



HAL
open science

Modèles stochastiques de mesures archéomagnétiques

Gabrielle Hellio

► **To cite this version:**

Gabrielle Hellio. Modèles stochastiques de mesures archéomagnétiques. Sciences de la Terre. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAU004 . tel-01218123

HAL Id: tel-01218123

<https://theses.hal.science/tel-01218123>

Submitted on 20 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Gabrielle HELLIO

Thèse dirigée par **Dominique JAULT** et
codirigée par **Nicolas GILLET** et **Claire Bouligand**

préparée au sein du **Laboratoire ISTerre**
dans l'**École Doctorale Terre, Univers, Environnement**

Modèles stochastiques de mesures archéomagnétiques

Thèse soutenue publiquement le **29 janvier 2015**,
devant le jury composé de :

M. Gauthier HULOT

Directeur de recherche au CNRS, IPGP (Président)

M. Mathieu DUMBERRY

Professeur associé, University of Alberta (Rapporteur)

M. Philippe LANOS

Directeur de recherche au CNRS, Université de Rennes 1 (Rapporteur)

M. Dominique JAULT

Directeur de recherche au CNRS, ISTerre (Directeur de thèse)

Mme Claire BOULIGAND

Maitre de conférence, Université Joseph Fourier (Encadrant)

M. Nicolas GILLET

Chargé de recherche au CNRS, ISTerre (Encadrant)



R

EMERCIEMENTS

Cette thèse n'aurait jamais abouti sans le soutien scientifique et amical de nombreuses personnes. Je tiens à les remercier ici, et j'espère n'avoir oublié personne...

Je remercie Philippe Lanos et Mathieu Dumberry pour avoir accepté de rapporter ce manuscrit, pour leurs lectures assidues et les commentaires qu'ils ont apportés. Merci à Gauthier Hulot d'avoir présidé ce jury, merci pour ses remarques et conseils, et pour avoir orchestré cette soutenance de manière si agréable.

Je tiens avant tout à saluer mes encadrants Nicolas Gillet, Claire Bouligand et Dominique Jault. Un grand merci à tous les trois pour leur disponibilité inconditionnelle et pour avoir chacun apporté à sa manière ses conseils à ma formation et à cette thèse. Merci pour la confiance et la liberté qui m'ont été accordées, tant dans le travail de recherche et dans la rédaction, que dans l'enseignement avec Claire. L'équipe Geodynamo a rendu cet environnement de travail d'autant plus agréable. Aude Chambodut m'a dit avant de commencer ce doctorat, « si tu dois faire une thèse, c'est avec eux ! », je l'ai vérifié au cours de ces trois années aux côtés de Nathanaël, Henri-Claude, Franck, Philippe, Jean-Paul, Patrick, David, Adeline, Simon, François, Jérémy, Olivier et Ainhoa.

J'ai été ravie de rencontrer plusieurs membres de la petite communauté des géodynamiciens. Je les remercie pour leurs conseils, leur aide et leur disponibilité. Je pense en particulier à Yves Gallet, Erwan Thébault, Chris Finlay, Gauthier Hulot, Alex Fournier et Julien Aubert.

J'ai une pensée particulière pour Simon et François qui ont partagé avec moi ces trois années de thèse, dans la joie comme dans la détresse... Ce fut un grand plaisir de vivre, ce moment avec vous et de partager un bureau avec chacun. Merci François de m'avoir fait découvrir un monde jusqu'alors inconnu truffé de moutons cubiques, de geek test, et de Ciel Mon Doctorat. Je te souhaite bon courage pour ta dernière ligne droite, la lumière est au bout du tunnel camarade, mais comme dirait Mathi (merci à lui pour ces franches moments de marrade) : « oui ça fait longtemps que je la vois la lumière, le problème c'est que le mec qui la tient il arrête pas de bouger ».

Un grand merci aussi à tous ceux qui ont croisé ma route au sein d'ISTerre, et qui ont contribué à rendre ces trois années très riches humainement, au détour d'un café,

d'un escalier, d'une passerelle ou d'un bureau. Merci à la coloc JPP, puis PAP, de m'avoir hébergé à mon arrivée à Grenoble, merci à Pierre de m'avoir réservé un si bon accueil. Merci aussi à eux pour avoir abrité de nombreuses soirées et concocté de succulents repas. Merci enfin à mes colocs Alex et Solenn avec qui j'ai partagé ces trois années. La vie était simple et il faisait bon rentrer à la maison. Merci à Zouki d'avoir été là la dernière année et merci à Gwen de m'y avoir rejoint plus tard. Merci aussi à tous les copains : à Rachel pour avoir partagé à peu près tout, quand c'était bien, quand ça l'était moins (mais c'était surtout bien!). . . , merci à Pierre BOTTELIN pour avoir instauré la sociale cuisine, pour les nombreux apéros, randos, vacances, aprem Roland Garros. . . Merci à John pour l'initiation au ski de rando, pour sa patience et son envie de faire découvrir la montagne aux clampins, un grand merci aussi pour m'avoir débogué le cerveau (et le dos) face au remplissage de mes matrices de covariances, et merci de m'avoir donné du gato negro quand j'allais me mettre à pleurer (ou des barres de céréales selon le moment de la journée). Merci à Cécile pour son grand sourire quotidien, ça fait le soleil de la journée, merci pour ces courtes demi-heures passées autour d'un verre de vin. . . Merci à Baptiste pour sa maladresse face à tout ce qui s'éloigne d'un accordéon, pour nous avoir beaucoup fait rire avec la première et beaucoup danser avec le second. Merci à Simon pour avoir été un bon copain en plus de mon collègue geodynamicien ! Sans les citer, parce qu'ils sont trop nombreux, merci à tous les thésards qui se sont succédés, merci à tous les autres copains rencontrés sur Grenoble, merci à tous les potes brennoux et poitevins croisés moins souvent ces derniers temps, mais répondant toujours présents.

Merci à ma sœur pour avoir essayé de me convaincre de ne pas faire de thèse, avec moult arguments convaincants et merci surtout de ne pas m'avoir dit après coup « je te l'avais dit ! » dans les périodes difficiles. Merci à Papa et Maman pour avoir permis un retour aux sources régulier constitué de bon manger, de chevaux, de champignons, de grenouilles et de moustiques... Merci d'y avoir accueilli plusieurs fois les grenoblois en manque de plat pays. Merci à Khalti et Daniel pour les soirées clermontoises et à Ninie pour les soirées castelroussines. Enfin, merci à Gwen d'avoir osé revenir vivre avec une thésarde en toute fin de rédaction et d'avoir ainsi rendu plus simples et plus agréables les derniers mois.

Grenoble, le 30 juin 2015.

Modèles stochastiques de mesures archéomagnétiques

Cette thèse porte sur la construction de modèles stochastiques, régionaux et globaux du champ magnétique sur les quatre derniers millénaires à l'aide de mesures archéomagnétiques. Ces données présentent une répartition spatiale et temporelle très inhomogène, et sont caractérisées par de fortes incertitudes sur la mesure et sur la date. La reconstruction du champ constitue alors un problème inverse mal posé. Afin de déterminer la solution la plus adaptée, une information a priori sur le modèle doit être choisie. Elle consiste généralement en une régularisation arbitraire du champ magnétique (lissage en temps et en espace). Contrairement aux études précédentes, nous utilisons les statistiques temporelles du champ magnétique, dérivées des données d'observatoires, satellitaires et paléomagnétiques pour définir l'information a priori via des fonctions d'auto-covariances. Ces statistiques sont confirmées par des résultats issus de simulations numériques. Cette méthode bayésienne permet de s'affranchir de l'utilisation de fonctions supports arbitraires comme les splines pour l'interpolation temporelle. Le résultat final consiste en un ensemble de réalisations possibles du champ magnétique dont la dispersion caractérise l'incertitude sur le modèle.

Afin de prendre en compte les erreurs de datation, nous développons par ailleurs une méthode basée sur l'utilisation de Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Elle nous permet d'explorer de manière efficace l'espace des dates possibles et ainsi de sélectionner les modèles les plus probables. Cette méthode est une amélioration de la méthode de bootstrap classique, qui donne le même poids à des tirages aléatoires de dates présentant des probabilités très variables. Les ensembles de réalisations sélectionnés par la méthode MCMC aboutissent à la construction d'une densité de probabilités en lieu et place d'une courbe unique.

La méthode bayésienne combinée à la méthode Markov Chain Monte Carlo nous a permis de construire des courbes régionales présentant des variations plus rapides que celles obtenues par d'autres études. Les courbes représentées sous forme de densités de probabilités ne sont pas nécessairement gaussiennes, et la méthode permet d'affiner l'estimation de l'âge de chacune des observations. La méthode bayésienne a été utilisée pour la construction de modèles globaux pour lesquels le dipôle axial présente des variations plus rapides que celui obtenu par de précédentes études. D'autre part, le champ magnétique obtenu pour les époques les plus récentes est raisonnablement similaire à celui construit à partir de mesures directes (satellites, observatoires, historiques) malgré des données beaucoup moins nombreuses et une répartition beaucoup moins homogène. Les modèles issus de cette étude offrent une alternative aux modèles existants régularisés, et pourront servir dans un objectif d'assimilation de données avec des modèles de la dynamique dans le noyau terrestre.

Stochastic modeling of the archeomagnetic field

The aim of this thesis is to build stochastic models of the magnetic field for the last four millenia from archeomagnetic measurements. The sparse repartition of these data in space and time, and their associated large measurement and dating errors lead to an ill-posed problem. To determine the best solution, one needs to choose some prior information which consists usually on arbitrary regularizations in space and time. Instead, we use the temporal statistics of the geomagnetic field available from satellites, observatories and paleomagnetic measurements, and validated by numerical simulations, to define our prior information via auto-covariance functions. This bayesian method allows to get rid of arbitrary support functions, like splines, usually necessary to interpolate the model in time. The result consists in an ensemble of several possible realizations of the magnetic field. The ensemble dispersion represents the model uncertainties.

We find that the methodology can be adapted to account for the age uncertainties and we use Markov Chain Monte Carlo to explore the possible dates of observations. This method improves the bootstrap method which gives the same weight to every draws of dates presenting very disparate probabilities. Each ensemble of realizations is then constructed from each selected model and the result is presented as a probability density function.

The bayesian method together with the Markov Chain Monte Carlo provides regional time series with rapid variations compared to previous studies. We find that the possible values of geomagnetic field elements are not necessarily normally distributed. Another output of the model is better age estimates of archeological artefacts. The bayesian method has been used to build global models for which the axial dipole presents more rapid variations than for previous studies. Moreover, the obtained magnetic field displays reasonably similar behavior than models obtained from direct measurements (satellites, observatories, historical), despite very few data and sparser repartition. Models obtained from this study offer an alternative to published regularized models and can be used in a purpose of data assimilation together with dynamical models in the Earth's core.

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	9
I Introduction	1
1 Introduction générale	3
1.1 Petit historique du magnétisme terrestre	3
1.2 Les sources du champ magnétique	4
1.3 Les différentes approches pour étudier le champ magnétique	5
2 Les données magnétiques	7
2.1 Les observations de surface	7
2.2 Les mesures archéomagnétiques	10
2.3 Caractéristiques des mesures archéomagnétiques dans un but de modélisation	12
3 La modélisation du champ magnétique : Comment ? Pourquoi ?	15
3.1 Représentation spatiale	15
3.2 Le problème inverse	16
3.3 Déterministe vs stochastique	18
3.4 Les questions ouvertes	18
3.5 Problématique et organisation du manuscrit	21
II Approche bayésienne de l'estimation du champ magnétique	23
4 La méthode bayésienne	25
4.1 Problème inverse classique	25
4.1.1 Représentation mathématique du champ magnétique	25
4.1.2 Résolution d'un problème linéaire	26
4.1.3 Résolution d'un problème non-linéaire	27
4.2 Approche bayésienne	28

4.2.1	Filtre de Kalman	29
4.2.2	Matrice des dérivées partielles	30
5	Définition des a priori	33
5.1	Quelles contraintes pour notre information a priori ?	33
5.1.1	Spectres des séries géophysiques	33
5.1.2	Spectres de simulations numériques de géodynamo	36
5.2	Fonctions de corrélation, spectres et équations stochastiques	41
5.2.1	A priori Gaussien	41
5.2.2	Les fonctions de Matérn	41
5.2.3	Oscillateur amorti AR2	43
5.3	Discussion	43
5.3.1	Spectres	43
5.3.2	Séries temporelles	46
5.3.3	Temps de corrélation	46
III	Modélisation régionale	53
6	Les erreurs liées aux données archéomagnétiques et à la modélisation régionale	55
6.1	Les erreurs de localisation	56
6.1.1	Dipôle axial centré	56
6.1.2	Pôle géomagnétique virtuel (VGP)	57
6.2	Les erreurs de datation	59
6.2.1	Etat de l'art	59
6.2.2	Méthode avec intégrale	60
6.2.3	Echantillonnage régulier et poids dans la matrice d'erreurs	62
6.2.4	Bootstrap et MCMC pour échantillonner efficacement	63
7	Article : Stochastic modeling of regional archeomagnetic series	69
7.1	Abstract	69
7.2	Introduction	70
7.3	Method	71
7.3.1	Gaussian process regression	71
7.3.2	Accounting for dating uncertainties with Markov Chain Monte Carlo	72
7.3.3	A priori covariances on geomagnetic series	75

7.3.4	Dealing with outliers using robust measures of the data errors	78
7.4	Synthetic tests	78
7.5	Application to data sets from Syria and France	80
7.5.1	Archeointensity data from the Middle-East	80
7.5.2	Direction and intensity of the magnetic field in Paris	84
7.6	Conclusion	85
IV	Modélisation globale	89
8	Etat de l'art sur la modélisation globale	91
8.1	Les modèles existants	92
8.2	Les données utilisées	94
9	Discussion méthodologique	97
9.1	S'affranchir des splines	97
9.2	Convergence de l'algorithme de Newton	98
9.3	Validation de la méthode sur des jeux de données synthétiques	98
9.3.1	Influence de l'information a priori	99
9.3.2	Comparaison avec une méthode régularisée	100
9.4	Etude des données aberrantes	104
9.5	Erreurs de modélisation	108
9.6	Comparaison des a priori	109
10	Interprétation des résultats préliminaires	115
10.1	Comportement du champ magnétique global	115
10.2	Comparaison aux autres modèles globaux	119
10.3	Comparaison aux courbes régionales	122
V	Conclusions et perspectives	127
11	Conclusion	129
11.1	Conclusions générales	129
11.2	Perspectives	131
11.2.1	Considérer les erreurs de datation dans la modélisation globale	131
11.2.2	Les données	132
11.2.3	Accès libre aux modèles	133

Bibliographie	135
A D, I and F covariances	147
B Parameters used in the MCMC method. Number N of iterations per chain, σ_{MCMC} and number N_{MCMC} of draws selected by the Markov rules. The number of lines corresponds to the number of chains used for each figure.	151
C Coefficients g_l^m pour l'oscillateur amorti	153
Table des figures	157

Première partie

Introduction

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1

1.1 Petit historique du magnétisme terrestre

L'historique du magnétisme terrestre, rapidement rappelé dans cette section, s'inspire du livre de [Legros et Deparis \(2002\)](#).

Les premières observations du magnétisme terrestre sont apparues dès l'Antiquité et la boussole apparaît en Chine dès le premier siècle de notre ère. Ces constats ont conduit de nombreux scientifiques à chercher à comprendre le magnétisme terrestre. L'hypothèse la plus simple pour expliquer le champ magnétique de la Terre, mise en avant par Gilbert au tournant du XVII^{ème} siècle, est d'assimiler le globe à un aimant permanent. Gellibrand observe que la déclinaison magnétique varie dans le temps en 1634. C'est la première observation de la variation séculaire. Halley propose alors que le globe est une combinaison de plusieurs aimants permanents en mouvements relatifs les uns par rapport aux autres.

En 1838, Gauss donne la première décomposition du champ en harmoniques sphériques et conclut que le champ est principalement dipolaire et d'origine interne. La découverte du point de Curie en 1895, démontre un fait observé depuis déjà longtemps, à savoir qu'au dessus d'une certaine température, les matériaux sont désaimantés. La Terre possédant une chaleur centrale très importante, son centre ne peut pas être aimanté. Le début du XX^{ème} siècle, avec les avancées de la sismologie et la mise en évidence par Jeffreys, en 1926, que le noyau est liquide et métallique, voit la naissance de la théorie d'une dynamo terrestre. A la suite de Larmor, en 1919, et malgré un important contre-exemple proposé par Cowling en 1934, Elsasser propose en 1940 que les mouvements dans le noyau fluide conducteur, en présence d'un champ magnétique, induisent des courants électriques qui, à leur tour, renforcent le champ magnétique. La question qui s'est alors posée, et qui n'est à ce jour pas complètement résolue, était de savoir quelle source d'énergie était capable de maintenir ces mouvements.

Un autre aspect du magnétisme terrestre s'est développé en parallèle et provient des études paléomagnétiques. Les premières observations de l'effet des roches sur l'aiguille

d'une boussole sont apparues à la fin du XVIII^{ème} siècle, mais ce n'est qu'à la fin du XIX^{ème} siècle que l'on s'est aperçu que leur aimantation était parallèle au champ magnétique de la Terre. La découverte du point de Curie a permis alors de comprendre que les coulées de lave, en refroidissant, acquièrent une aimantation, et que cette aimantation est emprisonnée dans la roche. En faisant des mesures à différents endroits du globe, cette mémoire magnétique a permis de construire une échelle des inversions du champ magnétique. Le principe est le même pour les matériaux archéologiques qui ont cuit à une température au dessus du point de Curie, puis ont acquis leur aimantation en refroidissant. Ce sont de précieux témoins du champ magnétique ancien. En 1937, Thellier a développé une méthode pour accéder à l'intensité du champ magnétique emprisonné dans ces matériaux. C'est le premier à étudier les variations d'intensité du dipôle au cours du temps à partir de matériaux archéologiques. Sa méthode expérimentale est encore utilisée aujourd'hui.

Au cours de la première partie du XX^{ème} siècle, les bases du magnétisme terrestre sont établies. Des questions restent en suspens comme les mécanismes d'entretien de la dynamo. Une des hypothèses aujourd'hui est que la cristallisation de la graine, le noyau solide interne, libère des éléments légers qui remontent dans le noyau liquide y générant des courants de convection responsables de la dynamo terrestre. On a toujours à ce jour, une idée imparfaite sur la géométrie de ces mouvements et leur évolution dans le temps, ainsi que sur l'origine des inversions de champ magnétique et sur leurs fréquences, malgré de nettes avancées sur les modèles numériques de géodynamo convectives.

1.2 Les sources du champ magnétique

La figure 1.1 donne une vue schématique des différentes couches de la Terre. Elle est composée en surface d'une croûte de quelques dizaine de kilomètres d'épaisseur. Le manteau solide, d'une épaisseur de 2900 km se situe en dessous. Le noyau externe, composé principalement de fer liquide, a un rayon externe de 3485 km et contient un noyau interne solide, appelé graine. Le noyau est à l'origine, par un phénomène de dynamo, d'un champ magnétique principalement dipolaire avec des composantes multipolaires d'une intensité plus faible. L'intensité du champ magnétique du noyau mesurée à la surface de la Terre est de l'ordre de 30000 nT à l'équateur, et de 65000 nT aux pôles. Les variations temporelles observées vont de quelques dizaines d'années à quelques siècles, on les appelle variations séculaires pour les distinguer des variations périodiques (diurnes par exemple), ou des inversions et de la fréquence des inversions du champ magnétique. En remontant vers la surface, on passe par le manteau qui, contrairement au noyau, est en première approxima-

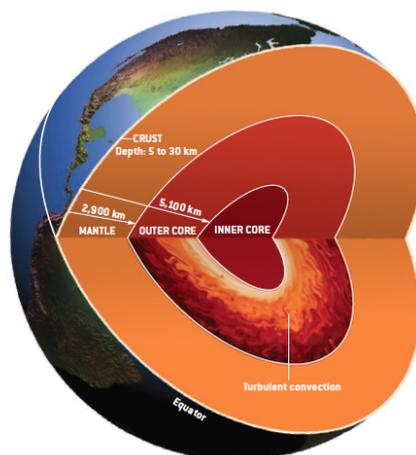


FIGURE 1.1 – Vue schématique des différentes couches de la Terre montrant la croûte, le manteau, le noyau externe et la graine. Le rayon de la Terre est de 6370 km (Glatzmaier et Olson 2005).

tion un isolant électrique. On arrive alors à la croûte qui génère un champ magnétique lié à l'aimantation des roches qu'elle contient. L'intensité de ce champ est de l'ordre de 100 nT à la surface de la Terre, pouvant aller jusqu'à 1000 nT aux endroits de forte anomalie. Ce champ ne varie que très peu dans le temps. Les variations temporelles qui existent sont dues à de fortes variations du champ induit. Ces deux sources, le noyau et la croûte, constituent les sources de champ interne. Il existe aussi un champ magnétique externe, produit par des courants électriques dans l'ionosphère et la magnétosphère. Le champ magnétique d'origine externe, mesuré à la surface de la Terre, a une intensité d'environ 10 nT en période calme, mais de quelques centaines de nanoteslas lors des orages magnétiques. Il présente des variations temporelles très rapides, qui masquent le signal interne aux périodes plus courtes que quelques années. La figure 1.2 résume les différentes sources du champ magnétique. Cette étude s'intéresse au champ magnétique du noyau.

1.3 Les différentes approches pour étudier le champ magnétique

Les géomagnéticiens ont développé trois approches pour comprendre les mouvements de fluide à l'intérieur du noyau terrestre. La première repose sur les observations du champ magnétique récoltées en surface qui témoignent de l'activité magnétique du noyau. Cette approche permet de comprendre les variations spatiales et temporelles du champ magnétique. Le nombre, la qualité, et la répartition spatiale et temporelle des mesures magnétiques sont les facteurs limitants de cette démarche. On parvient, grâce à elle, à avoir une bonne connaissance du champ magnétique sur les périodes récentes, les données étant de plus en plus nombreuses et leur précision de meilleure qualité. Les époques plus anciennes en revanche sont moins bien contraintes et on ne parvient à décrire que les grandes échelles

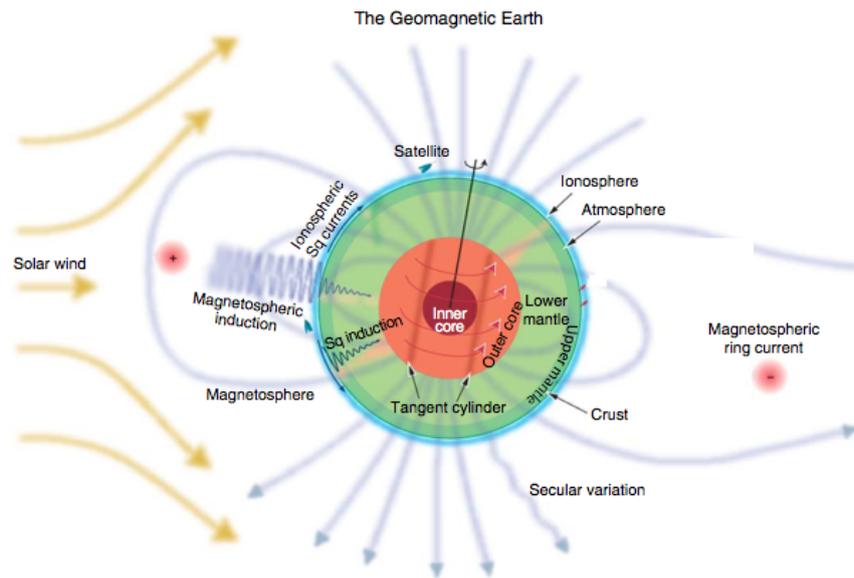


FIGURE 1.2 – Une représentation de l'environnement électromagnétique de la Terre (Constable 2007b).

du champ. Une seconde approche consiste, à partir de notre connaissance de la géométrie et des principales forces régissant la géodynamo à l'intérieur du noyau, à simuler numériquement l'écoulement du noyau et le champ magnétique qu'il génère. Cette démarche est assez coûteuse numériquement et de ce fait, ne permettait à l'origine que de simuler un champ magnétique sur de courtes périodes. L'amélioration des performances de calcul permet aujourd'hui des simulations sur des temps beaucoup plus longs qui apportent un complément intéressant aux observations pour les études archéomagnétiques (Davies et Constable 2014). En effet, elles fournissent une résolution spatiale bien plus élevée que les observations. Néanmoins, les simulations ne peuvent pas encore utiliser des paramètres semblables à ceux du noyau de la Terre, et cet objectif ne semble pas pouvoir être atteint dans un futur proche. Les paramètres sont ajustés afin de reproduire un comportement des simulations semblable à celui de la Terre. Des efforts sont réalisés pour définir des critères permettant de déterminer au mieux ces paramètres (e.g. Christensen *et al.* 2010), basé généralement sur la ressemblance morphologique du champ issu de la simulation à celui de la Terre (dipôle axial, symétrie équatoriale...). La dernière approche cherche à se rapprocher expérimentalement du noyau terrestre afin d'observer directement les interactions entre écoulement et champ magnétique ayant lieu à l'intérieur. Les observations sont l'objet de cette étude, et parmi elles, plus particulièrement les mesures archéomagnétiques. Les simulations numériques sont utilisées afin de valider le comportement du champ magnétique déduit des observations.

LES DONNÉES MAGNÉTIQUES

2

2.1 Les observations de surface

Les observations de surface nous renseignent sur le vecteur \mathbf{B} du champ magnétique. Le vecteur \mathbf{B} peut être décrit par ses composantes Nord (X), Est (Y), et verticale (Z), ou par son intensité F et sa direction I ou D . La déclinaison D représente l'angle entre le projeté du vecteur \mathbf{B} sur le plan horizontal et le Nord géographique, tandis que l'inclinaison I représente l'angle entre le vecteur \mathbf{B} et le plan horizontal (Figure 2.1).

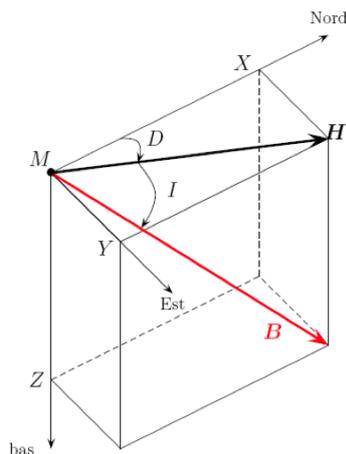


FIGURE 2.1 – Géométrie du champ magnétique. Le vecteur \mathbf{H} est le projeté de \mathbf{B} dans le plan horizontal. Se référer au texte pour une description plus détaillée.

Le champ magnétique varie à la fois dans le temps et dans l'espace. Plusieurs types de données sont disponibles afin de reconstituer le champ (Figure 2.2). Les mesures satellitaires donnent des mesures très denses des trois composantes du champ et permettent ainsi de faire des cartes précises du champ magnétique (Figure 2.2a et b). Le premier satellite contenant un magnétomètre vectoriel (MAGSAT) a été lancé en 1979 et resta 7 mois en orbite. Deux autres ont suivi, le satellite Ørsted en 1999 et CHAMP en 2000. Le premier est encore en fonctionnement à l'heure actuelle mais ne fournit plus que des données scalaires, le second est retombé dans l'atmosphère en 2010. La constellation des trois satellites SWARM a été lancée en novembre 2013. Les mesures satellitaires ont grandement

contribué à la modélisation du champ magnétique. Cependant, ces données couvrent une période très courte par rapport aux échelles de temps nécessaires pour comprendre l'ensemble des processus ayant lieu dans le noyau terrestre.

Les observatoires magnétiques fournissent des mesures sur des temps plus longs en continu en un point de la Terre, contrairement aux satellites. Le premier observatoire doté d'un appareil mesurant l'intensité du champ date de 1839, et le réseau s'est largement développé depuis (Figure 2.2d). Ces observatoires fournissent une mesure continue du champ magnétique en un point fixe, mais le nombre de ces observatoires est limité et leur répartition assez inhomogène. Ils sont beaucoup plus nombreux dans l'hémisphère Nord et en Europe en particulier, et ne sont situés que sur les continents, ou les îles. L'étude des séries issues des observatoires a mené à l'observation des secousses géomagnétiques. Ces secousses, mentionnées en premier lieu par [Courillot et Le Mouël \(1984\)](#), sont des changements brusques de la dérivée temporelle du champ magnétique. Elles apparaissent nettement sur les séries de la variation séculaire des composantes Nord et Est du champ magnétique et les processus qui les produisent ne sont pas encore bien compris ([Jackson et Finlay 2007](#)).

Les mesures réalisées à bord des bateaux, principalement dans un but d'aide à la navigation, grâce à des boussoles en particulier, sont bien documentées dès la fin du XVIème siècle et constituent une collection de données suffisamment riche pour construire des modèles continus du champ magnétique à partir de 1590 ([Jackson et al. 2000](#)). Ces modèles ont révélé des caractéristiques intéressantes, comme la dérive vers l'Ouest observée sur la variation séculaire du champ magnétique ([Finlay et Jackson 2003](#)).

Toutes ces différentes mesures constituent ce que l'on appelle les mesures directes du champ magnétique. On ne dispose pas de mesures directes avant 1840 pour l'intensité, et avant le XVIème siècle pour les directions. On peut alors utiliser les mesures archéomagnétiques et paléomagnétiques qui sont des mesures indirectes du champ magnétique. Elles constituent de précieux témoins du champ magnétique ancien et sont utilisées pour connaître le champ magnétique sur de plus longues périodes de temps. Leur répartition spatiale et temporelle est bien entendu beaucoup moins bonne que celle des observations discutées plus hauts, et les incertitudes accompagnant ce type de données sont importantes. Construire des modèles sur plusieurs millénaires, prenant efficacement en compte les incertitudes associées à ces mesures est un objectif attrayant. La modélisation archéomagnétique est l'objectif de cette étude.

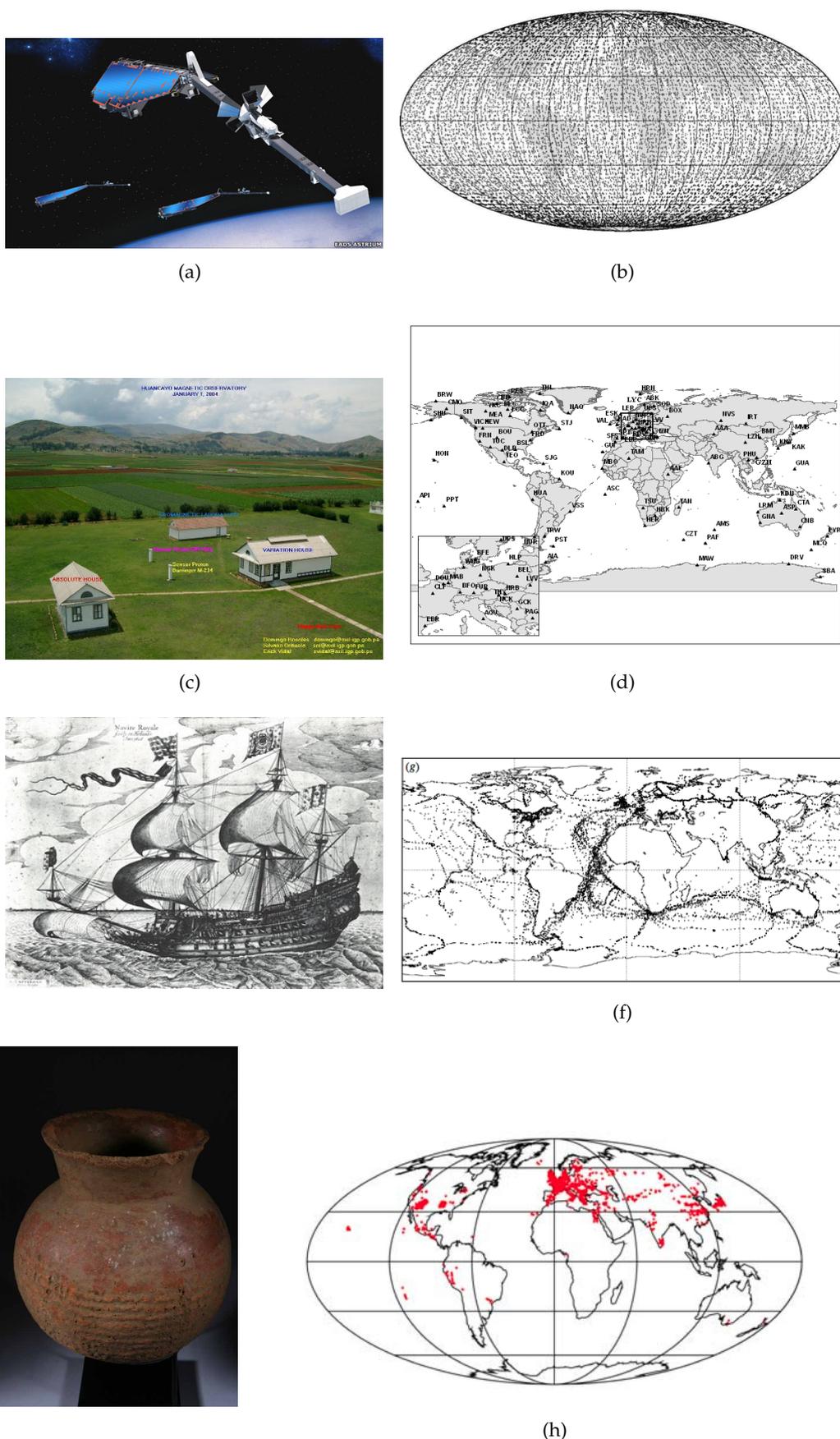


FIGURE 2.2 – a) Vue d'artiste des satellites SWARM; b) Distribution spatiale des données acquises par le satellite Ørsted entre 1999 et 2002 (Chambodut et al. 2005); c) Observatoire de Huancayo (Pérou); . d) Carte des observatoires du réseau INTERMAGNET. f) Données historiques pour la période 1800 1849 (Jackson et al. 2000). h) Données archéomagnétiques pour les quatre derniers millénaires (Donadini et al. 2009).

2.2 Les mesures archéomagnétiques

Le terme de mesures archéomagnétiques regroupe trois types de mesures : celles provenant de matériaux archéologiques, d'autres provenant de coulées de lave et de roches volcaniques et les dernières provenant de sédiments lacustres ou marins. Si on parvient à dater le matériel et que l'on connaît l'endroit où il a enregistré le champ, ces mesures nous permettent d'avoir des informations sur le champ magnétique sur plusieurs millénaires.

On ne mesure pas directement le champ magnétique dans ces matériaux mais l'aimantation rémanente, aimantation existant dans un matériau en l'absence de champ magnétique. La direction de l'aimantation rémanente est généralement parallèle à celle du champ magnétique au moment de la formation de la roche, et leurs intensités sont proportionnelles. Il existe de nombreux processus pour qu'une roche acquière une aimantation rémanente. Les deux processus principaux pour les paléomagnéticiens sont l'aimantation thermo-rémanente (laves et poteries), et l'aimantation de dépôt, ou détritique (sédiments). Une poterie acquiert une aimantation thermo-rémanente après cuisson, lorsqu'en refroidissant, sa température descend en dessous de la température de Curie. L'aimantation est alors figée dans la direction du champ magnétique de l'époque. Les matériaux tendent à perdre cette aimantation au cours du temps, c'est le temps de relaxation, mais heureusement ce temps est très long (temps géologiques) à température ambiante. L'aimantation thermo-rémanente est directement proportionnelle à l'intensité du champ magnétique, mais dépend des propriétés du matériau, elle permet aussi de retrouver sa direction. La détermination de ce facteur d'intensité est le but des mesures dites Thellier et Thellier (Thellier 1959), qui se révèlent être encore aujourd'hui, les mesures les plus efficaces. Ces lois sont basées sur le principe de réciprocité. Un échantillon contient une aimantation thermo-rémanente et on le chauffe deux fois de suite, une première en champ nul, et une seconde en champ d'intensité connue. L'aimantation perdue lors de la première chauffe est exactement retrouvée lors de la seconde.

Les sédiments acquièrent leur aimantation en se déposant. Les grains qu'ils contiennent possèdent un moment magnétique qui s'aligne avec le champ ambiant pendant le dépôt (Figure 2.3). On voit aussi que la direction des sédiments une fois déposée n'est pas tout à fait celle du champ ambiant du fait de la compaction lors du dépôt. Cette aimantation est moins robuste que l'aimantation thermo-rémanente et plus compliquée à retrouver du fait des nombreux facteurs qui peuvent intervenir dans le processus de sédimentation. On ne peut estimer à l'aide des sédiments que les variations relatives de la paléo-intensité. Mais les séquences sédimentaires fournissent un enregistrement continu du champ sur des cen-

taines de milliers voire des millions d'années et représentent donc une source inestimable d'information.

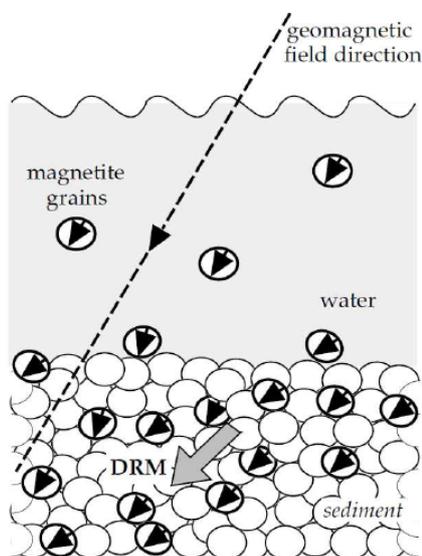


FIGURE 2.3 – Acquisition de l'aimantation détritique des sédiments lors de leur dépôt (Lowrie 2007).

Dans la pratique, on commence par échantillonner un site. La figure 2.4 illustre l'échantillonnage d'un four à Oensingen, au Nord de la Suisse, auquel j'ai participé. L'important lors de l'échantillonnage est d'orienter le plus précisément possible l'échantillon par rapport au Nord et à l'horizontal. Pour les sédiments, l'expérimentateur prélève des carottes sédimentaires en prenant le plus grand soin de ne pas cisailer la carotte. Une fois l'échan-



FIGURE 2.4 – Échantillonnage d'un four en Suisse, avec Fabio Donadini et orientation de l'échantillon.

tillon prélevé et orienté, il est amené au laboratoire où on utilise des magnétomètres pour mesurer son aimantation. Malheureusement, on ne mesure pas directement l'aimantation primaire de l'échantillon, i.e., celle acquise lors du refroidissement de la roche ou de la poterie, ou du dépôt des sédiments. Ces matériaux peuvent avoir été soumis à d'autres processus d'aimantation depuis lors, et l'aimantation mesurée sur l'échantillon correspond à une aimantation rémanente naturelle qui comprend souvent des aimantations dites secondaires. Ces aimantations sont souvent des aimantations visqueuses (aimantations acquises par un matériau resté longtemps en présence d'un champ magnétique), ou des aimantations thermo-rémanentes partielles secondaires. Par chance, cette aimantation est souvent plus "fragile" que l'aimantation primaire et les matériaux la portant sont les premiers à se désaimanter. Afin de ne garder que l'aimantation primaire d'un échantillon, on le désaimante par palier (par exemple de température) pour isoler l'aimantation primaire et évaluer sa direction. Nous avons ici présenté les principes de base des mesures archéomagnétiques puisque ce sont les données que nous utilisons par la suite, mais nous ne ferons pas de mesures dans cette étude.

2.3 Caractéristiques des mesures archéomagnétiques dans un but de modélisation

Les données archéologiques collectées autour du globe sont regroupées dans des bases de données comme GEOMAGIA ([Donadini et al. 2006](#)), ou encore ARCHEOINT ([Genevey et al. 2008](#)). Ces données sont réparties de manière inhomogène dans le temps et dans l'espace comme on peut l'observer sur la figure 2.5. Les mesures archéologiques et de laves se situent, pour la majorité, dans l'hémisphère Nord et il y a de moins en moins de données aux époques les plus anciennes. Les données sédimentaires sont moins nombreuses vers les époques récentes, mais ont une répartition spatiale plus homogène et couvrent de manière très homogène les quatre derniers millénaires. La combinaison de ces deux collections est très intéressante dans un but de modélisation, cependant, les données sédimentaires, et particulièrement leurs erreurs de mesures et de datation, doivent être considérées avec précautions ([Nilsson et al. 2014](#)). Les erreurs de mesures sont assez importantes pour les données archéomagnétiques, de l'ordre de quelques microteslas, tandis que les incertitudes associées aux mesures satellitaires, ou d'observatoires sont de l'ordre de quelques nanoteslas. Par ailleurs, à la différence des mesures directes, les données archéomagnétiques présentent des erreurs de datation, en moyenne de l'ordre de 50 ou 100 ans, mais pouvant

parfois être beaucoup plus importante. La considération de ces erreurs est un enjeu majeur pour la modélisation archéomagnétique.

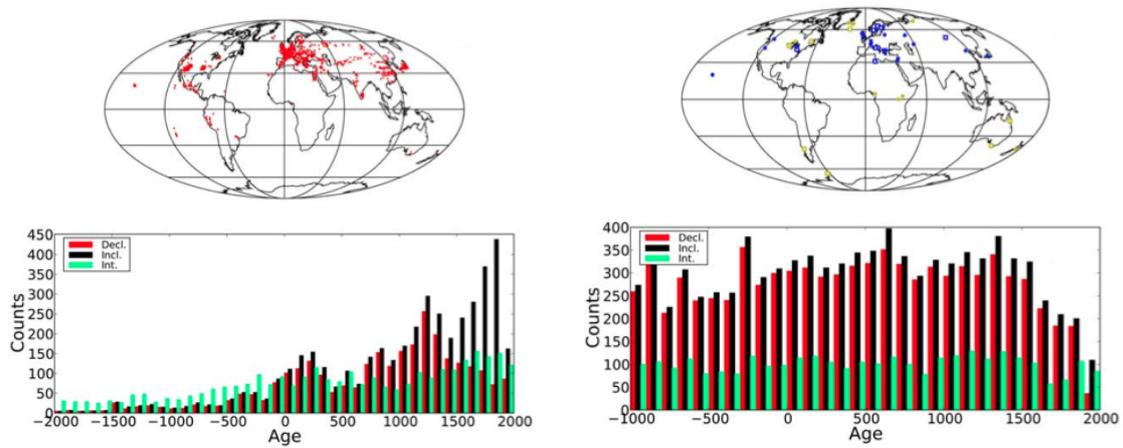


FIGURE 2.5 – Répartition spatiale et temporelle sur les quatre derniers millénaires des données archéologiques et volcaniques (gauche) et sédimentaires (droite) (Donadini et al. 2009).

LA MODÉLISATION DU CHAMP MAGNÉTIQUE : COMMENT ? POURQUOI ?

3.1 Représentation spatiale

Gauss a montré que le champ magnétique pouvait être décrit par une somme de fonctions appelées harmoniques sphériques. En dehors des sources, le potentiel magnétique V , relié au champ par $\mathbf{B} = -\nabla V$, s'écrit dans un repère sphérique de coordonnées (r, θ, ϕ) :

$$V(r, \theta, \phi, t) = a \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l (g_l^m(t) \cos(m\phi) + h_l^m(t) \sin(m\phi)) P_l^m(\cos\theta) + \left(\frac{r}{a}\right)^l \sum_{m=0}^l (q_l^m(t) \cos(m\phi) + s_l^m(t) \sin(m\phi)) P_l^m(\cos\theta)$$

avec a le rayon de la Terre, l et m , respectivement l'ordre et le degré des harmoniques sphériques, P_l^m les polynômes de Legendre avec la quasi-normalisation de Schmidt et g_l^m , h_l^m et q_l^m , s_l^m , les coefficients de Gauss représentant le champ interne et le champ externe respectivement. Les harmoniques sphériques sont les fonctions $P_l^m(\cos\theta) \cos m\phi$ et $P_l^m(\cos\theta) \sin m\phi$ (Figure 3.1). Le degré l représente le nombre total de lignes sur lesquelles la fonction s'annule sur la sphère (lignes nodales). L'ordre m représente le nombre de lignes nodales méridiennes et $l - m$, le nombre de lignes nodales parallèles. Une harmonique avec $m = 0$ est appelée zonale et est symétrique par rapport à l'axe de rotation. Ces fonctions permettent de décrire le champ magnétique en tout point à la surface de la Terre, mais aussi à n'importe quel rayon r situé à l'extérieur des sources. Dans l'hypothèse que le manteau est un isolant, le potentiel V peut être tracé aussi bien à la surface de la Terre qu'à la surface du noyau. Cette dernière propriété est très utile pour l'étude des écoulements du noyau. Plus le degré des harmoniques augmente, plus on va décrire de courtes longueurs d'ondes, i.e. de petites échelles spatiales.

Le champ externe est en général de faible intensité et présente des variations très rapides, que l'on va négliger dans le cadre d'une étude archéomagnétique. Le potentiel que

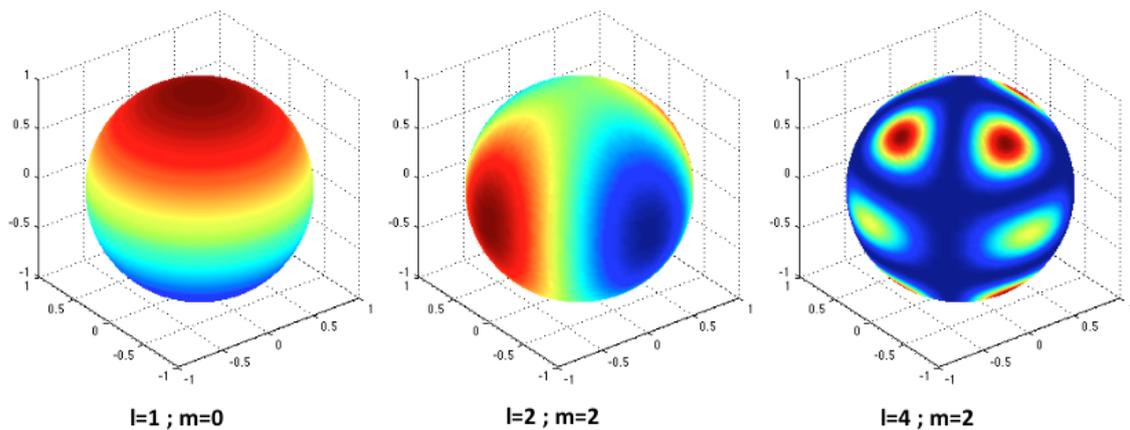


FIGURE 3.1 – Quelques exemples d'harmoniques sphériques ($P_l^m(\cos\theta) \cos(m\phi)$) pour différents ordres et degrés.

L'on cherche à retrouver ne comprend plus que les termes liés au champ interne et s'écrit :

$$V(r, \theta, \phi, t) = a \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l (g_l^m(t) \cos(m\phi) + h_l^m(t) \sin(m\phi)) P_l^m(\cos\theta). \quad (3.1)$$

Le champ de la croûte varie peu dans le temps et est de faible intensité lui aussi, on va donc également le négliger. Néanmoins, certaines mesures peuvent être biaisées par une forte variation du champ externe qui ajoute une aimantation induite à l'aimantation rémanente présente dans les matériaux archéomagnétiques.

3.2 Le problème inverse

Les fonctions harmoniques sphériques permettent d'interpoler le champ magnétique dans l'espace. Modéliser globalement le champ magnétique signifie retrouver la variation temporelle des coefficients de Gauss ($g_l^m(t), h_l^m(t)$). Pour étendre les modèles en temps, on utilise des fonctions supports que l'on explicitera dans la suite de ce manuscrit. Considérons que l'on sait interpoler le modèle dans le temps et dans l'espace, il faut maintenant en avoir une estimation à certains temps, en certains endroits. Le modèle doit expliquer les données observées en surface, dans notre étude les mesures archéomagnétiques, qui sont reliées aux coefficients de Gauss par des équations que l'on explicitera dans la partie II. Le problème que l'on cherche à résoudre est un problème inverse. Le problème direct correspondant étant d'estimer les mesures prédites par un jeu connu de coefficients de Gauss, en un point de la Terre, à une certaine époque. Ici, on cherche à savoir quelles valeurs pour les coefficients de Gauss pourraient expliquer ces mesures. Il est évident que le nombre N_p de paramètres que l'on va parvenir à retrouver, dépend du nombre d'observations. Plus on a

d'observations, plus on retrouvera de coefficients de Gauss (i.e avec des degrés de plus en plus grands), et plus on parviendra à retrouver les petites échelles du champ magnétique.

Le spectre spatial du champ magnétique d'origine interne, représenté sur la figure 3.2 pour différents modèles satellitaires, représente l'énergie du champ magnétique pour chaque degré à la surface de la Terre. La première chose que l'on peut dire est que le champ d'origine interne est dominé par son terme dipolaire. On observe aussi deux tendances qui se distinguent au degré $l = 14$, et qui témoignent du fait que le champ d'origine interne est dominé par le champ du noyau pour des degrés inférieurs à 14 et par le champ de la croûte pour des degrés supérieurs. De ce fait, on ne contraint directement par les observations, que le champ du noyau jusqu'au au degré $l = 13$. De la discussion précédente sur le nombre de paramètres que les données nous permettent de déterminer, un modèle jusqu'au degré 13 est décrit par 195 coefficients de Gauss pour une seule époque ($N_p = l_{max}(l_{max} + 2)$). Si on cherche à évaluer un modèle chaque année sur les vingt dernières années, on se retrouve avec 3900 paramètres à déterminer. C'est possible pour des mesures satellitaires, qui sont nombreuses, bien réparties, avec de faibles erreurs de mesures. La répartition des données

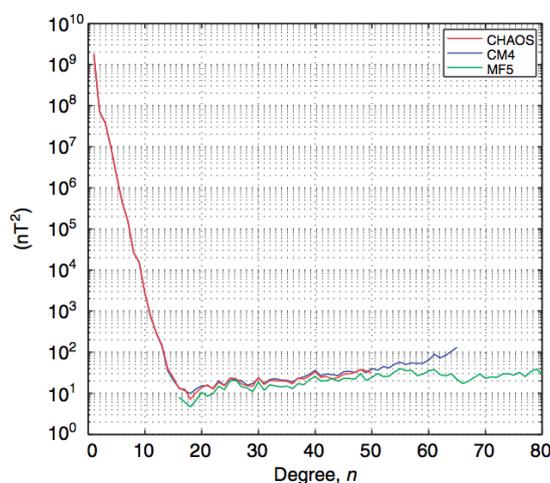


FIGURE 3.2 – Spectre spatial du champ magnétique à la surface de la Terre (Olsen et al. 2007).

archéomagnétiques, par contre, ne permet que de retrouver les plus grandes échelles spatiales du champ magnétique. Une des questions adressée à mon étude est de savoir quelles longueurs d'ondes ces données permettent de retrouver.

Nous avons discuté de la répartition inhomogène des données dans le temps et dans l'espace, limitant la résolution du modèle, mais en plus de cela, on ne connaît pas parfaitement, ni la valeur de la mesure, ni la date des observations. Les études archéomagnétiques fournissent généralement une valeur moyenne de la mesure associée à l'erreur expérimentale, et une date contenue à l'intérieur d'une barre d'erreur. Ces incertitudes, et le nombre

limité d'observations font que plusieurs modèles peuvent expliquer les mêmes données. Une façon de choisir parmi tous ces modèles est d'imposer une régularisation spatiale et temporelle, qui va permettre de considérer qu'un modèle représente mieux le champ magnétique qu'un autre. Cette régularisation constitue une information avant estimation du modèle, ou a priori. Elle peut prendre différentes formes, mais varie assez peu d'une étude à l'autre, et n'a souvent pas de sens physique. Dans cette étude, nous souhaitons, contrairement aux études précédentes, porter le plus grand soin à la définition de notre a priori afin qu'il soit en accord avec ce que l'on connaît des statistiques du champ magnétique.

3.3 Déterministe vs stochastique

Le champ magnétique de la Terre résulte d'un système très complexe autant spatialement que temporellement. La théorie de la dynamo n'est maintenant plus controversée mais les mécanismes qui la génèrent ne sont pas entièrement compris. Deux approches peuvent être adoptées pour décrire un tel système. La première considère tous les détails connus sur le champ magnétique et résout le problème de manière déterministe, alors que la seconde consiste à décrire le système par ses statistiques. On se tourne vers l'approche stochastique quand on ne sait pas écrire exactement les équations du problème, mais aussi, lorsque l'on veut décrire les erreurs que l'on fait lors de la modélisation. Lorsque l'on travaille avec des données archéomagnétiques, et leurs importantes erreurs, le choix de l'approche stochastique paraît naturel et se révèle efficace pour décrire le champ magnétique sur ces échelles de temps. [Constable et Parker \(1988\)](#) ont montré que le champ paléomagnétique pouvait être décrit grâce à des processus stochastiques gaussiens (Giant Gaussian Process GGP). Avec des données historiques, [Hulot et LeMouél \(1994\)](#) ont montré que les coefficients de Gauss pouvaient être décrits par des variables aléatoires gaussiennes. Plus récemment, [Gillet *et al.* \(2013\)](#) ont utilisé les statistiques connues du champ magnétique afin de contraindre le modèle COV-OBS qui couvre la période 1840-2010 à partir des observations. Il faut noter qu'une démarche stochastique n'exclut pas l'existence de processus déterministes qui peuvent être pris en compte dans la démarche. L'assimilation de données, par exemple, peut combiner ces deux approches. Elle peut être purement stochastique, mais on peut aussi assimiler les données en supposant un modèle dynamique.

3.4 Les questions ouvertes

Les modèles de champ magnétique peuvent être représentés à la surface de la Terre, comme ici l'intensité (Figure 3.3) ou le champ radial (Figure 3.4, à gauche), mais aussi à

la surface du noyau (Figure 3.4, à droite). Le champ radial à la surface de la Terre montre un comportement dipolaire, avec très peu de structures de petites échelles, celles-ci étant filtrées lorsque l'on s'éloigne des sources, alors qu'à la surface du noyau, on voit apparaître beaucoup plus de petites échelles.

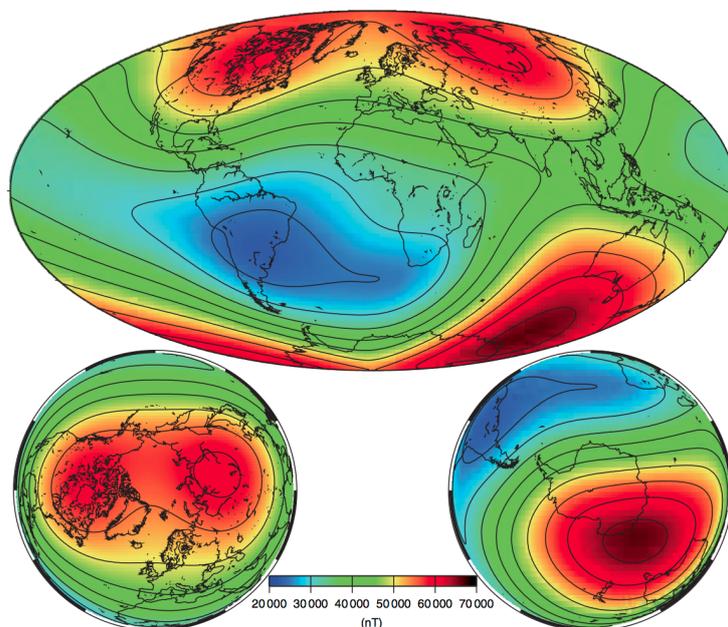


FIGURE 3.3 – Intensité obtenue à la surface de la Terre en 2005 par le modèle CHAOS (Olsen et al. 2006). Les contours sont tous les 5000nT .

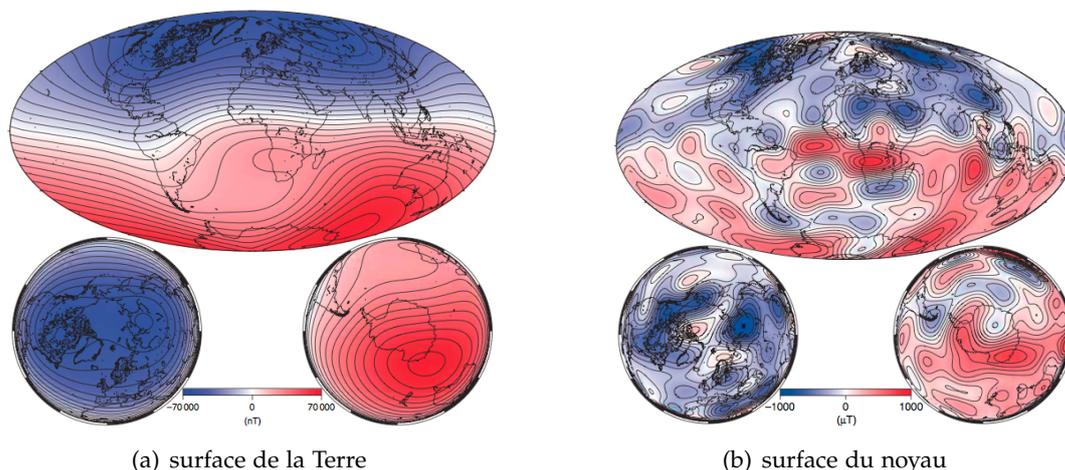


FIGURE 3.4 – Champ radial B_r observé en 2005 par le modèle CHAOS (Olsen et al. 2006) a) à la surface de la Terre, les contours sont tous les 5000nT ; b) à la surface du noyau, les contours sont tous les 100 μ T.

Une des premières caractéristiques observée de la variation séculaire est la dérive vers l'Ouest du champ magnétique à la surface de la Terre. Si on trace des cartes de la déclinaison, particulièrement des lignes de déclinaison nulles, au cours du temps, on observe un net mouvement vers l'Ouest de ces lignes. La première observation a été faite par Halley

dès la fin du XVIII^{ème} siècle. On retrouve cette dérive sur les modèles historiques (Jackson *et al.* 2000) et sur les modèles les plus récents. Ce phénomène a été l'objet de nombreuses études, et son origine est à ce jour encore controversée. Deux théories sont avancées : la première considère que la variation séculaire, dont la dérive vers l'Ouest est une des caractéristiques, résulte de l'advection du champ de grande échelle à la surface du noyau (Bullard *et al.* 1950) ; la seconde avance que ce sont des ondes magnétiques à la surface du noyau qui la régissent (Hide 1966). Dumberry et Finlay (2007) ont utilisé le modèle archéomagnétique CALS7k.2 (Korte *et al.* 2005) pour montrer que la dérive observée à ces échelles de temps pouvait être expliquée par des mouvements générés par advection du champ magnétique. La question reste ouverte et une résolution plus importante des modèles archéomagnétiques pourraient permettre de comprendre s'il existe des ondes qui régissent ces phénomènes, ainsi que leurs temps caractéristiques (Dumberry et Bloxham 2006).

Une autre caractéristique de la variation séculaire est qu'elle présente une asymétrie entre l'hémisphère Pacifique et l'hémisphère Atlantique pour la période récente. L'hémisphère Atlantique montre une variation séculaire assez intense alors qu'elle est plus faible du côté du Pacifique. Un des témoins de la variation séculaire dans l'hémisphère Atlantique est l'anomalie de l'Atlantique Sud observée à l'heure actuelle, qui apparaît nettement sur la figure 3.3. C'est une anomalie d'intensité négative dont le lobe grossit, d'après les études historiques, depuis plusieurs siècles, alors que tout reste assez calme du côté de l'hémisphère Pacifique. La question qui se pose pour les études archéomagnétiques est de savoir si cette asymétrie était déjà présente pour des temps plus anciens. On observe aussi sur les modèles récents des structures qui témoignent de l'influence de termes non dipolaires dans le champ magnétique. Sur la figure 3.3, l'intensité présente deux maxima d'une amplitude d'environ 60000 nT aux hautes latitudes de l'hémisphère Nord, et un seul maximum dans l'hémisphère Sud d'une amplitude proche de 70000 nT. Dans un souci de simplicité, les études paléomagnétiques supposent que le champ magnétique s'apparente à un dipôle axial centré lorsqu'il est moyenné sur des temps suffisamment longs. La question adressée aux études archéomagnétiques et paléomagnétiques est de savoir sur combien de temps doit-on moyenné le champ pour annuler les structures non dipolaires.

On observe une décroissance rapide du dipôle depuis le début des mesures directes d'intensité (1840). Gubbins *et al.* (2006) ont utilisé des mesures de paléointensités et ont montré que le taux de décroissance du dipôle pourrait être beaucoup plus lent, voire presque constant, pour la période 1590-1840. Qu'en est-il pour les périodes plus anciennes ? Les anomalies d'intensité observées dans l'Atlantique Sud et la décroissance du dipôle

sont-elles des fluctuations normales du champ magnétique ou bien, comme proposé par certaines études, le signe de l'approche d'une éventuelle inversion? Encore une fois, des modèles archéomagnétiques comprenant plus de données, avec une meilleure résolution, seront des outils précieux pour répondre à ce type de questions.

D'autre part, la variation de l'intensité ou des directions du champ magnétique peuvent permettre de dater des échantillons archéologiques. Ainsi, la construction de ces courbes pour des localisations proches de sites archéologiques se révèle être un outil précieux pour les archéologues. Afin de fournir la meilleure information possible pour la datation, ces courbes régionales doivent être utilisées conjointement avec leurs incertitudes a posteriori, et ces incertitudes doivent être les plus réalistes possibles.

3.5 Problématique et organisation du manuscrit

Certaines statistiques du champ magnétique sont assez bien connues pour les périodes les plus récentes. Considérer que le champ magnétique résulte d'un processus stationnaire, i.e. que ses statistiques ne varient pas dans le temps, ne paraît pas aberrant tant qu'il n'y a pas d'inversions, et se vérifie sur les périodes les plus récentes. L'objectif de cette étude est de s'appuyer sur le maximum d'information sur les statistiques observées du champ magnétique, en considérant qu'il résulte d'un processus stochastique et stationnaire, afin de contraindre notre modèle. La méthode que nous développons suit une approche bayésienne, et permet une description réaliste des erreurs a posteriori sur le modèle, dont l'estimation est cruciale pour certaines études, particulièrement dans le cadre de l'assimilation de données géomagnétiques.

Ce manuscrit s'organise en cinq parties, regroupant chacune plusieurs chapitres. A la suite de cette introduction, la deuxième partie introduit la méthodologie développée dans cette étude. La théorie du problème inverse, nécessaire à la construction de nos modèles, et la manière dont l'approche bayésienne vient compléter le problème inverse sont décrits dans un premier chapitre. Le deuxième chapitre recense les statistiques observées du champ magnétique et montre comment notre méthode permet de les prendre en compte pour contraindre nos modèles.

Nous appliquons la méthode à la construction de courbes régionales dans une troisième partie. Un premier chapitre traite des erreurs liées aux données archéomagnétiques pour la construction de courbes régionales, et montre la méthode développée dans cette étude pour prendre en compte les erreurs de datation dans les modèles. Le second chapitre est une étude détaillée publiée dans le journal *GJI* (Hellio *et al.* 2014), utilisant cette méthode,

la validant sur des données synthétiques, avant de l'utiliser pour construire des courbes régionales d'intensité, de déclinaison ou d'inclinaison pour l'Europe de l'Ouest et le Moyen-Orient.

La modélisation globale est présentée dans la quatrième partie de ce manuscrit. Celle-ci comprend un chapitre d'introduction avec une discussion sur les données disponibles à la surface de la Terre, et un état de l'art des modèles existants. Nous adaptons la méthode développée dans la partie II pour la construction des modèles globaux, et présentons la méthodologie dans le deuxième chapitre de cette partie. Nous présentons finalement les modèles globaux obtenus avec leurs statistiques d'erreurs qui permettront de discuter les questions soulevées dans cette introduction (Section 3.4).

Une conclusion générale et les perspectives de cette étude seront soulignées dans la dernière partie de ce manuscrit.

Deuxième partie

Approche bayésienne de l'estimation du champ magnétique

LA MÉTHODE BAYÉSIENNE

4

Ce chapitre vise à introduire la méthode bayésienne développée dans cette étude. L'inférence bayésienne, qui tient son nom du théorème de Bayes sur lequel elle s'appuie principalement, consiste à considérer une information avant estimation du modèle, i.e. une information a priori, sous forme de distribution de probabilité, afin de résoudre le problème. Cette information s'appuie sur des statistiques connues et est combinée aux observations afin d'obtenir le modèle final et sa distribution de probabilités. Nous rappelons d'abord rapidement la résolution d'un problème inverse classique par la méthode des moindres carrés dans un cas linéaire et un cas non linéaire, puis montrons le parallèle avec l'approche bayésienne utilisée dans la suite de l'étude.

4.1 Problème inverse classique

4.1.1 Représentation mathématique du champ magnétique

Dans l'hypothèse d'un manteau isolant, le champ magnétique d'origine interne, à l'extérieur du noyau peut être considéré comme le gradient d'un potentiel scalaire V satisfaisant à l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 V = 0. \quad (4.1)$$

La solution de cette équation dans un repère de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , pour r supérieur au rayon du noyau s'écrit :

$$V(t) = a \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l (g_l^m(t) \cos(m\phi) + h_l^m(t) \sin(m\phi)) P_l^m(\cos\theta), \quad (4.2)$$

avec a le rayon de la Terre, g_l^m et h_l^m les coefficients de Gauss, et P_l^m , les polynômes de Legendre avec la quasi-normalisation de Schmidt. On peut, à partir de ce potentiel, calculer le champ magnétique $\mathbf{B} = (B_r, B_\theta, B_\phi)$:

$$\mathbf{B} = -\nabla V. \quad (4.3)$$

L'approche classique introduite par [Bloxham et Jackson \(1992\)](#) pour trouver un modèle continu de champ magnétique global est d'utiliser une interpolation en temps en fonctions supports, souvent des splines $M_n(t)$:

$$\begin{aligned} g_l^m(t) &= \sum_{n=1}^N M_n(t) \tilde{g}_l^{m,n} \\ h_l^m(t) &= \sum_{n=1}^N M_n(t) \tilde{h}_l^{m,n} \end{aligned} \quad (4.4)$$

L'interpolation à l'aide de fonctions splines d'ordre P consiste en la construction d'un polynôme de degré P entre deux dates auxquelles des observations sont disponibles. Il est aussi possible, et c'est le but de notre étude, d'obtenir un modèle discret des coefficients $g_l^{m,n}$ et $h_l^{m,n}$ à des temps t_n . Cette approche est décrite dans la section 4.2. Les notations $(\tilde{g}_l^{m,n}, \tilde{h}_l^{m,n})$ et $(g_l^{m,n}, h_l^{m,n})$ dénotent les coefficients de Gauss obtenus par une méthode utilisant des splines et les coefficients aux temps discrets respectivement. Ce sont les inconnues de notre problème.

4.1.2 Résolution d'un problème linéaire

On cherche à résoudre un problème de la forme :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{m} + \mathbf{e}, \quad (4.5)$$

avec \mathbf{Y} le vecteur des données de taille N_d , \mathbf{m} le vecteur des paramètres du modèle de taille N_m , \mathbf{H} l'opérateur d'observation qui relie le modèle aux données de taille $N_d \times N_m$, et \mathbf{e} le vecteur contenant les erreurs d'observations. Pour résoudre ce problème dans l'approche des moindres carrés, on minimise la fonction coût

$$J(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{m})^T C_{ee}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{m}) + \frac{1}{2}\mathbf{m}^T C_{mm}^{-1}\mathbf{m}, \quad (4.6)$$

avec C_{ee} la matrice de covariance des erreurs sur les données et C_{mm} , une matrice contenant une information a priori sur le modèle ([Tarantola et Valette 1982](#)). C_{ee} est de taille $N_d \times N_d$ et C_{mm} de taille $N_m \times N_m$. Cette information permet de pallier la non-unicité du problème du fait du nombre limité d'observations et des incertitudes sur les mesures, pour obtenir un modèle continu (e.g. [Jackson et al. 2000](#)). Elle peut prendre la forme d'une combinaison de régularisations en temps et en espace, comme c'est souvent le cas. On minimise alors deux normes représentant la complexité spatiale et temporelle du modèle, par exemple, la norme de dissipation ohmique de [Gubbins \(1975\)](#) et la pénalisation de la dérivée seconde en temps de B_r . Plus généralement, elles peuvent s'écrire :

$$C_{mm}^{-1} = \lambda S^{-1} + \tau T^{-1}, \quad (4.7)$$

avec S et T des matrices qui dépendent des normes choisies, et λ et τ , des paramètres contrôlant la régularisation en espace et en temps respectivement. Nous choisissons dans cette étude d'éviter ces régularisations, et d'incorporer dans cette matrice les covariances temporelles estimées grâce aux données paléomagnétiques, satellitaires et d'observatoires. La définition de C_{mm} pour notre étude est discutée au chapitre 5.

Pour en revenir à la minimisation de cette fonction coût, on cherche la solution au problème

$$\begin{aligned}\nabla J(\mathbf{m}) &= 0 \\ &= -H^T C_{ee}^{-1}(\mathbf{Y} - H\mathbf{m}) + C_{mm}^{-1}\mathbf{m},\end{aligned}\quad (4.8)$$

où ∇J correspond à la matrice des dérivées premières J par rapport au modèle. La solution s'écrit

$$\hat{\mathbf{m}} = (H^T C_{ee}^{-1}H + C_{mm}^{-1})^{-1}H^T C_{ee}^{-1}\mathbf{Y} = C_{mm}H^T(C_{ee} + HC_{mm}H^T)^{-1}\mathbf{Y}.\quad (4.9)$$

Les covariances des incertitudes a posteriori sur le modèle sont décrites par

$$C_{post} = (H^T C_{ee}^{-1}H + C_{mm}^{-1})^{-1} = C_{mm} - C_{mm}H^T(C_{ee} + HC_{mm}H^T)^{-1}HC_{mm},\quad (4.10)$$

la matrice de covariance a posteriori.

4.1.3 Résolution d'un problème non-linéaire

Les données archéomagnétiques sont généralement des données d'inclinaison I , de déclinaison D , ou d'intensité F , reliées aux composantes B_r , B_θ et B_ϕ du champ magnétique, en période normale, par

$$\begin{cases} D = \arctan\left(\frac{B_\phi}{-B_\theta}\right) & , \quad -\frac{\pi}{2} \leq D \leq \frac{\pi}{2} \\ I = \arctan\left(\frac{-B_r}{\sqrt{B_\theta^2 + B_\phi^2}}\right) & , \quad -\frac{\pi}{2} \leq I \leq \frac{\pi}{2} \\ F = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2 + B_\phi^2} \end{cases} \quad (4.11)$$

Ces équations étant non-linéaires, le problème inverse doit être résolu de manière itérative. On peut écrire le problème sous la forme

$$\mathbf{Y} = H(\mathbf{m}) + \mathbf{e}.\quad (4.12)$$

La résolution de l'équation 4.12 consiste à trouver les paramètres $(g_l^{m,n}, h_l^{m,n})$ ou $(\tilde{g}_l^{m,n}, \tilde{h}_l^{m,n})$ du champ magnétique étant données les observations recueillies à diverses positions et époques à la surface de la Terre, et une information a priori sur les statistiques du champ magnétique.

Pour obtenir $\mathbf{m} = (g_l^{m,n}, h_l^{m,n})$ ou $(\tilde{g}_l^{m,n}, \tilde{h}_l^{m,n})$ à partir du problème direct (équation 4.12), on minimise à nouveau une fonction coût

$$J(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{H}(\mathbf{m}))^T \mathbf{C}_{ee}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{H}(\mathbf{m})) + \frac{1}{2}\mathbf{m}^T \mathbf{C}_{mm}^{-1}\mathbf{m}. \quad (4.13)$$

Dans le cas d'un problème non-linéaire, comme ici, la solution sera obtenue de manière itérative grâce à l'algorithme de Newton

$$\mathbf{m}_{i+1} = \mathbf{m}_i - (\nabla \nabla J(\mathbf{m}_i))^{-1} \nabla J(\mathbf{m}_i), \quad (4.14)$$

jusqu'à ce qu'on converge vers un modèle qui minimise J . ∇J correspond au gradient de J , i.e. à la matrice des dérivées partielles de J par rapport au modèle,

$$\nabla J(\mathbf{m}_i) = -\nabla \mathbf{H}_i^T \mathbf{C}_{ee}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{H}(\mathbf{m}_i)) + \mathbf{C}_{mm}^{-1}\mathbf{m}_i. \quad (4.15)$$

$\nabla \nabla J$ correspond au Hessian qui s'exprime, en ignorant les termes en dérivées secondes de \mathbf{H} :

$$\nabla \nabla J(\mathbf{m}_i) = \nabla \mathbf{H}_i^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \nabla \mathbf{H}_i + \mathbf{C}_{mm}^{-1}. \quad (4.16)$$

Les relations ci-dessus ont été obtenues en linéarisant $\mathbf{H}(\mathbf{m}) \cong \mathbf{H}(\mathbf{m}_i) + \nabla \mathbf{H}_i(\mathbf{m} - \mathbf{m}_i)$ autour du modèle à l'itération i . $\nabla \mathbf{H}_i$ contient les éléments

$$\nabla \mathbf{H}_i^{jk} = \left(\frac{\partial H^j(\mathbf{m}_i)}{\partial m^k} \right)_{\mathbf{m}_i}, \quad (4.17)$$

avec H^j , la prédiction de la $j^{\text{ème}}$ donnée par le modèle \mathbf{m} . La différence fondamentale entre l'approche des moindres carrés, présentée ici et l'approche bayésienne développée dans la section suivante repose sur l'information portée par la matrice \mathbf{C}_{mm} . Dans le cas classique, elle contient une régularisation arbitraire en temps et en espace tandis que dans notre étude, elle contient une information a priori sur notre connaissance des covariances temporelles du champ magnétique. Cette information a priori sera discutée dans la dernière partie de ce chapitre. Je vais présenter dans la section suivante en quoi l'approche bayésienne diffère de l'approche classique.

4.2 Approche bayésienne

L'approche développée dans cette étude pour résoudre le problème de l'équation 4.12 se place dans le cadre des processus Gaussiens (e.g. [Rasmussen et Williams 2006](#), [Yaglom 2004](#), [Papoulis et Pillai 2002](#)). Ceci signifie que le processus est entièrement décrit par sa moyenne et sa matrice de covariance, les statistiques d'ordres supérieurs n'apportant pas plus d'information. On cherche à trouver la "meilleure" estimation du modèle vrai, compte

tenu d'une information a priori et d'observations. On choisit une estimation non biaisée (la moyenne entre l'état vrai et l'estimation est nulle), linéaire, et qui minimise la variance entre l'état vrai et l'état estimé. On appelle cet estimateur le BLUE pour Best Linear Unbiased Estimator.

4.2.1 Filtre de Kalman

On veut estimer le modèle \mathbf{m} , connaissant des observations \mathbf{Y} et leurs statistiques d'erreurs décrites par la matrice C_{ee} , et une information a priori reposant sur un modèle moyen \mathbf{m}_0 et sur une matrice de covariance $C_{mm} = E[(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)^T]$, décrivant les statistiques du modèle. E représente l'espérance mathématique. Dans le cas linéaire, on écrit le problème sous la forme

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}\mathbf{m}_0 + \mathbf{K}\mathbf{Y}, \quad (4.18)$$

et on cherche \mathbf{A} et \mathbf{K} telles que $E(\epsilon^m) = 0$ et $\frac{dE(\epsilon^m \epsilon^{mT})}{d\mathbf{m}} = 0$ avec $\epsilon^m = \mathbf{m} - \mathbf{m}^t$, \mathbf{m}^t étant l'état vrai. On trouve grâce à la première hypothèse que $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}$, où \mathbf{H} est l'opérateur d'observation (équation 4.5). La deuxième hypothèse nous donne \mathbf{K} , connu sous le nom de matrice de gain de Kalman, ainsi que les équations du BLUE (e.g. [Rasmussen et Williams 2006](#)) :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= C_{mm}\mathbf{H}^T[\mathbf{H}C_{mm}\mathbf{H}^T + C_{ee}]^{-1} \\ \mathbf{m} &= \mathbf{m}_0 + \mathbf{K}(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{m}_0) \\ C_{post} &= C_{mm} - \mathbf{K}\mathbf{H}C_{mm} \end{aligned} \quad (4.19)$$

avec C_{post} , la matrice de covariance a posteriori du modèle \mathbf{m} . On note l'équivalence entre ce résultat et celui donné par l'approche classique des moindres carrés dans le cas linéaire (Equations 4.9 et 4.10 pour lesquelles $\mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$).

Dans le cas non linéaire, on procède à nouveau de manière itérative. Les équations du BLUE deviennent pour l'itération i :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i &= C_{mm}\nabla\mathbf{H}_i^T[\nabla\mathbf{H}_iC_{mm}\nabla\mathbf{H}_i^T + C_{ee}]^{-1} \\ \mathbf{m}_{i+1} &= \mathbf{m}_i + \mathbf{K}_i(\mathbf{Y} - \mathbf{H}(\mathbf{m}_i)) \\ C_{post} &= C_{mm} - \mathbf{K}_i\nabla\mathbf{H}_iC_{mm} \end{aligned} \quad (4.20)$$

avec $\nabla\mathbf{H}_i^{jk}$, défini dans l'équation 4.17.

Il est possible, à partir de la matrice de covariance a posteriori C_{post} , de construire un ensemble de modèles qui satisfassent statistiquement les observations connaissant leurs erreurs. Pour cela, on effectue une décomposition de Choleski $C_{post} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, avec \mathbf{L} une

matrice triangulaire inférieure. Un modèle de l'ensemble est obtenu grâce à la relation $\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{m} + \mathbf{L}\tilde{\mathbf{m}}$, avec $\tilde{\mathbf{m}}$ un vecteur aléatoire Gaussien de moyenne nulle et de variance unitaire. La distribution a posteriori du modèle peut alors être représentée par l'ensemble de modèles. On peut à partir de cet ensemble calculer un modèle moyen et l'écart-type de l'ensemble.

La section suivante décrit en détail l'écriture de la matrice des dérivées partielles $\nabla\mathbf{H}$.

4.2.2 Matrice des dérivées partielles

On souhaite évaluer un modèle décrit sur des époques discrètes régulièrement espacées, s'affranchissant des régularisations arbitraires classiques. Ce modèle contient les coefficients de Gauss $(g_l^{m,n}, h_l^{m,n})$ dont la corrélation temporelle a priori est décrite par la matrice C_{mm} . On suppose que les coefficients de différents degrés ou ordres sont indépendants, i.e. $E(g_l^{m,n}, g_{l'}^{m',n'}) = E(h_l^{m,n}, h_{l'}^{m',n'}) = 0$, si $l \neq l'$ ou $m \neq m'$.

Pour résoudre les équation 4.20, on a besoin d'évaluer un modèle connu \mathbf{b} (soit le modèle initial, soit celui de l'itération précédente), à pas de temps réguliers T , aux temps des observations t_d . On rangera le modèle estimé aux temps des observations dans le vecteur \mathbf{p} . Cette interpolation s'écrit dans le cadre des processus Gaussiens :

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= C_{t_d T}(C_{TT} + C_{post})^{-1}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{\Pi}\mathbf{b}\end{aligned}\tag{4.21}$$

avec \mathbf{b} le modèle moyen aux temps réguliers, et C_{post} sa matrice de covariance d'erreurs. $\mathbf{\Pi}$ est ainsi la matrice de projection des temps du modèle discret sur les temps des observations. $C_{t_d T}$ et C_{TT} , les matrices de covariance entre les temps des observations et les temps du modèle et entre les temps du modèle respectivement, sont calculées à l'aide de la fonction de corrélation $\rho(\tau)$ et de la variance σ^2 des coefficients de Gauss. L'avantage de cette approche est que l'on peut obtenir directement (sans passer par des fonctions supports) des séries de coefficients de Gauss à partir de données réparties irrégulièrement. La fonction de corrélation ainsi que la variance des coefficients sont nécessaires à l'écriture de la fonction d'auto-covariance $C(\tau) = \sigma^2\rho(\tau)$. Les matrices intervenant dans le calcul de $\mathbf{\Pi}$ sont construites à partir de l'information sur le modèle avant estimation comme discuté dans le chapitre suivant.

La résolution d'un problème non linéaire se fait de manière itérative. Nous avons besoin d'un modèle initial couvrant la période voulue. Le choix du modèle initial est important car il permet d'éviter les minima locaux de la fonction coût et en second lieu, de converger plus rapidement vers le minimum global en partant d'un modèle vraisemblable. On peut

choisir de partir de modèles globaux existants, ou encore de considérer que le coefficient g_1^0 est constant, d'une valeur de $-30\mu T$ tandis que les autres coefficients sont nuls. Je note \mathbf{p}_i l'estimation du modèle au temps t_i de la donnée i . Je développe ici l'écriture matricielle du gradient de H pour une observation i :

$$H_i(\mathbf{b}) = \mathcal{H}_i(g_l^m(t_i)) = \mathcal{H}_i\left(\sum_{lmn} \Pi_i^{lmn} g_l^{m,n}\right) \quad (4.22)$$

avec $g_l^{m,n}$, le coefficient de Gauss de degré l , d'ordre m à un temps t_n , et Π_i^{lmn} , le projecteur obtenu pour l'observation i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i}{\partial g_l^{m,n}} &= \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial g_l^m(t_i)} \times \frac{\partial g_l^m(t_i)}{\partial g_l^{m,n}} \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial g_l^m(t_i)} \Pi_i^{lmn} \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec $\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial g_l^m(t_i)}$, la dérivée partielle de la prédiction i par rapport au coefficient $g_l^m(t_i)$ à une seule époque considérée isolément (Gubbins 1983). La construction de la matrice aux dérivées partielles $\nabla \mathcal{H}$ est détaillée en dessous. Les composantes X , Y et Z sont décrites par les équations suivantes :

$$\begin{cases} X(t) = \sum_{l=1}^L \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=0}^l [g_l^m(t) \cos m\phi + h_l^m(t) \sin m\phi] \frac{dP_l^m(\cos \theta)}{d\theta} \\ Y(t) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{l=1}^L \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=0}^l m [g_l^m(t) \sin m\phi - h_l^m(t) \cos m\phi] P_l^m(\cos \theta) \\ Z(t) = -\sum_{l=1}^L (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=0}^l [g_l^m(t) \cos m\phi + h_l^m(t) \sin m\phi] P_l^m(\cos \theta) \end{cases} \quad (4.24)$$

On écrit ici les dérivées partielles par rapport aux g_l^m (il en va de même pour les h_l^m) :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dg_l^m} = \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \cos(m\phi) \frac{dP_l^m(\cos \theta)}{d\theta} \\ \frac{dY}{dg_l^m} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} m \sin(m\phi) P_l^m(\cos \theta) \\ \frac{dZ}{dg_l^m} = -(l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \cos(m\phi) P_l^m(\cos \theta) \end{cases} \quad (4.25)$$

Dans le cas des données archéologiques, on a principalement des données D , I et F :

$$\begin{cases} F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ D = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \\ I = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right) \end{cases} \quad (4.26)$$

les dérivées partielles s'écrivent alors,

$$\begin{cases} \frac{dF}{dg_l^m} = \frac{X}{F} \frac{dX}{dg_l^m} + \frac{Y}{F} \frac{dY}{dg_l^m} + \frac{Z}{F} \frac{dZ}{dg_l^m} \\ \frac{dD}{dg_l^m} = \frac{-Y}{X^2 + Y^2} \frac{dX}{dg_l^m} + \frac{X}{X^2 + Y^2} \frac{dY}{dg_l^m} \\ \frac{dI}{dg_l^m} = \frac{-ZX}{F^2 \sqrt{X^2 + Y^2}} \frac{dX}{dg_l^m} + \frac{-ZY}{F^2 \sqrt{X^2 + Y^2}} \frac{dY}{dg_l^m} + \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{F^2} \frac{dZ}{dg_l^m} \end{cases} \quad (4.27)$$

Le gradient de H contient donc pour finir, les dérivées partielles par rapport aux coefficients de Gauss, mais aussi un projecteur temporel. Le chapitre suivant introduit l'information sur le modèle avant estimation, qui est la clé de cette étude.

DÉFINITION DES A PRIORI

On suppose que le champ magnétique peut être modélisé par un processus Gaussien, auto-régressif (noté AR par la suite), stochastique, continu et stationnaire. Le terme auto-régressif appliqué au champ magnétique signifie que la valeur du champ à un temps t dérive des valeurs aux temps précédents; stochastique, que l'on considère le processus décrivant le champ magnétique comme une variable aléatoire continue; et enfin stationnaire signifie que les statistiques du champ sont les mêmes à n'importe quelle époque. Un processus Gaussien est entièrement décrit par sa moyenne et sa matrice de covariance, il n'y a pas besoin de statistiques d'ordre supérieur pour le décrire. Nous allons chercher à déduire du spectre du champ une information avant estimation sur les modèles de champ géomagnétique.

5.1 Quelles contraintes pour notre information a priori ?

5.1.1 Spectres des séries géophysiques

De nombreuses études ont été menées pour comprendre le comportement temporel du champ magnétique à différentes échelles de temps. [Constable et Johnson \(2005\)](#) ont proposé un spectre temporel composite de séries magnétiques, couvrant des périodes de 100 ans à 100 millions d'années. Ce spectre a été construit à partir de données de paléointensité provenant de sédiments marins pour les périodes allant de 1000 ans à 1 million d'années, et du modèle CALS7K.2 proposé par [Korte et al. \(2005\)](#) pour les plus hautes fréquences. Les spectres des modèles paléomagnétiques SINT2000 ([Valet et al. 2005](#)) et PADM2M ([Ziegler et al. 2011](#)) présentent des caractéristiques similaires mais ne sont pas représentatifs des données pour des fréquences supérieures à 10^2 Ma^{-1} . Seul le spectre proposé par [Constable et Johnson \(2005\)](#) (Figure 5.1) couvre les périodes qui nous intéressent dans le cadre de l'étude de séries archéomagnétiques (de 100 à 10000 ans). Notons que les plus hautes fréquences de ce spectre sont lissées par la régularisation temporelle utilisée dans CALS7K.2. On peut en revanche observer certaines tendances du spectre en fonction de

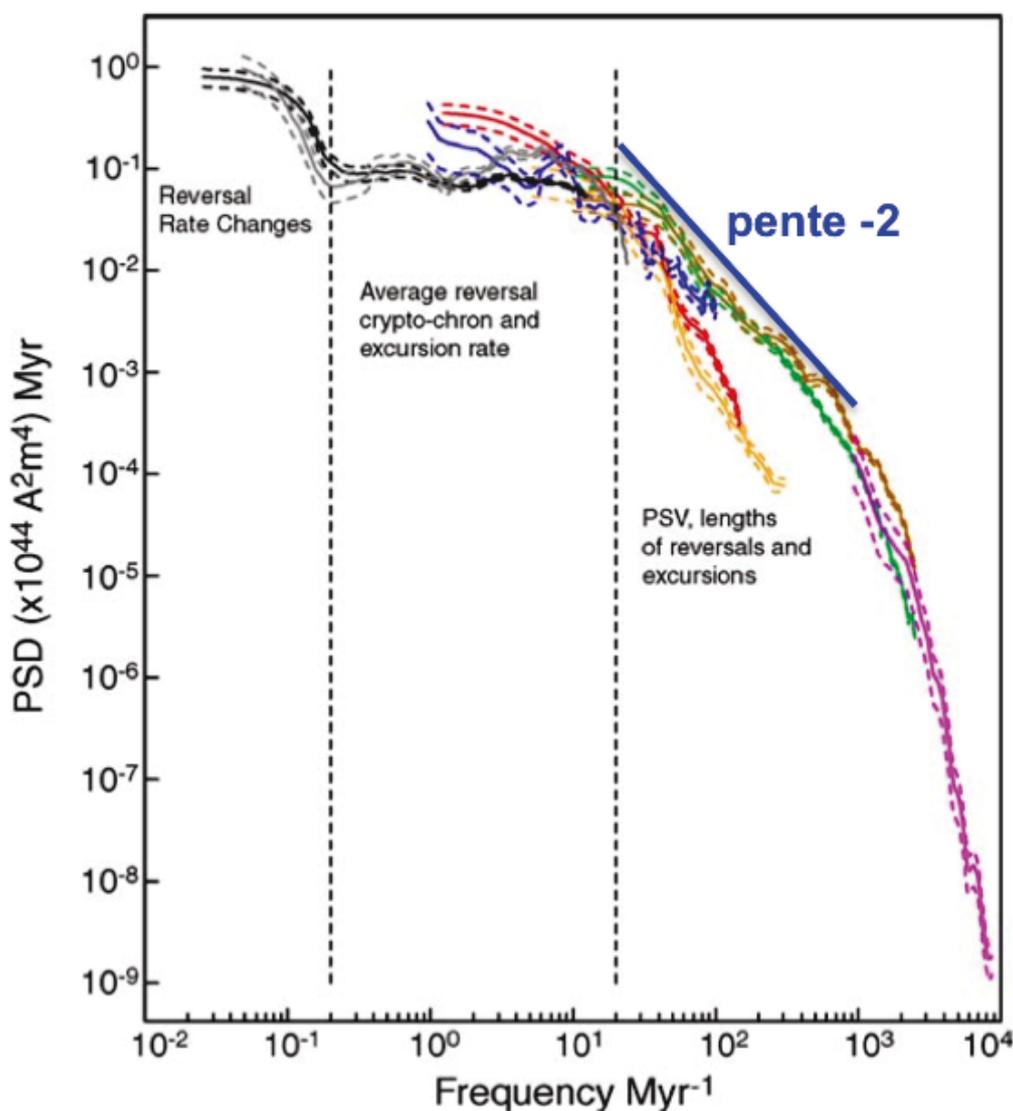


FIGURE 5.1 – Spectre composite du VADM (Constable et Johnson 2005). Modèles de retournement du champ magnétique (noir et gris), données de paléointensité provenant de sédiments marins (bleu, rouge, vert, marron, orange), et modèle CAL57K.2 (rose). La pente d'une loi puissance en f^{-2} est donnée pour comparaison.

la fréquence considérée. A très basses fréquences, le spectre est relativement plat, tandis que plus on augmente la fréquence, plus le spectre apparaît pentu. Pour chaque gamme de fréquences, on peut considérer que le spectre suit une loi puissance. Par exemple, une pente en f^{-2} est représentée en bleu sur la figure 5.1. Elle semble bien caractériser des périodes allant de quelques milliers d'années à quelques centaines de milliers d'années. Le spectre des séries d'observatoires présente lui une pente de -4 pour des périodes allant de 5 à 100 ans (Currie 1968, De Santis et al. 2003). L'analyse de modèles de sédiments lacustres par Panovska (2012) a montré que les spectres temporels de données d'inclinaison, de déclinaison et d'intensité suivaient une loi puissance avec une pente de -2.3 ± 0.6 pour des périodes allant de 300 à 4000 ans.

Le lien entre le spectre d'une série temporelle $S(t)$ (appelé Power Spectral Density ou PSD), et une fonction de covariance $C(\tau)$, est établi par la relation

$$PSD(S(t)) = |\mathcal{F}(C(\tau))| = |\mathcal{F}(S(t))|^2 \quad (5.1)$$

où \mathcal{F} est la transformée de Fourier. Le spectre des séries temporelles nous informe donc sur la fonction de covariance temporelle $C(\tau)$. L'allure des séries temporelles de différentes longueurs représente ainsi une autre source d'information. Selon la longueur de la série et son pas d'échantillonnage, une série temporelle sera différentiable ou non (le champ magnétique physique est lui différentiable). Ce comportement se reflète sur le spectre par une pente en -2 pour les séries continues mais non dérivables ou par une pente en -4 pour les séries dérivables une fois. La Figure 5.2 montre une série du VADM en Eurasie sur les derniers 8000 ans (Genevey *et al.* 2008). On a ici une série longue avec un long pas d'échantillonnage. Sa dérivée première ne semble pas définie à de telles échelles de temps. Dans le cas de séries plus courtes, comme des séries d'observatoires (Figure 5.3), le champ magnétique, ici représenté par sa composante Est Y , est continu et dérivable. Sa dérivée (Figure 5.3c) ne semble par contre pas dérivable. Les observations s'accordent bien à la forme du spectre composite proposé par Constable et Johnson (2005).

On a décrit ici uniquement le spectre du moment dipolaire, ou VADM (Virtual Axial Dipole Moment), car les spectres des autres coefficients sont très mal connus. Les mesures récentes, comprenant les satellites, les observatoires et les données historiques, permettent néanmoins de calculer assez précisément les coefficients de Gauss jusqu'au degré $l = 13$. Hulot et LeMouél (1994) ont cherché à évaluer les temps caractéristiques de la variation séculaire pour les différents degrés des coefficients de Gauss, grâce au spectre spatial obtenu pour leur modèle. Ces temps peuvent être interprétés comme la durée nécessaire à un processus statistique (ici, les coefficients de Gauss) pour se renouveler complètement. Dans un langage statistique, ces temps caractéristiques sont appelés temps de corrélation. Le spectre spatial du champ magnétique correspond à l'énergie magnétique d'origine interne notée W (Lowes 1974). Pour chaque degré, cette énergie s'écrit :

$$W(l) = (l + 1) \sum_{m=0}^l ((g_l^m)^2 + (h_l^m)^2). \quad (5.2)$$

On peut évaluer un spectre instantané pour un temps t ou un spectre moyenné sur une période donnée.

$$W'(l) = (l + 1) \sum_{m=0}^l ((\dot{g}_l^m)^2 + (\dot{h}_l^m)^2), \quad (5.3)$$

où \dot{g}_l^m et \dot{h}_l^m sont les dérivées temporelles des coefficients g_l^m et h_l^m . Les temps caractéristiques du champ magnétique sont alors définis pour chaque degré par :

$$\tau_g(l) = \sqrt{\frac{W(l)}{W'(l)}}. \quad (5.4)$$

Les observations contemporaines du champ peuvent aussi être utilisées pour évaluer la variance des coefficients de Gauss :

$$\sigma_g^2(l) = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^l ((g_l^m)^2 + (h_l^m)^2). \quad (5.5)$$

De manière générale, le temps τ_g diminue avec le degré, ainsi, plus les structures sont de petite échelle, plus les temps associés au processus qui les génèrent sont courts. Les temps obtenus sont de l'ordre du millier d'années pour le dipôle, et de la dizaine d'années pour le degré $l = 14$. Ces temps sont discutés plus en détail à la section 5.3.3 et sont tracés sur la figure 5.8.

Christensen *et al.* (2012) ont montré que les simulations numériques, ainsi que les modèles satellitaires permettaient de retrouver le temps caractéristique de la variation séculaire défini par :

$$\tau_{\dot{g}}(l) = \sqrt{\frac{W'(l)}{W''(l)}}, \quad (5.6)$$

avec

$$W''(l) = (l+1) \sum_{m=0}^l ((\dot{g}_l^m)^2 + (\dot{h}_l^m)^2). \quad (5.7)$$

Leur étude a montré que ce temps était de l'ordre de 10 ans et indépendant du degré. Le temps obtenu pour l'accélération séculaire est remis en question par d'autres études (Gillet *et al.* 2013), en partie parce que les estimations de l'accélération séculaire sont connues pour dépendre de la régularisation temporelle utilisée dans la modélisation (Finlay *et al.* 2012). Cette controverse ne pose cependant pas de problèmes pour notre étude, ni dans la définition de notre a priori, les temps étudiés étant beaucoup plus longs.

Les données géomagnétiques et paléomagnétiques ne permettent pas de connaître le spectre temporel des coefficients individuels sur les échelles de temps qui nous intéressent ici. On est maintenant capable de construire de longues séries temporelles grâce aux simulations numériques. Ces séries constituent un outil précieux pour valider le comportement temporel déduit des observations.

5.1.2 Spectres de simulations numériques de géodynamo

Olson *et al.* (2012) proposent un spectre temporel du VADM calculé à partir de simulations numériques de géodynamo. Leur spectre s'accorde assez bien avec les observations

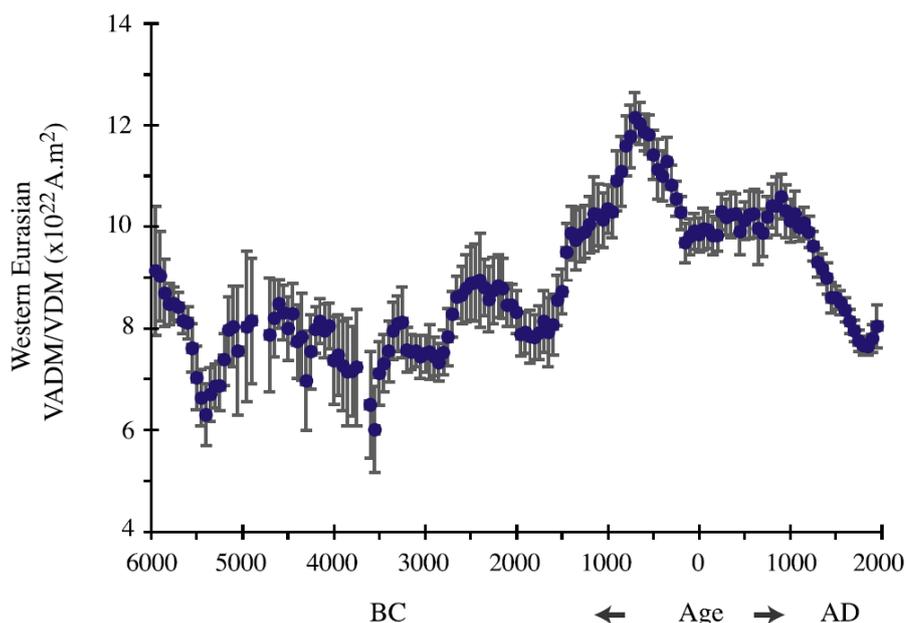


FIGURE 5.2 – VADM aux échelles de temps archéomagnétiques, [Genevey et al. \(2008\)](#).

listées précédemment. Ils proposent notamment une pente de -1.8 pour des périodes de 400 à 200000 ans et de -4 pour des périodes de 10 à 400 ans. Ils observent également une pente de -6 pour des périodes plus courtes que 1 an. Revenons rapidement au temps caractéristique de la variation séculaire de 10 ans estimé par [Christensen et al. \(2012\)](#). Le fait que l'accélération séculaire soit définie sous-entend qu'une série du champ magnétique est dérivable au moins deux fois sur ces échelles de temps, ce qui correspond à une pente en -6 , ou supérieure, pour les hautes fréquences du spectre temporel. Le spectre obtenu par [Olson et al. \(2012\)](#) prévoit une définition possible de l'accélération séculaire, mais pour un temps plus court que celui proposé par [Christensen et al. \(2012\)](#).

Les séries issues de simulations numériques permettent de séparer l'influence de chaque coefficient et ainsi d'étendre l'étude d'[Olson et al. \(2012\)](#) à tous les coefficients de Gauss. Nous nous intéressons ici à des séries temporelles de coefficients de Gauss issues de simulations numériques fournies par Alexandre Fournier ([Fournier et al. 2012](#)). Le temps d'une simulation numérique est adimensionné. Pour le mettre à l'échelle, on commence par estimer les temps de corrélation des coefficients de différents degrés issus de la simulation numérique grâce à l'équation 5.4. [Lhuillier et al. \(2011\)](#) ont montré qu'une loi de la forme $\tau_g(l) = \frac{\tau_{SV}}{l}$, reproduisait de manière satisfaisante les temps de corrélation observés pour la Terre et pour les simulations numériques (ils trouvent $\tau_{SV} \approx 400$ ans pour la Terre). On estime grâce à la même loi le temps τ_{SV} correspondant à la simulation numérique. Le

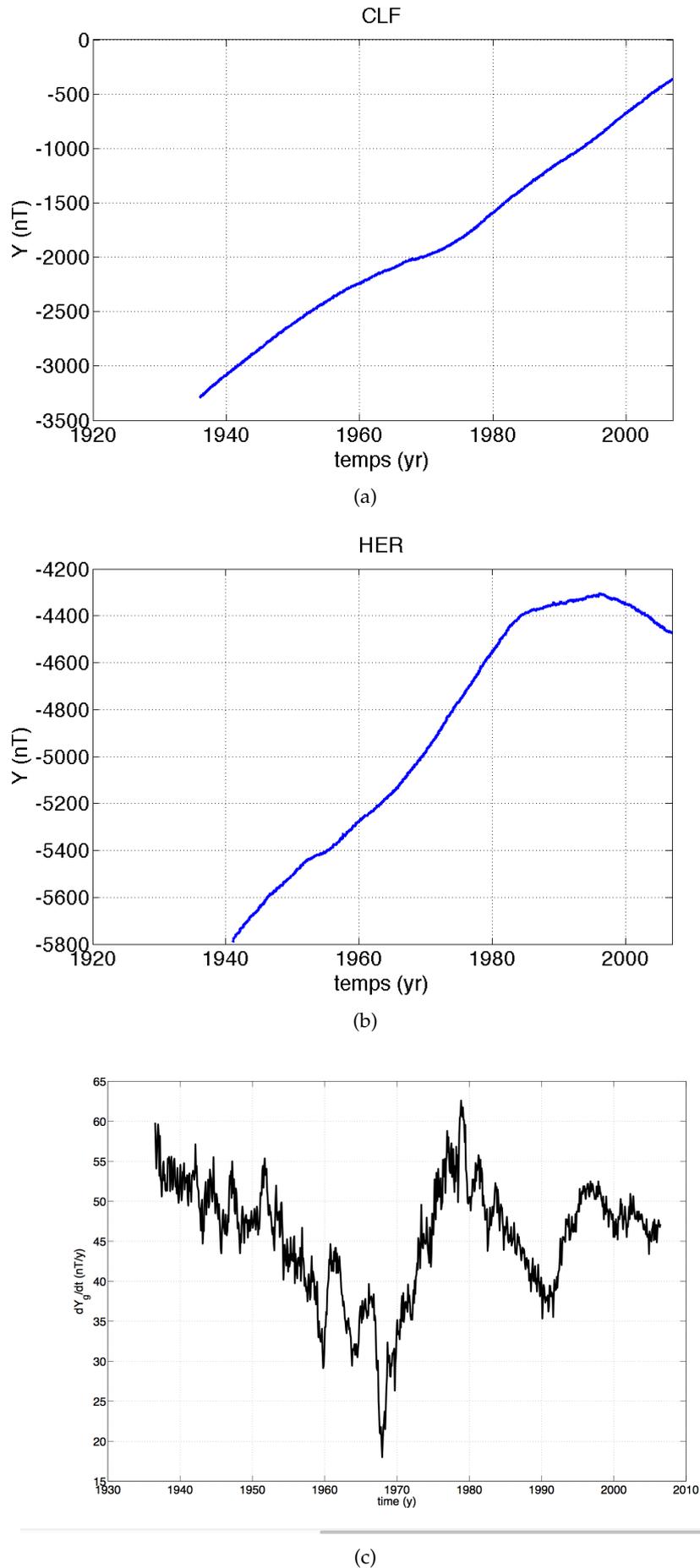


FIGURE 5.3 – Moyennes mensuelles de la composante Y du champ magnétique (a) à Chambon-La-Forêt (France) et (b) à Hermanus (Afrique du Sud), (c) différences annuelles de moyennes mensuelles de la composante Y à Chambon-La-Forêt.

temps mis à l'échelle est égal au temps adimensionné que l'on multiplie par le rapport entre le temps τ_{SV} de la Terre et celui de la simulation numérique. La série dimensionnée a une longueur de 150000 ans et un pas d'échantillonnage de 40 ans.

La figure 5.4 montre le spectre moyen pour tous les coefficients d'un même degré (en rouge) et son écart-type (en noir) ainsi que les spectres de chaque coefficient obtenus par des fenêtres de pondération multiples. La transformée de Fourier d'une fonction d'auto-corrélation de type Matérn-AR2 est tracée en bleu pour comparaison. On voit que les spectres des coefficients de degré 2 et plus sont bien reproduits par la transformée de Fourier de la fonction de corrélation de type Matérn AR2. Pour le degré 1 par contre, cette dernière sort des barres d'erreurs du spectre de la simulation numérique pour des fréquences intermédiaires. Le spectre moyen passe par une pente en -2 entre sa pente en -4 à hautes fréquences et sa pente nulle à basses fréquences, contrairement aux autres degrés qui passent, comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation de type Matérn AR2, directement d'une pente de -4 à une pente nulle. Si on regarde plus en détail le spectre obtenu pour les différents coefficients de degré 1 (le coefficient g_1^0 correspond au spectre vert le plus haut, tandis que le coefficient h_1^1 est en bas), on voit que la forme des spectres pour les coefficients g_1^1 et h_1^1 est proche de celle des spectres de plus hauts degrés. C'est le coefficient g_1^0 qui semble créer cette pente en -2 . Les simulations numériques paraissent être en accord avec le spectre géophysique et les observations pour ce coefficient. Pour les coefficients de plus hauts degrés en revanche, les simulations numériques sont bien reproduites par le spectre d'un a priori de type Matérn AR2.

Nous avons montré que le spectre composite de [Constable et Johnson \(2005\)](#) construit à partir d'observations et de modèles archéomagnétiques, que les mesures d'observatoires ([De Santis et al. 2003](#)) ou sédimentaires ([Panovska 2012](#)), et que les simulations numériques ([Olson et al. 2012](#), [Fournier et al. 2012](#)) apportaient des informations concordantes sur le comportement temporel du champ magnétique ; à savoir, un spectre du VADM avec une pente de l'ordre de -4 pour des périodes décennales à centennales, et de -2 pour des périodes allant jusqu'à la centaine de milliers d'années, et un spectre des autres coefficients passant directement d'une pente 0 à une pente -4 .

Nous avons exposé précédemment que l'information a priori intervenait sous la forme d'une matrice de covariance C_{mm} . Pour définir cette matrice, on suppose une fonction de corrélation $\rho(\tau)$ et la variance des coefficients de Gauss. Cette variance est déterminée à l'aide des coefficients de modèles satellitaires obtenus pour une date t donnée et définie par l'équation 5.5. Il reste désormais à choisir une fonction de corrélation ρ ainsi que son

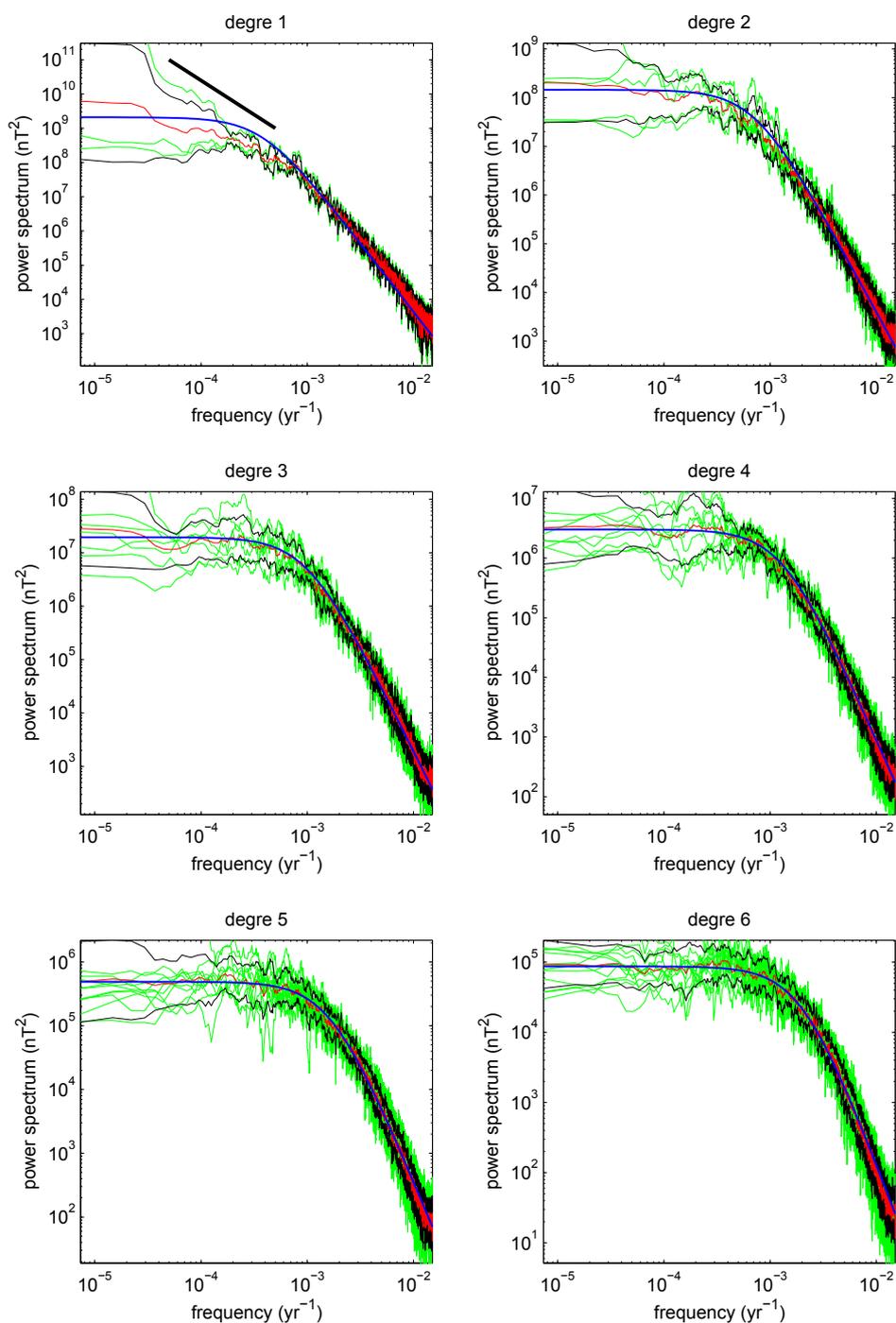


FIGURE 5.4 – Spectres de séries de coefficients de Gauss (calculs de Claire Bouligand) issues de simulations numériques de géodynamo (Fournier et al. 2012). Les spectres pour chaque coefficient sont tracés en vert, le spectre moyen pour tous les coefficients d'un même degré, en rouge, et la fonction d'auto-corrélation de type Matérn AR2 au spectre moyen en bleu.

temps caractéristique τ_c . C'est à partir de ces deux ingrédients que nous construisons les éléments de la matrice de covariance

$$C_{mm}(i, j) = \sigma_g^2 \rho(|t(i) - t(j)|) \quad (5.8)$$

calculée entre les temps auxquels on veut évaluer notre modèle \mathbf{m} .

5.2 Fonctions de corrélation, spectres et équations stochastiques

Cette section vise à introduire différentes informations a priori possibles sur le champ magnétique et à les comparer. Pour rappel, on fait l'hypothèse dans cette approche que les coefficients de Gauss sont une réalisation d'un processus auto-régressif, stochastique, Gaussien, et stationnaire. Ce processus φ est gouverné par une équation différentielle stochastique, définie par l'a priori choisi. Il est associé à une fonction d'auto-corrélation ρ et une variance σ^2 . Afin de le comparer au spectre géophysique décrit précédemment, on peut regarder le spectre d'une réalisation de ce processus, ce qui équivaut à regarder la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation (équation 5.1).

5.2.1 A priori Gaussien

Cet a priori a été utilisé notamment par [Hongre et al. \(1998\)](#). Sa fonction de corrélation s'écrit :

$$\rho(\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2\right), \quad (5.9)$$

et le spectre d'une réalisation d'un processus de ce type s'écrit :

$$S(w) \propto \exp\left(-\frac{\tau_c^2 w^2}{2}\right), \quad (5.10)$$

avec w la pulsation ($w = 2\pi f$) et τ_c , un temps caractéristique du processus. Cette fonction de corrélation est infiniment dérivable, contrairement aux séries discrétisées de champ magnétique, que le pas soit de 1 an ou de 100 ans. En cela, elle ne semble pas un a priori judicieux. [Gillet et al. \(2013\)](#) ont montré que le temps caractéristique de la dérivée première du champ magnétique imposé par cet a priori était en désaccord avec les variations rapides observées sur la variation séculaire.

5.2.2 Les fonctions de Matérn

L'expression générale des fonctions de corrélation de Matérn s'écrit :

$$\rho_\nu(\tau) = \exp\left(-\frac{\sqrt{2\nu}|\tau|}{\tau_c}\right) \frac{p!}{(2p)!} \sum_{i=0}^p \frac{(p+i)!}{i!(p-i)!} \left(\frac{\sqrt{8\nu}|\tau|}{\tau_c}\right)^{p-i} \quad (5.11)$$

avec $\nu = p + 1/2$, et p entier. On s'intéresse ici aux cas où $\nu = 1/2$ et $\nu = 3/2$:

$$\begin{cases} \rho_{1/2}(\tau) = \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_c}\right) \\ \rho_{3/2}(\tau) = \left(1 + \sqrt{3}\frac{|\tau|}{\tau_c}\right) \exp\left(-\sqrt{3}\frac{|\tau|}{\tau_c}\right) \end{cases} . \quad (5.12)$$

Matérn AR₁

Dans le cas où $\nu = 1/2$, la fonction de Matérn correspond à la fonction d'auto-corrélation d'un processus de type AR₁, qui est la solution d'une équation différentielle stochastique de la forme :

$$d\varphi + \frac{1}{\tau_c} \varphi dt = d\zeta(t) \quad (5.13)$$

avec $\zeta(t)$ un processus de Wiener, qui contient le terme aléatoire dans cette équation (Yaglom 2004). La réalisation d'un processus de type AR₁ est continue mais pas dérivable, ce qui convient bien aux périodes échantillonnées par les observations archéomagnétiques, c'est à dire des séries discrétisées avec un pas de temps long, pour lesquelles la dérivée du champ magnétique semble discontinue (Figure 5.2). Le spectre temporel de cette réalisation est :

$$S(w) \propto \frac{1}{w^2 + \frac{1}{\tau_c^2}} . \quad (5.14)$$

Ce spectre suit une loi puissance en w^{-2} à hautes fréquences. Cette pente est caractéristique du spectre de séries temporelles continues mais non dérivables.

Matérn AR₂

Dans le cas où $\nu = 3/2$, la fonction de Matérn correspond à la fonction d'auto-corrélation d'un processus de type AR₂ qui est la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$d\frac{d\varphi}{dt} + \frac{2\sqrt{3}}{\tau_c} d\varphi + \frac{3}{\tau_c^2} \varphi dt = d\zeta(t). \quad (5.15)$$

La réalisation d'un processus de type AR₂ est dérivable une fois, ce qui convient bien au comportement du champ et de sa dérivée temporelle aux périodes interannuelles et centennales (Figures 5.3). Le spectre temporel d'une telle réalisation s'écrit :

$$S(w) \propto \frac{1}{\left(\frac{3}{\tau_c^2} + w^2\right)^2} . \quad (5.16)$$

Ce spectre présente une pente en -4 aux hautes fréquences, pente caractéristique du spectre de séries temporelles dérivables une fois. On peut montrer que le temps τ_c s'écrit

$$\tau_c(l) = \sqrt{3}\tau_g(l) = \tau_{AR2}(l) \quad (5.17)$$

(Gillet *et al.* 2013), où τ_g est le temps caractéristique défini par Hulot et LeMouél (1994) (équation 5.4).

5.2.3 Oscillateur amorti AR2

Le dernier a priori étudié ici est un a priori AR2 qui correspond à l'équation différentielle :

$$d\frac{d\varphi}{dt} + b d\varphi + c\varphi dt = d\zeta(t). \quad (5.18)$$

De façon à pouvoir comparer cet a priori avec l'a priori de type Matérn AR2, on écrit $b = \frac{2\sqrt{3}}{\tau_1}$ et $c = \frac{3}{\tau_2^2}$. Les solutions de cette équation différentielle dépendent du signe de $b^2 - 4c$. Si $b^2 = 4c$, la fonction de corrélation correspond à $\rho_{3/2}$ de l'équation 5.12. On obtient sinon (Papoulis et Pillai 2002)

$$\begin{cases} \rho(\tau) = \frac{1}{2\gamma} [(\alpha + \gamma)e^{-(\alpha-\gamma)|\tau|} - (\alpha - \gamma)e^{-(\alpha+\gamma)|\tau|}] & , b^2 > 4c \\ \rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right) & , b^2 < 4c \end{cases} \quad (5.19)$$

avec $\alpha = \frac{b}{2}$, $\alpha^2 - \gamma^2 = c$ et $\alpha^2 + \beta^2 = c$. Le spectre temporel associé à ce processus s'écrit :

$$S(w) \propto \frac{1}{(c - w^2)^2 + b^2 w^2}. \quad (5.20)$$

Il peut présenter deux ruptures de pente selon les temps τ_1 et τ_2 choisis, ce qui paraît intéressant pour reproduire le comportement du VADM observé à la fois sur les observations et sur les simulations numériques (Constable et Johnson 2005, Olson *et al.* 2012)

5.3 Discussion

5.3.1 Spectres

Les spectres théoriques associés à toutes ces fonctions de corrélation sont représentés sur la Figure 5.5 pour les temps de corrélation suivants (en années) :

AR1	Gaussien	$b^2 < 4c$	$b^2 = 4c$	$b^2 > 4c$
$\tau_c = 20000$	$\tau_c = 1000$	$\tau_1 = 1000$ $\tau_2 = 100$	$\tau_1 = 3000$ $\tau_2 = 3000$	$\tau_1 = 100$ $\tau_2 = 1000$

TABLE 5.1 – Temps de corrélation utilisés pour les figures 5.5, 5.6 et 5.7

Le spectre associé à la fonction d'auto-corrélation gaussienne (courbe noire) décroît très brusquement par rapport aux autres spectres, ce qui signifie qu'il y a très peu d'énergie pour les hautes fréquences. La réalisation d'un tel processus est infiniment dérivable. Cet a

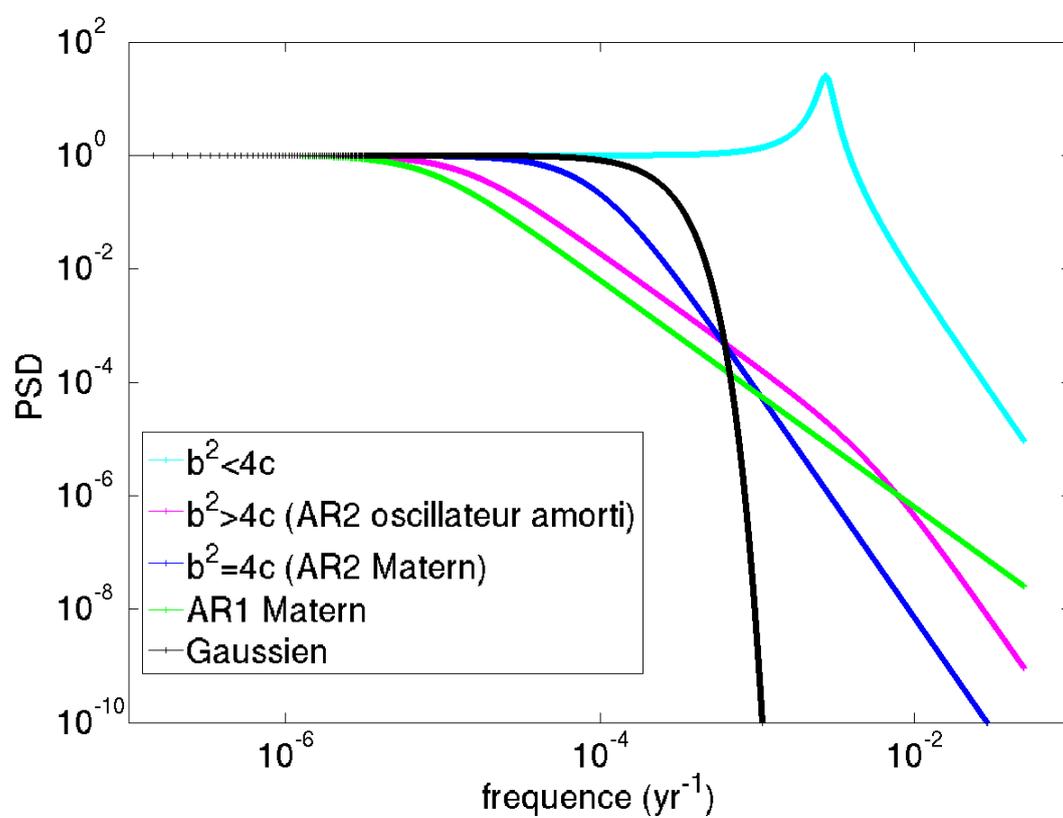


FIGURE 5.5 – Spectres théoriques des diverses fonctions de corrélation décrites en section 5 normalisés par la PSD à basses fréquences.

priori va donner des séries temporelles très lisses par rapport aux observations géomagnétiques. Le spectre associé à la fonction d'auto-corrélation de type oscillateur amorti, dans le cas où $b^2 < 4c$ ne convient pas non plus pour représenter le comportement temporel du champ magnétique. Les trois autres a priori semblent mieux indiqués.

L'a priori de type AR₁ (courbe verte) présente un spectre plat à basses fréquences, avant de décroître en suivant une pente -2 pour les plus hautes fréquences. Cet a priori reproduit bien la pente -2 observée sur le spectre géomagnétique (Figure 5.1) pour des périodes allant de quelques milliers d'années à la centaine de milliers d'années. Il n'est toutefois pas adapté pour reproduire le comportement à hautes fréquences où le spectre géomagnétique présente une pente -4 . Dans le cas de la modélisation de données archéomagnétiques, l'a priori AR₁ semble bien adapté pour reproduire les périodes de quelques milliers d'années mais ne contraint pas suffisamment les plus hautes fréquences qui ne sont pas contraintes non plus, dans ce cas, par les observations.

L'a priori de type AR₂ (courbe bleue) passe d'un spectre plat à une pente en -4 pour les plus hautes fréquences. Il reproduit bien le comportement temporel du champ magnétique pour des périodes allant de la dizaine à la centaine d'années. En revanche, son spectre présente une transition brutale entre cette pente -4 et le plateau observé à basses fréquences, qui ne correspond pas aux observations archéomagnétiques. Il est tout à fait approprié pour modéliser le champ magnétique historique, et de ce fait, il est utilisé pour la construction du modèle COV-OBS de Gillet *et al.* (2013). Il convient aussi bien pour définir l'a priori des plus hautes fréquences pour modéliser le champ archéomagnétique. Il est sans doute plus indiqué pour modéliser le champ archéomagnétique qu'un a priori de type AR₁ car il est adapté aux hautes fréquences qui ne sont pas contraintes par les observations, contrairement aux plus basses fréquences. Le dernier a priori discuté ici correspond à un oscillateur amorti de type AR₂ (courbe magenta). Son spectre présente deux ruptures de pente que l'on peut, en choisissant bien τ_1 et τ_2 , faire coïncider avec les deux ruptures de pente observées sur le spectre des observations du VADM. Le spectre est plat à basses fréquences, commence à décroître en pente -2 après un premier changement de pente pour finir en pente -4 à hautes fréquences. L'inconvénient de cet a priori est qu'il comporte deux paramètres ajustables (τ_1 et τ_2) au lieu d'un seul pour les autres a priori. Il est cependant très intéressant pour contraindre toutes les gammes de fréquences pour la modélisation archéomagnétique ou paléomagnétique.

5.3.2 Séries temporelles

Afin d'illustrer le lien entre le domaine spectral et le domaine physique, on peut regarder l'allure des séries temporelles ayant ces fonctions de corrélation. Pour construire une telle série, il suffit d'écrire la matrice de covariance C associée à la fonction de corrélation ρ , sa taille correspondant à la longueur de la série temporelle que l'on souhaite créer. On effectue alors une décomposition de Choleski de cette matrice $C = LL^T$, avec L une matrice triangulaire inférieure. En multipliant cette matrice L par un vecteur aléatoire Gaussien de moyenne nulle et de variance unitaire, on obtient une série temporelle avec la corrélation souhaitée. Les figures 5.6 et 5.7 présentent des séries obtenues à partir d'un même vecteur aléatoire pour une fonction de corrélation de type Matérn AR1 (vert), Matérn AR2 (bleu) et oscillateur amorti (magenta).

Les séries de la figure 5.6 sont échantillonnées tous les 200 ans afin de ne s'intéresser qu'aux plus basses fréquences. Les temps de corrélation utilisés sont les mêmes que pour les spectres présentés plus haut (Figure 5.5), détaillés dans le tableau 5.1. Les séries vertes et magenta sont très similaires car dans cette gamme de fréquences, l'oscillateur amorti a une pente -2 . Les séries obtenues pour un processus avec les a priori oscillateur amorti et Matérn AR1 sont donc continues mais pas dérivables pour les périodes considérées. La série Matérn AR2 (bleue) est beaucoup plus lisse, son spectre (Figure 5.5) est plus bas que celui des autres a priori pour cette gamme de fréquences, il y a donc moins d'énergie pour les hautes fréquences. De plus, la pente en -4 correspond à une série dérivable une fois. La série temporelle de la Figure 5.2 pour les observations du champ archéomagnétique correspond assez bien aux caractéristiques des séries synthétiques Matérn AR1 et oscillateur amorti. Les séries de la figure 5.7 quant à elles, sont beaucoup plus courtes et échantillonnées tous les ans afin de comparer le comportement des différents a priori à hautes fréquences. L'oscillateur amorti cette fois est plus lisse et proche du comportement Matérn AR2. Ces deux a priori ont les mêmes pentes à hautes fréquences donc sont dérivables une fois, et sont moins énergétiques que l'a priori Matérn AR1.

5.3.3 Temps de corrélation

L'a priori sur le processus AR2 est complètement déterminé par sa variance et son temps de corrélation définis aux équations 5.5 et 5.4. Les temps τ_g utilisés dans notre étude sont tracés en fonction du degré sur la figure 5.8. La loi proposée par Lesur *et al.* (2008), à savoir $\tau_g(l) = 800l^{-1.4}$ obtenue à partir de leur modèle GRIMM construit à l'aide de données satellitaires, et celle proposée par Lhuillier *et al.* (2011) afin d'expliquer les temps

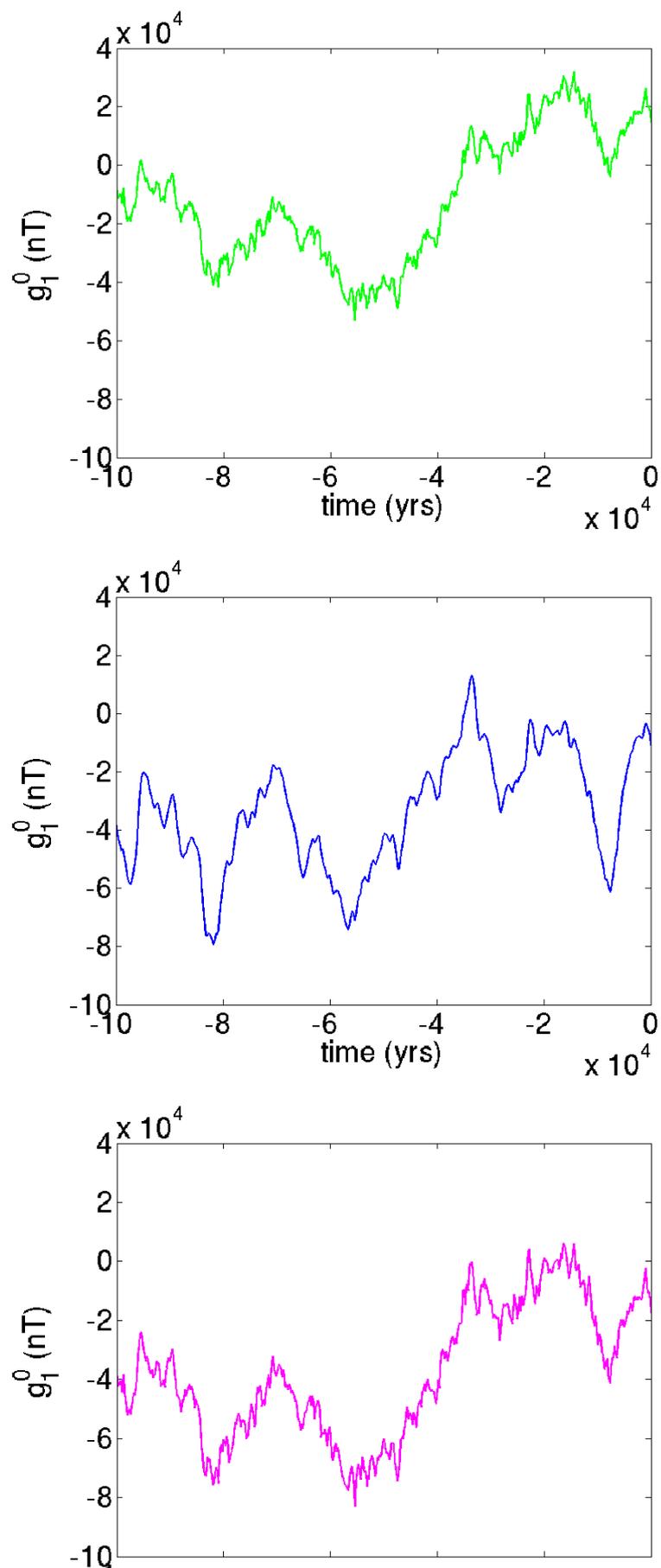


FIGURE 5.6 – Séries synthétiques de g_1^0 obtenues à partir d'une fonction de corrélation de type Matérn AR1 (vert), Matérn AR2 (bleu) et oscillateur amorti (magenta), échantillonnées tous les 200 ans.

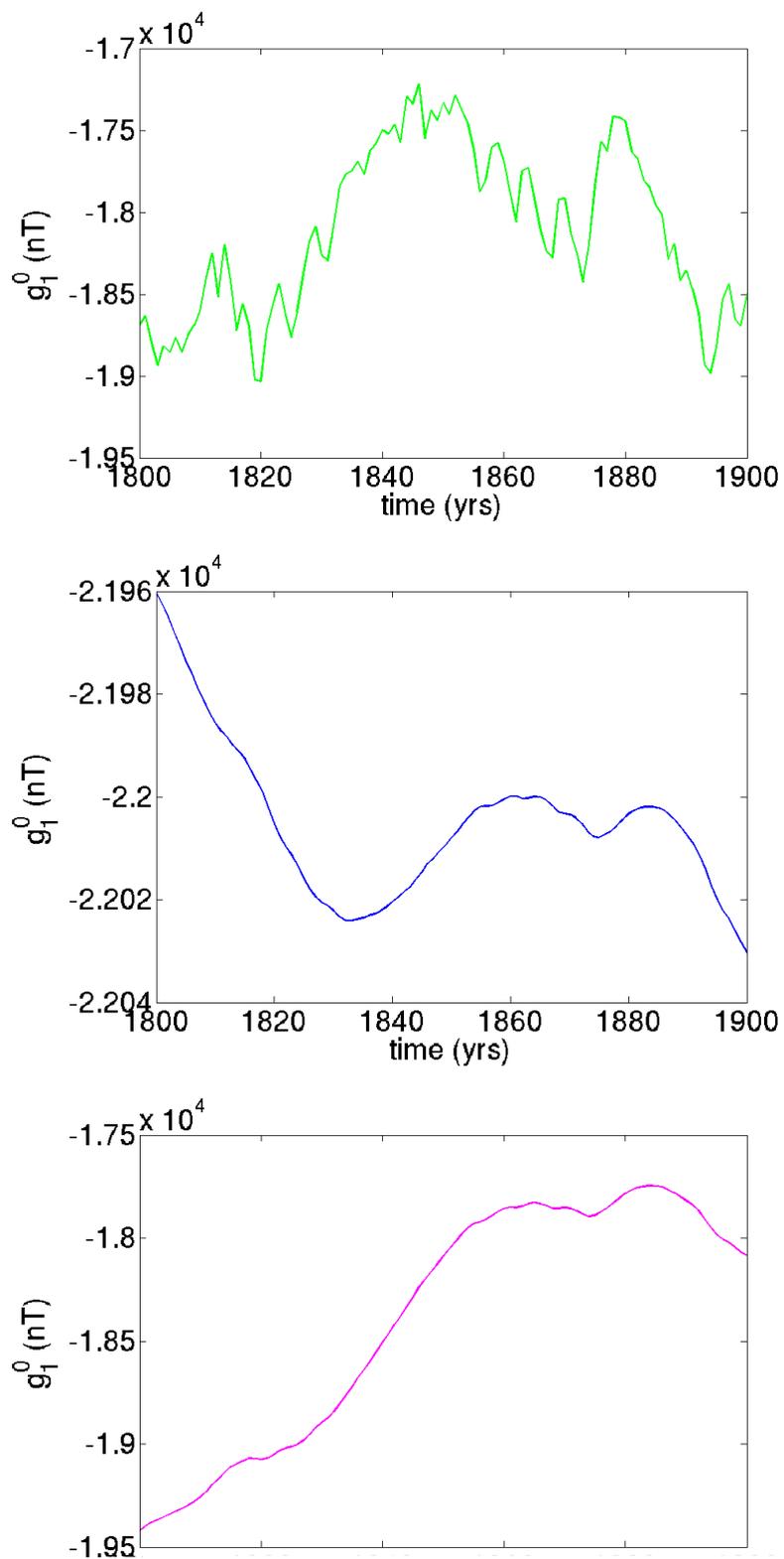


FIGURE 5.7 – Séries synthétiques de g_1^0 obtenues à partir d'une fonction de corrélation de type Matérn AR1 (vert), Matérn AR2 (bleu) et oscillateur amorti (magenta), échantillonnées tous les ans.

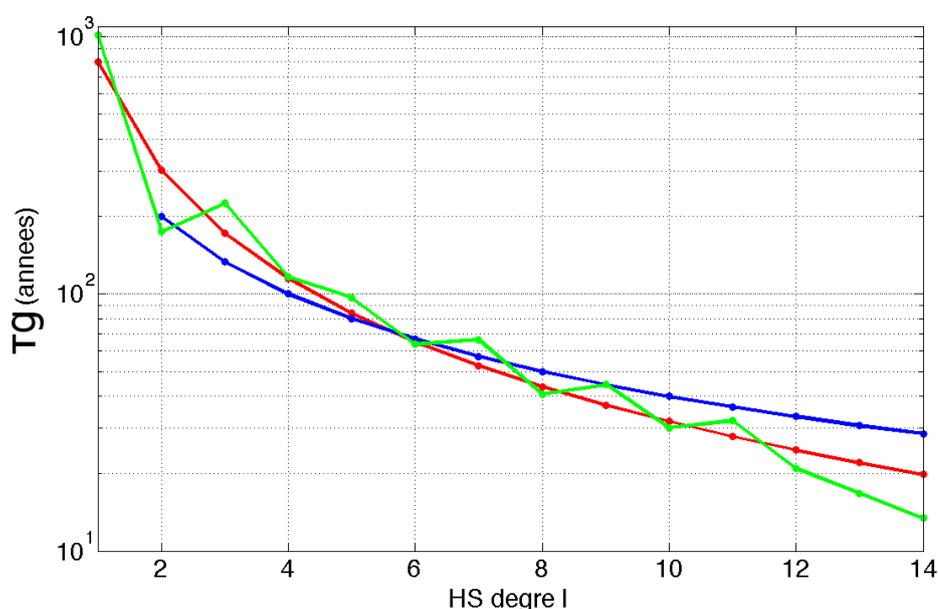


FIGURE 5.8 – Loi pour les temps de corrélation en fonction du degré harmonique. La loi $\tau_g(l) = 800l^{-1.4}$ est tracée en rouge (Lesur et al. 2008) et la loi $\tau_g(l) = 400l^{-1}$ en bleu (Lhuillier et al. 2011). Les temps τ_g observés (Hulot et LeMouél 1994) sont tracés en vert.

observés sont tracées en rouge et bleu pour comparaison. Le temps τ_g , obtenu ici grâce au modèle *gufm-sat-E3* (Finlay et al. 2012) au temps $t = 2005.0$, est proche de la loi proposée par Lesur et al. (2008). Ce constat est naturel, la variation séculaire moyenne étant très similaire entre les modèles satellitaires. La loi proposée par Lhuillier et al. (2011) s'éloigne des temps observés et de la loi à deux paramètres proposée par Lesur et al. (2008). Cependant, l'étude statistique accompagnant cet article et basée sur le modèle SIS (Stationary Isotropic Statistical model) proposé pour le champ magnétique par Hulot et LeMouél (1994), montre que les observations obtenues par les modèles satellitaires et par les simulations numériques sont bien expliquées par les statistiques d'erreurs d'une loi inverse. De plus, cette loi permet de mettre à l'échelle les temps obtenus pour les simulations numériques (Section 5.1.2). Nous utilisons dans cette étude les temps observés sur les modèles satellitaires (vert) puisqu'ils sont bien contraints pour les degrés qui nous intéressent.

Pour un processus AR1, nous ne pouvons pas utiliser les mêmes temps que pour un processus AR2 car ces derniers sont calculés à l'aide de la dérivée première en temps des coefficients de Gauss alors qu'un processus de type AR1 n'est, par définition, pas dérivable. De plus, cet a priori est approprié pour des périodes archéomagnétiques mais ne contraint pas assez les hautes fréquences. Nous ne l'utilisons donc pas dans la suite de l'étude.

Comme discuté dans la section précédente (5.1.2), seul le coefficient g_1^0 semble présenter les deux ruptures de pente rendues possibles par l'utilisation de l'a priori oscillateur amorti.

Les coefficients autres que le dipôle sont mal contraints par les observations sur l'ensemble de la gamme de fréquences, quand les simulations numériques semblent indiquer qu'ils suivent approximativement un a priori de type Matérn AR2. Nous choisissons donc de représenter l'information a priori sur le coefficient g_1^0 par un processus d'oscillateur amorti (de type AR2) tandis que les autres coefficients seront représentés par un processus de type Matérn AR2. L'a priori est donc fixé pour tous les coefficients, il nous reste à déterminer les temps de corrélation du coefficient g_1^0 reproduisant au mieux le spectre géophysique. Ceci peut être fait visuellement, cependant, on peut également imposer le comportement souhaité à hautes fréquences comme [Gillet *et al.* \(2013\)](#) l'ont fait pour déterminer le temps d'un processus de type Matérn AR2 (équation 5.17). Il ne nous restera ainsi qu'un des deux temps à ajuster au spectre géophysique. On souhaite qu'à hautes fréquences, le rapport entre l'auto-covariance de la dérivée première du processus φ et l'auto-covariance du processus soit égal à celui obtenu pour la période satellitaire à un temps t :

$$\frac{C_{\dot{\varphi}}(0)}{C_{\varphi}(0)} = \left(\frac{\sigma_g^2}{\sigma_g^2} \right)_t = \frac{1}{\tau_g^2} \quad (5.21)$$

avec φ le processus gouverné par l'équation différentielle 5.18 et $C_{\varphi}(\tau)$, l'auto-covariance associée à ce processus définie, comme déjà mentionné, par

$$C_{\varphi}(\tau) = \frac{C_{\varphi}(0)}{2\gamma} [(\alpha + \gamma)e^{-(\alpha-\gamma)|\tau|} - (\alpha - \gamma)e^{-(\alpha+\gamma)|\tau|}], \quad (5.22)$$

et $C_{\varphi}(0) = \sigma_g^2$, la variance du processus. D'après [Hulot et LeMouél \(1994\)](#), [Stein \(1999\)](#), (p. 21), on a :

$$C_{\dot{\varphi}}(\tau) = -\frac{d^2 C_{\varphi}(\tau)}{d\tau^2}. \quad (5.23)$$

Des équations 5.22 et 5.23, on obtient $\frac{C_{\dot{\varphi}}(0)}{C_{\varphi}(0)} = \alpha^2 - \gamma^2$. En reprenant l'équation stochastique du processus φ (équation 5.18) où $b = \frac{2\sqrt{3}}{\tau_1}$ et $c = \frac{3}{\tau_2^2}$ et en se rappelant que $c = \alpha^2 - \gamma^2$, on écrit $\tau_2 = \sqrt{3}\tau_g = \tau_{AR2}$.

La figure 5.9 illustre le choix du temps τ_1 qui reproduit visuellement les pentes observées sur le spectre géophysique. Le temps $\tau_1 = 85$ ans (spectre magenta) semble le plus adapté. Il reproduit à la fois une pente en -2 pour des périodes allant de la centaine d'années à plusieurs dizaines de milliers d'années et une pente -4 pour les périodes décennales. Une fois ce temps déterminé, tous les ingrédients nécessaires à la définition de l'a priori pour le coefficient g_1^0 sont réunis.

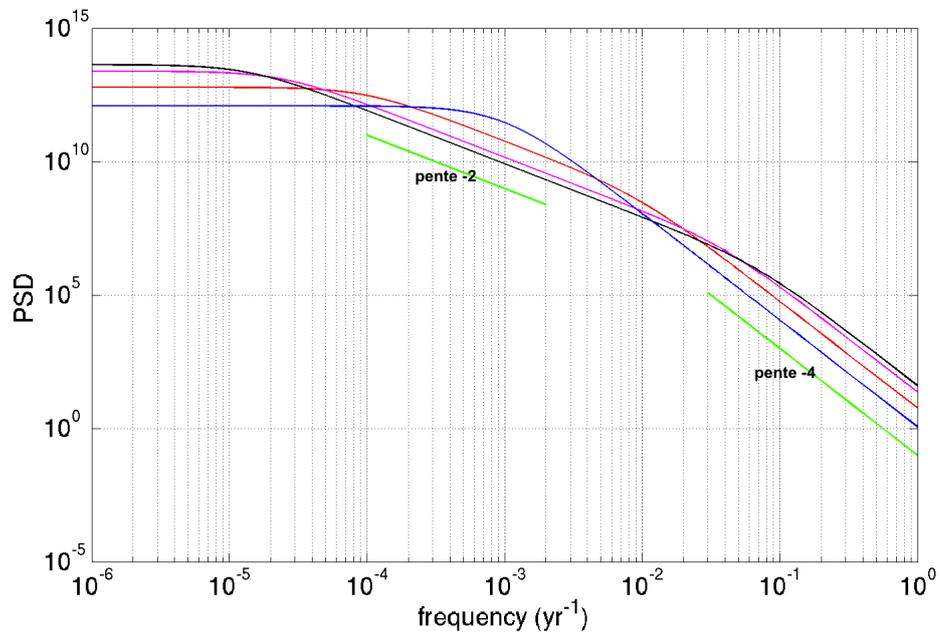


FIGURE 5.9 – Spectres théoriques des fonctions de corrélation de l'oscillateur amorti pour $\tau_1 = 1700$ ans en bleu, $\tau_1 = 345$ ans en rouge, $\tau_1 = 85$ ans en magenta et $\tau_1 = 50$ ans en noir.

Troisième partie

Modélisation régionale

LES ERREURS LIÉES AUX DONNÉES ARCHÉOMAGNÉTIQUES ET À LA MODÉLISATION RÉGIONALE

Les données archéomagnétiques ont une répartition très inhomogène à la surface de la Terre. Il existe de nombreuses données en Europe alors que l'Afrique, par exemple, est très faiblement couverte (Figure 6.1). Plus généralement, l'hémisphère Nord regroupe la quasi-totalité des données disponibles à la surface de la Terre et les données ne couvrent que les continents, pas les océans. Les courbes régionales permettent de profiter de cette

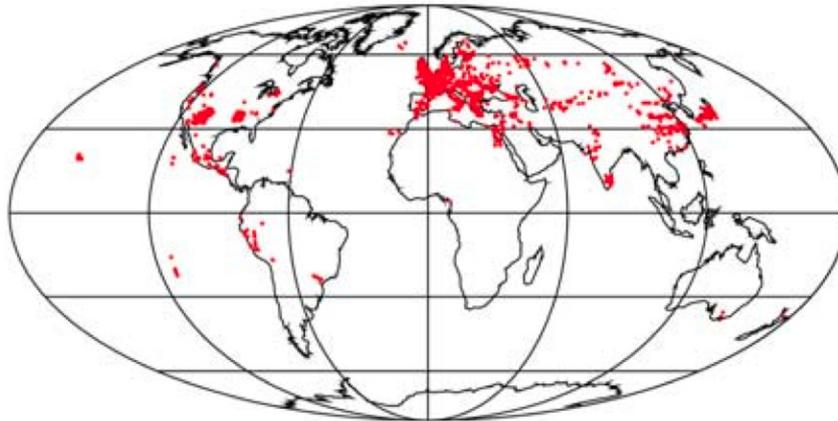


FIGURE 6.1 – Distribution des vestiges archéologiques et des laves réunis dans la base de données Arch3k (Donadini et al. 2009).

concentration de données à certains endroits. De nombreuses courbes ou bases de données existent pour l'Europe (e.g. Thébault et Gallet 2010, Bucur 1994, Genevey et al. 2009; 2013, Hervé et al. 2013, Kovacheva et al. 2009, Hellio et al. 2014, Lanos et al. 2005). On dispose aussi pour le Moyen-Orient d'un grand nombre de données et de nombreuses courbes régionales (e.g. Gallet et al. 2002, Genevey et al. 2003, Shaar et al. 2011). De plus en plus de régions sont aujourd'hui étudiées, des données existent désormais pour le Brésil (Hartmann et al. 2011), l'Afrique de l'Ouest (Mitra et al. 2013), ou encore la Chine (Cai et al. 2014). Cette liste ne se

veut pas exhaustive mais regroupe les zones les plus étudiées. Ces courbes régionales sont beaucoup utilisées pour la datation archéomagnétique. Elles peuvent aussi s'avérer utiles pour comprendre les processus ayant lieu au cœur du noyau de la Terre en comparant, par exemple, les courbes de différentes régions, afin de déterminer si les variations temporelles observées témoignent de phénomènes locaux ou de plus grande échelle.

6.1 Les erreurs de localisation

Un modèle régional représente les variations temporelles du champ magnétique, ou d'une de ses composantes, en un point donné à la surface de la Terre. Pour produire de telles courbes, les données qui se situent à une distance périphérique raisonnable (que l'on discutera plus tard) du point auquel on souhaite construire notre modèle doivent être transférées en ce point. Je décris par la suite les deux réductions utilisées pour les données de direction et les données d'intensité. Pour une description plus complète, se référer au chapitre 2 de [Tauxe \(2010\)](#).

6.1.1 Dipôle axial centré

Pour des données d'intensité, on fait généralement l'hypothèse que le champ magnétique de la Terre s'apparente à celui d'un dipôle axial centré (ou Geocentric Axial Dipole GAD). Si on fait la moyenne du champ magnétique sur une période de temps suffisante, cette hypothèse se vérifie, c'est pourquoi ceci est couramment utilisé en archéomagnétisme ou paléomagnétisme. On peut alors écrire en première approximation :

$$V = a \left(\frac{a}{r} \right)^2 g_1^0 P_1^0(\cos \theta) = a \left(\frac{a}{r} \right)^2 g_1^0 \cos \theta, \quad (6.1)$$

et donc $B_r = \frac{2g_1^0 a^3 \cos \theta}{r^3}$, $B_\theta = \frac{g_1^0 a^3 \sin \theta}{r^3}$ et $B_\phi = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\tan |I| = 2 \tan |\lambda|}, \quad (6.2)$$

avec λ , la latitude. Cette équation est la relation fondamentale du paléomagnétisme, elle est parfois appelée formule du dipôle, et relie directement l'inclinaison du champ magnétique à la latitude. Comme pour l'inclinaison, l'intensité est elle aussi reliée à la co-latitude dans l'hypothèse d'un dipôle axial centré :

$$F = |g_1^0| \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}. \quad (6.3)$$

Ainsi, si on connaît l'intensité F_1 à la co-latitude θ_1 et que l'on veut estimer l'intensité F_2 attendue en un point de co-latitude θ_2 , on peut écrire dans l'hypothèse d'un dipôle axial

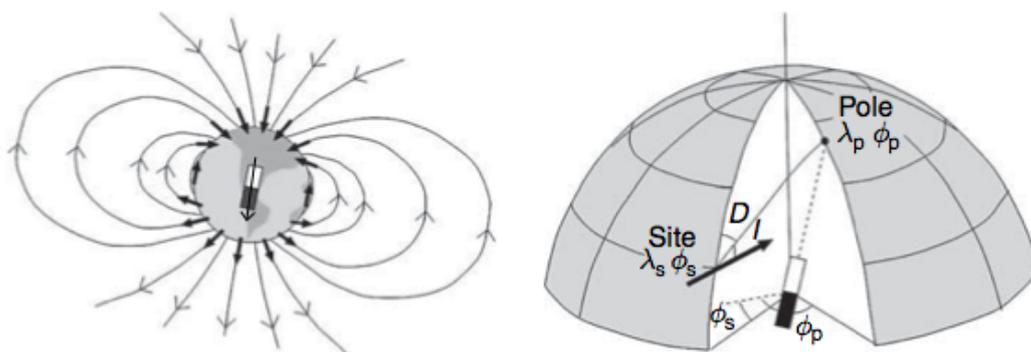


FIGURE 6.2 – Transformation de directions mesurées en un site de coordonnées λ_S, ϕ_S en un pôle virtuel de coordonnées λ_P, ϕ_P en supposant un dipôle géocentrique (gauche). Déclinaison et inclinaison mesurée au site et angles nécessaires pour déterminer les coordonnées du pôle virtuel (droite). (Turner et al. 2007)

centré :

$$F_2 = F_1 \frac{\sqrt{3 \cos^2 \theta_2 + 1}}{\sqrt{3 \cos^2 \theta_1 + 1}}. \quad (6.4)$$

Pour la construction de courbes régionales en un lieu de co-latitude θ_2 , on mesure les intensités de données réparties à différentes co-latitudes autour de ce lieu et on calcule les intensités que l'on attendrait en ce lieu si le champ magnétique était un dipôle axial centré.

6.1.2 Pôle géomagnétique virtuel (VGP)

Les variations spatiales des mesures de directions (inclinaison ou déclinaison) sont relativement importantes par rapport aux variations d'intensité (Daly et Goff 1996). Ainsi, contrairement aux réductions des mesures d'intensité pour lesquelles la formule 6.4 est une bonne approximation, Shuey et al. (1970) ou Bucur (1994) ont montré que la méthode provoquant le moins d'erreurs de relocalisation pour les mesures de direction était la méthode du pôle géomagnétique virtuel (VGP). La figure 6.2 illustre les différentes étapes de cette méthode. On a en S , site de coordonnées (λ_S, ϕ_S) , une mesure de la direction du champ magnétique (D, I) . On imagine alors le dipôle géocentrique (mais désormais pas nécessairement axial) qui aurait engendré une telle direction du champ magnétique au point S . Il est représenté sur la figure 6.2a par son moment dipolaire ou Virtual Dipole Moment (VDM) (vecteur noir). Les deux points pour lesquels ce vecteur coupe la surface de la Terre sont appelés les pôles géomagnétiques virtuels (VGP). A partir d'un de ces pôles, on peut alors estimer la direction du champ magnétique en n'importe quel point à la surface de la Terre. La figure 6.2b montre les angles intervenant dans le calcul des coordonnées du pôle virtuel (λ_P, ϕ_P) . On commence par estimer la co-latitude magnétique θ_m grâce à la relation 6.2. Pour localiser ensuite le pôle, on obtient grâce à des formules de trigonométrie

classiques :

$$\cos \theta_p = \cos \theta_s \cos \theta_m + \sin \theta_s \sin \theta_m \cos D \quad (6.5)$$

avec D l'angle entre le Nord géographique et le grand cercle joignant le point S au pôle, qui correspond à la déclinaison mesurée au point S . On détermine ensuite la différence de longitude $\Delta\phi$ entre le pôle et le site S :

$$\sin \Delta\phi = \sin \theta_m \frac{\sin D}{\sin \theta_p}. \quad (6.6)$$

Si $\cos \theta_m \geq \cos \theta_s \cos \theta_p$ alors $\phi_p = \phi_s + \Delta\phi$, sinon $\phi_p = \phi_s + \pi - \Delta\phi$. Maintenant que les coordonnées du pôle virtuel associé à la mesure des directions au site S sont déterminées, on peut estimer, à partir de ce pôle, les directions en n'importe quel point à la surface de la Terre. L'inclinaison est déterminée en calculant la co-latitude magnétique au site où l'on souhaite évaluer la direction et en utilisant à nouveau la relation 6.2. La déclinaison s'obtient alors via

$$\cos D = \frac{\cos \theta_p - \cos \theta_s \cos \theta_m}{\sin \theta_s \sin \theta_m}. \quad (6.7)$$

On utilise préférentiellement cette méthode pour réduire les données de direction en un site afin d'y construire une courbe régionale.

Les erreurs engendrées par ces deux méthodes de réduction dépendent de la distance entre le site de réduction et le site de mesure. [Shuey et al. \(1970\)](#) ont montré que les erreurs augmentaient proportionnellement à la distance entre les deux sites jusqu'à une distance de 2200 km environ. Ils ont montré aussi que pour des distances plus élevées, l'erreur était du même ordre de grandeur que la variation séculaire du champ magnétique. Dans notre étude, et comme conseillé par la plupart des auteurs cités dans cette section, nous nous limiterons à des données situées dans un rayon maximal de 500 km autour du site de réduction. Afin d'illustrer la discussion précédente et d'estimer les erreurs géographiques engendrées par la réduction en un point, nous prenons pour exemple des données françaises que l'on souhaite réduire aux coordonnées de Paris. On part du modèle IGRF de l'année 2010 et on évalue la déclinaison, l'inclinaison et l'intensité prédites par le modèle à chacun des sites où on a une observation. On réduit ces prédictions aux coordonnées de Paris grâce aux équations 6.4, 6.5 et 6.6 et on obtient D_{red} , I_{red} et F_{red} . On évalue ensuite ces mêmes composantes grâce au même modèle à Paris, on obtient ici D_{paris} , I_{paris} et F_{paris} . On peut alors calculer l'erreur de localisation pour une donnée d'intensité par exemple : $\epsilon_F = \frac{F_{paris} - F_{red}}{F_{paris}}$. Ces erreurs sont petites devant les erreurs de mesures et nous les négligeons par la suite.

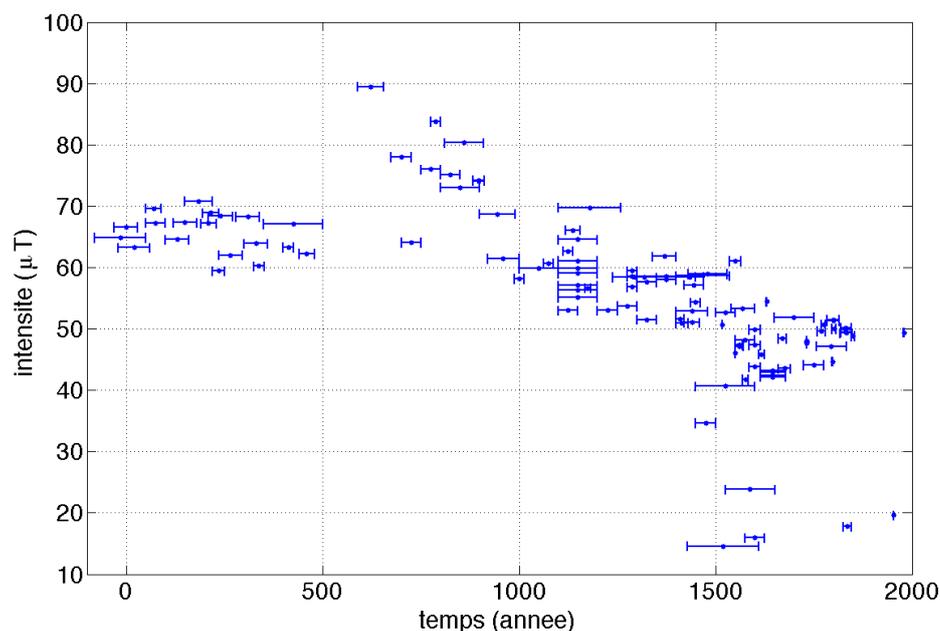


FIGURE 6.3 – Données d'intensité d'Europe de l'Ouest provenant de plusieurs études toutes référencées dans [Genevey et al. \(2013\)](#). La moitié d'une barre d'erreur représente l'erreur uniforme fournie par les différentes études.

6.2 Les erreurs de datation

La prise en compte des erreurs de datation est un des enjeux majeurs de la modélisation de données archéomagnétiques. La figure 6.3 montre un ensemble de données d'intensité d'Europe de l'Ouest, toutes réduites à Paris, avec leurs erreurs de datation (pour les références, voir [Genevey et al. \(2013\)](#)). Les erreurs de datation sont généralement uniformes, comme c'est le cas sur la figure 6.3, car les données sont datées grâce à des contraintes historiques ou archéologiques qui fournissent une date minimale et une date maximale. Elles peuvent être gaussiennes dans les plus rares cas de datation au ^{14}C .

6.2.1 Etat de l'art

De nombreuses études ont cherché à tenir compte de ces erreurs de datation dans leurs méthodes de modélisation. Une première approche serait de considérer le temps comme un paramètre du problème inverse, que l'on cherche à déterminer en même temps que les coefficients de Gauss. [Bloxham et Gubbins \(1985\)](#) ont discuté cette idée pour les erreurs de localisation des données historiques et en ont conclu que cela mènerait à un problème inverse trop peu contraint et très non linéaire. [Jackson et al. \(2000\)](#) et [Korte et al. \(2005\)](#) ont proposé de convertir les erreurs de localisation des données historiques, ou de datation des données archéomagnétiques, respectivement, en erreurs de mesures. Les erreurs de

datation sont divisées en catégories (erreurs entre 10 et 50 ans, 50 et 100 ans...), chacune de ces catégories se voyant attribuer une valeur calculée à partir de la variabilité temporelle du champ magnétique. Cette valeur est ensuite ajoutée à l'erreur de mesure de manière quadratique dans la matrice C_{ee} . Cette méthode a été ultérieurement remplacée pour la modélisation archéomagnétique car l'influence des erreurs de datation dépend fortement de la variabilité temporelle du champ magnétique (Korte *et al.* 2009).

Des études plus récentes considèrent que seules les erreurs de datation et les erreurs de mesure représentent des informations fiables. Elles proposent alors une approche statistique pour en tenir compte. Au lieu d'inverser pour un jeu de données comprenant chacune une erreur de mesures, Korte *et al.* (2009) proposent de créer un millier de jeux de données secondaires construits à partir du jeu de données initial, en introduisant pour chacun une erreur aléatoire sur le temps et sur la mesure et d'inverser alors pour tous ces jeux de données secondaires. Tous les modèles obtenus sont alors des représentations possibles du champ magnétique. Korte *et al.* (2009) appellent cette méthode le bootstrap sur la datation et sur la mesure (MA pour Measurement Age bootstrap). Ils proposent aussi une méthode appelée ST pour bootstrap spatial et temporel, où le bootstrap est réalisé sur le jeu de données. Chacune des données est retirée une fois du jeu de données afin de tester son influence sur le modèle. Les deux méthodes présentées précédemment sont alors combinées, ce que Korte *et al.* (2009) appellent le MAST (Korte et Constable 2011, Korte *et al.* 2011, Thébault et Gallet 2010). A partir des modèles obtenus du bootstrap, Korte *et al.* (2009) calculent la moyenne et l'écart-type des modèles. Licht *et al.* (2013) adoptent la même stratégie mais fournissent un ensemble de modèles, et non une moyenne et un écart-type, ce qui apporte plus d'informations aux utilisateurs potentiels sur les incertitudes du modèle.

Je décris par la suite les différentes approches que nous avons explorées afin de prendre en compte les erreurs de datation dans notre méthode, avant de présenter celle qui a donné lieu à l'écriture de l'article qui clôt ce chapitre (Hellio *et al.* 2014). Le choix de la fonction de corrélation a priori utilisée dans les sections suivantes est argumenté dans le chapitre 7.

6.2.2 Méthode avec intégrale

Les processus Gaussiens nous ont paru être un moyen de considérer de manière directe les erreurs en temps. Dans cette étude régionale, le problème inverse que l'on cherche à résoudre est un problème inverse linéaire comme décrit dans le chapitre précédent (Section 4.2.1) :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{m} + \mathbf{e} \quad (6.8)$$

avec \mathbf{Y} les données d'inclinaison, de déclinaison ou d'intensité, \mathbf{m} le modèle que l'on cherche à estimer, les paramètres du modèle étant aussi la déclinaison, l'inclinaison ou l'intensité et \mathbf{e} , les erreurs de mesure. On résout alors le problème grâce aux équations du BLUE (équations 4.20). J'introduis ici deux nouvelles notations : C_{dd} et C_{md} qui correspondent aux matrices de covariance a priori entre les dates des données et, les dates du modèle et des données respectivement. Pour un type de données (D , I ou F), on écrit :

$$\begin{aligned} C_{ddij} &= \sigma^2 \rho(|t_{di} - t_{dj}|) \\ C_{mdij} &= \sigma^2 \rho(|t_{mi} - t_{dj}|) \end{aligned} \quad (6.9)$$

avec σ , l'écart-type et ρ la fonction d'auto-corrélation a priori du processus. Ces matrices sont reliées à C_{mm} , la matrice de covariance a priori sur le modèle, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C_{md} &= E(mY^T) = E(mm^T H^T) = C_{mm} H^T \\ C_{dd} &= E(Y Y^T) = E(H m m^T H^T) = H C_{mm} H^T \end{aligned} \quad (6.10)$$

Les équations 4.20 s'écrivent avec ces notations :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= C_{md} [C_{dd} + C_{ee}]^{-1} \\ \mathbf{m} &= \mathbf{m}_0 + \mathbf{K} (\mathbf{Y} - H \mathbf{m}_0) \\ C_{post} &= C_{mm} - \mathbf{K} C_{md}^T \end{aligned} \quad (6.11)$$

Connaissant les distributions ϕ_i des erreurs de datation (gaussienne pour la datation au ^{14}C ou uniforme pour la datation utilisant des contraintes historiques ou archéomagnétiques), il peut paraître naturel d'introduire dans le calcul des matrices de covariances C_{dd} et C_{md} (équation 6.9), une pondération par les erreurs en temps de la manière suivante :

$$C_{ddij} = \sigma_i \sigma_j \int_{t_i - \epsilon_i}^{t_i + \epsilon_i} \int_{t_j - \epsilon_j}^{t_j + \epsilon_j} \phi_i(t) \phi_j(t') \rho(t - t') dt dt', \quad (6.12)$$

$$C_{mdij} = \sigma_i \sigma_j \int_{t_i - \epsilon_i}^{t_i + \epsilon_i} \phi_i(t) \rho(t_i - t) dt. \quad (6.13)$$

En pratique, j'ai pris ϵ correspondant à trois fois l'écart-type dans le cas gaussien ou à la moitié de la largeur de l'erreur dans le cas uniforme. Nous avons calculé la valeur analytique de ces intégrales dans le cas d'une distribution uniforme. Pour les distributions gaussiennes, l'intégrale a été estimée numériquement par discrétisation.

La figure 6.4 montre la densité de probabilité d'une série d'intensité en Syrie obtenue à l'aide de cette méthode. Le minimum atteint par le modèle un peu avant 3000 BC nous a semblé suspect. La méthode que l'on vient de présenter impose à la moyenne du modèle sur une barre d'erreur à être égale à la valeur mesurée. C'est pour cette raison qu'on observe ce minimum qui ne devrait pas apparaître.

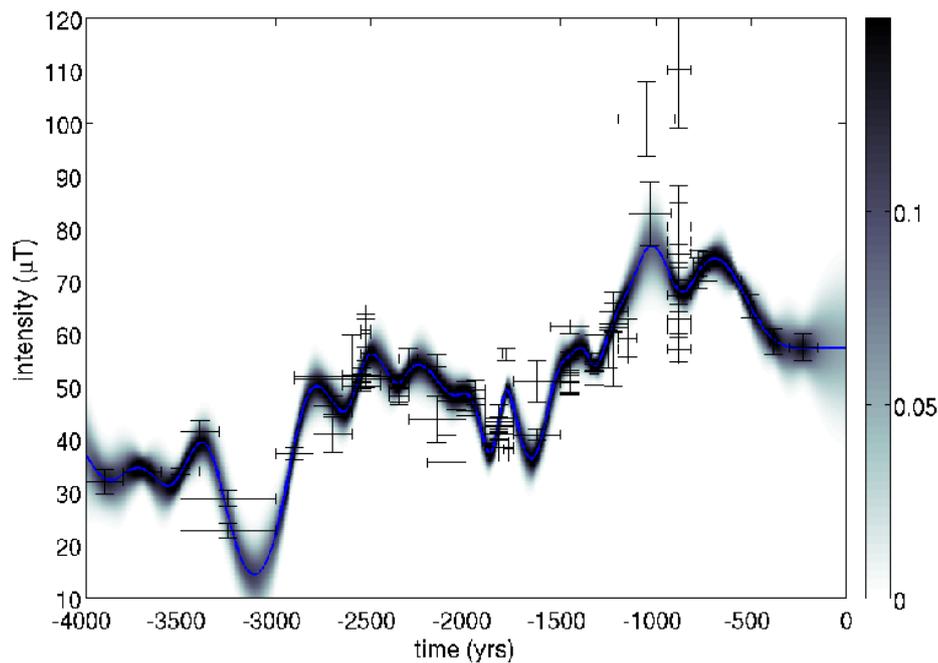


FIGURE 6.4 – Fonction de densité de probabilité de l'intensité pour la Syrie dans le cas où on pondère par intégration sur les barres d'erreurs. Données d'archéointensité collectées par [Gallet et al. \(2003\)](#).

6.2.3 Echantillonnage régulier et poids dans la matrice d'erreurs

Nous avons testé par la suite une autre méthode s'inspirant de la méthodologie développée par [Lanos \(2004\)](#), qui consiste à subdiviser les données et à leur attribuer un poids selon plusieurs critères. Pour le même jeu de données que dans le cas précédent, nous avons subdivisé chacune des barres d'erreurs en sous-données espacées d'un pas de temps constant. Une grande barre d'erreur aura donc plus de sous-données qu'une plus petite. Le poids attribué à chaque sous-donnée est pondéré dans la matrice de covariance des erreurs C_{ee} . Nous considérons ici une distribution uniforme des erreurs en temps, nous pourrions également facilement subdiviser les données en suivant une loi de distribution gaussienne.

La densité de probabilité obtenue dans ce cas est montrée figure 6.5. Le minimum obtenu précédemment en 3000 BC a une amplitude plus réaliste, cependant, le modèle est beaucoup plus lisse et présente des paliers quand les barres d'erreurs sont importantes. Ce comportement est encore plus marquant si on étudie un cas avec peu de données et de grandes barres d'erreurs en temps. La figure 6.6 présente une série synthétique d'intensité (rouge) et des données synthétiques bruitées à partir de cette série. Ces données présentent des erreurs de mesure de $1 \mu\text{T}$ et des erreurs en temps de 250 ans. On observe dans ce cas que malgré la pondération par les poids dans la matrice d'erreurs, le fait de subdiviser

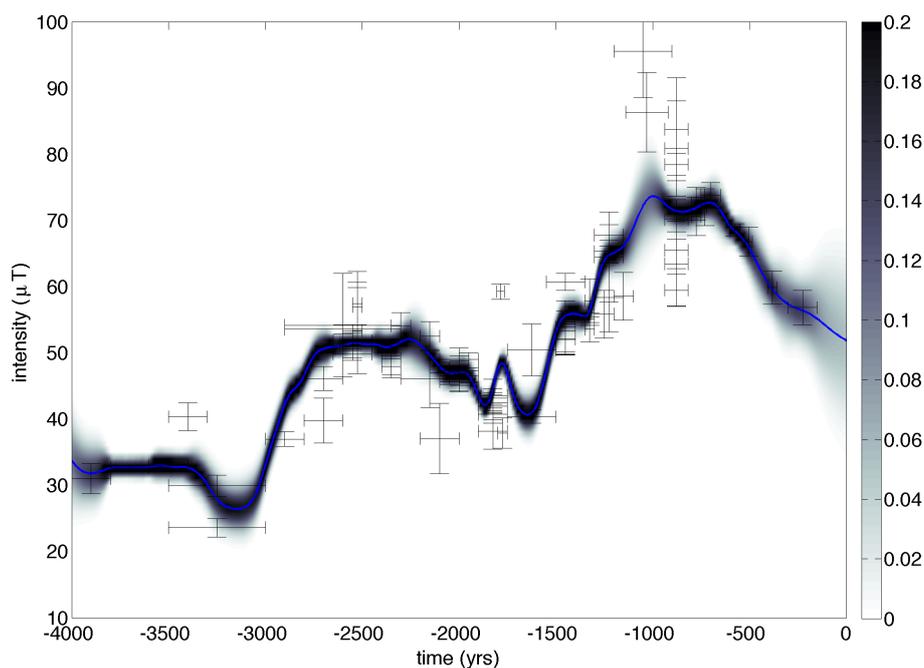


FIGURE 6.5 – Fonction de densité de probabilité de l’intensité pour la Syrie dans le cas où on subdivise les données. Données d’archéointensité collectées par [Gallet et al. \(2003\)](#).

les données biaise le résultat. En effet, la série vraie sort à plusieurs reprises des barres d’erreurs du modèle. Cette méthode n’est pas correcte car en subdivisant les données en un ensemble de sous-données, on impose à la courbe de passer par l’ensemble de ces points et non par un seul point. Elle paraît plus adaptée en présence de nombreuses données redondantes.

6.2.4 Bootstrap et MCMC pour échantillonner efficacement

Après ces différents essais, nous avons décidé d’utiliser une méthode de bootstrap présentée à la Section 6.2.1, qui consiste, comme expliqué précédemment, à tirer aléatoirement une valeur à l’intérieur des barres d’erreurs afin de construire de multiples jeux de données, et d’inverser pour chacun d’eux. Le but dans notre cas, est d’obtenir un modèle moyen et une matrice de covariance a posteriori pour chacun de ces jeux de données. Contrairement à [Korte et al. \(2009\)](#) et [Thébault et Gallet \(2010\)](#) par exemple, nous n’utilisons le bootstrap que pour explorer les erreurs de datation, les erreurs de mesure sont elles, prises en compte directement dans la matrice de covariance d’erreurs C_{ee} . Il est évident que certains jeux de données ont une probabilité d’exister plus importante que d’autres. A partir de l’espérance du modèle et de sa matrice de covariance, on peut calculer la probabilité a posteriori de chacune des dates en sachant le modèle et la loi de distribution de la date des données. On

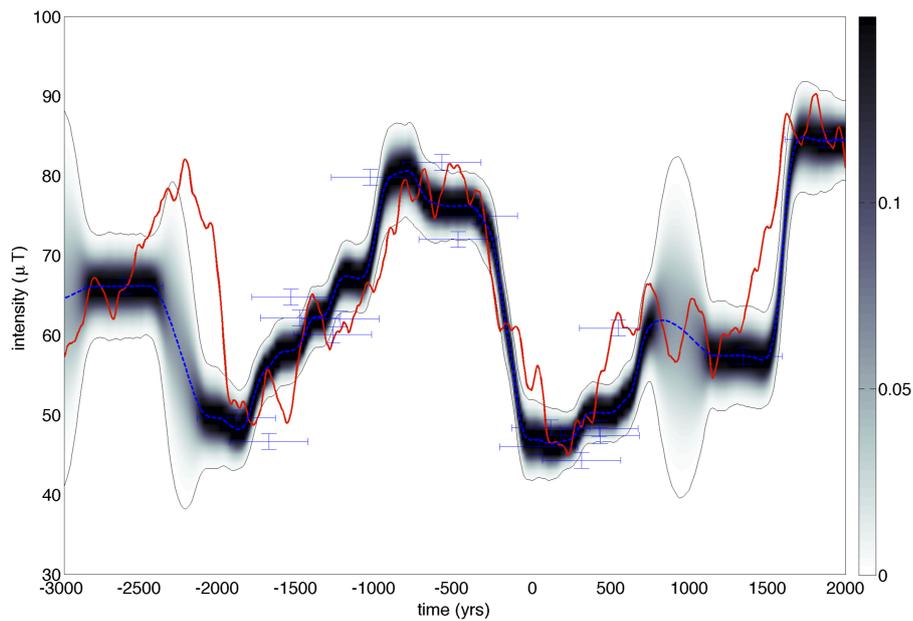


FIGURE 6.6 – Fonction de densité de probabilité de l'intensité pour une série synthétique dans le cas où on subdivise les données.

note \mathbf{t} le vecteur des dates, \mathbf{Y} les mesures et \mathbf{m} le modèle. La probabilité jointe du tirage s'écrit d'après Lanos (2004) (voir aussi Pavón-Carrasco *et al.* (2011)) :

$$p(\mathbf{t}, \mathbf{Y} | \mathbf{m}) \propto p(\mathbf{m} | \mathbf{t}, \mathbf{Y}) \times p(\mathbf{t}, \mathbf{Y}) \quad (6.14)$$

avec $p(\mathbf{m} | \mathbf{t}, \mathbf{Y})$ la probabilité du modèle a posteriori qui suivra une loi gaussienne $\mathcal{N}(\hat{\mathbf{m}}, \sigma_m)$ et $p(\mathbf{t}, \mathbf{Y})$ la probabilité sur la date (uniforme ou gaussienne selon le type de datation utilisée). La notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ signifie que la distribution suit une loi gaussienne de moyenne μ et d'écart-type σ . Pour avoir la probabilité des dates d'un tirage $p(\mathbf{t} | \mathbf{m})$, on écrit

$$p(\mathbf{t} | \mathbf{m}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{t}, \mathbf{Y} | \mathbf{m}) d\mathbf{Y}. \quad (6.15)$$

A partir de la probabilité de la date de chacune des données, on peut calculer la probabilité du tirage P_{tir} en multipliant toutes les probabilités des dates du tirage entre elles. On pourra alors écrire pour N tirages :

$$\hat{M} = \frac{\hat{m}_1 P_{tir_1} + \hat{m}_2 P_{tir_2} + \dots + \hat{m}_N P_{tir_N}}{\sum_{k=1}^N P_{tir_k}}. \quad (6.16)$$

Pour prendre en compte la probabilité des tirages dans la dispersion du modèle a posteriori, on écrira une simple relation de proportionnalité entre les tirages. On choisit par exemple d'attribuer 100 réalisations au tirage avec la probabilité maximale $P_{tir_{max}}$. On calcule alors le nombre de réalisations associées à tous les autres tirages comme étant :

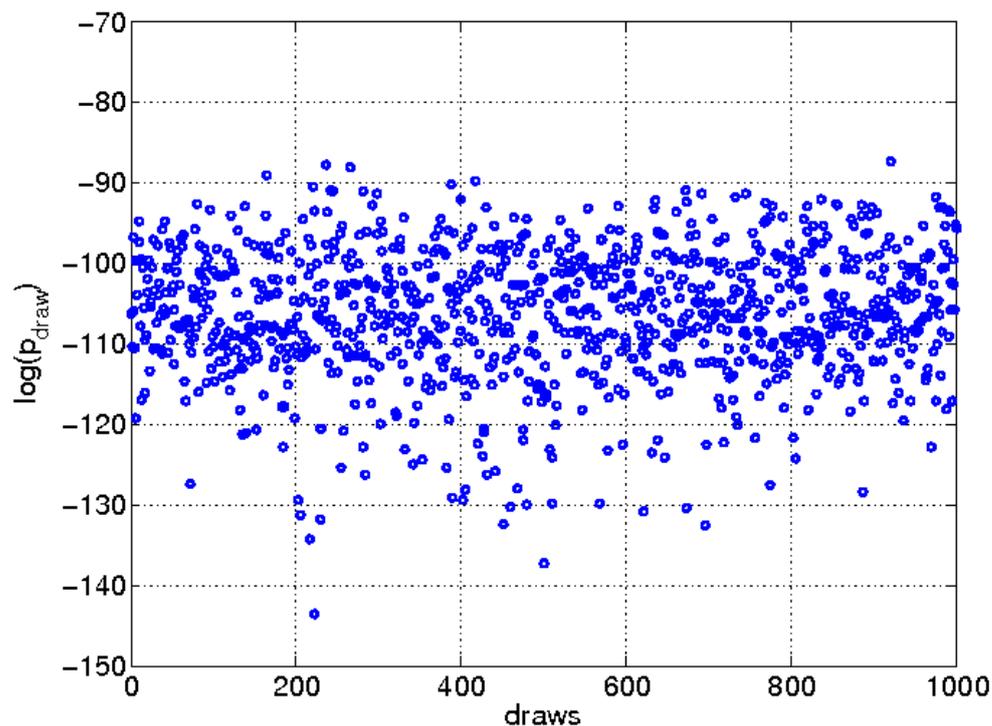


FIGURE 6.7 – Probabilités des tirages (log).

$N_{real} = P_{tir} / P_{tir_{max}} \times 100$. A partir de l'ensemble des réalisations ainsi construit, on obtient la dispersion autour du modèle moyen $\hat{\mathbf{M}}$.

La figure 6.7 montre la probabilité a posteriori de 1000 tirages. On observe une très large gamme de valeurs (échelle log pour les probabilités), et on s'aperçoit que la mise en œuvre de la méthode décrite ci-dessus risque de coûter cher en temps de calcul pour inverser des jeux de données très inhomogènes avec certaines probabilités très faibles devant les autres. Cette observation nous a conduit à utiliser un algorithme issu des méthodes de Markov Chain Monte-Carlo (MCMC), le Metropolis Hastings algorithm, afin de ne sélectionner que les tirages les plus probables. On rappelle que l'algorithme est appliqué ici uniquement pour les dates des modèles, pas pour les mesures.

Après avoir réalisé un premier tirage uniforme dans les barres d'erreurs, on obtient pour ce tirage $\hat{\mathbf{m}}$, σ_m et P_{tir} . Le principe de la méthode MCMC est de définir alors une *proposal distribution* $r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ où \mathbf{x} correspond aux dates du modèle que l'on vient de calculer et \mathbf{y} à celles du prochain modèle. Cette distribution va nous permettre d'explorer l'espace des dates possibles (on choisit r comme étant une distribution gaussienne $\mathcal{N}(x, \sigma)$ limitée par la barre d'erreurs, avec σ à déterminer). A partir de cette gaussienne tronquée, on génère \mathbf{y} qui sera le nouveau vecteur de données.

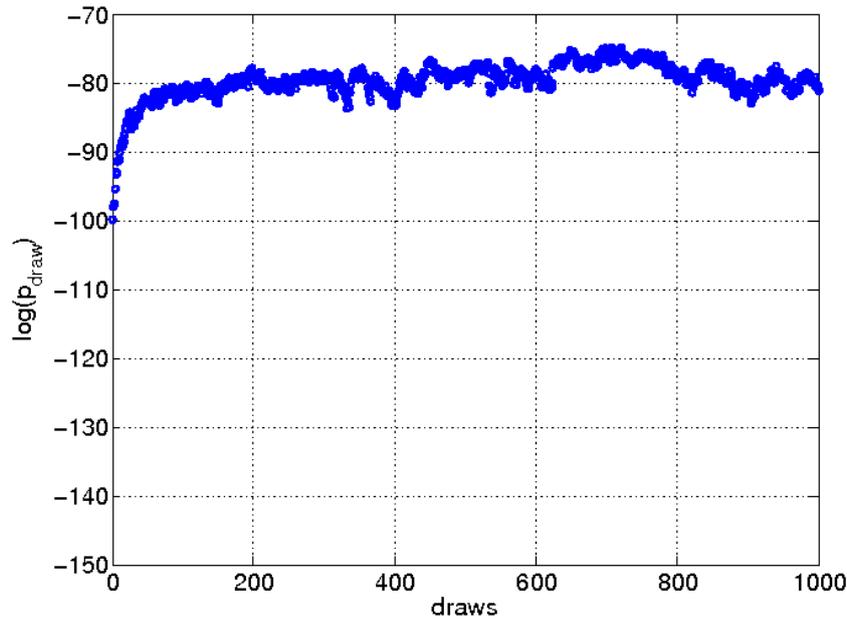


FIGURE 6.8 – Probabilités des tirages (log) sélectionnés via les chaînes de Markov.

On calcule à nouveau pour ce \mathbf{y} : $\hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{y}}$, $\sigma_{\mathbf{m}_{\mathbf{y}}}$ et $P_{tir_{\mathbf{y}}}$. Puis on calcule le rapport $s = \frac{P_{tir}(\mathbf{y})}{P_{tir}(\mathbf{x})}$. On définit ensuite $\alpha = \min(1, s)$ et on compare α à t une valeur tirée aléatoirement en suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Si t est strictement inférieur à α , on garde \mathbf{y} et donc $\hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{y}}$ et $P_{tir_{\mathbf{y}}}$. Sinon, on les rejette et on repart de \mathbf{x} . Cette méthode ne rejette donc pas automatiquement les tirages les moins probables et donne une diversité de tirages avec des probabilités variées. Il est plus probable que les tirages les plus probables soient sélectionnés, cependant un tirage sélectionné n'aura pas nécessairement une probabilité supérieure à celle du tirage sélectionné précédent. La figure 6.8 montre les probabilités des tirages sélectionnés via la chaîne de Markov. Il faut noter les valeurs de probabilité très différentes, et bien plus grandes, que sur la figure 6.7. On a effectué 10000 tirages pour sélectionner ceux présentés dans cette figure.

A partir de chacun de ces tirages, on calcule maintenant le modèle moyen et la matrice de covariance a posteriori à pas de temps réguliers (ceux auxquels on veut évaluer le modèle). Contrairement à la section précédente (Section 6.2.3), on ne doit pas, dans le cas de la méthode MCMC, appliquer un poids au modèle moyen final ou à sa matrice de covariance car les tirages sont déjà sélectionnés avec une certaine probabilité. Ce serait en quelque sorte pénaliser deux fois les modèles avec une faible probabilité. Le résultat n'étant pas Gaussien, nous le représentons sous la forme d'une densité de probabilité. Cette sélection des tirages les plus probables est différente des précédentes études (e.g.

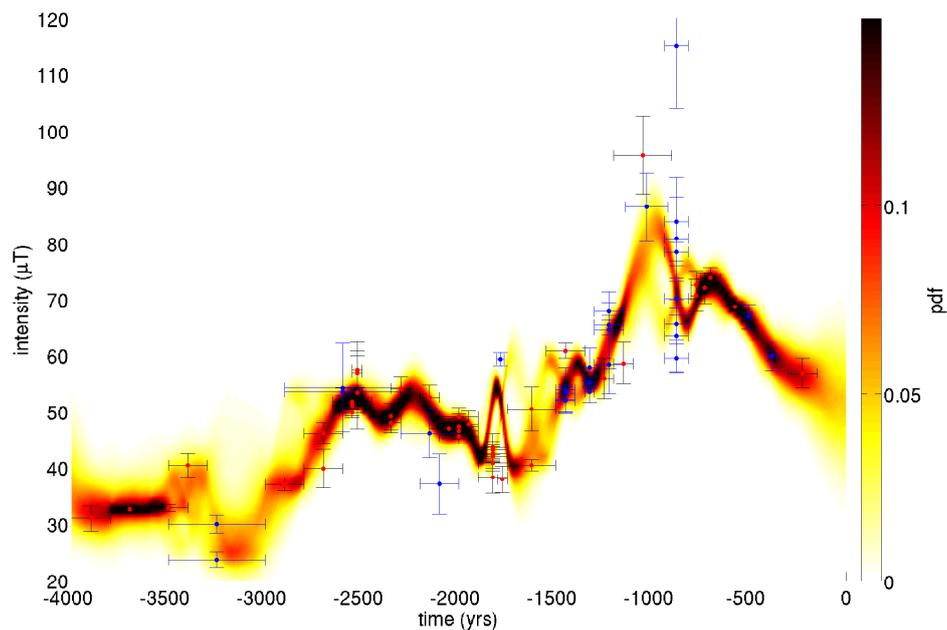


FIGURE 6.9 – Densité de probabilité de l'intensité en Syrie obtenue par la méthode du bootstrap associée à l'utilisation de la méthode MCMC pour explorer et sélectionner les jeux de données.

Korte *et al.* 2009, Licht *et al.* 2013). Elle évite un lissage trop important de la densité de probabilité a posteriori. La figure 6.9 montre le résultat obtenu par cette dernière méthode pour le même jeu de données que celui utilisé pour les deux méthodes précédentes (Figures 6.4 et 6.5).

La figure 6.10 montre le résultat obtenu en utilisant la méthode du bootstrap combinée aux méthodes MCMC sur le cas pathologique du jeu de données synthétique testé figure 6.6. Contrairement à ce qui a été observé sur la figure 6.6, la densité de probabilité est assez dispersée mais contient à toute époque la courbe vraie. Cette méthode semble donc bien fonctionner même dans un cas extrême comme celui du jeu de données utilisé ici.

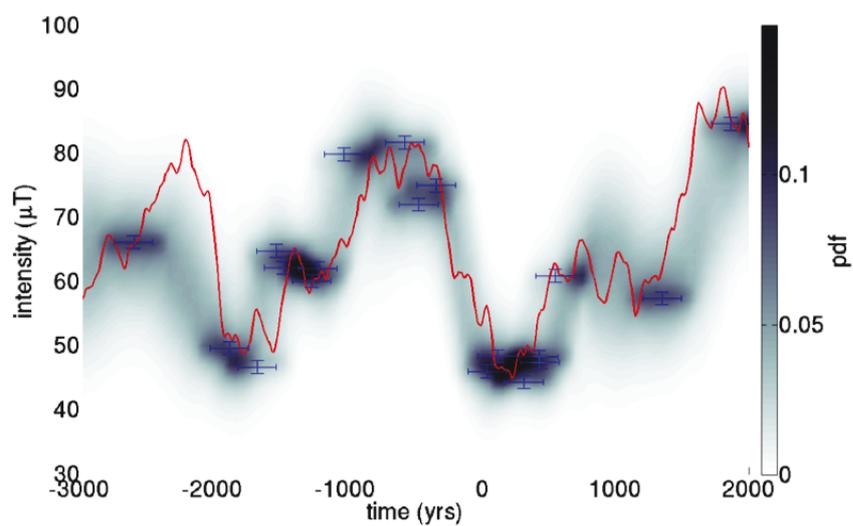


FIGURE 6.10 – Fonction de densité de probabilité de l'intensité obtenue par bootstrap et méthode MCMC pour une série synthétique.

ARTICLE : STOCHASTIC MODELING OF REGIONAL ARCHEOMAGNETIC SERIES

7

Ce chapitre présente un article combinant la méthode bayésienne présentée dans la partie II, et la méthode permettant de prendre en compte les erreurs de datation développée dans la partie III. La méthode est d'abord validée grâce à des données synthétiques, avant d'être appliquée à des données géophysiques. Elle donne lieu à deux nouvelles courbes régionales pour le Moyen-Orient et pour l'Europe de l'Ouest.

Référence : *Stochastic modeling of regional archeomagnetic series*. G. Hellio, N. Gillet, C. Bouligand and D. Jault. Publié dans *Geophys. J. Int.* (2014) (doi : 10.1093/gji/ggu303)

7.1 Abstract

We report a new method to infer continuous time series of the declination, inclination and intensity of the magnetic field from archeomagnetic data. Adopting a Bayesian perspective, we need to specify a priori knowledge about the time evolution of the magnetic field. It consists in a time correlation function that we choose to be compatible with present knowledge about the geomagnetic time spectra. The results are presented as distributions of possible values for the declination, inclination or intensity. We find that the methodology can be adapted to account for the age uncertainties of archeological artefacts and we use Markov Chain Monte Carlo to explore the possible dates of observations. We apply the method to intensity datasets from Mari, Syria and to intensity and directional datasets from Paris, France. Our reconstructions display more rapid variations than previous studies and we find that the possible values of geomagnetic field elements are not necessarily normally distributed. Another output of the model is better age estimates of archeological artefacts.

7.2 Introduction

From 1840 onward, continuous records from ground-based observatories are available and make it possible to characterize the time derivative of the main field, or secular variation, as a function of length-scale (Holme *et al.* 2011). The spectral properties of magnetic series obtained from these instrumental records can be transposed into prior information on core processes in the framework of stochastic processes (Gillet *et al.* 2013).

Before the first direct measurements, direction and intensity of the magnetic field can be inferred from remanent magnetization of sediments, volcanic deposits or archeological artifacts. The sparse repartition of archeomagnetic data in space and time and their associated large measurement and dating uncertainties limit our ability to recover the spatio-temporal variations of the geomagnetic field over the past few millennia. Strong efforts have nevertheless been made to calculate time-dependent global models of the archeomagnetic field from these data (Korte *et al.* 2003, Korte *et al.* 2009, Licht *et al.* 2013). To take advantage of the large amount of data and the relatively dense temporal coverage available in some areas, for instance in Western Europe (Donadini *et al.* 2009), archeomagnetic data are also used to construct regional curves (so-called master curves) that describe the temporal behavior of the magnetic field (Le Goff *et al.* 2002, Lanos *et al.* 2005, Thébault *et al.* 2010). Beyond information on processes occurring in the core, master curves provide useful tools for archeomagnetic dating.

In this study, we focus on the construction of regional archeomagnetic models describing the time evolution of the declination, inclination and intensity of the Earth's magnetic field over the past 6000 years. To compensate for the uneven repartition of data and their large uncertainties and to reduce the non-uniqueness, the construction of such models usually incorporates a regularization in time that consists in penalizing the second time derivative of the field (Bloxham *et al.* 1992). Such regularizations, however, arbitrarily smooth the reconstructed time fluctuations. Instead, we rely here on a Gaussian process regression method based on prior information extrapolated from the statistical properties of models obtained from satellite and observatory data.

Furthermore, dating uncertainties in archeomagnetic data are an important source of errors in the construction of master curves and most inversion methods do not directly account for them. Indeed, dating errors are often converted into equivalent measurement errors (Korte *et al.* 2005); alternatively, they are estimated using bootstrap or jack-knife methods, which consist in investigating the variability of models obtained from an ensemble of randomly noised and/or sub-sampled datasets (Korte *et al.* 2009). Here, we use Mar-

kov Chain Monte Carlo (MCMC) methods for the dates at which observations have been obtained, based on the probability inherent to the Gaussian process method.

This paper is divided into 5 sections. We present in the next section the Gaussian process regression framework, our choice of prior information for the model parameters, the use of Markov Chain Monte Carlo on observation dates and a robust measure of data errors in order to decrease the effect of outliers. The method is tested using synthetic observations (section 7.4), before being applied to datasets from France and the Middle East (section 7.5). A discussion of our results and conclusions are presented in section 7.6.

7.3 Method

We consider geomagnetic series as the realization of a stochastic process sampled through observations. We use the Gaussian Process Regression (section 7.3.1) to couple the information contained in measurements with that from the a priori time covariance function of the process. To account for dating errors, we integrate the regression method into a Markov Chain Monte Carlo algorithm, as described in section 7.3.2. We define, in section 7.3.3, the a priori information on which relies the Gaussian process framework. Finally, in section 7.3.4, we show how to incorporate a robust measure of data errors in order to decrease the effect of outliers that appears when using a standard L2-measure with geophysical series.

7.3.1 Gaussian process regression

Let us consider a Gaussian, stationary stochastic process $\varphi(t) = \bar{\varphi} + \varphi'(t)$, defined by its average value $\bar{\varphi}$, the perturbation $\varphi'(t)$ from this mean value and its covariance function :

$$\text{Cov}(\varphi(t), \varphi(t + \tau)) = E(\varphi'(t)\varphi'(t + \tau)) = \sigma^2\rho(\tau), \quad (7.1)$$

with σ^2 the variance and ρ the autocorrelation function of the process that will contain the a priori information on the model parameters ; the notation $E(\dots)$ stands for the statistical expectation. The continuous process φ is sampled with data stored at discrete times into a vector \mathbf{y} , and estimated as a sequence of parameters stored into a vector $\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} + \mathbf{m}'$, with $\bar{\mathbf{m}}$ the background model and \mathbf{m}' the model perturbation. In our context we consider that the parameters in \mathbf{m} are homogeneous to the observations in \mathbf{y} (they are images of the same quantity). Vectors \mathbf{t}_y and \mathbf{t}_m contain respectively the epochs at which the data and the model are sampled.

The estimate of the model \mathbf{m} , given the data \mathbf{y} and the measurement errors \mathbf{e} , is characterized by the a posteriori expectation model

$$\hat{\mathbf{m}} = \bar{\mathbf{m}} + C_{my}(C_{yy} + C_{ee})^{-1}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}), \quad (7.2)$$

and the a posteriori covariance matrix C^* :

$$C^* = C_{mm} - C_{my}(C_{yy} + C_{ee})^{-1}C_{my}^T \quad (7.3)$$

(Rasmussen et Williams 2006). Here $\bar{\mathbf{y}}$ is the prediction from the background model $\bar{\mathbf{m}}$ at times \mathbf{t}_y , $C_{ee} = E(\mathbf{e}\mathbf{e}^T)$ is the data error covariance matrix. Matrices C_{mm} , C_{my} and C_{yy} are derived from the autocorrelation function using expression (7.1) :

$$C_{mmij} = \sigma^2\rho(t_{mi} - t_{mj}); C_{myij} = \sigma^2\rho(t_{mi} - t_{yj}); C_{yyij} = \sigma^2\rho(t_{yi} - t_{yj}) \quad (7.4)$$

Note that the above estimate (7.2) in term of Gaussian process comes down to calculating the BLUE (Best Linear Unbiased Estimator).

7.3.2 Accounting for dating uncertainties with Markov Chain Monte Carlo

Expression (7.4) assumes that each datum y_i is representative of an epoch t_{y_i} . Because dating uncertainties are prominent in archeomagnetic databases, we should consider the probability density function (*pdf*) for the date of the datum y_i . This distribution depends on the dating method : it is generally considered Gaussian for ^{14}C dating (e. g. Aguilar Reyes et al. 2013), uniform when the date is estimated from historical or archeological constraints (e.g. Genevey et al. 2003), or more complex in the case of calibrated ^{14}C dates (Reimer et al. 2009).

To consider these dating uncertainties, we build several sets of dates \mathbf{t}_y , illustrated in Figure 7.1a. We associate at each record a date drawn inside its dating error bar. We estimate for each draw a model \mathbf{m}_y defined by a mean model $\hat{\mathbf{m}}_y$ and its covariances C_y^* (equations (7.2) and (7.3)) at times \mathbf{t}_y . We then evaluate the joint probability of the draw after Lanos (2004), see also (Pavón-Carrasco et al. 2011) :

$$p(\mathbf{t}_y, \mathbf{y} | \mathbf{m}_y) \propto p(\mathbf{m}_y | \mathbf{t}_y, \mathbf{y}) \times p(\mathbf{t}_y, \mathbf{y}) \quad (7.5)$$

The integration of the probability density function over all possible values of \mathbf{y} gives the posterior probabilities of the dates \mathbf{t}_y .

$$p(\mathbf{t}_y | \mathbf{m}_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{t}_y, \mathbf{y} | \mathbf{m}_y) d\mathbf{y} \quad (7.6)$$

In practice, we first evaluate these probabilities for each record at time t_{y_i} . To this end we multiply the Gaussian posterior probability density function $\mathcal{N}(\hat{m}_{y_i}, \sigma_{y_i})$ of the model at time t_{y_i} (red curves in Figure 7.1b and c), by the Gaussian prior probability density function $\mathcal{N}(y_i, e_i)$ of measurement y_i (blue curves in Figure 7.1b and c). The notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ stands for Gaussian distribution with mean μ and standard deviation σ . The standard deviation σ_{y_i} of the model at time t_{y_i} is obtained from the posterior covariance matrix C_y^* . By this multiplication, we obtain the joint probability density function (green curve in Figure 7.1c). We then integrate the obtained probability density function over all possible values of y_i to get the probability of the date t_{y_i} . We finally multiply the posterior probabilities of all dates to obtain the probability of draw k , noted P_{draw_k} .

A natural way to proceed following Lanos (2004) is to weigh each mean model given the probability of the corresponding draw. However, few draws have very high probabilities compared to all others and numerous iterations provide very few representative mean models. To overcome this problem, we use Markov Chain Monte Carlo to explore the possible dates of observations and to select draws with the highest probabilities. We remind here the main steps, (see Aster *et al.* (2013), Gilks *et al.* (1996b) for more details) :

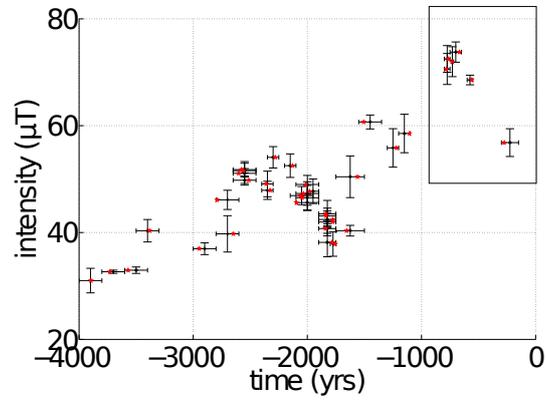
1- To explore the possible dates, we generate the k_{th} draw from the previous one as a random draw inside the proposal distribution $\mathcal{N}(\mathbf{t}_{k-1}, \sigma_{\text{MCMC}}) \times p(\mathbf{t})$. For uniform probability distribution, it comes down to a random walk restricted to the a priori time interval.

2- We define an acceptance ratio $\alpha = \min(1, s)$, with $s = \frac{P_{\text{draw}_k}}{P_{\text{draw}_{k-1}}}$.

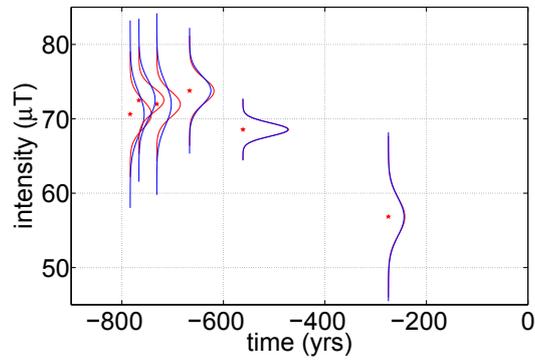
3- We keep the k_{th} draw if $\alpha > u$, u being a random value obtained from a uniform distribution between 0 and 1, and reject it if not.

We stop the chain after N iterations depending on the dataset studied and perform several chains to better explore the space of possible dates (Gilks *et al.* 1996a, p 13). The number of chains is determined by the evolution of the posterior distribution of the dates. The number of accepted draws in each chain depends on σ_{MCMC} . We adjust the latter parameter so the number of kept draws is between 20 and 60% of all draws. All these informations are summarized in Appendix B. Each draw k selected by the above Markov rules consists in a set of dates \mathbf{t}_y^k , associated to records \mathbf{y} and measurement errors \mathbf{e} . From equations (7.2) and (7.3), we obtain for each dataset a mean model $\hat{\mathbf{m}}$ and its associated covariances C^* at the times \mathbf{t}_m .

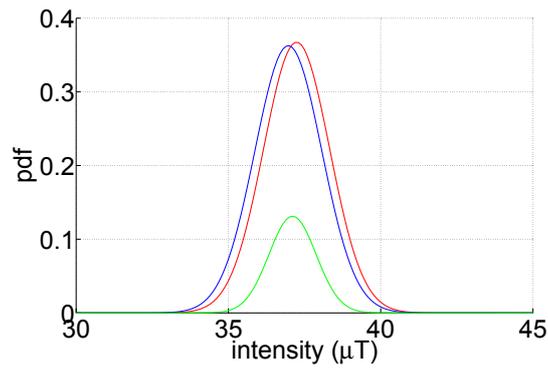
Expectations and a posteriori covariance matrices are used to build ensembles of models consistent with both the observations and the a priori information assumed for model parameters. To this end, we use the Choleski decomposition U of the a posteriori covariance



(a)



(b)



(c)

FIGURE 7.1 – Illustration of equations (7.5) and (7.6) : a) Syrian intensity dataset (black) together with one draw of random dates (red stars) ; b) Gaussian prior pdf of the measurements (blue curves) and Gaussian posterior pdf of the model (red curves) for five data from the inset in a) ; c) Gaussian prior pdf of the observation at 2900 BC (blue curve), Gaussian posterior pdf of the model (red curve), and combined pdf of the two (green curve).

matrix, $C^* = U^T U$, from which we compute an ensemble of model realizations $\mathbf{m} = \hat{\mathbf{m}} + U^T \tilde{\mathbf{m}}$, with $\tilde{\mathbf{m}}$ a random Gaussian vector with zero mean and unit variance. Each draw selected by the Markov chain is used to build an ensemble of realizations. We put together all these ensembles to build our final estimate of the probability density function. Note that this distribution is not necessarily Gaussian.

7.3.3 A priori covariances on geomagnetic series

We detail below how we derive our covariances on geomagnetic series (intensity F , inclination I , declination D) from a priori covariances on the Gauss spherical harmonic coefficients. These are chosen to be compatible with the temporal power spectral densities recorded in ground-based observatories (Gillet *et al.* 2013).

We assume that all Gauss coefficients (g_n^m, h_n^m) , with n and m the spherical harmonic degrees and orders, result from an auto-regressive (AR) process of order 2, with correlation function

$$\rho_n(\tau) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}\tau}{\tau_c(n)}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3}\tau}{\tau_c(n)}\right). \quad (7.7)$$

Covariances for Gauss coefficients are then :

$$\text{Cov}(g_n^m(t), g_n^m(t + \tau)) = \sigma_g^2(n) \rho_n(\tau) = K_n(\tau), \quad (7.8)$$

with a similar notation for h_n^m coefficients. The time τ_c and the variance σ_g^2 are functions of the degree n only. We assume that there is no cross-correlations between Gauss coefficients of different degrees and orders, and between g and h as well. Note that this correlation function is solution of the stochastic differential equation (Yaglom 2004) :

$$d\frac{d\varphi'}{dt} + \frac{2\sqrt{3}}{\tau_c} d\varphi' + \frac{3}{\tau_c^2} \varphi' dt = d\zeta(t), \quad (7.9)$$

where $\zeta(t)$ is the Brownian motion (or Wiener process).

Variances $\sigma_g^2(n)$ for the non-dipole Gauss coefficients are obtained from the variance of the Gauss coefficients estimated in satellite field models, as in the models COV-OBS (Gillet *et al.* 2013) :

$$\sigma_g^2(n) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n [g_n^m(t)^2 + h_n^m(t)^2]. \quad (7.10)$$

Using a similar definition for $\sigma_g^2(n)$, equation (7.9) imposes the value of the correlation time :

$$\tau_c(n) = \sqrt{3} \frac{\sigma_g(n)}{\sigma_g^2(n)}. \quad (7.11)$$

The background model is composed of the axial dipole value $\bar{g}_1^0 = -35\mu\text{T}$, and the variance for the dipole coefficients is chosen as $\sigma_g^2(1) = 5\mu\text{T}^2$, the value typically found for the

past 4000 years (Korte et Constable 2011). Since $\sigma_g^2(n)$ is not affected by the presence of a stationary background, we find a correlation time of about 200 years for all coefficients of degree one.

We have propagated this a priori information on Gauss coefficients to geomagnetic series of declination D , inclination I and intensity F recorded at the Earth's surface. Our approach requires that these quantities have a Gaussian distribution. It has been shown that the intensity distribution was close to a Gaussian distribution in the limit of small relative dispersion (Love et Constable 2003). This is indeed the case for archeomagnetic data, since on centennial to millennial time-scales the standard deviation in the axial dipole is small compared to the average value. Assuming that Gauss coefficients are the result of a random stationary process and that they have a zero mean except for the axial dipole g_1^0 , we show in Appendix A how to obtain the mean, covariance and cross-covariance of geomagnetic series of D , I and F (equations (A.15) and (A.16)). Covariances depend on the colatitude θ of the sampled site, on \bar{g}_1^0 and on sums over degree n of the correlation function defined in equation (7.7). Note in particular that we find non-zero covariances between F and I .

Studies carried out on magnetic series from paleomagnetic to archeomagnetic records suggest a continuous spectrum of the Virtual Axial Dipole Moment (Constable et Johnson 2005, Ziegler et al. 2011), with slope decreasing from about zero on the longest periods towards about -2 at millennial periods. The analysis of models of Holocene lake sediment magnetic records (Panovska et al. 2013) has shown that temporal power spectra for declination, inclination and relative paleointensity from lake sediments data follow a power law with a slope -2.3 ± 0.6 for periods between 300 and 4000 years. These findings are in good agreement with recent results obtained for the dipole moment from geodynamo numerical simulations (Olson et al. 2012), which also display steeper slopes at higher periods.

The a priori information discussed above presents the advantage to require only a single parameter per degree (τ_c). The slope of the temporal power spectrum for a process defined by equation (7.9) is by construction -4 at periods $\tau \ll \tau_c$ (Gillet et al. 2013), which agrees with that obtained for observatory series (De Santis et al. 2003). We illustrate in Figure 7.2 that we retrieve the -4 slope for spectra of the auto-correlation functions for F , D and I , obtained with equation (A.15) – the square of the power spectrum for a series $\varphi(t)$ is the power spectrum of its covariance function $\text{Cov}(\varphi(t); \varphi(t + \tau))$. The choice of a priori information in the present study is particularly important for periods shorter than a few hundred of years. Indeed, archeomagnetic data being sparse in time, it is towards high frequencies that we need to buttress the evidence from observations with prior information.

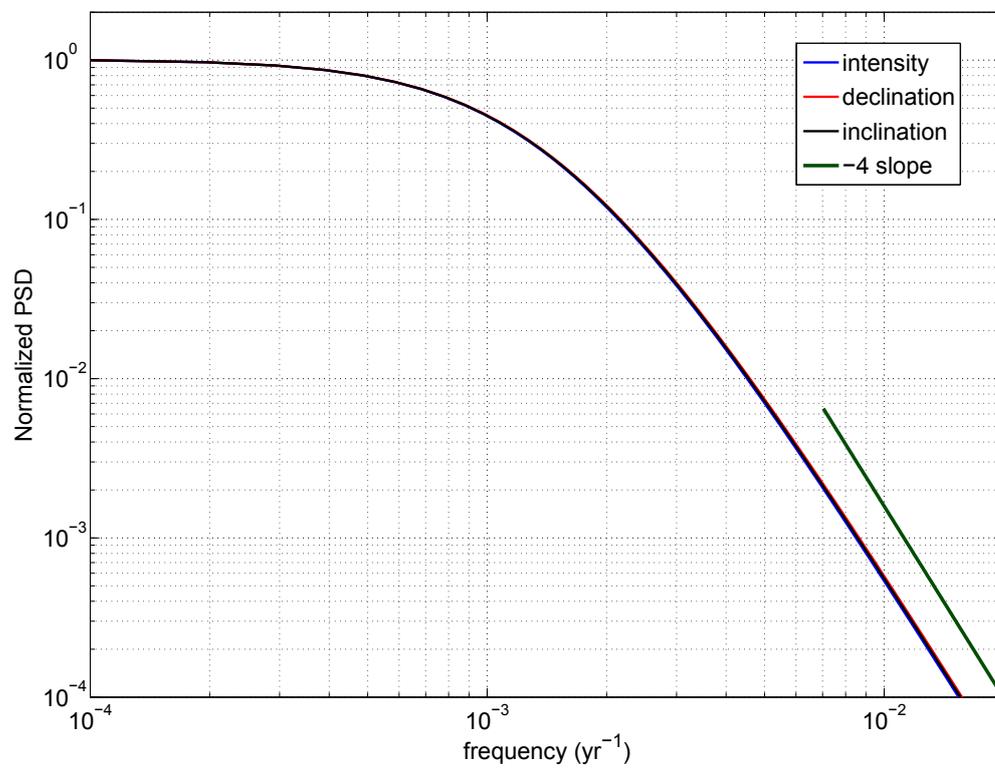


FIGURE 7.2 – Normalized power spectral density of intensity (blue), inclination (black) and declination (red) calculated at co-latitude $\theta = 45^\circ$ with a spherical harmonic truncation $N = 14$. The -4 power law is plotted for comparison in green. Note that curves are superimposed.

7.3.4 Dealing with outliers using robust measures of the data errors

The methodology developed hitherto relies on a L2-norm to account for measurement errors, which makes the approach vulnerable to large errors. Outliers to the L2-norm are unfortunately a common feature of archeomagnetic data analyses (Suttie *et al.* 2011). To decrease the effect of these outliers when using L2-norms, Donadini *et al.* (2009) assigned to all data a minimum value for the measurement errors ($5\mu\text{T}$ for intensity data and 4.3° for directional data). We can instead modify the measure of the misfit to observations and replace the L2-norm with the Huber norm, which distribution is defined as : (see Farquharson et Oldenburg (1998)) :

$$p(r) = \frac{1}{N} \begin{cases} \exp(-\frac{r^2}{2}) & , |r| < c \\ \exp(-c|r| + \frac{c^2}{2}) & , |r| \geq c \end{cases} , \quad (7.12)$$

with $N = 2.6046$ for $c = 1.5$ in this study and r , the normalized data misfit residuals. To implement the Huber norm with the previous method, we use the iteratively re-weighting least-squares algorithm where the matrix C_{ee} is constructed from the residual of the data i , $r_i = \frac{|y_i - \hat{m}_{yi}|}{\sigma_{yi}}$, as

$$C_{eeii} = \begin{cases} \sigma_{yi}^2 & , r_i < c \\ \frac{r_i \sigma_{yi}^2}{c} & , r_i \geq c \end{cases} . \quad (7.13)$$

The Huber norm impacts also the joint probability (equation (7.5)). Instead of multiplying the Gaussian posterior probability density function of the model by the Gaussian prior probability density function of the measurements, we multiply it by the Huber probability density function defined in equation (7.12). Few iterations are needed to obtain convergence. The use of the Huber norm rescales the weight in C_{ee} associated with outliers. We present in the following section synthetic tests for which there is no need to use this norm since there are no outliers. In section 4 however, we apply the Huber norm to all geophysical datasets. We compare it with the L2-norm for the Syrian series to show how it reduces the effect of outliers.

7.4 Synthetic tests

In order to test the Gaussian process regression on observations presenting dating errors (accounted for with the MCMC method), we build synthetic datasets of D , I and F that are consistent with an AR process of order 2 as defined in section ??, and that display similar characteristics to real archeomagnetic datasets in terms of temporal distribution and errors.

To this end, we first construct series for the period 3000 BC to 2000 AD, sampled every 10 years, using the covariance functions defined in equations (A.15) and (A.16). In these covariance functions, the functions $K_n(\tau)$ are defined using the variances and correlation times defined in equations (7.10) and (7.11), and the sums are performed with a spherical harmonic truncation degree $N = 14$. We observe that the model is not modified when increasing further this truncation degree, and that it is already converged with $N = 4$. We then randomly sub-sample the series and add random measurement and dating errors to each data. These errors are built using a Gaussian law for measurement errors and a uniform law for dating errors, to mimic the dating uncertainties from historical constraints. We present for comparison the results considering Gaussian dating errors. Finally, the measurement and dating errors used in the modeling phase correspond to the standard deviation and the half-width of the law used to build them. We report in Appendix B, the parameters used for MCMC method for all studied series. We use two different datasets consisting of 20 and 50 records respectively with randomly assigned dating and measurement errors. Dating errors are generated from a uniform distribution with a half-width of 25 years, and measurement errors from a Gaussian distribution with a standard deviation of $1\mu T$.

We report in figures 7.3(a) and 7.3(b) the obtained *pdf* of the intensity. We first notice that the distribution always encompasses the true series (black curve). In the case where 20 data only are available, the sharp changes present in the true series are not closely recovered by the *pdf* due to the lack of data, and the range of estimates is wide except during the few time intervals that are well sampled. Increasing the quantity of synthetic observations dramatically improves the fit of the *pdf* to the true series and narrows the distribution (see figure 7.3(b)).

In figure 7.3(c), we invert the same dataset as in figure 7.3(a), here again noised following uniform and Gaussian laws with respectively 25 years half-width and $1\mu T$ standard deviation. However, following the strategy used by Donadini *et al.* (2009), we assign in the inversion a minimum threshold value for measurement errors, that replaces error estimates lower than this minimal value, chosen to be $5\mu T$ for intensities. The distribution is significantly affected by this process, the dispersion happens to be strongly increased particularly when data are available. We conclude here that this way of handling small measurement errors penalizes accurate data and leads to lose information. In figure 7.3(d), we invert the same dataset as in figure 7.3(a) but after multiplying dating errors by a factor of ten. The dispersion is then a lot wider for the whole studied period.

For all the precedent cases, the dating errors are supposed uniform what is mostly the

case for archeomagnetic objects. However, some of them are dated by radiocarbon methods, which can lead to Gaussian or more complicated error distributions. Figure 7.3(e) presents the obtained *pdf* when dating errors are assumed Gaussian for the inversion of the same dataset as in figure 7.3(d). We see that the resulting *pdf* are rather similar, although Gaussian dating errors slightly increase the *pdf* when observations are available. These tests illustrate the importance of assigning realistic error bars for both dating and measurement errors. Furthermore, it shows that our method, where the posterior covariance matrix is used to estimate the model error, is capable of accounting for a realistic measure of the information contained into geomagnetic observations, and thus avoids reducing the importance of relatively more accurate records.

We have evaluated the importance of considering covariances between intensity and inclination within synthetic tests but have not seen significant differences while inverting jointly or separately these observations. Further on, covariances between F and I are considered.

7.5 Application to data sets from Syria and France

In this section, we present results for Mari (Syria) and Paris (France), obtained from intensity data in Syria for epochs between 4000 BC and 0 and from directional and intensity data in France for epochs between 0 and 1900 AD. For directions, we have converted the 95% cone of confidence (α_{95}) onto declination σ_D and inclination σ_I errors (Piper 1989) :

$$\sigma_D = \frac{81}{140 \cos I} \alpha_{95}; \sigma_I = \frac{81}{140} \alpha_{95} \quad (7.14)$$

7.5.1 Archeointensity data from the Middle-East

The dataset used here comprises 39 intensity values for Syria (Genevey *et al.* 2003, Gallet *et al.* 2006; 2008, Gallet et Al Maqdissi 2010). All data are reduced to Mari in Syria using the geomagnetic axial dipole (GAD) hypothesis. The error caused by the reduction is small compared to measurement errors. A priori information is built from a magnetic field model truncated at spherical harmonic degree $N = 4$.

Results are displayed in figure 7.4(a) for the Syrian dataset. The distribution is narrow between 2700 and 1600 BC due to the numerous data present during this period. Local maxima appear resolved in 2500, 2250, 1450 and 650 BC. The distribution prevents us from concluding about extrema value around 3200 BC. Next, we have augmented the dataset with new archeointensity data from Syria (Gallet et Le Goff 2006, Gallet et Butterlin 2014,

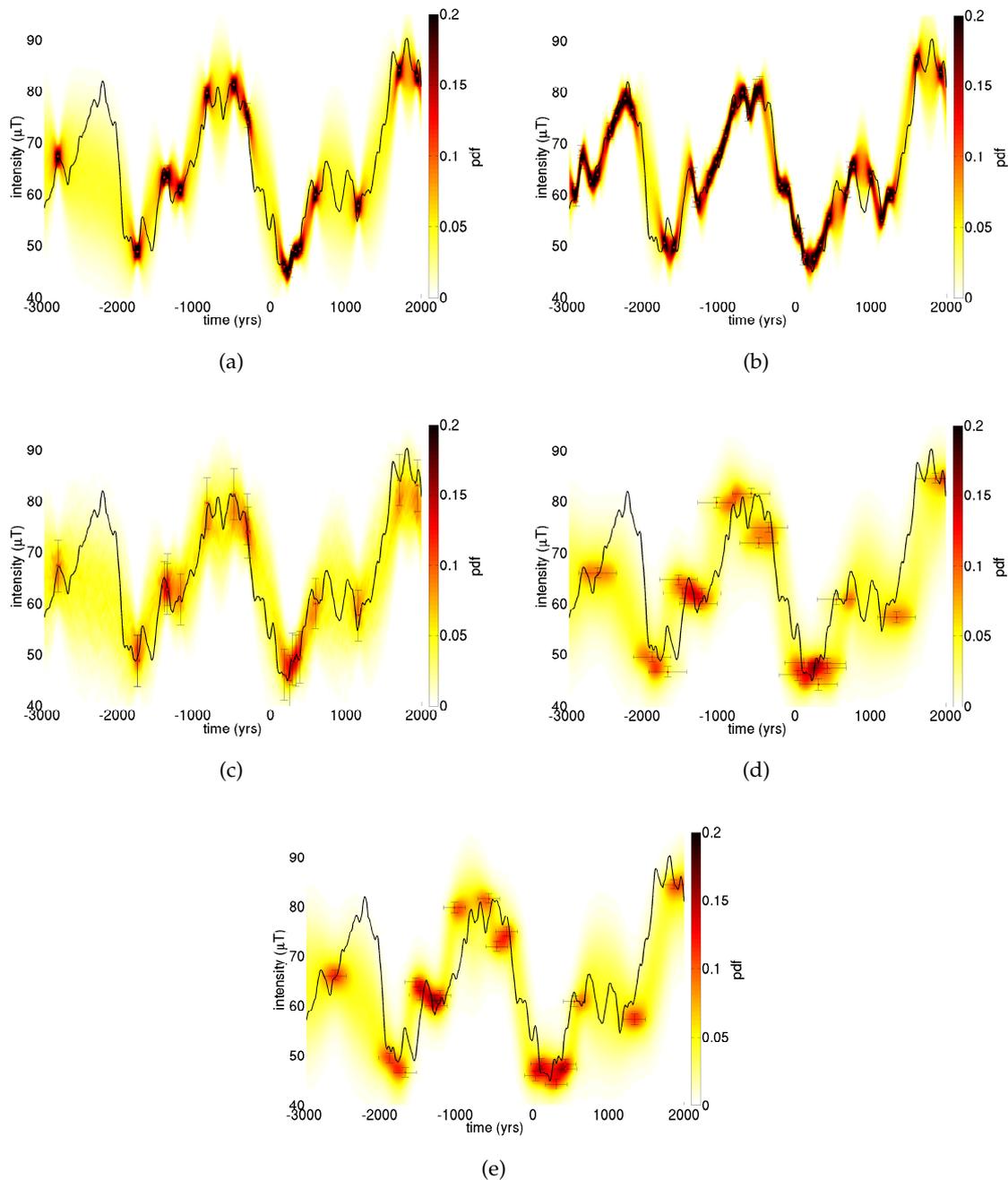
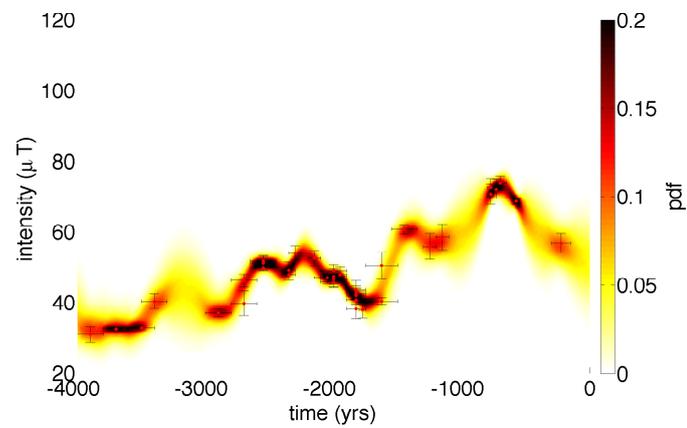
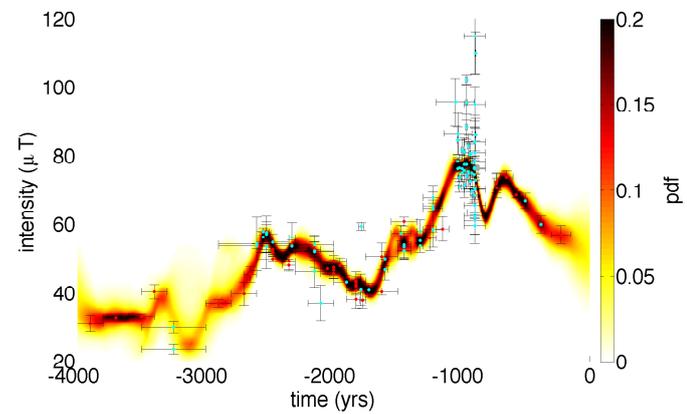


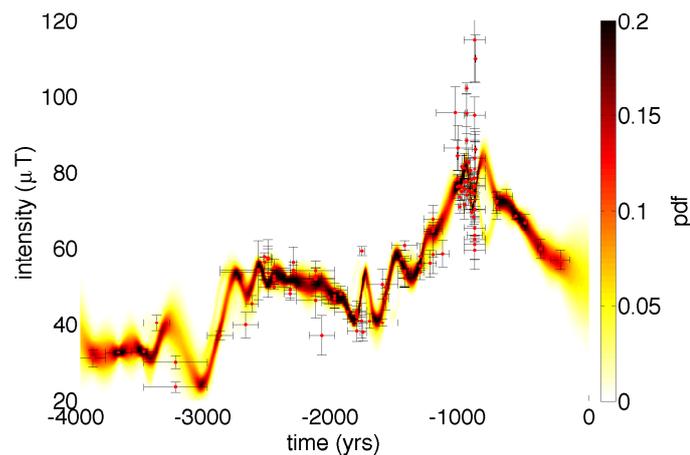
FIGURE 7.3 – Probability density function of the intensity obtained from a synthetic dataset sampled from a true series (black). a) 20 data, correct errors used in the inversion; b) 50 data, correct errors used in the inversion; c) same as (a) but all measurement errors smaller than $5\mu\text{T}$ have been converted to $5\mu\text{T}$; d) same as (a) but with dating errors multiplied by a factor of ten; e) Same as d) but assuming Gaussian dating errors. The half width of the uniform law σ_u , has been transformed into the standard deviation of the Gaussian law $\sigma_g = \sigma_u / \sqrt{3}$ so that the uniform and Gaussian law have the same standard deviation. The standard deviation of the Gaussian law and the half width of the uniform law used to generate random measurement and dating errors are set randomly over the dataset with mean values of $1\mu\text{T}$ for measurement errors and 25 yrs (a), (b), and (c) or 250 yrs (d) and (e) for dating uncertainties.



(a) Syrian dataset



(b) Expanded dataset, Huber-norm



(c) Expanded dataset, L2-norm

FIGURE 7.4 – Probability density function from intensity records a) from Syria alone and from the entire Levantine region b) using Huber-norm, c) using L2-norm. Remanence intensities have been transferred to the site of Mari (34N, 40E) via the geomagnetic axial dipole hypothesis.

Gallet *et al.* 2014), and data from the southern Levantine region and Iran (Ben-Yosef *et al.* 2008; 2009, Ertepinar *et al.* 2012, Shaar *et al.* 2011). The new data are plotted in blue. Note that the dataset used here comprises more data than the expanded dataset used by Thébault *et Gallet* (2010). Study of the distribution obtained from this expanded dataset confirms the maxima inferred in 2500 and 2250 BC, figure 7.4(b). Two sharp maxima appear in 1000 and 650 BC. On figure 7.4(a), we remark a wide dispersion around 3200 BC. The few data added between 3500 and 3000 BC, despite very large uncertainties, point to a maximum in 3400 BC followed by a local minimum in 3200 BC although the distribution is still wide. Increasing the number of observations refines the distribution. We see that a mean model in Figure 7.4(a), would not predict the behavior observed with the expanded dataset, the reason why we use probability density functions to represent the results.

Our modeling strategy differs from the iterative inverse method previously developed by Thébault *et Gallet* (2010). The latter consists in a projection onto cubic B-splines, penalizing the second time derivative, together with a bootstrap strategy to handle dating and measurement errors. Our results for the restricted dataset (figure 7.4(a)) present more rapid variations. Particularly for the two maxima of 2250 and 2500 BC which are well defined in our study and confirmed by the recent observations, whereas the master curve in Thébault *et Gallet* (2010) is flat for this period. In comparison, our distribution presents also a wider dispersion, particularly when data are sparse.

We show in Figure 7.4(c) the results for the expanded dataset when using the L2-norm. Sharp local maxima appear now around 800, 1700, 2800 BC which are not apparent in figure 7.4(b). This behavior illustrates a common issue in archeomagnetic modeling. Even when the method accounts for all uncertainties present in the dataset, some incompatibilities within the dataset cannot be handled. One record appearing in 1785 BC has small dating and measurement errors so it forces alone a sharp variation of the model. A rejection criterium has been used in Thébault *et Gallet* (2010) to tackle this issue. We see that the Huber norm alleviates also this difficulty still allowing these data to possibly keep some influence through the MCMC sampling. Here, we show the importance of assigning realistic measurement and dating errors to all data.

Note also that the posterior distribution is not necessarily Gaussian. Figure 7.5 shows three *pdf* of the intensity estimated in 3700, 1500 and 50 BC. We see that the distributions can be similar to Laplacian distribution (7.5a), Gaussian distribution (7.5c) or multi-modal distributions (7.5b). This finding makes awkward the definition of a mean model, the reason why we only consider *pdf* and not master curves.

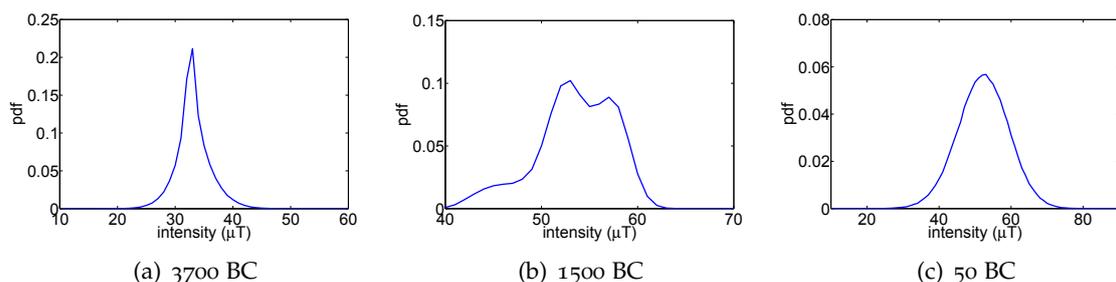


FIGURE 7.5 – Probability density functions of the intensity of three cross-sections in 3700, 1500 and 50 BC for the extended dataset.

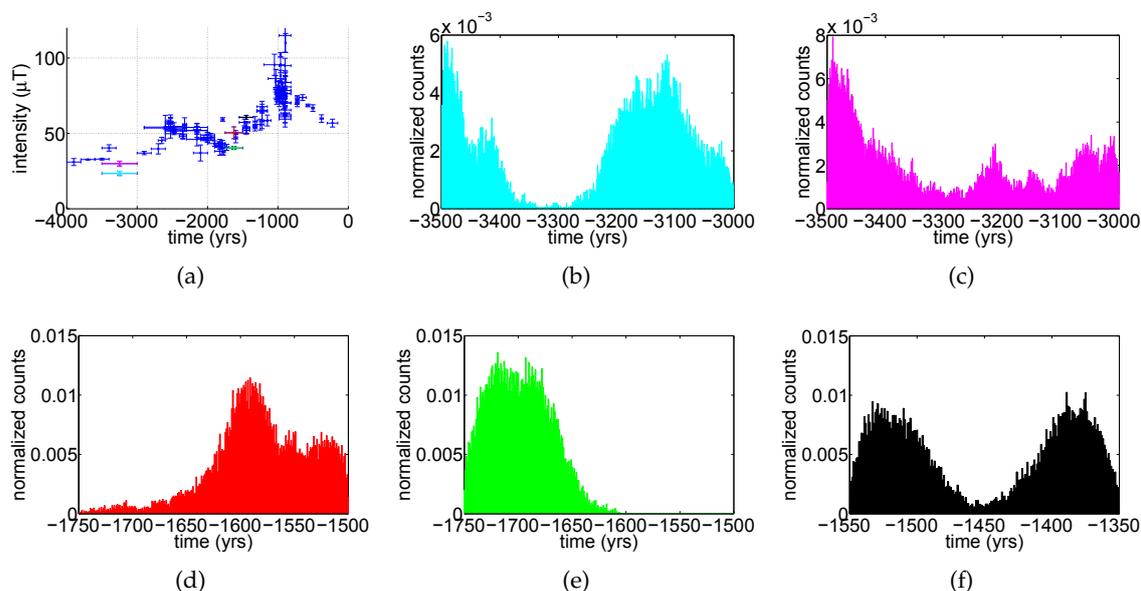


FIGURE 7.6 – *b), c), d), e), f)* : Distribution of the dates after MCMC colored respectively in *a)*.

Finally, an important result of our method is the posterior probability on dates. These distributions are very different from their a priori uniform distribution. We focus on five data of the extended dataset (see colored error bars in Figure 7.6(a)) and show histograms of the dates preferentially selected in the Markov chains (Figure 7.6(b-f)). The distribution of dates in figure 7.6(d) is very different from a uniform distribution : very few dates appear before 1680 BC and the highest probability for this date is for epochs younger than 1650 BC. Figure 7.6(f) displays a multi-modal distribution that makes unlikely epochs around 1450 BC. This methodology can be used to refine the *pdf* of record dates.

7.5.2 Direction and intensity of the magnetic field in Paris

We use in this section directional data collated by Bucur (1994), and some of the intensity data presented in Genevey *et al.* (2013) for France. We adopt the quality criteria of Genevey *et al.* (2009) and keep only data with age uncertainties lower than 100 years, acqui-

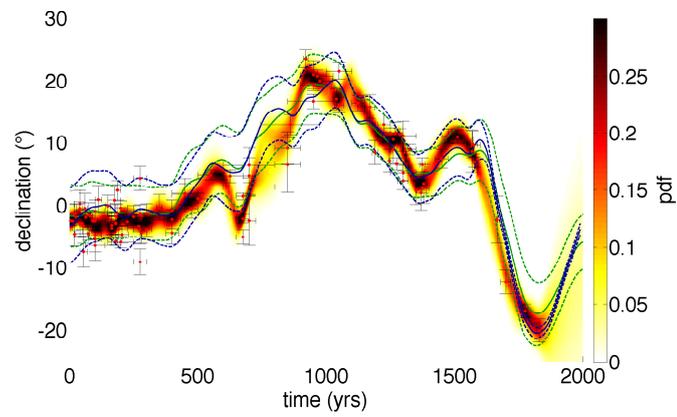
red using the Thellier and Thellier method with pTRM-check and with a minimum of three results per site. The dataset finally contains 119 directional values and 104 intensity measurements. All of them have been reduced to Paris using virtual geomagnetic poles derived from the GAD hypothesis. Again, the error caused by the reduction is small compared to measurement errors. MCMC parameters are summarized in Appendix B. We need less chains than for the Syrian study due to the smaller dating errors. We display in figure 7.7 the *pdf* for D , I and F . The intensity series present a general decrease from 850 to 1800 AD, with a local maximum in 1350 AD. Data coverage is particularly sparse between 500 and 700 AD, which implies a wide dispersion during this period. A maximum close to $80\mu\text{T}$ appears clearly defined in 850 AD. Our results present similar features in comparison with those of Genevey *et al.* (2013), except for the local maximum around 1600 AD that does not exist in our study.

Predictions from the ARCH3k global model (Korte et Constable 2011) and from the A-FM global model (Licht *et al.* 2013) are superimposed in figure 7.7 for comparison, in blue and green respectively. The models are in good agreement for declination series except for periods between 600 and 850 AD. For inclination however, the high values found at the end of the IXth century are not accounted for by the ARCH3k and the A-FM models. The intensity minimum found in our study around 1700 AD is not accounted for by the global models. The intensity maximum appears in both models but is slightly sharper in our model and delayed towards recent epochs. This can be due to the penalization of second-time derivatives in the ARCH3k and A-FM models, which may filter out locally well documented rapid variations in order to avoid spurious oscillations elsewhere or to the fact that this model incorporates globally distributed data.

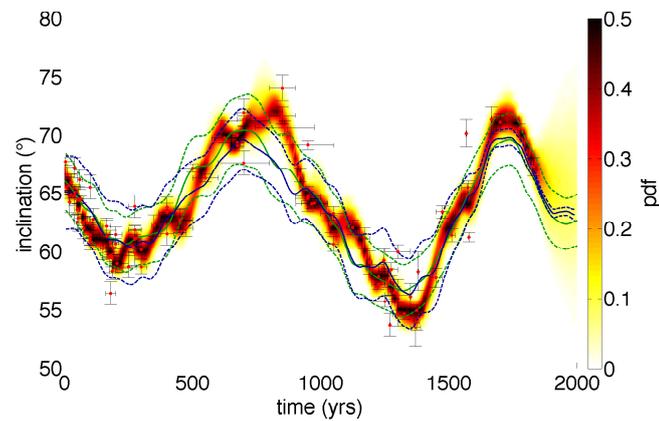
The a priori information on the model clearly emerges at epoch for which no data are available. In this study, it particularly appears at the end of the studied time interval for declination and inclination. There, the model *pdf* is controlled by the a priori correlation function which ensures the continuity of the first time derivative through the AR-2 process.

7.6 Conclusion

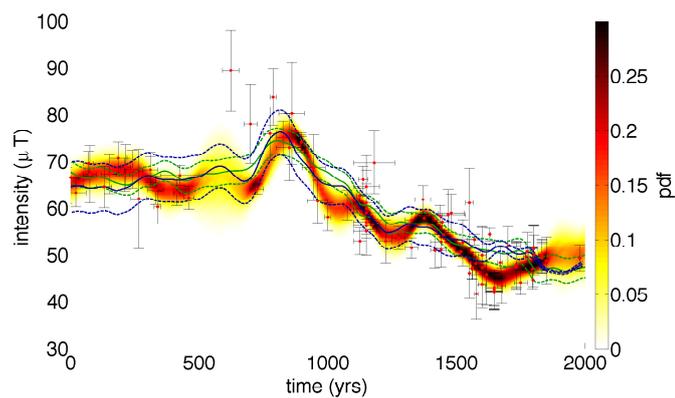
In this study, we have developed a new method for the construction of archeomagnetic *pdf* from inclination, declination, and intensity data. Our method is based on Gaussian process regression and it incorporates a priori information consistent with the statistics obtained from historical geomagnetic data. Markov Chain Monte Carlo applied on the dates of observations selects random distribution of dates with the highest probabilities.



(a) Declination



(b) Inclination



(c) Intensity

FIGURE 7.7 – Probability density functions of declination, inclination and intensity records from France. All data have been reduced to Paris (48.9°N, 2.3°E). The blue curve represents the prediction from ARCH3k and the green curve the prediction from A-FM with their respective 68% confidence interval (dashed lines).

The Huber norm is applied to deal efficiently with outliers. This new method has several advantages : first it avoids the use of arbitrary regularization, and any unspecified filtering introduced by the projection onto support functions such as cubic B-splines ; it furthermore allows to account for dating errors in a probabilistic framework.

We first try our method on synthetic datasets constructed from AR-2 process series. Our tests illustrate the importance of using correct estimates of the dating and measurement errors in the inversion in order to optimally recover the a posteriori errors on model parameters. They also show that our method is capable of accounting for data displaying disparate accuracies, without losing information contained into the highest quality records. The application of this newly developed method to European datasets provides *pdf* that display rapid fluctuations. These are less smooth than changes obtained from regularized global (e.g., [Korte et al. 2009](#)) or regional (e.g., [Thébault et Gallet 2010](#)) models. The *pdf* together with the posterior probability of the record dates may be useful for a purpose of archeomagnetic dating.

We find particularly interesting the use of the MCMC method in order to efficiently explore the space of possible record dates, as we observe that naive random sampling yields largely disparate probabilities for the different sets of dates. We now plan to extend our method to global models. In this context, efficient sampling is crucial.

In the present study we employ the simplest AR-2 stochastic process that mimics well high frequency variations of the field. Over longer periods, a -2 slope temporal power spectral density has been put forward ([Panovska et al. 2013](#)). Such a slope is consistent with the identification of archeomagnetic jerks ([Gallet et al. 2003](#)). It has motivated the introduction of AR-1 stochastic process in the modeling of long period changes of the magnetic field ([Brendel et al. 2007](#), [Buffett et al. 2013](#)). Alternative AR-2 processes may be employed to represent the two behaviors on short (5-100 years) and long (300-10,000 years) periods. Consider for instance the damped oscillator process ([Yaglom 2004](#), eq 2.155'), governed by stochastic equations depending on two parameters and of the general form :

$$d\frac{d\varphi}{dt} + 2\alpha d\varphi + \omega^2\varphi dt = d\zeta(t). \quad (7.15)$$

The Matérn AR-2 process used in this study corresponds to the case $\alpha = \omega$. Using instead $2\alpha > \omega^2$ one can mimic both the -2 slope temporal power spectral density found for the dipole moment at periods up to approximately 10^5 yrs from the analysis of geomagnetic records ([Constable et Johnson 2005](#)), and retrieved in geodynamo simulations ([Olson et al. 2012](#)), and the -4 slope observed at shorter periods. This could be an interesting alternative given the cyclic behavior found for the dipole tilt at millennial periods ([Nilsson et al. 2011](#)).

Quatrième partie

Modélisation globale

ÉTAT DE L'ART SUR LA MODÉLISATION GLOBALE

8

La modélisation globale consiste à reconstruire la variabilité temporelle des coefficients de Gauss. Contrairement à la modélisation régionale (Partie III), les données d'inclinaison, de déclinaison ou d'intensité, et les paramètres du modèle sont reliés par des équations non linéaires (équations 4.24 et 4.26). L'inversion procèdera donc de manière itérative grâce à un algorithme de Gauss-Newton et aux équations 4.20. En comparaison avec les modèles construits à partir de mesures directes (depuis 1840), les modèles archéomagnétiques ne décrivent que les grandes échelles spatiales du champ magnétique (jusqu'au degré $l = 4, 5$). Néanmoins, ils permettent une description sur des périodes plus longues. On cherche à observer, par exemple, si le champ moyenné sur de longues périodes de temps s'éloigne ou non d'un champ dipolaire. Plusieurs phénomènes sont observés sur les modèles couvrant les périodes plus récentes, mais ces périodes sont trop courtes pour comprendre ces phénomènes dans leur globalité. On pense par exemple à la persistance de lobes quasi-stationnaires sur les derniers millénaires (e.g. Kelly et Gubbins 1997), à la décroissance du dipôle observée depuis 1840 (e.g. Finlay 2008), date des premières mesures directes d'intensité, à la dérive vers l'Ouest de lobes magnétiques à la surface du noyau autour de l'équateur (e.g. Finlay et Jackson 2003), ou encore à l'anomalie négative d'intensité au dessus de l'Atlantique Sud observée dans les modèles historiques qui crée un débat sur une éventuelle future inversion. Que prédisent les modèles archéomagnétiques dans cette région sur les quatre derniers millénaires? Au vu de la couverture spatiale et temporelle de ce type de données, il est intéressant de savoir quels degrés d'harmoniques sphériques ces observations peuvent contraindre, et quelles réponses elles peuvent apporter. D'autre part, l'assimilation de données archéomagnétiques offre une perspective intéressante pour l'étude des écoulements dans le noyau sur une grande échelle de temps (Fournier *et al.* 2010; 2013). Mais les données assimilées proviennent elles-mêmes de modèles archéomagnétiques et l'assimilation de données requiert une bonne estimation des erreurs sur ces

modèles. Les modèles développés dans cette étude contiennent des erreurs réalistes, en accord avec les statistiques temporelles du champ magnétique.

Comme décrit en détails dans la partie II, notre méthode tient son originalité de l'information que l'on suppose avant estimation du modèle. Nous y avons discuté l'utilisation de plusieurs de ces a priori en mettant en lumière deux d'entre eux : (i) un processus de Matérn AR2 pour tous les coefficients et (ii) un processus d'oscillateur amorti pour le coefficient g_1^0 , et Matérn AR2 pour les autres coefficients. Les transformées de Fourier des fonctions de covariance supposées pour chaque degré sont montrées sur la figure 8.1. Les fonctions de covariances choisies pour les deux a priori étudiés dans cette partie, ne diffèrent que pour le coefficient g_1^0 .

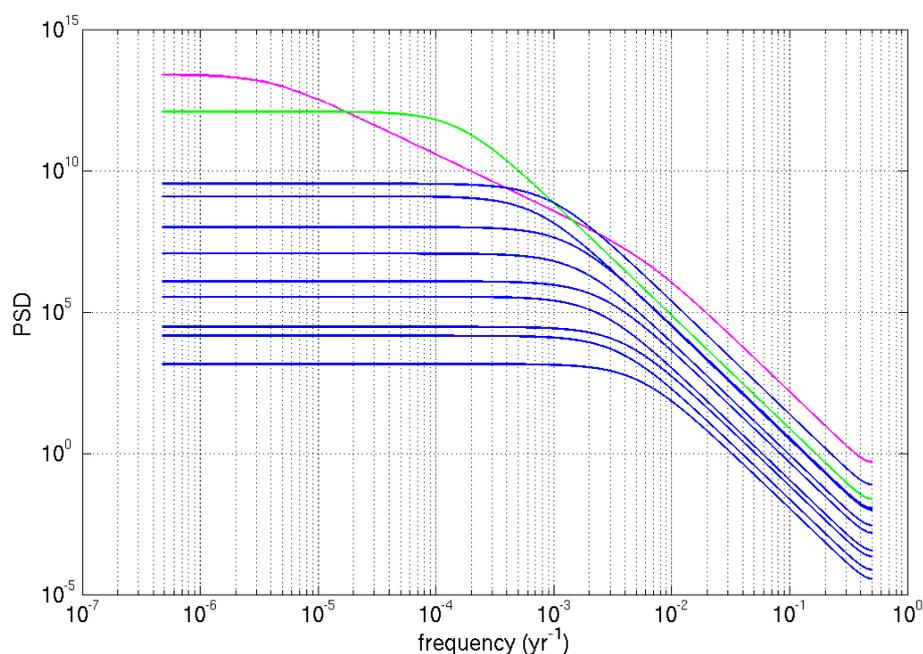


FIGURE 8.1 – Transformées de Fourier des fonctions d'auto-covariance de type Matérn AR2 pour les degrés l allant de 2 à 10 (bleu). Le degré $l = 1$ est tracé en vert. La transformée de Fourier de la fonction d'auto-covariance du processus de type oscillateur amorti du coefficient g_1^0 est tracée en magenta.

8.1 Les modèles existants

Les données archéomagnétiques contiennent des erreurs de mesure ou de datation significativement plus grandes que les données provenant de mesures directes (historiques, satellitaires ou d'observatoires). A une échelle globale, des études paléomagnétiques se sont d'abord intéressées à modéliser le champ moyenné sur de longues périodes de temps (e.g. [Carlut et Courtillot 1998](#), [Johnson et Constable 1997](#), [Kelly et Gubbins 1997](#), [McElhinny et al. 1996](#), [Schneider et Kent 1990](#), [Hatakeyama et Kono 2002](#)). Ces études cherchent

à évaluer si le champ moyenné sur plusieurs millions d'années a les caractéristiques d'un dipôle axial, ou si d'autres coefficients entrent dans sa description ; ou encore à savoir si le champ est axisymétrique. Tous les auteurs s'accordent sur le fait que le dipôle axial (g_1^0) a l'amplitude la plus forte. Ils s'accordent aussi sur l'importance du quadrupôle axial (g_2^0) sur ces échelles de temps. La plupart montrent une éventuelle influence de l'octupôle axial (g_3^0), mais ne concluent pas du fait du nombre limité de données pour contraindre un tel coefficient. Les autres coefficients ont tendance à s'annuler lorsqu'ils sont moyennés. Ces modèles présentent des caractéristiques assez différentes de ceux obtenus grâce à des observations historiques. [Constable \(2007a\)](#) compare certaines de ces études et montre que les caractéristiques principales, communes aux différents modèles, sont des variations zonales du champ radial B_r , mais que des structures non-zonales semblent persister. [Hongre et al. \(1998\)](#) ont été les premiers à s'intéresser à la modélisation d'un champ non moyenné sur les deux derniers millénaires pour des bas degrés d'harmoniques sphériques.

Les modèles Calsxk constituent les modèles de référence depuis l'article de [Korte et Constable \(2003\)](#). Ils sont construits sur une base d'harmoniques sphériques tronquée au degré $l = 10$, et de splines cubiques en temps. Ils s'appuient sur les régularisations classiquement utilisées, à savoir la pénalisation d'une norme de la complexité spatiale et la minimisation de la dérivée seconde en temps du champ magnétique. Les erreurs de datation et de mesures sont prises en compte grâce à la méthode de bootstrap MAST ([Korte et al. 2009](#)). Depuis, de nombreuses versions ont été proposées. Certaines versions sont obsolètes comme CALS7k. Les versions récentes sont les modèles Cals3k.3, Arch3k.1 et Sed3k.1 ([Korte et al. 2009](#)), qui permettent de comparer l'influence des différents types de données archéomagnétiques. Les modèles Cals regroupent toutes les données disponibles tandis que les modèles Arch et Sed sont construits à partir de bases de données ne contenant que les données archéomagnétiques et volcaniques pour l'une, et sédimentaires pour l'autre ([Donadini et al. 2009](#)). Cals3k.4 et Cals3k.4b sont les deux modèles les plus récents de cette série. Ils contiennent des données supplémentaires par rapport aux modèles Cals3k.3 et le second modèle consiste en la moyenne de 2000 modèles obtenus par bootstrap, qui ne garde donc que les caractéristiques spatiales et temporelles les plus robustes, et que les auteurs conseillent d'utiliser pour l'étude de l'évolution du champ magnétique à la limite noyau-manteau (CMB). Le modèle Cals10k.1b ([Korte et Constable 2011](#)) est aussi disponible et couvre les 10 derniers millénaires. Il est aussi issu d'une moyenne de milliers de modèles issus du bootstrap. [Nilsson et al. \(2014\)](#) ont récemment proposé le modèle pfm9k

couvrant les 9 derniers millénaires. Cette étude s'attarde principalement sur le traitement des données sédimentaires dans l'inversion.

Une étude récente de [Licht *et al.* \(2013\)](#) a fourni de nouveaux modèles de référence. Les modèles A-FM, ASD-FM et ASDI-FM sont des modèles obtenus à partir de données archéologiques et volcaniques, pour le premier, auxquelles on ajoute des données de paléodirections sédimentaires pour le second et des données de paléointensités sédimentaires pour le dernier. Ces modèles sont construits sur une base d'harmoniques sphériques tronquée au degré 5. Les modèles reposent sur une base de splines cubiques pour l'expansion temporelle. Les erreurs de mesures et de datation sont prises en compte par bootstrap. Les régularisations utilisées sont les mêmes que pour la construction des modèles Cals, en particulier, la pénalisation de la dérivée seconde en temps est utilisée. Les deux modèles diffèrent par leur degré de troncature et par le fait que [Licht *et al.* \(2013\)](#) fournissent un ensemble de modèles et non un modèle moyen et son écart-type. L'éventuel utilisateur a donc plus d'informations sur les erreurs du modèle.

Ces deux séries de modèles nous serviront de comparaison tout au long de cette étude.

8.2 Les données utilisées

Les données archéomagnétiques peuvent provenir de vestiges archéologiques, de laves, ou encore de sédiments lacustres ou marins. La modélisation de telles données doit prendre en compte les caractéristiques de chacun de ces groupes. Les données volcaniques et archéologiques sont les plus faciles à prendre en compte dès que l'on parvient à considérer les erreurs de mesures et de datation qui les accompagnent. Les données sédimentaires, quant à elles, sont des données relatives et doivent être recalibrées avant d'être utilisées pour la modélisation globale. [Nilsson *et al.* \(2014\)](#) proposent différentes solutions pour recalibrer ces données et leur assigner des erreurs de mesures cohérentes que l'on pourra utiliser lors d'une étude plus complète. La couverture spatiale et temporelle des données sédimentaires étant bien plus importante que celle des données archéologiques ou de laves, une bonne prise en compte de ces données sera cruciale par la suite. Pour le moment, nous nous intéresserons aux données volcaniques et archéologiques, laissant de côté les données sédimentaires pour cette étude.

Les données de cette étude correspondent à celles utilisées pour la construction des modèles A-FM de [Licht *et al.* \(2013\)](#) et Arch3k.1 de [Korte *et al.* \(2009\)](#). Leurs répartitions spatiale et temporelle sont montrées sur la figure 8.2 et leurs erreurs de datation sur la figure 8.3. Comme ces figures l'illustrent, il y a très peu de données dans l'hémisphère

Sud et de moins en moins à mesure que l'on considère des époques plus anciennes. Les données présentent de larges erreurs de datation qui doivent être prises en compte dans la modélisation. Cette étude préliminaire ne prendra cependant pas en compte ces erreurs dans un souci de simplicité.

Ce jeu de données regroupe 3723 intensités, 4836 inclinaisons et 3414 déclinaisons. Les erreurs de mesures pour les directions sont données par le cône de confiance à 95%, appelé α_{95} , et sont converties en erreurs sur les directions par (Piper 1989) :

$$\sigma_D = \frac{81}{140 \cos I} \alpha_{95}; \sigma_I = \frac{81}{140} \alpha_{95}. \quad (8.1)$$

Les erreurs de mesures seront assignées de différentes façons selon l'étude avec laquelle on souhaite comparer nos modèles. Pour les modèles Calsxk, les auteurs montrent, grâce à une comparaison directe avec le modèle historique *gufm1* (Jackson *et al.* 2000), que les résidus sont souvent plus grands que ceux prédits par les erreurs de mesures fournies dans la base de données. Ce constat les a conduits à assigner une erreur minimale pour toutes les données présentant des erreurs plus faibles que cette erreur limite. Plus de 70% des données de la collection se voient donc assigner les erreurs $\sigma_F = 5000$ nT pour l'intensité et $\alpha_{95} = 4.3^\circ$ pour les directions. Licht *et al.* (2013) ont choisi de considérer les erreurs telles qu'elles étaient publiées dans la base de données. Certaines données sont cependant publiées sans erreurs, or celles-ci sont indispensables à la procédure d'inversion pour construire un modèle global. Pour palier ce manque d'information, les auteurs calculent la valeur RMS des erreurs publiées pour chaque type de données et la multiplient par 1.5 pour légèrement pénaliser les données avec des erreurs inconnues. Ils remplacent donc ces erreurs non publiées par les valeurs $\sigma_F = 8250$ nT pour l'intensité et $\alpha_{95} = 4.5^\circ$ pour les directions. Le problème principal lié à ces erreurs est qu'elles peuvent être sous-estimées. Si tel est le cas, un modèle classique va chercher à reproduire les données mêmes aberrantes, ce qui peut conduire à un modèle complètement irréaliste.

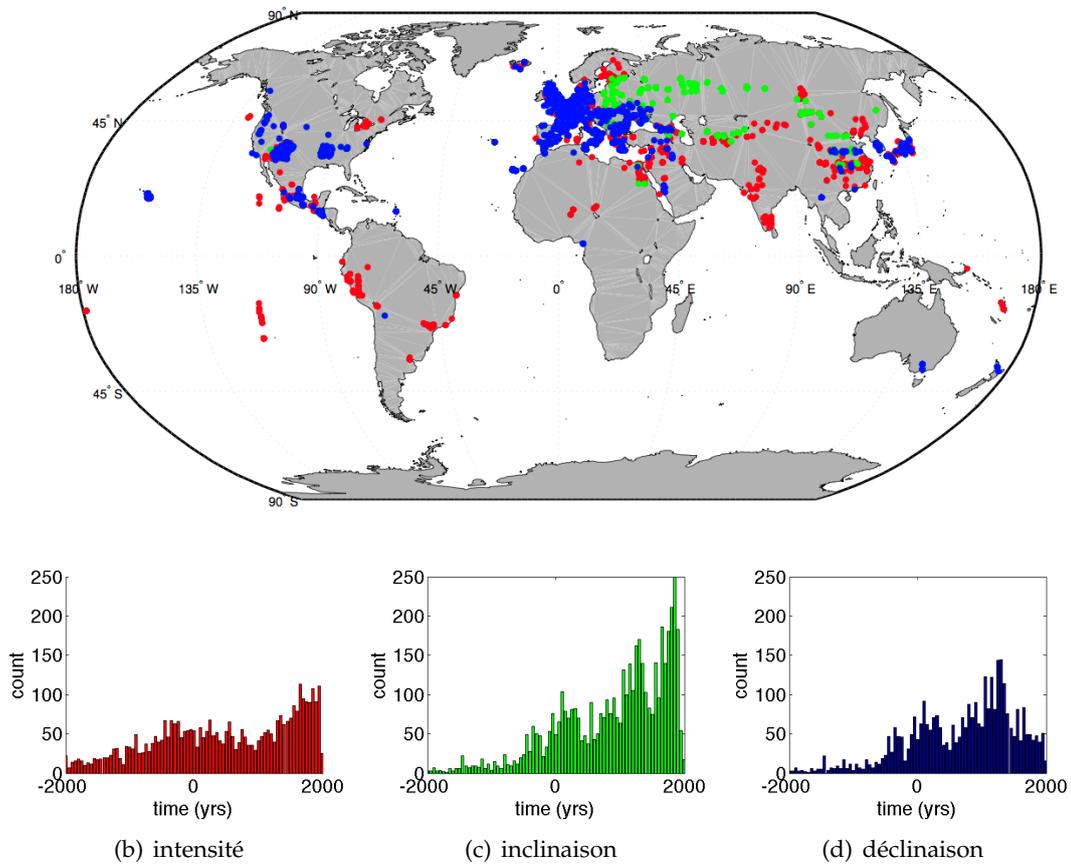


FIGURE 8.2 – Répartition spatiale et temporelle des données d'intensité (rouge), d'inclinaison (vert) et de déclinaison (bleu) utilisées dans cette étude.

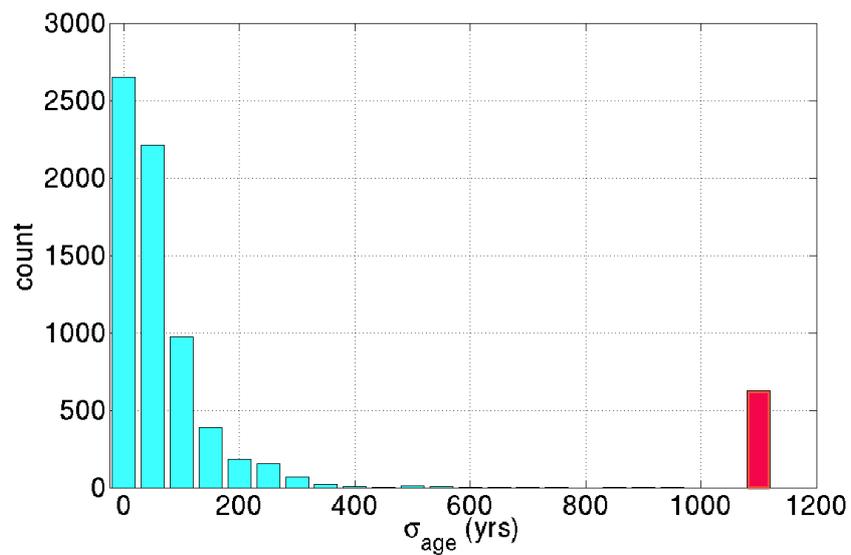


FIGURE 8.3 – Erreurs de datation contenues dans les données archéomagnétiques. La largeur des cellules est de 50 ans. La cellule rouge représente le nombre de données sans informations sur l'erreur de datation.

DISCUSSION MÉTHODOLOGIQUE

9

Ce chapitre vise à mettre en place la méthodologie adoptée pour obtenir les résultats présentés dans le chapitre suivant. Nous présentons plus en détails, la manière dont on s'est affranchi de l'utilisation des splines pour l'interpolation temporelle (section 9.1). Nous discutons très rapidement du critère de convergence utilisé pour l'algorithme de Gauss-Newton (section 9.2). Nous montrons dans la section 9.3 quelques tests synthétiques nous permettant de valider notre méthode avant de présenter la méthode adoptée pour considérer de manière robuste les erreurs de mesures (section 9.4). Une discussion sur les erreurs de modélisation est présentée section 9.5. Nous finissons par une comparaison des résultats obtenus à partir des deux a priori mis en lumière précédemment (section 9.6).

9.1 S'affranchir des splines

Le code utilisé pour l'inversion des données d'observatoires afin de construire le modèle COV-OBS (Gillet *et al.* 2013) repose sur l'information a priori de type Matérn AR2 pour les coefficients de Gauss. Il est interpolé temporellement grâce à des fonctions splines cubiques, et les matrices de covariances contenant l'information a priori sont projetées sur ces fonctions supports. L'interpolation via des fonctions splines cubiques d'ordre 4 par définition, est la courbe la plus lisse que l'on puisse trouver entre deux points, qui minimise la norme de sa dérivée seconde entre x_1 et x_2 :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d^2 f}{dx^2} \right]^2 dx. \quad (9.1)$$

L'utilisation des splines risque de lisser des variations rapides du champ magnétique apparaissant sur les modèles. La première étape de cette étude, dans le cadre de la modélisation globale, a été de s'affranchir de l'utilisation de ces fonctions supports. Comme déjà discuté dans la partie II, les matrices de covariance permettent directement d'interpoler un modèle continu aux temps des observations (équation 4.21). Pour une itération quelconque i de l'algorithme de Gauss-Newton, l'équation 4.21 permet de calculer le modèle à l'itération

précédente aux temps des observations afin de calculer les prédictions, puis les résidus, nécessaires à la résolution du problème inverse. La matrice de gain de Kalman apparaît aussi lorsque l'on veut évaluer la matrice des dérivées partielles (équation 4.23). Nicolas Gillet a remarqué que les splines provoquaient des oscillations non contraintes de la variation séculaire de périodes de 2 ou 3 ans, pour les modèles issus de données annuelles d'observatoires, lorsqu'il calculait les modèles avec des nœuds tous les ans. De la même manière, nous avons constaté en analysant la base de données complète (données archéologiques, laves et sédiments), que leur répartition montrait une fréquence préférentielle de 150 ans et que l'utilisation de splines avec des nœuds tous les 50 ans provoquait des oscillations non contraintes. Nous n'avons pas observé de différences fondamentales entre les deux interpolations en utilisant uniquement les données archéologiques et de laves, néanmoins, notre interpolation est régie par un projecteur qui n'est pas arbitraire puisque construit sur les statistiques temporelles connues du champ magnétique. De plus, cette interpolation, contrairement aux splines, ne s'appuie pas sur un support compact. Ainsi, elle ne présente pas d'effets de bords qui peuvent apparaître dans les modèles existants et qui nécessitent un traitement spécifique (pénalisation arbitraire (e.g. [Finlay et al. 2012](#))).

9.2 Convergence de l'algorithme de Newton

L'algorithme utilisé converge rapidement, en quelques itérations. On considère le critère suivant en fonction du temps :

$$\epsilon(t) = \sqrt{\frac{\sum_{lm} \Delta g_l^m(t)^2}{\sum_{lm} g_l^m(t)^2}} \quad (9.2)$$

avec Δg_l^m la différence entre les coefficients à l'itération $i + 1$ et ceux à l'itération i . La figure 9.1 montre l'évolution de ce critère $\epsilon(t)$ au fil de 6 itérations pour un modèle avec un a priori de type Matérn AR2 échantillonné tous les 50 ans. On voit que dès la cinquième itération, ϵ est en tout temps plus petit que 2%. Par la suite, on impose que $\epsilon(t) < 2\%$ pour tout temps.

9.3 Validation de la méthode sur des jeux de données synthétiques

Afin de valider la méthode développée dans cette étude et de la comparer à la méthode classique des moindres carrés, il est intéressant de partir d'un jeu de données issu d'un modèle synthétique que l'on connaît parfaitement.

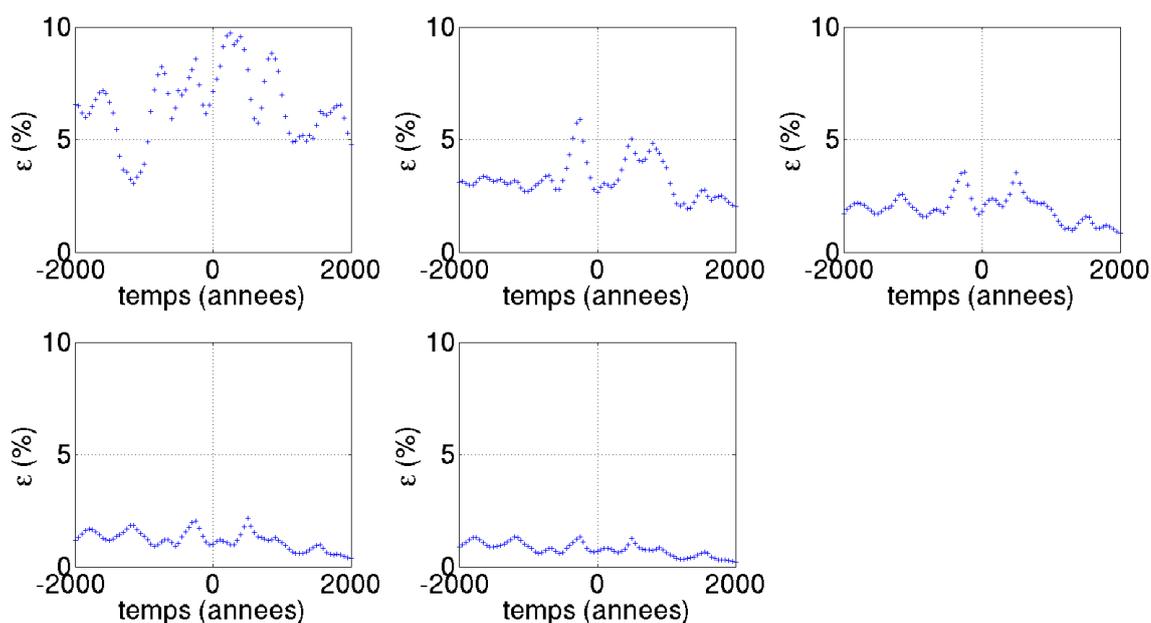


FIGURE 9.1 – Evolution de la norme $\epsilon(t)$ (en %) au fil de 5 itérations.

9.3.1 Influence de l'information a priori

Le premier jeu de données utilisé ici a été construit à partir d'un modèle synthétique calculé jusqu'au degré $l = 10$ avec un pas d'échantillonnage de 50 ans, à partir d'un a priori de type Matérn AR2 pour tous les coefficients dont les temps de corrélation sont décrits par l'équation 5.17. Afin de reproduire la répartition spatiale et temporelle des données, les prédictions de ce modèle ont été calculées aux époques et aux lieux des observations archéomagnétiques. Ce jeu de données n'a pas été bruité.

Nous souhaitons comparer le résultat après inversion obtenu pour deux a priori différents. La figure 9.2 compare les coefficients dipolaires obtenus pour une expérience jumelle (à gauche), i.e. l'a priori est le même pour la construction du jeu de données synthétique et pour l'inversion (Matérn AR2 dans les deux cas); et pour une expérience où l'a priori pour l'inversion est différent de celui pour la construction du jeu de données (Matérn AR2 pour le jeu de données et oscillateur amorti pour g_1^0 et Matérn AR2 pour les autres coefficients pour l'inversion). Le modèle synthétique est tracé en rouge, le modèle moyen en noir et son ensemble en gris. Tout d'abord, on peut constater que malgré une répartition très inhomogène des mesures archéomagnétiques, le modèle moyen reproduit très bien le modèle vrai pour les coefficients dipolaires et que la dispersion de l'ensemble de modèles est assez petite. Ce type de test nous a permis de montrer qu'au delà du degré $l = 5$, malgré des données non bruitées, la répartition spatiale et temporelle des données archéomagnétiques

ne permettait pas de retrouver le modèle vrai. D'autre part, le changement d'a priori pour le dipôle axial n'influence que très peu le résultat ce qui montre que la méthode n'est pas trop sensible aux paramètres choisis pour définir l'a priori AR2.

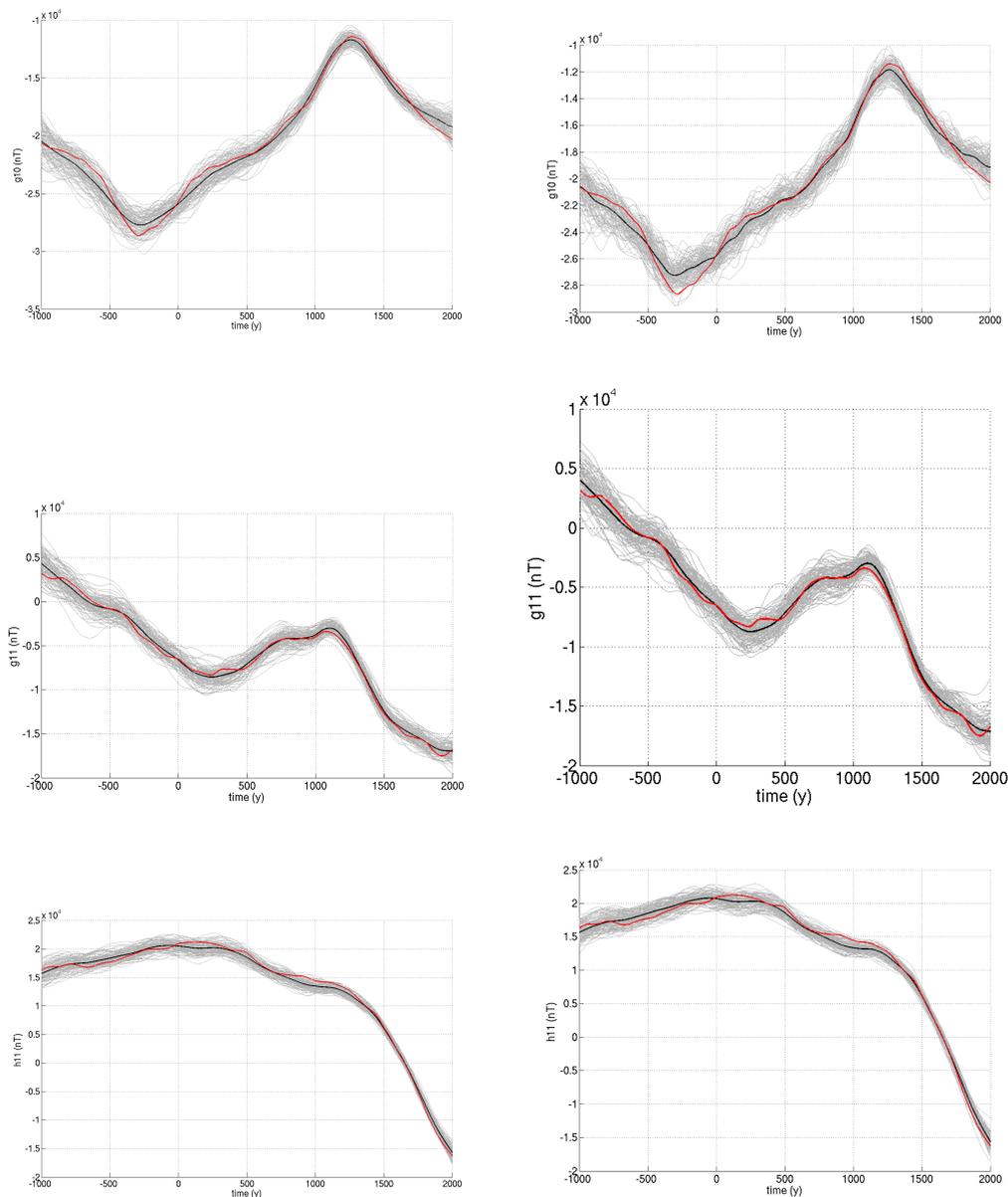


FIGURE 9.2 – Comparaison du résultat obtenu pour un a priori de type Matérn AR2 à gauche, et pour un a priori de type oscillateur amorti pour le dipôle axial et Matérn AR2 pour les autres coefficients à droite. Le jeu de données synthétique est construit jusqu'au degré $l = 10$ avec un a priori de type Matérn AR2. Le modèle moyen est tracé en noir, et son ensemble en gris. Le modèle vrai est tracé en rouge.

9.3.2 Comparaison avec une méthode régularisée

De la même manière que précédemment, on construit un jeu de données synthétiques à partir d'un a priori de type Matérn AR2, aux époques et lieux des données archéomagnétiques.

Le but est désormais de comparer l'efficacité de notre méthode par rapport à celle d'une méthode régularisée afin de retrouver le modèle vrai. Les paramètres choisis pour l'inversion par notre méthode sont un a priori de type Matérn AR2 pour tous les coefficients, un pas d'échantillonnage de 50 ans et une troncature au degré $l = 4$. Pour les paramètres à définir pour l'inversion par la méthode régularisée, il convient de se référer à la section 4.1 et particulièrement à l'équation 4.7. On a choisi d'utiliser la norme de dissipation ohmique de Gubbins (1975) et celle de la pénalisation de la dérivée seconde en temps du champ radial.

Différents couples des paramètres λ et τ ont été testés et le misfit aux données a été choisi comme critère de sélection. La figure 9.3 montre les courbes obtenues pour le dipôle axial pour différents couples de paramètres de régularisation. Le paramètre de régularisation spatiale est fixe pour chacune des figures, les courbes bleue, rose et verte montrent le résultat pour différentes valeurs du paramètre de régularisation temporelle. Ces paramètres sont choisis afin de s'approcher le plus près possible d'un misfit aux données de 1. Ces figures contiennent aussi la courbe vraie tracée en rouge ainsi que le modèle moyen et son écart-type (3σ) en noir obtenus pour le modèle bayésien. Le misfit obtenu pour le modèle moyen bayésien est de l'ordre de 0.2. On voit pour la figure du haut que pour une telle valeur du paramètre de régularisation spatiale et pour un misfit aux données proche de 1, les courbes issues de la méthode régularisée sont biaisées vers 0 par rapport à la courbe vraie.

La figure du bas montre les mêmes courbes pour un paramètre de régularisation spatiale réduit d'un facteur 100. On voit alors, que les courbes issues de la méthode régularisée reproduisent beaucoup mieux le comportement de la courbe vraie. Le misfit aux données quant à lui est désormais beaucoup plus faible ce qui laisse supposer que les erreurs assignées aux données sont sur-évaluées. C'est en effet le cas dans cet exemple, les données n'ayant pas été bruitées alors que nous leur avons assignés les erreurs de la base de données archéomagnétiques. Cependant, on voit que le choix des paramètres de régularisation change drastiquement les résultats obtenus. On voit ici la limite d'un choix des paramètres de régularisation fondé sur le misfit aux données. La méthode bayésienne limite cet arbitraire et en cela nous semble plus robuste qu'une méthode régularisée.

Afin de tester notre méthode sur un jeu de données plus réaliste, on part maintenant d'un nouveau jeu de données que l'on bruité aléatoirement à l'intérieur des erreurs fournies par la base de données archéomagnétiques. Les paramètres de régularisation ont été fixés

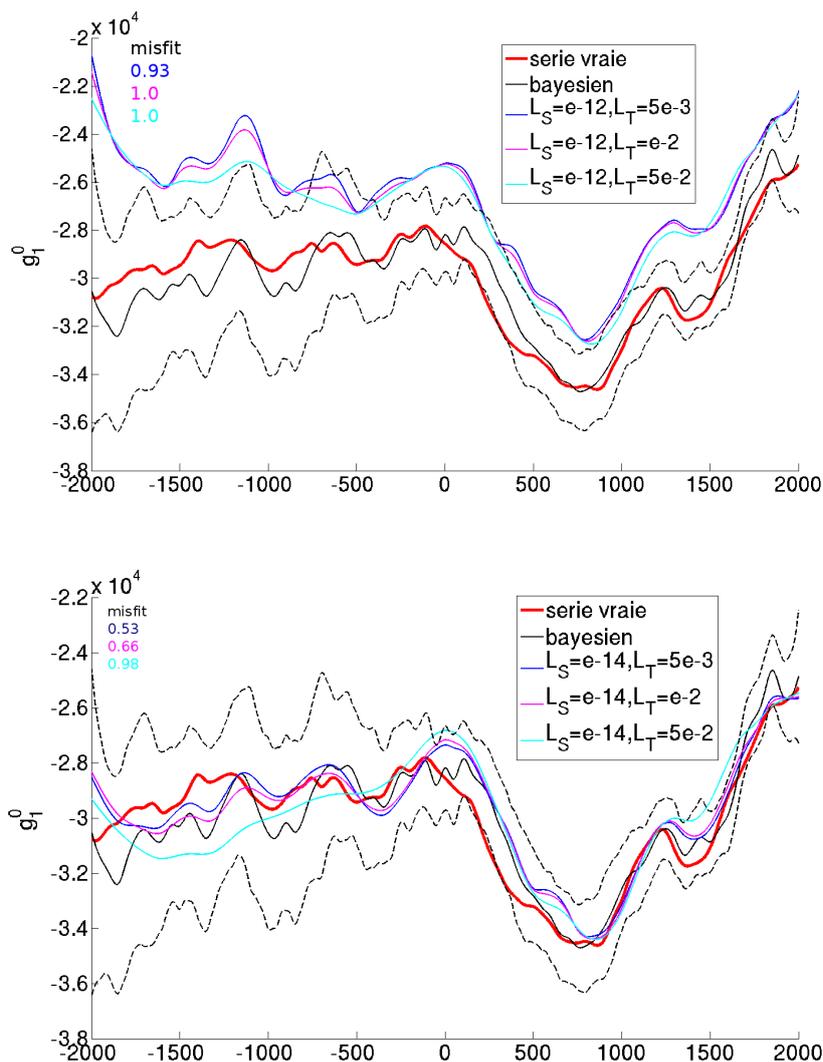


FIGURE 9.3 – Comparaison entre la méthode bayésienne et la méthode régularisée. La courbe vraie est tracée en rouge, le modèle moyen bayésien et son écart-type (3σ) en noir et traits pointillés. Les courbes bleue, magenta et cyan représentent les modèles moyens obtenus par la méthode régularisée utilisant différents paramètres de régularisation, λ et τ répertoriés dans la légende ($L_S = \lambda$, $L_T = \tau$). Le misfit aux données pour chacun des modèles régularisés est précisé sur chacune des figures.

comme étant $\lambda = 1.10^{-14}$ et $\tau = 9.10^{-4}$. Les noeuds des splines cubiques sont tous les 50 ans et le degré de troncature est ici aussi $l = 4$.

La figure 9.4 montre le résultat obtenu pour les deux méthodes pour différents coefficients. Le premier constat quant à la comparaison de ces deux méthodes, comme on l'a énoncé auparavant, est que la méthode régularisée ne permet pas d'avoir des statistiques a posteriori réalistes. C'est pourquoi sur ces figures n'apparaissent que les barres d'erreurs issues de la méthode bayésienne. De plus, on voit que ces barres d'erreurs englobent pour tous les coefficients la série vraie. On peut aussi constater que la dispersion de l'ensemble encadré par les traits pointillés noirs est plus importante pour les époques les plus an-

ciennes. Ceci s'explique par la faible quantité d'observations disponibles pour ces époques. Le modèle moyen fourni par la méthode régularisée reproduit assez bien le comportement de la série vraie pour tous ces coefficients, cependant, nous avons noté en faisant cet exercice que ce comportement était fortement dépendant des paramètres de régularisation choisis.

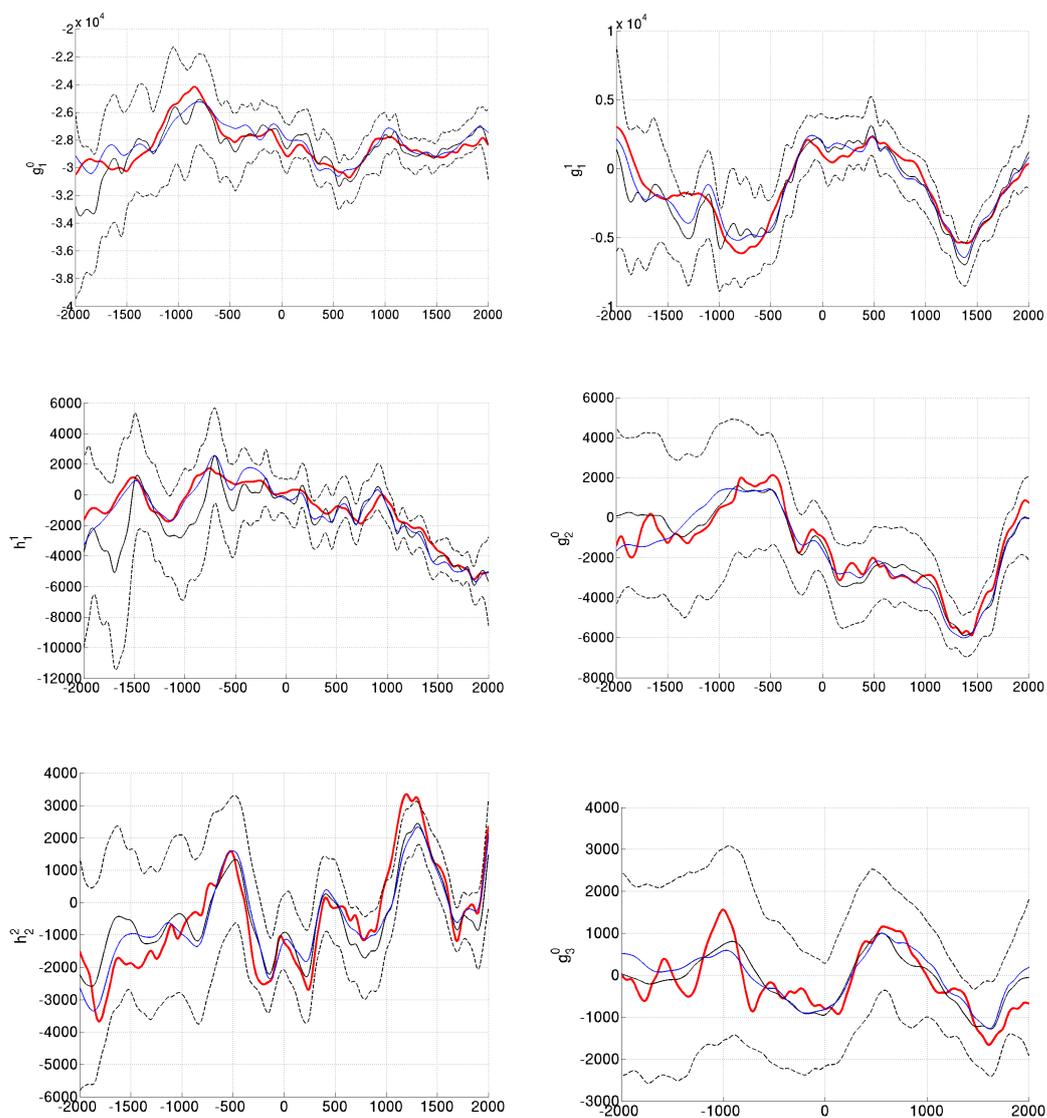


FIGURE 9.4 – Comparaison du résultat obtenu pour la méthode régularisée (bleu) et pour la méthode bayésienne (modèle moyen en noir et 3σ en pointillés). La série vraie est tracée en rouge.

Ces exercices ont été réalisés avec des jeux de données synthétiques ne contenant pas de données aberrantes, ce qui est loin d'être le cas des observations archéomagnétiques. La section suivante s'attache à prendre en compte efficacement ces données aberrantes en utilisant désormais les observations archéomagnétiques.

9.4 Etude des données aberrantes

Différentes normes peuvent être utilisées pour prendre en compte les erreurs de mesures. La norme la plus couramment utilisée est la norme L2, qui suppose que les erreurs de mesures suivent une distribution gaussienne, i.e. que la matrice de covariance d'erreurs s'écrit pour une donnée i , $C_{eeii} = \sigma_{yi}^2$, avec σ_{yi} l'écart-type de l'erreur de mesure sur la donnée i . Cette norme est toutefois très sensible aux mesures aberrantes. La norme L1 suppose que les erreurs de mesures ont une distribution laplacienne, la matrice de covariance d'erreurs s'écrit alors $C_{eeii} = |\sigma_{yi}|$. La section 7.3.4 discute de l'utilisation de la norme de Huber sur les courbes régionales, considérée comme une norme robuste sur les erreurs de mesures. Nous avons montré que son utilisation dans ce cas était efficace sur les mesures aberrantes (Section 7.5) et choisissons de l'utiliser pour le modèle global. On rappelle ici l'écriture de la matrice de covariance d'erreurs lorsque l'on utilise la norme de Huber :

$$C_{eeii} = \begin{cases} \sigma_{yi}^2 & , r_i < c \\ \frac{r_i \sigma_{yi}^2}{c} & , r_i \geq c \end{cases} \quad (9.3)$$

avec $c = 1.5$ et $r_i = \frac{|y_i - \hat{m}_{yi}|}{\sigma_{yi}}$, la différence entre la prédiction du modèle et l'observation normalisée par l'erreur de mesures. r_i est appelé résidu normalisé.

Pour la construction du modèle Arch3k.1, Korte *et al.* (2009) ont utilisé les erreurs minimales sur l'intensité et les directions présentées précédemment, ce qui réduit drastiquement la présence de données aberrantes dans le jeu de données. La norme L2 peut donc être utilisée. Cependant, en faisant cela, on perd beaucoup d'informations. En effet, plus de 70% des erreurs se voient assigner ces valeurs minimales. Pour le modèle A-FM, Licht *et al.* (2013) ont choisi de calculer un premier modèle à partir d'un modèle initial constitué d'un dipôle axial constant au cours du temps, et de calculer les résidus issus de ce premier modèle. Dans le cas où la différence entre la prédiction du modèle et l'observation est supérieure à trois fois l'erreur a priori sur la mesure, cette dernière est remplacée par la valeur du résidu. Ils repartent alors de ce nouveau jeu de données et du modèle initial constitué du dipôle axial, et utilisent une norme L2 pour calculer leur modèle final. Une telle procédure présente l'avantage d'éliminer les mesures aberrantes mais l'inconvénient de dépendre fortement du modèle initial choisi. Pour certains modèles initiaux, cette procédure risque d'assigner la valeur des résidus à la majorité des données et donc de perdre ici aussi une information précieuse fournie par les études de terrain. En partant d'un modèle initial considérant un coefficient g_1^0 constant et tous les autres coefficients nuls, 6.6% des données sont recalibrées.

Dans cette section, nous avons calculé un modèle à partir d'un a priori oscillateur amorti sur le coefficient g_1^0 et un a priori Matérn AR2 pour les autres coefficients, avec un pas d'échantillonnage de 30 ans. Le modèle est tronqué au degré $l = 4$. Dans les figures de cette section sont représentés un ensemble de modèles pour le coefficient g_1^0 , calculé à partir de la matrice de covariance a posteriori (en gris) et un modèle moyen (en noir). La figure 9.5 compare le modèle moyen avec son ensemble calculés avec la norme de Huber, obtenus en utilisant la même base de données que Korte *et al.* (2009) (i.e. avec les erreurs de mesures minimales), aux modèles Arch3k.1 et A-FM, ainsi qu'au modèle moyen obtenu avec une norme L2. Le traitement des données proposé par Korte *et al.* (2009) a pour effet

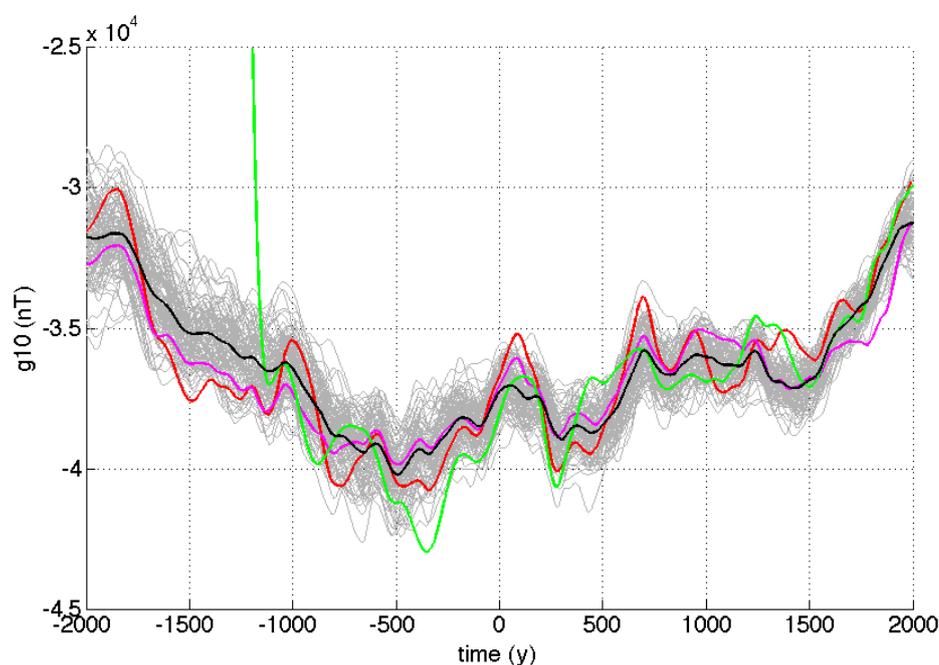


FIGURE 9.5 – Coefficient g_1^0 moyen obtenu à partir d'une norme de Huber (noir) et son ensemble (gris) et g_1^0 moyen obtenu à partir d'une norme L2 (magenta) pour un jeu de données où les erreurs minimales proposées par Korte *et al.* (2009) ont été assignées. Les modèles Arch3k.1 (rouge) et A-FM (vert) sont tracés pour comparaison.

de beaucoup lisser le modèle moyen, particulièrement lorsque l'on utilise une norme de Huber qui recalibre en plus les éventuelles mesures aberrantes restantes. L'incertitude sur le modèle représentée par la largeur de l'ensemble gris est très homogène au cours du temps, et assez large car les erreurs sur les mesures sont très importantes et ont des valeurs relativement homogènes.

Nous avons préféré, comme Licht *et al.* (2013), conserver les erreurs publiées dans les études, pour la construction de nos modèles. Lorsqu'elles ne sont pas publiées, nous assignons les mêmes valeurs que ces auteurs. Nous ne procédons cependant pas à la première

recalibration des erreurs en fonction des résidus obtenus à la première itération. La figure 9.6 montre les résultats obtenus à partir du jeu de données initial pour une norme de Huber. Le modèle moyen présente des variations beaucoup plus importantes que le modèle précédent obtenu à partir du jeu de données avec des erreurs recalibrées. Il présente aussi des variations plus rapides que les deux autres modèles. Ceci est lié à l'a priori utilisé pour construire ce modèle qui est beaucoup moins restrictif que la norme temporelle utilisée pour les deux autres (la pénalisation de la dérivée seconde en temps du champ magnétique). La dispersion de l'ensemble de modèles varie dans le temps à la différence de la figure 9.5. L'utilisation de la norme de Huber semble éviter de forts effets des mesures aberrantes, même si certains pics peuvent y être liés, notamment les 3 pics apparaissant entre 500 et 1000 AD.

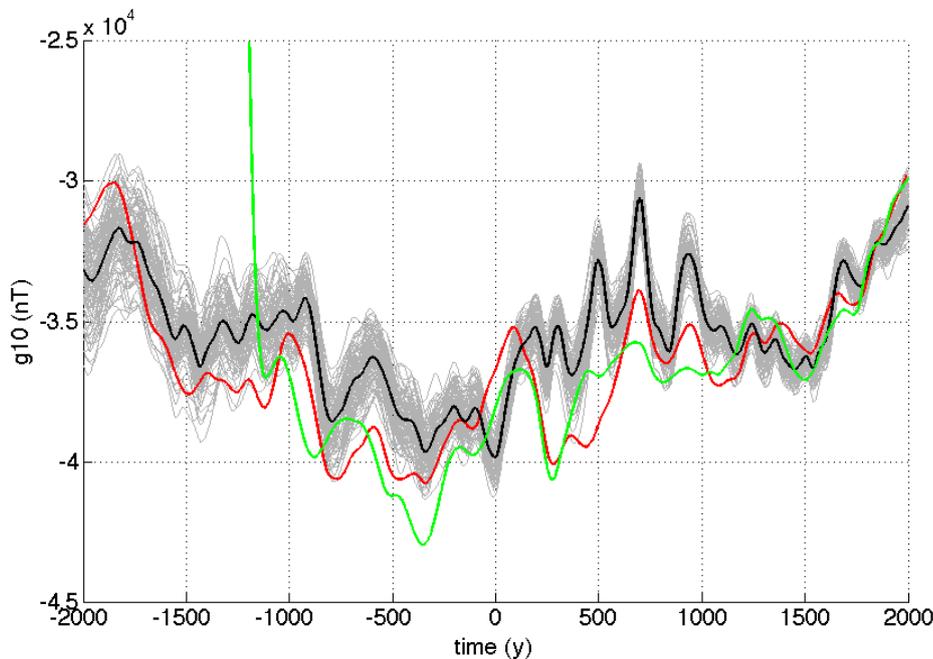


FIGURE 9.6 – Coefficient g_1^0 moyen obtenu à partir d'une norme de Huber (noir) et son ensemble (gris) à partir du jeu de données initial. Les modèles Arch3k.1 (rouge) et A-FM (vert) sont tracés pour comparaison.

La figure 9.7 montre le résultat obtenu à partir du jeu de données initial mais en utilisant une norme L2. Comme prévu, le modèle est très sensible aux mesures aberrantes dans la collection de données, qui ne sont pas bien contraintes par cette norme. L'utilisation de cette norme est contre-indiquée lorsque l'on utilise les erreurs publiées par les auteurs. Ce phénomène se verra grandement augmenté si on considère les données sédimentaires qui contiennent de nombreuses mesures aberrantes.

La figure 9.8 montre la répartition spatiale et temporelle des données qui, après inversion, présentent des résidus supérieurs à 10 fois leurs erreurs a priori. Ces données

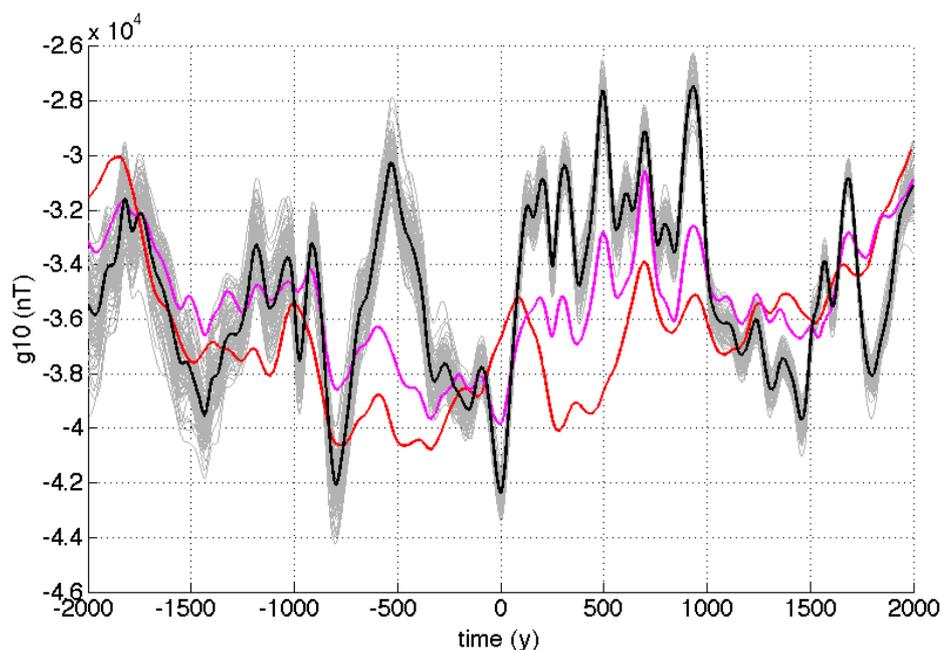


FIGURE 9.7 – Coefficient g_1^0 moyen obtenu à partir d'une norme L2 (noir) et son ensemble (gris) à partir du jeu de données initial. Le modèle moyen obtenu avec la norme de Huber est tracé à nouveau pour rappel (magenta). Le modèle Arch3k.1 (rouge) est tracé pour comparaison.

représentent 2% du jeu de données initiales. La carte montre que la majorité de ces données se situent en Europe, la région contenant la majorité des données initiales (Figure 8.2). On voit aussi que 5% des données les plus anciennes peuvent être considérées comme des données aberrantes, les autres époques montrent des pourcentages, en fonction des données présentes, assez homogènes. La norme de Huber va attribuer un poids très faible à ces données lors de l'inversion, et réduire ainsi leur impact sur le modèle final.

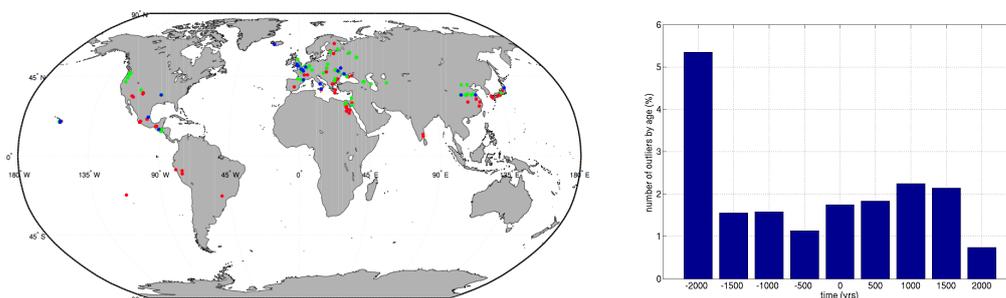


FIGURE 9.8 – Carte des données avec des résidus après inversion supérieurs à 10 fois leurs erreurs a priori. Les mesures d'intensité sont en rouge, celles d'inclinaison en vert et celles de déclinaison en bleu. Histogramme montrant le pourcentage de ces données par rapport au nombre de données totales, regroupées par périodes de 500 ans.

Assigner des erreurs minimales au jeu de données afin d'éviter l'effet des mesures aberrantes, comme proposé par Korte *et al.* (2009), lisse fortement le modèle moyen, et

représente une perte importante d'informations sur le modèle final et ses erreurs. Nous montrons que l'utilisation de la norme de Huber réduit considérablement l'effet de ces mesures par rapport à une norme L2 classique. Elle ne peut malgré tout résoudre toutes les difficultés induites par des données aberrantes. Ce constat est une motivation pour avoir une base de données la plus précise possible comprenant des erreurs de mesures réalistes et bien contraintes. Notre information a priori autorise plus de variations sur le coefficient g_1^0 que celle utilisée dans les deux autres modèles (pénalisation de la dérivée seconde en temps). Notre modèle est donc plus sensible aux effets des mesures, potentiellement aberrantes, qui apparaissent malgré la norme de Huber. Cependant, étant construit à partir de statistiques réalistes du champ magnétique, nous estimons qu'il n'y a pas de raisons de contraindre notre modèle davantage, les statistiques autorisant ce comportement. Les résultats seront discutés plus en détails ultérieurement, cette section ne vise qu'à argumenter l'utilisation d'un jeu de données non recalibrées utilisé avec la norme de Huber.

9.5 Erreurs de modélisation

Les erreurs de modélisation apparaissent lorsque l'on tronque le modèle à un certain degré d'harmoniques sphériques. Le potentiel magnétique de l'équation 4.2 n'est en effet pas écrit pour l allant de un à l'infini mais pour l allant de un à L . L'erreur de modélisation est donc l'erreur que l'on fait en ne modélisant pas les degrés supérieurs à L . Elle peut être prise en compte en l'ajoutant aux erreurs de mesures dans la matrice de covariance d'erreurs C_{ee} . Les modèles archéomagnétiques sont souvent tronqués à bas degrés car les données ne permettent pas de résoudre les plus hauts degrés. Le premier modèle archéomagnétique de [Hongre et al. \(1998\)](#) était tronqué au degré $l = 2$, avec en plus, les coefficients g_3^3 et h_3^3 . [Korte et Constable \(2003\)](#) ont tronqué leur modèle au degré $l = 10$ en indiquant que les données ne permettaient pas de résoudre de si hauts degrés mais qu'ainsi, la complexité de leur modèle ne serait influencée que par les données et la régularisation, et pas par la troncature. Les erreurs de modélisation n'ont pas été prises en compte dans cette étude. [Licht et al. \(2013\)](#) ont choisi de tronquer leur modèle au degré $l = 5$. Ils prennent en compte les erreurs dues à cette troncature grâce au modèle `gufm1` de [Jackson et al. \(2000\)](#), en comparant les prédictions du modèle tronqué au degré $l = 5$ à celles du modèle complet (tronqué au degré $l = 14$). Ils prennent la valeur rms maximale obtenue parmi tous les points à la surface de la Terre et ajoutent cette erreur de manière quadratique aux erreurs de mesures dans la matrice C_{ee} . L'erreur de modélisation obtenue pour l'intensité est de $2\mu\text{T}$ et le cône de confiance pour les directions est $\alpha_{95} = 3.4^\circ$.

Nous avons choisi d'évaluer ces erreurs directement sur nos modèles. Nous calculons pour cela un premier modèle tronqué au degré $l = 10$ et un second tronqué au degré $l = 8$. Les deux modèles que nous présentons ici sont construits à partir d'un a priori Matérn AR2 pour tous les coefficients et sont échantillonnés tous les 50 ans. La figure 9.9 montre la différence obtenue pour la prédiction de la composante radiale B_r du champ à la surface de la Terre pour les quatre premiers degrés entre les deux modèles en 2000 BC. Les valeurs sont très faibles. Afin de comparer ces valeurs aux incertitudes sur le modèle, la figure 9.10 montre l'écart-type de l'ensemble obtenu pour la composante radiale du champ jusqu'au degré 4 pour le modèle tronqué au degré $l = 10$ à la même date (le modèle tronqué au degré $l = 8$ donne des valeurs très proches). Cette valeur représente l'incertitude sur le modèle. La valeur minimale de l'écart-type obtenue est de 1400 nT. Nous concluons donc que les erreurs liées à la troncature sont très faibles devant les erreurs a posteriori sur le modèle et choisissons de les négliger par la suite.

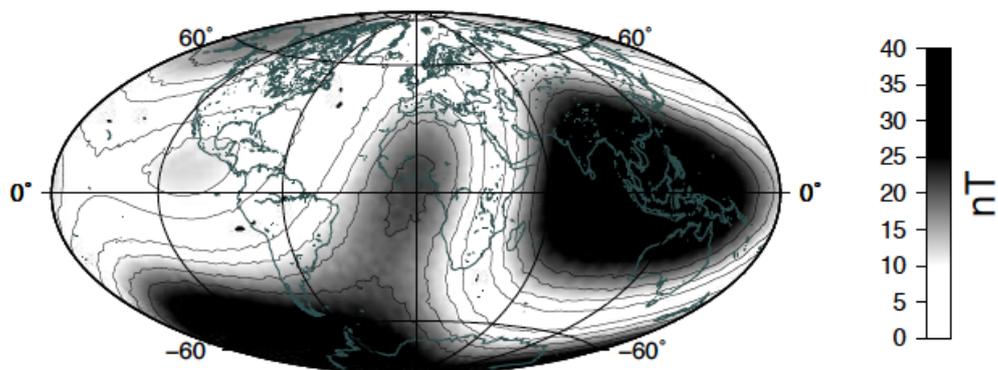


FIGURE 9.9 – Différence entre le champ radial à la surface de la Terre en 2000 BC obtenu à partir des quatre premiers degrés pour le modèle tronqué à $l = 10$ et le modèle tronqué à $l = 8$. Les contours sont tous les 5 nT.

9.6 Comparaison des a priori

Les deux modèles comparés dans cette section ne diffèrent que par l'information a priori utilisée. Ils ont tous deux un pas d'échantillonnage de 50 ans, la norme de Huber est utilisée dans les deux cas, ils sont tronqués au degré $l = 10$, couvrent les quatre derniers millénaires et sont calculés à partir des données archéomagnétiques non recalibrées. L'un est construit à partir d'un a priori de type Matérn AR2 pour tous les coefficients tandis que

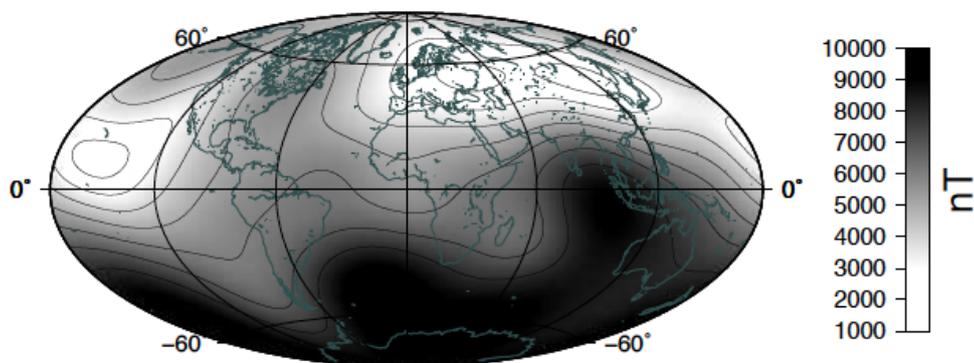


FIGURE 9.10 – Ecart-type de l'ensemble de modèles pour le champ radial en 2000 BC représenté jusqu'au degré $l = 4$ pour le modèle tronqué au degré $l = 10$. La valeur minimale est de 1400 nT. Les contours sont tous les 1000 nT.

l'autre est construit à partir d'un a priori de type oscillateur amorti pour le g_1^0 et de type Matérn AR2 pour les autres coefficients. La figure 9.11 montre les deux modèles moyens et leurs ensembles obtenus pour le coefficient g_1^0 et le coefficient g_1^1 . Les coefficients provenant du modèle construit à partir du processus Matérn AR2 sont représentés à gauche de la figure, ceux venant du modèle construit à partir du processus oscillateur amorti, à droite. Les coefficients moyens prédits par Arch3k.1 et A-FM sont tracés en rouge et vert pour une comparaison visuelle. Celle-ci sera discutée dans le chapitre suivant. Les deux modèles moyens, ainsi que leurs ensembles présentent des différences notables pour le coefficient g_1^0 . Le coefficient obtenu à partir de l'a priori oscillateur amorti est beaucoup moins lisse que celui obtenu à partir de l'a priori Matérn AR2. Cette différence de comportement est liée à la forme du spectre des covariances de ces a priori pour le coefficient g_1^0 (c.f. les spectres verts et magenta de la figure 8.1). On observe à hautes fréquences que le spectre magenta est plus haut que le vert : cet a priori a une énergie plus forte à hautes fréquences et autorise donc plus de variations du g_1^0 . Pour le coefficient g_1^1 qui résulte lui, dans les deux cas, d'un processus avec un a priori de type Matérn AR2, les deux figures sont très semblables. Il en va de même pour la comparaison de tous les autres coefficients, qui ont eux aussi le même a priori.

La figure 9.12 compare les prédictions d'intensité, d'inclinaison et de déclinaison obtenues pour les deux modèles aux coordonnées de Paris (48.9°N, 2.3°E). Rappelons que ces composantes sont obtenues en sommant les coefficients de Gauss sur tous les degrés et

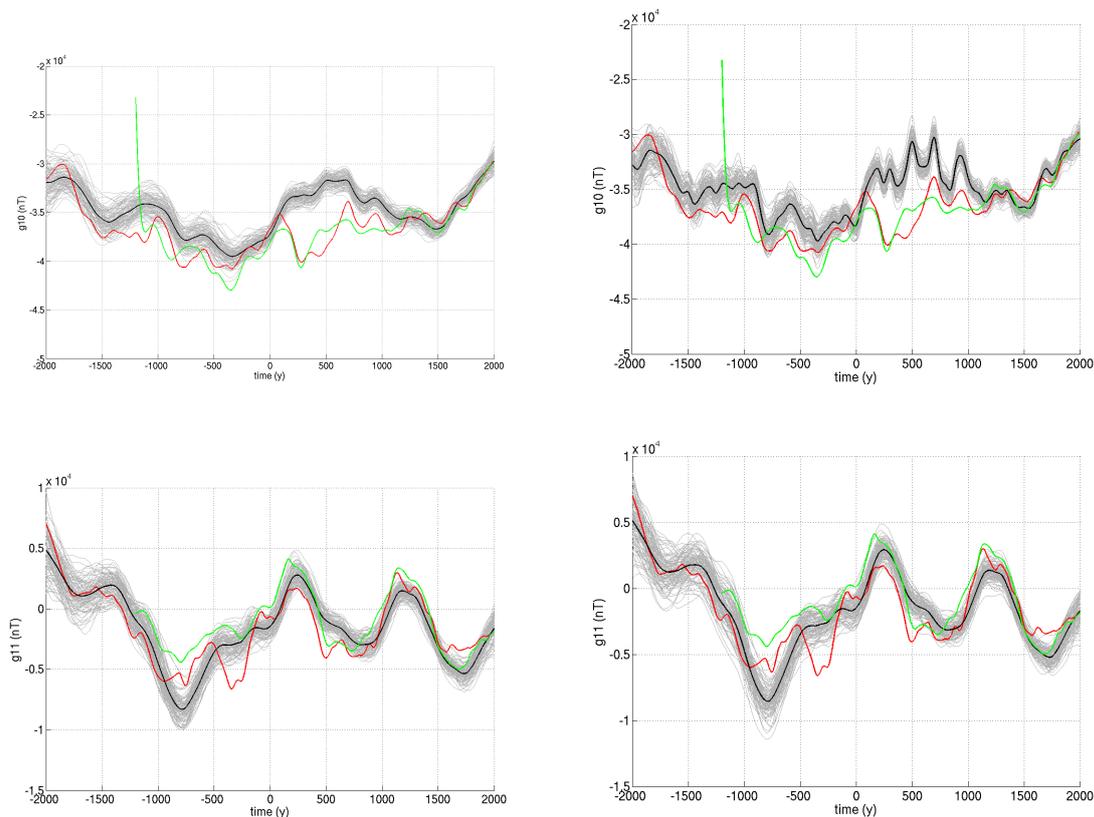


FIGURE 9.11 – Coefficients g_1^0 (en haut) et g_1^1 (en bas) moyens (noir), et leurs ensembles (gris), obtenus à partir d'un a priori de type Matern AR2 (à gauche) et d'un a priori de type oscillateur amorti (à droite). Les modèles moyens Arch3k.1 (rouge) et A-FM (vert) sont tracés pour comparaison.

tous les ordres (équations 4.24 et 4.26). La différence observée sur le coefficient g_1^0 est donc modérée par la ressemblance de tous les autres coefficients. L'intensité présente les différences les plus notables entre les deux a priori, notamment entre 0 et 1000 AD, où on avait déjà, dans la section précédente, suspecté la présence de mesures aberrantes. L'a priori de type oscillateur amorti autorisant des variations plus rapides, les différences apparaissent ici. La déclinaison et l'inclinaison sont par contre très similaires, la différence observée sur le coefficient g_1^0 ne semble ici jouer aucun rôle.

Nous avons montré dans ce chapitre que l'utilisation de la norme de Huber était efficace sur les mesures aberrantes et qu'elle évitait un comportement erroné du modèle. Un jeu de données avec des erreurs minimales, comme proposé par Korte *et al.* (2009), réduit drastiquement les informations apportées par les observations et conduit à des modèles moyens très lisses avec des barres d'erreurs très homogènes. Nous avons montré que les erreurs de modélisation étaient très faibles pour nos modèles décrits jusqu'au degré $l = 10$, et négligeables devant la dispersion de l'ensemble. Pour ce qui est de la comparaison des deux a priori proposés, le choix reste à faire entre un premier a priori dont tous les paramètres

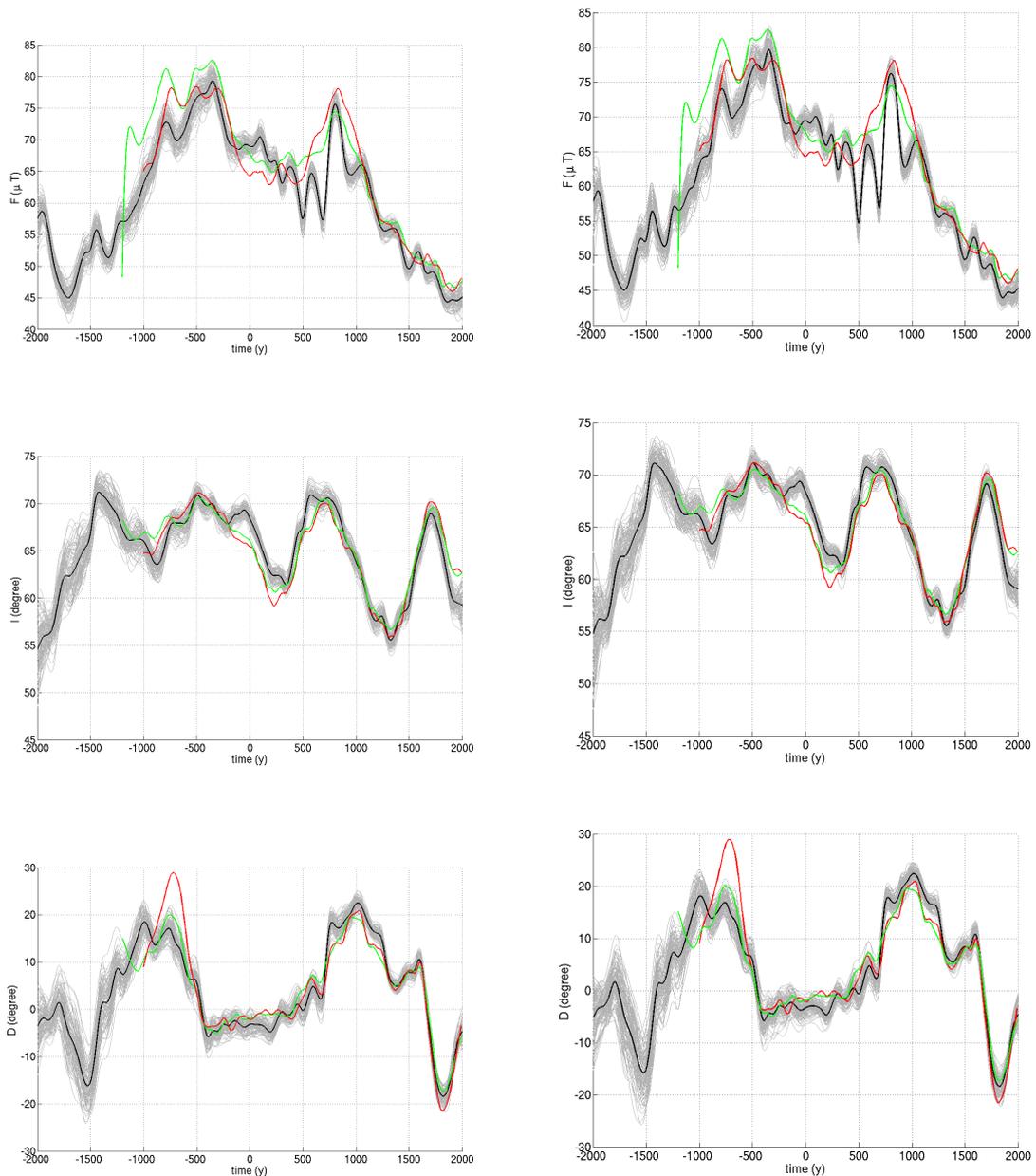


FIGURE 9.12 – En haut : Intensité moyenne (en noir) et son ensemble (en gris) obtenus pour Paris (48.9°N, 2.3°E) à partir d'un a priori de type Matern AR2 (à gauche) et d'un a priori de type oscillateur amorti (à droite). Même chose pour l'inclinaison (au milieu) et la déclinaison (en bas). Les prédictions d'intensité pour Arch3k.1 (en rouge) et A-FM (en vert) sont tracés pour comparaison.

sont contraints analytiquement grâce aux statistiques du champ récent mais qui n'est pas en accord avec le spectre géophysique pour les époques archéomagnétiques (Matern AR2), et un second, en accord avec le spectre géophysique sur toutes les gammes de fréquences mais contenant un paramètre que l'on ajuste empiriquement (oscillateur amorti). Nous ne concluons pas sur un meilleur a priori entre les deux présentés ici, mais notons que l'oscillateur amorti autorise des variations plus rapides que l'on observe sur les séries géo-

physique (Figure 5.2). Le cadre est maintenant posé pour aborder une interprétation des résultats obtenus.

INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

10

Les erreurs de datation n'étant pas prises en compte dans cette partie sur la modélisation globale, les résultats présentés dans ce chapitre visent à illustrer ce que l'on peut faire avec les modèles globaux. Tant que les erreurs de datation ne seront pas incluses dans la modélisation, nous ne pourrons pas approfondir l'interprétation de ces résultats.

Le modèle utilisé dans ce chapitre, que l'on appellera COV-ARCH-tmp, est construit avec un a priori de type oscillateur amorti sur le dipôle axial et un a priori de type Matérn AR2 sur les autres coefficients. Il couvre les quatre derniers millénaires avec un pas d'échantillonnage de 50 ans et n'utilise pas de splines. La norme de Huber est utilisée, et nous négligeons les erreurs de modélisation. Les erreurs de datation ne sont pas prises en compte dans la modélisation. Le modèle est tronqué au degré $l = 10$.

10.1 Comportement du champ magnétique global

La figure 10.1 représente des cartes de l'intensité du champ magnétique à la surface de la Terre observée à différentes périodes entre 2000 BC et 2000 AD. L'anomalie négative de l'Atlantique Sud, présente sur les modèles récents, apparaît clairement pour le champ obtenu en 2000 AD. On la voit sur nos modèles, déjà en 1500 AD. On observe aussi une anomalie négative au Sud-Est du Pacifique pour les époques 2000 BC et 1500 BC. Des cartes de la répartition des données à ± 250 ans autour de la période considérée sont tracées pour comparaison. Nous indiquons aussi sous ces cartes, le nombre total de données ainsi que le nombre de données d'intensité pour ces périodes. On observe que la zone proche de l'Atlantique Sud ne contient que très peu de données, particulièrement pour les époques les plus anciennes. Des données apparaissent vers les époques récentes, et permettent de mieux contraindre cette zone. Accroître la collection de données en Amérique du Sud permettrait de beaucoup mieux contraindre cette anomalie, et de déterminer si ce que l'on

observe sur les modèles récents, persiste pour des temps plus anciens. Le peu de mesures existantes permet malgré tout de bien retrouver cette anomalie aux époques récentes.

Les cartes d'intensité, de déclinaison ou d'inclinaison doivent être exploitées ensemble pour avoir une idée du champ total. La composante radiale B_r offre à elle seule cette possibilité. De plus, considérer le manteau comme isolant nous permet de projeter le champ obtenu à la surface de la Terre, à la surface du noyau. Ce prolongement vers le bas permet de se rapprocher des sources et ainsi, d'amplifier les petites échelles que nous ne pouvons pas voir sur le champ de surface. La figure 10.2 représente plusieurs instantanés du champ radial moyen (à gauche), et de l'écart-type de l'ensemble (à droite), à la surface du noyau. La dispersion de l'ensemble constitue un résultat important de notre étude. Nous rappelons que les erreurs a posteriori sur notre modèle sont en accord avec les statistiques temporelles du champ magnétique et représentent ainsi une perspective intéressante pour l'assimilation de données archéomagnétiques. Les modèles présentés ici ne prennent cependant pas en compte les erreurs de datation, l'ensemble de modèles n'est donc pas exploitable pour le moment. On peut malgré tout remarquer que l'écart-type est maximal dans l'hémisphère Sud à toutes les époques, en lien avec le faible nombre de données disponibles dans cette partie du globe (on a tracé en dessous la carte des données à ± 250 ans autour de la date considérée). Comme attendu, plus on remonte dans le temps, moins il y a de données, et, par voie de conséquence, plus les erreurs a posteriori sont importantes. Si on prend les valeurs maximales du champ et de la dispersion, l'erreur représente entre 10 et 20% du champ. A certains endroits cependant, par exemple au niveau du lobe négatif descendant dans l'hémisphère Sud sur la figure 10.2g, le champ est très faible et la dispersion maximale, l'incertitude représente alors 50% de la valeur du champ. Ce constat montre qu'il est important d'utiliser conjointement ces deux informations, le champ moyen n'a pas de sens sans la dispersion de l'ensemble. Le champ moyen présente certaines structures observées dans d'autres modèles archéomagnétiques. Par exemple, la zone de champ radial négatif sous l'Atlantique Sud en 1700 AD est observée sur les modèles récents et, à partir de 1500 AD par [Licht et al. \(2013\)](#). Nous observons aussi les lobes symétriques par rapport à l'équateur, particulièrement marqués sur l'instantané en 1700 AD, parfois interprétés sur les modèles récents comme étant liés à un couplage thermique entre le manteau inférieur et le noyau (e.g. [Olson et Christensen 2002](#)). La figure 10.3 montre le champ à la surface du noyau moyenné sur le dernier millénaire à gauche de la figure, et sur les quatre derniers millénaires à droite. Les lobes aux hautes latitudes discutés précédemment, apparaissent très clairement sur le champ moyenné sur 1000 ans, particulièrement dans l'hémisphère

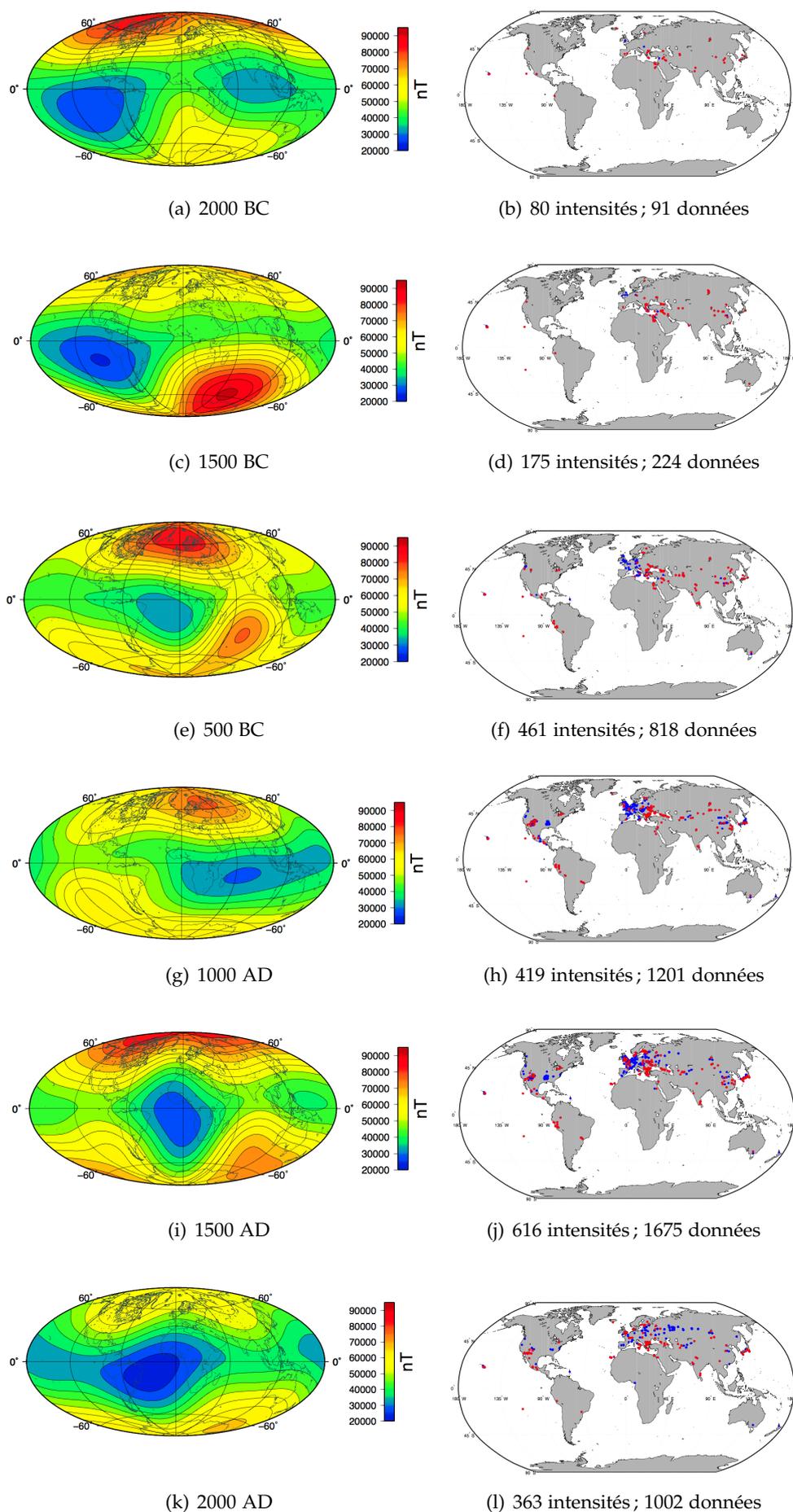


FIGURE 10.1 – Instantanés de l'intensité moyenne à la surface de la Terre pour différentes époques. Les contours sont tracés tous les 5000 nT. Répartition des données pour chaque époque prenant les données à ± 250 ans autour de l'époque. Les données d'intensité sont en rouge. On précise leur nombre et le nombre total de données.

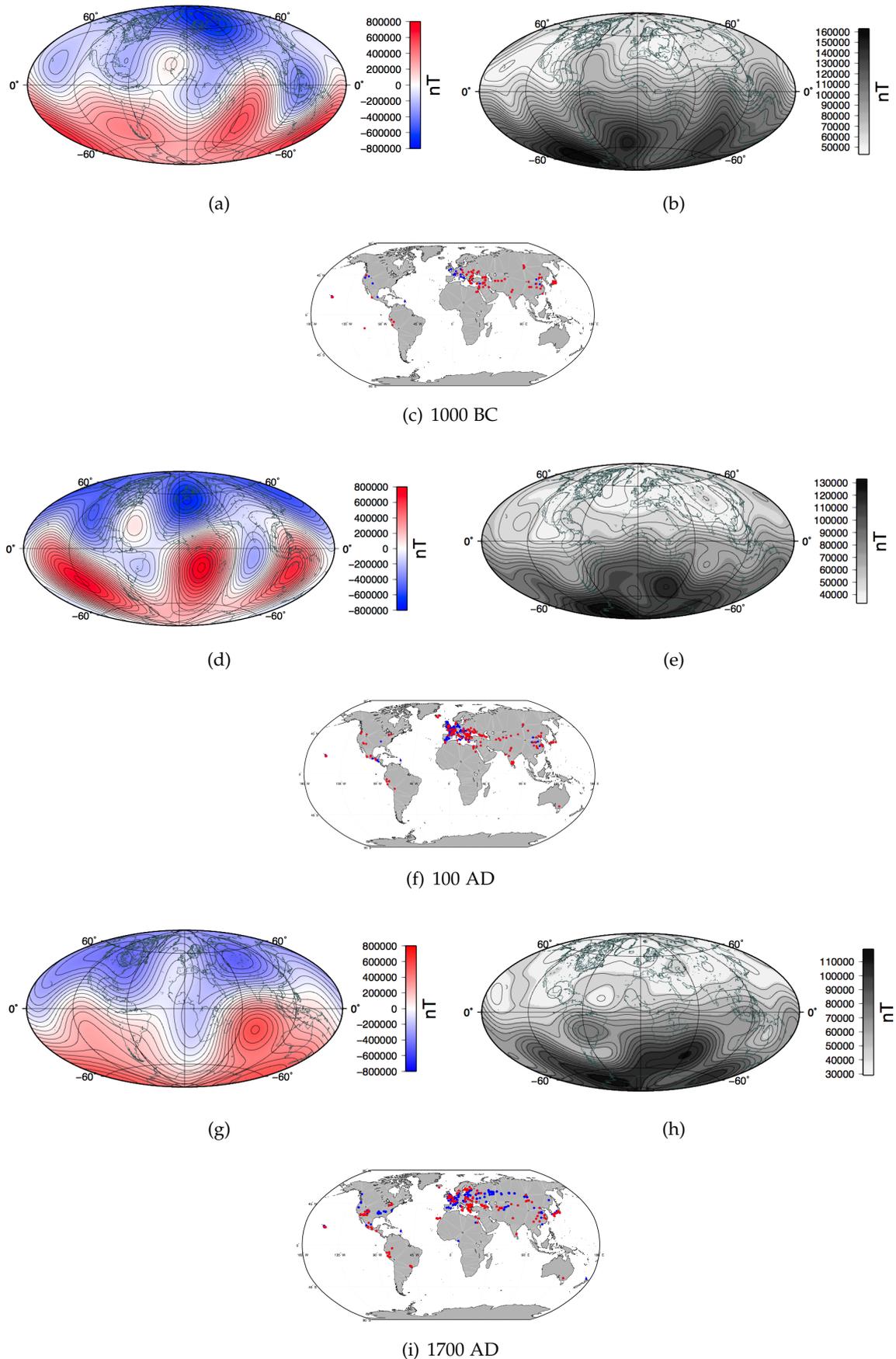


FIGURE 10.2 – Instantanés du champ radial moyen à la surface du noyau (à gauche) et de l'écart-type de son ensemble (à droite). Carte de répartition des données pour chaque époque prenant les données à ± 250 ans autour de l'époque. Les données d'intensité sont en rouge. L'échelle de couleur n'est pas la même pour la représentation de l'ensemble. Les contours sont par contre tracés tous les 5000 nT pour tous les ensembles et tous les 50000 nT pour tous les champs moyens.

Pacifique. Le lobe inverse sous l'Atlantique Sud ressort lui aussi assez nettement dans ce cas. Moyenné sur 4000 ans, des composantes multipolaires ont encore une influence, particulièrement sous l'Atlantique Sud, mais le champ est plus proche d'un dipôle axial.

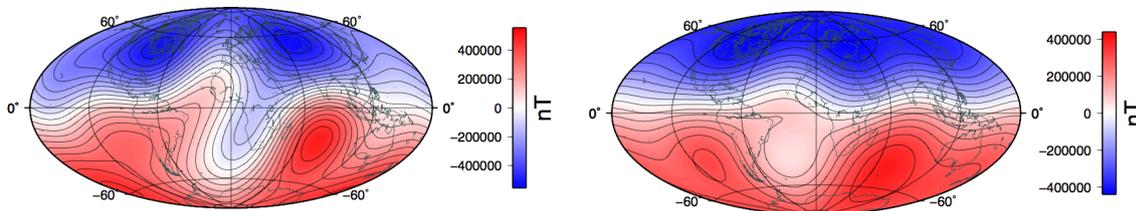


FIGURE 10.3 – Champ radial à la CMB moyenné sur le dernier millénaire à gauche (de 1000 AD à 2000 AD) et sur les quatre derniers millénaire à droite (de 2000 BC à 2000 AD).

10.2 Comparaison aux autres modèles globaux

On peut regarder plus en détail chacun des coefficients obtenus pour différents modèles. Nous montrons sur la figure 10.4, les coefficients du degré $l = 1$, ainsi que le coefficient g_2^0 . La moyenne de l'ensemble est tracée en noir. Les coefficients obtenus pour le modèle A-FM (Licht *et al.* 2013) sont tracés en vert et l'enveloppe du modèle en pointillés. Nos barres d'erreurs, encore une fois, ne sont pas représentatives des erreurs réelles sur le modèle sans la prise en compte des erreurs de datation. L'intérêt de l'utilisation de l'oscillateur amorti pour le coefficient g_1^0 est qu'il autorise des variations plus rapides que la plupart des modèles existants, et que de telles variations apparaissent sur les séries géophysiques (Figure 5.2). Hormis pour ce coefficient et pour le premier coefficient du quadrupôle, pour lequel notre modèle prévoit un minimum assez fort autour de 400 AD, les deux modèles reproduisent des variations assez similaires. Les autres coefficients, jusqu'au degré 4, sont représentés en Annexe C.

La figure 10.4 représente également les coefficients pour des modèles plus récents. Le modèle historique gufm1 de Jackson *et al.* (2000) couvre la période 1590-1990 et est tracé en rouge, et le modèle COV-OBS de Gillet *et al.* (2013) est tracé en bleu sur la période 1840-2010. Le coefficient g_1^0 de ces deux modèles figure à l'intérieur de notre ensemble sur la période 1840-2010. Pour la période historique en revanche, la dispersion de notre modèle n'inclut pas le modèle gufm1 pour le début du XVIIIème siècle. Contrairement à ce dernier, notre modèle prévoit un maximum local en 1700 AD. Avant 1840 et les premières mesures directes d'intensité, le modèle gufm1 n'est contraint que par des mesures de direction et ne peut donner que la forme du champ magnétique. Pour fixer l'intensité du champ, le modèle

gufm1 requiert un facteur d'échelle. Jackson *et al.* (2000) adoptent le taux de décroissance du dipôle proposé par Barraclough (1974) et supposent qu'avant 1832, le coefficient g_1^0 décroît linéairement à un rythme de 15 nT.a^{-1} . Plusieurs études traitent de cette question : Gubbins *et al.* (2006) ont montré qu'un taux de décroissance du dipôle beaucoup plus lent, presque constant était compatible avec les observations issues d'échantillons volcaniques ; Finlay (2008) a utilisé la base de données du modèle CALS7k (Korte *et al.* 2005) afin de contraindre le comportement du dipôle axial entre 1590 et 1832, et a montré qu'un dipôle axial qui ne variait pas sur cette période était le plus probable. La collection de données a légèrement évolué depuis, et les erreurs de mesures ne sont pas considérées de la même manière dans notre étude et dans celle de Finlay (2008). De même que Korte *et al.* (2005), Finlay (2008) a choisi d'attribuer des erreurs minimales aux mesures archéomagnétiques à l'origine de son modèle. Cette estimation, comme discuté plus haut, empêche de recouvrir toute l'information disponible dans les données. Notre modèle ne semble privilégier ni une décroissance linéaire, ni un dipôle axial constant, mais s'accorde néanmoins avec une décroissance du dipôle depuis 1500 environ. L'ensemble des autres coefficients dipolaires de notre modèle contient toujours le modèle COV-OBS. Le modèle gufm1 en revanche, présente grossièrement la même tendance que notre modèle mais sort des barres d'erreurs avant 1832. Ses coefficients sont ajustés par l'hypothèse faite sur le dipôle axial dans le cas du modèle gufm1, puisque sans mesures d'intensité, seule la forme du champ magnétique peut être retrouvée. Ceci peut expliquer en partie le décalage en amplitude de ces coefficients. Les décalages temporels peuvent être liés aux erreurs de datation sur les mesures qui ne sont pas prises en compte dans notre modèle.

Nous comparons dans la figure 10.5, l'intensité du champ à la surface de la Terre en 1990 pour le modèle COV-ARCH-tmp et pour le modèle COV-OBS de Gillet *et al.* (2013) construit sur des données d'observatoires et des données satellitaires. Nous montrons sur la figure 10.5, l'intensité obtenue à la surface de la Terre, en ne prenant en compte que les quatre premiers degrés de ces deux modèles, ainsi que la différence entre les deux modèles. Notre modèle est assez similaire au modèle COV-OBS. La différence la plus importante apparaît au Sud de l'Afrique où le modèle COV-ARCH prédit une intensité plus forte ($\approx 15000 \text{ nT}$) que le modèle COV-OBS. La différence est globalement plus importante dans l'hémisphère Sud en raison de la faible quantité de données archéomagnétiques (Figure 8.2). La ressemblance générale entre les deux modèles nous démontre qu'il n'est pas nécessaire de forcer notre modèle à reproduire les modèles récents aux époques qui se superposent, comme l'ont fait Korte *et al.* (2009). D'autre part, nous pourrions adapter

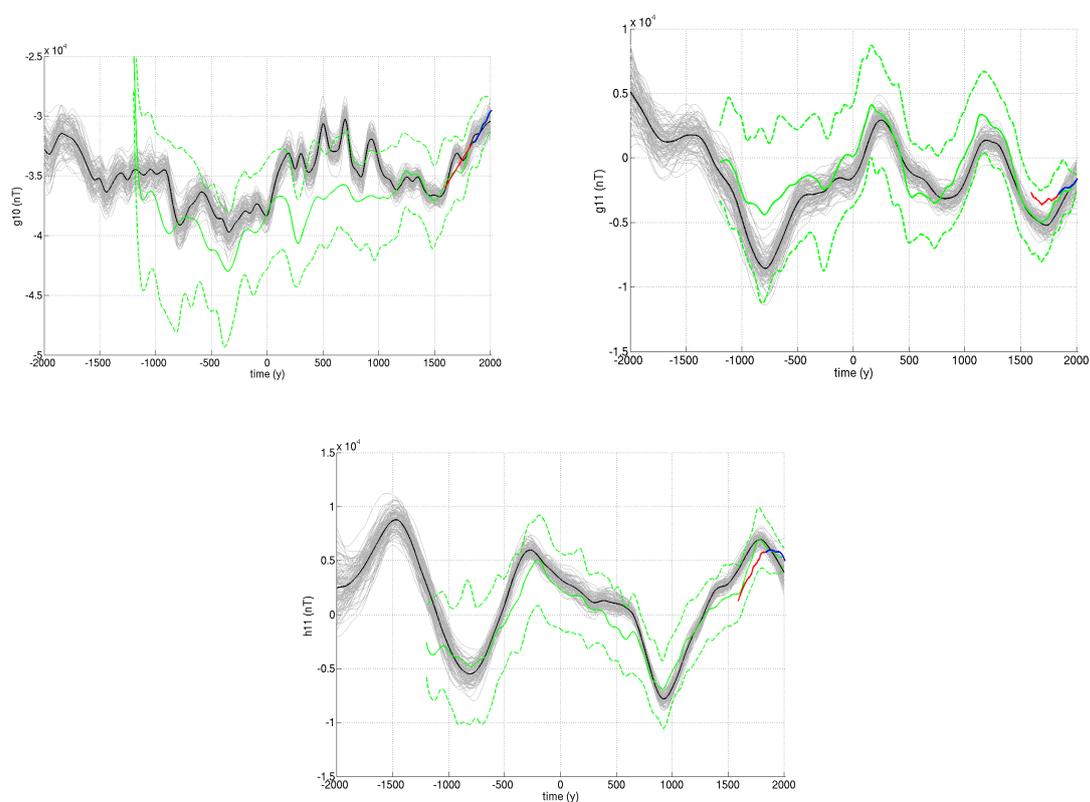


FIGURE 10.4 – Coefficients dipolaires pour le modèle COV-ARCH-tmp. Mêmes coefficients pour A-FM en vert avec l'enveloppe de l'ensemble en pointillés. Les coefficients obtenus pour COV-OBS et $gufm1$ sont tracés respectivement en bleu et rouge.

notre approche pour intégrer les données historiques, en utilisant, par exemple, différents échantillonnages pour nos fonctions d'auto-corrélation.

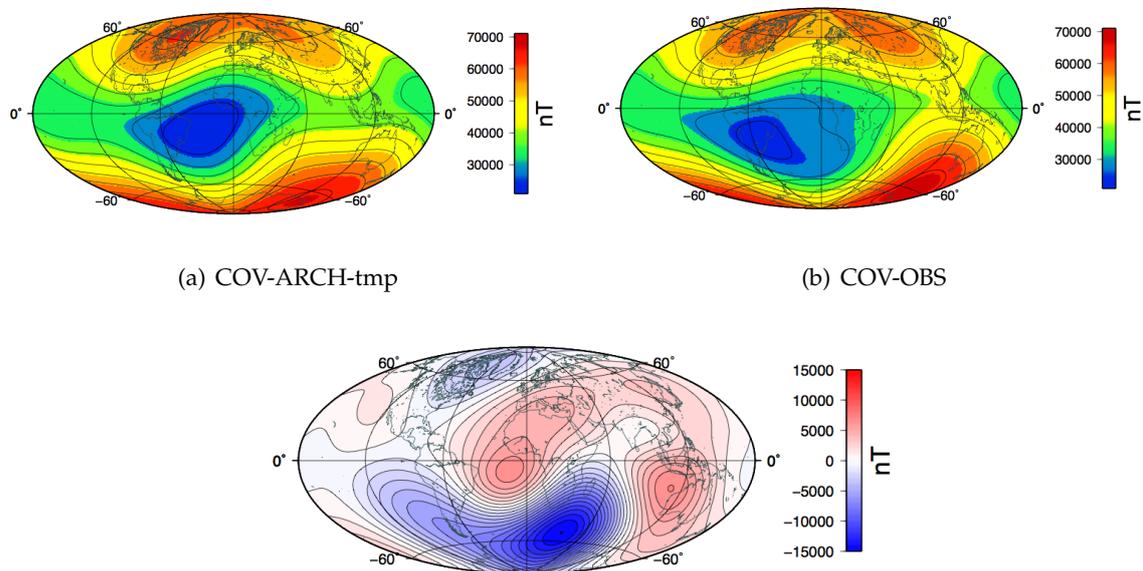


FIGURE 10.5 – Intensité du champ à la surface de la Terre en 1990 obtenue pour COV-ARCH-tmp (en haut à gauche), pour COV-OBS (en haut à droite). Les contours sont tous les 5000nT. Différence entre COV-OBS et COV-ARCH-tmp (en bas). Les contours sont tous les 1000nT.

10.3 Comparaison aux courbes régionales

Nous présentons sur la figure 10.6, les prédictions de notre modèle global pour la déclinaison, l'inclinaison et l'intensité à Paris en bleu, ainsi que l'écart-type de l'ensemble en traits pointillés (3σ) sur les courbes de densité de probabilité obtenues pour les modèles régionaux (Helliö *et al.* 2014). Les variations sont bien reproduites pour l'inclinaison et la déclinaison. Les données ayant servi à la construction des courbes régionales d'inclinaison et de déclinaison proviennent de Bucur (1994) et sont toutes incluses dans les données utilisées pour construire le modèle global. Les modèles (régionaux et globaux) utilisent tous les deux la norme de Huber et nous avons montré qu'elle était efficace pour éviter des oscillations dues à des données aberrantes sur les courbes régionales. Une différence fondamentale entre ces deux modèles est que la courbe régionale tient compte des erreurs de datation alors que le modèle global considère que l'on connaît parfaitement la date des données. D'autre part, l'a priori utilisé pour les courbes régionales ne repose que sur des processus de type Matérn AR2, et pas de type oscillateur amorti. Nous pensons, et c'est ce que nous avons observé sur les courbes régionales, que nos modèles globaux vont être

lissés par la prise en compte des erreurs de datation. Le maximum d'intensité observé sur les courbes régionales en 850 AD est bien retrouvé par le modèle global mais légèrement décalé temporellement. De même, pour la courbe d'inclinaison, le maximum apparaissant autour de 800 AD sur la courbe régionale est décalé sur le modèle global. Ce décalage est sans doute dû, lui aussi, au fait que nous n'avons pas pris en compte les erreurs de datation dans le modèle global. Le modèle global montre des variations légèrement plus lisses que la courbe régionale, mais reproduit bien la plupart des variations observées. Nous montrons sur la figure 10.7 une courbe d'intensité obtenue pour l'hémisphère Sud (55S-25E), dans une zone où très peu de données sont disponibles et donc où l'erreur a posteriori sur le modèle est très importante. La dispersion de l'ensemble est légèrement plus importante que pour la courbe à Paris.

Ces quelques résultats attestent de la validité de la méthode développée dans cette étude. Le modèle construit s'affranchit désormais des fonctions supports telles que les splines et des régularisations arbitraires généralement utilisées pour limiter la complexité spatiale et temporelle du modèle. Dans notre cas, ces régularisations sont remplacées par l'utilisation de matrices de covariances temporelles construites sur notre connaissance des statistiques du champ magnétique. Ces covariances présentent les avantages de remplacer l'utilisation de fonctions supports telles que les splines, d'utiliser lors de l'inversion une information a priori basée sur les statistiques connues du champ magnétique, et ainsi de fournir des erreurs a posteriori réalistes sur le modèle. Nous utilisons une norme de Huber afin de limiter l'effet des données aberrantes. Cette norme évite d'imposer des erreurs minimales aux données, ce qui évite la perte d'informations contenues dans des données de qualité. Certains effets de données aberrantes peuvent malgré tout apparaître, ce qui présente une motivation pour la construction d'une base de données la plus précise possible comprenant des erreurs de mesures réalistes et bien contraintes. Les cartes de champ magnétique montrent certaines caractéristiques connues, comme les lobes aux hautes latitudes ou encore l'anomalie magnétique de l'Atlantique Sud. Ces résultats se veulent uniquement didactiques et ne doivent pas être interprétés avant d'avoir implémenté, pour les modèles globaux, la méthode développée sur les courbes régionales pour prendre en compte les erreurs de datation.

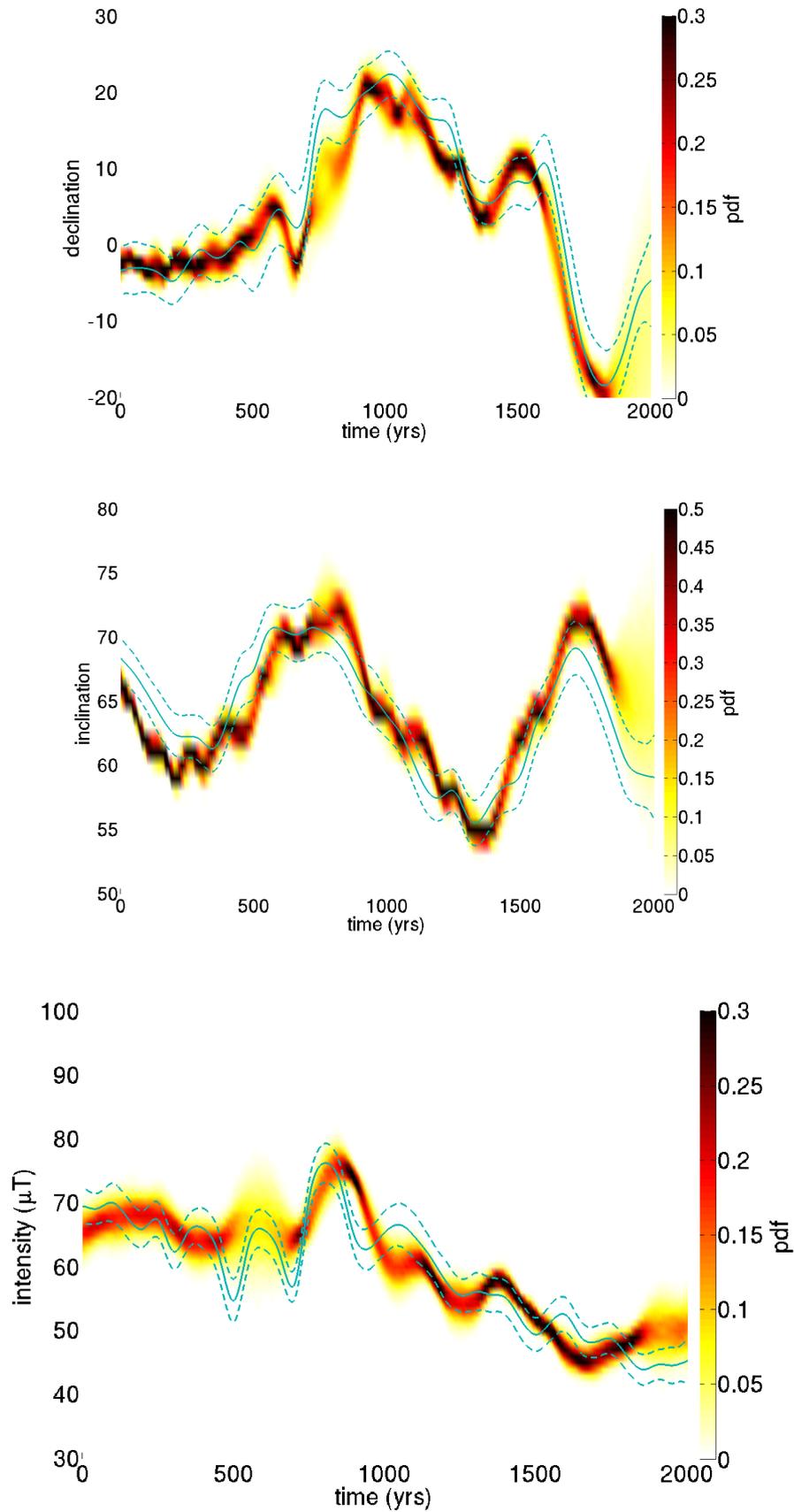


FIGURE 10.6 – Densité de probabilité des courbes régionales de déclinaison, d'inclinaison et d'intensité à Paris (Helliö et al. 2014). L'intensité moyenne obtenue à Paris pour le modèle global est représentée en trait plein bleu et l'écart-type de l'ensemble en trait pointillé bleu (3σ).

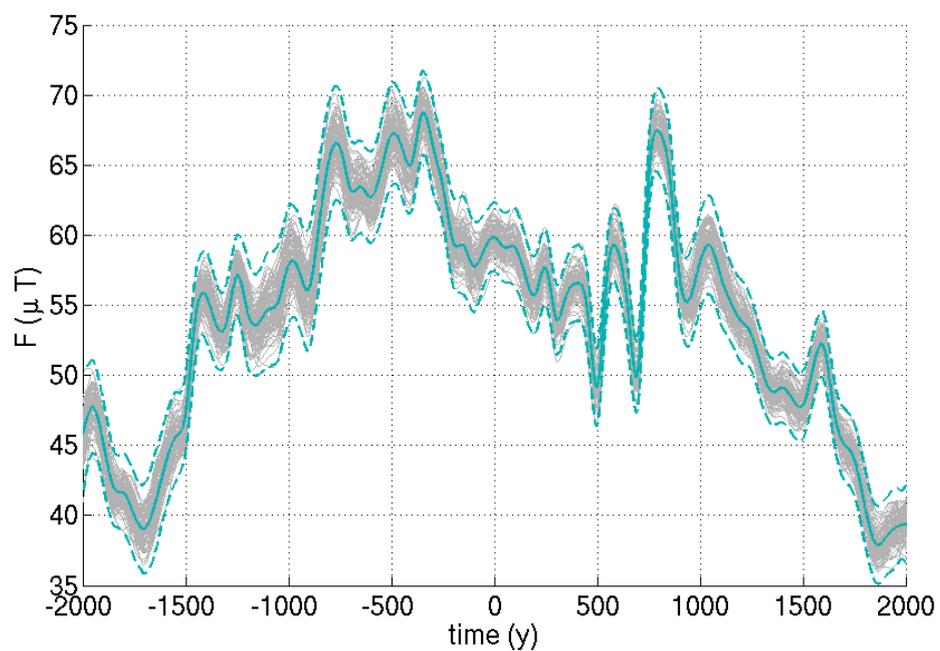


FIGURE 10.7 – Intensité obtenue dans l'hémisphère Sud (55S-25E) pour notre modèle (bleu) et son ensemble (gris), ainsi que l'écart-type (3σ) de l'ensemble (bleu pointillé).

Cinquième partie

Conclusions et perspectives

CONCLUSION

11

11.1 Conclusions générales

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la construction de modèles du champ archéomagnétique sur les quatre derniers millénaires en suivant une logique bayésienne. Cette approche est fondée sur l'utilisation de processus stochastiques Gaussiens en accord avec les statistiques observées du champ magnétique. Ces processus constituent une information avant estimation du modèle qui pallie la non unicité du problème inverse et évite l'utilisation de régularisations arbitraires. Cette méthode prédit un ensemble de réalisations statistiquement cohérentes avec les données et l'information a priori sur les processus. La dispersion de cet ensemble de réalisations reflète l'incertitude sur notre modèle.

L'information a priori est construite en étudiant le comportement de séries temporelles d'observations à différentes échelles de temps. Le dipôle axial est le coefficient le mieux déterminé à basses fréquences et son a priori est construit indépendamment de ceux des autres coefficients. Nous nous appuyons sur la forme du spectre temporel géophysique du VADM de [Constable et Johnson \(2005\)](#), qui couvre des périodes allant de la centaine d'années à la centaine de millions d'années. Les hautes fréquences de ce spectre sont influencées par la régularisation utilisée pour le modèle CALS7k. Les spectres de données d'observatoires permettent de compléter l'information manquante vers les hautes fréquences ([De Santis et al. 2003](#)). D'autre part, l'étude de données sédimentaires confirme l'allure du spectre temporel pour les périodes archéomagnétiques ([Panovska 2012](#), [Nilsson et al. 2014](#)). Toutes ces observations s'accordent sur un spectre temporel suivant des lois puissances dont la pente dépend de la gamme de fréquences considérée. A hautes fréquences, les séries d'observatoires montrent que le spectre présente une pente de -4 . Pour des fréquences plus basses, aux périodes archéomagnétiques, la pente du spectre est de l'ordre de -2 , pour finir par un spectre plat pour des périodes de plusieurs centaines de millions d'années. Nous montrons qu'un processus stochastique de type oscillateur amorti permet de bien reproduire le comportement du dipôle axial.

Cependant, les observations de surface reflètent les statistiques pour une combinaison linéaire de coefficients de Gauss. Nous faisons l'hypothèse que tous résultent a priori d'un processus de type Matérn AR2. Il correspond à un spectre de pente -4 à hautes fréquences et une pente nulle à basses fréquences. Les temps caractéristiques pour chaque degré harmonique sont déterminés à l'aide des mesures d'observatoires et satellitaires (Gillet *et al.* 2013). L'analyse de simulations numériques de geodynamo confirme la forme du dipôle axial. Elle nous fournit par ailleurs une information sur la forme des spectres des autres coefficients. Nous montrons qu'un processus de type Matérn AR2 convient bien aux coefficients autres que le dipôle axial dans les simulations numériques.

Nous avons commencé par utiliser la méthode bayésienne afin de construire des courbes régionales (Hellio *et al.* 2014). L'information a priori définie sur les coefficients de Gauss a été transposée à des séries temporelles d'inclinaison I , de déclinaison D , et d'intensité F du champ magnétique. Nous montrons que la somme sur tous les degrés de processus de type Matérn AR2 reproduit bien le comportement des spectres des séries temporelles de D , I et F à basses fréquences, là où il est nécessaire de compléter l'information contenue dans les observations. Nous avons développé une méthode qui permet la prise en compte des erreurs de datation basée sur les méthodes MCMC (Markov Chain Monte Carlo). Ces dernières permettent d'explorer efficacement l'espace des dates possibles, et de ne sélectionner que les tirages aléatoires de dates les plus probables. Des données synthétiques ont servi à valider notre approche qui a permis, par la suite, la construction de deux nouvelles courbes régionales d'intensité, de déclinaison et d'inclinaison pour l'Europe de l'Ouest et le Moyen-Orient. Nous utilisons dans cette étude la norme de Huber, qui fournit une distribution robuste des erreurs de mesures, du fait qu'elle modère l'influence des données aberrantes. Les courbes obtenues, représentées par leurs densités de probabilités, montrent des variations rapides, moins lisses que les variations obtenues par d'autres modèles globaux (Korte *et al.* 2009) ou régionaux (Thébault et Gallet 2010). L'utilisation des méthodes MCMC permet de ré-évaluer, a posteriori, la probabilité des dates des observations. Ce résultat, avec la densité de probabilité des courbes régionales, peut être utile pour la datation archéomagnétique.

Pour finir, nous avons adapté notre méthode pour la construction de modèles globaux. La méthode bayésienne permet directement d'estimer un modèle continu aux temps des observations, sans passer par l'utilisation de fonctions supports comme les splines, généralement utilisées dans ce type de problèmes. Nos modèles ne comprennent que les données archéologiques et de laves, nous n'avons pas pris en compte les données sédimentaires.

Nous faisons le choix de garder les incertitudes de mesures publiées dans les études de terrain. Nous utilisons une norme de Huber afin de limiter l'influence des données aberrantes. Notre modèle COV-ARCH-tmp utilise les processus présentés au début de cette conclusion comme information a priori. Il couvre les quatre derniers millénaires, avec un pas d'échantillonnage de 50 ans et est tronqué au degré $l = 10$. Nous montrons que les erreurs de modélisation sont très faibles devant les erreurs de mesures et choisissons de les négliger. Nous ne tenons pas compte pour l'instant des erreurs de datation pour la construction de ce modèle. Nous retrouvons certaines caractéristiques observées aux périodes historiques et plus récentes, notamment, l'anomalie de l'Atlantique Sud, ou les lobes symétriques aux hautes latitudes. Nous montrons que notre modèle calculé pour des périodes récentes, est raisonnablement proche des modèles construits à l'aide de mesures satellitaires et d'observatoires. Nous montrons ainsi que nous n'avons pas besoin de pénaliser notre modèle pour qu'il s'accorde aux modèles historiques sur les époques récentes. Pour finir, le dipôle axial montre des variations plus rapides que celui obtenu par d'autres modèles globaux pour le même jeu de données (Korte *et al.* 2009, Licht *et al.* 2013). Une fois les erreurs de datation intégrées, le modèle COV-ARCH constituera une alternative aux modèles de champ archéomagnétiques existants. Contrairement aux deux modèles de Korte *et al.* (2009) et Licht *et al.* (2013), la régularisation ne consiste pas en la pénalisation de la complexité spatiale et temporelle du champ magnétique, mais s'appuie sur les statistiques connues du champ magnétique. En cela, nous fournissons des erreurs a posteriori réalistes, ce qui peut s'avérer crucial, notamment dans le cadre de l'assimilation de données archéomagnétiques.

11.2 Perspectives

11.2.1 Considérer les erreurs de datation dans la modélisation globale

La méthode développée pour prendre en compte les erreurs de datation pour la construction de courbes régionales peut être facilement transférée aux modèles globaux. Nous avons montré que les méthodes MCMC permettaient d'explorer l'espace des dates possibles de manière efficace. Néanmoins, le calcul des probabilités des dates, qui permet la sélection des tirages, nécessite le calcul des modèles issus de chacun des tirages. Ce n'est qu'après avoir calculé un modèle que les méthodes MCMC permettent de décider s'il faut le garder ou non. Pour résumer, les méthodes MCMC ne nous évitent pas le calcul des modèles, mais les modèles sont calculés à partir de tirages de dates efficacement explorées. Nous avons estimé que 10000 tirages étaient nécessaires à une bonne exploration de l'espace des dates possibles dans le cas régional pour une centaine de données. Les paramètres

relatifs aux méthodes MCMC appliquées aux courbes régionales sont référencés dans l'annexe B. Un plus grand nombre de tirages sera nécessaire pour les modèles globaux, qui comprennent environ 10000 données lorsque l'on ne considère que les données archéologiques et de laves contre une centaine pour les courbes régionales. De plus le temps de calcul pour un problème à une dimension, comme c'est le cas pour la construction de courbes régionales, est plus important dans le cas d'un modèle global, d'autant plus si l'on augmente la résolution spatiale en augmentant le degré harmonique. La prise en compte des erreurs de datation pour le calcul d'un modèle global va nécessiter l'adaptation du code pour l'utiliser sur des serveurs de calcul plus performants.

11.2.2 Les données

L'intégration des données sédimentaires pour notre modèle global va augmenter considérablement notre collection de données, notamment pour les périodes les plus anciennes. Néanmoins la prise en compte de ces données nécessite des précautions particulières (Nilsson *et al.* 2014). De nombreuses études ont révélé des inconsistances dans la base de données sédimentaires actuelle (Donadini *et al.* 2009). Ces dernières proviennent principalement des erreurs de datation très importantes, parfois de l'ordre de 1000 ans, mais peuvent provenir aussi d'erreurs systématiques sur la déclinaison ou l'inclinaison liées à des problèmes lors de l'orientation de l'échantillon, ou encore, à des phénomènes de compaction lors du dépôt sédimentaire qui tendent à réduire l'inclinaison. Nilsson *et al.* (2014) proposent un nouveau traitement de ces données, notamment en attribuant un poids à chaque type de données pendant l'inversion, et de nouvelles calibrations des mesures relatives. D'autre part, les auteurs regroupent les données sédimentaires par lot de 50 ans, ce qui a pour effet de donner plus de poids aux mesures archéologiques et de laves lors de l'inversion. Pour finir, les âges des échantillons sédimentaires étant corrélés chronologiquement, nous devons en tenir compte lors de la modélisation lorsque nous considérerons les erreurs de datation liées à ces données. Ceci est possible avec les méthodes MCMC, il suffit d'ajouter la contrainte de la chronologie lors de la sélection des tirages.

Notre méthode pourrait aussi intégrer les données historiques dans la modélisation en adaptant le pas d'échantillonnage des fonctions d'auto-corrélation selon le type de données considéré. Le premier avantage serait de mieux contraindre la période historique, notamment de répondre à la question du taux de décroissance du dipôle pour les XVIIème et XVIIIème siècles, en combinant l'information des données de qualité issues des périodes historiques aux intensités apportées par les données archéomagnétiques. D'autre part, la

corrélation temporelle permettrait de propager l'information contenue dans les données historiques aux époques plus anciennes.

11.2.3 Accès libre aux modèles

Nous envisageons de publier le code nécessaire à la construction de courbes régionales. A partir d'un jeu de données quelconque de mesures d'intensité, de déclinaison ou d'inclinaison, contenant les erreurs de datation et de mesures associées à chaque donnée, le code fournira la densité de probabilité sur la période demandée, ainsi que la probabilité des dates de chaque mesure a posteriori. Ces courbes pourront être utilisées notamment pour la datation archéologique.

Quand les erreurs de datation et les données sédimentaires seront incluses dans notre méthode de modélisation globale, nous pourrons aussi publier le modèle COV-ARCH qui en résultera. Le modèle fourni contiendra un ensemble de réalisations représentant les erreurs a posteriori. Ce modèle pourra ensuite être utilisé pour différentes applications, notamment comme données d'entrée pour l'assimilation de données archéomagnétiques.

BIBLIOGRAPHIE

- B. AGUILAR REYES, A. GOGUITCHAICHVILI, J. MORALES, V. H. GARDUÑO, M. PINEDA, C. CARVALLO, T. G. MORAN, I. ISRADE et M. CALVO-RATHERT : An integrated archeomagnetic and C^{14} study on pre-Columbian potsherds and associated charcoals intercalated between Holocene lacustrine sediments in Western Mexico : Geomagnetic implications. *J. Geophys. Res.*, 118:2753–2763, 2013. (Cité page 72.)
- R. C. ASTER, B. BORCHERS et C.H. THURBER : *Parameter estimation and inverse problems*. Academic Press, 2013. (Cité page 73.)
- DR BARRACLOUGH : Spherical harmonic analyses of the geomagnetic field for eight epochs between 1600 and 1910. *Geophys. J. Int.*, 36(3):497–513, 1974. (Cité page 120.)
- E. BEN-YOSEF, H. RON, L. TAUXE, A. AGNON, A. GENEVEY, T. E. LEVY, U. AVNER et M. NAJJAR : Application of copper slag in geomagnetic archaeointensity research. *J. Geophys. Res.*, 113 (B8), AUG 8 2008. ISSN 0148-0227. (Cité page 83.)
- E. BEN-YOSEF, L. TAUXE, T. E. LEVY, R. SHAAR, H. RON et M. NAJJAR : Geomagnetic intensity spike recorded in high resolution slag deposit in Southern Jordan. *Earth planet. Sci. Lett.*, 287(3-4):529–539, 2009. ISSN 0012-821X. (Cité page 83.)
- J. BLOXHAM et D. GUBBINS : The secular variation of Earth's magnetic field. *Nature*, 317:777–781, 1985. (Cité page 59.)
- J. BLOXHAM et A. JACKSON : Time-dependent mapping of the magnetic field at the core-mantle boundary. *J. Geophys. Res.*, 97:19537–19563, 1992. (Cité pages 26 et 70.)
- K. BRENDEL, J. KUIPERS, G. T. BARKEMA et P. HOYNG : An analysis of the fluctuations of the geomagnetic dipole. *Phys. Earth planet. Int.*, 162(3-4):249–255, JUL 16 2007. ISSN 0031-9201. (Cité page 87.)
- I BUCUR : The direction of the terrestrial magnetic field in France, during the last 21 centuries. Recent progress. *Phys. Earth planet. Int.*, 87(1-2):95–109, DEC 1994. ISSN 0031-9201. (Cité pages 55, 57, 84 et 122.)

- B. A. BUFFETT, L. ZIEGLER et C. G. CONSTABLE : A stochastic model for palaeomagnetic field variations. *Geophys. J. Int.*, 195(1):86–97, 2013. (Cité page 87.)
- E. C. BULLARD, C. FREEDMAN, H. GELLMAN et J. NIXON : The westward drift of the Earth's magnetic field. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 243(859):67–92, 1950. (Cité page 20.)
- S. CAI, L. TAUXE, C. DENG, Y. PAN, G. JIN, J. ZHENG, F. XIE, H. QIN et R. ZHU : Geomagnetic intensity variations for the past 8 kyr : New archaeointensity results from Eastern China. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 392:217–229, 2014. (Cité page 55.)
- J. CARLUT et V. COURTILOT : How complex is the time-averaged geomagnetic field over the past 5 Myr? *Geophys. J. Int.*, 134(2):527–544, 1998. (Cité page 92.)
- A CHAMBODUT, B LANGLAIS, M MANDEA *et al.* : Candidate main-field models for the definitive geomagnetic reference field 1995. 0 and 2000. 0. *Earth, Planets, and Space*, 57(12):1197–1202, 2005. (Cité page 9.)
- U. R. CHRISTENSEN, J. AUBERT et G. HULOT : Conditions for Earth-like geodynamo models. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 296(3):487–496, 2010. (Cité page 6.)
- U. R. CHRISTENSEN, I. WARDINSKI et V. LESUR : Timescales of geomagnetic secular acceleration in satellite field models and geodynamo models. *Geophys. J. Int.*, 190(1):243–254, 2012. (Cité pages 36 et 37.)
- C CONSTABLE : Centennial-to millennial-scale geomagnetic field variations. *Treatise on Geophysics*, 5:337–372, 2007a. (Cité page 93.)
- C. G. CONSTABLE et C. JOHNSON : A paleomagnetic power spectrum. *Phys. Earth Planet. Int.*, 153:61–73, 2005. (Cité pages 33, 34, 35, 39, 43, 76, 87 et 129.)
- C. G. CONSTABLE et R. L. PARKER : Statistics of the geomagnetic secular variation for the past 5 my. *J. Geophys. Res.*, 93(B10):11569–11581, 1988. (Cité page 18.)
- S. CONSTABLE : Geomagnetism. *Treatise on geophysics*, 5:237–276, 2007b. (Cité page 6.)
- V COURTILOT et JL LE MOUËL : Geomagnetic secular variation impulses. *Nature*, 311(5988):709–716, 1984. (Cité page 8.)
- Robert G CURRIE : Geomagnetic spectrum of internal origin and lower mantle conductivity. *J. Geophys. Res.*, 73(8):2779–2786, 1968. (Cité page 34.)

- L. DALY et M. Le GOFF : An updated and homogeneous world secular variation data base. 1. smoothing of the archaeomagnetic results. *Phys. Earth Planet. Int.*, 93(3):159–190, 1996. (Cité page 57.)
- Christopher J DAVIES et Catherine G CONSTABLE : Insights from geodynamo simulations into long-term geomagnetic field behaviour. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 404:238–249, 2014. (Cité page 6.)
- A. DE SANTIS, D.R. BARRACLOUGH et R. TOZZI : Spatial and temporal spectra of the geomagnetic field and their scaling properties. *Phys. Earth Planet. Int.*, 135:125–134, 2003. (Cité pages 34, 39, 76 et 129.)
- F. DONADINI, K. KORHONEN, P. RIISAGER et L. PESONEN : Database for holocene geomagnetic intensity information. *EOS Trans. Am. Geophys. Soc.*, 87(14):137, 2006. (Cité page 12.)
- F. DONADINI, M. KORTE et C.G. CONSTABLE : Geomagnetic field for 0-3 ka : 1. New data sets for global modeling. *Geophys. Geochem. Geosyst.*, 10(6), 2009. (Cité pages 9, 13, 55, 70, 78, 79, 93 et 132.)
- M. DUMBERRY et J. BLOXHAM : Azimuthal flows in the Earth's core and changes in length of day at millennial timescales. *Geophys. J. Int.*, 165(1):32–46, APR 2006. ISSN 0956-540X. (Cité page 20.)
- Mathieu DUMBERRY et Christopher C FINLAY : Eastward and westward drift of the earth's magnetic field for the last three millennia. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 254(1):146–157, 2007. (Cité page 20.)
- P ERTEPINAR, CG LANGEREIS, AJ BIGGIN, M FRANGIPANE, T MATNEY, T ÖKSE et A ENGIN : Archaeomagnetic study of five mounds from Upper Mesopotamia between 2500 and 700 BCE : Further evidence for an extremely strong geomagnetic field ca. 3000 years ago. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 357:84–98, 2012. (Cité page 83.)
- C.G. FARQUHARSON et D.W. OLDENBURG : Non-linear inversion using general measures of data misfit and model structure. *Geophys. J. Int.*, 134(213-227), 1998. (Cité page 78.)
- C. C. FINLAY, A. JACKSON, N. GILLET et N. OLSEN : Core surface magnetic field evolution 2000-2010. *Geophys. J. Int.*, 189(2):761–781, MAY 2012. ISSN 0956-540X. (Cité pages 36, 49 et 98.)
- Christopher C. FINLAY : Historical variation of the geomagnetic axial dipole. *Phys. Earth Planet. Int.*, 170(1-2):1–14, SEP 2008. ISSN 0031-9201. (Cité pages 91 et 120.)

- Christopher C FINLAY et Andrew JACKSON : Equatorially dominated magnetic field change at the surface of Earth's core. *Science*, 300(5628):2084–2086, 2003. (Cité pages 8 et 91.)
- Alexandre FOURNIER, Julien AUBERT, Erwan THÉBAULT et Nathanaël SCHAEFFER : A database of synthetic observations for geomagnetic data assimilation practice. In *EGU General Assembly Conference Abstracts*, volume 14, page 6243, 2012. (Cité pages 37, 39 et 40.)
- Alexandre FOURNIER, Gauthier HULOT, Dominique JAULT, Weijia KUANG, Andrew TANGBORN, Nicolas GILLET, Elisabeth CANET, Julien AUBERT et Florian LHUILLIER : An introduction to data assimilation and predictability in geomagnetism. *Space science reviews*, 155(1-4):247–291, 2010. (Cité page 91.)
- Alexandre FOURNIER, Lars NERGER et Julien AUBERT : An ensemble kalman filter for the time-dependent analysis of the geomagnetic field. *Geophys. Geochem. Geosyst.*, 14(10): 4035–4043, 2013. (Cité page 91.)
- Y GALLET et M AL MAQDISSI : Archeomagnétisme à Mishirfeh Qatna : Nouvelles données sur l'évolution de l'intensité du champ magnétique terrestre au Moyen Orient durant les derniers millénaires. *Akkadica*, 131:29–46, 2010. (Cité page 80.)
- Y GALLET et P BUTTERLIN : Archaeological and geomagnetic implications of new archaeomagnetic intensity data from the early bronze high terrace 'Massif Rouge' at Mari (Tell Hariri, Syria). *Archaeometry*, 2014. (Cité page 80.)
- Y. GALLET, A. GENEVEY et V. COURTILOT : On the possible occurrence of 'archaeomagnetic jerks' in the geomagnetic field over the past three millennia. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 214:237 – 242, 2003. (Cité pages 62, 63 et 87.)
- Yves GALLET, Marta D'ANDREA, Agnès GENEVEY, Frances PINNOCK, Maxime LE GOFF et Paolo MATTHIAE : Archaeomagnetism at Ebla (Tell Mardikh, Syria). New data on geomagnetic field intensity variations in the Near East during the Bronze Age. *Journal of Archaeological Science*, 42:295–304, 2014. (Cité page 83.)
- Yves GALLET, Agnès GENEVEY et Maxime LE GOFF : Three millennia of directional variation of the Earth's magnetic field in western Europe as revealed by archeological artefacts. *Phys. Earth Planet. Int.*, 131(1):81–89, 2002. (Cité page 55.)
- Yves GALLET, Agnès GENEVEY, Maxime LE GOFF, Frédéric FLUTEAU et Safar ALI ESHRAGHI : Possible impact of the Earth's magnetic field on the history of ancient civilizations. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 246(1-2):17–26, JUN 15 2006. ISSN 0012-821X. (Cité page 80.)

- Yves GALLET et Maxime LE GOFF : High-temperature archeointensity measurements from Mesopotamia. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 241(1):159–173, 2006. (Cité page 80.)
- Yves GALLET, Maxime LE GOFF, Agnès GENEVEY, Jean MARGUERON et Paolo MATTHIAE : Geomagnetic field intensity behavior in the Middle East between 3000 BC and 1500 BC. *Geophys. Res. Lett.*, 35(2), 2008. (Cité page 80.)
- A. GENEVEY, Y. GALLET, C. G. CONSTABLE, M. KORTE et G. HULOT : Archeoint : An upgraded compilation of geomagnetic field intensity data for the past ten millennia and its application to the recovery of the past dipole moment. *Geophys. Geochem. Geosyst.*, 9(4), 2008. (Cité pages 12, 35 et 37.)
- A GENEVEY, Y GALLET et JC MARGUERON : Eight thousand years of geomagnetic field intensity variations in the eastern Mediterranean. *J. Geophys. Res.*, 108(B5), MAY 2 2003. ISSN 0148-0227. (Cité pages 55, 72 et 80.)
- A. GENEVEY, Y. GALLET, E. THÉBAULT, S. JESSET et M. Le GOFF : Geomagnetic field intensity variations in Western Europe over the past 1100 years. *Geophys. Geochem. Geosyst.*, 14: 2858–2872, 2013. (Cité pages 55, 59, 84 et 85.)
- Agnès GENEVEY, Yves GALLET, Jean ROSEN et Maxime LE GOFF : Evidence for rapid geomagnetic field intensity variations in Western Europe over the past 800 years from new French archeointensity data. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 284(1-2):132–143, JUN 30 2009. ISSN 0012-821X. (Cité pages 55 et 84.)
- Walter R GILKS, Sylvia RICHARDSON et David J SPIEGELHALTER : Introducing Markov Chain Monte Carlo. *In Markov Chain Monte Carlo in practice*, pages 1–19. Springer, 1996a. (Cité page 73.)
- WR GILKS, S RICHARDSON, DJ SPIEGELHALTER *et al.* : *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Springer, 1996b. (Cité page 73.)
- N. GILLET, D. JAULT, C. C. FINLAY et N. OLSEN : Stochastic modelling of the Earth's magnetic field : inversion for covariances over the observatory era. *Geophys. Geochem. Geosyst.*, 14:766–786, 2013. (Cité pages 18, 36, 41, 43, 45, 50, 70, 75, 76, 97, 119, 120 et 130.)
- Gary A GLATZMAIER et Peter OLSON : Probing the geodynamo. *Scientific American*, 292 (4):50–57, 2005. (Cité page 5.)
- D. GUBBINS : Can the Earth's magnetic field be sustained by core oscillations? *Geophys. Res. Lett.*, 2(409–412), 1975. (Cité pages 26 et 101.)

- D. GUBBINS : Geomagnetic field analysis. part i. stochastic inversion. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 73:641–652, 1983. (Cité page 31.)
- David GUBBINS, Adrian L JONES et Christopher C FINLAY : Fall in Earth's magnetic field is erratic. *Science*, 312(5775):900–902, 2006. (Cité pages 20 et 120.)
- Gelvam A HARTMANN, Agnes GENEVEY, Yves GALLET, Ricardo IF TRINDADE, Maxime LE GOFF, Rosana NAJJAR, Carlos ETCHEVARNE et Marisa C AFONSO : New historical archeointensity data from Brazil : Evidence for a large regional non-dipole field contribution over the past few centuries. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 306(1):66–76, 2011. (Cité page 55.)
- Tadahiro HATAKEYAMA et Masaru KONO : Geomagnetic field model for the last 5 my : time-averaged field and secular variation. *Phys. Earth Planet. Int.*, 133(1):181–215, 2002. (Cité page 92.)
- G HELLIO, N GILLET, C BOULIGAND et D JAULT : Stochastic modelling of regional archaeomagnetic series. *Geophys. J. Int.*, 199(2):931–943, 2014. (Cité pages 21, 55, 60, 122, 124 et 130.)
- Gwenaël HERVÉ, Annick CHAUVIN et Philippe LANOS : Geomagnetic field variations in Western Europe from 1500 BC to 200 AD. part I : Directional secular variation curve. *Phys. Earth Planet. Int.*, 218:1–13, 2013. (Cité page 55.)
- Raymond HIDE : Free hydromagnetic oscillations of the Earth's core and the theory of the geomagnetic secular variation. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 259(1107):615–647, 1966. (Cité page 20.)
- R. HOLME, N. OLSEN et F.L. BAIRSTOW : Mapping geomagnetic secular variation at the core-mantle boundary. *Geophys. J. Int.*, 186:521–528, 2011. (Cité page 70.)
- L HONGRE, G HULOT et A KHOKHLOV : An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years. *Phys. Earth Planet. Int.*, 106(3):311–335, 1998. (Cité pages 41, 93 et 108.)
- G HULOT et C BOULIGAND : Statistical palaeomagnetic field modelling and symmetry considerations. *Geophys. J. Int.*, 161:591–602, 2005. (Cité page 147.)
- G. HULOT et J.L. LEMOUËL : A statistical approach to the Earth's main magnetic field. *Phys. Earth Planet. Int.*, 82:167–183, 1994. (Cité pages 18, 35, 43, 49 et 50.)
- A JACKSON et CC FINLAY : Geomagnetic secular variation and its applications to the core. *Treatise on geophysics*, 5:147–193, 2007. (Cité page 8.)

- A. JACKSON, A. R. T. JONKERS et M. R. WALKER : Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 358:957–990, 2000. (Cité pages 8, 9, 20, 26, 59, 95, 108, 119 et 120.)
- Catherine L JOHNSON et Catherine G CONSTABLE : The time-averaged geomagnetic field : global and regional biases for 0–5 Ma. *Geophys. J. Int.*, 131(3):643–666, 1997. (Cité page 92.)
- Peter KELLY et David GUBBINS : The geomagnetic field over the past 5 million years. *Geophys. J. Int.*, 128(2):315–330, 1997. (Cité pages 91 et 92.)
- M. KORTE et C.G. CONSTABLE : Continuous global geomagnetic field models for the past 3000 years. *Phys. Earth Planet. Interiors*, 140:73–89, 2003. (Cité pages 70, 93 et 108.)
- M. KORTE, F. DONADINI et C.G. CONSTABLE : Geomagnetic field for 0–3 ka : 2. a new series of time-varying global models. *Geophys. Geochem. Geosyst.*, 10(6), 2009. (Cité pages 60, 63, 67, 70, 87, 93, 94, 104, 105, 107, 111, 120, 130 et 131.)
- M. KORTE, A. GENEVEY, C. G. CONSTABLE, U. FRANK et E. SCHNEPP : Continuous geomagnetic field models for the past 7 millennia :1. a new global data compilation. *Geophys. Geochem. Geosyst.*, 6(2), 2005. (Cité pages 20, 33, 59, 70 et 120.)
- Monika KORTE et Catherine CONSTABLE : Improving geomagnetic field reconstructions for 0–3 ka. *Phys. Earth Planet. Int.*, 188:247–259, 2011. (Cité pages 60, 76, 85 et 93.)
- Monika KORTE, Catherine CONSTABLE, Fabio DONADINI et Richard HOLME : Reconstructing the holocene geomagnetic field. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 312(3):497–505, 2011. (Cité page 60.)
- M KOVACHEVA, Y BOYADZIEV, M KOSTADINOVA-AVRAMOVA, N JORDANOVA et F DONADINI : Updated archeomagnetic data set of the past 8 millennia from the Sofia laboratory, Bulgaria. *Geophys. Geochem. Geosyst.*, 10(5), 2009. (Cité page 55.)
- R. A. LANGEL : The main field. In J. A. JACOBS, éditeur : *Geomagnetism, volume 1*, pages 249–512. Academic press London, 1987. (Cité page 147.)
- Philippe LANOS : Bayesian inference of calibration curves : application to archaeomagnetism. In *Tools for Constructing Chronologies*, pages 43–82. Springer, 2004. (Cité pages 62, 64, 72 et 73.)

- Philippe LANOS, Maxime LE GOFF, Mary KOVACHEVA et Elisabeth SCHNEPP : Hierarchical modelling of archaeomagnetic data and curve estimation by moving average technique. *Geophys. J. Int.*, 160(2):440–476, 2005. (Cité pages 55 et 70.)
- Maxime LE GOFF, Yves GALLET, Agnès GENEVEY et Nicolas WARMÉ : On archeomagnetic secular variation curves and archeomagnetic dating. *Phys. Earth Planet. Int.*, 134(3):203–211, 2002. (Cité page 70.)
- Hilaire LEGROS et Vincent DEPARIS : *Voyage à l'intérieur de la Terre. De la géographie antique à la géophysique moderne. Une histoire des idées*. CNRS Editions, 2002. (Cité page 3.)
- V. LESUR, I. WARDINSKI, M. ROTHER et M. MANDEA : GRIMM : the GFZ Reference Internal Magnetic Model based on vector satellite and observatory data. *Geophys. J. Int.*, 173:382–394, 2008. (Cité pages 46 et 49.)
- Florian LHUILLIER, Alexandre FOURNIER, Gauthier HULOT et Julien AUBERT : The geomagnetic secular-variation timescale in observations and numerical dynamo models. *Geophys. Res. Lett.*, 38(9), 2011. (Cité pages 37, 46 et 49.)
- A. LICHT, G. HULOT, Y. GALLET et E. THÉBAULT : Ensembles of low degree archeomagnetic field models for the past three millennia. *Phys. Earth Planet. Int.*, 224:38–67, 2013. (Cité pages 60, 67, 70, 85, 94, 95, 104, 105, 108, 116, 119 et 131.)
- JJ LOVE et CG CONSTABLE : Gaussian statistics for palaeomagnetic vectors. *Geophys. J. Int.*, 152:515–565, 2003. (Cité page 76.)
- FJ LOWES : Spatial power spectrum of the main geomagnetic field, and extrapolation to the core. *Geophys. J. Int.*, 36(3):717–730, 1974. (Cité page 35.)
- William LOWRIE : *Fundamentals of geophysics*. Cambridge University Press, 2007. (Cité page 11.)
- MW McELHINNY, PL McFADDEN et RT MERRILL : The time-averaged paleomagnetic field 0–5 Ma. *J. Geophys. Res. : Solid Earth (1978–2012)*, 101(B11):25007–25027, 1996. (Cité page 92.)
- Ritayan MITRA, Lisa TAUXE et Susan KEECH McINTOSH : Two thousand years of archeointensity from West Africa. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 364:123–133, 2013. (Cité page 55.)
- Andreas NILSSON, Richard HOLME, Monika KORTE, Neil SUTTIE et Mimi HILL : Reconstructing holocene geomagnetic field variation : new methods, models and implications. *Geophys. J. Int.*, page ggu120, 2014. (Cité pages 12, 93, 94, 129 et 132.)

- Andreas NILSSON, Raimund MUSCHELER et Ian SNOWBALL : Millennial scale cyclicity in the geodynamo inferred from a dipole tilt reconstruction. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 311(3-4):299 – 305, 2011. ISSN 0012-821X. (Cité page 87.)
- Nils OLSEN, G HULOT et TJ SABAKA : The present field. *Treatise on geophysics*, 5:33–75, 2007. (Cité page 17.)
- Nils OLSEN, Hermann LÜHR, Terence J SABAKA, Mioara MANDEA, Martin ROTHER, Lars TØFFNER-CLAUSEN et Sungchan CHOI : CHAOS—a model of the Earth’s magnetic field derived from CHAMP, Ørsted, and SAC-C magnetic satellite data. *Geophys. J. Int.*, 166(1):67–75, 2006. (Cité page 19.)
- Peter OLSON et UR CHRISTENSEN : The time-averaged magnetic field in numerical dynamos with non-uniform boundary heat flow. *Geophys. J. Int.*, 151(3):809–823, 2002. (Cité page 116.)
- P.L. OLSON, U.R. CHRISTENSEN et P.E. DRISCOLL : From superchrons to secular variation : A broadband dynamo frequency spectrum for the geomagnetic dipole. *Earth planet. Sci. Lett.*, 319-320:75–82, 2012. (Cité pages 36, 37, 39, 43, 76 et 87.)
- S. PANOVSKA : Modelling Holocene geomagnetic field evolution. *Ph.D. Thesis, ETH (Zürich)*, 2012. (Cité pages 34, 39 et 129.)
- S PANOVSKA, CC FINLAY et AM HIRT : Observed periodicities and the spectrum of field variations in Holocene magnetic records. *Earth planet. Sci. Lett.*, 379:88–94, 2013. (Cité pages 76 et 87.)
- A. PAPOULIS et S. U. PILLAI : *probability, random variable and stochastic process*. McGraw-Hill, New York, 4th edition, 2002. (Cité pages 28 et 43.)
- Fco. Javier PAVÓN-CARRASCO, Juan RODRÍGUEZ-GONZÁLEZ, Maria Luisa OSETE et J. Miquel TORTA : A matlab tool for archaeomagnetic dating. *Journal of Archaeological Science*, 38(2):408–419, 2011. (Cité pages 64 et 72.)
- J.D.A. PIPER : Paleomagnetism. In J. A. JACOBS, éditeur : *Geomagnetism*, volume 3. Academic press London, 1989. (Cité pages 80 et 95.)
- C. E. RASMUSSEN et C. K. I. WILLIAMS : *Gaussian processes for machine learning*. The MIT Press, 2006. (Cité pages 28, 29 et 72.)

- Paula J REIMER, Mike GL BAILLIE, Edouard BARD, Alex BAYLISS, J Warren BECK, Paul G BLACKWELL, Christopher Bronk RAMSEY, Caitlin E BUCK, George S BURR, R Lawrence EDWARDS *et al.* : Intcal09 and marine09 radiocarbon age calibration curves, 0-50,000 years cal bp. 2009. (Cité page 72.)
- David A SCHNEIDER et Dennis V KENT : The time-averaged paleomagnetic field. *Reviews of Geophysics*, 28(1):71–96, 1990. (Cité page 92.)
- R. SHAAR, E. BEN-YOSEF, R. HAGAI, L. TAUXE, A. AGNON et R. KESSEL : Geomagnetic field intensity : How high can it get? How fast can it change? Constraints from Iron Age copper slag. *Earth planet. Sci. Lett.*, 301:297–306, 2011. (Cité pages 55 et 83.)
- RT SHUEY, ER COLE et MJ MIKULICH : Geographic correction of archeomagnetic data. *Journal of geomagnetism and geoelectricity*, 22(4):485–489, 1970. (Cité pages 57 et 58.)
- Michael L STEIN : *Interpolation of spatial data : some theory for kriging*. Springer, 1999. (Cité page 50.)
- Neil SUTTIE, Richard HOLME, Mimi J HILL et John SHAW : Consistent treatment of errors in archaeointensity implies rapid decay of the dipole prior to 1840. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 304(1):13–21, 2011. (Cité page 78.)
- Albert TARANTOLA et Bernard VALETTE : Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Reviews of Geophysics*, 20(2):219–232, 1982. (Cité page 26.)
- Lisa TAUXE : *Essentials of paleomagnetism*. Univ. of California Press, 2010. (Cité page 56.)
- E. THÉBAULT et Y. GALLET : A bootstrap algorithm for deriving the archeomagnetic field intensity variation curve in the Middle East over the past 4 millennia BC. *Geophys. Res. Lett.*, 37:L22303, 2010. (Cité pages 55, 60, 63, 70, 83, 87 et 130.)
- Emile THELLIER : Sur l'intensité du champ magnétique terrestre dans le passé historique et géologique. *Ann. Geophys.*, 15:285–376, 1959. (Cité page 10.)
- G.M. TURNER, J.L. RASSON et C.V. REEVES : Observation and measurement techniques. *Treatise on Geophysics*, 5:93–132, 2007. (Cité page 57.)
- Jean-Pierre VALET, Laure MEYNADIER et Yohan GUYODO : Geomagnetic dipole strength and reversal rate over the past two million years. *Nature*, 435(7043):802–805, 2005. (Cité page 33.)

- DE WINCH et PH ROBERTS : Derivatives of addition theorems for Legendre functions. *Journal of the Australian Mathematical Society-Series B*, 37(2):212–234, 1995. (Cité page 148.)
- AKIVA M YAGLOM : *An introduction to the theory of stationary random functions*. Courier Dover Publications, 2004. (Cité pages 28, 42, 75 et 87.)
- L. B. ZIEGLER, C. G. CONSTABLE, C. L. JOHNSON et L. TAUXE : PADM₂M : a penalized maximum likelihood model of the 0–2 Ma palaeomagnetic axial dipole moment. *Geophys. J. Int.*, 184(3):1069–1089, 2011. ISSN 1365-246X. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04905.x>. (Cité pages 33 et 76.)

D, I AND F COVARIANCES

A

In this Appendix, we derive the statistical properties (i.e. mean values and covariances) of the inclination I , declination D , and intensity F of the magnetic field at a location of longitude ϕ and colatitude θ at the surface of the Earth. We assume that the Gauss coefficients describing the magnetic field are the result of a random stationary process, are characterized by a null mean value (except for the axial dipole, whose mean value is noted \bar{g}_1^0), are independent from each other, and have a covariance function that depends only on degree n :

$$\text{Cov}(g_n^m(t), g_n^m(t + \tau)) = \text{Cov}(h_n^m(t), h_n^m(t + \tau)) = K_n(\tau) \quad (\text{A.1})$$

Such assumptions amount to impose that the statistical properties of the deviation of the magnetic field from an axial dipole are invariant over the surface of the Earth (as demonstrated in [\(Hulot et Bouligand 2005\)](#)).

We first derive the statistical properties of the north X , east Y , and downward Z components of the magnetic field. Their expressions (for a truncation degree N) at the surface of the Earth are (e.g. [Langel 1987](#)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n [g_n^m(t) \cos m\phi + h_n^m(t) \sin m\phi] \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \\ Y(t) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n m [g_n^m(t) \sin m\phi - h_n^m(t) \cos m\phi] P_n^m(\cos \theta) \\ Z(t) = - \sum_{n=1}^N (n+1) \sum_{m=0}^n [g_n^m(t) \cos m\phi + h_n^m(t) \sin m\phi] P_n^m(\cos \theta) \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Because only g_1^0 has a non-zero mean value, the mean values of X , Y , and Z are simply

$$\bar{X} = -\bar{g}_1^0 \sin \theta ; \quad \bar{Y} = 0 ; \quad \bar{Z} = -2\bar{g}_1^0 \cos \theta . \quad (\text{A.3})$$

Because of the independence of Gauss coefficients, and because their covariance function depends only on the spherical harmonic degree n , covariances on X , Y and Z simplify

into :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cov}(X(t), X(t + \tau)) = \sum_{n=1}^N K_n(\tau) \sum_{m=0}^n \left(\frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right)^2 \\ \text{Cov}(Y(t), Y(t + \tau)) = \frac{1}{\sin^2 \theta} \sum_{n=1}^N K_n(\tau) \sum_{m=0}^n m^2 (P_n^m(\cos \theta))^2 \\ \text{Cov}(Z(t), Z(t + \tau)) = \sum_{n=1}^N (n+1)^2 K_n(\tau) \sum_{m=0}^n (P_n^m(\cos \theta))^2 \\ \text{Cov}(X(t), Y(t + \tau)) = 0 \\ \text{Cov}(Y(t), Z(t + \tau)) = 0 \\ \text{Cov}(X(t), Z(t + \tau)) = - \sum_{n=1}^N (n+1) K_n(\tau) \sum_{m=0}^n \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \end{array} \right. \quad . \quad (\text{A.4})$$

Such expressions can be further simplified using the following relations for Schmidt normalized associated Legendre functions (Winch et Roberts 1995) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=0}^n (P_n^m(\cos \theta))^2 = 1 \\ \sum_{m=0}^n \left(\frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right)^2 = \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{m=0}^n \left(\frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \right)^2 = \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{m=0}^n \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) = 0 \end{array} \right. \quad . \quad (\text{A.5})$$

We therefore deduce that :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cov}(X(t), X(t + \tau)) = \sum_{n=1}^N \frac{n(n+1)}{2} K_n(\tau) \\ \text{Cov}(Y(t), Y(t + \tau)) = \sum_{n=1}^N \frac{n(n+1)}{2} K_n(\tau) \\ \text{Cov}(Z(t), Z(t + \tau)) = \sum_{n=1}^N (n+1)^2 K_n(\tau) \end{array} \right. \quad , \quad (\text{A.6})$$

and that the series of X , Y , and Z recorded at a same location are independent from each other :

$$\text{Cov}(X(t), Y(t + \tau)) = \text{Cov}(Y(t), Z(t + \tau)) = \text{Cov}(X(t), Z(t + \tau)) = 0 \quad (\text{A.7})$$

The declination D , inclination I and intensity F of the magnetic field are not linearly related to the components X , Y , and Z :

$$D = \arctan \frac{Y}{X} ; \quad I = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} ; \quad F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} . \quad (\text{A.8})$$

Let us denote $\mathbf{A} = (X, Y, Z)$ and $\mathbf{B} = (D, I, F)$. If the vector \mathbf{A} does not depart much from its mean value $\bar{\mathbf{A}}$ (corresponding to the mean axial dipole), the above non-linear relations,

noted $\mathbf{B} = \psi(\mathbf{A})$, can be approximated using a first-order Taylor expansion :

$$B_k = \psi_k(\bar{\mathbf{A}}) + \sum_i \left. \frac{\partial \psi_k}{\partial A_i} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} (A_i - \bar{A}_i). \quad (\text{A.9})$$

The mean value of \mathbf{B} is therefore approximated by :

$$\bar{B}_k = \psi_k(\bar{\mathbf{A}}) \quad (\text{A.10})$$

Combining equations (A.10), (A.3), and (A.8), we obtain the expression for the mean value of D , I , and F :

$$\bar{D} = 0 \text{ (}\pi \text{ if } \bar{g}_1^0 > 0 \text{)} ; \quad \bar{I} = -\text{sgn}(\bar{g}_1^0) \arctan\left(\frac{2}{\tan\theta}\right) ; \quad \bar{F} = |\bar{g}_1^0| \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}, \quad (\text{A.11})$$

and the covariance matrix for \mathbf{B} is approximated by :

$$\text{Cov}(B_k(t), B_l(t + \tau)) = \sum_i \sum_j \left. \frac{\partial \psi_k}{\partial A_i} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} \left. \frac{\partial \psi_l}{\partial A_j} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} \text{Cov}(A_i(t), A_j(t + \tau)). \quad (\text{A.12})$$

Because the series of X , Y , and Z are independent of each other, this expression can be simplified into :

$$\text{Cov}(B_k(t), B_l(t + \tau)) = \sum_i \left(\left. \frac{\partial \psi_k}{\partial A_i} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} \right)^2 \text{Cov}(A_i(t), A_i(t + \tau)). \quad (\text{A.13})$$

This expression involves the partial derivative of D , I , and F with respect to X , Y , and Z evaluated at $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial D}{\partial X} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial D}{\partial Y} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} = -\frac{1}{\bar{g}_1^0 \sin \theta} \quad ; \quad \left. \frac{\partial D}{\partial Z} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} = 0 \\ \left. \frac{\partial I}{\partial X} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} = -\frac{2 \cos \theta}{|\bar{g}_1^0| (1 + 3 \cos^2 \theta)} \quad ; \quad \left. \frac{\partial I}{\partial Y} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial I}{\partial Z} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} = \frac{\sin \theta}{|\bar{g}_1^0| (1 + 3 \cos^2 \theta)} \\ \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} = -\frac{\text{sgn}(\bar{g}_1^0) \sin \theta}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}} \quad ; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial Y} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial Z} \right|_{\bar{\mathbf{A}}} = -\frac{2 \text{sgn}(\bar{g}_1^0) \cos \theta}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}} \end{array} \right. \quad (\text{A.14})$$

Finally, combining equations (A.13), (A.6), and (A.14), we obtain the following approximated expressions for the covariances of D , I , and F :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cov}(D(t), D(t + \tau)) = \frac{1}{2(\bar{g}_1^0)^2 \sin^2 \theta} \sum_{n=1}^N n(n+1) K_n(\tau) \\ \text{Cov}(I(t), I(t + \tau)) = \frac{2 \cos^2 \theta}{(\bar{g}_1^0)^2 (1 + 3 \cos^2 \theta)^2} \sum_{n=1}^N n(n+1) K_n(\tau) + \frac{\sin^2 \theta}{(\bar{g}_1^0)^2 (1 + 3 \cos^2 \theta)^2} \sum_{n=1}^N (n+1)^2 K_n(\tau) \\ \text{Cov}(F(t), F(t + \tau)) = \frac{\sin^2 \theta}{2(1 + 3 \cos^2 \theta)} \sum_{n=1}^N n(n+1) K_n(\tau) + \frac{4 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} \sum_{n=1}^N (n+1)^2 K_n(\tau) \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

and the cross-covariances within the different quantities :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cov}(D(t), I(t + \tau)) = 0 \\ \text{Cov}(I(t), F(t + \tau)) = 0 \\ \text{Cov}(D(t), F(t + \tau)) = -\frac{\cos \theta \sin \theta}{\bar{g}_1^0 (1 + 3 \cos^2 \theta)^{3/2}} \sum_{n=1}^N (n+1)(n+2) K_n(\tau) \end{array} \right. \quad (\text{A.16})$$

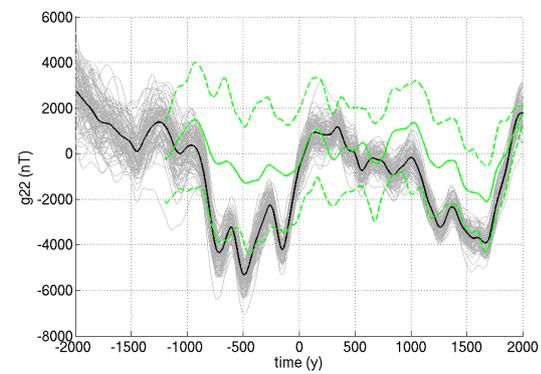
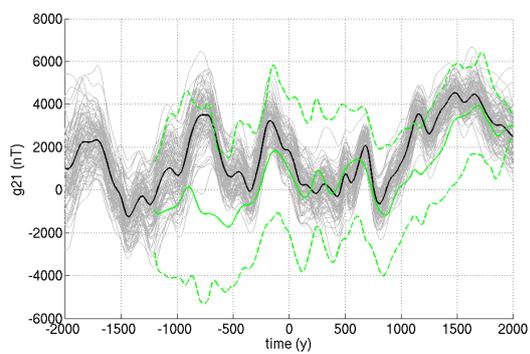
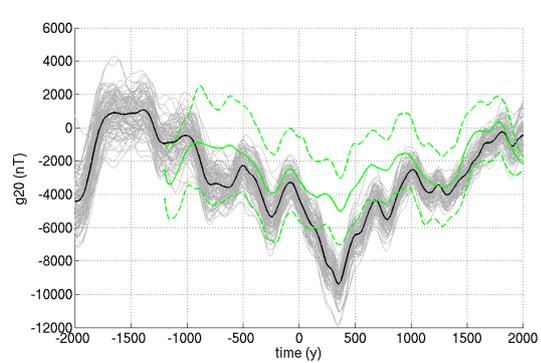
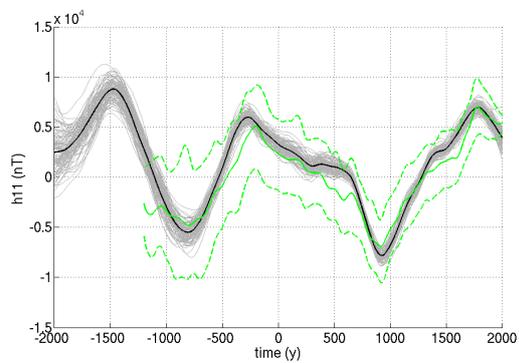
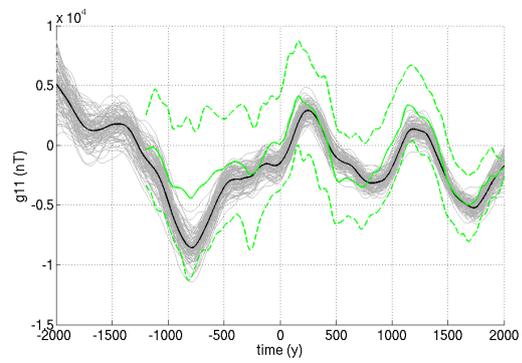
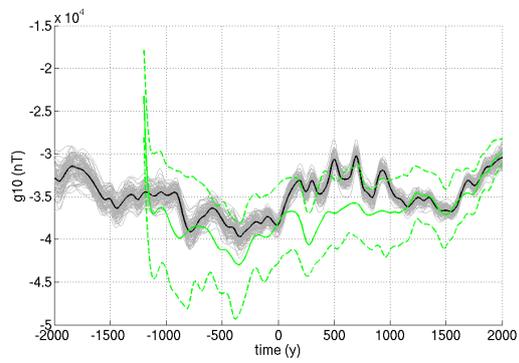
PARAMETERS USED IN THE MCMC METHOD. NUMBER N OF ITERATIONS PER CHAIN, σ_{MCMC} AND NUMBER N_{MCMC} OF DRAWS SELECTED BY THE MARKOV RULES. THE NUMBER OF LINES CORRESPONDS TO THE NUMBER OF CHAINS USED FOR EACH FIGURE.

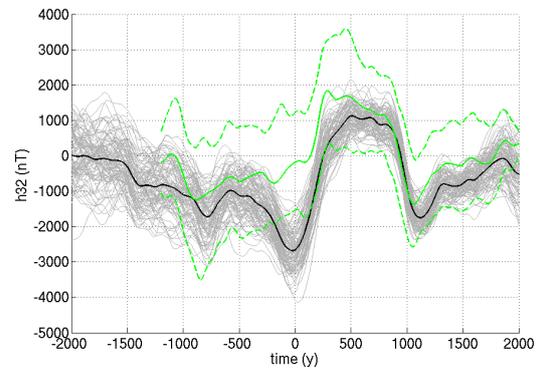
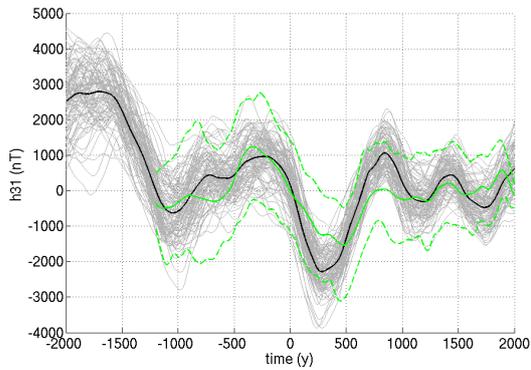
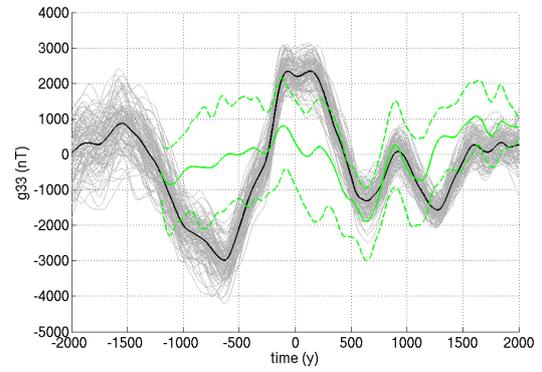
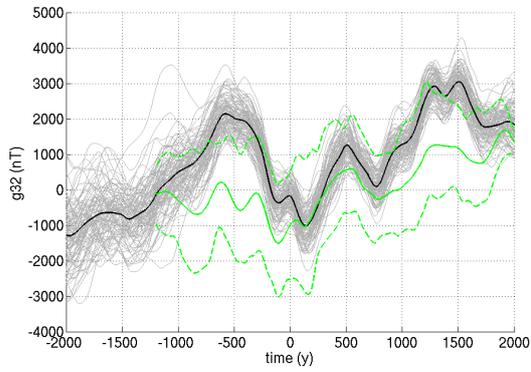
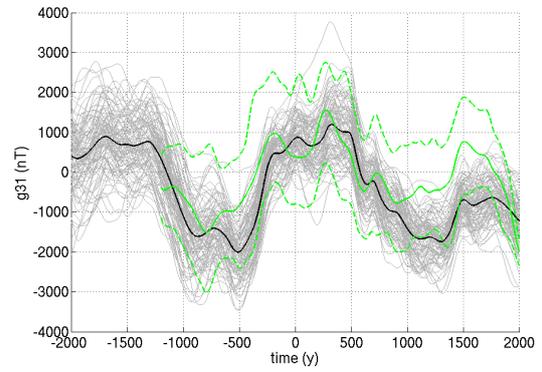
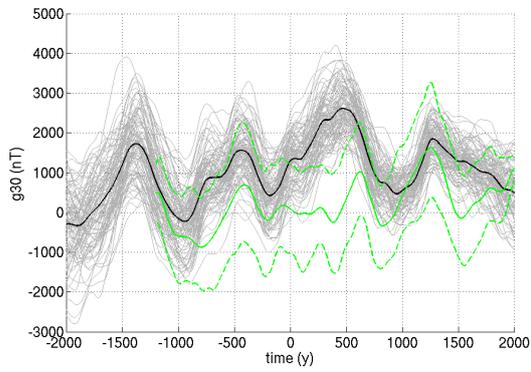
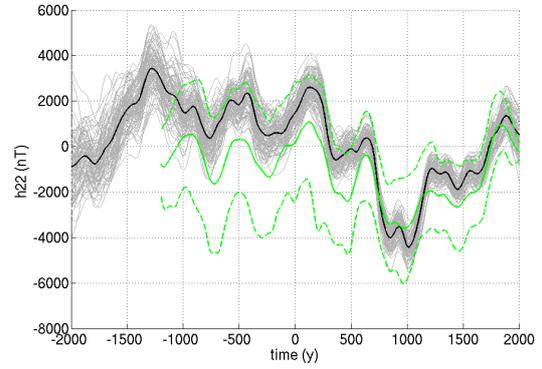
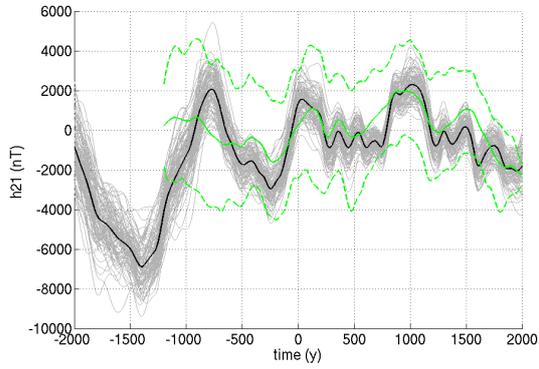
B

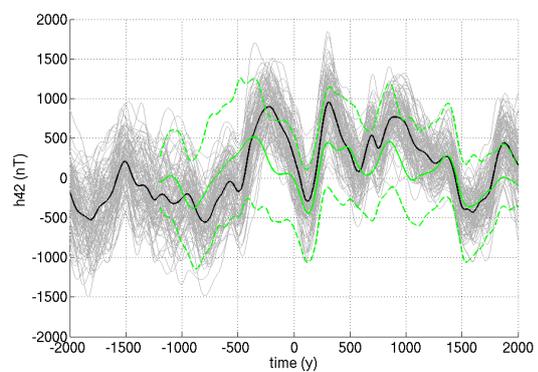
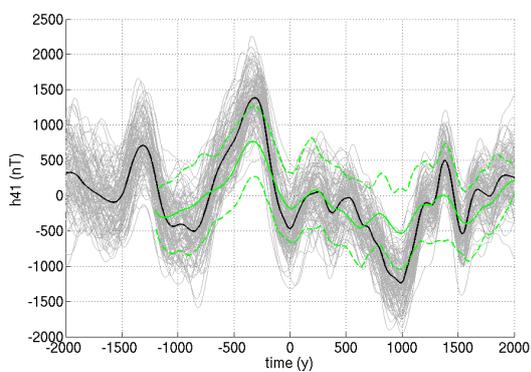
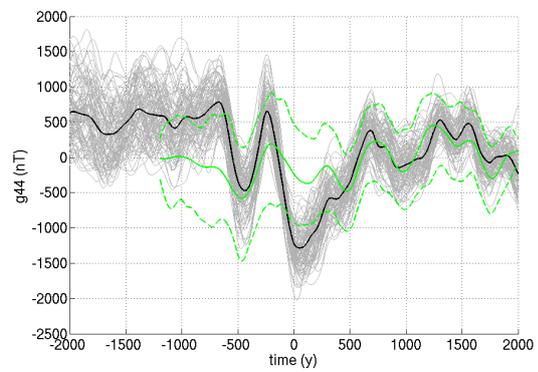
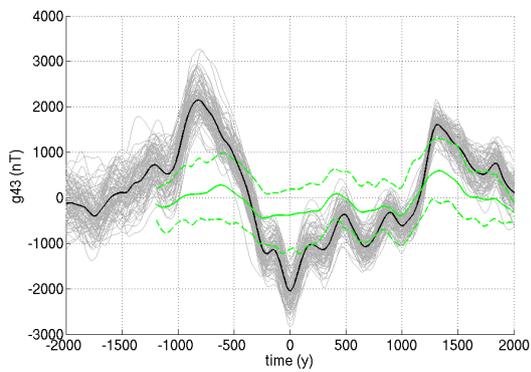
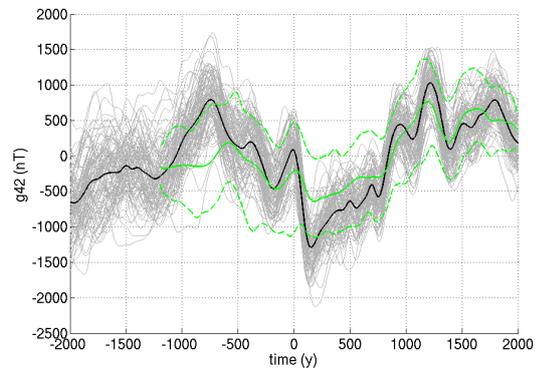
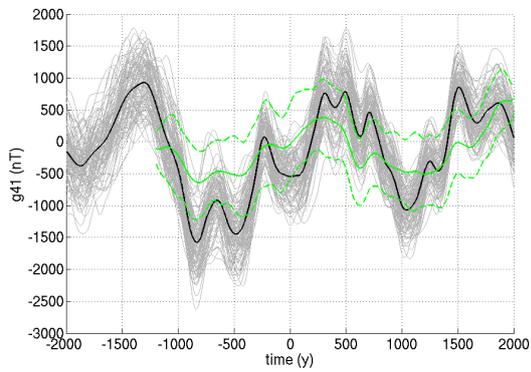
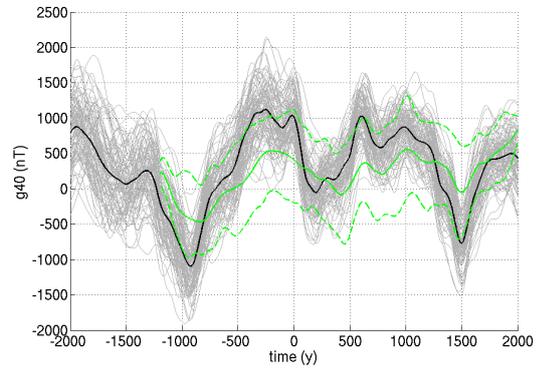
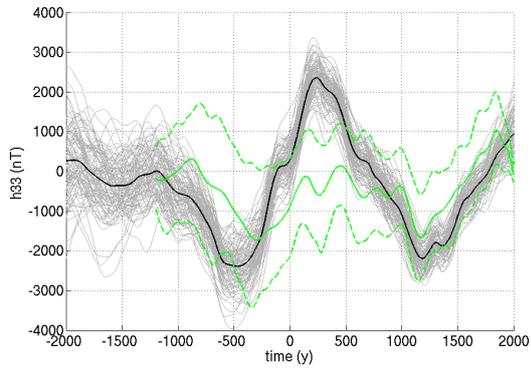
	N	σ_{MCMC}	N_{MCMC}		N	σ_{MCMC}	N_{MCMC}
Fig. 7.3a	10000	50	6926		10000	5	3348
	10000	50	6953		10000	5	3424
Fig. 7.3b	10000	10	3821	Fig. 7.4c	10000	1	3200
	10000	10	3820		10000	1	2830
	10000	10	3777		10000	1	2050
Fig. 7.3c	1000	100	962		10000	1	3157
	1000	100	970		10000	1	2825
	1000	100	962		10000	1	3856
Fig. 7.3d	10000	50	4439		10000	1	3812
	10000	50	4442		10000	1	3132
	10000	50	4437		10000	1	3156
	10000	50	4442		10000	1	3166
Fig. 7.3e	10000	50	4351	Fig. 7.7a	10000	2	5000
	10000	50	4392		10000	2	5170
	10000	50	4268		10000	2	5002
	10000	50	4463		10000	2	4718
Fig. 7.4a	10000	30	2980	Figs. 7.7(b and c)	10000	2	3990
	10000	30	2950		10000	2	3180
	10000	30	3050		10000	2	2480
	10000	30	3090		10000	2	3480
	10000	30	3010		10000	2	3492
Fig. 7.4b	10000	5	3379				
	10000	5	3491				
	10000	5	3576				
	10000	5	3062				
	10000	5	3622				
	10000	5	3593				
	10000	5	3516				
	10000	5	3330				
	10000	5	3132				
	10000	5	3166				
	10000	5	3348				
	10000	5	3424				

COEFFICIENTS g_l^m POUR L'OSCILLATEUR AMORTI

C







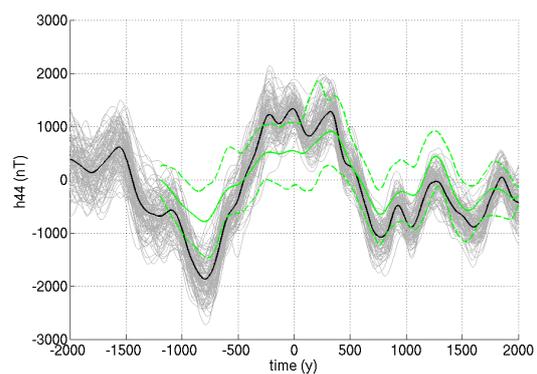
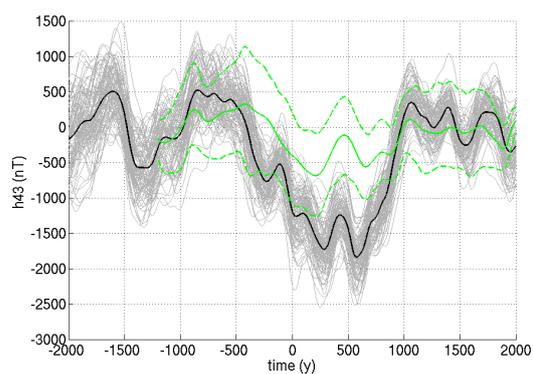


TABLE DES FIGURES

1.1	Vue schématique des différentes couches de la Terre	5
1.2	Environnement électromagnétique de la Terre.	6
2.1	Géométrie du champ magnétique.	7
2.2	Les données magnétiques.	9
2.3	Acquisition de l'aimantation détritique des sédiments.	11
2.4	Echantillonnage d'un four	11
2.5	Répartition spatiale et temporelle des données archéomagnétiques	13
3.1	Harmoniques sphériques.	16
3.2	Spectre spatial du champ magnétique à la surface de la Terre.	17
3.3	Intensité à la surface de la Terre en 2005 par CHAOS.	19
3.4	Champ radial en 2005 par CHAOS à la surface de la Terre et du noyau	19
5.1	Spectre composite du VADM.	34
5.2	Série temporelle du VADM.	37
5.3	Séries temporelles de la composante Est aux observatoires	38
5.4	Spectres temporels issus de simulations numériques	40
5.5	Spectres des fonctions d'auto-corrélation.	44
5.6	Séries temporelles synthétiques à basses fréquences.	47
5.7	Séries temporelles synthétiques à hautes fréquences.	48
5.8	Temps de corrélation.	49
5.9	Détermination du temps de corrélation de l'oscillateur amorti.	51
6.1	Distribution des vestiges archéologiques et des laves dans Arch3k.	55
6.2	Pôle géomagnétique virtuel.	57
6.3	Erreurs de datation d'une série temporelle.	59
6.4	pdf en Syrie pour la méthode de pondération.	62
6.5	pdf en Syrie pour la méthode des poids.	63
6.6	pdf pour des données synthétiques pour la méthode des poids.	64

6.7	Probabilités des tirages du bootstrap.	65
6.8	Probabilités des tirages du bootstrap par MCMC	66
6.9	pdf pour la Syrie	67
6.10	Fonction de densité de probabilité de l'intensité obtenue par bootstrap et méthode MCMC pour une série synthétique.	68
7.1	Illustration of equations (7.5) and (7.6)	74
7.2	Normalized power spectral density of D , I and F	77
7.3	pdf from synthetic datasets	81
7.4	pdf for Syria	82
7.5	pdf of the intensity of three cross-sections	84
7.6	Distribution of the dates after MCMC	84
7.7	pdf of D , I and F for France	86
8.1	Spectres des fonctions d'auto-covariance.	92
8.2	Répartition spatiale et temporelle des données utilisées.	96
8.3	Histogramme des erreurs de datation.	96
9.1	Evolution de la norme $\epsilon(t)$ (en %) au fil de 5 itérations.	99
9.2	Comparaison de deux a priori	100
9.3	Comparaison entre la méthode bayésienne et la méthode régularisée	102
9.4	Comparaison de deux méthodes d'inversion	103
9.5	Dipôle axial pour données avec erreurs minimales.	105
9.6	Dipôle axial avec norme de Huber.	106
9.7	Dipôle axial avec norme L2.	107
9.8	Distribution spatiale et temporelle des données aberrantes.	107
9.9	Différence entre le champ radial à la surface de la Terre en 2000 BC obtenu à partir des quatre premiers degrés pour le modèle tronqué à $l = 10$ et le modèle tronqué à $l = 8$. Les contours sont tous les 5 nT.	109
9.10	Ecart-type de l'ensemble de modèles pour le champ radial en 2000 BC représenté jusqu'au degré $l = 4$ pour le modèle tronqué au degré $l = 10$. La valeur minimale est de 1400 nT. Les contours sont tous les 1000 nT.	110
9.11	Dipôle axial pour différents a priori.	111
9.12	D , I et F à Paris pour différents a priori.	112
10.1	Instantanés de l'intensité à la surface de la Terre.	117

10.2	Instantanés du champ radial et son écart-type à la surface du noyau.	118
10.3	Champ moyen sur le dernier millénaire et sur les quatre derniers millénaires.	119
10.4	Coefficients dipolaires pour le modèle COV-ARCH-tmp.	121
10.5	Intensité pour le modèle COV-ARCH-tmp.	122
10.6	Prédictions de D , I et F pour les courbes régionales, et pour le modèle global.	124
10.7	Prédiction de l'intensité dans l'hémisphère Sud.	125