



HAL
open science

Optimisation de l'architecture des réseaux de distribution d'énergie électrique

Egor Gladkikh

► **To cite this version:**

Egor Gladkikh. Optimisation de l'architecture des réseaux de distribution d'énergie électrique. Energie électrique. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAT055 . tel-01219327

HAL Id: tel-01219327

<https://theses.hal.science/tel-01219327v1>

Submitted on 22 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Génie Electrique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

« **Egor GLADKIKH** »

Thèse dirigée par « **Bertrand RAISON** » et « **Raphaël CAIRE** »
codirigée par « **Wojciech BIENIA** »

préparée au sein des Laboratoires **G2ELAB** et **G-SCOP**
dans l'**École Doctorale Electronique, Electrotechnique, Auto-
matique, Télécommunication et Traitement du Signal**

Optimisation de l'architecture des réseaux de distribution de l'énergie élec- trique

Thèse soutenue publiquement le « **8 Juin 2015** »,
devant le jury composé de :

M. Bruno FRANCOIS

Professeur, Ecole Centrale de Lille, rôle (Président)

M. Olivier PETON

Maître Assistant, HDR, Ecole des Mines de Nantes, rôle (Rapporteur)

M. Geert DECONINCK

Professeur Dr. Ir., KU LEUVEN, rôle (Rapporteur)

M. Bertrand RAISON

Professeur des Universités, Université Grenoble Alpes, rôle (Membre)

M. Wojciech BIENIA

Maître de Conférences, Grenoble INP, rôle (Membre)

M. Raphaël CAIRE

Maître de Conférences, HDR, Grenoble INP, rôle (Membre)



ACRONYMES

k -ECSS	:	k -Edge Connected Spanning Sub-graph
AH1	:	Algorithme heuristique 1
AH2	:	Algorithme heuristique 2
AH3	:	Algorithme heuristique 3
AARPM	:	Algorithme de conception de l'architecture du réseau des pertes minimales
ARSCM	:	Algorithme itératif pour le problème de réseau de Steiner de coût minimum
AAFCLM	:	Algorithme de conception de l'architecture du réseau : Union des arborescences de flot de coût linéaire minimum
BT	:	Basse Tension A ou B
CAPEX	:	Capital Expenditure (coûts d'investissement)
CRE	:	Commission de Régulation de l'Energie
CVRP	:	Capaciated Vehicle Routing Problem
EDF	:	Électricité De France
END	:	Energie Non Distribuée
ERDF	:	Électricité Réseau Distribution France
FACQM	:	Flot arborescent de coût quadratique minimum
FAPQM	:	Flot arborescent avec pertes quadratiques minimales
FCQM	:	Flot de coût quadratique minimum
FPQM	:	Flot avec les pertes quadratiques minimales
GED	:	Générateur d'Energie Dispersé
HT	:	Haute Tension A ou B
IEEE	:	Institute of Electrical and Electronics Engineers
MCNF	:	Minimum Cost Network Flow
MODELE _{ALM}	:	Modèle de l'Architecture du réseau de distribution de Longueur Minimale
MODELE _{ALMC}	:	Modèle de l'Architecture du réseau de distribution de Longueur Minimale avec des Capacités
MODELE _{ARPM}	:	Modèle de l'Architecture du Réseau de distribution des Pertes Minimales
MODELE _{UAFLM}	:	Modèle de l'Architecture : Union des arborescences de flot de coût linéaire minimum
MODELE _{APLM}	:	Modèle de l'Architecture du réseau de distribution des Pertes minimales dans le réseau de distribution de Longueur Minimale
MST	:	Minimum Spanning Tree
NLP	:	Non-Linear Programming ou PNL, Programmation Non Linéaire
NO	:	Normalement Ouvert
NF	:	Normalement Fermé
NM OPF- <i>ar</i>	:	Méthode de Newton pour OPF- <i>ar</i>
OM(T)	:	Organe de Manœuvre (Télécommandé)
OPEX	:	Operational expenditure (coûts opérationnels)
OPF	:	Optimal Power Flow
OPF- <i>ar</i>	:	Relaxation d'angle du problème OPF
OPF- <i>cr</i>	:	Relaxation conique du problème OPF
P×L	:	Puissance × Longueur
PL	:	Programme Linéaire
PLNE	:	Programme Linéaire en Nombres Entiers
PL _{SNDP}	:	Programme Linéaire pour <i>SNDP</i>
PLNE _{SNDP}	:	Programme Linéaire en Nombres Entiers pour <i>SNDP</i>
RO	:	Recherche Opérationnelle
RTE	:	Réseau de Transport d'Électricité
SAIDI	:	System Average Interruption Duration Index
SAIFI	:	System Average Interruption Frequency Index
SNDP	:	Survivable Network Design Problem
SOCP	:	Second Order Cone Programming

TSP : Travelling Salesman Problem
VRP : Vehicle Routing Problem

NOTATION

$G = (V, E)$:	Graphe orienté
X	:	Ensemble de sommets du graphe G
E	:	Ensemble d'arcs du graphe G
X^{GED}	:	Sous-ensemble de sommets représentant les nœuds avec GED
$d^+(x)$:	Degré sortant d'un sommet x
$d^-(x)$:	Degré entrant d'un sommet x
$d(x)$:	Degré d'un sommet x
$r(u, v)$:	Nombre de chemins arêtes disjointes entre de sommets u et v
s_i, p_i, q_i	:	Puissances apparente, active et réactive au nœud i
V_i	:	Tension du nœud i
S_{ij}, P_{ij}, Q_{ij}	:	Puissances apparente, active et réactive de la ligne (i, j)
I_{ij}	:	Courant de la ligne (i, j)
I_{ij}^{\max}	:	Courant maximale admissible de la ligne (i, j)
z_{ij}	:	Impédance complexe de la ligne (i, j)
V^{\min}	:	Tension nominale minimale
V^{\max}	:	Tension nominale maximale
C_{total_act}	:	Coût total actualisé
e_{ij}	:	Variables binaire du choix de la ligne (i, j)
τ	:	Taux d'actualisation
Q_i^{ged}	:	Variable continue exprimant le réactif de la production décentralisée
p_i^g, p_i^c	:	Puissances active générée et consommée au nœud i
q_i^g, q_i^c	:	Puissances réactive générée et consommée au nœud i
r_{ij}, x_{ij}	:	Résistance et réactance de la ligne (i, j)
l_{ij}	:	Module carré du courant complexe de la ligne (i, j)
v_i	:	Module carré de la tension complexe du nœud i
J	:	Matrice des dérivées partielles (Matrice Jacobéenne)
C^2	:	Classe des fonctions continues ayant des dérivées secondes continues

TABLE DE MATIERES

ACRONYMES	1
NOTATION	3
TABLE DE MATIERES	4
INTRODUCTION GENERALE.....	7
CHAPITRE I : ARCHITECTURES DES RESEAUX DE DISTRIBUTION ELECTRIQUE	10
I.1. INTRODUCTION	11
I.2. HIERARCHISATION DU RESEAU ELECTRIQUE EN FRANCE	11
I.3. STRUCTURE ET TOPOLOGIE DU RESEAU DE DISTRIBUTION.....	12
I.3.1. COMPOSITION DE RESEAU DE DISTRIBUTION.....	13
I.3.2. DIFFERENTES TOPOLOGIES DE RESEAUX DE DISTRIBUTION	13
I.3.2.1. LES RESEAUX RURAUX.....	13
I.3.2.2. LES RESEAUX URBAINS	14
I.3.2.2.1. RESEAUX EN DERIVATION MULTIPLES	14
I.3.2.2.2. RESEAU EN COUPURE D'ARTERE.....	15
I.3.2.2.3. RESEAUX BOUCLES.....	17
I.4. OBJECTIFS DE LA PLANIFICATION	18
I.4.1. INDICES DE FIABILITE	19
I.4.2. CRITERES ELECTRIQUES	20
I.4.3. CRITERES ECONOMIQUES.....	21
I.5. ORIGINALITE DE CE PROJET	22
I.5.1. LES DEMARCHES DE LA RECHERCHE OPERATIONNELLE.....	23
I.5.2. POSITIONNEMENT DE NOTRE PROBLEMATIQUE	24
I.6. CONCLUSION	24
CHAPITRE II : PROBLEME D'OPTIMISATION DE L'ARCHITECTURE DES RESEAUX DE	
DISTRIBUTION ELECTRIQUE	26
II.1. INTRODUCTION	27
II.2. NOTIONS ET DEFINITIONS DE LA THEORIE DES GRAPHS ET OPTIMISATION	
COMBINATOIRE	27
II.2.1. GENERALITES	27
II.2.2. PROBLEME D'OPTIMISATION.....	32
II.2.3. DEFINITIONS DE LA THEORIE DE LA COMPLEXITE.....	35
II.3. LES APPROCHES PROPOSEES DANS LA LITTERATURE	37
II.4. MODELISATION DU PROBLEME D'OPTIMISATION DE L'ARCHITECTURE DE RESEAU	39
II.4.1. REPRESENTATION DU RESEAU ELECTRIQUE SOUS FORME D'UN GRAPHE PLANAIRE	39
II.4.2. CONTRAINTES TECHNOLOGIQUES LIEES AU PROBLEME	40
II.4.3. FONCTION OBJECTIF	41
II.5. LES APPROCHES PROPOSEES ET LES PROBLEMES COMBINATOIRES ASSOCIES	42
II.5.1. MINIMISATION DE LA LONGUEUR.....	42
II.5.2. MINIMISATION DES PERTES	45
II.5.3. L'UNION DES ARBORESCENCES DE COUT MINIMUM	46
II.6. CONCLUSION	47
CHAPITRE III : PROBLEMES LIEES AUX STRUCTURES ARBORESCENTES DANS LE RESEAU	
DE DISTRIBUTION ELECTRIQUE	48
III.1. INTRODUCTION	49
III.2. FORMULATION CONVEXE EXACTE DU PROBLEME DE LA REPARTITION OPTIMALE DES	
FLUX DE PUISSANCE	49
III.2.1. MODELE DE REPARTITION DE CHARGE	50
III.2.2. REPARTITION OPTIMALE DES FLUX DE LA PUISSANCE	52
III.2.3. RELAXATION DU PROBLEME.....	53
III.3. NOUVELLE APPROCHE POUR LE CALCUL DU PROBLEME DE REPARTITION OPTIMALE DES	
FLUX DE PUISSANCE DANS DES RESEAUX RADIAUX	55

III.4. MODELE COMBINATOIRE OPTIMALE DU PROBLEME DE RECONFIGURATION DES RESEAUX DE DISTRIBUTION MAILLES	59
III.4.1. MODELE COMBINATOIRE	59
III.4.2. RESULTATS NUMERIQUES	63
III.5. DIVERS PROBLEMES NP-DIFFICILES DE FLOT ARBORESCENT DE COUT MINIMUM	65
III.5.1. INTRODUCTION	65
III.5.2. PROBLEMES NP-DIFFICILES DE FLOT ARBORESCENT DE COUT MINIMUM	66
III.5.3. PROBLEMES LIES AU FLOT ARBORESCENT DE COUT MINIMUM.....	66
III.5.4. PROBLEME DE FLOT ARBORESCENT AVEC PERTES QUADRATIQUES MINIMALES (FAPQM)	68
III.5.4.1. FORMULATION DU PROBLEME	69
III.5.4.2. MODELE SOUS FORME DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE.....	69
III.5.5. PROBLEME DE FLOT ARBORESCENT DE COUT QUADRATIQUE MINIMUM (FACQM)	70
III.5.5.1. FORMULATION DU PROBLEME	70
III.5.5.2. MODELE SOUS FORME DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE.....	71
III.5.6. PROBLEME DE FLOT ARBORESCENT DE COUT LINEAIRE MINIMUM AVEC LES CAPACITES SUR LES ARCS	71
III.5.6.1. FORMULATION DU PROBLEME	71
III.5.6.2. MODELE SOUS FORME DE PROGRAMMATION LINEAIRE.....	72
III.6. METHODES DE RESOLUTION ET RESULTATS NUMERIQUES POUR LES PROBLEMES DE FLOT ARBORESCENT DE COUT MINIMUM	73
III.6.1. RESOLUTION EXACTE PAR LA PROGRAMMATION QUADRATIQUE EN VARIABLE MIXTES	73
III.6.2. LES ALGORITHMES HEURISTIQUES	74
III.6.2.1. ALGORITHME HEURISTIQUE AH1 POUR LES PROBLEMES FAPQM ET FACQM.	77
III.6.2.2. ALGORITHME HEURISTIQUE AH2 POUR LES PROBLEMES FAPQM ET FACQM.	78
III.6.2.3. ALGORITHME HEURISTIQUE AH3 POUR LES PROBLEMES FAPQM ET FACQM.	78
III.6.3. RESULTATS NUMERIQUES	80
III.7. CONCLUSION	83
CHAPITRE IV : MODELES COMBINATOIRES ET METHODES DE RESOLUTION POUR LE PROBLEME D'OPTIMISATION DE L'ARCHITECTURE DES RESEAUX DE DISTRIBUTION	84
IV.1. INTRODUCTION.....	85
IV.2. CONCEPTION DE RESEAU FIABLE : RESEAU DE STEINER DE POIDS MINIMUM	86
IV.2.1. FORMULATION DU PROBLEME	86
IV.2.2. ALGORITHME ITERATIF 2-APPROXIMATION (ARSCM).....	87
IV.3. MODELE DE L'ARCHITECTURE : RESEAU DE DISTRIBUTION DE LONGUEUR MINIMALE (MODELE _{ALM}).....	88
IV.4. MODELE DE L'ARCHITECTURE : RESEAU DE DISTRIBUTION DES PERTES MINIMALES (MODELE _{ARPM})	91
IV.4.1. ALGORITHME DE CONCEPTION DE L'ARCHITECTURE DU RESEAU DES PERTES MINIMALES (AARPM).....	92
IV.5. MODELE DE L'ARCHITECTURE : UNION DES ARBORESCENCES DE FLOT DE COUT LINEAIRE MINIMUM (MODELE _{UAFCLM})	94
IV.6. MODELE DE L'ARCHITECTURE : PERTES MINIMUM DANS LE RESEAU DE DISTRIBUTION DE LONGUEUR MINIMALE (MODELE _{APLM}).....	98
IV.7. RESULTATS NUMERIQUES.....	104
IV.7.1. ARCHITECTURE DU RESEAU DE DISTRIBUTION DE LONGUEUR MINIMALE (MODELE _{ALM})	108
IV.7.2. ARCHITECTURE DU RESEAU DE DISTRIBUTION DE PERTES MINIMUM (MODELE _{ARPM}) ..	110
IV.7.3. ARCHITECTURE DU RESEAU DE DISTRIBUTION UNION DES ARBORESCENCES DE FLOT DE COUT LINEAIRE MINIMUM (MODELE _{UAFCLM}).....	112
IV.8. ANALYSE DES RESULTATS.....	115
IV.9. METHODE RETENUE : ARCHITECTURE DU RESEAU DE DISTRIBUTION DE PERTES MINIMUM DANS LE RESEAU DE LONGUEUR MINIMUM (MODELE _{APLM}).....	118
IV.10. CONCLUSION	121
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....	124

BIBLIOGRAPHIE	128
TITRE : OPTIMISATION DE L'ARCHITECTURE DES RESEAUX DE DISTRIBUTION DE L'ENERGIE ELECTRIQUE	157
RESUME :.....	157
MOTS CLEFS :.....	157
TITLE: OPTIMIZATION OF ARCHITECTURE OF POWER DISTRIBUTION NETWORKS.....	158
ABSTRACT:.....	158
KEYWORDS:.....	158

INTRODUCTION GENERALE

La mise à niveau et l'amélioration du niveau technique des réseaux de distribution d'électricité sont unes des priorités des gestionnaires des réseaux de distribution [1], [2]. Le réseau de distribution doit aujourd'hui être en mesure d'analyser et d'anticiper de nouveaux usages. En effet, celui-ci doit s'adapter à l'essor des énergies renouvelables (éolien, photovoltaïque...), au développement des véhicules électriques et à l'évolution des modes de consommation de l'électricité. Ces évolutions exigent de mettre au point des outils capables d'optimiser en permanence l'équilibre entre l'offre et la demande d'électricité sur le réseau au niveau local. Pour faire face aux mutations du paysage énergétique, il est nécessaire de moderniser le système électrique. Le contexte français et européen, dans lequel se sont développés les réseaux électriques, conduit à privilégier le déploiement des technologies de smart grids plutôt que le remplacement et le renforcement massif des réseaux. L'intégration aux réseaux des nouvelles technologies de l'information et de la communication les rendra communicants et permettra de prendre en compte les actions des acteurs du système électrique, tout en assurant une livraison d'électricité plus efficace, économiquement viable et sûre. Le système électrique sera ainsi piloté de manière plus flexible pour gérer les contraintes telles que l'intermittence des énergies renouvelables et le développement de nouveaux usages tels que les véhicules électriques. Ces contraintes auront également pour effet de faire évoluer le système actuel, où l'équilibre est assuré en temps réel en adaptant la production à la consommation, vers un système où l'ajustement se fera davantage par la demande, faisant ainsi du consommateur un véritable acteur [3].

Dans les années à venir, de grands investissements sont prévus dans la construction des futurs réseaux électriques. Selon le scénario développé en 2008 par l'Agence Internationale de l'Energie (*International Energy Agency*), plus de 1,5 trillion d'euros d'investissement sont prévus sur la période 2007-2030 pour la conversion des systèmes électriques. Un tiers de ce budget est destiné aux réseaux de distribution [4], [5], [6]. L'investissement est un facteur clé dans la construction de réseaux électriques flexibles, cohérents et efficaces, basés sur de nouvelles architectures des réseaux électriques et des solutions techniques innovantes. Elles permettront d'augmenter la sécurité énergétique, de renforcer la réponse à la demande et l'efficacité énergétique, ainsi que l'intégration des différentes sources énergétiques renouvelables en réduisant la demande à la pointe et stabilisant du système d'électricité [7].

Les directives de la Commission européenne UE 2009/29 posent des exigences complexes et contraignantes sur la part d'énergie d'origine renouvelable dans la consommation totale d'énergie finale. Selon ces directives, cette part devrait passer à 20% d'ici 2020 [4], [8], [9]. Intégrer des sources d'énergies renouvelables tout en garantissant un niveau élevé de fiabilité des systèmes électriques dans les années à venir exigera des investissements importants en Europe et au-delà.

En prenant en compte ces besoins industriels sur le développement des réseaux de distribution du futur, nous proposons, dans cette thèse, une approche reposant sur la théorie des graphes et

l'optimisation combinatoire pour la conception de nouvelles architectures pour les réseaux de distribution.

Nous commençons dans le Chapitre I par la description du système électrique des réseaux de distribution. Puis nous présentons les différents types d'architectures existantes utilisées en pratique et, à la fin du premier chapitre, nous donnons notre positionnement sur cette problématique.

Dans le Chapitre II, nous présentons les notions de base de la théorie des graphes et de l'optimisation combinatoire afin de modéliser et de formuler le problème d'optimisation de l'architecture des réseaux de distribution avec les différents objectifs sous les contraintes technologiques et topologiques.

Dans ce travail, nous considérons uniquement les problèmes d'optimisation au sens mathématique : une fonction objectif doit être choisie et il faut trouver son maximum ou minimum, en tenant compte des contraintes du problème. Dans la pratique, très souvent, le problème est multicritère. Quand certains critères sont contradictoires, par exemple : minimiser le coût et maximiser les performances, le problème est mathématiquement mal posé. Dans ce cas on cherche un compromis très sensible aux paramètres du problème.

Notre démarche consiste à étudier le problème général de recherche d'une architecture optimale qui respecte l'ensemble de contraintes topologiques (redondance) et électrotechniques (courant maximal, plan de tension) selon des critères d'optimisation bien précis :

- augmenter l'efficacité énergétique du système de distribution (minimisation du coût d'exploitation / OPEX) ;
- minimiser le coût global de construction du réseau (minimisation de l'investissement / CAPEX).

Pour bien identifier les difficultés, nous recherchons des modèles combinatoires permettant d'apporter une solution au problème et non ceux qui présentent une modélisation fidèle. Cela nous conduit très souvent à déformer la réalité physique. Par exemple, en tenant compte des pertes dues à l'effet Joule, la loi de Kirchhoff nous conduit à des modèles non convexes et pratiquement non traitables. En acceptant le bilan positif aux nœuds (sur-satisfaction de la demande, en remplaçant les équations “ = ” par les inégalités “ \geq ”), on obtient un modèle convexe, plus facile à traiter avec des méthodes classiques.

Malgré les simplifications proposées, certains problèmes restent difficiles et nous obligent à utiliser des méthodes de résolution approchées.

Nous présentons dans le Chapitre III le problème de minimisation des pertes dans le réseau par la recherche des configurations radiales optimales. Nous proposons une formulation permettant d'appliquer des méthodes d'optimisation efficaces et présentons notre amélioration d'une de ces méthodes.

Le Chapitre IV est consacré aux modèles combinatoires et aux méthodes de résolution du problème d'optimisation de l'architecture des réseaux de distribution électrique avec les contraintes topologiques ayant comme objectif la minimisation des pertes. Nous présentons les problèmes combinatoires liés au nôtre afin d'exploiter leur méthodes de résolution efficaces. Dans les cas où les problèmes sont extrêmement difficiles, nous proposons des algorithmes heuristiques guidés par des particularités du problème de l'architecture du réseau. À la fin du chapitre, nous présentons enfin l'application des méthodes étudiées dans cette thèse pour la résolution du problème d'optimisation de l'architecture avec les critères d'optimisation et certaines contraintes technologiques. Nous concluons la thèse par la présentation des résultats comparatifs des tests sur les instances de réseaux (fictifs et réels) pour les méthodes proposées.

CHAPITRE I : ARCHITECTURES DES RESEAUX DE DISTRIBUTION ELECTRIQUE

SOMMAIRE

I.1.	INTRODUCTION	11
I.2.	HIERARCHISATION DU RESEAU ELECTRIQUE EN FRANCE	11
I.3.	STRUCTURE ET TOPOLOGIE DU RESEAU DE DISTRIBUTION	12
I.3.1.	COMPOSITION DE RESEAU DE DISTRIBUTION.....	13
I.3.2.	DIFFERENTES TOPOLOGIES DE RESEAUX DE DISTRIBUTION	13
I.3.2.1.	LES RESEAUX RURAUX.....	13
I.3.2.2.	LES RESEAUX URBAINS	14
I.4.	OBJECTIFS DE LA PLANIFICATION	18
I.4.1.	INDICES DE FIABILITE	19
I.4.2.	CRITERES ELECTRIQUES	20
I.4.3.	CRITERES ECONOMIQUES.....	21
I.5.	ORIGINALITE DE CE PROJET	22
I.5.1.	LES DEMARCHES DE LA RECHERCHE OPERATIONNELLE.....	23
I.5.2.	POSITIONNEMENT DE NOTRE PROBLEMATIQUE	24
I.6.	CONCLUSION	24

I.1. Introduction

Dans ce premier chapitre, nous allons présenter le contexte et les objectifs qui ont été posés dans ce travail. Cette thèse traite de la planification des réseaux de distribution. En premier lieu, nous allons décrire brièvement la hiérarchisation du réseau électrique en France. Nous allons ensuite montrer les différentes approches utilisées en pratique pour la conception des architectures selon des critères et des contraintes posées. À la fin de ce chapitre, le positionnement dans cette problématique est expliqué à la fois du point de vue de la théorie des graphes et de l'optimisation combinatoire.

I.2. Hiérarchisation du réseau électrique en France

Dans la hiérarchie du réseau électrique français, on peut distinguer deux parties principales : les réseaux de transport/répartition et les réseaux de distribution [10]. Le réseau de *transport* et *d'interconnexion* achemine en très haute tension de grandes quantités d'énergie sur de longues distances depuis des centrales de production vers le réseau de *répartition*. Les réseaux régionaux de *répartition* répartissent l'énergie au niveau des régions et alimentent les réseaux de *distribution* ainsi que les clients industriels importants. Les réseaux de distribution desservent les consommateurs finaux en moyenne tension ou en basse tension (clientèle domestique, tertiaire, petite industrie). Cette hiérarchie du réseau est montrée schématiquement sur la **Figure I-1**.

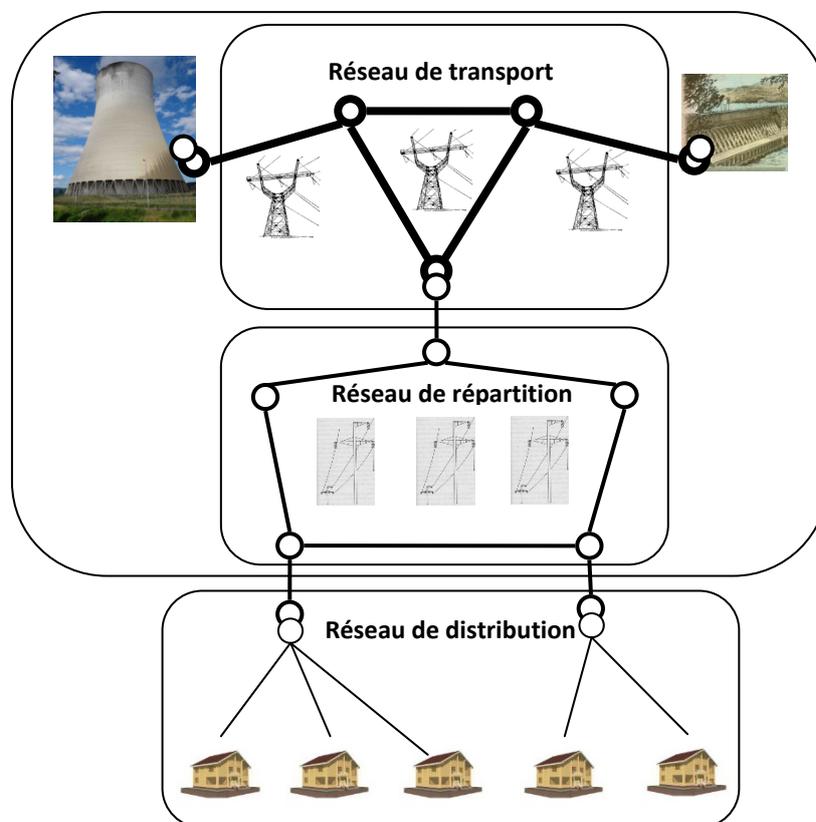


Figure I-1 : Les deux niveaux hiérarchiques des réseaux dans le monde.

Réseau de transport et de répartition

Le réseau public de transport de l'électricité se compose d'un réseau dit *de grand transport et d'interconnexion*, d'une part, et d'un réseau dit *de répartition*, d'autre part. Leurs longueurs cumulées, en France, représentent environ 100 000 kilomètres.

Le réseau de grand transport et d'interconnexion, exploité à 400 000 et 225 000 volts (dits *réseaux HTB* – pour Haute Tension de niveau B lorsque la tension nominale $U_n > 50$ kV), permet de transporter d'importantes quantités d'énergie sur de longues distances. Ses lignes forment ce que l'on pourrait appeler *les autoroutes de l'électricité*. Elles desservent les interconnexions avec les réseaux des pays étrangers, les centrales nucléaires et quelques grandes installations de production hydraulique et thermique, ainsi que les réseaux de répartition.

Le réseau de répartition assure le transport de l'électricité à l'échelle régionale. Il est exploité aux autres niveaux de tension HTB (de l'ordre de 50 000 à 150 000 volts). Ses lignes permettent d'acheminer l'électricité jusqu'aux consommateurs industriels et jusqu'aux réseaux de distribution.

En France, le réseau public de transport de l'électricité est exploité par RTE EDF Transport, filiale d'EDF, détenue à 100% par celui-ci [10].

Réseaux de distribution

Les réseaux publics de distribution de l'électricité acheminent l'énergie électrique jusque chez les particuliers, mais aussi chez les artisans, PME et petites industries. Ils collectent également l'énergie produite par la plupart des fermes éoliennes, les installations de production photovoltaïque et la majorité des installations de cogénération. Ils sont composés usuellement de réseaux exploités à 20 000 et 15 000 volts, dits *réseaux HTA* (pour Haute Tension de niveau A avec $1\text{kV} < U_n < 50\text{kV}$), et de réseaux exploités à 400 volts triphasé et 230 volts monophasé, dits *réseaux BTA* (pour Basse Tension de niveau A avec $500\text{V} < U_n < 50$ V). Leur longueur cumulée représente plus de 1,3 millions de kilomètres [11].

L'interface entre le réseau public de transport et les réseaux publics de distribution est constituée d'environ 2 300 postes de transformation HTB/HTA dits *postes sources*. L'interface entre les réseaux HTA et les réseaux BT est constituée par les postes de transformation dits *postes de distribution*.

Le réseau public de distribution de l'électricité est exploité par ERDF, filiale d'EDF à 100 %, qui en est concessionnaire [11].

I.3. Structure et topologie du réseau de distribution

Dans le cadre du développement [12] des réseaux de distribution depuis le début du XX^{ème} siècle, différentes architectures de réseaux ont été réalisées [13]. Elles diffèrent par leur topologie, leur agencement et leur exploitation. Par topologie d'un réseau électrique il faut

comprendre l'ensemble de ses éléments, ses composants et leurs connexions dans le réseau. Dans la pratique, pour un distributeur, définir une topologie revient à fixer un certain nombre d'éléments physiques en tenant compte de critères liés à des objectifs visés et/ou à des contraintes techniques. Ces éléments étant fortement corrélés entre eux, le choix d'une topologie est toujours le résultat de compromis technico-économiques. La traduction graphique d'une topologie sera ici un schéma de type unifilaire simplifié. Les topologies de base sont la topologie boucle fermée et la topologie radiale. Les réseaux de distribution ont été conçus comme des réseaux bouclables mais exploités avec une configuration radiale. Cela se traduit par l'existence d'un seul chemin électrique, entre tout point du réseau et un point d'alimentation (le poste source). L'architecture du réseau de distribution est définie par l'ensemble des principes (schéma, protection, mode d'exploitation) utilisés pour véhiculer l'énergie électrique en distribution publique. Le choix de l'une ou l'autre de ces architectures dépend de deux facteurs majeurs qui caractérisent les paramètres du réseau. Ce sont les zones géographiques à couvrir (rurale ou urbaine, caractérisées par les densités de charges) et l'investissement pour la construction qui contraignent les développements. Nous allons présenter dans la suite de cette section les structures générales des réseaux de distribution ainsi que les modes de distribution associés [14].

I.3.1. Composition de réseau de distribution

Cette thèse concerne sur les réseaux de distribution. Ces derniers contiennent plusieurs composants comme les postes de transformation mentionnés ci-dessus, ainsi que des conducteurs (lignes aériennes, câbles souterrains), différents organes de coupures et des gradins de condensateurs. Les caractéristiques et les propriétés de ces composants sont détaillées dans [15], [16].

I.3.2. Différentes topologies de réseaux de distribution

I.3.2.1. Les réseaux ruraux

Les réseaux ruraux ont une topologie très faiblement maillée, avec des boucles entre des différents postes source ou les ramifications, mais l'exploitation se réalise via une structure arborescente. Il existe ainsi des organes de manœuvre normalement ouverts, pouvant être manœuvrés pour isoler un défaut éventuel [17]. Une telle structure avec un poste source est illustrée sur la **Figure I-2**.

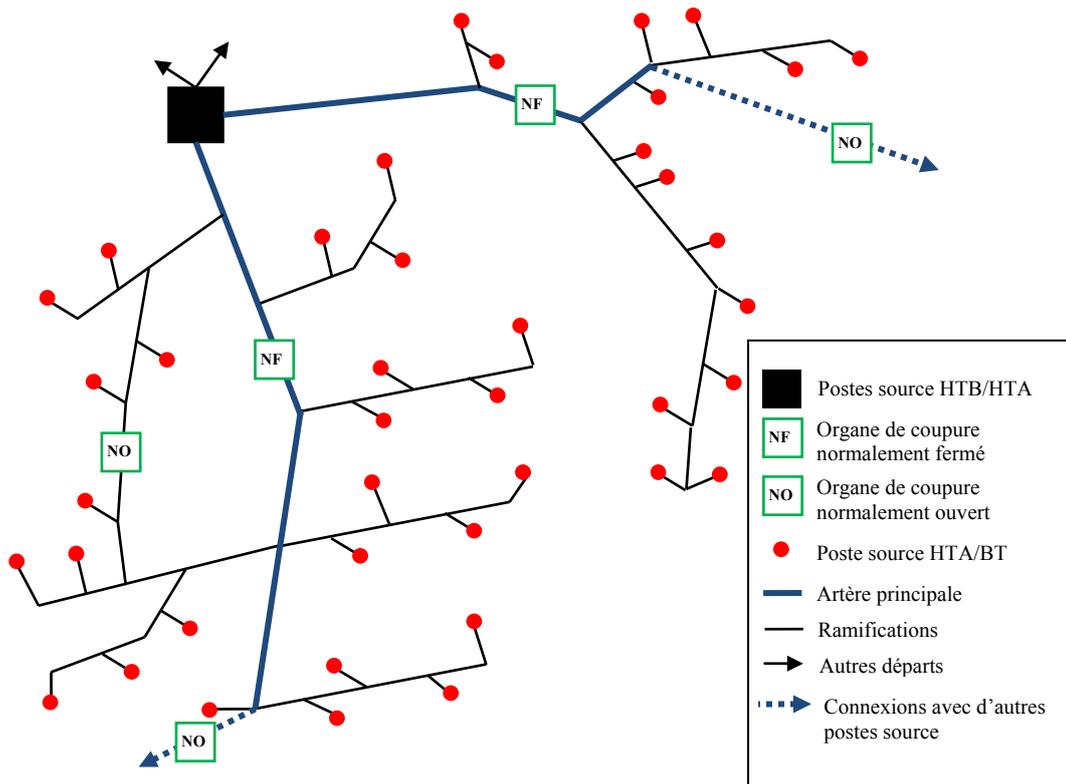


Figure I-2 : Topologie du réseau rural.

I.3.2.2. Les réseaux urbains

Le problème du choix de la structure est essentiel pour les réseaux urbains, car elle détermine les conditions de la qualité d'alimentation de consommateurs. Par rapport à des réseaux ruraux, les réseaux urbains sont caractérisés principalement par une forte densité des charges. Cette caractéristique varie selon les zones, y compris au sein de la même localité. C'est pourquoi les topologies des réseaux urbains sont très variées en fonction des besoins des clients, des aspects historiques et des objectifs posés pendant la conception de réseaux. On peut distinguer les trois groupes de topologies principales : les réseaux en dérivation multiples, les réseaux en coupure d'artère (et des variations), les réseaux fortement bouclés (la maille).

I.3.2.2.1. Réseaux en dérivation multiples

Ce type de réseaux se compose de deux postes source HTB/HTA qui sont connectés par deux (pour la double dérivation), ou plusieurs (dérivations multiples) circuits triphasés placés en parallèle. Les charges (transformateurs HTA/BTA) sont connectées soit à un circuit, soit à un second qui peut être un circuit de secours dédié. L'exploitation du réseau ayant cette structure peut être facilement automatisée. La **Figure I-3** montre un réseau en double dérivation. Pour plus d'exemples de structures en dérivation multiples, on peut se référer à [14].

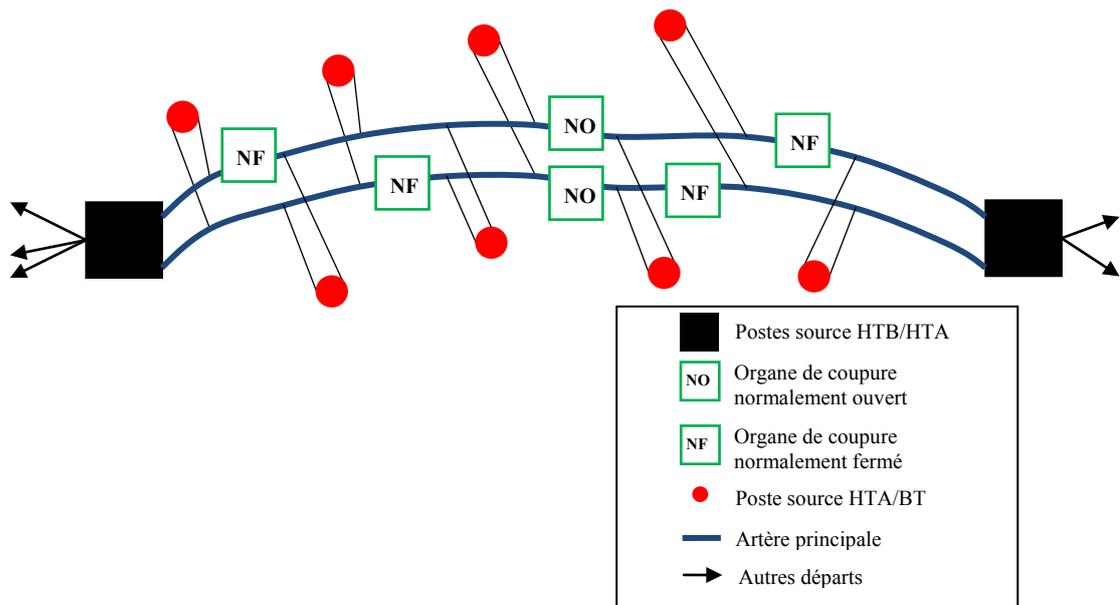


Figure I-3 : Topologie de réseau urbain en double dérivation.

I.3.2.2.2. Réseau en coupure d'artère

Dans les réseaux de ce type, les postes source HTB/HTA sont raccordés deux à deux par des circuits dit artères. Chaque charge (postes HTA/BTA) est connectée directement à une artère qui contient un ou plusieurs organes de coupure ayant l'état normalement ouvert ou fermé afin de réaliser l'exploitation dans une structure radiale. Dans certains cas, la connexion entre les postes HTB/HTA peut être renforcée par un câble de secours. Il existe les variantes de la structure en coupure d'artère appelées *le fuseau* et *l'épi*. La **Figure I-4** présente les trois structures en coupure d'artère.

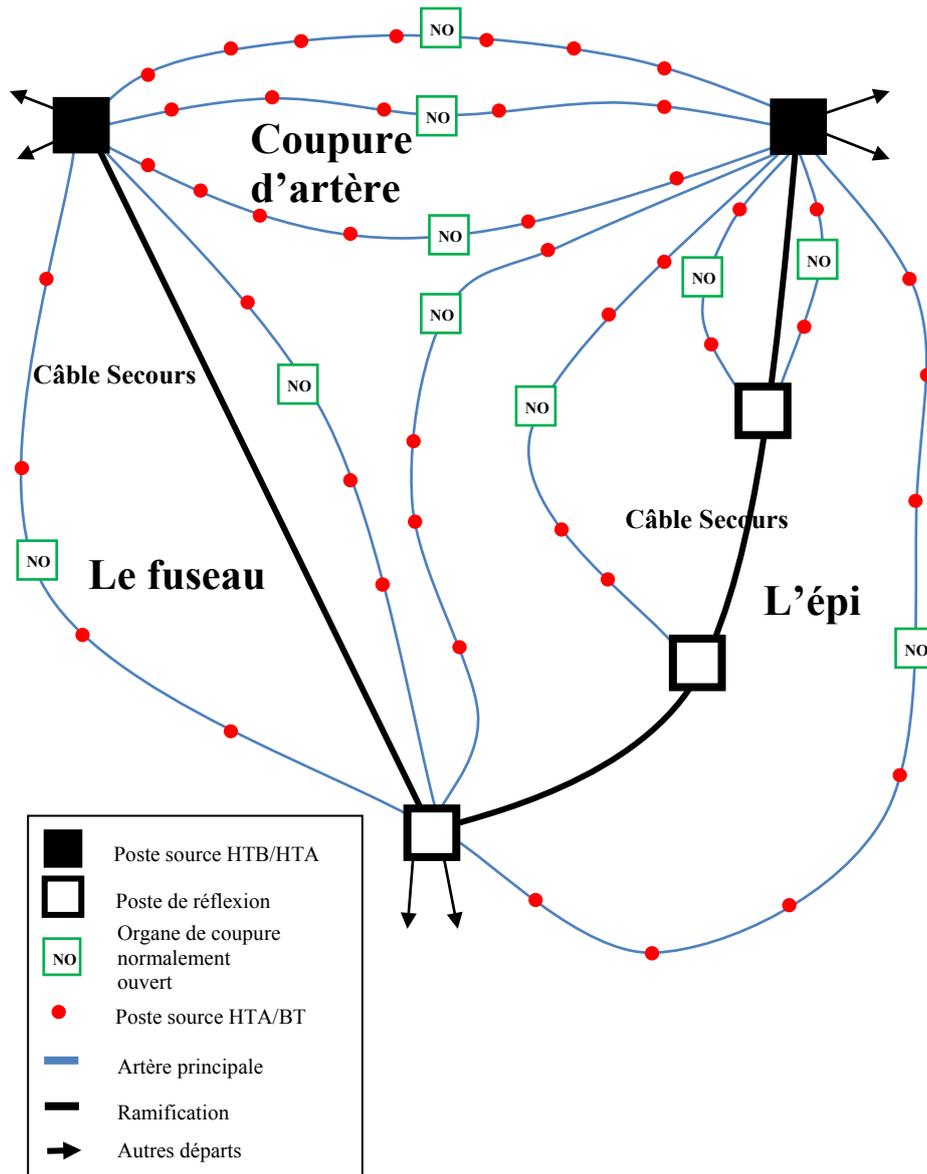


Figure I-4 : Les trois variations de la topologie en coupure d'artère.

Dans la structure en fuseau (sur la gauche de la **Figure I-4**), tous les câbles issus d'un même poste convergent vers un même point appelé point de réflexion [18]. Ce point peut être considéré comme un lieu privilégié pour la création, dans le futur, d'un nouveau poste source HTB/HTA. Le point de réflexion peut être aussi connecté par un câble secours (comme illustré sur la figure) avec le poste HTB/HTA. L'exploitation de cette structure simple est facile.

La structure en épi montrée sur la partie droite de la **Figure I-4** se caractérise par la présence de plusieurs postes de réflexion connectés successivement par le câble de secours et ensuite par les câbles de travail avec le poste source HTB/HTA. Cette architecture permet de développer le réseau autour d'un même poste de façon plus économique et plus souple que dans le fuseau. De plus elle tient compte de la répartition réelle des charges ce qui minimise, au final, la longueur totale des lignes par rapport à la structure en fuseau.

Une variante de l'architecture en coupure d'artères est la structure maillée ou la grille. Elle diffère par la présence d'un grand nombre des boucles formées par des conducteurs reliant les postes source HTB/HTA entre eux, les charges et les connexions intermédiaires. L'exploitation de cette structure se réalise en radial grâce au placement de plusieurs organes de manœuvre normalement ouverts dans le réseau. L'existence de nombreuses connexions entre des lignes dans le réseau apporte une grande sécurité d'alimentation, mais rend le coût de construction de ce type d'architecture très élevé. La structure maillée est montrée sur la **Figure I-5**.

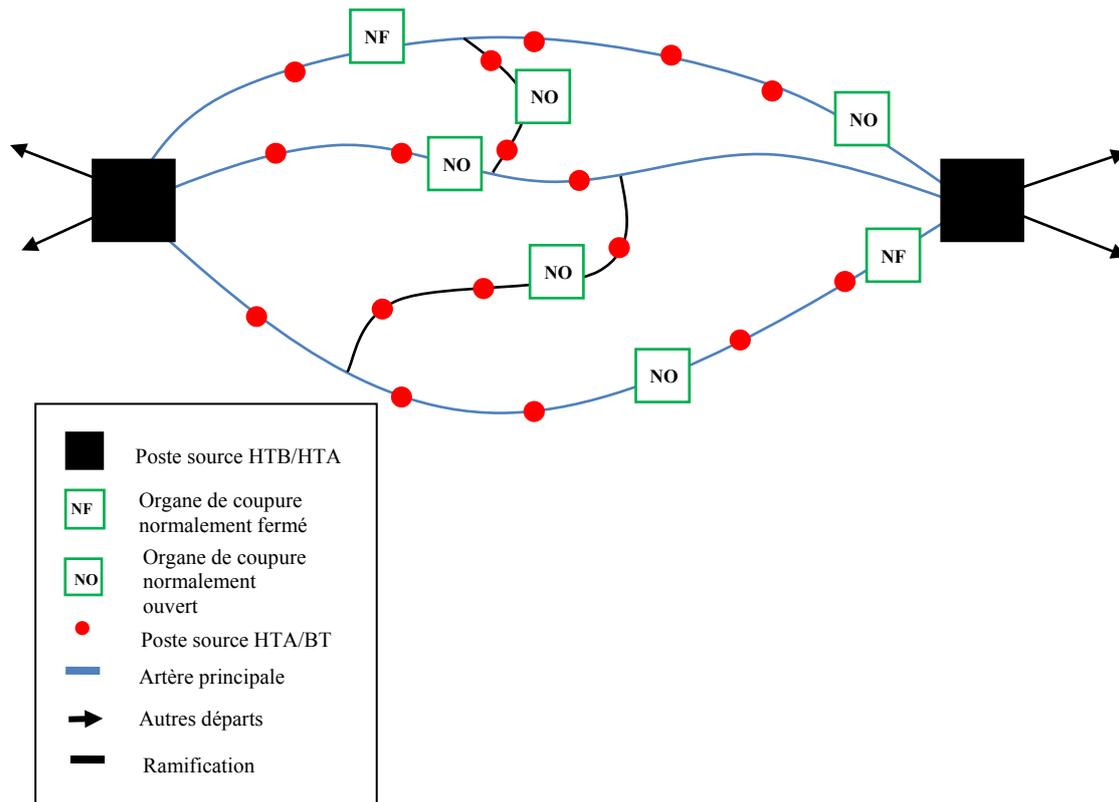


Figure I-5 : La topologie du réseau maillé (grille).

I.3.2.2.3. Réseaux bouclés

Nous montrons ici deux types d'architecture fortement bouclée : la maille et les boucles (ou pétales de marguerite). Dans ces réseaux, chaque ligne qui forme une boucle doit être alimentée à partir d'un même poste source HTB/HTA (ou à partir des postes têtes de boucle). Les postes têtes de pétales sont eux connectés aux sources HTB/HTA par des conducteurs de section importante appelés câbles de structure. La **Figure I-6** représente ces structures.

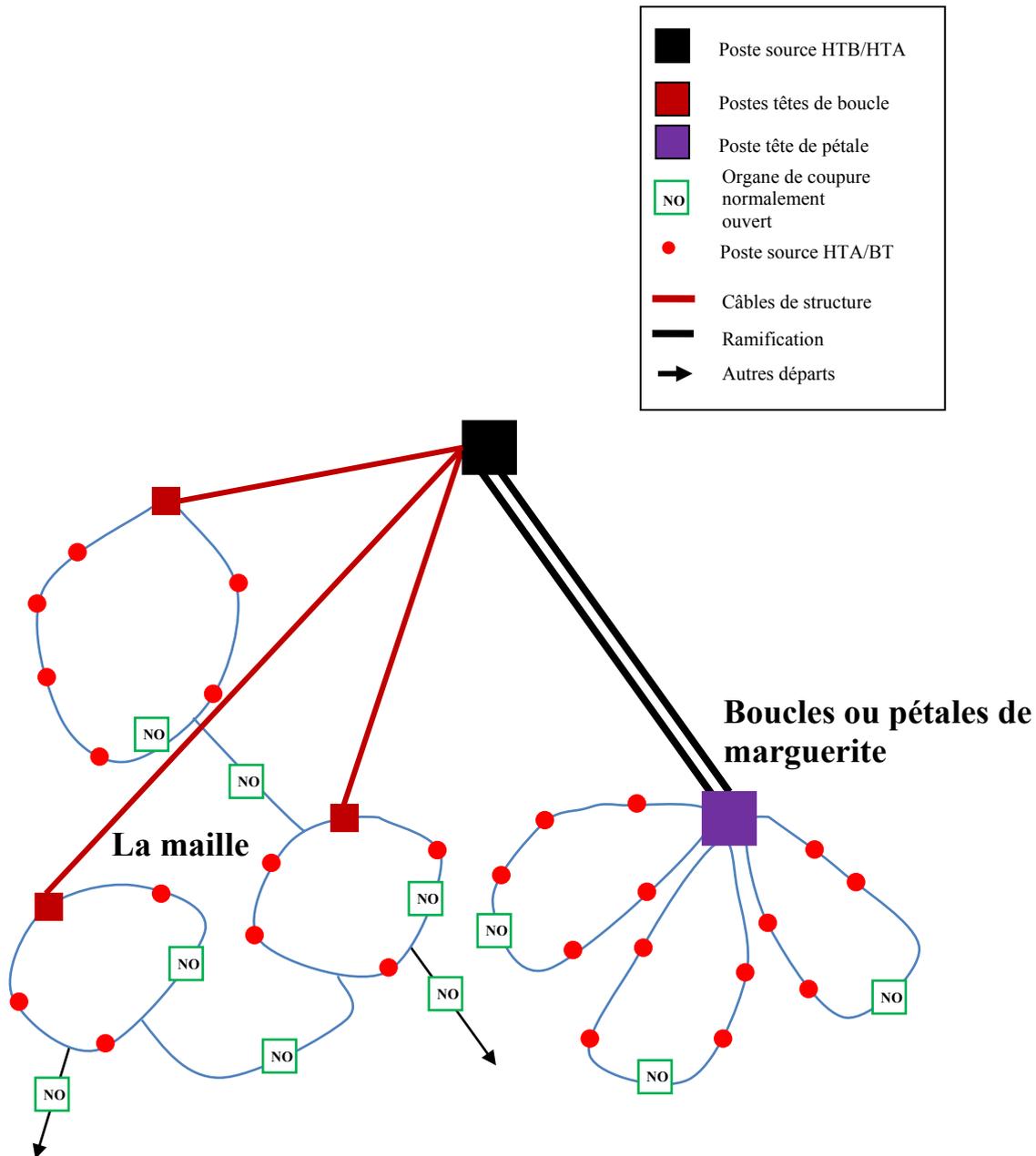


Figure I-6 : Exemple d'un réseau contenant les structures bouclées : la maille et les boucles (ou pétales de marguerite).

Dans la structure *maille* il existe les connexions entre des boucles afin d'avoir des secours mutuels. La structure pétales de marguerite est moins flexible au niveau de la possibilité de reporter la charge d'une boucle à l'autre en cas de défaut d'un câble de structure car toutes les boucles sont alimentées uniquement via un poste (appelé poste tête de pétales) connecté au poste source HTB/HTA.

I.4. Objectifs de la planification

Le problème de la planification des réseaux de distribution électrique consiste à développer le réseau à moindre coût afin d'assurer l'alimentation des consommateurs tout en respec-

tant des exigences – sur la fiabilité et la qualité de l'électricité fournie. Nous définissons ici l'ensemble des objectifs de la planification pris en compte pour la conception de l'architecture de réseau de distribution. On commence par la description des critères de fiabilité exprimés sous forme d'indices, ensuite on présente les critères électrotechniques et on clôt cette section par la présentation des critères économiques.

I.4.1. Indices de fiabilité

Le **SAIFI** (en anglais : *System Average Interruption Frequency Index*) traduit la fréquence des défauts (coupures) dans le système par année et par client. Il peut être calculé de manière élémentaire pour un tronçon (partie du réseau) i borné par deux organes de coupures grâce à l'équation (I-1).

$$SAIFI_i = \frac{(\text{Nbr clients coupés})_i \times (\text{Nbr coupures})_i}{(\text{Nbr total de clients})_i} \quad (\text{I-1})$$

Dans l'équation (I-1) nous utilisons les notations "Nbr client coupés" qui est le nombre de clients coupés par année sur ce tronçon, "Nbr coupures" qui est le nombre de coupures totales par an et "Nbr total de clients" qui est le nombre total de clients toujours sur le tronçon considéré.

Dans ce cas, si certains consommateurs ont été coupés plus d'une fois, chaque coupure est considéré comme indépendante. Ainsi donc, **SAIFI** indique combien de fois par an il y a eu des coupures dans l'alimentation d'un consommateur moyen.

L'indice **SAIDI** (en anglais : *System Average Interruption Duration Index*) donne la durée moyenne d'interruption de l'approvisionnement d'un consommateur final dans un tronçon d'approvisionnement du gestionnaire de réseau pendant la période considérée [19]. Il se calcule par la formule (I-2).

$$SAIDI_i = \frac{(\text{Durée de la coupure du tronçon})_i \times (\text{Nbr clients coupés})_i \times (\text{Nbr coupures})_i}{(\text{Nbr total de clients})_i} \quad (\text{I-2})$$

L'indice **END** représente l'Energie Non Distribuée pendant la durée des coupures par an pour l'ensemble des clients du tronçon i . Cet indice est exprimé par la formule (I-3).

$$END_i = \frac{(\text{Puissance coupée})_i \times (\text{Durée de la coupure du tronçon})_i \times (\text{Nbr coupures})_i}{(\text{Nbr total de clients})_i} \quad (\text{I-3})$$

Afin de calculer l'indice de fiabilité totale d'un réseau pour l'un de ces trois indices mentionnés ci-dessus il faut prendre la somme pour tous les tronçons i .

Il est évident que plus les valeurs de **SAIFI**, **SAIDI** et **END** sont faibles, plus le niveau de sécurité d'approvisionnement des clients est élevé. Ces critères d'évaluation de la fiabilité du réseau peuvent varier en fonction de l'utilisation de composants du réseau comme les organes

de coupure, de leur emplacement, de la topologie, de la longueur des lignes et du mode d'exploitation du réseau.

Cependant, ces indicateurs ne sont pas seulement un critère pour évaluer le niveau requis de la fiabilité de fonctionnement du réseau. On peut aussi définir l'indice qui combine la quantité de puissance desservie et la longueur totale de la zone d'alimentation des clients. Autrement dit, chaque zone du réseau possède une certaine longueur L et une certaine demande des consommateurs en puissance P . Afin d'avoir une équité de traitement et de limiter de voir ainsi pénaliser des grosses quantités de clients par un nombre élevé de défauts (statistiquement proportionnel à la longueur des lignes) les valeurs du produit $P \times L$ (puissance \times longueur) de chaque zone ne doivent pas être très différentes.

I.4.2. Critères électriques

En plus des critères de fiabilité présentés précédemment, les contraintes électrotechniques de qualité de fourniture (*e.g.* les courants maximaux ou le plan de tension, présentés dans les sections suivantes) doivent être respectées.

Courant maximal admissible dans un conducteur

On appelle courant admissible le courant maximal que peut supporter un conducteur en régime permanent. Il dépend de la section du conducteur et de la température maximale de l'isolant en fonction des conditions extérieures [20]. La résistance du câble dépend de la surface de la section du câble. Plus la surface de la section du câble est grande, plus sa résistance est faible et donc la capacité de transport de courant, pour les mêmes pertes Joule, est plus élevée. De même, plus la température admissible (ou la hausse de température autorisée sur une température ambiante fixée) est élevée, plus la capacité de transport de courant sera élevée pour la même section.

Les tableaux de la référence [21] fournissent l'information sur le courant admissible des conducteurs de différentes tailles standardisées pour une certaine hausse de température autorisée sur la température ambiante. A partir de ces tableaux, la section d'un conducteur peut être trouvée pour le courant maximal prévu dans le conducteur, à hausse de température admissible connue.

Le choix des câbles d'une architecture de réseau doit donc respecter *a minima* la contrainte de courant admissible pour une durée de vie de l'ouvrage¹ avec des hypothèses d'évolution de la charge.

¹ Nous avons choisi pour le cas d'étude la période de 30ans.

Pertes

La nature des pertes électriques que l'on appelle effet Joule est liée au dégagement de chaleur provoqué par le passage d'un courant électrique dans un conducteur lui opposant une résistance. Pour un conducteur de résistance linéique R (Ω/km), de longueur L (km), parcouru par un courant I et pour une période du temps Δt , les pertes de puissance et les pertes d'énergie s'expriment par les formules (I-4)-(I-5).

$$\text{Pertes}_{\text{puissance}} = RI^2 \text{ (W)} \quad (\text{I-4})$$

$$\text{Pertes}_{\text{énergie}} = RI^2 \Delta t \text{ (W.h)} \quad (\text{I-5})$$

Un des objectifs de planification pris en compte dans ce travail, est la minimisation des pertes totale de puissance dans les conducteurs du réseau.

Profil de tension

La différence de tension entre deux points dans un circuit est désignée par la chute de tension. Soit Z_{ab} l'impédance complexe du conducteur entre les nœuds a et b et I_{ab} le courant complexe circulant de a à b . Selon la loi d'Ohm généralisée ΔV_{ab} s'exprime par l'équation (I-6).

$$\Delta V_{ab} = Z_{ab} I_{ab} \quad (\text{I-6})$$

Cette chute de tension est proportionnelle au courant circulant à travers le conducteur multipliée par son impédance. Dans le cas d'un réseau avec des charges classiques, sans production décentralisée et peu de câbles, la tension relevée aux nœuds consommateurs est plus faible que la tension relevée au niveau du poste source. Une des contraintes sur le fonctionnement du réseau est le profil de tension. Les lois imposent que la tension sur le réseau de distribution moyenne tension reste dans les limites de $\pm 5\%$ de la tension nominale.

I.4.3. Critères économiques

Durant les phases de conception et le développement des réseaux de distribution électrique, outre des critères de fiabilité de l'architecture et des indicateurs purement électrotechniques, différents critères économiques jouent des rôles majeurs : en particulier les coûts d'investissement (CAPEX) et d'exploitation (OPEX). Ces coûts comprennent l'investissement en capital (fond initial qui est nécessaire pour la construction de nouvelles installations), ainsi que les coûts instantanés pour l'exploitation, la maintenance et la réparation. Ces coûts prennent également en compte la valeur des pertes liées aux transits des courants dans le réseau.

Dans ce travail, nous définissons une fonction économique à optimiser, actualisée sur N années qui prend en compte les deux coûts principaux : le coût d'investissement initial et le coût des pertes dans le réseau.

Le coût actualisé d'une fonction de coûts $F(x)$ pour une valeur de coût x peut être défini par l'équation (I-7).

$$F_{act}(x) = \sum_{n=0}^N \frac{F(x)}{(1+\tau)^n} \quad (I-7)$$

où τ est une valeur du taux d'actualisation fixé qui traduit le fait que la valeur $F(x)$ aujourd'hui va avoir la valeur donnée par (I-7) dans N années.

La fonction économique de coût de construction du réseau actualisée sur N années prend la forme (I-8) [14] :

$$C_{total_act} = I(L, OM) + \sum_{n=0}^N \frac{C \times P(n)}{(1+\tau)^n}$$

où

$$\left[\begin{array}{l} C_{total_act} - \text{coûts actualisés en k€} \\ L - \text{longueur totale des lignes dans le réseau} \\ OM - \text{organe de manoeuvre} \\ I - \text{investissement à l'année 0 en k€} \\ C - \text{coût d'un kW de pertes à la pointe en k€} \\ P(n) - \text{pertes à la pointe à l'année } n \text{ en kW} \\ \tau - \text{taux d'actualisation en \%} \end{array} \right. \quad (I-8)$$

Pour la charge totale $s(0)$ à la pointe à l'année 0, l'expression des pertes à la pointe dans le réseau ayant la charge totale $s(n) = s(0)(1+t)^n$ actualisée à l'année n est donnée par la formule suivante :

$P(n) = \sum_{e \in E} r_e I_e^2(n)$, où E est l'ensemble de lignes du réseau et $I_e(n)$ est le courant circulant dans la ligne e .

Un exemple du calcul des coûts sur les données économiques pour les différents types de câbles est présenté dans [14].

I.5. Originalité de ce projet

L'originalité de ce projet réside dans la problématique de planification long terme elle-même, couplée aux compétences mathématiques nécessaires pour le traiter. Ceci a exigé de réaliser des parties de recherche fondamentale en combinatoire tout en intégrant des connaissances

métiers sur les réseaux électriques, pour trouver conjointement les meilleures topologies et les modes d'exploitation les mieux adaptés aux futurs réseaux de distribution, intelligents et flexibles.

I.5.1. Les démarches de la Recherche Opérationnelle

Dans le cadre du travail de cette thèse, nous avons appliqué des démarches de Recherche Opérationnelle (RO) qui sont un peu différentes des démarches habituelles d'un ingénieur. En général, un problème d'ingénierie consiste à la recherche du meilleur paramétrage d'un système, soumis aux règles de fonctionnement, par rapport aux critères souhaités. Ce sont les théories des disciplines concernées qui permettent la modélisation (pas toujours de la façon optimale) du problème. La résolution numérique de ces modèles est une phase complètement distincte de la modélisation et est confiée aux mathématiques appliquées. Dans la recherche d'une solution, le plus souvent, on se lance dans l'évaluation, en comparant les différentes décisions et stratégies.

En RO, la modélisation et la solution sont étroitement liées. La modélisation retenue peut être inspirée par les méthodes de résolution envisagées qui elles-mêmes pourront servir à interpréter la réalité. Un algorithme spécialement dédié permet d'obtenir la solution optimale (ou son approximation) en évitant une série de simulations. Pour faciliter la résolution, il faut prendre en compte les particularités du problème. Le choix des variables (dites de décision) est très important dans la phase de modélisation car elles doivent permettre d'exprimer l'objectif et les contraintes sous une forme facile à traiter pendant la résolution. D'autre part, elles doivent représenter une réalité physique pour que la solution mathématique puisse être appliquée dans la pratique.

Parfois un problème est difficile à résoudre en raison de sa taille – les variables et les contraintes sont trop nombreuses. Dans ce cas-là on essaye de le décomposer en une série de problèmes simples ou de se limiter, initialement, à une relaxation – certaines contraintes, faciles à traiter *a posteriori*, pouvant être ignorées.

Une fois le problème modélisé, en RO nous allons pouvoir appliquer le traitement formel, *en se libérant de l'influence de la théorie qui entoure le problème et peut parfois l'occulter*. Avant d'adapter un traitement, il faut faire l'analyse de la complexité du modèle choisi. Si le problème est "facile" (voir Chapitre II.) alors il existe un algorithme "efficace" pour trouver la solution optimale. Quand les méthodes de résolution connues actuellement ont une complexité au moins exponentielle, alors il faut plutôt essayer de démontrer sa "NP-difficulté" (Chapitre II) avant de rechercher une nouvelle méthode efficace. Si le problème est effectivement NP-difficile, nous sommes autorisés à utiliser les algorithmes approximatifs qui conduisent à une solution approchée que l'on espère proche de la solution optimale. Dans tous les cas (une solution optimale ou approchée), il faudra faire ensuite une analyse détaillée pour vérifier si cette solution correspond à nos attentes et, dans le cas contraire, affiner le modèle. En optimisation combinatoire de nombreux modèles ont été développés avec des algorithmes de résolutions associés mais, dans la pratique, le problème est de choisir le modèle dont la solution est réalisable.

I.5.2. Positionnement de notre problématique

Dans ce travail, nous avons réalisé une recherche en optimisation combinatoire en faisant appel aux théories mathématiques les plus récentes [22], [23] et en intégrant des connaissances métier, pour trouver conjointement les meilleures topologies des futurs réseaux de distribution, intelligents et flexibles. Nous avons étudié le problème du point de vue “Recherche Opérationnelle”, avec une réalisation de l’implémentation informatique des algorithmes permettant de générer automatiquement une structure de réseaux dont le coût d’exploitation est minimum respectant les contraintes électrotechniques (plan de tension, courants maximaux en régime permanent dans les éléments du réseau, entre autres) et les contraintes de continuité de fourniture (reprise rapide en cas de défaut).

En analysant le coût économique (I-8) présenté dans la section précédente, nous pouvons définir deux composants majeurs qui jouent un rôle important dans la minimisation de cette fonction : la longueur totale des lignes et les pertes dans le réseau. En partant de cette observation nous avons d’abord défini et étudié (séparément) les deux problèmes de base : recherche de l’architecture du réseau qui minimise la longueur totale des lignes et recherche des structures radiales qui minimisent les pertes par effet Joule dans un réseau existant. Ainsi donc, les deux familles des problèmes combinatoires (et leurs relaxations) ont été explorées pour proposer des résolutions efficaces (exactes ou approchées) du problème de planification des réseaux de distribution en utilisant une formulation adaptée. Nous nous intéressons particulièrement aux graphes *2-connexes* et au problème de *flot arborescent avec pertes quadratiques minimales*.

I.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini l’objet d’étude de ce travail – la planification des réseaux de distribution. Nous avons commencé par la hiérarchisation du réseau électrique en France et nous avons illustré les différents types d’architectures utilisées en pratique, qui diffèrent par leurs topologies, leurs modes de conduite et leurs stratégies d’exploitations. Les topologies de base sont la topologie boucle fermée (ou coupure d’artère) et la topologie radiale. Dans tous les cas, en France, les réseaux de distribution maillés sont exploités en radial. Nous avons présenté les architectures générales des réseaux de distribution comme les réseaux ruraux, les réseaux en dérivation multiples, les réseaux “en coupure d’artères”, réseaux bouclés et leurs variantes. Pour la planification des réseaux de distribution nous avons formulé l’ensemble des critères d’optimisation : les critères économiques et les critères électriques, ainsi que les indices de fiabilité utilisées dans la pratique (SAIDI, SAIFI, END). Nous avons aussi formulé la fonction économique liée aux coûts : l’investissement dépendant de la longueur totale du réseau (lignes, câbles, tranchée) et les coûts d’exploitation dépendants des pertes techniques dans le réseau. Les critères électriques qui doivent être respectés sont les contraintes électrotechniques, telles que les courants maximaux et plans de tension. A la fin de ce chapitre nous avons introduit les démarches de la Recherche Opérationnelle qui seront utilisées lors des étapes de modélisation et de résolution des problèmes combinatoires correspondant aux différents objectifs du problème d’optimisation de l’architecture du réseau de

distribution électrique. Le plan du travail réalisé dans cette thèse consiste à définir et étudier les deux problèmes de base : recherche de l'architecture du réseau qui minimise la longueur totale des lignes et recherche des structures radiales qui minimisent les pertes Joule dans un réseau existant. Nous explorons ces deux problèmes dans le Chapitre II.

CHAPITRE II : PROBLEME D'OPTIMISATION DE L'ARCHITECTURE DES RESEAUX DE DISTRIBUTION ELEC- TRIQUE

SOMMAIRE

II.1.	INTRODUCTION	27
II.2.	NOTIONS ET DEFINITIONS DE LA THEORIE DES GRAPHS ET OPTIMISATION	
	COMBINATOIRE	27
	II.2.1. GENERALITES	27
	II.2.2. PROBLEME D'OPTIMISATION.....	32
	II.2.3. DEFINITIONS DE LA THEORIE DE LA COMPLEXITE.....	35
II.3.	LES APPROCHES PROPOSEES DANS LA LITTERATURE	37
II.4.	MODELISATION DU PROBLEME D'OPTIMISATION DE L'ARCHITECTURE DE RESEAU	39
	II.4.1. REPRESENTATION DU RESEAU ELECTRIQUE SOUS FORME D'UN GRAPHE PLANAIRE	39
	II.4.2. CONTRAINTES TECHNOLOGIQUES LIEES AU PROBLEME	40
	II.4.3. FONCTION OBJECTIF	41
II.5.	LES APPROCHES PROPOSEES ET LES PROBLEMES COMBINATOIRES ASSOCIES	42
	II.5.1. MINIMISATION DE LA LONGUEUR	42
	II.5.2. MINIMISATION DES PERTES	45
	II.5.3. L'UNION DES ARBORESCENCES DE COUT MINIMUM	46
II.6.	CONCLUSION	47

II.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter les notions clés de la théorie des graphes et de l'optimisation combinatoire afin de les utiliser dans la modélisation et la résolution du problème de la planification du réseau. Nous allons présenter également la notion de la complexité des problèmes d'optimisation, ainsi que les différentes méthodes de résolution comme la programmation linéaire et quadratique. Ensuite nous allons proposer un modèle général pour le problème d'optimisation de l'architecture des réseaux de distribution avec les critères et contraintes principales. Puis nous allons discuter des avancées qui ont été faites dans la littérature sur cette problématique. À la fin de ce chapitre, nous allons proposer nos pistes de recherche sur le problème général qui consiste à reformuler certaines relaxations mono-objectif comme minimisation de la longueur totale des lignes, minimisation des pertes et équilibrage des produits $P \times L$ sous certaines contraintes topologiques et électrotechniques. Nous allons mentionner dans la suite les problèmes d'optimisation combinatoire qui correspondent à ces formulations afin d'utiliser dans les prochains chapitres les méthodes de résolution efficaces existantes ou développées dans cette thèse.

II.2. Notions et définitions de la théorie des graphes et optimisation combinatoire

Dans cette section, nous présentons les définitions clés de la théorie des graphes qui est un outil de la modélisation des architectures de réseau que l'on utilise dans cette thèse. Pour le développement dans les chapitres suivants des modèles d'optimisation et présentation des méthodes de leur résolution, nous abordons les notions de la théorie de la complexité et d'optimisation [24], [25], [26].

II.2.1. Généralités

Graphes

Nous allons commencer par un des outils clé de la représentation des réseaux électriques – les graphes [27]. Un **graphe** G est un couple (X, E) où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un ensemble fini non vide d'éléments appelés **sommets** de G (parfois *nœuds* ou *points*) et $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ est une famille de paires (non ordonnées) d'éléments de X , appelés **arêtes** de G . Pour une arête $e = \{x, y\}$, x et y sont ses **extrémités**. Si l'arête $\{x, y\}$ existe, on dit que les **sommets** x et y sont **adjacents**. Un sommet $x \in X$ et une arête $e \in E$ sont **incidents** si x est une extrémité de e . Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées, à savoir qu'il est possible de distinguer l'extrémité initiale d'une arête de son extrémité finale. Dans ce cas, on parlera d'*arc* plutôt que d'arête. Le nombre d'arcs quittant (entrant) un sommet x s'appelle **degré sortant** $d^+(x)$ (**entrant** $d^-(x)$). Pour les graphes non-orientés le **degré** $d(x)$ d'un sommet x est le nombre d'arêtes incidentes à x .

Pour la modélisation des réseaux électriques, nous allons travailler généralement avec des graphes planaires. On dit qu'un **graphe** est **planaire** s'il est possible de le représenter sur un plan de

sorte que les sommets soient des points distincts, les arêtes des courbes simples, et que deux arêtes ne se rencontrent pas dehors de leurs extrémités. Quand il est impossible d'ajouter au graphe une arête sans violer la propriété de planarité, c'est un **graphe maximal**.

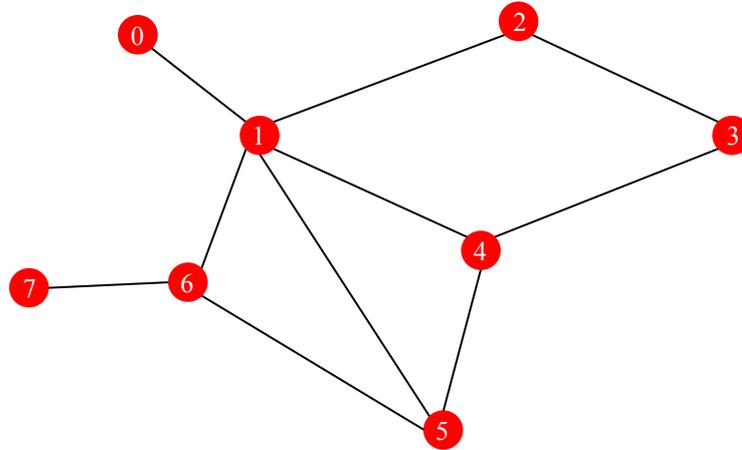


Figure II-1 : Un graphe planaire avec l'ensemble de sommet $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et l'ensemble d'arêtes $E = \{(0, 1), (1, 6), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (6, 7), (4, 3), (2, 3), (6, 5), (4, 5)\}$.

Soit $G = (X, E)$ un graphe. Le graphe $G' = (X, E')$ est un **graphe partiel** de G , si E' est inclus dans E . Autrement dit, on obtient G' en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G . On dit que le graphe $H = (Y, F)$ est un **sous-graphe** du graphe $G = (X, E)$ **induit par** Y lorsque $Y \subseteq X$ et F est formé de la totalité des arêtes de E ayant leurs deux extrémités dans Y .

Chaînes et chemins

Une **chaîne** est une séquence alternée de sommets et d'arêtes $\Gamma = (x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, x_{k-1}, e_k, x_k)$ telle que, pour tout i , les extrémités de e_i sont x_{i-1} et x_i . Une chaîne est simple si chaque arête apparaît au plus une fois. Une chaîne est élémentaire si chaque sommet y apparaît au plus une fois. Un **chemin** est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\Gamma = (x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, x_{k-1}, e_k, x_k)$ telle que, pour tout i , e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale. Un(e) chemin (chaîne) est fermé(e) si $x_0 = x_k$. Deux chemins entre des sommets x_0 et x_k sont appelés arc-disjoint s'ils n'ont pas d'arcs en commun et sommets-disjoints s'ils n'ont pas de sommet commun en dehors de x_0 et x_k .

On obtient un graphe orienté $G = (X, A)$ lorsque, pour toute arête $e \in E$ d'un graphe non orienté $G = (X, E)$ ses extrémités sont ordonnées. Chaque arête se transforme en un **arc** qui est un couple de sommets (initial et terminal). Si $a = (x, y)$ est un arc, on dit que " y est un **successeur** de x " et " x est un **prédécesseur** de y ". On dénote par $d^+(x)$ (resp. $d^-(x)$) le nombre total d'arcs sortant du sommet x (resp. entrant dans x).

Cycles et circuits

Un **cycle** (*circuit*) est un(e) chemin (chaîne) fermé(e) dans laquelle aucun sommet et aucune arête (arc) ne se répètent, sauf le premier sommet : $x_0 = x_k$, $x_i \neq x_j$ et $e_i \neq e_j$ pour $1 \leq i < j \leq k$. En termes de réseaux électriques, un **cycle** est appelé une *boucle*. Un **cycle eulérien** est un cycle passant une et une seule fois par chaque arête du graphe. Un graphe est dit Eulérien s'il admet un cycle eulérien. Dans le graphe présenté sur la **Figure II-1**, la séquence $\{0, (0, 1), 1, (1, 5), 5, (5, 6), 6, (6, 7), 7\}$ forme une chaîne de longueur 4. L'exemple d'un cycle dans ce graphe sera la séquence $\{1, (1, 4), 4, (4, 3), 3, (3, 2), 2, (2, 1)\}$. Par contre le graphe présenté n'est pas un graphe eulérien.

Graphe connexe

Une **composante connexe** est un ensemble maximal de sommets C tel que, pour tout u, v dans C , il existe un chemin de u à v dans G . Un graphe est **connexe** s'il n'a qu'une seule *composante connexe*. Pour mesurer la "force" de la connexité d'un graphe non orienté, on s'intéresse au nombre de sommets (d'arêtes) dont la suppression est nécessaire pour que le graphe ne soit plus connexe. On appelle *sommet-connexité* (parfois *connectivité*) le nombre minimum de sommets dont l'élimination disconnecte G ou le réduit à un sommet unique. On note la connectivité $\kappa(G)$. Ainsi un graphe *connexe* G sera dit **k -sommet-connexe** ($k > 0$), si $\kappa(G) \geq k$. Un graphe *connexe* G sera dit **k -arête-connexe** s'il ne peut être disconnecté par l'élimination de moins de k arêtes. Un graphe k -sommet-connexe est k -arête-connexe. La **Figure II-2** représente un graphe contenant deux composantes connexes. Le sous-graphe engendré par des ensembles de sommets $\{1, 2, 3, 4\}$ est 2-sommet-connexe et par $\{5, 6, 7, 8\}$ est 1-sommet-connexe respectivement.

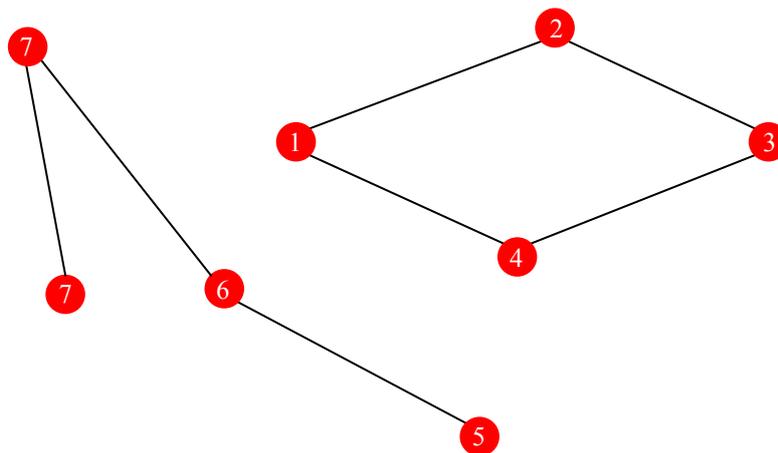


Figure II-2 : Un graphe non connexe, contenant deux composants connexes.

La notion de la connexité (connectivité) de graphes arête (sommet) connexe sera utile dans la suite pour la modélisation du problème d'architecture des réseaux électriques. Les contraintes topologiques de la redondance du réseau seront formulées en termes de 2-connexité.

Arbres et arborescences

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Un graphe sans cycle (pas nécessairement connexe) est une *forêt*. La définition d'une forêt correspond donc bien au sens usuel d'un ensemble d'arbres, chacune de ses composantes connexes étant un arbre. Une *arborescence avec la racine r* (*r -arborescence*) est un arbre où l'on a choisi un sommet particulier r , et orienté de telle façon que pour tous les sommets x il existe un chemin unique de r à x . Une *feuille* est un sommet x de degré sortant $d^+(x) = 0$.

Il est facile de voir la correspondance de ces notions avec les structures de réseaux électriques. Une structure radiale du réseau peut être vue comme un arbre et la distribution du courant depuis un poste source vers les consommateurs comme une arborescence ayant la racine le sommet qui représente le poste source. La **Figure II-3** montre cette correspondance. Les sommets rouges représentent des nœuds avec charge, le sommet noir – le poste source, les arêtes – des lignes électriques et les flèches – les directions de la distribution du courant dans le réseau.

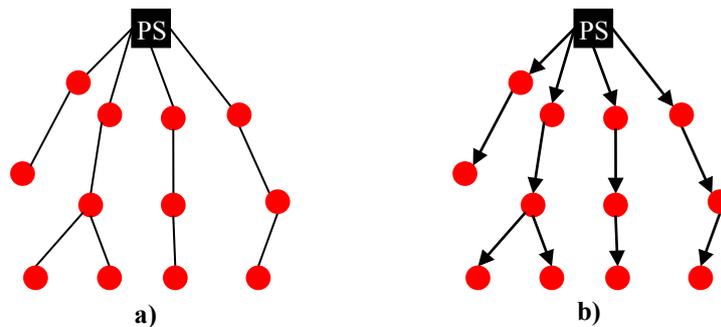


Figure II-3 : Structure radiale du réseau correspondant à un arbre a) ; la distribution du courant se réalise dans une structure arborescente avec la racine dans le sommet PS b).

Pour un graphe $G=(X, E)$ connexe, on introduit la notion d'*arbre couvrant* - c'est un graphe partiel $H=(X, T)$ qui est un arbre.

Au-delà des graphes topologiques, nous avons besoin des *graphes pondérés* (orientés ou non) en supposant qu'une fonction qui associe des valeurs réelles aux arêtes (arcs) de E est donnée. Ces valeurs peuvent représenter la longueur, la résistance, la puissance ou toute autre grandeur.

Flot

Pour faire le lien entre les réseaux de distribution et la théorie des graphes, nous considérons formellement qu'un *réseau* est composé d'un graphe orienté $G (X, E)$ où un sommet particu-

liers s (*source*) a été choisi (ou un ensemble de sommet $S \subset X$ dans le cas d'un réseau contenant plusieurs sources) ; tous les sommets sauf s , i.e. $v \in X \setminus s^2$ (ou $v \in X \setminus S$ dans le cas de plusieurs sources) ont des demandes (positives ou nulles) : $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}^+$; il existe une fonction $u(e) : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui associe à chaque arc sa *capacité*.

Dans le réseau, on définit comme **flot** une application $f(e) : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. pour tout arc $e = (i, j) \in E$, $0 \leq f(e) \leq u(e)$;
2. pour tout sommet $j \neq s$ et pour tous les arcs $a = (i, j) \in E$ et $b = (j, k) \in E$ on a :

$$\sum_a f(a) = \sum_b f(b) + d_j.$$

La première propriété exige que le flot reste borné sur chaque arc et la deuxième – que le flot vérifie en chaque sommet $j (\neq s)$ la loi de conservation (ou la 1^{ère} loi de Kirchhoff) : le **flux entrant** est égal au **flux sortant**.

Le bilan de puissance (ou théorème de Boucherot) appliqué à la source s correspond au fait que la quantité totale sortant de s $F = \sum_{k=\text{succ}(s)} f(s, k) + d_k$ doit être injectée en s . Pour cette raison la source s porte le nom du *nœud-bilan*.

On peut aussi définir le coût de passage du flot par les arcs comme une fonction $c = c(f(e)) : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ et les **pertes** comme une application $g(f(e)) : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, qui vérifie $g(f(e)) \leq f(e)$.

Dans le réseau, on appelle **flot avec pertes** une application $f(e) : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. pour tout arc $e = (i, j) \in E$, $0 \leq f(e) \leq u(e)$;
2. pour tout sommet $j \neq s$ et pour tous les arcs $a = (i, j) \in E$ et $b = (j, k) \in E$ on a :

$$\sum_a f(a) - g(f(a)) = \sum_b f(b) + d_j.$$

Les pertes $g(f(e))$ sur l'arc $e = (i, j)$ impliquent le fait que si la quantité $f(e)$ sort du sommet i , alors la quantité $f(e) - g(f(e))$ rentre dans j . La fonction g peut être choisie pour être le mieux adaptée au problème posé.

Dans les réseaux électriques, la distribution de la puissance peut être vue comme un problème de flot avec pertes de la forme quadratique (Pertes = RI^2) que l'on souhaite minimiser. C'est

² “\” est l'opérateur d'exclusion des ensembles.

pourquoi dans ce travail nous allons formuler le problème de flot avec les pertes quadratiques minimales, i.e. la fonction de pertes se prend la forme $g(f) = c(e)f^2(e)$, où $c(e)$ représente la résistance d'une ligne e et $f^2(e)$ le carré du courant passant par e . Un exemple du flot $f(e)$ avec les pertes quadratiques de coût minimum est illustré sur la Figure II-4. La demande sur le sommet 3 est égale à $7/2$, sur les autres 0. Les coûts fixes sur les arcs sont $c_{s1}=1/36$, $c_{12}=1/25$, $c_{23}=1/16$, $c_{s3}=1/2$. La quantité totale du flot sortant de s est égale à 7.

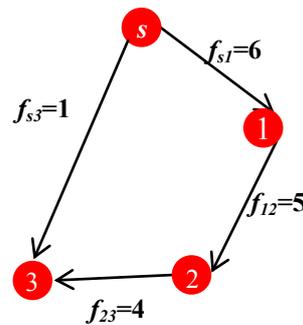


Figure II-4 : Un exemple du flot avec les pertes de coût quadratique minimum dans un graphe ayant 4 sommets et 4 arcs.

Coupe

Soit un graphe orienté $G(X, E)$ et un sommet particulier $r \in X$. Considérons une bipartition de sommets $X = S \cup T$ telle que $r \in S$ et $T \neq \emptyset$. Dans un réseau, on appelle *r-coupe* l'ensemble de tous les arcs qui ont leur sommet initial dans S et leur sommet terminal dans T .

Si C est une *r-coupe* alors dans le graphe partiel $H(X, E \setminus C)$ il n'existe pas de chemin qui commence en un sommet de S et qui finit en un sommet de T (on dit que S et T sont déconnectés).

II.2.2. Problème d'optimisation

Une description formelle d'un problème d'optimisation comprend : une *fonction-objectif* et des *contraintes* sur des *variables* du problème [28]. La fonction-objectif est une écriture mathématique du critère d'optimalité. Pour résoudre le problème d'optimisation, on définit la fonction objectif et on cherche son extremum, comme le coût minimum ou un profit maximum par exemple. Les *contraintes d'un problème d'optimisation* sont des relations entre des variables $(x_1, \dots, x_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ exprimées sous la forme d'un système d'égalités ou d'inégalités linéaires ou non-linéaires. La forme générale d'un problème d'optimisation est définie par la fonction objectif (voir équation (II-1)) et l'ensemble de contraintes (voir équation (II-2)) :

$$Z(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \text{opt} \quad (\text{II-1})$$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_k$$

Les variables x_1, \dots, x_n peuvent être *continues* ou *entières*. Les termes b_j sont des constantes de \mathbb{R} . Le sous-ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^+$ est défini par les contraintes (II-2).

Si le problème d'optimisation est défini sous forme générale (II-1)-(II-2), on parle de la programmation mathématique. Si l'objectif Z et les fonctions définissant les contraintes f_i ($i=1, \dots, k$) sont des fonctions linéaires on parle de **programmation linéaire** [29] et **non linéaire** dans le cas contraire. Dans la **programmation quadratique** [30], la fonction-objectif est quadratique et les contraintes sont linéaires ou quadratiques. Si toutes les (certaines) variables sont supposées entières on parle de la **programmation en nombres entiers (programmation mixte)**. Dans le cas où les données (ou une partie) sont des variables aléatoires, la solution du problème d'optimisation est recherché par des méthodes de **programmation stochastique** [31], [32]. Dans ce travail, nous allons utiliser les modèles formulés sous forme d'une programmation linéaire ou quadratique.

Solution réalisable

On appelle **solution réalisable** tout vecteur x qui satisfait les contraintes (II-2) du problème d'optimisation.

Solution optimale

Une **solution optimale** est une solution réalisable qui optimise (maximise ou minimise) la fonction-objectif du problème d'optimisation (II-1)-(II-2).

L'objectif d'un problème d'optimisation est de déterminer un **optimum global** mais les méthodes utilisées en programmation non linéaire permettent surtout de trouver un **optimum local**. Voici les définitions formelles :

Optimum local

Un point $x_0 \in X$ est appelé un **minimum local** pour une fonction $Z : X \rightarrow \mathbb{R}$ s'il existe un voisinage $V \subseteq X$ de x_0 tel que $\forall x \in V \quad Z(x) \geq Z(x_0)$.

Un point $x_0 \in X$ est appelé un **maximum local** pour une fonction $Z : X \rightarrow \mathbb{R}$ s'il existe un voisinage $V \subseteq X$ de x_0 tel que $\forall x \in V \quad Z(x) \leq Z(x_0)$.

Optimum global

Un point $x_0 \in X$ est appelé un **minimum global** si et seulement si $\forall x \in X, Z(x) \geq Z(x_0)$.

Un point $x_0 \in X$ est appelé un **maximum global** si et seulement si $\forall x \in X, Z(x) \leq Z(x_0)$.

Ensemble convexe

Un sous-ensemble C de \mathbb{R}^n est dit **convexe** si $\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ (voir **Figure II-5**).

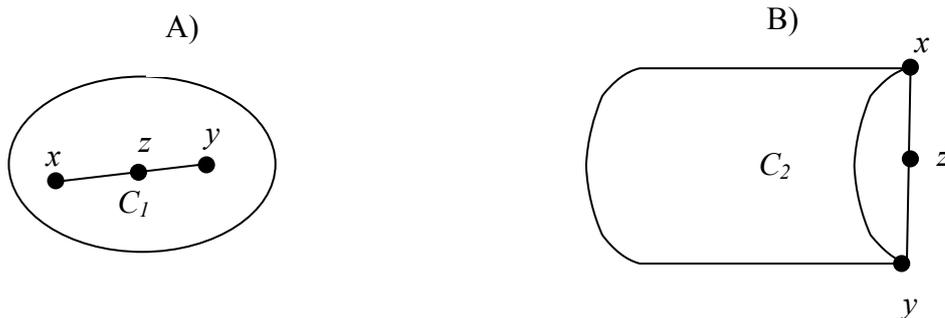


Figure II-5 : Exemples d'ensembles convexe C_1 (a) et non convexe C_2 (b).

Fonction convexe

Une **fonction** $Z: C \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'ensemble convexe $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit **convexe**, si $\forall x, y \in C, \forall \alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta = 1, Z(\alpha x + \beta y) \leq \alpha Z(x) + \beta Z(y)$. Respectivement la **fonction** Z est **concave** si la fonction $-Z$ est convexe.

L'illustration de ces définitions est présentée sur la **Figure II-6**:

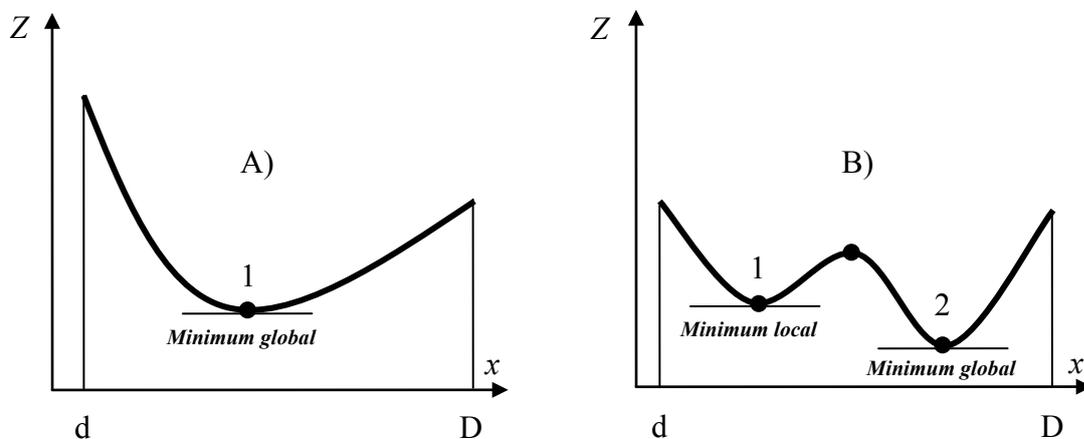


Figure II-6 : La fonction Z sur l'image A) est convexe et elle n'a qu'un seul extremum qui est son minimum global dans l'intervalle $[d, D]$. La seconde fonction Z sur l'image B) est non-convexe avec deux minimums locaux dont l'extremum 2 est son minimum global.

Le théorème suivant montre l'avantage de modélisation des problèmes d'optimisation en termes des fonctions convexes (concave).

Théorème II-1 [33] : Soit un problème d'optimisation formulé par les conditions (II-1), (II-2). Si l'ensemble X défini par le système de contraintes est convexe et la fonction Z à minimiser (resp. à maximiser) est convexe (resp. concave) sur X , alors tout optimum local est global.

II.2.3. Définitions de la théorie de la complexité

Il existe plusieurs types d'algorithmes dédiés pour la résolution des problèmes d'optimisation. Ces algorithmes peuvent être exacts ou avec une approximation garantie de facteur k , i.e. dans le pire des cas sa solution est à k fois pire de la solution optimale. Une autre catégorie d'algorithmes dits heuristiques. Ils fournissent une solution réalisable mais sans aucune garantie d'optimalité. Pour mesurer l'efficacité d'un algorithme, il faut établir une relation entre la durée d'exécution dudit algorithme, exprimée en nombre d'opérations élémentaires, et la taille de l'exemple traité, exprimée en nombre de caractères nécessaires pour coder les données de l'exemple traité. Autrement dit, la **complexité d'un algorithme** est une fonction de la taille du problème (par exemple le nombre d'organes de manœuvre du réseau électrique dans le cas du problème de reconfiguration) qui fournit, à un facteur multiplicatif, près une borne supérieure sur le temps d'exécution de l'algorithme.

Algorithmes polynomiaux

On dit qu'un algorithme est **polynomial** si pour des données qui n'occupent pas plus de n octets de mémoire d'un ordinateur, l'algorithme nécessite moins de cn^k opérations élémentaires (où c et k sont des constantes).

Cette définition impose seulement la manière dont le temps d'exécution augmente en fonction des données. Un algorithme polynomial est dit **efficace**. Le problème pouvant être résolu par un tel algorithme est dit **facile**.

Par exemple, le problème du flot de coût minimum sur un réseau de transport, le problème de plus court chemin ou le problème de flot maximum dans un graphe sont tous des problèmes polynomiaux.

Les deux problèmes faciles auxquels nous sommes couramment confrontés dans ce travail sont les suivants : étant donné un graphe non orienté avec les arêtes pondérées par les "distances" (≥ 0) interprétées comme les distances réelles (en km) ou comme résistance (en Ohm).

P1 : trouver un graphe connexe de longueur totale minimale. Ce problème est bien connu en combinatoire comme la recherche de *l'arbre couvrant de longueur minimum* ;

P2 : trouver un graphe connexe qui contient l'ensemble des plus courtes chaînes à partir d'un sommet particulier (racine, source etc.) – ici on cherche *l'arborescence des plus courts chemins*.

Ces modèles vont servir pour déterminer une architecture optimale d'un futur réseau de distribution mais leurs objectifs sont complètement différents. Les exemples sur la **Figure II-7** montrent les cas extrêmes où l'arborescence des plus courts chemins peut atteindre la longueur totale n fois plus grande que la longueur minimum de un arbre couvrant (n – le nombre de clients, l – une longueur importante, ε – une petite distance).

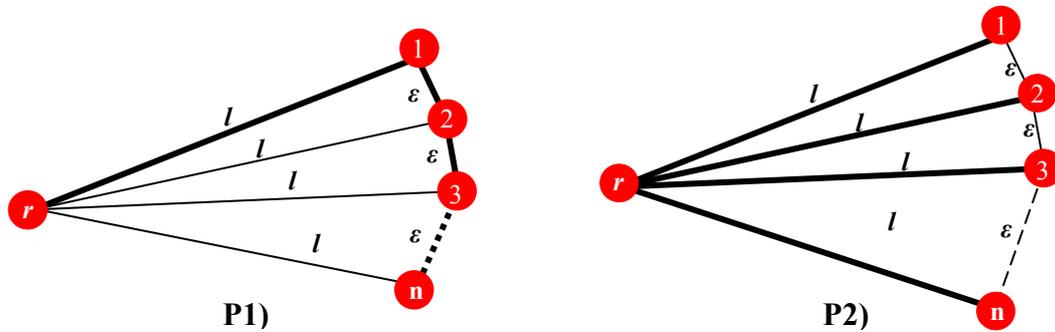


Figure II-7 : Les solutions des problèmes **P1** et **P2** dans un graphe pondéré.

Pour le problème d'arbre couvrant de poids minimum et le problème d'arborescence des plus courts chemins, il existe des algorithmes polynomiaux [25]. Par contre, pour certains problèmes, nous ne savons pas démontrer qu'ils sont faciles. En voici un exemple :

P3: trouver une structure arborescente qui permet de minimiser les pertes Joule – le flot arborescent de coût quadratique minimum.

Nous revenons sur ce problème dans le Chapitre III.

Problèmes difficiles

Nous allons donner une brève description des classes principales de complexité des problèmes de décision, auxquels il faut répondre par OUI ou par NON (pour plus de détails voir [34]). On regroupe les problèmes faciles dans la **classe P** (les problèmes de décision pour lesquels il existe un algorithme déterministe qui apporte la réponse OUI ou NON en temps polynomial par rapport à la taille de l'instance. Mais il existe de nombreux problèmes combinatoires pour lesquels les algorithmes efficaces n'ont pas encore été trouvés. La démonstration que ces problèmes sont intrinsèquement complexes et qu'il est possible qu'un algorithme efficace ne puisse jamais exister n'est pas chose aisée. Sans les préjugés on définit une nouvelle classe (a priori plus large) :

Classe NP – les problèmes de décision pour lesquels la réponse OUI peut être décidée par un algorithme non-déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

Il est évident que $P \subset NP$ et le problème fondamental de la théorie de la complexité est la question d'égalité (ou inégalité) des classes : $P \neq NP$? A défaut de mieux, on compare avec les difficultés des différents problèmes connus. Pour ce faire, on transforme un problème en un

autre. On dit qu'on peut transformer le problème d'optimisation P en un autre problème d'optimisation P' , s'il existe un algorithme polynomial qui transforme les données de chaque instance (exemple) I de P en données d'une instance (exemple) I' de P' de telle façon pour que le problème P admet la réponse OUI pour l'instance I si et seulement si le problème P' admet la réponse OUI pour l'instance I' . Il n'est pas nécessaire d'atteindre toutes les instances de P' ; en revanche, il est indispensable de transformer toutes les instances de P en instances de P' et ceci sans connaître la solution optimale. Il faut souligner que l'on s'intéresse seulement aux transformations efficaces, c'est-à-dire où la taille de données du problème transformé est bornée par une fonction polynomiale de la taille des données du problème initial. Si cette transformation existe, on va dire que le problème P se *réduit polynomialement* au problème P' . Par conséquent, s'il existe un algorithme polynomial pour résoudre le problème P' , alors il existe un algorithme polynomial pour résoudre le problème P . En attendant la découverte éventuelle de cet algorithme polynomial pour P' , l'existence d'une réduction polynomiale de P en P' nous permet de dire que le problème P' est *au moins aussi difficile* que P . Cette relation ordonne donc les problèmes selon leur difficulté. On pourrait s'attendre que la difficulté ainsi définie augmente sans cesse, mais ce n'est pas le cas, car la difficulté atteint un maximum. Il existe une famille de problèmes les plus difficiles, appelés **NP-complets**.

Un problème d'optimisation, qui a pour but de trouver une solution maximisante (resp. minimisante) une fonction-objectif donnée, n'appartient pas à la classe NP puisque ce n'est pas un problème de décision. Mais, à chaque problème d'optimisation on peut associer un problème de décision. Étant donné un problème d'optimisation combinatoire "trouver x^* tel que : $f(x^*) = \min_{x \in X} [f(x)]$ " et un nombre k , on définit *le problème de reconnaissance associé* :

"Existe-t-il x^* tel que $f(x^*) \leq k$?".

Un problème d'optimisation combinatoire est **NP-difficile** si et seulement si *le problème de reconnaissance associé* est NP-complet. Les problèmes NP-difficiles sont donc des problèmes au moins aussi difficiles que les problèmes NP-complets (mais l'appartenance à la classe NP n'est pas exigée). Ainsi le problème de voyageur de commerce, consistant à déterminer un cycle hamiltonien le plus court est un exemple d'un problème NP-difficile car le problème de décision associé : *existe-t-il un cycle hamiltonien de longueur $\leq k$?* est NP-complet [35].

II.3. Les approches proposées dans la littérature

Il faut rappeler que le but de cette thèse est d'aborder le problème d'optimisation de l'architecture des réseaux de point de vue de RO et de détecter le noyau du problème contenant l'ensemble de problèmes de la théorie des graphes et d'optimisation combinatoire. Ceci va permettre appliquer les méthodes efficaces pour la résolution, mais bien sûr en tenant compte les particularités du problème initial. Pour mieux comprendre la problématique, nous avons étudié les avancements sur ce sujet qui ont été déjà réalisés. Notre formulation du problème ainsi que les méthodes de résolution seront présentées dans les chapitres suivants. Elle est différente de celles qui ont été proposées dans la littérature. Ici, nous donnons une brève

description des approches existant dans la littérature pour la modélisation et la résolution du problème d'optimisation de l'architecture du réseau

Les méthodes proposées dans la littérature reposant sur la programmation linéaire utilisaient l'algorithme du simplexe pour la résolution et étaient habituellement formulées comme un programme linéaire ayant comme fonction objectif à minimiser la somme de longueur des lignes sous les différentes contraintes. Une telle formulation avec les contraintes de répartition des flux de la puissance a été proposée par Aoki et al. dans [36]. Adams et al. dans [37] ont proposé une formulation qui tient compte aussi la minimisation des pertes approchées par une fonction linéaire par morceaux. Le modèle reposant sur le flot de coût linéaire minimum avec les capacités couplées avec l'algorithme de Séparation et évaluation (*Branch and Bound*) a été présenté par Thompson et al. dans [38]. Mais tous ces modèles ont été formulés sous les contraintes de topologie de la structure radiale.

Un approche heuristique pour le problème de planification proposé dans [39] fournit une structure de réseau dans la solution qui est un mélange de la structure des boucles et en coupure d'artère. Il repose sur l'exigence que chaque nœud de charge doit être alimenté par au moins deux points d'alimentation soit à partir du même poste source, soit à partir de l'autre.

De nombreuses méthodes se fondent sur des algorithmes évolutionnaires [40] comme : des algorithmes de la colonie de fourmi [41], des algorithmes génétiques [42], des algorithmes de la recherche avec des listes tabous [43]. Une des comparaisons de la performance pour le problème de planification qui utilisent les algorithmes métaheuristiques pour la résolution du problème de planification est présentée dans [44]. Une des méthodes qui exploitent certaines prescriptions sur la structure du réseau couplée avec les algorithmes métaheuristiques est celle d'Alvarez-Hérault et al. [45], où les auteurs ont proposé une structure du réseau en coupure d'artère sécurisée.

Une approche développée dans [46] utilise un algorithme génétique pour la résolution du problème de planification du réseau ayant une structure radiale. Cette dernière qui peut être adaptée au réseau maillé en appliquant l'algorithme de couplage de poids minimum. À la première étape de la méthode proposée par les auteurs, en utilisant un algorithme génétique, ils répartissent tous les nœuds de charge du réseau à des ensembles des nœuds disjoints afin d'attribuer chaque ensemble à un des postes source sous les contraintes de capacité des lignes et de puissance crête des postes source. Ensuite, avec la méthode d'optimisation TSP (voyageur de commerce) pour chaque tel ensemble de nœuds, ils cherchent une configuration des lignes sous forme d'un chemin passant par tous les nœuds et par le poste source attribué pour cet ensemble. La structure du réseau qu'ils obtiennent à cette étape est l'ensemble des structures radiales pour chaque poste source. Afin de rendre la structure du réseau maillée, les auteurs utilisent l'algorithme de couplage de poids minimum qui fournit l'ensemble des poids minimum des lignes de liaisons entre différentes sous structures radiales.

Les difficultés générales auxquelles les auteurs de ces méthodes ont été confrontés sont telles que le temps de calcul des méthodes exactes peut augmenter de façon exponentielle en fonc-

tion de la taille de l'instance et des heuristiques peuvent facilement rester bloqués sur un optimum local.

II.4. Modélisation du problème d'optimisation de l'architecture de réseau

II.4.1. Représentation du réseau électrique sous forme d'un graphe planaire

Le réseau électrique peut être modélisé comme un graphe planaire où l'ensemble des nœuds particuliers représentent des postes source HTB/HTA, les autres charges avec des demandes fixes de consommation de la puissance donnée (transformateurs HTA/BTA) et les arêtes des lignes électriques. Nous nous abstrayons de la forme finale du réseau à l'étape de la modélisation du réseau en termes de graphes en supposant que chaque arête représente une ligne électrique ou un ou plusieurs câbles en parallèle. Nous allons présenter deux approches basiques pour la conception du réseau en fonction du cahier des charges (programme technique).

Dans une première approche, les données initiales sont l'ensemble de points représentant les postes source HTB/HTA et les charges (poste HTA/BTA) avec les coordonnées géographiques qu'il faut relier de manière efficace (optimale) par des arêtes en respectant l'ensemble de contraintes. Pour ce cas, il n'y a pas de prescriptions sur le placement des lignes et on est libre dans le choix de la structure élémentaire du réseau (sous le respect des contraintes posées dans le modèle). Dans ce cas, le réseau initial contenant toutes les lignes potentielles sera représenté sous forme d'un graphe planaire maximal. Pour définir le graphe du réseau initial nous utilisons l'algorithme de la triangulation Delaunay [47], [14], où on relie (sur le plan) les sommets du graphe que l'on construit de telle façon que deux conditions soient systématiquement vérifiées :

- chaque triplet de sommets forme un triangle contenu dans le cercle circonscrit et aucun autre sommet n'est dans l'intérieur de ce cercle ;
- l'intersection de deux triangles est soit l'ensemble vide, soit un sommet, soit une arête.

Nous posons le problème de la conception du réseau dans ce graphe initial obtenu contenant toutes les arêtes potentielles du réseau.

La deuxième approche implique l'existence d'un plan topologique (fond de carte) d'une zone urbaine ou rurale liée au réseau électrique. Ce plan peut contenir un marquage des rues de la ville ou des routes à travers desquelles les futures lignes électriques passeront, ainsi que les coordonnées géographiques des postes source HTB/HTA et des charges. La façon de raccorder les charges à des lignes peut être donnée dans les prescriptions du réseau. À partir de ce plan géographique nous construisons le graphe initial de façon suivante :

- nous raccordons chaque nœud de charge et de poste source par une projection orthogonale à une rue la plus proche sur le plan ;
- les points représentant des postes sources, des charges et des intersections de rues et des raccordements de postes source et de charges forment l'ensemble de sommets du graphe ;
- l'ensemble d'arêtes contient toutes les rues et les raccordements de sommets de charge et des postes sources.

Dans ces deux approches, nous modélisons le réseau électrique sous forme d'un graphe planaire non orienté pondéré. Les poids sur les arêtes sont des distances euclidiennes entre les extrémités des arêtes. Le graphe contient des cycles mais la distribution doit être réalisée dans une arborescence (graphe orienté acyclique) ayant un (des) poste(s) source comme racine(s). Pour cela nous pouvons doubler chaque arête dans le graphe et les orienter dans le sens opposé (graphe symétrique) (voir **Figure II-8**).

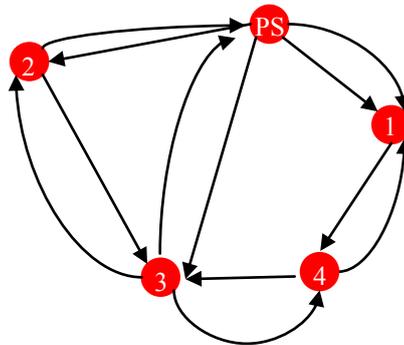


Figure II-8 : Graphe initial symétrique du réseau potentiel contenant 4 sommets de charge et 1 sommet poste source.

Si le nombre de postes source HTB/HTA dans l'instance de données est supérieur à deux nous ajoutons dans le graphe du réseau un sommet représentant un nœud fictif et le relie par des arêtes de poids nul avec tous les postes source HTB/HTA. Ce nœud fictif représentera le nœud bilan du réseau, source de l'ensemble des postes HTB/HTA.

Pour le placement des organes de manœuvre, nous supposons qu'il n'y a pas de restriction sur le choix des lignes les contenant.

II.4.2. Contraintes technologiques liées au problème

Il s'agit donc de concevoir et de mettre en place un réseau de distribution d'électricité en tenant compte des différentes contraintes.

Contraintes de répartition de charges

- A chaque nœud on doit respecter la 1^{ère} loi de Kirchhoff.

- La tension doit respecter les limites inférieure et supérieure, i.e. $V^{\min} \leq V_i \leq V^{\max}$ à chaque nœud i du réseau.
- Les courants sur les lignes ne doivent pas dépasser les courants maximaux admissibles en régime permanent, i.e. $0 \leq I_{ij} \leq I_{ij}^{\max}$ pour toutes lignes (i, j) .

Contraintes de topologie

- Le réseau est suffisamment redondant. En cas d'une panne l'utilisateur doit être alimenté par un autre chemin (graphe 2-arête-connexe).
- En régime normal chaque consommateur doit être connecté et recevoir la quantité nécessaire d'une seule source (structure arborescente).

II.4.3. Fonction objectif

Les critères d'optimisation du problème de la conception du réseau sont généralement posés comme : minimisation de pertes, de coûts d'installation des lignes et d'indices de fiabilité comme SAIDI, SAIFI et END. L'optimisation du problème général est multicritère, et en plus il est difficile de définir des bons coefficients pour les indices de fiabilité. Dans ce travail nous définissons la fonction objectif de la minimisation des coûts économiques comme présenté dans le Chapitre I. Elle prend la forme suivante :

$$C_{total_act} = I(L, OC) + \sum_{n=0}^N \frac{C \times P(n)}{(1+\tau)^n}$$

où

C_{total_act} – coûts actualisés en k€	
L – longueur totale des lignes dans le réseau	
OC – organe de coupure	(II-3)
I – investissement à l'année 0 en k€	
C – coût d'un kW de pertes à la pointe en k€	
$P(n)$ – pertes à la pointe à l'année n en kW	
τ – taux d'actualisation en %	
N – horizon de temps	

Pour la résolution du problème d'optimisation de l'architecture de réseau, qui est multicritère, nous proposons de résoudre l'ensemble comme des problèmes d'optimisation mono-objectif (minimisation de la longueur, minimisation des pertes) sous les contraintes définies dans la section précédente et d'utiliser le support de la solution d'un problème dans l'autre. Nous cherchons tout d'abord un réseau de longueur minimale (objectif CAPEX) et ensuite dans ce

réseau trouvé, on cherche à placer de façon optimale les organes de manœuvre normalement ouverts afin minimiser les pertes (objectif OPEX).

II.5. Les approches proposées et les problèmes combinatoires associés

La technique de relaxation d'un problème complexe est très souvent utilisée dans la pratique. Quand le problème est multicritères, nous pouvons proposer une combinaison des critères en choisissant les coefficients selon l'importance relative des critères (impact majeur sur la solution) et résoudre un problème mono-objectif. Dans le problème formulé dans II.4.2 et II.4.3, la fonction objectif est multicritères. Nous proposons de formuler les problèmes combinatoires associés à chaque objectif comme : minimisation de la longueur, minimisation des pertes et équivalence des produits $P \times L$.

II.5.1. Minimisation de la longueur

Nous savons que les coûts les plus importants sont les coûts d'investissement pour la construction du réseau à l'étape initiale et ils dépendent de la longueur totale des lignes. Nous proposons donc de modéliser le problème de la construction du réseau avec la minimisation de la longueur totale comme objectif. Nous décrivons dans cette section une liste des problèmes d'optimisation combinatoire correspondants à différentes formulations du problème de conception de réseau électrique. Ainsi nous présentons les méthodes efficaces existantes dans la littérature de leurs résolutions.

Ce sont les problèmes de "voyageur de commerce", de "tournée de véhicules", de sous-graphe k -connexe de poids minimal et de réseau de Steiner de poids minimal.

Voyageur de commerce

Le problème le plus célèbre est celui du voyageur de commerce (*Travelling Salesman Problem*, ou TSP), qui consiste à trouver dans un graphe donné avec des arêtes pondérées par des valeurs réelles positives (la longueur d'arête) un circuit de longueur minimum qui passe une seule fois par chaque sommet. Plusieurs méthodes de résolution ont été proposées dans la littérature, dont les algorithmes approximatifs comme le premier de Christofides [25] avec un facteur d'approximation $3/2$ et le récent de Sebó et al. [48] avec un facteur d'approximation de $7/5$. Ce problème peut être formulé aussi sous forme d'un programme linéaire, quadratique ou semi positivement défini [49], [50], [51]. L'exemple d'application de ce problème pour l'optimisation d'architecture de réseau peut être vu dans les études de [14], où un cas particulier de la structure du réseau a été considéré comme la coupure d'artère.

Tournée de véhicules

Le problème de tournées de véhicules classique (*Vehicle Routing Problem*, VRP) [52] a pour objectif de trouver un ensemble de routes de coût minimum (trouver les chemins les plus

courts, réduire le nombre de véhicules, etc.) commençant et se terminant au dépôt en approvisionnant la demande connue associée aux sommets. Chaque sommet ne doit être visité qu'une seule fois par un seul véhicule et chaque véhicule a une capacité limitée. Certaines formulations ont aussi des contraintes sur le temps de déplacement maximal. Comme dans le problème de voyageur de commerce, chaque arête du graphe a un coût fixe (e.g. la longueur).

Pour la résolution du VRP il existe des algorithmes approximatifs que l'on peut voir dans [53], [54], ainsi que des formulations sous forme de programmation linéaire [52], qui restent difficiles à résoudre sur des instances de grande taille.

La collusion de ce problème avec le problème de la conception de réseau est telle que l'on peut considérer chaque tournée comme une boucle pour la construction du réseau ayant la structure bouclée (ou en coupure d'artère) ou pétales de marguerite équilibrée sur des produits $P \times L$ [14].

Réseau de Steiner et k -connexité

Le problème de la recherche d'un sous-graphe k -connexe sommets couvrant de poids minimal (*k -Edge Connected Spanning Sub-graph k -ECSS*) apparaît dans le cas où nous ne supposons pas de contraintes structurelles particulières pour la conception du réseau comme des cycles hamiltoniens (dans le TSP) ou l'ensemble des boucles avec un sommet en commun (dans le VRP). Le problème donc peut être formulé comme suit : dans un graphe non orienté pondéré, trouver un sous-graphe k -connexe de poids minimal. La notion de k -connexité peut être définie comme l'existence de au moins de k chemins arête disjoints entre chaque paire de sommets du graphe. Ce problème a également une formulation pour des graphes non pondérés où l'on cherche un sous-graphe k -connexe ayant un nombre d'arêtes minimal. De nombreux algorithmes approximatifs ont été développés pour ce problème. Pour le cas des graphes non pondérés, Khuller et Vishkin [55] ont présenté un algorithme de $3/2$ -approximation pour 2-ECSS et 2-approximation pour k -ECSS en utilisant l'algorithme de parcours en profondeur. Garg et al. [56] ont prétendu avoir un algorithme de $5/4$ -approximation pour 2-ECSS, mais aucune preuve formelle n'existe à ce jour. Cheriyan, Sebő, Szegedi [57] ont mis au point un algorithme avec la garantie d'approximation de $17/12$ pour $k = 2$. Ils ont utilisé une décomposition en oreilles (*nice ears decomposition*).

Pour la version du problème sur des graphes pondérés pour le paramètre k général, la meilleure approximation de facteur 2 a été présentée dans les travaux de Khuller et al. [55], [58] et de Jain [59]. Berger et Grigni [60] ont proposé, pour le problème 2-ECSS, un algorithme exact pseudo-polynomial (linéaire sur les graphes ayant une petite largeur arborescente).

Du point de vue des applications du problème k -ECSS pour la conception du réseau de distribution électrique, il est suffisant de se limiter à la version du problème où $k = 2$. La formulation du problème général en termes du 2-ECSS sera valable dans le cas où nous n'avons pas de prescription sur le placement des lignes, qui implique que toutes les charges (postes HTA/BT) seront reliées directement sans des nœuds intermédiaires. Néanmoins, l'ajout de points de Steiner permet d'améliorer la solution. Aussi, si le modèle du réseau prend en

compte le fond de carte des rues, nous serons obligés de suivre la topologie urbaine pour passer les câbles. Dans ce cas, le graphe initial, où l'on cherche un sous-graphe 2-connexe de poids minimum, contient un sous-ensemble de sommets représentant les nœuds de croisements des rues. Si aucune charge n'est attribuée aux nœuds de ce type, la solution ne les contiendra pas obligatoirement. Nous pouvons donc considérer un graphe avec les conditions sur la connexité particulières entre les paires de sommets, i.e. 0 pour toutes paires contenant les nœuds intermédiaires, 1 pour les paires contenant les postes source HTB/HTA et 2 pour les charges.

Cette formulation correspond au problème du réseau de Steiner (*Steiner Network* ou Conception d'un Réseau Fiable). Il consiste à trouver, dans un graphe non orienté pondéré, un sous-graphe de poids minimal qui vérifie les conditions sur la connexité définies pour toutes les paires de sommets du graphe par une fonction $r : 2^V \rightarrow Z^+$. Ces conditions sur la connexité définissent les contraintes d'existence au moins $r(u, v)$ chemins arrêtes disjoints entre des sommets (u, v) .

Si toutes les conditions de connexité $r(u, v)$ pour chaque paire de sommets (u, v) sont égales à 0 ou 1, le problème est appelé le problème de l'arbre de Steiner généralisé [61]. Le premier algorithme d'approximation pour le problème de l'arbre de Steiner généralisé a été trouvé par Agrawal, Klein et Ravi [62]. Un autre cas particulier est le problème de k -ECSS (où $r(u, v) = k$ pour tout u, v). Donc, le problème de conception de réseau fiable généralise le problème d'arbre de Steiner de poids minimum, le problème de la forêt de Steiner de poids minimal et le problème d'un sous-graphe k -connexe de poids minimal.

Pour la résolution du problème du réseau de Steiner l'algorithme de 2-approximation a été proposé par Jain [59]. Son algorithme résout tout d'abord une relaxation linéaire du problème puis il arrondit itérativement la solution. L'idée clé de l'arrondissement est qu'à chaque itération en résolvant un problème relaxé il existe au moins une arête dans la solution avec la valeur supérieure de $\frac{1}{2}$ que l'on inclut dans la solution finale.

Dans ce travail de thèse nous considérons le cas général de l'architecture du réseau, c'est-à-dire qu'aucune contrainte sur la particularité de la structure du réseau³ n'a pas été posée. Le problème d'optimisation de l'architecture de réseau ayant pour l'objectif la minimisation de la longueur sera formulé dans le Chapitre IV comme le problème du réseau de Steiner (avec la fonction $r(u, v) \in \{0, 1, 2\}$) et l'algorithme approximatif de facteur 2 sera utilisé pour sa résolution.

³ Les structures de réseaux comme coupure d'artère, boucles, grille.

II.5.2. Minimisation des pertes

Un des critères de la planification de l'architecture de réseau que l'on prend en compte (voir la fonction économique de coûts (II-3)) est la somme des pertes techniques sur la période de vie du projet. Dans cette thèse, nous présentons les modèles de l'architecture du réseau de distribution ayant comme objectif la minimisation des pertes. L'acheminement de l'énergie doit être réalisé en minimisant les pertes Joule (dissipation d'énergie électrique sous forme de chaleur : $P_j=RI^2$) en respectant les limites du courant sur les branches utilisées. Le modèle physique exact du **Problème de Répartition Optimale des Flux de Puissance** (OPF – *Optimal Power Flow* ; le modèle et la description des méthodes de résolution sont présentés dans [63], [64]), couramment utilisé, est extrêmement complexe – l'objectif et les contraintes sont non-linéaires. Le réseau électrique donné est représenté sous forme de graphe planaire connexe et on cherche la structure arborescente optimale. Pour cela, il faut introduire les variables binaires et ajouter les contraintes linéaires dans le modèle physique d'OPF. On obtient ainsi un modèle pour la recherche de topologie optimale.

Ce problème a été au centre d'efforts de recherches importants de nombreux chercheurs qui ont abouti à plusieurs méthodes de résolution approximative. Ces méthodes comprennent diverses familles d'algorithmes heuristiques et métaheuristiques comme : les algorithmes génétiques [65]– [66], les algorithmes de recherche tabous [67], ainsi que les méthodes fondées sur la programmation mathématique [68]. Dans l'une des méthodes [69], les équations de Load Flow [70] ont été relaxées pour obtenir les modèles approximatifs en variables mixtes de la programmation quadratique et conique.

Dans cette thèse, pour le cas de la minimisation des pertes dans le réseau, nous posons les problématiques suivantes :

- développer, formuler et résoudre un modèle du problème de la recherche d'une structure arborescente optimale pour la minimisation des pertes dans un réseau existant ;
- développer, formuler et résoudre un modèle pour le problème la conception d'une nouvelle architecture de réseau où les pertes sont minimales.

Pour la première partie, un modèle a été développé par Sellé Touré et l'auteur, que l'on présente dans le Chapitre III. Il repose sur une nouvelle formulation d'OPF qui est une relaxation convexe exacte [71]. Nous le formulons en termes de programmation quadratique dans le Chapitre III. Bien que le modèle soit convexe et que nous puissions appliquer les méthodes d'optimisation efficaces, nous montrons que le problème a pour cas particulier le problème de flot arborescent avec les pertes quadratiques minimales, qui est un problème NP-difficile (voir Annexe A). Dans le Chapitre III, nous présentons aussi des algorithmes heuristiques fondées sur la solution du modèle relaxé en variables réelles.

Nous formulons le problème d'optimisation de l'architecture du réseau avec pour objectif la minimisation des pertes sur les graphes symétriques pondérés. Soit un graphe initial ou le support de la solution de problème de réseau de Steiner (non orienté), nous le modifions en

remplaçant chaque arête (i, j) par deux arcs (i, j) et (j, i) ayant la même valeur de la capacité (assez grande) pour tous les arcs du graphe.

Pour la conception d'un réseau de distribution nous proposons deux approches fondées sur la relaxation convexe d'OPF pour la minimisation des pertes (modèle de cône du second degré, voir III.2) :

- algorithme de la recherche d'un sous-graphe 2-connexe dans le graphe initial orienté pondérés (ce que l'on a expliqué ci-dessus). L'objectif est de minimiser les pertes sans prendre en compte la minimisation de la longueur totale des câbles du réseau ;
- algorithme de la recherche d'une arborescence minimisant les pertes dans le graphe 2-connexe de la distance minimale (solution du problème de réseau de Steiner).

II.5.3. L'union des arborescences de coût minimum

Un autre objectif de la planification de réseau est l'équivalence des produits $P \times L$. Nous l'avons présenté dans la section I.4.1. Il consiste à répartir le réseau en un ensemble de zones (l'ensemble de sous-graphes arête disjoints) où chacune des sommes des demandes de la puissance multipliée par la somme de longueurs des lignes est de valeur équivalente. Ce critère d'optimisation est non-linéaire et il est difficile de le mettre en place sans considérer de l'appliquer sans définir une structure particulière du réseau comme pour le cas de l'architecture de réseau en coupure d'artère par exemple, ce qui a été réalisé dans [14]. Nous proposons une formulation linéaire qui est une relaxation de l'équilibrage des produits $P \times L$ dans le réseau en utilisant le modèle de flot de coût linéaire minimum. L'idée clé de cet algorithme est expliquée ci-dessous.

Etant donné un graphe orienté pondéré (comme il a été présenté dans la section II.5.2) contenant deux types de sommets : k sommets – postes sources HTB/HTA et les sommets de charges (y compris les sommets intermédiaires avec la charge nulle). Chaque arc est pondéré par la longueur de la ligne électrique correspondante. Nous résolvons k problèmes indépendants de la recherche le flot de la puissance de coût minimum envoyé depuis le sommet poste source i ($i=1,..k$), vers les sommets de charge. Le support de la solution de chaque tel problème est une arborescence⁴ avec la racine dans le sommet du poste source i ($i=1,..k$). L'union des arbres couvrants correspondants de ces arborescences sera la solution finale de l'algorithme de la conception de l'architecture de réseau. Nous le présentons dans le Chapitre IV.

⁴Si toutes les données sont entières et positives.

II.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons formulé les définitions de la théorie des graphes et de l'optimisation combinatoire que nous utiliserons pour la modélisation du problème d'architecture de réseau. Il s'agit de l'ensemble des définitions sur les graphes, problème d'optimisation, de la théorie de la complexité, méthodes de résolution par la programmation mathématique. Nous avons décrit les avancements existant dans la littérature sur le problème de planification. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons décrit sous forme générale le problème d'optimisation de l'architecture d'un réseau de distribution pour les critères de la minimisation de coût d'investissement et de la minimisation des pertes sous l'ensemble des contraintes électrotechniques. Cependant ce problème est difficile à aborder avec une telle formulation. Pour cela, nous avons proposé de résoudre l'ensemble de problèmes mono-objectifs et de les formuler en termes de problèmes combinatoires afin pouvoir appliquer des méthodes efficaces pour leur résolution. Pour l'objectif de la minimisation de la longueur totale du réseau, nous avons proposé le problème de Réseau de Steiner de poids minimal. Pour la minimisation des pertes, nous avons proposé une relaxation convexe exacte du problème d'OPF, ainsi que certains algorithmes heuristiques que l'on présentera plus en détails dans le chapitre suivant. Pour l'équilibrage du réseau par des produits $P \times L$ équivalents, nous avons proposé un modèle fondé sur le flot de coût linéaire minimum.

CHAPITRE III : PROBLEMES LIES AUX STRUCTURES ARBORESCENTES DANS LE RESEAU DE DISTRIBUTION ELECTRIQUE

SOMMAIRE

III.1. INTRODUCTION	49
III.2. FORMULATION CONVEXE EXACTE DU PROBLEME DE LA REPARTITION OPTIMALE DES FLUX DE PUISSANCE	49
III.2.1. MODELE DE REPARTITION DE CHARGE	50
III.2.2. REPARTITION OPTIMALE DES FLUX DE LA PUISSANCE	52
III.2.3. RELAXATION DU PROBLEME	53
III.3. NOUVELLE APPROCHE POUR LE CALCUL DU PROBLEME DE REPARTITION OPTIMALE DES FLUX DE PUISSANCE DANS DES RESEAUX RADIAUX	55
III.4. MODELE COMBINATOIRE OPTIMALE DU PROBLEME DE RECONFIGURATION DES RESEAUX DE DISTRIBUTION MAILLES	59
III.4.1. MODELE COMBINATOIRE	59
III.4.2. RESULTATS NUMERIQUES	63
III.5. DIVERS PROBLEMES NP-DIFFICILES DE FLOT ARBORESCENT DE COUT MINIMUM	65
III.5.1. INTRODUCTION	65
III.5.2. PROBLEMES NP-DIFFICILES DE FLOT ARBORESCENT DE COUT MINIMUM	66
III.5.3. PROBLEMES LIES AU FLOT ARBORESCENT DE COUT MINIMUM	66
III.5.4. PROBLEME DE FLOT ARBORESCENT AVEC PERTES QUADRATIQUES MINIMALES (FAPQM)	68
III.5.4.1. FORMULATION DU PROBLEME	69
III.5.4.2. MODELE SOUS FORME DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE	69
III.5.5. PROBLEME DE FLOT ARBORESCENT DE COUT QUADRATIQUE MINIMUM (FACQM)	70
III.5.5.1. FORMULATION DU PROBLEME	70
III.5.5.2. MODELE SOUS FORME DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE	71
III.5.6. PROBLEME DE FLOT ARBORESCENT DE COUT LINEAIRE MINIMUM AVEC LES CAPACITES SUR LES ARCS	71
III.5.6.1. FORMULATION DU PROBLEME	71
III.5.6.2. MODELE SOUS FORME DE PROGRAMMATION LINEAIRE	72
III.6. METHODES DE RESOLUTION ET RESULTATS NUMERIQUES POUR LES PROBLEMES DE FLOT ARBORESCENT DE COUT MINIMUM	73
III.6.1. RESOLUTION EXACTE PAR LA PROGRAMMATION QUADRATIQUE EN VARIABLE MIXTES	73
III.6.2. LES ALGORITHMES HEURISTIQUES	74
III.6.2.1. ALGORITHME HEURISTIQUE AH1 POUR LES PROBLEMES FAPQM ET FACQM.	77
III.6.2.2. ALGORITHME HEURISTIQUE AH2 POUR LES PROBLEMES FAPQM ET FACQM.	78
III.6.2.3. ALGORITHME HEURISTIQUE AH3 POUR LES PROBLEMES FAPQM ET FACQM.	78
III.6.3. RESULTATS NUMERIQUES	80
III.7. CONCLUSION	83

III.1. Introduction

Dans le Chapitre II, nous avons présenté la formulation générale du Problème d'Optimisation de l'Architecture des Réseaux de Distribution Électriques et formulé certains sous problèmes classés en fonction de différents critères d'optimisation du problème général. Le Chapitre III est consacré uniquement au problème de la recherche, dans des réseaux maillés, des structures arborescentes (topologies radiales) optimales pour la minimisation des pertes (ou Problème de Reconfiguration). Nous commençons par la présentation de la relaxation convexe exacte pour le problème d'*Optimal Power Flow* (OPF) développé par Farivar et al. [71] pour le calcul de la répartition optimale des flux de la puissance dans les réseaux radiaux. Elle a été formulée en termes de programmation quadratique. Nous présentons ensuite notre algorithme pour le problème OPF pour les réseaux radiaux qui est fondé sur la relaxation linéaire de ce modèle. En partant du modèle convexe exact d'OPF nous développons le modèle convexe exact pour le problème de reconfiguration ayant pour objectif la minimisation des pertes dans les réseaux maillés [72]. Nous le formulons comme un programme quadratique en variables mixtes. En termes d'optimisation combinatoire, ce problème peut être étudié comme le problème de deux flots (de la puissance active et de la puissance réactive) arborescents avec les pertes quadratiques de coût minimum. Il appartient à la classe des problèmes NP-difficiles, car il contient des problèmes NP-difficiles⁵ comme ces cas particuliers :

- 1) flot arborescent de coût linéaire minimum avec des capacités limitées sur les arcs ;
- 2) flot arborescent de coût quadratique minimum ;
- 3) flot arborescent avec les pertes quadratiques minimum.

Nous allons présenter en détails ces trois problèmes de flot arborescent, ainsi que des algorithmes de résolution fondés sur des méthodes heuristiques et des résultats numériques sur les scénarios de test.

III.2. Formulation Convexe Exacte du Problème de la Répartition Optimale des Flux de Puissance

Dans cette section nous présentons les résultats obtenus par Farivar et al. [73] sur le problème de la répartition optimale des flux de puissance. Dans le problème de répartition optimale des flux de la puissance (OPF), on cherche à optimiser une fonction objectif sous l'ensemble de contraintes électrotechniques. Elle peut être la minimisation des pertes ou la

⁵ La NP-difficulté au sens fort de ces problèmes est démontrée dans l'Annexe A en présentant la réduction sur un problème NP-complet.

maximisation des valeurs de la charge possible dans le réseau en satisfaisant des contraintes d'équilibre production consommation, des contraintes de la loi de Kirchhoff, des contraintes de la capacité des lignes et des contraintes sur la tension. La formulation générale du problème OPF est non-convexe. Plusieurs relaxations ont été présentées pour ce problème : des relaxations semi-définies positives [74], [75], [76] ; des relaxations convexes [77], [78].

Farivar et al. [71] ont proposé un modèle convexe exact pour les réseaux radiaux fondé sur la formulation de Baran and Wu [79]. La relaxation du problème se fait en deux étapes. La première est une relaxation d'angle (OPF-*ar*), permettant d'éliminer des angles du déphasage de la tension dans les équations en définissant les parties réelles et imaginaires comme des nouvelles variables. Ensuite, en relaxant les contraintes quadratiques par des inégalités, ils obtiennent une relaxation conique (OPF-*cr*). La **Figure III-1** montre ce schéma de relaxations.

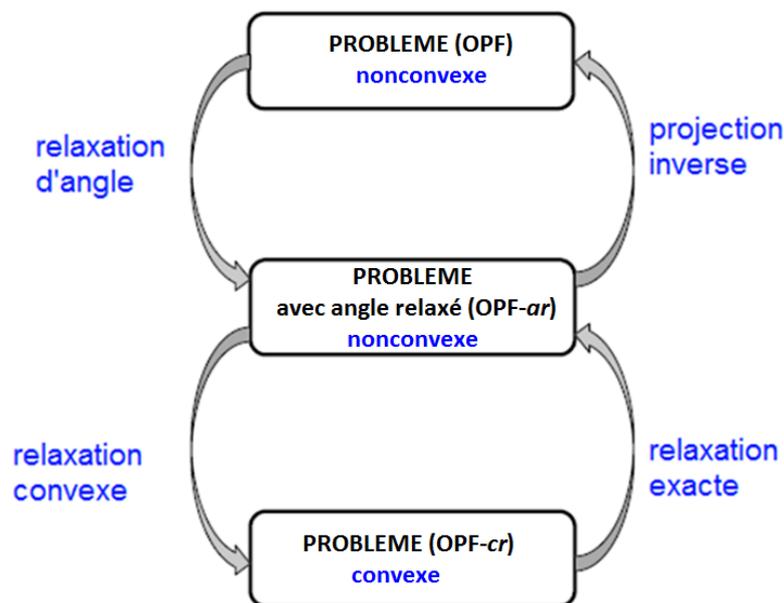


Figure III-1 : Les étapes de relaxation du problème OPF-*ar*, OPF-*cr* et la reconstruction de la solution optimale.

Nous allons présenter ce résultat dans cette section en détails après avoir formulé le problème OPF.

III.2.1. Modèle de répartition de charge

Le réseau de distribution ayant une structure radiale peut être modélisé comme une r -arborescence $A = (X, E)$ avec $|X| = n+1$ et $|E|=n$, où le nœud poste source est représenté par le sommet r dans le graphe. Les variables associées à chaque arc $(i, j) \in E$ sont : le courant complexe I_{ij} de i à j et la puissance complexe $S_{ij} = P_{ij} + \mathbf{i}Q_{ij}$ qui varient de i à j (\mathbf{i} étant l'opérateur complexe tel que $\mathbf{i}^2 = -1$). A chaque sommet $i \in X$, on attribue les variables la tension complexe V_i et de la puissance complexe $s_i = p_i + \mathbf{i}q_i$ qui est la différence entre des variables de la

génération s_i^g et de la demande s_i^c de la puissance qui sont attribuées aussi pour chaque le sommet. Appelons $s = \{s_i \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ l'ensemble qui définit ces valeurs sur X .

L'impédance complexe de la ligne (i, j) est désignée par $z_{ij} = r_{ij} + \mathbf{i}x_{ij}$. La loi d'Ohm généralisée prend donc la forme de l'équation (III-1).

$$V_i - V_j = z_{ij}I_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E \quad (\text{III-1})$$

La puissance S_{ij} sur l'arc (i, j) peut être exprimée (en grandeurs réduites) en fonction de la tension et du courant complexes par l'équation (III-2) :

$$S_{ij} = V_i I_{ij}^*, \quad \forall (i, j) \in E \quad (\text{III-2})$$

En tenant compte des pertes Joule, la première loi de Kirchhoff (ou la loi des nœuds) pour chaque sommet s'exprime par l'équation (III-3) :

$$\sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} (S_{ij} - z_{ij} |I_{ij}|^2) - \sum_{(j,k) \in \delta^+(j)} S_{jk} = s_j, \quad \forall i \in X \quad (\text{III-3})$$

L'exemple de la **Figure III-2** montre une arborescence contenant 4 sommets dont le sommet i est la racine et 3 arcs. L'équation (III-3) écrite pour le sommet j l'ensemble d'arcs entrant dans j $\delta^-(j)$ contient l'arc (i, j) et l'ensemble d'arcs sortant de j $\delta^+(j)$ contient les arcs (j, k) et (j, m) . Les variables participant à l'équation (III-3) écrites pour le sommet j , sont affichées sur la **Figure III-2**.

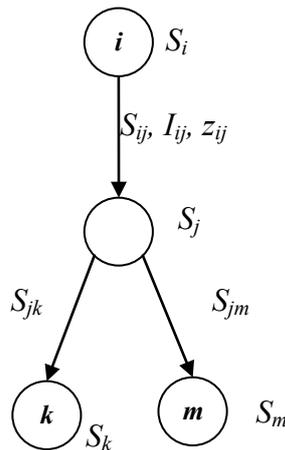


Figure III-2 : Exemple d'une arborescence avec la racine dans le sommet i avec les variables du Modèle de répartition de charge associées.

Les $3n+1$ équations non linéaires (III-1)-(III-3) forment le modèle de répartition de charges avec $3n+1$ variables complexes $(S, I, V, s_0) = \{S_{ij}, I_{ij}, S_{ij}, V_i, s_0 \mid (i, j) \in E, i=1, \dots, n\}$, où la tension V_0 et la puissance s_0 dans le sommet r sont des variables complexes. On appelle $x(s) = (S,$

I, V, s_0) la solution de ce modèle. Alors $\mathbb{X}(s) \subseteq \mathbb{C}^{2m+n+1}$ sera l'ensemble des solutions pour s donné :

$$\mathbb{X}(s) = \{x = (S, I, V, s_0) \mid x \text{ est une solution de (III-1) – (III-3)}\} \quad (\text{III-4})$$

Et l'ensemble de toutes les solutions sera alors :

$$\mathbb{X} = \bigcup_{s \in \mathbb{C}^n} \mathbb{X}(s) \quad (\text{III-5})$$

III.2.2. Répartition Optimale des Flux de la Puissance

Considérons, dans le problème de la répartition des charges, les variables (S, I, V, s_0) et tous les $s_i = (p_i, q_i)$ aussi comme des variables d'optimisation avec $p_i = p_i^c - p_i^g$ et $q_i = q_i^c - q_i^g$. Les valeurs de la consommation des puissances active et réactive dans le nœud i sont dénotées par p_i^c, q_i^c et les variables de la production des puissances active et réactive dans le nœud i sont dénotées par p_i^g, q_i^g . Les inégalités suivantes définissent les bornes sur ces variables :

$$\underline{p}_i^g \leq p_i^g \leq \bar{p}_i^g, \quad \underline{q}_i^g \leq q_i^g \leq \bar{q}_i^g, \quad \forall i = (0, \dots, n) \quad (\text{III-6})$$

$$\underline{p}_i^c \leq p_i^c, \quad \underline{q}_i^c \leq q_i^c, \quad \forall i = (0, \dots, n) \quad (\text{III-7})$$

Les variables de tension sont bornées par :

$$(V_i^{\min})^2 \leq |V_i|^2 \leq (V_i^{\max})^2, \quad \forall i = (1, \dots, n) \quad (\text{III-8})$$

Et les bornes sur les variables de la puissance sur des lignes :

$$|S_{ij}| \leq \bar{S}_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E \quad (\text{III-9})$$

Dans ce modèle, la fonction objectif est la somme des pertes de puissance active $r_{ij} |I_{ij}|^2$ qui sont des termes positifs quadratiques sur l'ensemble des arcs E du graphe. La fonction objectif est donc convexe. Et elle ne dépend pas des angles du déphasage de la tension dans les nœuds i et j de l'arc (i, j) pour tout arcs de E ni des variables de la consommation p_i^c et q_i^c .

$$f = \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} |I_{ij}|^2 \quad (\text{III-10})$$

On denote $l_{ij} = |I_{ij}|^2, v_i = |V_i|^2, s^g = \{s_i^g \mid i = 1, \dots, n\} = \{p_i^g, q_i^g \mid i = 1, \dots, n\}$ et $s^c = \{s_i^c \mid i = 1, \dots, n\} = \{p_i^c, q_i^c \mid i = 1, \dots, n\}$. Le vecteur s représente ainsi soit $s^g - s^c$, soit (s^g, s^c) en fonction du contexte.

Admettons que $x = x(s) = (S, I, V, s_0)$ soit une solution de (III-1)-(III-3) pour un s donné. Alors, $y = y(s) = (S, I, V, s_0)$ sera une relaxation de x où les angles du déphasage de la tension sont éliminés. Ainsi, y définit une fonction de projection h telle que $y = h(x)$. La fonction-objectif dans ces termes est donc $f(h(x))$. Sous la condition que la fonction $f(y)$ est convexe et strictement croissante sur $l_{ij}, \forall (i, j) \in E$, le problème de la répartition des flux de la puissance optimale peut être écrit par les équations (III-11)-(III-12).

OPF :

$$\min_x f(h(x)) \quad (III-11)$$

$$\text{Sous conditions } x \in X, (v, s_0, s) \text{ vérifient (III-6)-(III-9)} \quad (III-12)$$

Il faut noter aussi que, dans cette modélisation, la faisabilité du problème (III-11)-(III-12) est supposée.

III.2.3. Relaxation du problème

Les étapes de relaxation du problème OPF proposées par Farivar et al. sont présentées dans cette section. La première est une relaxation des angles (OPF-relaxation d'angles ou OPF-*ar*) de déphasage de la tension. Le modèle obtenu à cette étape reste toujours non convexe. La deuxième relaxation OPF-*cr* est convexe (voir la **Figure III-1**) ce qui permet d'utiliser les méthodes de résolution efficaces. Nous commencerons par exposer les détails d'OPF-*ar*.

En substituant l'équation (III-2) dans (III-1), on obtient $V_j = V_i - z_{ij} S_{ij}^* / V_i^*$.

En prenant le module de chaque côté de cette équation et la mettant au carré, il vient :

$$|V_j|^2 = \left| V_i - z_{ij} \frac{S_{ij}^*}{V_i^*} \right|^2.$$

On développe ensuite cette équation en utilisant la propriété du module des nombres complexes (*i.e.* $|y|^2 = yy^*, y \in \mathbb{C}$).

$$|V_j|^2 = \left(V_i - z_{ij} \frac{S_{ij}^*}{V_i^*} \right) \left(V_i - z_{ij} \frac{S_{ij}^*}{V_i^*} \right)^* = \left(V_i - z_{ij} \frac{S_{ij}^*}{V_i^*} \right) \left(V_i^* - z_{ij}^* \frac{S_{ij}}{V_i} \right) = |V_i|^2 + |z_{ij}|^2 |I_{ij}|^2 - (z_{ij} S_{ij}^* + z_{ij}^* S_{ij})$$

En remplaçant des variables, on obtient $v_j = v_i + |z_{ij}|^2 l_{ij} - (z_{ij} S_{ij}^* + z_{ij}^* S_{ij})$.

La fonction objectif (III-10) après le changement des variables devient :

$$f(l) = \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} l_{ij} \quad (III-13)$$

Les conditions (III-2) et (III-3) en termes de variables réelles se transforment en :

$$p_j = \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} (P_{ij} - r_{ij} l_{ij}) - \sum_{(j,k) \in \delta^+(j)} P_{jk}, \quad \forall j \quad (\text{III-14})$$

$$q_j = \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} (Q_{ij} - x_{ij} l_{ij}) - \sum_{(j,k) \in \delta^+(j)} Q_{jk}, \quad \forall j \quad (\text{III-15})$$

$$v_j = v_i - 2(r_{ij} P_{ij} + x_{ij} Q_{ij}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2) l_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E \quad (\text{III-16})$$

$$l_{ij} = \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{v_i}, \quad \forall (i, j) \in E \quad (\text{III-17})$$

Les conditions (III-13)-(III-17) décrivent le modèle en variables réelles avec des angles relaxés. Ce modèle est non convexe à cause de la famille des contraintes (III-17). Ces équations ont été proposées la première fois dans [79] pour modéliser des circuits de distribution radiale. Elles définissent le système d'équations dans les variables $(P, Q, l, v, p_0, q_0) = \{P_{ij}, Q_{ij}, l_{ij}, v_i, p_0, q_0 \mid (i, j) \in E, i = 1, \dots, n\}$. Puisqu'il est supposé que le modèle (III-1)-(III-3) a une solution, le modèle relaxé a aussi une solution. Puisque le graphe du réseau contient $n+1$ nœuds et n arcs, le système (III-14)-(III-17) a $4n+2$ équations avec $4n+2$ variables. L'unicité de la solution de ce système d'équations pour les réseaux radiaux a été démontrée dans [80].

Dans cette relaxation, le vecteur (S, l, v, s_0) peut être considéré comme une projection de (S, I, V, s_0) de vecteur des variables complexes sur un sous espace vectoriel réel. Pour le vecteur $(S, I, V, s_0) \in \mathbb{C}^{3n+1}$ donné cette projection est définie comme $h(S, I, V, s_0) : \mathbb{C}^{3n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{4n+2}$ et $h(S, I, V, s_0) = (P, Q, l, v, p_0, q_0)$, *i.e.* le changement de variables a eu lieu comme décrit ci après :

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \text{Re } S_{ij}, \quad Q_{ij} = \text{Im } S_{ij}, \quad l_{ij} = |I_{ij}|^2, \\ p_i &= \text{Re } s_i, \quad q_i = \text{Im } s_i, \quad v_i = |V_i|^2 \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

Les bornes (III-8), (III-9) sur des variables de la tension et de la puissance se réécrivent en nouvelles variables comme il suit :

$$\begin{aligned} \underline{v}_i &\leq v_i \leq \bar{v}_i, \quad \forall i = (1, \dots, n) \\ |P_{ij}| &\leq \text{Re } \bar{S}_{ij} = \bar{P}_{ij}, \quad |Q_{ij}| \leq \text{Im } \bar{S}_{ij} = \bar{Q}_{ij} \quad \forall (i, j) \in E \end{aligned} \quad (\text{III-19})$$

Les auteurs [71] démontrent que la projection inverse avec de la restauration d'angles est exacte pour les réseaux radiaux.

La seconde relaxation, OPF-*cr*, consiste à remplacer l'ensemble des équations (III-17) par des inégalités :

$$l_{ij} \geq \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{v_i}, \quad \forall (i, j) \in E \quad (\text{III-20})$$

Ces dernières ont une forme conique du deuxième ordre qui correspond au modèle convexe :

$$\left\| \begin{array}{l} 2P_{ij} \\ 2Q_{ij} \\ l_{ij} - v_i \end{array} \right\|_2 \leq l_{ij} + v_i, \quad \forall (i, j) \in E \quad (\text{III-21})$$

La relaxation conique OPF-*cr* que nous allons utiliser pour la modélisation du problème d'optimisation de l'architecture est décrite par les conditions (III-8), (III-9), (III-13)-(III-16) et (III-20).

III.3. Nouvelle approche pour le calcul du Problème de Répartition Optimale des Flux de Puissance dans des réseaux radiaux

Nous présentons ici une méthode du calcul pour le problème de répartition optimale des flux de puissance dans les réseaux radiaux. Elle repose sur la relaxation OPF-*ar* qui a été présentée dans la section précédente. Cette nouvelle approche est fondée sur la méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équations. L'idée consiste à rechercher, à chaque itération, une solution de l'approximation linéaire du système (III-14)-(III-17) en exploitant la matrice Jacobéenne et à utiliser la solution obtenue comme point de départ de la prochaine itération. L'algorithme s'arrête si la différence entre la valeur de la fonction objectif de la solution à l'itération k et à l'itération $k-1$ est inférieure à la précision souhaitée.

A. Méthode de Newton dans \mathbb{R}^n

Nous présentons ici la description de la méthode de Newton [81] pour la résolution d'un système d'équations $F(x^*) = 0$, où $F(x)$ est une fonction de la classe C^2 (classe des fonctions continues ayant des dérivées secondes continues) définie sur X , un sous espace de \mathbb{R}^n , comme $F: X \subset \mathbb{R}^n$. Nous supposons qu'il existe un $x^* \in X$ tel que $F(x^*) = 0$ et la matrice des dérivées partielles $J(x^*) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^*) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est inversible.

Puisque la fonction F appartient à la classe C^2 , cela revient à dire que les n fonctions composantes F_i sont aussi de la classe C^2 définies sur X et qu'on peut écrire pour chacune d'elle la formule de Taylor en x_0 avec l'accroissement $h = x^* - x_0$, si le segment $[x_0, x_0 + h] \subseteq X$:

$$0 = F_i(x^*) = F_i(x_0 + x^* - x_0) = F_i(x_0) + J_i(x_0)(x^* - x_0)^T + R_{1,i}(x_0, x^* - x_0)$$

où $R_{1,i}(x_0, x^* - x_0)$ est le vecteur de la différence entre des valeurs $F_i(x^*)$ et leur plan tangent dans x_0 . En termes de fonction F , cette dernière formule sera écrite comme :

$$0 = F(x^*) = F(x_0) + J(x_0)(x^* - x_0)^T + R(x_0, x^* - x_0).$$

Si on abandonne la matrice de la différence $R(x_0, x^* - x_0)$ et qu'on remplace le vecteur x^* par le vecteur x_1 nous obtenons :

$$0 = F(x_0) + J(x_0)(x_1 - x_0)^T$$

$$\text{ou } x_1^T = x_0^T - J^{-1}(x_0)F(x_0)^T.$$

La méthode de Newton est définie par la suite des éléments de \mathbb{R}^n $(x_k)_{k \geq 0}$, telle que :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné, } k = 0 \\ x_{k+1}^T = x_k^T - J^{-1}(x_k)F(x_k)^T, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\text{III-22})$$

à condition que les matrices $J^{-1}(x_k)$ soient inversibles. Il est montré dans [82] que cette suite $(x_k)_{k \geq 0}$ converge vers la solution x^* de façon quadratique.

En pratique le calcul des vecteurs $J^{-1}(x_k)F(x_k)$ est coûteux si n est grand. Ce calcul est donc remplacé par la résolution du système linéaire $J(x_k)z_k = F(x_k)$, où $z_k = J^{-1}(x_k)F(x_k)$. Ainsi, l'algorithme de la méthode de Newton pour le système $F(x) = 0$ devient :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné, } k = 0 \\ \text{tant que } (\|z_k\|_2 > \varepsilon \text{ et } k \leq N_{\max}) \text{ faire} \\ \quad \left[\begin{array}{l} \text{résoudre } J(x_k)z_k = F(x_k) \\ x_{k+1} = x_k - z_k \end{array} \right. \\ \text{fin} \end{cases} \quad (\text{III-23})$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne.

B. Méthode de Newton pour OPF-ar (NM OPF-ar)

Nous utilisons les mêmes notations que dans les sections précédentes. Etant donné une r -arborescence $A = (X, E)$ qui a été définie dans III.2.1 pour la représentation d'un réseau de distribution radial, ainsi que le vecteur des variables $x = (P, Q, l, v, p_0, q_0)$ définis dans III.2.3. Nous proposons une approche de résolution pour le problème d'optimisation formulé dans III.2.3 comme OPF-ar pour l'objectif de la minimisation des pertes.

OPF-ar :

$$\min f(l) = \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} l_{ij} \quad (\text{III-24})$$

Sous les contraintes :

$$F(x) = \begin{pmatrix} [F_1(x)] \\ [F_2(x)] \\ [F_3(x)] \\ [F_4(x)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} (P_{ij} - r_{ij} l_{ij}) - \sum_{(j,k) \in \delta^+(j)} P_{jk} - p_j \right]_{0 \leq j \leq n} \\ \left[\sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} (Q_{ij} - x_{ij} l_{ij}) - \sum_{(j,k) \in \delta^+(j)} Q_{jk} - q_j \right]_{0 \leq j \leq n} \\ \left[v_i - v_j - 2(r_{ij} P_{ij} + x_{ij} Q_{ij}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2) l_{ij} \right]_{\forall (i,j) \in E} \\ \left[P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 - l_{ij} v_i \right]_{\forall (i,j) \in E} \end{pmatrix} = 0$$

Ce système contient $4n+2$ équations sur les fonctions de C^2 en $4n+2$ variables. La fonction $F(x)$ est définie sur Ω , un sous espace de \mathbb{R}^{4n+2} , comme $F: \Omega \subset \mathbb{R}^{4n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{4n+2}$, avec $x = (P, Q, l, v, p_0, q_0) \in \mathbb{R}^{4n+2}$. Les trois premières familles d'équations du système (III-24) $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$ et $F_3(x) = 0$ sont décrites par des fonctions linéaires et les équations de la famille d'équations $F_4(x) = 0$ sont décrites sous forme quadratique. La matrice Jacobienne J de F dans un point $x_0 \in \Omega$ (avec les sous matrices des coefficients $[F_i]_{coeff}$) a la forme linéaire suivante :

$$J(x_0) = F'(x_0) = \begin{pmatrix} [F'_1(x_0)] \\ [F'_2(x_0)] \\ [F'_3(x_0)] \\ [F'_4(x_0)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [F_1]_{coeff} \\ [F_2]_{coeff} \\ [F_3]_{coeff} \\ [F'_4(x_0)] \end{pmatrix}$$

Nous proposons de résoudre le problème **OPF-ar** par la méthode de Newton couplée avec la résolution du programme linéaire formulé par (III-23). À chaque itération $k=0, \dots, N_{\max}$ nous résolvons le système linéaire $J(x_k)z_k - F(x_k) = 0$ et calculons $x_{k+1} = x_k - z_k$.

Puisqu'une partie de la matrice Jacobéenne J ne contient que les coefficients des éléments de sous matrices correspondantes pour les fonctions F_1 , F_2 et F_3 , et la deuxième partie a une forme linéaire, le calcul de $J(x_k)$ à chaque itération n'est pas coûteux.

La section suivante montre les résultats numériques de l'application de cette méthode sur les instances de test.

C. Résultats numériques

Dans l'implémentation de l'algorithme présenté dans la section III.3.B, nous avons considéré la fonction-objectif la minimisation des pertes, i.e. $\min \sum_{(i,j) \in E} r_{ij} l_{ij}$ (III-13). Les instances, générées aléatoirement, sont des r -arborescences $A = (X, E)$ correspondant à des réseaux ra-

diaux avec un poste source à la racine. Pour chaque série de tests, nous fixons deux paramètres pour la construction de l'arborescence : la profondeur de l'arborescence p , *i.e.* le nombre d'arcs dans un chemin du sommet r aux feuilles et le degré maximum de sommets d_{max} , *i.e.* pour chaque sommet $v \in X$, $d(v)$ est choisi aléatoirement dans l'intervalle $[1, d_{max}]$. Les paramètres p et d_{max} , ainsi que les bornes sur les variables de la consommation p_i^c et q_i^c et les valeurs de résistance R_{ij} et de réactance X_{ij} des lignes pour tout $(i, j) \in E$ sont déterminés aléatoirement dans les intervalles fixes et sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Tableau III-1 : Paramètres des instances de test pour le problème OPF.

Paramètres de l'instance du test		Test1	Test2	Test3	Test4	Test5
Profondeur p d'arborescence		5	5	6	10	11
Degré max d_{max} de sommets		5	6	7	5	3
Nombre moyen de sommets dans l'arborescence		74.5	152.45	1192.2	1781.8	4121.6
Intervalle des valeurs $\forall (i, j) \in E, i \in X$	R_{ij}	[0, 0.001]				
	X_{ij}					
	p_i^c	[0.001, 0.01]				
	q_i^c					

Les variables de tension v_i sont bornées dans l'intervalle $[0.64, 1]$. La tension au r est normalisée : $v_0 = 1$ pour $V_{base} = 20\text{kV}$ et $S_{base} = 10\text{MW}$.

Le code a été implémenté en C⁺⁺. Pour la résolution du programme linéaire, ainsi que le programme quadratique nous avons utilisé le logiciel commercial CPLEX IBM ILOG 12.6 avec le paramétrage standard [83] sous licence académique. Le calcul a été réalisé sous Linux sur un ordinateur portable 2.4GHz, 2GB de mémoire vive. Nous avons comparé notre méthode avec le modèle OPF-*cr* de Farivar et al. présenté dans II.2.3 qui a une famille des contraintes quadratiques. Les scénarios de tests ont été générés par 20 instances pour les paramètres de la structure d'arborescence différentes (5 familles de test). Les résultats de cette comparaison sont présentés dans le **Tableau III-2**.

Tableau III-2 : Les résultats de test de la méthode itérative reposant sur la programmation linéaire pour le problème d'OPF-*cr* comparée avec la résolution par la programmation quadratique sur les scénarios de test de réseaux radiaux.

		Test1	Test2	Test3	Test4	Test5
Temps moyen de calcul de la solution optimale d'OPF par la	programmation quadratique	0.04 s	0.14 s	1.17 s	3.76 s	10.38 s
	programmation linéaire couplée avec la méthode de Newton	0.01 s	0.04 s	1.08 s	3.31 s	4.08 s
Nombre moyen d'itérations d'algorithme NM OPF- <i>ar</i>		4	4	5	6	6

L'écart moyen entre le temps du calcul de la solution optimale d'OPF-*ar* par la programmation quadratique et par la méthode proposée dans cette section sur les instances de test est 1.81.

On voit que l'algorithme NM OPF-*ar* converge vers la solution optimale très vite et le nombre d'itérations augmente en fonction de la taille de l'instance de test.

III.4. Modèle combinatoire optimale du problème de reconfiguration des réseaux de distribution maillés

Nous formulons dans cette section le modèle combinatoire du problème d'optimisation des pertes Joules dans les réseaux de distribution maillés exploités en radial. Le réseau électrique donné est représenté en forme du graphe planaire au moins 1-connexe. La distribution de la puissance dans le réseau de distribution se réalise dans une structure radiale, donc on cherche la structure arborescente dans laquelle les pertes sont minimales. En utilisant la relaxation convexe exacte OPF-*cr* présenté dans II.2.3, nous formulons le modèle combinatoire exact pour le problème d'optimisation des pertes dans les réseaux de distribution maillés qui détermine des structures radiales optimales. Il s'agit d'un programme en variables mixtes avec des contraintes linéaires et quadratiques. Ce modèle a été développé par Sellé Toure et l'auteur [63], [72]. Le nombre des variables et des contraintes est polynomial. Les tests ont été faits sur les instances de test de réseaux IEEE.

III.4.1. Modèle combinatoire

Nous modélisons le problème en utilisant la même définition des variables comme dans la section III.2.3 pour le problème OPF-*cr*. Le réseau de distribution est représenté sous forme d'un graphe connexe $G = (X, A)$ symétrique sur $X \setminus r$ pour le cas du réseau sans les générateurs d'énergie décentralisés (GED) et symétrique sur X pour le cas du réseau avec GED. L'ensemble de sommets X représente les consommateurs avec les demandes positives de la consommation des puissances active et réactive. Dans les sommets représentant les GED les valeurs positives de la production des puissances active et réactive sont attribuées. Un sommet particulier, r , représente le poste source. L'ensemble A contient les paires des arcs (i, j) et (j, i) entre des nœuds i et j . On associe à chaque arc dans A deux valeurs fixes : la résistance r_{ij} et la réactance x_{ij} de la ligne (i, j) , identiques dans les deux sens. Pour les variables de la puissance active P_{ij} et réactive Q_{ij} et du module carré du courant l_{ij} passant par l'arc (i, j) , on autorise $P_{ij} \neq P_{ji}$, $Q_{ij} \neq Q_{ji}$ et $l_{ij} \neq l_{ji}$. On introduit les variables binaires e_{ij} pour l'appartenance de l'arc (i, j) à la solution (dans r -arborescence) si $e_{ij} = 1$ et 0 sinon.

A. Réseau sans Générateurs d'Énergie Décentralisés (GED)

Dans ce modèle on considère les pertes Joule à minimiser. La fonction objectif est la somme des pertes sur les lignes dans le réseau.

$$\min \sum_{(i,j) \in A} r_{ij} l_{ij} \quad (\text{III-25})$$

Du fait que la relaxation OPF-*cr* est exacte pour les réseaux radiaux, nous pouvons la réécrire pour les réseaux maillés dans ce modèle par (III-26) :

$$\begin{aligned} \text{a) } p_j &= \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} (P_{ij} - r_{ij} l_{ij}) - \sum_{(j,k) \in \delta^+(j)} P_{jk}, \quad \forall j \\ \text{b) } q_j &= \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} (Q_{ij} - x_{ij} l_{ij}) - \sum_{(j,k) \in \delta^+(j)} Q_{jk}, \quad \forall j \\ \text{c) } v_j &\geq v_i - 2(r_{ij} P_{ij} + x_{ij} Q_{ij}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2) l_{ij} - (1 - e_{ij}) M, \quad \forall (i, j) \in A \\ \text{d) } v_j &\leq v_i - 2(r_{ij} P_{ij} + x_{ij} Q_{ij}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2) l_{ij} + (1 - e_{ij}) M, \quad \forall (i, j) \in A \\ \text{e) } l_{ij} &\geq \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{v_i}, \quad \forall (i, j) \in A \\ \text{f) } \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} e_{ij} &= 1, \quad \forall j \in X \setminus r \end{aligned} \quad (\text{III-26})$$

$$\text{g) } P_{ij} \leq e_{ij} \bar{P}_{ij}, \quad Q_{ij} \leq e_{ij} \bar{Q}_{ij} \quad \forall (i, j) \in A$$

$$\text{h) } \underline{v}_i \leq v_i \leq \bar{v}_i, \quad \forall i = (1, \dots, n)$$

$$\text{i) } \underline{p}_i^g \leq p_i^g \leq \bar{p}_i^g, \quad \underline{q}_i^g \leq q_i^g \leq \bar{q}_i^g, \quad \forall i = (0, \dots, n)$$

$$\text{j) } \underline{p}_i^c \leq p_i^c, \quad \underline{q}_i^c \leq q_i^c, \quad \forall i \in X \setminus r$$

$$\text{k) } r_{ij}, x_{ij} > 0, \quad e_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A$$

Le flot de la puissance doit obéir à la 1^{ère} loi de Kirchhoff sur les nœuds. Ceci est considéré dans les équations (III-26)a- (III-26)b. Quand certaines variables e_{ij} sont égales à 1, les contraintes disjonctives (III-26)c- (III-26)d sont serrées et définissent les conditions (III-16) où le domaine de définition des v_i , si e_{ij} est égal à 0. Nous supposons que M est une constante assez grande par rapport au domaine de variation des variables v_i .

Puisque nous cherchons une structure arborescente couvrante dans le graphe orienté, le flot sera positif sur les lignes actives et nul sur les lignes inactives dans la solution. Les contraintes qui définissent la structure arborescente (radiale) et relient les variables de flot avec les variables binaires définies par les conditions (III-26)f- (III-26)g. Puisque les e_{ij} sont des variables binaires, les conditions (III-26)g signifient que les variables P_{ij} , Q_{ij} sont égales à zéro si la solution ne contient pas l'arc (i, j) . Sinon elles sont bornées par les constantes \bar{P}_{ij} et \bar{Q}_{ij} respectivement si l'arc (i, j) appartient à la solution.

La famille des contraintes (III-26)f impose les conditions de l'unicité des arcs entrant dans chaque sommet du $X \setminus r$. Nous considérons le cas général, où toutes les lignes du réseau sont interruptibles. Pour le cas particulier où $W \subseteq A$ avec $A \setminus W \neq \emptyset$ est un sous-ensemble des lignes qui contiennent des interrupteurs, on peut ajouter une condition pour chaque paire des arcs (i, j) et (j, i) dans $A \setminus W$ que l'un des deux arcs doit être pris dans la solution, i.e. $e_{ij} + e_{ji} = 1$.

Cependant, il existe une formulation alternative des contraintes pour définir la structure radiale (III-27) [63]. Elle provient du fait que nous avons besoin de trouver tous les cycles C_k (ou ils sont déjà définis à l'avance pour une instance donnée) et ouvrir chacun d'eux par la suppression d'un arc dans chaque circuit. Et puis demander que la somme de toutes les variables de choix e_{ij} sont égale au nombre de sommets moins 1, avec la condition $e_{ij} + e_{ji} \leq 1$. Ces contraintes sont présentées ci-dessous :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in A} e_{ij} &= n-1, \quad \text{où } n = |X| \\ \sum_{(i,j) \in C_k} e_{ij} &= |C_k| - 1, \quad \forall C_k, k \leq Nbr \\ e_{ij} + e_{ji} &\leq 1, \quad \forall (i, j) \in A \end{aligned} \tag{III-27}$$

Ici la constante Nbr est le nombre de circuits dans le graphe. En pratique, utiliser les conditions (III-26)f- (III-26)g pour définir l'arborescence dans le modèle est plus efficace au niveau du temps de résolution du programme que le jeu de contrainte (III-27).

Les bornes sur les valeurs de la tension restent identiques comme dans la formulation OPF-cr. Dans ce modèle, elles sont définies par (III-26)h).

Le théorème suivant montre que le modèle combinatoire défini par les conditions (III-25)-(III-26)) en variables mixtes est exact.

Théorème III-1 : Etant donné un graphe orienté G défini dans le modèle III.4.1 et la solution optimale du programme (III-25)- (III-26) $\tilde{Y} = \{P_{ij}^*, Q_{ij}^*, l_{ij}^*, v_i^*, p_0^*, q_0^* \mid (i, j) \in A, i = 1, \dots, n\}$. Si $\bar{A} := \{(i, j) \in E : l_{ij}^* \neq 0\}$, alors $G(V, \bar{A})$ est une r -arborescence. De plus, cette solution est exacte en termes d'OPF-cr.

Démonstration : Selon la définition d'une r -arborescence, nous devons démontrer que pour tout sommet v il existe un chemin unique entre le sommet de la racine r et v .

Supposons que le graphe de la solution optimale contient une r -coupe C vide définissant une partition sur l'ensemble de sommet du graphe $V = S \cup T$ où $r \in S$ avec la demande totale dans les sommets de T non nul : $p(T) + q(T) \neq 0$. Cela implique que les contraintes de satisfaction des demandes (III-26) (a, b, e, g) ne sont pas vérifiées, i.e. la solution n'est pas optimale.

L'unicité de tels chemins $r-v$ pour tous v est garantie par les contraintes (III-26) f, g, k). Par ce moyen la solution quelconque satisfaisant le système (III-26) passe par une r -arborescence dans G .

Les contraintes convexes relaxées définies par (III-26) seront serrées dans la solution optimale puisque l'on minimise la somme des pertes $\sum_{(i,j) \in A} r_{ij} l_{ij}$ dans le réseau. Les contraintes disjointes (III-26)c- (III-26)d seront valables dans le cas d'une r -arborescence. C'est pourquoi on obtient que la solution optimale du programme (III-25)- (III-26) est exacte en termes OPF- cr car l'ensemble des solutions réalisables du (III-26) est l'ensemble des arborescences parmi lesquelles on cherche une arborescence minimisant les pertes. ■

B. Réseau avec Générateurs d'Energie Décentralisés (GED)

Dans le modèle du problème de reconfiguration pour le cas des réseaux avec GED, nous supposons les contraintes supplémentaires suivantes :

1. le support de la solution du modèle est un graphe partiel 1-connexe ;
2. la puissance (active et réactive) totale produite par les GED doit être soit consommée dans le réseau, soit injectée dans le réseau du niveau supérieur par le nœud de poste source, i.e. soit $p_r^c = 0$, $q_r^c = 0$ soit $p_r^c \geq 0$ et $q_r^c \geq 0$.

Nous considérons la même fonction objectif à minimiser que dans le modèle sans GED (III-25). Nous notons $X^{GED} \subseteq X$ un sous-ensemble de sommets représentant les nœuds avec GED. Le système de contraintes (III-26) est mis à jour et formulé par (III-28).

$$\begin{aligned}
\text{a) } p_j &= \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} (P_{ij} - r_{ij} l_{ij}) - \sum_{(j,k) \in \delta^+(j)} P_{jk}, \quad \forall j \in X \\
\text{b) } q_j &= \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} (Q_{ij} - x_{ij} l_{ij}) - \sum_{(j,k) \in \delta^+(j)} Q_{jk}, \quad \forall j \in X \\
\text{c) } v_j &\geq v_i - 2(r_{ij} P_{ij} + x_{ij} Q_{ij}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2) l_{ij} - (1 - e_{ij}) M, \quad \forall (i, j) \in A \\
\text{d) } v_j &\leq v_i - 2(r_{ij} P_{ij} + x_{ij} Q_{ij}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2) l_{ij} + (1 - e_{ij}) M, \quad \forall (i, j) \in A \\
\text{e) } l_{ij} &\geq \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{v_i}, \quad \forall (i, j) \in E \\
\text{f) } \sum e_{ij} &= n - 1, \quad \forall (i, j) \in A \\
\text{g) } 0 &\leq P_{ij} \leq e_{ij} \bar{P}_{ij}, \quad 0 \leq Q_{ij} \leq e_{ij} \bar{Q}_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A \\
\text{h) } \underline{v}_i &\leq v_i \leq \bar{v}_i, \quad \forall i \in X \setminus r \\
\text{i) } \underline{p}_i^g &\leq p_i^g \leq \bar{p}_i^g, \quad \underline{q}_i^g \leq q_i^g \leq \bar{q}_i^g, \quad \forall i \in X \setminus r
\end{aligned}
\tag{III-28}$$

$$j) \underline{p}_i^c \leq p_i^c, \quad \underline{q}_i^c \leq q_i^c, \quad \forall i \in X \setminus r$$

$$k) r_{ij}, x_{ij} > 0, \quad \forall (i, j) \in A$$

$$l) \sum_{\forall i \in \delta^-(j)} f_{ij}^m - \sum_{\forall k \in \delta^+(j)} f_{jk}^m = 0, \quad \text{si } m \neq j \quad \forall j \in X \setminus r, \quad \forall m \in X^{GED}$$

$$m) \sum_{\forall i \in \delta^-(j)} f_{ij}^m - \sum_{\forall k \in \delta^+(j)} f_{jk}^m = 1, \quad \text{si } m = j \quad \forall j \in X \setminus r, \quad \forall m \in X^{GED}$$

$$n) f_{ij}^m \leq e_{ij} + e_{ji}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad \forall m \in X^{GED}$$

$$o) e_{ij} + e_{ji} \leq 1, \quad \forall (i, j) \in A$$

$$p) e_{ij} \in \{0,1\}, \quad f_{ij} \in [0,1], \quad \forall (i, j) \in A$$

Ici, les contraintes (III-28)a-(III-28)b et (III-28)l- (III-28)m sur des variables réelles de flot fictif f_{ij} , $\forall (i, j) \in A$ et de flot des puissances active et réactive P_{ij}, Q_{ij} , $\forall (i, j) \in A$, avec les contraintes (III-28)g et (III-28)n définissent les conditions de la connexité du graphe partiel du support de la solution, tandis que la satisfaction des contraintes (III-28)f et (III-28)o garantie sa 1-connexité.

III.4.2. Résultats numériques

Nous présentons ici les résultats des tests de résolution des modèles (III-25)-(III-26) et (III-25), (III-28)) décrits dans la section précédente avec le critère d'optimisation de la minimisation des pertes.

Pour le cas des réseaux sans GED, le modèle (III-25)-(III-26) a été testé sur les exemples IEEE : 33 nœuds [79], 69 nœuds [84], ainsi que sur des réseaux de test brésiliens : 135 nœuds et 202 nœuds [67]. Ces réseaux de test correspondent aux graphes planaires 2-connexes avec le ratio (**nombre d'arêtes**) / (**nombre de sommets**) environ 1,11. Le programme a été résolu avec un logiciel commercial IBM ILOG CPLEX 12.6 avec le paramétrage standard [83] et il a été écrit en C++. Lorsque que l'on suppose dans le modèle que certaines variables prennent des valeurs en nombres entiers, il implique d'appeler une procédure " Séparation et Evaluation " (*Branch and Bound* en anglais) qui peut nécessiter un temps de calcul exponentiel dans le cas où le problème appartient à la classe des problèmes NP-difficiles (ce qui est le cas ici). Pourtant, sur les instances de test des réseaux IEEE 33 nœuds, 69 nœuds, ainsi que des réseaux de test brésiliens 135 nœuds et 202 nœuds le temps de résolution du modèle est acceptable (687.4 sec. pour le réseau 202 nœuds). Mais sur le réseau de test IEEE [85] contenant 880 nœuds, au bout de 12 heures, l'optimum n'a pas été atteint.

Afin de comparer l'efficacité de la recherche de la solution optimale du problème III.4 nous avons présenté dans le **Tableau III-3** les résultats numériques de résolution du modèle (III-25)-(III-26) ainsi que les résultats de résolution du problème en formulation non linéaire non convexe obtenus par l'application des algorithmes heuristiques dans les articles [67], [86] et [87].

Tableau III-3 : Résultats comparatifs sur les réseaux de test. La solution optimale du problème en formulation convexe exacte et les solutions des algorithmes heuristiques du problème en formulation non convexe.

Fonction objectif : minimisation des pertes dans le réseau					
Instance de test	Solution optimale (formulation convexe exacte)		Meilleures solutions des algorithmes heuristiques (formulation exacte non linéaire non convexe)		
	Pertes (kW)	Temps de calcul (s)	Pertes (kW)	Temps de calcul (s)	Réf.
IEEE 33n	139.5	1.02	139.6	3.51	[86]
IEEE 69n	204.5	7.16	224.6	19.84	[87]
Réseau brésilien 135n	280.1	550.5	280.3	240	[67]
Réseau brésilien 202n	511.2	687.4	511.6	49.98	[67]

Dans la première colonne du **Tableau III-3** sont placés les noms des réseaux sur lesquels nous avons testé le modèle. La deuxième et quatrième colonnes correspondent aux valeurs de la fonction objectif de la solution optimale et de la solution heuristique proposée par des auteurs. Nous pouvons voir que la solution optimale est trouvée même plus rapidement qu'avec les algorithmes heuristiques sur des petites instances, mais avec l'augmentation de la taille du réseau, le calcul devient plus long. Ceci est dû à l'augmentation exponentielle de la taille de l'arbre de branchement dans l'algorithme de "Séparation et Evaluation". L'amélioration du calcul de la solution optimale peut se faire par l'utilisation de "bonnes" solutions initiales, qui peuvent être trouvées par des algorithmes heuristiques fondés sur l'exploitation de la relaxation du modèle (III-25)-(III-26) en variables réelles. Nous allons les présenter dans la section suivante.

Pour le cas de réseaux contenant des GED le modèle (III-25), (III-28)) a été testé sur les réseaux IEEE : 33 nœuds [79] et 70 nœuds [84]. Le réseau 33 nœuds contient 2 GED de puissances actives $p_i^g = 200\text{kW}$ chacun et le réseau 69 nœuds contient 3 GED de puissances actives $p_i^g = 400\text{kW}$ chacun. Pour chaque GED nous avons défini la production de la puissance réactive comme une constante $q_i^g = 0.4 p_i^g$. Les résultats numériques contenant les valeurs optimales de la fonction objectif du modèle (III-25), (III-28)) et le temps de résolution sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Tableau III-4: Résultats numériques de résolution du modèle convexe du problème de la reconfiguration optimale des réseaux de test avec présence des GED.

Fonction objectif : minimisation des pertes dans le réseau		
Instance de test	Solution optimale (formulation convexe exacte)	
	Pertes (kW)	Temps de calcul (s)
IEEE 33n	105.1	2.87
IEEE 69n	107.5	2848.97

Ces résultats montrent que l'insertion des GED dans le réseau diminue les pertes de 24.6% pour le réseau IEEE 33 nœuds et de 47.4% pour le réseau IEEE 69 nœuds. Par contre le temps du calcul de la solution optimale augmente considérablement : 181% pour le réseau 33 nœuds et 40685% pour le réseau 69 nœuds. Afin d'obtenir des résultats plus performants au niveau de temps du calcul nous pouvons utiliser des algorithmes heuristiques qui peuvent fournir de bonnes solutions initiales. La question du développement de tels algorithmes heuristiques reste ouverte, mais ils pourront être fondés sur des algorithmes présentés dans la section III.6.2.

III.5. Divers problèmes NP-difficiles de flot arborescent de coût minimum

Dans la section III.5, nous présentons les trois cas particuliers du problème de flot arborescent de coût minimum, puis nous expliquons la motivation qui nous a incités à étudier ces cas particuliers du problème. Nous décrivons ensuite des problèmes combinatoires existants dans la littérature liées au problème de flot arborescent.

III.5.1. Introduction

Pour les trois cas particuliers du problème de flot arborescent de coût minimum présentés dans notre travail, nous allons donner les formulations en termes de programmation mathématique en variables mixtes avec les contraintes de la conservation de flot et les contraintes topologiques dans un graphe connexe avec des capacités sur les arcs. Pour chacun des trois problèmes, nous présentons deux approches de résolution : exactes par la programmation mathématique en variables mixtes et par une approche heuristique fondée sur la relaxation des variables binaires. Les résultats ont montré (ce qui n'est pas surprenant) que la méthode exacte ne peut pas être appliquée efficacement pour les instances de grande taille, car ces problèmes sont NP-difficiles au sens fort (Annexe A). Par contre, du fait que les algorithmes heuristiques exploitent intelligemment la solution fractionnaire du problème, les résultats numériques sur les instances de test sont proches de l'optimum. Cela pourra être utilisé pour de futurs travaux afin d'obtenir des bornes d'approximation garantie.

III.5.2. Problèmes NP-difficiles de flot arborescent de coût minimum

Puisque la formulation proposée du problème de reconfiguration (section III.4.1) est un problème NP-difficile, des algorithmes exacts de solution nécessitent un temps exponentiel par rapport de la taille de données et de grandes instances ne sont pas traitables dans un temps acceptable. La difficulté essentielle vient de la contrainte topologique qui exige que la distribution doit être réalisée via une structure arborescente (réseau radial). Nous sommes obligés de relaxer ou simplifier le problème, pour revenir plus tard au problème de départ. Dans le meilleur cas, nous obtenons une solution exacte (comme dans III.2), parfois une solution avec une approximation garantie ou au moins une solution heuristique réalisable. Pour le problème de reconfiguration, nous proposons une simplification.

En termes d'optimisation combinatoire, le problème simplifié de la distribution de l'énergie est proche des trois problèmes suivants :

- “ Flot arborescent avec pertes quadratiques minimum ” ;
- “ Flot arborescent de coût quadratique minimum ” ;
- “ Flot arborescent de coût linéaire minimum dans le graphe avec les capacités sur les arcs ”.

Par rapport aux problèmes classiques de flot dans les réseaux étudiés en combinatoire, dans ces trois problèmes, on recherche une structure particulière : une *r-arborescence* optimale. Nous montrons dans l'Annexe A que cette condition supplémentaire implique la NP-complétude pour ces trois problèmes.

En vue de simplification, il existe aussi une analogie avec le problème de l'arbre couvrant de poids minimum et avec le problème de flot de coût minimum. Le premier modèle est utile quand on veut minimiser le coût de construction d'un réseau de distribution et le coût de chaque ligne est connu. Mais au moment de la distribution, le coût (les pertes Joule) est une fonction du flux. Le deuxième modèle nécessite une linéarisation de pertes. Sans contraintes de capacités, il existe toujours une solution optimale du problème du flot de coût (linéaire) minimum dont le support est une *r-arborescence* [88].

III.5.3. Problèmes liés au flot arborescent de coût minimum

Avant de formuler les trois problèmes de flot arborescent mentionnés dans la section précédente nous décrivons d'abord dans les paragraphes suivants les résultats existants dans la littérature sur la problématique des problèmes de l'arbre couvrant de poids minimum, du flot de coût minimum et du flot arborescent avec coût général non linéaire.

A. Arbre couvrant de poids minimum

Le problème de l'arbre couvrant de poids minimum (*Minimum Spanning Tree* ou MST) est l'un des problèmes d'optimisation combinatoire les plus connus. Etant donné un graphe connexe avec les arêtes pondérées, il s'agit de déterminer un graphe partiel connexe de poids minimum.

Aussi de nombreuses variantes de ce problème ont été étudiées, avec d'autres contraintes imposées à la conception, comme le nombre de sommets dans un sous-arbre (problème généralisé), [89], le nombre d'arcs dans tous les chemins (*hop-constrained problem*), [90], [91] le nombre d'arcs entre toute paire de sommets (*diameter-constrained problem*) [92], [93].

Lorsque les coûts des arcs du graphe sont fixes et sans aucune contrainte supplémentaire posée, le problème peut être résolu en temps polynomial [94]. Les algorithmes de résolution plus connus ont été développés par Kruskal $O(m \log n)$ et Prim $O(n^2)$.

B. Flot de coût minimum

Soit un réseau $G = (V, A)$ (voir II.2.1), un sommet particulier $s \in V$ (*source*) est choisi ; tous les sommets sauf s ont des demandes (positives ou nulles) : $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}^+$; la fonction $u(a) : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ associe à chaque arc sa capacité. Pour chaque arc $a \in A$, on définit les variables du flot passant dans les arcs par f_a . Le coût du passage du flot dans l'arc est défini par la fonction $c(f_a) : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Le problème de flot à coût minimum consiste à déterminer comment acheminer dans les arcs du réseau une quantité de flot pour satisfaire les demandes dans tous les sommets du graphe de sorte à minimiser le coût total tout en respectant les contraintes de conservation du flot dans chaque sommet et les contraintes de capacité des arcs. Le problème du flot de coût minimum est défini par (III-29).

$$\min \sum_{a \in A} c(f_a)$$

sous les contraintes de

1) capacité :

$$0 \leq f_a \leq u(a), \forall a \in A ;$$

(III-29)

2) la loi de conservation de flot :

$$\sum_a f(a) = \sum_b f(b) + d_j, \forall j \neq s, \forall a = (i, j) \in A, b = (j, k) \in A$$

La complexité des problèmes de flot de coût minimum (*Minimum Cost Network Flow* ou MCNF) [95] dépend du type de la fonction de coût sur les arcs. Pour le cas linéaire où la fonction de coût est définie comme $c(f_a) = c_a f_a$ avec les constantes c_a pour tout arc $a \in A$, le problème MCNF est linéaire et peut être résolu en temps polynomial. La complexité de

l'algorithme combinatoire proposé par Edmonds et Karp [96] est de $O((n+m)\log U S(n, m, C))$, où U et C sont les bornes absolues sur les capacités et les coûts des arcs et n et m est le nombre de sommets et d'arcs respectivement dans le graphe. Ainsi, MCNF linéaire peut être résolu en un temps polynomial par la programmation linéaire, voir [97].

Si les coûts sont définis par une fonction convexe sur un ensemble convexe défini par les contraintes, le problème est appelé MCNF convexe. Dans ce cas l'optimum local est global. Les méthodes de résolution sont plus complexes que dans le cas linéaire, mais ces problèmes restent faciles [97].

Le cas des coûts concaves (par ex. $c(f_a) = c_a f_a^d$, $c_a > 0$, $d \in [0, 1]$) classe le problème MCNF dans la famille des problèmes NP-difficiles [98] ce qui nécessite d'utiliser des algorithmes exponentiels comme par exemple "Séparation et évaluation" pour trouver la solution optimale ou des algorithmes approximatifs pour trouver une solution approchée, voir [99].

Ainsi, le MCNF avec le coût non linéaire général, très fréquent dans des problèmes de planification ou d'exploitation des réseaux électriques, est le plus difficile à résoudre.

C. Flot arborescent optimal avec coût général non linéaire

Une formulation du problème de flot arborescent de coût général non linéaire a été proposée dans [100]. Les auteurs ont proposé une approche fondée sur la programmation dynamique qui résout récursivement l'ensemble des sous problèmes et sauvegarde leurs solutions. Chaque sous problème du problème d'origine de la recherche d'une r -arborescence dans le graphe connexe $G=(V, A)$ consiste à trouver une x -arborescence ($x \in S$) de flot de coût général minimum sous les contraintes de la capacité des arcs et la satisfaction des demandes pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$. La solution du problème initial se trouve comme une combinaison des solutions des sous problèmes déjà résolus. Cette approche ne fonctionne bien que sur les cas des problèmes formulés dans des graphes ayant des capacités sur les arcs. Pour définir la complexité du problème les auteurs citent autant un cas particulier le problème de flot de coût concave minimum qui est NP-difficile.

III.5.4. Problème de flot arborescent avec pertes quadratiques minimales (FAPQM)

Nous formulons ici un nouveau problème appartenant à la classe des problèmes NP-difficiles qui consiste à trouver un flot arborescent avec les pertes quadratiques minimales. Le problème se pose dans un graphe connexe qui contient un sommet source et un ensemble d'autres sommets désignés par des sommets des utilisateurs ayant des demandes de quantité de flots fixes positifs. À chaque arc on associe des coûts fixes. Les pertes sur les arcs sont définies par une fonction quadratique en fonction de la quantité de flot passant par des arcs. Par conséquent, nous souhaitons trouver une arborescence avec la racine dans le sommet de source sous les contraintes de satisfaction de tous les besoins des utilisateurs (*i.e.* les demandes de flot) en minimisant le coût total qui est la somme des pertes sur tous les arcs du

graphe. Nous allons donner une formulation de ce problème sous la forme d'un programme linéaire avec les contraintes linéaires et quadratiques en variable mixtes.

III.5.4.1. Formulation du problème

Etant donné un graphe connexe orienté $G = (X, E)$, un sommet $r \in X$ – une source. À chaque sommet de $X \setminus r$ on attribue les demandes positives : $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}^+$. Les coûts fixes sur les arcs de E sont définis par la fonction $c(e) : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Nous attribuons aussi à chaque arc une fonction quadratique des pertes. Le problème consiste à trouver un flot qui vérifie les conditions suivantes, exprimées sous forme de programmation mathématique (voir II.2.2) :

$$\text{a) } \min \sum_{e \in E} c_e f_e^2$$

$$\text{b) } \sum_{e \in \delta^-(v)} (f_e - c_e f_e^2) - \sum_{k \in \delta^+(v)} f_k \geq d_i, \quad \forall v \in X \setminus r$$

(III-30)

(la loi de Kirchhoff avec la sur-satisfaction de la demande⁶)

$$\text{c) } f_e - c_e f_e^2 \geq 0, \quad c_e > 0, \quad f_e \in \mathbb{R}^+, \quad \forall e \in E$$

d) Si $A := \{e \in E : f_e \neq 0\}$, alors $G(X, A)$ est une r -arborescence

Dans ce modèle nous considérons minimiser la fonction objectif (III-30)a qui est la somme des pertes de coût quadratique sur les arcs. La famille des contraintes (III-30)c définissent les conditions sur les pertes. La loi de Kirchhoff avec la sur-satisfaction de la demande pour tout sommet x , $x \neq r$ est exprimée par (III-30)b. La contrainte (III-30)d pose la condition que la distribution du flot se réalise dans une structure r -arborescente.

III.5.4.2. Modèle sous forme de programmation quadratique

Nous pouvons reformuler le modèle (III-30) en termes de programme quadratique avec les contraintes quadratiques et linéaires en variables mixtes. Ce modèle est défini par (III-31).

$$\text{a) } \min \sum_{e \in E} c_e f_e^2$$

$$\text{b) } \sum_{e \in \delta^-(v)} (f_e - c_e f_e^2) - \sum_{k \in \delta^+(v)} f_k \geq d_i, \quad \forall v \in X \setminus r$$

(III-31)

⁶ Approvisionnement des consommateurs par une quantité de flot qui est supérieure à la quantité demandée.

$$c) f_e - c_e f_e^2 \geq 0, \quad c_e > 0, \quad \forall e \in E$$

$$d) \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = 1, \quad \forall v \in E$$

$$e) f_e \leq M x_e, \quad \forall e \in E$$

$$f) x_e \in \{0,1\}, \quad f_e \in \mathbb{R}^+, \quad \forall e \in E$$

Les conditions (III-31)b, (III-31)d, (III-31)e et (III-31)f impliquent la réalisation de la contrainte (III-31)d sur la structure arborescence. Ceci découle du Théorème III-1 car le problème FAPQM est un cas particulier du problème de reconfiguration.

III.5.5. Problème de flot arborescent de coût quadratique minimum (FACQM)

Dans ce problème nous cherchons, dans un graphe connexe orienté ayant l'ensemble d'arcs pondérés par des valeurs fixes, un flot de coût quadratique minimum ayant la structure arborescente. Ce problème ressemble de celui qui a été formulé dans la section précédente. On utilise les mêmes notations, sauf que la distribution se réalise dans un graphe sans pertes sur les arcs. Ce problème appartient aussi à la classe des problèmes NP-difficiles. Nous présentons ici une formulation exacte sous forme de programmation quadratique.

III.5.5.1. Formulation du problème

Soit un graphe connexe orienté $G = (X, E)$, un sommet $r \in X$ – une source. À chaque sommet de $X \setminus r$ on attribue les demandes positives : $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}^+$. Les coûts fixes sur les arcs de E sont définis par la fonction $c(e) : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Le problème consiste à trouver un flot qui vérifie les conditions (III-32), exprimées sous forme de programmation quadratique.

$$a) \min \sum_{e \in E} c_e f_e^2$$

$$b) \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e - \sum_{k \in \delta^+(v)} f_k = d_i, \quad \forall v \in X \setminus r \tag{III-32}$$

$$c) c_e > 0, \quad f_e \in \mathbb{R}^+, \quad \forall e \in E$$

c) Si $A := \{e \in E : f(e) \neq 0\}$, alors $G(X, A)$ est une r -arborescence

Dans ce modèle, nous supposons la même fonction objectif quadratique comme (III-30)a qui est la somme de flot quadratique à minimiser. Nous supposons deux familles de contraintes : dans chaque sommet v , $v \neq r$ la loi de conservation de flot doit être vérifiée et nous cherchons dans G une r -arborescence qui minimise la fonction objectif.

III.5.5.2. Modèle sous forme de programmation quadratique

Nous utilisons la même idée que dans III.5.4.2 pour formuler le problème (III-32) en termes de la programmation quadratique en écrivant les contraintes de r -arborescence comme (III-31)d- (III-31)e et supposant que les variables x sont binaires. Le modèle est formulé par les conditions (III-33).

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \min \sum_{e \in E} c_e f_e^2 \\
 \text{b) } & \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e - \sum_{k \in \delta^+(v)} f_k = d_i, \quad \forall v \in X \setminus r \\
 \text{c) } & \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = 1, \quad \forall e \in E \\
 \text{d) } & f_e \leq M x_e, \quad \forall e \in E \\
 \text{e) } & f_e \in \mathbb{R}^+, x_e \in \{0,1\}, c_e > 0, \quad \forall e \in E
 \end{aligned} \tag{III-33}$$

La formulation (III-33) est un programme quadratique avec les contraintes linéaire en variables mixtes. Selon le Théorème III-1 la solution du programme (III-33) forme une r -arborescence dans G avec les valeurs de flots non nulles car le problème FACQM est un cas particulier du problème de reconfiguration.

III.5.6. Problème de flot arborescent de coût linéaire minimum avec les capacités sur les arcs

Ce problème se pose dans un graphe connexe orienté avec les capacités sur les arcs. Il demande de trouver un flot arborescent depuis un sommet particulier considéré comme une source vers tous les sommets du graphe ayant des demandes positives. Le problème de flot de coût linéaire minimum sans capacité sur les arcs peut être résolu par un algorithme polynomial, voir [97]. Et sa solution forme une arborescence dans le graphe si les données sont entières. Nous démontrons dans l'Annexe A la NP-complétude du problème de l'existence d'un flot arborescent dans le graphe orienté avec les capacités sur les arcs. Dans cette section nous formulons ce problème en termes de programmation linéaire en variables mixtes.

III.5.6.1. Formulation du problème

Soit un graphe connexe orienté $G = (X, E)$, un sommet $r \in X$ – une source. À chaque sommet de $X \setminus r$ on attribue les demandes positives : $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}^+$. Les coûts fixes sur les arcs de E sont définis par la fonction $c(e) : 2^E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Chaque arc $e \in E$ a une borne inférieure b_e et supérieur \bar{b}_e sur sa capacité. Le problème consiste à trouver un flot qui vérifie les conditions (III-34), écrites sous la forme de programme linéaire :

$$\begin{aligned}
\text{a) } & \min \sum_{e \in E} c_e f_e \\
\text{b) } & \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e - \sum_{k \in \delta^+(v)} f_k = d_i, \quad \forall v \in X \setminus r \\
\text{c) } & \underline{b}_e \leq f_e \leq \bar{b}_e, \quad \forall e \in E \\
\text{d) } & c_e > 0, f_e \in \mathbb{R}^+, \quad \forall e \in E \\
\text{c) } & \text{Si } A := \{e \in E : f(e) \neq 0\}, \text{ alors } G(X, A) \text{ est une } r\text{-arborescence}
\end{aligned} \tag{III-34}$$

Dans ce modèle la fonction objectif est linéaire. Nous supposons trois familles de contraintes : dans chaque sommet v , $v \neq r$ la loi de conservation de flot doit être vérifiée, on admet les capacités sur les arcs et nous cherchons dans G une r -arborescence qui minimise la fonction objectif.

III.5.6.2. Modèle sous forme de programmation linéaire

Nous utilisons la même idée que dans III.5.4.2 pour formuler le problème (III-34) en termes de la programmation linéaire en écrivant les contraintes de r -arborescence comme (III-31)d)-(III-31)e et supposant que les variables x sont binaires. Le modèle est formulé par (III-35).

$$\begin{aligned}
\text{a) } & \min \sum_{e \in E} c_e f_e \\
\text{b) } & \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e - \sum_{k \in \delta^+(v)} f_k = d_i, \quad \forall v \in X \setminus r \\
\text{d) } & \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = 1, \quad \forall v \in E \\
\text{d) } & \underline{b}_e x_e \leq f_e \leq \bar{b}_e x_e, \quad \forall e \in E \\
\text{e) } & f_e \in \mathbb{R}^+, x_e \in \{0, 1\}, c_e > 0, \quad \forall e \in E
\end{aligned} \tag{III-35}$$

Les vecteurs x des solutions réalisables du problème formulé (III-35) sont des r -arborescences du graphe G qui vérifient les contraintes de conservations de flot sur les arcs en respectant leurs capacités. Ceci découle de la même idée que celle qui a été utilisée dans le Théorème III-1. Par contre la relaxation du problème (III-35) en variables réelles avec $x \in \mathbb{R}^+$ n'est pas exacte. Ceci est montré sur la **Figure III-3**. Le graphe sur la figure contient deux sommets : r est un sommet de source et v un est un sommet avec la valeur de la demande égale à 2. Les coûts fixes de passage par les arcs sont $c_{x_1} = 100$, $c_{x_2} = 1$, $c_{x_3} = 1$. Les arcs x_2 et x_3 ont des capacités unitaires et la capacité de l'arc x_1 est égale 2. La valeur de la fonction objectif de la solution optimale fractionnaire est 2 (le flot passe par l'arc x_2 et x_3). La solution optimale en

variables binaires est 200. Le support de la solution optimale fractionnaire avec les valeurs de flot sur les arcs x_2, x_3 égales à $\frac{1}{2}$ n'est pas une arborescence. Cependant le support de la solution optimale en variables binaires est une arborescence contenant l'arc x_1 .

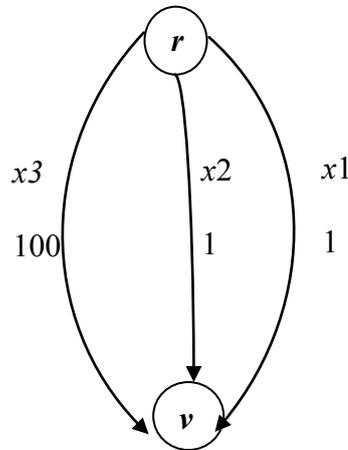


Figure III-3 : Un exemple d'un graphe avec les capacités sur les arcs où la solution en nombres réels du problème de flot arborescent du coût minimum n'est pas exacte.

III.6. Méthodes de résolution et résultats numériques pour les problèmes de flot arborescent de coût minimum

Nous présentons dans cette section les méthodes de résolution pour les problèmes de flot arborescent de coût quadratique minimum sans pertes et de flot arborescent avec les pertes quadratiques minimales. Afin de trouver la solution optimale de ces problèmes nous avons proposé de les résoudre par la programmation quadratique en variables mixtes. Par contre ces problèmes sont NP-difficiles et nécessitent d'utiliser, pour la résolution, un algorithme exponentiel qui n'est pas malheureusement applicable en pratique pour résoudre les problèmes sur des grosses instances. Afin de contourner cette difficulté, nous proposons deux algorithmes heuristiques. Leur idée est d'exploiter la solution du programme quadratique relaxé en variables réelles qui permet de trouver une solution heuristique du problème initial en un temps polynomial.

III.6.1. Résolution exacte par la programmation quadratique en variable mixtes

Nous proposons la résolution exacte des problèmes de flot arborescent de coût quadratique minimum (FACQM) et de flot arborescent avec les pertes quadratique minimales (FAPQM) en utilisant la programmation quadratique en variables mixtes couplée avec l'algorithme " Séparation et Evaluation " [101], [23]. Le problème FACQM est défini par les conditions (III-33) et le FAPQM par (III-31). Pour la résolution, on a utilisé le logiciel pour

les programmes quadratiques en nombres mixtes (réels et entiers) IBM ILOG CPLEX. Le code a été écrit en langage C++.

Les résultats numériques de la résolution exacte pour les problèmes FACQM et FAPQM comparés avec les résultats des algorithmes heuristiques pour ces problèmes sont présentés dans les tableaux de la section III.6.3.

III.6.2. Les algorithmes heuristiques

Les problèmes FAPQM et FACQM étant NP-difficiles, nous proposons de chercher des solutions de leurs relaxations polynomiales. En abandonnant la structure arborescente (les contraintes (III-31)d- (III-31)e pour FAPQM et (III-33)c- (III-33)d pour FACQM), ces problèmes relaxés peuvent être résolus efficacement par des méthodes de programmation quadratique.

Soit un graphe orienté $G(X, E)$, $c_e > 0$ (coefficients de pertes pour chaque arc $e \in E$) et $d_v \geq 0$ (demandes fixes en chaque sommet $v \in X$), voici ces deux relaxations formulées en termes de programmation quadratique : le problème (FPQM) et le problème (FCQM). Ces problèmes sont :

Problème du flot avec les pertes quadratiques minimales (**FPQM**) :

$$\begin{aligned} & \min \sum_{e \in E} c_e f_e^2 \\ & \text{sous : } \sum_{e \in \delta^-(i)} (f_e - c_e f_e^2) - \sum_{k \in \delta^+(i)} f_k \geq d_i, \quad \forall i \in X \setminus r \end{aligned} \quad \text{(III-36)}$$

(la première loi de Kirchhoff (“ou loi des nœuds”) avec la sur-satisfaction de la demande)

$$f_e - c_e f_e^2 \geq 0, \quad \forall e \in E$$

Problème du flot de coût quadratique minimum (**FCQM**) :

$$\begin{aligned} & \min \sum_{e \in E} c_e f_e^2 \\ & \text{sous : } \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e - \sum_{k \in \delta^+(v)} f_k = d_v, \quad \forall v \in X \setminus r \end{aligned} \quad \text{(III-37)}$$

Si f est le flot sur les arcs de G dans la solution optimale du problème FCQM et $S = \{e \in E : f(e) > 0\}$, alors $H(X, S)$ (le support de la solution) est un graphe partiel de G acyclique. En effet, s’il existe une solution comportant un circuit C avec les valeurs de flots $f_1^C, f_2^C, \dots, f_k^C$ (où $f_1^C = \min\{f_1^C, f_2^C, \dots, f_k^C\}$) strictement positives sur ses arcs (voir la **Figure III-4**) alors une nouvelle solution : $f_i^C := f_i^C - f_1^C$ aurait un coût quadratique inférieur au coût de la solution précédente et le circuit C n’appartient plus au support car $f_1^C = 0$.

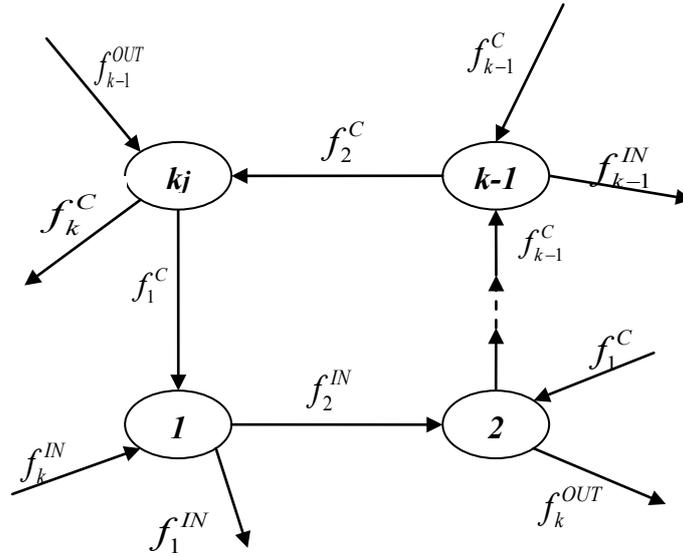


Figure III-4 : La solution du problème FPQM (FCQM) contenant un circuit $\{1, \dots, k\}$. Pour chaque sommet i du circuit C , on note f_i^{IN} (resp. f_i^{OUT}) le flot total (avec les pertes pour FPQM) entrant (resp. sortant) par des arcs non appartenant au circuit C .

Proposition III-1 : S'il existe une solution réalisable du FPQM alors la solution optimale existe et elle possède les quatre propriétés suivantes :

- 1) elle est unique ;
- 2) $f_e \leq \frac{1}{2c_e}, \forall e \in E$;
- 3) le graphe partiel engendré par $S = \{e \in E : f_e > 0\}$ (le support de la solution) est acyclique (i.e. n'admet pas de circuit) ;
- 4) toutes les contraintes sur les sommets sont actives (égalités).

Démonstration :

- 1) Avec $c_e > 0, \forall e \in E$, les contraintes du problème définissent un ensemble compact convexe, et l'objectif est une fonction strictement convexe.
- 2) Si $\frac{1}{2c_e} < f_e \leq \frac{1}{c_e}, \forall e \in E$ alors, en ajoutant une demande supplémentaire $2f_e - \frac{1}{c_e} > 0$ sur le sommet initial de e , le nouveau flot sur l'arc e $f_e := \frac{1}{c_e} - f_e$ aurait les pertes inférieures.
- 3) Supposons que le support d'une solution f contient un circuit C dans G avec les valeurs de flot $f_1^C, f_2^C, \dots, f_k^C$ ($f_1 = \min\{f_1^C, f_2^C, \dots, f_k^C\}$) associés à ses arcs entrant dans les sommets $1, \dots, k$ (voir la **Figure III-4**). La loi de sur-satisfaction de la demande implique :

$$\begin{cases}
f_1^{IN} + f_1^C - c_1(f_1^C)^2 = f_1^{OUT} + f_2^C + d_1 + \delta_1 \\
f_2^{IN} + f_2^C - c_2(f_2^C)^2 = f_2^{OUT} + f_3^C + d_2 + \delta_2 \\
\vdots \\
f_{k-1}^{IN} + f_{k-1}^C - c_{k-1}(f_{k-1}^C)^2 = f_{k-1}^{OUT} + f_k^C + d_{k-1} + \delta_{k-1} \\
f_k^{IN} + f_k^C - c_k(f_k^C)^2 = f_k^{OUT} + f_1^C + d_k + \delta_k
\end{cases} \quad (\text{III-38})$$

où δ_i représentent les écarts. Nous allons réduire le flot sur les arcs du circuit C (les autres valeurs resteront inchangées) et augmenter la demande en sommet k , pour construire un nouveau flot avec les pertes strictement inférieures. Plus précisément, nous allons montrer qu'il existe $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^+$ ($0 < \varepsilon_i \leq f_i^C$, $i = 1, \dots, k$) et $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases}
f_1^{IN} + (f_1^C - \varepsilon_1) - c_1(f_1^C - \varepsilon_1)^2 = f_1^{OUT} + (f_2^C - \varepsilon_2) + d_1 + \delta_1 \\
f_2^{IN} + (f_2^C - \varepsilon_2) - c_2(f_2^C - \varepsilon_2)^2 = f_2^{OUT} + (f_2^C - \varepsilon_2) + d_2 + \delta_2 \\
\vdots \\
f_{k-1}^{IN} + (f_{k-1}^C - \varepsilon_{k-1}) - c_{k-1}(f_{k-1}^C - \varepsilon_{k-1})^2 = f_{k-1}^{OUT} + (f_k^C - \varepsilon_k) + d_{k-1} + \delta_{k-1} \\
f_k^{IN} + (f_k^C - \varepsilon_k) - c_k(f_k^C - \varepsilon_k)^2 = f_k^{OUT} + (f_1^C - \varepsilon_1) + d_k + \delta_k + \lambda
\end{cases} \quad (\text{III-39})$$

En utilisant (III-38) et en imposant $\varepsilon_1 = f_1^C$, le système (III-39) nous fournit les formules permettant de calculer successivement les ε_i ainsi que la valeur λ d'augmentation de la demande en k :

$$\begin{cases}
\varepsilon_1(1 - 2c_1f_1^C + c_1\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \\
\varepsilon_2(1 - 2c_2f_2^C + c_2\varepsilon_2) = \varepsilon_3 \\
\vdots \\
\varepsilon_{k-1}(1 - 2c_{k-1}f_{k-1}^C + c_{k-1}\varepsilon_{k-1}) = \varepsilon_k \\
\varepsilon_k(1 - 2c_kf_k^C + c_k\varepsilon_k) = \varepsilon_1 - \lambda
\end{cases} \quad (\text{III-40})$$

La propriété 2) de la **Proposition III-1** permet de montrer par récurrence que : $0 < \varepsilon_i \leq f_i^C$ et $\varepsilon_i > \varepsilon_{i+1}$. Cela implique que $\lambda = \varepsilon_1 - \varepsilon_k(1 - 2c_kf_k^C + c_k\varepsilon_k) > 0$. Le nouveau support de la solution ne contient pas de circuit C et la somme des pertes totale dans G diminue de λ . Donc la solution f avec le support contenant un circuit n'est pas optimale.

- 4) Supposons qu'une solution f vérifie $\sum_{e \in \delta^-(j)} (f_e - c_e f_e^2) - \sum_{k \in \delta^+(j)} f_k > d_j$ en sommet j . Alors on peut choisir un sommet i et un $\varepsilon > 0$ pour que le nouveau flot, défini comme $f_e := f_e - \varepsilon > 0$ pour $e = (i, j)$ et inchangé sur les autres arcs du graphe, soit réalisable (la sur-satisfaction en j a été déplacée partiellement en i) et les pertes ont diminuées de valeur $\varepsilon c_e(2f_e - \varepsilon) > 0$. Donc la solution f avec la contrainte en sommet j relâchée, n'est pas optimale. ■

En utilisant le résultat de la **Proposition III-1**, nous présentons deux algorithmes heuristiques pour la résolution des problèmes FACQM et FAPQM. Leur idée repose sur l'exploitation du support de la solution optimale du problème relaxé FPQM pour FAPQM et FCQM pour FACQM, qui est un graphe partiel acyclique avec les poids fixes de flot de la solution sur les arcs. Nous cherchons ensuite dans ce sous-graphe une arborescence qui minimise la fonction objectif.

III.6.2.1. Algorithme heuristique AH1 pour les problèmes FAPQM et FACQM

La formulation de l'algorithme AH1 est la suivante :

INSTANCE : Un graphe symétrique $G(X, E)$, avec $|X| = k$, un sommet source $r \in X$, les demandes de la quantité du flot dans les sommets de X : $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}^+$, les coûts c_{ij} associés à chaque arc $e \in E$.

OBJECTIF : Trouver le flot arborescent qui vérifie les contraintes du modèle (III-31) pour le problème de FAPQM ou (III-33) pour le problème FACQM respectivement.

Algorithme AH1 :

- (1) Trouver une solution optimale du problème FPQM (pour FAPQM ou FCQM pour FACQM) qui forme un sous-graphe acyclique $H(X, S)$ de G^7 . Sur chaque arc $e \in S$ attribuer les valeurs fixes du flot de la solution optimale f_e^{sol} .
- (2) Trouver dans H un sommet v avec $\delta^-(v) \geq 2$ ayant la plus grande valeur de flot de la solution f^{sol} entrant. Pour chaque $e \in \delta^-(v)$ résoudre le problème FPQM (FCQM) défini dans III.6.2 sur le graphe $\bar{G}_e = (X, \bar{E})$, où $\bar{E} = E \cap \{S \setminus \delta^-(v) \cup e\}$ et choisir un tel e^* qui minimise la fonction objectif du FPQM (FCQM).
- (3) Enlever tous les arcs entrant dans v sauf e^* , i.e. $S = S \setminus \{\delta^-(v)\} \cup e^*$.
- (4) Réattribuer les valeurs de flot f_e^{sol} sur chaque arc dans H et recommencer la procédure depuis l'étape (2).
- (5) Finir l'algorithme si H est une r -arborescence.

On présente le pseudo code pour l'algorithme AH1 dans l'Annexe B.

⁷ Selon la Proposition III-1.

III.6.2.2. Algorithme heuristique AH2 pour les problèmes FAPQM et FACQM

Cet algorithme utilise aussi le support de la solution optimale (graphe partiel acyclique, voir **Proposition III-1**) de problème FPQM et FCQM pour le problème FAPQM et FACQM respectivement qui ont été définis dans III.6.2.

La formulation de l'algorithme AH2 est suivante :

INSTANCE : Graphe symétrique $G(X, E)$, avec $|X| = k$, un sommet source $r \in X$, les demandes de la quantité du flot dans les sommets de X : $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}^+$, les coûts c_{ij} associés à chaque arc $e \in E$.

OBJECTIF : Trouver le flot arborescent qui vérifie les contraintes du modèle (III-31) pour le problème de FAPQM ou du modèle (III-33) pour le problème FACQM respectivement.

Algorithme AH2 :

- (1) Trouver une solution optimale du problème FPQM pour FAPQM (ou FCQM pour FACQM) qui forme un sous-graphe acyclique $H(X, S)$ de G . Sur chaque arc $e \in S$ attribuer les valeurs fixes du flot de la solution optimale f_e^{sol} .
- (2) Pour chaque sommet v dans H choisir un arc entrant e^* dans v avec la plus grande valeur du flot $f_{e^*}^{sol}$. Enlever du graphe tous les autres arcs entrant dans v sauf e^* , i.e. $S = \{e^* \mid f_{e^*}^{sol} = \max_{f_e^{sol}} \delta^{in}(v), \forall v \in X\}$.
- (3) Fin d'algorithme, car le graphe H obtenu après la procédure (2) est une r -arborescence.

Le pseudo code de cet algorithme est aussi présenté dans l'Annexe B.

III.6.2.3. Algorithme heuristique AH3 pour les problèmes FAPQM et FACQM

Cet algorithme repose aussi sur la résolution du problème relaxé sans contraintes sur la structure arborescente. Il consiste en la résolution du programme quadratique en nombres mixtes défini par (III-31) pour FAPQM (respectivement (III-33) pour FACQM) sur le graphe acyclique obtenu comme le support de la solution optimale de problème relaxé FPQM (resp. FCQM).

La formulation de l'algorithme AH3 est suivante :

INSTANCE : Graphe acyclique $H(X, A)$ – support de la solution optimale du problème FPQM (resp. FCQM) avec $|X| = k$, un sommet source $r \in X$, les demandes de la quantité du flot dans les sommets de X : $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}^+$, les coûts c_{ij} associés à chaque arc $e \in A$.

OBJECTIF : Trouver le flot arborescent qui vérifie les contraintes du modèle (III-31) pour le problème de FAPQM ou du modèle (III-33) pour le problème FACQM respectivement.

Algorithme AH3 :

Pour le problème FAPQM résoudre le programme quadratique en nombres mixtes :

- a) $\min \sum_{e \in A} c_e l_e$
- b) $\sum_{e \in \delta^-(v)} (f_e - c_e l_e) - \sum_{k \in \delta^+(v)} f_k = d_i, \quad \forall v \in X \setminus r$
- c) $f_e - c_e l_e \geq 0, \quad c_e > 0, \quad \forall e \in A$
- d) $\sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = 1, \quad \forall v \in A$
- e) $f_e \leq M x_e, \quad \forall e \in A$
- f) $l_e \geq f_e^2, \quad \forall e \in A$
- g) $x_e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in A$
- h) $l_e, f_e \in \mathbb{R}^+, \quad \forall e \in A$

Pour le problème FACQM résoudre le programme quadratique en nombres mixtes :

- a) $\min \sum_{e \in A} c_e f_e^2$
- b) $\sum_{e \in \delta^-(v)} f_e - \sum_{k \in \delta^+(v)} f_k = d_i, \quad \forall v \in X \setminus r$
- c) $\sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = 1, \quad \forall v \in A$
- d) $f_e \leq M x_e, \quad \forall e \in A$
- e) $f_e \in \mathbb{R}^+, x_e \in \{0, 1\}, \quad c_e > 0, \quad \forall e \in A$

L'utilisation de l'algorithme AH3 est avantageuse, par rapport à la résolution du modèle optimal du problème FAPQM (respectivement FACQM) formulé sous forme d'un programme quadratique en nombres mixtes, car on résout le programme quadratique ayant un nombre de variables réduit d'un facteur deux. Cela découle du fait que le nombre d'arcs dans le graphe acyclique qui est le support de la solution optimale du problème FPQM (respectivement FCQM) contient $|E|/2$ arcs, où $|E|$ c'est le nombre d'arcs du graphe $G(X, E)$ d'instance du problème FAPQM (respectivement FACQM).

III.6.3. Résultats numériques

Nous avons testé les méthodes de résolution pour les problèmes FAPQM et FACQM exactes (voir III.5.4.2, III.5.5.2) et heuristiques (voir III.6.2.1-III.6.2.3). La programmation quadratique en variables mixtes fournit la solution optimale mais du fait que ces problèmes sont NP-difficiles le temps de résolution des instances de graphes planaires contenant à partir de 300 sommets est supérieur à 100 minutes. Par contre les algorithmes heuristiques proposés exploitent le support de la solution optimale des problèmes relaxés et ils donnent des résultats sur les instances de test assez proches de l'optimum du problème FAPQM : de 0.26% pour l'algorithme AH1, de 12-16% pour AH2. L'algorithme heuristique AH3 a fourni des solutions optimales sur les instances de test.

Pour les résultats numériques, nous avons fait des tests sur des graphes planaires symétriques connexes générés aléatoirement, mais ensuite (dans le Chapitre IV) on appliquera les méthodes sur des réseaux réels. Dans chaque instance les valeurs de coût fixe sur les arcs du graphe ont été choisies aléatoirement dans les bornes $[0, 0.001]$, ainsi que les valeurs de la demande sur les sommets dans l'intervalle $[0.001, 0.01]$. Les tests numériques ont montré que le choix des bornes n'a aucun impact sur les performances des méthodes, mais seulement les paramètres des graphes : nombre de sommets et nombre d'arêtes. C'est pourquoi, afin de comparer les performances des méthodes les trois séries de test contenant 20 scénarios chacune (voir Annexe C) ont été réalisées. Pour chaque série de test les nombres minimaux et maximaux de sommets et d'arêtes du graphe ont été fixés. Les graphes ayant ces paramètres ont été générés aléatoirement.

Les résultats comparatifs de toutes ces méthodes sont présentés dans le **Tableau III-5** pour le problème de flot arborescent avec les pertes quadratiques minimales et dans le **Tableau III-6** pour le problème de flot arborescent de coût quadratique minimum. Nous présentons les valeurs du temps de calcul maximales et moyennes, ainsi que les écarts moyens de solutions des méthodes avec la solution optimale sur les 20 instances pour chaque série de test. Nous avons décidé de nous limiter à des graphes avec un nombre d'arêtes au plus de 200, afin pouvoir trouver la solution optimale en un temps admissible.

Dans les tableaux suivants les deux premières lignes décrivent la composition moyenne des graphes générés. Puis les lignes suivantes sont les résultats numériques pour chaque méthode.

Tableau III-5 : Résultats des tests des méthodes heuristiques comparés à la solution optimale du problème FAPQM sur les instances de test.

		Série de test 1	Série de test 2	Série de test 3
Nombre moyen de sommets		29.95	60.85	67.5
Nombre moyen d'arêtes		53.9	114.7	127.5
Solution optimale	Temps de calcul moyen	4.3 sec.	102 sec.	170 sec.
	Temps de calcul maximal	90 sec.	550 sec.	510 sec.
AH1	Ecart moyen de la solution avec la solution optimale	0.00%	0.00%	0.26%
	Temps de calcul moyen	0.56 sec.	2.3 sec.	5.3 sec.
	Temps de calcul maximal	2 sec.	4 sec.	13 sec.
AH2	Ecart moyen de la solution avec la solution optimale	12.00%	16.00%	3.4%
	Temps de calcul moyen	0.02 sec.	0.042 sec.	0.07 sec.
	Temps de calcul maximal	0.08 sec.	0.056 sec.	0.1 sec.
AH3	Ecart moyen de la solution avec la solution optimale	0.00%	0.00%	0,00%
	Temps de calcul moyen	0.56 sec.	0.79 sec.	3.4 sec.
	Temps de calcul maximal	7 sec.	3 sec.	9 sec.

Sur les trois séries de test pour le problème FAPQM, l'algorithme AH3 a trouvé les solutions optimales en un temps de résolution maximal de 9 s, quand le temps maximal de la recherche de la solution optimale a été 550 s. L'écart moyen entre des solutions obtenues par l'algorithme AH1 et des solutions optimales ne dépasse pas 0.26% et le temps maximal d'exécution d'algorithme sur les instances de test est égal à 13 s. Le plus performant au niveau du temps d'exécution a été l'algorithme AH2 – le temps d'exécution sur toutes les instances de test est inférieur à 0.1s, mais il a fourni les solutions qui sont plus loin des solutions optimales parmi les algorithmes AH1-AH3 – sur la série de test 2 l'écart moyen entre la valeur de la solution optimale et de la solution heuristique est 16%.

Dans le tableau suivant sont présentés les résultats de test des algorithmes pour le problème FACQM.

Tableau III-6 : Résultats de test des méthodes heuristiques comparés à la solution optimale du problème FACQM sur les instances de test.

		Série de test 1	Série de test 2	Série de test 3
Nombre moyen de sommets		30.5	56.25	79.2
Nombre moyen d'arêtes		55	105.5	150.4
Solution optimale	Temps de calcul moyen	4.3 sec.	40 sec.	≈2h
	Temps de calcul maximal	40 sec.	340 sec.	≈2h
AH1	Ecart de la solution avec la solution optimale	1.4%	0.4%	0.65%
	Temps de calcul moyen	0.14 sec.	0.5 sec.	1.2 sec.
	Temps de calcul maximal	0.2 sec.	1 sec.	2 sec.
AH2	Ecart de la solution avec la solution optimale	8.6%	9.2%	4.00%
	Temps de calcul moyen	0.0026 sec.	0.0072 sec.	0.012 sec.
	Temps de calcul maximal	0.003 sec.	0.02 sec.	0.02 sec.
AH3	Ecart de la solution avec la solution optimale	0.00%	0.00%	0.00%
	Temps de calcul moyen	0.23 sec.	1.3 sec.	6.4 sec.
	Temps de calcul maximal	1 sec.	4 sec.	20 sec.

Les résultats de test des algorithmes AH1-AH3 utilisés pour la résolution du problème FACQM montrent la corrélation des résultats obtenus pour le problème FAPQM. Sur les trois séries de test pour le problème FACQM l'algorithme AH3 a trouvé les solutions optimales en un temps de résolution maximal de 20 s, quand le temps maximal de la recherche de la solution optimale a été environ deux heures. L'écart moyen entre des solutions obtenues par l'algorithme AH1 et des solutions optimales ne dépasse pas 1.4% et le temps maximal d'exécution d'algorithme sur les instances de test est égal à 2 s. Le plus performant au niveau du temps d'exécution a été l'algorithme AH2 – le temps d'exécution sur toutes les instances de test est inférieur à 0.012 s, mais il a fourni les solutions qui sont plus loin des solutions optimales parmi les algorithmes AH1-AH3 – sur la série de test 2 l'écart moyen entre la valeur de la solution optimale et de la solution heuristique est 9.2%.

III.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème de la répartition optimale des flux arborescents de la puissance (OPF) avec l'objectif de la minimisation des pertes dans le réseau, ainsi que la relaxation convexe OPF-*cr* de ce problème proposé dans [71], qui est exacte pour les réseaux radiaux. Elle a été formulée en termes de programmation quadratique. Nous avons présenté ensuite un algorithme itératif exact de la résolution de la relaxation linéaire du problème OPF-*cr*. Cette méthode a été fondée sur la méthode de Newton couplée avec la programmation linéaire.

Pour le problème de reconfiguration sur les réseaux maillés, nous avons formulé le modèle convexe exact sous la forme d'un programme quadratique en variables mixtes qui repose sur la formulation convexe exacte d'OPF-*cr*. Les résultats de test sur les réseaux IEEE ont également été présentés. Ce problème est NP-difficile, puisque ses cas particuliers que l'on a présentés – le problème de flot arborescent de coût quadratique minimum et le problème de flot arborescent avec les pertes quadratique minimales sont NP-difficiles. Nous avons présenté aussi les formulations de ces problèmes de flot arborescent en termes de programmation quadratique en variables mixtes et nous avons aussi développé quelques algorithmes heuristiques. Ils reposent sur les résultats présentés dans ce chapitre : les supports de solutions des problèmes Flot de Coût Quadratique Minimum (FCQM) et Flot avec Pertes Quadratique Minimales (FPQM) sont des graphes partiels acycliques. Donc ces algorithmes heuristiques exploitent la solution optimale des problèmes FCQM et FPQM qui sont des relaxations des problèmes Flot Arborescent de Coût Quadratique Minimum (FACQM) et Flot Arborescent avec Pertes Quadratique Minimales (FAPQM) sans contraintes sur la structure arborescente. C'est pourquoi les résultats de test de ces algorithmes sur les graphes planaires connexes générés aléatoirement sont assez proches de l'optimum. Dans le chapitre suivant nous allons utiliser ces heuristiques pour le problème d'optimisation de l'architecture des réseaux ayant la fonction objectif de la minimisation des pertes dans le réseau.

CHAPITRE IV : MODELES COMBINATOIRES ET METHODES DE RESOLUTION POUR LE PROBLEME D'OPTIMISATION DE L'ARCHITECTURE DES RESEAUX DE DISTRIBUTION

SOMMAIRE

IV.1.	INTRODUCTION.....	85
IV.2.	CONCEPTION DE RESEAU FIABLE : RESEAU DE STEINER DE POIDS MINIMUM	86
IV.2.1.	FORMULATION DU PROBLEME	86
IV.2.2.	ALGORITHME ITERATIF 2-APPROXIMATION.....	87
IV.3.	MODELE DE L'ARCHITECTURE : RESEAU DE DISTRIBUTION DE LONGUEUR MINIMALE (MODELE _{ALM}).....	88
IV.4.	MODELE DE L'ARCHITECTURE : RESEAU DE DISTRIBUTION DES PERTES MINIMALES (MODELE _{ARPM})	91
IV.4.1.	ALGORITHME DE CONCEPTION DE L'ARCHITECTURE DU RESEAU DES PERTES MINIMALES (AARPM)	92
IV.5.	MODELE DE L'ARCHITECTURE : UNION DES ARBORESCENCES DE FLOT DE COUT LINEAIRE MINIMUM (MODELE _{UAFCLM})	94
IV.6.	MODELE DE L'ARCHITECTURE : PERTES MINIMUM DANS LE RESEAU DE DISTRIBUTION DE LONGUEUR MINIMALE (MODELE _{APLM}).....	98
IV.7.	RESULTATS NUMERIQUES.....	104
IV.7.1.	ARCHITECTURE DU RESEAU DE DISTRIBUTION DE LONGUEUR MINIMALE (MODELE _{ALM}) 108	
IV.7.2.	ARCHITECTURE DU RESEAU DE DISTRIBUTION DE PERTES MINIMUM (MODELE _{ARPM}) ..	110
IV.7.3.	ARCHITECTURE DU RESEAU DE DISTRIBUTION UNION DES ARBORESCENCES DE FLOT DE COUT LINEAIRE MINIMUM (MODELE _{UAFCLM})	112
IV.8.	ANALYSE DES RESULTATS.....	115
IV.9.	METHODE RETENUE : ARCHITECTURE DU RESEAU DE DISTRIBUTION DE PERTES MINIMUM DANS LE RESEAU DE LONGUEUR MINIMUM (MODELE _{APLM}).....	118
IV.10.	CONCLUSION	121

IV.1. Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre différentes approches d'optimisation combinatoire appliquées au problème de conception (ou planification) de l'architecture des réseaux de distribution électrique. Comme nous l'avons formulé dans le Chapitre II, ce problème possède plusieurs critères d'optimisation et de nombreuses contraintes. Nous proposons une approche relaxée du problème. Nous modélisons ainsi le problème initial comme l'ensemble des problèmes mono-objectif que l'on résout séparément pour obtenir la solution optimale ou approximative pour un objectif donné ou successivement, i.e. utiliser le support de la solution d'un modèle dans la résolution d'un autre.

Dans un premier temps, nous allons formuler le problème de la conception du réseau de longueur totale minimale. Je me concentre sur les architectures équivalentes à celles que l'on trouve dans les zones urbaines. Les contraintes de redondance seront posées dans le problème. Dans nos modèles présentés par la suite elles ont une formulation forte, i.e. elles impliquent la nécessité pour chaque consommateur du réseau d'être approvisionné par, au minimum, deux chemins disjoints. Ainsi, pour toute défaillance d'une centrale ou d'une ligne électrique, une configuration du réseau alternative telle que tous les consommateurs restent connectés à la source d'énergie électrique doit exister. Dans le Chapitre II nous avons présenté les approches de la modélisation du réseau en termes de graphes. Nous avons ainsi décrit les problèmes combinatoires liés au problème d'optimisation de l'architecture du réseau de distribution électrique comme : problème de voyageur de commerce, problème de tournée des véhicules, sous-graphe k -connexe couvrant de poids minimum et le problème de réseau de Steiner de poids minimum (voir II.5). Nous reprenons la formulation du dernier problème pour notre modèle. Pour sa résolution, nous allons présenter l'algorithme approximatif de facteur 2 proposé par Jain [102], ainsi que la formulation exacte de la programmation linéaire en nombres entiers.

Pour l'optimisation de l'architecture de réseau ayant pour objectif la minimisation des pertes, nous proposons un algorithme en deux versions : exacte et heuristique, c'est-à-dire en fonction des méthodes de résolution du problème de reconfiguration (exacte par la programmation quadratique en nombres entiers ; heuristique par des algorithmes AH1-AH3 de III.6.2) en formulation convexe exacte telle qu'on l'a présenté dans le Chapitre III.

Une méthode polynomiale fondée sur l'algorithme de flot de coût linéaire minimum sera présentée pour la conception du réseau équilibré par des produits P \times L. L'idée consistera à chercher l'union des arborescences de flot de coût minimum ayant les racines dans les postes source.

À la fin de ce chapitre, nous montrons une approche pour la minimisation de la longueur totale et les pertes du réseau qui consiste à décomposer le problème sur deux problèmes mono-objectif et utiliser le support de la solution du premier problème dans la résolution du second.

Nous concluons ce chapitre par la présentation des résultats numériques des méthodes formulées. Les tests ont été faits sur le cas d'étude du réseau réel d'une ville, ainsi que sur les ins-

tances de test générés aléatoirement, qui permettront d'éviter d'obtenir des résultats particuliers liés à la structure du réseau réel considéré.

IV.2. Conception de réseau fiable : Réseau de Steiner de poids minimum

La conception de réseaux fiables (*Survivable Network Design Problem* ou SNDP) et rentables est une préoccupation majeure pour l'industrie du transport et de la distribution de l'énergie électrique. Les réseaux fiables doivent satisfaire certaines exigences de connexité qui permettent de restaurer le fonctionnement de réseau en cas de défaillance catastrophique telle que la perte d'une liaison de transmission, de la défaillance d'un nœud de commutation ou d'un poste source. Le service pourrait être rétabli en redirigeant les flux de la puissance par d'autres lignes et les nœuds du réseau existant. Dans le cas des réseaux de distribution électriques, la topologie 2-connexe a montré un niveau adéquat pour satisfaire les exigences de fiabilité du réseau. Ainsi, les réseaux rentables (efficaces) doivent satisfaire le critère de minimisation de la fonction économique de coût d'investissement qui dépend de la longueur totale (des câbles, des tranchées). Nous formulons ici le problème d'optimisation combinatoire de la conception de réseau fiable (ou Réseau de Steiner de poids minimum) sous forme d'un programme linéaire en variables binaires. Pour la résolution en temps polynomial, nous présentons un algorithme approximatif de facteur 2 développé par Jain [102]. Il repose sur le modèle relaxé en variables réelles.

IV.2.1. Formulation du problème

Etant donné un graphe connexe non orienté $G = (V, E)$; des couts fixes sont attribués à chaque arête de E et ils sont définis par la fonction $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$; les conditions de l'exigence de la connexité $r(u, v)$ sont attribuées pour chaque paire de sommets u, v de V . Le réseau de Steiner est un sous-graphe de G dans lequel il existe au moins $r(u, v)$ chemins arêtes disjointes entre u et v . Le problème de la conception d'un réseau fiable consiste donc à trouver le réseau de Steiner de poids minimum.

Rappelons que les conditions de connexité pour chaque paire de sommets (u, v) dans un graphe $G = (V, E)$ sont données par une fonction $r(u, v) : 2^V \rightarrow \mathbb{Z}^+$. Pour formuler le problème SNDP comme un programme linéaire, nous représentons les exigences de connexité dans le graphe par une fonction faiblement supermodulaire qui a la définition suivante :

Fonction faiblement supermodulaire

Une fonction $f : 2^V \rightarrow \mathbb{Z}$ est appelée **faiblement supermodulaire**, si pour toutes les paires A, B de sous-ensembles de V au moins l'une des inégalités (IV-1) est vérifiée :

$$\begin{aligned}
f(A) + f(B) &\leq f(A \cap B) + f(A \cup B) \\
f(A) + f(B) &\leq f(A \setminus B) + f(B \setminus A).
\end{aligned}
\tag{IV-1}$$

La fonction f définie par $f(S) = \max_{u \in S, v \notin S} \{r(u, v)\}$ pour tous les sous-ensembles $S \subseteq V$ est une fonction faiblement supermodulaire [103].

Ainsi donc, la formulation générale du problème de conception de réseau fiable sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers, désigné par $\text{PLNE}_{\text{SNDP}}$ (Programme Linéaire en Nombres Entiers pour SNDP), avec la fonction f étant faiblement supermodulaire est définie par les conditions (IV-2).

$\text{PLNE}_{\text{SNDP}}$

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\sum_{e \in \delta(S)} x_e & \geq f(S) \quad \forall S \subseteq V(G) \\
x_e & \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E(G)
\end{aligned}
\tag{IV-2}$$

Le problème relaxé en nombres réels PL_{SNDP} (Programme Linéaire pour SNDP) est formulé par (IV-3).

PL_{SNDP}

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\sum_{e \in \delta(S)} x_e & \geq f(S) \quad \forall S \subseteq V(G) \\
0 \leq x_e & \leq 1 \quad \forall e \in E(G)
\end{aligned}
\tag{IV-3}$$

On nomme *oracle de séparation* un sous-programme qui décide si un vecteur donné est réalisable et qui, dans le cas contraire, retourne une contrainte violée. On ne sait pas s'il y a un oracle de séparation polynomial pour une fonction f faiblement supermodulaire générale, mais notre problème PL_{SNDP} peut être résolu en temps polynomial en utilisant un algorithme de flot maximum comme oracle de séparation [102].

IV.2.2. Algorithme itératif 2-approximation (ARSCM)

Nous allons présenter dans la section suivante un algorithme itératif avec une 2-approximation garantie [102]. Il résout la relaxation linéaire PL_{SNDP} (IV-2) puis arrondit de façon itérative la solution. L'idée principale de l'arrondi est qu'il s'appuie sur le résultat suivant :

Théorème IV-1 [103] : Etant donné une fonction $f: 2^V \rightarrow \mathbb{Z}^+$ faiblement supermodulaire et un point extrême x de la solution de PL_{SNDP} , alors il existe une arête $e \in E$ avec $x_e \geq \frac{1}{2}$.

Puisque, dans la solution de PL_{SNDP} , il existe au moins une arête de valeur au moins $\frac{1}{2}$, nous incluons cette arête dans la solution entière et résolvons le problème résiduel. Ceci est montré par le théorème ci-dessus.

L'algorithme d'arrondi itératif de Jain est le suivant :

INSTANCE : Pour un graphe pondéré non orienté $G = (V, E)$, de poids $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$, les conditions de connexité sont définies par une fonction faiblement supermodulaire $f: 2^V \rightarrow \mathbb{Z}^+$ (donnée par un oracle de séparation).

OBJECTIF : Trouver le réseau de Steiner de poids minimum $H = (V, F)$ avec une fonction $x: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq f(S)$ pour tout $S \subseteq V(G)$.

L'algorithme itératif pour le problème de réseau de Steiner de coût minimum (ARSCM)

1. Initialiser l'ensemble d'arête $F(H)$ comme $F \leftarrow \emptyset$ et définir la fonction f' comme $f' \leftarrow f$.
2. Tant que $f' \neq 0$
 - a. Trouver un point extrême x de solution optimale du problème PL_{SNDP} sous les conditions de connexité définies par f' et enlever toutes les arêtes e avec $x_e = 0$.
 - b. S'il existe une arête e avec $x_e \geq \frac{1}{2}$, alors ajouter e dans F et enlever e du graphe G .
 - c. Pour tout $S \subseteq V$: mettre à jour $f'(S) \leftarrow \max \{f(S) - d_F(S), 0\}$.
3. Retourner $H = (V, F)$.

Théorème IV-2 [102] : L'algorithme ARSCM présenté ci-dessus pour le problème de réseau de Steiner de poids minimum a un facteur d'approximation garanti de 2.

IV.3. Modèle de l'Architecture : Réseau de Distribution de Longueur Minimale (MODELE_{ALM})

Nous formulons dans cette section le problème de minimisation de la longueur d'un réseau de distribution en termes de problème de réseau de Steiner de poids minimum. Le modèle sera présenté sous la forme d'un programme linéaire. Nous appliquons pour sa résolution l'algorithme d'arrondi itératif présenté dans la section précédente.

Nous modélisons le réseau en prenant en compte un fond de carte existant. Le graphe du réseau $G = (V, E)$ est un graphe planaire connexe contenant le sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ représentant les charges, $H \subseteq V$ le sous-ensemble de sommets de postes source HTB/HTA et

le sous-ensemble $X \subseteq V$ – les croisements des rues sur le plan géographique. L'ensemble de sommets du graphe est défini par $V = S \cup H \cup X$, où $S \cap X \cap H = \emptyset$. Les arêtes sont pondérées par des distances. Si le nombre de sommets de postes source est supérieur à un, nous les relierons avec un sommet fictif $s \in V$ considéré comme une “super source”. La nécessité d'ajouter le sommet de super source est reliée à des considérations topologiques et à des considérations de calcul des valeurs de puissance, courant et tension dans le réseau. Les poids des arêtes connectant la “super source” aux postes source HTB/HTA sont considérés comme nuls (i.e. correspondent à des lignes du réseau de transport, considérées comme exclues du domaine de cette étude).

En cas de panne d'une ligne ou d'un poste source HTB/HTA nous devons réalimenter les consommateurs par un autre chemin. Il faut alors trouver un sous-graphe connexe de G de poids minimum dans lequel, pour chaque sommet représentant la charge, il existe un cycle passant par ce sommet et la super source. Dans notre modèle du réseau avec le sommet de “super source” s , cette condition se transforme en la demande d'existence pour chaque sommet $v \in (S \cup H)$ d'un cycle contenant des sommets v et s .

En termes de problème de réseau de Steiner, la fonction de l'exigence de connexité prend les valeurs (IV-4) pour toute paire de sommets du G :

$$r(u, v) = \begin{cases} 0, & (u \in X \wedge v \in V \setminus s) \vee (u \in V \setminus s \wedge v \in X) \\ 2, & (u = s \wedge v \in (S \cup H)) \vee (v = s \wedge u \in (S \cup H)) \end{cases} \quad (\text{IV-4})$$

Ici, les symboles \vee et \wedge représentent respectivement les opérations logiques : disjonction et conjonction. Pour définir l'oracle de séparation, nous formulons le problème dans un graphe orienté $G' = (V, A)$, où V est le même ensemble de sommets que dans G et chaque arête $(u, v) \in E$, $(u, v \in V \setminus s)$ est remplacé par des arcs (u, v) et (v, u) pondérés avec les mêmes poids que sur les arêtes de E . Autrement dit $G' = (V \setminus s, A)$ est un graphe symétrique. L'idée de cette séparation est d'envoyer indépendamment les s - k flots de valeurs $r(s, v_k)$ depuis le sommet s vers tous les sommets $k \in (S \cup H)$ sous les conditions que les variables de flot w_a sont bornées par des variables de décision $0 \leq w_a \leq x_a \leq 1, \forall a \in A(G')$. Ces conditions vérifient les contraintes du (IV-2) $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq f(S), \forall S \subseteq V(G) \setminus s$ pour $f(S) = \max_{u \in S, v \notin S} \{r(u, v)\}$, car le flot total entrant dans chaque sous-ensemble S passe au moins par $f(S)$ arcs.

Nous allons, par la suite, récrire les modèles **PLNE_{SNDP}** (IV-2) et **PL_{SNDP}** (IV-3) avec les conditions de séparation pour la fonction $r(u, v)$ définie par (IV-4) pour le problème de la conception du réseau de distribution redondant de longueur minimum.

Formulation exacte PLNE (Programme Linéaire en Nombres Entiers)

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \sum_{a \in A} c_a x_a \\
 a) \quad & \sum_{\forall i \in \delta^-(v)} w_i^k - \sum_{\forall j \in \delta^+(v)} w_j^k = 0, \quad \text{si } k \neq v \quad \forall v \in V \setminus s, \quad \forall k \in (S \cup H) \\
 b) \quad & \sum_{\forall i \in \delta^-(v)} w_i^k - \sum_{\forall j \in \delta^+(v)} w_j^k = r(s, v), \quad \text{si } k = v \quad \forall v \in V \setminus s, \quad \forall k \in (S \cup H) \\
 c) \quad & 0 \leq w_a^k \leq x_a \quad \forall a \in A(G'), \forall k \in (S \cup H) \\
 d) \quad & x_a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A(G')
 \end{aligned} \tag{IV-5}$$

où w_a^k sont les variables de s - k flots $\forall k \in (S \cup H) \setminus s$.

Formulation relaxée PL (Programme Linéaire)

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \sum_{a \in A} c_a x_a \\
 a) \quad & \sum_{\forall i \in \delta^-(v)} w_i^k - \sum_{\forall j \in \delta^+(v)} w_j^k = 0, \quad \text{si } k \neq v \quad \forall v \in V \setminus s, \quad \forall k \in (S \cup H) \\
 b) \quad & \sum_{\forall i \in \delta^-(v)} w_i^k - \sum_{\forall j \in \delta^+(v)} w_j^k = r(s, v), \quad \text{si } k = v \quad \forall v \in V \setminus s, \quad \forall k \in (S \cup H) \\
 c) \quad & 0 \leq w_a^k \leq x_a \quad \forall a \in A(G'), \forall k \in (S \cup H) \\
 d) \quad & 0 \leq x_a \leq 1 \quad \forall a \in A(G')
 \end{aligned} \tag{IV-6}$$

La description des contraintes des modèles (IV-5) et (IV-6) est présentée dans les tableaux ci-dessous :

Tableau IV-1 : Description des contraintes du modèle $PLNE_{SNDP}$ (IV-5) et PL_{SNDP} (IV-6).

Famille des contraintes du modèle	Description
a)	contraintes de conservation de s - k flots écrites pour tous les sommets $k \neq v$
b)	contraintes de conservation de s - k flots écrites pour tous les sommets $k = v$
c)	les bornes sur des variables de flot w_a^k
d)	domaine de définition des variables de décision x_a

L'avantage de l'utilisation de cette formulation est que la fonction r peut être définie de manière différente si le modèle de conception de l'architecture implique différents niveaux de priorité de consommateurs. Nous pouvons ainsi classifier leurs besoins comme par exemple les clients "privilegiés" et "non-privilegiés" (pour le dernier groupe, le plan de secours

pourrait être prévu par un groupe électrogène). Pour le premier groupe, la fonction de connectivité r prend la valeur égale à 2 et pour les derniers elle est égale à 1.

Il faut remarquer que cette formulation (IV-5) ne prend pas en compte les contraintes de la capacité des lignes pour la distribution du courant. On demande uniquement que chaque consommateur soit connecté à un des postes source par deux chemins arêtes-disjoints, soit à deux postes sources différents par des chemins arêtes-disjoints.

Sur la **Figure IV-1** nous montrons un exemple d'application du modèle $PLNE_{SNDP}$ pour le graphe planaire contenant 16 sommets dont deux postes sources (les carrés noirs), 4 sommets bleus représentent les charges ayant l'exigence de connectivité 2 et les sommets blancs représentent les nœuds d'intersection (sans charge) ayant l'exigence de connectivité égale à zéro. Toutes les arêtes ont même longueur. Les arêtes bleues représentent la solution optimale qui est un chemin entre deux postes source passant par les sommets de charge et par les sommets intermédiaires (nœuds d'intersection).

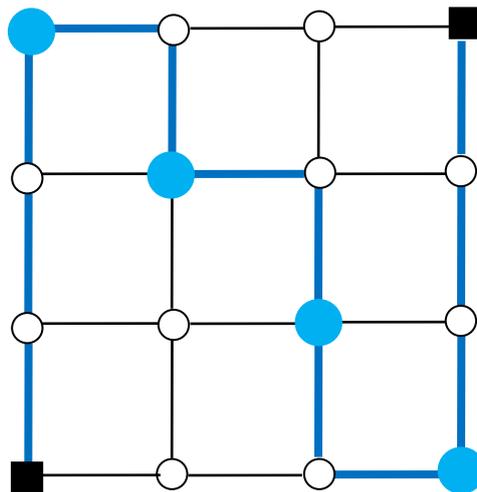


Figure IV-1 : Solution optimale (les arêtes bleues) du modèle $PLNE_{SNDP}$ dans un graphe avec deux postes source et 4 sommets de charge.

IV.4. Modèle de l'Architecture : Réseau de Distribution des Pertes Minimales ($MODELE_{ARPM}$)

Dans cette section, nous présentons une méthode de la conception de l'architecture de réseau électrique ayant objectif de la minimisation des pertes. Nous rappelons les pistes générales de cette approche (présentée dans le Chapitre II) :

- développer, formuler et résoudre un modèle du problème de la recherche d'une structure arborescente optimale pour la minimisation des pertes dans un réseau existant ;
- développer, formuler et résoudre un modèle pour le problème de la conception d'une nouvelle architecture de réseau où les pertes sont minimales.

Le modèle convexe exact [104] du problème de reconfiguration a été formulé dans le Chapitre III. Nous avons y présenté une formulation exacte en termes de programmation quadratique en nombres entiers, ainsi que les différents algorithmes heuristiques.

Pour le modèle de conception de l'architecture du réseau des pertes minimales (ARPM), que l'on présente par la suite dans le Chapitre IV, le choix de la méthode (exacte ou heuristique) de la recherche d'une structure arborescente minimisant les pertes dépendra de la taille de l'instance des données. Pour les réseaux de petite taille (contenant moins de 200 nœuds de charge), nous appliquons une formulation convexe exacte du problème de reconfiguration ; pour les grands réseaux, nous cherchons une configuration par un des algorithmes heuristiques parmi (AH1-AH3).

L'idée de l'algorithme AARPM est fondée sur la recherche dans le graphe du réseau envisageable d'un sous-graphe 2-connexe complément pour l'arborescence des pertes minimales. C'est-à-dire que quelle que soit la défaillance d'une ligne dans le réseau exploité en régime normal en configuration radiale de pertes minimales, il existe une autre configuration minimisant les pertes dans le réseau telle que les contraintes technologiques du problème sont vérifiées.

IV.4.1. Algorithme de conception de l'architecture du réseau des pertes minimales (AARPM)

Soit un réseau de distribution contenant toutes les lignes envisageables représenté par un graphe planaire non orienté pondéré $G' = (X, E)$ comme dans II.4.1. Nous le transformons en un graphe orienté $G = (X, A)$ symétrique (une arête est remplacée par deux arcs opposés). Ensuite on ajoute un sommet particulier s (nœud fictif – une “super source”) relié aux postes sources. S'il n'y a qu'un seul poste source dans le réseau, on l'appelle s (sans ajouter le nœud fictif).

On associe à chaque arc de A deux valeurs fixes : la résistance r_{ij} et la réactance x_{ij} de la ligne (i, j) , qui sont identiques pour les deux sens. Les demandes fixes de la puissance active p_i et réactive q_i sont définies sur les sommets de X .

Pour l'attribution des variables au graphe G , nous faisons comme dans la section III.2.3 pour le problème OPF-cr : à chaque arc de A on associe les variables de la puissance active P_{ij} et réactive Q_{ij} et le module carré du courant l_{ij} ; à chaque sommet de X nous associons les variables de la tension v_i ; les variables de la génération de la puissance active et réactive dans le sommet de source s sont définies par p_0 et q_0 . Pour les variables de la puissance active P_{ij} et réactive Q_{ij} et du courant l_{ij} passant par les arcs (i, j) et (j, i) , on autorise $P_{ij} \neq P_{ji}$, $Q_{ij} \neq Q_{ji}$ et $l_{ij} \neq l_{ji}$, mais au plus un des deux arcs (i, j) ou (j, i) sera dans le graphe de la solution. On introduit les variables binaires e_{ij} qui signifient que l'arc (i, j) appartient à la solution si $e_{ij} = 1$ et 0 sinon.

Déterminons dans G le sous-graphe 2-connexe F qui est l'union des sous-graphes suivants :

- arborescence des pertes minimales et son graphe symétrique correspondant $H = (X_H, A_H)$, où $X_H \subseteq X$ et $A_H \subseteq A$;
- arborescences des pertes minimales et leur graphes symétriques correspondants $H^i = (X_H, A_H^i)$, où $A_H^i = (A_H \setminus \{e_{u,v}^i, e_{v,u}^i\}) \cup W^i$, $W^i \subseteq A \setminus A_H$, $e_{u,v}^i, e_{v,u}^i \in A_H$,
 $i = 1, \dots, m = |A_H|$.

Remplaçons les arcs de ces graphes par des arêtes non orientées et appelons F l'union de ces sous-graphes. Par construction F est 2-connexe. Pour trouver une arborescence des pertes minimales nous utilisons, en fonction de la taille de l'instance, une des méthodes de résolution du problème de reconfiguration : soit le modèle exact défini par les conditions (III-25)-(III-26) dans III.4.1, soit un des algorithmes heuristiques AH1-AH3 décrits dans la section III.6.2.

À la première itération ($i = 0$) de l'algorithme, nous posons $F = \emptyset$ et nous cherchons dans G une arborescence avec son graphe symétrique correspondant H qui a les valeurs des pertes minimales. Nous ajoutons dans le graphe de la solution F les arêtes correspondantes de cette arborescence. Ensuite, à chaque itération $i=1, \dots, m$, nous supposons qu'une ligne représentée par une paire d'arcs $e_{u,v}^i, e_{v,u}^i \in A_H$ entre les nœuds u et v est tombée en panne. Nous cherchons donc une autre arborescence de pertes minimales avec son graphe symétrique correspondant $H^i = (X_H, A_H^i)$ qui contient l'ensemble d'arcs $A_H \setminus \{e_{u,v}^i, e_{v,u}^i\}$ dans le graphe $G^i = (X, A \setminus \{e_{u,v}^i, e_{v,u}^i\})$ et modifions le graphe du réseau final comme $F = F \cup H^i$. L'ensemble d'arcs W^i représente des nouvelles lignes ajoutées dans le réseau à l'itération i . Les organes de manœuvre pourront donc être placés sur les arcs de l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{|A_H|} W^i$. On répète la procédure pour toutes les paires d'arcs $\{e_{u,v}^i, e_{v,u}^i\} \in A_H$ de l'arborescence des pertes minimales H .

Le graphe F du réseau de la solution finale va contenir l'union des arborescences de pertes minimales.

Nous allons montrer dans la partie des résultats numériques IV.7.2 que l'utilisation de la méthode exacte pour la recherche d'une arborescence des pertes minimum est beaucoup plus coûteuse par rapport aux algorithmes heuristiques AH1 et AH2. Même pour l'algorithme AH3, car il repose sur la résolution du programme en nombres entiers.

L'exemple de la solution obtenue par l'algorithme AARPM est illustré sur la **Figure IV-2**. L'instance donnée est un graphe planaire symétrique contenant 16 sommets, dont deux sommets de postes source (les carrés noirs), 4 sommets bleus représentent les sommets de charge (en PQ) ayant les mêmes valeurs et les sommets blancs sont des sommets intermédiaires sans

charges. Les mêmes valeurs de résistance et de réactance sont attribuées à tous les arcs. Les arcs bleus représentent la structure radiale optimale pour la minimisation des pertes (en régime d'exploitation normal) ayant 2 composants connexes connectés aux postes sources. Sur l'image b) le graphe du réseau final est affiché où les lignes vertes en pointillées représentent des lignes avec des organes de manœuvre normalement ouverts en régime d'exploitation normal. Il contient l'union des structures radiales optimales construites par l'algorithme AARPM. Dans cet exemple, le réseau final de la solution va contenir toutes les arêtes du graphe.

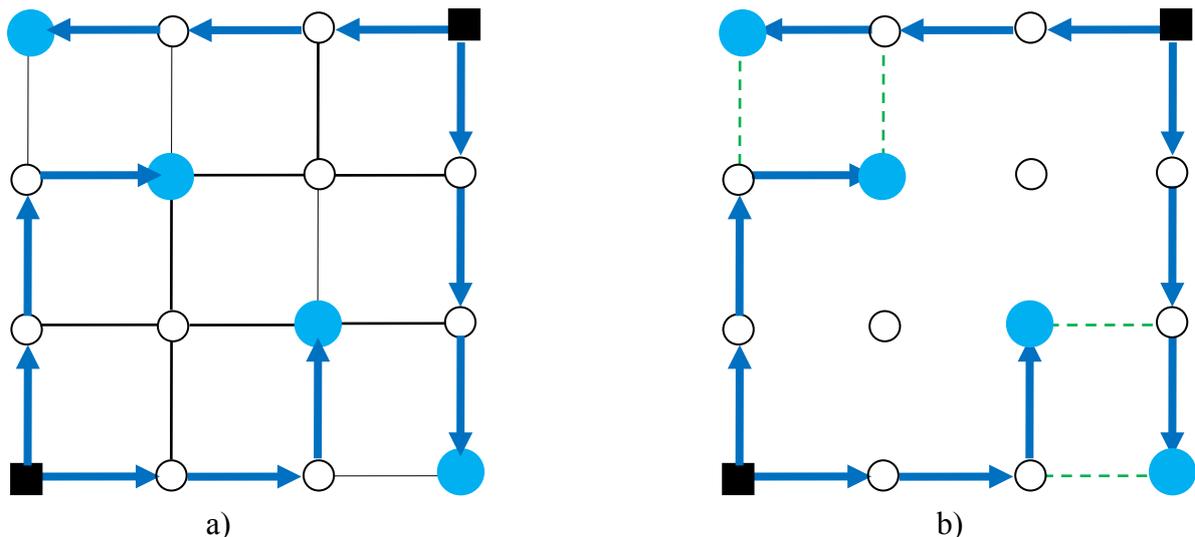


Figure IV-2 : Structure radiale optimale pour la minimisation des pertes trouvée par la résolution du modèle convexe exact (III-25)-(III-26) du problème de reconfiguration – figure a) ; graphe du réseau final trouvé par l'algorithme AARPM – figure b).

IV.5. Modèle de l'Architecture : Union des arborescences de flot de coût linéaire minimum (MODELE_{UAFCLM})

Dans cette section, nous présentons un modèle linéaire pour déterminer une architecture du réseau où les produits $P \times L$ (puissance \times longueur) seront équilibrés. Cet équilibre, présenté dans la partie I.4, est un critère de qualité de service. Nous proposons de partitionner le réseau en zones (l'ensemble de sous-graphes arête-disjoints) avec la somme des demandes de la puissance multipliée par la somme des longueurs des lignes équivalentes. Nous proposons une formulation fondée sur le modèle de flot de coût minimum.

Nous considérons un graphe planaire, orienté, symétrique et connexe $G = (V, A)$ qui représente le réseau de distribution contenant des lignes envisageables. L'ensemble V contient l'ensemble de sommets représentant les nœuds de charge ($S \subseteq V$), les postes sources HTB/HTA ($H \subseteq V$) et les nœuds sans charge – les intersections des lignes ($X \subseteq V$) comme les croisements des rues sur le plan géographique par exemple. L'ensemble A contient toutes les

paires d'arcs (i, j) et (j, i) entre des sommets i et j pour tout $i, j \in X$. Tous les arcs (i, j) sont pondérés par des distances euclidiennes entre les nœuds i et j (longueur de la ligne électrique (i, j)), i.e. la fonction des coûts est définie sur l'ensemble des arcs du graphe comme $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Nous attribuons à chaque sommet de charge $j \in X$ les demandes positives constantes de la puissance active p_j .

L'idée clé de l'algorithme est la suivante –développement de l'architecture nommée *Union des arborescences de flot de coût linéaire minimum* (AAFCLM) est la suivante. Nous résolvons k ($k=|H|$) problèmes indépendants de la recherche du flot de la puissance de coût minimum envoyé depuis le poste source $s_i \in H$ ($i = 1, \dots, |H|$), vers les sommets de charge. Le support de la solution de chaque problème est une arborescence avec la racine dans le sommet du poste source $s_i \in H$ ($i = 1, \dots, |H|$). L'union des arbres couvrants correspondant à ces arborescences sera la solution finale de l'algorithme de la conception de l'architecture de réseau.

Le sous problème de la recherche d'un flot de coût linéaire minimum pour la source définie dans le sommet $s_i \in H$ ($i = 1, \dots, |H|$) est formulé par (IV-7).

$$\min \sum_{a \in A} c_a f_a$$

$$\text{a) } \sum_{a \in \delta^-(v)} f_a - \sum_{k \in \delta^+(v)} f_k = d_i, \quad \forall v \in V \setminus s_i \quad (\text{IV-7})$$

$$\text{b) } f_a \in \mathbb{R}^+, \quad c_a > 0, \quad \forall a \in A$$

La description des contraintes du programme linéaire de flot de coût linéaire minimum (IV-7) est présentée dans le **Tableau IV-2** :

Tableau IV-2 : Description des contraintes du modèle de flot de coût linéaire minimum (IV-7).

Famille des contraintes du modèle	Description
a)	contraintes de conservation de flot envoyé depuis le sommet poste sources s_i écrites pour tous les sommets $v \neq s_i$
b)	domaine de définition des variables de flot f_a et les bornes sur les coûts fixes c_a

Le support de la solution du programme (IV-7) est une s_i -arborescence A_i . Le support de la solution de l'algorithme sera l'union des arbres couvrants correspondant aux arborescences A_i . La description formelle de l'algorithme est présentée ci-dessous.

INSTANCE : Graphe symétrique $G=(V, A)$ du réseau potentiel, $|V|=n$, l'ensemble de sommets représentant les postes sources $H \subseteq V$, avec $|H| = k$, la fonction de coût (la distance) sur

les arcs $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, le vecteur $p = (p_1, p_2, \dots, p_{n-k}) \in \mathbb{R}^+$ des demandes constantes de la puissance active définies sur les sommets de $V \setminus (S \cup H)$.

OBJECTIF : Trouver un sous-graphe connexe F de G contenant l'union de k arborescences de flot de coût linéaire minimum.

Algorithme AAFCLM :

(0) Initialisation $F = \emptyset$

(1) Pour $i = 1, \dots, k$ répéter :

- Résoudre le programme (IV-7) pour trouver le flot de coût minimum envoyé depuis le sommet de source s_i . A^i est le support de la solution dans le graphe G à l'itération i ;
- Modifier le graphe de la solution finale $F = F \cup A^i$.

(2) Retourner F .

L'exemple du fonctionnement de l'algorithme **AAFCLM** est illustré sur les **Figure IV-3** et **Figure IV-4**. Nous prenons la même instance comme dans la section précédente : le graphe planaire symétrique contenant 16 sommets, dont deux sommets de postes source (les carrés noirs), 4 sommets bleus avec la demande de la puissance active non nulle de même valeur et les sommets blancs sont des sommets intermédiaires sans charges (demande nulle). À tous les arcs, on a attribué les mêmes coûts fixes par des longueurs d'arcs. Sur la **Figure IV-3a)** et **Figure IV-3b)** sont présentées les arborescences de flot de coût linéaire minimum envoyé depuis les racines – carrés noirs.

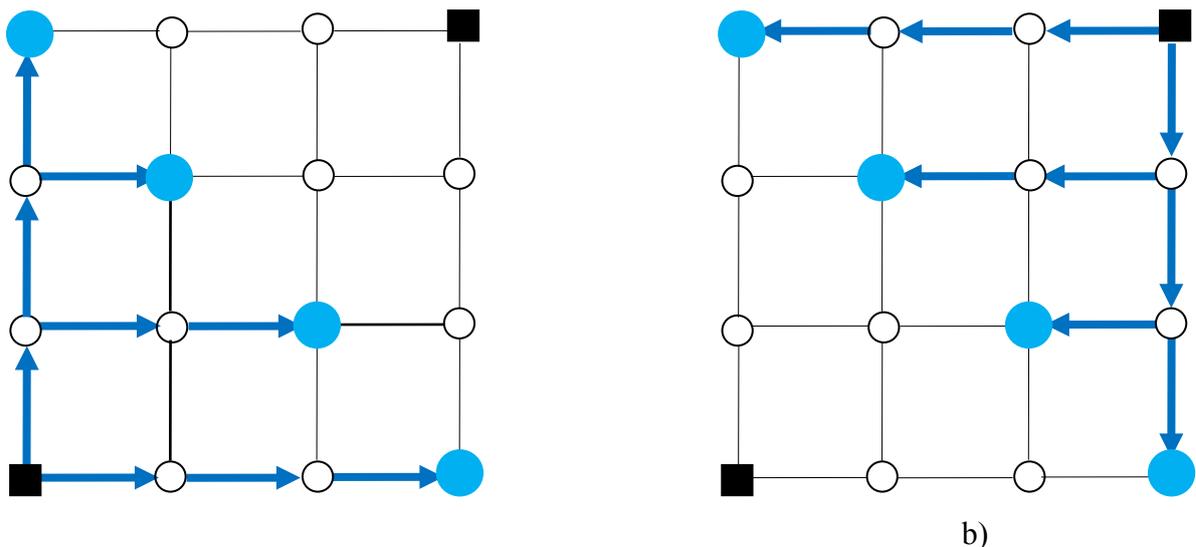


Figure IV-3 : Arborescence de la solution du flot de coût linéaire minimum avec la racine dans le sommet de poste source en bas à gauche – l'image a), dans le sommet de poste source en haut à droite – l'image b).

Le graphe du réseau de la solution de l'algorithme **AAFCLM** va contenir l'union de deux arborescences a) et b) et il est montré sur la **Figure IV-4**.

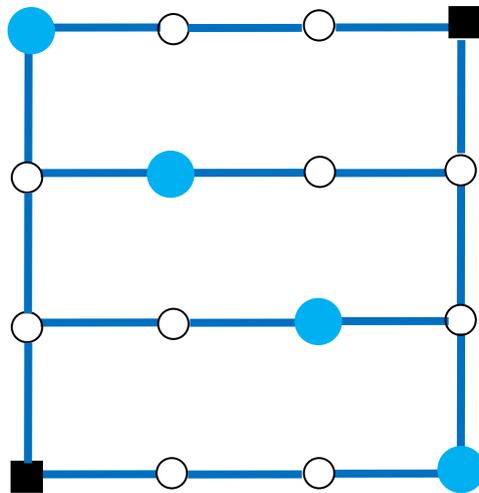


Figure IV-4 : Graphe du réseau de la solution obtenue par l'algorithme **AAFCLM**.

Par contre l'algorithme **AAFCLM** ne garantit pas la 2-connexité du graphe de la solution. L'exemple illustré sur la **Figure IV-5** montre que l'intersection des ensembles d'arcs des deux flots de coût linéaire minimum ayant les valeurs non nulles peut être non vide.

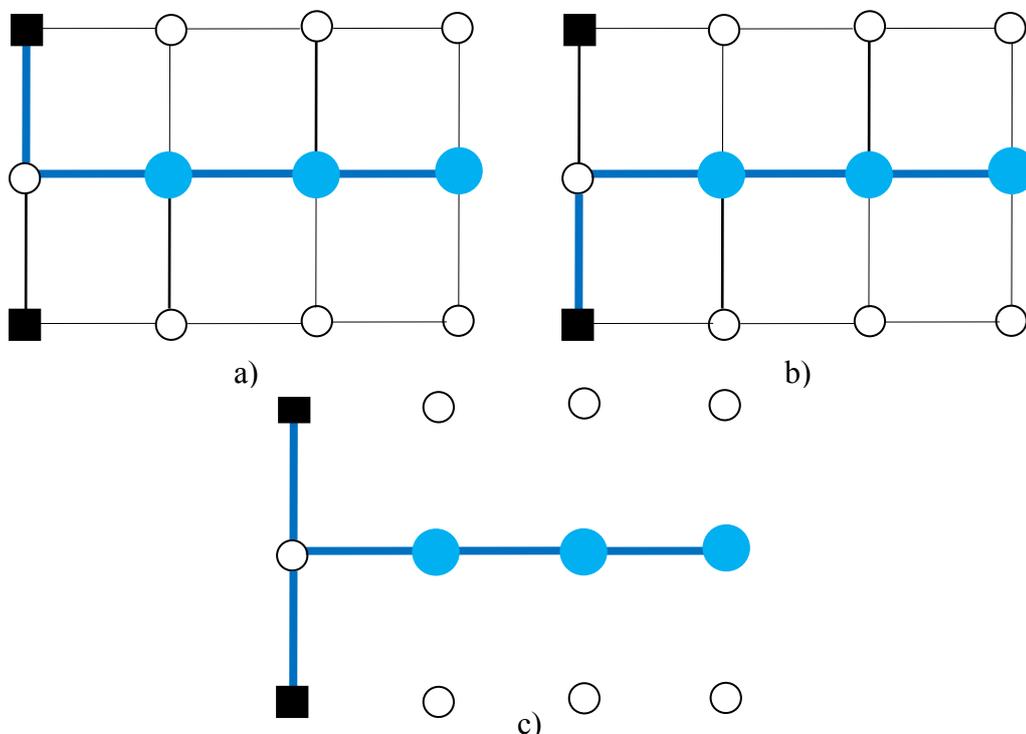


Figure IV-5 : Arborescence de la solution du flot de coût linéaire minimum avec la racine dans le sommet de poste source en haut à gauche – l'image a), dans le sommet de poste source en bas à gauche – l'image b). Le sous-graphe connexe (image c) de la solution de l'union de deux flots de coût linéaire minimum trouvés par l'algorithme **AAFCLM**.

Dans les cas où le support de la solution de l'algorithme **AAFCLM** est un graphe 1-connexe, nous pouvons le compléter jusqu'à un graphe 2-connexe par un sous-ensemble d'arêtes du graphe initial en appliquant le modèle de la conception d'un graphe 2-connexe de poids minimum. Pour cela, il faut ajouter dans le modèle du réseau de Steiner de poids minimum les contraintes supplémentaires $x_e = 1, \forall e \in F$, où F est l'ensemble d'arêtes du graphe de la solution **AAFCLM**. La solution finale dans ce cas sera un graphe 2-connexe. Elle est montrée sur la **Figure IV-6**.

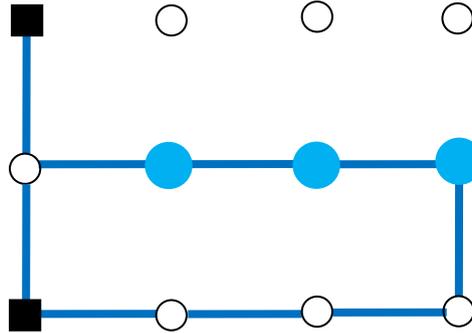


Figure IV-6 : Graphe de la solution **AAFCLM** complété jusqu'à un graphe 2-connexe en utilisant le modèle du problème de réseau de Steiner de poids minimum.

IV.6. Modèle de l'Architecture : Pertes minimum dans le Réseau de Distribution de Longueur Minimale ($\text{MODELE}_{\text{APLM}}$)

Dans cette section, nous présentons le modèle d'architecture du réseau de distribution ayant comme objectif la minimisation de la longueur totale des lignes électriques, ainsi que la minimisation des pertes. Cette approche consiste à décomposer le problème initial en deux problèmes mono-objectif et à utiliser le support de la solution du premier problème pour la résolution du deuxième. Pour la construction d'un réseau de longueur minimale, nous formulons le modèle dans le graphe symétrique comme pour le $\text{Modèle}_{\text{ALM}}$ avec les mêmes notations. Nous reformulons le modèle $\text{PLNE}_{\text{SNDP}}$ (pour la résolution optimale en nombre entier, et PL_{SNDP} pour la résolution approximative) en ajoutant les contraintes sur la distribution du courant dans les lignes électriques, i.e. les contraintes de capacité des lignes. Ensuite nous cherchons dans ce graphe 2-connexe obtenu une configuration radiale qui minimise les pertes dans le réseau en utilisant le modèle convexe pour le problème de reconfiguration présenté dans III.4.

A. Fonction économique de coût

Dans le **Modèle_{APLM}** nous considérons minimiser la valeur de la fonction économique C_{total_act} des coûts actualisés sur la période de N années. Elle a été définie dans II.4.3. Rappelons-la :

$$C_{total_act} = I(L, OM) + \sum_{n=0}^N \frac{C \times P(n)}{(1+\tau)^n}$$

où

$$\left[\begin{array}{l} C_{total_act} \text{ – coûts actualisés en k€} \\ L \text{ – longueur totale des lignes dans le réseau} \\ OM \text{ – organe de manoeuvre} \\ I \text{ – investissement à l'année 0 en k€} \\ C \text{ – coût d'un kW de pertes à la pointe en k€} \\ P(n) \text{ – pertes à la pointe à l'année } n \text{ en kW} \\ \tau \text{ – taux d'actualisation en \%} \end{array} \right. \quad (IV-8)$$

Ici, le coût d'investissement I se compose des termes suivants :

- le coût des câbles qui dépend de la longueur du réseau ;
- le coût des tranchées qui dépend de la longueur du réseau ;
- le coût des organes de coupure. Leur nombre dans ce modèle dépend de la configuration radiale minimisant les pertes techniques dans le réseau.

Le deuxième terme de la fonction économique C_{total_act} est le coût des pertes techniques dans le réseau pendant la période de N années. En prenant en compte l'augmentation des charges chaque année, cela peut conduire à une modification de la configuration pour avoir les pertes minimales chaque année. C'est pourquoi nous les calculons par la recherche des configurations radiales optimales pour chaque année en résolvant le modèle convexe du problème de reconfiguration.

B. Contraintes de capacité des lignes

Nous modifions le modèle **PLNE_{SNDP}** (pour la résolution exacte en nombres entiers, soit **PL_{SNDP}** pour la résolution approximative par l'algorithme itératif **ARSCM**) pour obtenir le modèle qui prend en compte les contraintes de capacité des lignes pour la distribution du courant dans le réseau sans pertes. Ces contraintes définiront les bornes inférieures de capacité des lignes que l'on utilisera pour le choix de type de câbles à l'étape de la recherche d'une configuration radiale qui minimise les pertes dans le réseau. Nous les estimons par l'approximation linéaire du courant. Puisque nous ajoutons des contraintes supplémentaires de

capacités des lignes dans le programme linéaire \mathbf{PL}_{SNDP} , nous ne pouvons plus garantir le facteur d'approximation 2 de l'algorithme \mathbf{ARSCM} .

La borne supérieure sur le module carré du courant sur l'arc (i, j) peut être exprimée comme

$|I_{ij}|^2 = \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{|V_i|^2} \leq \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{|V^{\min}|^2} \leq \frac{(P_{ij} + Q_{ij})^2}{|V^{\min}|^2}$, où V^{\min} est une borne inférieure constante sur la tension dans le réseau, P_{ij} et Q_{ij} les variables de la puissance active et réactive attribuées à l'arc (i, j) . En supposant dans le modèle que toutes les variables sont positives et prenant la racine carrée nous obtenons l'ensemble des bornes inférieures sur le courant pour tout arc de A .

$$I_{ij} \leq \frac{P_{ij} + Q_{ij}}{V^{\min}}, \forall (i, j) \in A \quad (\text{IV-9})$$

Les contraintes de capacité des lignes pour les constantes I_{ij}^{\max} données seront les (IV-10) :

$$\frac{P_{ij} + Q_{ij}}{V^{\min}} \leq I_{ij}^{\max}, \forall (i, j) \in A \quad (\text{IV-10})$$

En ce qui concerne les modèles \mathbf{PLNE}_{SNDP} et \mathbf{PL}_{SNDP} , les contraintes (IV-10) peuvent être formulées en fonction des variables des flots $w_e^k, \forall e \in A, k \in V$. Nous les présentons dans le modèle suivant.

C. Modèle d'architecture du réseau de longueur minimum avec les capacités des lignes

Le modèle de la conception de l'architecture du réseau de *longueur minimum avec les capacités des lignes* (ALMC) est défini ci-dessous :

Modèle_{ALMC} :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{a \in A'} c_a x_a \\ a) \quad & \sum_{\forall i \in \delta^-(v)} w_i^k - \sum_{\forall j \in \delta^+(v)} w_j^k = 0, \quad \text{si } k \neq v \quad \forall v \in V \setminus s, \quad \forall k \in (S \cup H) \\ b) \quad & \sum_{\forall i \in \delta^-(v)} w_i^k - \sum_{\forall j \in \delta^+(v)} w_j^k = r(s, v), \quad \text{si } k = v \quad \forall v \in V \setminus s, \quad \forall k \in (S \cup H) \\ c) \quad & \left(\frac{\sum_{\forall a \in e, \forall k \in (S \cup H)} w_a^k p_k + \sum_{\forall a \in e, \forall k \in (S \cup H)} w_a^k q_k}{V^{\min}} \right) \leq I_e^{\max}, \quad \forall e = \{(i, j), (j, i)\} \subset A'(G') \\ d) \quad & 0 \leq w_a^k \leq x_a \quad \forall a \in A'(G'), \forall k \in (S \cup H) \\ e) \quad & x_a \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A'(G') \end{aligned} \quad (\text{IV-11})$$

La description des contraintes du Modèle_{ALMC} (IV-11) est présentée dans le tableau ci-dessous :

Tableau IV-3 : Description des contraintes du Modèle_{ALMC}.

Famille des contraintes du modèle	Description
a)	contraintes de conservation de $s-k$ flots écrites pour tous les sommets $k \neq v$
b)	contraintes de conservation de $s-k$ flots écrites pour tous les sommets $k = v$
c)	les bornes supérieures sur le courant passant par des lignes
d)	les bornes sur des variables de flot $w_a^k \forall k \in (S \cup H) \setminus s$.
e)	domaine de définition des variables de décision x_a

Pour satisfaire la contrainte de capacité du courant maximal sur des lignes nous ajoutons à chaque arc $a \in A$ 3 arcs parallèles avec le même poids. Ce signifie que chaque tranchée du réseau contient 4 câbles potentiels. Ce choix a été fait pour le cas de test sur les données d'un réseau réel. Ce nouvel ensemble d'arc est noté A' . Pour chaque paire d'arc

$e = \{(i, j), (j, i)\} \subset A'$ nous approximons le courant $I_e \approx \frac{\sum_{\forall a \in e, \forall k \in (S \cup H)} w_a^k p_k + \sum_{\forall a \in e, \forall k \in (S \cup H)} w_a^k q_k}{V^{\min}}$ en

fonction des variables de k flots w_a^k que l'on utilise pour définir le sous-graphe 2-connexe de la solution. Nous demandons pour chaque paire d'arc e de A' que l'approximation du courant soit inférieure au courant maximum I_a^{\max} .

D. Configuration radiale du réseau en régime d'exploitation normal

Etant donné le graphe du réseau $G^{\text{SOL}} = (V^{\text{SOL}}, A^{\text{SOL}})$ obtenu par la résolution du **Modèle_{ALMC}**. Pour trouver la structure radiale qui minimise les pertes nous définissons le graphe planaire 2-connexe $F = (V^{\text{SOL}}, D)$ avec un sommet $s \in V^{\text{SOL}}$ – sommet de super source. L'ensemble de sommets du graphe contient trois sous-ensembles : $V^{\text{SOL}} = S \cup H \cup X$, où $S \cap X \cap H = \emptyset$. Ces sous-ensembles contiennent les sommets suivants :

- $S \subseteq V^{\text{SOL}}$ représentant les sommets avec les demandes positives de la charge de la puissance active p_i et réactive q_i pour tout $i \in S$;
- $H \subseteq V^{\text{SOL}}$ le sous-ensemble de sommets de postes source HTB/HTA (les demandes p_i et q_i sont égales à 0 pour tout $i \in H$) ;
- $X \subseteq V^{\text{SOL}}$ les croisements des rues sur le plan géographique (les demandes p_i et q_i sont égales à 0 pour tous $i \in X$).

L'ensemble des arcs D contient tous les arcs $(s, k) \in A^{\text{SOL}}$ connectant les sommets de postes sources avec s ; et toutes les paires d'arcs (i, j) et (j, i) pour chaque $(i, j) \in A^{\text{SOL}}$, où $i, j \in V^{\text{SOL}} \setminus s$, i.e. le graphe $(V^{\text{SOL}} \setminus s, D)$ est symétrique. Deux types de coûts fixes sur les arcs de D sont

définis par les constantes r et x qui sont : la résistance et la réactance de la ligne (les mêmes pour tous les arcs du graphe), définis en fonction de type de câble choisi. Sur les arcs connectant le sommet s avec les sommets de H , nous supposons que les valeurs de résistance et de réactance sont nulles.

Pour définir la structure radiale ayant les pertes minimales dans le graphe de la longueur minimal $F = (V^{SOL}, D)$, nous résolvons le programme quadratique en nombres entiers que l'on a défini dans III.4.1 pour le modèle convexe de reconfiguration optimale.

Le **Modèle_{APLM}** est formulé par les conditions (IV-12).

Modèle_{APLM} :

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{(i,j) \in D} r_{ij} l_{ij} \\
a) \quad & p_j = \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} (P_{ij} - r_{ij} l_{ij}) - \sum_{(j,k) \in \delta^+(j)} P_{jk}, \quad \forall j \in V^{SOL} \\
b) \quad & q_j = \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} (Q_{ij} - x_{ij} l_{ij}) - \sum_{(j,k) \in \delta^+(j)} Q_{jk}, \quad \forall j \in V^{SOL} \\
c) \quad & v_j \geq v_i - 2(r_{ij} P_{ij} + x_{ij} Q_{ij}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2) l_{ij} - (1 - e_{ij}) M, \quad \forall (i,j) \in D \\
d) \quad & v_j \leq v_i - 2(r_{ij} P_{ij} + x_{ij} Q_{ij}) + (r_{ij}^2 + x_{ij}^2) l_{ij} + (1 - e_{ij}) M, \quad \forall (i,j) \in D \\
e) \quad & l_{ij} \geq \frac{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}{v_i}, \quad \forall (i,j) \in D \\
f) \quad & \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} e_{ij} = 1, \quad \forall j \in V^{SOL} \setminus s \\
g) \quad & e_{ij} + e_{ji} \leq 1, \quad \forall (i,j) \in D \\
h) \quad & 0 \leq P_{ij} \leq e_{ij} \bar{P}_{ij}, \quad 0 \leq Q_{ij} \leq e_{ij} \bar{Q}_{ij}, \quad \forall (i,j) \in D \\
i) \quad & \underline{v}_i \leq v_i \leq \bar{v}_i, \quad \forall i \in V^{SOL} \setminus s \\
j) \quad & \underline{p}_i^g \leq p_i^g \leq \bar{p}_i^g, \quad \underline{q}_i^g \leq q_i^g \leq \bar{q}_i^g, \quad \forall i \in V^{SOL} \\
k) \quad & \underline{p}_i^c \leq p_i^c, \quad \underline{q}_i^c \leq q_i^c, \quad \forall i \in V^{SOL} \setminus s \\
l) \quad & r_{ij}, x_{ij} > 0, \quad e_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in D
\end{aligned} \tag{IV-12}$$

La description des contraintes du Modèle_{APLM} (IV-12) est présentée dans le **Tableau IV-4**.

Tableau IV-4 : Description des contraintes du Modèle_{APLM}.

Famille des contraintes du modèle	Description
a)	contraintes de conservation de flot de la puissance active
b)	contraintes de conservation de flot de la puissance réactive
c, d)	contraintes disjonctives sur les variables de la tension
e)	contraintes convexes sur les variables du courant
f, g)	contraintes sur la topologie radiale
h)	bornes sur les variables de la puissance active et réactive
i)	bornes sur les variables de la tension
j)	bornes sur les variables de la production de la puissance active et réactive
k)	bornes sur les variables de charge de la puissance active et réactive
l)	domaine de définition des variables de décision e_{ij} et des paramètres fixes de résistance et de réactance des lignes

Si le nombre de sommets du graphe de réseau de longueur minimale $F = (V^{\text{SOL}}, D)$ dépasse 300, nous cherchons la structure radiale par un des algorithmes AH1-AH2 (voir III.6.2) qui fournissent une bonne solution heuristique en temps polynomial.

E. Placement des organes de coupure

Nous plaçons les organes de coupure selon la configuration radiale obtenue à l'étape de la recherche d'une structure arborescente minimisant les pertes dans le réseau, qui est la solution du **Modèle**_{APLM}. Supposons que $F^A = (V^{\text{SOL}}, D^A)$ est une telle arborescence avec la racine dans le sommet s et $L \subseteq V^{\text{SOL}}$ est l'ensemble des feuilles de F^A . Selon la formulation du modèle, F^A contient tous les sommets de V^{SOL} . C'est pourquoi pour chaque sommet feuille $v \in L$, il existe une paire d'arcs (v, u) et $(u, v) \in D \setminus D^A$ telle que le sommet u est aussi une feuille. Ceci est vrai car le graphe non orienté correspondant de $F = (V^{\text{SOL}}, D)$ dans lequel chaque paire d'arcs (i, j) et (j, i) représentée par une arête (i, j) est 2-connexe. Appelons SW cet ensemble d'arcs connectant les feuilles.

Nous plaçons les organes de coupure dans le réseau sur chaque arc de SW . Le nombre d'organes de coupure dans le réseau de la solution finale sera respectivement la cardinalité de l'ensemble SW divisée par deux.

F. Coût des pertes sur la période de N années

Etant donné le graphe $F = (V^{\text{SOL}}, D)$ de la solution du **Modèle**_{APLM}. Nous calculons le coût des pertes selon la formule (IV-8) avec le taux d'actualisation τ . Nous supposons que les charges seront augmentées d'une constante $\delta\%$ pour chaque année. Nous calculons les pertes

$P(n)$ à la pointe à l'année n comme la valeur de la fonction objectif de la solution du **Modèle_{APLM}** trouvées pour les charges augmentées de $n\delta\%$.

Le coût des pertes actualisé pour la période de vie du projet de N années est donné par la formule suivante :

$$C_{\text{PERTES_ACT}} = \sum_{n=0}^N \frac{C \times P(n)}{(1+\tau)^n} \quad (\text{IV-13})$$

G. Coût total de la construction du réseau

Maintenant nous avons tous les moyens pour calculer le coût total de la construction du réseau. Rappelons que dans ce travail nous avons considéré deux composantes principales de ce coût :

- Coût d'investissement à l'année 0 =
 - + coût des câbles qui dépend de la longueur du réseau
 - + coût des tranchées qui dépend de la longueur du réseau
 - + coût des organes de coupure.
- Coût des pertes actualisé sur la période de N années

Nous calculons le coût des câbles, ainsi que le coût des tranchées à partir de la solution du **Modèle_{ALMC}** (voir IV.6.C) comme la somme des longueurs d'arcs du graphe de la solution $F = (V^{\text{SOL}}, D)$ multipliée par le coût de (câble + tranchée) en k€/km.

Le coût de placement d'organes de coupure est égal au nombre d'arcs divisé par 2 dans l'ensemble SW (voir IV.6.E).

Nous calculons le coût des pertes selon la formule (IV-13) (voir IV.6.F).

IV.7. Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques de tests des méthodes proposées dans le Chapitre IV pour le problème de planification des réseaux de distribution. Dans le **Tableau IV-5** nous spécifions des modèles d'architectures proposés avec les solutions correspondantes qu'ils fournissent.

Tableau IV-5 : Les modèles de l'architecture de réseaux de distribution proposés avec les solutions correspondantes.

Modèle	Support de la solution
Modèle de l'architecture du réseau de distribution de longueur minimale (Modèle _{ALM}).	Réseau de Steiner de poids minimal.
Modèle de l'architecture du réseau de distribution des pertes minimales (Modèle _{ARPM}).	Graphe 2-connexe contenant les arborescences minimisant les pertes pour pannes de chaque ligne.
Modèle de l'architecture du réseau de distribution de l'union des arborescences de flot de coût linéaire minimum (Modèle _{UAFCLM}).	Graphe 2-connexe construit comme l'union des arborescences de flot linéaire de coût minimum.
Modèle de l'architecture du réseau de distribution de pertes minimales dans le réseau de distribution de longueurs minimales (Modèle _{APLM}).	Réseau de Steiner de poids minimal avec les arêtes sélectionnées pour placer les organes de manœuvre

Les trois premiers modèles sont des modèles d'optimisation mono-objectif. Dans le Modèle_{ALM} nous utilisons un algorithme approximatif de facteur 2 pour trouver un sous-graphe 2-connexe de poids minimum dans le graphe du réseau potentiel. Le Modèle_{ALM} fournit un graphe 2-connexe des pertes minimales comme le support de la solution de l'algorithme ARPM. Dans le Modèle_{UAFCLM} le graphe du réseau de la solution est construit comme l'union des arborescences de flot de coût linéaire minimum.

Le dernier Modèle_{APLM} a comme objectif la somme des pertes à minimiser dans un réseau de longueur minimale qui est le support de la solution du Modèle_{ALMC} (graphe partiel ayant les valeurs non nulles des variables du vecteur de la solution attribuées).

Nous avons testé ces modèles sur un réseau réel, ainsi que sur les instances de test générées aléatoirement selon certaines règles que l'on présente par la suite. Les données d'entrée du réseau de distribution sont les données topologiques des emplacements des postes sources et des charges, ainsi que les caractéristiques électriques des charges (postes HTA/BT) et postes sources HTB / HTA.

Nous avons montré dans le chapitre II.4.1 l'approche pour la modélisation des réseaux de distribution électriques en termes des graphes.

Le réseau électrique peut être modélisé comme un graphe planaire où l'ensemble de sommets particuliers représentent des nœuds postes source HTB/HTA, les nœuds des consommateurs avec des demandes fixes de consommation de la puissance donnée (transformateurs HTA/BTA) et les arêtes représentent des lignes électriques. Chaque arête représente une tranchée pouvant contenir un ou plusieurs câbles en même temps.

A. Réseau réel

Nous modélisons le réseau sous forme d'un graphe planaire en utilisant le plan topologique d'une ville du Sud-Est de la France (en cours de soumission [105]). Ce plan contient le marquage des rues de la ville au travers desquelles les futures lignes électriques passeront, ainsi que les coordonnées géographiques des postes source HTB/HTA et des charges. À partir de ce plan géographique, nous construisons le graphe initial de la façon suivante :

- nous raccordons chaque nœud de charge et de poste source par une projection orthogonale à une rue de plus proche sur le plan (ce raccordement est dit en “chaussette”) ;
- nous ajoutons un sommet fictif s représentant le nœud bilan et le connectons avec tous sommets v postes source HTB/HTA par les arêtes (s, v) ;
- le sommet s , les points représentant les postes source, charges et intersections de rues et des raccordements de postes sources et de charges forment l'ensemble des sommets du graphe ;
- l'ensemble des arêtes contient tous les segments des rues entre des intersections ; les raccordements de sommets de charge et des postes source ; les arcs de poids nul connectant le sommet s avec tous les sommets postes source.

La fonction de l'exigence de connexité $r(u, v)$ (IV-4) que l'on a défini dans le Modèle_{ALM} prend les valeurs non-zéros uniquement pour toute paire de sommets contenant le sommet s et un sommet de charge. Pour toutes les autres paires, la fonction est égale à zéro.

La définition (IV-4) de la fonction $r(u, v)$ des conditions de la connexité dans le graphe signifie que pour chaque sommet de charge v il y a deux chemins arêtes-disjoints menant du sommet v à s , et chacun passe par un sommet poste source différent. C'est-à-dire que chaque poste source sera connecté au réseau par une ou plusieurs lignes.

Le réseau de 20kV contient 136 sommets de charge qui représentent la puissance active totale de 55.04 MW. Le plan topologique consiste en 480 nœuds d'intersections et 772 sections de rues. Le réseau contient trois postes sources HTB/HTA. Le graphe du réseau potentiel contient donc 759 sommets et 914 arêtes. Le graphe du réseau potentiel est illustré sur la **Figure IV-7** présentée ci-dessous. Les sommets de charge sont marqués en rouge, les sommets postes sources sont les carrés noirs.

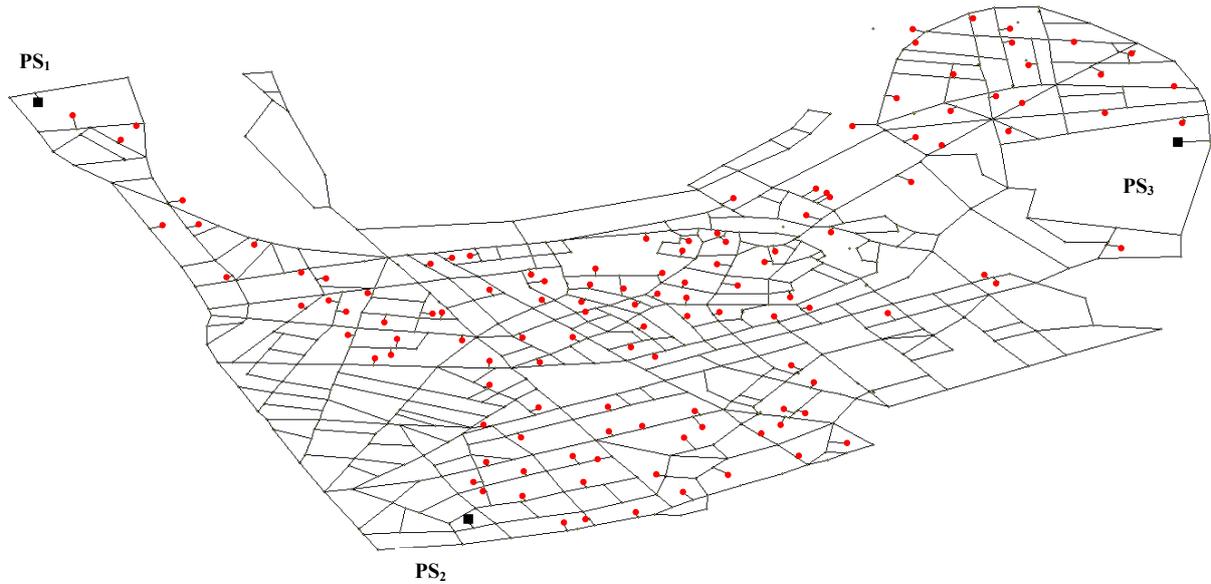


Figure IV-7 : Graphe du réseau potentiel.

B. Réseaux de test “graphes planaires maximaux”

Afin de tester l’efficacité des méthodes proposées pour la conception des architectures de réseaux de distribution, nous avons développé un ensemble de réseaux de test. Nous avons supposé les graphes planaires maximaux comme les instances de test. Les données sont l’ensemble des points représentant les postes source HTB/HTA et les charges (postes HTA/BTA) avec les coordonnées géographiques sur le plan qu’il faut relier en manière efficace (optimale) par des arêtes en respectant l’ensemble de contraintes. Pour ce cas, il n’y a pas de prescriptions sur le placement des lignes et on est libre dans le choix de la topologie du réseau (sous le respect des contraintes). Nous représentons le réseau sous forme d’un graphe planaire maximal appelé “graphe initial” contenant toutes les lignes potentielles du réseau représentées par des arêtes du graphe. Pour sa construction, nous utilisons l’algorithme de la triangulation de Delaunay [47], [14].

Nous ajoutons au graphe planaire maximal construit un sommet fictif s représentant le nœud bilan et le connectons avec tous les sommets v postes source par les arêtes (s, v) . Dans le graphe obtenu $G = (V, E)$ nous répartissons l’ensemble de sommet V sur trois sous-ensembles $V = S \cup H \cup X \cup s$, où $S \cap X \cap H = \emptyset$, S – l’ensemble de sommets de postes sources HTB/HTA, H – l’ensemble des sommets de charge et X – contient tous les sommets avec la demande nulle représentant les intersections des rues.

Nous avons généré 20 instances de réseaux contenant chacune 3 sommets postes sources, 147 sommets de charge et 350 sommets d’intersections des segments des rues. L’emplacement de sommets sur le plan géographique (coordonnées de points) est différent pour toutes les instances. Le nombre moyen d’arêtes (pour 20 instances) dans chaque graphe est 1480. La puissance totale active pour chaque instance de test varie dans l’intervalle [6MW, 8MW].

Le code de tous les tests a été écrit en C++ dans l’environnement Linux. Tous les calculs ont été effectués sur l’ordinateur portable DELL Intel 2.4GHz, 2GB de mémoire opérationnelle. Pour la visualisation des graphes de solutions des méthodes proposées dans cette thèse, nous avons utilisé le logiciel open source IGD (Interactive Graph Drawing) [106].

IV.7.1. Architecture du Réseau de Distribution de Longueur Minimale (MODELE_{ALM})

Cette section présente les résultats numériques de tests du Modèle_{ALM} sur les données du réseau réel ainsi que sur les instances de test générées aléatoirement. Modèle_{ALM} a l’objectif de la minimisation de la somme des longueurs d’arêtes d’un sous-graphe sous contrainte de connexité. Nous avons décliné ce modèle en deux versions :

- programme linéaire en nombres entiers qui est la formulation exacte du problème nommé **PLNE_{SNDP}** ;
- algorithme de 2-approximation garantie **ARSCM** fondé sur la relaxation en variables réelles – **PL_{SNDP}**.

Pour la résolution des programmes linéaires **PLNE_{SNDP}** et **PL_{SNDP}**, nous avons utilisé le logiciel commercial sous une licence académique IBM ILOG CPLEX [83].

Dans le **Tableau IV-6**, nous présentons les résultats numériques obtenus sur les cas de test : réseau réel et les graphes planaires maximaux. Pour le cas de test “Graphe planaire maximal”, nous affichons les valeurs moyennes sur 20 instances de graphes planaires maximaux obtenues par la résolution de l’algorithme ARSCM.

Tableau IV-6 : Résultats numériques des tests du Modèle_{ALM} sur les instances de test.

Cas de test		Nombre de sommets (charge/PS/total)	Nombre d’arêtes	Pertes (kW)	I _{max} (p.u.)	V _{min} (p.u.)	Temps de calcul (s)	Objectif (km)
Réseau réel	PLNE _{SNDP}	136/3/759	914	279	0.405	0.983	2474	20.645
	ARSCM			308	0.446	0.981	96	20.754
Graphes planaires maximaux	PLNE _{SNDP}	150/3/500	1480	82	0.264	0.982	7067	8.67
	ARSCM			86	0.253	0.981	320	8.729

Pour toutes instances de test, nous avons choisi le câble 240 mm² Alu avec les paramètres suivants :

- résistance (Ω/km) – 0.125;
- réactance (Ω/km) – 0.1;
- courant maximal admissible I_{adm}^{\max} (A) – 419.

Pour la puissance de base $S_{base} = 100\text{MVA}$ et la tension nominale $U_{base} = 20\text{kV}$ le courant maximal admissible exprimé en p.u. calculé à partir des formules (IV-14)-(IV-15) est égale à 0.1451 p.u.

$$I_{base} = \frac{S_{base}}{\sqrt{3}U_{base}} \quad (\text{IV-14})$$

$$I_{p.u.}^{\max} = \frac{I_{adm}^{\max}}{I_{base}} \quad (\text{IV-15})$$

Le réseau réel existant a une longueur totale des lignes de 38.70 km. Dans ce tableau la longueur des réseaux de solution est présentée dans la dernière colonne marquée “Objectif”.

Dans ces cas de test nous avons considéré que chaque tranchée contient au plus un câble. Les résultats de test pour le cas du réseau réel montrent que la contrainte sur le courant maximal n’a pas été vérifiée.

Nous voyons que pour l’instance de données du réseau réel le temps du calcul de la solution optimale du Modèle_{ALM} en formulation PLNE_{SNDP} est jusqu’à dix fois plus grand par rapport du temps d’exécution de l’algorithme ARSCM, qui fournit une solution ayant la valeur de la fonction objectif assez proche de l’optimal – 0.005%. Le temps du calcul moyen de la solution optimale sur 20 instances de test de graphes planaires maximaux est beaucoup plus important par rapport au temps de résolution de l’algorithme ARSCM, qui fournit les solutions très proches de l’optimal (0.0067%).

Le support de la solution optimale du programme PLNE_{SNDP} et le support de solution approximative de l’algorithme ARSCM sur l’instance du réseau réel sont affichées sur les **Figure IV-8** et **Figure IV-9**.

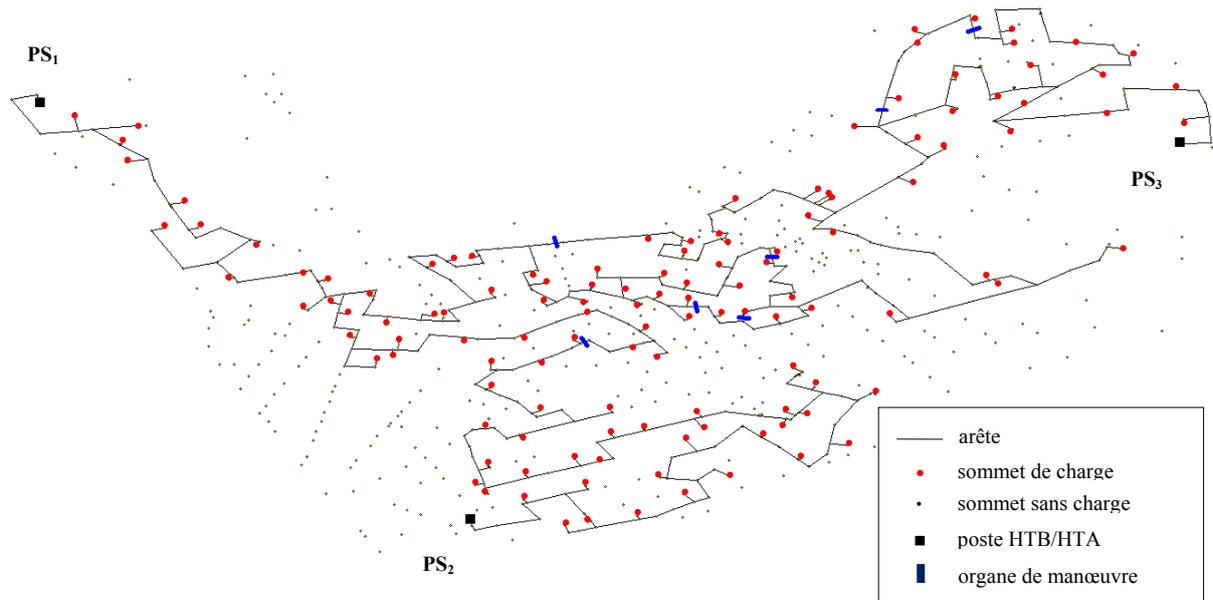


Figure IV-8 : Support de la solution approximative du Modèle_{ALM} pour les données du réseau réel.

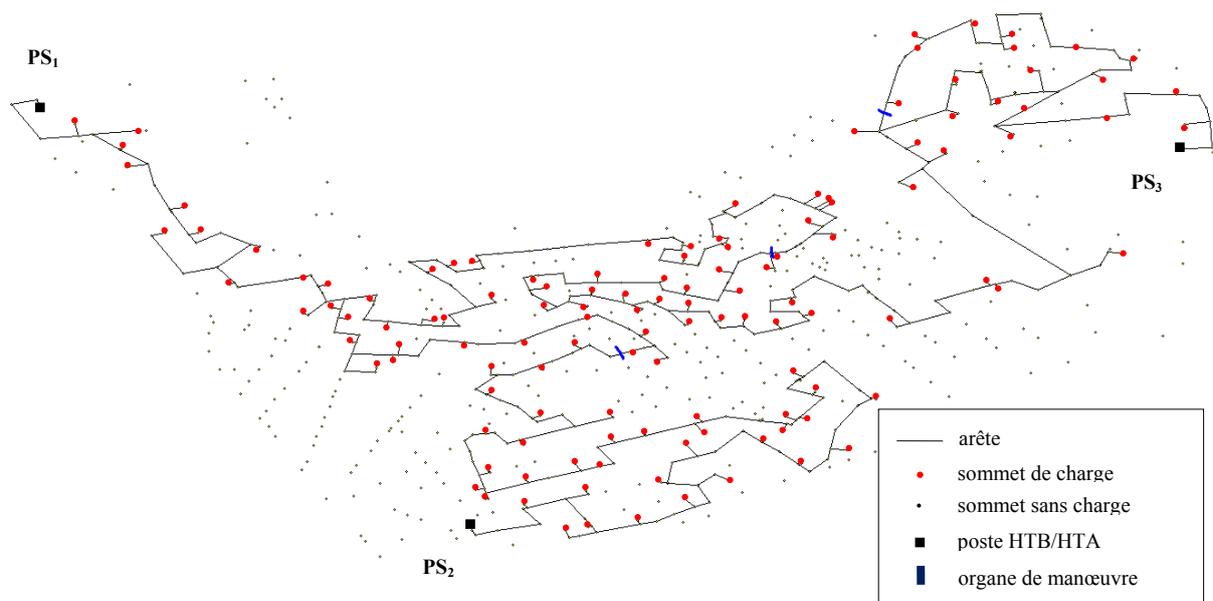


Figure IV-9 : Support de la solution optimale du Modèle_{ALM} pour les données du réseau réel.

IV.7.2. Architecture du Réseau de Distribution de Pertes Minimum (MODELE_{ARPM})

Pour la construction du réseau de pertes minimum, nous avons présenté dans IV.4.1 l'algorithme heuristique ARPM qui est fondé sur des algorithmes AH1-AH3 (voir III.6.2) de la recherche d'une structure arborescente qui minimise les pertes dans le réseau. Pour le Modèle_{ARPM}, nous avons choisi d'utiliser l'algorithme AH2 (le plus rapide) dans l'algorithme

ARPM. Les résultats de tests ont été obtenus sur les instances des graphes planaires maximaux (valeurs moyennes sur 20 instances) et sur les données du réseau réel. Elles sont affichées dans le **Tableau IV-7**.

Tableau IV-7 : Résultats numériques de tests du Modèle_{ARPM} pour les instances de test.

Cas de test	1 ^{ère} arborescence de pertes min				Longueur du réseau final (km)	Nombre d'organes de manœuvre	Temps d'exécution AARPM (s)
	Longueur (km)	Pertes totales (kW)	I_{\max} (p.u.)	V_{\min} (p.u.)			
Réseau réel	36.565	204	0.304	0.985	42.445	92	424
Graphes planaires maximaux	14.210	41	0.156	0.987	21.024	121	469

Pour toutes instances de test nous avons choisi le câble 240 mm² Alu avec les paramètres suivants :

- résistance (Ω/km) – 0.125;
- réactance (Ω/km) – 0.1;
- courant maximal admissible (A) – 419.

Dans ce tableau nous appelons “1^{ère} arborescence de pertes min” le support de la solution de l’algorithme AH2 dans le graphe de l’instance de l’algorithme AARPM.

Pour l’instance de données du réseau réel le réseau final construit par l’algorithme ARPM est affiché sur la **Figure IV-10**.

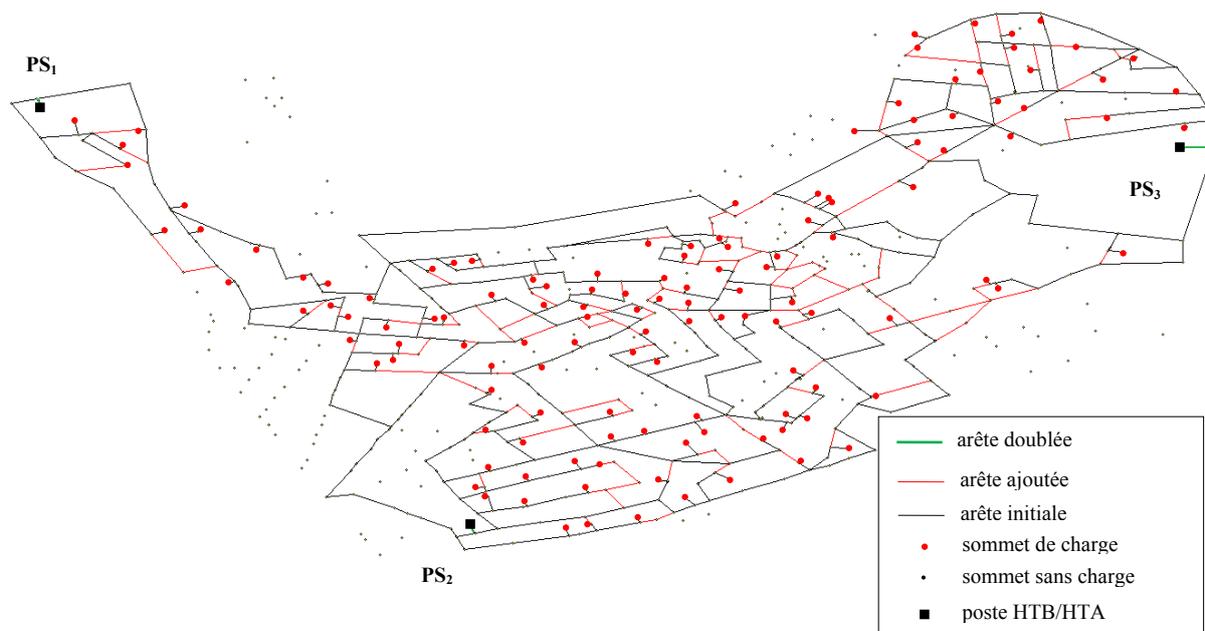


Figure IV-10 : Support de la solution de l’algorithme ARPM du Modèle_{APMP} pour l’instance de données du réseau réel.

Le réseau contient la structure radiale obtenue par AH2. Ses arêtes sont marquées par des lignes noires sur la figure. Les lignes rouges sont des arêtes ajoutées par l'algorithme AARPM. Les organes de manœuvre sont placés sur chaque ligne marquée en rouge.

IV.7.3. Architecture du Réseau de Distribution Union des arborescences de flot de coût linéaire minimum (MODE-LE_{UAFCLM})

Le Modèle_{UAFCLM} du problème de la construction d'architecture du réseau a été formulé dans IV.5. Il repose sur le problème de flot de coût linéaire minimum dans un graphe planaire connexe symétrique $G = (V, A)$ qui représente le réseau de distribution contenant les lignes potentielles. Les résultats de tests ont été obtenus sur les instances des graphes planaires maximaux (valeurs moyennes sur 20 instances) et sur les données du réseau réel. Chaque instance contient trois sommets de postes sources ; nous les avons appelé PS₁, PS₂ et PS₃. Pour toutes instances de test nous avons choisi le câble 240 mm² Alu avec les paramètres suivants :

- résistance (Ω/km) – 0.125;
- réactance (Ω/km) – 0.1;
- courant maximal admissible (A) – 419.

L'algorithme AAFCLM a trois itérations dont chacune consiste à trouver le flot de coût linéaire minimum envoyé depuis le sommet de poste source PS_{*i*} ($i = 1, 2, 3$) qui satisfait les demandes dans les sommets du graphe G . Les résultats numériques sont présentés dans le **Tableau IV-8**.

Tableau IV-8 : Résultats numériques de tests du Modèle_{UAFCLM} sur les instances de test.

Cas de test	Objectif PS ₁ (MW×km)	Objectif PS ₂ (MW×km)	Objectif PS ₃ (MW×km)	Longueur du réseau final (km)	Pertes (kW)	I _{max} (p.u.)	V _{min} (p.u.)	Temps d'exécution d'AAFCLM (s)
Réseau réel	101672	76115	112181	44.494	185	0.247	0.989	<1
Graphes planaires maximaux	2864	3457	2656	26.486	34	0.148	0.989	<1

Ici, dans les colonnes 2 – 4 sont présentées les valeurs des fonctions objectif de sous problèmes de flot de coût linéaire minimum avec la source dans le sommet PS_{*i*}. Les supports de la solution de chaque sous problème de flot de coût linéaire minimum sont des arborescences A_i dans G . Le support de la solution d'algorithme AAFCLM est l'union des arborescences A_i ($i = 1, 2, 3$). Dans les colonnes 5-8, nous avons présenté la somme des longueurs des arêtes du graphe obtenu, la somme des pertes, le courant maximal et la tension minimale du réseau.

Les supports de solutions des problèmes de flots de coût linéaire minimum ayant des sources dans les sommets PS_i ($i = 1, 2, 3$) pour le cas de test du réseau réel sont affichées sur les figures suivantes : **Figure IV-11**, **Figure IV-12** et **Figure IV-13**.

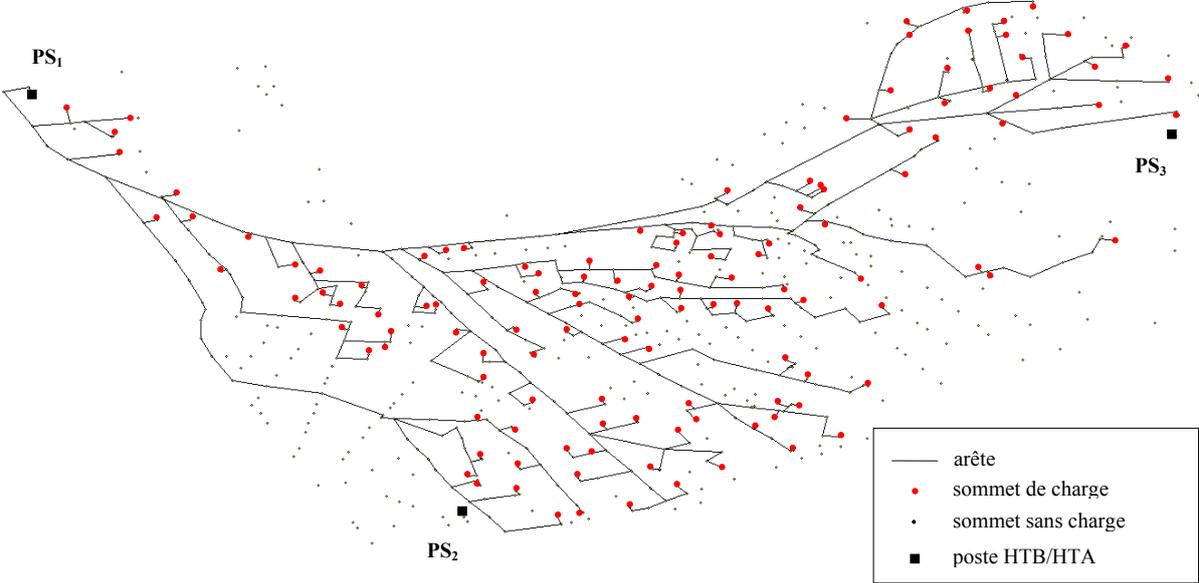


Figure IV-11 : Support de la solution de flot de coût linéaire minimum avec le sommet de source PS_1 pour l'instance de données du réseau réel.

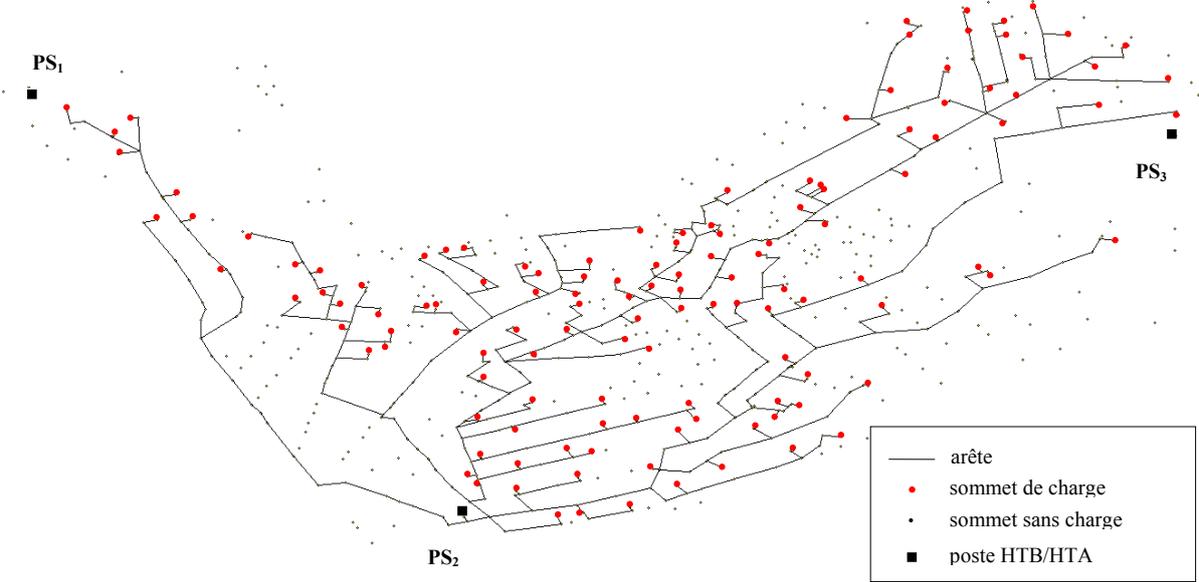


Figure IV-12 : Support de la solution de flot de coût linéaire minimum avec le sommet de source PS_2 pour l'instance de données du réseau réel.

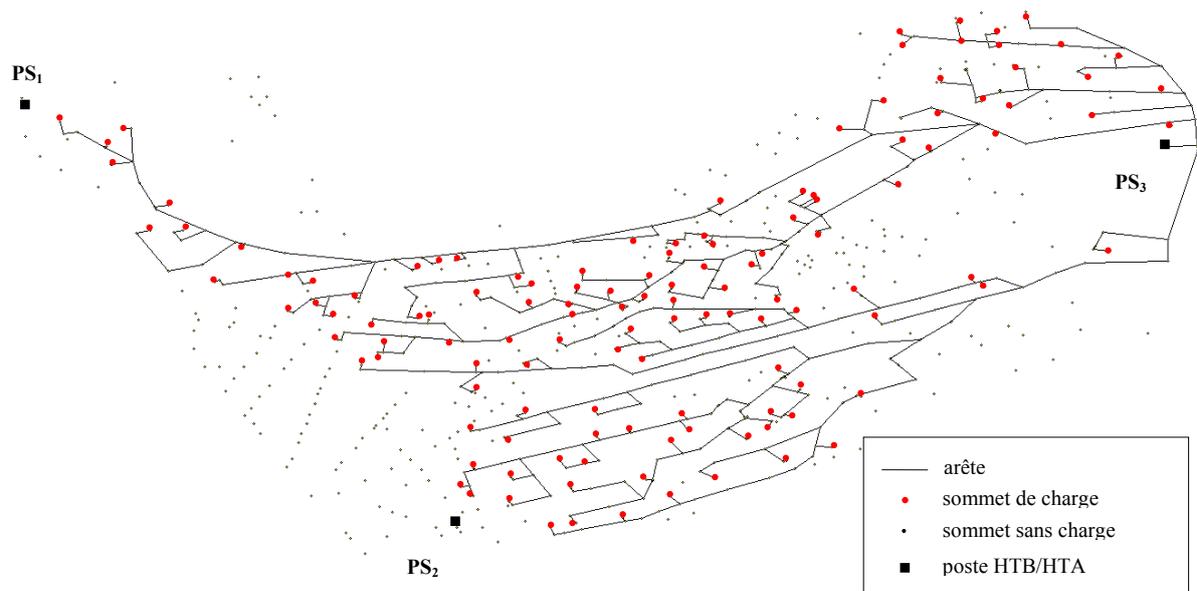


Figure IV-13 : Support de la solution de flot de coût linéaire minimum avec le sommet de source PS_3 pour l'instance de données du réseau réel.

Le graphe de l'union des arborescences A_i ($i=1, 2, 3$) sur l'instance de données du réseau réel est affiché sur la **Figure IV-14**. Pour respecter les contraintes sur le courant maximal les arêtes représentées des départs ont été doublées.

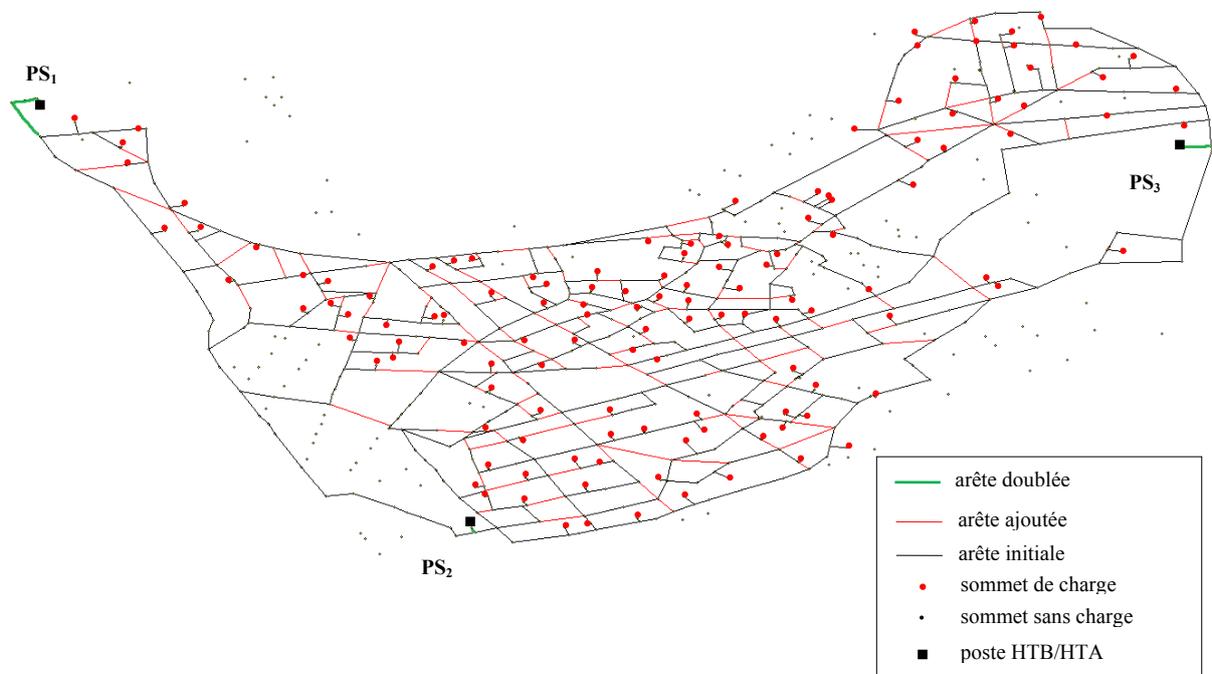


Figure IV-14 : Support de la solution de l'algorithme AAFCLM pour l'instance de données du réseau réel.

Afin de définir les lignes contenant les organes de manœuvre, nous cherchons la structure radiale minimisant les pertes dans le réseau obtenue par l’algorithme AAFCLM. Pour la trouver nous utilisons l’algorithme AH2. Les arêtes de la structure radiale sont marquées par des lignes noires sur la figure. Les lignes rouges sont des arêtes contenant les OM. Les arêtes doublées sont marquées en vert.

IV.8. Analyse des résultats

Dans les sections précédentes, nous avons présenté les résultats numériques de résolution des modèles de la conception de l’architecture de réseau de distribution électrique. Les tests numériques ont été faits sur les données d’un réseau réel, ainsi que sur les réseaux fictifs générés aléatoirement représentés sous forme de graphes planaires. Les tableaux ci-dessous résumement ces résultats. Ils contiennent les valeurs suivantes obtenues dans la solution :

- longueur totale des câbles dans le réseau ;
- courant maximal à la pointe dans le réseau en cas de panne d’un des postes source HTB/HTA calculé dans la structure arborescente du réseau par la résolution du modèle convexe (voir III.2.3) du problème de répartition de charges évaluées à l’année 30 (voir **Tableau IV-11**);
- tension minimale dans le réseau en régime d’exploitation normal calculé dans la structure arborescente du réseau par la résolution du modèle convexe (voir III.2.3) du problème de répartition de charges à l’année 0 ;
- pertes techniques à la pointe dans le réseau en régime d’exploitation normal calculées dans la structure arborescente du réseau par la résolution du modèle convexe (voir III.2.3) du problème de répartition de charges à l’année 0 ;
- nombre d’organes de manœuvre placés dans le réseau sur des lignes de secours – des liaisons entre des feuilles de la structure arborescente qui minimise les pertes trouvée par l’algorithme heuristique AH2 (voir III.6.2.2).

Tableau IV-9 : Résultats numériques de tests des Modèles_{ALM}, Modèles_{ARPM} et Modèles_{UAFCLM} sur les instances de test de réseau réel.

Valeurs des paramètres de la solution obtenue	Modèle _{ALM}		Modèle _{ARPM}	Modèle _{UAFCLM}
	PLNE _{SNDP}	ARSCM		
Longueur (km)	20.645	20.754	42.445	44.494
I _{max} (p.u.)	0.405	0.446	0.304	0.247
V _{min} (p.u.)	0.983	0.981	0.985	0.989
Pertes à la pointe à l’année 0 (kW)	279	308	204	185
Nombre OMT	3	7	92	148
Temps d’exécution (s)	2474	96	424	<1

Il faut préciser que toutes les comparaisons des résultats pour les modèles présentés sont faites uniquement pour des réseaux particuliers.

Sur les données du réseau réel, les résultats de résolution des modèles sont les suivants. L'architecture du réseau ayant la longueur minimale des câbles ont été obtenue par le Modèle_{ALMC} en formulation du programme linéaire en nombres entiers avec la fonction d'exigence de la connexité $r(u, v)$ défini par (IV-4). La valeur de sa fonction objectif est 20.645 km. La solution approximative trouvée par l'algorithme ARCSM est 0.5% plus grande par rapport à l'optimum. Le troisième résultat par rapport de la longueur totale des câbles donné par le Modèle_{ARPM} – la longueur totale des câbles est 42.445 km. Le critère d'optimisation de ce modèle a été la minimisation des pertes, mais AARPM est un algorithme heuristique et on ne peut pas garantir l'optimalité de la solution. La somme des pertes dans la structure radiale à la pointe à l'année 0 dans la solution du Modèle_{ARPM} est 204 kW ce qui est 26 % de moins par rapport de la somme des pertes dans la structure radiale dans le support de la solution optimale du Modèle_{ALM}. L'architecture du réseau ayant la plus grande longueur des câbles a été obtenue par le Modèle_{UAFCLM}. Sa longueur est 44.494 km. Par contre, la somme des pertes dans la structure radiale dans le support de la solution du modèle est plus petite par rapport aux pertes dans les autres architectures. Elle est égale à 185 kW. Le fait que les pertes dans les architectures de réseau des Modèle_{ARPM} et Modèle_{UAFCLM} sont moindres par rapport des architectures du Modèle_{ALM} s'explique par les différentes topologies des réseaux obtenus – les deux premières sont plus ramifiées et elles contiennent plus de boucles. Par conséquent le nombre des organes de manœuvre est plus grand dans ces topologies – 92 OM dans le réseau du Modèle_{ARPM} et 148 dans le réseau du Modèle_{UAFCLM}. Tandis que, dans les architectures de réseau du Modèle_{ALM} le nombre d'OM est 3 pour la solution optimale et 7 pour la solution approximative du modèle respectivement. Les valeurs du courant maximal et de la tension minimale sont cohérentes avec les valeurs des pertes pour les modèles présentés. Le courant maximal dans la structure arborescente qui minimise les pertes trouvée par l'algorithme AH2 dans le support de solution approximative du Modèle_{ALM} est égal à 0.446 p.u. Sa solution possède les plus grandes pertes parmi les solutions des modèles présentés.

Le temps du calcul des solutions des modèles présentés varie dans l'intervalle entre 1 s et 2474 s (≈ 41 min). Ceci est dû au fait que les méthodes utilisées pour la résolution des modèles et leur complexité sont différentes. Puisque la formulation PLNE_{SNDP} du Modèle_{ALM} est un programme linéaire en nombres entiers, pour sa résolution optimale le logiciel CPLEX exploitant la méthode exponentielle "Séparation et évaluation" [107] a été utilisé. Le temps de résolution du modèle est 2474 s.

La résolution des autres modèles présentés repose sur les méthodes avec la complexité polynomiale. L'algorithme itératif ARSCM qui fournit la solution approximative du Modèle_{ALM} à chaque itération résout un programme linéaire PL_{SNDP} (IV-3). La méthode de résolution des problèmes de programmation linéaire intégrée dans le logiciel CPLEX est une méthode du point intérieur ayant une complexité polynomiale [108]. Pendant l'exécution de l'algorithme ARSCM, 87 itérations ont été effectuées en un temps de 107 s.

La complexité de l'algorithme AARPM dans le Modèle_{ARPM} est polynomiale. Soit m est le nombre d'arcs dans l'arborescence qui minimise les pertes trouvées par l'algorithme AH2 dans le réseau contenant toutes les lignes potentielles. L'algorithme AARPM exécute $m+1$ fois l'algorithme heuristique AH2 qui résout une fois le programme quadratique en nombres

réels en un temps polynomial. La méthode de résolution des problèmes en programmation quadratique (comme pour la programmation linéaire) intégrée dans le logiciel CPLEX est la méthode du point intérieur ayant la complexité polynomiale [108]. La solution du Modèle_{ARPM} a été trouvée en 424 s.

Le Modèle_{UAFCLM} fournit une méthode polynomiale moins coûteuse au niveau du temps de résolution pour la conception de l'architecture de réseau par rapport des autres modèles présentés. Sur l'instance de données de réseau réel, l'algorithme AAFCLM du modèle trouve une solution en un temps inférieur à une seconde. Il résout trois fois le programme linéaire (IV-7).

Dans les trois modèles présentés pour calculer les valeurs des pertes, du courant et de la tension dans une structure arborescente trouvée par l'algorithme heuristique AH2, nous avons utilisé le modèle convexe (voir III.2.3) du problème de répartition de charges. Il a été formulé sous la forme d'un programme quadratique et il a été résolu en un temps polynomial en utilisant le logiciel CPLEX.

Le développement des instances de test des réseaux fictifs représentés sous forme de graphes planaires maximaux avait pour but de tester l'efficacité des algorithmes proposés sur les données générées aléatoirement et de généraliser les résultats. Dans le **Tableau IV-10**, nous présentons les valeurs moyennes des caractéristiques de solutions de Modèle_{ALM}, Modèle_{ARPM} et Modèle_{UAFCLM} obtenues sur 20 instances.

Tableau IV-10 : Résultats numériques de tests des Modèle_{ALM}, Modèle_{ARPM} et Modèle_{UAFCLM} sur les instances de test des graphes planaires.

Valeurs des paramètres de la solution obtenue	Modèle _{ALMC}		Modèle _{ARPM}	Modèle _{UAFCLM}
	PLNE _{SNDP}	ARSCM		
Longueur (km)	8.67	8.729	21.024	26.486
I_{\max} (p.u.)	0.264	0.253	0.156	0.148
V_{\min} (p.u.)	0.982	0.981	0.987	0.989
Pertes à la pointe à l'année 0 (kW)	82	86	41	34
Nombre OM	5	5	121	156
Temps d'exécution (s)	7067	320	469	<1

Nous voyons la cohérence de ces résultats avec les résultats sur l'instance de test du réseau réel. L'architecture du réseau avec la longueur minimale des câbles a été obtenue par le Modèle_{ALM} en formulation du programme linéaire en nombres entiers avec la fonction d'exigence de la connexité $r(u, v)$ définie par (IV-4). La valeur moyenne de sa fonction objectif est de 8.67 km. La solution approximative trouvée par l'algorithme ARCSM est à 0.6% plus grande par rapport de l'optimum. Le troisième résultat par rapport de la longueur totale des câbles a été donné par le Modèle_{ARPM} – la longueur totale moyenne des câbles est de 21.024 km. La somme moyenne des pertes dans la structure radiale à la pointe à l'année 0 dans la solution du Modèle_{ARPM} est de 41 kW ce qui est inférieur à 50 % de la somme des pertes dans la structure radiale, dans le support de la solution optimale du Modèle_{ALMC}. L'architecture du réseau ayant

la plus grande longueur des câbles a été obtenue par le Modèle_{UAFCLM}. La longueur moyenne est de 26.486 km, ce qui est trois fois plus grand par rapport de la solution optimale du Modèle_{ALM}. Par contre, la somme des pertes dans la structure radiale dans le support de la solution du modèle est plus petite par rapport aux pertes dans les autres architectures. Elle est égale à 34 kW. Le nombre moyen d'organes de manœuvre dans le réseau du Modèle_{UAFCLM} est 156 OM, dans le réseau du Modèle_{ARPM} c'est 121. Dans les architectures de réseau du Modèle_{ALM} le nombre d'OM est 4 pour la solution optimale et 5 pour la solution approximative du modèle respectivement.

Le temps du calcul moyen de la solution optimale du Modèle_{ALM} est de 7067 s ($\approx 2h$). On voit qu'avec l'augmentation de la taille des instances (nombre moyen d'arêtes dans les instances des graphes planaires est 1480 et 914 dans le graphe d'instance du réseau réel) le temps du calcul augmente significativement (1055 s pour le réseau réel). C'est pourquoi il est plus avantageux d'utiliser en pratique l'algorithme ARSCM pour le Modèle_{ALM} qui fournit la solution en moyenne à 0.6% de l'optimum sur les réseaux particuliers. Le temps moyen d'exécution de l'algorithme est égal à 320 s. Pour les Modèle_{ARPM} et Modèle_{UAFCLM} le temps moyen de la recherche de la solution est égal à 469 s et 1 s respectivement.

Après avoir fait l'analyse des résultats des modèles proposés pour la conception de l'architecture de réseau de distribution électrique, nous avons vu que les réseaux obtenus ne respectent pas la contrainte du courant maximal. C'est pourquoi nous avons retenu le Modèle_{ALMC} qui tient compte de cette contrainte. Dans la section suivante, nous présentons le Modèle_{APLM} qui repose sur le Modèle_{ALM} et qui a la fonction économique des coûts comme fonction objectif. Les résultats numériques sont établis sur le cas de test du réseau réel.

IV.9. Méthode retenue : Architecture du Réseau de Distribution de Pertes minimum dans le Réseau de Longueur Minimum (MODELE_{APLM})

Nous présentons ici les résultats numériques de la résolution du Modèle_{APLM} (Architecture du réseau de distribution de pertes minimales dans le réseau de longueur minimale) sur les données du réseau réel. Dans le graphe partiel de support de solution approximative du Modèle_{ALMC}, nous cherchons une configuration radiale qui minimise les pertes dans le réseau en utilisant le modèle convexe formulé par le système d'équations (IV-12) dans IV.6. Nous ne présentons pas les résultats du Modèle_{ALMC} en formulation optimale formulée par **PLNE_{SNDP}** sur les données du réseau réel car au bout de 24h d'exécution du programme l'optimum n'a pas été atteint.

La comparaison des réseaux obtenus avec le réseau existant se fait sur le coût économique C_{total_act} (IV-8). Elle contient des coûts affichés ci-dessous.

- Coût des câbles qui dépend de la longueur : nous avons choisi 240 mm² Alu.
- Coût des tranchées dépend de la longueur et du nombre de câbles dedans (≤ 4).

- Coût des pertes actualisées sur la période de vie du projet. Cela dépend de type des câbles ainsi que des charges. Il est calculé avec l'hypothèse qu'aucune nouvelle charge n'apparaît. Les charges existantes augmentent chaque année de $\delta_A\%$ pendant la période A et puis de $\delta_B\%$ pendant la période B.
- Coût des organes de manœuvre. Leur nombre et leur emplacement dépend de la configuration radiale choisie afin de minimiser les pertes dans le réseau.

Le **Tableau IV-11** présente les valeurs des paramètres économiques et techniques que l'on utilise dans le Modèle_{APLM}.

Tableau IV-11 : Les paramètres technico-économiques.

Durée de vie du projet (an)	30	
Période A (an)	10	
Période B (an)	20	
Taux d'actualisation (%)	8	
Augmentation de charge sur la période A – δ_A (%)	1	
Augmentation de charge sur la période B – δ_B (%)	0.5	
Coût de câble – 240 mm ² Alu (k€/km)	20.1	
Resistance – 240 mm ² Alu (Ω /km)	0.125	
Reactance – 240 mm ² Alu (Ω /km)	0.1	
Le courant maximal admissible – 240 mm ² Alu (A)	419	
	1 câble (k€/km)	100
	2 câbles (k€/km)	140
Cout de tranchée :	3 câbles (k€/km)	165
	4 câbles (k€/km)	185
Coût des pertes techniques (k€/kW)	0.181	
Coût d'un organe de manœuvre (k€)	8	

Le support de solution du Modèle_{APLM} est l'union des arborescences A (ARSCM) de graphe partiel de support de solution du Modèle_{ALMC} G (ARSCM) approximative.

L'ensemble d'arêtes SW sélectionnées pour l'installation des organes de manœuvre dans le réseau est l'ensemble $E(G \setminus A)$ où G et A sont les supports de solutions des Modèle_{ALMC} et Modèle_{APLM}.

L'architecture obtenue par la résolution du Modèle_{APLM} sur l'instance de données du réseau réel est affichée sur la figure **Figure IV-15**.

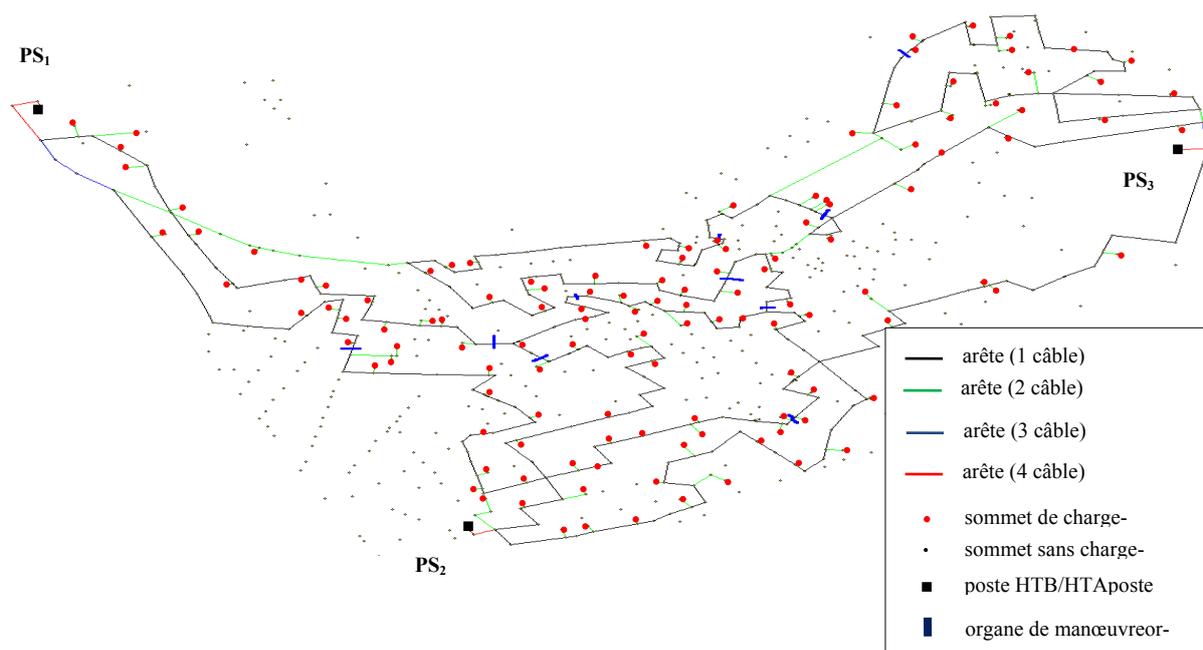


Figure IV-15 : Support de la solution approximative du Modèle_{APLM} pour les données du réseau réel.

Le **Tableau IV-12** montre la comparaison de la longueur totale des câbles, des tranchées et les proportions du nombre de câbles par tranchée, le temps de résolution des modèles, ainsi que la comparaison de différents types de coûts entre la solution du Modèle_{APLM} et du réseau réel. Les paramètres technico-économiques du réseau sont présentés dans la colonne 2. Les colonnes 3, 4 montrent les paramètres des réseaux obtenus par la résolution du Modèle_{APLM} sur les supports des solutions optimales du Modèle_{ALMC}. Dans les deux dernières colonnes sont présentés les paramètres des réseaux obtenus avec l'utilisation de l'algorithme approximatif de facteur 2 de la recherche d'un graphe 2-connexe de poids minimum.

Tableau IV-12 : Résultats numériques de résolution du Modèle_{APLM} sur les données du réseau réel.

		Réseau réel	Modèle _{APLM} Support de la solution approximative(ARSCM)
Câbles Tranchées	(km)	38.70	31.48
		22.69	24.55
Nombre moyen de câbles par tranchée		1.47	1.42
Nombre de départs	Totaux	-	12
	Par poste source	-	4
Temps de résolution (s)	Modèle _{ALMC}	-	15218 (≈4.2h)
	Modèle _{APLM}	-	314
	Total	-	15532 (4.3h)
Pertes à la pointe en année 0	(kW)	97	94
Coût de câbles tranchées pertes OM Coût total		745.34	632.88
		2672.69	2714.12
		213.95	206.83
		120	80
		3751.98	3633.83

La solution approximative du Modèle_{ALCM} (**PL_{SNDP}**) fournit le réseau de longueur totale des câbles de 31.48km, et de longueur des tranchées de 24.55km. Ce qui a le rapport avec le réseau réel de +18.6% pour la longueur des câbles et de -8.1% pour la longueur des tranchées. Le nombre moyen des câbles par tranchée est égal à 1.42 pour la solution approximative du Modèle_{APLM}. Le nombre de départs dans la solution du Modèle_{APLM} est : 12 totaux et 4 par PS. Le temps de recherche de la solution approximative du Modèle_{ALCM} est environ 4.2h pour ARSCM. Le temps de recherche d'une configuration radiale optimale qui minimise les pertes (Modèle_{APLM}) est 314s pour le Modèle_{APLM} sur le support de la solution approximative du Modèle_{ALCM}. Le nombre d'organes de manœuvres placés dans le réseau du Modèle_{APLM} est 10 et la somme des pertes de puissance est égale à 94kW. Le coût total qui comprend le coût d'investissement (coût de câbles, tranchées, OM) plus le coût des pertes techniques de puissance sur la période de 30ans fournit par la solution optimale du Modèle_{APLM} : 3633.83k€. Par rapport du réseau réel, ce coût est inférieur de 3.1% (ou 118.15 en k€).

IV.10. Conclusion

Dans le Chapitre IV, nous avons développé différents modèles d'architectures de réseaux de distribution électrique. Chaque modèle a été formulé sous forme d'un problème d'optimisation combinatoire. Ce sont les modèles suivants :

- Modèle de l'architecture du réseau de distribution de longueur minimale (Modèle_{ALM}) ;
- Modèle de l'architecture du réseau de distribution des pertes minimales (Modèle_{ARPM}) ;

- Modèle de l'architecture du réseau de distribution de l'union des arborescences de flot de coût linéaire minimum (Modèle_{UAFCLM}) ;
- Modèle de l'Architecture de réseau de distribution de pertes minimales dans le réseau de distribution de longueur minimale (Modèle_{APLM}).

Les trois premiers (Modèle_{ALM}, Modèle_{APM}, Modèle_{UAFCLM}) sont des modèles d'optimisation mono-objectif et le Modèle_{APLM} a pour objectif la minimisation de la longueur et des pertes.

Le Modèle_{ALM} a été formulé comme un cas particulier du problème de réseau de Steiner de poids minimum avec la fonction de l'exigence de la connexité ayant les valeurs 2 pour les sommets de charge et postes source. Ceci garantit la redondance de l'architecture du réseau, i.e. en cas d'une défaillance d'une centrale ou d'une ligne électrique tous les consommateurs restent connectés à la source d'énergie électrique. Pour la résolution du Modèle_{ALM} nous avons proposé une méthode de résolution optimale par la programmation linéaire en nombres entiers (PLNE_{SNDP}), ainsi qu'un algorithme d'approximation garantie de facteur 2 développé par Jain [102] (ARSCM).

Pour la conception de l'architecture du réseau de pertes minimales nous avons développé le Modèle_{APM}. Il repose sur le problème de la recherche d'une configuration radiale qui minimise les pertes dans le réseau. Les méthodes de résolution présentées sont les suivantes : méthode optimale par la programmation quadratique en nombres mixtes III.4.1 et méthodes heuristiques par un des algorithmes AH1-AH2 III.6.2.

Le Modèle_{UAFCLM} est formulé pour la conception du réseau équilibré par des produits P_xL en version linéaire. Il repose sur le modèle de flot de coût linéaire minimum. Le réseau recherché est l'union des arborescences de flot de coût minimum ayant les racines dans les postes source.

Pour la conception de l'architecture du réseau de distribution de longueur totale et de pertes minimales, nous avons proposé le Modèle_{APLM}. Il est décomposé en deux problèmes mono-objectif – minimisation de la longueur avec les contraintes sur la distribution du courant (Modèle_{ALMC}⁸) et minimisation des pertes. Le support de la solution du Modèle_{ALMC} est un graphe 2-connexe dans lequel nous cherchons une configuration radiale qui minimise les pertes dans le réseau en utilisant le modèle convexe pour le problème de reconfiguration III.4.1.

Les résultats numériques de résolution des modèles présentés ont été décrits dans la section IV.7. Les tests ont été faits sur le cas d'étude d'un réseau réel d'une ville du sud-est de la France, ainsi que sur les instances de test générés aléatoirement. La solution de l'algorithme approximatif de la recherche du réseau de Steiner minimum (ARSCM) pour l'architecture du

⁸ Modèle_{ALM} avec les contraintes supplémentaires sur la distribution du courant dans les lignes électriques.

réseau de longueur minimum sur les données de réseau réel est à 0.5% de l'optimum, ainsi que sur les instances de graphes planaires maximaux sa solution est à 0.6% de l'optimum en moyenne. Les architectures de réseaux de distribution construites avec les Modèle_{ARPM} et Modèle_{UAFLMC} fournissent les solutions ayant les pertes totales inférieures aux solutions du Modèle_{ALM}, mais ayant la longueur totale des lignes qui est plus grande par rapport à la solution du Modèle_{ALM}. Sur le cas du réseau réel, le rapport de la longueur des réseaux du Modèle_{ARPM} et Modèle_{ALM} est environ 2.05 et du Modèle_{UAFLMC} par rapport de Modèle_{ALM} est 2.15. C'est pourquoi le Modèle_{APLM} fondé sur le Modèle_{ALMC} a été retenu comme la méthode la plus performante pour la minimisation de la fonction économique de coût pour la conception de l'architecture de réseau de distribution électrique.

La solution du Modèle_{APLM} sur l'instance de données du réseau réel a été obtenue sur le support de la solution approximative de PL_{SNDP} . La solution obtenue pour les charges évaluées à l'année 30 vérifie les contraintes de la tension et du courant maximal. Le coût total du réseau de la solution est de 3.1% meilleur par rapport au coût du réseau existant. Le réseau obtenu contient au total 10 organes de manœuvre. La somme des pertes à la pointe à l'année 0 est égal 94 kW.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, nous avons proposé une approche fondée sur la théorie des graphes et de l'optimisation combinatoire pour la conception des nouvelles architectures des réseaux de distribution. Nous avons réalisé la recherche en combinatoire en faisant appel à des théories mathématiques les plus récentes et en intégrant des connaissances métiers, pour trouver conjointement les meilleures topologies et les modes d'exploitation les mieux adaptés aux futurs réseaux de distribution, intelligents et flexibles. Nous avons étudié le problème en question du point de vue de la Recherche Opérationnelle. La réalisation de l'implémentation informatique des algorithmes permettant de générer automatiquement une structure de réseaux respectant les objectifs suivants a été faite : réseau respectant les contraintes de qualité de fourniture (plan de tension, courants maximaux en régime permanent dans les éléments du réseau, entre autres), réseau respectant les contraintes de continuité de fourniture (reprise rapide en cas de défaut) ; réseau dont le coût d'exploitation est minimum. Les critères d'optimisation que l'on a supposés pour le problème de la conception de l'architecture de réseau et qui jouent un rôle important sont : la longueur totale des lignes et les pertes dans le réseau. En partant de cette observation, notre démarche consistait à étudier le problème général de recherche d'une architecture optimale selon les critères d'optimisation bien précis :

- minimiser les pertes de Joule dans le réseau ;
- minimiser le coût global de construction du réseau.

Ainsi donc, les deux familles des problèmes combinatoires (et leurs relaxations) ont été explorées pour proposer des résolutions efficaces (exactes ou approchées) du problème de planification des réseaux de distribution en utilisant une formulation adaptée. Nous nous sommes intéressés particulièrement aux graphes *2-connexes* et au *flot arborescent avec pertes quadratiques minimales*.

Le deuxième chapitre a été consacré à la présentation des notions de base de la théorie des graphes et de l'optimisation combinatoire afin de modéliser et de formuler le problème d'optimisation de l'architecture des réseaux de distribution avec les différents objectifs sous les contraintes technologiques et topologiques. Il s'agit de l'ensemble des définitions sur les graphes, problème d'optimisation, de la théorie de la complexité, méthodes de résolution par la programmation mathématique. Nous avons présenté les approches générales de la Recherche Opérationnelle pour la modélisation et résolution des problèmes d'optimisation. Nous avons décrit les avancements existants dans la littérature sur le problème de planification. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons formulé sous forme générale le problème d'optimisation de l'architecture de réseau de distribution pour les critères de la minimisation de coût d'investissement et de la minimisation des pertes sous l'ensemble de contraintes. Cependant ce problème est difficile à aborder dans telle formulation. Pour cela, nous avons proposé de résoudre l'ensemble de problèmes mono-objectif et de les formuler en termes de problèmes combinatoires afin pouvoir appliquer les méthodes efficaces de la résolution. Pour l'objectif de la minimisation de la longueur totale du réseau, nous avons proposé le problème de Réseau de Steiner de poids minimal, pour la minimisation des pertes, nous avons proposé

une relaxation convexe exacte du problème OPF, ainsi que certains algorithmes heuristiques que l'on a présentés plus en détails dans les troisième et quatrième chapitres. Pour l'équilibrage du réseau par des produits $P \times L$ équivalents, nous avons proposé un modèle fondé sur le flot de coût linéaire minimum.

Dans le Chapitre III, nous avons étudié le problème de la répartition optimale des flux arborescents de la puissance (OPF) avec l'objectif de la minimisation des pertes dans le réseau, ainsi que la relaxation convexe OPF-*cr* de ce problème. Elle a été formulée en termes de programmation quadratique. Nous avons présenté ensuite un algorithme itératif exact pour la résolution de la relaxation linéaire du problème OPF-*cr*. Cette méthode a été basée sur la méthode de Newton couplée avec la programmation linéaire. Pour le problème de reconfiguration sur les réseaux maillés, nous avons formulé le modèle convexe exact sous la forme d'un programme quadratique en variables mixtes qui est fondé sur la formulation convexe exacte d'OPF-*cr*. Les résultats de test sur les réseaux IEEE ont été montrés. Ce problème est NP-difficile, puisque ses cas particuliers que l'on a présentés – le problème de flot arborescent de coût quadratique minimum et le problème de flot arborescent avec les pertes quadratique minimales peuvent être réduits à un problème NP-difficile. Nous avons présenté aussi les formulations de ces problèmes de flot arborescent en termes de programmation quadratique en variables mixtes, ainsi que nous avons développé quelques algorithmes heuristiques. Ils reposent sur le résultat présenté dans ce chapitre – les supports de solutions des problèmes FCQM et FPQM sont des graphes partiels acycliques. Donc ces algorithmes heuristiques exploitent la solution optimale des problèmes FCQM et FPQM qui sont des relaxations des problèmes FACQM et FAPQM sans contraintes sur la structure arborescente. C'est pourquoi les résultats de test de ces algorithmes sur les graphes planaires connexes générés aléatoirement ont été assez proches de l'optimum.

Le Chapitre IV est consacré aux modèles combinatoires et méthodes de résolution du problème d'optimisation de l'architecture des réseaux de distribution électrique ayant les objectifs topologiques, ainsi que l'objectif de la minimisation des pertes. Nous avons développé différents modèles d'architectures de réseaux de distribution électrique. Chaque modèle a été formulé sous forme d'un problème d'optimisation combinatoire. Ce sont les modèles suivants :

- Modèle de l'architecture du réseau de distribution de longueur minimum (Modèle_{ALM}) ;
- Modèle de l'architecture du réseau de distribution des pertes minimum (Modèle_{ARPM}) ;
- Modèle de l'architecture du réseau de distribution de l'union des arborescences de flot de coût linéaire minimum (Modèle_{UAFCLM}) ;
- Modèle de l'Architecture de réseau de distribution de pertes minimum dans le réseau de distribution de longueur minimum (Modèle_{APLM}).

Le Modèle_{ALM} a été formulé comme un cas particulier du problème de réseau de Steiner de poids minimum avec la fonction de l'exigence de la connexité ayant les valeurs 2 pour les sommets de charge et postes source. Pour la résolution du Modèle_{ALM}, nous avons proposé une méthode de la résolution optimale par la programmation linéaire en nombres entiers

($PLNE_{SNDP}$), ainsi qu'un algorithme d'approximation garantie de facteur 2 développé par Jain adopté pour le Modèle_{ALM} (ARSCM).

Pour la conception de l'architecture du réseau de pertes minimum, nous avons développé le Modèle_{APLM}. Il repose sur le problème de la recherche d'une configuration radiale qui minimise les pertes dans le réseau qui a des méthodes de résolution optimale par la programmation quadratique en nombres mixtes III.4.1 et heuristiques par un des algorithmes AH1-AH2 III.6.2.

Le Modèle_{UAFCLM} est formulé pour la conception du réseau équilibré par des produits P_xL en version linéaire. Il est fondé sur le modèle de flot de coût linéaire minimum. Le réseau recherché est l'union des arborescences de flot de coût minimum ayant les racines dans les postes source.

Pour la conception de l'architecture du réseau de distribution de la longueur totale et des pertes minimum, nous avons proposé le Modèle_{APLM}. Il est décomposé en deux problèmes mono-objectif – minimisation de la longueur avec les contraintes sur la distribution du courant (Modèle_{ALMC}) et minimisation des pertes. Le support de la solution du Modèle_{ALMC} est graphe 2-connexe dans lequel nous cherchons une configuration radiale qui minimise les pertes dans le réseau en utilisant le modèle convexe pour le problème de reconfiguration III.4.1.

Les résultats numériques de résolution des modèles présentés ont été décrits dans la section III.7. Les tests ont été faits sur le cas d'étude d'un réseau réel, ainsi que sur les instances de test générés aléatoirement. L'algorithme approximatif de la recherche du réseau de Steiner minimum pour l'architecture du réseau de la longueur minimum a montré des bonnes solutions sur les données du réseau réel (0.5% de l'optimum), ainsi que sur les instances de graphes planaires maximaux (0.6% de l'optimum). Les architectures de réseaux de distribution construites avec le Modèle_{ARPM} ont pour l'objectif de la minimisation des pertes, mais les réseaux ont la plus grande longueur totale des lignes par rapport ceux lui obtenus avec le Modèle_{ALM}. Sur le cas du réseau réel, le rapport de la longueur des réseaux du Modèle_{ARPM} et Modèle_{ALM} est environ 2.05 et du Modèle_{UAFCLM} par rapport de Modèle_{ALM} est 2.15.

La solution du Modèle_{APLM} sur l'instance de données du réseau réel a été obtenue sur le support de la solution approximative de PL_{SNDP} . Le coût total du réseau de la solution est à 3.1% mieux par rapport de coût du réseau existant.

En ce qui concerne les perspectives sur les travaux futurs découlant de cette thèse, elles peuvent être regroupées en deux catégories pour les problèmes posés :

- amélioration des méthodes de résolution des modèles proposés pour les problèmes de reconfiguration et planification et développement des nouvelles méthodes ;
- application des approches proposées aux nouveaux cas d'étude.

Pour le problème de reconfiguration optimale ayant pour objectif la minimisation des pertes, nous avons développé des algorithmes heuristiques fondés sur le modèle convexe d'OPF-cr. Ces algorithmes peuvent être raffinés pour le cas des réseaux avec des GED ou donner des idées pour le développement des algorithmes avec une approximation garantie. Un autre axe à explorer est une étude polyédrale des problèmes de flot arborescent (FACQM, FAPQM) ainsi qu'au modèle convexe du problème de reconfiguration optimale. Le but est de trouver des coupes valides, *i.e.* des contraintes supplémentaires permettant de trouver un point extrême du problème où les contraintes d'intégrité sont relaxées (variables de choix des arcs $e_{ij} \in [0, 1]$).

Pour le problème de planification, le Modèle_{APLM} peut être transformé en prenant en compte le cas de la présence des GED dans le réseau. Ainsi, les indices de fiabilité (SAIDI, SAIFI, END) peuvent être envisagés dans le modèle. Le Modèle_{ALMC} utilise l'algorithme heuristique fondé sur l'idée de l'algorithme d'approximation de Jain. Essayer de trouver un facteur d'approximation garanti pour cette heuristique sera une contribution significative. D'autre part, le problème de la conception d'un réseau fiable (graphe 2-connexe) peut être modélisé comme le Problème de Tournée des Véhicules avec des Capacités (CVRP)⁹ [109]. En considérant la linéarisation du courant dans les contraintes de capacité des lignes comme il a été proposé dans (IV-10), la distribution de la puissance dans le réseau depuis les postes source vers les consommateurs peut être représentée comme la distribution des marchandises par un parc des véhicules.

Par rapport aux applications des approches proposées dans ce travail à des nouveaux cas d'étude, des modèles d'optimisation qui tiennent compte des incertitudes des charges peuvent être envisagés (ex. projet européen evolvDSO [110]). Ici, le Modèle_{APLM} utilise le support de la solution du modèle convexe de reconfiguration optimale qui peut être modifié pour le cas d'optimisation stochastique [111], [112].

⁹ Ce travail est en cours de développement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ERDF, «Dossier de presse : Smart Grids les Réseaux Electriques Intelligents,» 26 06 2012. [En ligne]. Available: www.erdf.fr/medias/dossiers_presse/DP_ERDF_260612.pdf.
- [2] RTE, «Séminaire de presse. Les enjeux européens: "Les réseaux électriques à l'heure de la transition énergétique",» Service de presse de RTE, La Défense, 2014.
- [3] Commission de régulation de l'énergie (CRE), «Smart grids - CRE,» [En ligne]. Available: www.smartgrids-cre.fr.
- [4] (ENTSO-E), «European Network of Transmission System Operators for Electricity,» [En ligne]. Available: <http://entsoe.eu>.
- [5] A. L'Abbate, G. Fulli, F. Starr et S. Peteves, «European Commission, JRC Report. Distributed Power Generation in Europe: Technical Issues for Further Integration,» 2008. [En ligne]. Available: http://ie.jrc.ec.europa.eu/publications/scientific_publications/2008/EUR23234EN.pdf.
- [6] European Commission, «Communication from the Commission to the European Parliament, the Council, the European Economic and Social Committee and the Committee of the Regions, Second Strategic Energy Review,» *An EU Energy Security and Solidarity Action Plan*, n° COM(2008) 781, 2008.
- [7] International Energy Agency, «Technology Roadmap Smart Grids,» IEA, Paris, 2011.
- [8] European Commission, «Communication from the Commission to the Council and the European Parliament, Report on progress in creating the internal gas and electricity market, COM (2009) 115,» 2009.
- [9] REALISEGRID, «FP7 Project,» [En ligne]. Available: <http://realisegrid.cesiricerca.it>.
- [10] CRE, «Réseaux publics d'électricité, Description générale,» [En ligne]. Available: <http://www.cre.fr/reseaux/reseaux-publics-d-electricite/description-generale>.
- [11] ERDF, «Fonctionnement du réseau électrique,» [En ligne]. Available: http://www.erdf.fr/fonctionnement_du_reseau.
- [12] ERDF, «Histoire du réseau de distribution de l'électricité,» [En ligne]. Available: http://www.erdf.fr/ERDF_Histoire.
- [13] Schneider Electric, «les réseaux de distribution publique MT dans le monde,» [En ligne]. Available: www2.schneider-electric.com/documents/technical-publications/fr/shared/electrotechnique/reseaux-electriques/haute-tension-plus-1kv/.
- [14] M. C. Alvarez-Hérault, «Architectures des réseaux de distribution du futur en présence de production décentralisée,» Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2009.
- [15] Technique de l'ingénieur, Condensateurs de puissance (d4 710), 1996.
- [16] Technique de l'ingénieur, Postes à moyenne tension (d 4600), 1996.
- [17] B. Enacheanu, «Outils d'aide à la conduite pour les opérateurs des réseaux de distribution,» Grenoble, 2007.
- [18] P. Carrive et A. Doulet, «Réseaux de distribution,» Ed. Techniques Ingénieur. [En ligne].
- [19] ElCom, «Qualité de l'approvisionnement électrique en 2010,» Commission fédérale de l'électricité, 2011.

- [20] S. Ray, *Electrical Power Systems: Concepts, Theory and Practice*, PHI Learning Pvt. Ltd., 2006.
- [21] General Cable, «Câbles Energie,» [En ligne]. Available: www.generalcable-fr.com/Portals/france/pdf/fr/2211_catMT.pdf.
- [22] L. C. Lau, R. Ravi et M. Singh, *Iterative Methods in Combinatorial Optimization*, Cambridge University Press, 2011.
- [23] S. Drewes, «Mixed Integer Second Order Cone Programming,» Ph.D. dissertation Darmstadt, 2009.
- [24] M. M. Gondran Michel, *Graphes et algorithmes*, Tec & Doc Lavoisier; Édition : 4e édition, 2009.
- [25] N. Christofides, *Graph Theory*, 1975.
- [26] C. Rapine, *Théorie des Graphes*, Grenoble: INPG, 2011.
- [27] Y. Crama, «Compléments de RO - Graphes et Optimisation Combinatoire,» HEC - Ecole de Gestion de l'Université de Liège, 2005.
- [28] V. L. Boyd Stephen, *Convex Optimization*, 2004: Cambridge University Press.
- [29] M. Minoux, *Programmation mathématique : théorie et algorithmes*, Lavoisier, 1983.
- [30] M. Grötschel, L. Lovász et A. Schrijver, «The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization,» *Combinatorica 1*, pp. 70-89, 1981.
- [31] S. P. Bradley, A. C. Hax et T. L. Magnanti, *Applied mathematical programming*, Addison-Wesley Pub. Co., 1977.
- [32] S. M. Sinha, *Mathematical Programming: Theory and Methods*, Elsevier, 2005.
- [33] G. Dahl, *An introduction to convexity, polyhedral theory and combinatorial optimization*, Oslo: Kompendium 67 IN 330, 1997.
- [34] C. Papadimitriou, *Computational Complexity*, Addison-Wesley, 1993.
- [35] J. D. Garey Michael, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness (Series of Books in the Mathematical Sciences)*, W. H. Freeman & Co. New York, NY, USA, 1979.
- [36] K. Aoki, K. Nara, T. Satch, M. Kitagawa et K. Yamanaka, «New approximate optimization method for distribution system planning,» *IEEE Trans. Power systems*, vol. 5, n° 1, 1990.
- [37] R. N. Adams et M. A. Laughton, «Optimal Planning of Networks Using Mixed-Integer Programming,» *Proc. IEE*, vol. 121, n° 2, pp. 139-148, 1974.
- [38] G. L. Thompson et D. Wall, «A Branch and Bound Model for Choosing Optimal Substation Locations,» *IEEE Trans PAS*, vol. 100, n° 5, 1981.
- [39] V. Glamocanin et V. Filipovic, «Open Loop Distribution System Design,» *IEEE Trans. Power Delivery.*, vol. 8, pp. 1900-1906, 1993.
- [40] J. Dréo, A. Pétrowski, P. Siarry et E. Taillard, *Metaheuristics for hard optimization*, Springer Verlag, 2005.
- [41] J. Zhu et H. Ren, «Improved ant colony algorithm for Power Distribution Network Planning,» chez *Advanced Computer Control (ICACC), 2010 2nd International Conference*, Shenyang, 2010.
- [42] F. Rivas-Davalos et M. R. Irving, «An efficient genetic algorithm for optimal large-scale power distribution network planning,» chez *Power Tech Conference Proceedings, 2003 IEEE*, Bologna, 2003.
- [43] I. J. Ramirez-Rosado et J. A. Dominguez-Navarro, «New multiobjective tabu search algorithm for fuzzy optimal planning of power distribution systems,» *Power*

- Systems, IEEE Transactions*, vol. 21, n° 1, pp. 224-233, 2006.
- [44] H. M. Kodr, Z. Vale et C. Ramos, «Optimization Techniques for Power Distribution Planning with Uncertainties: A Comparative Study,» chez *Power & Energy Society General Meeting, IEEE, PES 09*, 2009.
- [45] M.-C. Alvarez-Hérault, D. Picault, R. Caire, B. Raison, N. HadjSaid et W. Bienia, «A Novel Hybrid Network Architecture to Increase DG Insertion in Electrical Distribution Systems,» *IEEE Trans. Power Systems*, vol. 26, n° 2, 2011.
- [46] Y. Cai, Q. Xie, W. Ji, Y. Peng et F. Lü, «Urban Medium Voltage Distribution Network Planning Based on ASAGA and TSP Path Optimization Method,» chez *CICED*, 2012.
- [47] B. Delaunay, «Sur la sphère vide,» *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk*, n° 7, pp. 793-800, 1934.
- [48] A. Sebő et J. Vygen, «Shorter tours by nicer ears: $7/5$ -approximation for the graph-TSP, $3/2$ for the path version, and $4/3$ for two-edge-connected subgraphs,» *Combinatorica*, 03 Jul 2014.
- [49] M. Padberg et T.-Y. Sung, «An analytical comparison of different formulations of the traveling salesman problem,» *Mathematical Programming*, vol. 52, pp. 315-357, 1991.
- [50] M. Diaby, «The Traveling Salesman Problem: A Linear Programming Formulation,» *Wseas Transactions on Mathematics*, vol. 6, n° 6, pp. 745-754, 2007.
- [51] D. Cveticovic, «Semidefinite Relaxations of the Traveling Salesman Problem,» *Yugoslav Journal of Operations Research*, vol. 9, n° 2, pp. 157-168, 1999.
- [52] P. Toth et D. Vigo, *The vehicle routing problem*, Society for Industrial & Applied Mathematics, 2001.
- [53] M. Haimovich, A. R. Kan et L. Stougie, «Analysis of heuristics for vehicle routing problem,» *Vehicle Routing: Methods and Studies, Management Sci. System*, vol. 16, pp. 47-61, 1988.
- [54] J. Monnot, «Differential approximation results for the traveling salesman and related problem,» *Inform. Process. Lett.*, vol. 82, pp. 229-235, 2002.
- [55] S. Khuller et U. Vishkin, «Biconnectivity approximations and graph carvings,» *J. ACM*, vol. 41, n° 2, p. 214-235, 1994.
- [56] N. Garg, V. S. Santosh et A. Singla, «Improved approximation algorithms for biconnected subgraphs via better lower bounding techniques,» *Proceedings of the Fourth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Vols. sur 25-27, pp. 103-111, 1993.
- [57] J. Cheriyan, A. Sebo et Z. Szigeti, «An improved approximation algorithm for minimum size 2-edge connected spanning subgraphs,» *Integer Programming and Combinatorial Optimization, Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1412, pp. 126-136, 1998.
- [58] S. Khuller, «Approximation algorithms for finding highly connected subgraphs,» chez *Approximation Algorithms for NP-hard Problems*, In Dorit S. Hochbaum, editor, PWS Publishing Company, Boston, Massachusetts, 1996.
- [59] K. Jain, «A factor 2 approximation algorithm for the generalized Steiner network problem,» *Combinatorica*, vol. 21, n° 1, pp. 39-60, 2001.
- [60] A. Berger et M. Grigni, «Minimum Weight 2-Edge-Connected Spanning Subgraphs in Planar Graphs,» *Automata, Languages and Programming*, vol. 4596, pp. 90-101, 2007.

- [61] J. V. Bernhard Korte, *Optimisation combinatoire, Théorie et algorithmes*, Paris Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag France, 2010.
- [62] A. Agrawal, P. Klein et R. Ravi, «Steiner forest,» chez *Encyclopedia of Algorithms*, vol. 3, Springer, 1995, p. 897.
- [63] S. Touré, «Optimisation des réseaux: "réseau actif et flexible" (thèse doctorat),» Grenoble, 2014.
- [64] J. A. Momoh, *Electric Power System Applications of Optimization*, NY 10016: Marcel Dekker, Inc., 2000.
- [65] K. Nara, A. Shiose, M. Kitagawa et T. Ishihara, «Implementation of genetic algorithm for distribution systems loss minimum re-configuration,» *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 7, n° 3, p. 1044–1051, 1992.
- [66] H. D. Souza, «Distribution network reconfiguration using genetic algorithms with sequential encoding: Subtractive and additive approaches,» *IEEE Transactions Power Systems*, vol. 26, n° 2, p. 582–593, 2011.
- [67] C. Castro et M. Guimaraes, «Reconfiguration of distribution systems for loss reduction using tabu search,» chez *Proc. 15th Power Syst. Computation*, Aug 2005.
- [68] M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd et H. Lebret, «Applications of second-order cone programming,» *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 284, pp. 193-228, 1998.
- [69] J. A. Taylor et F. S. Hover, «Convex Models of Distribution System Reconfiguration,» *IEEE Transactions on Power Systems*, 2012.
- [70] M. E. Baran et F. Wu, «Optimal Capacitor Placement on radial distribution systems,» *IEEE Transactions Power Delivery*, vol. 4, January 1989..
- [71] M. Farivar et S. H. Low, «Branch Flow Model: Relaxations and Convexification,» chez *In 51st IEEE Conference on Decision and Control*, December 2012.
- [72] S. Touré, E. Gladkikh, R. Caire, W. Bienia, Y. Bésanger et B. Raison, «Optimal Reconfiguration of Distribution Networks : Convex Model by Reformulation,» *PowerTech*, 2015.
- [73] P. Kundur, *Power System Stability and Control*, New York: Mc Graw-Hill, 1994.
- [74] X. Bai, H. Wei, K. Fujisawa et Y. Wang, «Semidefinite programming for optimal power flow problems,» *Int'l J. of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 30, n° 6-7, p. 383–392, 2008.
- [75] X. Wei. et H. Bai, «Semi-definite programming-based method for security-constrained unit commitment with operational and optimal power flow constraints,» *Generation, Transmission & Distribution, IET*, vol. 3, n° 2, pp. 182-197, 2009.
- [76] B. Lesieutre, D. Molzahn, A. Borden et C. L. DeMarco, «Examining the limits of the application of semidefinite programming to power flow problems,» chez *Proc. Allerton Conference*, 2011.
- [77] B. C. Hiskens et I. A. Lesieutre, «Convexity of the set of feasible injections and revenue adequacy in FTR markets,» *IEEE Trans. Power Systems*, vol. 20, n° 4, pp. 1790-1798, 2005.
- [78] Y. V. Makarov, Z. Y. Dong et D. J. Hill, «On convexity of power flow feasibility boundary,» *IEEE Trans. Power Systems*, vol. 23, n° 2, pp. 811-813, 2008.
- [79] M. E. Baran et F. F. Wu, «NETWORK RECONFIGURATION IN DISTRIBUTION SYSTEMS FOR LOSS REDUCTION AND LOAD BALANCING,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 4, No. 2, April 1989.

- [80] M. E. Baran et H.-D. Chiang, «On the existence and uniqueness,» *IEEE Trans. Circuits and Systems*, p. 37(3):410–416, March 1990.
- [81] M. Charnay, G. Dubois et M. Jai, Cours d'Analyse Mathématique, Lyon, 2009.
- [82] J.-P. Dedieu, «Points Fixes, Zéros et la Méthodes de Newton,» *Mathématiques et Applications, Springer Verlag, Berlin.*, n° 54, 2006.
- [83] IBM ILOG, «CPLEX Optimizer,» [En ligne]. Available: <http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/>.
- [84] D. Das, «A Fuzzy Multiobjective Approach for Network Reconfiguration of Distribution Systems,» *IEEE Transaction on Power Delivery*, vol. 21, no. 1, Jan 2006.
- [85] R. Kavasseri et C. Ababei, «REDS: REpository of distribution systems,» [En ligne]. Available: <http://venus.ece.ndsu.nodak.edu/kavasseri/reds.html>.
- [86] J. Z. Zhu, «Optimal reconfiguration of electrical distribution network using refined genetic algorithm,» *Electric Power Systems Research*, n° 62, pp. 37-42, 2002.
- [87] T. Lantharhong et N. Rugthaicharoencheep, «Network Reconfiguration for Load Balancing in Distribution System with Distributed Generation and Capacitor Placement,» *World Academy of Science, Engineering and Technology*, n° 64, 2012.
- [88] W. Zangwill, «Minimum concave cost flows in certain networks,» *Management Science*, vol. 14, pp. 429-450, 1968.
- [89] C. Feremans, M. Labbe et G. Laporte, «A comparative analysis of several formulations for the generalized minimum spanning tree problem,» *Networks*, vol. 39, pp. 29-34, 2002.
- [90] L. Gouveia et C. Requejo, «A new Lagrangean relaxation approach for the hop-constrained minimum spanning tree problem,» *European Journal of Operational Research*, vol. 132, pp. 539-552., 2001.
- [91] R. Hassin et A. Levin, «A minimum spanning tree with hop restrictions,» *Journal of Algorithms*, vol. 48, pp. 220-238, 2003.
- [92] L. Gouveia et T. L. Magnanti, «Network flow models for designing diameter constrained minimum-spanning and steiner trees,» *Networks*, vol. 41, pp. 159-173, 2003.
- [93] Y. Lee et M. Atiquzzaman, «Least cost heuristic for the delay constrained capacitated minimum spanning tree problem,» *Computer Communications*, vol. 28, pp. 1371-1379, 2005.
- [94] B. Korte et J. Vygen, *Optimisation combinatoire Théorie et algorithmes*, Paris Berlin: Springer, 2010.
- [95] F. D. Ford Lester, «Maximal flow through a network,» *Canadian journal of Mathematics*, vol. 8, n° 3, pp. 399-404, 1956.
- [96] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti et J. B. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, 1993.
- [97] D. Bertsekas, *Network Optimization: Continuous and Discrete Models*, Athena Scientific, 1998.
- [98] G. Guisewite et P. Pardalos, «Global search algorithms for minimum concave-cost network flow problems,» *Journal of Global Optimization*, vol. 1, n° 4, pp. 309-330, 1991.
- [99] G. M. Guisewite et P. M. Pardalos, «Algorithms for the single-source uncapacitated minimum concave-cost network flow problem,» *Journal of Global Optimization*, vol. 3, pp. 245-265, 1991.

- [100] D. B. M. M. Fontes, «Optimal flow trees for networks with general nonlinear arc costs,» *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 40, n° 3, pp. 321-340, 2007.
- [101] J. Clausen, «Branch and Bound Algorithms—Principles and Examples,» University of Copenhagen, 1999.
- [102] K. Jain, «A factor 2 approximation algorithm for the generalized Steiner network problem,» *Combinatorica*, n° 21, pp. 39-60, 2001 (Preliminary version in Proc. 39th IEEE FOCS, 1998.).
- [103] L. C. Lau, R. Ravi et S. Mohit, *Iterative Methods in Combinatorial Optimization*, Cambridge University Press, 2011.
- [104] S. Touré, E. Gladkikh, R. Caire, W. Bienia, Y. Bésanger et B. Raison, «Optimal Reconfiguration of Distribution Networks : Convex Model by Reformulation,» *PowerTech Eindhoven 2015*, 2015.
- [105] V. Gouin, M.-C. Alvarez-Hérault et B. Raison, «Optimisation of distribution planning methods based on simulated annealing and graph algorithms,» *IEEE Trans. Power Systems*, 2015.
- [106] SYMPHONY (COIN-OR), «Interactive Graph Drawing Software,» COIN-OR, 2010.
- [107] G. Thompson et D. Wall, «A Branch and Bound Model for Choosing Optimal Substation Locations,» *IEEE Trans PAS*, vol. 100, n° 5, 1981.
- [108] N. Karmarkar, «A new polynomial-time algorithm for linear programming,» *COMBINATORICA*, vol. 4, n° 4, pp. 373-395, 1984.
- [109] S. Ropke, «PhD Thesis: Heuristic and exact algorithms for vehicle routing,» Datalogisk Institut, Copenhagen, Montreal, 2005.
- [110] evolvdSO, [En ligne]. Available: <http://www.evolvdso.eu/Home/Project-plan/Work-package-3>.
- [111] V. Kekatos, W. Gang et G. Giannakis, «Stochastic loss minimization for power distribution networks,» chez *North American Power Symposium (NAPS)*, Pullman, WA , 2014 .
- [112] A. Baha et K. Ariyawansa, «Stochastic mixed integer second-order cone programming: A new modeling tool for stochastic mixed integer optimization,» chez *Proceedings of The 2011 World Congress in Computer Science, Computer Engineering, and Applied Computing*, 2011.

Annexe A NP-COMPLÉTUDE DE DIVERS PROBLÈMES DE FLOT ARBORESCENT

Dans cette section nous allons démontrer la NP-complétude pour les problèmes formulés dans III.5 On commence par la présentation d'un problème NP-complet qui est célèbre dans l'optimisation combinatoire.

La **3-PARTITION** a été le premier problème concernant les nombres entiers reconnu comme NP-complet au sens fort (ne peut être résolu par un algorithme pseudo-polynômial à moins que $P=NP$) :

INSTANCE : un ensemble $T = \{1, 2, \dots, 3m\}$, des nombres entiers positifs $d_1, d_2, \dots, d_{3m}, B$ tels que $B/4 < d_j < B/2$ et $\sum_{j \in T} d_j = mB$.

QUESTION: Existe-t-il une partition de $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_m$ et $T_i \cap T_k = \emptyset$ pour $i \neq k$, $|T_i| = 3$ telle que : pour tout i , $1 \leq i \leq m$, on a : $\sum_{j \in T_i} d_j = B$?

Les trois problèmes suivants sont NP-complets au sens fort car ils contiennent la 3-PARTITION comme cas particulier :

(a) PROBLÈME [FA1] : FLOT ARBORESCENT

INSTANCE :

Graphe orienté $G(X; E)$, un sommet $r \in X$, un ensemble $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset X \setminus \{r\}$, les demandes $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}^+$, les capacités $c(e) \in \mathbb{R}^+$.

QUESTION : Existe-t-il un flot $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie :

- (1) $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pour tout arc $e \in E$ (les capacités sont respectées);
- (2) pour tout sommet x , $x \neq t_j, r$, on a : $\sum_{(y,x) \in E} f(y,x) = \sum_{(x,z) \in E} f(x,z)$ (le flot est conservé);
- (3) pour tout sommet $t_j \in T$ on a : $\sum_{(y,t_j) \in E} f(y,t_j) = d_j$ (les demandes sont satisfaites);
- (4) si $A := \{e \in E : f(e) \neq 0\}$ alors $G'(X; A)$ est une r -arborescence ?

REDUCTION 1 : Soit $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ et $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{3m}\}$. Considérons le graphe orienté dont l'ensemble des sommets est $X = \{r\} \cup S \cup T$ et l'ensemble des arcs est $E = \{r\} \times S \cup S \times T$. On im-

pose la capacité B sur les arcs (r, s_i) ($1 \leq i \leq m$) ; les arcs $S \times T$ n'ont pas de limite de capacité. Les sommets $t_j \in T$ ont les demandes d_j ($1 \leq j \leq 3m$). Ce graphe est montré sur la **Figure IV-16**. On voit clairement que la **3-PARTITION** existe ssi il existe un flot arborescent dans le graphe construit. ■

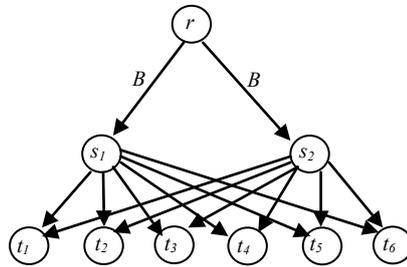


Figure IV-16 : Graphe $G=(X, E)$ pour la REDUCTION 1 avec $m = 2$.

Commentaire : Il existe toujours un flot (qui vérifie (1), (2) et (3)) de valeur mB dans le graphe construit (la coupe minimale a la valeur mB), mais on exige (4) (que le graphe-support du flot soit une r -arborescence) !

(b) PROBLEME [FA2] : FLOT ARBORESCENT DE COUT QUADRATIQUE

INSTANCE: Graphe orienté $G(X; E)$, un sommet $r \in X$, un ensemble $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset X \setminus \{r\}$, les demandes $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}^+$, les prix $p(e) \in \mathbb{R}^+$, une borne $M \in \mathbb{R}^+$.

QUESTION : Existe-t-il un flot $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie :

- (1) $f(e) \geq 0$ pour tout arc $e \in E$ (non-négativité);
- (2) pour tout sommet $x, x \neq t_j, r$, on a : $\sum_{(y,x) \in E} f(y,x) = \sum_{(x,z) \in E} f(x,z)$ (le flot est conservé) ;
- (3) pour tout sommet $t_j \in T$ on a : $\sum_{(y,t_j) \in E} f(y,t_j) = d_j$ (les demandes sont satisfaites) ;
- (4) si $A := \{e \in E : f(e) \neq 0\}$ alors $G'(X; A)$ est une r -arborescence ;
- (5) $\sum_{e \in E} p(e) f^2(e) \leq M$?

REDUCTION 2 : On enlève les capacités des arcs du graphe de la REDUCTION 1 et on impose le prix $p(e)=1$ pour chaque arc $e = (r, s_i)$ ($1 \leq i \leq m$) et $p(e)=0$ pour les autres. On va montrer que la 3-PARTITION existe ssi, il existe un flot arborescent de coût quadratique avec $M = mB^2$.

En effet, on a : $\sum_{i=1}^m f(r, s_i) = mB$ (le flot total demandé mB doit sortir de r), alors et, sous cette

condition, le minimum du coût quadratique $\min \sum_{i=1}^m f^2(r, s_i) = mB^2$ est atteint ssi, pour tout i ,

$1 \leq i \leq m$ on a : $f(r, s_i) = B$. ■

(c) PROBLEME [FA3] : FLOT ARBORESCENT AVEC PERTES QUADRATIQUES

INSTANCE : Graphe orienté $G(X ; E)$, un sommet $r \in X$, un ensemble $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset X \setminus \{r\}$, les demandes $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathbb{R}^+$, les valeurs $c(e) \in \mathbb{R}^+$, une borne $M \in \mathbb{R}^+$.

QUESTION : Existe-t-il un flot f avec pertes quadratiques : $E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie :

- (1) $f(e) - c(e)f^2(e) \geq 0$ pour tout arc $e \in E$;
- (2) pour tout sommet $x, x \neq t_i$ et r , on a : $\sum_{(y,x) \in E} (f(y,x) - c(y,x)f^2(y,x)) = \sum_{(x,z) \in E} f(x,z)$;
- (3) pour tout sommet t_i $\sum_{(y,t_i) \in E} (f(y,t_i) - c(y,t_i)f^2(y,t_i)) = t_i$ (les demandes sont satisfaites);
- (4) si $A := \{e \in E : f(e) \neq 0\}$ alors $G'(X ; A)$ est une r -arborescence;
- (5) $\sum_{e \in E} p(e)f^2(e) \leq M$?

REDUCTION 3 : sur le graphe de la REDUCTION 2 on pose $c(e) = (4B)^{-1}$ pour chaque arc $e = (r, s_i)$ ($1 \leq i \leq m$) et $c(e) = 0$ pour les autres. On va montrer que la 3-PARTITION existe ssi, il existe un flot arborescent avec pertes quadratiques avec $M = mB$.

En effet, on a : $\sum_{i=1}^m (f(r, s_i) - \frac{1}{4B} f^2(r, s_i)) = mB$ (la demande totale) qui implique $f(r, s_i) = 2B \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$. Ainsi la valeur minimum des pertes quadratiques $\min \sum_{i=1}^m \frac{1}{4B} f^2(r, s_i) = mB$. ■

Commentaire : Les réductions utilisées montrent que **FA1, 2 et 3** restent *NP-complets au sens fort* même si l'on suppose l'orientation de G acyclique !

REMARQUE : La figure ci-dessous montre qu'avec les mêmes données (demandes, résistances) dans les problèmes **FA2** et **FA30** les arborescences optimales (i.e. les topologies recherchées) peuvent être différentes.

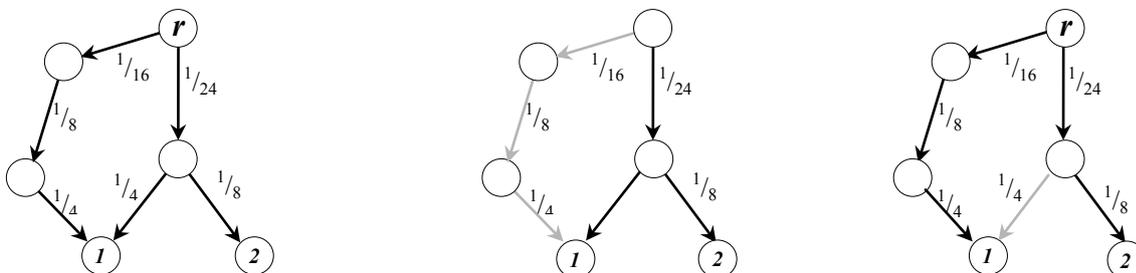


Figure IV-17 : Un graphe et ses arborescences : avec les pertes minimum (=9) et avec le coût quadratique minimum ($=\frac{53}{48}$).

Annexe B PSEUDO CODES DES ALGORITHMES AH1-AH2

(a) PSEUDO CODE DE L'ALGORITHME AH1.

```
1 .Fonction AH1 (graphe G = structure {arcs  $e_{ij}$ , sommets  $v_k$ ,
    coûts  $c_{ij}$ , demandes  $d_k$ }, sommets de source r)
2 .Tant que true
3 .   f = vecteur de la solution du programme (III-36) pour
    FAPQM (ou (III-37) pour FACQM)
4 .   flot_max = 0
5 .   v_actif = NULL
6 .   Pour v parcourant sommets
7 .     Si (v.dégré  $\geq 2$ )
8 .       Si (somme ( $e_{iv}.f | \forall (i,v)$ ) > flot_max)
9 .         v_actif = v
10 .        flot_max = somme ( $e_{iv}.f | \forall (i,v)$ )
11 .   // on cherche un sommet avec la valeur du flot entrant
    maximale
12 .     Fin si
13 .   Fin pour
14 .   Si v_actif == NULL
15 .     Retourner G
16 .   Sinon
17 .     meilleur_solution = INF
18 .     Pour e parcourant les arcs entrant dans v_actif
19 .       Si (solution du programme (III-36) pour FAPQM
    (ou (III-37) pour FACQM) dans  $G \setminus \{e\} \leq$  meilleur_solution)
20 .         meilleur_solution = solution du programme
    (III-36) pour FAPQM (ou (III-37) pour
    FACQM) dans  $G \setminus \{e\}$ 
21 .         e_temp = e
22 .       Fin si
23 .     Fin pour
24 .     Pour e parcourant les arcs entrant dans v_actif
25 .       Si e != e_temp
26 .         G =  $G \setminus \{e\}$ 
27 .     //on enlève tous les arcs entrant dans v_actif sauf
    e_temp
28 .     Fin si
29 .   Fin si
30 .Fin tant que
31 .Fin Fonction AH1
```

(b) PSEUDO CODE DE L'ALGORITHME ALG2.

```
1 .Fonction AH2 (graphe G = structure {arcs  $e_{ij}$ , sommets  $v_k$ ,
    coûts  $c_{ij}$ , demandes  $d_k$ }, sommets de source r)
2 . f = vecteur de la solution du programme (III-36) pour
    FAPQM (ou (III-37) pour FACQM)
3 . Pour v parcourant sommets
4 .     Si (v.dégré  $\geq 2$ )
5 .         flot_max = 0
6 .         Pour e parcourant les arcs (i,v)
7 .             Si ( $e_{iv}.f \geq \text{flot\_max}$ )
8 .                 flot_max =  $e_{iv}.f$ 
9 .                 e_temp =  $e_{iv}$ 
10 .// on cherche un arc entrant dans v avec la valeur du flot
    // maximale
11 .             Fin si
12 .         Fin pour
13 .     Pour e parcourant les arcs (i,v)
14 .         Si  $e \neq e\_temp$ 
15 .              $G = G \setminus \{e\}$ 
16 .         Fin si
17 .     Fin pour
18 .     Fin si
19 . Fin pour
20 .Retourner G
21 .Fin Fonction AH2
```

Annexe C RESEAUX DE TEST

(a) RESEAUX RADIAUX

Réseau radial de la famille de test1 : 77 nœuds					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
0	1	0.000110071	0.000192718	0.0087725	0.00611997
0	2	0.000966615	0.000905767	0.00252268	0.00620268
0	3	0.000953083	0.000804971	0.00405472	0.00839767
2	4	0.00071961	0.000494842	0.00668174	0.00691902
2	5	0.000228353	3.84514e-05	0.0025244	0.00166305
2	6	0.000744293	0.000123487	0.00751686	0.00718896
2	7	0.000379702	0.00031192	0.0062125	0.00345567
3	8	0.000486611	0.00043603	0.00318981	0.00892725
3	9	0.000402645	0.000955759	0.00144993	0.00158218
5	10	0.000134781	0.000165513	0.00917957	0.00288164
5	11	0.000885122	0.000335217	0.00856337	0.00813206
6	12	2.80251e-07	0.000682891	0.00962915	0.00607213
6	13	0.000806378	0.000830398	0.00326109	0.00770116
6	14	0.000142319	0.000393966	0.00115683	0.00267471
7	15	0.000865422	7.31158e-05	0.00120812	0.00892519
8	16	0.000349364	0.000492676	0.00341261	0.00125987
9	17	0.000103228	0.00039881	0.00602591	0.00664712
9	18	0.000734026	0.000381737	0.00477917	0.00989516
9	19	0.000382017	0.000630036	0.00952431	0.00367837
10	20	0.000379227	0.000144017	0.00213932	0.00492772
10	21	0.000537983	5.18849e-05	0.00660244	0.00569391
10	22	0.000917307	0.000617786	0.00590203	0.00476704
11	23	0.000713187	0.000678051	0.00266837	0.00681994
11	24	0.000305509	0.000687604	0.00625938	0.0034446
11	25	0.000675955	0.000404457	0.00703388	0.00752875
13	26	0.000253136	0.000250882	0.00731848	0.00540255
13	27	0.00063011	0.00075978	0.00654187	0.00720595
13	28	0.000297762	0.000363928	0.00380838	0.0023649
14	29	0.000314111	8.01455e-05	0.0074469	0.00353111
14	30	0.000793333	0.000144661	0.00519949	0.00964693
14	31	0.00045017	0.00023275	0.00590631	0.00158459
16	32	0.000282741	0.000531804	0.00917834	0.00225859
16	33	0.000784941	9.27795e-05	0.00857707	0.00794722
16	34	0.000722889	0.000147456	0.00448909	0.00527041
17	35	0.00015046	0.000570869	0.0088709	0.00500696
17	36	0.00088498	0.000241685	0.00245386	0.00488526
17	37	3.50181e-05	4.2966e-05	0.00908474	0.00861175

Réseau radial de la famille de test1 : 77 nœuds (SUITE)

<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
17	38	0.000493136	0.000623646	0.00451807	0.00189975
18	39	0.000975202	0.000951464	0.00701851	0.00579115
18	40	0.000723378	0.000849095	0.00157739	0.00835389
18	41	0.000323586	0.000632767	0.0091889	0.00199948
20	42	0.000260579	7.81811e-05	0.0055658	0.00733355
20	43	0.000963161	0.000106953	0.00878741	0.00723047
20	44	0.000141971	0.000633545	0.00631521	0.00828021
20	45	0.000126681	0.000823454	0.00279827	0.00317749
23	46	0.000419959	0.000869602	0.00147253	0.00772181
23	47	0.00077948	0.000581299	0.00523221	0.00342149
23	48	0.000839809	0.000702758	0.00633376	0.00471022
24	49	0.00099774	0.000408804	0.00589183	0.00967003
24	50	0.000515756	0.00024619	0.0069005	0.00964811
26	51	0.000899671	6.41558e-06	0.00891761	0.00972659
26	52	0.000801819	0.000148879	0.00813767	0.00979275
27	53	0.000899078	1.89325e-05	0.00593818	0.00611955
27	54	0.000600232	0.000430533	0.00854104	0.00710702
27	55	0.000133291	1.0364e-05	0.00181725	0.00496037
28	56	0.000392381	0.000752239	0.00186966	0.00107293
28	57	0.000998429	0.000738818	0.00972104	0.00917323
28	58	0.000708438	0.000465535	0.00609278	0.00890348
29	59	0.000686399	0.000650393	0.00551362	0.00498257
29	60	0.000219231	0.000371062	0.00524786	0.00311577
29	61	4.96202e-05	0.00085425	0.00328617	0.00151412
31	62	0.000150789	0.000277868	0.00364862	0.00658853
32	63	0.000469816	0.000127898	0.00243004	0.00703224
32	64	0.000866716	0.00014425	0.00620547	0.00521421
33	65	0.00023099	7.66671e-05	0.00617639	0.00648807
33	66	0.00072706	0.000524277	0.00147064	0.0092565
35	67	3.41464e-06	0.00094496	0.00905805	0.00465844
35	68	8.5385e-05	0.000555035	0.00334669	0.00541964
35	69	0.000832903	0.000829597	0.00200818	0.00312557
36	70	0.000522966	8.15367e-05	0.00552836	0.00369471
37	71	0.000114068	0.000964836	0.00450713	0.00303208
38	72	0.000887865	0.000262447	0.00410552	0.00137352
39	73	0.000714853	0.000307482	0.00470928	0.00473429
39	74	0.000252441	8.21587e-05	0.00839274	0.00746441
39	75	0.000637193	0.000321359	0.00288405	0.00404043
39	76	0.000150956	0.000969068	0.006166	0.00523086
41	77	0.000218027	0.000881716	0.00542831	0.00149306

Réseau radial de la famille de test2 : 150 nœuds					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
0	1	0.00021677	4.39614e-05	0.00189698	0.00398411
0	2	0.000305366	0.000838479	0.0020467	0.0031074
1	3	0.000267257	0.000487935	0.00202416	0.00118166
2	4	0.000614024	0.000976066	0.0015276	0.00631889
2	5	2.35143e-05	1.45303e-05	0.00449333	0.0052993
3	6	0.000619373	0.000574517	0.00296356	0.00644637
3	7	0.00081141	0.000328615	0.00458236	0.00439287
3	8	0.000545386	0.000520611	0.00528984	0.00228681
3	9	0.000825976	9.7758e-05	0.00333351	0.00801587
3	10	0.000117942	0.000362824	0.0018601	0.00945794
4	11	1.86942e-05	0.000414256	0.00820209	0.00479301
4	12	0.000891956	0.000421026	0.00457761	0.00466157
5	13	2.65239e-05	4.55678e-05	0.00483575	0.0067528
5	14	0.000422553	2.5128e-05	0.00292346	0.00482107
5	15	0.000168107	0.000298564	0.00777861	0.00909282
5	16	7.81053e-05	0.000245789	0.00477831	0.00484647
6	17	0.000643086	0.000536496	0.00256305	0.00267004
6	18	0.000957942	0.00063196	0.0065194	0.00498986
6	19	3.8802e-05	0.00074953	0.00871816	0.00419908
6	20	0.000175725	0.00041568	0.00798832	0.00514157
6	21	0.000629398	0.000911261	0.00538028	0.00299164
7	22	0.000543048	0.000822632	0.00689073	0.00697996
7	23	0.000250018	4.11097e-05	0.00966704	0.00966575
7	24	0.000214782	0.00039421	0.00287785	0.00797645
7	25	7.47596e-06	0.000861565	0.00476422	0.0077615
8	26	6.4673e-05	0.000678238	0.00675493	0.00747225
8	27	0.000138412	0.000644394	0.00521802	0.00857038
8	28	0.000865687	0.000886231	0.0033115	0.00662599
8	29	0.000540757	0.000200812	0.00582734	0.00558579
9	30	1.54415e-05	0.000613407	0.0042705	0.00247435
9	31	0.000388568	0.000419707	0.00284433	0.00301682
9	32	0.000170985	0.000625777	0.00656471	0.00826133
9	33	0.000265213	0.000387518	0.00701541	0.00892184
9	34	0.000856186	0.00078603	0.0095039	0.00949107
11	35	0.000366267	0.000929094	0.00138577	0.00736277
11	36	0.000469851	0.000444158	0.00319011	0.0088822
11	37	0.000607974	0.000943822	0.00935543	0.00849916
11	38	0.000167913	0.000835214	0.00501982	0.00831609
12	39	0.000403592	0.000411991	0.00807593	0.00677826
12	40	0.000677204	0.000697926	0.00379367	0.00355417
12	41	0.000554112	1.4704e-05	0.00305806	0.0065859
12	42	5.75674e-05	0.000409494	0.00732268	0.00149223
12	43	0.00065284	0.000296759	0.00478864	0.00987996

Réseau radial de la famille de test2 : 150 nœuds (SUITE)					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
14	44	0.000704971	0.000168962	0.00302626	0.00360777
14	45	0.000336875	0.000571613	0.00762759	0.00566083
14	46	0.000213642	0.000154069	0.0077543	0.0021078
15	47	0.000212284	0.000221976	0.00571645	0.00494079
15	48	0.000776088	0.000681243	0.00699885	0.00849646
16	49	0.000944954	0.00025174	0.00847702	0.0076493
16	50	0.000548499	0.000181985	0.00752925	0.00638014
17	51	0.000399762	0.000942601	0.00796275	0.00524563
17	52	0.000279477	0.000779748	0.00287322	0.00925869
17	53	0.00099339	0.000822179	0.00701299	0.00462309
18	54	0.000149931	0.000739416	0.00565696	0.0033404
18	55	0.000515504	0.000607827	0.00933925	0.00984584
18	56	0.000346638	0.000463285	0.00566498	0.00411656
19	57	0.000146524	0.000254096	0.001649	0.0015497
19	58	0.000725833	0.000155631	0.00780282	0.00928147
19	59	7.32634e-05	0.000142241	0.00876488	0.00940572
20	60	0.000707107	0.000563552	0.00767236	0.00590326
20	61	0.000823596	0.000632383	0.00534207	0.00302092
20	62	0.000615254	0.000479466	0.00967566	0.00775162
20	63	0.000825751	0.000704645	0.00422206	0.00220226
20	64	0.000776756	0.000657947	0.00637182	0.00481397
21	65	0.000490461	0.000756684	0.00127766	0.00472435
22	66	0.000642711	0.000495466	0.00417903	0.00721587
22	67	4.02725e-05	0.000111476	0.00463932	0.00445676
22	68	0.000336023	0.000771232	0.00952872	0.00570453
23	69	0.000770362	0.000779452	0.00369987	0.00569271
23	70	0.000605203	0.000584064	0.00891477	0.00913552
24	71	0.000158764	0.000599276	0.0012608	0.00424738
24	72	8.97369e-05	0.000148356	0.00452504	0.00615322
24	73	0.000839008	0.000784739	0.00227825	0.00498666
24	74	0.000168823	0.000978701	0.00944585	0.0031904
24	75	0.000501426	0.000690877	0.00419368	0.00204813
25	76	0.000409102	0.000426897	0.00690881	0.00991776
26	77	0.000375517	0.000872586	0.00359669	0.00397759
26	78	0.000233406	0.000990423	0.00848494	0.00464045
26	79	0.000563004	9.3507e-05	0.00103393	0.00662569
26	80	0.000536469	0.000612441	0.0079609	0.00734528
26	81	0.000855818	0.000658594	0.00540793	0.00527408
27	82	0.000955024	0.000901549	0.00289605	0.00797547
27	83	0.000892411	7.18454e-05	0.00696469	0.00650403
27	84	0.000360367	0.000369299	0.0013461	0.00696453
28	85	0.000442737	0.000466358	0.00309657	0.00280863
28	86	9.14351e-05	0.000754386	0.00272244	0.00501857
28	87	0.000459417	7.64837e-05	0.00586013	0.00878381

Réseau radial de la famille de test2 : 150 nœuds (SUITE)					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
28	88	0.000551381	0.000333127	0.00529578	0.00954269
28	89	0.000543799	0.000382834	0.00647003	0.00104481
29	90	0.000571561	0.00033776	0.00500813	0.00141019
29	91	4.85666e-07	0.000477789	0.0020568	0.00649015
30	92	0.000180274	0.000481466	0.00134856	0.00739667
30	93	0.000927974	0.000268534	0.00259389	0.0043449
32	94	0.000544472	0.000610711	0.00220062	0.00626913
32	95	0.000943838	0.000142427	0.00581182	0.00186268
32	96	0.000525261	6.08348e-05	0.00190749	0.00538874
32	97	0.000632396	0.000270746	0.00939688	0.00613754
32	98	0.000271232	0.000166049	0.00719434	0.00318171
33	99	0.000402002	0.000791427	0.00378964	0.00889111
33	100	0.0007194	0.000322423	0.001485	0.00796292
33	101	0.000455826	0.000485158	0.00909729	0.0026865
34	102	0.000827714	1.03754e-05	0.00159883	0.00117824
34	103	0.000498013	0.000687493	0.00246009	0.00935691
34	104	0.000258331	0.000621777	0.00990443	0.004879
35	105	0.000972977	0.000112639	0.00951931	0.0087777
35	106	0.000989429	0.000487918	0.00177325	0.00354644
35	107	0.000261576	0.000793764	0.00166928	0.00138986
35	108	0.000981153	0.000821567	0.00429167	0.00245148
36	109	0.000666238	0.000540728	0.00741712	0.00899294
37	110	0.000396493	0.000515962	0.00845623	0.00522346
37	111	0.000774293	8.0431e-05	0.00512789	0.00844743
37	112	0.00094462	0.000502215	0.00576314	0.00748795
38	113	0.000822951	0.000518455	0.00127483	0.00806637
39	114	0.00065328	0.00023201	0.00879642	0.00802028
39	115	5.35771e-05	0.00058774	0.00947176	0.0067099
39	116	0.000253978	0.000888175	0.00412703	0.00947513
39	117	0.000357449	0.000236653	0.00856144	0.00174203
41	118	0.000896534	0.000593383	0.00157731	0.00435432
41	119	9.55977e-05	0.000927108	0.00184227	0.00857039
41	120	0.000750059	0.000390146	0.00884522	0.00892675
42	121	0.000393546	0.000848337	0.00654695	0.0025316
42	122	0.000901915	0.000699224	0.00200336	0.00125182
42	123	0.000953202	0.000263602	0.00437885	0.00859236
42	124	0.000621051	0.000920409	0.00715381	0.00132084
42	125	0.000984555	6.76145e-06	0.00670653	0.00493439
44	126	0.000673535	2.74549e-05	0.00190312	0.00257358
45	127	0.00043668	0.000294551	0.00598857	0.00799762
45	128	0.000688098	0.000242178	0.00454457	0.00646172
45	129	0.000144093	0.000417566	0.00746507	0.0074447
45	130	0.000370768	0.000355107	0.00182354	0.0098892
46	131	0.000591855	4.0476e-05	0.00465775	0.00978543

Réseau radial de la famille de test2 : 150 nœuds (SUITE)					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
46	132	4.72375e-05	0.000747001	0.00471981	0.00618768
47	133	0.000827883	0.000175039	0.00232826	0.00929659
47	134	0.000952553	0.000405057	0.00971539	0.00443951
47	135	1.19143e-05	0.000364817	0.00709047	0.00411755
47	136	8.08945e-05	0.000732665	0.00629715	0.0075723
47	137	0.000720354	0.00051859	0.0023304	0.00255159
48	138	0.000503665	0.000983654	0.00452619	0.00932506
48	139	0.000560063	1.27203e-05	0.00968934	0.0092528
48	140	0.000160305	0.000585822	0.00697581	0.00742969
48	141	0.000554199	0.000924461	0.00588064	0.0040181
49	142	0.000634291	0.00097117	0.0096333	0.00641062
49	143	0.000701426	4.68919e-05	0.00969398	0.00300577
49	144	0.000219291	0.000675883	0.00959976	0.00864323
49	145	6.76828e-05	0.000292844	0.00431053	0.00772118
49	146	0.000258327	0.000167441	0.00325417	0.00146203
50	147	0.000325811	0.000431352	0.00343942	0.00848277
50	148	0.000766696	0.000971439	0.00475517	0.00881293
50	149	0.000930695	0.000393745	0.00813308	0.00149134
50	150	0.000359743	0.000911748	0.00719996	0.00911678

(b) RESEAUX MAILLES

Réseau maillé de la Série de test1 : 33 nœuds, 60 lignes					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
0	1	0.000473434	0.000888558	0.00497263	0.00324799
1	2	0.0004897	6.99484e-05	0.00740354	0.00641496
1	3	0.000647117	0.000614568	0.0073074	0.0067955
2	4	0.000564732	0.000884271	0.00501522	0.0076061
3	5	0.000500059	0.000524037	0.00957189	0.00324272
3	6	0.000748037	0.000755984	0.00416348	0.00915037
4	7	0.000521473	0.000956208	0.00563324	0.00788745
4	8	0.000844765	0.000229351	0.00113544	0.00995416
5	9	0.00077636	0.000147249	0.00501785	0.00747146
6	10	0.000671255	0.000869612	0.0048113	0.00785636
6	11	0.000753883	0.000816868	0.00546246	0.00312389
7	12	0.000712457	0.000354571	0.00102767	0.00385234
7	13	0.000110555	0.000815582	0.00300271	0.00514445
8	14	0.000931507	0.000890875	0.00888244	0.00403349
9	15	3.83728e-05	0.000222699	0.00798645	0.00208203
9	16	0.000369948	0.000202272	0.00855349	0.00833259
10	17	0.000107822	0.000627595	0.00218589	0.00886175
10	18	0.000444462	0.000297936	0.00198564	0.00875535
11	19	0.000219351	0.000983912	0.0078525	0.00109354
11	20	0.000799494	0.000446186	0.00523799	0.00396915
12	21	9.6608e-05	0.000468509	0.00222893	0.00439924

Réseau maillé de la Série de test1 : 33 nœuds, 60 lignes (SUITE)

<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
12	22	0.000506882	0.000376664	0.00238568	0.0029515
13	23	0.000258382	0.000559825	0.00389453	0.00771951
14	24	0.000505973	0.000241425	0.00218719	0.00700883
15	25	0.000394133	0.000711824	0.00955391	0.00585425
15	26	0.000695736	2.06411e-05	0.00594778	0.00652135
16	27	0.000149123	0.000631777	0.00545706	0.00520145
16	28	0.000100286	0.000998486	0.00860069	0.00321158
17	29	0.000518674	0.000928783	0.00646451	0.00437635
18	30	1.40095e-07	0.000908967	0.00799351	0.00539747
19	31	0.000685608	0.000456548	0.00555501	0.00235352
20	32	0.000239506	0.000693225	0.00171767	0.00251534
20	33	0.000636615	0.000359336	0.00877696	0.00334132
2	3	0.000494032	0.000698567		
4	5	0.00062735	6.68926e-05		
5	6	0.000789763	0.000115958		
7	8	0.000272214	0.000573145		
8	9	0.000849122	0.000957822		
9	10	2.96931e-05	0.000538874		
10	11	3.75628e-05	0.000198065		
12	13	6.21717e-05	3.85273e-05		
13	14	0.000367402	0.000421508		
14	15	0.000765502	0.000153139		
15	16	0.000412621	0.000336997		
16	17	0.000184607	0.00050402		
17	18	0.000906978	0.000678639		
18	19	0.000202588	0.000852109		
19	20	0.000691346	0.000829938		
21	22	0.000945896	0.000986034		
22	23	0.000179839	0.00021811		
23	24	0.00055918	2.89612e-05		
24	25	0.000175932	0.000588873		
25	26	0.000567835	0.000213495		
26	27	0.000786938	0.000346215		
27	28	0.000944282	0.000849109		
28	29	0.000384743	0.000311684		
29	30	0.000270617	0.000150245		
30	31	0.000464823	0.000683238		
31	32	0.000487242	0.000649431		
32	33	0.000187258	0.000394221		

Réseau maillé de la Série de test1 : 32 nœuds, 58 lignes					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
0	1	0.000129488	0.000502886	0.00637481	0.00818783
0	2	0.000564454	0.000738075	0.00548841	0.00974528
1	3	0.000749017	0.000405605	0.00545135	0.00943311
2	4	8.27334e-05	0.000282127	0.00410168	0.00713529
3	5	0.000570743	0.000834303	0.00792524	0.00608151
3	6	0.000367017	0.000307752	0.00691033	0.00194324
4	7	5.95502e-06	0.000710246	0.0020174	0.00749401
5	8	1.89173e-05	0.000107141	0.00221899	0.00291819
5	9	0.000600003	0.000272181	0.00799828	0.00781293
6	10	0.000363243	0.000693651	0.00414118	0.00710007
6	11	0.000975778	0.000956769	0.00423535	0.00501379
7	12	4.97506e-05	0.000197094	0.00586352	0.0057476
8	13	0.000555947	0.000529813	0.00475091	0.00554361
9	14	0.000746608	0.000697345	0.00605712	0.00316052
9	15	0.000804486	0.000230776	0.00507871	0.00788973
10	16	0.000216522	0.000753509	0.0046404	0.00552661
11	17	0.000540226	2.57415e-05	0.00621789	0.00502444
11	18	0.000241189	0.000963329	0.00480644	0.00547295
12	19	0.000656822	0.000707708	0.00361846	0.0024438
12	20	0.00023752	0.000891671	0.00698741	0.00291493
13	21	0.000472017	0.000930768	0.0052982	0.00674451
13	22	0.000161545	0.000926321	0.00463423	0.00348853
14	23	0.0004345	0.000845244	0.00698052	0.00228559
15	24	0.00074835	0.000304598	0.00893494	0.00446923
15	25	0.000267927	0.000906971	0.00894219	0.00990585
16	26	0.000988186	9.36175e-05	0.00485514	0.00607414
17	27	0.000551235	0.000703285	0.00303136	0.00986759
17	28	0.000634053	2.73701e-05	0.0066121	0.00120927
18	29	0.000980747	0.0004601	0.00816038	0.00958322
19	30	0.000819143	0.000296908	0.00473723	0.0037481
19	31	0.000601506	0.000573279	0.00721733	0.00610744
20	32	0.000837511	0.000297782	0.00882489	0.00532226
1	2	0.000376688	0.000371843		
3	4	0.000395095	0.000388741		
5	6	0.000184339	0.000981316		
6	7	0.000675597	0.000644439		
8	9	0.000949783	0.000896994		
9	10	0.000387752	0.000640597		
10	11	0.000464487	0.000989258		
11	12	0.000213876	2.15197e-05		
13	14	0.000859031	0.000156473		
14	15	0.000738171	0.000684728		
15	16	0.000547872	0.000558779		
16	17	0.000736132	0.00092456		
17	18	0.000930622	0.00049082		
18	19	0.000924814	0.000325717		
19	20	0.000879562	0.000952439		
21	22	0.000933754	0.000696165		
22	23	0.000708339	1.16048e-05		
23	24	0.00078701	0.000658122		
24	25	0.000908598	0.000174762		
25	26	0.000298719	0.000373086		
26	27	0.00016402	0.000512596		
27	28	0.000394605	2.27109e-05		
28	29	0.000206723	0.000253636		

29	30	0.000179184	0.000944894		
30	31	0.000938365	0.000727056		
31	32	0.000503673	0.000674497		

Réseau maillé de la Série de test2 : 59 nœuds, 111 lignes					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
0	1	0.00090817	0.0002343	0.0067108	0.00764419
0	2	0.00032371	0.000606158	0.0047282	0.00237856
1	3	0.000142787	0.000210413	0.00782639	0.00123146
1	4	0.000260845	0.000505426	0.00566762	0.0093064
2	5	0.000553134	0.0001018	0.0047313	0.00106671
3	6	0.000284304	0.000269001	0.00716789	0.00654444
4	7	0.000828112	0.000718193	0.00175294	0.0064308
5	8	0.00075591	0.000889455	0.00762653	0.00957243
5	9	0.000287811	3.46908e-05	0.00348583	0.0042586
6	10	0.00090641	0.00035353	0.00487538	0.00320594
7	11	0.000920537	0.000419247	0.00470652	0.00477447
8	12	0.00065784	0.000638387	0.00120104	0.00515487
9	13	0.000829616	0.000530263	0.00934157	0.00285208
10	14	0.000770179	0.000500302	0.00593028	0.00884735
10	15	0.000776505	0.000989904	0.00665053	0.00693671
11	16	0.000378042	5.62994e-05	0.00830076	0.0043992
11	17	0.000562248	0.000695934	0.00355689	0.00758416
12	18	0.000123477	0.000505122	0.00534507	0.00203663
12	19	0.000143509	0.00032279	0.0061915	0.00803185
13	20	0.000238421	0.000383193	0.00414366	0.00237166
13	21	0.000153372	0.000200517	0.00730194	0.00199314
14	22	0.00072809	0.000760451	0.00831705	0.0097932
15	23	0.000844517	0.000389878	0.00195201	0.00224644
15	24	8.58119e-05	2.1024e-05	0.00883059	0.00466088
16	25	0.000394672	0.000777827	0.00280894	0.00230051
16	26	0.000100617	0.000633976	0.00933236	0.00584363
17	27	0.000270669	0.000953239	0.00327721	0.00885157
17	28	0.000153756	0.00072093	0.00984471	0.00481637
18	29	0.000997498	0.000918996	0.002177	0.00504118
18	30	0.000763512	0.000944677	0.00599319	0.00222392
19	31	2.70808e-05	5.9827e-05	0.00253249	0.0012744
19	32	0.000454499	9.30923e-06	0.00308334	0.00254424
20	33	0.000731375	0.000880156	0.00993412	0.00198934
20	34	0.000150825	0.000316189	0.00426655	0.00643394
21	35	0.000307447	0.000811912	0.00617379	0.00522951
21	36	0.00080941	0.000519719	0.00640651	0.00780821
22	37	0.000255943	0.000951457	0.00950861	0.00354908
23	38	0.000513336	0.000517914	0.00357788	0.00980684
24	39	0.000247519	0.000960515	0.00971051	0.00574501
24	40	0.000840671	9.9367e-08	0.00673434	0.00981005
25	41	0.000169183	0.000566361	0.00992346	0.0038466
26	42	0.000386957	0.000233097	0.00528967	0.00440446
27	43	0.000133083	0.000189908	0.00916009	0.00589927
27	44	0.000643417	8.67378e-05	0.00820276	0.00176087
28	45	0.000213199	0.000124587	0.00241077	0.00644186
29	46	0.000769024	0.000439612	0.00514646	0.00176592
29	47	2.22782e-05	0.000917267	0.00933195	0.00792211
30	48	0.000871645	0.00066809	0.00272315	0.00535265

31	49	4.95835e-05	0.000165279	0.00332743	0.00911069
31	50	0.000355187	0.000245857	0.00500996	0.002644
32	51	0.000330286	0.000155356	0.00998744	0.00399335
32	52	0.000279943	6.91208e-05	0.00943522	0.00589137
33	53	0.000443815	0.000290818	0.00428541	0.0085433
33	54	0.000208085	0.00069268	0.00646541	0.00519484
34	55	0.000325645	0.000553614	0.00722542	0.00607893
34	56	0.000603198	0.000988207	0.00840635	0.00304149
35	57	0.00091824	5.30718e-05	0.00807278	0.00409055
36	58	0.000497355	0.000188081	0.00325751	0.00445022
36	59	0.000257201	0.000931046	0.00934159	0.00799568
1	2	0.000840955	0.000641246		
3	4	0.000332959	0.000959619		
4	5	0.000824155	0.000886573		
6	7	0.000489771	0.000770754		
7	8	0.00072337	0.000275635		
8	9	0.000114148	0.00064161		
10	11	0.000892444	0.000712065		
11	12	0.000953501	8.05249e-05		
12	13	0.000638908	0.000730799		
14	15	0.000873143	0.000433072		
15	16	0.000944816	0.000306304		
16	17	0.000135687	0.000785772		
17	18	0.00094755	0.00053098		
18	19	0.000284281	0.000280509		
19	20	0.000490599	0.000108436		
20	21	0.000167082	0.000273146		
22	23	4.38999e-05	0.000882793		
23	24	0.000932488	0.000158048		
24	25	0.000524403	0.000261194		
25	26	0.000614195	0.000416847		
26	27	0.000973259	0.000567696		
27	28	0.000497372	0.000612168		
28	29	0.000298495	0.000835098		
29	30	0.000182122	0.000171638		
30	31	0.000268171	0.000126938		
31	32	0.000477942	0.000403857		
32	33	0.00091271	0.000425491		
33	34	0.000934838	0.000196992		
34	35	0.000706	0.000425437		
35	36	0.000305428	0.000873082		
37	38	0.000529934	0.000742483		
38	39	0.000347644	0.000462422		
39	40	0.000900531	0.000872047		
40	41	0.000723616	0.000514726		
41	42	0.000288894	0.000696876		
42	43	8.24219e-05	0.000786265		
43	44	0.000309043	0.000380917		
44	45	0.000621364	0.000491165		
45	46	0.000552555	0.000889535		
46	47	0.000618104	3.04967e-05		
47	48	0.000293392	0.000530814		
48	49	0.000455988	0.00022823		
49	50	0.000727806	0.000161988		
50	51	0.000653666	3.32335e-05		
51	52	3.50695e-05	0.000352249		
52	53	0.000498084	0.000565004		

53	54	9.47319e-05	0.000845728		
54	55	2.74259e-05	0.000995263		
55	56	0.000717775	0.000751042		
56	57	0.000509989	6.66848e-06		
57	58	0.000447918	0.00059241		
58	59	0.000792934	0.000756961		

Réseau maillé de la Série de test2 : 51 nœuds, 95 lignes					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
0	1	0.000666613	8.42939e-05	0.00444333	0.00212414
0	2	0.000431754	0.000482786	0.00494673	0.00245471
1	3	0.00026237	0.000712884	0.0038376	0.00438406
2	4	0.000731509	0.000459459	0.00922656	0.00147472
3	5	0.000514599	0.000272056	0.00135722	0.00816959
3	6	0.000661371	0.000427886	0.00391948	0.00959514
4	7	0.000496657	0.000325225	0.0094837	0.00394033
5	8	0.000890133	0.000324904	0.00246943	0.00468567
5	9	2.87913e-05	0.000156562	0.00857146	0.00435627
6	10	0.000909936	0.000205224	0.00362045	0.00882502
6	11	0.000664683	0.000511544	0.00929974	0.006773
7	12	0.000953192	0.00078569	0.00515174	0.00123529
7	13	0.000213577	0.000541988	0.00983043	0.00653107
8	14	0.000882421	0.000991888	0.00586253	0.00134781
9	15	0.000526819	0.000133213	0.00362746	0.00893819
10	16	3.86689e-06	0.000846772	0.0060005	0.00360798
10	17	5.19957e-05	8.14149e-05	0.00243299	0.00922422
11	18	0.000236383	0.000177983	0.00745011	0.00633663
11	19	0.000963673	0.000600262	0.00657192	0.00270618
12	20	0.000361334	0.000717531	0.00259525	0.00228025
13	21	0.000382811	0.000535695	0.0031938	0.00738477
14	22	0.000846381	0.000465241	0.00918667	0.00702018
15	23	0.000117906	0.000764051	0.00865223	0.00380812
15	24	0.000319298	8.06871e-05	0.00427608	0.00279388
16	25	0.000411382	0.000745257	0.00600113	0.00332803
17	26	0.000399593	0.000153894	0.00110479	0.00594455
18	27	0.000154484	0.000826543	0.00205412	0.0040131
18	28	0.000417984	0.00062723	0.0074584	0.00721161
19	29	0.000317772	0.000114613	0.00337929	0.00183224
19	30	0.000878664	0.000768492	0.00464035	0.0049211
20	31	0.000427277	0.000753643	0.00278166	0.00864261
20	32	0.0004989	0.000330192	0.00197064	0.00854793
21	33	4.19588e-06	0.000959023	0.00143465	0.00756807
22	34	0.000673454	5.65849e-05	0.00405087	0.00202156
23	35	0.000162774	0.000355803	0.00182294	0.00715433
23	36	0.000470416	0.000180769	0.00798657	0.00532491
24	37	0.000551221	0.000547042	0.00414172	0.00954335
25	38	0.000906289	0.000817157	0.00980648	0.00370617
26	39	0.00084788	0.000966268	0.00312834	0.00700713
26	40	0.000813178	1.06399e-05	0.00704489	0.00826213
27	41	0.000724096	0.000578069	0.00537968	0.00160502
27	42	0.000933871	0.000527325	0.00775936	0.00898183
28	43	0.000283639	0.000753368	0.00463859	0.00737285
29	44	0.000455795	0.000813358	0.00851374	0.00370369
30	45	0.000400681	0.000598567	0.00425876	0.00667464

30	46	0.000564834	0.000969629	0.00368177	0.00323705
31	47	0.000975874	0.000864643	0.00440211	0.00982242
31	48	0.000442712	0.000798533	0.00142744	0.00729973
32	49	0.000954256	0.000780871	0.00438925	0.00393273
33	50	0.000691308	7.27563e-05	0.00314106	0.00580815
33	51	0.000886115	0.000435746	0.00851185	0.00232393
1	2	8.4988e-05	0.000672589		
3	4	5.0601e-05	0.000764502		
5	6	0.000811996	0.000816296		
6	7	0.000357956	0.000610529		
8	9	0.000936388	0.000357393		
9	10	0.000515411	0.00097034		
10	11	0.000595288	4.96501e-05		
11	12	0.000661648	0.000668045		
12	13	0.0008843	0.000808752		
14	15	0.00031794	7.07893e-05		
15	16	0.000156472	0.000425694		
16	17	0.000885393	0.00024146		
17	18	9.82834e-05	0.000669627		
18	19	0.000381912	0.000148884		
19	20	0.000434129	0.000498238		
20	21	6.41287e-05	0.000246124		
22	23	0.000856654	0.00071767		
23	24	0.000156625	0.000793042		
24	25	7.50623e-05	0.000672036		
25	26	0.000763382	0.000670351		
26	27	0.000721686	0.00042503		
27	28	0.000338395	0.000605985		
28	29	0.000233782	0.000892555		
29	30	0.000926031	0.000551722		
30	31	0.000963344	8.25026e-05		
31	32	0.000977416	0.000848738		
32	33	0.000323963	7.56994e-05		
34	35	0.000224584	0.000952493		
35	36	0.000204112	0.000288713		
36	37	0.000198617	0.000518646		
37	38	0.000710798	5.5271e-05		
38	39	0.000236316	0.000867422		
39	40	0.000848313	0.000311378		
40	41	0.000539458	0.000611694		
41	42	0.000981729	0.000261144		
42	43	3.67248e-05	0.000320124		
43	44	0.000867129	0.000270507		
44	45	0.000212679	0.000793159		
45	46	0.000822228	0.000176023		
46	47	0.000875662	0.000799644		
47	48	2.4761e-05	0.000199625		
48	49	0.000875344	0.000543125		
49	50	0.000905499	9.99275e-05		
50	51	0.000495618	0.000109612		

Réseau maillé de la Série de test3 : 70 nœuds, 132 lignes					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
0	1	0.000438564	0.000260264	0.00238549	0.00282325
0	2	0.000371173	0.000236157	0.00406939	0.00155816
1	3	0.000988464	0.000804418	0.00857426	0.00649518
2	4	0.000366083	0.000983375	0.00622116	0.00902852
3	5	0.000813879	5.49964e-05	0.00215305	0.00813868
3	6	0.000566352	0.000678141	0.00239624	0.00466412
4	7	0.000965603	0.000521845	0.00431111	0.00735323
5	8	0.00024954	0.000466185	0.0046375	0.00803898
5	9	0.000383948	0.000994867	0.00237954	0.00537128
6	10	5.14787e-05	0.000952541	0.00435171	0.00819356
6	11	0.000935916	0.000360825	0.00722209	0.00475806
7	12	0.000600675	0.00088424	0.00756193	0.00257233
8	13	5.29048e-05	0.000534928	0.00250324	0.00606143
8	14	5.67734e-05	0.000176792	0.00341466	0.00116657
9	15	0.00088886	0.000992165	0.00854994	0.00483699
9	16	0.000987032	8.30319e-06	0.00920827	0.00345528
10	17	0.000597762	0.000477659	0.00807685	0.00153804
10	18	0.000838484	2.30217e-05	0.00529609	0.0058031
11	19	0.000147021	0.000595015	0.00111869	0.00661327
11	20	0.00064792	0.000325652	0.00811651	0.00738462
12	21	0.000154489	8.9103e-05	0.00699785	0.00444182
13	22	0.000213472	0.000492851	0.00622739	0.00980167
14	23	0.000895992	0.000986821	0.00280454	0.00551039
15	24	3.82797e-05	2.7431e-05	0.00544378	0.00518032
15	25	0.000290212	0.000316151	0.00372667	0.00155171
16	26	0.000475721	0.000146634	0.00493509	0.00920049
17	27	0.000225513	0.000183797	0.00821235	0.00211898
18	28	0.000859642	0.00029258	0.00383155	0.00464595
19	29	0.000819082	0.000853647	0.00417243	0.00589016
19	30	0.000414583	0.000933097	0.00495409	0.00825312
20	31	0.000573346	0.000514164	0.00507577	0.00964475
21	32	0.000687972	0.000800662	0.00900547	0.00279246
22	33	0.000476255	0.000958937	0.00851145	0.00423773
23	34	0.000899877	6.51579e-05	0.00694048	0.00313982
24	35	0.000449892	0.000735808	0.00273211	0.00715362
25	36	0.000308719	0.000718122	0.00373185	0.00257637
26	37	6.87764e-05	0.000152447	0.00621191	0.00253886
27	38	0.000884311	7.48751e-06	0.00387564	0.00137749
27	39	0.000842093	0.000202354	0.00858345	0.00603275
28	40	0.000695503	3.87879e-05	0.00820928	0.00808854
28	41	0.000136187	0.000879949	0.00718743	0.00784595
29	42	0.000947213	0.000889617	0.00627471	0.00654182
29	43	0.000607739	0.000899158	0.00811818	0.00330339
30	44	0.000987481	0.000463874	0.00800852	0.00971141
31	45	0.000294938	0.00087203	0.00126482	0.00413366
31	46	7.43844e-05	0.000942829	0.00916641	0.00223328
32	47	0.00097685	0.000549492	0.008758	0.00674499
33	48	0.000843389	0.000699115	0.00201733	0.00486497
33	49	0.000588732	0.000836109	0.00140679	0.00811542
34	50	0.000881568	0.000975196	0.00276824	0.0076174
34	51	0.00043907	0.000990651	0.00732881	0.00882144
35	52	0.000770504	0.000694634	0.00808529	0.0035703
36	53	0.000360682	0.000706888	0.00860399	0.00673717
36	54	0.00025638	0.000674787	0.00348215	0.00403778
37	55	0.000149682	0.000731021	0.00717239	0.00566358

Réseau maillé de la Série de test3 : 70 nœuds, 132 lignes (SUITE)

<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
38	56	0.000355312	0.000934886	0.00764573	0.00610416
39	57	5.59689e-06	0.000105929	0.00313192	0.00919074
39	58	4.40242e-06	0.000136406	0.00414237	0.00996623
40	59	0.000704457	0.000619795	0.00797416	0.00847936
40	60	0.000326683	0.000744298	0.00521653	0.00158624
41	61	0.000853236	0.000268884	0.00624756	0.00477177
41	62	0.000999904	0.000246039	0.00943535	0.00102627
42	63	0.000676219	0.00086943	0.0061033	0.00641216
43	64	0.00094416	0.000935453	0.00627671	0.00887524
44	65	0.000153111	0.000723468	0.00953706	0.00164673
45	66	0.000371403	0.000922706	0.00871811	0.00408937
45	67	0.000325375	0.000253008	0.00702951	0.00204131
46	68	0.000472048	0.00018153	0.0026075	0.00569703
47	69	8.88299e-05	0.000319437	0.00746278	0.00930577
47	70	0.000157668	0.000185384	0.00639175	0.00962434
1	2	0.000192697	0.000857672		
3	4	0.00071524	0.00011712		
5	6	0.000787066	0.000582701		
6	7	0.00096332	4.00736e-05		
8	9	0.000561965	0.000589535		
9	10	0.000323462	8.37615e-05		
10	11	0.000307621	0.000246326		
11	12	0.000172591	0.000627058		
13	14	0.000784726	3.0793e-05		
14	15	0.000964137	0.000886553		
15	16	0.00015163	0.000668698		
16	17	0.000936942	0.000344327		
17	18	0.000526369	0.0007108		
18	19	0.000439924	0.000241609		
19	20	0.00082792	0.000906923		
20	21	0.000879555	0.000614986		
22	23	0.000655059	0.000607111		
23	24	0.000984807	0.000217025		
24	25	0.000196645	0.000308269		
25	26	0.000300786	0.000504267		
26	27	0.000554595	0.000473378		
27	28	0.000131325	0.000400004		
28	29	0.000604229	0.000916051		
29	30	0.000430797	0.000568366		
30	31	0.000802604	0.000582427		
31	32	0.000237063	0.000739546		
33	34	0.000450346	0.000366678		
34	35	5.04176e-06	0.000278266		
35	36	0.000273601	0.000884596		
36	37	0.000893252	0.000763225		
37	38	0.000727471	0.000548312		
38	39	0.000370336	0.000712278		
39	40	0.000765336	0.000566981		
40	41	2.05476e-05	6.61228e-05		
41	42	7.1248e-05	0.000575143		
42	43	0.000539501	0.000202573		
43	44	0.000975146	0.000143729		
44	45	0.000118624	0.000405943		
45	46	0.000712095	0.000921228		
46	47	0.00098837	0.000949158		

Réseau maillé de la Série de test3 : 70 nœuds, 132 lignes (SUITE)					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
48	49	0.000712591	0.000111121		
49	50	0.000281803	0.000717633		
50	51	0.000389387	0.000555404		
51	52	0.000602229	0.000282639		
52	53	0.000318629	0.0003297		
53	54	0.000830951	0.000688965		
54	55	4.19787e-05	0.000596288		
55	56	0.000255946	6.25262e-05		
56	57	0.00066241	0.000327194		
57	58	0.000637669	0.000201911		
58	59	0.000529767	0.000612815		
59	60	0.00034564	0.000648391		
60	61	1.87581e-05	5.7735e-05		
61	62	0.000569619	7.12817e-06		
62	63	6.89333e-06	0.000230394		
63	64	0.000922253	0.000719484		
64	65	0.000341515	0.000204055		
65	66	0.000437117	0.000730902		
66	67	0.000759459	3.93462e-05		
67	68	1.35413e-05	7.80879e-05		
68	69	0.000369047	0.000844492		
69	70	0.000767053	0.000411025		

Réseau maillé de la Série de test3 : 86 nœuds, 164 lignes					
<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
0	1	3.32527e-05	0.000484622	0.00186653	0.00867924
1	2	6.17025e-05	0.00042896	0.00577492	0.00805652
1	3	0.000448225	0.000511857	0.00128795	0.00384086
2	4	0.000826267	0.000555284	0.00514287	0.00280314
2	5	2.32706e-05	0.000803321	0.00963135	0.00421484
3	6	0.00073532	0.00015232	0.00780071	0.00331177
4	7	0.000111888	0.000881633	0.00806817	0.00825498
4	8	0.000366254	0.000482103	0.00693422	0.00230627
5	9	0.000104647	0.000182306	0.00235281	0.00589425
5	10	0.000694163	0.000529982	0.00873511	0.00597585
6	11	0.000568475	0.000853551	0.00905061	0.00420624
7	12	0.00095147	0.00034738	0.00632571	0.00691184
7	13	0.000499701	0.000726428	0.00922362	0.00718111
8	14	0.000353775	0.000965167	0.00375228	0.00854485
9	15	0.000659145	0.000870341	0.00748026	0.00502543
9	16	5.26472e-05	0.000850532	0.00991967	0.00787413
10	17	0.000329856	0.000641322	0.00772129	0.00442463
10	18	0.000494873	0.000450216	0.00763087	0.00908498
11	19	0.000837457	6.54791e-05	0.0023657	0.00461517
12	20	0.000560618	0.000642967	0.00403442	0.00812717
12	21	0.000608134	0.000613681	0.00667202	0.00922953
13	22	0.000504762	4.64783e-05	0.00149863	0.00345544
13	23	0.00089701	0.000353284	0.00132957	0.00601669
14	24	0.000945542	1.42869e-05	0.00349771	0.00714826
14	25	0.000464503	7.1548e-05	0.00623324	0.00496373
15	26	0.000657637	0.000954664	0.0087957	0.00918105
16	27	0.00088913	7.9769e-05	0.0050459	0.00563754

16	28	0.00069345	6.40954e-05	0.00486707	0.00547538
17	29	0.000599146	2.896e-06	0.00969649	0.00611972
18	30	0.000430487	0.000773679	0.0054654	0.00420562
19	31	0.000620791	0.000816442	0.00438425	0.0080917
19	32	0.000408601	0.000118658	0.00327222	0.00723105
20	33	0.000847507	0.000515783	0.00159614	0.0016599
20	34	0.000595552	1.82786e-05	0.00629744	0.00762973
21	35	0.000786568	0.000255279	0.00360102	0.00174137
21	36	0.000258175	0.000777499	0.00686108	0.00447143
22	37	0.000655549	0.000653675	0.0065292	0.00287187
22	38	0.000274466	0.000400456	0.00625612	0.00499164
23	39	0.000814642	0.000568148	0.00970124	0.00828151
23	40	0.000415655	0.000391078	0.00887765	0.00899168
24	41	0.000494848	0.000386193	0.00237063	0.00987967
25	42	0.000530912	0.000228453	0.00619499	0.00255485
25	43	5.95203e-06	0.000440345	0.00602628	0.00810179
26	44	5.71176e-05	0.000797951	0.00292544	0.00186305
26	45	0.000198407	0.000235394	0.00585469	0.00398425
27	46	0.000866536	0.000882758	0.00106717	0.00145033
28	47	0.00041457	0.000434484	0.00353972	0.00346452
28	48	0.000820677	0.000536099	0.0033442	0.00918476
29	49	0.000715093	0.000551913	0.00994094	0.0016031
29	50	0.000992258	0.000259541	0.00870489	0.0074894
30	51	0.000732933	0.000627562	0.00179337	0.00384993
31	52	0.00094663	0.000938803	0.00938206	0.0087666
32	53	0.000850994	9.53577e-05	0.0083185	0.00839405
32	54	0.000529841	0.000355863	0.00185857	0.00339008
33	55	0.000661621	0.000343956	0.00415466	0.00902766
33	56	0.000895869	0.000815072	0.00963076	0.00439043
34	57	3.27408e-05	0.00097628	0.00899314	0.00167152
35	58	3.95145e-05	0.000697013	0.00789106	0.00643457
36	59	0.00037979	0.000799311	0.0098753	0.00672235
37	60	0.000552775	0.000496348	0.00307706	0.00905202
38	61	0.000775028	0.0008006	0.00917774	0.00704197
39	62	0.000709665	1.48523e-05	0.00207085	0.00783616
40	63	0.000649259	0.000840164	0.00826681	0.00912682
40	64	0.000605838	0.000483101	0.00891333	0.00136478
41	65	6.61901e-05	0.000938668	0.00372566	0.00954909
42	66	0.000560473	0.000760169	0.00878951	0.00456441
42	67	0.000184679	0.000857458	0.00953938	0.00151138
43	68	6.11009e-05	7.86903e-05	0.00963736	0.00692252
43	69	9.35426e-05	0.000992278	0.00475869	0.00793689
44	70	0.000418353	0.000875781	0.0099687	0.00677383
44	71	0.000358882	0.000762113	0.00713861	0.00121772
45	72	0.000265711	0.000638469	0.00377902	0.00845473
46	73	0.000453974	0.000610576	0.0069558	0.00279047
47	74	0.000983912	0.00059836	0.00674788	0.0052123
47	75	0.00067705	0.000543724	0.00213483	0.00140512
48	76	0.000393968	0.000767115	0.00793533	0.00582401
49	77	0.000859606	0.000836512	0.00831089	0.00678606
49	78	0.000163555	0.000310558	0.001016	0.00659547
50	79	0.000143826	9.10216e-05	0.00486339	0.00954124
51	80	0.00040373	0.000236452	0.0063802	0.00731438
51	81	0.000834812	0.000295723	0.00252668	0.00448878
52	82	0.000248433	0.000282455	0.00560676	0.00855503
52	83	4.95695e-05	0.000552987	0.00437904	0.00678161
53	84	0.000291234	0.000694243	0.00723219	0.00471334

Réseau maillé de la Série de test3 : 86 nœuds, 164 lignes (SUITE)

<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
54	85	0.000484333	0.000884055	0.0050931	0.00104321
54	86	0.000975076	0.000101796	0.00958445	0.00665344
2	3	0.000142028	0.000325824		
4	5	0.000574257	9.15403e-05		
5	6	0.000356925	0.000216658		
7	8	0.00067138	0.000833575		
8	9	0.000322505	0.000962614		
9	10	0.000527818	0.000356817		
10	11	0.000417403	0.000532619		
12	13	0.000486447	0.00046931		
13	14	0.000276534	0.000588244		
14	15	0.000695269	0.000953208		
15	16	9.37707e-05	0.00015768		
16	17	0.000799513	0.00098694		
17	18	0.000454904	0.000941541		
18	19	0.000312764	0.000263989		
20	21	0.000355529	0.000279942		
21	22	0.00010368	0.000496639		
22	23	0.000189855	0.00077506		
23	24	0.000330214	0.00051236		
24	25	0.000737674	0.000858033		
25	26	0.000869177	0.000155078		
26	27	0.000390652	0.000710327		
27	28	0.000456535	0.0008771		
28	29	0.000179637	0.00073307		
29	30	0.000465343	0.000874906		
30	31	0.000686277	0.000559114		
31	32	3.25862e-05	0.00048579		
33	34	0.000427332	0.000858817		
34	35	0.000751479	0.000350349		
35	36	0.000745839	0.000107008		
36	37	0.000630291	0.000849518		
37	38	0.000603647	0.000820146		
38	39	0.000624578	0.000933861		
39	40	0.000332506	0.000362252		
40	41	0.000791894	0.000201683		
41	42	0.00051733	0.000182546		
42	43	0.00091201	0.000973865		
43	44	5.96456e-05	9.16477e-05		
44	45	0.000706935	0.000524989		
45	46	0.000966554	0.000393212		
46	47	8.41032e-05	0.00099914		
47	48	0.000879003	0.000630157		
48	49	0.00048663	0.000306334		
49	50	0.000488974	0.000238108		
50	51	0.000656683	0.000234813		
51	52	0.000345116	0.000286974		
52	53	8.4331e-05	0.000948763		
53	54	0.00010712	0.000708909		
55	56	7.11613e-05	0.000674519		
56	57	0.00064131	0.000588491		
57	58	0.000857065	0.00055332		
58	59	0.000562356	0.00091671		
59	60	0.000644968	0.000269291		
60	61	0.000441699	0.000611522		

Réseau maillé de la Série de test3 : 86 nœuds, 164 lignes (SUITE)

<i>i</i>	<i>j</i>	R (Ω)	X (Ω)	P (MW)	Q (MVar)
61	62	0.000662503	0.000525802		
62	63	0.000610661	0.000541506		
63	64	0.000155959	9.72911e-05		
64	65	0.00084784	0.000644934		
65	66	0.000335399	0.000504523		
66	67	0.000879747	0.000680516		
67	68	0.000791497	0.000964078		
68	69	0.000629279	0.000898618		
69	70	0.000672987	0.000511904		
70	71	0.000338244	0.000744148		
71	72	0.000186422	0.000979554		
72	73	0.000332639	4.34872e-05		
73	74	0.000532874	0.000894995		
74	75	0.000960197	0.000177842		
75	76	0.000164286	0.000401897		
76	77	0.000789363	0.000826789		
77	78	0.000927699	0.000400025		
78	79	0.000368295	8.36586e-05		
79	80	0.000497316	0.000216135		
80	81	0.000728592	0.000832715		
81	82	0.000720658	0.000608339		
82	83	0.000513231	0.000512155		
83	84	0.000572416	0.00014251		
84	85	0.000410773	0.000245403		
85	86	0.000654414	0.000749017		

RESUME :

Pour faire face aux mutations du paysage énergétique, les réseaux de distribution d'électricité sont soumis à des exigences de fonctionnement avec des indices de fiabilité à garantir. Dans les années à venir, de grands investissements sont prévus pour la construction des réseaux électriques flexibles, cohérents et efficaces, basés sur de nouvelles architectures et des solutions techniques innovantes, adaptatifs à l'essor des énergies renouvelables. En prenant en compte ces besoins industriels sur le développement des réseaux de distribution du futur, nous proposons, dans cette thèse, une approche reposant sur la théorie des graphes et l'optimisation combinatoire pour la conception de nouvelles architectures pour les réseaux de distribution.

Notre démarche consiste à étudier le problème général de recherche d'une architecture optimale qui respecte l'ensemble de contraintes topologiques (redondance) et électrotechniques (courant maximal, plan de tension) selon des critères d'optimisation bien précis : minimisation du coût d'exploitation (OPEX) et minimisation de l'investissement (CAPEX). Ainsi donc, les deux familles des problèmes combinatoires (et leurs relaxations) ont été explorées pour proposer des résolutions efficaces (exactes ou approchées) du problème de planification des réseaux de distribution en utilisant une formulation adaptée. Nous nous sommes intéressés particulièrement aux graphes *2-connexes* et au problème de *flot arborescent avec pertes quadratiques minimales*. Les résultats comparatifs de tests sur les instances de réseaux (fictifs et réels) pour les méthodes proposées ont été présentés.

MOTS CLEFS :

Architectures des Réseaux de Distribution, Smart Grid, Planification, Optimisation Combinatoire, Théorie des Graphes, Modélisation, Programmation Linéaire, Programmation Quadratique, Programmation Convexe, Graphes 2-connexes, Flot Arborescent avec Pertes Quadratiques Minimales.

ABSTRACT:

To cope with the changes in the energy landscape, electrical distribution networks are submitted to operational requirements in order to guarantee reliability indices. In the coming years, big investments are planned for the construction of flexible, consistent and effective electrical networks, based on the new architectures, innovative technical solutions and in response to the development of renewable energy.

Taking into account the industrial needs of the development of future distribution networks, we propose in this thesis an approach based on the graph theory and combinatorial optimization for the design of new architectures for distribution networks. Our approach is to study the general problem of finding an optimal architecture which respects a set of topological (redundancy) and electrical (maximum current, voltage plan) constraints according to precise optimization criteria: minimization of operating cost (OPEX) and minimization of investment (CAPEX).

Thus, the two families of combinatorial problems (and their relaxations) were explored to propose effective resolutions (exact or approximate) of the distribution network planning problem using an adapted formulation. We are particularly interested in 2-connected graphs and the arborescent flow problem with minimum quadratic losses. The comparative results of tests on the network instances (fictional and real) for the proposed methods were presented.

KEYWORDS:

Distribution Networks, Smart Grid, Power Distribution System Planning, Combinatorial Optimization, Graph Theory, Modeling, Linear Programming, Quadratic Programming, Convex Programming, 2-connected graphs, Arborescent Flow with Quadratic Losses.