut être remarqué que la fonction de Lyapunov décroit avec β, et elle a une valeur plus petite pour $\beta = 0$, ce qui signifie que le système est stabilisé en boucle fermée tandis que la fonction de Lyapunov est considérée comme 100 % de la fonction de coût.

Tableau 5.14 – Aile delta : erreurs moyennes (en %) finales d'estimation des paramètres et stabilité des états (en gras, le meilleur compromis) : méthode Lyapunov.

$\beta \setminus \theta$	1	2	3	4	5	x_1	x_2
0 sans bruit	−0.003	8.26	179.36	79.38	−200.03	stable	stable
0 avec bruit	0.46	−13.12	178.06	79.02	−200.04	stable	stable
0.3 sans bruit	0.01	2.34	0.22	−1.26	−0.94	stable	stable
0.3 avec bruit	0.01	1.65	16.01	4.53	−61.98	stable	stable
0.5 sans bruit	**-0.06**	**0.39**	**-0.53**	**1.42**	**1.97**	**stable**	**stable**
0.5 avec bruit	0.40	6.89	4.09	13.70	−3.86	stable	stable
0.6 sans bruit	−0.15	3.41	0.18	8.16	−4.73	stable	stable
0.6 avec bruit	**-0.05**	**-1.42**	**-0.06**	**-2.11**	**0.66**	**stable**	**stable**
0.7 sans bruit	0.09	−2.16	0.04	−0.45	1.89	stable	stable
0.7 avec bruit	−0.27	15.99	1.80	2.42	−6.42	instable	instable
0.8 sans bruit	1.40	8.14	3.07	0.24	−18.63	instable	instable
0.8 avec bruit	1.88	−19.29	8.45	1.88	−63.04	instable	instable
1 sans bruit	358.94	−249.87	791.70	826.91	21.84	instable	instable
1 avec bruit	48.01	120.25	49.54	−16.11	−140.24	instable	instable

5.4.4.3 Méthode avec l'approche de type Lyapunov : $\beta = 0.6$ et bruit en sortie

Toujours avec la méthode avec l'approche de type Lyapunov, on rajoute maintenant un bruit gaussien sur les sorties mesurées, uniquement pour $\beta = 0.6$. La figure 5.25 présente le contrôle optimal en boucle fermée sous les contraintes d'entrée qui stabilise l'aile delta comme montré dans la figure 5.26. La sortie y_{p_1} est stabilisée dans la zone entre -0.6 et 0.8 (ce qui est plus grand que dans le cas avec design de contraintes fictives par essais et erreurs), et la sortie y_{p_2} est maintenue entre -0.1 et 0.1. Dans les figures 5.27 et 5.28, la cible des cinq paramètres et l'évolution des estimations en temps sont normalisées (d'où, 1 est la cible). Le paramètre θ_1 atteint sa cible en 200, le paramètre θ_2 atteint sa cible avant 400 (Figure

5.27), et les trois autres paramètres convergent vers leurs cibles autour de 500 (Figure 5.28). Par conséquent, notre contrôle optimal stabilise le système en boucle fermée et permet aussi d'estimer l'ensemble des cinq paramètres inconnus avec une grande précision.

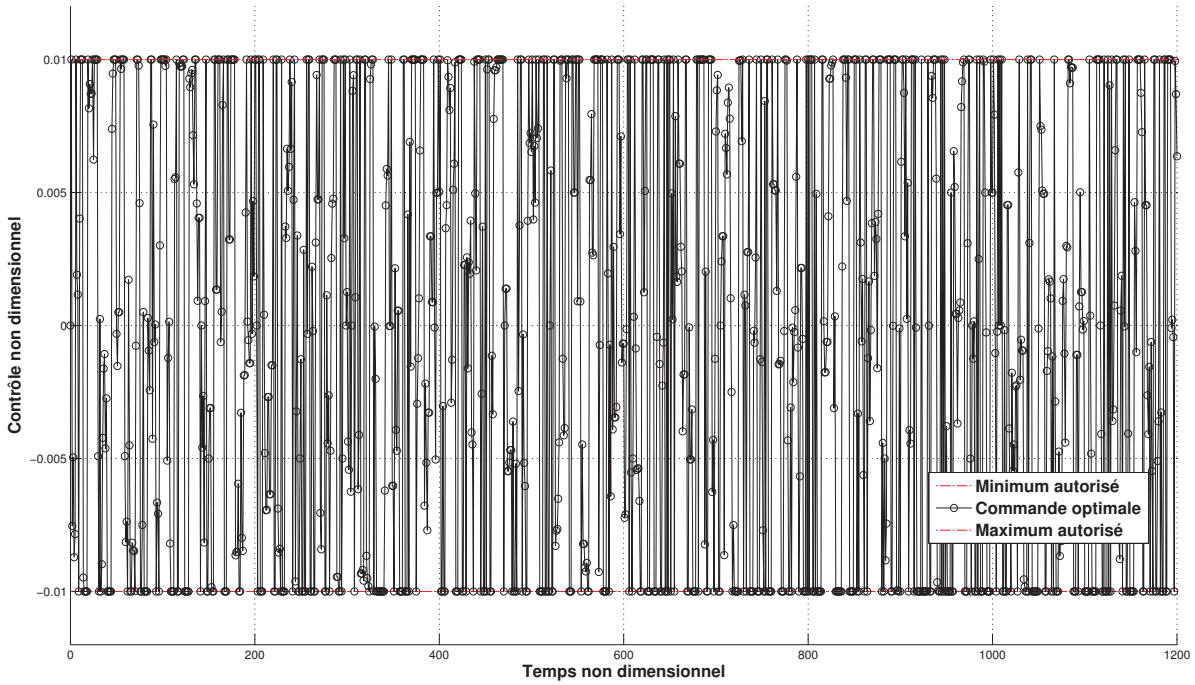


FIGURE 5.25 – Aile delta : contrôle optimal pour $\beta = 0.5$ avec bruit de sortie

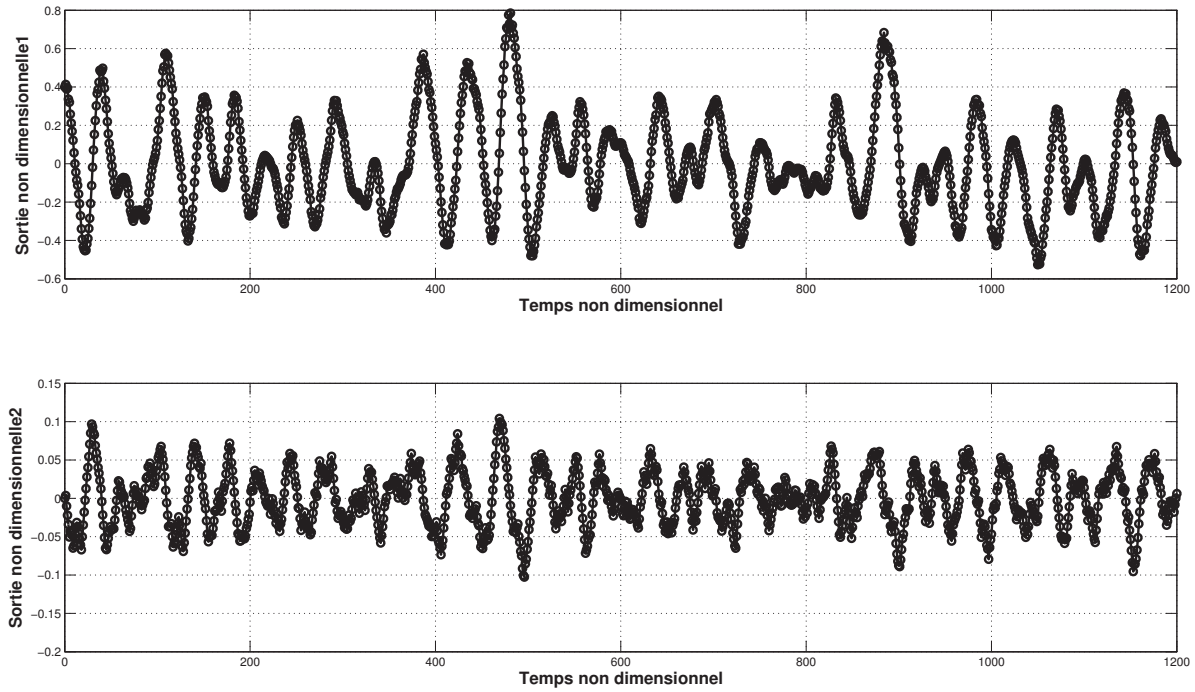


FIGURE 5.26 – Aile delta : sorties du procédé (en haut : y_{p1}, en bas : y_{p2}) pour $\beta = 0.5$ avec bruit de sortie

Par rapport aux résultats de simulation avec la loi de commande sous contraintes fictives, l'estimation des cinq paramètres avec l'approche de type Lyapunov se fait dans des temps

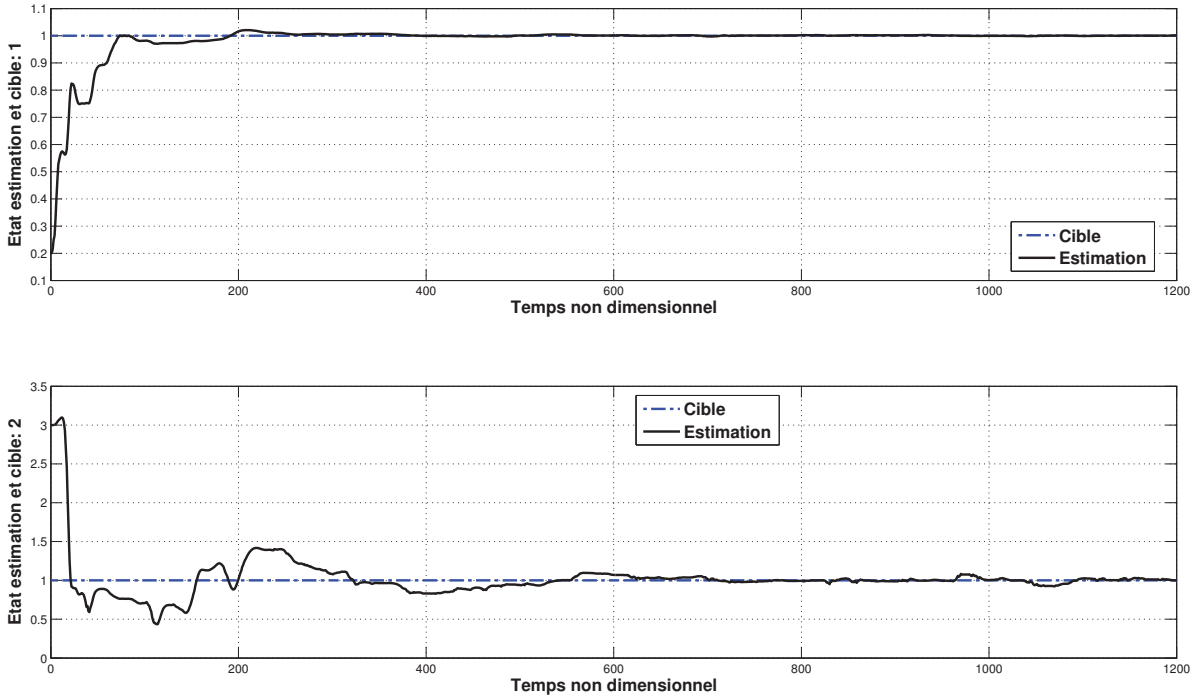


FIGURE 5.27 – Aile delta : estimation des paramètres (en haut : θ_1, en bas : θ_2) pour $\beta = 0.5$ avec bruit de sortie

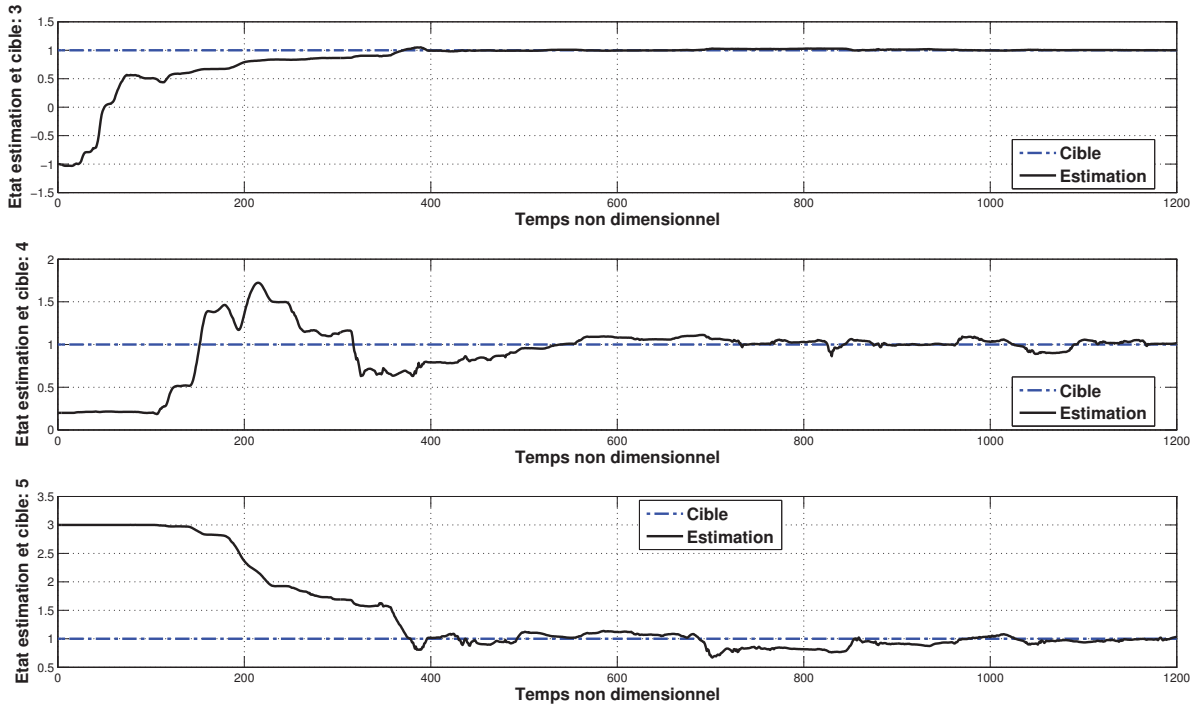


FIGURE 5.28 – Aile delta : estimation des paramètres (du haut vers le bas : θ_3, θ_4 et θ_5) pour $\beta = 0.5$ avec bruit de sortie

similaires, voire un peu plus vite. Ainsi, et contrairement à (Jain et al. (2005)) la bonne précision de l'estimation des cinq paramètres est possible via nos deux méthodes générales, même s'il y a des bruits injectés dans les sorties (voir dans les tableaux 5.13 et 5.14).

Conclusion. *Dans ce chapitre, nous avons souhaité évaluer les performances des approches sur une large classe de systèmes non linéaires. Pour ce faire, quatre cas d'étude, représentatifs des domaines variés de l'industrie, ont été discutés. Le premier exemple a été utilisé pour évaluer l'approche explicite d'identification pour le système linéaire du* 1^{er} *ordre. L'approche générale proposée pour l'identification optimale en boucle fermée a été illustrée par deux applications en génie des procédés : un bioprocédé et un réacteur continu parfaitement agité. Dans l'exemple du bioprocédé, une méthodologie pour choisir le meilleur critère de sensibilité a été présentée. Enfin, un système mécanique non linéaire instable en boucle ouverte, a été utilisé pour évaluer notre approche couplant identification et stabilisation. Pour ces deux derniers problèmes, nos résultats d'estimation ont été meilleurs en termes de rapidité ou de précision par rapport à des travaux existants. Dans les différents cas étudiés, la robustesse de notre approche a été démontrée par les résultats de simulation en présence de bruits de mesures et des contraintes d'entrée-sortie.*

Conclusions et perspectives

Cette thèse a permis de développer une approche d'identification optimale en boucle fermée pour les systèmes dynamiques non linéaires (ou linéaires) multi-variables. Cette approche a permis de coupler, en ligne et en boucle fermée, l'identification des paramètres inconnus du modèle, avec le design d'une unique expérience optimale. Pour cela, nous nous sommes basés sur la stratégie de commande prédictive non linéaire et sur la théorie des observateurs. La commande optimale synthétisée en boucle fermée est le résultat de la maximisation, sous contraintes d'exploitation, d'une fonction coût basée sur la propriété de sensibilité couplée avec un observateur non linéaire. Ce dernier a permis, pendant cette unique expérience, d'estimer en ligne les paramètres constants et initialement inconnus du modèle.

Dans cette approche, une formulation générale du problème d'identification optimale sous contraintes pour les systèmes dynamiques non linéaires a été proposée. Trois critères de sensibilité issues de la matrice d'information Fisher ont été étudiés dans ce travail : E-optimalité, D-optimalité et A-optimalité. Une application à un bioprocédé a été utilisée pour montrer une méthodologie de choix du critère le plus adapté pour un problème particulier.

La stratégie de commande prédictive non linéaire a été engagée pour résoudre le problème d'optimisation sous contraintes d'exploitation. Des contraintes d'entrée et de sortie ont été posées. La prise en compte de ces contraintes d'exploitation est très importante pour rendre l'implémentation de telles approches d'identification paramétrique réalisable sur le procédé réel : non seulement pour respecter des limitations physiques, mais aussi pour la considération de la sécurité du procédé. Dans tous les cas d'étude présentés ici, ces contraintes ont bien été respectées et les paramètres constants et inconnus ont été estimés avec une bonne précision. Les exemples ont montré qu'en rajoutant de nouvelles contraintes sur le procédé, cela réduit la sensibilité des mesures par rapport aux paramètres inconnus à estimer. Ceci a pour effet d'avoir une moins bonne qualité de l'estimation (notamment en terme de temps de convergence de l'observateur).

Une extension de la loi de commande dans notre approche a été proposée spécifiquement pour identifier les paramètres inconnus d'un système dynamique non linéaire instable en boucle ouverte. Afin de garantir la stabilité du système en boucle fermée, deux approches ont été proposées : la première utilise des contraintes fictives de sortie, généralement générées par essais-erreurs, pour stabiliser le comportement du procédé dans une zone spécifique. La seconde est basée sur une analyse de stabilité de type Lyapunov intégrée dans le problème d'optimisation pour la synthèse de la commande optimale. Pour cet objectif, une fonction de coût dual a été formulée à base du critère de sensibilité et d'un fonction de Lyapunov locale, menant à une fonction coût bi-objectif. Avec cette nouvelle approche d'identification, les entrées optimales sont calculées pour maximiser les informations contenues dans l'expérience et en même temps stabiliser le système en boucle fermée. Un exemple mécanique (une

aile delta) instable en boucle ouverte a été utilisé pour évaluer cette nouvelle approche. L'estimation des cinq paramètres, initialement inconnus du modèle, avec une bonne précision et la stabilisation en boucle fermée ont montré le succès et les avantages de cette nouvelle approche sur des travaux précédemment publiés.

L'approche d'identification en boucle fermée proposée initialement nécessite une optimisation numérique en ligne. Néanmoins, pour les systèmes linéaires du 1er ordre, dans le cas mono-entrée, mono-sortie et avec un seul paramètre inconnu constant (la constante de temps) à estimer, un contrôleur explicite bang-bang a été proposé pour l'estimation de la constante de temps. Cette conception d'entrée a reposé sur un observateur (résolu en ligne avec l'entrée et la sortie mesurée) et sur un problème de commande prédictive sous contraintes, dont la loi optimale a été obtenue explicitement hors ligne. Par conséquent, le coût de calcul en ligne a été largement réduit car il ne concerne principalement que l'intégration de l'observateur.

Enfin, la qualité de l'estimation dépend fortement de la robustesse d'un observateur surtout lorsqu'il y a des bruits sur les mesures ou/et des incertitudes sur le modèle. Par conséquent, nous avons formulé le problème du choix de l'entrée optimale pour améliorer l'estimation des états ou/et paramètres d'une autre manière. En effet, dans le cas des systèmes non linéaires affines en l'état, nous avons montré que par le choix d'un critère approprié, l'entrée optimale et le paramètre de réglage qui améliorent les performances de l'observateur peuvent être calculés. La robustesse de notre approche a été démontrée sur un cas du procédé chimique (un réacteur continu parfaitement agité) avec des bruits sur les sorties. Une synthèse d'observateurs en cascade dans l'approche proposée a été utilisée pour atténuer l'impact du bruit et pour estimer deux paramètres inconnus avec une bonne précision et une bonne vitesse de convergence.

Les différentes simulations montrées lors de ce travail ont été réalisées sous Matlab, via notre logiciel ODOE4OPE. Ce logiciel, qui a été créé au LAGEP en 2012 (avant le début de cette thèse), a évolué dans cette thèse pour donner lieu à une version qui se veut adaptable à tout type de structure de modèle de procédé choisi via des codes sources faciles d'utilisation.

Plusieurs directions peuvent être envisagées comme suite aux travaux de cette thèse et peuvent se résumer comme suit :

- Développer une approche multi-critères avec divers coûts (consommation de produits, opératoire, ...) associés à la fonction coût bi-objectif actuelle liée à l'identification paramétrique et à la stabilisation locale.

- Continuer à étudier plus formellement le lien entre commande, grammien d'observabilité et matrice de sensibilité. Et particulièrement, reformuler la notion de robustesse développée dans le chapitre 4 pour réaliser l'optimisation d'un critère en ligne pour déterminer l'entrée et les paramètres de réglage de l'observateur.

- Développer l'approche pour les systèmes dynamiques non linéaires multi-entrées, mais avec des paramètres inconnus mais variant dans le temps.

- Voir dans quelle mesure l'utilisation des sensibilités du vecteur d'état complet du modèle par rapport à lui-même modifie et peut améliorer notre approche d'identification via les observateurs.

- Continuer à développer le logiciel ODOE4OPE. Une nouvelle version du logiciel avec l'interface GUI pourra être crée.

- Enfin, valider expérimentalement les approches proposées sur un procédé réel au LAGEP (c.f. un post doctorant actuellement en cours), et puis sur un procédé plus industriel.

Bibliographie

M. Alamir. Optimization-based nonlinear observers revisited. *International Journal of Control*, 72 :1204–1217, 1999.

M. Alamir. Fast NMPC : A reality-steered paradigm : Key properties of fast NMPC algorithms. In *Proceedings of European Control Conference (ECC)*, pages 2472–2477, Strasbourg, France, 2014.

T. Barz, D. C. L. Cárdenas, H. Arellano-Garcia, et G. Wozny. Experimental evaluation of an approach to online redesign of experiments for parameter determination. *AIChE Journal*, 59 :1981–1995, 2013.

T. Basar et P. Bernhard. *H∞ Optimal Control and Related Minimax Design Problem*. Boston-Basel-Berlin, 1995.

R. Bellman et K.J. Åström. On structural identifiability. *Mathematical Biosciences*, 7 : 329–339, 1970.

R.E. Bellman. *Dynamic programming*. Princeton University Press, 1957.

G. Besançon. Nonlinear observers and applications. In *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, volume 363. Springer,

N. Boizot, E. Busvelle, et J-P. Gauthier. An adaptive high-gain observer for nonlinear systems. *Automatica*, 46 :1483–1488, 2010.

G. Bornard, N. Couenne, et F. Celle. *Regularly persistent observers for bilinear systems*, volume 122 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 130–140. Springer-Verlag,

H. Bornard, G. et Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1494–1496, Brighton, 1991.

J.F. Coales et A.R.M. Noton. An on-off servo mechanism with predicted change-over. In *Proceedings of the IEEE - Part B : Radio and Electronic Engineering*, volume 103, pages 449–460, 1956.

C.R. Cutler et B.I. Ramaker. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. In *Proceedings of Joint American Control Conference*, page Paper 51b, San Francisco, 1980.

M. Diehl, R. Amrit, et J.B. Rawlings. A lyapunov function for economic optimizing model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3) :703–707, 2011.

P. Dufour, S. Flila, et H. Hammouri. Observer design for mimo non-uniformly observable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(2) :511–516, 2012.

M. Ellis, H. Durand, et P.D. Christofides. A tutorial review of economic model predictive control methods. *Journal of Process Control*, 24(8) :1156–1178, 2014.

M. Farza, M. Nadri, et H. Hammouri. Nonlinear observation of specific growth rate in aerobic fermentation processes. *Bioprocess and Biosystems Engineering*, 23 :359–366, 2000.

F.M. Fisher. Generalization of the rank and order conditions for identifiability. *Econometrica*, 27 :431–447, 1959.

F.M. Fisher. Identifiability criteria in nonlinear systems. *Econometrica*, 29(4) :574–590, 1961.

F.M. Fisher. Identifiability criteria in nonlinear systems : A further note. *Econometrica*, 33 (1) :197–205, 1965.

S. Flila. *Identification optimale et commande prédictive : applications en génie des procédés*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France, 2010.

S. Flila, P. Dufour, et H. Hammouri. Optimal input design for on-line identification : a coupled observer-MPC approach. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, pages 11457–11462, Seoul, South Korea, 2008.

S. Flila, P. Dufour, et H. Hammouri. A combined closed loop optimal design of experiments and on-line identification control approach. In *Proceedings of the 29th IEEE CSS Chinese Control Conference*, pages 1178–1183, Beijing, China, 2010a.

S. Flila, P. Dufour, et H. Hammouri. Identification optimale en boucle fermée pour les systèmes non linéaires. In *Dans Actes de la 6ième IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA*, Nancy, France, 2010b.

G. Franceschini et S. Macchietto. Model-based design of experiments for parameter precision : State of the art. *Chemical Engineering Science*, 63 :4846–4872, 2008.

C.E. Garcia et A.M. Morshedi. Quadratic programming solution of dynamic matrix control. *Chemical Engineering Communications*, 46 :73–87, 1986.

J.P. Gauthier et I. Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM Journal on Control*, 32 :975–994, 1994.

J.P. Gauthier, H. Hammouri, et S. Othman. A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :875–880, 1992.

G. Goodwin et R. Payne. *Dynamic system identification : Experiment design and data analysis*. Academic Press, New York, 1977.

M.S. Grewal et K. Glover. Identifiability of linear and nonlinear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21 :833–837, 1976.

H. Hammouri et M. Farza. Nonlinear observer for locally unifomly observable systems. *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9 :353–370, 2003.

H. Hammouri et J.D.L. Morales. Observer synthesis for state-affine systems. In *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 784–785, Honolulu, Hawaï, 1990.

M. Heidarinejad, J. Liu, et P.D. Christofides. Algorithms for improved fixed-time performance of Lyapunov-based economic model predictive control of nonlinear systems. *Journal of Process Control*, 23 :404–414, 2013.

R. Hermann et A. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 :728–740, 1977.

A. Isidori. *Nonlinear Control Systems : An Introduction*. Springer Verlag, 1995, NY, 3 edition.

H. Jain, V. Kaul, et N. Ananthkrishnan. Parameter estimation of unstable, limit cycling systems using adaptive feedback linearization : example of delta wing roll dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 287 :939–960, 2005.

B. Jayasankar, B. Huang, et A. Ben-Zv. Receding horizon experiment design with application in SOFC parameter estimation. In *Proceedings of the International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems*, pages 527–532, Leuven, Belgium, 2010.

A.H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press New York and London, 1961.

R.E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 5 :102–119, 1960.

R.E. Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, 1 :152–192, 1963.

R.E. Kalman et R.S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 83 :95–108, 1961.

L. Keviczky. Design of experiments for the identification of linear dynamic systems. *Technometrics*, 17 :303–308, 1975.

T.C. Koopmans. Identification problems in economic model construction. *Econometrica*, 17 (2) :125–144, 1949.

I.D. Landau. *Commande des systèmes - conception, identification et mise en oeuvre*. Lavoisier, 2002.

L. Ljung. *System identification : Theory for the user*. Prentice Hall., 1999.

D.G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11 :190–197, 1966.

D.G. Luenberger. Canonical forms for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12 :290–293, 1967.

P. Marquis et J.P. Broustail. SMOC, a bridge between state space and model predictive controllers : application to the automation of a hydrotreating unit. In T.J. McAvoy, Y. Arkun, et E. Zafiriou, editors, *Proceedings of the 1988 IFAC Workshop on Model Based Process Control*, pages 37–43, Oxford : Pergamon Press, 1988.

J.M. Martin-Sanchez. Adaptive predictive control system. *U.S.A. Patent*, 197(4) :576, 1976.

R.K. Mehra. Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems survey and new results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19 :753–768, 1974.

M. Nadri, H. Hammouri, et R. Grajales. Observer design for uniformly observable systems with sampled measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(3) :757–762, 2013.

A.H. Nayfeh, J.M. Elzeba, et D.T. Mook. Analytical study of the subsonic wing-rock phenomenon for slender delta wings. *Journal of Aircraft*, 26(9) :805–809, 1989.

T.S. Ng, G.C. Goodwin, et T. Söderström. Optimal experiment design for linear systems with input-output constraints. *Automatica*, 13 :571–577, 1977.

A.I. Propoï. Use of linear programming methods for synthesizing sample-data automatic systems nonlinear predictive controller. *Automation and Remote Control*, 24 :837–844, 1963.

J. Qian, P. Dufour, et M. Nadri. Observer and model predictive control for on-line parameter identification in nonlinear systems. In *Proceedings of the 10th IFAC International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems DYCOPS*, pages 571–576, Mumbai, India, 2013.

S.J. Qin et T.A. Badgwell. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 11(7) :733–764, 2003.

J.B. Rawlings, D. Angeli, et C.N. Bates. Fundamentals of economic model predictive control. In *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3851–3861, Maui, Hawaii, USA, 2012.

J. Richalet, A. Rault, J.L. Testud, et J. Papon. Model predictive heuristic control : application to industrial processes. *Automatica*, 14 :413–428, 1978.

I.R. Scola, G. Besançon, et D. Georges. Online observability optimization for state affine systems with output injection and observer design. In *Proceedings of the 21st Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 609–614, Chania, 2013a.

I.R. Scola, G. Besançon, et D. Georges. Input optimization for observability of state affine systems. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on System Structure and Control SSSC*, pages 737–742, Grenoble, France, 2013b.

M.S. Shouche, H. Genceli, et M. Nikolaou. Effect of on-line optimization techniques on model predictive control and identification (mpci). *Computers and Chemical Engineering*, 26(9) : 1241–1252, 2002.

D. Telen, F. Logist, E.V. Derlinden, I. Tack, et J.V. Impe. Optimal experiment design for dynamic bioprocess : a multi-objective approach. *Chemical Engineering Science*, 78(9) : 82–97, 2012.

N.T. Trinh. Amélioration de la performance de l'observateur et du filtre de Kalman pour le système affine en l'état bruité. Technical report, Université Claude Bernard Lyon 1, 2014. Stage de fin d'études de master EEAP.

P. Vuthandam et M. Nikolaou. Constrained MPCI : A weak persistent excitation approach. *AIChE Journal*, 43(9) :2279–2288, 1997.

E. Walter et L. Pronzato. *Identification of parametric models from experimental data.* Springer-Verlag, 1994.

J.C. Willems. Linear system theory. *Journal of Econometrics*, 118 :341–373, 2004.

X.H. Xia et W.B. Gao. Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27 :199–216, 1989.

M. Zarrop. *Optimal experiment design for dynamic system identification.* Heidelberg : Springer, 1979.

Y. Zhu et B. Huang. Constrained receding-horizon experiment design and parameter estimation in the presence of poor initial conditions. *AIChE Journal*, 57(10) :2808–2820, 2011.