



**HAL**  
open science

## Simulation de modèles multi-matériaux sur maillage cartésien

Alexia De Brauer

► **To cite this version:**

Alexia De Brauer. Simulation de modèles multi-matériaux sur maillage cartésien. Analyse numérique [math.NA]. Université de Bordeaux, 2015. Français. NNT : 2015BORD0152 . tel-01219748

**HAL Id: tel-01219748**

**<https://theses.hal.science/tel-01219748>**

Submitted on 23 Oct 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



université  
de BORDEAUX



---

## THÈSE

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

École doctorale de Mathématiques et Informatique de Bordeaux

Spécialité : **Mathématiques appliquées et calcul scientifique**

présentée par

**Alexia de BRAUER**

---

## Simulation de modèles multi-matériaux sur maillage cartésien

Directeurs de thèse : Angelo IOLLO et Thomas MILCENT

soutenue le 8 octobre 2015

devant le jury composé de :

- M. Grégoire ALLAIRE, Professeur des Universités, École polytechnique, Président
- M. Frédéric DAU, Maître de Conférences, ENSAM, Examineur
- M. Bruno DESPRÉS, Professeur des Universités, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, Rapporteur
- M. Sergey GAVRILYUK, Professeur des Universités, Université Aix-Marseille III, Examineur
- M. Angelo IOLLO, Professeur des Universités, Université de Bordeaux, Directeur
- M. Raphaël LOUBÈRE, Chargé de Recherche HDR, Université Paul Sabatier, Rapporteur
- M. Thomas MILCENT, Maître de Conférences, ENSAM, Directeur
- M. Rajat MITTAL, Professeur, Johns Hopkins University, Examineur
- M. Yann DOUTRELEAU, Ingénieur en chef de l'armement, DGA/DS/MRIS, Invité



# Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mes directeurs de thèse Angelo Iollo et Thomas Milcent pour leur encadrement pendant ces trois années de thèse et pour leurs multiples conseils. Ils m'ont permis d'avancer sereinement dans mon travail.

Je remercie vivement Bruno Després et Raphaël Loubère d'avoir accepté de rapporter mon manuscrit de thèse dans des délais assez courts. Je remercie également Grégoire Allaire d'avoir présidé le jury de la soutenance, ainsi que Frédéric Dau, Sergey Gavriluk et Rajat Mittal pour y avoir participé.

Les conditions de travail à l'IMB ne seraient pas si agréables sans la bonne ambiance qui règne dans le couloir grâce aux équipes Memphis et Monc. Merci à tous les membres.

Merci à mes différents co-bureaux pour l'aide qu'ils m'ont apportée et l'espace de travail plaisant qu'ils ont su créer chacun à leur manière.

Je n'oublie pas la troupe du midi, doctorants, ingénieurs et post-doctorants pour les discussions animées sur tous les sujets possibles.

Merci à mes amis doctorants Hervé (merci pour les discussions philosophiques sur le monde et la vie de la pause café), Guillaume, Thomas et Alice pour les soirées jeux.

Merci à mes amis de Matméca dispersés dans la France : Marion, Cécile, Thomas, Rémi. Merci aux amis de l'Enseirb que je ne connaissais pas avant de partir de l'école. Merci pour les barbecues et les après-midis jeux.

Je termine en remerciant ma famille qui m'a aidée à aller de l'avant et m'a soutenue pendant ces trois années de thèse.

## Financement

Cette thèse a été financée par la Direction Générale de l'Armement.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1. Un modèle eulérien pour l'élasticité non-linéaire</b>	<b>5</b>
1 Un modèle pour les fluides . . . . .	5
1.1 Conservation de la masse . . . . .	6
1.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	6
1.3 Conservation de l'énergie totale . . . . .	7
1.4 Équation d'état pour les fluides . . . . .	7
1.4.1 Gaz parfaits . . . . .	8
1.4.2 Gaz de van der Waals . . . . .	8
1.4.3 Gaz raides . . . . .	8
2 Cinématique du solide en grandes déformations . . . . .	8
2.1 Transformations . . . . .	9
2.2 Mesure de la déformation . . . . .	10
2.3 Vitesse de déformation . . . . .	11
2.4 Contraintes . . . . .	12
2.5 Formulation eulérienne . . . . .	13
3 Hyperélasticité . . . . .	14
3.1 Condition d'entropie . . . . .	14
3.2 Principe d'indifférence matérielle et isotropie . . . . .	16
3.3 Élasticité eulérienne . . . . .	17
3.4 Décomposition de l'énergie . . . . .	19
3.5 Lois de comportement . . . . .	19
4 Équations pour les solides élastiques non-linéaires . . . . .	20
4.1 Système d'équations 2D . . . . .	21
4.2 Système d'équations 3D . . . . .	22
5 Hyperbolicité et vitesses des ondes . . . . .	24
5.1 Résolution des équations d'Euler . . . . .	24
5.1.1 Hyperbolicité . . . . .	24
5.1.2 Nature des ondes . . . . .	25
5.1.3 Le problème de Riemann . . . . .	28
5.2 Vitesses des ondes pour le modèle néo-hookéen . . . . .	29
5.2.1 Modèle 2D . . . . .	29

5.2.2	Modèle 3D . . . . .	30
<b>Chapitre 2. Une méthode de résolution des écoulements multi-matériaux</b>		<b>35</b>
1	Résolution du système . . . . .	35
1.1	Intégration en temps . . . . .	36
1.2	Problème de Riemann et méthode de Godunov . . . . .	36
1.3	Solveur HLLC . . . . .	38
2	Gestion des interfaces . . . . .	39
2.1	Capture d'interfaces : la méthode level set . . . . .	39
2.2	Traitement par interface diffuse . . . . .	40
2.3	Traitement sharp de l'interface . . . . .	41
2.3.1	La méthode Ghost Fluid . . . . .	42
2.3.2	La méthode multi-matériaux HLLC . . . . .	43
3	Schéma numérique pour l'élasticité 2D . . . . .	44
3.1	Mise en place du solveur HLLC pour le modèle . . . . .	44
3.1.1	Solveur dans un même matériau . . . . .	47
3.1.2	Solveur multi-matériaux . . . . .	48
3.2	Reconstruction des pentes de type MUSCL . . . . .	49
3.2.1	Quelques limiteurs de pente . . . . .	50
3.2.2	Reconstruction à l'interface entre deux matériaux . . . . .	50
4	Extension du schéma numérique pour l'élasticité en 3D . . . . .	51
4.1	Mise en place du solveur HLLC pour le modèle . . . . .	51
4.1.1	Solveur dans un même matériau . . . . .	54
4.1.2	Solveur multi-matériaux . . . . .	55
4.2	Représentation des matériaux dans le code . . . . .	56
5	Les conditions aux limites . . . . .	58
5.1	Les conditions de bord . . . . .	58
5.2	Le demi-problème de Riemann multi-matériaux . . . . .	59
6	Parallélisation du code . . . . .	61
6.1	Stencils à communiquer . . . . .	61
6.2	Performance . . . . .	62
6.2.1	Scalabilité faible . . . . .	63
6.2.2	Scalabilité forte . . . . .	64
6.3	Illustration . . . . .	65
<b>Chapitre 3. Validations et extensions</b>		<b>69</b>
1	Validation du code 3D . . . . .	69
1.1	Simulation dans une direction . . . . .	69
1.2	Interactions choc/bulle . . . . .	73
1.2.1	Interaction air/bulle d'hélium . . . . .	73
1.2.2	Interaction eau/bulle d'air . . . . .	76
1.3	Impacts . . . . .	78
1.3.1	Impact rigide . . . . .	78

TABLE DES MATIÈRES

---

1.3.2	Limite fluide . . . . .	79
2	Les instabilités de Richtmyer-Meshkov . . . . .	82
2.1	Quelques explications pour le cas entre deux fluides . . . . .	82
2.2	Instabilités sur les interfaces élastiques . . . . .	88
2.2.1	Résultats pour les interfaces élastique/élastique . . . . .	88
2.2.2	Résultats pour les interfaces élastique/fluide . . . . .	90
3	Le rebond élastique . . . . .	92
3.1	Détachement des interfaces . . . . .	92
3.2	Gestion des fonctions level set . . . . .	93
3.3	Simulations . . . . .	94
3.3.1	Rebonds en deux dimensions . . . . .	94
3.3.2	Rebond en trois dimensions . . . . .	100
<b>Chapitre 4. La plasticité</b>		<b>103</b>
1	Description . . . . .	103
2	Théorie de l'écoulement plastique . . . . .	104
3	Critère de plasticité . . . . .	105
3.1	Le critère de von Mises . . . . .	105
3.2	Réduction à deux dimensions . . . . .	106
4	Le modèle de plasticité . . . . .	107
4.1	Formule de plasticité eulérienne . . . . .	108
4.2	Condition d'entropie . . . . .	109
4.3	Consistance . . . . .	111
5	Mise en œuvre . . . . .	111
5.1	Quelques propriétés sur l'EDO plastique . . . . .	112
5.2	Intégration de l'EDO . . . . .	113
6	Résultats . . . . .	114
6.1	Validation sur un cas 1D . . . . .	114
6.2	Simulations 2D . . . . .	118
<b>Conclusion</b>		<b>125</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>128</b>



# Introduction

## Contexte

Les écoulements entre plusieurs matériaux génèrent des phénomènes complexes et non-stationnaires. La complexité provient aussi bien de la géométrie des interfaces entre les matériaux que de la dynamique rapide de ceux-ci. Dans le cadre d'interactions fluide/structure telles que des impacts entre deux objets immergés dans un fluide, les phénomènes sont d'autant plus importants que les ondes se propagent à très grande vitesse dans les matériaux solides. Il est alors délicat d'obtenir des résultats d'expériences du fait des vitesses d'impact mises en jeu. On peut cependant retrouver certaines expériences d'impacts dans la littérature : [33] pour un test de pénétration d'un projectile dans une plaque, [38] pour une étude de la propagation des ondes élastiques dans une longue barre axisymétrique.

La modélisation numérique vient en appui des expériences et permet de simuler des événements extrêmes tels que des détonations [44] ou des explosions confinées [55] difficilement accessibles à l'expérimentateur. La difficulté provient du choix du modèle pour décrire les comportements des matériaux et de sa validation par rapport à des données expérimentales. Une autre difficulté vient de l'utilisation de méthodes de discrétisation et de schémas numériques adaptés aux problèmes considérés. Il faut, notamment, construire des schémas suffisamment robustes pour traiter les changements importants de topologie des milieux pour des simulations de grandes déformations. Un aspect numérique important est également le passage des méthodes aux problèmes en trois dimensions.

Avec la disponibilité d'une puissance de calcul parallèle importante, les simulations peuvent se faire avec des résolutions de plus en plus fines pour des temps d'exécution raisonnables. La condition requise est que les méthodes numériques soient écrites de façon à ce que les codes de calcul soient facilement parallélisables et qu'ils offrent une scalabilité optimale.

## Modélisation

Le travail présenté dans ce manuscrit fait suite aux travaux présentés par Iollo *et al.* [39] et aux travaux de thèse de Gorsse [29]. On présente une approche pour modéliser les écoulements multi-matériaux en grandes déformations. Le but est de pouvoir décrire l'évolution des différents matériaux à l'aide d'un modèle unique. Les milieux sont seulement différenciés par leurs équations d'état. On s'intéresse en particulier aux fluides et aux solides déformables soumis à l'élasticité non-linéaire, loin du cadre des petites perturbations. Les matériaux sont considérés

compressibles, non-visqueux, non-miscibles et purs dans leurs phases. L'interface qui les sépare est d'épaisseur nulle. Par la suite, on utilise l'anglicisme d'interface "sharp".

La modélisation des milieux continus passe par les notions de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie caractérisées par les équations d'Euler compressibles. La description du mouvement des solides se fait par la notion de caractéristiques directes qui lient la configuration de référence du milieu à sa configuration déformée en formulation lagrangienne. Afin d'obtenir un seul modèle, les équations de conservation et l'équation décrivant l'évolution des déformations du solide sont écrites dans le formalisme eulérien.

Les fluides sont régis par une loi de comportement très générale qui permet, suivant la valeur de certains coefficients intrinsèques au milieu, de modéliser aussi bien les gaz que les liquides. Les solides sont décrits comme étant isotropes. L'élasticité non-linéaire des matériaux implique une description en fonction de critères énergétiques, notamment, que les contraintes des solides dépendent de leur énergie.

Une approche traditionnelle pour simuler des écoulements multi-matériaux est d'utiliser des maillages non-structurés adaptés à la géométrie de l'interface entre les matériaux. Le maillage se déforme avec l'écoulement. Il est alors aisé sur ce type de grilles d'imposer les bonnes conditions au bord et de suivre l'interface dans son mouvement. Un inconvénient majeur de ces méthodes est le besoin de remailler le domaine de calcul quand les mailles deviennent distordues. Une autre approche consiste à considérer un maillage cartésien sur le domaine de calcul. Le maillage est fixe et indépendant de la topologie des interfaces. La génération des maillages est donc trivial. La discrétisation des équations régissant l'écoulement est simplifiée et moins coûteuse que pour un maillage adapté et les codes de calcul se parallélisent aisément. Un désavantage de ces méthodes est que l'interface est immergée dans la grille. Il faut donc rajouter une méthode pour repérer l'interface et y imposer les conditions de bord correctes.

Le travail de cette thèse utilise la dernière approche. Ce choix est dicté par le besoin de simuler des matériaux en grandes déformations, évoluant rapidement et avec des topologies complexes.

## Plan de la thèse

Le premier chapitre est consacré à la présentation d'un modèle d'écoulement multi-matériaux pour les fluides et les solides élastiques en formulation eulérienne. Il y est rappelé les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie que l'on retrouve dans les équations d'Euler décrivant les fluides parfaits compressibles. On retrace également les bases de la description du mouvement des solides en grandes déformations. On présente la description du comportement hyperélastique en formulation eulérienne. Une loi de comportement permettant de décrire aussi bien les gaz et les fluides que les solides soumis à l'élasticité non-linéaire est exposée pour les cas de deux et trois dimensions. Finalement, on décrit le problème de Riemann et les différentes ondes qui en émergent dans le cas des équations d'Euler pour un fluide parfait et pour le modèle d'hyperélasticité.

Le deuxième chapitre traite de la méthode numérique employée pour résoudre le système d'équations dépeint au chapitre précédent. Le schéma numérique utilise une méthode de volumes

## Introduction

---

finis : le solveur de Riemann approché HLLC. On présente différentes approches de la littérature pour gérer le problème d'interface sur maillages cartésiens. On détaille la méthode choisie pour les modèles en deux et trois dimensions en explicitant les conditions à l'interface. On présente un demi-problème de Riemann adapté de la méthode numérique pour modéliser certaines conditions de bord. Finalement, on montre les performances des codes parallélisés.

Dans le troisième chapitre sont présentées des validations du schéma numérique avec le code en trois dimensions. On utilise des cas test 1D de type tube à choc pour des interfaces solide/solide puis des cas test 3D d'interactions choc/bulle pour des interfaces fluide/fluide et des cas d'impacts pour des interfaces fluide/solide. On présente ensuite une étude des instabilités d'interface dites de Richtmyer-Meshkov dans le cas de solides élastiques. Finalement, on détaille une modélisation simplifiée pour permettre le détachement de deux objets et ainsi d'utiliser leur propriété élastique pour les faire rebondir l'un sur l'autre.

Dans le dernier chapitre, le modèle d'élasticité non-linéaire présenté au premier chapitre est étendu pour prendre en compte les déformations plastiques des matériaux. On se place dans le cadre de la plasticité parfaite. On choisit une loi de comportement plastique simple basée sur le critère de von Mises. On montre que cette loi vérifie bien les hypothèses d'un écoulement plastique. La méthode de résolution de l'équation plastique est validée sur un cas test 1D. On présente également des simulations sur des cas en deux dimensions.



# Chapitre 1

## Un modèle eulérien pour l'élasticité non-linéaire

La modélisation d'écoulements multi-matériaux passe par une description adéquate du comportement des matériaux en jeu. Dans ce chapitre est présenté un modèle pour décrire le comportement aussi bien des fluides et que des solides élastiques en un unique système d'équations. Les matériaux sont supposés compressibles, non-visqueux et soumis à de grandes déformations. Ils sont non miscibles et purs dans leurs phases. Chaque matériau est régi par sa propre équation d'état. En particulier, les solides suivent les lois de l'élasticité non-linéaire. Le modèle est écrit dans le formalisme eulérien. L'approche eulérienne pour la modélisation de matériaux hyperélastiques a fait l'objet d'études dans les travaux de Plohr & Sharp [63], Miller & Collela [55] et plus récemment dans les travaux de Cottet *et al.* [13], Gavrilyuk *et al.* [25], Barton *et al.* [7] et Iollo *et al.* [39]. Il existe d'autres approches telles que les méthodes type ALE de Galera *et al.* [23] ou les méthodes lagrangiennes développées par Kluth & Després [46].

La mécanique des milieux continus est basée sur les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. On rappelle dans ce chapitre la caractérisation de ces principes ainsi que la description du mouvement des solides en grandes déformations. On présente la description du comportement des solides hyperélastiques en formulation eulérienne. Finalement, on caractérise les ondes se propageant dans les milieux.

### 1 Un modèle pour les fluides

Il existe deux manières de décrire le mouvement d'un milieu continu : soit en reliant les grandeurs caractérisant le mouvement à un point matériel, c'est la description lagrangienne, soit en les reliant à un point géométrique de l'espace, c'est la description eulérienne.

Soit  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  le domaine initial d'un milieu continu. Le domaine  $\Omega_0$  se transforme au temps  $t \in \mathbb{R}^+$  en un domaine actuel  $\Omega_t = X(\Omega_0, t)$  où  $X : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  désigne une transformation. Le champ de vitesse  $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  de l'écoulement se traduit alors par  $u(X, t) = \partial_t X$ . On définit  $x \in \Omega_t$  la variable en espace sur le domaine déformé. On note  $\partial\Omega_t$  le bord du domaine  $\Omega_t$ . Le formalisme lagrangien consiste à écrire les grandeurs par rapport au domaine initial  $\Omega_0$ . La description eulérienne utilise les variables dans la configuration actuelle  $\Omega_t$ .

On désigne  $f$  comme une fonction représentant une quantité quelconque. On rappelle la formule classique de Reynolds pour les volumes :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} f(x, t) \, dx \right) = \int_{\Omega_t} (\partial_t f + \nabla_x \cdot (fu)) \, dx \quad (1.1)$$

On note  $\frac{D}{Dt}$  la dérivée particulaire qui permet de lier les formalismes lagrangien et eulérien et qui est définie par :

$$\frac{Df}{Dt} = \partial_t f + u \cdot \nabla_x f \quad (1.2)$$

L'état d'un milieu continu est caractérisé par sa masse volumique, sa pression, sa vitesse et son énergie interne. Les fluides sont, en général, modélisés dans le formalisme eulérien. Les équations d'Euler compressibles permettent de décrire l'écoulement d'un fluide parfait.

### 1.1 Conservation de la masse

L'équation de continuité (ou de conservation de la masse) se traduit par le fait que dans un volume de contrôle  $\Omega_t$  la variation au cours du temps de la masse est nulle. En notant  $\rho$  la masse volumique, il en découle que :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} \rho(x, t) \, dx \right) = 0$$

Grâce à la formule de Reynolds (1.1) en remplaçant  $f$  par  $\rho$ , l'équation précédente devient

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} \rho(x, t) \, dx \right) = \int_{\Omega_t} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) \, dx = 0$$

Cette égalité étant vraie quel que soit le volume  $\Omega_t$ , l'équation locale s'écrit

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0 \quad \text{Équation de continuité} \quad (1.3)$$

### 1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Conserver la quantité de mouvement revient à écrire le principe fondamental de la dynamique, à savoir que la variation de cette quantité de mouvement, caractérisée par  $\rho u$ , par rapport au temps est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} \rho(x, t) u(x, t) \, dx \right) = \int_{\partial \Omega_t} \sigma(x, t) n(x, t) \, ds + \int_{\Omega_t} f_v(x, t) \, dx$$

où  $f_v(x, t)$  représente les forces volumiques et  $\sigma(x, t)n(x, t)$  traduit les forces surfaciques avec  $\sigma$  le tenseur (symétrique) des contraintes de Cauchy et  $n$  la normale à la surface. En appliquant la formule (1.1) sur le membre de gauche avec  $f = \rho u$  et en utilisant le théorème de la divergence sur le membre de droite, l'équation précédente devient

$$\int_{\Omega_t} \partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) \, dx = \int_{\Omega_t} \nabla_x \cdot \sigma(x, t) + f_v(x, t) \, dx$$

Avec les mêmes arguments sur  $\Omega_t$  que précédemment, l'équation locale s'écrit :

$$\partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) = \nabla_x \cdot \sigma + f_v \quad \text{Conservation de la quantité de mouvement} \quad (1.4)$$

### 1.3 Conservation de l'énergie totale

L'énergie totale par unité de masse, notée  $e$ , se décompose en une énergie interne  $\varepsilon$  et une énergie cinétique :

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2}|u|^2 \quad (1.5)$$

Le premier principe de la thermodynamique stipule que la variation temporelle de l'énergie totale est égale à la somme de la puissance des forces extérieures et de la puissance calorifique reçues par le système. En considérant une transformation adiabatique, ce principe s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} \rho(x, t) e(x, t) dx \right) = \int_{\partial\Omega_t} (\sigma(x, t) n(x, t)) \cdot u(x, t) ds + \int_{\Omega_t} f_v(x, t) \cdot u(x, t) dx$$

En utilisant la formule de Reynolds (1.1), la relation  $(\sigma n) \cdot u = (\sigma^\top u) \cdot n$  et le théorème de la divergence, l'équation locale s'écrit :

$$\partial_t(\rho e) + \nabla_x \cdot (\rho e u) = \nabla_x \cdot (\sigma^\top u) + f_v \cdot u \quad \text{Conservation de l'énergie} \quad (1.6)$$

### 1.4 Équation d'état pour les fluides

Pour fermer les systèmes d'équations *i.e.* avoir autant d'inconnues que d'équations, il faut définir des équations d'état (ou lois de comportement). Dans le cas des fluides, ces équations sont issues de la thermodynamique des gaz.

D'après le premier principe de la thermodynamique, pour un fluide au repos ( $u = 0$ ), la variation d'énergie interne est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur sous forme de chaleur et de travail, soit :

$$de = d\varepsilon = \delta Q + \delta W \quad (1.7)$$

Sachant que les quantités de chaleur et de travail s'écrivent, respectivement,  $\delta Q = Tds$ , avec  $T$  la température et  $s$  l'entropie, et  $\delta W = -pdV = \frac{p}{\rho^2}d\rho$ , avec  $p$  la pression et  $V = \frac{1}{\rho}$  le volume, l'égalité précédente devient :

$$de = d\varepsilon = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho \quad (1.8)$$

On considère la loi générale pour l'énergie interne en fonction de la densité  $\rho$  et de l'entropie  $s$  comme suit :

$$\varepsilon(\rho, s) = \frac{\kappa(s)}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{\rho} - b \right)^{1-\gamma} - a\rho + \frac{p_\infty}{\rho} \quad (1.9)$$

où  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  est la constante polytropique *i.e.* le ratio des chaleurs spécifiques à pression et volume constants, respectivement,  $\kappa(s) = e^{\frac{s-s_0}{C_v}}$  avec  $s_0$  une entropie de référence,  $a$  et  $b$  les coefficients du modèle d'un gaz réel (modèle de van der Waals) et  $p_\infty$  une constante liée aux gaz raides. Grâce aux deux équations précédentes, les expressions pour la température  $T$  et la pression  $p$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} T(\rho, s) &= \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right|_{\rho=cte} = \frac{\kappa(s)}{C_v(\gamma - 1)} \left( \frac{1}{\rho} - b \right)^{1-\gamma} \\ p(\rho, s) &= \rho^2 \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right|_{s=cte} = \kappa(s) \left( \frac{1}{\rho} - b \right)^{-\gamma} - a\rho^2 - p_\infty \end{aligned} \quad (1.10)$$

Grâce à ces expressions et en fonction des valeurs des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $p_\infty$ , on peut retrouver des formules bien connues de certains modèles de gaz.

### 1.4.1 Gaz parfaits

Le modèle de gaz parfait se base sur l'hypothèse que les molécules n'interagissent pas entre elles et que leur taille est négligeable par rapport aux distances intermoléculaires. Tous les gaz réels peuvent être assimilés à des gaz parfaits pour certaines conditions de pression suffisamment basse et de température suffisamment élevée. On retrouve la loi des gaz parfaits en prenant  $a = b = p_\infty = 0$ . On obtient alors :

$$\varepsilon(\rho, p) = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \quad \text{et} \quad p(\rho, T) = \rho RT \quad (1.11)$$

où  $R = C_p - C_v$  est la constante universelle des gaz parfaits.

### 1.4.2 Gaz de van der Waals

Le modèle de gaz de van der Waals se rapproche du comportement d'un gaz réel. Il prend en compte le volume occupé par les molécules que l'on appelle covolume  $b$  et qui correspond au volume minimal incompressible du gaz, d'où  $V_{\text{parfait}} < V_{\text{réel}}$ . Ce modèle considère aussi les interactions existantes entre les molécules à travers la pression de cohésion  $a$ , d'où  $p_{\text{réel}} < p_{\text{parfait}}$ . Le modèle des gaz parfaits constitue le cas limite du modèle de van der Waals à basse pression et haute température. On retrouve les lois de van der Waals pour  $p_\infty = 0$  :

$$\varepsilon(\rho, p) = \frac{(p + a\rho^2)(1 - b\rho)}{(\gamma - 1)\rho} - a\rho \quad \text{et} \quad p(\rho, T) = \frac{\rho RT}{1 - b\rho} - a\rho^2 \quad (1.12)$$

L'expression de  $p$  peut se réécrire sous une forme plus connue en prenant  $V = \frac{1}{\rho}$  :

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (1.13)$$

### 1.4.3 Gaz raides

La loi des gaz raides permet de modéliser des fluides très peu compressibles comme par exemple l'eau et les liquides en général. Cette propriété est transmise au modèle à travers la constante  $p_\infty$ . En prenant  $a = b = 0$ , on obtient les lois pour les gaz raides :

$$\varepsilon(\rho, p) = \frac{p + \gamma p_\infty}{(\gamma - 1)\rho} \quad \text{et} \quad p(\rho, T) = \rho RT - p_\infty \quad (1.14)$$

## 2 Cinématique du solide en grandes déformations

L'approche conventionnelle pour modéliser les solides en grandes déformations est le formalisme lagrangien. Ce formalisme consiste à suivre des points matériels du solide dans leur mouvement au cours du temps.

On rappelle dans cette section la description du mouvement d'un milieu continu et notamment l'évaluation de la déformation au sein d'un solide loin du cadre des petites perturbations. Le terme déformation caractérise les transformations qui se traduisent par des variations de

## 2. Cinématique du solide en grandes déformations

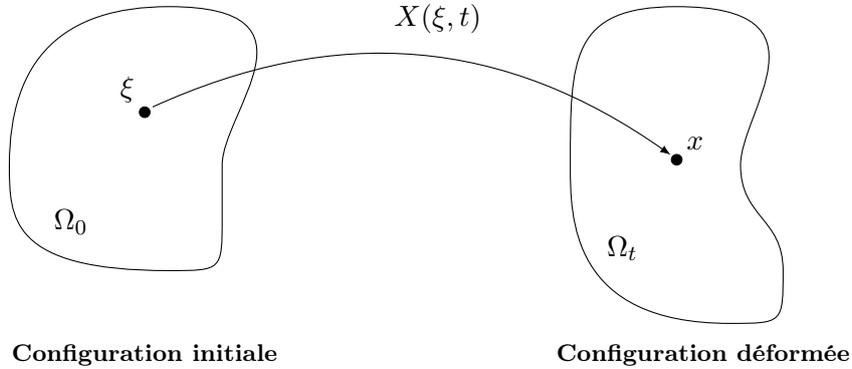
---

distance entre deux points matériels du solide ou des variations d'angles entre deux couples de points matériels.

Soit un domaine de référence (ou initial)  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  qui se transforme au temps  $t$  en un domaine déformé (ou actuel)  $\Omega_t$ . Pour décrire l'évolution d'un milieu continu dans le formalisme lagrangien, on définit les caractéristiques directes  $X$ , voir Figure 1.1, comme la position  $x \in \Omega_t$  au temps  $t$  d'une particule matérielle située initialement en  $\xi \in \Omega_0$  :

$$\begin{aligned} X : \Omega_0 \times [0, T] &\longrightarrow \Omega_t \\ (\xi, t) &\longmapsto x = X(\xi, t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ces caractéristiques représentent une transformation bijective et bicontinue. Elles contiennent l'historique des déformations du solide au temps  $t$ .



**Figure 1.1** – Caractéristique directe.

Pour décrire la transformation locale d'un solide continu, on s'intéresse au mouvement de deux points matériels proches  $\xi_p$  et  $\xi_q$  tels qu'ils forment le vecteur élémentaire  $d\xi = \xi_p - \xi_q$  dans la configuration de référence. Dans la configuration déformée, ce vecteur, noté  $dx$ , se détermine comme suit :

$$dx = x_p - x_q = X(\xi_q + d\xi, t) - X(\xi_q, t) = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + o(d\xi)$$

On définit alors le tenseur  $F$  :

$$F = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \nabla_{\xi} X(\xi, t) \quad (1.16)$$

comme le tenseur gradient de la transformation ou gradient des déformations. Ce tenseur décrit les transformations locales (au premier ordre) du solide mais ne représente pas une déformation en tant que telle. Par exemple, dans le cas d'une rotation rigide, le tenseur  $F$  est égal à une matrice de rotation ( $F \neq 0$ ) alors que la déformation est nulle.

### 2.1 Transformations

Le jacobien de la transformation, noté  $J$ , correspond à la variation entre un élément de volume  $dV_0$  dans la configuration initiale et son équivalent  $dV$  dans la configuration déformée telle que

$$dV = J dV_0 \quad \text{et} \quad J = \det(F) \quad (1.17)$$

On note que la transformation  $X(\xi, t)$  étant bijective,  $J > 0$  c'est-à-dire que le volume ne peut ni s'annuler ni devenir négatif au cours de la transformation. Si  $J = 1$  pour tout temps alors le matériau est incompressible.

En prenant  $\rho_0$  et  $\rho$  les masses volumiques dans la configuration de référence et la configuration déformée, respectivement, par conservation de la masse, on peut écrire

$$\rho_0(\xi)dV_0 = \rho(X(\xi, t), t)dV = \rho(X(\xi, t), t)JdV_0$$

Il vient de ce résultat que le jacobien  $J$  peut être réécrit comme le rapport entre les masses volumiques à l'instant initial et au temps  $t$  :

$$J = \frac{\rho_0(\xi)}{\rho(X(\xi, t), t)} \quad (1.18)$$

Cette définition permet par la suite d'effectuer des changements de variables entre configurations initiale et déformée dans les intégrales de volume.

L'évolution d'un élément de surface  $dS_0$  de la configuration de référence en son image  $dS$  dans la configuration actuelle est donnée par la formule de Nanson, à savoir

$$ndS = JF^{-T}n_0dS_0 \quad (1.19)$$

où  $n_0$  et  $n$  sont les normales aux surfaces  $dS_0$  et  $dS$  dans leurs configurations respectives et le terme  $JF^{-T} = \text{Cof}(F)$  est la matrice des cofacteurs du tenseur  $F$ . Cette formule est utilisée pour les changements de variables entre configurations initiale et actuelle dans les intégrales de surface.

## 2.2 Mesure de la déformation

Pour caractériser les changements de forme au sein du solide, on s'intéresse à la variation de longueur et d'angle de deux vecteurs élémentaires, respectivement,  $dx$  et  $dx'$  dans la configuration déformée en fonction de leurs équivalents  $d\xi$  et  $d\xi'$  dans la configuration de référence. On calcule donc leur produit scalaire :

$$dx^\top dx' = (Fd\xi)^\top Fd\xi' = d\xi^\top \underbrace{F^\top F}_C d\xi'$$

Ce résultat permet de faire apparaître le tenseur  $C = F^\top F$  appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green ou tenseur de Cauchy-Green à droite. Le tenseur  $C$  mesure la déformation en terme de changement de forme et de volume. En effet, si le solide subit une transformation rigide alors le tenseur  $F$  est une matrice de rotation et donc  $C = F^\top F = \text{Id}$ . Le solide est non-déformé. On note que le tenseur  $C$  est symétrique et que  $\det(C) = \det(F)^2 = J^2$ .

Pour caractériser les allongements, on s'intéresse à la différence entre les produits scalaires des deux vecteurs élémentaires dans les configurations finale et initiale, respectivement :

$$dx^\top dx' - d\xi^\top d\xi' = d\xi^\top C d\xi' - d\xi^\top d\xi' = d\xi^\top \underbrace{(C - \text{Id})}_{2E} d\xi'$$

## 2. Cinématique du solide en grandes déformations

---

Il apparaît alors le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $E = \frac{1}{2}(C - \text{Id})$ . Ce tenseur est symétrique. On remarque que, dans le cas d'une rotation rigide,  $C = \text{Id}$  et donc  $E = 0$ . Le tenseur  $E$  décrit bien la déformation du solide.

Les deux tenseurs  $C$  et  $E$  s'appliquent sur des vecteurs de la configuration de référence. Ils sont alors appelés tenseurs lagrangiens.

À l'inverse, on peut définir les équivalents des tenseurs  $C$  et  $E$  dans la configuration déformée. On calcule le produit scalaire de deux vecteurs élémentaires de longueurs respectives  $d\xi$  et  $d\xi'$  dans la configuration de référence :

$$d\xi^\top d\xi' = (F^{-1}dx)^\top F^{-1}dx' = dx^\top F^{-\top} F^{-1} dx' = dx^\top \underbrace{(FF^\top)}_B^{-1} dx'$$

Il apparaît le tenseur  $B = FF^\top$  appelé tenseur de Finger ou tenseur de Cauchy-Green à gauche associé au gradient des déformations  $F$ . On remarque, qu'à l'instar du tenseur  $C$ , le tenseur  $B$  est symétrique. Il sert à décrire les déformations par rapport à la configuration déformée.

Pour caractériser les allongements, on réécrit la différence entre les produits scalaires en gardant cette fois les quantités sur la configuration déformée :

$$dx^\top dx' - d\xi^\top d\xi' = dx^\top dx' - d\xi^\top B^{-1} d\xi' = dx^\top \underbrace{(\text{Id} - B^{-1})}_{2A} dx'$$

Il apparaît alors le tenseur des déformations d'Almansi  $A = \frac{1}{2}(\text{Id} - B^{-1})$  qui mesure la déformation au sein du solide dans la configuration actuelle. Il exprime les mêmes variations géométriques que le tenseur des déformations  $E$ .

Les deux tenseurs  $B$  et  $A$  s'appliquent sur des vecteurs de la configuration déformée. Ils sont alors appelés tenseurs eulériens.

### 2.3 Vitesse de déformation

On cherche à définir la vitesse de déformation. On peut faire le lien entre les caractéristiques  $X$  et le champ de vitesse  $u$  par la relation :

$$\begin{cases} \partial_t X(\xi, t) = u(X(\xi, t), t) \\ X(\xi, 0) = \xi \end{cases} \quad (1.20)$$

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur  $dx$  dans la configuration déformée s'écrit alors

$$\begin{aligned} \partial_t(dx) &= \partial_t(F d\xi) = \partial_t(F) d\xi = \partial_t(F) F^{-1} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx \end{aligned}$$

L'équation précédente permet alors d'écrire

$$\partial_t F = [\nabla_x u] F = \nabla_\xi u \quad (1.21)$$

Le tenseur  $[\nabla_x u]$  est appelé tenseur gradient des vitesses de déformation.

## 2.4 Contraintes

On considère un solide déformable fictivement découpé en deux sous-structures. En plus des efforts extérieurs s'exerçant sur chaque structure, il s'exerce une force de surface interne des structures l'une sur l'autre au niveau de leur frontière commune. On considère un élément de surface  $dS$  de cette frontière de normale  $n$  dans la configuration déformée. Sur cet élément s'exerce un effort élémentaire  $df$ . Le vecteur des contraintes de Cauchy  $\tau$  se définit par

$$\tau(n) = \frac{df}{dS} \quad (1.22)$$

Ce vecteur ne dépend que de la normale  $n$  et ce de façon linéaire d'après le principe d'action-réaction. D'après le théorème de Cauchy, sous la condition que le champ des efforts appliqués soit continu, il existe un tenseur symétrique  $\sigma$  d'ordre 2 tel que

$$\tau(n) = \sigma n \quad (1.23)$$

Le tenseur  $\sigma$  est le tenseur des contraintes de Cauchy. Chaque colonne  $j$  de ce tenseur représente le vecteur  $\tau(e_j)$  avec  $e_j$  un vecteur de base. La force élémentaire  $df$  agissant sur la surface élémentaire  $dS$  de normale  $n$  dans l'état déformé s'écrit alors

$$df = \sigma n dS \quad (1.24)$$

Il est alors possible de définir d'autres tenseurs tel que le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathcal{T}$  qui relie la force élémentaire dans la configuration déformée à la surface élémentaire  $dS_0$  de normale  $n_0$  dans la configuration de référence :

$$df = \mathcal{T} n_0 dS_0 \quad (1.25)$$

Le tenseur  $\mathcal{T}$  lie les deux configurations initiale et actuelle. D'après la formule de Nanson (voir Section 2.1), on peut faire le lien entre les tenseurs  $\mathcal{T}$  et  $\sigma$  par la relation

$$\mathcal{T} = J \sigma F^{-T} \quad (1.26)$$

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\Sigma$  relie la force élémentaire  $df_0 = F \cdot df$  dans l'état initial à la surface élémentaire  $dS_0$  de normale  $n_0$  également dans l'état initial :

$$F \cdot df = \Sigma \cdot n_0 dS_0 \quad (1.27)$$

On peut alors écrire le tenseur  $\Sigma$  en fonction du premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathcal{T}$  et du tenseur de Cauchy  $\sigma$  :  $\Sigma = F^{-1} \mathcal{T} = J F^{-1} \sigma F^{-T}$ .

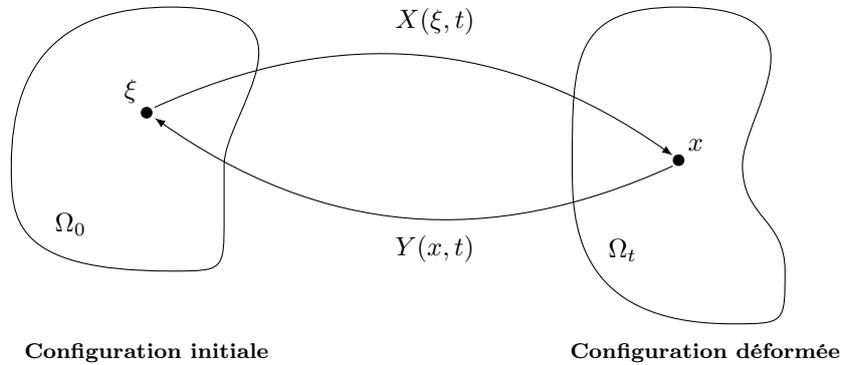
Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  contient les vecteurs contraintes dans la configuration actuelle en fonction de la normale dans cette même configuration. Le tenseur  $\sigma$  est donc dit eulérien. À l'inverse, le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\Sigma$  permet d'obtenir les vecteurs contraintes dans la configuration de référence en fonction de la normale dans cette même configuration. Le tenseur  $\Sigma$  est dit lagrangien.

## 2.5 Formulation eulérienne

Pour décrire le mouvement par rapport à la configuration déformée  $\Omega_t$ , l'équation du champ de vitesse (1.20) doit être redéfinie en formulation eulérienne. Pour ce faire, on se rapporte à l'article de Cottet *et al.* [13] qui introduisent les caractéristiques rétrogrades  $Y$  définissant l'image à l'instant initial d'un point matériel  $x$  de l'état déformé  $\Omega_t$  :

$$\begin{aligned} Y : \Omega_t \times [0, T] &\longrightarrow \Omega_0 \\ (x, t) &\longmapsto Y(x, t) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ces caractéristiques enregistrent la position dans la configuration de référence  $\Omega_0$  d'une particule matérielle située en  $x \in \Omega_t$  à l'instant  $t$  que l'on considère, voir Figure 1.2.



**Figure 1.2** – Caractéristiques directe et rétrograde.

Puisque la transformation  $X$  (1.15) est bijective, on a bien  $Y = X^{-1}$ . Les caractéristiques directes  $X$  et rétrogrades  $Y$  sont donc liées les unes aux autres par les relations :

$$X(Y(x, t), t) = x \quad \text{et} \quad Y(X(\xi, t), t) = \xi \quad (1.29)$$

En dérivant l'une ou l'autre de ces relations par rapport au temps  $t$ , on trouve l'équivalent eulérien de l'équation (1.20) sur le champ de vitesse sous la forme d'une équation de transport sur les caractéristiques rétrogrades :

$$\begin{cases} Y_t(x, t) + u(x, t) \cdot \nabla_x Y(x, t) = 0 \\ Y(x, 0) = x \end{cases} \quad (1.30)$$

En dérivant ces mêmes relations par rapport à  $x$  ou  $\xi$ , respectivement, on retrouve l'expression du tenseur gradient des déformations :

$$F = [\nabla_\xi X(\xi, t)] = [\nabla_x Y(x, t)]^{-1} \quad (1.31)$$

Le gradient des caractéristiques rétrogrades  $[\nabla_x Y]$  est l'inverse du gradient des déformations. Cette dernière relation permet d'exprimer en formulation eulérienne des quantités qui dépendent initialement du gradient des déformations lagrangien  $[\nabla_\xi X(\xi, t)]$ . Par exemple, en formulation lagrangienne, la conservation de la masse se définit par :

$$\rho(X(\xi, t), t) \det(\nabla_\xi X(\xi, t)) = \rho(\xi, 0) \quad (1.32)$$

et devient en formulation eulérienne :

$$\rho(x, t) = \det(\nabla_x Y(x, t)) \rho(Y(x, t), 0) \quad (1.33)$$

On remarque que  $J = \det(\nabla_\xi X(\xi, t)) = \det(\nabla_x Y(x, t))^{-1}$ .

### 3 Hyperélasticité

Un solide est dit élastique s'il retrouve son état initial lorsque les forces extérieures qui l'ont déformé sont supprimées et sans effet de viscosité. Un milieu élastique stocke de l'énergie de déformation sans dissipation. D'un point de vue mathématique, un matériau est élastique si le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  à un instant  $t$  est seulement fonction de l'état de déformation du solide au même instant, c'est-à-dire du gradient des déformations  $F$  :

$$\sigma(X(\xi, t)) = g(\xi, F)$$

De ce fait, les contraintes ne dépendent pas du chemin de déformations parcouru. Un matériau élastique est dit hyperélastique si, de plus, le tenseur des contraintes  $\sigma$  dérive de l'énergie du matériau.

On se place dans le cas où l'énergie d'un milieu élastique dépend du gradient des déformations  $F$  et de l'entropie  $s$  [36]. Soit  $W(F, s) = \rho_0(\xi)\varepsilon(F, s)$  la densité d'énergie élastique par unité de volume dans la configuration de référence avec  $\rho_0$  la masse volumique initiale et  $\varepsilon$  l'énergie interne par unité de masse. On peut alors définir l'énergie élastique  $\mathcal{E}^e$  telle que

$$\mathcal{E}^e = \int_{\Omega_0} W(F, s(X(\xi, t), t)) \, d\xi \quad (1.34)$$

Un matériau élastique est hyperélastique si le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathcal{T}$  dérive de la densité d'énergie à entropie constante [36] :

$$\mathcal{T} = \left. \frac{\partial W}{\partial F} \right|_s (F, s) \quad (1.35)$$

La température  $T$  est alors définie par

$$T = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right|_F (F, s) = \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial W}{\partial s} \right|_F (F, s) \quad (1.36)$$

#### 3.1 Condition d'entropie

On réécrit les équations de conservation de la quantité de mouvement (1.4) et de l'énergie totale (1.6) sur la configuration de référence  $\Omega_0$  en considérant nulles les forces volumiques. On

### 3. Hyperélasticité

---

transforme donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) u(x, t) \, dx &= \int_{\Omega_0} \rho(X(\xi, t), t) u(X(\xi, t), t) J d\xi = \int_{\Omega_0} \rho_0(\xi) u(X(\xi, t), t) \, d\xi \\ \int_{\partial\Omega_t} \sigma(x, t) n(x, t) \, dS &= \int_{\partial\Omega_0} \sigma(X(\xi, t), t) J F^{-\top} n_0(\xi) \, dS_0 = \int_{\partial\Omega_0} \mathcal{T}(X(\xi, t), t) n_0(\xi) \, dS_0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) e(x, t) \, dx &= \int_{\Omega_0} \rho(X(\xi, t), t) e(X(\xi, t), t) J d\xi = \int_{\Omega_0} \rho_0(\xi) e(X(\xi, t), t) \, d\xi \\ \int_{\partial\Omega_t} (\sigma(x, t) n(x, t)) \cdot u(x, t) \, dS &= \int_{\partial\Omega_0} (\mathcal{T}(X(\xi, t), t) n_0(\xi)) \cdot u(X(\xi, t), t) \, dS_0 \\ &= \int_{\partial\Omega_0} (\mathcal{T}^\top(X(\xi, t), t) u(X(\xi, t), t)) \cdot n_0(\xi) \, dS_0 \end{aligned}$$

en utilisant les relations de transformation du volume et de la surface (Section 2.1) ainsi que le lien, Équation (1.26), entre le tenseur de Cauchy  $\sigma$  et le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathcal{T}$ . Il en résulte les équivalents en formulation lagrangienne des lois de conservation (1.4) et (1.6) [30] :

$$\partial_t(\rho_0 u) = \nabla_\xi \cdot \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \partial_t(\rho_0 e) = \nabla_\xi \cdot (\mathcal{T}^\top u) \quad (1.37)$$

Grâce à ces équations, on trouve l'expression de la variation en temps de l'énergie interne  $\varepsilon$  par unité de masse dans la configuration de référence, sachant que  $\varepsilon = e - \frac{1}{2}|u|^2$  :

$$\partial_t(\rho_0 \varepsilon) = \partial_t \left( \rho_0 e - \rho_0 \frac{1}{2} |u|^2 \right) = \nabla_\xi \cdot (\mathcal{T}^\top u) - (\nabla_\xi \cdot \mathcal{T}) \cdot u = \mathcal{T} : \nabla_\xi u \quad (1.38)$$

De plus, cette énergie se décompose suivant ses variables de la manière suivante :

$$\partial_t(\rho_0 \varepsilon) = \partial_t(W) = \frac{\partial W}{\partial F} : \partial_t F + \frac{\partial W}{\partial s} \partial_t s = \frac{\partial W}{\partial F} : \nabla_\xi u + \frac{\partial W}{\partial s} \partial_t s$$

En identifiant les termes entre les deux formules et en utilisant l'expression du tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathcal{T}$  (1.35), il découle que  $\frac{\partial W}{\partial s} \partial_t s = 0$ . En reconnaissant l'expression de la température (1.36) dans ce dernier terme, il vient

$$\frac{\partial W}{\partial s} \partial_t s = \rho_0 T \partial_t s = 0 \quad (1.39)$$

Sachant que la température  $T > 0$ , on en déduit que l'entropie  $s$  est constante le long des caractéristiques. Elle est simplement transportée par le milieu. En l'absence d'ondes de choc, les déformations élastiques sont réversibles et le modèle doit être isentropique. On note que, dans le cas de chocs, la régularité des équations de conservation n'est plus assurée. L'entropie n'est donc plus simplement transportée mais doit respecter le second principe de la thermodynamique, à savoir  $\partial_t s > 0$ . C'est la condition d'entropie.

Sachant que le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathcal{T}$  se calcule à entropie constante (Équation (1.35)), par la suite, on peut se défaire de la dépendance sur l'entropie dans la densité d'énergie  $W = W(F)$ . L'énergie élastique est alors donnée par la formule

$$\mathcal{E}^e = \int_{\Omega_0} W(F) \, d\xi \quad (1.40)$$

### 3.2 Principe d'indifférence matérielle et isotropie

La densité d'énergie  $W$  que l'on considère est soumise à certains principes physiques. Pour les définir, on suit la présentation faite dans le livre de Ciarlet [11].

La densité d'énergie doit vérifier le principe d'indifférence matérielle (ou d'objectivité), c'est-à-dire qu'elle est invariante pour tout changement de repère galiléen. Soit  $Q$  une matrice de rotation quelconque, la densité d'énergie  $W$  d'un matériau hyperélastique vérifie le principe d'indifférence matérielle si et seulement si

$$W(QF) = W(F) \quad (1.41)$$

De plus, si la densité d'énergie est choisie sous la forme  $W(F) = \tilde{W}(F^T F)$  alors  $W(QF) = \tilde{W}(F^T Q^T Q F) = \tilde{W}(F^T F) = W(F)$  et on retrouve le principe d'objectivité. La réciproque est vraie mais plus technique à démontrer, voir Ciarlet [11].

On rappelle le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de matrice. Soient  $F$  et  $H$  deux matrices,

$$W(F + H) = W(F) + \frac{\partial W}{\partial F}(F) : H + o(|H|) \quad (1.42)$$

Grâce au principe d'indifférence matérielle, on écrit

$$\begin{aligned} W(F + H) &= \tilde{W}(F^T F + F^T H + (F^T H)^T + H^T H) \\ &= \tilde{W}(F^T F) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial [F^T F]}(F^T F) : (F^T H + (F^T H)^T) + o(|H|) \\ &= \tilde{W}(F^T F) + 2F \frac{\partial \tilde{W}}{\partial [F^T F]}(F^T F) : H + o(|H|) \end{aligned}$$

On identifie alors les termes par rapport à l'équation précédente et avec  $C = F^T F$ . Il vient alors une nouvelle formule du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathcal{T}$ , à savoir

$$\mathcal{T} = \frac{\partial W}{\partial F}(F) = 2F \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C}(C) \quad (1.43)$$

On peut donc écrire le tenseur  $\mathcal{T}$  en fonction du tenseur des dilatations  $C$ .

Un matériau est dit isotrope si ses propriétés physiques sont indépendantes de la direction spatiale. Soit  $Q$  une matrice de rotation quelconque, la densité d'énergie  $W$  d'un matériau hyperélastique est isotrope si et seulement si

$$W(FQ) = W(F) \quad (1.44)$$

Si cette relation n'est vraie que pour certaines matrices de rotation  $Q$  alors le matériau est dit anisotrope.

Comme démontré par Ciarlet [11], en combinant les deux définitions précédentes, il vient que la densité d'énergie  $W$  d'un matériau hyperélastique est isotrope et vérifie le principe d'indifférence matérielle si et seulement si

$$W(F) = \widehat{W}(I_1, I_2, I_3) \quad (1.45)$$

### 3. Hyperélasticité

---

où  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont les invariants du tenseur  $C = F^T F$  définis comme les coefficients du polynôme caractéristique de  $C$ , à savoir

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr}(C) \\ I_2 &= \text{Tr}(\text{Cof}(C)) = \frac{1}{2} (\text{Tr}(C)^2 - \text{Tr}(C^2)) \\ I_3 &= \det(C) \end{aligned}$$

Si ce résultat est vérifié alors  $W(QF) = W(FQ) = W(F)$  puisque les invariants des matrices  $(QF)^T QF = F^T F$  et  $(FQ)^T FQ$  sont identiques. La réciproque est démontrée dans [11].

Finalement, en prenant en compte principe d'indifférence matérielle et isotropie de la densité d'énergie  $W$ , il vient que l'énergie élastique  $\mathcal{E}^e$  peut se réécrire en fonction des invariants du tenseur des dilatations  $C$  :

$$\mathcal{E}^e = \int_{\Omega_0} \widehat{W}(I_1, I_2, I_3) \, d\xi \quad (1.46)$$

### 3.3 Élasticité eulérienne

L'écriture des expressions de l'énergie élastique et de la contrainte en formulation eulérienne présentées dans cette section se retrouve dans les travaux de Cottet *et al.* [13].

L'expression (1.31) du gradient des déformations  $F$  permet d'écrire les déformations en formulation eulérienne. On a introduit Section 2.2 le tenseur de Cauchy-Green à gauche  $B = FF^T$ . On remarque que l'on peut écrire le tenseur  $B$  en fonction du gradient des caractéristiques rétrogrades  $[\nabla_x Y]$ , à savoir

$$B = [\nabla_\xi X(\xi, t)] [\nabla_\xi X(\xi, t)]^T = [\nabla_x Y(x, t)]^{-1} [\nabla_x Y(x, t)]^{-T} \quad (1.47)$$

Avec le changement de variable  $\xi = Y(x, t)$ , l'expression de l'énergie élastique  $\mathcal{E}^e$  en fonction des invariants du tenseur des dilatations  $C$  devient sur la configuration déformée :

$$\mathcal{E}^e = \int_{\Omega_t} \widehat{W}(I_1, I_2, I_3) J^{-1} \, dx \quad (1.48)$$

Le jacobien de la transformation est ici considéré en fonction des variables de la configuration actuelle  $J = J(x, t)$ . On remarque que le déterminant du tenseur  $B$  vaut  $\det(B) = \det([\nabla_x Y])^{-2} = J^2$  et que les invariants de  $B$  coïncident avec ceux du tenseur  $C$  puisque les polynômes caractéristiques de  $MN$  et  $NM$  sont égaux avec  $M$  et  $N$  deux matrices carrées.

La densité d'énergie  $W$ , fonction du tenseur  $B$ , vérifie donc aussi le principe d'indifférence matérielle et la propriété d'isotropie. Il vient alors  $W(F) = \tilde{W}(FF^T)$ . En réutilisant le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de matrice, on a

$$\begin{aligned} W(F + H) &= \tilde{W}(FF^T + (HF^T)^T + HF^T + HH^T) \\ &= \tilde{W}(B) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial B}(B) : ((HF^T)^T + HF^T) + o(|H|) \\ &= \tilde{W}(B) + 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial B}(B) F : H + o(|H|) \end{aligned}$$

En identifiant les termes de la même façon que dans la section précédente, le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathcal{T}$  s'écrit en fonction du tenseur  $B$ , soit :

$$\mathcal{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) = 2\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}) = 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{B}}(\mathbf{B}) \mathbf{F} \quad (1.49)$$

Par la suite, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  est utilisé puisqu'il est écrit exclusivement par rapport à la configuration déformée. Grâce à la relation (1.26) qui lie les deux tenseurs, le tenseur  $\sigma$  s'écrit

$$\sigma = J^{-1} \mathcal{T} \mathbf{F}^\top = J^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^\top = 2J^{-1} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} \quad (1.50)$$

On cherche à démontrer que la formulation eulérienne respecte la condition d'entropie. On transforme les termes de l'équation (1.38) sur l'énergie interne  $\varepsilon$  par unité de masse sur la configuration déformée :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \rho_0(\xi) \varepsilon(\xi, t) \, d\xi &= \int_{\Omega_t} \rho_0(Y(x, t)) \varepsilon(Y(x, t), t) J^{-1} dx = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) \varepsilon(x, t) \, dx \\ \text{et} \\ \int_{\Omega_0} \mathcal{T} : \nabla_\xi u \, d\xi &= \int_{\Omega_0} J \sigma \mathbf{F}^{-\top} : \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial X(\xi, t)}{\partial t} \, d\xi \\ &= \int_{\Omega_0} J \sigma \mathbf{F}^{-\top} : \partial_t \mathbf{F} \, d\xi = \int_{\Omega_0} J \sigma : [\nabla_x u] \, d\xi = \int_{\Omega_t} \sigma : [\nabla_x u] \, dx \end{aligned}$$

On rappelle que le tenseur gradient des vitesses de déformation  $[\nabla_x u]$  est défini Équation (1.21) par  $\partial_t \mathbf{F} = [\nabla_x u] \mathbf{F}$ . Sachant qu'en formulation lagrangienne la dérivée est la dérivée particulaire, il vient

$$\frac{D\mathbf{F}}{Dt} = \partial_t \mathbf{F} + u \cdot \nabla_x \mathbf{F} = [\nabla_x u] \mathbf{F} \quad (1.51)$$

De plus, on obtient l'équation sur l'énergie interne

$$\frac{D\rho\varepsilon}{Dt} = \rho(\partial_t \varepsilon + u \cdot \nabla_x \varepsilon) = \sigma : [\nabla_x u] \quad (1.52)$$

en simplifiant par l'équation de continuité (1.3). L'énergie interne du matériau ne dépend que du gradient des déformations  $\mathbf{F} = [\nabla_x Y]^{-1}$  et de l'entropie  $s$ . En développant l'équation (1.52) par ces variables, il vient :

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t \varepsilon + u \cdot \nabla_x \varepsilon) &= \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}} : \partial_t \mathbf{F} + \overbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial s}}^{\top} \partial_t s + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}} : u \cdot \nabla_x \mathbf{F} + \overbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial s}}^{\top} u \cdot \nabla_x s \right) \\ &= \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}} : (\partial_t \mathbf{F} + u \cdot \nabla_x \mathbf{F}) + \top \frac{Ds}{Dt} \right) = \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}} : [\nabla_x u] \mathbf{F} + \top \frac{Ds}{Dt} \right) \\ &= \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^\top : [\nabla_x u] + \top \frac{Ds}{Dt} \right) \\ &= \sigma : [\nabla_x u] \end{aligned}$$

### 3. Hyperélasticité

---

On rappelle que la densité d'énergie élastique par unité de volume  $W$  et l'énergie interne par unité de masse  $\varepsilon$  sont liées par la relation  $W(F, s) = \rho_0(\xi)\varepsilon(X(\xi, t), t)$ . En utilisant l'expression (1.50) du tenseur des contraintes  $\sigma$ , on retrouve la condition d'entropie en formulation eulérienne :  $\frac{Ds}{Dt} = 0$ , sous la condition que la température  $T$  soit strictement positive.

#### 3.4 Décomposition de l'énergie

L'énergie élastique se dissocie en une partie volumique (ou hydrodynamique) liée aux changements de volume et une partie isochore liée aux déformations de type cisaillement [25]. L'avantage d'écrire l'énergie sous cette forme est de pouvoir facilement modéliser des fluides seuls et des solides sans recourir à deux équations d'état distinctes. Un second avantage de cette écriture est qu'elle facilite la démonstration de l'hyperbolicité du système [18]. On introduit le tenseur  $\bar{B}$  (en trois dimensions) invariant pour tout changement de volume tel que

$$\bar{B} = \frac{B}{\det(B)^{\frac{1}{3}}} = \frac{B}{J^{\frac{2}{3}}} \quad \text{d'où} \quad \det(\bar{B}) = 1 \quad (1.53)$$

et on obtient une nouvelle expression de l'énergie élastique  $\mathcal{E}^e$  :

$$\mathcal{E}^e = \int_{\Omega_t} [W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\text{Tr}(\bar{B}), \text{Tr}(\text{Cof}(\bar{B})))] J^{-1} dx \quad (1.54)$$

Sachant que  $W = \rho_0\varepsilon$ , l'énergie interne  $\varepsilon$  se met sous la forme

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\rho_0} (W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\text{Tr}(\bar{B}), \text{Tr}(\text{Cof}(\bar{B})))) = \varepsilon_{\text{vol}}(\rho) + \varepsilon_{\text{iso}}(\bar{B}) \quad (1.55)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  est relié aux déformations au travers de l'énergie interne et en fonction du tenseur  $B$  (et donc de  $\bar{B}$ ), Équation (1.50). On peut donc également le diviser en une partie volumique, appelée  $\sigma_{\text{vol}}$ , et une partie isochore, appelée  $\sigma_{\text{iso}}$ . Tous calculs faits, voir [39], les deux parties du tenseur  $\sigma$  s'écrivent

$$\sigma_{\text{vol}} = \rho_0 \varepsilon'_{\text{vol}} \text{Id} \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{iso}} = 2\rho \left( \bar{\sigma}_{\text{iso}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\bar{\sigma}_{\text{iso}}) \text{Id} \right) \quad (1.56)$$

avec  $\text{Id}$  la matrice identité et  $\bar{\sigma}_{\text{iso}} = \frac{\partial \varepsilon_{\text{iso}}}{\partial I_1} \bar{B} - \frac{\partial \varepsilon_{\text{iso}}}{\partial I_2} \bar{B}^{-1}$  sachant que  $I_1$  et  $I_2$  sont les deux premiers invariants du tenseur  $B$ .

#### 3.5 Lois de comportement

Il existe de nombreuses formes de lois de comportement pour modéliser un matériau hyperélastique isotrope. Elles sont basées sur une théorie statique ou sur des critères phénoménologiques. On note que sous l'hypothèse de petites déformations une loi de comportement hyperélastique doit retrouver les lois de l'élasticité linéaire (loi de Hooke).

Une première classe de lois de comportement décrit la partie isochore de la densité d'énergie  $W_{\text{iso}} = \rho_0 \varepsilon_{\text{iso}}$  sous forme polynomiale en fonction des invariants du tenseur des dilatations  $C$

(ou du tenseur  $B$ ). Rivlin & Saunders [68] décrivent la densité d'énergie élastique par le développement en série suivant :

$$W_{\text{iso}} = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (1.57)$$

où les coefficients  $C_{ij}$  sont positifs et  $C_{00} = 0$ . Cette formulation a notamment été développée pour modéliser le comportement des caoutchoucs. De cette formulation dérivent d'autres modèles tels que

- le modèle de Mooney-Rivlin [57] :  $W_{\text{iso}} = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3)$  ;
- le modèle néo-hookéen [67] :  $W_{\text{iso}} = C_{10} (I_1 - 3)$  ;
- le modèle de Yeoh [78] :  $W_{\text{iso}} = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3$

Un autre modèle d'hyperélasticité, toujours pour un matériau isotrope, basé cette fois sur les déformations dans les directions principales a été introduit par Ogden [59] et se définit par la loi de puissance

$$W_{\text{iso}} = \sum_{i=1}^N \frac{\chi_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (1.58)$$

où  $\chi_i$  et  $\alpha_i$  sont des constantes du matériau telles que  $\sum_{i=1}^N \chi_i \alpha_i = 2\chi$  avec  $\chi$  le module de cisaillement. Les variables  $\lambda_i$  sont les valeurs propres du tenseur gradient des déformations  $F$ . Ce modèle a également été développé pour modéliser les matériaux caoutchouteux. On remarque que

$$\begin{aligned} I_1 = \text{Tr}(C) = \text{Tr}(F^T F) &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \frac{1}{2} (\text{Tr}(C)^2 - \text{Tr}(C^2)) &= (\lambda_1 \lambda_2)^2 + (\lambda_1 \lambda_3)^2 + (\lambda_2 \lambda_3)^2 \end{aligned}$$

sous la condition d'incompressibilité  $I_3 = \det(C) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ . Si  $N = 1$  et  $\alpha_1 = 2$  alors le modèle d'Ogden se réduit au modèle néo-hookéen. Si  $N = 2$ ,  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = -2$  alors il se réduit au modèle de Mooney-Rivlin.

La loi de comportement utilisée dans les travaux de Iollo *et al.* [39], sur lesquels est basée cette thèse, est le modèle néo-hookéen pour des raisons de simplicité dans le calcul des vitesses des ondes.

## 4 Équations pour les solides élastiques non-linéaires

On explicite dans cette section le système d'équations modélisant aussi bien les fluides que les solides hyperélastiques en formulation eulérienne. Au contraire de ce qui se fait habituellement pour la modélisation des solides, le modèle est construit dans la configuration déformée. Le système et sa loi de comportement sont ensuite donnés pour les cas en deux et trois dimensions.

En considérant nulles les forces volumiques s'appliquant sur le matériau ( $f_v = 0$ ), on obtient un système conservatif constitué des équations d'Euler compressibles (1.3), (1.4) et (1.6) et de l'équation de transport des caractéristiques rétrogrades (1.30). Pour mettre cette dernière

#### 4. Équations pour les solides élastiques non-linéaires

équation sous forme conservative, on en prend le gradient [39]. Le système d'équations final s'écrit donc :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0 & (1.59a) \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u - \sigma) = 0 & (1.59b) \\ \partial_t(\nabla_x Y) + \nabla_x(u \cdot \nabla_x Y) = 0 & (1.59c) \\ \partial_t(\rho e) + \nabla_x \cdot (\rho e u - \sigma^\top u) = 0 & (1.59d) \end{cases}$$

L'ajout de l'équation (1.59c) sur l'inverse du gradient des déformations  $[\nabla_x Y]$  n'est utile en réalité que pour les phases solides. Cependant, étant donné que l'on veut un schéma unique quels que soient les matériaux utilisés, cette équation sera résolue dans tout le domaine de calcul indifféremment.

On remarque que l'équation (1.59c) est redondante avec l'équation de continuité (1.3) à travers l'expression de la masse volumique  $\rho = \rho_0 \det(\nabla_x Y)$  en formulation lagrangienne, voir Section 2.5.

#### 4.1 Système d'équations 2D

On explicite le système d'équations (1.59) en deux dimensions et l'expression de la loi de comportement sous forme de l'énergie et de la contrainte tels que présentés dans l'article de Gorsse *et al.* [30].

Sous forme vectorielle, le système d'équations s'écrit

$$\partial_t \psi + F(\psi)_{,1} + G(\psi)_{,2} = 0 \quad (1.60)$$

où les indices ",t", ",1" et ",2" représentent les dérivées par rapport au temps et aux deux directions spatiales, respectivement, et

$$\psi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ Y_{,1}^1 \\ Y_{,1}^2 \\ Y_{,2}^1 \\ Y_{,2}^2 \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad F(\psi) = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho(u_1)^2 - \sigma^{11} \\ \rho u_1 u_2 - \sigma^{21} \\ u_1 Y_{,1}^1 + u_2 Y_{,2}^1 \\ u_1 Y_{,1}^2 + u_2 Y_{,2}^2 \\ 0 \\ 0 \\ \rho e u_1 - (u_1 \sigma^{11} + u_2 \sigma^{21}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(\psi) = \begin{pmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 - \sigma^{12} \\ \rho(u_2)^2 - \sigma^{22} \\ 0 \\ 0 \\ u_1 Y_{,1}^1 + u_2 Y_{,2}^1 \\ u_1 Y_{,1}^2 + u_2 Y_{,2}^2 \\ \rho e u_2 - (u_1 \sigma^{12} + u_2 \sigma^{22}) \end{pmatrix}$$

La vitesse est composée de  $u = (u_1, u_2)$ , le tenseur des contraintes vaut  $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{pmatrix}$  et le

gradient des caractéristiques rétrogrades s'écrit  $[\nabla_x Y] = \begin{pmatrix} Y_{,1}^1 & Y_{,2}^1 \\ Y_{,1}^2 & Y_{,2}^2 \end{pmatrix}$ . Le système d'équations est fermé par une loi de comportement de type néo-hookéen.

### Loi de comportement et tenseur des contraintes

En dissociant l'énergie hydrodynamique de l'énergie due aux déformations de type cisaillement en deux dimensions, l'expression de l'énergie élastique (1.54) devient :

$$\mathcal{E}^{e(2D)} = \int_{\Omega_t} (W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\text{Tr}(\bar{B}))) J^{-1} dx \quad (1.61)$$

où  $\bar{B}$  est défini dans ce cas comme suit :

$$\bar{B} = \frac{B}{\det(B)^{\frac{1}{2}}} = \frac{B}{J} \quad \text{d'où} \quad \det(\bar{B}) = 1 \quad (1.62)$$

La partie volumique de l'énergie interne  $\varepsilon_{\text{vol}}$  dépend seulement de la densité et de l'entropie. Elle est prise égale à celle utilisée pour les gaz compressibles généraux, Équation (1.9). La partie isochore  $\varepsilon_{\text{iso}}$  est une fonction homogène de  $B$  et n'est pas soumise aux effets d'une compression uniforme puisque  $\det(\bar{B}) = 1$ . Elle suit la loi d'un matériau hyperélastique de type néo-hookéen. La loi néo-hookéenne s'écrit en deux dimensions :

$$\varepsilon_{\text{iso}}(\bar{B}) = \frac{\chi}{\rho_0} (\text{Tr}(\bar{B}) - 2) \quad (1.63)$$

où  $\chi$  désigne le module de cisaillement. On remarque que cette écriture de l'énergie interne isochore permet d'obtenir que si  $[\nabla_x Y] = \text{Id}$  alors  $B = \bar{B} = \text{Id}$  (en deux dimensions) et donc  $\varepsilon_{\text{iso}} = 0$ , ce qui est le cas pour les solides non contraints. L'énergie interne totale  $\varepsilon$  se calcule donc par

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\kappa(s)}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{\rho} - b \right)^{1-\gamma} - a\rho + \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{\chi}{\rho_0} (\text{Tr}(\bar{B}) - 2) \quad (1.64)$$

Une conséquence importante est que la pression  $p_{\text{vol}}$  est définie uniquement par la partie volumique de l'énergie interne, à savoir  $p_{\text{vol}} = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon_{\text{vol}}}{\partial \rho}$ .

Suivant la décomposition en une partie volumique et une partie isochore, l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy est alors donnée par :

$$\sigma(x, t) = -p_{\text{vol}} \text{Id} + 2J^{-1} \chi \left( \bar{B} - \frac{\text{Tr}(\bar{B})}{2} \text{Id} \right) \quad (1.65)$$

avec  $p_{\text{vol}}(\rho, s) = \kappa(s) \left( \frac{1}{\rho} - b \right)^{-\gamma} - a\rho^2 - p_\infty$ .

## 4.2 Système d'équations 3D

On présente l'extension du système d'équations (1.59) en trois dimensions décrit dans [9]. Sous forme vectorielle, ce système s'écrit

$$\partial_t \psi + F(\psi)_{,1} + G(\psi)_{,2} + H(\psi)_{,3} = 0 \quad (1.66)$$

où les indices " $t$ ", " $,1$ ", " $,2$ " et " $,3$ " représentent les dérivées par rapport au temps et aux trois directions spatiales, respectivement, et

$$\psi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ Y_{,1}^1 \\ Y_{,1}^2 \\ Y_{,1}^3 \\ Y_{,2}^1 \\ Y_{,2}^2 \\ Y_{,2}^3 \\ Y_{,3}^1 \\ Y_{,3}^2 \\ Y_{,3}^3 \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad F(\psi) = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho(u_1)^2 - \sigma^{11} \\ \rho u_1 u_2 - \sigma^{21} \\ \rho u_1 u_3 - \sigma^{31} \\ u_1 Y_{,1}^1 + u_2 Y_{,2}^1 + u_3 Y_{,3}^1 \\ u_1 Y_{,1}^2 + u_2 Y_{,2}^2 + u_3 Y_{,3}^2 \\ u_1 Y_{,1}^3 + u_2 Y_{,2}^3 + u_3 Y_{,3}^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho e u_1 - (u_1 \sigma^{11} + u_2 \sigma^{21} + u_3 \sigma^{31}) \end{pmatrix},$$

$$G(\psi) = \begin{pmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 - \sigma^{12} \\ \rho(u_2)^2 - \sigma^{22} \\ \rho u_2 u_3 - \sigma^{32} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1 Y_{,1}^1 + u_2 Y_{,2}^1 + u_3 Y_{,3}^1 \\ u_1 Y_{,1}^2 + u_2 Y_{,2}^2 + u_3 Y_{,3}^2 \\ u_1 Y_{,1}^3 + u_2 Y_{,2}^3 + u_3 Y_{,3}^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho e u_2 - (u_1 \sigma^{12} + u_2 \sigma^{22} + u_3 \sigma^{32}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H(\psi) = \begin{pmatrix} \rho u_3 \\ \rho u_1 u_3 - \sigma^{13} \\ \rho u_2 u_3 - \sigma^{23} \\ \rho(u_3)^2 - \sigma^{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1 Y_{,1}^1 + u_2 Y_{,2}^1 + u_3 Y_{,3}^1 \\ u_1 Y_{,1}^2 + u_2 Y_{,2}^2 + u_3 Y_{,3}^2 \\ u_1 Y_{,1}^3 + u_2 Y_{,2}^3 + u_3 Y_{,3}^3 \\ \rho e u_3 - (u_1 \sigma^{13} + u_2 \sigma^{23} + u_3 \sigma^{33}) \end{pmatrix}$$

Les variables  $\sigma^{ij}$  sont les composantes du tenseur  $3 \times 3$  des contraintes de Cauchy  $\sigma$ , les variables  $Y_{,j}^i$  sont les composantes du tenseur inverse du gradient des déformations  $[\nabla_x Y]$  et  $u = (u_1, u_2, u_3)$  est la vitesse. Le système est fermé par une loi de comportement de type néo-hookéen, voir de nouveau [39, 9].

### Loi de comportement et tenseur des contraintes

La partie volumique de l'énergie interne  $\varepsilon_{\text{vol}}$  est de nouveau prise égale à celle utilisée pour les gaz compressibles généraux, Équation (1.9). La partie isochore  $\varepsilon_{\text{iso}}$  suit la loi d'un matériau hyperélastique de type néo-hookéen en trois dimensions :

$$\varepsilon_{\text{iso}}(\bar{B}) = \frac{\chi}{\rho_0} (\text{Tr}(\bar{B}) - 3) \quad (1.67)$$

où  $\chi$  désigne le module de cisaillement et  $\bar{B}$  garde l'expression donnée Équation (1.53).

L'énergie interne totale  $\varepsilon$  se calcule donc par

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\kappa(s)}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{\rho} - b \right)^{1-\gamma} - a\rho + \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{\chi}{\rho_0} (\text{Tr}(\bar{B}) - 3) \quad (1.68)$$

Avec la loi de comportement néo-hookéenne et la décomposition en parties volumique et isochore, l'expression entière du tenseur des contraintes de Cauchy est donnée par :

$$\sigma(x, t) = -p_{\text{vol}}(\rho, s)\text{Id} + 2\chi J^{-1} \left( \bar{B} - \frac{\text{Tr}(\bar{B})}{3}\text{Id} \right) \quad (1.69)$$

où  $p_{\text{vol}} = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon_{\text{vol}}}{\partial \rho} = \kappa(s) \left( \frac{1}{\rho} - b \right)^{-\gamma} - a\rho^2 - p_\infty$ .

## 5 Hyperbolicité et vitesses des ondes

Dans cette section sont décrites les notions d'hyperbolicité d'un système d'équations, de vitesse et de nature des ondes et de problème de Riemann. On prend exemple sur le système d'équations d'Euler bien connu dans la littérature. On présente ensuite l'évaluation des vitesses des ondes pour le système d'équations (1.59) pour les solides en deux et trois dimensions.

### 5.1 Résolution des équations d'Euler

Le système d'équations d'Euler pour les fluides compressibles se compose des équations de conservation (1.3), (1.4) et (1.6). Les forces volumiques s'appliquant sur le fluide sont considérées nulles ( $f_v = 0$ ) et le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  vaut  $-p\text{Id}$  avec  $p$  la pression et  $\text{Id}$  la matrice identité. On obtient alors le système conservatif

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0 \\ \partial_t (\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u + p\text{Id}) = 0 \\ \partial_t (\rho e) + \nabla_x \cdot (\rho e u + pu) = 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

Ce système est fermé par une loi de comportement comme celles présentées Section 1.4.

#### 5.1.1 Hyperbolicité

Soit un système d'équations de conservation pour la variable  $\omega(x, t) \in \mathbb{R}^m$  mis sous forme vectorielle :

$$\partial_t \omega + \partial_x F(\omega) = 0 \quad (1.71)$$

où  $F : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$  est la fonction flux. La décomposition de cette équation sous forme quasi-linéaire s'écrit

$$\partial_t \omega + F'(\omega) \partial_x \omega = 0 \quad (1.72)$$

où  $F'(\omega)$  est la matrice jacobienne du flux  $F$  par rapport aux variables conservatives  $\omega$ . Pour montrer que le système (1.71) est hyperbolique, il faut déterminer si la matrice jacobienne  $F'(\omega)$  est diagonalisable avec des valeurs propres  $\lambda_k$  réelles et des vecteurs propres  $R_k$  réels tels que  $F'(\omega)R_k = \lambda_k R_k$ . Si, de plus, les valeurs propres sont distinctes, le système est dit strictement hyperbolique.

À présent, on se concentre sur le système des équations d'Euler (1.70) réduit à une dimension et fermé par la loi d'état des gaz parfaits (voir Section 1.4.1). Il s'écrit de la forme (1.71) où

$$\omega = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(\omega) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 \\ \frac{q_2^2}{q_1} + (\gamma - 1) \left( q_3 - \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{q_1} \right) \\ \frac{q_2}{q_1} \left( q_3 + (\gamma - 1) \left( q_3 - \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{q_1} \right) \right) \end{pmatrix}$$

avec la pression  $p$  exprimée selon la loi d'état :  $p = (\gamma - 1)\rho \left( e - \frac{1}{2}u^2 \right) = (\gamma - 1) \left( q_3 - \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{q_1} \right)$ . La matrice jacobienne  $F'(\omega)$  vaut

$$F'(\omega) = \frac{\partial F}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ ((\gamma-1)u^2 - \gamma e)u & \gamma e - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}$$

Le calcul des valeurs propres de la matrice  $F'$  donne  $\lambda_1 = u - c$ ,  $\lambda_2 = u$  et  $\lambda_3 = u + c$  où  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ . Les valeurs propres sont réelles et distinctes pour  $c > 0$ . Il est découle que la matrice  $F'$  est diagonalisable et que le système des équations d'Euler est strictement hyperbolique.

### Vitesse du son

Dans le cadre des solutions faibles (pas de choc), l'équation de conservation de l'énergie peut être remplacée par l'équation sur l'entropie  $s$ , à savoir :  $s_t + u \cdot \nabla s = 0$ , c'est-à-dire que l'entropie est simplement transportée (système isentropique). On peut réitérer le calcul de la matrice jacobienne, soit

$$F'(\omega) = \frac{\partial F}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + \frac{\partial p}{\partial \rho} & 2u & \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

Le calcul des valeurs propres donne alors  $\lambda_1 = u - c$ ,  $\lambda_2 = u$  et  $\lambda_3 = u + c$  où  $c(\rho, s) = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s}$  est défini comme la vitesse du son. Avec l'expression de la pression  $p$  pour un gaz parfait, voir Section 1.4.1, on retrouve bien  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ . Pour le calcul des valeurs propres, le système des équations de conservation (1.70) et le système avec l'entropie sont donc équivalents.

Pour la loi de comportement générale des fluides (1.9), la vitesse de son  $c$  se détermine alors par

$$c(\rho, s) = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{s=cte}} = \sqrt{\frac{\gamma \kappa(s)}{\rho^2} \left( \frac{1}{\rho} - b \right)^{-\gamma-1} - 2a\rho} \quad (1.73)$$

#### 5.1.2 Nature des ondes

Les systèmes hyperboliques d'équations non-linéaires sont connus pour faire apparaître, malgré des conditions initiales régulières, des solutions discontinues qui se traduisent par une onde de choc. Les solutions ne sont plus différentiables en tous points et le système d'équations (1.71) n'a plus de sens sur la discontinuité. À travers les discontinuités, cependant, les relations de saut

de Rankine-Hugoniot s'appliquent :

$$S[\omega] = [F(\omega)] \quad (1.74)$$

où  $S$  est la vitesse de la discontinuité et  $[\cdot]$  désigne le saut des variables. On définit alors comme solutions faibles de l'équation (1.71) les solutions continûment différentiables par morceaux et respectant les relations de Rankine-Hugoniot au niveau des discontinuités.

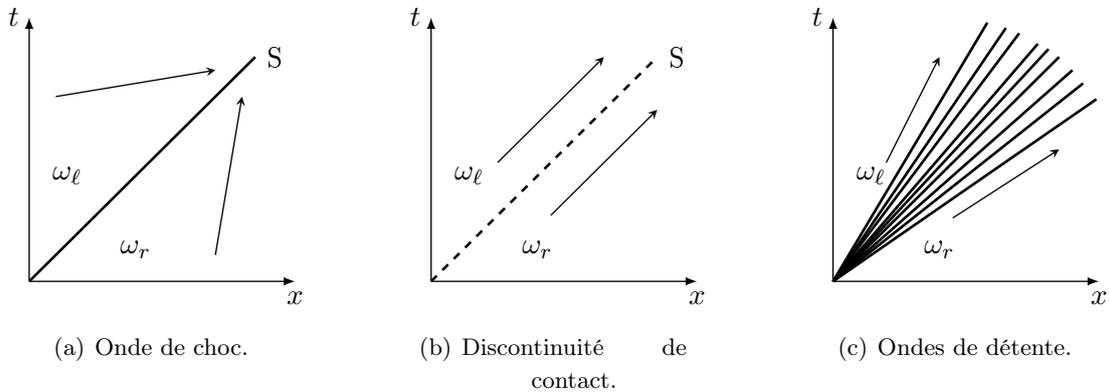
À chacune des valeurs propres  $\lambda_k$  de la matrice jacobienne du flux est associée une famille de courbes caractéristiques  $\Gamma_k$  définie par

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_k(\omega(x, t)) \\ x(0) = \xi \end{cases} \quad (1.75)$$

Le long de ces courbes sont constantes des quantités appelées invariants de Riemann.

La vitesse de la caractéristique  $\lambda_k$  définit un champ caractéristique. Ce champ caractéristique est dit linéairement dégénéré si  $\nabla \lambda_k \cdot R_k = 0$  où  $\nabla$  désigne le gradient par rapport aux composantes du vecteur  $\omega$ . Si  $\nabla \lambda_k \cdot R_k \neq 0$ , alors le champ est dit vraiment non linéaire ("genuinely non linear").

Trois types d'ondes peuvent être générés : des ondes de contact, des ondes de choc ou des ondes de raréfaction. Les ondes de choc et de contact appartiennent à la famille des ondes de discontinuité. Selon la nature de l'onde, les états constants de part et d'autre sont liés différemment.



**Figure 1.3** – Structure des caractéristiques.

### Onde de choc

Les états constants  $\omega_\ell$  à gauche et  $\omega_r$  à droite sont connectés par une discontinuité dans un champ caractéristique vraiment non linéaire. Une illustration de la structure des ondes de choc est présentée Figure 1.3(a). Chaque variable  $\omega^{(i)}$  est discontinue à travers une onde de choc et les relations de Rankine-Hugoniot (1.74) s'appliquent. Les caractéristiques vérifient une condition d'entropie, à savoir :  $\lambda_k(\omega_\ell) > S_k > \lambda_k(\omega_r)$  où  $S_k$  est la vitesse de l'onde.

### Discontinuité de contact

Les états constants  $\omega_\ell$  à gauche et  $\omega_r$  à droite sont connectés par une discontinuité de vitesse  $S_k$  dans un champ caractéristique linéairement dégénéré. De part et d'autre d'une onde de

contact, les caractéristiques sont parallèles :  $\lambda_k(\omega_\ell) = \lambda_k(\omega_r) = S_k$ . Une illustration de la structure des ondes de contact est présentée Figure 1.3(b). À travers la structure des ondes de contact, se conservent  $m-1$  invariants de Riemann dont les gradients sont linéairement indépendants et définis tels que

$$\frac{d\omega^{(1)}}{R_k^{(1)}} = \frac{d\omega^{(2)}}{R_k^{(2)}} = \dots = \frac{d\omega^{(m)}}{R_k^{(m)}} \quad (1.76)$$

Les relations de saut de Rankine-Hugoniot (1.74) s'appliquent sur cette onde comme pour toute onde de discontinuité.

### Onde de raréfaction

Les états constants  $\omega_\ell$  à gauche et  $\omega_r$  à droite sont reliés par une transition continue dans un champ caractéristique vraiment non linéaire. Les ondes de détente constituent un faisceau de caractéristiques divergentes telles que :  $\lambda_k(\omega_\ell) < \lambda_k(\omega_r)$ . Une illustration de la structure des ondes de détente est présentée Figure 1.3(c). À travers la structure des ondes de raréfaction, se conservent  $m-1$  invariants de Riemann dont les gradients sont linéairement indépendants et définis tels que

$$\frac{d\omega^{(1)}}{R_k^{(1)}} = \frac{d\omega^{(2)}}{R_k^{(2)}} = \dots = \frac{d\omega^{(m)}}{R_k^{(m)}} \quad (1.77)$$

Dans le cadre des équations d'Euler compressibles, pour déterminer à quel champ caractéristique sont associées les ondes, on calcule l'expression des vecteurs propres associés

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - c \\ \frac{\rho e + p}{\rho} - uc \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{u^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + c \\ \frac{\rho e + p}{\rho} + uc \end{pmatrix}$$

puis

$$\nabla \lambda_1 \cdot R_1 = -\frac{(\gamma + 1)c}{4\gamma}$$

$$\nabla \lambda_2 \cdot R_2 = 0$$

$$\nabla \lambda_3 \cdot R_3 = \frac{(\gamma + 1)c}{4\gamma}$$

Le champ caractéristique associé à l'onde  $\lambda_2$  est linéairement dégénéré. L'onde représente donc une discontinuité de contact. Les champs caractéristiques associés aux ondes  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$  sont vraiment non linéaires. Ces ondes sont alors soit des ondes de détente, soit des ondes de choc.

### Onde de choc

Les relations de Rankine-Hugoniot s'appliquent sur chaque composante du vecteur  $\omega$ . Pour les équations d'Euler, ces relations sont donc

$$\begin{aligned} S[\rho] &= [\rho u] \\ S[\rho u] &= [\rho u^2 + p] \\ S[\rho e] &= [(\rho e + p)u] \end{aligned} \quad (1.78)$$

où  $S$  est la vitesse de l'onde.

### Discontinuité de contact

Grâce au calcul des invariants de Riemann à travers une onde de contact, il vient

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{d(\rho u)}{u} = \frac{d(\rho e)}{\frac{u^2}{2}}$$

On détermine que la vitesse  $u$  et la pression  $p$  sont constantes à travers l'onde. Les autres quantités sont définies par les relations de saut de Rankine-Hugoniot (1.78).

### Onde de raréfaction

Si les ondes  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$  sont des ondes de raréfaction alors le calcul des invariants de Riemann constants à travers ces ondes donne

$$\left. \begin{array}{l} u + \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{cste} \\ s = \text{cste} \end{array} \right\} \text{ à travers } \lambda_1 = u - c \qquad \left. \begin{array}{l} u - \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{cste} \\ s = \text{cste} \end{array} \right\} \text{ à travers } \lambda_3 = u + c$$

où  $s = C_v \log\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)$  est l'entropie.

#### 5.1.3 Le problème de Riemann

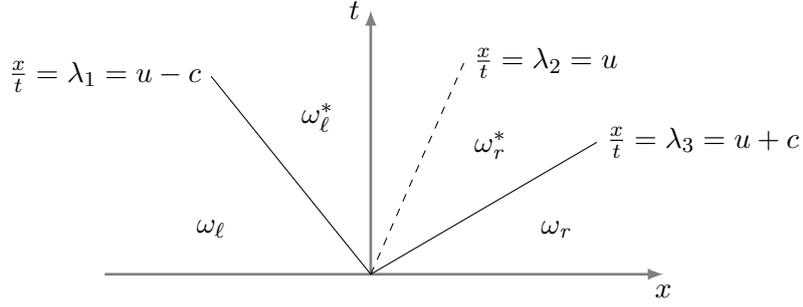
Un problème de Riemann est défini en  $x = 0$  par le problème de Cauchy constitué du système de lois de conservation (1.71) et de la donnée initiale

$$\omega(x, 0) = \begin{cases} \omega_\ell & \text{si } x < 0 \\ \omega_r & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1.79)$$

où  $\omega_\ell$  et  $\omega_r$  sont deux états constants séparés par une discontinuité en  $x = 0$ . Pour un système hyperbolique d'équations non-linéaires de dimension  $m$ , la solution auto-semblable unique  $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$  du problème de Riemann consiste en  $m + 1$  états constants  $\omega_k$  séparés par  $m$  ondes. On note que  $\omega_1 = \omega_\ell$  et  $\omega_{m+1} = \omega_r$ . Les vitesses des différentes ondes sont déterminées comme étant les valeurs propres  $\lambda_k$  de la matrice jacobienne du flux du système. La solution du problème de Riemann s'écrit alors

$$\omega(x, t) = \begin{cases} \omega_\ell & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_1 \\ \omega_2 & \text{si } \lambda_1 \leq \frac{x}{t} < \lambda_2 \\ \vdots & \\ \omega_k & \text{si } \lambda_{k-1} \leq \frac{x}{t} < \lambda_k \\ \vdots & \\ \omega_r & \text{si } \lambda_m \leq \frac{x}{t} \end{cases} \quad (1.80)$$

Dans le cadre des équations d'Euler compressibles, la matrice jacobienne du flux  $F'$  possède trois valeurs propres  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ . Trois ondes émergent donc de la solution du problème de Riemann, voir Figure 1.4, et séparent quatre états constants  $\omega_\ell, \omega_\ell^*, \omega_r^*$  et  $\omega_r$ . Ces états sont liés suivant la nature de l'onde qui les sépare, voir précédemment Section 5.1.2.



**Figure 1.4** – Schéma des ondes émergent du problème de Riemann pour les équations d’Euler compressibles. L’onde en pointillés représente la discontinuité de contact.

Pour plus d’informations concernant la résolution des équations d’Euler et les problèmes de Riemann se référer au livre de Toro [75].

## 5.2 Vitesses des ondes pour le modèle néo-hookéen

On cherche à évaluer les vitesses des ondes pour le système d’équations (1.59) en deux et trois dimensions fermé par la loi de comportement néo-hookéenne. Les vitesses des ondes sont évaluées comme étant égales aux valeurs propres de la matrice jacobienne du système.

### 5.2.1 Modèle 2D

Le système d’équations en deux dimensions (1.60) réduit à la direction 1 s’écrit sous forme quasi-linéaire :

$$\psi_t + F'(\psi)\psi_{,1} = 0 \quad (1.81)$$

avec  $F'(\psi)$  la matrice jacobienne du flux. Les valeurs propres de  $F'(\psi)$  sont, voir [30],

$$\Lambda_E = \left\{ u_1, u_1, u_1 \pm \sqrt{\frac{\alpha_1}{\rho}}, u_1 \pm \sqrt{\frac{\alpha_2}{\rho}} \right\} \quad (1.82)$$

avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les racines du polynôme de degré 2

$$X^2 + \text{Tr}(\Sigma)X + \det(\Sigma) = 0 \quad (1.83)$$

et  $\Sigma$  la matrice telle que

$$\Sigma = [\nabla_Y \sigma] [\nabla Y] = \begin{pmatrix} \sigma_{,1}^{11} & \sigma_{,2}^{11} \\ \sigma_{,1}^{21} & \sigma_{,2}^{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{,1}^1 & Y_{,2}^1 \\ Y_{,1}^2 & Y_{,2}^2 \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

où les variables  $\sigma_{,k}^{ij}$  sont les dérivées de  $\sigma^{ij}$  par rapport à  $Y_{,1}^k$ . Tous calculs faits [30], avec la loi de comportement néo-hookéenne 2D (1.65), les racines  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  valent

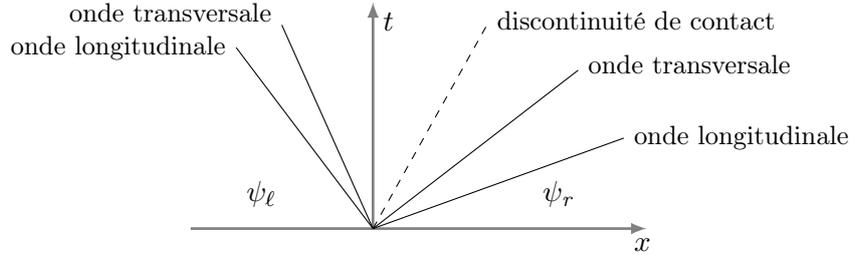
$$\alpha_1 = \mathcal{A}_1 + \sqrt{\mathcal{A}_2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \mathcal{A}_1 - \sqrt{\mathcal{A}_2} \quad (1.85)$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \frac{\rho c^2}{2} + \chi ((Y_{,1}^1)^2 + (Y_{,1}^2)^2 + (Y_{,2}^1)^2 + (Y_{,2}^2)^2) \\ \mathcal{A}_2 &= \left( \frac{\rho c^2}{2} - 2\chi ((Y_{,1}^1)^2 + (Y_{,1}^2)^2 - (Y_{,2}^1)^2 - (Y_{,2}^2)^2) \right)^2 + 4\chi^2 (Y_{,2}^1 Y_{,1}^1 + Y_{,1}^2 Y_{,2}^2)^2 \\ \text{et } c^2 &= \frac{\partial p_{\text{vol}}}{\partial \rho} \Big|_s = \frac{\gamma (p + a\rho^2 + p_\infty)}{\rho (1 - \rho b)} - 2a\rho\end{aligned}$$

Les racines  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont bien positives sous les conditions  $\chi \geq 0$  et  $c^2 > 0$ . Les valeurs propres (1.82) sont donc réelles et les vitesses des ondes sont bien définies.

Avec 6 valeurs propres (dont deux identiques), on obtient un problème de Riemann à cinq ondes résolvant l'équation (1.60) dans la direction 1. Ce problème de Riemann se compose d'une onde de contact de vitesse  $u_1$ , de deux ondes longitudinales et de deux ondes transversales. Le placement des différentes ondes est illustré Figure 1.5.



**Figure 1.5** – Schéma à cinq ondes. La discontinuité de contact est en pointillés.

Dans le cas d'un fluide, le module de cisaillement est nul  $\chi = 0$ . Les coefficients  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  se simplifient à :  $\mathcal{A}_1 = \frac{\rho c^2}{2}$  et  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1^2$ . L'ensemble (1.82) des valeurs propres de la matrice jacobienne  $F'(\psi)$  se réduit alors à :  $\Lambda_E = \{u_1, u_1 \pm c\}$ . On retrouve bien les vitesses des trois ondes présentes dans un fluide.

### 5.2.2 Modèle 3D

En considérant seulement la direction 1 et en développant le terme  $F(\psi)_{,1}$ , l'équation (1.66) devient sous forme quasi-linéaire

$$\psi_t + F'(\psi)\psi_{,1} = 0 \quad (1.86)$$

où  $F'(\psi)$  est la matrice jacobienne du système. D'après [9], les valeurs propres de  $F'(\psi)$  s'écrivent

$$\Lambda_E = \left\{ u_1, u_1, u_1 \pm \sqrt{\frac{\alpha_1}{\rho}}, u_1 \pm \sqrt{\frac{\alpha_2}{\rho}}, u_1 \pm \sqrt{\frac{\alpha_3}{\rho}} \right\} \quad (1.87)$$

avec  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  les racines du polynôme de degré 3

$$X^3 + \text{Tr}(\Sigma)X^2 + \text{Tr}(\text{Cof}(\Sigma))X + \det(\Sigma) = 0 \quad (1.88)$$

où la matrice  $\Sigma$  vaut

$$\Sigma = [\nabla_Y \sigma] [\nabla Y] = \begin{pmatrix} \sigma_{,1}^{11} & \sigma_{,2}^{11} & \sigma_{,3}^{11} \\ \sigma_{,1}^{21} & \sigma_{,2}^{21} & \sigma_{,3}^{21} \\ \sigma_{,1}^{31} & \sigma_{,2}^{31} & \sigma_{,3}^{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{,1}^1 & Y_{,2}^1 & Y_{,3}^1 \\ Y_{,1}^2 & Y_{,2}^2 & Y_{,3}^2 \\ Y_{,1}^3 & Y_{,2}^3 & Y_{,3}^3 \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

et les variables  $\sigma_{,k}^{ij}$  sont les dérivées de  $\sigma^{ij}$  par rapport à  $Y_1^k$ .

### Résolution des équations de 3<sup>ème</sup> degré

On recherche les racines d'un polynôme de degré 3 définies par

$$X^3 + aX^2 + bX + c = 0 \quad (1.90)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes. On pose  $X = Z - \frac{a}{3}$ , ce qui transforme l'équation précédente en

$$Z^3 + pZ + q = 0 \quad \text{où} \quad p = -\frac{a^2}{3} + b \quad \text{et} \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{9ab}{27} + c \quad (1.91)$$

Notons que si  $p = 0$  la racine est triple ou si  $q = 0$  on a une racine nulle et un polynôme du second degré. C'est une forme dont on connaît les solutions. On calcule  $\Delta_{3D} = -(4p^3 + 27q^2)$  :

— si  $\Delta_{3D} > 0$  alors il y a trois racines réelles distinctes

$$Z_k = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{-q}{2} \sqrt{\frac{27}{-p^3}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 1, \dots, 3 \quad (1.92)$$

Notons que  $\Delta_{3D} > 0 \Rightarrow p < 0$ .

— si  $\Delta_{3D} = 0$  alors il y a trois racines réelles dont une racine double

$$Z_1 = Z_2 = \frac{-3q}{2p} \quad \text{et} \quad Z_3 = \frac{3q}{p} \quad (1.93)$$

— si  $\Delta_{3D} < 0$  alors il y a une racine réelle et les deux autres sont complexes conjuguées

$$Z_1 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\frac{-\Delta_{3D}}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\frac{-\Delta_{3D}}{27}}}{2}} = u + v \in \mathbb{R} \quad (1.94)$$

$$Z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} u + e^{-\frac{2\pi i}{3}} v \quad \text{et} \quad Z_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}} u + e^{-\frac{4\pi i}{3}} v \quad (1.95)$$

⊥

Pour la loi de comportement néo-hookéenne 3D (1.69), il est montré [9] que la matrice  $\Sigma$  se détaille par

$$\begin{aligned} \Sigma = & -\rho c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{2}{9} \chi J^{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} -2A_{11} - 5A_{22} - 5A_{33} & JC_2D + 6A_{12} & JC_3D + 6A_{13} \\ 6A_{12} & -3JC_2A_{12} - 9A_{11} & -3JC_3A_{12} \\ 6A_{13} & -3JC_2A_{13} & -3JC_3A_{13} - 9A_{11} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.96)$$

où

$$\begin{aligned} D &= -2A_{11} + A_{22} + A_{33} \\ C_2 &= K_{11}Y_{,2}^1 - K_{21}Y_{,2}^2 + K_{31}Y_{,2}^3 \\ C_3 &= K_{11}Y_{,3}^1 - K_{21}Y_{,3}^2 + K_{31}Y_{,3}^3 \\ \text{et} \quad c^2 &= \left. \frac{\partial p_{\text{vol}}}{\partial \rho} \right|_s = \frac{\gamma(p + a\rho^2 + p_\infty)}{\rho(1 - \rho b)} - 2a\rho \end{aligned}$$

avec la notation  $A$  une matrice telle que  $A_{ij} = (-1)^{i+j} (K_{1i}K_{1j} + K_{2i}K_{2j} + K_{3i}K_{3j})$  où

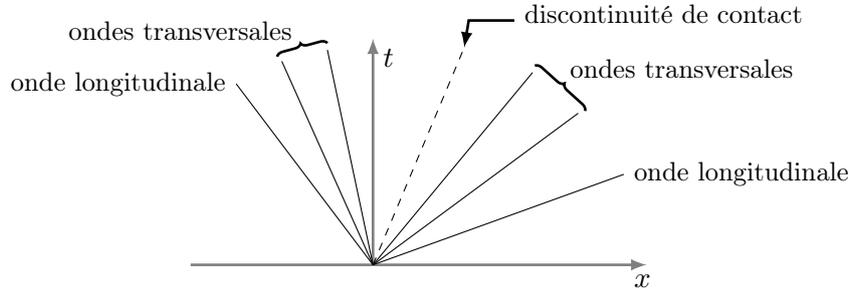
$$\begin{aligned} K_{11} &= Y_{,2}^2 Y_{,3}^3 - Y_{,2}^3 Y_{,3}^2 & K_{21} &= Y_{,2}^1 Y_{,3}^3 - Y_{,2}^3 Y_{,3}^1 & K_{31} &= Y_{,2}^1 Y_{,3}^2 - Y_{,2}^2 Y_{,3}^1 \\ K_{12} &= Y_{,1}^2 Y_{,3}^3 - Y_{,1}^3 Y_{,3}^2 & K_{22} &= Y_{,1}^1 Y_{,3}^3 - Y_{,1}^3 Y_{,3}^1 & K_{32} &= Y_{,1}^1 Y_{,3}^2 - Y_{,1}^2 Y_{,3}^1 \\ K_{13} &= Y_{,1}^2 Y_{,2}^3 - Y_{,1}^3 Y_{,2}^2 & K_{23} &= Y_{,1}^1 Y_{,2}^3 - Y_{,1}^3 Y_{,2}^1 & K_{33} &= Y_{,1}^1 Y_{,2}^2 - Y_{,1}^2 Y_{,2}^1 \end{aligned}$$

et que  $\Delta_{3D} = -(4p^3 + 27q^2) \geq 0$  avec les paramètres réduits  $p = \text{Tr}(\text{Cof}(\Sigma)) - \frac{\text{Tr}(\Sigma)^2}{3}$  et  $q = \det(\Sigma) + \frac{\text{Tr}(\Sigma)}{27} (2 \text{Tr}(\Sigma)^2 - 9 \text{Tr}(\text{Cof}(\Sigma)))$ , en identifiant par rapport au polynôme. Les racines  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont donc réelles et calculées par l'expression

$$\alpha_k = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\text{signe}(q)\sqrt{1 - \frac{\Delta_{3D}}{4p^3}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) - \frac{\text{Tr}(\Sigma)}{3}, \quad k = 1, \dots, 3 \quad (1.97)$$

De plus, les racines  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont démontrées comme étant positives, toujours sous les conditions  $\chi \geq 0$  et  $c^2 > 0$  [9]. Les valeurs propres (1.87) de la matrice jacobienne  $F'(\psi)$  sont donc réelles et les vitesses des ondes sont bien définies.

Avec 8 valeurs propres (dont deux identiques), on obtient un problème de Riemann à sept ondes résolvant l'équation (1.66) dans la direction 1. Ce problème de Riemann se compose d'une onde de contact de vitesse  $u_1$ , de deux ondes longitudinales et de quatre ondes transversales. Le placement des différentes ondes est illustré Figure 1.6.



**Figure 1.6** – Schéma à sept ondes. La discontinuité de contact est en pointillés.

Dans le cas d'un fluide, le module de cisaillement  $\chi$  est nul. La matrice  $\Sigma$  se réduit alors simplement à

$$\Sigma = -\rho c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

Les paramètres  $p$  et  $q$  ne dépendent plus que du produit  $\rho c^2$  et  $\Delta_{3D} = 0$ . Les trois racines  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont donc réelles et valent

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{-3q}{2p} - \frac{\text{Tr}(\Sigma)}{3} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \frac{3q}{p} - \frac{\text{Tr}(\Sigma)}{3} = \rho c^2 \quad (1.99)$$

L'ensemble (1.87) des valeurs propres de la matrice jacobienne  $F'(\psi)$  se réduit alors à :  $\Lambda_E = \{u_1, u_1 \pm c\}$ . On retrouve bien de nouveau les vitesses des trois ondes présentes dans un fluide.

### Notes sur les modèles 2D/3D

Lors de la réduction de l'énergie élastiques  $\mathcal{E}^e$  en deux dimensions, voir Section 4.1, la partie isochore  $W_{\text{iso}}$  ne dépend plus que d'un seul invariant du tenseur  $\bar{B}$ . Dans le cadre de la loi de comportement néo-hookéenne, cela n'a pas d'impact puisque celle-ci n'utilise que le premier invariant  $\bar{I}_1 = \text{Tr}(\bar{B})$ . Cependant, pour obtenir une énergie interne isochore  $\varepsilon_{\text{iso}}$  nulle lorsque le solide n'est pas sollicité, le modèle néo-hookéen 2D est modifié. Ces modifications impliquent que le modèle en deux dimensions n'est pas une réduction du modèle 3D pour lequel il n'y aurait pas de mouvement ni de déformation dans la direction 3 et qui correspondrait alors à un problème en contraintes planes. On remarque que pour la modélisation des fluides les deux modèles se simplifient au même problème de Riemann à trois ondes  $\Lambda_E = \{u_1, u_1 \pm c\}$ , où  $c$  est la vitesse du son.

### Conclusion

Dans ce chapitre, a été présenté un modèle en deux et trois dimensions pour modéliser les écoulement multi-matériaux. Ce modèle permet de traiter avec un même jeu d'équations l'écoulement et la déformation de milieux continus tels que les fluides et les solides élastiques. L'élasticité est considérée comme non-linéaire. Les matériaux sont seulement différenciés par leurs lois de comportement, modulables via des coefficients intrinsèques aux milieux. L'énergie interne par unité de masse  $\varepsilon$  est décomposée en deux parties. La partie décrivant les effets de compression est déterminée par une équation d'état fluide. La partie sujette aux effets de cisaillement est décrite par une loi de comportement de type néo-hookéen pour les solides hyperélastiques.

Il a également été introduit les notions de problème de Riemann et de vitesse des ondes qui constituent la base de la résolution numérique des modèles présentée au chapitre suivant.



## Chapitre 2

# Une méthode de résolution des écoulements multi-matériaux

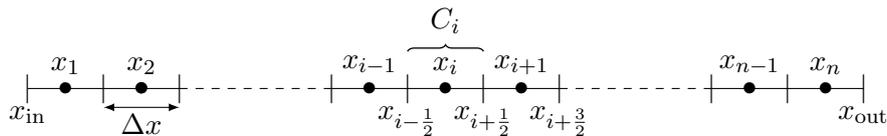
Dans ce chapitre, une méthode numérique de résolution du système d'équations (1.59) muni de la loi de comportement néo-hookéenne est proposée pour simuler des écoulements multi-matériaux en deux et trois dimensions. Le schéma numérique est monté à l'ordre 2 en espace et en temps.

Pour des raisons de simplicité dans la génération et la gestion des maillages, la discrétisation des équations, la parallélisation du code de calcul et pour gérer plus facilement les grands changements de topologie des interfaces, la résolution des équations se fait sur un maillage cartésien. Cependant, ce type de maillage ne s'adapte pas à la géométrie des interfaces. De plus, dans le cadre de problèmes multiphasiques, les solutions sont connues pour présenter des oscillations à l'interface. On présente donc différentes techniques tirées de la littérature pour gérer les problèmes d'interfaces sur les grilles cartésiennes et, en particulier, imposer les bonnes conditions de bord sur l'interface matérielle.

La méthode de résolution a précédemment été développée pour des simulations en une et deux dimensions dans l'article de Gorsse *et al.* [30] et les travaux de thèse de Gorsse [29].

### 1 Résolution du système

Pour un maillage cartésien en une dimension, on divise le domaine de calcul  $[x_{\text{in}}, x_{\text{out}}]$  en  $n$  mailles  $(C_i)_{i=1\dots n}$  de taille constante  $\Delta x$  de telle sorte que  $x_i = x_{\text{in}} + (i - \frac{1}{2})\Delta x$  soit la coordonnée du centre de la maille  $C_i$ , voir Figure 2.1.



**Figure 2.1** – Maillage pour une dimension.

Cette discrétisation est adaptée pour les trois directions d'espace avec  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  les largeurs des mailles dans chaque direction, respectivement.

### 1.1 Intégration en temps

On intègre en temps le système d'équations (1.59) avec la méthode itérative de Runge-Kutta. Intégrer un système sous la forme (1.66) revient, en fait, à intégrer une équation différentielle ordinaire du type

$$\frac{d\psi}{dt} = \mathcal{L}(\psi) \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{L}(\psi)$  représente un flux numérique quelconque. Pour avoir l'ordre  $m$  en temps, on développe les pas d'intégration

$$\begin{cases} \psi^{n+1} = \psi^n + \Delta t \sum_{i=1}^m b_i k_i \\ k_i = \mathcal{L} \left( t^n + c_i \Delta t, \psi^n + \Delta t \sum_{s=1}^{i-1} a_{is} k_s \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

avec  $a_{is}$ ,  $b_s$  et  $c_s$  les coefficients du tableau de Butcher 2.1 :

	(a) Ordre m	(b) Ordre 1	(c) Ordre 2	(d) Ordre 3	(e) Ordre 4
0		0	0	0	0
$c_2$	$a_{21}$	1	1	1/2	1/2
$c_3$	$a_{31} \quad a_{32}$		1/2	1	1/2
$\vdots$	$\vdots \quad \ddots$			1/6	2/3
$c_m$	$a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{m,m-1}$			1/6	2/3
	$b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{m-1} \quad b_m$				1
					1/6

**Tableau 2.1** – Tableaux de Butcher à l'ordre m, 1, 2, 3 et 4.

Par la suite, on prendra  $m = 2$ . Le pas de temps  $\Delta t$  est calculé pour satisfaire la condition CFL de stabilité :

$$\Delta t = C_{\text{cfl}} \min \left( \frac{\Delta x}{\max_{ijk}(\lambda_1)}, \frac{\Delta y}{\max_{ijk}(\lambda_2)}, \frac{\Delta z}{\max_{ijk}(\lambda_3)} \right), \quad 0 \leq C_{\text{cfl}} \leq 1 \quad (2.3)$$

où  $\lambda_s$  est la vitesse de l'onde dans la direction  $s$  calculée dans la maille  $C_{ijk}$  par la formule (1.87) (ou (1.82) pour le modèle en deux dimensions).

### 1.2 Problème de Riemann et méthode de Godunov

La discrétisation en espace utilise la méthode des volumes finis. Pour le moment, on se concentre uniquement sur la direction 1 du système 3D (1.66) :

$$\partial_t \psi + \partial_1 F(\psi) = 0 \quad (2.4)$$

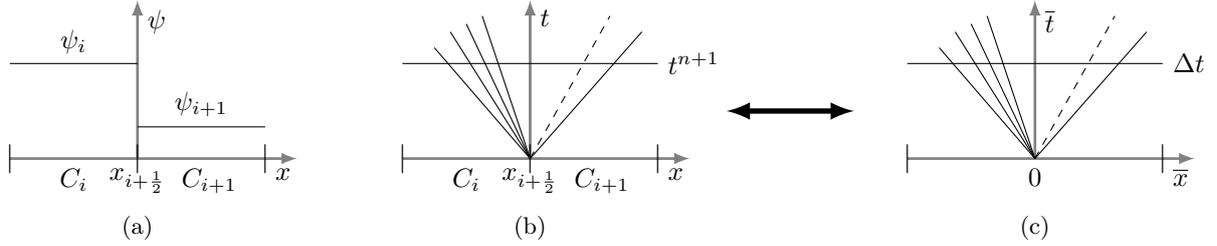
Après intégration sur la maille  $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ , on obtient la semi-discrétisation

$$\frac{d\psi_i}{dt} + \frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \quad (2.5)$$

où  $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathcal{F}(\psi_i, \psi_{i+1})$  est le flux numérique calculé à l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$  et

$$\psi_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \psi(x, t) dx \quad (2.6)$$

est la valeur moyenne constante de la fonction  $\psi$  sur la maille  $C_i$  au temps  $t$ . On observe alors une discontinuité de  $\psi$  aux interfaces entre cellules. Un problème de Riemann est donc défini à chacune de ces interfaces, voir une illustration pour l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$  Figure 2.2(a)(b).



**Figure 2.2** – À l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$  : (a) configuration des états des mailles  $C_i$  et  $C_{i+1}$ , (b) ondes émergent de la solution du problème de Riemann associé, (c) ondes en coordonnées locales.

Lors de la résolution de problèmes de Riemann, on peut définir une solution auto-semblable en se ramenant à un système de coordonnées locales en espace et en temps au niveau de l'interface intercellulaire  $x_{i+\frac{1}{2}}$  :  $\bar{x} \in [-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}]$  et  $\bar{t} \in [0, \Delta t]$ , voir Figure 2.2(c). La méthode de Godunov [28] définit le flux numérique à l'interface  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$  tel que :

$$\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = F\left(\psi_{i+\frac{1}{2}}(0)\right) \quad (2.7)$$

où  $\psi_{i+\frac{1}{2}}(0)$  est la solution auto-semblable du problème de Riemann entre les mailles  $C_i$  et  $C_{i+1}$  pour  $\frac{\bar{x}}{\bar{t}} = 0$  c'est-à-dire le long de l'axe  $t$ .

En multi-dimensions, la résolution se fait grâce à un splitting directionnel. L'état dans la maille est "gelé" et les problèmes de Riemann sont résolus indépendamment dans chaque direction spatiales. Les flux sont ensuite ajoutés suivant la semi-discrétisation

$$\frac{d\psi_i}{dt} + \frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}jk} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}jk}}{\Delta x} + \frac{\mathcal{G}_{ij+\frac{1}{2}k} - \mathcal{G}_{ij-\frac{1}{2}k}}{\Delta y} + \frac{\mathcal{H}_{ijk+\frac{1}{2}} - \mathcal{H}_{ijk-\frac{1}{2}}}{\Delta z} = 0 \quad (2.8)$$

Il reste maintenant à résoudre les problèmes de Riemann aux interfaces intercellulaires dans le cadre de solides hyper-élastiques. Miller [54] et Barton *et al.* [7] développent des solveurs exacts pour l'élasticité non-linéaire. Leurs schémas souffrent, cependant, d'avoir comme hypothèses que les ondes, exceptée l'onde de contact, sont vraiment non linéaires et que les valeurs propres sont distinctes ce qui n'est pas le cas dans certaines conditions rencontrées fréquemment. Les conditions d'applications sont donc réduites. Miller [54] propose des améliorations mais le schéma reste lourd en temps de calcul.

On choisit de résoudre les problèmes de Riemann aux interfaces intercellulaires grâce à un solveur approché : le solveur HLLC introduit par Toro *et al.* [76]. Ce solveur est utilisé dans le cadre de l'élasticité non-linéaire dans les travaux de Gavrilyuk et ses collaborateurs [25, 21]. On le retrouve également dans les articles de Iollo *et al.* [39] et Gorsse *et al.* [30].

### 1.3 Solveur HLLC

L'idée de ce solveur est de ne considérer que l'onde de contact et les ondes les plus rapides (pour un solide, ce sont les ondes longitudinales) et de considérer ces dernières comme étant des chocs. On se ramène donc à un problème à trois ondes : une discontinuité de contact de vitesse  $S^*$  et deux ondes de choc de vitesses respectives  $S_\ell$  et  $S_r$ . Ces trois ondes séparent quatre états :  $\psi_\ell$ ,  $\psi^-$ ,  $\psi^+$  et  $\psi_r$ , voir Figure 2.3. Les états (modélisés par les vecteurs)  $\psi_\ell$  et  $\psi_r$  sont les états des cellules  $C_\ell$  à gauche et  $C_r$  à droite de l'interface intercellulaire.

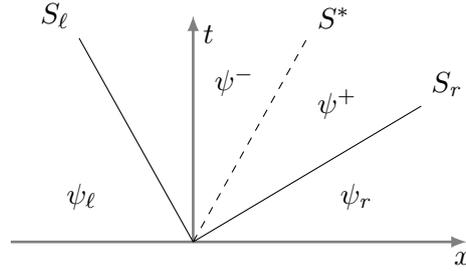


Figure 2.3 – Schéma du solveur HLLC.

À travers toute onde de discontinuité, les états de part et d'autre sont liés par les relations de saut de Rankine-Hugoniot. On applique ces relations sur la discontinuité de contact entre les états  $\psi^-$  et  $\psi^+$

$$F(\psi^+) - F(\psi^-) = S^* (\psi^+ - \psi^-) \quad (2.9)$$

et sur les deux ondes de choc entre les états  $\psi_\ell$  et  $\psi^-$  et les états  $\psi^+$  et  $\psi_r$ , respectivement,

$$F(\psi^-) - F(\psi_\ell) = S_\ell (\psi^- - \psi_\ell) \quad (2.10a)$$

$$F(\psi^+) - F(\psi_r) = S_r (\psi^+ - \psi_r) \quad (2.10b)$$

Les états intermédiaires  $\psi^-$  et  $\psi^+$  sont déterminés à partir de ces trois équations. Le flux numérique HLLC par la méthode de Godunov (2.7) est alors calculé à l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$  par

$$F\left(\psi_{i+\frac{1}{2}}(0)\right) = \begin{cases} F(\psi_\ell) & \text{si } S_\ell \geq 0 \\ F(\psi^-) & \text{si } S_\ell \leq 0 \leq S^* \\ F(\psi^+) & \text{si } S^* \leq 0 \leq S_r \\ F(\psi_r) & \text{si } S_r \leq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Le solveur HLLC est défini dans le cas où les matériaux de part et d'autre de l'onde de contact sont identiques, autrement dit, ils suivent la même loi de comportement. Pour étudier les écoulements multi-matériaux, il faut pouvoir résoudre les problèmes de Riemann entre deux matériaux de natures et de propriétés différentes. Un autre aspect important est d'imposer les bonnes conditions de bord de l'interface.

Une méthode modifiée du solveur HLLC, appelée HLLD, a été introduite par López Ortega *et al.* [50] pour prendre en compte toutes les ondes émergeant du problème de Riemann dans le cadre de systèmes d'équations pour l'élasticité non-linéaire.

## 2 Gestion des interfaces

Les écoulements multi-matériaux impliquent des milieux munis de lois de comportement pouvant être très différentes. Ces différences entraînent des oscillations de la solution au niveau des interfaces matérielles [1, 22]. Les interfaces sont donc des points cruciaux de modélisation. Les modèles doivent permettre de simuler les conditions correctes d'interface.

Dans cette section sont présentées plusieurs techniques pour modéliser les interfaces. On distingue deux catégories : le traitement par interface diffuse où l'interface est incluse dans une zone d'épaisseur non nulle et le traitement sharp de l'interface où celle-ci est considérée infiniment fine. Les approches par interfaces sharp entrent dans le cadre des méthodes de frontières immergées ("immersed boundaries" [56]).

Dans le cas de simulations sur grilles cartésiennes, le maillage ne s'adapte pas à la géométrie de l'interface entre deux milieux, voir un exemple Figure 2.4(a). On présente, tout d'abord, une méthode pour traquer les interfaces sur ce type de grilles : la méthode level set.

### 2.1 Capture d'interfaces : la méthode level set

La méthode level set, initialement développée par Osher & Sethian [61], est une méthode de capture d'interface. Elle permet de représenter une courbe (dans  $\mathbb{R}^2$ ) ou une surface (dans  $\mathbb{R}^3$ ) sans paramétrisation explicite de l'une ou l'autre. Cette méthode permet la coalescence ou la division de fronts. Elle définit une fonction  $\phi$  de telle façon que sa ligne de niveau zéro,  $\phi = 0$ , corresponde à l'interface à capturer. On peut ainsi calculer la normale  $n$  et la courbure  $\kappa$  de l'interface :

$$n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad \text{et} \quad \kappa = \nabla \cdot n \quad (2.12)$$

De manière plus concrète, la fonction  $\phi$  est généralement prise comme une distance signée dont le signe change de chaque côté de l'interface, voir Figure 2.4(b). Soit un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ , la fonction level set  $\phi$  est alors définie par

$$\phi(x, t) = \begin{cases} -|x - \Gamma| & \text{si } x \in \Omega \\ |x - \Gamma| & \text{si } x \notin \Omega \end{cases} \quad (2.13)$$

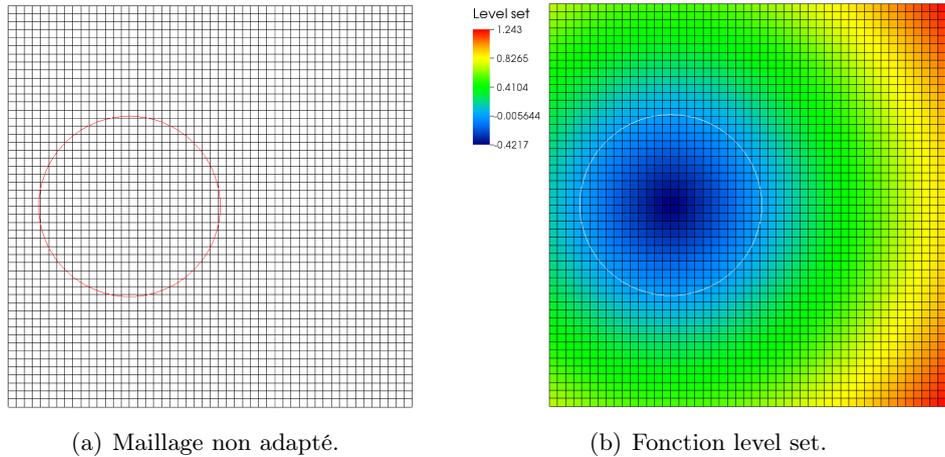
Une propriété de la fonction distance signée est que  $|\nabla\phi| = 1$ .

La fonction level set  $\phi$  se transporte avec le champ de vitesse  $u$  de l'écoulement selon l'équation d'advection :

$$\partial_t\phi + u \cdot \nabla_x\phi = 0 \quad (2.14)$$

Cette équation advecte donc l'iso-zéro de la fonction de la même façon que l'interface matérielle se déplace.

Pendant la résolution de l'équation, si le champ de vitesse n'est pas uniforme, la fonction  $\phi$  peut rapidement perdre ses propriétés de fonction distance signée (les lignes de niveau ne sont plus toutes à la même distance les unes des autres), ce qui peut entraîner des problèmes numériques dans les zones où les gradients de la fonction  $\phi$  sont raides. Pour rétablir ces propriétés, on peut résoudre l'équation eikonale  $|\nabla\phi| = 1$  par une méthode de fast-marching [71], par exemple, ou utiliser une méthode de redistanciation [74].



**Figure 2.4** – (a) Maillage et (b) fonction level set pour un cercle. L’iso-zéro de la fonction est tracée en (a) rouge et (b) blanc.

La méthode de la level set est très répandue dans la littérature pour sa malléabilité et sa simplicité d’utilisation. Une extension de cette approche est la méthode particle level set de Enright *et al.* [17] qui utilise des marqueurs lagrangiens sur l’iso-zéro de la fonction level set pour reconstruire celle-ci dans des zones du domaine sous-résolues. Cette technique souffre cependant de devoir advecter les marqueurs en gardant une erreur d’interpolation raisonnable. Il existe également d’autres méthodes de capture d’interfaces. On peut par exemple citer la méthode Volume Of Fluid (VOF) introduite par Hirt & Nichols [35] qui consiste à décrire l’interface par la fraction volumique occupée par l’un des milieux dans les mailles.

## 2.2 Traitement par interface diffuse

Une solution pour traiter les problèmes multi-fluides de manière robuste et sans oscillation est de considérer numériquement l’interface comme une zone diffuse [1, 42]. Les fluides sont caractérisés par leur fraction volumique,  $\alpha_1$  pour l’un et  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$  pour l’autre avec  $\alpha_1 \in [0, 1]$ . L’interface correspond à un mélange artificiel des deux fluides résultant de la diffusion numérique. Cette technique se justifie par le fait qu’à petite échelle l’interface entre les fluides est en réalité un mélange de leurs molécules. La diffusion du schéma numérique peut être assimilée à la diffusion moléculaire. La difficulté majeure de cette approche est de trouver des lois thermodynamiques consistantes physiquement, mathématiquement et numériquement pour définir le mélange [70]. Les modèles d’interfaces diffuses doivent décrire aussi bien les phases pures que l’interaction des deux matériaux à l’interface. Les conditions d’interface sont incorporées dans la zone de mélange. Dans la limite où l’une des fractions volumiques tend vers zéro, le modèle doit redonner les équations pour un seul composant [3].

Allaire *et al.* [3] développent une méthode d’interface diffuse pour des problèmes multi-fluides. Leur modèle remplace l’équation de continuité par deux équations de conservation sur les fractions massiques  $\alpha_k \rho_k$  de chaque fluide  $k$  et ajoute une équation de transport de la fraction volumique  $\alpha_1$ . Cette méthode leur permet de simuler sans oscillation et de manière robuste des cas d’interactions entre deux fluides de propriétés très différentes (gaz réel de van der Waals et

gaz raide).

Saurel *et al.* [70] construisent un modèle non à l'équilibre mécanique, c'est-à-dire que  $p_1 \neq p_2$  où  $p_1$  et  $p_2$  sont les pressions respectives du fluide 1 et du fluide 2. Ce modèle leur permet de s'affranchir des difficultés numériques telles que le calcul des ondes de choc dans le cas d'équations non-conservatives ou la positivité des fractions volumiques. L'équilibre mécanique est ensuite retrouvé par une étape de relaxation sur les pressions. Leur algorithme en trois étapes (résolution du système hyperbolique, relaxation sur les pressions et mise à jour des énergies internes des matériaux) est démontré comme étant robuste et précis.

Ces travaux [70] sont adaptés par Favrie *et al.* [21] pour modéliser les interactions fluide/solide élastique. Le système d'équations s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_t E^\beta + (\nabla_x E^\beta)u + (\nabla_x u)^\top E^\beta = 0 \\ \partial_t(\alpha_g \rho_g) + \nabla_x \cdot (\alpha_g \rho_g u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u - (\alpha_s \sigma_s + \alpha_g \sigma_g)) = 0 \\ \partial_t(\alpha_g \rho_g \varepsilon_g) + \nabla_x \cdot (\alpha_g \rho_g \varepsilon_g u) + \alpha_g \sigma_g : \nabla_x u = -p_I \mu_0 (p_g - p_s) \\ \partial_t(\alpha_s \rho_s \varepsilon_s) + \nabla_x \cdot (\alpha_s \rho_s \varepsilon_s u) + \alpha_s \sigma_s : \nabla_x u = -p_I \mu_0 (p_s - p_g) \end{cases}$$

où les indices  $s$  et  $g$  désignent les quantités liées au solide et au fluide, respectivement,  $\alpha$  est la fraction volumique,  $\rho = \alpha_g \rho_g + \alpha_s \rho_s$  la masse volumique totale,  $u$  le champ de vitesse,  $\sigma$  le tenseur des contraintes ( $\sigma_g = -p_g \text{Id}$ ),  $\varepsilon$  l'énergie interne,  $\mu_0 > 0$  une constante,  $E^\beta$  un vecteur lié au gradient des déformations et dépendant de  $\alpha_s$  et  $p$  la pression avec  $p_I = \frac{\rho_g c_g p_s + \rho_s c_s p_g}{\rho_g c_g + \rho_s c_s}$  la pression à l'interface obtenue grâce au problème de Riemann linéarisé et où  $c$  est la vitesse du son. L'équation de conservation de la masse pour la phase solide peut être retrouvée grâce à la première équation ci-dessus. Ce modèle est également compatible avec l'inégalité d'entropie. Cependant, dans le cas de phases fluides pures ou si le module de cisaillement utilisé dans l'équation d'état tend vers zéro, le système perd sa propriété d'hyperbolicité. Pour contrer cette déficience, une part négligeable de chaque matériau est présente dans la phase pure de l'autre. Favrie & Gavriluk ont développé leur modèle d'interface diffuse pour des interactions fluide/solide élasto-plastique, voir quelques références [19, 24, 58].

L'avantage des méthodes d'interface diffuse est qu'un seul schéma est implémenté pour les deux matériaux et la zone de mélange indifféremment. La position exacte de l'interface n'est pas connue puisque celle-ci est noyée dans la zone de mélange. À noter qu'il n'y a donc pas besoin de traquer l'interface, par une méthode level set par exemple. La méthode d'interface diffuse permet également la création dynamique de nouvelles interfaces, ce qui permet de simuler des problèmes de cavitation [70] pour les fluides ou d'écaillage dans les solides [58].

En revanche, les modèles comportent des systèmes d'équations plus importants avec certaines équations sous forme non-conservative. De plus, l'épaisseur des interfaces étant liée à la diffusion numérique, elle augmente au cours du temps.

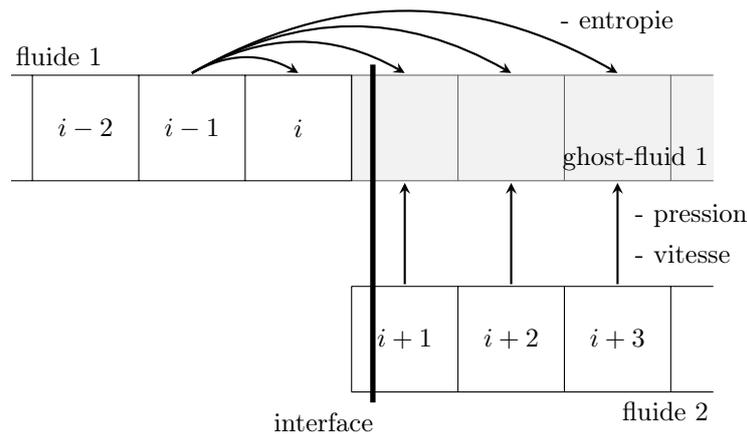
### 2.3 Traitement sharp de l'interface

En présence d'interactions entre différents matériaux telles que des interactions solide/solide, solide/fluide ou entre deux fluides non miscibles, on peut vouloir considérer l'interface comme une discontinuité de contact. La difficulté de ce traitement sharp de l'interface est de pouvoir d'une part localiser cette interface et d'autre part de reconstruire les conditions au bord.

### 2.3.1 La méthode Ghost Fluid

Pour modéliser les écoulements multiphasiques à interfaces sharp sur maillages cartésiens, Fedkiw *et al.* [22] ont développé la méthode dite Ghost Fluid. L'idée de cette méthode est d'attribuer à chaque maille du domaine de calcul les informations sur la masse volumique, la quantité de mouvement et l'énergie relatives au fluide voisin. Ce matériau est appelé matériau fantôme dans la maille. En pratique, seule une bande de mailles fantômes est nécessaire autour de l'interface. Sa largeur dépend du stencil de la méthode numérique utilisée dans le calcul des flux numériques.

Dans le cas des équations d'Euler compressibles en 1D, trois quantités doivent être extrapolées au fluide fantôme. Parmi elles se trouvent la pression et la vitesse. En effet, ces variables étant continues à travers l'interface, elles sont égales à celles du fluide réel en chaque maille. La troisième quantité à définir est l'entropie qui est discontinue à travers la discontinuité de contact. Les valeurs de l'entropie proviennent donc du fluide de l'autre côté de l'interface, voir une illustration Figure 2.5. En multi-dimensions, les composantes tangentielles de la vitesse sont traitées comme l'entropie.



**Figure 2.5** – Schéma de la méthode Ghost-Fluid en 1D. Attribution des quantités pression, vitesse et entropie dans les mailles fantômes pour le fluide 1.

Le système d'équations d'Euler est résolu pour chaque fluide indépendamment. Ceci revient à considérer deux modèles à un seul fluide puisque, en outre, le fluide fantôme suit la même équation d'état que son fluide réel [2]. Pour déterminer à quel matériau appartient chaque cellule, les auteurs utilisent la méthode de la level set.

Cette technique permet un traitement implicite des conditions de bord de l'interface. Il en résulte, cependant, qu'à l'interface matérielle, les flux calculés diffèrent, i.e.  $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} \neq \mathcal{F}_{(i+1)-\frac{1}{2}}$ . Le schéma  $y$  est donc localement non-conservatif.

Le but des auteurs est d'avoir une résolution sharp des discontinuités de contact tout en préservant le profil continu de la pression et de la vitesse et d'enlever la dissipation numérique due à la discontinuité de l'entropie (et des vitesses tangentielles en cas d'ondes transversales). Cependant, d'après Abgrall & Karni [2], l'élimination des oscillations est plus due au fait que le fluide fantôme est thermodynamiquement similaire au fluide réel. Ils proposent un schéma qui permet de garder localement la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ils

attribuent au fluide fantôme les mêmes quantités que le fluide réel mais donnent comme loi de comportement celle du fluide considéré.

Pour modéliser des interfaces solide/solide et solide/vide, Barton & Drikakis [6] étendent la méthode Ghost Fluid modifiée MGFM développée dans le travail de Liu *et al.* [48]. Cette méthode permet d'améliorer la robustesse et la consistance de la méthode classique dans le cas d'impacts et d'interactions de forts chocs avec une interface matérielle. L'idée est d'utiliser la pression et la vitesse résultant du calcul du problème de Riemann à l'interface comme quantités du fluide fantôme. L'entropie extrapolée provient de l'état intermédiaire entre la discontinuité de contact et l'onde non-linéaire du côté du fluide réel. Dans les cas d'interfaces avec un solide étudiés par Barton *et al.* [6, 8], toutes les mailles fantômes reçoivent la vitesse et le tenseur des contraintes calculés grâce au problème de Riemann linéarisé à l'interface.

On peut voir d'autres exemples d'utilisation de l'approche Ghost Fluid pour les interfaces entre deux solides élasto-plastiques dans les travaux de Udaykumar et ses collaborateurs [41, 69].

### 2.3.2 La méthode multi-matériaux HLLC

Une autre méthode pour traiter les interfaces sharp est développée par Iollo *et al.* [39]. Elle s'inspire de la méthode Ghost Fluid. L'interface est capturée grâce à une fonction level set.

Pour ne pas risquer de 'mixer' les deux matériaux, deux flux numériques sont déterminés au niveau de l'interface. Le schéma utilise le solveur approché HLLC présenté précédemment. La continuité de la vitesse normale et de la composante normale du tenseur des contraintes est préservée. Le choix d'utiliser un tel solveur est de pouvoir imposer les conditions directement sur l'interface.

Les flux numériques sont calculés pour chaque matériau respectivement, à partir des états intermédiaires  $\psi^-$  et  $\psi^+$  de part et d'autre de la discontinuité de contact. Si le solveur s'effectue, par exemple, entre les mailles  $C_i$  et  $C_{i+1}$  alors le flux à droite pour la cellule  $C_i$  sera  $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = F(\psi^-)$  le flux calculé à partir de l'état intermédiaire  $\psi^-$  et le flux à gauche pour la cellule  $C_{i+1}$  sera  $\mathcal{F}_{(i+1)-\frac{1}{2}} = F(\psi^+)$  le flux calculé à partir de l'état intermédiaire  $\psi^+$ , voir Figure 2.6. Il y a non égalité des flux à l'interface  $F(\psi^-) \neq F(\psi^+)$ . Le schéma utilisé est donc localement non conservatif mais reste consistant puisque les flux  $F^\pm$  sont des fonctions régulières des états à gauche et à droite et qu'ils sont égaux si ses états sont identiques. Le problème de conservation n'apparaît, cependant, que sur les quelques mailles qui englobent l'interface et, au vu du nombre total de mailles du domaine de calcul, cette erreur est considérée négligeable [39].

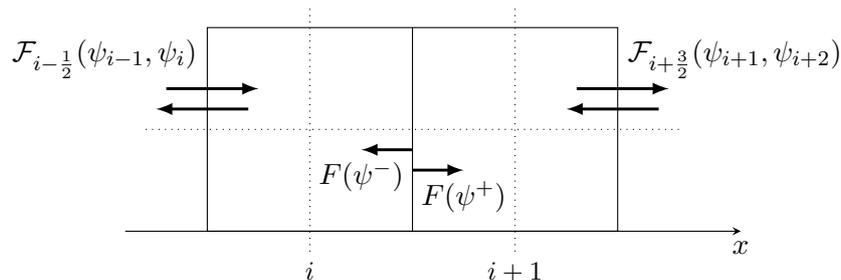


Figure 2.6 – Solveur multi-matériaux HLLC.

Cette méthode est robuste, précise et sans oscillation comme montré par Gorsse *et al.* [30] pour des interactions entre des matériaux de natures et de propriétés très différentes. Le schéma n'est pas plus coûteux en temps qu'un solveur HLLC classique. L'avantage de cette méthode par rapport à l'approche Ghost Fluid est qu'elle est directe et ne nécessite aucun stockage de matériau fantôme.

Cette méthode pour traiter les écoulements multi-matériaux est utilisée et présentée en détails en deux et trois dimensions par la suite.

### 3 Schéma numérique pour l'élasticité 2D

Dans cette section, on rappelle le schéma numérique utilisé pour le solveur HLLC dans un matériau unique et pour le solveur multi-matériaux pour le système (1.59) en deux dimensions utilisé dans [30]. On présente la méthode pour monter le schéma à l'ordre 2 en espace.

#### 3.1 Mise en place du solveur HLLC pour le modèle

On considère le solveur HLLC tel que présenté précédemment Section 1.3 en gardant le même jeu de notations. Dans le cadre du splitting directionnel pour la résolution du système, on considère l'équation

$$\psi_t + F(\psi)_{,1} = 0 \quad (2.15)$$

où

$$\psi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ Y_{,1}^1 \\ Y_{,1}^2 \\ \rho e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(\psi) = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho(u_1)^2 - \sigma^{11} \\ \rho u_1 u_2 - \sigma^{21} \\ u_1 Y_{,1}^1 + u_2 Y_{,2}^1 \\ u_1 Y_{,1}^2 + u_2 Y_{,2}^2 \\ \rho e u_1 - (\sigma^{11} u_1 + \sigma^{21} u_2) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $(u_1, u_2)$  les composantes de la vitesse,  $Y_{,1}^1$  et  $Y_{,1}^2$  les composantes du tenseur  $[\nabla_x Y]$  selon la direction 1 et  $e$  l'énergie totale par unité de masse. Les deux composantes  $Y_{,2}^i$  du vecteur  $\psi$  ne sont pas écrites car elles sont constantes dans la direction 1 :  $\partial_t(Y_{,2}^i) = 0$ , d'après le système 2D (1.60). Ces quantités ne sont donc pas affectées par les ondes. Cependant, leurs valeurs changent d'un pas de temps à l'autre. Elles sont donc impliquées dans le calcul des autres quantités.

On évalue les vitesses des deux ondes de choc  $S_\ell$  et  $S_r$  telles que  $S_\ell = \Lambda_\ell^{\min}$  est le minimum de l'ensemble  $\Lambda_E$  (1.82) des valeurs propres du système calculées dans la maille  $C_\ell$  et  $S_r = \Lambda_r^{\max}$  est le maximum de l'ensemble  $\Lambda_E$  des valeurs propres du système calculées dans la maille  $C_r$ . Pour améliorer la robustesse du schéma, on utilise l'approximation de Davis [14] :

$$\begin{cases} S_\ell = \min(\Lambda_\ell^{\min}, \Lambda_r^{\min}) \\ S_r = \max(\Lambda_\ell^{\max}, \Lambda_r^{\max}) \end{cases} \quad (2.17)$$

D'après le calcul du flux numérique HLLC (2.11), suivant le signe et la valeur des vitesses des ondes de choc et de la discontinuité de contact, on aura besoin de calculer les états intermé-

diaires  $\psi^+$  et  $\psi^-$ . On note ces états de la façon suivante :

$$\psi^+ = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^+ u_1^+ \\ \rho^+ u_2^+ \\ (Y_{,1}^1)^+ \\ (Y_{,1}^2)^+ \\ \rho^+ e^+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi^- = \begin{pmatrix} \rho^- \\ \rho^- u_1^- \\ \rho^- u_2^- \\ (Y_{,1}^1)^- \\ (Y_{,1}^2)^- \\ \rho^- e^- \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

On rappelle les relations de saut de Rankine-Hugoniot sur l'onde de contact et les deux ondes de choc :

$$F(\psi^+) - F(\psi^-) = S^* (\psi^+ - \psi^-) \quad (2.19a)$$

$$F(\psi^-) - F(\psi_\ell) = S_\ell (\psi^- - \psi_\ell) \quad (2.19b)$$

$$F(\psi^+) - F(\psi_r) = S_r (\psi^+ - \psi_r) \quad (2.19c)$$

En développant l'équation (2.19a) suivant toutes les composantes des états  $\psi^+$  et  $\psi^-$ , on obtient :

$$\begin{aligned} S^* (\rho^+ - \rho^-) &= \rho^+ u_1^+ - \rho^- u_1^- \\ S^* (\rho^+ u_1^+ - \rho^- u_1^-) &= \rho^+ (u_1^+)^2 - \sigma^{11,+} - \rho^- (u_1^-)^2 + \sigma^{11,-} \\ S^* (\rho^+ u_2^+ - \rho^- u_2^-) &= \rho^+ u_1^+ u_2^+ - \sigma^{21,+} - \rho^- u_1^- u_2^- + \sigma^{21,-} \\ S^* ((Y_{,1}^1)^+ - (Y_{,1}^1)^-) &= u_1^+ (Y_{,1}^1)^+ + u_2^+ (Y_{,2}^1)^+ - u_1^- (Y_{,1}^1)^- - u_2^- (Y_{,2}^1)^- \\ S^* ((Y_{,1}^2)^+ - (Y_{,1}^2)^-) &= u_1^+ (Y_{,1}^2)^+ + u_2^+ (Y_{,2}^2)^+ - u_1^- (Y_{,1}^2)^- - u_2^- (Y_{,2}^2)^- \\ S^* (\rho^+ e^+ - \rho^- e^-) &= \rho^+ e^+ u_1^+ - (\sigma^{11,+} u_1^+ + \sigma^{21,+} u_2^+) - \rho^- e^- u_1^- + (\sigma^{11,-} u_1^- + \sigma^{21,-} u_2^-) \end{aligned}$$

En toute logique, la vitesse normale restant constante à travers la discontinuité de contact, on impose  $u_1^- = u_1^+$  d'où, d'après la première équation ci-dessus,

$$S^* = u_1^- = u_1^+ \quad (2.20)$$

On note par la suite  $u_1^* = S^*$  la vitesse de l'onde de contact. Il découle alors des autres équations précédentes la continuité des contraintes

$$\begin{aligned} \sigma^{11,+} &= \sigma^{11,-} = \sigma^{11,*} \\ \sigma^{21,+} &= \sigma^{21,-} = \sigma^{21,*} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ainsi que des conditions de compatibilité :

$$u_2^+ (Y_{,2}^1)^+ = u_2^- (Y_{,2}^1)^- \quad (2.22a)$$

$$u_2^+ (Y_{,2}^2)^+ = u_2^- (Y_{,2}^2)^- \quad (2.22b)$$

$$\sigma^{21,*} u_2^+ = \sigma^{21,*} u_2^- \quad (2.22c)$$

On réécrit les équations (2.19b) et (2.19c) comme suit

$$\begin{aligned} F(\psi^-) - S_\ell \psi^- &= F(\psi_\ell) - S_\ell \psi_\ell = Q_\ell \\ F(\psi^+) - S_r \psi^+ &= F(\psi_r) - S_r \psi_r = Q_r \end{aligned} \quad (2.23)$$

On note  $(Q_\ell^i)_{1 \leq i \leq 6}$  et  $(Q_r^i)_{1 \leq i \leq 6}$ , respectivement, les six composantes des vecteurs  $Q_\ell$  et  $Q_r$  ainsi définis. En les développant du côté des états intermédiaires inconnus, on obtient :

$$\begin{aligned}
 Q_\ell^1 &= \rho^- u_1^* - S_\ell \rho^- \\
 Q_\ell^2 &= \rho^- (u_1^*)^2 - \sigma^{11,*} - S_\ell \rho^- u_1^* \\
 Q_\ell^3 &= \rho^- u_1^* u_2^- - \sigma^{21,*} - S_\ell \rho^- u_2^- \\
 Q_\ell^4 &= u_1^* (Y_{,1}^1)^- + u_2^- (Y_{,2}^1)^- - S_\ell (Y_{,1}^1)^- \\
 Q_\ell^5 &= u_1^* (Y_{,1}^2)^- + u_2^- (Y_{,2}^2)^- - S_\ell (Y_{,1}^2)^- \\
 Q_\ell^6 &= \rho^- e^- u_1^* - (u_1^* \sigma^{11,*} + u_2^- \sigma^{21,*}) - S_\ell \rho^- e^-
 \end{aligned}$$

(2.24)

et

$$\begin{aligned}
 Q_r^1 &= \rho^+ u_1^* - S_r \rho^+ \\
 Q_r^2 &= \rho^+ (u_1^*)^2 - \sigma^{11,*} - S_r \rho^+ u_1^* \\
 Q_r^3 &= \rho^+ u_1^* u_2^+ - \sigma^{21,*} - S_r \rho^+ u_2^+ \\
 Q_r^4 &= u_1^* (Y_{,1}^1)^+ + u_2^+ (Y_{,2}^1)^+ - S_r (Y_{,1}^1)^+ \\
 Q_r^5 &= u_1^* (Y_{,1}^2)^+ + u_2^+ (Y_{,2}^2)^+ - S_r (Y_{,1}^2)^+ \\
 Q_r^6 &= \rho^+ e^+ u_1^* - (u_1^* \sigma^{11,*} + u_2^+ \sigma^{21,*}) - S_r \rho^+ e^+
 \end{aligned}$$

Il y a en tout six inconnues pour chaque état intermédiaire  $\psi^+$  et  $\psi^-$  auxquelles s'ajoutent les composantes des tenseurs des contraintes  $\sigma^{11,\pm}$  et  $\sigma^{21,\pm}$ , les composantes tangentielles  $(Y_{,2}^i)^\pm$  des tenseurs  $[\nabla_x Y]^\pm$  et la vitesse de la discontinuité de contact  $S^*$ . Au total, il faut donc déterminer 21 inconnues. Les relations de Rankine-Hugoniot fournissent 18 équations et l'hypothèse  $u_1^- = u_1^+$  en ajoute une autre. Il manque donc deux équations pour que le problème soit bien posé. Ces équations proviennent de la gestion à l'interface des valeurs  $(Y_{,2}^i)^\pm$ .

On peut écrire l'expression de la vitesse de la discontinuité de contact  $u_1^*$  et de la composante normale du tenseur des contraintes  $\sigma^{11,*}$  en fonction des vecteurs  $Q_\ell$  et  $Q_r$  :

$$u_1^* = \frac{Q_\ell^2 - Q_r^2}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \quad \text{et} \quad \sigma^{11,*} = \frac{Q_\ell^2 Q_r^1 - Q_\ell^1 Q_r^2}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \tag{2.25}$$

ainsi que les expressions des composantes des états intermédiaires  $\psi^-$  et  $\psi^+$  :

$$\begin{aligned}
 \rho^- &= \frac{Q_\ell^1}{u_1^* - S_\ell} & \rho^+ &= \frac{Q_r^1}{u_1^* - S_r} \\
 (Y_{,1}^1)^- &= \frac{Q_\ell^4 - u_2^- (Y_{,2}^1)^-}{u_1^* - S_\ell} & (Y_{,1}^1)^+ &= \frac{Q_r^4 - u_2^+ (Y_{,2}^1)^+}{u_1^* - S_r} \\
 (Y_{,1}^2)^- &= \frac{Q_\ell^5 - u_2^- (Y_{,2}^2)^-}{u_1^* - S_\ell} & (Y_{,1}^2)^+ &= \frac{Q_r^5 - u_2^+ (Y_{,2}^2)^+}{u_1^* - S_r} \\
 \rho^- e^- &= \frac{Q_\ell^6 + u_1^* \sigma^{11,*} + u_2^- \sigma^{21,*}}{u_1^* - S_\ell} & \rho^+ e^+ &= \frac{Q_r^6 + u_1^* \sigma^{11,*} + u_2^+ \sigma^{21,*}}{u_1^* - S_r}
 \end{aligned}$$

(2.26)

Il reste donc comme inconnues à déterminer la composante tangentielle du tenseur des contraintes  $\sigma^{21,*}$  et des vitesses  $u_2^\pm$  ainsi que les composantes  $(Y_{,2}^i)^\pm$  des tenseurs  $[\nabla_x Y]^\pm$ . Le calcul de ses variables dépend du type de matériaux en présence et de leurs liens à travers la discontinuité de contact.

### 3.1.1 Solveur dans un même matériau

Les cellules  $C_\ell$  et  $C_r$  contiennent le même matériau. Le flux numérique à l'interface intercellulaire est déterminé grâce au solveur HLLC classique (2.11). On sépare deux cas : le matériau est fluide ou le matériau est solide. En effet, ces deux milieux étant de natures différentes, ils ne s'échangent pas les mêmes informations au niveau de la discontinuité de contact.

#### Solveur fluide/fluide

On sait que dans un fluide le tenseur des contraintes  $\sigma = -p\text{Id}$ . La contrainte tangentielle  $\sigma^{21}$  est donc nulle. Il en découle naturellement qu'à l'interface matérielle

$$\sigma^{21,*} = 0 \quad (2.27)$$

La dernière condition de compatibilité (2.22c) devient donc dégénérée. On donne alors l'expression de la composante de la vitesse  $u_2^\pm$  selon les équations (2.24). On a

$$\begin{aligned} Q_\ell^3 &= \rho^- u_1^* u_2^- - \overset{0}{\cancel{\sigma^{21,*}}} - S_\ell \rho^- u_2^- = \underbrace{(\rho^- u_1^* - S_\ell \rho^-)}_{Q_\ell^1} u_2^- & \implies & u_2^- = \frac{Q_\ell^3}{Q_\ell^1} \\ Q_r^3 &= \rho^+ u_1^* u_2^+ - \overset{0}{\cancel{\sigma^{21,*}}} - S_r \rho^+ u_2^+ = \underbrace{(\rho^+ u_1^* - S_r \rho^+)}_{Q_r^1} u_2^+ & \implies & u_2^+ = \frac{Q_r^3}{Q_r^1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dans le cas où le problème de Riemann se fait dans un milieu fluide, le tenseur  $[\nabla_x Y]$  n'a pas d'utilité. Ses composantes sont, cependant, calculées de la même manière que présentée pour le solveur élastique/élastique dans un souci d'unicité du schéma pour tout matériau.

#### Solveur élastique/élastique

Dans le cas où le milieu est solide, la contrainte tangentielle est non nulle et il y a continuité de la composante tangentielle des vitesses

$$u_2^- = u_2^+ = u_2^* \quad (2.29)$$

Ce résultat découle de la condition (2.22c) dans le cas où  $\sigma^{21,*} \neq 0$ . Grâce aux équations (2.24), on calcule

$$\begin{aligned} Q_\ell^3 &= \rho^- u_1^* u_2^* - \sigma^{21,*} - S_\ell \rho^- u_2^* = \underbrace{(\rho^- u_1^* - S_\ell \rho^-)}_{Q_\ell^1} u_2^* - \sigma^{21,*} \\ Q_r^3 &= \rho^+ u_1^* u_2^* - \sigma^{21,*} - S_r \rho^+ u_2^* = \underbrace{(\rho^+ u_1^* - S_r \rho^+)}_{Q_r^1} u_2^* - \sigma^{21,*} \\ \implies Q_\ell^3 - Q_r^3 &= (Q_\ell^1 - Q_r^1) u_2^* \implies u_2^* = \frac{Q_\ell^3 - Q_r^3}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \end{aligned} \quad (2.30)$$

De la même façon, avec ces équations et l'expression de la vitesse  $u_2^*$ , on détermine la contrainte tangentielle par

$$\sigma^{21,*} = \frac{Q_r^3 Q_\ell^1 - Q_\ell^3 Q_r^1}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \quad (2.31)$$

Les composantes  $(Y_{,2}^i)^\pm$ , bien que constantes dans la direction 1, interviennent dans le calcul des variables  $(Y_{,1}^i)^\pm$ . La condition de compatibilité (2.22a) implique

$$u_2^* ((Y_{,2}^i)^+ - Y_{,2}^i)^- = 0, \quad i = 1, \dots, 2 \quad (2.32)$$

d'où  $(Y_{,2}^i)^- = (Y_{,2}^i)^+$ . Pour garantir la consistance du schéma, on calcule les valeurs de ces composantes comme suit :

$$(Y_{,2}^i)^- = (Y_{,2}^i)^+ = \frac{(Y_{,2}^i)_\ell + (Y_{,2}^i)_r}{2} \quad i = 1, \dots, 2 \quad (2.33)$$

### 3.1.2 Solveur multi-matériaux

À présent, les mailles  $C_\ell$  et  $C_r$  contiennent des matériaux munis de lois de comportement différentes. Selon la méthode HLLC multi-matériaux présentée Section 2.3.2, on calcule deux flux numériques. Dans le solveur HLLC (2.11), ces flux correspondent à  $F(\psi^-) = Q_\ell + S_\ell \psi^-$  pour la cellule de gauche et  $F(\psi^+) = Q_r + S_r \psi^+$  pour la cellule de droite. Ici aussi différentes configurations d'interface sont prises en compte.

#### Solveur fluide/fluide

Dans le cas d'un problème de Riemann entre deux fluides différents, on reprend les considérations vues pour un solveur fluide dans un matériau identique et dues à la nature du matériau, à savoir

$$\sigma^{21,*} = 0 \quad (2.34)$$

d'où le calcul des composantes tangentielles des vitesses :

$$u_2^- = \frac{Q_\ell^3}{Q_\ell^1} \quad \text{et} \quad u_2^+ = \frac{Q_r^3}{Q_r^1} \quad (2.35)$$

#### Solveur fluide/élastique ou élastique/élastique

On considère qu'au moins un des deux matériaux est élastique. Si l'autre milieu est fluide, alors dans ce matériau les contraintes tangentielles sont nulles et donc, par continuité à l'interface matérielle,  $\sigma^{21,*} = 0$ . Les vitesses tangentielles  $u_2^\pm$  sont alors calculées par :

$$u_2^- = \frac{Q_\ell^3}{Q_\ell^1} \quad \text{et} \quad u_2^+ = \frac{Q_r^3}{Q_r^1} \quad (2.36)$$

Si, les deux matériaux sont élastiques et soudés l'un à l'autre alors il y a continuité des vitesses tangentielles

$$u_2^- = u_2^+ = u_2^* \quad (2.37)$$

Vitesses et contraintes tangentielles se calculent alors de la même manière que pour le solveur élastique/élastique dans un matériau unique par

$$u_2^* = \frac{Q_\ell^3 - Q_r^3}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \quad \text{et} \quad \sigma^{21,*} = \frac{Q_r^3 Q_\ell^1 - Q_\ell^3 Q_r^1}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \quad (2.38)$$

Les quantités géométriques contenues dans les variables  $(Y_{,2}^i)$  des deux matériaux ne doivent pas être "mélangées" et encore plus dans le cas particulier d'une interface fluide/élastique. Tout

d'abord, le tenseur  $[\nabla_x Y]$  n'a pas d'utilité dans un fluide. De plus, les caractéristiques rétrogrades  $Y$  peuvent être discontinues à l'interface matérielle. En effet, le fluide glisse sur le solide c'est-à-dire que pour  $x \in \Omega_{\text{fluide}}$  un point au bord de l'interface et  $x + dx \in \Omega_{\text{solide}}$  un point de l'autre côté avec  $dx$  petit, les gradients de  $Y$  font apparaître une masse de Dirac à l'interface. Pour ne pas 'mélanger' les informations sur les gradients enregistrées dans  $[\nabla_x Y]$ , le calcul des valeurs de  $(Y_{,2}^i)^\pm$  est modifié :

$$(Y_{,2}^i)^- = (Y_{,2}^i)_\ell \quad \text{et} \quad (Y_{,2}^i)^+ = (Y_{,2}^i)_r \quad (2.39)$$

Les variables  $\pm$  résultent, en fait, d'un prolongement par continuité des données géométriques du solide. Ce choix ne permet pas de vérifier la condition de compatibilité (2.22a) mais est nécessaire pour que l'information sur les gradients provienne uniquement du matériau de chaque cellule de part et d'autre de l'interface. De plus, il maintient la consistance du schéma.

### 3.2 Reconstruction des pentes de type MUSCL

Pour monter le schéma à l'ordre 2 en espace, on utilise des reconstructions de pentes de type MUSCL [75]. On garde toujours le cadre du splitting directionnel. Les reconstructions se font dans chaque direction indépendamment. L'idée de la méthode MUSCL est de remplacer les valeurs constantes sur les mailles par des fonctions affines par morceaux. Le vecteur  $\psi_i^n$  n'est donc plus une constante sur la maille  $C_i$  mais une fonction affine  $\psi_i(x)$  bornée sur  $C_i$  de telle façon que la reconstruction locale de  $\psi_i(x)$  soit

$$\psi_i(x) = \psi_i^n + \frac{(x - x_i)}{\Delta x} \Delta_i, \quad x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \quad (2.40)$$

où  $\psi_i^n$  est la valeur approchée de  $\psi_i(x)$  pour  $x = x_i$  au temps  $t = t^n$  et  $x_i$  est la coordonnée du centre de la maille  $C_i$ . Le ratio  $\frac{\Delta_i}{\Delta x}$  correspond à la pente de la fonction. On peut ainsi calculer les valeurs  $\psi_i^l$  et  $\psi_i^r$  aux extrémités de la maille, voir Figure 2.7 :

$$\psi_i^l = \psi_i(x_{i-\frac{1}{2}}) = \psi_i^n - \frac{\Delta_i}{2} \quad \text{et} \quad \psi_i^r = \psi_i(x_{i+\frac{1}{2}}) = \psi_i^n + \frac{\Delta_i}{2} \quad (2.41)$$

Le flux  $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}$  à l'interface des mailles  $C_i$  et  $C_{i+1}$  sera dorénavant obtenu par  $\mathcal{F}(\psi_i^r, \psi_{i+1}^l)$  grâce aux états à droite et à gauche calculés sur l'interface  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ .

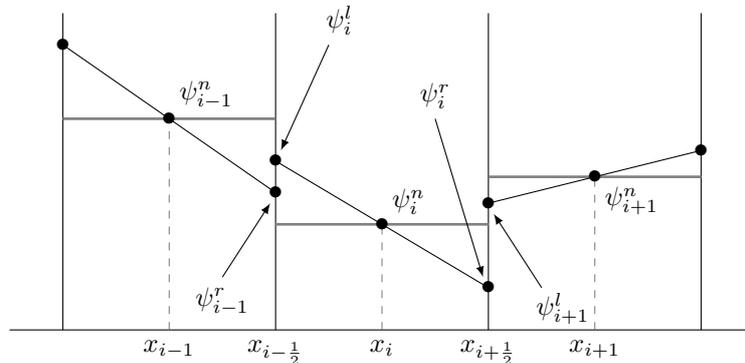


Figure 2.7 – Schéma de la reconstruction des pentes.

Les pentes  $\Delta\psi_{i-\frac{1}{2}}$  et  $\Delta\psi_{i+\frac{1}{2}}$  sont calculées par :

$$\Delta\psi_{i-\frac{1}{2}} = \psi_i^n - \psi_{i-1}^n \quad \text{et} \quad \Delta\psi_{i+\frac{1}{2}} = \psi_{i+1}^n - \psi_i^n \quad (2.42)$$

On définit alors la pente  $\Delta_i$  soit par un centrage sur la maille :  $\Delta_i = \frac{1}{2} (\Delta\psi_{i-\frac{1}{2}} + \Delta\psi_{i+\frac{1}{2}})$ , soit en utilisant un limiteur de pente.

### 3.2.1 Quelques limiteurs de pente

La méthode de reconstruction des pentes fait apparaître des oscillations en présence de forts gradients et de chocs. Pour que le schéma reste TVD et donc perde ces oscillations, on utilise un limiteur de pente. Soient  $a = \Delta\psi_{i-\frac{1}{2}}$  et  $b = \Delta\psi_{i+\frac{1}{2}}$ , on définit

$$\text{sign}(r) = \begin{cases} -1 & \text{si } r < 0 \\ 1 & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Le limiteur *MinMod***

$$\text{MinMod}(a, b) = \frac{1}{2} [\text{sign}(a) + \text{sign}(b)] \min(|a|, |b|) = \begin{cases} \text{sign}(a) \min(|a|, |b|) & \text{si } ab > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.43)$$

**Le limiteur *MaxMod***

$$\text{MaxMod}(a, b) = \frac{1}{2} [\text{sign}(a) + \text{sign}(b)] \max(|a|, |b|) = \begin{cases} \text{sign}(a) \max(|a|, |b|) & \text{si } ab > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.44)$$

**Le limiteur *SuperBee***

$$\text{SuperBee}(a, b) = \text{MaxMod}(\delta^a, \delta^b) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta^a = \text{MinMod}(a, 2b) \\ \delta^b = \text{MinMod}(2a, b) \end{cases} \quad (2.45)$$

Avec les limiteurs de pente, si les valeurs  $a$  et  $b$  sont de signes différents, alors la pente  $\Delta_i$  est nulle, la reconstruction est annulée et on a un schéma d'ordre 1 en espace localement.

### 3.2.2 Reconstruction à l'interface entre deux matériaux

Dans le cas où la reconstruction devrait utiliser deux cellules appartenant à des matériaux différents, dans le même souci de ne pas mixer les matériaux, la méthode est modifiée. La pente est reconstruite en utilisant l'état intermédiaire approprié du problème de Riemann multi-matériau. Considérons que la maille  $C_i$  et la maille adjacente  $C_{i+1}$  appartiennent à deux matériaux distincts. La reconstruction de la pente dans  $C_i$  utilise alors le stencil  $\{\psi_{i-1}, \psi_i, \psi_{i+\frac{1}{2}}\}$  où  $\psi_{i+\frac{1}{2}}$  est l'état intermédiaire résultant du calcul du problème de Riemann entre les états  $\psi_i$  et  $\psi_{i+1}$  sans reconstruction préalable.

## 4 Extension du schéma numérique pour l'élasticité en 3D

On détaille dans cette section l'extension de la méthode numérique pour le système d'équations (1.59) en trois dimensions. On présente une nouvelle condition d'interface entre deux solides élastiques : la condition de glissement. Le schéma est monté à l'ordre 2 avec la méthode de reconstruction MUSCL présentée précédemment.

### 4.1 Mise en place du solveur HLLC pour le modèle

On considère le solveur HLLC tel que présenté Section 1.3 en gardant le même jeu de notations. Dans le cadre du splitting directionnel pour la résolution du système, on considère l'équation (2.4) en trois dimensions où

$$\psi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ Y_{,1}^1 \\ Y_{,1}^2 \\ Y_{,1}^3 \\ \rho e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(\psi) = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho(u_1)^2 - \sigma^{11} \\ \rho u_1 u_2 - \sigma^{21} \\ \rho u_1 u_3 - \sigma^{31} \\ u_1 Y_{,1}^1 + u_2 Y_{,2}^1 + u_3 Y_{,3}^1 \\ u_1 Y_{,1}^2 + u_2 Y_{,2}^2 + u_3 Y_{,3}^2 \\ u_1 Y_{,1}^3 + u_2 Y_{,2}^3 + u_3 Y_{,3}^3 \\ \rho e u_1 - (\sigma^{11} u_1 + \sigma^{21} u_2 + \sigma^{31} u_3) \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $(u_1, u_2, u_3)$  les composantes de la vitesse,  $Y_{,1}^1$ ,  $Y_{,1}^2$  et  $Y_{,1}^3$  les composantes du tenseur  $[\nabla_x Y]$  selon la direction 1 et  $e$  l'énergie totale par unité de masse. Les six composantes  $Y_{,2}^i$  et  $Y_{,3}^i$  du vecteur  $\psi$  ne sont pas écrites car elles sont constantes dans la direction 1 :  $\partial_t(Y_{,2}^i) = \partial_t(Y_{,3}^i) = 0$ , d'après le système 3D (1.66). Ces quantités ne sont donc pas affectées par les ondes. Cependant, leurs valeurs changent d'un pas de temps à l'autre. Elles sont donc impliquées dans le calcul des autres quantités.

On évalue les vitesses des deux ondes de choc  $S_\ell$  et  $S_r$  en utilisant l'approximation de Davis [14] :

$$\begin{cases} S_\ell = \min(\Lambda_\ell^{\min}, \Lambda_r^{\min}) \\ S_r = \max(\Lambda_\ell^{\max}, \Lambda_r^{\max}) \end{cases} \quad (2.47)$$

où  $\Lambda_\ell^{\min}$  ( $\Lambda_\ell^{\max}$ ) est le minimum (maximum) de l'ensemble  $\Lambda_E$  (1.87) des valeurs propres du système calculées dans la maille  $C_\ell$  et  $\Lambda_r^{\min}$  ( $\Lambda_r^{\max}$ ) est le minimum (maximum) de l'ensemble  $\Lambda_E$  (1.87) des valeurs propres du système calculées dans la maille  $C_r$ .

On note les états intermédiaires  $\psi^+$  et  $\psi^-$  du solveur HLLC (2.11) de la façon suivante :

$$\psi^+ = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^+ u_1^+ \\ \rho^+ u_2^+ \\ \rho^+ u_3^+ \\ (Y_{,1}^1)^+ \\ (Y_{,1}^2)^+ \\ (Y_{,1}^3)^+ \\ \rho^+ e^+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi^- = \begin{pmatrix} \rho^- \\ \rho^- u_1^- \\ \rho^- u_2^- \\ \rho^- u_3^- \\ (Y_{,1}^1)^- \\ (Y_{,1}^2)^- \\ (Y_{,1}^3)^- \\ \rho^- e^- \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

On rappelle les relations de saut de Rankine-Hugoniot sur l'onde de contact et les deux ondes de choc :

$$F(\psi^+) - F(\psi^-) = S^* (\psi^+ - \psi^-) \quad (2.49a)$$

$$F(\psi^-) - F(\psi_\ell) = S_\ell (\psi^- - \psi_\ell) \quad (2.49b)$$

$$F(\psi^+) - F(\psi_r) = S_r (\psi^+ - \psi_r) \quad (2.49c)$$

En développant l'équation (2.49a) suivant toutes les composantes des états  $\psi^+$  et  $\psi^-$ , on obtient :

$$\begin{aligned} S^* (\rho^+ - \rho^-) &= \rho^+ u_1^+ - \rho^- u_1^- \\ S^* (\rho^+ u_1^+ - \rho^- u_1^-) &= \rho^+ (u_1^+)^2 - \sigma^{11,+} - \rho^- (u_1^-)^2 + \sigma^{11,-} \\ S^* (\rho^+ u_2^+ - \rho^- u_2^-) &= \rho^+ u_1^+ u_2^+ - \sigma^{21,+} - \rho^- u_1^- u_2^- + \sigma^{21,-} \\ S^* (\rho^+ u_3^+ - \rho^- u_3^-) &= \rho^+ u_1^+ u_3^+ - \sigma^{31,+} - \rho^- u_1^- u_3^- + \sigma^{31,-} \\ S^* ((Y_{,1}^1)^+ - (Y_{,1}^1)^-) &= u_1^+ (Y_{,1}^1)^+ + u_2^+ (Y_{,2}^1)^+ + u_3^+ (Y_{,3}^1)^+ - u_1^- (Y_{,1}^1)^- - u_2^- (Y_{,2}^1)^- - u_3^- (Y_{,3}^1)^- \\ S^* ((Y_{,1}^2)^+ - (Y_{,1}^2)^-) &= u_1^+ (Y_{,1}^2)^+ + u_2^+ (Y_{,2}^2)^+ + u_3^+ (Y_{,3}^2)^+ - u_1^- (Y_{,1}^2)^- - u_2^- (Y_{,2}^2)^- - u_3^- (Y_{,3}^2)^- \\ S^* ((Y_{,1}^3)^+ - (Y_{,1}^3)^-) &= u_1^+ (Y_{,1}^3)^+ + u_2^+ (Y_{,2}^3)^+ + u_3^+ (Y_{,3}^3)^+ - u_1^- (Y_{,1}^3)^- - u_2^- (Y_{,2}^3)^- - u_3^- (Y_{,3}^3)^- \\ S^* (\rho^+ e^+ - \rho^- e^-) &= \rho^+ e^+ u_1^+ - (\sigma^{11,+} u_1^+ + \sigma^{21,+} u_2^+ + \sigma^{31,+} u_3^+) \\ &\quad - \rho^- e^- u_1^- + (\sigma^{11,-} u_1^- + \sigma^{21,-} u_2^- + \sigma^{31,-} u_3^-) \end{aligned}$$

La vitesse normale reste constante à travers la discontinuité de contact. On impose  $u_1^- = u_1^+$  d'où, d'après la première équation ci-dessus,

$$S^* = u_1^- = u_1^+ \quad (2.50)$$

On note par la suite  $u_1^* = S^*$  la vitesse de l'onde de contact. Il découle alors des autres équations précédentes la continuité des contraintes

$$\begin{aligned} \sigma^{11,+} &= \sigma^{11,-} = \sigma^{11,*} \\ \sigma^{21,+} &= \sigma^{21,-} = \sigma^{21,*} \\ \sigma^{31,+} &= \sigma^{31,-} = \sigma^{31,*} \end{aligned} \quad (2.51)$$

ainsi que des conditions de compatibilité :

$$u_2^+ (Y_{,2}^1)^+ + u_3^+ (Y_{,3}^1)^+ = u_2^- (Y_{,2}^1)^- + u_3^- (Y_{,3}^1)^- \quad (2.52a)$$

$$u_2^+ (Y_{,2}^2)^+ + u_3^+ (Y_{,3}^2)^+ = u_2^- (Y_{,2}^2)^- + u_3^- (Y_{,3}^2)^- \quad (2.52b)$$

$$u_2^+ (Y_{,2}^3)^+ + u_3^+ (Y_{,3}^3)^+ = u_2^- (Y_{,2}^3)^- + u_3^- (Y_{,3}^3)^- \quad (2.52c)$$

$$\sigma^{21,*} u_2^+ + \sigma^{31,*} u_3^+ = \sigma^{21,*} u_2^- + \sigma^{31,*} u_3^- \quad (2.52d)$$

On réécrit les équations (2.49b) et (2.49c) comme suit

$$\begin{aligned} F(\psi^-) - S_\ell \psi^- &= F(\psi_\ell) - S_\ell \psi_\ell = Q_\ell \\ F(\psi^+) - S_r \psi^+ &= F(\psi_r) - S_r \psi_r = Q_r \end{aligned} \quad (2.53)$$

#### 4. Extension du schéma numérique pour l'élasticité en 3D

On note  $(Q_\ell^i)_{1 \leq i \leq 8}$  et  $(Q_r^i)_{1 \leq i \leq 8}$ , respectivement, les huit composantes des vecteurs  $Q_\ell$  et  $Q_r$  ainsi définis. En les développant du côté des états intermédiaires inconnus, on obtient :

$$\begin{aligned}
 Q_\ell^1 &= \rho^- u_1^* - S_\ell \rho^- \\
 Q_\ell^2 &= \rho^- (u_1^*)^2 - \sigma^{11,*} - S_\ell \rho^- u_1^* \\
 Q_\ell^3 &= \rho^- u_1^* u_2^- - \sigma^{21,*} - S_\ell \rho^- u_2^- \\
 Q_\ell^4 &= \rho^- u_1^* u_3^- - \sigma^{31,*} - S_\ell \rho^- u_3^- \\
 Q_\ell^5 &= u_1^* (Y_{,1}^1)^- + u_2^- (Y_{,2}^1)^- + u_3^- (Y_{,3}^1)^- - S_\ell (Y_{,1}^1)^- \\
 Q_\ell^6 &= u_1^* (Y_{,1}^2)^- + u_2^- (Y_{,2}^2)^- + u_3^- (Y_{,3}^2)^- - S_\ell (Y_{,1}^2)^- \\
 Q_\ell^7 &= u_1^* (Y_{,1}^3)^- + u_2^- (Y_{,2}^3)^- + u_3^- (Y_{,3}^3)^- - S_\ell (Y_{,1}^3)^- \\
 Q_\ell^8 &= \rho^- e^- u_1^* - (u_1^* \sigma^{11,*} + u_2^- \sigma^{21,*} + u_3^- \sigma^{31,*}) - S_\ell \rho^- e^-
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 Q_r^1 &= \rho^+ u_1^* - S_r \rho^+ \\
 Q_r^2 &= \rho^+ (u_1^*)^2 - \sigma^{11,*} - S_r \rho^+ u_1^* \\
 Q_r^3 &= \rho^+ u_1^* u_2^+ - \sigma^{21,*} - S_r \rho^+ u_2^+ \\
 Q_r^4 &= \rho^+ u_1^* u_3^+ - \sigma^{31,*} - S_r \rho^+ u_3^+ \\
 Q_r^5 &= u_1^* (Y_{,1}^1)^+ + u_2^+ (Y_{,2}^1)^+ + u_3^+ (Y_{,3}^1)^+ - S_r (Y_{,1}^1)^+ \\
 Q_r^6 &= u_1^* (Y_{,1}^2)^+ + u_2^+ (Y_{,2}^2)^+ + u_3^+ (Y_{,3}^2)^+ - S_r (Y_{,1}^2)^+ \\
 Q_r^7 &= u_1^* (Y_{,1}^3)^+ + u_2^+ (Y_{,2}^3)^+ + u_3^+ (Y_{,3}^3)^+ - S_r (Y_{,1}^3)^+ \\
 Q_r^8 &= \rho^+ e^+ u_1^* - (u_1^* \sigma^{11,*} + u_2^+ \sigma^{21,*} + u_3^+ \sigma^{31,*}) - S_r \rho^+ e^+
 \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'expression de la vitesse de la discontinuité de contact  $u_1^*$  et de la composante normale du tenseur des contraintes  $\sigma^{11,*}$  en fonction des vecteurs  $Q_\ell$  et  $Q_r$  :

$$u_1^* = \frac{Q_\ell^2 - Q_r^2}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \quad \text{et} \quad \sigma^{11,*} = \frac{Q_\ell^2 Q_r^1 - Q_\ell^1 Q_r^2}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \quad (2.55)$$

ainsi que les expressions des composantes des états intermédiaires  $\psi^-$  et  $\psi^+$  :

$$\begin{aligned}
 \rho^- &= \frac{Q_\ell^1}{u_1^* - S_\ell} & \rho^+ &= \frac{Q_r^1}{u_1^* - S_r} \\
 (Y_{,1}^1)^- &= \frac{Q_\ell^5 - u_2^- (Y_{,2}^1)^- - u_3^- (Y_{,3}^1)^-}{u_1^* - S_\ell} & (Y_{,1}^1)^+ &= \frac{Q_r^5 - u_2^+ (Y_{,2}^1)^+ - u_3^+ (Y_{,3}^1)^+}{u_1^* - S_r} \\
 (Y_{,1}^2)^- &= \frac{Q_\ell^6 - u_2^- (Y_{,2}^2)^- - u_3^- (Y_{,3}^2)^-}{u_1^* - S_\ell} & (Y_{,1}^2)^+ &= \frac{Q_r^6 - u_2^+ (Y_{,2}^2)^+ - u_3^+ (Y_{,3}^2)^+}{u_1^* - S_r} \\
 (Y_{,1}^3)^- &= \frac{Q_\ell^7 - u_2^- (Y_{,2}^3)^- - u_3^- (Y_{,3}^3)^-}{u_1^* - S_\ell} & (Y_{,1}^3)^+ &= \frac{Q_r^7 - u_2^+ (Y_{,2}^3)^+ - u_3^+ (Y_{,3}^3)^+}{u_1^* - S_r} \\
 \rho^- e^- &= \frac{Q_\ell^8 + u_1^* \sigma^{11,*} + u_2^- \sigma^{21,*} + u_3^- \sigma^{31,*}}{u_1^* - S_\ell} & \rho^+ e^+ &= \frac{Q_r^8 + u_1^* \sigma^{11,*} + u_2^+ \sigma^{21,*} + u_3^+ \sigma^{31,*}}{u_1^* - S_r}
 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Il reste donc comme inconnues à déterminer les composantes tangentielles du tenseur des contraintes  $\sigma^{21,*}$  et  $\sigma^{31,*}$ , les composantes transversales de la vitesse  $u_2^\pm$  et  $u_3^\pm$  ainsi que les composantes  $(Y_{,2}^i)^\pm$  et  $(Y_{,3}^i)^\pm$  des tenseurs  $[\nabla_x Y]^\pm$ . Le calcul de ses variables dépend du type de matériaux en présence et de leurs liens à travers la discontinuité de contact.

### 4.1.1 Solveur dans un même matériau

Les cellules  $C_\ell$  et  $C_r$  contiennent le même matériau. Le flux numérique à l'interface intercellulaire est déterminé grâce au solveur HLLC classique (2.11). On sépare deux cas : le matériau est fluide ou le matériau est solide. En effet, ces deux milieux étant de natures différentes, ils ne s'échangent pas les mêmes informations au niveau de la discontinuité de contact.

#### Solveur fluide/fluide

On sait que dans un fluide le tenseur des contraintes  $\sigma = -p\text{Id}$ . Les contraintes tangentielles  $\sigma^{21}$  et  $\sigma^{31}$  sont donc nulles. Il en découle naturellement qu'à l'interface matérielle

$$\sigma^{21,*} = \sigma^{31,*} = 0 \quad (2.57)$$

La dernière condition de compatibilité (2.52d) devient donc dégénérée. On donne alors l'expression des composantes de la vitesse  $u_2^\pm$  et  $u_3^\pm$  selon les équations (2.54). On a

$$\begin{aligned} Q_\ell^3 &= \rho^- u_1^* u_2^- - \overset{0}{\cancel{\sigma^{21,*}}} - S_\ell \rho^- u_2^- = (\rho^- u_1^* - S_\ell \rho^-) u_2^- & u_2^- &= \frac{Q_\ell^3}{Q_\ell^1} \\ Q_\ell^4 &= \rho^- u_1^* u_3^- - \overset{0}{\cancel{\sigma^{31,*}}} - S_\ell \rho^- u_3^- = \underbrace{(\rho^- u_1^* - S_\ell \rho^-)}_{Q_\ell^1} u_3^- & \implies & u_3^- = \frac{Q_\ell^4}{Q_\ell^1} \end{aligned} \quad (2.58)$$

et

$$\begin{aligned} Q_r^3 &= \rho^+ u_1^* u_2^+ - \overset{0}{\cancel{\sigma^{21,*}}} - S_r \rho^+ u_2^+ = (\rho^+ u_1^* - S_r \rho^+) u_2^+ & u_2^+ &= \frac{Q_r^3}{Q_r^1} \\ Q_r^4 &= \rho^+ u_1^* u_3^+ - \overset{0}{\cancel{\sigma^{31,*}}} - S_r \rho^+ u_3^+ = \underbrace{(\rho^+ u_1^* - S_r \rho^+)}_{Q_r^1} u_3^+ & \implies & u_3^+ = \frac{Q_r^4}{Q_r^1} \end{aligned} \quad (2.59)$$

#### Solveur élastique/élastique

Dans le cas où le milieu est solide, les contraintes tangentielles sont non nulles et il y a continuité des composantes tangentielles de la vitesse

$$u_2^- = u_2^+ \quad \text{et} \quad u_3^- = u_3^+ \quad (2.60)$$

Ce résultat découle de la condition (2.52d) dans le cas où  $\sigma^{21,*} \neq 0$  et  $\sigma^{31,*} \neq 0$ . On note les vitesses continues dans les directions 2 et 3 respectivement  $u_2^*$  et  $u_3^*$ . Grâce aux équations (2.54), on calcule

$$\begin{aligned} Q_\ell^3 &= \rho^- u_1^* u_2^* - \sigma^{21,*} - S_\ell \rho^- u_2^* = \underbrace{(\rho^- u_1^* - S_\ell \rho^-)}_{Q_\ell^1} u_2^* - \sigma^{21,*} \\ Q_r^3 &= \rho^+ u_1^* u_2^* - \sigma^{21,*} - S_r \rho^+ u_2^* = \underbrace{(\rho^+ u_1^* - S_r \rho^+)}_{Q_r^1} u_2^* - \sigma^{21,*} \\ \implies \quad Q_\ell^3 - Q_r^3 &= (Q_\ell^1 - Q_r^1) u_2^* \implies u_2^* = \frac{Q_\ell^3 - Q_r^3}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \end{aligned} \quad (2.61)$$

et de même

$$\begin{aligned}
 Q_\ell^4 &= \rho^- u_1^* u_3^* - \sigma^{31,*} - S_\ell \rho^- u_3^* = \underbrace{(\rho^- u_1^* - S_\ell \rho^-)}_{Q_\ell^1} u_3^* - \sigma^{31,*} \\
 Q_r^4 &= \rho^+ u_1^* u_3^* - \sigma^{31,*} - S_r \rho^+ u_3^* = \underbrace{(\rho^+ u_1^* - S_r \rho^+)}_{Q_r^1} u_3^* - \sigma^{31,*} \\
 \implies Q_\ell^4 - Q_r^4 &= (Q_\ell^1 - Q_r^1) u_3^* \implies u_3^* = \frac{Q_\ell^4 - Q_r^4}{Q_\ell^1 - Q_r^1}
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

De la même façon, avec ces équations et l'expression des vitesses  $u_2^*$  et  $u_3^*$ , on détermine les formules des contraintes tangentielles

$$\sigma^{21,*} = \frac{Q_r^3 Q_\ell^1 - Q_\ell^3 Q_r^1}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \quad \text{et} \quad \sigma^{31,*} = \frac{Q_r^4 Q_\ell^1 - Q_\ell^4 Q_r^1}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \tag{2.63}$$

Les composantes  $(Y_{,2}^i)^\pm$  et  $(Y_{,3}^i)^\pm$ , bien que constantes dans la direction 1, interviennent dans le calcul des variables  $(Y_{,1}^i)^\pm$ . Les conditions de compatibilité (2.52a–2.52c) impliquent

$$u_2^* ((Y_{,2}^i)^+ - Y_{,2}^i)^- + u_3^* ((Y_{,3}^i)^+ - (Y_{,3}^i)^-) = 0, \quad i = 1, \dots, 3 \tag{2.64}$$

d'où  $(Y_{,2}^i)^- = (Y_{,2}^i)^+$  et  $(Y_{,3}^i)^- = (Y_{,3}^i)^+$ . Pour garantir la consistance du schéma, on calcule les valeurs de ces composantes comme suit :

$$(Y_{,2}^i)^- = (Y_{,2}^i)^+ = \frac{(Y_{,2}^i)_\ell + (Y_{,2}^i)_r}{2} \quad \text{et} \quad (Y_{,3}^i)^- = (Y_{,3}^i)^+ = \frac{(Y_{,3}^i)_\ell + (Y_{,3}^i)_r}{2}, \quad i = 1, \dots, 3 \tag{2.65}$$

#### 4.1.2 Solveur multi-matériaux

À présent, les mailles  $C_\ell$  et  $C_r$  contiennent des matériaux munis de lois de comportement différentes. Selon la méthode HLLC multi-matériaux présentée Section 2.3.2, on calcule deux flux numériques. Dans le solveur HLLC (2.11), ces flux correspondent à  $F(\psi^-) = Q_\ell + S_\ell \psi^-$  pour la cellule de gauche et  $F(\psi^+) = Q_r + S_r \psi^+$  pour la cellule de droite. On présente les différentes configurations d'interface sont prises en compte.

##### Solveur fluide/fluide

Dans le cas d'un problème de Riemann entre deux fluides différents, on reprend les considérations vues pour un solveur fluide dans un matériau identique et dues à la nature du matériau, à savoir

$$\sigma^{21,*} = \sigma^{31,*} = 0 \tag{2.66}$$

d'où le calcul des composantes tangentielles des vitesses :

$$\begin{aligned}
 u_2^- &= \frac{Q_\ell^3}{Q_\ell^1} & u_2^+ &= \frac{Q_r^3}{Q_r^1} \\
 u_3^- &= \frac{Q_\ell^4}{Q_\ell^1} & u_3^+ &= \frac{Q_r^4}{Q_r^1}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

##### Solveur fluide/élastique ou élastique/élastique

On considère qu'au moins un des deux matériaux est élastique. Si l'autre milieu est fluide, alors dans ce matériau les contraintes tangentielles sont nulles et donc, par continuité à l'interface

matérielle,  $\sigma^{21,*} = \sigma^{31,*} = 0$ . De la même façon, si l'autre milieu est élastique mais que les deux solides respectent une condition de glissement à l'interface alors  $\sigma^{21,*} = \sigma^{31,*} = 0$ . Les vitesses tangentielles  $u_2^\pm$  et  $u_3^\pm$  sont alors calculées par :

$$\begin{aligned} u_2^- &= \frac{Q_\ell^3}{Q_\ell^1} & u_2^+ &= \frac{Q_r^3}{Q_r^1} \\ u_3^- &= \frac{Q_\ell^4}{Q_\ell^1} & u_3^+ &= \frac{Q_r^4}{Q_r^1} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Si, au contraire, les deux matériaux sont élastiques et soudés alors il y a continuité des vitesses tangentielles

$$u_2^- = u_2^+ = u_2^* \quad \text{et} \quad u_3^- = u_3^+ = u_3^* \quad (2.69)$$

Vitesses et contraintes tangentielles se calculent alors de la même manière que pour le solveur élastique dans un matériau unique par

$$\begin{aligned} u_2^* &= \frac{Q_\ell^3 - Q_r^3}{Q_\ell^1 - Q_r^1} & \text{et} & \quad u_3^* = \frac{Q_\ell^4 - Q_r^4}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \\ \sigma^{21,*} &= \frac{Q_r^3 Q_\ell^1 - Q_\ell^3 Q_r^1}{Q_\ell^1 - Q_r^1} & \text{et} & \quad \sigma^{31,*} = \frac{Q_r^4 Q_\ell^1 - Q_\ell^4 Q_r^1}{Q_\ell^1 - Q_r^1} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Les quantités géométriques contenues dans les variables  $(Y_{,2}^i)$  et  $(Y_{,3}^i)$  des deux matériaux ne doivent pas être "mêlées" et encore plus dans le cas particulier d'une interface fluide/élastique. Pour ne pas 'mélanger' les informations sur les gradients enregistrées dans  $[\nabla_x Y]$ , on reprend les considérations vues pour le schéma numérique en deux dimensions Section 3. Le calcul des valeurs de  $(Y_{,2}^i)^\pm$  et  $(Y_{,3}^i)^\pm$  est donc modifié :

$$\begin{aligned} (Y_{,2}^i)^- &= (Y_{,2}^i)_\ell & \text{et} & \quad (Y_{,2}^i)^+ = (Y_{,2}^i)_r \\ (Y_{,3}^i)^- &= (Y_{,3}^i)_\ell & \text{et} & \quad (Y_{,3}^i)^+ = (Y_{,3}^i)_r, \quad i = 1 \dots, 3 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Les variables  $\pm$  résultent, en fait, d'un prolongement par continuité des données géométriques du solide. Ce choix ne permet pas de vérifier les conditions de compatibilité (2.52a–2.52c) mais est nécessaire pour que l'information sur les gradients provienne uniquement du matériau de chaque cellule de part et d'autre de l'interface.

## 4.2 Représentation des matériaux dans le code

Pour connaître quel matériau est présent à chaque instant dans les cellules du maillage, on utilise le signe de la fonction level set. Le maillage est recouvert d'un masque  $M$  tel que

$$\begin{cases} M(i, j, k) = 1 & \text{si } \phi(i, j, k) \leq 0 \\ M(i, j, k) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.72)$$

où  $(i, j, k)$  sont les coordonnées de la maille  $C_{i,j,k}$  en trois dimensions et  $\phi(i, j, k)$  la valeur de la fonction level set dans cette maille. Chaque valeur de  $M$  représente un matériau donné.

On utilise ce masque  $M$  pour déterminer si le calcul des flux numériques doit se faire entre deux mailles d'un même milieu ou avec le solveur multi-matériaux. Les normales de l'interface coïncident donc, dans chaque direction 1, 2 et 3, avec les normales aux bords des mailles. Ce

procédé permet de s'affranchir de l'utilisation de la normale de la fonction level set et donc de la redistanciation de celle-ci. En revanche, les interfaces sont considérées comme "pixelisées". Le schéma numérique est donc à l'ordre 1 sur les mailles englobant l'interface. Plus le maillage est raffiné, plus la pixellisation s'estompe.

### Algorithme

L'algorithme employé dans le code pour la résolution du système d'équations (1.59) est le suivant :

1. Reconstruction des pentes par la méthode MUSCL ;
2. Calcul des flux numériques aux interfaces intercellulaires avec le solveur HLLC élastique ou le solveur multi-matériaux si les matériaux dans les cellules diffèrent ;
3. Intégration en temps par la méthode de Runge-Kutta 2 ;
4. Advection de la fonction level set  $\phi$ . Le gradient  $\nabla_x \phi$  est calculé par la méthode du WENO5 [40] et l'équation en temps est résolue par un schéma de Runge-Kutta 2 ;
5. Mise à jour des variables des mailles si celles-ci ont changé de matériau.

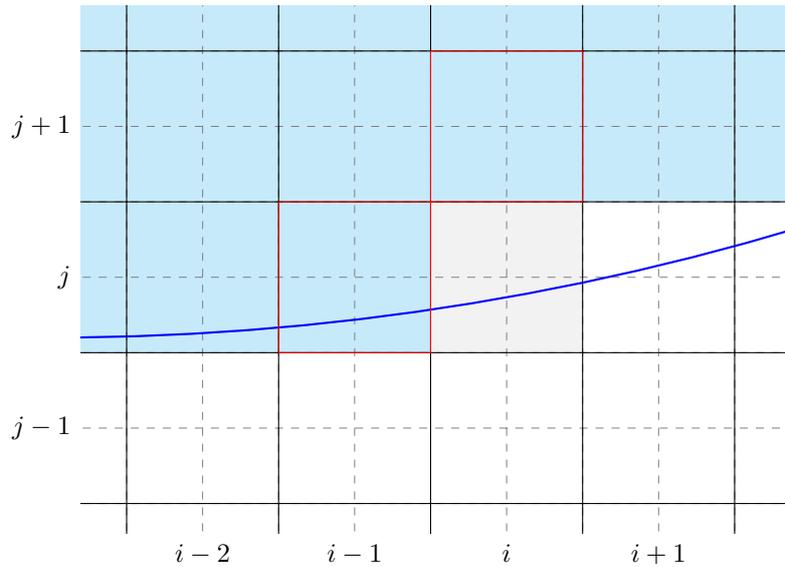
### Mise à jour des cellules

Après résolution du système dynamique, la fonction level set est advectée. Si lors de son transport sa position a dépassé certains centres de maille, alors ces mailles changent de matériau. Il faut donc leur attribuer de nouvelles variables adaptées au nouveau matériau qu'elles contiennent. Dans ce cas, on leur donne une valeur qui est la moyenne des états intermédiaires  $\psi^+$  ou  $\psi^-$  déterminés et stockés lors du calcul des flux numériques avec le solveur multi-matériaux et appartenant au nouveau matériau de la maille.

Une illustration est montrée Figure 2.8 pour la mise à jour d'une maille, en deux dimensions pour plus de clarté. Les mailles bleues correspondent à  $M = 1$  et les mailles blanches à  $M = 0$ . Le trait plein représente l'iso-zéro de la fonction level set. La maille  $C_{i,j}$  change de matériau (devient bleue). Son nouvel état  $\psi_{i,j}$  au temps  $t^{n+1}$  sera la moyenne de l'état  $\psi^-$  provenant du problème de Riemann entre les mailles  $C_{i-1,j}-C_{i,j}$  et de l'état  $\psi^+$  provenant du problème de Riemann entre les mailles  $C_{i,j}-C_{i,j+1}$ , tout deux calculés au temps  $t^n$  lors de l'utilisation du solveur multi-matériaux.

La condition de stabilité numérique CFL limite le pas de temps d'intégration par la plus rapide des vitesses des ondes. L'interface (l'iso-zéro) ne peut donc pas traverser une maille en un pas de temps. Une maille ne peut alors pas changer de matériau deux itérations de suite.

La méthode level set permet de fusionner ou de diviser des structures. Dans le cas particulier où ces structures deviennent plus petites que la taille d'une maille alors elles sont supprimées par la méthode ci-dessus.



**Figure 2.8** – Schéma de mise à jour des mailles en deux dimensions. Le trait plein bleu représente l'iso-zéro de la fonction level set. La maille grisée change de matériau (devient bleue). Les mailles cerclées de rouge sont les mailles dont on utilise l'état intermédiaire calculé à l'interface avec la maille grisée pour la moyenne du nouvel état dans cette maille.

## 5 Les conditions aux limites

Au bord du domaine de calcul voire, dans certains cas, à l'interface matérielle, on définit des conditions aux limites. Ces conditions sont utilisées pour le calcul des flux numériques sur les mailles du bord. On définit comme cellule "fantôme" la maille fictive qui est créée de l'autre côté de l'interface numérique. Les états de ces cellules sont imposés selon les conditions de bord. Les problèmes de Riemann sont alors résolus entre les mailles de bord et leurs mailles fantômes.

### 5.1 Les conditions de bord

Les conditions de bord définissent le comportement de l'écoulement aux limites du domaine de calcul. Elles dépendent du problème considéré et sont de plusieurs types :

**Conditions de type Neumann :** la maille de bord est répliquée dans la cellule fantôme d'où  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  où  $n$  est la normale à l'interface intercellulaire. C'est une condition de sortie.

**Conditions de champ lointain :** la valeur de la maille fantôme est imposée à l'instant initial et reste constante au cours du temps. Elle est utilisée notamment dans le cas d'une condition d'entrée ne subissant pas de fortes perturbations.

**Conditions périodiques :** la cellule fantôme prend la valeur de la maille du bord opposé, soit dans le cas 1D (voir Figure 2.1)  $\psi_{in-1} = \psi_{out}$  et  $\psi_{out+1} = \psi_{in}$ . À noter qu'avec la parallélisation (voir plus loin Section 6), le répartiteur de processeurs assigne comme voisin le processeur gérant le bord opposé. Il n'y a alors plus besoin de calculer des conditions particulières.

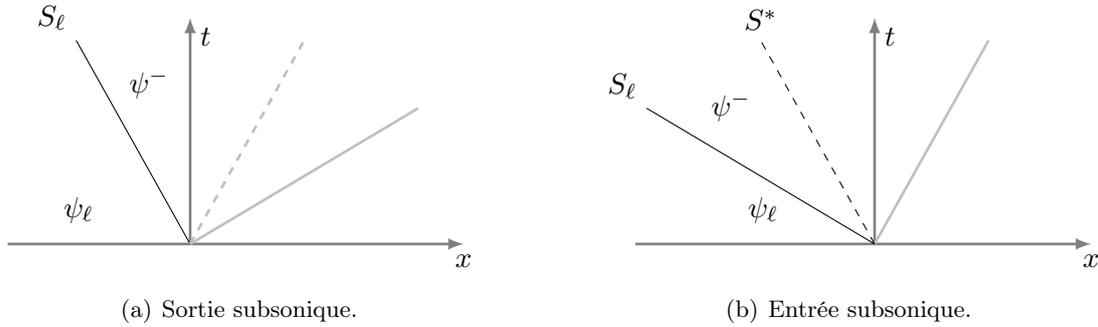
**Conditions de symétrie :** la vitesse normale est imposée nulle  $u_1^* = 0$  en  $x_{in/out}$  ce qui permet la réflexion de l'écoulement au bord du domaine (condition de Dirichlet). Pour obtenir une telle condition, il faut que  $u_1^- = -u_1^+$ . La condition de symétrie simule un axe de symétrie, permettant ainsi de réduire la taille du domaine de calcul, ou une paroi rigide.

**Conditions d'encastrement :** cette condition impose au bord du domaine  $u_1^* = 0$  et  $u_2^* = 0$  ce qui bloque aussi bien le détachement de la paroi que le glissement latéral pour les matériaux solides. Pour les fluides, cela revient à une condition de symétrie.

À noter que les cellules fantômes appartiennent au même matériau que la maille de bord. Une fois la maille fictive créée, le calcul des problèmes de Riemann se fait grâce au solveur HLLC. Les conditions de bord sont aussi utilisées dans la reconstruction des pentes MUSCL.

## 5.2 Le demi-problème de Riemann multi-matériaux

Dans certains cas d'interface ou de bord, il peut arriver que l'un des côtés ne soit pas ou partiellement défini (soit on ne veut pas l'imposer exprès, soit on ne connaît que certaines variables) *i.e.* que la résolution des équations en espace doit se faire entre un état connu, par exemple l'état  $\psi_\ell$  de la maille de gauche  $C_\ell$  pour être en accord avec la Figure 2.9, et un état non défini. Le problème de Riemann partiel a été initié par [16] pour établir les conditions aux limites des systèmes hyperboliques d'équations de conservation. Il est adapté ici au solveur HLLC multi-matériaux et présenté pour le système d'équations en trois dimensions.



**Figure 2.9** – Schémas des demi-problèmes de Riemann pour (a) une sortie et (b) une entrée subsoniques. Les ondes grisées sont celles se propageant dans le domaine fantôme.

En considérant le solveur de Riemann HLLC à trois ondes, on peut se retrouver dans deux configurations : une entrée ou une sortie.

### Condition ‘de sortie’ subsonique

Deux ondes sortent du domaine, autrement dit une onde provient du domaine fantôme, voir Figure 2.9(a). D’après [16], il conviendrait donc d’imposer une seule condition. Cependant, dans le cadre du système d’équations en trois dimensions, on a vu qu’en réalité sept ondes émergent du problème de Riemann (voir Chapitre 1 Section 5.2.2), le solveur à trois ondes étant une approximation pour la résolution. On peut donc considérer que derrière l’onde de choc du solveur HLLC se cache en fait trois caractéristiques. Il faudrait donc imposer trois conditions.

On peut retrouver ce résultat en faisant le compte des inconnues et des équations. Pour que le problème soit bien posé, il faut que le nombre d'inconnues égale le nombre d'équations. L'état  $\psi^-$  à déterminer contient huit composantes, voir le vecteur (2.48), auxquelles s'ajoutent les trois composantes du tenseur des contraintes à l'interface utilisées pour le calcul du flux  $F(\psi^-)$ . Il y a donc onze inconnues et les relations de saut de Rankine-Hugoniot à travers l'onde de choc de vitesse  $S_\ell$  fournissent huit équations, voir Équation (2.49b). Il convient alors d'imposer trois conditions de sortie pour calculer l'état  $\psi^-$ .

En général, on choisit d'imposer soit les vitesses  $u_1^-$ ,  $u_2^-$  et  $u_3^-$  soit les contraintes  $\sigma^{11,-}$ ,  $\sigma^{21,-}$  et  $\sigma^{31,-}$ . L'expression des premières composantes du vecteur  $Q_\ell$ , contenant l'état  $\psi^-$ , est donnée par les équations (2.54) :

$$\begin{aligned} Q_\ell^1 &= \rho^- u_1^- - S_\ell \rho^- \\ Q_\ell^2 &= \rho^- (u_1^-)^2 - \sigma^{11,-} - S_\ell \rho^- u_1^- \\ Q_\ell^3 &= \rho^- u_1^- u_2^- - \sigma^{21,-} - S_\ell \rho^- u_2^- \\ Q_\ell^4 &= \rho^- u_1^- u_3^- - \sigma^{31,-} - S_\ell \rho^- u_3^- \end{aligned} \tag{2.73}$$

On peut réécrire ces équations en fonction des vitesses :

$$\begin{aligned} \sigma^{11,-} &= Q_\ell^1 u_1^- - Q_\ell^2 \\ \sigma^{21,-} &= Q_\ell^1 u_2^- - Q_\ell^3 \\ \sigma^{31,-} &= Q_\ell^1 u_3^- - Q_\ell^4 \end{aligned} \tag{2.74}$$

ou en fonction des contraintes :

$$\begin{aligned} u_1^- &= \frac{Q_\ell^2 + \sigma^{11,-}}{Q_\ell^1} \\ u_2^- &= \frac{Q_\ell^3 + \sigma^{21,-}}{Q_\ell^1} \\ u_3^- &= \frac{Q_\ell^4 + \sigma^{31,-}}{Q_\ell^1} \end{aligned} \tag{2.75}$$

et on calcule le reste des composantes de  $\psi^-$  avec les équations du solveur multi-matériaux. Le flux numérique calculé au bord sera donc donné par  $Q_\ell + S_\ell \psi^-$ .

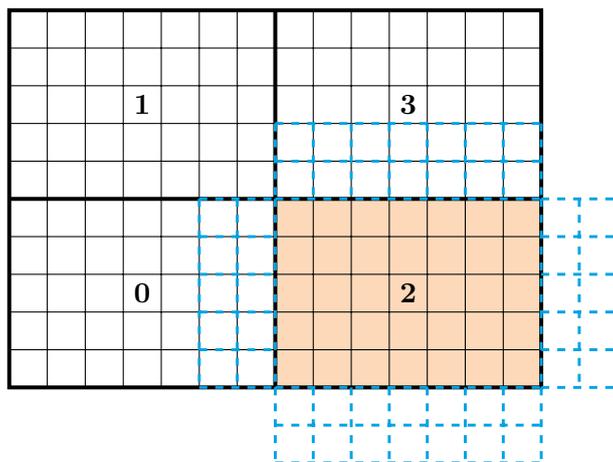
### Condition 'd'entrée' subsonique

Une seule onde sort du domaine, autrement dit deux ondes proviennent du domaine fantôme, voir Figure 2.9(b), une onde de choc et l'onde de contact. Il faudrait donc imposer quatre conditions : trois dues à l'onde de choc et une pour la discontinuité de contact. Cependant, dans le cas du solveur multi-matériaux, on est seulement intéressé par l'état adjacent à l'interface et du côté du milieu considéré c'est-à-dire l'état intermédiaire  $\psi^-$ . En refaisant le compte des inconnues et des équations, il apparaît que comme précédemment seules trois conditions sont nécessaires. Le problème revient alors à celui posé ci-dessus pour le cas d'une sortie.

La méthode de résolution du demi-problème de Riemann multi-matériaux présentée ici est facilement réductible au système d'équations 2D. Le demi-problème de Riemann multi-matériaux est utilisé par la suite pour gérer les problèmes de décollement des interfaces entre deux matériaux élastiques.

## 6 Parallélisation du code

La taille des maillages, notamment en 3D, peut devenir très importante et les calculs très coûteux en temps. Il devient raisonnable de paralléliser le code. Cette parallélisation est effectuée à l'aide de la librairie MPI. Le domaine de calcul est divisé en sous-blocs (partitionnement) chacun pris en charge par un processeur. Chaque processeur possède au plus quatre processeurs voisins en 2D (six processeurs voisins en 3D). On appelle "ouest" le voisin de gauche, "est" le voisin de droite, "sud" le voisin en-dessous et "nord" le voisin au-dessus. Les processeurs exécutent en même temps le code sur leur bloc de mailles alloué.



**Figure 2.10** – Partitionnement du domaine en deux dimensions pour 4 processeurs et mise en place des mailles fantômes (en pointillés) pour le processus 2.

Pour mener à bien les calculs sur les mailles aux bords des blocs, les processeurs doivent recevoir de leurs voisins les données contenues dans leurs mailles du bord. Par exemple, les mailles sur bord gauche d'un processeur doivent connaître les états des mailles du bord droit de son voisin "ouest". Ces données reçues des processeurs voisins sont stockées dans des mailles dites "fantômes", cf Figure 2.10. Si le processeur n'a pas de voisin sur un ou plusieurs de ses bords, alors les conditions aux limites s'y appliquent.

L'avantage des maillages cartésiens est que le partitionnement du domaine de calcul est aisé à réaliser. Les calculs étant faits grâce à un *splitting* directionnel, les données nécessaires pour ces calculs se situent selon la direction des axes. Il n'y a pas de données obliques. Les communications sont donc très simples à mettre en place et directes.

### 6.1 Stencils à communiquer

Il faut choisir correctement le nombre de mailles à communiquer. En effet, moins il y a de communications, plus la parallélisation est efficace. La largeur de la bande de mailles communiquée dépend de la taille du stencil utilisé pour le calcul des flux et l'advection de la fonction level set.

On considère seulement une direction de communication. Au bord  $x_{i+\frac{1}{2}}$  de la maille  $C_i$ , le flux numérique  $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}(\psi_i, \psi_{i+1})$  est calculé grâce au solveur de Riemann approché. On a donc besoin des quantités des mailles  $C_i$  et  $C_{i+1}$ . Une reconstruction, de type MUSCL, des pentes des variables est appliquée pour monter le schéma à l'ordre 2 en espace. Le stencil pour la reconstruction dans la maille  $C_{i+1}$ , par exemple, est  $\{\psi_i, \psi_{i+1}, \psi_{i+2}\}$ . Il faut donc connaître également les quantités dans la maille  $C_{i+2}$  et dans la maille  $C_{i-1}$  pour la reconstruction dans la maille  $C_i$ . Le stencil pour calculer le flux  $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}}$  est donc  $\{\psi_{i-1}, \psi_i, \psi_{i+1}, \psi_{i+2}\}$ , voir Figure 2.11. Pour le calcul complet des flux numériques au deux bord de la maille  $C_i$ , le stencil est de largeur 5, voir Figure 2.11. Si la maille de bord est la maille  $C_1$ , alors le processeur doit recevoir deux mailles de son voisin de gauche.

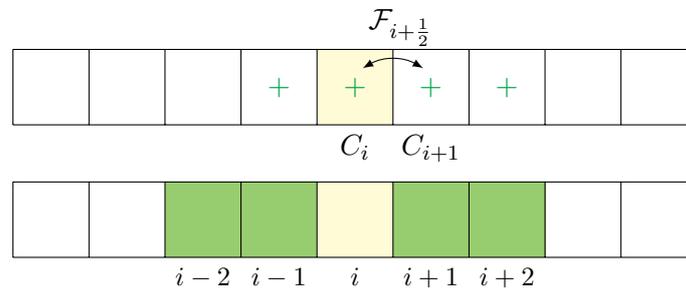


Figure 2.11 – Stencil pour calculer les flux numériques.

Le calcul du transport de la fonction level set  $\phi$  fait intervenir la méthode du WENO5 pour le calcul du gradient  $\nabla_x \phi$ . Cette méthode nécessite un stencil de sept mailles puisqu'on ne peut pas déterminer à l'avance dans quel sens sera le vrai stencil utilisé, voir Figure 2.12. Chaque processeur doit alors communiquer à ses voisins trois mailles de bord contenant les valeurs de la fonction level set.

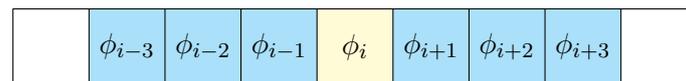


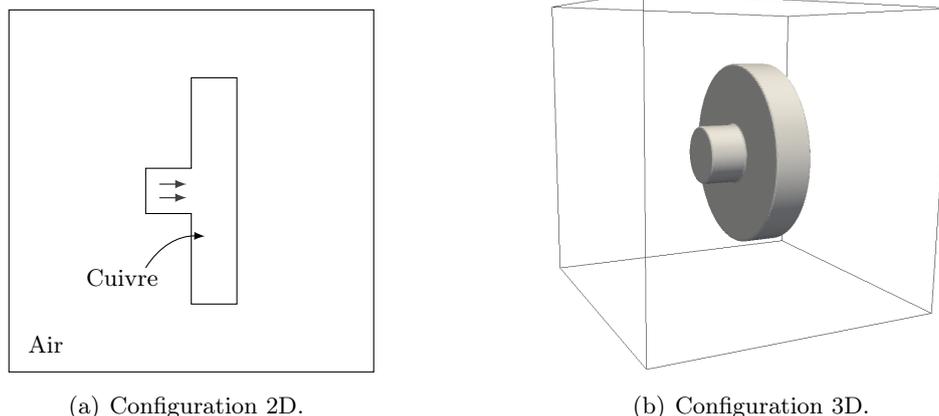
Figure 2.12 – Stencil pour calculer les flux du WENO5.

En résumé, les processeurs communiquent à leurs voisins nord, sud, est et ouest deux mailles de bord contenant les valeurs des états  $\psi$  pour le calcul des problèmes de Riemann avec reconstruction de pente et trois mailles de bord contenant les valeurs de la fonction level set pour le calcul du transport de celle-ci.

## 6.2 Performance

La performance d'un code parallèle est la mesure du gain en temps de calcul de ce code par rapport à sa version séquentielle (sur un seul processeur). Pour mesurer la performance, on effectue des tests de scalabilité. Il en existe deux types : la scalabilité faible et la scalabilité forte. Pour ces tests, on supprime toutes les sorties fichier du code. En effet, suivant la vitesse de la bande, le temps d'écriture dans un fichier peut être très variable et donc le temps de calcul total ne serait plus représentatif de l'effet de la parallélisation pure.

Les tests sont effectués sur un problème d'impact d'un projectile sur une plaque. Projectile et plaque appartiennent au même matériau cuivre (une seule fonction level set) et sont immergés dans de l'air. L'impact se fait avec une vitesse initiale du projectile de  $800\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le domaine de calcul est de taille  $[-0.4, 0.4]^2$  en deux dimensions et  $[-0.4, 0.4]^3$  en trois dimensions. Les configurations initiales sont schématisées Figure 2.13.



**Figure 2.13** – Configurations initiales des cas test utilisés pour l'évaluation de la performance de la parallélisation.

### 6.2.1 Scalabilité faible

La scalabilité faible considère un problème de taille fixe pour chaque processeur. Le maillage augmente proportionnellement avec le nombre de processeurs. On mesure le temps CPU total pour différents nombres de processeurs. Idéalement, le temps d'exécution du code pour un maillage de taille  $M$  sur un processeur est égal au temps d'exécution pour un maillage de taille  $nM$  sur  $n$  processeurs, pour un nombre fixe d'itérations.

On mesure le temps CPU moyenné sur 4 exécutions de 1000 itérations. On veut garder des sous-blocs de calcul carrés. Tout d'abord, on choisit de prendre un maillage de  $50^2$  par bloc ce qui revient à un maillage de  $50^2$  sur un processeur,  $100^2$  sur 4 processeurs,  $200^2$  sur 8 processeurs, jusqu'à  $800^2$  sur 256 processeurs. On s'intéresse ensuite à des maillages plus importants de  $100^2$  et  $200^2$  mailles par blocs.

Pour connaître l'écart relatif de temps entre le calcul sur un processeur et le calcul sur  $n$  processeurs, on trace la courbe  $\frac{T_n - T_1}{T_1}$ , voir Figure 2.14, où  $T_1$  et  $T_n$  sont les temps d'exécution sur un et  $n$  processeurs, respectivement.

Les résultats montrent l'impact des communications entre processeurs sur le temps de calcul total. En effet, on observe que pour  $50^2$  mailles par bloc l'écart relatif  $\frac{T_n - T_1}{T_1}$  pour  $n = 256$  processeurs est d'environ 0.9. Autrement dit, les communications comptent pour 90% de temps en plus que le temps nécessaire à la résolution du problème. Pour des tailles de bloc de  $100^2$  et  $200^2$  mailles, l'écart relatif est de seulement 0.27 et 0.23 pour 256 processeurs, respectivement. Pour une bonne efficacité de la parallélisation, il est donc conseillé de partitionner les maillages avec des blocs d'au moins  $100^2$  mailles pour des problèmes en deux dimensions.

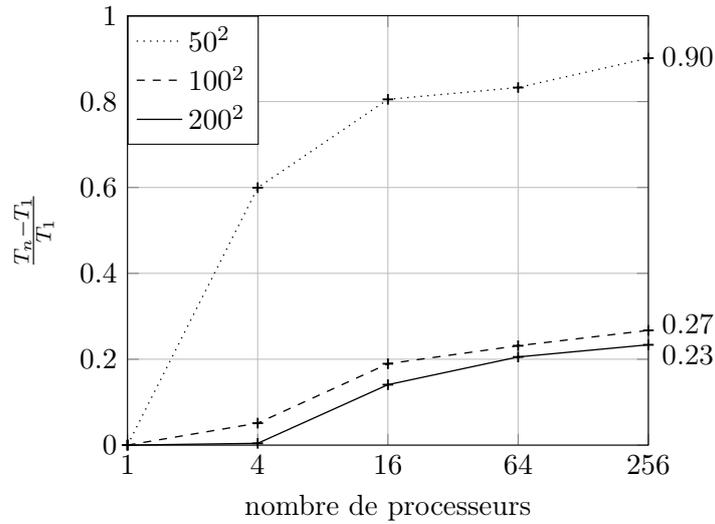


Figure 2.14 – Scalabilité faible sur des maillages de  $50^2$ ,  $100^2$  et  $200^2$  par bloc.

### 6.2.2 Scalabilité forte

Mesurer la scalabilité forte revient à considérer cette fois une taille de résolution fixe du domaine et à augmenter le nombre de processeurs. On mesure le temps CPU d'exécution du code et on calcule le gain (ou speedup) tel que  $g = \frac{T_1}{T_n}$  où  $T_1$  et  $T_n$  sont les temps de calcul pour un et  $n$  processeurs, respectivement. Une parallélisation idéale aurait un gain  $g = n$ .

On effectue les calculs sur  $2^n$  processeurs avec  $n \in [0, 8]$ . La taille du maillage en deux dimensions est fixée à  $800^2$  pour toujours garder des sous-blocs carrés. En trois dimensions, la taille du maillage est de  $120^3$ . Dans ce cas, les blocs ne sont pas cubiques mais possèdent le même nombre de mailles. Les résultats sont donnés Figure 2.15 où les temps utilisés sont moyennés sur 4 et 3 exécutions, respectivement.

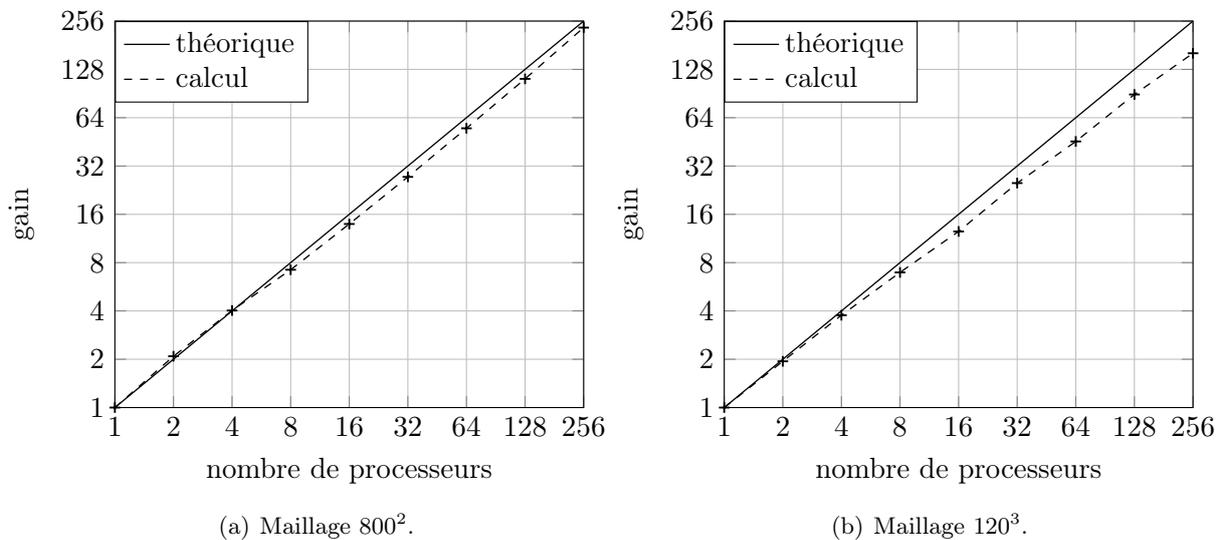


Figure 2.15 – Scalabilité forte.

On observe une très bonne scalabilité du code 2D. Un point important est qu'il n'y a qu'une seule donnée, le pas de temps, communiquée à tous les processeurs. Tout le reste des calculs s'effectue en parallèle.

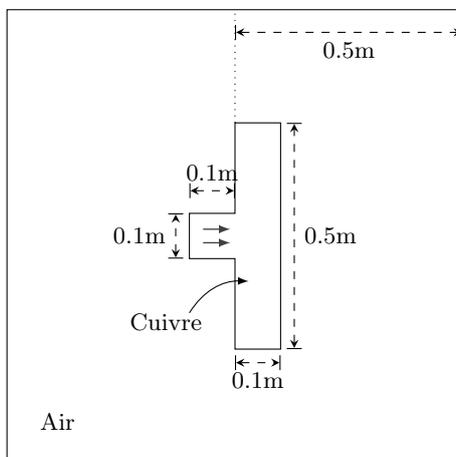
On observe sur le graphique Figure 2.15(a) que le point pour le calcul sur deux processeurs est au-dessus de la courbe théorique. Cette anomalie peut s'expliquer par le fait que les processeurs ont accès à plus de mémoire RAM. La communication avec la mémoire est donc plus rapide. Une deuxième explication est que, dans le cas d'un seul processeur, celui-ci doit s'arrêter sur toutes les instructions "if", pour savoir s'il a des voisins, sans en bénéficier. Le temps passé à vérifier ces instructions peut être plus long que les communications entre deux processeurs.

Le code 3D montre une moins bonne scalabilité. Avec des blocs de forme parallélépipédique, la quantité de données à communiquer diffère selon les directions. De plus, plus le nombre de processeurs augmente, plus les processeurs sont en charge de petit maillage et plus ils sont susceptibles de contenir des mailles d'un seul type de matériau. Le calcul est un peu plus long sur les mailles solides car la vitesse des ondes (1.87) est plus complexe à déterminer et il faut évaluer les valeurs des composantes tangentielles du tenseur des contraintes  $\sigma^{21}$  et  $\sigma^{31}$  (1.69). La charge entre processeurs peut donc varier.

### 6.3 Illustration

On présente une illustration de l'avantage de la parallélisation. On reprend une simulation d'impact en deux dimensions présentée par Gorsse *et al.* [30]. Le problème consiste en un projectile impactant une plaque à la vitesse initiale de  $800\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Les deux objets sont en cuivre et sont immergés dans de l'air assimilé à un gaz parfait. Ils sont gérés par la même fonction level set.

La configuration initiale est schématisée Figure 2.16. Le domaine de calcul est  $[-0.5, 0.5]^2$ . La simulation de [30] est réalisée avec un maillage de  $1000^2$  sur un processeur et dure environ 22h. On la compare à une simulation faite en parallèle sur 576 processeurs et avec un maillage de  $4000^2$ . Cette simulation s'exécute en environ 6h.

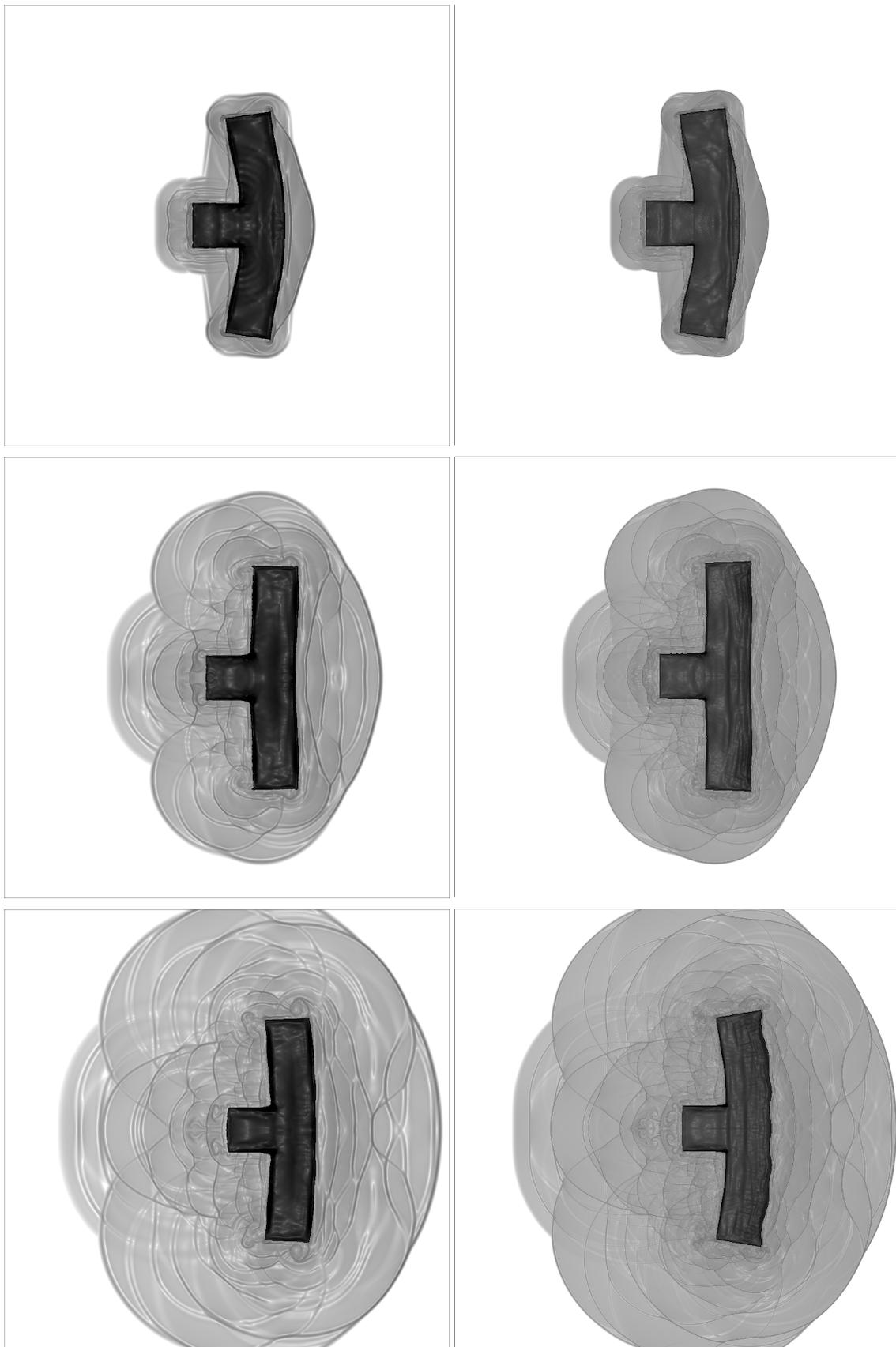


**Figure 2.16** — Schéma de la configuration initiale de l'impact en deux dimensions. Le projectile percute la plaque à la vitesse de  $800\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le domaine de calcul est  $[-0.5, 0.5]^2\text{m}$ .

## Chapitre 2. Une méthode de résolution des écoulements multi-matériaux

---

Figure 2.17 sont présentées les images schlieren des écoulements avec, à gauche, les résultats de [30] et, à droite, les résultats de la simulation en parallèle pour des temps identiques. On observe bien les mêmes structures des ondes loin de l'interface. Les détails sont plus visibles près de l'interface et à l'intérieur du solide. On remarque pour la simulation en  $4000^2$  que le bord de la plaque opposé au projectile tend à gondoler.



**Figure 2.17** – Impact d’un projectile sur une plaque en deux dimensions. À gauche, résultats tirés de [30] pour un maillage de  $1000^2$ . À droite, simulation en parallèle sur un maillage de  $4000^2$ . Images schlieren aux temps  $t = 140 \mu s$ ,  $t = 420 \mu s$  et  $t = 710 \mu s$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre, un schéma numérique pour la simulation de problèmes multi-matériaux a été présenté en deux et trois dimensions. Ce schéma permet la résolution du système d'équations conservatives (1.59) qui modélise l'écoulement des fluides et des solides hyperélastiques.

L'accent a été mis sur les problèmes d'interfaces sur maillages cartésiens et, en particulier, sur les conditions de bord. Différentes méthodes existent dans la littérature pour gérer ces problèmes d'interfaces. On a présenté les approches par interface diffuse et par interface sharp. Il existe, cependant, d'autres méthodes de frontières immergées notamment la méthode de Peskin [62] ou les méthodes de type cut-cell. La solution choisie dans ce travail est de calculer, à la façon Ghost Fluid, deux flux à l'interface matérielle grâce au solveur de Riemann approché HLLC.

Les solveurs dans un seul milieu et pour le multi-matériau ont été détaillés pour des interfaces fluide/fluide, fluide/solide et solide/solide avec et sans condition de glissement. Le schéma numérique est monté à l'ordre 2 en espace et en temps.

Les conditions aux limites ont été explicitées et, en particulier, un demi-problème de Riemann multi-matériaux qui sera utilisé dans le chapitre suivant pour le problème de détachement des interfaces.

Les codes des modèles 2D et 3D sont parallélisés et affichent de très bonnes performances. L'avantage est de pouvoir augmenter fortement la taille des maillages sans que le temps de calcul devienne rédhibitoire, ce qui est d'autant plus vrai pour le code en trois dimensions qui peut requérir rapidement un nombre de mailles très important.

# Chapitre 3

## Validations et extensions

Dans ce chapitre, il est question de la validation du schéma numérique présenté au chapitre précédent avec le code en trois dimensions. Des cas tests sont effectués en 1D et 3D pour montrer la robustesse du schéma dans des cas d'interactions solide/solide, fluide/fluide et fluide/solide. On effectue ensuite une étude des instabilités d'interfaces dites de Richtmyer-Meshkov, notamment dans le cas d'interfaces élastiques. On présente finalement une modélisation pour permettre le détachement d'interfaces entre solides et simuler l'impact et le rebondissement élastique des objets.

Toutes les simulations présentées en deux dimensions sont réalisées avec le modèle 2D d'élasticité (1.60) et la méthode numérique décrite Chapitre 2 Section 3. Toutes les simulations en trois dimensions sont effectuées avec le modèle 3D d'élasticité (1.66) et l'extension de la méthode numérique décrite Chapitre 2 Section 4.

### 1 Validation du code 3D

On montre quelques résultats en une et trois dimensions. Tout d'abord, on présente un cas test de type tube à choc pour des matériaux élastiques, calculé avec le code 3D que l'on compare avec les résultats de [30] pour le modèle en deux dimensions. On étend ensuite les simulations réalisées en deux dimensions par [30] en trois dimensions. Ces simulations concernent des interactions choc/bulle et des impacts d'objets métalliques immergés dans un fluide.

#### 1.1 Simulation dans une direction

On présente, ici, une comparaison de modèle entre les codes 2D et 3D pour le cas d'un problème "1D". Le gradient des caractéristiques rétrogrades  $[\nabla_x Y]$  est alors donné en trois dimensions pour tout temps par

$$[\nabla_x Y] = \begin{pmatrix} Y_{,1}^1 & 0 & 0 \\ Y_{,1}^2 & 1 & 0 \\ Y_{,1}^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

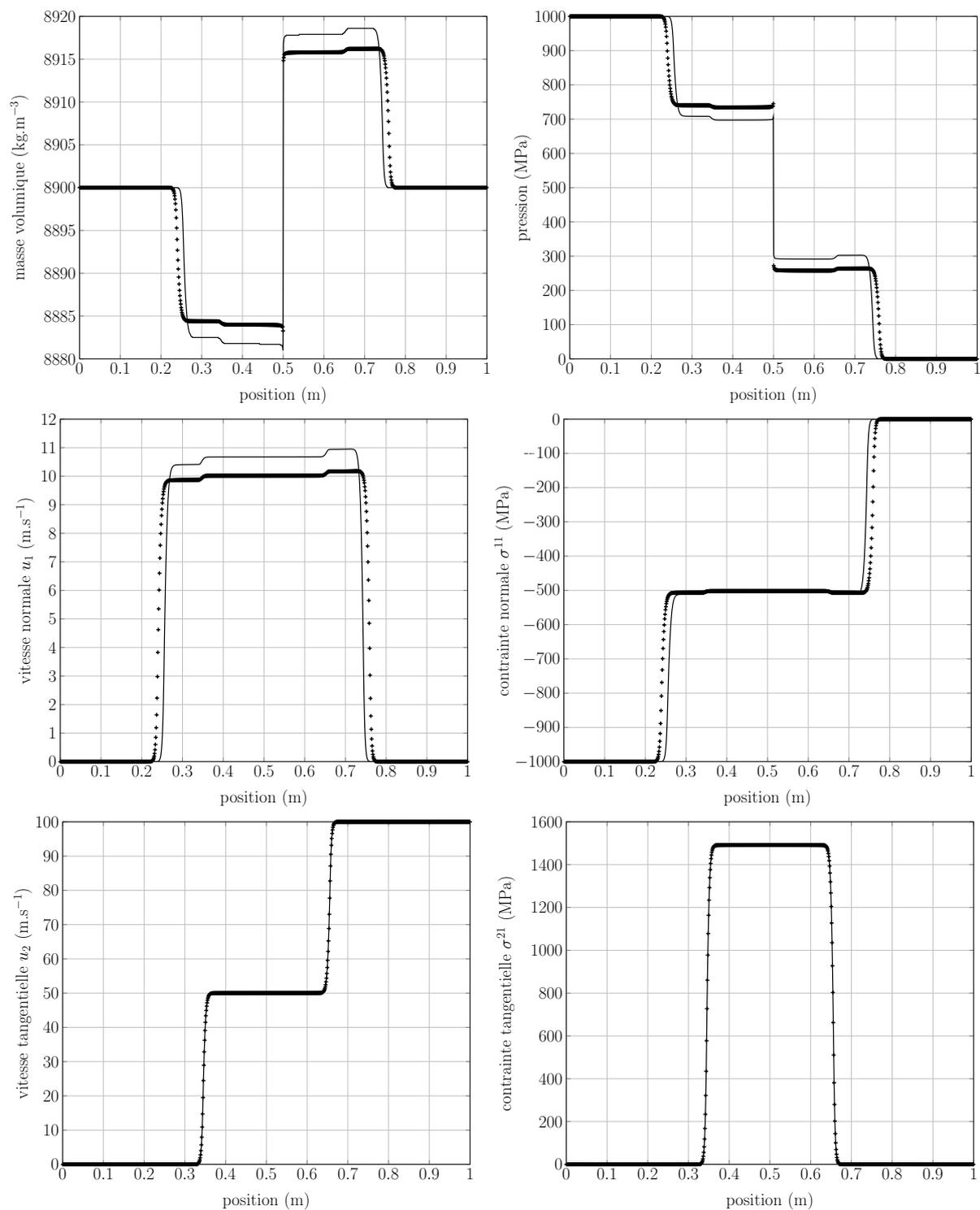
En effet, les flux numériques dans les directions 2 et 3 sont nuls, les six composantes  $Y_{,2}^i$  et  $Y_{,3}^i$  ne varient pas dans la direction 1, voir (1.66), et à l'instant initial le tenseur  $[\nabla_x Y]$  vaut l'identité. En deux dimensions, le tenseur  $[\nabla_x Y]$  est composé de manière similaire.

On reprend le cas test et les résultats présentés dans [30]. Ce cas test a également fait l'objet d'une étude dans [21]. Le problème consiste en un tube à choc solide. Le matériau en présence est du cuivre. Sa loi de comportement s'écrit avec les paramètres :  $\rho = 8900\text{kg.m}^{-3}$ ,  $p_\infty = 34.2\text{GPa}$ ,  $\chi = 50\text{GPa}$ ,  $\gamma = 4.22$  et  $a = b = 0$ . Le domaine de calcul est  $[0, 1]\text{m}$  et est séparé en une zone de haute pression où  $p = 1\text{GPa}$  à gauche et une zone de basse pression où  $p = 0.1\text{MPa}$  à droite. De plus, on impose une vitesse tangentielle dans la zone de basse pression telle que  $u = (0, 100, 0)\text{m.s}^{-1}$ . L'interface entre les deux zones est placée en  $x = 0.5\text{m}$ . Le calcul est effectué sur 1000 mailles dans la direction 1 et une seule maille dans les directions 2 et 3 et avec une CFL de 0.6.

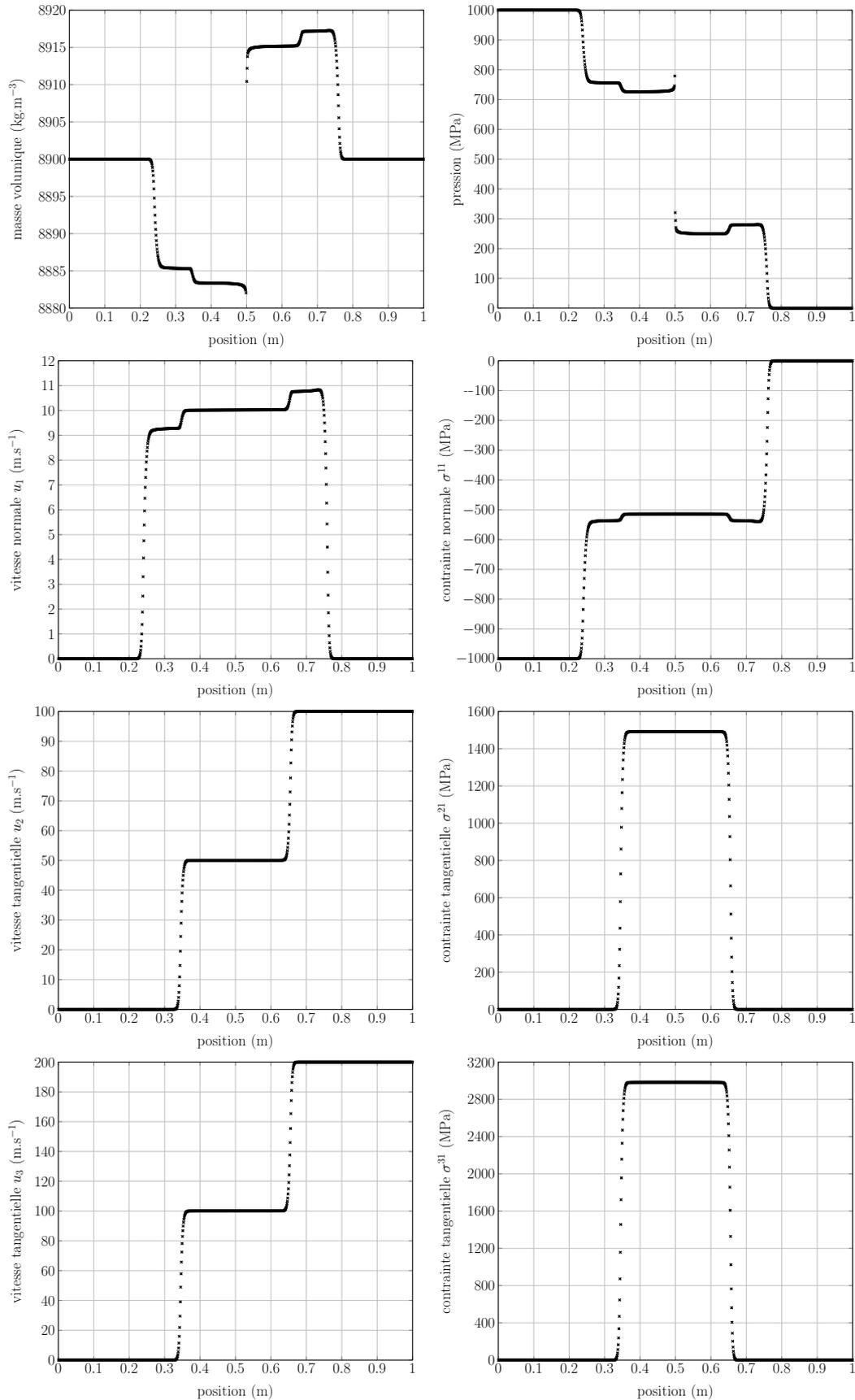
Les courbes de la masse volumique, de la pression, des composantes  $u_1$  et  $u_2$  de la vitesse ainsi que des composantes  $\sigma^{11}$  et  $\sigma^{21}$  du tenseur des contraintes au temps  $t = 46\mu\text{s}$  sont présentées Figure 3.1 pour les données de [30] (ligne pleine) et le calcul avec le code 3D (croix). On a omis les composantes  $u_3$  et  $\sigma^{31}$  de la vitesse et du tenseur des contraintes, respectivement, pour le calcul avec le code 3D. En effet, ces variables n'étant pas perturbées à l'instant initial, elles ne varient pas au cours du calcul d'après le système d'équations (1.66) et restent donc identiquement nulles. On observe une structure des ondes similaire entre les deux codes. On distingue la discontinuité de contact ainsi que les ondes longitudinales et tangentielles liées au schéma à 5 ondes pour les solides élastiques en deux dimensions, voir Chapitre 1 Section 5.2.1. Le décalage des courbes est dû au fait que le modèle 2D n'est pas une approximation du modèle 3D en contraintes planes, voir Chapitre 1 Section 5.2.

À présent, on effectue le même calcul avec cette fois une vitesse de la zone de basse pression dans les deux directions tangentielles telle que  $u = (0, 100, 200)\text{m.s}^{-1}$ . Les courbes de la masse volumique, de la pression et des composantes de la vitesse et du tenseur des contraintes au temps  $t = 46\mu\text{s}$  sont présentées Figure 3.2. On observe que les vitesses et les contraintes tangentielles ont des profils identiques. Par contre, on ne distingue pas les deux ondes tangentielles liées au schéma 7 ondes du modèle en trois dimensions, voir Chapitre 1 Section 5.2.2. En effet, il faut des conditions extrêmes pour que ces ondes se différencient [9]. De plus, il est montré dans [9] qu'à la limite des petites perturbations les ondes tangentielles se confondent.

## 1. Validation du code 3D



**Figure 3.1** – Solution (masse volumique, pression, vitesses et contraintes normales et tangentielles) du problème de Riemann résultant du cas test solide/solide. La courbe pleine trace les résultats de [30]. Les croix sont les résultats pour le calcul avec le code 3D. Les résultats sont présentés au temps  $t = 46 \mu\text{s}$ .



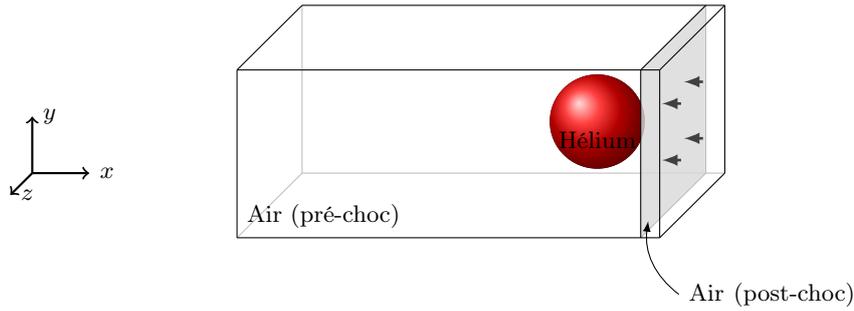
**Figure 3.2** – Solution (masse volumique, pression, vitesses et contraintes normales et tangentielles) du problème de Riemann résultant du cas test solide/solide pour une vitesse initiale dans les directions 2 et 3. Les résultats sont présentés au temps  $t = 46 \mu\text{s}$ .

## 1.2 Interactions choc/bulle

On présente des simulations en trois dimensions de l'interaction entre une onde de choc et une bulle. Les matériaux en présence sont fluides. Le modèle ne prend pas en compte les effets de tension superficielle. La taille des aspérités de l'interface est donc fortement liée au raffinement du maillage et la discrétisation numérique du problème est la cause de la rupture des interfaces.

### 1.2.1 Interaction air/bulle d'hélium

On présente un premier cas test. Il s'agit de l'impact à Mach 1.22 d'une onde de choc sur une bulle d'hélium immergée dans l'air. Ce cas test est utilisé dans la littérature pour valider les schémas numériques pour les écoulements multi-fluides : [22] pour leur méthode Ghost-Fluid, [52] pour une méthode d'interface diffuse, [51] pour leur approche type ALE. La configuration initiale est schématisée Figure 3.3. Les deux fluides sont assimilés à des gaz parfaits. Pour leurs lois de comportement, on prend donc  $a = b = p_\infty = \chi = 0$  et les constantes polytropiques  $\gamma_{\text{air}} = 1.4$  et  $\gamma_{\text{hélium}} = 1.648$ .



**Figure 3.3** – Schéma de la configuration initiale pour l'interaction choc/bulle d'hélium. Le domaine de calcul est  $[247.5, 470] \times [0, 89] \times [0, 89]$ mm.

Le domaine de calcul est  $[247.5, 470] \times [0, 89] \times [0, 89]$ mm. Il a été réduit en longueur par rapport à [30] pour éviter un temps de calcul trop important. Cette réduction n'influence pas le résultat. La bulle d'hélium est de centre  $(420, 44.5, 44.5)$ mm et de rayon 25mm. L'onde de choc est placée à 40mm de la bulle. Les conditions initiales des fluides sont listées Tableau 3.1. Les conditions aux limites sont de type champ lointain à l'entrée (côté onde de choc) et de type Neumann en sortie. Les autres bords sont assimilés à des parois. Le calcul est fait sur un maillage de  $1000 \times 400 \times 400$  avec 160 processeurs.

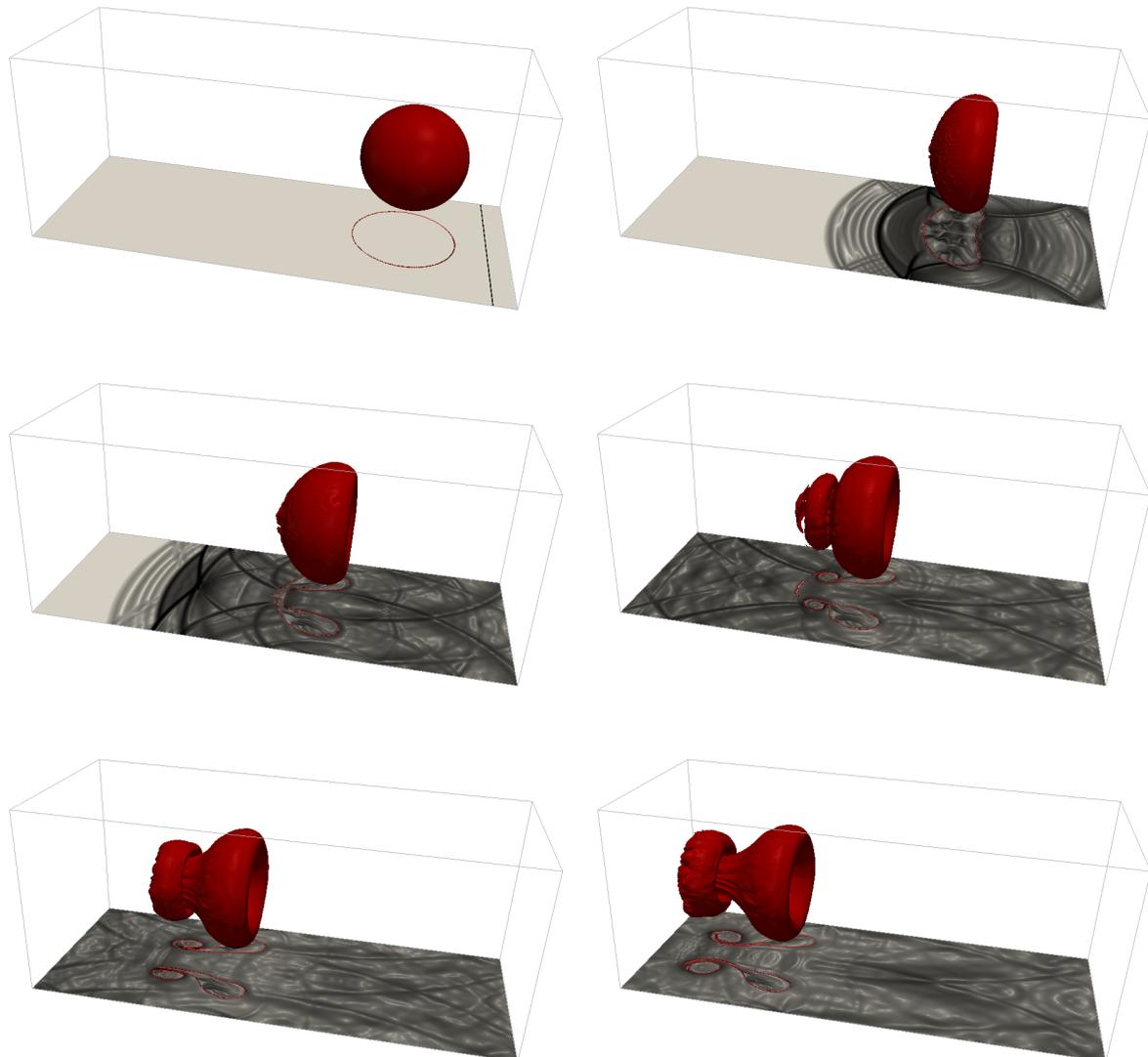
Matériau	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$u_1$ (m.s <sup>-1</sup> )	$u_2$ (m.s <sup>-1</sup> )	$u_3$ (m.s <sup>-1</sup> )	$p$ (Pa)
Air (pré-choc)	1.225	0	0	0	101325
Air (post-choc)	1.6861	-113.534	0	0	159059
Hélium	0.2228	0	0	0	101325

**Tableau 3.1** – Conditions initiales des fluides pour le cas de l'interaction choc/bulle d'hélium à Mach 1.22.

L'iso-zéro de la fonction level set et les images schlieren de la coupe en  $y = 44.5\text{mm}$  (à travers le centre de la bulle) à différents temps sont présentées Figure 3.4. Le schlieren correspond au champ du gradient de densité  $|\nabla\rho|$ . L'échelle utilisée pour le tracé est logarithmique ce qui permet de faire apparaître les variations de gradient à l'intérieur des fluides et non uniquement au niveau de l'interface.

Les structures observées sont en bon accord avec [26] qui comparent leurs résultats avec des expériences. On voit que l'onde transmise dans l'hélium est plus rapide que l'onde de choc incidente, ce qui est dû au fait que la vitesse du son est plus importante dans l'hélium que dans l'air. Une fois que l'onde transmise à traverser la bulle, elle crée une onde supplémentaire dans l'air au repos qui interagit par la suite avec l'onde de choc incidente. La bulle d'hélium est comprimée par le centre. On peut alors remarquer une forme en champignon caractéristique des instabilités de Richtmyer-Meshkov. L'air étant plus dense que l'hélium, le champignon se crée dans l'air, voir plus loin Figure 3.15. La bulle finit par former un anneau et s'enroule sur elle-même dans sa direction de déplacement.

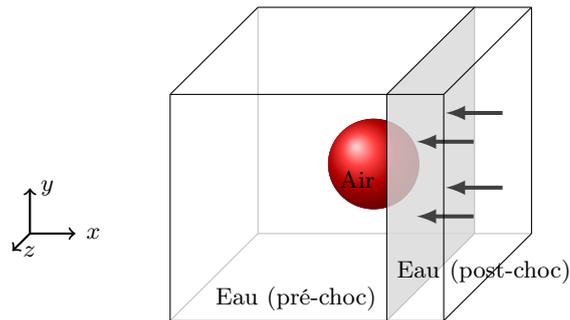
Une simulation d'interaction choc/bulle d'hélium en trois dimensions est présentée par [32]. Elle est effectuée pour une onde se propageant à Mach 3 dans l'air. Le domaine de calcul est discrétisé sur quatre milliards de mailles.



**Figure 3.4** – Interaction choc/bulle d'hélium à Mach 1.22 dans l'air. Images schlieren de la coupe en  $y = 44.5\text{mm}$  et iso-zéro de la fonction level set aux temps  $t = 88\mu\text{s}, 176\mu\text{s}, 352\mu\text{s}, 528\mu\text{s}, 704\mu\text{s}, 880\mu\text{s}$  de gauche à droite et de haut en bas.

### 1.2.2 Interaction eau/bulle d'air

Le second cas test simule l'impact à Mach 1.422 d'une onde de choc sur une bulle d'air immergée dans l'eau. Ce cas test a été présenté par [72, 3] pour des modèles d'interface diffuse. Il est plus sévère que le cas test précédent car il implique des matériaux de grandes différences de densité et de loi de comportement. L'air est assimilé à un gaz de van der Waals. On prend alors pour sa loi de comportement  $a = 5$ ,  $b = 10^{-3}$ ,  $p_\infty = \chi = 0$  et  $\gamma_{\text{air}} = 1.4$ . Pour modéliser l'eau, on utilise la loi de comportement pour un gaz raide avec  $a = b = \chi = 0$ ,  $p_\infty = 6 \cdot 10^8 \text{Pa}$  et  $\gamma_{\text{eau}} = 4.4$ .



**Figure 3.5** – Schéma de la configuration initiale pour l'interaction choc/bulle d'air. Le domaine de calcul est  $[-0.2, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \text{m}$ .

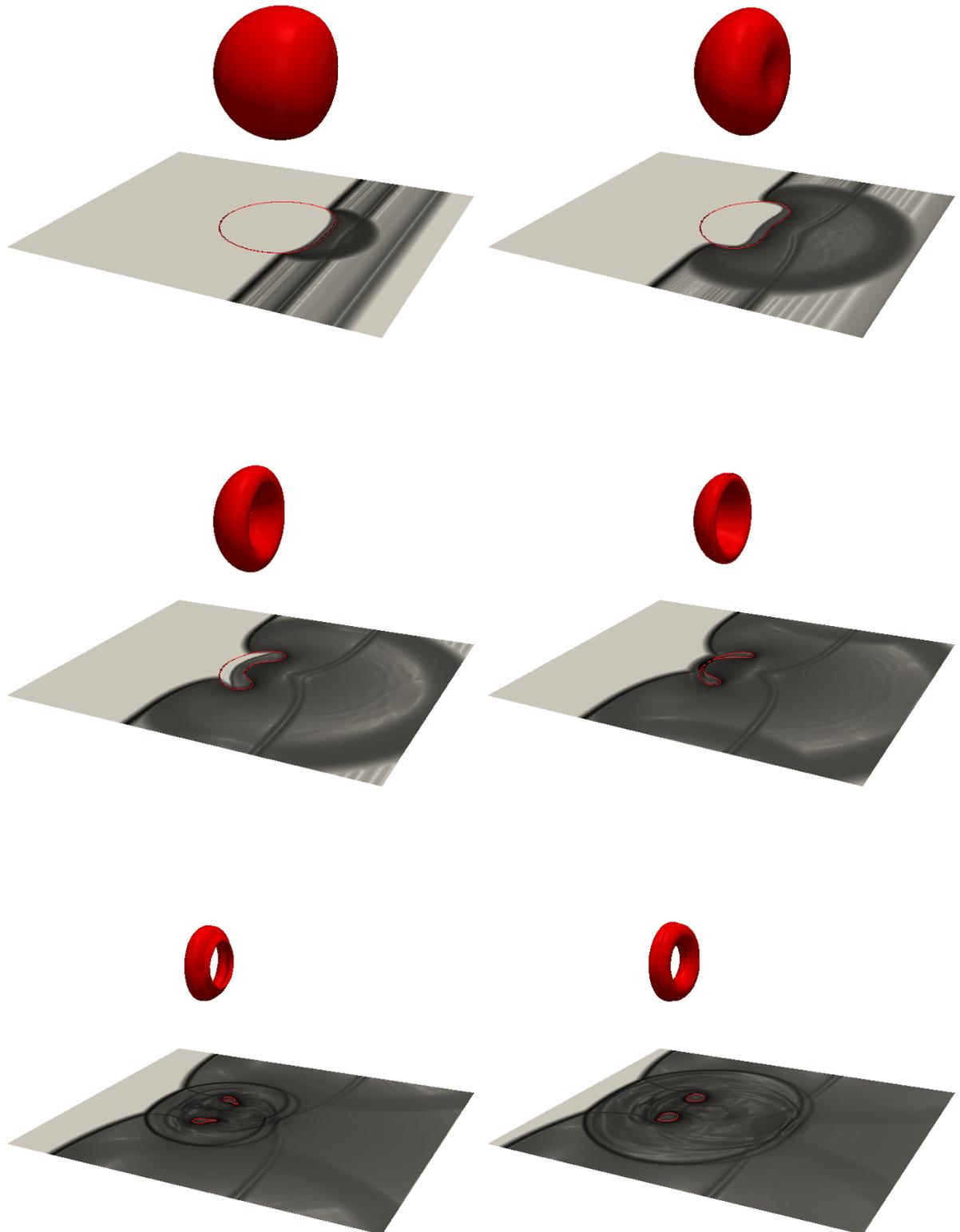
La configuration initiale est schématisée Figure 3.5. Le domaine de calcul est  $[-0.2, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \text{m}$ . La bulle d'air est de centre  $(0.5, 0.5, 0.5) \text{m}$  et de rayon  $0.2 \text{m}$ . L'onde de choc est placée à  $0.05 \text{m}$  de la bulle. Les conditions initiales des fluides sont listées Tableau 3.2. Les conditions aux limites sont les mêmes que pour le cas test de la bulle d'hélium. Le calcul est fait sur un maillage de  $480 \times 400 \times 400$  avec 96 processeurs.

Matériau	$\rho$ ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	$u_1$ ( $\text{m.s}^{-1}$ )	$u_2$ ( $\text{m.s}^{-1}$ )	$u_3$ ( $\text{m.s}^{-1}$ )	$p$ (Pa)
Eau (pré-choc)	1000	0	0	0	$10^5$
Eau (post-choc)	1230	-432.69	0	0	$10^9$
Air	1.2	0	0	0	$10^5$

**Tableau 3.2** – Conditions initiales des fluides pour le cas de l'interaction choc/bulle d'air à Mach 1.422.

L'iso-zéro de la fonction level set et les images schlieren de la coupe en  $y = 0.5 \text{m}$  (à travers le centre de la bulle) à différents temps sont présentées Figure 3.6.

Les structures observées sont en bon accord avec [30] pour une simulation en deux dimensions. Cette fois, l'onde transmise est bien plus lente que l'onde de choc incidente car la vitesse du son est plus grande dans l'eau que dans l'air. La bulle d'air est très fortement comprimée par le centre et finit par former un anneau qui s'enroule ensuite sur lui-même dans la direction de propagation de l'onde de choc incidente à l'instant initial.



**Figure 3.6** – Interaction choc/bulle d'air à Mach 1.422 dans l'eau. Images schlieren de la coupe en  $y = 0.5\text{m}$  et iso-zéro de la fonction level set aux temps  $t = 67\mu\text{s}$ ,  $t = 150\mu\text{s}$ ,  $t = 217\mu\text{s}$ ,  $t = 252\mu\text{s}$ ,  $t = 333\mu\text{s}$ ,  $t = 383\mu\text{s}$  de gauche à droite et de haut en bas.

### 1.3 Impacts

On présente, maintenant, des problèmes d'interactions fluide/structure. Les cas test consistent en une plaque impactée par un projectile à la vitesse de  $800\text{m.s}^{-1}$ . Plaque et projectile sont des cylindres et sont immergés dans l'air. À l'instant initial, le projectile est adjacent à la plaque. Les deux objets sont gérés par la même fonction level set. Dans ce cas, on les considère comme faisant partie du même matériau.

#### 1.3.1 Impact rigide

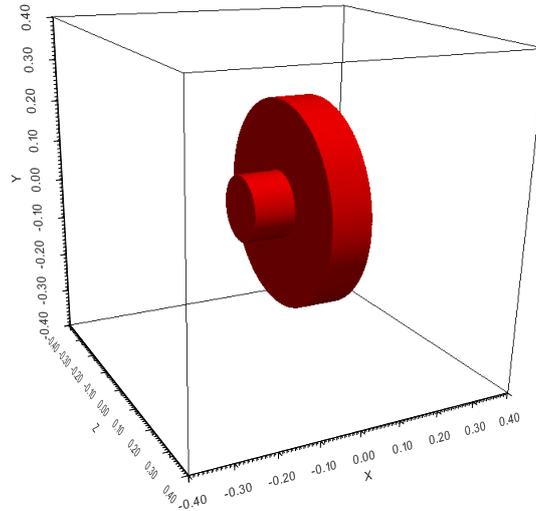
Un premier cas considère le projectile et la plaque comme des matériaux en cuivre. Ce cas test a été présenté pour des simulations en deux dimensions dans [21, 46, 30] et est également reproduit pour une taille de maillage de  $4000^2$ , voir Figure 2.17. L'air est assimilé à un gaz parfait. On prend donc pour les lois de comportement des deux matériaux  $a = b = 0$ . Les autres propriétés sont listées Tableau 3.3.

Matériau	$\gamma$	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$p_\infty$ (GPa)	$\chi$ (GPa)	$p$ (Pa)
Air	1.4	1000	0	0	$10^5$
Cuivre	4.22	8900	34.2	50	$10^5$
Matériau fluide	4.22	8900	34.2	0	$10^5$

**Tableau 3.3** – Propriétés des matériaux pour les cas de simulations d'impacts.

La configuration initiale de la simulation est présentée Figure 3.7. Le domaine de calcul est  $[-0.4, 0.4]^3\text{m}$ . Le projectile a un rayon de 0.08m et une épaisseur de 0.1m. La plaque a un rayon de 0.25m et une épaisseur de 0.1m. On note que les dimensions du projectile ne respectent pas les cotes de la simulation 2D. En effet, pour avoir un rapport de masse entre le projectile et la plaque plus proche de celui de la simulation 2D, on a augmenté la taille du projectile. La vitesse initiale du projectile est  $u = (800, 0, 0)\text{m.s}^{-1}$ . Les conditions aux limites sont de type Neumann. Le calcul est fait sur un maillage de  $600^3$  avec 216 processeurs.

Les résultats de la simulation sont présentés Figure 3.8 sous forme d'images schlieren sur les plans  $x = 0.03\text{m}$ ,  $y = 0\text{m}$  et  $z = 0\text{m}$ . L'iso-zéro de la fonction level set est représentée en rouge. Une onde élastique se propage dans le cuivre et vient impacter le bord opposé créant ainsi une onde de réflexion dans le cuivre et une onde transmise dans l'air. Les ondes élastiques rebondissant contre les bords du solide induisent sa déformation. Le solide reste, cependant, autour de sa configuration initiale. Les oscillations de la plaque/projectile produisent des ondes qui se propagent dans l'air. On retrouve bien dans ces résultats la plupart des structures des ondes que l'on peut observer dans [30] pour la simulation de ce problème avec le modèle en deux dimensions. Les différences sont dues à la dimension 3 rajoutée et à la représentation du projectile et de la plaque sous forme de cylindres et non de la forme présentée Figure 2.16 extrudée dans la direction 3. Il faut également noter la différence des modèles d'élasticité 2D et 3D.

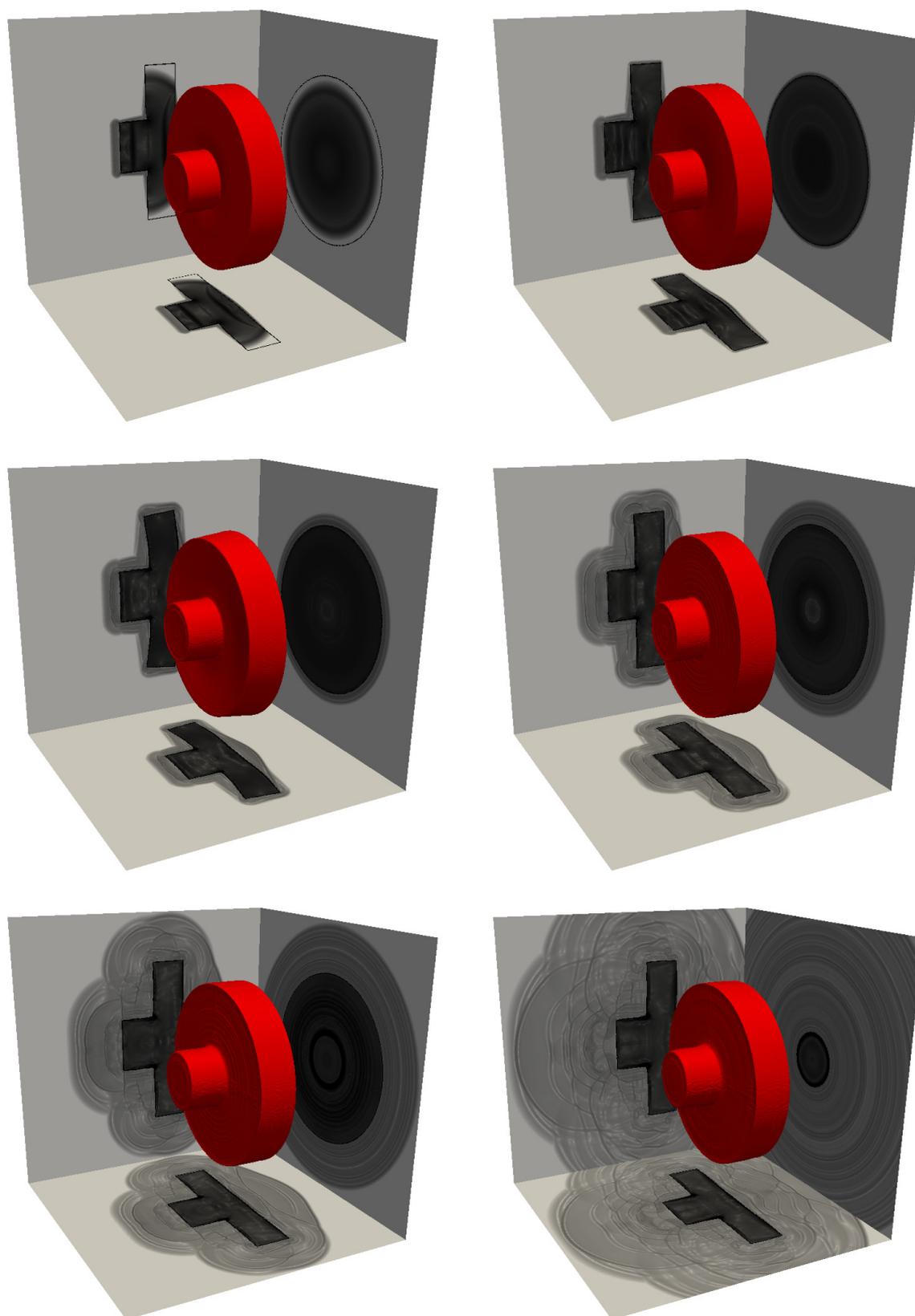


**Figure 3.7** – Configuration initiale pour le cas de l’impact d’un projectile sur une plaque cylindrique à la vitesse de  $800\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

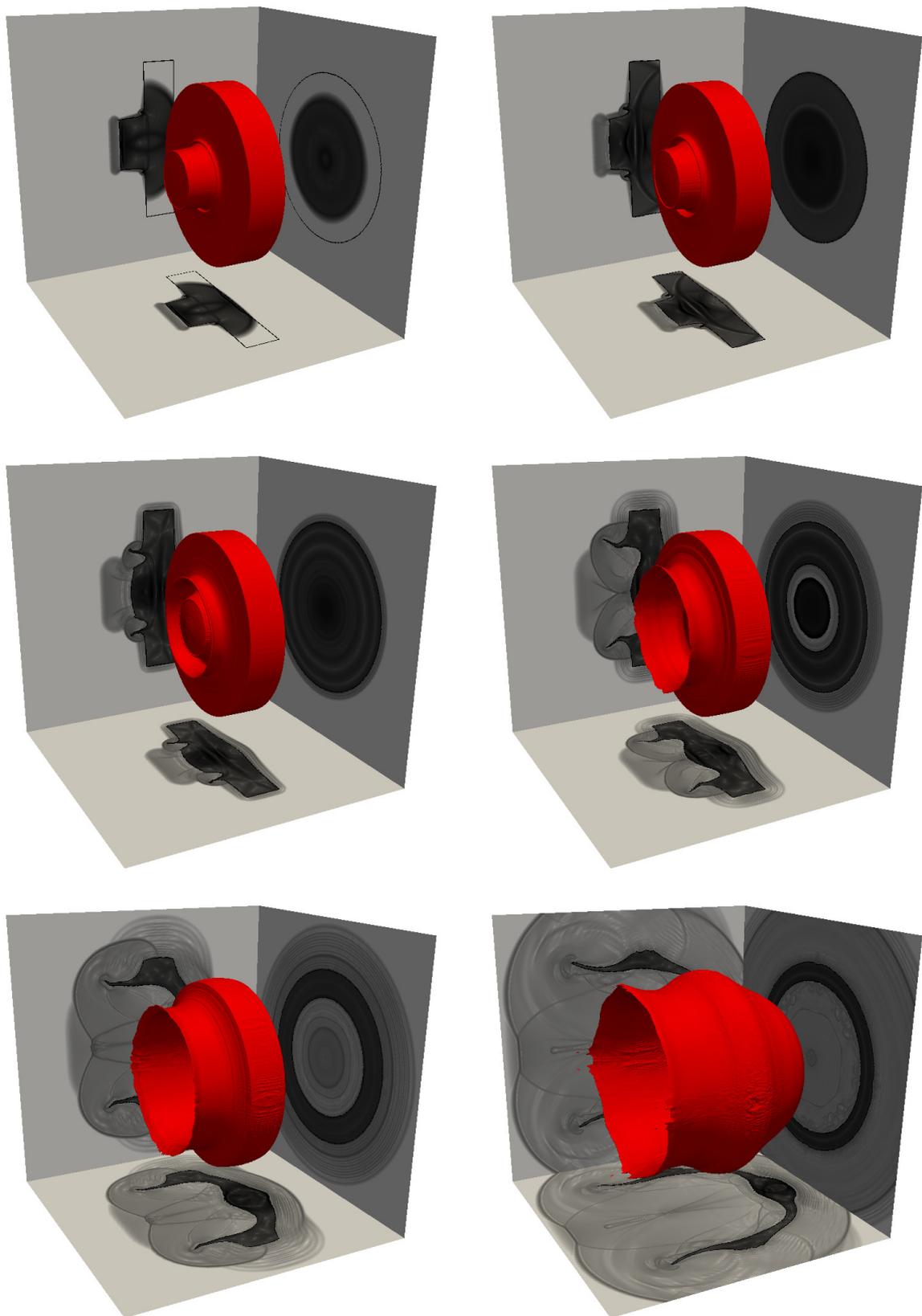
### 1.3.2 Limite fluide

Suivant [21] et [30], on considère à présent un problème où le module de cisaillement  $\chi$  du cuivre est nul. Cette propriété rend le solide insensible aux effets de cisaillement. Il se comporte alors comme un liquide avec la loi de comportement des gaz raides, voir ses propriétés Tableau 3.3. On reprend les mêmes configuration et conditions initiales que l’impact du cuivre. Le calcul est également fait sur un maillage de  $600^3$  avec 216 processeurs. Le calcul est du reste plus rapide pour ce cas test (38.5h contre 61.5h pour le cas test de l’impact de cuivre). En effet, les ondes étant plus rapides dans un matériau élastique que dans un fluide raide, le pas de temps est plus petit. Il faut donc plus d’itérations pour atteindre le même temps de simulation final.

Les images schlieren de l’écoulement pour les plans  $x = 0.03\text{m}$ ,  $y = 0\text{m}$  et  $z = 0\text{m}$  et l’iso-zéro de la fonction level set, tracée en rouge, sont présentées Figure 3.9. L’impact du projectile forme une couronne sur la plaque à la manière d’une goutte d’eau sur une flaque. Les deux matériaux subissent des déformations extrêmes. Le projectile finit par se fondre complètement dans la plaque. Avec  $\chi = 0$ , il n’y a plus aucune force de rappel pour ramener le matériau vers sa configuration d’origine. On retrouve avec ces résultats une forme finale du matériau et des structures des ondes similaires à celles présentées par [30]. Les différences proviennent de la dimension supplémentaire en 3D. On observe sur la représentation de l’interface les directions  $y$  et  $z$  du maillage. Ceci est dû à la discrétisation sur grille cartésienne.



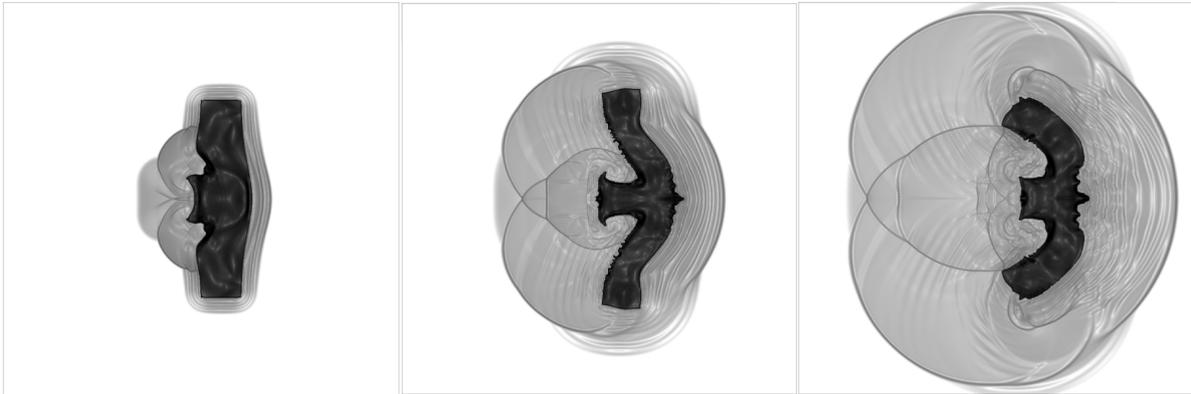
**Figure 3.8** – Impact d’un projectile sur une plaque cylindrique à la vitesse de  $800\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Images schlieren des coupes en  $x = 0.03\text{m}$ ,  $y = 0\text{m}$  et  $z = 0\text{m}$  et iso-zéro de la fonction level set aux temps  $t = 24\mu\text{s}$ ,  $t = 43\mu\text{s}$ ,  $t = 88\mu\text{s}$ ,  $t = 178\mu\text{s}$ ,  $t = 355\mu\text{s}$  et  $t = 710\mu\text{s}$  de gauche à droite et de haut en bas.



**Figure 3.9** – Impact d'un projectile sur une plaque cylindrique à la vitesse de  $800\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  dans le cas de la limite fluide. Images schlieren des coupes en  $x = 0.03\text{m}$ ,  $y = 0\text{m}$  et  $z = 0\text{m}$  et iso-zéro de la fonction level set aux temps  $t = 24\mu\text{s}$ ,  $t = 43\mu\text{s}$ ,  $t = 88\mu\text{s}$ ,  $t = 178\mu\text{s}$ ,  $t = 355\mu\text{s}$  et  $t = 710\mu\text{s}$  de gauche à droite et de haut en bas.

## 2 Les instabilités de Richtmyer-Meshkov

Un résultat présenté dans les travaux de thèse de Gorsse [29] consiste en l'impact en deux dimensions d'un projectile sur une plaque à la vitesse initiale de  $800\text{m.s}^{-1}$ . Les deux objets sont immergés dans l'air et ont comme propriétés celles du cuivre, voir Tableau 3.3, excepté le module de cisaillement  $\chi$  pris  $10^2$  fois plus petit. Cette propriété rend le matériau plus "mou" et moins sensible aux effets de cisaillement. À la fin de la simulation, l'interface des objets présentent des instabilités qui peuvent être assimilées à des instabilités dites de Richtmyer-Meshkov, voir Figure 3.10.



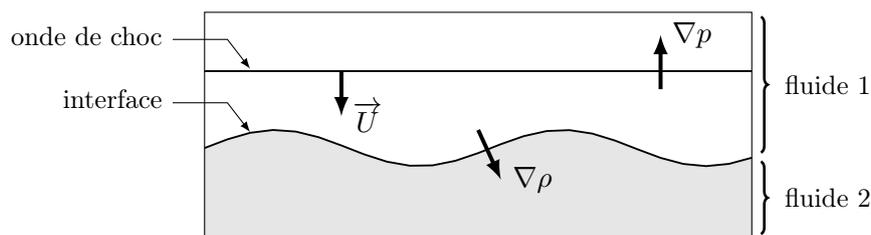
**Figure 3.10** – Images schlieren par Gorsse [29] de l'impact d'un projectile sur une plaque à la vitesse de  $800\text{m.s}^{-1}$  pour un coefficient de cisaillement  $\chi$  pris  $10^2$  fois plus petit, aux temps  $t = 140\mu\text{s}$ ,  $t = 420\mu\text{s}$  et  $t = 710\mu\text{s}$ .

Dans cette section, on se propose de reproduire ce phénomène pour des interfaces entre fluides, entre solides élastiques et entre un fluide et un solide et, par là, de montrer que les instabilités observées dans [29] ne sont pas des aberrations de la méthode numérique.

### 2.1 Quelques explications pour le cas entre deux fluides

Les instabilités observées par Richtmyer [66] et Meshkov [53] caractérisent des instabilités d'interface. Elles surviennent sur l'interface non plane entre deux fluides de densités différentes lorsque celle-ci est brusquement accélérée, par exemple, par le passage d'une onde de choc à son niveau. Une illustration de la configuration initiale menant à la génération d'instabilités de Richtmyer-Meshkov est présentée Figure 3.11. Une onde de choc initialement plate se propage dans une direction normale à l'interface dans le fluide 1 et percute l'interface perturbée fluide 1/fluide 2.

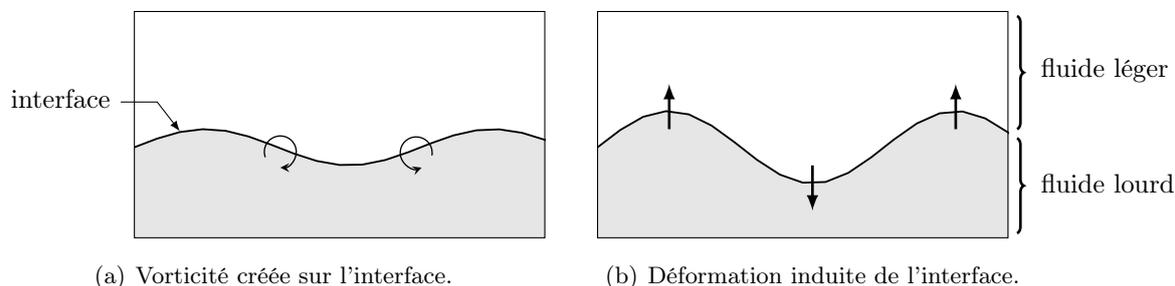
D'après Brouillette [10], toute interface présentant un défaut initial de planéité verra son amplitude augmentée, dans la plus part des cas, selon l'onde de détente induite par l'impact de l'onde de choc incidente sur la frontière entre les fluides. La perturbation initiale de l'interface peut être simplement décrite soit par une fonction sinusoïdale (mode simple) soit par une superposition de fonctions sinusoïdales (mode multiple). Après l'impact de l'onde de choc sur l'interface, une onde de choc est transmise dans le fluide 2 et une onde de choc, ou une onde de détente suivant les propriétés du fluide, est réfléchiée dans le fluide 1. L'interface a été impulsivement



**Figure 3.11** – Schéma de la configuration initiale menant à la génération d'instabilités de Richtmyer-Meshkov.

accélérée et se propage dans la même direction que l'onde de choc transmise, longitudinalement si le problème est dans un tube [10], radialement si le problème est circulaire [79].

Le mécanisme basique de l'apparition de ces instabilités d'interface est la génération de vorticité barocline résultant de la non-colinéarité du gradient de pression à travers l'onde de choc et du gradient de densité à travers l'interface lors du passage de l'onde sur l'interface. Dans le cas d'une interface sinusoïdale avec un fluide léger au-dessus et un fluide lourd en-dessous ( $\rho_{\text{léger}} < \rho_{\text{lourd}}$ ), la non-colinéarité des gradients de pression et de densité génère de la vorticité dans le sens trigonométrique d'un côté de la perturbation et de la vorticité dans le sens horaire de l'autre côté de la perturbation, voir Figure 3.12(a). L'instabilité des vortex cr s juste au niveau de l'interface entraîne la déformation de celle-ci, voir Figure 3.12(b).



**Figure 3.12** – Schéma initial des instabilités.

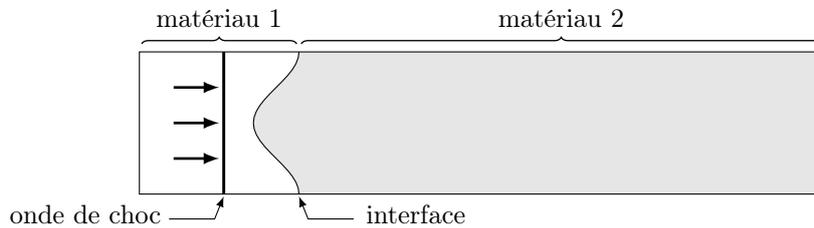
La frontière entre les fluides de plus en plus déformée amène à des instabilités secondaires. Il en résulte une zone de turbulence et de mélange des fluides. Comme l'amplitude de la perturbation de l'interface augmente avec le temps, les fluides "entrent" l'un dans l'autre menant à l'apparition de pics de fluide lourd au sein du fluide léger et de bulles/creux de fluide léger dans le fluide lourd. Les pics du fluide lourd peuvent se développer en formant des champignons. Ce profil en champignon est caractéristique des instabilités de Richtmyer-Meshkov, voir un exemple Figure 3.14 et Figure 3.15.

Résultats

On présente des simulations d’instabilités de Richtmyer-Meshkov pour des interfaces fluides en deux dimensions. Une onde de choc vient impacter une interface non plane entre deux fluides. L’interface est caractérisée par l’iso-zéro de la fonction level set  $\phi$  sous forme d’une fonction sinusoïdale dont l’équation est

$$\phi(x, y) = x - \delta (1 + \alpha \cos(\beta(y - \pi))), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

où  $\delta$  est la moyenne de la fonction sinusoïdale,  $\alpha$  l’amplitude des oscillations en pourcentage de  $\delta$  et  $\beta$  la fréquence des oscillations. Pour toutes les simulations, on choisit de prendre  $\delta = 0.4$ ,  $\alpha = 0.125$  et  $\beta = 10$  et d’adapter la fonction sinusoïdale de telle sorte que  $y \in [0, 1]$  représente une période de la fonction. La configuration initiale du problème est schématisée Figure 3.13.



**Figure 3.13** – Schéma de la configuration initiale pour la simulation d’instabilités de Richtmyer-Meshkov. L’interface est décrite par une fonction sinusoïdale.

On considère un fluide léger, l’hélium, et un fluide plus lourd, l’air. Les deux fluides sont assimilés à des gaz parfaits. Leurs lois de comportement prennent donc comme paramètres  $a = b = p_\infty = 0$ .

Deux configurations sont envisagées. Dans la première, l’onde de choc provient de l’hélium et l’air prend la place du matériau 2. Dans la seconde, c’est l’inverse, le matériau 1 est remplacé par de l’air et le matériau 2 par de l’hélium. Les conditions initiales des fluides avant et après l’onde de choc sont listées Tableau 3.4. Les conditions aux limites sont de type Neumann aux extrémités est et ouest du domaine de calcul. Les bords nord et sud sont soumis à des conditions périodiques.

Matériau	$\gamma$	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$u_1$ (m.s <sup>-1</sup> )	$u_2$ (m.s <sup>-1</sup> )	$p$ (Pa)
Air (au repos)	1.4	1	0	0	10 <sup>5</sup>
Air post-choc		2.811902232	506.31	0	497833.33
Hélium (au repos)	1.67	0.138	0	0	10 <sup>5</sup>
Hélium post-choc		0.327953	1338.05	0	526569.3

**Tableau 3.4** – Propriétés des fluides pour les cas d’instabilités de Richtmyer-Meshkov.

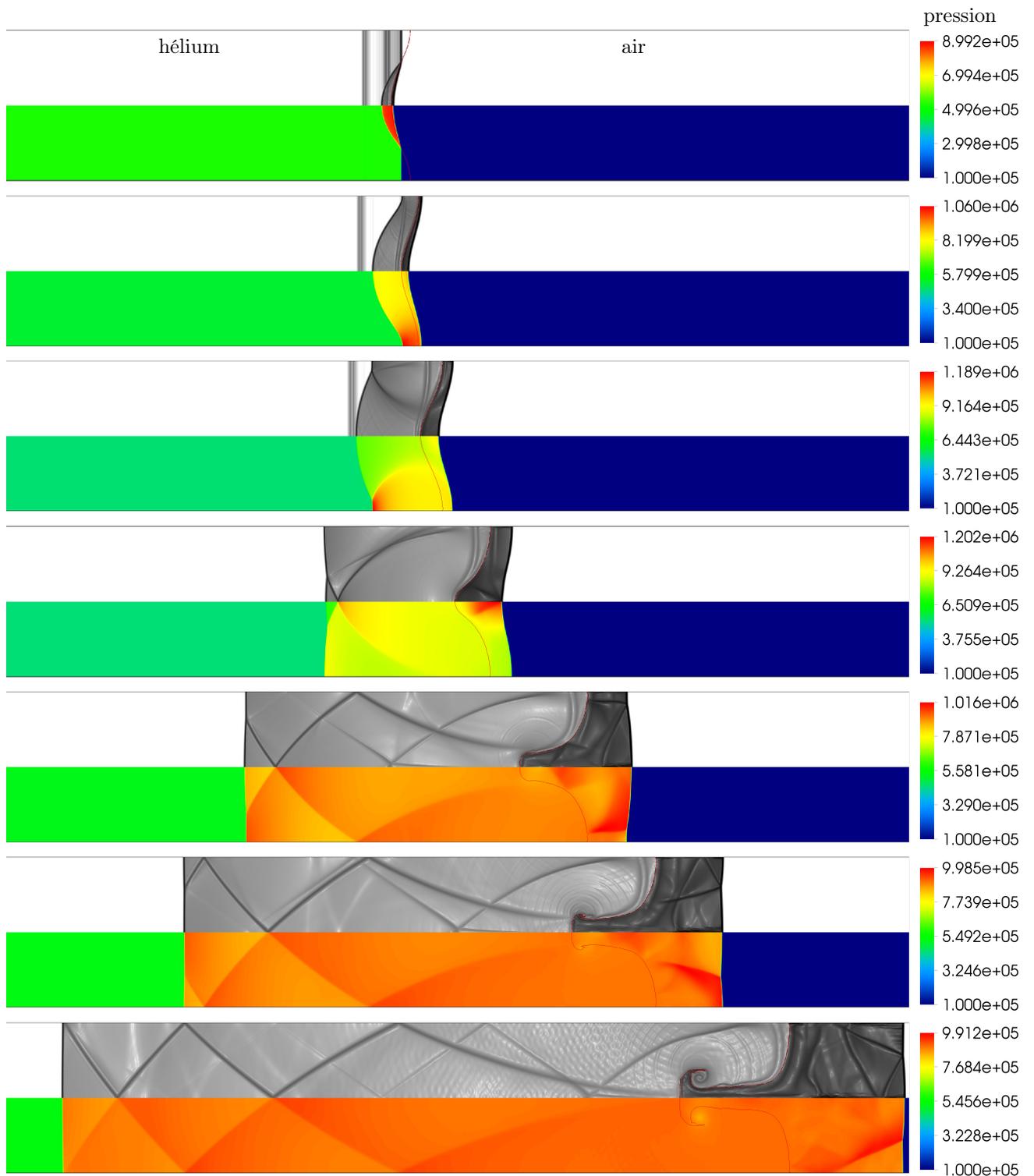
Par le premier cas, une onde de choc se propage à Mach 1.41 dans l’hélium et vient impacter l’interface hélium/air. Le domaine de calcul est  $[-3, 3] \times [0, 1]$ . Le calcul est effectué sur un maillage de  $3600 \times 600$  avec 216 processeurs. La durée d’exécution est d’environ 20min.

Les images schlieren de la simulation, les valeurs de la pression ainsi que l’iso-zéro de la fonction level set, tracée en rouge, sont présentées Figure 3.14. On observe bien une onde de

détente réfléchi dans l'hélium et une onde de choc transmise dans l'air qui ont la même forme que l'interface. L'onde réfléchi est beaucoup plus rapide que l'onde se propageant dans l'air. En effet, à pression équivalente, le ratio entre la vitesse du son dans l'hélium et la vitesse du son dans l'air est d'environ 2.94. À travers les conditions aux limites périodiques, les ondes interagissent les unes avec les autres. Au temps final, on retrouve les structures des ondes dépeintes dans [10]. L'amplitude de l'interface augmente jusqu'à ce que l'interface forme un pic. Le fluide lourd entre dans le fluide léger et développe une forme en champignon. Le fluide léger, quant à lui, forme un creux dans le fluide lourd.

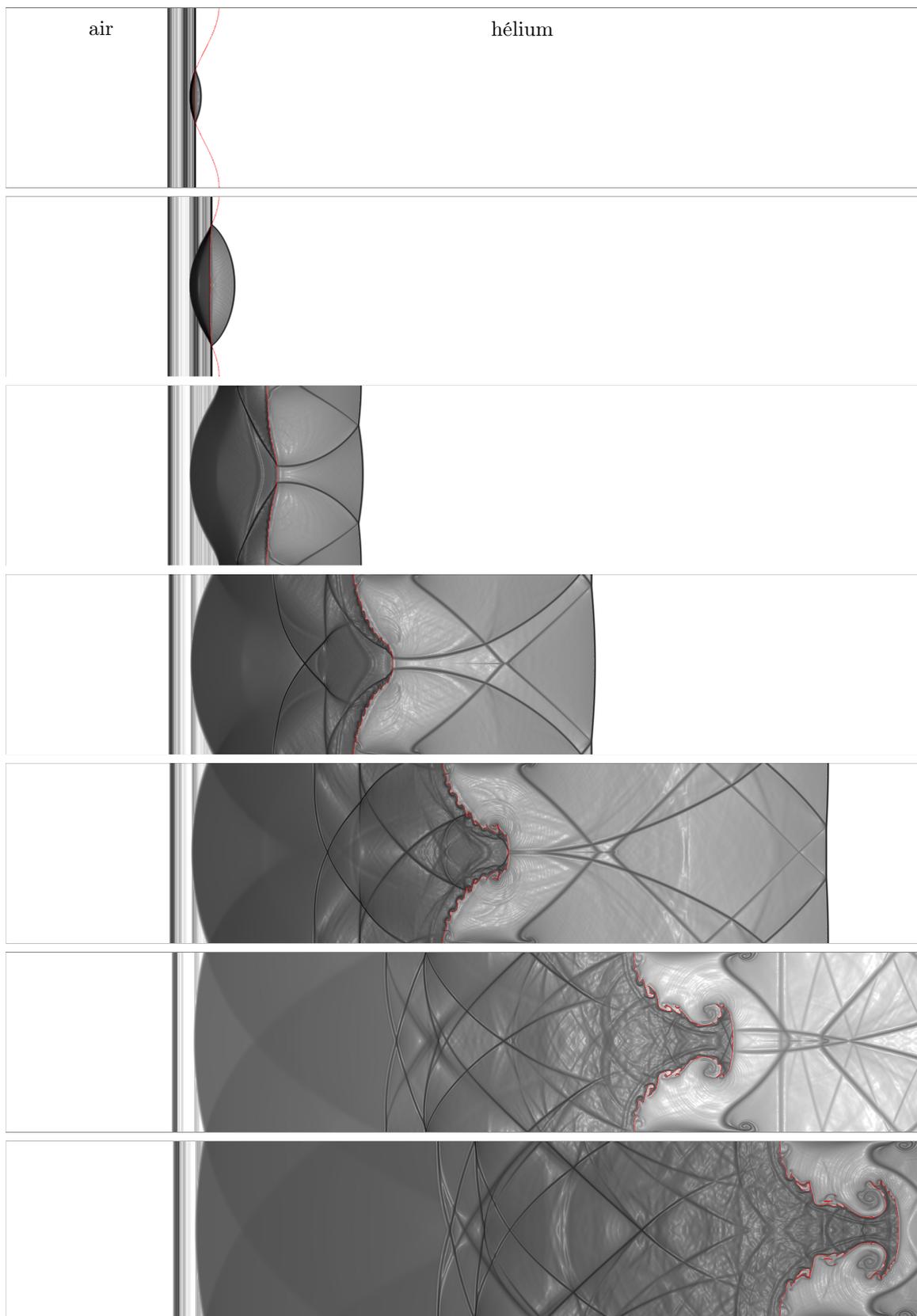
Dans le second cas auquel on s'intéresse, l'onde de choc se propage à Mach 1.58 dans l'air et impacte une interface air/hélium. Le domaine de calcul est translaté à  $[-5, 1] \times [0, 1]$ . Le calcul est de nouveau effectué sur un maillage de  $3600 \times 600$  avec 216 processeurs.

Les images schlieren de la simulation et l'iso-zéro de la fonction level set, tracée en rouge, sont présentées Figure 3.15. On observe une onde de choc transmise dans l'hélium et une onde de détente réfléchi dans l'air. Cette fois l'interface entre les fluides est complètement aplatie par l'onde de choc incidente et se déforme dans l'autre sens. Le fluide lourd forme donc de nouveau un pic dans le fluide léger et l'interface prend la forme d'un champignon. Le fluide léger forme un creux dans le fluide lourd.



**Figure 3.14** – Génération d’une instabilité de Richtmyer-Meshkov dans le cas de l’impact d’une onde de choc à Mach 1.41 sur une interface sinusoïdale hélium/air. Images schlieren, pression et iso-zéro de la fonction level set (en rouge) aux temps  $t = 0.095\text{ms}$ ,  $t = 0.189\text{ms}$ ,  $t = 0.379\text{ms}$ ,  $t = 0.757\text{ms}$ ,  $t = 1.515\text{ms}$ ,  $t = 2.083\text{ms}$  et  $t = 3.219\text{ms}$ .

## 2. Les instabilités de Richtmyer-Meshkov



**Figure 3.15** – Génération d’une instabilité de Richtmyer-Meshkov dans le cas de l’impact d’une onde de choc à Mach 1.58 sur une interface sinusoïdale air/hélium. Images schlieren et iso-zéro de la fonction level set (en rouge) aux temps  $t = 0.189\text{ms}$ ,  $t = 0.303\text{ms}$ ,  $t = 0.757\text{ms}$ ,  $t = 1.515\text{ms}$ ,  $t = 2.272\text{ms}$ ,  $t = 3.787\text{ms}$  et  $t = 4.923\text{ms}$ .

## 2.2 Instabilités sur les interfaces élastiques

L'article de Plohr & Plohr [65] s'intéresse aux instabilités de Richtmyer-Meshkov dans le cas de solides élastiques (pas de comportement plastique). Les auteurs considèrent un système d'équations conservatives en formulation eulérienne muni d'une loi de comportement hyperélastique.

Les conditions imposées à l'interface entre deux milieux élastiques sont telles que les matériaux ne peuvent pas se séparer et que le mouvement entre les deux matériaux se fait sans frottement (discontinuité des composantes tangentielles du tenseur des contraintes à travers l'interface). À cause de cette dernière condition, les ondes de cisaillement à l'interface seront faibles. Les ondes transversales (de cisaillement) sont donc négligées et les auteurs résolvent alors leur système d'équations pour un problème de Riemann linéarisé à trois ondes : deux ondes de choc longitudinales et une onde de contact.

En résumé, les auteurs affirment que l'amplitude initiale de la perturbation de l'interface ne varie pas au long terme et tend à osciller autour d'une asymptote quelle que soit la valeur du coefficient de cisaillement  $\chi$ , du nombre de Mach de l'onde de choc incidente ou du coefficient d'élasticité isostatique ( $\gamma p_\infty$ ). Ils attribuent ce résultat au fait que la vorticité qui se crée au niveau de l'interface est propagée par les ondes de cisaillement ce qui stabilise donc l'interface tandis que pour dans le cas des fluides la vorticité reste sur l'interface ce qui entraîne sa d eformation.

Les auteurs étudient les variations d'amplitude d'une interface aluminium/tantale munie à l'instant initial d'une petite perturbation. L'onde de choc provient de l'aluminium (matériau plus léger) et impacte l'interface aluminium/tantale (matériau plus lourd). Ils effectuent cette simulation pour diff erents coefficients de cisaillement  $\chi$ .

### 2.2.1 Résultats pour les interfaces élastique/élastique

La configuration initiale de la simulation est sch ematis e Figure 3.13. Le domaine de calcul est  $[-1, 2] \times [0, 1]$ m. Les conditions aux limites sont de type champ lointain à l'entrée (côté onde de choc) et de type Neumann en sortie. Les autres bords du domaine de calcul sont mod elis s par des conditions périodiques. Les propriétés de l'aluminium et du tantale sont listées Tableau 3.5 sachant que la loi de comportement d'un matériau élastique prend  $a = b = 0$ .

Matériau	$\gamma$	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$p_\infty$ (GPa)	$\chi$ (GPa)
Aluminium	2.97	2707	26.4	27.1
Tantale	2.67	16 690	72.7	69

**Tableau 3.5** – Propriétés des mat riau s élastiques pour les cas d'interfaces élastiques.

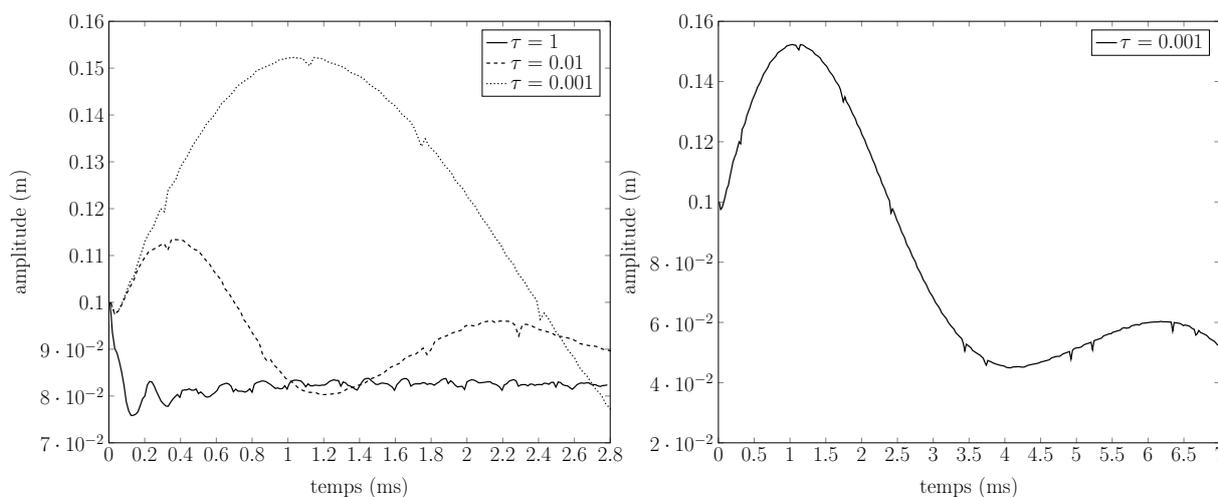
L'onde de choc incidente provenant de l'aluminium est à Mach 1.076. Les coefficients de cisaillement  $\chi_{Al}$  et  $\chi_{Ta}$  sont modifiés par le paramètre  $\tau \in [0, 1]$  de telle sorte que leurs nouvelles valeurs soient  $\tau\chi_{Al}$  et  $\tau\chi_{Ta}$ . Le nombre de Mach est gardé fixe, les conditions initiales de l'aluminium post-choc varient donc en fonction du paramètre  $\tau$  et sont listées Tableau 3.6.

## 2. Les instabilités de Richtmyer-Meshkov

paramètre $\tau$	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$u_1$ (m.s <sup>-1</sup> )	$u_2$ (m.s <sup>-1</sup> )	$p$ (Pa)
1	3592.56	1856.38	0	$3.78 \cdot 10^{10}$
$1 \cdot 10^{-1}$	2997.07	579.53	0	$9.39 \cdot 10^9$
$1 \cdot 10^{-2}$	2915.89	416.29	0	$6.55 \cdot 10^9$
$1 \cdot 10^{-3}$	2907.48	399.44	0	$6.26 \cdot 10^9$

**Tableau 3.6** – Conditions initiales pour l’aluminium post-choc pour les cas d’interfaces élastiques.

On trace Figure 3.16(a) les valeurs des amplitudes des interfaces en fonction du temps pour des valeurs de  $\tau$  égales à  $\{1, 0.01, 0.001\}$ . On constate que qu’au moment de l’interaction du choc avec l’interface, celle-ci se comprime. Par la suite, pour des matériaux moins sensibles aux effets de cisaillement ( $\tau < 1$ ), l’amplitude de l’interface augmente de nouveau. Au contraire, pour  $\tau = 1$  l’interface est écrasée par l’onde de choc. Malgré le changement d’amplitude des interfaces, celles-ci tendent à osciller vers une position d’équilibre, voir Figure 3.16(b) pour une simulation plus longue dans le cas  $\tau = 0.001$ . Les résultats pour les coefficients  $\tau = 0.01$  et  $\tau = 0.001$  correspondent à l’analyse de stabilité des interfaces menée par [65]. Le résultat pour  $\tau = 1$  diffère bien que l’interface finisse par se stabiliser comme le décrivent Plohr & Plohr.



(a) Courbes pour les coefficients  $\tau = 1$ ,  $\tau = 0.01$  et  $\tau = 0.001$  et un temps final  $t = 2.8$ ms.

(b) Courbe pour le coefficient  $\tau = 0.001$  et un temps final  $t = 7$ ms.

**Figure 3.16** – Courbes des amplitudes des interfaces par rapport au temps pour les coefficients  $\tau = 1$ ,  $\tau = 0.01$  et  $\tau = 0.001$ .

### 2.2.2 Résultats pour les interfaces élastique/fluide

À présent, on effectue des simulations pour des interfaces entre un solide élastique et un fluide. Le solide est en cuivre. Le fluide est de l'air et est assimilé à un gaz parfait. L'onde choc provient du cuivre et vient impacter l'interface cuivre/air. Les propriétés des matériaux sont listées Tableau 3.7. À l'instant initial, l'onde de choc incidente est à Mach 1.1.

Matériau	$\gamma$	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$p_\infty$ (GPa)	$\chi$ (GPa)	$p$ (Pa)
Air	1.4	1000	0	0	10 <sup>5</sup>
Cuivre	4.22	8900	34.2	50	10 <sup>5</sup>

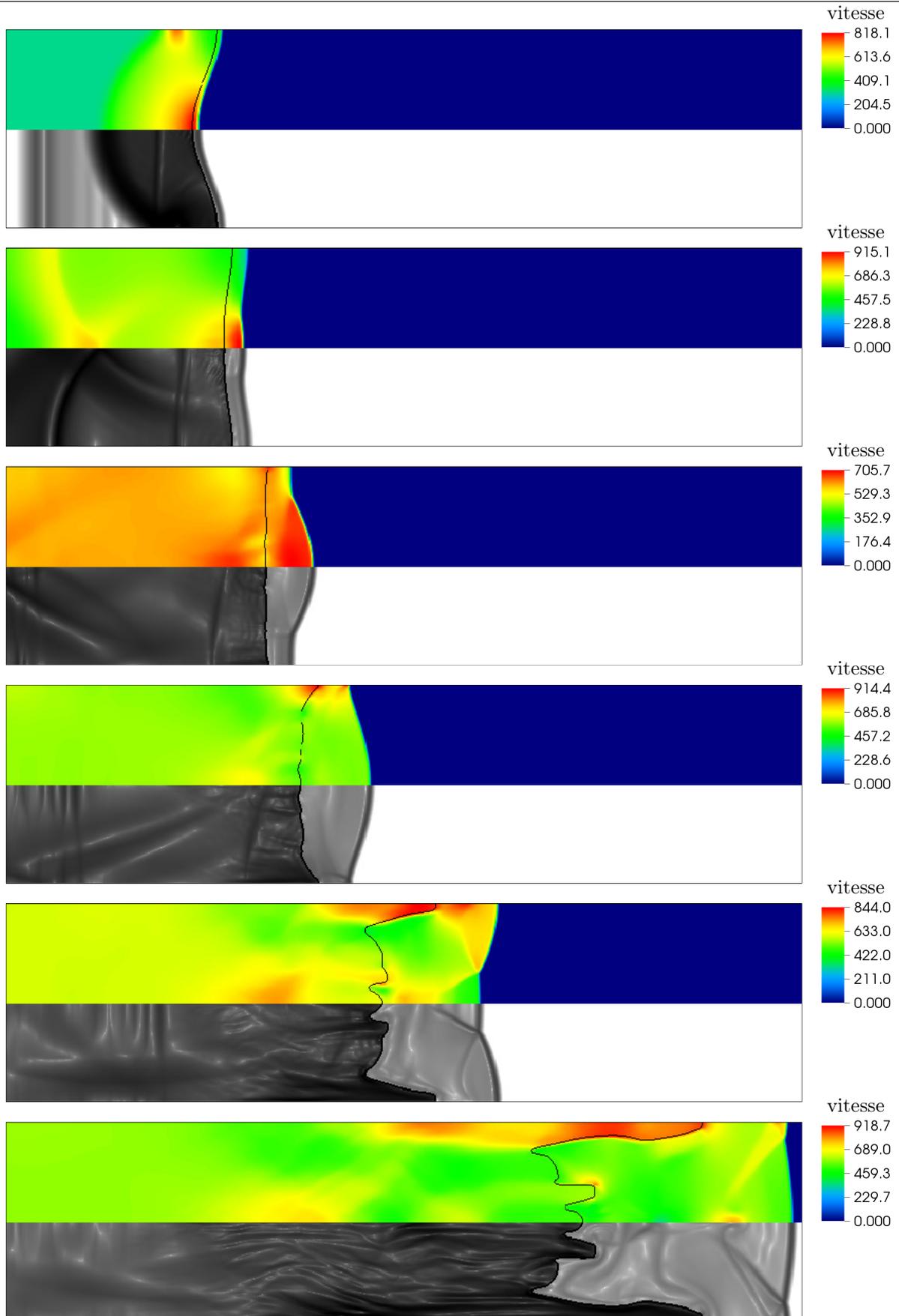
**Tableau 3.7** – Propriétés des matériaux pour les cas d'interfaces élastique/fluide.

La configuration initiale est schématisée Figure 3.13. Le domaine de calcul est  $[0, 4] \times [0, 1]$ m. Les conditions aux limites sont de type champ lointain à l'entrée (côté onde de choc) et de type Neumann en sortie. Les autres bords du domaine de calcul sont modélisés par des conditions périodiques. Le calcul est effectué pour un maillage de  $200 \times 600$  sur 48 processeurs.

Le coefficient de cisaillement du cuivre est réduit d'un facteur  $10^2$ . Les conditions initiales du cuivre "mou" sont donc  $\rho = 9556.3 \text{kg.m}^{-3}$ ,  $u = (305.3, 0, 0) \text{m.s}^{-1}$  et  $p = 12.1 \text{GPa}$ .

On observe sur la Figure 3.17 une instabilité d'interface. L'interface entre les deux matériaux est aplatie par l'onde de choc. La vitesse augmente dans les zones où l'interface formait initialement un creux (aux bords du domaine de calcul) entraînant celle-ci. L'interface se déforme de manière importante. Le cuivre "mou", plus lourd que l'air, crée des pics dans le fluide. On peut retrouver ce type de phénomènes dans la simulation de Gorsse Figure 3.10.

## 2. Les instabilités de Richtmyer-Meshkov



**Figure 3.17** – Génération d’une instabilité de Richtmyer-Meshkov dans le cas de l’impact d’une onde de choc à Mach 1.1 sur une interface sinusoïdale élastique/fluide. Le matériau élastique a un coefficient de cisaillement faible. Images schlieren et champ de vitesse aux temps  $t = 80 \mu\text{s}$ ,  $t = 200 \mu\text{s}$ ,  $t = 400 \mu\text{s}$ ,  $t = 600 \mu\text{s}$ ,  $t = 1.04 \text{ms}$  et  $t = 2.12 \text{ms}$ .

### 3 Le rebond élastique

On met en évidence la propriété élastique des solides en simulant des rebondissements soit d'un solide élastique contre le bord du domaine de calcul assimilé à une paroi rigide, soit deux solides entre eux. Ce rebondissement demande une gestion particulière des contacts solide/paroi ou solide/solide, notamment pour permettre le détachement des objets.

On peut voir sur l'exemple d'impact d'un projectile sur une plaque, Figure 3.8, que le projectile, une fois collé à la plaque, ne peut pas s'en détacher. Il ne s'agit pas ici de rajouter un modèle de collision comme on peut en trouver dans la littérature [12, 27] mais d'utiliser les propriétés intrinsèques des solides élastiques. Le modèle sera simplement modifié de telle façon que l'interaction solide/solide disparaisse dans certains cas.

L'approche présentée ici est un modèle simplifié pour palier au manque de modélisation pour l'interaction de deux objets élastiques. Elle ne prend absolument pas en compte toute la physique des petites échelles qui apparaît quand les deux objets sont très proches l'un de l'autre.

#### 3.1 Détachement des interfaces

Pour modéliser le rebond, il faut gérer le problème du détachement des matériaux. En effet, le schéma du solveur multi-matériaux présenté Chapitre 2 impose que la vitesse normale soit continue à travers la discontinuité de contact et, de ce fait, empêche la séparation des interfaces des matériaux. Pour remédier à ce problème, il nous faut donc ajouter un effet de 'détachement' pour améliorer la modélisation. Le critère de détachement s'impose tout naturellement : quand  $u_1^r > u_1^l$ , les vitesses  $u_1^l$  et  $u_1^r$  étant normales à l'interface dans les cellules à gauche et à droite, respectivement, alors les deux matériaux ont un mouvement divergent. Leurs interfaces doivent pouvoir se détacher l'une de l'autre.

#### Modélisation

On choisit de remplacer le solveur multi-matériaux par deux demi-problèmes de Riemann, ce qui permet d'annuler la propriété de continuité de la vitesse normale à travers la discontinuité de contact :  $u_1^- \neq u_1^+$ . L'état solution du problème de Riemann reste, comme pour le solveur multi-matériaux, l'état intermédiaire adjacent à l'interface du côté du solide considéré. Pour la résolution d'un demi-problème de Riemann, d'après Chapitre 2 Section 5.2, il est nécessaire d'imposer trois conditions sur l'onde de contact.

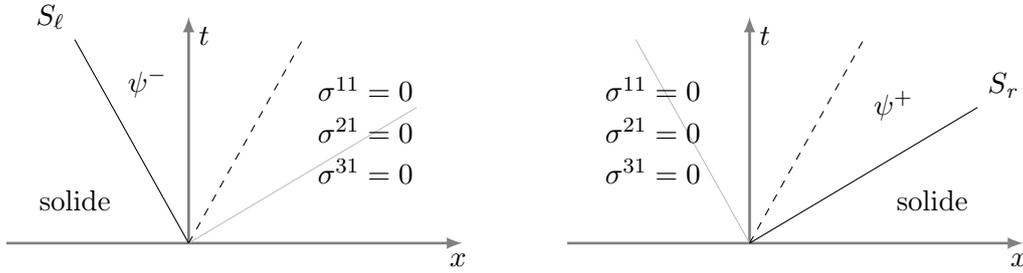
Pour la séparation des interfaces, on considère nulle la contrainte imposée au bord du matériau, c'est-à-dire  $\sigma^{11} = \sigma^{21} = \sigma^{31} = 0$  sur la discontinuité de contact, voir Figure 3.18. Cette modélisation revient à considérer, qu'au moment du détachement des interfaces, une couche de vide s'est intercalée entre les deux solides. Les états fantômes sont donc du vide. D'après les équations (2.75), on peut déterminer les valeurs des composantes de la

### 3. Le rebond élastique

vitesse des états intermédiaires  $\psi^+$  et  $\psi^-$  comme suit :

$$\begin{aligned} u_1^- &= \frac{Q_\ell^2}{Q_\ell^1} & u_1^+ &= \frac{Q_r^2}{Q_r^1} \\ u_2^- &= \frac{Q_\ell^3}{Q_\ell^1} & u_2^+ &= \frac{Q_r^3}{Q_r^1} \\ u_3^- &= \frac{Q_\ell^4}{Q_\ell^1} & u_3^+ &= \frac{Q_r^4}{Q_r^1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les autres variables des états  $\psi^+$  et  $\psi^-$  sont calculées par le solveur multi-matériaux. On note qu'on a bien  $F(\psi^-) = -F(\psi^+)$  dans le cas où les états sont identiques exceptées les composantes normales des vitesses qui sont l'inverses l'une de l'autre.



**Figure 3.18** – Structure des ondes des deux demi-problèmes de Riemann dans le cas d'un détachement entre deux solides. Les ondes grisées se propagent dans les cellules fantômes.

Si le critère  $u_1^r > u_1^\ell$  n'est pas valide, alors le contact entre les deux matériaux est modélisé par un mouvement sans frottement avec le solveur multi-matériaux Chapitre 2 Section 4.1.2.

À noter qu'on ne reconstruit plus les pentes MUSCL entre deux matériaux solides. En effet, l'ajout de la reconstruction peut changer le critère  $u_1^r > u_1^\ell$  entre les valeurs reconstruites et les valeurs initiales.

### 3.2 Gestion des fonctions level set

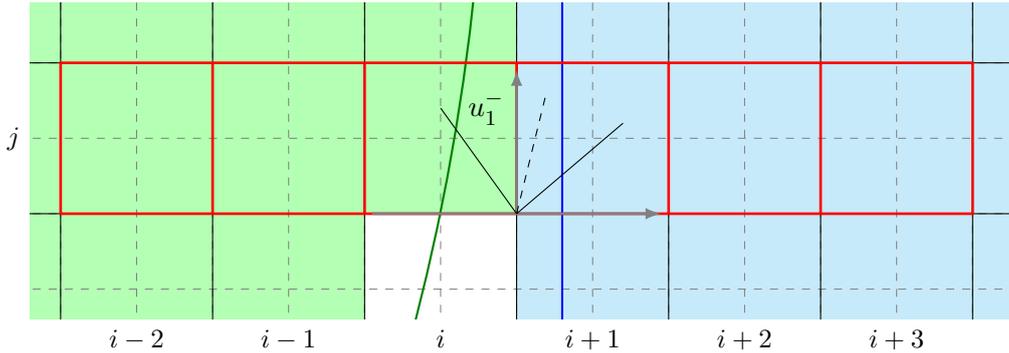
Dans le cas de trois matériaux, on a besoin de deux fonctions level set, appelées  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , pour délimiter les interfaces. On considère donc qu'un des matériaux est localisé par  $\phi_1 \leq 0$  et qu'un deuxième matériau est localisé par  $\phi_2 \leq 0$ . Le troisième milieu est traité par défaut par  $\{\phi_1 > 0\} \cap \{\phi_2 > 0\}$ . Un nouveau masque  $M$  est nécessaire pour définir à quel matériau appartient chaque maille. On définit alors  $M$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} M(i, j, k) = 2 & \text{si } \phi_2(i, j, k) \leq 0 \\ M(i, j, k) = 1 & \text{si } \phi_1(i, j, k) \leq 0 \\ M(i, j, k) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $(i, j, k)$  sont les coordonnées de la maille  $C_{i,j,k}$  en trois dimensions. Deux matériaux sont considérés en contact s'ils sont séparés suivant le signe de la même fonction level set ou si la distance entre les iso-zéro de leurs fonctions level set respectives est inférieure à la taille d'une maille. Autrement dit, pour ce dernier cas, si  $M = 1$  dans une maille et  $M = 2$  dans sa voisine.

L'advection des fonctions level set se fait indépendamment l'une de l'autre. Le masque  $M$  est mis à jour après les deux advections. Un traitement spécial est utilisé pour la vitesse d'advection. En temps normal, la fonction level set est transportée par le champ de vitesse calculé en chaque maille, voir Chapitre 2 Section 2.1. Cependant, en cas de contact entre les iso-zéros des deux fonctions level set et pour que celles-ci se détachent correctement l'une de l'autre, il faut que les vitesses aux interfaces matérielles diffèrent. Dans le cas contraire, les deux interfaces tendent à se suivre. Une technique pour contourner ce problème est d'advecter localement la level set avec la vitesse de l'interface déterminée lors du calcul des flux. Le gradient de l'équation de transport étant calculé par la méthode du WENO5, on modifie la vitesse sur un stencil de six mailles autour de l'interface.

Un exemple en deux dimensions est illustré Figure 3.19. La maille  $C_{i,j}$  est telle que  $M(i, j) = p$  (en vert) et jouxte la maille  $C_{i+1,j}$  appartenant à un autre matériau telle que  $M(i+1, j) = 3-p$  (en bleu). Dans le cas de l'advection de la fonction level set  $\phi_p$ , on impose alors sur le stencil  $\{C_{i-2,j}, C_{i-1,j}, C_{i,j}, C_{i+1,j}, C_{i+2,j}, C_{i+3,j}\}$  la vitesse  $u_1^-$  calculée pour le matériau vert soit avec le solveur multi-matériaux et elle vaut alors  $u_1^- = u_1^*$ , soit avec le solveur adapté au détachement. Dans ce dernier cas, les deux fonctions level set seront advectées avec des vitesses différentes ( $u_1^- \neq u_1^+$ ) et les deux interfaces se détacheront.



**Figure 3.19** – Stencil (en rouge) des mailles où la valeur  $u_1^-$  est imposée pour l'advection de la fonction level set dont l'iso-zéro est repérée en vert.

La mise à jour des cellules qui changent de matériau après advection des fonctions level set se fait avec la même méthode que celle présentée Chapitre 2 Section 4.2 en n'incluant dans le calcul de la moyenne que les états intermédiaires  $\psi^+$  et  $\psi^-$  appartenant au nouveau matériau de la maille.

### 3.3 Simulations

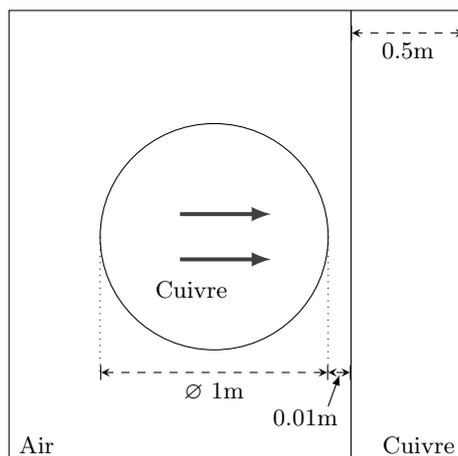
Dans cette section, on présente des simulations d'impacts suivis de rebonds élastiques en deux et trois dimensions.

#### 3.3.1 Rebonds en deux dimensions

On présente un premier cas test pour la simulation du rebond élastique. Le problème consiste en un disque impactant une couche de métal. Le disque et la couche sont du même matériau cuivre et sont immergés dans l'air. Le disque impacte la couche à la vitesse initiale de  $500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

### 3. Le rebond élastique

La configuration initiale du problème est schématisée Figure 3.20. Le domaine de calcul est  $[-1, 1]^2\text{m}$ . Le disque est de rayon  $0.5\text{m}$  et est placé à  $10^{-2}\text{m}$  de la couche. La couche est d'épaisseur  $0.5\text{m}$ . Les deux objets sont gérés par des fonctions level set différentes. La condition à la limite du bord "est" du domaine est de type symétrique. Cette condition permet la réflexion des ondes sur ce bord mais le détachement de la couche y est interdit. Les conditions aux limites des autres bords sont de type Neumann.



**Figure 3.20** – Schéma de la configuration initiale pour le cas test du rebond élastique en deux dimensions. Un disque de cuivre impacte une couche du même matériau à la vitesse initiale de  $500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le domaine de calcul est  $[-1, 1]^2\text{m}$ .

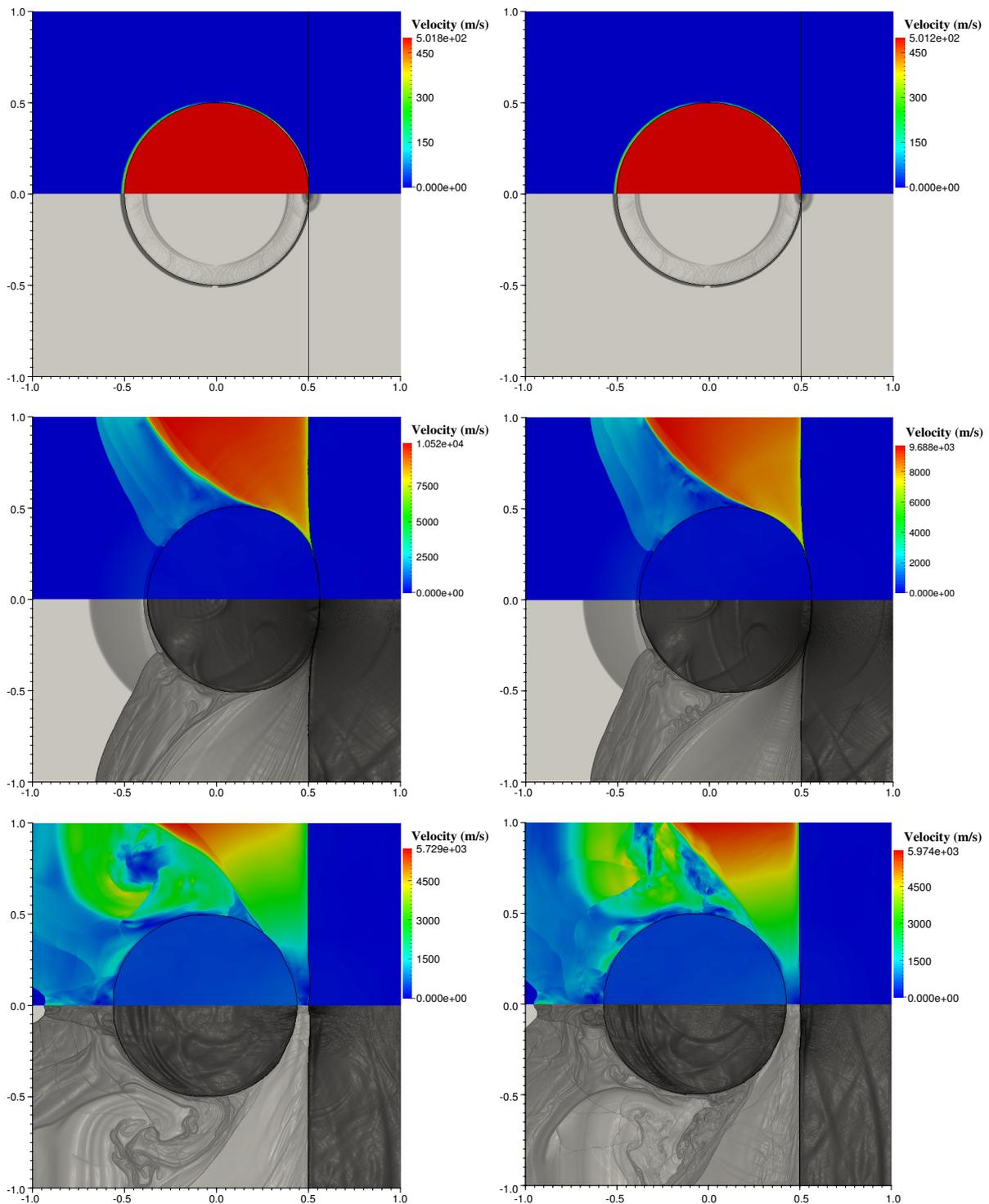
L'air environnant est assimilé à un gaz parfait. Les lois de comportement des matériaux prennent donc en compte  $a = b = 0$ . Les autres propriétés sont listées Tableau 3.8.

Matériau	$\gamma$	$\rho$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	$p_\infty$ (GPa)	$\chi$ (GPa)	$p$ (Pa)
Air	1.4	1000	0	0	$10^5$
Cuivre	4.22	8900	34.2	50	$10^5$

**Tableau 3.8** – Propriétés des matériaux pour le cas de l'impact de cuivre.

On effectue deux simulations. La première est faite sur un maillage de  $2000^2$  avec 144 processeurs. La seconde est faite pour un maillage de  $4000^2$  et sur 324 processeurs. Les résultats sont présentés Figure 3.21 avec le maillage  $2000^2$  dans la colonne de gauche et le maillage  $4000^2$  dans la colonne de droite. La moitié supérieure représente le champ de vitesse de l'écoulement. Les images schlieren sont présentées dans la moitié inférieure.

Au moment où le disque de cuivre se rapproche de la couche métallique l'air est très fortement comprimé. L'impact des deux objets produit deux jets d'air de part et d'autre du disque expulsés à très grande vitesse environ  $10^4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . À noter que l'air étant assimilé à un gaz parfait, il n'y a donc pas d'effet de viscosité qui ralentirait l'écoulement. Le disque se détache bien de la couche de métal.

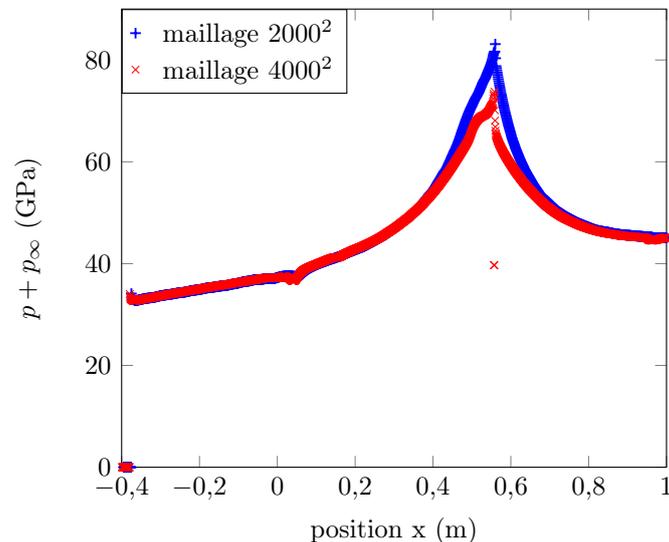


**Figure 3.21** – Impact et rebond d’un disque sur une couche de métal en deux dimensions. Le champ de vitesse (partie supérieure) et les images schlieren (partie inférieure) sont présentés pour un maillage de  $2000^2$  colonne de gauche et un maillage de  $4000^2$  colonne de droite. Les images sont prises aux temps  $t = 21 \mu\text{s}$ ,  $t = 450 \mu\text{s}$  et  $t = 900 \mu\text{s}$  de haut en bas.

### 3. Le rebond élastique

---

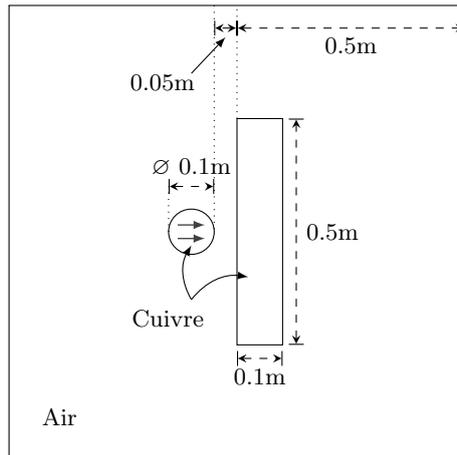
Figure 3.22 est tracée la courbe de la pression sur la ligne  $y = 0$  pour les deux maillages au temps intermédiaire  $t = 450\mu s$ . On observe un pic de pression dans la zone de contact entre les matériaux. Les matériaux sont fortement comprimés d'où les deux jets d'air observés.



**Figure 3.22** – Pression sur la ligne  $y = 0$  au temps intermédiaire  $t = 450\mu s$  pour les deux maillages. Le domaine est réduit à  $x \in [-0.4, 1]$ .

Dans le cas du maillage de  $2000^2$ , le disque et la couche en métal entrent en contact. Pour le maillage de  $4000^2$ , une fine couche de mailles d'air sépare toujours les deux objets. L'air sous pression modifie la position de l'interface air/couche de cuivre. On retrouve cependant pour les deux maillages un comportement des objets identique et des structures des ondes équivalentes. Le point rouge inférieur à la courbe pour le maillage de  $4000^2$  dans la zone de contact est un point pris dans la couche de maille d'air entre les deux objets en cuivre où  $p_\infty = 0$ .

On présente à présent un second cas où un projectile rond impacte une plaque. Les deux objets sont en cuivre et sont immergés dans l'air. Les propriétés des matériaux sont les mêmes que pour le cas test précédent, voir Tableau 3.8. Le projectile a pour vitesse initiale  $u = (800, 0)\text{m.s}^{-1}$ . La configuration initiale est schématisée Figure 3.23. Le projectile est de rayon 0.05m et est placé à 0.05m de la plaque. Les dimensions de la plaque sont  $0.1 \times 0.5\text{m}$ . Le domaine de calcul est  $[-0.5, 0.5]^2\text{m}$ . Les conditions aux limites sont de type Neumann. Le calcul est effectué sur un maillage de  $4000^2$  avec 576 processeurs.

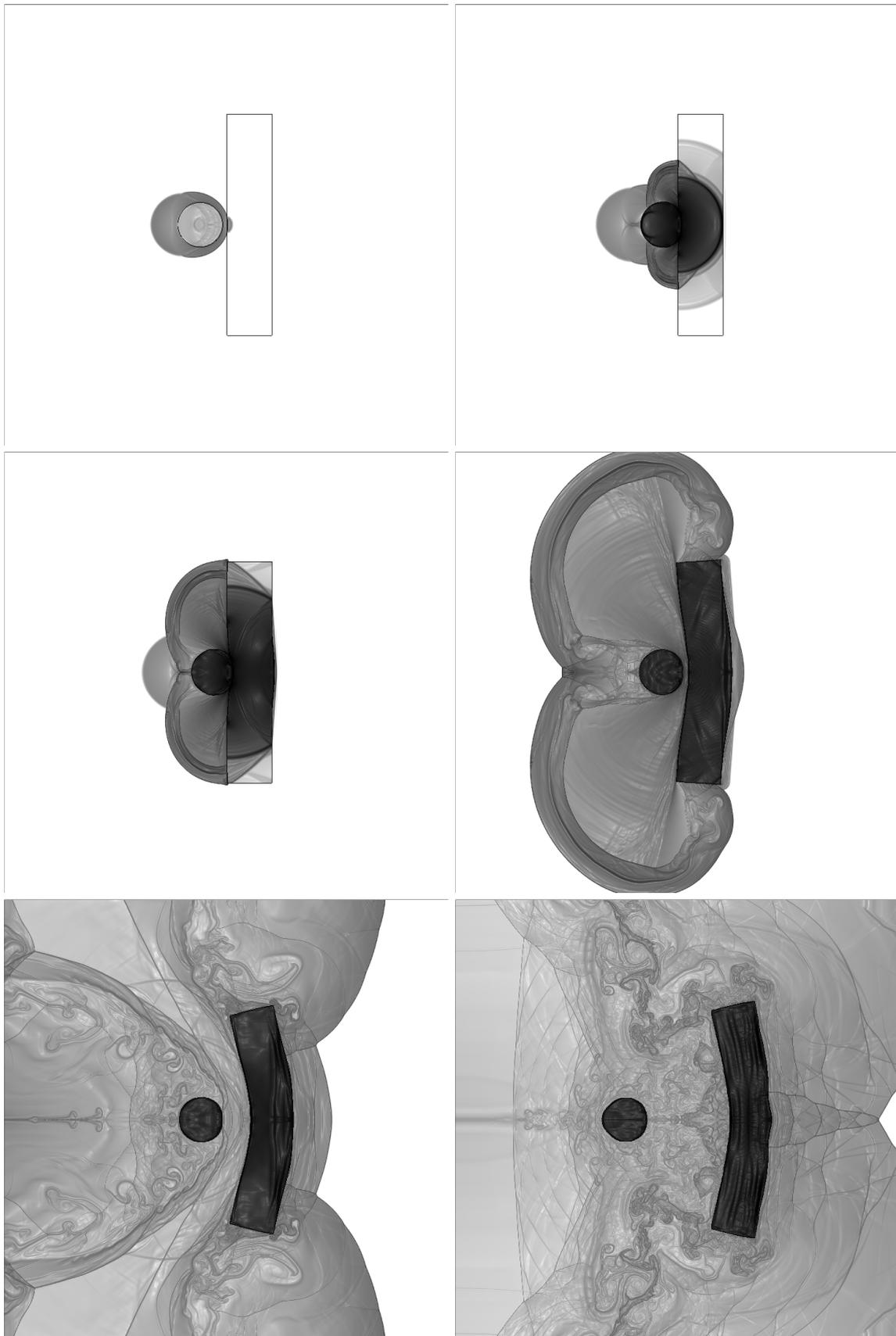


**Figure 3.23** – Schéma de la configuration initiale de l'impact élastique en deux dimensions. Le projectile percute la plaque à la vitesse de  $800\text{m.s}^{-1}$ . Le domaine de calcul est  $[-0.5, 0.5]^2\text{m}$ .

Les résultats sont présentés Figure 3.24 sous forme d'images schlieren de l'écoulement. On observe qu'un front d'ondes précède le projectile créant une onde de choc dans la plaque alors que le projectile est encore loin. Ce front d'ondes fait que de nouveau les deux objets n'entrent pas en contact matériel mais restent séparés par une couche fine de mailles d'air. Deux jets d'air se forment de part et d'autre du projectile quand les objets se rapprochent. Le projectile rebondit sur la couche d'air et repart dans l'autre sens. La plaque subit une plus grande déformation que celle observée Figure 2.17. En effet, le projectile n'étant pas soudé à la plaque, il ne la "retient" pas.

### 3. Le rebond élastique

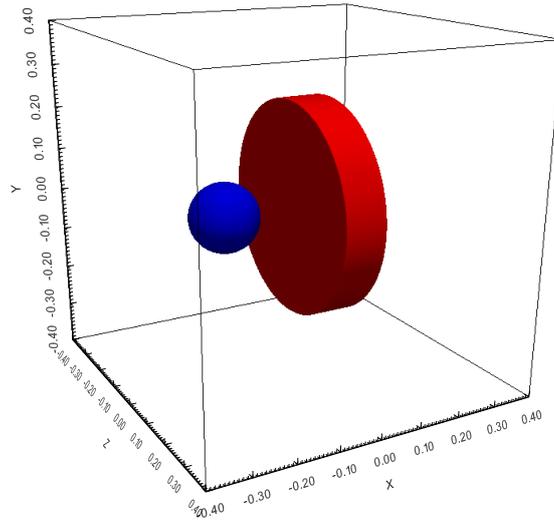
---



**Figure 3.24** – Impact et rebond d’un projectile sur une plaque en deux dimensions. Images schlieren aux temps  $t = 50\mu\text{s}$ ,  $t = 83\mu\text{s}$ ,  $t = 99\mu\text{s}$ ,  $t = 149\mu\text{s}$ ,  $t = 298\mu\text{s}$  et  $t = 710\mu\text{s}$  de gauche à droite et de haut en bas.

### 3.3.2 Rebond en trois dimensions

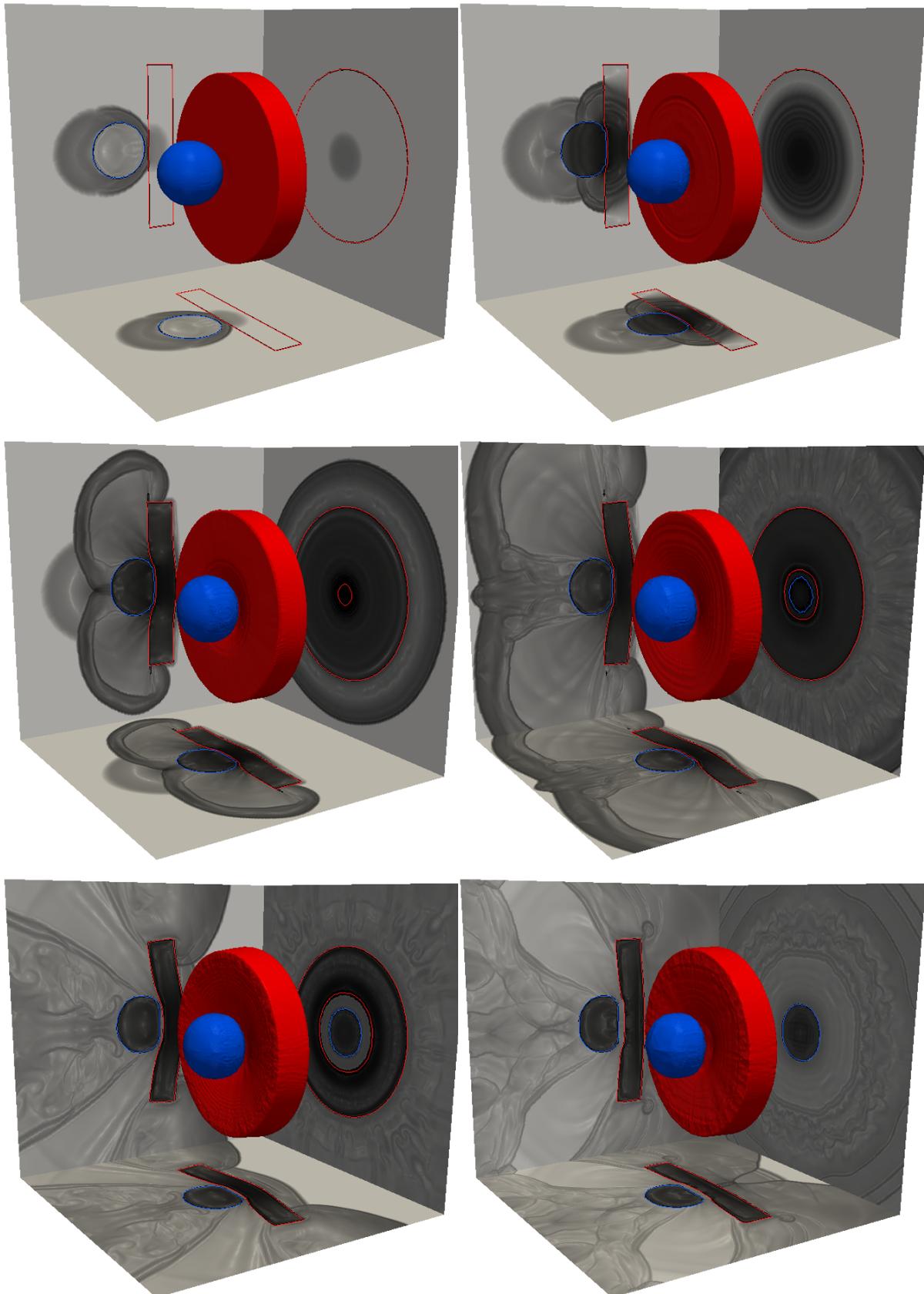
On adapte finalement le rebond élastique en trois dimensions. Le problème consiste en une sphère impactant une plaque cylindrique. La sphère et la plaque sont en cuivre et sont immergées dans l'air. À l'instant initial, le projectile a pour vitesse  $u = (800, 0, 0)\text{m.s}^{-1}$ . Les propriétés des matériaux sont les mêmes que précédemment, voir Tableau 3.8. La configuration initiale est présentée Figure 3.25. Le domaine de calcul est  $[-0.4, 0.4]^3\text{m}$ . La sphère a un rayon de  $0.08\text{m}$  et est placée à  $0.16\text{m}$  de la plaque. La plaque est d'épaisseur  $0.1\text{m}$  et a un rayon de  $0.25\text{m}$ . Le calcul est effectué sur un maillage de  $400^3$  avec 216 processeurs.



**Figure 3.25** – Configuration initiale pour le cas de l'impact et du rebond élastique d'un projectile sur une plaque cylindrique à la vitesse de  $800\text{m.s}^{-1}$ .

Figure 3.26 sont représentées les iso-zéros des deux fonctions level set ainsi que les images schlieren de l'écoulement des coupes  $x = 0.03$ ,  $y = 0$  et  $z = 0$ . De même que précédemment, on observe une onde se propageant dans la plaque alors que le projectile ne l'a pas encore percutée. Cette onde est due à la très forte compression de l'air entre les deux objets. Il y a création d'un jet d'air en forme de couronne autour du projectile. La plaque est fortement déformée par son centre et beaucoup plus que dans le cas de l'impact sans rebond, voir Figure 3.8. De nouveau, le projectile et la plaque ne faisant pas partie du même objet, la plaque se déforme plus librement.

### 3. Le rebond élastique



**Figure 3.26** – Impact et rebond élastique d'un projectile sur une plaque en trois dimensions. Images schlieren des coupes en  $x = 0.03\text{m}$ ,  $y = 0\text{m}$  et  $z = 0\text{m}$  et iso-zéros des fonctions level set aux temps  $t = 107\mu\text{s}$ ,  $t = 166\mu\text{s}$ ,  $t = 206\mu\text{s}$ ,  $t = 256\mu\text{s}$ ,  $t = 383\mu\text{s}$  et  $t = 710\mu\text{s}$  de gauche à droite et de haut en bas.

### Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode numérique en trois dimensions détaillée Chapitre 2 a été validée sur des cas test 1D et 3D. Les résultats montrent la robustesse du schéma. Les changements de topologie sont correctement gérés et l'interface reste sharp. Le modèle permet de décrire des problèmes très variés aussi bien d'interactions fluide/fluide que fluide/solide.

On a présenté une modélisation simplifiée pour permettre le rebond des objets élastiques. Le schéma numérique est modifié pour supprimer la condition de la vitesse constante à travers la discontinuité de contact. L'utilisation de deux fonctions level set permet de décrire les interfaces. Une amélioration serait de considérer les normales aux interfaces et non plus les normales au maillage dans le cas du détachement des iso-zéros des fonctions level set, ce qui permettrait d'imposer de manière plus précise les conditions de bord quand les deux interfaces sont adjacentes.

## Chapitre 4

# La plasticité

On a présenté dans les chapitres précédents l'élaboration d'un modèle d'hyperélasticité pour des écoulements multi-matériaux. Cette modélisation suppose, cependant, que les matériaux sont purement élastiques. Une extension naturelle de ce modèle est d'y inclure le phénomène de plasticité.

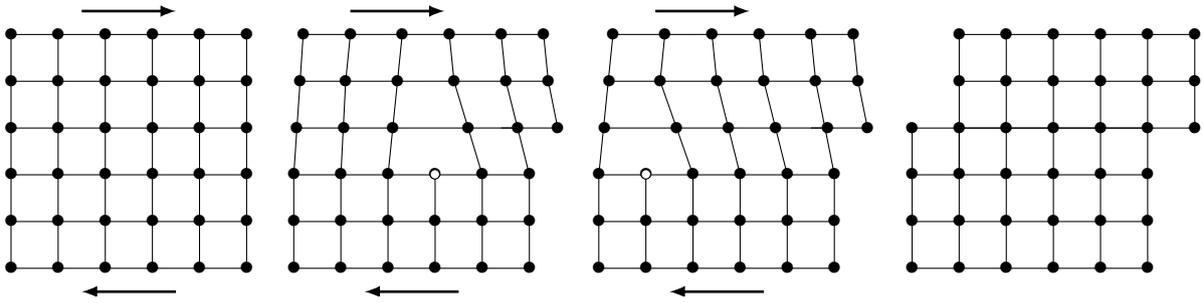
On retrouve des modèles de plasticité couplés à des modèles d'hyperélasticité dans les travaux de Kluth & Després [45], pour des problèmes en formulation eulérienne par Miller & Collela [55], Barton, Meiron et leurs collaborateurs [34, 5, 50] et par modélisation par interface diffuse de Favrie & Gavrilyuk [19, 20, 58]. D'autres modèles de plasticité sur maillages cartésiens peuvent également être trouvés dans les travaux de Plohr & Sharp [64] et Udaykumar [41, 69].

On présente dans ce chapitre un modèle simple de plasticité basé sur la pénalisation d'un terme source sur l'équation du gradient des caractéristiques rétrogrades. On se restreint à des problèmes de plasticité parfaite. On montre la validité de ce modèle et de la méthode numérique employée pour le résoudre.

### 1 Description

Au sein des métaux, les atomes sont organisés sous forme de réseaux cristallins. Le mécanisme de déformation plastique est un glissement des plans cristallins les uns par rapport aux autres qui s'effectue progressivement par l'intermédiaire de défauts mobiles appelés dislocations. La limite d'élasticité (ou seuil de plasticité) correspond à l'état de contrainte du matériau qui engendre les premiers mouvements irréversibles de dislocations. Le déplacement des dislocations est responsable de la déformation résiduelle irréversible du matériau après décharge c'est-à-dire quand son état de contrainte redevient nul. Les dislocations n'induisent cependant aucune augmentation de volume du solide.

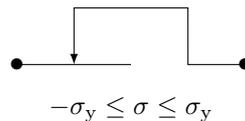
Une illustration du mouvement des dislocations pour un matériau soumis à un effort de cisaillement est présentée Figure 4.1. La dislocation, repérée en rouge, se déplace de droite à gauche. La partie inférieure subit une translation égale à une période de son réseau cristallin. Au temps final, le réseau conserve sa régularité mais les liaisons entre atomes sont modifiées. À cet instant, le cristal est donc non contraint mais irréversiblement déformé.



**Figure 4.1** – Mouvement de la dislocation dans un solide en cisaillement. La dislocation est repérée par un cercle.

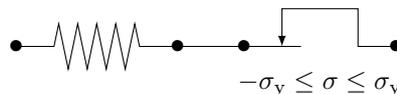
## 2 Théorie de l'écoulement plastique

En modélisation rhéologique, le comportement plastique se décrit par un patin, voir Figure 4.2. Tant que la contrainte imposée au solide ne dépasse pas un certain seuil, à savoir la limite d'élasticité, le patin reste fixe et il n'y a aucune déformation plastique. Une fois la limite d'élasticité franchie, le patin glisse entraînant une déformation irréversible du matériau.



**Figure 4.2** – Modèle rhéologique du comportement plastique.

Dans les modèles rhéologiques, pour décrire un comportement élasto-plastique, le patin est associé à un ressort qui traduit les déformations élastiques réversibles, voir Figure 4.3. Tant que le patin reste bloqué seules les déformations élastiques interviennent. Cette modélisation du comportement élasto-plastique est utilisée en élasticité linéaire et considère une décomposition additive des déformations en une partie élastique et une partie plastique. Les transformations élastique et plastique sont alors découplées l'une de l'autre.



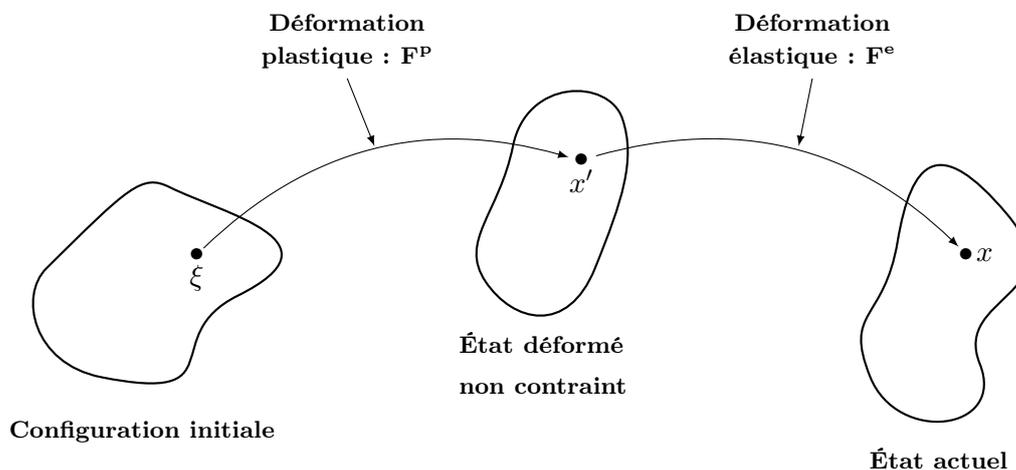
**Figure 4.3** – Modèle rhéologique d'un matériau élasto-plastique.

En hyperélasticité, en revanche, le point clé est la décomposition multiplicative du gradient des déformations  $F$  (1.16) introduite par Lee & Liu [47] telle que

$$F = F^e F^p \tag{4.1}$$

où  $F^e$  est le gradient des déformations associé aux déformations élastiques réversibles et  $F^p$  est le gradient des déformations associé aux déformations plastiques irréversibles. L'ordre des termes dans la décomposition indique l'influence des déformations élastiques sur les déformations plastiques dans la détermination de la déformation totale. Cette formulation représente le fait que, lorsque le solide est déchargé, le gradient des déformations élastiques tend vers l'identité :

$F^e = \text{Id}$  et le matériau regagne un état non contraint. La déformation totale résiduelle est alors la déformation irréversible plastique. Une illustration de la décomposition multiplicative du tenseur  $F$  est présentée Figure 4.4.



**Figure 4.4** – États successifs d’un solide au cours de sa déformation élasto-plastique.

Les caractéristiques directes  $X$ , introduites Chapitre 1 Section 2, s’écrivent alors telles que  $X(\xi, t) = X^e(X^P(\xi, t), t) = x$  où  $X^P(\xi, t)$  est la caractéristique directe entre l’état initial et l’état déformé non contraint et  $X^e(x', t)$  est la caractéristique entre l’état déformé non contraint et l’état actuel. On a  $F^e = \nabla_\xi X^e$  et  $F^P = \nabla_\xi X^P$ .

## 3 Critère de plasticité

Un critère de plasticité est décrit par une fonction  $f$  appelée fonction de charge et dépendant de l’état de contraintes du matériau et de ses propriétés internes. On appelle condition de cohérence la condition pour laquelle  $f = 0$  qui représente l’équation d’une surface dans l’espace des contraintes. Cette surface est la surface seuil de plasticité. En d’autres termes, si  $f \leq 0$  le matériau est dans le régime élastique et si  $f > 0$  le matériau subit un écoulement plastique.

En plasticité réelle, la densité de dislocations dans le matériau augmente avec la contrainte induisant un accroissement de la résistance à la déformation. La limite d’élasticité du matériau varie alors selon la contrainte imposée. Ce phénomène est appelé écrouissage. Le modèle de plasticité étudié ici part de l’hypothèse de plasticité parfaite. Le seuil de plasticité n’est pas affecté par la contrainte. On note  $\sigma_y$  la limite d’élasticité à partir de laquelle les déformations plastiques apparaissent dans le solide. Dans le cadre de l’hypothèse de plasticité parfaite, ce paramètre est une constante intrinsèque du matériau.

### 3.1 Le critère de von Mises

On utilise le critère de plasticité isotrope de von Mises qui est adapté aux matériaux ductiles comme les métaux. Dans son fondement, ce critère est basé sur des considérations énergétiques de la distortion du matériau. On définit le tenseur  $S = \sigma - \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma)\text{Id}$  comme la partie déviatorique

du tenseur  $\sigma$ . Autrement dit, le tenseur  $S$  contient les contraintes imposées au matériau sans l'effet de la pression hydrostatique. Le tenseur  $\sigma$  étant symétrique, le déviateur  $S$  l'est également. Le critère de von Mises est alors défini par

$$\begin{cases} S : S \leq \frac{2}{3}\sigma_y^2 & \implies \text{régime élastique} \\ S : S > \frac{2}{3}\sigma_y^2 & \implies \text{régime plastique} \end{cases} \quad (4.2)$$

On rappelle que  $\|S\|^2 = S : S = \sum_{i,j} S_{ij}S_{ij}$  est la norme de Schur. Le critère ne dépend donc pas de la pression. La fonction de charge  $f$  pour un matériau plastique parfait et isotrope peut donc s'écrire  $f = \sigma_{\text{eq}}(S)^2 - \sigma_y^2$ , où  $\sigma_{\text{eq}}(S) = \left(\frac{3}{2}S : S\right)^{\frac{1}{2}}$  est la mesure de l'intensité du cisaillement.

On se place dans les directions principales de contraintes c'est-à-dire que le tenseur des contraintes  $\sigma$  est diagonal et ses valeurs sont notées  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . Le tenseur déviateur  $S$  s'écrit alors

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \end{pmatrix}$$

L'intensité du cisaillement  $\sigma_{\text{eq}}(S)$  se calcule par

$$\sigma_{\text{eq}}(S)^2 = \frac{3}{2} \left( \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)^2 + (2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1)^2}{9} \right)$$

Après simplification, il vient une formulation équivalente de l'équation de la surface seuil  $f = 0$  du critère de von Mises, à savoir

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] = \sigma_y^2 \quad (4.3)$$

Dans l'espace des contraintes principales en trois dimensions, cette équation représente un cylindre de rayon  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y$  et dont l'axe central vaut  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ .

### 3.2 Réduction à deux dimensions

En deux dimensions, les composantes selon la direction 3 du tenseur des contraintes sont nulles. Dans ce cas, il est tentant d'écrire l'équation de la surface seuil par

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - 0)^2 + (\sigma_2 - 0)^2] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_y^2 \quad (4.4)$$

Cette équation représente une ellipse dans l'espace des contraintes  $(\sigma_1, \sigma_2)$ . Cependant, ce résultat correspond au critère de von Mises dans le cas de contraintes planes pour lesquelles la partie déviatorique du tenseur des contraintes est définie par  $S = \sigma - \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma)\text{Id}$ .

Pour le modèle en deux dimensions explicité Chapitre 1 Section 4.1, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  est une matrice de taille  $2 \times 2$ . On définit donc le déviateur du tenseur des contraintes par  $S = \sigma - \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma)\text{Id}$ . On note  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les composantes du tenseur  $\sigma$  2D dans les directions principales. Le tenseur déviateur  $S$  s'écrit alors

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{pmatrix}$$

#### 4. Le modèle de plasticité

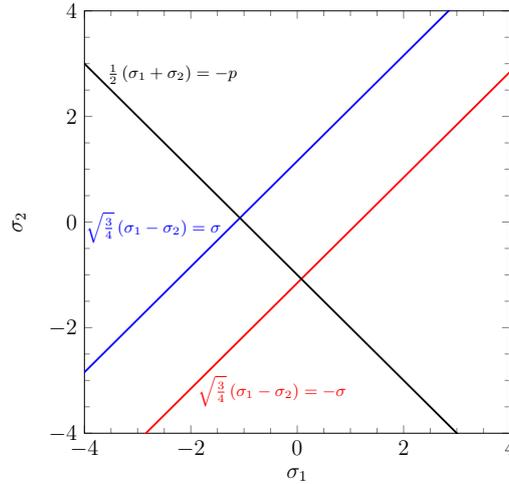
L'intensité du cisaillement  $\sigma_{\text{eq}}(S)$  se calcule par

$$\sigma_{\text{eq}}(S)^2 = \frac{3}{2} \left( \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2}{4} \right)$$

La surface seuil de plasticité  $f = 0$  du critère de von Mises (4.2) dans les directions principales de contraintes en deux dimensions s'écrit alors

$$\frac{3}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \sigma_y^2 \quad (4.5)$$

Cette équation est représentée Figure 4.5. Les droites bleue et rouge représentent la limite d'élasticité en traction et en compression, respectivement.



**Figure 4.5** – Surface seuil de plasticité pour le modèle en deux dimensions. La droite bleue est la surface seuil en traction et la droite rouge la surface seuil en compression. La droite noire est la droite  $-p$  le long de laquelle se relaxent les contraintes.

## 4 Le modèle de plasticité

On décrit dans cette section le modèle eulérien de plasticité utilisé. Ce modèle doit respecter certaines propriétés :

- la conservation du volume du matériau lors de l'écoulement plastique ;
- la condition d'entropie  $\partial_t s \geq 0$  ;
- la décroissance des contraintes de cisaillement (partie déviatorique  $S$ ).

On rappelle que le tenseur gradient des vitesses de déformation  $[\nabla_x u]$  est défini en formulation lagrangienne par l'équation (1.21) :  $[\nabla_x u] = \partial_t F F^{-1}$ . Grâce à la décomposition multiplicative (4.1) du gradient des déformations, on peut alors développer  $\partial_t F$  comme suit

$$\begin{aligned} \partial_t F &= \partial_t(F^e)F^p + F^e \partial_t(F^p) \\ &= [\nabla_x u]F^e F^p \end{aligned} \quad (4.6)$$

On cherche à faire apparaître la variation du gradient des déformations élastiques, soit

$$\partial_t F^e = [\nabla_x u]F^e - \underbrace{F^e \partial_t(F^p)(F^p)^{-1}}_{L^p} \quad (4.7)$$

On appelle alors le tenseur  $L^P$  tenseur vitesse de déformation plastique et on caractérise l'équation

$$\partial_t(F^P) = L^P F^P \quad (4.8)$$

comme la loi de comportement plastique en formulation lagrangienne.

Sachant que la déformation plastique préserve le volume, le tenseur gradient des déformations plastiques est incompressible c'est-à-dire  $\det(F^P) = 1$ . Cette assertion requière que le tenseur  $L^P$  soit à trace nulle. En effet

$$\begin{aligned} \partial_t(\det(F^P)) &= \det(F^P) \operatorname{Tr}((F^P)^{-1} \partial_t F^P) \\ &= \det(F^P) \operatorname{Tr}((F^P)^{-1} L^P F^P) \\ &= \det(F^P) \operatorname{Tr}(L^P) \end{aligned}$$

Si  $\det(F^P) = 1$  alors nécessairement  $\operatorname{Tr}(L^P) = 0$ . On en déduit également que la variation de la masse volumique du matériau s'écrit seulement en fonction du gradient des déformations élastiques :  $\rho = \rho_0 J^{-1} = \rho_0 \det(F)^{-1} = \rho_0 \det(F^e)^{-1}$ .

#### 4.1 Formule de plasticité eulérienne

On cherche à écrire une équation en formulation eulérienne pour modéliser l'écoulement plastique. Les caractéristiques rétrogrades  $Y$ , introduites Chapitre 1 Section 2.5, sont ici définies par  $Y(x, t) = Y^P(Y^e(x, t), t) = \xi$  où  $Y^e = (X^e)^{-1}$  et  $Y^P = (X^P)^{-1}$ . Il vient donc la décomposition de l'inverse du gradient des déformations

$$\nabla_x Y = [\nabla_x Y^P][\nabla_x Y^e] \quad (4.9)$$

avec  $\nabla_x Y^e$  et  $\nabla_x Y^P$  les inverses des gradients des déformations élastique et plastique, respectivement.

Les modèles de plasticité proposées par Miller & Collela [55] et Hill *et al.* [34] incluent dans le système de lois de conservation classique (masse, quantité de mouvement et énergie) une équation de transport de l'inverse du gradient des déformations  $[\nabla_x Y]$  similaire à l'équation (1.59c) pour l'élasticité. Une seconde équation sur le gradient des déformations irréversibles  $F^P$  est également ajoutée pour modéliser la plasticité. Elle provient de la définition du tenseur  $L^P$  en formulation lagrangienne, à savoir  $\partial_t F^P = L^P F^P$ . Le tenseur  $F^P$  étant de taille  $3 \times 3$ , cette méthode ajoute 9 équations au système pour l'élasticité rendant le système plus lourd à calculer. Le gradient des déformations élastiques est ensuite indirectement obtenu par  $F^e = (F^P[\nabla_x Y])^{-1}$ .

On suit ici l'approche de López Ortega *et al.* [50]. On rappelle que l'équation sur le gradient des caractéristiques rétrogrades se décompose :

$$\partial_t(\nabla_x Y) + \nabla_x(u \cdot \nabla_x Y) = \partial_t(\nabla_x Y) + u \cdot \nabla_x(\nabla_x Y) + [\nabla_x Y][\nabla_x u] = 0$$

La loi de plasticité (4.8) s'écrit en formulation eulérienne :

$$\begin{aligned} \partial_t(F^P) + u \cdot \nabla_x F^P &= L^P F^P \\ &= \partial_t((\nabla_x Y^P)^{-1}) + u \cdot \nabla_x((\nabla_x Y^P)^{-1}) = L^P(\nabla_x Y^P)^{-1} \end{aligned}$$

En utilisant la décomposition (4.9), on calcule la dérivée temporelle de l'inverse des déformations élastiques :

$$\begin{aligned}\partial_t(\nabla_x Y^e) &= \partial_t((\nabla_x Y^p)^{-1})\nabla_x Y + [\nabla_x Y^p]\partial_t(\nabla_x Y) \\ &= (-u \cdot \nabla_x((\nabla_x Y^p)^{-1}) + L^p(\nabla_x Y^p)^{-1})\nabla_x Y + [\nabla_x Y^p](-u \cdot \nabla_x(\nabla_x Y) - [\nabla_x Y][\nabla_x u]) \\ &= -u \cdot \nabla_x(\nabla_x Y^e) + L^p[\nabla_x Y^e] - [\nabla_x Y^e][\nabla_x u] \\ \\ \Rightarrow \quad \partial_t(\nabla_x Y^e) + \nabla_x(u \cdot \nabla_x Y^e) &= L^p[\nabla_x Y^e]\end{aligned}$$

On obtient une équation sur la partie élastique du tenseur  $[\nabla_x Y]$ . On reconnaît l'équation (1.59c) du système d'équations hyperbolique pour l'élasticité présenté Chapitre 1 à laquelle s'est ajouté un second membre. Ce dernier terme représente le changement de déformations élastiques dû à la plasticité.

Selon la définition de l'élasticité, si la contrainte appliquée au matériau est totalement relâchée alors les déformations élastiques sont récupérées, c'est-à-dire que  $F^e = \text{Id}$ . D'après la décomposition multiplicative schématisée Figure 4.4, les déformations restantes sont donc les déformations irréversibles  $F = F^p$ . L'état non-contraint  $F^p$  est alors considéré comme le nouvel état initial de la déformation. On peut donc utiliser dans le modèle complet uniquement l'équation sur la partie élastique du tenseur  $[\nabla_x Y]$  :

$$\partial_t([\nabla_x Y^e]) + \nabla_x(u \cdot [\nabla_x Y^e]) = L^p[\nabla_x Y^e] \quad (4.10)$$

Le système d'équations total pour la modélisation du comportement élasto-plastique est alors composé du système pour l'élasticité (1.59) avec au second membre de l'équation (1.59c) le terme de plasticité  $L^p[\nabla_x Y^e]$ . On note que cette approche n'ajoute aucune équation supplémentaire au système. Cependant, elle ne permet pas de quantifier les déformations plastiques. Il n'est alors pas possible de connaître le trajet complet d'une particule au cours temps et donc de déterminer la déformation totale.

On retrouve cette technique d'ajouter seulement un second membre à l'équation sur le gradient des caractéristiques rétrogrades dans les travaux de Favrie, Gavriljuk et leurs collaborateurs [19, 20, 58].

## 4.2 Condition d'entropie

Une forme générale de l'énergie interne  $\varepsilon$  par unité de masse pour décrire le comportement d'un matériau élasto-plastique s'écrit  $\varepsilon = \varepsilon(F^e, F^p, s)$  où  $s$  désigne l'entropie. Cependant, la contribution liée au tenseur des déformations plastiques  $F^p$  est susceptible d'être faible en comparaison des contributions des déformations élastiques et de la température paramétrisées par  $F^e$  et  $s$  [5]. L'énergie interne prend donc la forme  $\varepsilon = \varepsilon(F^e, s)$  et revient à la loi de comportement élastique vue Chapitre 1. Une conséquence est que le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  dépend également uniquement des déformations élastiques, soit

$$\sigma = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial F^e} (F^e)^\top \quad (4.11)$$

Pour vérifier la condition d'entropie, on reprend l'équation (1.52) sur l'énergie interne  $\varepsilon$  en formulation eulérienne :  $\rho(\partial_t \varepsilon + u \cdot \nabla_x \varepsilon) = \sigma : [\nabla_x u]$ . On développe les dérivées selon les

variables de  $\varepsilon(\mathbf{F}^e, s)$  :

$$\begin{aligned}
 \rho(\partial_t \varepsilon + u \cdot \nabla_x \varepsilon) &= \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}^e} : \partial_t \mathbf{F}^e + \overbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial s}}^{\text{T}} \partial_t s + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}^e} : u \cdot \nabla_x \mathbf{F}^e + \overbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial s}}^{\text{T}} u \cdot \nabla_x s \right) \\
 &= \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}^e} : \frac{D\mathbf{F}^e}{Dt} + \text{T} \frac{Ds}{Dt} \right) \\
 &= \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}^e} : ([\nabla_x u] \mathbf{F}^e - \mathbf{F}^e \mathbf{L}^p) + \text{T} \frac{Ds}{Dt} \right) \\
 &= \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}^e} (\mathbf{F}^e)^\top : [\nabla_x u] - \rho (\mathbf{F}^e)^\top \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}^e} : \mathbf{L}^p + \rho \text{T} \frac{Ds}{Dt} \\
 &= \sigma : [\nabla_x u]
 \end{aligned}$$

En identifiant l'expression du tenseur  $\sigma$ , il vient

$$\rho \text{T} \frac{Ds}{Dt} = \rho (\mathbf{F}^e)^\top \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}^e} : \mathbf{L}^p \quad (4.12)$$

L'entropie  $s$  n'est plus simplement transportée. Pour que le problème soit bien posé, il faut que la variation d'entropie soit positive ou nulle. Il faut donc déterminer une expression du tenseur  $\mathbf{L}^p$  de façon à respecter la condition d'entropie.

On choisit de suivre le modèle d'écoulement plastique employé par Miller & Collela [55] et dérivé de la fonction de charge  $f$  du critère de von Mises par le postulat de maximum de dissipation plastique. Ce modèle est également utilisé par Barton *et al.* [5, 50, 49]. Le tenseur vitesse de déformation plastique  $\mathbf{L}^p$  est défini par

$$\mathbf{L}^p = \nu (\mathbf{F}^e)^{-1} \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} \mathbf{F}^e = \frac{1}{\chi \tau} [\nabla_x \mathbf{Y}^e] \mathbf{S} [\nabla_x \mathbf{Y}^e]^{-1} \quad (4.13)$$

où  $\chi$  est le module de cisaillement et  $\tau > 0$  un temps de relaxation des contraintes. On peut démontrer que cette définition du tenseur  $\mathbf{L}^p$  est consistante avec le postulat que l'écoulement plastique préserve le volume [55] c'est-à-dire que le tenseur  $\mathbf{L}^p$  est à trace nulle. En effet

$$\text{Tr}(\mathbf{L}^p) = \text{Tr} \left( \nu (\mathbf{F}^e)^{-1} \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} \mathbf{F}^e \right) = \frac{\nu}{\|\mathbf{S}\|} \text{Tr}((\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{S} \mathbf{F}^e) = 0$$

par propriété de la trace et car la trace d'un déviateur est nulle. En utilisant la définition complète du tenseur  $\mathbf{L}^p$ , on reprend le calcul de la variation d'entropie :

$$\begin{aligned}
 \rho \text{T} \frac{Ds}{Dt} &= \rho (\mathbf{F}^e)^\top \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}^e} : \mathbf{L}^p \\
 &= \rho (\mathbf{F}^e)^\top \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}^e} : \frac{1}{\chi \tau} (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{S} \mathbf{F}^e = \frac{1}{\chi \tau} \underbrace{\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}^e} (\mathbf{F}^e)^\top}_{\sigma} : \mathbf{S} \\
 &= \frac{1}{\chi \tau} (-p \text{Id} + \mathbf{S}) : \mathbf{S} = \frac{1}{\chi \tau} \left( -p \overset{0}{\text{Tr}(\mathbf{S})} + \mathbf{S} : \mathbf{S} \right) = \frac{1}{\chi \tau} \mathbf{S} : \mathbf{S}
 \end{aligned}$$

et on obtient bien l'inégalité d'entropie

$$\Rightarrow \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\chi \tau \rho \text{T}} \|\mathbf{S}\|^2 \geq 0 \quad (4.14)$$

pour  $\text{T}$ ,  $\rho$ ,  $\chi$  et  $\tau$  strictement positifs. Le travail du modèle plastique est donc irréversible et produit de l'entropie.

### 4.3 Consistance

Avec l'expression du tenseur  $L^p$ , l'équation (4.10) sur l'inverse du gradient des déformations élastiques se réécrit comme suit

$$\partial_t([\nabla_x Y^e]) + \nabla_x(u \cdot [\nabla_x Y^e]) = \frac{1}{\chi\tau} [\nabla_x Y^e] S \quad (4.15)$$

Cette équation revient en fait à une pénalisation du terme du membre de droite où  $\tau$  est le paramètre de pénalisation. Si  $\tau \ll 1$  alors le déviateur  $S$  tend vers zéro. Le temps de relaxation  $\tau$  est écrit suivant [19] :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} \left( \frac{\max(0, \|S\|^2 - \frac{2}{3}\sigma_y^2)}{\chi^2} \right)^n \quad (4.16)$$

où  $\tau_0$  est le temps de relaxation caractéristique intrinsèque au matériau et  $n$  un exposant pris généralement égal à  $\frac{1}{2}$ . On reconnaît au dénominateur le critère de von Mises (4.2). Si le critère n'est pas dépassé alors  $\frac{1}{\tau} \rightarrow 0$ , le second membre de l'équation (4.15) s'annule et l'équation correspond au modèle d'élasticité. Au contraire, si le critère est vérifié alors les contraintes du matériau sont attirées vers la surface seuil de plasticité plus ou moins rapidement en fonction de la distance qui les sépare du seuil.

En élasticité, on démontre que l'équation (1.59c) sur le gradient des caractéristiques rétrogrades  $[\nabla_x Y]$  est redondante avec l'équation de continuité (1.3) à travers l'expression de la masse volumique  $\rho = \rho_0 \det(\nabla_x Y)$  en formulation lagrangienne [39]. On peut montrer que l'équation (4.15) pour la plasticité permet toujours d'avoir cette consistance avec l'inverse du tenseur des déformations élastiques  $[\nabla_x Y^e]$ , sachant que  $\det(\nabla_x Y^e) = \frac{\rho}{\rho_0}$  :

$$\begin{aligned} \partial_t(\det(\nabla_x Y^e)) &= \det(\nabla_x Y^e) \operatorname{Tr}((\nabla_x Y^e)^{-1} \partial_t(\nabla_x Y^e)) \\ &= \det(\nabla_x Y^e) \operatorname{Tr} \left( (\nabla_x Y^e)^{-1} \left( - \underbrace{\nabla_x(u \cdot \nabla_x Y^e)}_{u \cdot \nabla_x(\nabla_x Y^e) + [\nabla_x Y^e][\nabla_x u]} + \frac{1}{\chi\tau} \nabla_x Y^e S \right) \right) \\ &= -\det(\nabla_x Y^e) \operatorname{Tr}((\nabla_x Y^e)^{-1} u \cdot \nabla_x(\nabla_x Y^e)) \\ &\quad - \det(\nabla_x Y^e) \operatorname{Tr}(\nabla_x u) + \frac{1}{\chi\tau} \det(\nabla_x Y^e) \operatorname{Tr}(S) \xrightarrow{0} \\ &= -u \cdot \nabla_x(\det(\nabla_x Y^e)) - \det(\nabla_x Y^e) \nabla_x \cdot u \\ \Rightarrow \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_t &= -u \cdot \nabla_x \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{\rho}{\rho_0} \nabla_x \cdot u \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho_t + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0$$

On retrouve bien l'équation de conservation de la masse sous la condition d'invariance du volume lors des déformations plastiques ( $\det(F^p) = 1$ ).

## 5 Mise en œuvre

Dans cette section, on présente la méthode de résolution du modèle élasto-plastique. En particulier, on démontre que le terme source de l'équation (4.15) permet bien de relaxer les contraintes vers la surface seuil du critère de von Mises.

Le système d'équations s'écrit donc

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0 & (4.17a) \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u - \sigma) = 0 & (4.17b) \\ \partial_t(\nabla_x Y) + \nabla_x(u \cdot \nabla_x Y) = \frac{1}{\chi^\tau} [\nabla_x Y] S & (4.17c) \\ \partial_t(\rho e) + \nabla_x \cdot (\rho e u - \sigma^\top u) = 0 & (4.17d) \end{cases}$$

Ici, le tenseur  $[\nabla_x Y]$  désigne la partie élastique de l'inverse du gradient des déformations. L'exposant "e" a été enlevé pour plus de clarté dans les notations.

On effectue un splitting en temps du problème. Tout d'abord, le système hyperbolique (1.59) sans second membre est résolu pour l'élasticité pure grâce à la méthode présentée Chapitre 2. Puis, on résout le terme de relaxation plastique de l'équation sur le gradient des caractéristiques rétrogrades :

$$\text{- si } \|S\|^2 - \frac{2}{3}\sigma_y^2 \leq 0 \text{ alors } \partial_t(\nabla_x Y) = 0 \text{ il n'y a pas de plasticité } \left(\frac{1}{\tau} \rightarrow 0\right) \quad (4.18)$$

$$\text{- si } \|S\|^2 - \frac{2}{3}\sigma_y^2 > 0 \text{ alors } \partial_t(\nabla_x Y) = \frac{1}{\chi^\tau} [\nabla_x Y] S \quad (4.19)$$

Dans le cas où le matériau entre dans le régime plastique, il faut résoudre l'équation différentielle ordinaire (4.19) de relaxation plastique.

### 5.1 Quelques propriétés sur l'EDO plastique

On considère l'EDO (4.19) qui modélise la phase de relaxation plastique. Cette équation n'implique que les composantes du tenseur  $[\nabla_x Y]$  puisque le tenseur déviateur  $S$  ne dépend également que d'elles. Ces variables sont les seules à changer pendant cette étape du calcul.

On démontre que l'équation respecte la préservation du volume lors de la déformation plastique. On calcule la dérivée du déterminant du tenseur  $[\nabla_x Y]$  :

$$\begin{aligned} \partial_t(\det(\nabla_x Y)) &= \det(\nabla_x Y) \operatorname{Tr}([\nabla_x Y]^{-1} \partial_t(\nabla_x Y)) = \det(\nabla_x Y) \operatorname{Tr}\left([\nabla_x Y]^{-1} \frac{1}{\chi^\tau} [\nabla_x Y] S\right) \\ &= \frac{1}{\chi^\tau} \det(\nabla_x Y) \operatorname{Tr}(S) = 0 \end{aligned}$$

Ce résultat montre que  $\det(\nabla_x Y) = J^{-1}$  est indépendant du temps c'est-à-dire que le volume reste bien constant pendant l'étape de relaxation plastique. On remarque que c'est également le cas pour la masse volumique puisque  $\rho = \rho_0 \det(\nabla_x Y)$ .

Les contraintes sont attirées vers la surface seuil de plasticité pendant la relaxation c'est-à-dire que la fonction de charge  $f$  liée au critère de von Mises tend vers 0 :  $f = \frac{3}{2}\|S\|^2 - \sigma_y^2 \rightarrow 0$ . On cherche à montrer que l'équation (4.19) fait bien décroître le terme  $\|S\|^2$  en temps pour la loi de comportement néo-hookéenne. Selon cette loi, le déviateur  $S$  du tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit, voir Chapitre 1 Section 4.2,

$$S = 2\chi J^{-\frac{5}{3}} \left( B - \frac{\operatorname{Tr}(B)}{3} \operatorname{Id} \right) \quad (4.20)$$

On calcule la dérivée en temps du tenseur  $B = [\nabla_x Y]^{-1}[\nabla_x Y]^{-\top}$

$$\begin{aligned}\partial_t(B) &= \partial_t([\nabla_x Y]^{-1})[\nabla_x Y]^{-\top} + [\nabla_x Y]^{-1}\partial_t([\nabla_x Y]^{-\top}) \\ &= -[\nabla_x Y]^{-1}\partial_t([\nabla_x Y])[\nabla_x Y]^{-1}[\nabla_x Y]^{-\top} - [\nabla_x Y]^{-1}[\nabla_x Y]^{-\top}\partial_t([\nabla_x Y])^{\top}[\nabla_x Y]^{-\top} \\ &= -\frac{1}{\chi\tau}SB - \frac{1}{\chi\tau}BS = -\frac{2}{\chi\tau}BS\end{aligned}$$

par symétrie des tenseurs  $S$  et  $B$ . On calcule la dérivée en temps de la norme, en considérant le paramètre de pénalisation  $\tau$  constant,

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\frac{1}{2}\|S\|^2\right) &= S : \partial_t S = S : 2\chi J^{-\frac{5}{3}}\left(\partial_t B - \frac{\text{Tr}(\partial_t B)}{3}\text{Id}\right) \\ &= S : -\frac{4J^{-\frac{5}{3}}}{\tau}\left(BS - \frac{\text{Tr}(BS)}{3}\text{Id}\right) = -\frac{4J^{-\frac{5}{3}}}{\tau}\left(S : BS - \frac{\text{Tr}(BS)}{3}S : \text{Id}\right) \\ &= -\frac{4J^{-\frac{5}{3}}}{\tau}\left(2\chi J^{-\frac{5}{3}}\right)^2\left(B - \frac{\text{Tr}(B)}{3}\text{Id}\right) : \left(B^2 - \frac{\text{Tr}(B)}{3}B\right) \\ &= -\frac{4J^{-\frac{5}{3}}}{\tau}\underbrace{\left(2\chi J^{-\frac{5}{3}}\right)^2}_{D \geq 0}\left(\text{Tr}(B^3) - \frac{2}{3}\text{Tr}(B)\text{Tr}(B^2) + \frac{\text{Tr}(B)^3}{9}\right)\end{aligned}$$

Le tenseur  $B$  étant symétrique et défini positif, il est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives. On nomme ces valeurs  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ . Il vient alors

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\frac{1}{2}\|S\|^2\right) &= -\frac{D}{9}\left(9(\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3) - 6(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3\right) \\ &= -\frac{D}{9}\left(\alpha_1(2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)^2 + \alpha_2(-\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)^2 + \alpha_3(-\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)^2\right)\end{aligned}$$

Avec la constante  $D \geq 0$ , on obtient donc  $\partial_t\left(\frac{1}{2}\|S\|^2\right) \leq 0$ . La norme du tenseur déviateur  $\|S\|^2$  décroît donc en temps. D'une manière similaire, on peut montrer que c'est également le cas pour le modèle 2D avec la loi néo-hookéenne adaptée.

## 5.2 Intégration de l'EDO

On résout en temps l'équation (4.19) dont la condition initiale est donnée par la solution du système hyperbolique (1.59) sans second membre. On choisit d'utiliser une méthode semi-implicite. Le terme  $S$  est "gelé" et traité explicitement. Le terme  $[\nabla_x Y]$  est traité implicitement. On obtient alors une équation fonction seulement du tenseur  $[\nabla_x Y]$  que l'on peut résoudre de manière exacte. La solution de l'équation (4.19) entre les temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$  est alors

$$[\nabla_x Y]^{n+1} = [\nabla_x Y]^n \exp\left(\frac{\Delta t}{\chi\tau}S\right) \quad (4.21)$$

où  $[\nabla_x Y]^n$  et  $[\nabla_x Y]^{n+1}$  sont les valeurs approchées de  $[\nabla_x Y]$  aux temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , respectivement. Cette technique permet de se libérer de la contrainte sur la condition CFL qu'impose en règle générale la méthode de pénalisation [4] écrite avec un schéma d'Euler explicite. En effet, dans ce cas, le schéma garde sa stabilité sous la condition  $\Delta t \leq C_{\text{cste}}\tau$  où  $\tau \ll 1$ , ce qui produit des pas de temps très petits et donc un temps de calcul rédhibitoire.

L'exponentielle de la matrice  $S$  se calcule grâce à la librairie LAPACK. Soit  $A$  une matrice diagonalisable, on sait que  $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$  avec  $D$  la matrice diagonalisée de  $A$  et  $P$  la matrice de passage et que l'exponentielle d'une matrice diagonale vaut l'exponentielle de ses termes. On détermine alors avec la fonction DSPEV la matrice diagonale et la matrice de passage du tenseur symétrique  $S$  puis on calcule l'inverse de la matrice de passage par la fonction DGESV. Le reste du calcul se fait directement.

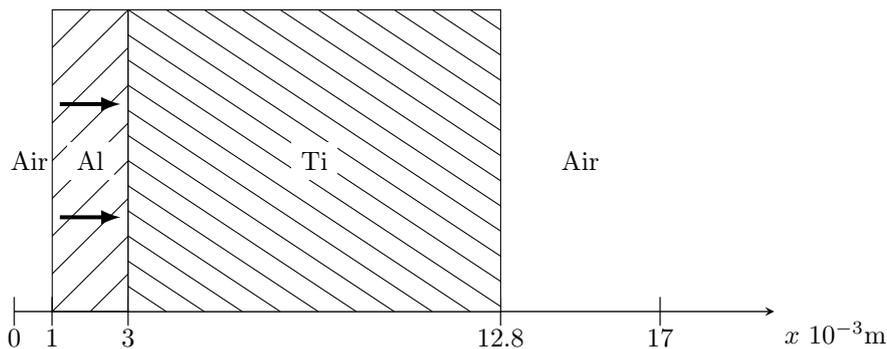
Du point de vue discret, on note que l'EDO de relaxation plastique se résout dans chaque maille indépendamment. Il n'est pas nécessaire de connaître les états des mailles voisines ni le matériau auquel elles appartiennent. Il n'y a donc rien de particulier à faire dans les communications entre processeurs pour la parallélisation.

## 6 Résultats

On présente dans cette section les résultats pour des problèmes d'écoulement plastique en une, deux et trois dimensions. On s'attache dans un premier temps à valider la méthode numérique pour la résolution de l'EDO plastique sur un cas test 1D.

### 6.1 Validation sur un cas 1D

Pour valider les calculs de plasticité, on refait la simulation 1D présentée dans [58]. Le problème consiste en une plaque d'aluminium de 2mm d'épaisseur impactant une plaque de titane de 9.8mm d'épaisseur. La vitesse initiale de la plaque d'aluminium est de  $700\text{m.s}^{-1}$ . En amont et en aval des deux plaques, le matériau présent est de l'air. Le domaine de calcul total est 17mm. La configuration initiale est schématisée Figure 4.6. Le calcul est fait sur une grille de 2000 mailles avec une CFL de 0.8.



**Figure 4.6** – Schéma du cas test 1D pour la plasticité. Une plaque d'aluminium impacte une plaque de titane à la vitesse de  $700\text{m.s}^{-1}$ .

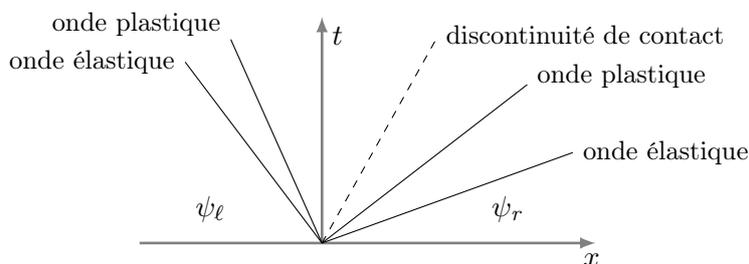
L'air est assimilé à un gaz parfait. Les lois de comportement de l'air, de l'aluminium et du titane considèrent donc  $a = b = 0$ . Les autres propriétés des matériaux sont listées Tableau 4.1. On prend  $\tau_0^{\text{Al}} = 1.10^{-9}\text{s}$  pour l'aluminium et  $\tau_0^{\text{Ti}} = 1.10^{-8}\text{s}$  pour le titane.

On a utilisé le code 3D avec une seule maille dans les directions 2 et 3. Les vitesses étant nulles dans ces deux directions à l'instant initial, elles le resteront au cours du calcul, d'après le système d'équations de conservation (1.66) pour l'élasticité.

Matériau	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\gamma$	$p_\infty$ (GPa)	$\chi$ (GPa)	$\sigma_y$ (MPa)
Air (parfait)	1	1.4	0	0	$\infty$
Aluminium	2712	3.5	32	26	60
Titane	4527	2.6	44	42	1030

**Tableau 4.1** – Propriétés des matériaux pour le cas de l’impact 1D plastique.

Lors d’un choc et de la plastification du matériau, deux ondes sont créées : une onde élastique dite précurseur élastique et une onde plastique de vitesse plus faible [15]. La structure des ondes pour le problème de Riemann dans le cas d’un problème élasto-plastique est schématisée Figure 4.7. L’état entre le précurseur élastique et l’onde plastique est celui dans lequel la contrainte du matériau se relaxe vers la surface seuil de plasticité.



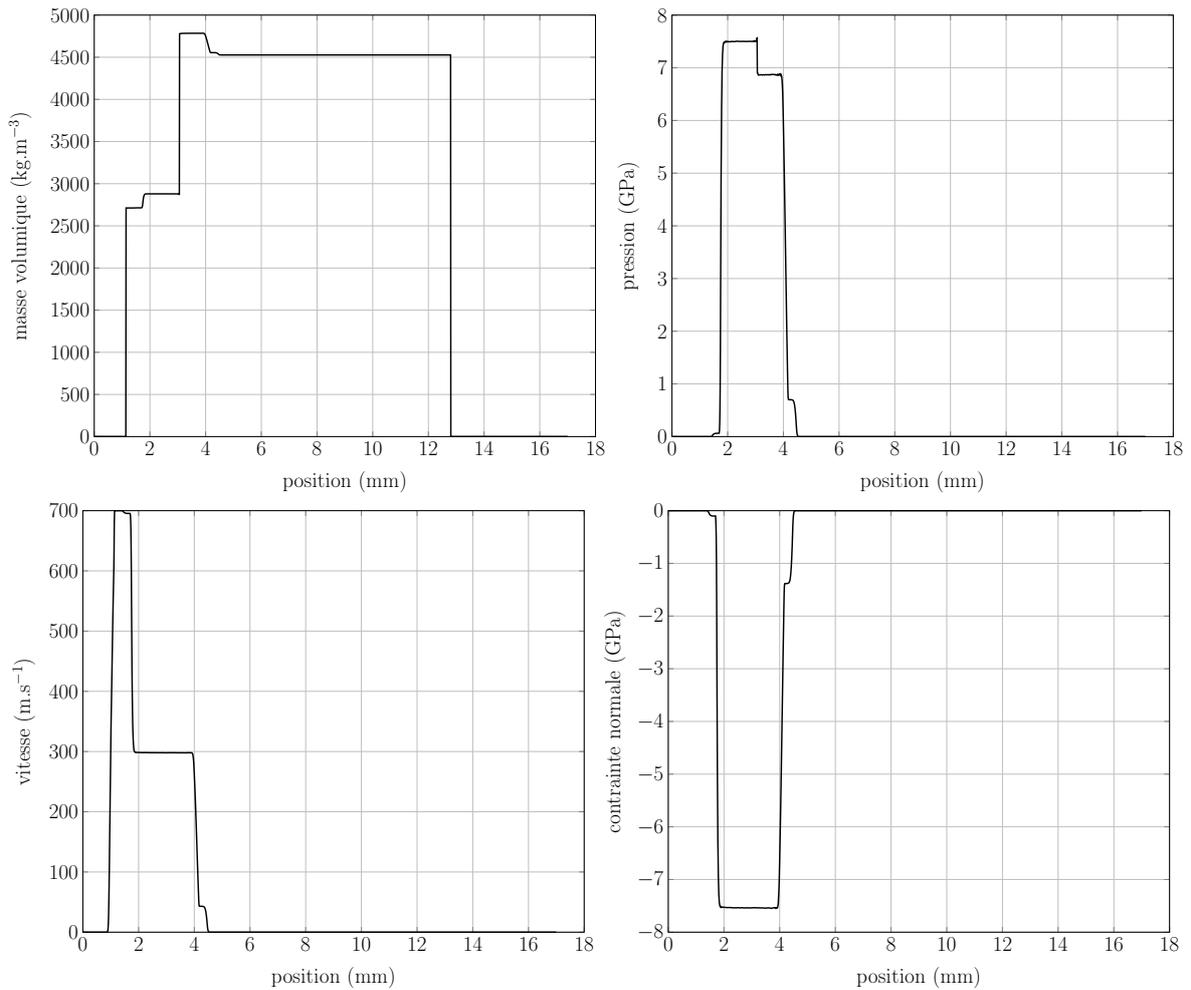
**Figure 4.7** – Schéma des ondes pour un problème 1D d’élasto-plasticité.

Les résultats de la simulation numérique pour le cas test 1D sont présentés Figure 4.8 au temps final  $t = 0.2\mu\text{s}$  pour la masse volumique, la pression, la vitesse et la contrainte normale. On observe clairement l’onde plastique en  $x = 4\text{mm}$  et l’onde élastique en  $x = 4.5\text{mm}$  qui se propagent dans le titane. Les ondes plastique et élastique dans l’aluminium sont moins différenciables l’une de l’autre. En effet, la limite d’élasticité de l’aluminium étant faible, le matériau plastifie presque immédiatement. On observe cependant sur les courbes de la pression, de la vitesse et de la contrainte normale l’onde élastique en  $x = 1.6\text{mm}$  et l’onde plastique en  $x = 1.2\text{mm}$ . On retrouve la même structure pour les ondes que [58].

Pour valider le schéma numérique, on reprend l’analyse faite dans [58]. On cherche donc à retrouver analytiquement les valeurs plateaux de la simulation numérique avec le modèle néo-hookéen d’hyperélasticité (1.69). Le problème est à une dimension d’espace c’est-à-dire que seuls les flux dans la direction 1 sont non nuls pour la résolution du système d’équations élastique, d’où la forme du gradient des caractéristiques rétrogrades  $[\nabla_x Y]$  :

$$[\nabla_x Y] = \begin{pmatrix} Y_{,1}^1 & 0 & 0 \\ Y_{,1}^2 & Y_{,2}^2 & 0 \\ Y_{,1}^3 & 0 & Y_{,3}^3 \end{pmatrix}$$

De plus, la condition initiale  $u = (u_1, 0, 0)$  fait que l’écoulement se propage uniquement selon la direction 1. Les termes  $Y_{,1}^2$  et  $Y_{,1}^3$  sont donc nuls. On remarque que bien que la simulation soit effectuée pour un problème en 1D, les trois composantes diagonales du tenseur  $[\nabla_x Y]$  sont mo-



**Figure 4.8** – Solution (masse volumique, pression, vitesse et contrainte normale) du problème de Riemann résultant de l’impact d’une plaque d’aluminium sur une plaque de titane pour un modèle élasto-plastique. Les résultats sont présentés au temps  $t = 0.2\mu\text{s}$ .

difiées par la résolution de l'EDO plastique. En effet, le tenseur déviateur  $S$  est écrit de manière non linéaire en fonction du tenseur  $[\nabla_x Y]$ . Le gradient des caractéristiques rétrogrades  $[\nabla_x Y]$  et, *a fortiori*, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  et son déviateur  $S$  sont donc des tenseurs diagonaux. Il vient alors par la définition du jacobien de la transformation  $J$  que  $\rho = \rho_0 Y_{,1}^1 Y_{,2}^2 Y_{,3}^3$ . On écrit l'expression (1.68) de l'énergie interne  $\varepsilon$  pour le modèle néo-hookéen :

$$\varepsilon = \frac{p + \gamma p_\infty}{(\gamma - 1)\rho_0 Y_{,1}^1 Y_{,2}^2 Y_{,3}^3} + \frac{\chi}{\rho_0} \left( (Y_{,1}^1 Y_{,2}^2 Y_{,3}^3)^{-\frac{4}{3}} \left( (Y_{,1}^1)^2 (Y_{,2}^2)^2 + (Y_{,1}^1)^2 (Y_{,3}^3)^2 + (Y_{,2}^2)^2 (Y_{,3}^3)^2 \right) - 3 \right) \quad (4.22)$$

et l'expression de la contrainte normale dans la direction 1 :  $\sigma_{11} = -p + S_{11}$  avec

$$S_{11} = \frac{2\chi}{3 \left( Y_{,1}^1 Y_{,2}^2 Y_{,3}^3 \right)^{\frac{1}{3}}} \left( 2(Y_{,2}^2)^2 (Y_{,3}^3)^2 - (Y_{,1}^1)^2 (Y_{,2}^2)^2 - (Y_{,1}^1)^2 (Y_{,3}^3)^2 \right) \quad (4.23)$$

Le tenseur déviateur  $S$  est à trace nulle. Il vient alors que  $S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0$ . Par symétrie, les composantes dans les directions 2 et 3 sont égales d'où  $S_{22} = S_{33} = -\frac{1}{2}S_{11}$ .

**Ondes élastiques.** Si à l'instant initial les composantes  $Y_{,2}^2 = Y_{,3}^3 = 1$ , alors elles le resteront dans la partie élastique du matériau, d'après la résolution du système (1.59). La masse volumique s'écrit alors  $\rho = \rho_0 Y_{,1}^1$ . On suppose que l'état de contrainte du matériau dans la zone élastique est au niveau de la surface seuil de von Mises d'où  $S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 = \frac{2}{3}\sigma_y^2$ . Par la condition de symétrie, on trouve  $S_{11} = \pm \frac{2}{3}\sigma_y$ . L'onde élastique étant une onde de choc, on choisit le signe "-". En conséquence, on obtient

$$S_{11} = \frac{4\chi}{3(Y_{,1}^1)^{\frac{1}{3}}} (1 - (Y_{,1}^1)^2) = -\frac{2}{3}\sigma_y \quad (4.24)$$

On peut alors réécrire cette expression comme une équation sur le paramètre  $Y_{,1}^1$

$$(Y_{,1}^1)^2 - \frac{\sigma_y}{2\chi} (Y_{,1}^1)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0 \quad (4.25)$$

dont la solution est unique, réelle et telle que  $Y_{,1}^1 > 1$ . Cette valeur permet de calculer la masse volumique  $\rho$  et, en utilisant les relations de saut de Rankine-Hugoniot sur l'onde de choc élastique, de déterminer les valeurs de la pression  $p$  et de la vitesse  $u$ .

On applique ces équations sur les ondes élastiques dans l'aluminium et le titane. Tableau 4.2 sont résumés les résultats analytiques trouvés avec le logiciel de calcul Mathematica et les valeurs numériques relevées sur les courbes.

Variables	Aluminium		Titane	
	résultats analytiques	résultats num.	résultats analytiques	résultats num.
$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	2713.565	2713.539	4554.726	4554.538
$u$ (m.s <sup>-1</sup> )	695.283	695.352	43.246	42.954
$p$ (GPa)	0.0648	0.0637	0.704	0.699

**Tableau 4.2** – Résultats analytiques et numériques dans la zone élastique de l'aluminium et du titane.

**Ondes plastiques.** On ne suppose plus  $Y_2^2 = Y_3^3 = 1$  mais la symétrie du tenseur  $[\nabla_x Y]$ , à savoir  $Y_2^2 = Y_3^3$ , est gardée. On calcule alors la masse volumique par  $\rho = \rho_0(Y_{,1}^1)(Y_{,2}^2)^2$ . Les ondes plastiques sont approximées par des ondes de choc. L'état de contrainte dans la zone plastique a relaxé vers la surface seuil de von Mises. En conséquence, on obtient

$$S_{11} = \frac{4\chi}{3 \left( (Y_{,1}^1)(Y_{,2}^2)^2 \right)^{\frac{1}{3}}} \left( (Y_{,2}^2)^4 - (Y_{,1}^1)^2 (Y_{,2}^2)^2 \right) = -\frac{2}{3} \sigma_y \quad (4.26)$$

Cette équation à deux inconnues  $Y_{,1}^1$  et  $Y_{,2}^2$  est définie pour chacun des états plastiques de l'aluminium et du titane, respectivement, de part et d'autre de la discontinuité de contact. Sachant qu'à travers cette discontinuité de contact, contrainte et vitesse normales sont constantes et en appliquant les relations de Rankine-Hugoniot sur les ondes de choc plastiques, on obtient un système à 12 équations. Ce système est résolu par le logiciel Mathematica.

Tableau 4.3 sont données les résultats analytiques et les valeurs numériques pour la masse volumique de l'aluminium et du titane ainsi que la vitesse de l'interface et la contrainte normale.

Variabes	résultats analytiques	résultats numériques
$\rho_{Al}$ (kg.m <sup>-3</sup> )	2879.483	2873.663
$\rho_{Ti}$ (kg.m <sup>-3</sup> )	4784.050	4778.498
$u_{Interface}$ (m.s <sup>-1</sup> )	297.771	298.006
$\sigma_{Interface}^{11}$ (GPa)	-7.546	-7.537

**Tableau 4.3** – Résultats analytiques et numériques dans la zone plastique de l'aluminium et du titane.

Les valeurs analytiques et numériques pour les zones élastiques et plastiques sont en bon accord. Le schéma numérique utilisé pour résoudre l'EDO de l'écoulement plastique est donc tout à fait valable.

## 6.2 Simulations 2D

On présente des simulations pour le modèle de plasticité en deux dimensions. Il s'agit d'impacts de projectiles sur une plaque ou sur une couche métallique. On distingue deux cas. Dans le premier cas, les deux objets ont des propriétés différentes. Dans le second cas, le projectile et la couche appartiennent au même matériau.

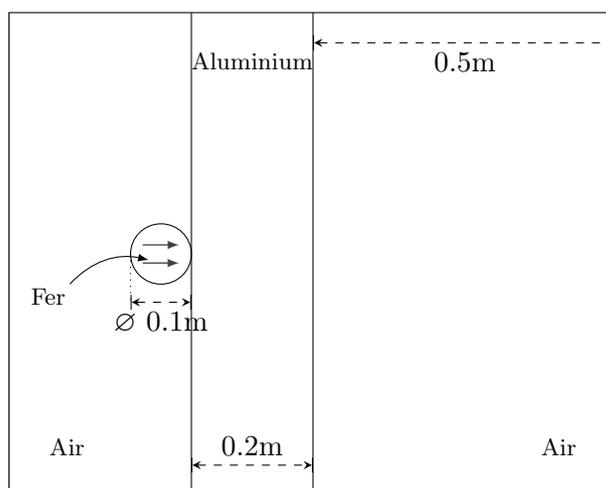
### Pénétration

Le premier cas test consiste en un cas de pénétration. Un projectile d'un matériau rigide impact une plaque d'un matériau plus mou. Ce genre de simulation est très répandu dans la littérature. On peut voir ce cas test pour des modèles en formulation eulérienne dans [77, 5, 58, 73] ou en formulation lagrangienne dans [37]. On considère un projectile en fer et une plaque en aluminium immergés dans de l'air. L'air est assimilé à un gaz parfait. Les lois de comportement des matériaux en présence prennent donc  $a = b = 0$ . Les autres propriétés sont listées Tableau 4.4. On prend  $\tau_0^{Fe} = 2.10^{-6}$ s pour le fer et  $\tau_0^{Al} = 3.10^{-7}$ s pour l'aluminium.

Matériau	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\gamma$	$p_\infty$ (GPa)	$\chi$ (GPa)	$\sigma_y$ (MPa)
Air (parfait)	1	1.4	0	0	$\infty$
Fer	7860	3.9	43.6	82	200
Aluminium	2712	3.5	32	26	60

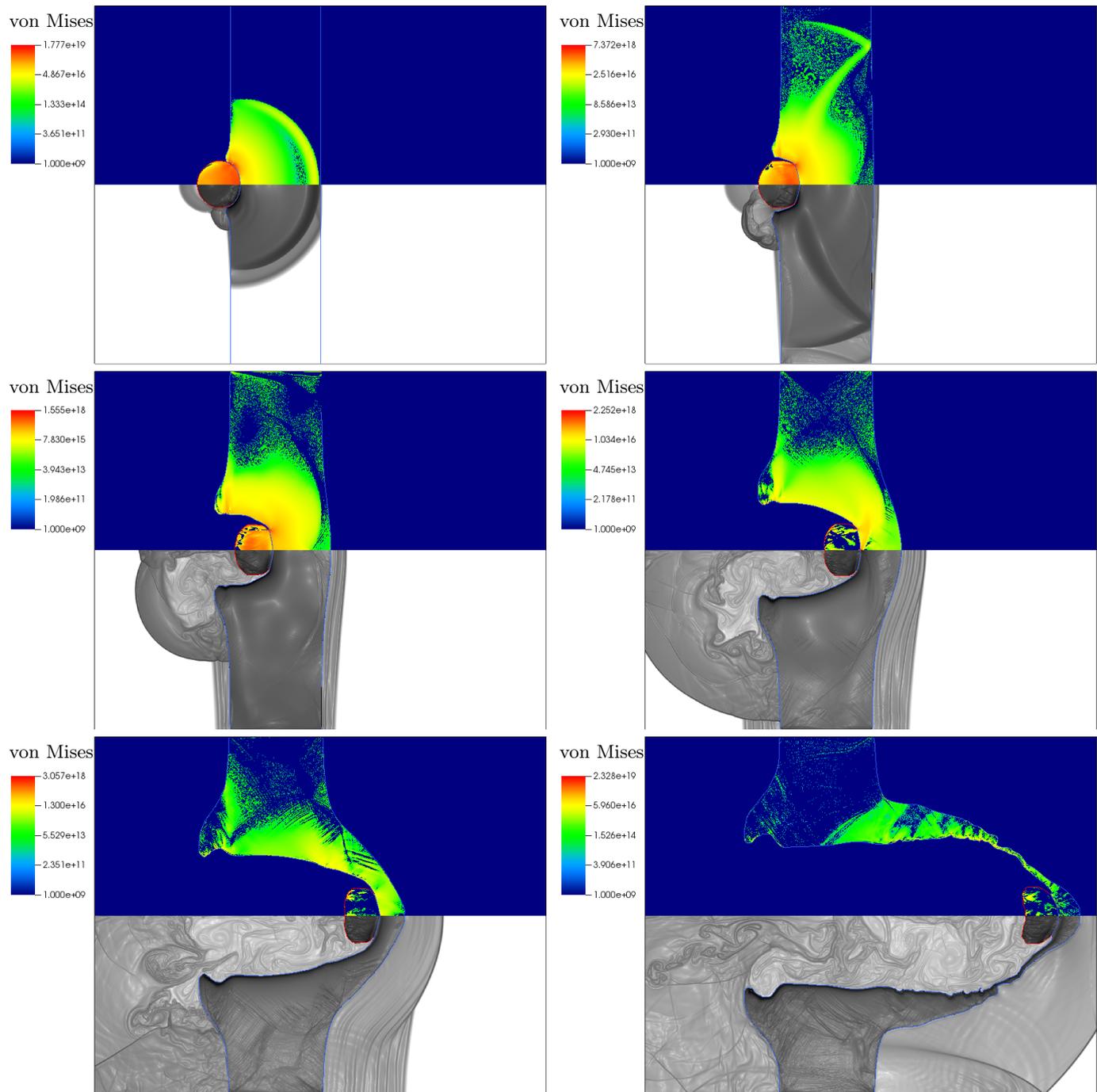
**Tableau 4.4** – Propriétés des matériaux pour le cas de l’impact avec pénétration.

À l’instant initial, le projectile et la plaque sont adjacents et le projectile a pour vitesse  $u = (1000, 0, 0)\text{m.s}^{-1}$ . La configuration initiale est schématisé Figure 4.9. Le domaine de calcul est  $[-0.3, 0.7] \times [-0.4, 0.4]\text{m}$ . Le projectile a un rayon de 0.05m et la plaque est d’épaisseur 0.2m. Les conditions aux limites pour les bords nord et sud du domaine de calcul sont des conditions d’encastrement. Les conditions imposées aux bords est et ouest sont de type Neumann. Le calcul est exécuté sur un maillage de  $2000 \times 1600$  sur 144 processeurs.



**Figure 4.9** – Schéma de la configuration initiale pour le cas de la pénétration d’un projectile dans une plaque encastrée. Le domaine de calcul est  $[-0.3, 0.7] \times [-0.4, 0.4]\text{m}$ .

Les résultats sont présentés Figure 4.10 avec les images schlieren de l’écoulement sur la partie inférieure et les valeurs de la fonction de charge du critère de von Mises  $\frac{2}{3}f = S : S - \frac{2}{3}\sigma_y^2$  sur la partie supérieure. Pour représenter ses valeurs, on a utilisé une échelle logarithmique et imposé le minimum à  $1.10^9$ . On observe que le projectile pénètre dans la plaque. Celle-ci est complètement déformée et tend à former un filament. Le projectile s’aplatit mais, sa limite d’élasticité étant très grande, il ne s’écrase pas au contraire de ce que l’on peut l’observer pour les matériaux dans [73], par exemple. On constate que la plastification suit les ondes qui se propagent dans les matériaux solides mais est la plus importante dans les zones à l’interface entre les deux objets et le fluide. Sur la première image, on peut donc identifier une onde longitudinale (onde la plus rapide) se propageant dans la plaque suivie d’une onde de cisaillement provoquant la plastification du matériau.



**Figure 4.10** – Impact et pénétration d'un projectile sur une plaque encastrée en deux dimensions. Images schlieren (partie inférieure) et valeurs du critère de von Mises (partie supérieure) aux temps  $t = 0.03\text{ms}$ ,  $t = 0.06\text{ms}$ ,  $t = 0.13\text{ms}$ ,  $t = 0.26\text{ms}$ ,  $t = 0.53\text{ms}$  et  $t = 1.04\text{ms}$  de gauche à droite et de haut en bas.

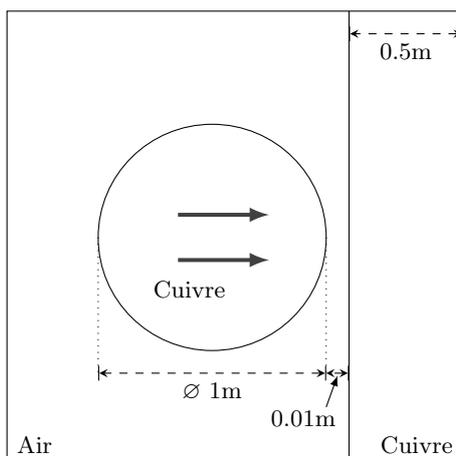
### Impact plastique

Un second cas test consiste en un disque impactant une couche du même métal à la vitesse initiale de  $500\text{m.s}^{-1}$ . Cette fois, les deux objets sont du même matériau cuivre et sont immergés dans l'air. L'air est assimilé à un gaz parfait. Les propriétés des matériaux sont listées Tableau 4.5. On prend  $\tau_0 = 4.10^{-6}\text{s}$ .

Matériau	$\gamma$	$\rho$ ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	$p_\infty$ (GPa)	$\chi$ (GPa)	$\sigma_y$ (MPa)	$p$ (Pa)
Air	1.4	1000	0	0	$\infty$	$10^5$
Cuivre	4.22	8900	34.2	50	600	$10^5$

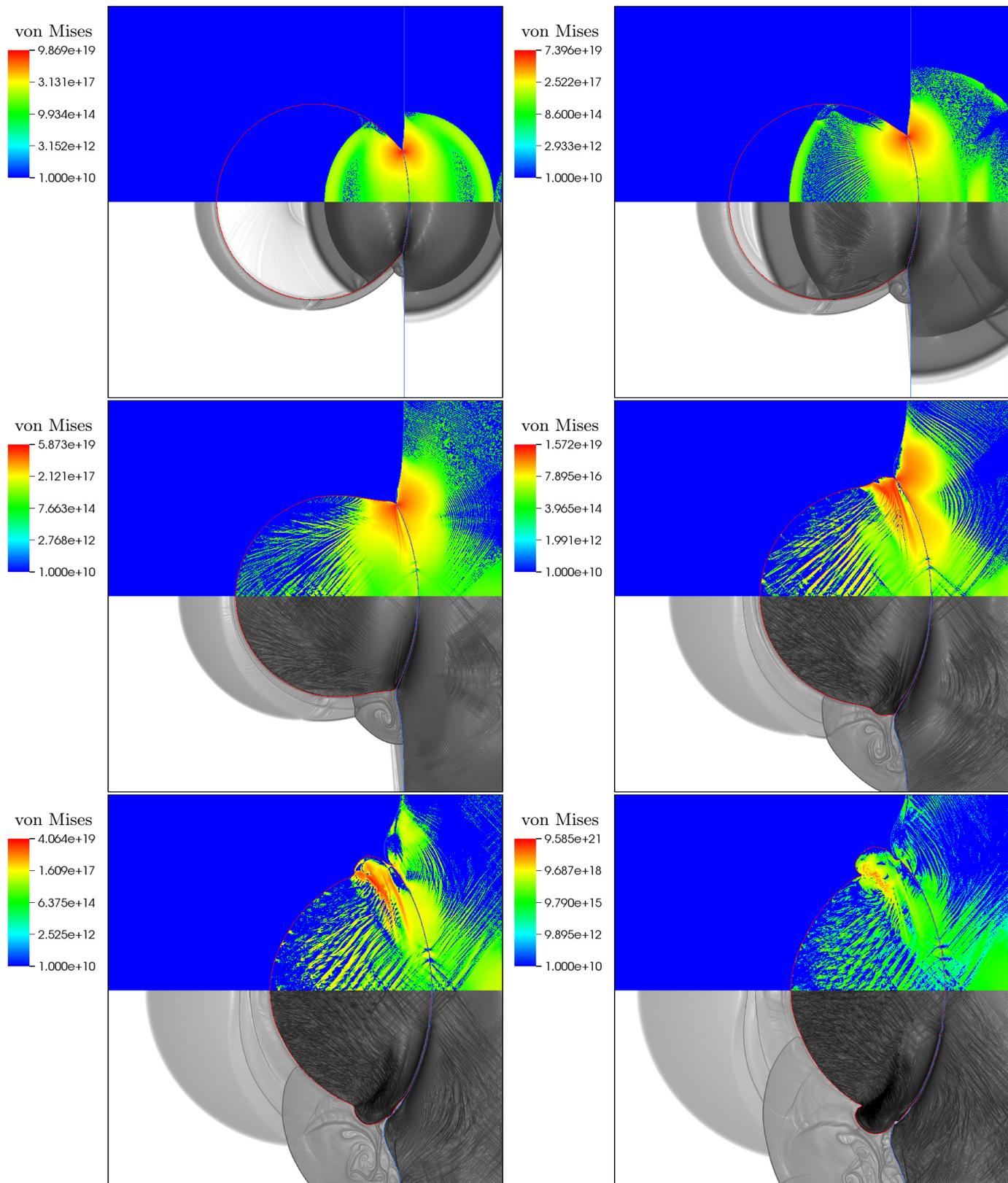
**Tableau 4.5** – Propriétés des matériaux pour le cas d'un impact plastique.

La configuration initiale est schématisée Figure 4.11. Le domaine de calcul est  $[-1, 1]\text{m}$ . Le disque est de rayon  $0.5\text{m}$  et est placé à  $10^{-2}\text{m}$  de la couche. Celle-ci est d'épaisseur  $0.5\text{m}$ . Les conditions aux limites des bords sont de type Neumann excepté pour le bord est qui est modélisé par une condition de symétrie. Le calcul est fait sur un maillage de  $2000^2$  avec 144 processeurs.



**Figure 4.11** – Schéma de la configuration initiale pour le cas d'un impact plastique en deux dimensions. Un disque de cuivre impacte une couche du même matériau à la vitesse initiale de  $500\text{m.s}^{-1}$ . Le domaine de calcul est  $[-1, 1]^2\text{m}$ .

Les résultats de la simulation sont présentés Figure 4.12. Cette fois, le projectile s'écrase dans la couche de métal et tend à former un renflement. La plastification se produit au niveau des ondes qui se propagent dans les solides. La zone de plastification principale se situe cependant au niveau du point triple entre les trois matériaux puis dans la plissure du projectile déformé. On constate que plus le projectile se déforme, plus son interface se plie. Dans cette zone, par la propriété des fonctions level set, les mailles élastiques fusionnent, ce qui n'est physiquement pas correct. Il serait alors intéressant de contrôler cette fusion, à l'aide d'un maillage plus raffiné autour de l'interface par exemple.



**Figure 4.12** – Impact d’un projectile métallique sur une couche du même métal en deux dimensions. Images schlieren (partie inférieure) et valeurs du critère de von Mises (partie supérieure) aux temps  $t = 120\mu s$ ,  $t = 180\mu s$ ,  $t = 328\mu s$ ,  $t = 540\mu s$ ,  $t = 760\mu s$  et  $t = 960\mu s$  de gauche à droite et de haut en bas.

## Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle simple pour simuler l'écoulement plastique des matériaux a été détaillé. Il est basé sur le critère de von Mises qui évalue les contraintes de cisaillement par rapport à une surface seuil de plasticité. Il a été montré que ce modèle respecte bien la préservation du volume lors des déformations plastiques des matériaux, la condition d'entropie et la relaxation des contraintes de cisaillement vers la limite d'élasticité. On a distingué la définition de limite d'élasticité pour les cas en deux et trois dimensions. La résolution du système d'équations s'effectue par une méthode de splitting. Tout d'abord le système d'équations élastique est résolu par le schéma présenté Chapitre 2. La résolution du second membre se présente alors sous la forme d'une équation différentielle ordinaire munie d'un terme de relaxation.

Une simulation 1D permet de valider la méthode numérique employée pour résoudre l'EDO plastique en comparant les résultats numériques aux résultats analytiques obtenus par hypothèse sur les états intermédiaires du problème de Riemann plastique et relations de saut de Rankine-Hugoniot sur les ondes. Des simulations pour le modèle en deux dimensions ont ensuite été présentées.

Il reste encore à investiguer la valeur du coefficient de relaxation caractéristique  $\tau_0$  intrinsèque au matériau. En effet, si sa valeur est trop haute alors les contraintes de cisaillement n'atteignent pas la surface seuil de plasticité à la fin du pas de temps d'intégration. Au contraire, si sa valeur est trop faible alors les contraintes se relaxent au delà de la limite d'élasticité ce qui n'est pas correct du point de vue physique. Un autre objectif est d'effectuer des simulations en trois dimensions.



# Conclusion

Dans cette thèse, on s'est intéressés à la simulation d'écoulements multi-matériaux. Les matériaux sont supposés compressibles et soumis à de grandes déformations. Ils sont séparés par une interface dite sharp, infiniment fine. Chaque matériau est décrit par sa propre loi de comportement. On distingue les gaz, les liquides, les solides purement élastiques et les solides élasto-plastiques. Les fluides sont décrits par une loi de comportement générale tirée du premier principe de la thermodynamique. L'élasticité décrite suit les lois de l'hyperélasticité pour les solides isotropes. Le comportement plastique est soumis à un critère de limite d'élasticité : le critère de von Mises. La modélisation des phénomènes se fait en formulation eulérienne de façon à décrire indifféremment l'évolution des matériaux avec un unique système d'équations de conservation. La résolution s'effectue sur des maillages cartésiens. Dans cette optique, la géométrie des interfaces étant indépendante du maillage, le schéma numérique est adapté pour imposer correctement les conditions d'interface.

On a, tout d'abord, exposé la modélisation des notions de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, bases de la mécanique des milieux continus. Ces notions sont caractérisées par les équations d'Euler pour les fluides parfaits compressibles. On a rappelé la description de la cinématique du solide en grandes déformations et son écriture en formulation eulérienne. En combinant ces éléments, il vient un système d'équations de conservation dont le calcul de la vitesse des ondes sert de base à la résolution approchée des problèmes de Riemann aux interfaces intercellulaires.

Le schéma numérique utilisé est construit pour des grilles cartésiennes. On a présenté plusieurs techniques de la littérature pour modéliser les écoulements multiphasiques sur des maillages cartésiens. La solution choisie est d'adapter le solveur de Riemann approché HLLC aux interfaces entre différents matériaux de façon à conserver les propriétés de continuité de la vitesse et de la contrainte normales tout en gardant l'interface entre les matériaux sharp grâce à l'utilisation de deux flux numériques au bord. Le schéma est résolu à l'ordre 2 en temps et monté à l'ordre 2 en espace. L'interface est suivie par l'iso-zéro d'une fonction level set.

La méthode de résolution splittée direction par direction a permis une extension facile en trois dimensions. De plus, cette méthode permet une parallélisation aisée des codes 2D et 3D avec la librairie MPI et les tests de performance montrent de très bonnes scalabilités. La parallélisation a permis d'augmenter de façon importante le raffinement des maillages utilisés en deux dimensions et d'effectuer des simulations en trois dimensions dans des temps de calcul raisonnables. Le code

en trois dimensions a été validé par comparaison avec le modèle 2D sur un cas test de type tube à choc élastique. On a démontré que les modèles 2D et 3D sont différents du fait que le modèle 2D ne correspond pas à un modèle 3D écrit dans le cadre de contraintes planes. De plus, on a constaté que les vitesses des ondes de cisaillement pour le modèle 3D sont si proches que les ondes ne sont pas distinguables. Le code a ensuite été utilisé pour des simulations d'interactions choc/bulle et d'impacts en trois dimensions. Les résultats montrent que la robustesse de la méthode numérique. L'interface entre les matériaux reste sharp et les changements de topologie des interfaces s'effectuent sans problème de stabilité grâce à la méthode level set de capture de fronts.

On a présenté une modélisation simplifiée pour permettre le détachement des interfaces dans les cas où plusieurs matériaux sont en présence. Cette modélisation impose une modification du calcul des flux numériques multi-matériaux grâce à une adaptation du demi-problème de Riemann. Elle agit également sur le transport des fonctions level set quand les iso-zéros sont séparées par moins d'une maille. Les simulations en deux et trois dimensions montrent que les deux objets élastiques rebondissent l'un sur l'autre moyennant l'expulsion à grande vitesse d'un jet d'air.

Finalement, on a étendu le modèle pour les solides élastiques en y incluant un comportement de plasticité parfaite. On a utilisé un modèle simple qui consiste à rajouter un second membre à l'équation sur le gradient élastique des caractéristiques rétrogrades  $[\nabla_x Y^e]$ . Il a été montré que ce second terme est écrit de façon à retrouver les hypothèses de la déformation plastique, à savoir la préservation du volume, la condition d'entropie et la relaxation des contraintes de cisaillement vers la surface seuil de plasticité. On a distingué la définition de limite d'élasticité pour les cas en deux et trois dimensions. La méthode numérique en trois dimensions pour résoudre le système d'équations et, en particulier, l'EDO plastique a été validée sur un cas test 1D par comparaison entre les valeurs numériques et analytiques obtenues. On a, finalement, présenté des simulations avec le modèle de plasticité 2D.

## Perspectives

Les perspectives de travail sont diverses. L'utilisation de la parallélisation permet d'augmenter le nombre de points de discrétisation du domaine de calcul. Cependant, ce raffinement impose que certaines zones du domaine où les flux numériques sont proches de zéro, typiquement loin des interfaces et des fronts d'ondes, soient inutilement sur-résolues. Il serait donc avantageux d'implémenter une méthode de raffinement de maillage adaptatif (AMR), de type octree [60] par exemple. De plus, le schéma numérique sur les mailles englobant les interfaces est à l'ordre 1. Un maillage plus raffiné aux interfaces permettrait donc de gagner en précision à leur niveau. Il permettrait également de mieux appréhender les ruptures de structures au sein de l'écoulement.

Une autre approche pour augmenter la précision du schéma aux interfaces serait d'utiliser la méthode développée par Gorsse *et al.* [31] qui calculent le flux à l'interface entre un fluide et un obstacle sur maillage cartésien en imposant une condition de bord à l'ordre 2. Cette technique serait également utile pour imposer de manière plus précise les conditions de bord quand deux iso-zéros de fonctions level set sont juxtaposées. Un inconvénient, cependant, est que cette approche requière de calculer les normales à l'interface grâce aux propriétés de la fonction level set

## Conclusion

---

qu'il faut alors redistancier. Certaines méthodes de redistanciation s'effectuent en séquentiel et la parallélisation du code perdrait donc en performance.

Une perspective d'extension des modèles présentés serait d'utiliser des modèles plus complexes pour décrire les très grandes déformations élastiques. En effet, le modèle néo-hookéen est connu pour être limité dans ces régimes de déformations [43]. Il est aussi envisageable de modéliser la plasticité réelle des matériaux, en prenant en compte le phénomène d'écrouissage. Une autre piste de développement serait de décrire l'endommagement et la fracture des matériaux solides. Il faudrait alors envisager une modélisation pour faire apparaître des interfaces au sein des matériaux et pour propager les fissures.



# Bibliographie

- [1] R. Abgrall. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations : A quasi conservative approach. *Journal of Computational Physics*, 125(1) :150–160, 1996.  
p. 39, 40
- [2] R. Abgrall and S. Karni. Computations of compressible multifluids. *Journal of Computational Physics*, 169 :594–623, 2001.  
p. 42
- [3] G. Allaire, S. Clerc, and S. Kokh. A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids. *Journal of Computational Physics*, 181(2) :577–616, 2002.  
p. 40, 76
- [4] P. Angot, C.-H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4) :497–520, 1999.  
p. 113
- [5] P.T. Barton, R. Deiterding, D. Meiron, and D. Pullin. Eulerian adaptive finite-difference method for high-velocity impact and penetration problems. *Journal of Computational Physics*, 240 :76–99, 2013.  
p. 103, 109, 110, 118
- [6] P.T. Barton and D. Drikakis. An Eulerian method for multi-component problems in non-linear elasticity with sliding interfaces. *Journal of Computational Physics*, 229(15) :5518–5540, 2010.  
p. 43
- [7] P.T. Barton, D. Drikakis, E. Romenski, and V.A. Titarev. Exact and approximate solutions of Riemann problems in non-linear elasticity. *Journal of Computational Physics*, 228(18) :7046–7068, 2009.  
p. 5, 37
- [8] P.T. Barton, B. Obadia, and D. Drikakis. A conservative level-set based method for compressible solid/fluid problems on fixed grids. *Journal of Computational Physics*, 230(21) :7867–7890, 2011.  
p. 43
- [9] A. de Brauer, A. Iollo, and T. Milcent. A Cartesian scheme for compressible multimaterial models in 3D. Submitted.  
p. 22, 23, 30, 31, 32, 70
- [10] M. Brouillette. The Richtmyer-Meshkov instability. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34 :445–468, 2002.  
p. 82, 83, 85
- [11] P.G. Ciarlet. *Élasticité tridimensionnelle*. Masson, Paris, 1985.  
p. 16, 17

- 
- [12] M. Coquerelle and G.-H. Cottet. A vortex level set method for the two-way coupling of an incompressible fluid with colliding rigid bodies. *Journal of Computational Physics*, 227(21) :9121–9137, 2008. p. 92
- [13] G.-H. Cottet, E. Maitre, and T. Milcent. Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. *ESAIM-Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42(3) :471–492, 2008. p. 5, 13, 17
- [14] S. Davis. Simplified second-order Godunov-type methods. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 9(3) :445–473, 1988. p. 44, 51
- [15] D.S. Drumheller. *Introduction to wave propagation in nonlinear fluids and solids*. Cambridge University Press, 1998. p. 115
- [16] F. Dubois and P. Le Floch. Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *Journal of Differential Equations*, 71(1) :93–122, 1988. p. 59
- [17] D. Enright, R.P. Fedkiw, J. Ferziger, and I. Mitchell. A hybrid particle level set method for improved interface capturing. *Journal of Computational Physics*, 183(1) :83–116, 2002. p. 40
- [18] N. Favrie, S. Gavriluyuk, and S. Ndanou. A thermodynamically compatible splitting procedure in hyperelasticity. *Journal of Computational Physics*, 270 :300–324, 2014. p. 19
- [19] N. Favrie and S.L. Gavriluyuk. Dynamics of shock waves in elastic-plastic solids. *ESAIM : Proceedings*, 33 :50–67, 2011. p. 41, 103, 109, 111
- [20] N. Favrie and S.L. Gavriluyuk. Diffuse interface model for compressible fluid - Compressible elastic-plastic solid interaction. *Journal of Computational Physics*, 231(7) :2695–2723, 2012. p. 103, 109
- [21] N. Favrie, S.L. Gavriluyuk, and R. Saurel. Solid–fluid diffuse interface model in cases of extreme deformations. *Journal of Computational Physics*, 228(16) :6037–6077, 2009. p. 37, 41, 70, 78, 79
- [22] R.P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman, and S. Osher. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the Ghost Fluid Method). *Journal of Computational Physics*, 152 :457–492, 1999. p. 39, 42, 73
- [23] S. Galera, P.-H. Maire, and J. Breil. A two-dimensional unstructured cell-centered multi-material ALE scheme using VOF interface reconstruction. *Journal of Computational Physics*, 229(16) :5755–5787, 2010. p. 5
- [24] S.L. Gavriluyuk and N. Favrie. Mathematical and numerical model for nonlinear viscoplasticity. *Philosophical Transactions of The Royal Society A*, 369 :2864–2880, 2011. p. 41
- [25] S.L. Gavriluyuk, N. Favrie, and R. Saurel. Modelling wave dynamics of compressible elastic materials. *Journal of Computational Physics*, 227(5) :2941–2969, 2008. p. 5, 19, 37

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [26] J. Giordano and Y. Burtschell. Richtmyer-Meshkov instability induced by shock-bubble interaction : Numerical and analytical studies with experimental validation. *Physics of Fluids*, 18(3), 2006. p. 74
- [27] R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph, and J. Périaux. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : Application to particulate flow. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :363–426, 2001. p. 92
- [28] S.K. Godunov. A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Matematicheskii Sbornik*, 89(3) :271–306, 1959. p. 37
- [29] Y. Gorsse. *Approximation numérique sur maillage cartésien de lois de conservation : écoulements compressibles et élasticité non linéaire*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2012. p. 1, 35, 82
- [30] Y. Gorsse, A. Iollo, T. Milcent, and H. Telib. A simple Cartesian scheme for compressible multimaterials. *Journal of Computational Physics*, 272 :772–798, 2014. p. 15, 21, 29, 35, 37, 44, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 73, 76, 78, 79
- [31] Y. Gorsse, A. Iollo, H. Telib, and L. Weynans. A simple second order Cartesian scheme for compressible Euler flows. *Journal of Computational Physics*, 231(23) :7780–7794, 2012. p. 126
- [32] B. Hejazialhosseini, D. Rossinelli, and P. Koumoutsakos. 3D shock-bubble interaction. *Physics of Fluids*, 25(9) :091105, 2013. p. 74
- [33] S. Hiermaier, D. Könke, A.J. Stilp, and K. Thoma. Computational simulation of the hypervelocity impact of Al-spheres on thin plates of different materials. *International Journal of Impact Engineering*, 20(1–5) :363–374, 1997. Hypervelocity Impact Proceedings of the 1996 Symposium. p. 1
- [34] D.J. Hill, D. Pullin, M. Ortiz, and D. Meiron. An Eulerian hybrid WENO centered-difference solver for elastic-plastic solids. *Journal of Computational Physics*, 229(24) :9053–9072, 2010. p. 103, 108
- [35] C.W Hirt and B.D Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1) :201–225, 1981. p. 40
- [36] G.A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering*. Wiley, Chichester, New York, 2000. p. 14
- [37] B.P. Howell and G.J. Ball. A free-Lagrange augmented Godunov method for the simulation of elastic–plastic solids. *Journal of Computational Physics*, 175(1) :128 – 167, 2002. p. 118
- [38] A.V. Idesman and S.P. Mates. Accurate finite element simulation and experimental study of elastic wave propagation in a long cylinder under impact loading. *International Journal of Impact Engineering*, 71 :1–16, 2014. p. 1

- 
- [39] A. Iollo, T. Milcent, and H. Telib. A sharp contact discontinuity scheme for multimaterial models. In *Finite Volumes for Complex Applications VI, Problems & Perspectives*, volume 4 of *Springer Proceedings in Mathematics*, pages 581–588. Springer Berlin Heidelberg, 2011. p. 1, 5, 19, 20, 21, 23, 37, 43, 111
- [40] G.-S. Jiang and C.-W. Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1) :202–228, 1996. p. 57
- [41] A. Kapahi, S. Sambasivan, and H.S. Udaykumar. A three-dimensional sharp interface Cartesian grid method for solving high speed multi-material impact, penetration and fragmentation problems. *Journal of Computational Physics*, 241 :308–332, 2013. p. 43, 103
- [42] S. Karni. Multicomponent flow calculations by a consistent primitive algorithm. *Journal of Computational Physics*, 112(1) :31–43, 1994. p. 40
- [43] B. Kim, S.B. Lee, J. Lee, S. Cho, H. Park, S. Yeom, and S.H. Park. A comparison among Neo-Hookean model, Mooney-Rivlin model, and Ogden model for chloroprene rubber. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 13(5) :759–764, 2012. p. 127
- [44] K.-H. Kim and J.J. Yoh. A particle level-set based Eulerian method for multi-material detonation simulation of high explosive and metal confinements. *Proceedings of the Combustion Institute*, 34(2) :2025–2033, 2013. p. 1
- [45] G. Kluth and B. Després. Perfect plasticity and hyperelastic models for isotropic materials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 20(3) :173–192, 2008. p. 103
- [46] G. Kluth and B. Després. Discretization of hyperelasticity on unstructured mesh with a cell-centered Lagrangian scheme. *Journal of Computational Physics*, 229(24) :9092–9118, 2010. p. 5, 78
- [47] E.H. Lee and D.T. Liu. Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis. *Journal of Applied Physics*, 38(1) :19–27, 1967. p. 104
- [48] T.G. Liu, B.C. Khoo, and K.S. Yeo. Ghost fluid method for strong shock impacting on material interface. *Journal of Computational Physics*, 190(2) :651–681, 2003. p. 43
- [49] A. López Ortega, M. Lombardini, P.T. Barton, D.I. Pullin, and D.I. Meiron. Richtmyer-Meshkov instability for elastic-plastic solids in converging geometries. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 76 :291–324, 2015. p. 110
- [50] A. López Ortega, M. Lombardini, D.I. Pullin, and D.I. Meiron. Numerical simulation of elastic-plastic solid mechanics using an Eulerian stretch tensor approach and HLLD Riemann solver. *Journal of Computational Physics*, 257 :414–441, 2014. p. 38, 103, 108, 110
- [51] R. Loubère, P.-H. Maire, M. Shashkov, J. Breil, and S. Galera. ReALE : A reconnection-based Arbitrary-Lagrangian–Eulerian method. *Journal of Computational Physics*, 229(12) :4724–4761, 2010. p. 73

- [52] A. Marquina and P. Mulet. A flux-split algorithm applied to conservative models for multicomponent compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 185(1) :120–138, 2003. p. 73
- [53] E.E. Meshkov. Instability of the interface of two gases accelerated by a shock wave. *Fluid Dynamics*, 4(5) :101–104, 1969. p. 82
- [54] G.H. Miller. An iterative Riemann solver for systems of hyperbolic conservation laws, with application to hyperelastic solid mechanics. *Journal of Computational Physics*, 193(1) :198–225, 2003. p. 37
- [55] G.H. Miller and P. Collela. A high-order Eulerian Godunov method for elastic-plastic flow in solids. *Journal of Computational Physics*, 167(1) :131–176, 2001. p. 1, 5, 103, 108, 110
- [56] R. Mittal and G. Iaccarino. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 37(1) :239–261, 2005. p. 39
- [57] M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11 :582–592, 1940. p. 20
- [58] S. Ndanou, N. Favrie, and S. Gavriluk. Multi-solid and multi-fluid diffuse interface model : Applications to dynamic fracture and fragmentation. *Journal of Computational Physics*, 295 :523–555, 2015. p. 41, 103, 109, 114, 115, 118
- [59] R.W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity - On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 326(1567) :565–584, 1972. p. 20
- [60] Optimad. <http://optimad.github.io/pablo/>, 2015. p. 126
- [61] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) :12–49, 1988. p. 39
- [62] C.S. Peskin. The fluid dynamics of heart valves : Experimental, theoretical and computational methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 14 :235–259, 1982. p. 68
- [63] B.J. Plohr and D.H. Sharp. A conservative Eulerian formulation of the equations for elastic flow. *Advances in Applied Mathematics*, 9(4) :481–499, 1988. p. 5
- [64] B.J. Plohr and D.H. Sharp. A conservative formulation for plasticity. *Advances in Applied Mathematics*, 13(4) :462–493, 1992. p. 103
- [65] J.N. Plohr and B.J. Plohr. Linearised analysis of Richtmyer-Meshkov flow for elastic materials. *Journal of Fluid Mechanics*, 537 :55–89, 2005. p. 88, 89
- [66] R.D. Richtmyer. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(2) :297–319, 1960. p. 82

- 
- [67] R.S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 240(822) :459–490, 1948. p. 20
- [68] R.S. Rivlin and D.W. Saunders. Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 243(865) :251–288, 1951. p. 20
- [69] S. Sambasivan, A. Kapahi, and H.S. Udaykumar. Simulation of high speed impact, penetration and fragmentation problems on locally refined Cartesian grids. *Journal of Computational Physics*, 235 :334–370, 2013. p. 43, 103
- [70] R. Saurel, F. Petitpas, and R.A. Berry. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures. *Journal of Computational Physics*, 228(5) :1678–1712, 2009. p. 40, 41
- [71] J.A. Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. In *Proceedings of the National Academy of Sciences*, volume 93, pages 1591–1594, 1996. p. 39
- [72] K.-M. Shyue. A fluid-mixture type algorithm for compressible multicomponent flow with van der Waals equation of state. *Journal of Computational Physics*, 156(1) :43–88, 1999. p. 76
- [73] C.D. Sijoy and S. Chaturvedi. An Eulerian multi-material scheme for elastic–plastic impact and penetration problems involving large material deformations. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 53 :85–100, 2015. p. 118, 119
- [74] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114(1) :146–159, 1994. p. 39
- [75] E.F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics - A practical introduction*. Springer, Berlin, 2<sup>nd</sup> edition, 1999. p. 29, 49
- [76] E.F. Toro, M. Spruce, and W. Speares. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, 4 :25–34, 1994. p. 37
- [77] J. Walter, J. Glimm, J. Grove, H.-C. Hwang, X. Lin, B.J. Plohr, D.H. Sharp, and D. Yu. Eulerian front tracking for solid dynamics. In *Proceedings of the 15th US Army Symposium on Solid Mechanics*, pages 343–366, 1999. p. 118
- [78] O.H. Yeoh. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 66(5) :754–771, 1993. p. 20
- [79] Q. Zhang and M.J. Graham. A numerical study of Richtmyer-Meshkov instability driven by cylindrical shocks. *Physics of Fluids*, 10(4) :974–992, 1998. p. 83



**Titre :** Simulation de modèles multi-matériaux sur maillage cartésien

**Résumé :**

On s'intéresse à la simulation d'écoulements compressibles multi-matériaux et, notamment, aux interactions fluide/structure dans les régimes transitoires et en dynamique rapide. Le but est de pouvoir décrire l'évolution de matériaux de lois de comportement très différentes à l'aide d'un modèle unique. Les milieux sont seulement différenciés par leurs équations d'état et sont séparés par une interface dite sharp. Les matériaux peuvent être des fluides ou des solides élastiques et sont soumis à de grandes déformations. Le modèle est écrit dans le formalisme eulérien. Le schéma numérique est résolu sur des grilles cartésiennes pour des simulations en trois dimensions. Une extension du modèle permet de décrire les déformations plastiques des solides.

**Mots-clés :**

Écoulements multi-matériaux compressibles ; Maillage cartésien ; Frontière immergée ; Élasticité eulérienne ; Plasticité

---

**Title :** Simulation of multimaterial models on Cartesian grid

**Abstract :**

We are interested in the simulation of compressible multimaterial flows and especially in fluid/structure interactions in transient states and fast dynamics. We aim to describe the evolution of materials of very different constitutive laws with an unified model. The materials are only differentiated by their own constitutive laws and are separated by a sharp interface. They can be as well fluids or elastic solids and undergo large deformations. The model is written in the Eulerian framework. The numerical scheme is solved on Cartesian grids for simulations in three dimensions. An extension of the elastic model is added to describe the plastic deformations of solids.

**Key words :**

Compressible multimaterial flows ; Cartesian grid ; Immersed boundary ; Eulerian elasticity ; Plasticity

---

**Unité de recherche**

[ Institut de Mathématiques de Bordeaux - UMR 5251,  
351 cours de la Libération, 33405 TALENCE cedex ]