Théorie de Teichmüller dynamique infinitésimale et domaines errants

Matthieu Astorg

▶ **To cite this version:**

Matthieu Astorg. Théorie de Teichmüller dynamique infinitésimale et domaines errants. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Paul Sabatier Toulouse 3, 2015. Français. NNT : . tel-01220214

HAL Id: tel-01220214
https://theses.hal.science/tel-01220214

Submitted on 25 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *09 juillet 2015* **par :**

MATTHIEU ASTORG

Théorie de Teichmüller dynamique infinitésimale et domaines errants

JURY

VIVIANE BALADI	Directrice de Recherche	Membre du Jury
FRANÇOIS BERTELOOT	Professeur des Universités	Membre du Jury
XAVIER BUFF	Professeur des Universités	Membre du Jury
ARNAUD CHÉRITAT	Directeur de Recherche	Membre du Jury
ADAM EPSTEIN	Associate Professor	Rapporteur
CHARLES FAVRE	Directeur de Recherche	Membre du Jury
JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ	Professeur au Collège de France	Rapporteur

École doctorale et spécialité :
MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques fondamentales
Unité de Recherche :
Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)
Directeur de Thèse :
Xavier BUFF
Rapporteurs :
Adam EPSTEIN et *Jean-Christophe YOCCOZ*

Résumé

Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. McMullen et Sullivan ont introduit l'espace de Teichmüller dynamique $\mathrm{Teich}(f)$, qui est une variété complexe de dimension au plus $2d-2$, et qui paramétrise la classe de conjugaison quasiconforme de f dans l'espace des modules rat_d via une application holomorphe $\Psi : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{rat}_d$. Nous donnons une nouvelle construction élémentaire de $\mathrm{Teich}(f)$, et nous prouvons que Ψ est une immersion, ce qui répond à une question posée par McMullen et Sullivan. Ce dernier résultat nous permet d'obtenir des preuves simplifiées de résultats dus à Makienko et Levin sur la rigidité de f sous une hypothèse d'expansivité le long de l'orbite critique.

Dans une seconde partie, nous construisons une famille d'exemples d'endomorphismes polynômiaux de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ayant un domaine errant. Nos exemples sont des produits fibrés, de la forme

$$(z,w) \mapsto \left(z + z^2 + \frac{\pi^2}{4} w + O(z^3), w - w^2 + O(w^3) \right).$$

De plus, on construira des exemples à coefficients réels où le domaine errant intersecte $\mathbb{R}^2$.

Abstract

Let f be a rational map of degree $d \geq 2$. McMullen and Sullivan introduced the dynamical Teichmüller space $\mathrm{Teich}(f)$, which is a complex manifold of dimension at most $2d-2$. It paramtrizes the quasiconformal conjugacy class of f in the moduli space rat_d via a holomorphic map $\Psi : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Rat}_d$. We give a new and elementary construction of $\mathrm{Teich}(f)$, and we prove that the parametrization Ψ is an immersion, answering a question of McMullen and Sullivan. This last result enables us to give simplified proofs of rigidity results of Makienko and Levin under the assumption of expansion along the critical orbit.

In a second part, we construct a family of examples of polynomial endomorphisms of $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ with a wandering domain. Our examples are skew-products, of the form

$$(z,w) \mapsto \left(z + z^2 + \frac{\pi^2}{4} w + O(z^3), w - w^2 + O(w^3) \right).$$

Moreover, we will construct examples with real coefficients where the wandering domain intersects $\mathbb{R}^2$.

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de thèse Xavier Buff, pour son soutien constant tout au long de mon doctorat. Sa vision et son sens de l'intuition mathématiques ont été pour moi une source continuelle d'inspiration.

Je suis également reconnaissant à Jean-Christophe Yoccoz et Adam Epstein de m'avoir fait l'honneur de rapporter cette thèse, et à Viviane Baladi, François Berteloot, Arnaud Chéritat et Charles Favre d'avoir accepté de participer au jury.

Je remercie également tous ceux avec qui j'ai pu échanger et parler de mathématiques, notamment Adam Epstein, Thomas Gauthier, Gabriel Vigny, Arnaud Chéritat, Jasmin Raissy, François Berteloot, Pascale Roesch, Tan Lei, Sarah Koch, Fabrizio Bianchi, David Marti Pete, Vassiliski Evdoridou et bien d'autres encore, ainsi que mes collaborateurs Xavier Buff, Romain Dujardin, Han Peters et Jasmin Raissy.

Merci aussi à tous mes autres collègues (et anciens collègue !) doctorants toulousains, Danny, Guillem, Ilies, Bastien, Jean-Christophe, Sébastien, Eleonora, Anton, Zacharias, Damien, Raphaël, Anne et Laura pour leur bonne humeur quotidienne.

Merci à mes amis lyonnais (Sylvain et Cyrielle, Kévin et Rozenn, François, François et Adrianne, Pierre-Adelin, Thomas, Sébastien, Marielle et Michele, Alessandro, Anthony...) et cachanais (Damien, Agnès, Benoît, Magali, Matthias, Ève...).

Enfin, merci à ma famille pour leur soutien.

"But then science is nothing but a series of questions that lead to more questions, which is just as well, or it wouldn't be much of a career path, would it?"

Sir Terry Pratchett

Résumé

Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. McMullen et Sullivan ont introduit l'espace de Teichmüller dynamique $\mathrm{Teich}(f)$, qui est une variété complexe de dimension au plus $2d-2$, et qui paramétrise la classe de conjugaison quasiconforme de f dans l'espace des modules rat_d via une application holomorphe $\Psi : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{rat}_d$. Nous donnons une nouvelle construction élémentaire de $\mathrm{Teich}(f)$, et nous prouvons que Ψ est une immersion, ce qui répond à une question posée par McMullen et Sullivan. Ce dernier résultat nous permet d'obtenir des preuves simplifiées de résultats dus à Makienko et Levin sur la rigidité de f sous une hypothèse d'expansivité le long de l'orbite critique.

Dans une seconde partie, nous construisons une famille d'exemples d'endomorphismes polynômiaux de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ayant un domaine errant. Nos exemples sont des produits fibrés, de la forme

$$(z,w) \mapsto \left(z + z^2 + \frac{\pi^2}{4} w + O(z^3), w - w^2 + O(w^3) \right).$$

De plus, on construira des exemples à coefficients réels où le domaine errant intersecte $\mathbb{R}^2$.

Abstract

Let f be a rational map of degree $d \geq 2$. McMullen and Sullivan introduced the dynamical Teichmüller space $\mathrm{Teich}(f)$, which is a complex manifold of dimension at most $2d-2$. It paramtrizes the quasiconformal conjugacy class of f in the moduli space rat_d via a holomorphic map $\Psi : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Rat}_d$. We give a new and elementary construction of $\mathrm{Teich}(f)$, and we prove that the parametrization Ψ is an immersion, answering a question of McMullen and Sullivan. This last result enables us to give simplified proofs of rigidity results of Makienko and Levin under the assumption of expansion along the critical orbit.

In a second part, we construct a family of examples of polynomial endomorphisms of $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ with a wandering domain. Our examples are skew-products, of the form

$$(z,w) \mapsto \left(z + z^2 + \frac{\pi^2}{4} w + O(z^3), w - w^2 + O(w^3) \right).$$

Moreover, we will construct examples with real coefficients where the wandering domain intersects $\mathbb{R}^2$.

Table des matières

Introduction **vii**

1 Différentielles quadratiques et champs de vecteurs **1**
1.1 Généralités . . . 1
1.2 Généralités sur les différentielles quadratiques . . . 5
1.3 Scindement de champs de vecteurs quasiconformes . . . 7
1.4 Différentielles quadratiques et dual des champs de vecteurs . . . 12
1.4.1 Calculs de poussé en avant . . . 17
1.5 Formes de Beltrami et théorème d'Ahlfors-Bers . . . 19

2 Espaces de déformation d'Epstein et de Teichmüller **23**
2.1 Rappels de dynamique complexe en dimension un . . . 23
2.2 Divergences invariantes . . . 25
2.3 Différentielles quadratiques invariantes . . . 27
2.4 Espace de Teichmüller . . . 29
2.4.1 Espace de Teichmüller d'une surface . . . 29
2.4.2 Espace de Teichmüller d'une fraction rationnelle . . . 31
2.5 Espace de déformation d'Epstein . . . 44
2.5.1 Définition et généralités . . . 44
2.6 Application : valeurs critiques sommables . . . 45
2.7 Déformation de mesures . . . 49
2.7.1 Mouvements holomorphes dynamiques et espaces de déformation . . . 49
2.7.2 Transformée de Beurling-Ahlfors . . . 51
2.8 Sommes de Birkhoff de différentielles quadratiques . . . 55

3 Domaine errant en dimension supérieure **59**
3.1 Généralités . . . 59
3.1.1 Énoncé . . . 59
3.1.2 Stratégie . . . 60
3.2 Dynamique parabolique en une variable . . . 64
3.2.1 Coordonnée de Fatou attractive . . . 65
3.2.2 Coordonnée de Fatou répulsive . . . 66
3.2.3 Application de Lavaurs . . . 67
3.2.4 Applications de type fini . . . 68
3.3 Applications de Lavaurs avec un point fixe attractif . . . 69
3.3.1 Exemples cubiques . . . 69
3.3.2 Exemples réels . . . 72
3.4 Construction de coordonnées de Fatou approchées . . . 75
3.4.1 Notation . . . 76
3.4.2 Propriétés des coordonnées de Fatou approchées . . . 77
3.4.3 Comparaison avec la coordonnée de Fatou approchée . . . 80

3.4.4 Comparaison avec les coordonnées de Fatou répulsives 81
3.4.5 Propriété de translation approchée 82
3.5 Preuve du résultat clé 88
3.5.1 Notations 88
3.5.2 Schéma de la preuve 89
3.5.3 Comparaison avec l'implosion parabolique classique 91
3.5.4 Longueur de transition 91
3.5.5 Entrée dans le batteur à oeufs 92
3.5.6 Passage dans le batteur à oeufs 94
3.5.7 Sortie du batteur à oeufs 96

Bibliographie **97**

Introduction

Cette thèse est constituée de deux parties distinctes. La première, comprenant les chapitres 1 et 2, porte sur l'étude infinitésimale des déformations d'un système dynamique complexe $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. La seconde, constituée du chapitre 3, porte sur la construction de systèmes dynamiques polynômiaux $P : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ ayant un domaine errant.

Historique

Origines de la dynamique complexe

La dynamique complexe est un sujet riche, qui remonte au XIX$^{\text{e}}$ siècle. Une des premières motivations vient de la méthode de Newton pour calculer numériquement des racines de polynôme : si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un polynôme, il est désormais classique que l'itération de la fraction rationnelle

$$N_f : z \mapsto z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

converge très rapidement vers les racines de f pour des valeurs initiales suffisamment proches.

Une question naturelle apparait alors : peut-on comprendre la dynamique globale de N_f, c'est-à-dire : dispose-t-on d'une description des comportements possibles des suites $N_f^n(z_0)$ pour les différents choix de points de départ $z_0 \in \mathbb{C}$? Plus généralement, qu'en est-il dans le cas d'une fraction rationnelle arbitraire ?

La théorie de Fatou et Julia

Dans la première moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle, Fatou et Julia ont développé une théorie élégante pour aborder cette question. La notion fondamentale est la dichotomie suivante, entre ensemble de Julia (correspondant à la partie chaotique de la dynamique) et ensemble de Fatou (correspondant à la partie stable de la dynamique) :

Définition 1. Soit $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ une fraction rationnelle. L'ensemble de Fatou, noté $\mathcal{F}(f)$, est le plus grand ouvert sur lequel la famille des itérées $\{f^n, n \in \mathbb{N}\}$ est normale. Une composante de Fatou est une composante connexe de l'ensemble de Fatou. L'ensemble de Julia est le complémentaire $\mathcal{J}(f) = \mathbb{P}^1 - \mathcal{F}(f)$ de l'ensemble de Fatou.

Ces ensembles ont un sens dynamique, puisqu'ils sont tous les deux complètement invariants : $f^{-1}(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)$ et $f^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(f)$. Autrement dit, si un point z_0 appartient à l'ensemble de Fatou, alors son image $f(z_0)$ ainsi que toutes ses préimages appartiennent également à l'ensemble de Fatou (et de même pour l'ensemble de Julia). On peut alors voir facilement que f envoie toute composante de Fatou sur une autre composante de Fatou.

Dès que le degré (topologique) d de la fraction rationnelle f est supérieur ou égal à 2, l'ensemble de Julia n'est pas vide. En fait, on a le résultat classique suivant :

Théorème 1 (Julia, Fatou)**.** L'ensemble de Julia est un compact non vide, sans point isolé. Il est soit d'intérieur vide, soit la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$ toute entière.

Les techniques centrales dans cette partie de la théorie viennent essentiellement de l'analyse complexe en une variable. Le théorème de Montel sur les familles normales et le lemme de Schwarz-Pick en sont les exemples les plus importants.

Le théorème de non-errance de Sullivan

La dynamique complexe était plus ou moins tombée en désuétude jusque dans les années 70, où l'apparition des ordinateurs permit les premières représentations d'ensembles de Julia. C'est à cette époque que Mandelbrot réalisa les premières images de l'ensemble éponyme, qui représente, dans l'espace des paramètres $c \in \mathbb{C}$, l'ensemble des valeurs de c pour lesquelles l'ensemble de Julia du polynôme quadratique $z \mapsto z^2 + c$ est connexe. Par la suite, Douady et Hubbard notamment ont largement contribué au développement et à la diffusion de la dynamique complexe.

C'est également vers cette période que Sullivan résolut un problème central posé par Fatou en introduisant de nouveaux outils, qui se révèleront par la suite être extrêmement puissants :

Théorème 2 (Pas de domaine errant, Sullivan [Sul85])**.** Soit f une fraction rationnelle. Toute composante de Fatou de f est prépériodique.

Une conséquence majeure de ce résultat est qu'il suffit alors d'étudier la dynamique dans les composantes de Fatou invariantes pour comprendre toute la dynamique de l'ensemble de Fatou. Or, il existe une classification exhaustive et explicite des dynamiques possibles dans ce cas (voir la définition 2.1.7 et le théorème 2.1.8).

L'outil essentiel utilisé par Sullivan est le théorème d'Ahlfors-Bers, qui est à la base de la théorie de Teichmüller, et qui avait déjà été utilisé avec succès dans l'étude des groupes kleiniens. Ce théorème établit une bijection entre une certaine classe d'homéomorphismes de la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$, et un type d'objet appelé forme de Beltrami, qui vit naturellement dans un espace de Banach complexe (voir la section 1.5 pour les définitions rigoureuses).

L'idée de la preuve est la suivante : supposons par l'absurde qu'il existe une fraction rationnelle ayant un domaine errant. A l'aide du théorème d'Ahlfors-Bers, on construit alors une application holomorphe injective

$$\Psi : V \to \mathrm{Rat}_d$$

où V est un ouvert d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie, et Rat_d est l'ensemble des fractions rationnelles de degré fixé $d = \deg f$. Mais comme Rat_d est de dimension finie, ceci est clairement impossible, d'où une contradiction.

Un peu plus précisément, le théorème d'Ahlfors-Bers permet d'établir une correspondance entre les homéomorphismes $h : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ (dans un certaine classe de régularité, appelée quasi-conforme) tels que $h \circ f \circ h^{-1}$ soit une fraction rationnelle dans Rat_d, et la boule unité $\mathrm{Bel}(f)$ des formes de Beltrami invariantes par f (dans un sens à préciser, voir la section 1.5). On obtient ainsi une *paramétrisation holomorphe* naturelle de la classe de conjugaison quasiconforme de f dans Rat_d, par l'application (holomorphe)

$$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{Bel}(f) &\longrightarrow \mathrm{Rat}_d \\ \mu &\longmapsto h_\mu \circ f \circ h_\mu^{-1} \end{aligned}$$

(nous passons ici sous silence une question technique de normalisation). Cette paramétrisation n'est pas injective, mais la preuve de Sullivan consiste à montrer que si f a un domaine errant, alors il existe un sous-ensemble $V \subset \mathrm{Bel}(f)$ "trop grand" sur lequel elle est injective.

L'introduction de ces techniques a eu de nombreuses autres applications, dont par exemple l'obtention par Shishikura de la borne optimale (à savoir $2d - 2$) sur le nombre de cycles non-répulsifs que peut avoir une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$.

Théorie de Teichmüller et dynamique complexe

Un des aspects les plus intéressants de la dynamique complexe rationnelle vient du fait que l'espace des paramètres est suffisamment petit pour que l'on puisse en faire une étude fructueuse.

Les outils introduits par Sullivan permettent de construire des sous-familles intéressantes de l'espace Rat_d des fractions rationnelles de degré d, qui s'identifie naturellement à un ouvert de l'espace projectif $\mathbb{P}^{2d+1}(\mathbb{C})$, et est donc naturellement muni d'une structure de variété complexe de dimension finie.

Espace de Teichmüller dynamique

En s'inspirant de la théorie de Teichmüller classique, qui décrit les déformations topologiques de la structure complexe d'une surface de Riemann, McMullen et Sullivan ont introduit dans [MS98] la notion d'espace de Teichmüller dynamique $\mathrm{Teich}(f)$ associé à une fraction rationnelle f (en fait, ils ont développé cette théorie dans le cas beaucoup plus général des correspondances, qui inclue notamment la dynamique des groupes kleiniens). Plus récemment, N. Fagella et C. Henriksen ont construit dans [FH08] un espace de Teichmüller dynamique dans la contexte de la dynamique d'une fonction entière transcendante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Notons rat_d *l'espace des modules* des fractions rationnelles de degré d, c'est-à-dire l'espace Rat_d des fractions rationnelles de degré d quotienté par l'action par conjugaison du groupe des transformations de Möbius $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

L'espace $\mathrm{Teich}(f)$, dont la construction repose de manière cruciale sur le théorème d'Ahlfors-Bers, est une variété complexe de dimension finie, simplement connexe, avec une application holomorphe naturelle

$$\Psi_T : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{rat}_d$$

dont l'image est exactement la classe de conjugaison quasiconforme de f dans rat_d. McMullen et Sullivan ont obtenu une description explicite de $\mathrm{Teich}(f)$ en termes de produits de polydisques et d'espaces de Teichmüller de certaines surfaces de Riemann associées à f. Ces surfaces sont de la forme Ω/f, où les Ω sont certains ouverts de l'ensemble de Fatou invariants par f et tels que $f : \Omega \to \Omega$ a des orbites discrètes ; de plus, elles sont complètement décrites par le nombre et le type de composantes périodiques de Fatou de f, ainsi que par le nombre d'orbites critiques dans ces composantes. On a notamment une formule explicite pour la dimension de $\mathrm{Teich}(f)$ selon la dynamique de f. Par ailleurs, McMullen et Sullivan ont prouvé que l'application Ψ_T était localement injective, ce qui donne donc une idée de la géométrie de la classe de conjugaison de f dans rat_d. Dans la perspective d'affiner la compréhension de cette paramétrisation, deux questions ont été soulevées dans [MS98] :

— L'image de Ψ_T peut-elle s'accumuler sur elle-même dans rat_d ?

— L'application Ψ_T est-elle une immersion ?

Dans [Bra92], Branner répond par l'affirmative à la première question : il existe en effet des polynômes cubiques dont la classe de conjugaison a une géométrie très compliquée, et qui notamment s'accumule sur elle-même.

La réponse à la seconde question est également positive. A. Epstein en a une preuve non publiée ; P. Makienko a également une preuve similaire de ce résultat, même s'il n'est pas énoncé en tant que tel, dans [Mak10], théorème 10 p.17. Nous présentons dans [Ast14] une approche différente, qui est retranscrite ici dans le chapitre 2 :

Théorème 3 ([Ast14])**.** L'application $\Psi_T : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{rat}_d$ est une immersion.

De plus, on reconstruira de manière élémentaire la variété complexe $\mathrm{Teich}(f)$, sans utiliser certains résultats difficiles de théorie de Teichmüller ([EM88]). En effet, $\mathrm{Teich}(f)$ est d'abord défini comme un quotient de $\mathrm{Bel}(f)$ par une certaine relation d'équivalence (voir section 2.4.2). Si l'on note $\pi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Teich}(f)$ l'application quotient, nous allons redémontrer :

Théorème 4 ([MS98], [Ast14])**.** Il existe une unique structure complexe sur $\mathrm{Teich}(f)$ qui fasse de $\pi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Teich}(f)$ une application holomorphe. Pour cette structure, π est une submersion scindée.

Notons cependant que si nous récupérons avec cette construction la formule donnant la dimension de $\mathrm{Teich}(f)$ en fonction de la dynamique de f, nous n'obtenons en revanche pas la description globale de $\mathrm{Teich}(f)$ discutée dans [MS98], qui est un résultat beaucoup plus fort, mais que l'on ne peut pas espérer obtenir seulement par des arguments locaux et infinitésimaux.

On présentera également une légère modification d'une version due à McMullen (non publiée, mais disponible dans [McM14]) de la preuve du théorème de non-errance de Sullivan. Cette preuve est de nature purement infinitésimale, et consiste essentiellement à étudier la différentielle de l'application Ψ_T.

Espaces de déformation d'Epstein

Une autre application de la théorie de Teichmüller dans un contexte dynamique est la théorie des espaces de déformation d'Epstein, introduite dans sa thèse [Eps93] (voir également [Eps09]).

L'idée est la suivante : on se donne une fraction rationnelle f, et deux ensembles finis $A \subset B \subset \mathbb{P}^1$, avec $f(A) \subset B$. On s'intéresse au portrait $f_{|A} : A \to B$. Pour que cela ait un sens dynamique, il faut que les points marqués dans A et B soient des points dynamiquement remarquables ; concrètement, cela veut dire que ce seront des cycles et des morceaux d'orbites critiques. L'espace de déformation d'Epstein $\mathrm{Def}_A^B(f)$ est une sous-variété analytique de l'espace de Teichmüller $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1 - B)$, qui va paramétrer holomorphiquement une famille de fractions rationnelles g de même degré que f qui auront le même portrait que f sur des ensembles finis A' et B'. Plus précisément, pour tout g dans cette famille, il existera des homéomorphismes quasiconformes ϕ, ψ tels que $\phi_{|A} = \psi_{|A}$ et tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^1, A) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{P}^1, B) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{P}^1, \phi(A)) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{P}^1, \psi(B)) \end{array}$$

Ainsi, si par exemple A contient un cycle $C = (z, f(z), \dots, f^p(z))$, on peut suivre ce cycle sur tout $\mathrm{Def}_A^B(f)$ et on a une fonction holomorphe $\rho_C : \mathrm{Def}_A^B(f) \to \mathbb{C}$ donnée par le multiplicateur de ce cycle. On peut alors se demander si étant donnés plusieurs cycles distincts $C_1, \dots, C_k$, les fonctions ρ_{C_i} sont indépendantes.

Un autre sujet d'intérêt est l'étude des *relations critiques* : supposons qu'il existe deux valeurs critiques v_1, v_2 et deux entiers $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $f^{n_1}(v_1) = f^{n_2}(v_2)$. On peut marquer cette relation, c'est-à-dire choisir A pour qu'il contienne les $f^k(v_1)$ et $f^m(v_2)$ avec $k < n_1$ et $m < n_2$. On peut alors écrire de manière naturelle dans $\mathrm{Def}_A^B(f)$ une équation du lieu où cette relation critique est préservée. La question est alors de savoir si ce lieu est une variété lisse, et si étant données plusieurs relations critiques, ces sous-variétés sont transverses.

La théorie d'Epstein permet de répondre à ces questions à travers une analyse infinitésimale : on dispose d'une description explicite du plan cotangent $T_0^*\mathrm{Def}_A^B(f)$ en termes de différentielles quadratiques. Si l'on s'intéresse par exemple au multiplicateur ρ_C d'un cycle, la stratégie consiste à trouver une (classe de) différentielle quadratique représentant la différentielle $D\rho_C$. En combinant cette description et la description du plan cotangent, il obtient par exemple le résultat suivant :

Théorème 5 (Transversalité des cycles non répulsifs, [Eps09])**.** Soit $C_1, \dots, C_k$ des cycles non-répulsifs, de multiplicateurs différents de 0 et 1. Alors les fonctions multiplicateurs ρ_{C_i} sont transverses, c'est-à-dire que les différentielles $D\rho_{C_i}(0)$, $1 \leq i \leq k$, sont linéairement indépendantes.

Nous renvoyons le lecteur à [Eps09] pour d'autres énoncés de transversalité concernant les relations critiques ou les cycles paraboliques. La transversalité a des applications pour l'étude du lieu de bifurcation, voir par exemple [BE09] et [Gau12].

La philosophie est donc que les espaces de déformation $\mathrm{Def}_A^B(f)$, et plus largement les espaces construits à l'aide de théorie de Teichmüller, sont le bon cadre pour étudier les déformations infinitésimales de la dynamique. En partant de ce principe, nous avons retranscrit dans le langage des espaces de Teichmüller l'analyse faite dans la série d'articles [Mak01], [Mak05], [Mak10], [Lev11]. Ceci nous permet d'obtenir des preuves plus courtes et conceptuellement plus simples. Notons qu'Avila a également proposé une approche différente du même problème dans [Avi02].

L'idée est la suivante : une certaine expansion le long d'une orbite critique est un obstacle à pouvoir déformer topologiquement (de manière non triviale) la dynamique d'une fraction rationnelle $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Van Strien a prouvé dans [vS00] un résultat qui va dans ce sens, dans le cas où les orbites critiques sont capturées par des compacts hyperboliques invariants (cas dit Misiurewicz). Nous nous intéresserons ici à une classe de fractions rationnelles vérifiant une propriété plus faible d'expansion le long d'orbites critiques.

Plus précisément :

Définition 2. Une valeur critique v est dite sommable si la série

$$\sum_{n\geq 0} \|Df^n(v)\|^{-1}$$

est finie (la norme est celle de la métrique sphérique).

On aura également besoin pour des raisons techniques de la définition suivante :

Définition 3. Un compact K est appelé un C-compact si toute fonction continue sur K peut être uniformément approchée sur K par des restrictions de fonctions holomorphes au voisinage de K.

On rappelle que l'espace de Teichmüller paramètre la classe de conjugaison topologique, et a une dimension au plus égale à $\dim \mathrm{rat}_d = 2d-2$. L'existence d'obstructions à déformer f se traduit donc par une baisse de la dimension de $\mathrm{Teich}(f)$ par rapport à $2d-2$. Le résultat suivant dit que sous certaines hypothèses techniques (qui sont plutôt faibles, et notamment toujours vérifiées dans le cas polynômial), chaque valeur critique sommable fait baisser de un la dimension de l'espace $\mathrm{Teich}(f)$:

Théorème 6 ([Mak10])**.** Soit f une fraction rationnelle qui a r valeurs critiques sommables, dont l'ensemble de Julia est un C-compact et qui n'a pas d'anneaux de Herman. Alors

$$\dim \mathrm{Teich}(f) \leq 2d-2-r.$$

Notons que l'énoncé présent dans [Mak10] ne suppose pas l'absence d'anneaux de Herman. Cependant, la preuve s'appuie sur un résultat (le théorème A p. 14) qui est faux en présence d'anneaux de Herman (voir la proposition 2.3.6). Il est cependant probable que l'on puisse se passer de cette hypothèse.

L'idée de notre preuve est simple : il y a une immersion

$$\Phi : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Def}_A^B(f).$$

À chaque valeur critique sommable v, nous allons associer une différentielle quadratique q_v qui va représenter une forme linéaire non nulle dans $T_0^*\mathrm{Def}_A^B(f)$, qui sera orthogonale à l'image $\mathrm{Im}\, D\Phi([0])$ (ici, $[0]$ est le point base dans l'espace $\mathrm{Def}_A^B(f)$). De plus, ces formes linéaires seront linéairement indépendantes. On obtient ainsi avec seulement de l'analyse fonctionnelle linéaire une majoration de la dimension de la variété complexe $\mathrm{Teich}(f)$ par $2d-2-r$.

Théorie de Teichmüller infinitésimale

Pour mener à bien ce programme d'étude infinitésimale des déformations d'une fraction rationnelle f à l'aide de théorie de Teichmüller, il faut bien sûr comprendre la théorie infinitésimale des espaces de Teichmüller. L'objet du chapitre 1 sera d'établir un formalisme et des résultats analytiques permettant de manipuler correctement les objets représentant les vecteurs tangents et cotangents aux espaces de Teichmüller.

Champs de vecteurs quasiconformes

Deux types d'objets apparaissent naturellement dans la description du plan tangent à un espace de Teichmüller : les différentielles de Beltrami et les champs de vecteurs quasiconformes. Les différentielles de Beltrami présentent l'avantage de n'avoir presque aucune contrainte de régularité (ce sont des objets vivant dans un espace L^∞). Par définition, un champ de vecteur est quasiconforme si $\overline{\partial}\xi$ (au sens des distributions) est une différentielle de Beltrami L^∞. Si l'on se donne une partition d'un ouvert $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \subset \mathbb{P}^1$, on peut donc scinder une différentielle de Beltrami μ sur Ω par rapport à cette partition :

$$\mu = \mu\, \mathbb{1}_{\Omega_1} + \mu\, \mathbb{1}_{\Omega_2},$$

où $\mathbb{1}_{\Omega_i}$ désigne la fonction caractéristique de Ω_i. En revanche, les champs de vecteurs quasiconformes sont des objets ayant une régularité assez délicate (ce sont des champs de vecteurs continus, mieux que α-Hölder pour tout $\alpha < 1$ mais qui ne sont en général pas Lipschitz). Il est donc problématique d'écrire une décomposition de la forme :

$$\xi = \xi\, \mathbb{1}_{\Omega_1} + \xi\, \mathbb{1}_{\Omega_2}$$

en garantissant que les $\xi\, \mathbb{1}_{\Omega_i}$ restent quasiconformes (d'autant plus que pour les applications dynamiques, le bord des ouverts Ω_i sera typiquement fractal et n'aura aucune régularité). Pour des raisons de continuité, une condition nécessaire (mais a priori non suffisante) est que ξ s'annule sur les frontières $\partial\Omega_i$.

On peut en revanche s'attendre à ce que si ξ tend vers 0 suffisamment rapidement en s'approchant du bord des Ω_i, on puisse garantir que $\mathbb{1}_{\Omega_1}\xi$ soit quasiconforme. Le résultat principal du chapitre 1 est le résultat suivant, qui permet de surmonter cette difficulté :

Théorème A ([Ast14])**.** Soit Ω un ouvert hyperbolique de $\mathbb{P}^1$ et ξ un champ de vecteur quasiconforme sur Ω. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) On a $\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}$, où ρ_Ω est la métrique hyperbolique sur Ω
ii) Le champ de vecteur ξ est hyperboliquement borné
iii) Il existe une extension quasiconforme $\hat{\xi}$ de ξ sur tout $\mathbb{P}^1$ avec $\hat{\xi} = 0$ sur $\partial\Omega$
iv) L'extension $\hat{\xi}(z) = \xi(z)$ si $z \in \Omega$ et 0 sinon est quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$, et $\overline{\partial}\hat{\xi}(z) = 0$ pour presque tout $z \notin \Omega$.

Différentielles quadratiques

Une différentielle quadratique sur une surface de Riemann $\mathcal{S}$ est une section du fibré $T^*\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{C}} T^*\mathcal{S}$. Ces objets interviennent naturellement en théorie de Teichmüller, puisque le plan tangent à l'espace de Teichmüller d'une surface de Riemann $\mathcal{S}$ est le dual topologique de l'espace $Q(\mathcal{S})$ des différentielles quadratiques holomorphes sur $\mathcal{S}$ et intégrables. En pratique, les différentielles de diverses grandeurs intéressantes définies sur des espaces de Teichmüller seront donc représentées par des (classes de) différentielles quadratiques. Epstein a par exemple prouvé un raffinement de l'inégalité de Fatou-Shishikura sur la finitude des cycles non répulsifs, en comptant de plusieurs façons différentes la dimension d'un certain espace de différentielles quadratiques ([Eps99]).

Dans le premier chapitre, on passera en revue quelques résultats classiques sur les différentielles quadratique, et notamment quelques manipulations algébriques intrinsèques qui permettent de simplifier et de conceptualiser des calculs qui seraient autrement pénibles. Par exemple, on peut apparier de manière intrinsèque une différentielle quadratique q intégrable et une forme de Beltrami μ pour obtenir une $(1,1)$ forme différentielle alternée $q \cdot \mu$ que l'on peut intégrer naturellement sur $\mathcal{S}$. De manière similaire, on peut apparier une différentielle quadratique q contre un champ de vecteur ξ pour obtenir une $(1,0)$-forme différentielle, dont on peut prendre l'intégrale sur une courbe ou le résidu en un point.

Dans le cadre dynamique, l'opérateur $\nabla_f = \mathrm{Id} - f_*$ (où f_* désigne le poussé en avant) joue un rôle important dans l'étude infinitésimale des déformations de f. En effet, on verra que le plan cotangent à différents espaces de déformations (notamment l'espace de Teichmüller dynamique et les espaces de déformation d'Epstein) s'identifie à un espace quotient de différentielles quadratiques par l'image de ∇_f sur un espace approprié. Ainsi, savoir si la différentielle d'une certaine grandeur dynamique est nulle ou non reviendra à déterminer si une équation du type

$$\nabla_f \phi = q$$

d'inconnue ϕ, a une solution dans un espace approprié. On s'intéressera donc à des questions d'analyse fonctionnelle comme l'étude du noyau de l'opérateur ∇_f, la question de savoir si son image est fermée, etc. Par exemple, si l'on note $Q(K)$ l'espace des différentielles quadratiques intégrables et holomorphes en dehors d'un compact K, et V_f l'ensemble des valeurs critiques de f, on verra que la densité de $\nabla_f Q(K)$ dans $Q(K \cup V_f)$ est une obstruction à l'existence d'un mouvement holomorphe dynamique de K.

On introduira également un espace de déformation lié à un compact invariant K, et une différentielle quadratique représentant la différentielle de l'exposant de Lyapunov d'une mesure ergodique sur K, généralisant ainsi partiellement le formalisme de [Eps09] et [Eps99].

Domaines errants en dimension supérieure

Comme on l'a expliqué, la preuve du théorème de non-errance de Sullivan utilise de manière cruciale deux ingrédients : le fait qu'une fraction rationnelle f vive naturellement dans un espace de paramètres de dimension finie (les fractions rationnelles de même degré), et le théorème d'Ahlfors-Bers.

Si l'on considère une fonction transcendante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ à la place d'une fraction rationnelle, le premier ingrédient n'est plus disponible. Il est alors connu que l'on peut effectivement avoir un domaine errant : la première construction est due à Baker ([Bak76]). Nous verrons que si on retire le second ingrédient, c'est-à-dire si l'on considère un système dynamique même polynômial en dimension supérieure, on peut également avoir des domaines errants.

Après le premier exemple de Baker, Herman ([Her84]) et Sullivan ([Sul85]) ont donné des exemples plus simples. Notons que dans le cas où f est une fonction entière transcendante n'ayant qu'un nombre fini de singularités, il existe un espace de déformation naturel de dimension finie, et dans ce cas Eremenko et Lyubich ([EL92]) et Goldberg et Keen ([GK86]) ont démontré que f ne peut pas avoir de domaines errants. Plus récemment, Bishop a construit un exemple de fonction entière transcendante dont les singularités sont bornées ayant un domaine errant ([Bis15]). Dans tous ces exemples, le domaine errant a une orbite non bornée.

En dynamique réelle, la question de l'existence ou non de domaines errants a également une longue histoire. Elle remonte à la théorie de Denjoy sur la linéarisation des difféomorphismes du cercle ([Den32]) : un difféomorphisme de classe C^2 de nombre de rotation irrationnel ne peut pas avoir d'intervalle errant, mais il existe des contre-exemples en classe C^1. Pour des applications de l'intervalle, la non-existence de domaine errant pour les applications unimodales de Schwartzienne négative a été prouvée par Guckenheimer ([Guc79]). Ce résultat a été par la suite généralisé à diverses classes d'applications du cercle ou de l'intervalle dans [Lyu89], [BL89], et [MDMVS92].

Le problème de l'existence des domaines errants a également été traité en dynamique non-archimédienne, en particulier dans les travaux de Benedetto ([Ben05]) et Trucco ([Tru09]).

La question de l'existence de domaines errants pour des applications rationnelles en dimension supérieure est naturelle, et a été mise en avant par de nombreux auteurs à partir des années 90 (voir par exemple [FS01]). Dans [FS98], Fornaess et Sibony ont construit un exemple de biholomorphisme de $\mathbb{C}^2$ ayant un domaine errant, mais cet exemple était encore transcendant. Plus récemment, Lyubich a suggéré d'utiliser une technique de dynamique en dimension un, l'implosion parabolique, pour essayer de construire un exemple d'endomorphisme polynômial fibré ayant un domaine errant, c'est-à-dire une application de la forme :

$$P(z) = (f(z) + aw, g(w))$$

où $a \in \mathbb{C}$, f et g sont des polynômes et $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$.

La dynamique des produits fibrés est riche et a été étudiée par de nombreux auteurs (voir [Lil04], [Jon99], [BTFP13], [Duj14], [PV14]).

Dans le chapitre 3, nous allons expliquer comment effectivement réaliser cette construction. Ce chapitre est tiré du travail [ABD$^+$14], en collaboration avec X. Buff, R. Dujardin, H. Peters et J. Raissy.

Notre résultat est le suivant :

Théorème 7 ([ABD$^+$14])**.** Il existe des polynômes de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ tels que pour tout polynôme de la forme $g(w) = w - w^2 + O(w^3)$, le produit fibré

$$P(z, w) = \left(f(z) + \frac{\pi^2}{4} w, g(w) \right)$$

a un domaine errant, qui s'accumule sur la droite invariante $\{w = 0\}$.

Notons que si l'on choisit g de manière à ce que son degré soit égal à celui de f, l'application P se prolonge en un endomorphisme polynômial holomorphe sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

De plus, on construira des exemples où P aura des coefficients réels, et où le domaine errant intersectera $\mathbb{R}^2$. Notons enfin que ces domaines errants seront bornés, avec une orbite bornée.

Chapitre 1

Différentielles quadratiques et champs de vecteurs

Dans ce chapitre, nous présentons une étude d'objets intervenant en théorie de Teichmüller : formes de Beltrami, différentielles quadratiques, champs de vecteurs quasiconformes. Ces différents objets interviennent dans la description des espaces tangents et cotangents des espaces de Teichmüller, et vont donc jouer un rôle important dans l'étude des déformations infinitésimales d'un système dynamique f. Ce chapitre sera consacré à une étude purement analytique et non dynamique.

On étudiera l'action de certaines différentielles quadratiques comme formes linéaires sur un espace de champs de vecteurs continus, ainsi que l'obstruction à représenter une telle forme linéaire par une différentielle quadratique. Cette étude aura des applications techniques dans le chapitre suivant. Le résultat principal du chapitre est le théorème 1.3.

1.1 Généralités

Les notations et conventions suivantes seront utilisées dans toute la suite :

- $\mathcal{S}$ est une 1-variété complexe, qui n'est pas nécessairement connexe. Le terme surface de Riemann imdiquera toujours que l'on suppose que $\mathcal{S}$ est connexe.
- $\mathbb{P}^1$ est la sphère de Riemann.
- Ω est un ouvert hyperbolique de $\mathbb{P}^1$ (éventuellement non connexe : dans ce cas, le fait que Ω soit hyperbolique signifie que toutes ses composantes connexes sont hyperboliques).
- $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$.
- Si $\mathcal{S}$ est hyperbolique, $\rho_{\mathcal{S}}$ est la métrique hyperbolique sur $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ n'est pas connexe, $\rho_{\mathcal{S}}$ désigne la métrique hyperbolique de chaque composante connexe de $\mathcal{S}$. Plus précisément, si $v \in T_s\mathcal{S}$ est un vecteur tangent attaché à un point $s \in \mathcal{S}$, alors $\rho_{\mathcal{S}}(s; v)$ est la longueur de v mesurée dans la métrique hyperbolique de la composante connexe de $\mathcal{S}$ contenant s. Si ξ est un champ de vecteur sur $\mathcal{S}$, $\rho_{\mathcal{S}}(\xi)$ désigne la fonction $s \mapsto \rho_{\mathcal{S}}(s; \xi(s))$.

Dans toute cette section, la régularité des objets que l'on considère (différentielles quadratiques, champs de vecteurs, etc.) n'est sauf mention explicite du contraire que mesurable. Dans les applications, la régularité sera systématiquement précisée (holomorphe, méromorphe, C^1, continue, localement intégrable, L^∞...).

Cependant, comme on définira un $\overline{\partial}$ de certains objets (voir définition 1.1.3), les objets dont on prendra le $\overline{\partial}$ seront supposés avoir une plus grande régularité. Cette hypothèse de régularité sera alors systématiquement explicitée.

Définition 1.1.1. Une différentielle quadratique sur une surface de Riemann $\mathcal{S}$ est une section du fibré $T^*\mathcal{S} \otimes T^*\mathcal{S}$ (produit tensoriel sur $\mathbb{C}$). Autrement dit, c'est un champ de formes quadratiques complexes sur les plans tangents.

Définition 1.1.2. Si μ est une section de $\overline{\mathrm{Hom}}(T\mathcal{S}, T\mathcal{S})$, i.e. une section du fibré des endomorphismes anti-$\mathbb{C}$-linéaires des plans tangents, et $z \in \mathcal{S}$, alors $|\mu|(z)$ désigne la norme de l'endomorphisme $\mu(z)$ de $T_z\mathcal{S}$. Ainsi, $|\mu|$ est une fonction bien définie sur S. Si μ est une telle section vérifiant la propriété $|\mu| \in L^\infty(\mathcal{S})$, on dit que μ est une différentielle de Beltrami. Si de plus $\|\mu\|_{L^\infty(\mathcal{S})} < 1$, on dit que μ est une forme de Beltrami.

Plus généralement, il sera utile de définir :

Définition 1.1.3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Notons $\Gamma(T^*\mathcal{S}^{\otimes k})$ l'espace des sections de $(T^*\mathcal{S})^{\otimes k}$ si $k \geq 0$, et l'espace des sections de $(T\mathcal{S})^{\otimes |k|}$ si $k < 0$ (produits tensoriels sur $\mathbb{C}$).

En coordonnées locales, on écrit $\phi = \phi(z)dz^k$ si $k \geq 0$ et $\phi = \phi(z)\frac{d}{dz^{|k|}}$ si $k < 0$. Parfois, par abus de notations, on notera également $\phi = \phi(z)dz^k$ même si $k < 0$. Dans de nouvelles coordonnées $w = h^{-1}(z)$, le changement de coordonnées s'écrit : $\phi = \phi \circ h(w)h'(w)^k dw^k$ si $k \geq 0$ et $\phi = \phi \circ h(w)h'(w)^k \frac{d}{dw^k}$ si $k < 0$.

En général, une connexion est nécessaire pour définir la différentielle d'une section d'un fibré. Rappelons cependant que si ϕ est une section d'un fibré vectoriel holomorphe E sur une surface de Riemann $\mathcal{S}$ avec une régularité suffisante, alors il existe une définition intrinsèque de $\overline{\partial}\phi$ ne nécessitant pas de connexion. Dans ce cas, $\overline{\partial}\phi$ est naturellement une section du fibré $\Lambda^{0,1}(T\mathcal{S}) \otimes E$.

Définition 1.1.4. Soit ϕ une section d'un fibré vectoriel holomorphe E sur une surface de Riemann $\mathcal{S}$. On peut écrire localement $\phi = h\psi$, où h est une fonction et ψ est une section locale holomorphe de E. On définit alors, si h est L^1_{loc} et $\overline{\partial}h$ (au sens des distributions) est L^1_{loc} :

$$\overline{\partial}\phi := \overline{\partial}h \otimes \psi.$$

Ici, $\overline{\partial}h$ désigne la dérivée au sens des distributions de h. On dira que la section ϕ est faiblement dérivable lorsque le h de la définition ci-dessus est dans L^1_{loc} et que $\overline{\partial}h$ au sens des distributions est L^1_{loc}. On vérifie sans peine que cette définition est indépendante du choix de section locale.

Remarque 1.1.5. Attention : si $E = \Omega^{1,0}(\mathcal{S})$ est le fibré des formes différentielles de type $(1,0)$, cette définition ne coïncide pas tout à fait avec la définition habituelle du $\overline{\partial}$. En effet, si $\omega \in \Omega^{1,0}(\mathcal{S})$, $\overline{\partial}\omega$ dans le sens classique est une $(1,1)$-forme différentielle alternée, tandis que $\overline{\partial}\omega$ dans le sens de la définition précédente est une forme sesquilinéaire. Cependant, on peut passer de l'une à l'autre par un isomorphisme canonique (en antisymétrisant).

Soit $\phi \in \Gamma(E)$ une section faiblement dérivable. Voici des cas particuliers qui nous intéresseront :

- Si $E = T\mathcal{S}$ et $\phi \in \Gamma(E)$ (i.e. ϕ est un champ de vecteurs), alors $\overline{\partial}\phi$ est une différentielle de Beltrami.
- Si $E = T^*\mathcal{S}$, alors $\overline{\partial}\phi$ est une forme sesquilinéaire. Après antisymétrisation elle devient une forme volume que l'on peut naturellement intégrer sur $\mathcal{S}$.

En coordonnées locales, si $\phi = \phi(z)dz^k$, alors $\overline{\partial}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\overline{z}}(z)d\overline{z} \otimes dz^k$.

Définition 1.1.6. Soit $\phi \in \Gamma(T^*\mathcal{S}^{\otimes m})$ et $\psi \in \Gamma(T^*\mathcal{S}^{\otimes n})$, où $m, n \in \mathbb{Z}$.

- $\phi \cdot \psi$ définit naturellement une section de $(T^*\mathcal{S})^{\otimes m+n}$, donnée par soit par une contraction soit par un produit tensoriel, selon les signes de m et n.
- Supposons que ψ soit faiblement dérivable. Alors $\phi \cdot \overline{\partial}\psi$ définit naturellement une section de $\Lambda^{0,1}(T\mathcal{S}) \otimes (T^*\mathcal{S})^{\otimes m+n}$ de la façon suivante : écrivons localement $\overline{\partial}\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ où $\psi_1 \in \Omega^{0,1}(\mathcal{S})$ et $\psi_2 \in \Gamma((T^*\mathcal{S})^{\otimes n})$, et posons $\phi \cdot \overline{\partial}\psi := \psi_1 \otimes (\phi \cdot \psi_2)$.

Lorsque $m + n = 1$, $\phi \cdot \overline{\partial}\psi$ est une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{S}$. Quitte à antisymétriser, elle définit de manière canonique une forme volume sur $\mathcal{S}$. On peut donc intégrer cet objet sur $\mathcal{S}$. Notons que l'antisymétrisation définit un isomorphisme canonique entre formes sesquilinéaires et formes volumes en dimension complexe 1 ; on identifiera donc $\phi \cdot \overline{\partial}\psi$ à une forme volume.

Supposons que ϕ et ψ s'écrivent en coordonnées locales $\phi = \phi(z)dz^m$ et $\psi = \psi(z)dz^n$. Alors :

$$\phi \cdot \psi = \phi(z)\psi(z)dz^{m+n}$$

$$\phi \cdot \overline{\partial}\psi = \phi(z)\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}(z)dz^{m+n}d\overline{z}$$

Cela rend évidentes les propriétés suivantes, qui justifient la notation $\cdot$:

$$\phi \cdot (\psi \cdot \xi) = (\phi \cdot \psi) \cdot \xi$$
$$\phi \cdot \psi = \psi \cdot \phi$$
$$\overline{\partial}(\phi \cdot \psi) = (\overline{\partial}\phi) \cdot \psi + \phi \cdot \overline{\partial}\psi$$

On utilisera donc par la suite ces propriétés sans justification supplémentaire.
Voici quelques cas particuliers notables :

— Si q est une différentielle quadratique et ξ est un champ de vecteurs, alors $q \cdot \xi$ est une $(1,0)$-forme différentielle et peut donc être naturellement intégrée sur des courbes, et possède une notion bien définie de résidu.

— Si q est une différentielle quadratique et μ est une différentielle de Beltrami, alors $q \cdot \mu$ est une forme sequilinéaire. Après antisymétrisation, elle devient une $(1,1)$-forme différentielle alternée et peut donc être intégrée sur $\mathcal{S}$. Ceci inclut le cas où $\mu = \overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteur.

— Si q est une différentielle quadratique et ξ est un champ de vecteurs, alors $\overline{\partial}q \cdot \xi$ est aussi une forme sesquilinéaire, et donc définit une forme volume après antisymétrisation.

Traditionnellement, on écrit les formes de Beltrami en coordonnées sous la forme $\mu = \mu(z)\frac{\overline{dz}}{dz}$. Nous conserverons cette notation. Cependant, dans le cadre du formalisme développé plus haut, une notation légèrement plus cohérente aurait été $\mu = \mu(z)d\overline{z} \otimes \frac{d}{dz}$.

Exemple 1.1.7. — Soit ξ le champ de vecteur défini par $\xi(z) = \overline{z}^2\frac{d}{dz}$. Alors

$$\overline{\partial}\xi = 2\overline{z}\frac{d\overline{z}}{dz}.$$

— Soit q la différentielle quadratique définie par $q = \frac{dz^2}{z}$. Alors :

$$|q| = \frac{|dz|^2}{|z|}$$
$$q \cdot \xi = \frac{\overline{z}^2}{z}dz$$
$$q \cdot \overline{\partial}\xi = \frac{2\overline{z}}{z}d\overline{z} \wedge dz$$

Définition 1.1.8. Soit ξ un champ de vecteurs sur une surface de Riemann $\mathcal{S}$. On dit que ξ est quasiconforme si $\overline{\partial}\xi$ (au sens des distributions) est une différentielle de Beltrami. Autrement dit, ξ est quasiconforme s'il existe une différentielle de Beltrami $\mu \in L^\infty$ telle que pour toute différentielle quadratique lisse sur $\mathbb{P}^1$,

$$\int_{\mathbb{P}^1} \overline{\partial}q \cdot \xi = -\int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \mu.$$

Proposition 1.1.9 (Stokes pour les champs de vecteurs quasiconformes)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{P}^1$ dont le bord est de classe C^1 par morceaux, q une différentielle quadratique de classe C^1 au voisinage de $\overline{U}$ et ξ un champ de vecteur quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$. Alors

$$\int_U q \cdot \overline{\partial}\xi + \int_U \xi \cdot \overline{\partial}q = \int_{\partial U} q \cdot \xi$$

Démonstration. Si ξ est un champ de vecteur de classe C^1, c'est une application directe du théorème de Stokes classique. En effet, $q\cdot\xi$ est une $(1,0)$-forme différentielle donc $d(q\cdot\xi) = \overline{\partial}(q\cdot\xi)$. De plus, $\overline{\partial}(q\cdot\xi) = \overline{\partial}q\cdot\xi + q\cdot\overline{\partial}\xi$. On déduit le cas général où $\overline{\partial}\xi$ n'existe qu'au sens des distributions par un raisonnement par densité : soit ξ un champ de vecteur quasiconforme et ξ_n une suite de champ de vecteurs de classe C^1 au voisinage de $\overline{U}$ qui converge uniformément vers ξ sur $\overline{U}$ (une telle suite existe car ξ est continu). Alors ξ_n converge vers ξ en tant que distribution sur U, donc $\overline{\partial}\xi_n$ converge vers $\overline{\partial}\xi$ au sens des distributions (par continuité de l'opérateur $\overline{\partial}$ pour la topologie des distributions). Comme on sait que la distribution $\overline{\partial}\xi$ est en fait une différentielle de Beltrami L^∞, on en déduit que pour toute différentielle quadratique test ϕ (c'est-à-dire lisse et à support compact dans U), on a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_U \phi\cdot\overline{\partial}\xi_n = \int_U \phi\cdot\overline{\partial}\xi$$

Mais comme les différentielles quadratiques lisses à support compact sont denses pour la norme L^1, ceci est encore vrai pour tout différentielle quadratique ϕ intégrable sur U, donc pour q.

Ainsi, $\lim_{n\to\infty}\int_U q\cdot\overline{\partial}\xi_n = \int_U q\cdot\overline{\partial}\xi$ et comme ξ_n converge uniformément sur $\overline{U}$, on a aussi

$$\lim_{n\to\infty} -\int_U \xi_n\cdot\overline{\partial}q + \int_{\partial U} q\cdot\xi_n = -\int_U \xi\cdot\overline{\partial}q + \int_{\partial U} q\cdot\xi.$$

□

Définition 1.1.10. Soit $\mathcal{S}$ une surface de Riemann, $z_0\in\mathcal{S}$ et $\xi(z_0)\in T_{z_0}\mathcal{S}$. Si q est une différentielle quadratique méromorphe ayant un pôle simple en z_0, on définit le résidu de $q\cdot\xi$ en z_0 comme le résidu de $q\cdot\tilde{\xi}$ en z_0, où $\tilde{\xi}$ est un champ de vecteur holomorphe au voisinage de z_0 avec $\xi(z_0) = \tilde{\xi}(z_0)$.

Cette définition ne dépend pas du choix de $\tilde{\xi}$.

Proposition 1.1.11. Soit $\Omega\subset\mathbb{P}^1$ un ouvert à bord lisse, et q une différentielle quadratique méromorphe au voisinage de $\overline{\Omega}$ dont les pôles sont simples et inclus dans un ensemble fini $P\subset\Omega$. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme sur Ω, qui se prolonge continûment sur $\overline{\Omega}$. Alors :

$$\int_\Omega q\cdot\overline{\partial}\xi = 2i\pi\sum_{z\in P}\mathrm{Res}(q\cdot\xi, z) - \int_{\partial\Omega} q\cdot\xi$$

Démonstration. Comme dans la proposition 1.1.9, commençons par prouver le résultat dans le cas où ξ est régulier ; on traitera le cas général par densité. Supposons donc que ξ est un champ de vecteur lisse défini au voisinage de $\overline{\Omega}$ et que ξ est holomorphe au voisinage de chaque $z\in P$. Let $U = \Omega - \bigcup_{z_i\in P} D_i$, où D_i désigne un disque lisse centré en $z_i\in P$ suffisamment petit pour qu'il soit inclus dans Ω et que ξ soit holomorphe sur chaque D_i. Alors d'après la proposition 1.1.9 :

$$\int_\Omega q\cdot\overline{\partial}\xi = \int_U q\cdot\overline{\partial}\xi = -\int_{\partial U} q\cdot\xi$$

De plus :

$$\int_{\partial U} q\cdot\xi = \int_{\partial\Omega} q\cdot\xi - \sum_{z_i\in P}\int_{\partial D_i} q\cdot\xi.$$

Comme ξ est holomorphe sur tous les disques D_i, la formule des résidus donne :

$$\int_{\partial U} q\cdot\xi = \int_{\partial\Omega} q\cdot\xi - 2i\pi\sum_{z_i\in P}\mathrm{Res}(q\cdot\xi, z_i).$$

Ceci achève la preuve dans le cas où ξ est lisse et holomorphe au voisinage de P.

Remarquons que ces champs de vecteurs sont denses dans l'espace des champs de vecteurs sur $\overline{\Omega}$ muni de la topologie de la convergence uniforme. En effet, en travaillant en coordonnées

locales, la condition d'être holomorphe au voisinage de P est vérifiée par les champs de vecteurs localement constants dans ces coordonnées, et cette condition est clairement dense pour la convergence uniforme parmi les champs de vecteurs lisses, qui sont eux-mêmes denses dans les champs de vecteurs continus.

De plus, le terme droit de l'égalité $-\int_{\partial\Omega} q\cdot\xi + 2i\pi\sum_{z_i\in P}\mathrm{Res}(q\cdot\xi, z_i)$ dépend continument de ξ pour la convergence uniforme. Le même argument de densité que celui de la preuve de la proposition 1.1.9 donne la continuité séquentielle du terme de gauche $\int_\Omega q\cdot\overline{\partial}\xi$ par rapport à ξ, ce qui achève la preuve. □

Remarquons que dans le cas particulier où $\Omega=\Delta$ et $q=\frac{dz^2}{z}$, on retrouve la formule de Cauchy-Pompéiu.

Il est souvent naturel de travailler modulo transformation de Möbius, c'est-à-dire modulo les biholomorphismes de la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$. Cependant, travailler directement dans des espaces quotients présente des désavantages : par exemple, l'espace rat_d obtenu en quotientant l'espace Rat_d des fractions rationnelles de degré $d\geq 2$ par $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ perd la structure de variété complexe : c'est un orbifold. On préfèrera donc travailler dans des espaces normalisés de manière à être transverses à l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

Dans tout le reste, Z désignera un triplet de points de $\mathbb{P}^1$.

Définition 1.1.12. Un champ de vecteur ξ sur $\mathbb{P}^1$ sera dit Z-normalisé s'il s'annule sur Z.

1.2 Généralités sur les différentielles quadratiques

Définition 1.2.1. Soit q une différentielle quadratique. On note $|q|$ la métrique hermitienne associée à la forme quadratique réelle définie par $|q|_s : T_s\mathcal{S}\ni v\mapsto |q(s;v)|$. On dit que q est intégrable si $\int_{\mathcal{S}}|q|$ est finie ; dans ce cas, on note

$$\|q\| = \int_{\mathcal{S}} |q|.$$

On notera $Q(\mathcal{S})$ l'espace des différentielles quadratiques holomorphes sur $\mathcal{S}$.

On vérifie facilement qu'une différentielle quadratique méromorphe est intégrable au voisinage d'un pôle si et seulement si ce pôle est simple.

Définition 1.2.2. Soit $K\subset\mathbb{P}^1$ un ensemble compact. On note $Q(K)$ l'espace des différentielles quadratiques intégrables, holomorphes en dehors de K.

Par exemple, lorsque $K\subset\mathbb{P}^1$ est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, alors $Q(\mathbb{P}^1-K)$ et $Q(K)$ sont canoniquement isomorphes. Si l'on note $L^1(K)$ l'espace des différentielles quadratiques L^1 sur K pour la mesure de Lebesgue (sans demander plus de régularité que le fait d'être mesurable), on a alors :

$$Q(K)\simeq Q(\mathbb{P}^1-K)\oplus L^1(K).$$

L'espace $Q(K)$ est non-trivial si K contient au moins 4 points. C'est un espace de Banach.

Définition 1.2.3. Soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux surfaces de Riemann, et $f:\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2$ une application holomorphe non constante. Soit q une différentielle quadratique sur $\mathcal{S}_2$. Le tiré en arrière de q par f est :

$$f^*q(z;u) = q(f(z);Df(z)\cdot u).$$

Si q est holomorphe sur $\mathcal{S}_2$, alors f^*q est une différentielle quadratique holomorphe sur $\mathcal{S}_1-V_f$, où V_f désigne l'ensemble des valeurs critiques de f.

En coordonnées,

$$f^*q(z) = q\circ f(z)f'(z)^2.$$

Définition 1.2.4. Soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux surfaces de Riemann, et $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ un revêtement ramifié holomorphe. Soit q une différentielle quadratique sur $\mathcal{S}_1$. Le poussé en avant de q par f est (lorsque la somme converge localement uniformément) :

$$f_*q = \sum_i g_i^* q$$

où les g_i sont les branches inverses de f.

Les deux propositions suivantes sont classiques, et peuvent être prouvées de façon élémentaire en travaillant en coordonnées.

Proposition 1.2.5. Soit q une différentielle quadratique rationnelle sur $\mathbb{P}^1$ dont les pôles sont inclus dans un ensemble P, et f une fraction rationnelle. Alors f_*q est encore une différentielle quadratique rationnelle, dont les pôles sont inclus dans $f(P) \cup V_f$.

Proposition 1.2.6. Soit q une différentielle quadratique intégrable sur $\mathbb{P}^1$, et $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ une fraction rationnelle non constante. Alors f_*q est une différentielle quadratique rationnelle intégrable.

Proposition 1.2.7. Toute différentielle quadratique méromorphe sur $\mathbb{P}^1$ a au moins 4 pôles comptés avec multiplicité.

Définition 1.2.8. Une différentielle quadratique sur $\mathbb{P}^1$ sera dite élémentaire si elle est méromorphe et si elle a exactement 4 pôles, tous simples.

D'après la proposition suivante, les différentielles quadratiques ayant exactement quatre pôles simples sont donc en quelque sorte les plus "simples" possibles parmi les différentielles quadratiques méromorphes sur $\mathbb{P}^1$. Nous allons voir qu'elles jouent un rôle particulier.

Proposition 1.2.9. Soit $A \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble fini. L'espace $Q(A)$ des différentielles quadratiques intégrables, holomorphes sur $\mathbb{P}^1 - A$ est de dimension $\max(\operatorname{card} A - 3, 0)$.

En particuliers, les différentielles quadratiques élémentaires à pôles prescrits forment une droite vectorielle complexe. Nous allons voir que cette droite a des éléments privilégiés. Bien sûr, on peut toujours normaliser en prenant une différentielle quadratique de norme L^1 unitaire ; nous allons voir qu'il existe une autre façon naturelle de choisir une différentielle quadratique élémentaire à pôles (ordonnés) prescrits.

Définition 1.2.10. Soit $z_1 \neq z_2$ deux points de $\mathbb{P}^1$. On note ω_{z_1,z_2} l'unique 1-forme méromorphe ayant exactement deux pôles simples sur $\mathbb{P}^1$, avec un résidu 1 en z_1 et -1 en z_2. Si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in (\mathbb{P}^1)^4$ sont distincts, on note

$$q_{z_1,z_2,z_3,z_4} = \omega_{z_1,z_2} \otimes \omega_{z_3,z_4}.$$

Notons qu'en coordonnées, $\omega_{z_1,z_2} = \dfrac{(z_1 - z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz$ et

$$q_{z_1,z_2,z_3,z_4} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} dz^2.$$

Remarquons également que q_{z_1,z_2,z_3,z_4} dépend de l'ordre des z_i.

L'intérêt principal de ce type particuliers de différentielles quadratiques est donné par la proposition suivante :

Définition 1.2.11. Soit $z_i \in \mathbb{P}^1$, $1 \leq i \leq 4$ quatre points distincts. On note $\mathrm{BR}(z_i)$ leur birapport.

Proposition 1.2.12. Soit $v_i \in T_{z_i}\mathbb{P}^1$, $1 \leq i \leq 4$. Alors

$$\sum_{i=1}^{4} \mathrm{Res}(q \cdot v_i, z_i) = \frac{d}{dt} \log \mathrm{BR}(z_i + tv_i).$$

Autrement dit, la différentielle quadratique q_{z_1,z_2,z_3,z_4} encode la variation relative du birapport des points z_i, c'est-à-dire leur "position à biholomorphisme de $\mathbb{P}^1$ près". Nous renvoyons le lecteur à [Eps09] pour une preuve de cette proposition.

Définition 1.2.13. Si f est une fraction rationnelle, on notera $\Delta_f = \mathrm{Id} - f^*$ et $\nabla_f = \mathrm{Id} - f_*$, où f^* et f_* désignent respectivement le tiré en arrière des champs de vecteurs par f, et le poussé en avant des différentielles quadratiques par f, suivant les notations de [Eps09].

1.3 Scindement de champs de vecteurs quasiconformes

Définition 1.3.1. Soit $\mathcal{S}$ une surface de Riemann hyperbolique et ξ un champ de vecteurs sur $\mathcal{S}$. On dit que ξ est hyperboliquement borné sur $\mathcal{S}$ si et seulement si $\rho(\xi) \in L^\infty(\mathcal{S})$, où ρ désigne la métrique hyperbolique de $\mathcal{S}$.

Théorème 1.3.2. *Soit ξ un champ de vecteur continu sur $\mathbb{P}^1$, quasiconforme et hyperboliquement borné sur un ouvert hyperbolique Ω de $\mathbb{P}^1$, et nul en dehors de Ω. Alors ξ est globalement quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$.*

De plus, on a $\|\rho(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Démonstration. Le point clé est le lemme suivant :

Lemme 1.3.3. *Soit q une différentielle quadratique intégrable de classe C^∞ sur Ω, et ξ un champ de vecteurs quasiconforme hyperboliquement borné sur Ω. Supposons que $\xi \cdot \overline{\partial} q$ soit intégrable sur Ω. Alors :*

$$\int_\Omega \overline{\partial}\xi \cdot q = -\int_\Omega \xi \cdot \overline{\partial} q$$

Démonstration. Soit Ω_i la famille (au plus dénombrable) des composantes connexes de Ω. Pour tout i, choisissons un point $z_i \in \Omega_i$ arbitraire. Soit $\delta(z) = d_{\Omega_i}(z, z_i)$ pour tout $z \in \Omega_i$, où d_{Ω_i} est la distance hyperbolique sur Ω_i. Soit $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction lisse telle que $\phi(x) = 1$ pour $x \in [0, 1]$ et $\phi(x) = 0$ pour $x \geq 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $\phi_n : \Omega \to \mathbb{R}^+$ par

$$\phi_n(z) = \phi\left(\frac{\delta(z)}{n}\right).$$

Soit $\mu = \overline{\partial}\xi$.

Soit q une différentielle quadratique comme dans l'énoncé du lemme. Comme $\phi_n q$ est à support compact dans Ω, on a :

$$\int_\Omega \mu \cdot (\phi_n q) = -\int_\Omega \xi \cdot \overline{\partial}(\phi_n q) = \int_\Omega \xi \cdot (\phi_n \overline{\partial} q) + \xi \cdot (q \cdot \overline{\partial}\phi_n)$$

De plus, $\int_\Omega \xi \cdot (q \cdot \overline{\partial}\phi_n) = \int_\Omega q \cdot (\xi \cdot \overline{\partial}\phi_n)$. Calculons maintenant la norme L^∞ de la différentielle de Beltrami $\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi$. Comme δ est une fonction localement lipschitz sur Ω, elle a des dérivées au sens des distributions localement bornées. On a :

$$\overline{\partial}\phi_n = \frac{1}{n}\phi'(\delta/n)\overline{\partial}\delta.$$

Soit $z \in \Omega$ et $u \in T_z\mathbb{P}^1$. On a $\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi(z) : u \mapsto \overline{\partial}\phi_n(u)\xi(z)$, et la norme de cet endomorphisme pour n'importe quelle métrique hermitienne est $|\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi|(z)$. On peut donc travailler avec la

métrique hyperbolique ρ_Ω. Comme δ est 1-lipschitz pour la métrique hyperbolique sur Ω, la dérivée $\overline{\partial}\delta$ a presque partout une norme hyperbolique inférieure ou égale à 1. On a :

$$\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi(z;u) = \frac{1}{n}\phi'\left(\frac{\delta(z)}{n}\right)\overline{\partial}\delta(z;u) \times \xi(z)$$
$$\rho_\Omega(\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi(z;u)) \leq \frac{\sup_{\mathbb{R}^+}|\phi'|}{n}\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)}\rho_\Omega(u)$$
$$|\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi(z)| \leq \frac{\sup_{\mathbb{R}^+}|\phi'|}{n}\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Et donc : $\|\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi\|_{L^\infty} = O(1/n)$ et $\left|\int_\Omega q \cdot (\xi \cdot \overline{\partial}\phi_n)\right| \leq \|q\|_{L^1}\|\overline{\partial}\phi_n \cdot \xi\|_{L^\infty} = O(1/n)$.

On en déduit :

$$\int_\Omega \overline{\partial}\xi \cdot (\phi_n q) = \int_{\mathbb{P}^1} (\overline{\partial}\xi \cdot q)\phi_n = -\int_\Omega \phi_n(\xi \cdot \overline{\partial}q) + O(1/n)$$

donc

$$\int_\Omega (\overline{\partial}\xi \cdot q)\phi_n = -\int_\Omega \phi_n(\xi \cdot \overline{\partial}q) + O(1/n)$$

Par hypothèse, $\xi \cdot \overline{\partial}q$ et $|q|$ sont integrables, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_\Omega \overline{\partial}\xi \cdot q = -\int_\Omega \xi \cdot \overline{\partial}q.$$

□

Si l'on se donne maintenant une différentielle quadratique q de classe C^∞ sur $\mathbb{P}^1$, sa restriction à Ω vérifie les hypothèses du lemme précédent. On a donc :

$$\int_{\mathbb{P}^1} \mu \cdot q = -\int_{\mathbb{P}^1} \xi \cdot \overline{\partial}q,$$

où $\mu = \overline{\partial}\xi$ sur Ω et 0 ailleurs. Ceci signifie exactement que $\overline{\partial}\xi = \mu$ au sens des distributions, ce qui montre la première assertion.

Pour le second point : appelons $\tilde{\xi} = p^*\xi$ le champ de vecteur tiré en arrière par un revêtement universel $p : \Delta \to \Omega$ envoyant 0 sur un point $z_0 \in \Omega$ arbitraire. La proposition 1.1.11 appliquée à $\tilde{\xi}$ donne :

$$\mathrm{Res}\left(\frac{dz^2}{z} \cdot \tilde{\xi}, 0\right) = dz(\tilde{\xi}(0)) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Delta_r} \overline{\partial}\tilde{\xi}(z) \cdot \frac{dz^2}{z} + \frac{1}{2i\pi}\int_{S_r} \tilde{\xi}(z) \cdot \frac{dz^2}{z}$$

où Δ_r et S_r désignent respectivement le disque de rayon r et le cercle de rayon r. Mais comme par hypothèse $\rho(\tilde{\xi}) \leq C$, le second terme converge vers 0 quand r tend vers 1. On en déduit :

$$dz(\tilde{\xi})(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Delta \overline{\partial}\tilde{\xi}(z) \cdot \frac{dz^2}{z}$$

et donc

$$\rho_\Delta(\tilde{\xi})(0) = 2|\tilde{\xi}(0)| \leq 2\frac{1}{2\pi}\|\frac{dz^2}{z}\|_{L^1(\Delta)}\|\overline{\partial}p^*\xi\|_{L^\infty}.$$

Comme $\|\frac{dz^2}{z}\|_{L^1(\Delta)} = 4\pi$ et $\overline{\partial}p^*\xi = p^*\overline{\partial}\xi$, on en déduit

$$\rho_\Delta(\tilde{\xi})(0) = \rho_\Omega(\xi)(z_0) \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Comme z_0 est arbitraire, ceci conclue la preuve de la seconde assertion. □

Ce résultat dit que si un champ de vecteur quasiconforme sur Ω est hyperboliquement borné, alors on peut le recoller en dehors de Ω avec le champ de vecteur nul, et ce recollement est encore quasiconforme. Le résultat suivant fournit un peu plus que la réciproque. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3.4. *Soit Ω un ouvert hyperbolique de $\mathbb{P}^1$, et X un ensemble dénombrable dense dans $\partial\Omega$. Soit (X_n) une suite croissante de parties finies de X avec $\cup_n X_n = X$ et $\mathrm{card} X_n \geq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et notons $\Omega_n = \mathbb{P}^1 - X_n$. Alors la métrique hyperbolique ρ_n de Ω_n converge simplement sur Ω vers la métrique hyperbolique ρ de Ω.*

Démonstration. Soit $z \in \Omega$ et notons $\pi : \Delta \to \Omega$ un revêtement universel de Ω envoyant 0 sur z. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\pi_n : \Delta \to \Omega_n$ un revêtement universel envoyant encore 0 sur z. L'inclusion $i : \Omega \subset \Omega_n$ se relève en une application $\psi_n : \Delta \to \Delta$ fixant 0 et telle que $\pi_n \circ \psi_n = i \circ \pi = \pi$. D'après le lemme de Schwarz, $|\psi_n'(0)| \leq 1$ et donc $|\pi'(0)| \leq |\pi_n'(0)|$.

De plus, la famille (π_n) évite l'ensemble X_1 de cardinal 3, et donc forme une famille normale d'après le théorème de Montel. Soit ϕ une limite d'une suite extraite convergente de (π_n). Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\pi_n'(0)| \geq |\pi'(0)| > 0$, ϕ n'est pas constante, donc est ouverte. Donc $\phi(\Delta)$ est un ouvert de $\mathbb{P}^1$, connexe, contenant z mais disjoint de X. Donc $\phi(\Delta)$ est inclus dans la composante connexe de $\mathbb{P}^1 - \overline{X} = \mathbb{P}^1 - \partial\Omega$ contenant z, c'est-à-dire Ω. De même, le lemme de Schwarz appliqué à $\phi : \Delta \to \Omega$ montre que $|\phi'(0)| \leq |\pi'(0)|$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_{m\to\infty} |\pi_m'(0)| \leq |\pi'(0)| \leq |\pi_n'(0)|$$

et donc $\lim_{n\to\infty} |\pi_n'(0)| = |\pi'(0)|$. On a donc montré que $\lim_{n\to\infty} \rho_n(z) = \rho(z)$, et $z \in \Omega$ est arbitraire, ce qui achève la preuve. □

Proposition 1.3.5. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$, et qui s'annule sur un compact K. Soit Ω une composante connexe hyperbolique de $\mathbb{P}^1 - K$. Alors :

$$\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

où ρ_Ω est la métrique hyperbolique sur Ω.

Démonstration. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties finies de $\partial\Omega$ dont l'union est dense dans $\partial\Omega$, avec $\mathrm{card} X_n \geq 3$. Alors d'après le lemme 1.3.4, la métrique hyperbolique ρ_n associée à $\Omega_n = \mathbb{P}^1 - X_n$ converge simplement vers la métrique hyperbolique ρ associée à Ω sur Ω. Il suffit alors de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_\Omega \rho_n(\xi) \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}$. Ceci découlera du lemme suivant :

Lemme 1.3.6. *Soit ξ un champ de vecteurs quasiconforme sur une surface de Riemann compacte $\mathcal{S}$, s'annulant sur un ensemble fini P (de cardinal au moins 3). Alors la restriction $\xi_{|\mathcal{S}-P}$ est hyperboliquement bornée sur $\Omega = \mathcal{S} - P$.*

Démonstration du lemme 1.3.6. Comme $\rho_\Omega(\xi)$ est une fonction continue sur $\Omega = \mathcal{S} - P$, il suffit de montrer que $\rho_\Omega(\xi)$ est bornée au voisinage de chaque point $z \in P$. Soit donc $z_0 \in P$, et $r > 0$ tel que le disque épointé $D_r(z_0)$ de centre z_0 et de rayon r soit inclus dans Ω (c'est-à-dire ne rencontre pas d'autres points de P). Alors par le lemme de Schwarz, la métrique hyperbolique associée à Ω est plus petite que celle associée à $D_r(z_0)$, donc on a, pour tout $z \in U = D_r(z_0)$:

$$\rho_\Omega(\xi)(z) \leq \rho_U(\xi)(z) \leq C'|z - z_0| \log |z - z_0|^{-1}.$$

La deuxième inégalité est une estimation de la métrique hyperbolique du disque épointé au voisinage de z_0 (voir par exemple [GL00] ou [Hub06]), la constante dépendant de r. Par ailleurs, ξ a un module de continuité en $-\epsilon \log \epsilon$ par quasiconformalité (cf [GL00], théorème 7 p. 56), donc

il existe une constante C (ne dépendant que de ξ et du choix de coordonnée) telle que dans la coordonnée z :

$$|\xi(z)| = |\xi(z) - \xi(z_0)| \leq C|z - z_0| \log |z - z_0|^{-1}.$$

On obtient donc, pour tout $z \in D_r(z_0)$

$$\rho_\Omega(\xi)(z) \leq C,$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

En appliquant le lemme 1.3.6 à ξ sur Ω_n, on en déduit qu'il existe une constante $C_n > 0$ telle que $\rho_{\Omega_n}(\xi) \leq C_n$ sur Ω_n. Le théorème 1.3.2 appliqué à ξ sur Ω_n permet d'obtenir une borne indépendante de n :

$$\|\rho_{\Omega_n}(\xi)\|_{L^\infty(\Omega_n)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega_n)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\mathbb{P}^1)}.$$

Donc par passage à la limite, on en déduit que :

$$\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\mathbb{P}^1)},$$

et une deuxième application du même théorème permet d'en déduire finalement

$$\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

□

En combinant les résultats du théorème 1.3.2 et de la proposition 1.3.5, on obtient :

Théorème A. Soit Ω un ouvert hyperbolique de $\mathbb{P}^1$ et ξ un champ de vecteur quasiconforme sur Ω. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) On a $\|\rho_\Omega(\xi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Omega)}$, où ρ_Ω est la métrique hyperbolique sur Ω

ii) Le champ de vecteur ξ est hyperboliquement borné

iii) Il existe une extension quasiconforme $\hat{\xi}$ de ξ sur tout $\mathbb{P}^1$ avec $\hat{\xi} = 0$ sur $\partial\Omega$

iv) L'extension $\hat{\xi}(z) = \xi(z)$ si $z \in \Omega$ et 0 sinon est quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$, et $\overline{\partial}\hat{\xi}(z) = 0$ pour presque tout $z \notin \Omega$

Corollaire 1.3.1. Soit Ω un ouvert hyperbolique de $\mathbb{P}^1$ et ξ un champ de vecteur quasiconforme qui s'annule sur $\mathbb{P}^1 - \Omega$. Soit $\Omega = \bigsqcup_i \Omega_i$ une partition dénombrable de Ω en ouverts Ω_i. Alors

$$\xi = \sum_i \xi_i$$

où ξ_i est un champ de vecteur quasiconforme qui coïncide avec ξ sur Ω_i et s'annule en dehors de Ω_i.

Démonstration. D'après le point *iv*) du théorème A, les champs de vecteurs ξ_i sont quasiconformes. □

Le résultat suivant est un théorème dû à Bers et Lakic. Sa démonstration utilise classiquement une certaine suite régularisante introduite par Ahlfors (le "mollifier d'Ahlfors"), voir [GL00], théorème 9 p. 63. La suite régularisante ϕ_n de la preuve du théorème 1.3.2 remplace cette suite régularisante.

Corollaire 1.3.2 (Théorème de densité de Bers-Lakic)**.** Soit K un compact de $\mathbb{P}^1$ contenant au moins 3 points, et Z un ensemble dense dans K. L'espace des différentielles quadratiques à pôles simples dans Z est dense (pour la norme L^1) dans l'espace des différentielles quadratiques intégrables holomorphes en dehors de K.

Démonstration. Il suffit de montrer que toute forme linéaire continue sur l'espace des différentielles quadratiques intégrables sur $\mathbb{P}^1$ et holomorphes sur Ω annulant toutes les différentielles quadratiques méromorphes à pôles simples dans K est nulle. Une telle forme linéaire peut être représentée par une différentielle de Beltrami sur $\mathbb{P}^1$, d'après le théorème de Hahn-Banach. Soit donc μ une différentielle de Beltrami et ξ un champ de vecteurs quasiconforme tel que $\mu = \overline{\partial}\xi$, et supposons que

$$\int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \overline{\partial}\xi = 0$$

pour toute différentielle quadratique à pôles simples dans K. Soit $A \subset Z$ un ensemble de cardinal 3 : quitte à ajouter à ξ un champ de vecteur holomorphe, on peut supposer que ξ s'annule sur A. Alors d'après la proposition 1.1.11 appliquée avec $\Omega = \mathbb{P}^1$, q une différentielle quadratique ayant des pôles simples exactement en A et en $z \in Z \backslash A$, on voit que ξ doit s'annuler en z. Par continuité, ξ s'annule donc sur K. Donc d'après le théorème A, ξ est hyperboliquement borné sur Ω. Soit q une différentielle quadratique intégrable et holomorphe sur Ω. En particuliers, q est C^∞ et intégrable sur Ω, et le lemme 1.3.3 donne :

$$\int_\Omega q \cdot \overline{\partial}\xi = -\int_\Omega \overline{\partial} q \cdot \xi = 0.$$

De plus, d'après le théorème A, on a $\overline{\partial}\xi = 0$ presque partout sur K, donc :

$$\int_K q \cdot \overline{\partial}\xi = 0,$$

ce qui achève la preuve. □

Définition 1.3.7. Une différentielle de Beltrami μ sur une surface de Riemann $\mathcal{S}$ est infinitésimalement triviale si $\int_{\mathcal{S}} q \cdot \mu = 0$ pour toute différentielle quadratique q holomorphe sur $\mathcal{S}$.

Cette terminologie vient du fait que l'espace tangent au point base de l'espace de Teichmüller de $\mathcal{S}$, $T_0\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$, s'identifie canoniquement au quotient de l'espace des différentielles de Beltrami sur $\mathcal{S}$ par le sous-espace des différentielles de Beltrami infinitésimalement triviales (voir [GL00] ou [Hub06]). Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre suivant.

Corollaire 1.3.3. Soit $\mathcal{S}$ une surface de Riemann hyperbolique et $\mu \in \mathrm{bel}(\mathcal{S})$. Alors μ est infinitésimalement triviale si et seulement si il existe un champ de vecteur quasiconforme ξ sur $\mathcal{S}$ tel que $\mu = \overline{\partial}\xi$ et

$$\rho(\xi)\|_{L^\infty(\mathcal{S})} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\mathcal{S})}$$

Démonstration du corollaire 1.3.3. Soit μ une différentielle de Beltrami sur $\mathcal{S}$ qui est infinitésimalement triviale. Soit $\pi : \Delta \to \mathcal{S}$ un revêtement universel. Soit $q \in Q(\Delta)$. On a :

$$\int_\Delta q \cdot \pi^*\mu = \int_{\mathcal{S}} \pi_* q \cdot \mu = 0.$$

Donc $\pi^*\mu \in \mathrm{Bel}(\Delta)$ est infinitésimalement triviale. On a montré dans la preuve du corollaire 1.3.2 que ceci implique que $\pi^*\mu$ est de la forme $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteurs quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$ s'annulant en dehors de Δ. Donc d'après le théorème A, ξ est hyperboliquement borné sur Δ, et $\|\rho_\Delta(\xi)\|_{L^\infty(\Delta)} \leq 4\|\overline{\partial}\xi\|_{L^\infty(\Delta)}$.

Il suffit maintenant de prouver que ξ passe au quotient en un champ de vecteurs sur $\mathcal{S}$. Soit γ un élément du groupe de Galois de π. Il suffit de prouver que ξ est γ-invariant. Comme γ est une isométrie pour la métrique hyperbolique, $\xi - \gamma^*\xi$ est hyperboliquement borné. De plus, $\xi - \gamma^*\xi$ est holomorphe puisque $\overline{\partial}\xi - \gamma^*\overline{\partial}\xi = 0$ sur Δ. Mais le seul champ de vecteur holomorphe et hyperboliquement borné sur Δ est le champ de vecteurs identiquement nul : ξ est donc invariant par γ. Donc, ξ passe au quotient en un champ de vecteur $\hat{\xi}$ sur $\mathcal{S}$, tel que $\overline{\partial}\hat{\xi} = \mu$ et $\|\rho_{\mathcal{S}}(\hat{\xi})\|_{L^\infty(\mathcal{S})} \leq 4\|\overline{\partial}\hat{\xi}\|_{L^\infty(\mathcal{S})}$.

Réciproquement, supposons que $\mu = \overline{\partial}\hat{\xi}$ où $\hat{\xi}$ est un champ de vecteurs quasiconforme sur $\mathcal{S}$ tel que $\|\rho_{\mathcal{S}}(\hat{\xi})\|_{L^\infty(\mathcal{S})} \leq 4\|\overline{\partial}\hat{\xi}\|_{L^\infty(\mathcal{S})}$. Soit $q \in Q(\mathcal{S})$. D'après le théorème 4 p. 50 de [GL00], l'opérateur de poussé en avant $\pi_* : Q(\Delta) \to Q(\mathcal{S})$ est surjectif, donc on peut supposer que $q = \pi_*\phi$, où $\phi \in Q(\Delta)$. Comme $\pi^*\mu$ est de la forme $\pi^*\mu = \overline{\partial}\pi^*\hat{\xi}$, où $\pi^*\hat{\xi}$ est un champ de vecteur quasiconforme hyperboliquement borné sur Δ, on a $\int_\Delta \phi \cdot \pi^*\mu = 0$. Donc :

$$\int_{\mathcal{S}} q \cdot \mu = \int_\Delta \phi \cdot \pi^*\mu = 0$$

ce qui prouve que μ est infinitésimalement triviale sur $\mathcal{S}$. □

1.4 Différentielles quadratiques et dual des champs de vecteurs

Nous introduisons ici l'espace dual des champs de vecteurs continus, que l'on va relier à un certain espace de différentielles quadratiques intégrables. Plus précisément, l'espace de champs de vecteurs tests considéré sera celui des champs de vecteurs continus sur la sphère de Riemann. Nous allons voir que pour certaines différentielles quadratiques q, $\overline{\partial}q$ définit de manière naturelle une forme linéaire sur cet espace de champs de vecteurs tests. Il sera parfois utile de manipuler ces formes linéaires plutôt que des différentielles quadratiques.

Les deux résultats importants de cette section sont le théorème 1.4.8, qui servira à inverser l'opérateur $\overline{\partial}$ pour associer une différentielle quadratique à une forme linéaire, et la proposition 1.4.11, qui permet de voir comment se poussent en avant ces formes linéaires.

Commençons par développer un peu de formalisme. Rappelons qu'une forme linéaire sur l'espace des fonctions continues sur un compact s'identifie naturellement aux mesures de Radon. Ici, on s'intéresse aux formes linéaires sur l'espace des champs de vecteurs continus. La description intrinsèque de ces objets fait donc intervenir à la fois des mesures de Radon mais aussi des formes différentielles.

Définition 1.4.1. On note $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ l'espace des formes linéaires continues sur l'espace des champs de vecteurs continus sur $\mathbb{P}^1$, muni de la topologie de la norme uniforme. Le support de $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ est le complémentaire de l'union des ouverts $\omega \subset \mathbb{P}^1$ tels que $\langle u, \xi\rangle = 0$ pour tout champ de vecteurs ξ à support dans ω. Si $h \in C^0(\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$ et $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$, alors $hu \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ est définie par

$$\langle hu, \xi\rangle = \langle u, h\xi\rangle.$$

Proposition 1.4.2. Soit $\mathcal{M}$ l'espace des mesures de Radon complexes sur $\mathbb{P}^1$, et $A = C^0(\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \otimes_A \Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1) &\to \Gamma(T\mathbb{P}^1)^* \\ \mu \otimes \alpha &\mapsto \left(\xi \mapsto \int_{\mathbb{P}^1} \alpha(\xi) d\mu\right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de A-module, et donc aussi de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Remarque 1.4.3. Comme $\Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1)$ est un A-module de rang 1 (on peut en effet construire une $(1,0)$-forme continue ne s'annulant pas sur $\mathbb{P}^1$), tout élément de $\Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1) \otimes_A \mathcal{M}$ peut s'écrire sous la forme $\alpha \otimes_A \mu$, où $\alpha \in \Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1)$ et $\mu \in \mathcal{M}$.

Démonstration. L'application considérée est clairement un morphisme injectif de A-module. Il suffit donc de justifier qu'il est surjectif. Soit $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$.

Si le support de u est inclus dans un domaine de carte (U, z), il est facile de vérifier à l'aide du théorème de Riesz que u peut s'écrire sous la forme $u = dz \otimes_A \mu$, où μ est une mesure de Radon de support inclus dans U. A l'aide d'une partition de l'unité, on ne perd pas de généralité à supposer que ce soit le cas. □

On identifiera donc dans la suite $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ à $\Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1) \otimes_A \mathcal{M}$.

Définition 1.4.4. Soit f une fraction rationnelle et soit $u = \alpha \otimes \mu \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ telle que $\frac{\|\alpha\|}{\|Df\|} \in L^1(|\mu|)$ (dans la métrique sphérique). Alors on définit le poussé en avant de u, noté f_*u, par :

$$\langle f_*u, \xi \rangle = \langle u, f^*\xi \rangle = \int_{\mathbb{P}^1} \alpha(f^*\xi) d\mu.$$

On voit alors que $f_*u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$.

En particuliers, si $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ a un support K qui ne rencontre pas $\mathrm{Crit}(f)$, alors f_*u est bien défini et a comme support $f(K)$. Notons que l'opérateur linéaire f_* n'est pas continu, et n'est défini que sur un sous-espace dense de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$.

Définition 1.4.5. Soit q une différentielle quadratique intégrable. On dit que q est régulière si l'application

$$\overline{\partial} q : \xi \mapsto -\int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \overline{\partial}\xi$$

est continue sur l'espace des champs de vecteurs quasiconformes (muni de la topologie de la norme du supremum associée à la métrique sphérique). Si c'est le cas, $\overline{\partial} q$ se prolonge par densité de façon unique en une forme linéaire continue sur l'espace des champs de vecteurs continus et définit un élément de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$, que l'on note encore $\overline{\partial} q$.

Notons que si q s'écrit en coordonnées $q = h(z)dz^2$, alors q est régulière si et seulement si $\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}$ (au sens des distributions) est une mesure complexe de Radon. C'est le cas en particulier pour toutes les différentielles quadratiques méromorphes à pôles simples, dont le $\overline{\partial}$ est une somme de diracs.

Une conséquence immédiate du lemme de Weyl est que si q est une différentielle quadratique régulière telle que $\overline{\partial} q$ a un support inclus dans un compact K, alors q est holomorphe en dehors de K.

Définition 1.4.6. Introduisons les notations suivantes :
- Notons $\mathcal{R}(\mathbb{P}^1)$ l'espace des différentielles quadratiques intégrables sur $\mathbb{P}^1$ et régulières.
- Notons $\mathcal{H}(\mathbb{P}^1)$ l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{P}^1$.

Remarque 1.4.7. L'espace $\mathcal{H}(\mathbb{P}^1)$ est de dimension complexe 3. On peut vérifier facilement que ce sont exactement les champs de vecteurs s'écrivant en coordonnées affines sous la forme $\xi = P(z)\frac{d}{dz}$, où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Le théorème suivant permet de déterminer quand il est possible de résoudre l'équation $\overline{\partial} q = u$, avec $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$. D'après la définition de $\overline{\partial} q$, il est évident que $\overline{\partial} q \in \mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp$. Le résultat important est l'autre inclusion.

Ce résultat de surjectivité du $\overline{\partial}$ est lié à la simple connexité de $\mathbb{P}^1$. On pourrait probablement énoncer un résultat plus général faisant intervenir la cohomologie de Dolbeault, mais nous n'en aurons pas besoin.

Théorème 1.4.8 (Résolution du $\overline{\partial}$)**.** *Soit Z un triplet de points de $\mathbb{P}^1$, et $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*_Z$ l'ensemble des éléments de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ de support inclus dans Z. Alors*

$$\Gamma(T\mathbb{P}^1)^* = \overline{\partial}\mathcal{R}(\mathbb{P}^1) \oplus \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*_Z.$$

Corollaire 1.4.1. On a :

$$\overline{\partial}\mathcal{R}(\mathbb{P}^1) = \mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp$$

Démonstration du corollaire 1.4.1. Soit Z un triplet de points de $\mathbb{P}^1$. Soit $u \in \mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp$. D'après le théorème 1.4.8, on peut écrire

$$u = \overline{\partial} q + u'$$

où $q \in \mathcal{R}(\mathbb{P}^1)$ et $u' \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ a un support inclus dans Z. Comme u et $\overline{\partial} q$ appartiennent à $\mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp$, on a aussi $u' \in \mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp$. En considérant les champs de vecteurs de la forme $\xi = P(z)\frac{d}{dz}$, où P décrit les polynômes de degré 2 s'annulant en exactement deux points de Z, on vérifie alors que $u' = 0$, ce qui montre que $\mathcal{H}(\mathbb{P}^1)^\perp \subset \overline{\partial}\mathcal{R}(\mathbb{P}^1)$. □

Démonstration du théorème 1.4.8. Soit $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$. On a vu que l'on ne perd pas de généralité à écrire u sous la forme $u = \alpha \otimes \mu$, où μ est une mesure de Radon complexe et α une $(1,0)$-forme différentielle continue. De plus, quitte à écrire μ comme une somme de deux mesures de Radon μ_1 et μ_2 et à traiter séparément $\alpha \otimes \mu_1$ et $\alpha \otimes \mu_2$, on ne perd pas non plus de généralité à supposer que le support de μ est disjoint d'au moins un point de Z.

Pour $y \in \mathbb{P}^1$, notons ϕ_y l'unique différentielle quadratique à pôles simples et inclus dans $Z \cup \{y\}$, telle que l'application

$$\begin{aligned} T_y\mathbb{P}^1 &\to \mathbb{C} \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathrm{Res}(\phi_y \cdot \mathbf{v}, y) \end{aligned}$$

coïncide avec α_y en tant qu'élément de $T_y^*\mathbb{P}^1$. L'existence et l'unicité d'une telle différentielle quadratique est une conséquence du fait que l'espace des différentielles quadratiques élémentaires à pôles dans $Z \cup \{y\}$ est une droite vectorielle de dimension complexe un, et qu'une différentielle quadratique méromorphe sur $\mathbb{P}^1$ avec exactement trois pôles tous simples est nulle. Soit q la différentielle quadratique définie par :

$$q = \int_{\mathbb{P}^1} \phi_y d\nu(y).$$

Nous allons maintenant travailler dans une coordonnées affine z dans laquelle $Z = \{0, 1, \infty\}$, où ∞ n'est pas dans le support de ν. Soit $\alpha = a(z)dz$ l'expression de la forme différentielle α dans la coordonnée z : a est une fonction continue sur $\mathbb{C}$. Dans ces coordonnées, l'expression de q est :

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{P}^1} a(y) \left(\frac{1}{z-y} + \frac{y-1}{z} - \frac{y}{z-1} \right) d\nu(y) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{P}^1} a(y) \frac{y(y-1)}{z(z-1)(z-y)} d\nu(y). \end{aligned}$$

L'expression de la première ligne montre que q est intégrable sur tout compact de $\mathbb{C}$, et la seconde que q est intégrable au voisinage de l'infini (puisque q est méromorphe au voisinage de l'infini, et que $q(z) = O(\frac{1}{z^3})$, ce qui implique que q n'a au pire qu'un pôle simple à l'infini). Donc q est intégrable sur $\mathbb{P}^1$.

La fin de la preuve du théorème repose sur le lemme :

Lemme 1.4.9. *La différentielle quadratique q est régulière et $\overline{\partial} q - u$ a un support inclus dans Z.*

Démonstration du lemme. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme, et notons K le support de la mesure ν.

On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}^1} q\cdot\overline{\partial}\xi &= \int_{\mathbb{P}^1}\left(\int_K \phi_y d\nu(y)\right)\cdot\overline{\partial}\xi\\ &= \int_K\left(\int_{\mathbb{P}^1}\phi_y\cdot\overline{\partial}\xi\right)d\nu(y)\\ &= \int_K\left(2i\pi\sum_{Z\cup\{y\}}\mathrm{Res}(\phi_y\cdot\xi)\right)d\nu(y)\\ &= \int_K\alpha(y)\xi(y)d\nu(y)+\int_K\left(2i\pi\sum_Z\mathrm{Res}(\phi_y\cdot\xi)\right)d\nu(y).\end{aligned}$$

Soit $u'\in\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ définie par :

$$\langle u',\xi\rangle = 2i\pi\sum_{z\in Z}\int_K\mathrm{Res}(\phi_y\cdot\xi,z)d\nu(y)$$

Clairement u' a un support inclus dans Z. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}^1} q\cdot\overline{\partial}\xi &= \int_K\alpha(\xi)(y)d\nu(y)+\langle u',\xi\rangle\\ &= \langle\alpha\otimes\nu,\xi\rangle+\langle u',\xi\rangle.\end{aligned}$$

Donc q est régulière, et $\overline{\partial}q = u+u'$ où u' a un support inclus dans Z, ce qui achève la preuve du lemme. □

Le lemme ci-dessus montre que $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^* = \overline{\partial}\mathcal{R}(\mathbb{P}^1)+\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*_Z$. Il ne reste donc qu'à montrer que la somme est directe. Mais si q est une différentielle quadratique régulière telle que $\overline{\partial}q$ ait un support inclus dans le triplet Z, ceci impliquerait que q est holomorphe en dehors de Z et intégrable, et donc que q ait au plus trois pôles tous simples. Donc $q=0$, et on a bien $\overline{\partial}\mathcal{R}(\mathbb{P}^1)\oplus\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*_Z$. □

Proposition 1.4.10. Soit q une différentielle quadratique régulière et f une fraction rationnelle. Alors f_*q est régulière.

Démonstration. Soit q une différentielle quadratique régulière : on peut supposer que $\overline{\partial}q=\alpha\otimes\nu$. Soit Z un triplet de points quelconque de $\mathbb{P}^1$. Le lemme 1.4.9 donne :

$$q=\int_{\mathbb{P}^1}\phi_y d\nu(y)$$

où ϕ_y est une différentielle quadratique élémentaire à pôles dans $Z\cup\{y\}$. On en déduit :

$$f_*q=\int_{\mathbb{P}^1} f_*\phi_y d\nu(y)$$

Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{P}^1} f_*q\cdot\overline{\partial}\xi &= \int_{\mathbb{P}^1}\left(\int_{\mathbb{P}^1} f_*\phi_y d\nu(y)\right)\cdot\overline{\partial}\xi\\ &= \int_{\mathbb{P}^1}\left(\int_{\mathbb{P}^1} f_*\phi_y\cdot\overline{\partial}\xi\right)d\nu(y)\\ &= \int_{\mathbb{P}^1}\left(2i\pi\sum_{z\in Z\cup\{y\}}\mathrm{Res}(f_*\phi_y\cdot\xi,z)\right)d\nu(y).\end{aligned}$$

La dernière expression définit bien une forme linéaire continue. □

Proposition 1.4.11. Soit q une différentielle quadratique régulière, et f une fraction rationnelle. Supposons que $f_*\overline{\partial}q$ et $\overline{\partial}f_*q$ soient bien définies comme éléments de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$. Alors supp $(\overline{\partial}f_*q - f_*\overline{\partial}q) \subset V_f$.

Démonstration. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme qui s'annule sur un voisinage de V_f. Alors $f^*\xi$ est encore un champ de vecteur quasiconforme (nul au voisinage de Crit(f)) et $\overline{\partial}f^*\xi = f^*\overline{\partial}\xi$. Donc :

$$\langle \overline{\partial}f_*q, \xi\rangle = \langle f_*\overline{\partial}q, \xi\rangle,$$

et donc $\langle f_*\overline{\partial}q - \overline{\partial}f_*q, \xi\rangle = 0$. D'où le résultat par définition du support d'un élément de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$. □

Nous allons maintenant énoncer et prouver un théorème dû à Makienko, qui servira à prouver l'absence de différentielles quadratiques régulières invariantes.

Définition 1.4.12. Un compact $K \subset \mathbb{P}^1$ est appelé un C-compact s'il vérifie la propriété suivante : toute fonction continue sur K peut être approchée uniformément par des restrictions à K de fonctions holomorphes sur un voisinage de K.

Notons qu'un C-compact doit nécessairement être d'intérieur vide. La proposition suivante (voir [Mak10]) donne plusieurs conditions suffisantes pour qu'un compact soit un C-compact. Sa preuve est basée sur le théorème de Vitushkin.

Proposition 1.4.13. Soit K un compact de $\mathbb{P}^1$. Chacune des propriétés suivantes implique que K est un C-compact :

i) K est de mesure de Lebesgue nulle.
ii) K est inclus dans une union finie de frontières de composantes de $\mathbb{P}^1 - K$.

Un C-compact doit nécessairement être d'intérieur vide, mais peut avoir une mesure de Lebesgue positive (le théorème suivant est d'ailleurs vide lorsque ce n'est pas le cas). Il s'appliquera donc typiquement dans le cas *ii)* de la proposition ci-dessus.

Théorème 1.4.14 (Makienko, [Mak10])**.** *Soit K un C-compact, et q une différentielle quadratique régulière à support dans K. Alors $q = 0$ (Lebesgue presque partout).*

Démonstration. Soit q une différentielle quadratique régulière à support dans un C-compact K. Nous allons prouver que $\overline{\partial}q = 0$ en tant qu'élément de $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$. Par définition d'un C-compact, les champs de vecteurs continus sur K peuvent être approchés uniformément sur K par des champs de vecteurs holomorphes au voisinage de K. Comme le support de $\overline{\partial}q$ est inclus dans K, il suffit de prouver que $\overline{\partial}q$ annule tous les champs de vecteurs lisses et holomorphes au voisinage de K. Soit ξ un tel champ de vecteur, et soit U un voisinage de K sur lequel ξ est holomorphe. On a :

$$\langle \overline{\partial}q, \xi\rangle = \int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \overline{\partial}\xi$$
$$\langle \overline{\partial}q, \xi\rangle = \int_{U} q \cdot \overline{\partial}\xi + \int_{\mathbb{P}^1 - U} q \cdot \overline{\partial}\xi$$

Comme le support de q est inclus dans K, on a $\int_{\mathbb{P}^1-U} q\cdot\overline{\partial}\xi = 0$. Comme ξ est holomorphe sur U, on a $\int_U q\cdot\overline{\partial}\xi = 0$. Donc $\overline{\partial}q, \xi\rangle = 0$ et donc $\overline{\partial}q = 0$. Donc q est holomorphe sur $\mathbb{P}^1$ tout entière, et donc $q = 0$. □

1.4.1 Calculs de poussé en avant

Soit ν une mesure de Radon, et α une $(1,0)$-forme différentielle. Supposons que $f_*(\alpha \otimes \nu)$ existe : on sait alors que $f_*(\alpha \otimes \nu)$ peut s'écrire sous la forme $\beta \otimes \lambda$, avec $\beta \in \Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1)$ et $\lambda \in \mathcal{M}$. Dans cette section, nous allons calculer β et λ en fonction de α, ν et f. Ce calcul est une adaptation du cadre classique du poussé en avant $f_*(h\nu)$ d'une mesure $h\nu$ à densité par rapport à ν (où h est alors une fonction et non pas une forme différentielle).

En particulier, nous verrons que sous une certaine condition sur la mesure ν, λ sera à densité par rapport à ν.

Commençons par rappeler la notion de jacobien d'une mesure. Cette notion peut se définir dans un cadre plus général, mais dans un souci de simplicité nous donnerons des définitions correspondant au cadre qui nous intéresse.

Définition 1.4.15. Soit ν une mesure de Radon sur un compact K, et $f : K \to K$ une application continue n'ayant jamais plus de d préimages. On définit la mesure tiré en arrière $f^*\nu$ par : pour tout $\phi \in C^0(K)$,

$$\int_K \phi d(f^*\nu) = \int_K (f_*\phi) d\nu = \int_K \sum_{y \in f^{-1}(z)} \phi(y) d\nu(z)$$

Lemme 1.4.16. *Si A est un borélien sur lequel $f_{|A}$ est injective, alors $f^*\nu(A) = \nu(f(A))$.*

Démonstration. Soit A un tel borélien. On a :

$$f^*\nu(A) = \int \sum_{y \in f^{-1}(x)} \mathbb{1}_A(y) d\nu(x) = \nu(f(A)).$$

La dernière égalité vient du fait que si $x \notin f(A)$, alors $\sum_{y \in f^{-1}(x)} \mathbb{1}_A(y) = 0$ et si $x \in A$, alors par injectivité de f sur A, il n'y a qu'une seule préimage $y \in A$ et donc $\sum_{y \in f^{-1}(x)} \mathbb{1}_A(y) = 1$. □

Le cas qui nous intéresse est lorsque f est une fraction rationnelle de degré d et K est un compact invariant de $\mathbb{P}^1$.

Définition 1.4.17. Soit ν une mesure de Radon sur $\mathbb{P}^1$, de support K invariant par f. On dit que ν est régulière pour f si pour tout borélien $A \subset K$, $\nu(A) = 0$ implique que $\nu(f(A)) = 0$.

De manière équivalente, d'après le lemme 1.4.16, une mesure ν est régulière si et seulement si $f^*\nu$ est absolument continue par rapport à ν.

Définition 1.4.18. Soit ν une mesure régulière par rapport à f sur K. On définit son jacobien (noté J_ν) par rapport à f par :

$$J_\nu = \frac{d(f^*\nu)}{d\nu}$$

(au sens de Radon-Nykodim).

Exemple 1.4.19. Si $K = \{0\}$ est un point fixe de f, alors la mesure $\nu = \delta_0$ (dirac en 0) est régulière pour f sur K et son jacobien est la fonction $J_\nu : 0 \mapsto 1$.

Si $K = S^1$, que $f(z) = z^d$ et que ν est la mesure de Lebesgue, alors ν est régulière et $J_\nu = d$.

Dans toute la suite, ν désignera une mesure régulière pour f sur K.

Définition 1.4.20. On définit l'opérateur de Ruelle (ou opérateur de transfert) associé à ν par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu : L^1(\nu) &\to L^1(\nu) \\ g &\mapsto \left(x \mapsto \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{g(y)}{J_\nu(y)} \right) \end{aligned}$$

Insistons sur le fait que l'opérateur $\mathcal{L}_\nu$ agit sur un espace de fonctions (qui sont en réalité des fonctions densités pour la mesure ν). Son intérêt est justifié par la propriété suivante :

Proposition 1.4.21. Soit $g \in L^1(\nu)$. Alors $f_*(g\nu) = \mathcal{L}_\nu(g)\nu$. En particuliers, si ν est invariante, alors $\mathcal{L}_\nu(1) = 1$.

Démonstration. Soit h une fonction continue sur K. Nous allons montrer que :

$$\int h\mathcal{L}_\nu(g)d\nu = \int hf_*(g\nu).$$

On a :

$$\begin{aligned}\int h\mathcal{L}_\nu(g)d\nu &= \int h(x) \sum_{y\in f^{-1}(x)} \frac{g(y)}{J_\nu(y)} d\nu(x) \\ &= \int \sum_{y\in f^{-1}(x)} \frac{h(f(y))g(y)}{J_\nu(y)} d\nu(x) \\ &= \int \frac{h(f(x))g(x)}{J_\nu(x)} J_\nu(x)d\nu(x) \\ &= \int hf_*(g\nu).\end{aligned}$$

Dans l'avant dernière égalité, on a utilisé la définition de J_ν, à savoir que

$$\int \sum_{y\in f^{-1}(x)} \phi(y)d\nu(x) = \int \phi(x)J_\nu(x)d\nu(x)$$

pour toute fonction $\phi \in L^1(\nu)$.

Pour le reste de la proposition : le fait que $\mathcal{L}_\nu(1) = 1$ quand $f_*\nu = \nu$ est un cas particuliers du résultat que l'on vient de démontrer. □

Définition 1.4.22. On définit l'opérateur de Ruelle modifié associé à ν par :

$$\tilde{\mathcal{L}}_\nu : \alpha \mapsto \sum_i \frac{g_i^*\alpha}{J_\nu \circ g_i} = \sum_i \frac{g_i^*\alpha}{g_i^* J_\nu}$$

pour tout $\alpha \in \Omega^{1,0}(\mathbb{P}^1)$, où les g_i sont les branches inverses de f.

En coordonnées,

$$\tilde{\mathcal{L}}_\nu : \alpha \mapsto \left(x \mapsto \sum_{y\in f^{-1}(x)} \frac{\alpha(y)}{J_\nu(y)f'(y)} \right).$$

Insistons sur la différence entre l'opérateur de Ruelle $\mathcal{L}_\nu$ et l'opérateur de Ruelle modifié $\tilde{\mathcal{L}}_\nu$: le premier est un opérateur sur un espace de fonctions, et l'autre sur un espace de $(1,0)$-formes différentielles.

Proposition 1.4.23. Soit $u = \alpha \otimes \nu \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$, et f une fraction rationnelle. Supposons que f_*u existe et que ν est régulière pour f. Alors

$$f_*u = \tilde{\mathcal{L}}_\nu(\alpha) \otimes \nu.$$

Démonstration. Soit X un champ de vecteur continu. On a :

$$\begin{aligned}\langle f_*u, X\rangle &= \int_K \alpha(f^*X)d\nu \\ &= \int_K \alpha(y)\frac{X\circ f(y)}{f'(y)}d\nu(y) \\ &= \int_K \alpha(y)\frac{X\circ f(y)}{f'(y)}d\nu(y) \\ &= \int_K \mathcal{L}_\nu\left(\frac{\alpha}{f'}\right)Xd\nu(y) \\ &= \int_K \tilde{\mathcal{L}}_\nu(\alpha)Xd\nu(y) \\ &= \langle\tilde{\mathcal{L}}_\nu(\alpha)\otimes\nu, X\rangle.\end{aligned}$$

□

Rappelons qu'un compact K invariant est dit hyperbolique de constante $A > 1$, s'il existe une métrique pour laquelle pour tout $z \in K$, $\|Df^n(z)\| \geq A^n$.

Proposition 1.4.24. Soit ν une mesure de Radon régulière pour f, de support K hyperbolique invariant, et $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ de la forme $u = \alpha\otimes\nu$. Il existe une unique solution v à l'équation cohomologique

$$\nabla_f v = u$$

et elle est de la forme $v = \beta\otimes\lambda$ où $\lambda \in \mathcal{M}$ est absolument continue par rapport à ν.

Démonstration. Commençons par remarquer que comme K est hyperbolique, il ne contient pas de point critique et donc les poussés en avant $f_*^n u$ sont bien définis. Soit $A = \frac{1}{\lambda} > 1$ une constante d'hyperbolicité pour K, et $\|\cdot\|$ une métrique associée. On a donc :

$$\sup_K \|(f^n)^*X\| \leq \lambda^n \sup_K \|X\|$$

et donc par dualité, $\|f_*^n u\| \leq \lambda^n\|u\|$. Donc la série $v = \sum_{n\geq 0} f_*^n u$ converge normalement, et il est facile de vérifier que c'est l'unique solution de l'équation cohomologique.

Par ailleurs, la formule de la proposition 1.4.23 montre que v est de la forme $\beta\otimes\nu$, où β est une forme différentielle (pas nécessairement continue). □

1.5 Formes de Beltrami et théorème d'Ahlfors-Bers

Jusqu'à présent, les objets que l'on a étudiés (différentielles de Beltrami, différentielles quadratiques, champs de vecteurs quasiconformes) correspondent à la théorie infinitésimale des espaces de Teichmüller, comme on le verra dans le chapitre suivant. Leur étude relève de l'analyse fonctionnelle linéaire.

Par opposition, les objets au coeur de cette section, à savoir les formes de Beltrami, vont relever de l'analyse non-linéaire. Il convient de penser aux *différentielles* de Beltrami comme à des vecteurs tangents à l'ouvert des *formes* de Beltrami, même si ces deux types d'objets vivent dans le même espace. Nous allons maintenant mentionner sans preuve le théorème fondamental à la base de la théorie de Teichmüller, à savoir le théorème d'Ahlfors-Bers.

Définition 1.5.1. Un homéomorphisme quasiconforme $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est un homéomorphisme dont les dérivées $\partial\phi$ et $\overline{\partial}\phi$ (au sens des distributions) sont L^2_{loc}, tel que la forme de Beltrami

associée $\mu = \partial\phi^{-1} \circ \overline{\partial}\phi$ soit dans la boule unité de L^∞. On notera $K(\phi)$ sa *dilatation maximale*, définie par :

$$K(\phi) = \frac{1 + \|\mu\|_{L^\infty}}{1 - \|\mu\|_{L^\infty}} \geq 1.$$

Remarque 1.5.2. En coordonnées, $\mu = \frac{\overline{\partial}\phi(z)}{\partial\phi(z)} \frac{d\bar{z}}{dz}$.

En particulier, si ϕ est un homéomorphisme quasiconforme, alors $K(\phi) = 1$ équivaut à $\mu = 0$ et donc au fait que ϕ soit une transformation de Möbius.

Il existe d'autres caractérisations équivalentes de la quasiconformité, que nous ne mentionnerons pas ici. Cette classe de fonctions possède des propriétés analytiques particulières, et a été beaucoup étudiée. Mentionnons par exemple le fait qu'un homéomorphisme quasiconforme est $\frac{1}{K}$-Hölder.

Définition 1.5.3. Soit μ une forme de Beltrami. L'équation de Laplace-Beltrami, d'inconnue un homéomorphisme quasiconforme $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, est :

$$\overline{\partial}\phi = \mu \circ \partial\phi.$$

Théorème 1.5.4 (Morrey-Ahlfors-Bers)**.** *Soit μ une forme de Beltrami. L'équation de Laplace-Beltrami admet une solution, qui est unique à post-composition par une transformation de Möbius près.*

De plus, si $\lambda \mapsto \mu_\lambda$ est une famille holomorphe (respectivement continue) de formes de Beltrami, et que ϕ_λ est l'unique solution de l'équation de Laplace-Beltrami de paramètre μ_λ normalisée pour fixer $0, 1, \infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{P}^1$, l'application $\lambda \mapsto \phi_\lambda(z)$ est holomorphe (respectivement continue).

Définition 1.5.5. Soit $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ une fonction holomorphe entre surfaces de Riemann, et μ une forme de Beltrami sur $\mathcal{S}_2$. On définit le tiré en arrière de μ par f de la façon suivante :

$$f^*\mu(z) := \mu \circ f(z) \frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}.$$

On vérifie sans peine que cette définition est indépendante des coordonnées. En particulier, l'opérateur de tiré en arrière (par une application holomorphe) est une isométrie pour la norme L^∞.

La proposition suivante est une observation cruciale : elle permet de traduire la condition qu'un homéomorphisme quasiconforme ϕ conjugue une fraction rationnelle à une autre fraction rationnelle en une condition *linéaire* et fermée sur la forme de Beltrami correspondante.

Proposition 1.5.6. Soit $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ une fraction rationnelle, et μ une forme de Beltrami sur $\mathbb{P}^1$. Soit ϕ un homéomorphisme quasiconforme dont la forme de Beltrami est μ. Alors l'application $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est une fraction rationnelle si et seulement si $\mu = f^*\mu$.

Pour éviter de travailler en quotientant par l'action du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ des transformations de Möbius (qui présente le désavantage de ne pas toujours donner des espaces réguliers), on préfèrera souvent normaliser les solutions de l'équation de Laplace-Beltrami, d'où la convention suivante :

Définition 1.5.7. Soit $Z \subset \mathbb{P}^1$ un triplet de points. Un homéomorphisme quasiconforme $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est dit Z-normalisé si ϕ fixe Z point par point.

En d'autres termes, le théorème d'Ahlfors-Bers établit une bijection canonique entre formes de Beltrami et homéomorphismes quasiconformes (à composition par une transformation de Möbius près). Cette correspondance est à la base de la théorie de Teichmüller, puisqu'elle permet d'obtenir une structure complexe héritée de la structure complexe de la boule unité de L^∞, dans laquelle vivent les formes de Beltrami. La dépendance holomorphe par rapport au paramètre est également un point crucial. De plus, les formes de Beltrami sont des objets extrêmement maniables qui présentent deux grands avantages :

— Ils n'ont quasiment aucune contrainte de régularité (seulement d'être L^∞ et de norme strictement inférieure à 1), ce qui permet de les recoller sans problème
— Ils se tirent en arrière de manière isométrique par une fonction holomorphe.

Concluons ce chapitre en remarquant que le théorème d'Ahlfors-Bers est un résultat profond d'analyse en une variable complexe, qui ne se généralise pas de manière satisfaisante en dimension supérieure. Cette absence de généralisation explique la spécificité de la théorie de Teichmüller à la dimension un, et également (a posteriori) le fait que le théoreme de non-errance de Sullivan (voir le théorème 2.4.28 et le chapitre 3) ne se généralise pas en dimension supérieure.

Chapitre 2

Espaces de déformation d'Epstein et de Teichmüller

Nous allons appliquer dans ce chapitre l'étude analytique du chapitre précédent à des questions dynamiques. De manière générale, on étudiera de manière infinitésimale l'espace des déformations d'un système dynamique f à l'aide de théorie de Teichmüller. Les résultats les plus importants de ce chapitre sont le théorème 2.4.38, qui porte sur la construction de l'espace de Teichmüller Teich(f), le théorème 2.4.2.4 qui affirme que Teich(f) s'immerge dans les fractions rationnelles, et les théorèmes 2.6.2 et 2.6.5 qui en sont des conséquences. Nous redonnons également une preuve rapide du théorème de Sullivan sur la non-existence de domaines errants pour les fractions rationnelles en dimension un (théorème 2.4.28). L'objet du chapitre suivant sera de construire des contre-exemples à ce théorème en dimension supérieure.

2.1 Rappels de dynamique complexe en dimension un

Le lecteur est supposé être familier avec les bases de la dynamique complexe en dimension un. Nous rappellerons cependant ici quelques notions et résultats fondamentaux que l'on utilisera de manière répétée par la suite. Nous renvoyons le lecteur à [Mil06] ou [CG93] pour une introduction à la dynamique complexe en dimension un, et pour les preuves de tous les résultats énoncés dans cette section.

Définition 2.1.1. Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. On définit l'ensemble de Fatou $\mathcal{F}(f)$ comme le plus grand ouvert sur lequel la famille des itérées de f forme une famille normale. Une composante de Fatou est une composante connexe de l'ensemble de Fatou. L'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$ est son complémentaire.

Théorème 2.1.2. *L'ensemble de Julia est un compact non vide et complètement invariant (c'est-à-dire que $\mathcal{J}(f) = f^{-1}(\mathcal{J}(f))$. Il est soit d'intérieur vide, soit la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$ toute entière.*

Le théorème suivant est une description importante de l'ensemble de Julia :

Théorème 2.1.3. *L'ensemble de Julia est exactement l'adhérence des cycles répulsifs de f.*

En fait, les cycles répulsifs constituent la très grande majorité des points périodiques :

Théorème 2.1.4 (Inégalité de Fatou-Shishikura)**.** *Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. Il existe au plus $2d-2$ cycles non répulsifs.*

Théorème 2.1.5. *Si une composante de Fatou U est complètement invariante, alors l'ensemble de Julia est exactement la frontière de U.*

Proposition 2.1.6. On suppose ici que f est un polynôme. Alors le bassin d'attraction de l'infini est une composante de Fatou complètement invariante.

Définition 2.1.7. Soit U une composante de Fatou invariante.
- On dit que U est une composante de Fatou attractive s'il existe un point fixe $z_0 \in U$ de multiplicateur de module strictement compris entre 0 et 1.
- On dit que U est une composante de Fatou superattractive s'il existe un point fixe $z_0 \in U$ de multiplicateur nul.
- On dit que U est un une composante de Fatou parabolique si la frontière de U contient un point fixe de multiplicateur égal à 1.
- On dit que U est un disque de Siegel si U est simplement connexe et que $f_{|U} : U \to U$ est holomorphiquement conjuguée à une rotation d'angle irrationnel.
- On dit que U est un anneau de Herman si U est un anneau de module fini et que $f_{|U} : U \to U$ est holomorphiquement conjuguée à une rotation d'angle irrationnel.

Dans le cas d'une composante attractive, tout point de U converge vers le point fixe par itération de f. De plus, il existe une coordonnée holomorphe définie au voisinage du point fixe z_0 qui conjugue la dynamique à la multiplication par $\lambda \in \Delta$, où λ est le multiplicateur de z_0.

De même, tout point de U converge vers z_0 dans le cas superattractif et parabolique. Dans le cas superattractif, la forme normale holomorphe près de z_0 est donnée par $z \mapsto z^k$, pour un certain $k \geq 2$. Le cas parabolique est plus subtil, et nous y reviendrons plus en détail dans le chapitre suivant. Il existe des coordonnées holomorphes (appelées coordonnées de Fatou) qui conjuguent la dynamique à la translation de un sur un voisinage de z_0 intersecté avec U (mais pas sur un voisinage complet de z_0).

Enfin, mentionnons le fait que toute composante attractive ou parabolique contient toujours au moins une orbite critique.

Théorème 2.1.8 (Classification des composantes de Fatou invariantes, Fatou)**.** *Soit U une composante de Fatou invariante. Alors U est de l'un des types suivants : attractive, superattractive, parabolique, un anneau de Herman ou un disque de Siegel. De plus, pour chacune de ces possibilités, il existe une fraction rationnelle ayant une telle composante de Fatou.*

Le théorème suivant ([Sul85]) est un résultat fondamental. Nous en donnerons une preuve auto-contenue (voir théorème 2.4.28) qui s'inspire fortement de la présentation de McMullen dans les notes [McM14]. En conjonction avec le théorème de classification précédent , il permet d'obtenir une description complète et très explicite de la dynamique possible dans l'ensemble de Fatou d'une fraction rationnelle en dimension complexe un.

Théorème 2.1.9 (Pas de domaine errant, Sullivan [Sul85])**.** *Soit f une fraction rationnelle. Toute composante de Fatou de f est prépériodique.*

Définition 2.1.10. Un exemple de Lattès est une fraction rationnelle f telle qu'il existe un revêtement ramifié holomorphe de degré fini $\phi : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1$ de la sphère par un tore complexe $\mathbb{C}/\Lambda$ et un endomorphisme affine $\tilde{f} : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C}/\Lambda \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Les exemples de Lattès forment une famille bien comprise d'exceptions à plusieurs résultats. Leur ensemble de Julia est toute la sphère, mais certaines d'entre elles possèdent un paramètre complexe de déformation puisqu'elles possèdent un champ de droite invariant (voir la définition ci dessous et le théorème 2.4.24). Dans ce cas, on parle alors d'*exemples de Lattès flexibles*. Nous renvoyons le lecteur à [Mil06] pour une discussion détaillée des exemples de Lattès.

Les exemples de Lattès flexibles sont également les seules fractions rationnelles qui admettent des différentielles quadratiques rationnelles intégrables invariantes (voir proposition 2.3.2).

Définition 2.1.11. Un champ de droites invariant est une forme de Beltrami invariante par f dont le support est inclus dans l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$.

La conjecture suivante est centrale en dynamique complexe. Elle est équivalente à la généricité de l'hyperbolicité pour les fractions rationnelles.

Conjecture 2.1.12 (Pas de champs de droite invariants, McMullen)**.** Les exemples de Lattès flexibles sont les seules fractions rationnelles ayant un champ de droites invariant.

Notons que l'existence de champs de droites invariants implique que l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$ est de mesure de Lebesgue positive. Lorsque $\mathcal{J}(f)$ n'est pas $\mathbb{P}^1$ toute entière, $\mathcal{J}(f)$ est d'intérieur vide et la question de savoir si dans ce cas $\mathcal{J}(f)$ pouvait avoir une mesure de Lebesgue positive est longtemps restée ouverte. On sait maintenant que la réponse à cette question est oui : il existe même des polynômes quadratiques dont l'ensemble de Julia a une mesure de Lebesgue positive, d'après un théorème dû à X. Buff et A. Chéritat ([BC12]).

Définition 2.1.13. Soit f une fraction rationnelle. On notera C_f l'ensemble des points critiques de f, et $V_f = f(C_f)$ l'ensemble de ses valeurs critiques.

2.2 Divergences invariantes

Définition 2.2.1. Soit $K \subset \mathbb{P}^1$ un compact de mesure de Lebesgue nulle. Notons $\mathcal{D}(K)$ l'espace des différentielles quadratiques méromorphes sur $\mathbb{P}^1 - K$ avec un nombre fini de pôles dans $\mathbb{P}^1 - K$ qui sont tous simples, quotienté par le sous-espace des différentielles quadratiques intégrables. On appelle $\mathcal{D}(K)$ l'espace des divergences le long de K.

Soit f une fraction rationnelle ; supposons que $K = f(K)$. Alors l'opérateur de poussé en avant f_* passe au quotient et définit un endomorphisme linéaire (que l'on notera encore f_*) de $\mathcal{D}(K)$.

Définition 2.2.2. Soit une fraction rationnelle f et K un compact invariant. On note $\mathcal{D}_f(K)$ l'espace des divergences invariantes le long de K, c'est-à-dire l'espace des points fixes de $f_* : \mathcal{D}(K) \to \mathcal{D}(K)$.

Remarque 2.2.3. L'opérateur $\nabla_f = \mathrm{Id} - f_*$ induit une application linéaire naturelle de $\mathcal{D}_f(K)$ dans $Q(K \cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$. C'est un point essentiel, puisque l'on verra que $Q(K \cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$ représente, dans un certain sens, le plan cotangent aux mouvements holomorphes dynamiques de K.

Si q est une différentielle quadratique méromorphe en dehors de K et ayant un nombre fini de pôles, tous simples, en dehors de K, alors on notera $[q]_K$ sa classe de divergence le long de K.

Supposons maintenant que $K \subset \mathbb{C}$, comme ce sera le cas concrètement lorsque l'on travaillera en coordonnées. Soit q une différentielle quadratique holomorphe en dehors de K, ayant un pôle au plus triple à l'infini. A priori, on ne peut pas parler de la divergence de q le long de K à cause de ce pôle triple. Cependant, il existe une manière canonique d'associer à q une divergence le long de K bien définie. En effet, si l'on fixe un triplet $Z \subset \mathbb{C}$ arbitraire, il est facile de voir que l'on peut trouver une unique différentielle quadratique q_Z telle que :

— q_Z est holomorphe en dehors de $Z \cup \{\infty\}$
— q_Z a des pôles simples en Z
— $q_Z - q$ est holomorphe au voisinage de l'infini.

Ceci vient essentiellement du fait que les différentielles quadratiques $\frac{dz^2}{z-z_i}$, où $z_i \in Z$, sont linéairement indépendantes et ont un pôle triple à l'infini.

Définition 2.2.4. La différentielle quadratique $q - q_Z$ est appelée la Z-normalisation de q.

On définit alors la classe de divergence le long de K de q comme celle de sa Z-normalisation $q - q_Z$, et on la note encore $[q]_K$ ou $[q]$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Il est facile de voir que cette classe de divergence est indépendante du choix de triplet Z (puisque q_Z n'a que des pôles simples dans $\mathbb{C}$).

Exemple 2.2.5. Soit f une fraction rationnelle fixant 0 avec un multiplicateur non nul. Alors la divergence $\left[\frac{dz^2}{z^2}\right]_0$ est invariante. Cependant, si $f(z) = z^2$, alors $f_*\frac{dz^2}{z^2} = \frac{1}{2}\frac{dz^2}{z^2}$, et donc la divergence $\left[\frac{dz^2}{z^2}\right]_0$ n'est pas invariante. Nous verrons plus tard que cette divergence est en fait indépendante des coordonnées z utilisées dans sa définition.

Nous allons prouver le lemme suivant sur le pôle obtenu en poussé en avant une différentielle quadratique ayant un pôle double. On travaillera dans une coordonnée z ; on ne perd pas de généralité à supposer que y et $f(y)$ sont dans $\mathbb{C}$.

Lemme 2.2.6. *Soit une fraction rationnelle f, et et $y \in \mathbb{P}^1$ tel que $f(y) \notin V_f$. Soit z une coordonnée affine dans laquelle $y, f(y) \in \mathbb{C}$. Soit $q = \frac{dz^2}{(z-y)^2} + O_{z\to y}(1)$. Alors*

$$f_*q = \left(\frac{1}{(z-f(y))^2} - \frac{f''(y)}{f'(y)^2}\frac{1}{z-f(y)}\right)dz^2 + O_{z\to f(y)}(1).$$

Démonstration. Si q a un pôle double en y, alors f_*q a un pôle au plus double en $f(y)$. On peut donc écrire :

$$f_*q = \left(\frac{a}{(z-f(y))^2} + \frac{b}{z-f(y)}\right)dz^2 + O_{z\to f(y)}(1).$$

Il s'agit de calculer a et b. Pour cela, rappelons que si η est un champ de vecteur méromorphe au voisinage de y et $f(y)$, on a :

$$\mathrm{Res}(f_*q \cdot \eta, f(y)) = \mathrm{Res}(q \cdot f^*\eta, y). \tag{2.2.1}$$

Commençons par calculer a. Si l'on pose $\eta_a = (z - f(y))\frac{d}{dz}$, on a d'une part :

$$\mathrm{Res}(f_*q \cdot \eta_a, f(y)) = \mathrm{Res}\left(a\frac{dz}{(z-f(y))}, f(y)\right) = a.$$

D'autre part, d'après 2.2.1 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f_*q \cdot \eta_a, f(y)) &= \mathrm{Res}(q \cdot f^*\eta_a, y) \\
&= \mathrm{Res}\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2} \cdot \frac{z-f(y)}{f'(z)}\frac{d}{dz}, y\right) \\
&= \mathrm{Res}\left(\frac{f(z)-f(y)}{z-y}\frac{1}{f'(z)}\frac{dz}{z-y}, y\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc $a = 1$.

De même, posons $\eta_b = \frac{d}{dz}$. On a :

$$\mathrm{Res}(f_*q \cdot \eta_b, f(y)) = \mathrm{Res}\left(b\frac{dz}{z-f(y)}, f(y)\right) = b.$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f_*q \cdot \eta_b, f(y)) &= \mathrm{Res}(q \cdot f^*\eta_b, y) \\
&= \mathrm{Res}\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2} \cdot \frac{1}{f'(z)}\frac{d}{dz}, y\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{1}{f'(z)(z-y)^2} &= \frac{1}{(z-y)^2}\frac{1}{f'(y)+(z-y)f''(y)+o(z-y)}\\ &= \frac{1}{f'(y)(z-y)^2}\left(1-\frac{f''(y)}{f'(y)^2}(z-y)+o(z-y)\right)\\ &= \frac{1}{f'(y)(z-y)^2}-\frac{f''(y)}{f'(y)^2}\frac{1}{z-y}+O_{z\to y}(1).\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(q\cdot f^*\eta_b, f(y)) &= \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-y)^2}\cdot\frac{1}{f'(z)}dz, y\right)\\ &= -\frac{f''(y)}{f'(y)^2}=b.\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.7. Le coefficient $a=1$ est intrinsèque, et est un nombre indépendant du choix de coordonnée z. Par contre, le coefficient b dépend du choix de coordonnée.

2.3 Différentielles quadratiques invariantes

Les deux propositions suivantes sont classiques et sont des résultats fondamentaux, utilisés de manière cruciale par exemple pour construire les espaces de déformation d'Esptein.

Proposition 2.3.1. Soit q une différentielle quadratique rationnelle à pôles simples sur $\mathbb{P}^1$. Alors $\|f_*q\|\leq\|q\|$. De plus, il y a égalité si et seulement si

$$f^*f_*q=f_*f^*q=dq.$$

Proposition 2.3.2. Soit f une fraction rationnelle qui n'est pas un exemple de Lattès, et q une différentielle quadratique rationnelle à pôles simples sur $\mathbb{P}^1$. Alors $\nabla_f q=q-f_*q=0$ si et seulement si $q=0$.

Exemple 2.3.3. Soit $f_c(z)=z^2+c$, $c\in\mathbb{C}$, et q une différentielle quadratique rationnelle à pôles simples. Alors $\|q\|=\|f_*q\|$ si et seulement si $q(z)=q(-z)$ pour tout $z\in\mathbb{P}^1$. Cependant, comme aucun polynôme ne peut être un exemple de Lattès, on a toujours $q\neq f_*q$.

On verra cependant plus tard qu'il existe des polynômes quadratiques f et des différentielles quadratiques rationnelles intégrables q de norme unitaire, telles que $q-f_*q$ soit de norme arbitrairement petite.

Nous allons maintenant nous intéresser aux points fixes de l'opérateur de poussé en avant f_* sur différents espaces de différentielles quadratiques.

Définition 2.3.4. Soit f une fraction rationnelle. On notera Λ_f l'adhérence de la grande orbite critique de f, et $\Omega_f=\mathbb{P}^1-\Lambda_f$.

Définition 2.3.5. Un anneau de rotation pour f est une composante connexe de Ω_f qui est un anneau de module fini et sur laquelle f est conjuguée à une rotation irrationnelle.

Un cycle d'anneaux de rotation pour f de période p est une famille de composantes $(A,\dots,f^{p-1}(A))$ de Ω_f qui sont toutes des anneaux de rotation pour f^p.

Ces anneaux de rotations sont exactement les anneaux dans les disques de Siegel et les anneaux de Herman qui sont délimitées par des adhérences d'orbites critiques.

On peut associer à chaque anneau de rotation A une différentielle quadratique $q \in Q(\Omega_f)$ invariante par f de la manière suivante : soit ϕ une coordonnée linéarisante pour f sur A, qui redresse A sur un anneau droit $A_R = \{1 < |z| < R\}$. Soit $\tilde{q} \in Q(A_R)$: alors $q = \phi^*\tilde{q}$ est invariante par f si et seulement si $\tilde{q}$ est invariante par rotation. On vérifie sans problème que $\tilde{q} = \frac{dz^2}{z^2}$ est invariante par rotation ; de plus, $\tilde{q}$ est intégrable sur A_R. Donc $q = \phi^*\tilde{q}$ (étendue par 0 en dehors de A) est invariante et intégrable.

De plus, à une constante multiplicative près, c'est la seule : en effet, on peut développer tout élément de $Q(A_R)$ en série de Laurent :

$$\tilde{q} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n\right) dz^2$$

et l'invariante par rotation s'écrit $\tilde{q}(e^{i\alpha}z)e^{2i\alpha} = \tilde{q}(z)$, d'où l'on tire :

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\alpha} z^n e^{in\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

et donc $a_n = 0$ pour tout $n \neq -2$. En particulier, on voit qu'il n'existe pas de différentielle quadratique invariante par rotation intégrable au voisinage de 0.

Dans le cas d'un cycle d'anneaux de rotation $(A, \dots, f^p(A))$, le raisonnement précédent fournit une différentielle quadratique $q \in Q(A)$ invariante par f^p. On vérifie sans problème que $Q = \sum_{k=1}^{p} f_*^k q$ est invariante par f (et elle n'est pas nulle puisque les supports des $f_*^k q$ sont essentiellement disjoints).

La proposition suivante implique que ces points fixes sont les seuls parmi les différentielles quadratiques intégrables sur l'ensemble de Fatou. De plus, à part dans le cas où f est un exemple de Lattès flexible, la conjecture "pas de champs de droites invariants" impliquerait que ce sont les seules différentielles quadratiques invariantes.

Proposition 2.3.6. Les seules différentielles quadratiques invariantes par f dans $Q(\Omega_f)$ sont les exemples construits ci-dessus.

Démonstration. Soit $q \in Q(\Omega_f)$ une différentielle quadratique invarinte. Alors $|q|$ est une mesure invariante sur $\Omega_f \subset \mathcal{F}(f)$, à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit U une composante de Fatou périodique dont la grande orbite a une masse positive pour $|q|$. Alors U ne peut pas être une composante attractive, superattractive ou parabolique, puisque la seule mesure invariante sur la grande orbite d'une telle composante est une somme de diracs le long du cycle correspondant.

Il ne reste donc que la possibilité d'un disque de Siegel ou d'un anneau de Herman. Une telle composante de Fatou n'est jamais complètement invariante pour des raisons de degré local. Soit V une composante de $f^{-1}(U)$ qui ne fait pas partie du cycle de composantes auquel appartient U. L'invariance de q impose que $\int_{f^{-n}(V)} |q|$ soit égale à $\int_V |q|$; or les ouverts $f^{-n}(V)$ sont tous disjoints. Donc $\int_V |q| = 0$ puisqu'on a supposé q intégrable.

Ainsi, q s'annule partout sauf éventuellement sur un cycle de disques de Siegel ou d'anneaux de Herman. L'analyse précédente montre que les seules différentielles quadratiques invariantes intégrables que l'on peut obtenir sont alors celles associées à un cycle d'anneaux de rotation. □

Remarque 2.3.7. Dans le cas où l'ensemble de Julia a une mesure de Lebesgue positive, il se pourrait a priori qu'il existe des différentielles quadratiques intégrables invariantes supportées par l'ensemble de Julia. Cependant, si c'est le cas, alors l'opérateur dual du poussé en avant f_* sur les différentielles quadratiques intégrables, à savoir le tiré en arrière f^* sur les formes de Beltrami, a un point fixe μ tel que $\int_{\mathbb{P}^1} q \cdot \mu \neq 0$. Comme q est identiquement nulle sur Ω_f, ceci

implique que μ est un champ de droites invariant. A part dans le cas où f est un exemple de Lattès, cette situation est conjecturée être impossible, et l'on sait dans de nombreux cas qu'il n'y a effectivement pas de champs de droites invariants.

Théorème 2.3.8 (Makienko)**.** *Soit f une fraction rationnelle qui n'est pas un exemple de Lattès flexible, et K un C-compact invariant inclus dans son ensemble de Julia. Alors si $q \in Q(K)$ est régulière et invariante par f, et si q s'annule sur tout anneau de Herman éventuel de f, on a $q = 0$.*

Démonstration. Soit $q \in Q(K)$ régulière et invariante. La proposition 2.3.6 implique que le support de q doit être inclus dans l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$. Si $\mathcal{J}(f) \neq \mathbb{P}^1$, alors q doit s'annuler sur $\mathcal{J}(f) - K$ d'après le principe des zeros isolés. Comme K est un C-compact, le théorème 1.4.14 implique que $q = 0$.

Dans le cas où $\mathcal{J}(f) = \mathbb{P}^1$, si $q \in Q(K)$ est une différentielle quadratique intégrable invariante, alors ou bien q s'annule sur $\mathbb{P}^1 - K$ ou bien q a des zéros discrets dans $\mathbb{P}^1 - K$. Dans le premier cas, le théorème 1.4.14 implique encore que $q = 0$. Dans le second cas, $\frac{\overline{q}}{|q|}$ définit un champ de droite invariant, et q est holomorphe sur l'ouvert non vide $\mathbb{P}^1 - K \subset \mathcal{J}(f)$. Alors le lemme 3.16 (p. 49) de [McM94] implique que f est un exemple de Lattès flexible. □

Un cas particulier important de ce résultat est le cas polynômial :

Corollaire 2.3.1. Soit f un polynôme de degré $d \geq 2$. Alors si $q \in Q(\mathcal{J}_f)$ est invariante et régulière, on a $q = 0$.

Démonstration. D'après le principe du maximum, un polynôme ne peut pas avoir d'anneaux de Herman. De plus, l'ensemble de Julia est exactement la frontière du bassin d'attraction de l'infini qui est une composante connexe de $\mathbb{P}^1 - \mathcal{J}_f = \mathcal{F}_f$, donc d'après la proposition 1.4.13, $\mathcal{J}_f$ est un C-compact. □

2.4 Espace de Teichmüller

2.4.1 Espace de Teichmüller d'une surface

Nous rappelons ici les définitions et quelques propriétés fondamentales des espaces de Teichmüller de surfaces de Riemann. Nous référons le lecteur à [GL00] ou [Hub06] pour une introduction à la théorie des espaces de Teichmüller.

2.4.1.1 Définition

L'espace de Teichmüller d'une surface de Riemann $\mathcal{S}$ est une variété complexe (possiblement de dimension infinie) qui paramétrise les déformations quasiconformes de la structure complexe de $\mathcal{S}$.

Définition 2.4.1. Soit $\mathcal{S}$ une surface de Riemann hyperbolique. Soit $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ un homéomorphisme quasiconforme. On dit que ϕ est isotope à l'identité relativement à la frontière idéale de $\mathcal{S}$ s'il existe une isotopie $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ admettant un relèvement $(\Phi_t : \Delta \to \Delta)_{t\in[0,1]}$ tel que $\phi_1 = \phi$, $\phi_0 = \mathrm{Id}$, et pour tout $t \in [0,1]$, $\Phi_t(S^1) = S^1$.

Si $\mathcal{S}$ n'est pas hyperbolique, tout homémorphisme quasiconforme ϕ isotope à l'identité est isotope à l'identité relativement à la frontière idéale.

Définition 2.4.2. Notons :
- $\mathrm{Bel}(\mathcal{S})$ l'espace des formes de Beltrami sur $\mathcal{S}$
- $\mathrm{QC}(\mathcal{S})$ le groupe des homéomorphismes quasiconformes sur $\mathcal{S}$
- $\mathrm{QC}_0(\mathcal{S})$ le sous-groupe normal de $\mathrm{QC}(\mathcal{S})$ des éléments isotopes à l'identité relativement à la frontière idéale de $\mathcal{S}$

— $\mathrm{Mod}(\mathcal{S}) = \mathrm{QC}(\mathcal{S})/\mathrm{QC}_0(\mathcal{S})$ le groupe modulaire de $\mathcal{S}$.

Définition 2.4.3. L'espace de Teichmüller de $\mathcal{S}$, noté $\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$, est le quotient de $\mathrm{Bel}(\mathcal{S})$ par $\mathrm{QC}_0(\mathcal{S})$.

Théorème 2.4.4. *Il existe une unique structure complexe sur* $\mathrm{Teich}(f)$ *qui rende holomorphe la projection* $\pi : \mathrm{Bel}(\mathcal{S}) \to \mathrm{Teich}(\mathcal{S})$. *Pour cette structure complexe,* π *est une submersion scindée.*

Définition 2.4.5. Soit $\mathcal{S}$ une surface de Riemann. On note $N(\mathcal{S})$ le sous-espace des différentielles de Beltrami μ sur $\mathcal{S}$ telles que pour toute différentielle quadratique $q \in Q(\mathcal{S})$, $\int_{\mathcal{S}} q \cdot \mu = 0$.

Théorème 2.4.6. *Le plan tangent de* $\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$ *est donné par :*

$$T_0\mathrm{Teich}(\mathcal{S}) = \mathrm{bel}(\mathcal{S})/N(\mathcal{S}) \simeq Q(\mathcal{S})^*$$

Voir par exemple [GL00], théorème 6 p. 140.

En général, la dimension de $\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$ est infinie (en fait $\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$ est de dimension finie précisément lorsque $\mathcal{S}$ est de type fini, c'est-à-dire est obtenue à partir d'une surface de Riemann compacte en retirant un nombre fini de points). L'espace $Q(\mathcal{S})$ est réflexif si et seulement si il est de dimension finie, donc dans le cas d'une surface de Riemann de type fini (et seulement dans ce cas), on a $T_0^*\mathrm{Teich}(\mathcal{S}) \simeq Q(\mathcal{S})$. Cependant, on a toujours une injection isométrique naturelle $i : Q(\mathcal{S}) \to T_0^*\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$ par bidualité. Il convient donc de penser aux différentielles quadratiques comme à des formes linéaires sur des espaces de Teichmüller, voire à des différentielles de fonctions définies sur des espaces de Teichmüller. Nous verrons dans la suite de nombreux exemples.

Définition 2.4.7. La distance de Teichmüller est définie par :

$$d_T([\mu],[\nu]) = \inf \log K(\phi_\mu^{-1} \circ \phi_\nu),$$

où $[\mu]$ et $[\nu] \in \mathrm{Teich}(\mathcal{S})$ et l'infimum porte sur l'ensemble des homéomorphismes quasiconformes dont les formes de Beltrami sont des représentants respectifs de $[\mu]$ et $[\nu]$.

Cette distance a été beaucoup étudiée. On peut notamment montrer qu'il s'agit d'une métrique de Fincher complète, dont la forme infinitésimale coïncide avec la norme quotient déduite de L^∞. Il s'agit également de la métrique de Kobayashi de $\mathrm{Teich}(\mathcal{S})$.

2.4.1.2 Espaces de Teichmüller marqués et mouvement holomorphes

Définition 2.4.8. Soit $E \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble fermé contenant au moins 3 points. On définit $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ comme $\mathrm{Bel}(\mathbb{P}^1)$ quotienté par la relation d'isotopie relativement à E.

Exemple 2.4.9. L'espace $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$ s'identifie à $\mathrm{Bel}(\mathbb{P}^1)$. Si E est fini, $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ s'identifie à $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1 - E)$.

Théorème 2.4.10. *L'espace* $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ *s'identifie canoniquement à* $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1 - E) \times \mathrm{Bel}(E)$.

Voir [Eps93] ou [Mit00] pour une preuve. En particulier, si E a une mesure de Lebesgue nulle, alors $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1 - E)$.

Rappelons également la notion de mouvement holomorphe :

Définition 2.4.11. Soit $X \subset \mathbb{P}^1$. Un mouvement holomorphe de X paramétré par une variété complexe Λ est une application $h : X \times \Lambda \to \mathbb{P}^1$ tel que :

— Pour tout $x \in X$, l'application $h(x, \cdot) : \Lambda \to \mathbb{P}^1$ est holomorphe

— Pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $h(\cdot, \lambda) : X \to \mathbb{P}^1$ est injective

— Il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $h(\cdot, \lambda_0)$ est l'injection $X \to \mathbb{P}^1$.

Proposition 2.4.12. Soit $E \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble fermé contenant un ensemble Z de cardinal 3. On définit un mouvement holomorphe de E paramétré par $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ de la manière suivante :

$$h_E : E \times \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E) \to \mathbb{P}^1$$
$$(x, [\mu]) \mapsto \phi_\mu^Z(x)$$

où ϕ_μ^Z est un représentant quasiconforme de $[\mu]$ fixant Z point par point.

Ce mouvement holomorphe est en fait, à factorisation près, le seul mouvement holomorphe de E :

Théorème 2.4.13. *Soit E un ensemble fermé de $\mathbb{P}^1$, et $h : E \times \Lambda \to \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe. Alors il existe une unique application holomorphe $\phi : \Lambda \to \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$ envoyant le point base dans Λ sur le point base dans $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, E)$, tel que pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \Lambda$,*

$$h(x, \lambda) = h_E(x, \phi(\Lambda))$$

Voir [Mit00].

2.4.2 Espace de Teichmüller d'une fraction rationnelle

Nous allons maintenant présenter les espaces de Teichmüller de fractions rationnelles, dont la théorie est calquée sur celle des espaces de Teichmüller de surfaces. Cette notion d'espace de Teichmüller "dynamique" a été introduite par McMullen et Sullivan dans [MS98].

2.4.2.1 Définition

On notera Rat_d l'espace des fractions rationnelles complexes de degré d, et rat_d son quotient par l'action par conjugaison du groupe des transformations de Möbius. Si $f \in \mathrm{Rat}_d$, on note $\mathcal{O}(f)$ l'orbite de f pour l'action du groupe des transformations de Möbius : c'est une sous-variété de Rat_d de dimension 3.

Définition 2.4.14. Notons :
- $\mathrm{Bel}(f)$ l'espace des formes de Beltrami sur $\mathbb{P}^1$ invariante par f
- $\mathrm{QC}(f)$ le groupe des homéomorphismes quasiconformes sur $\mathbb{P}^1$ commutant avec f
- $\mathrm{QC}_0(f)$ le sous-groupe normal de $\mathrm{QC}(f)$ des éléments isotopes à l'identité via une isotopie uniformément quasiconforme dans $\mathrm{QC}(f)$
- $\mathrm{Mod}(f) = \mathrm{QC}(f)/\mathrm{QC}_0(f)$ le groupe modulaire de f.

Définition 2.4.15. L'espace de Teichmüller de $f \in \mathrm{Rat}_d$ est $\mathrm{Teich}(f) = \mathrm{Bel}(f)/\mathrm{QC}_0(f)$.

Nous allons redémontrer l'analogue des théorèmes 2.4.4 et 2.4.6 dans le contexte des espaces de Teichmüller dynamiques.

Comme dans le cas des espaces de Teichmüller de surfaces, il existe une métrique naturelle sur $\mathrm{Teich}(f)$:

Définition 2.4.16. On définit la (pré)distance de Teichmüller sur $\mathrm{Teich}(f)$ par :

$$d_T([\mu], [\nu]) = \inf \log K(\phi_\mu^{-1} \circ \phi_\nu)$$

où l'infimum porte sur les homéomorphismes quasiconformes ϕ_μ et ϕ_ν dont la forme de Beltrami associée est un représentant de $[\mu]$ et $[\nu]$ respectivement.

On vérifie aisément l'inégalité triangulaire et la symétrie pour cette prédistance. Le fait que d_T définisse bien une distance sera prouvé dans la proposition 2.4.37.

Définition 2.4.17. Soit $Z \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble de cardinal 3. Soit $\Psi^Z : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ l'application définie par $\Psi^Z(\mu) = \phi^Z_\mu \circ f \circ (\phi^Z_\mu)^{-1}$, où ϕ^Z_μ est l'unique homéomorphisme quasiconforme associé à $\mu \in \mathrm{Bel}(f)$, et qui fixe Z.

L'application Ψ^Z passe au quotient en une application $\Psi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{rat}_d$ indépendante de Z et en des applications $\Psi^Z_T : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ et $\Psi_T : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{rat}_d$ (également indépendante de Z).

2.4.2.2 Différentielle de Ψ^Z_T

Si $\lambda \mapsto f_\lambda$ est une courbe holomorphe dans Rat_d passant par $f_0 = f$, alors $\dot f = \frac{df_\lambda}{d\lambda}_{|\lambda=0}$ est une section du fibré $f^*T\mathbb{P}^1$, et $Df^{-1} \circ \dot f$ est un champ de vecteurs méromorphe sur $\mathbb{P}^1$, dont les pôles sont inclus dans $\mathrm{Crit}(f)$ et de multiplicité au plus celle des points critiques de f. En notant $T(f)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des tels champs de vecteurs, on obtient ainsi un isomorphisme canonique de $T_f\mathrm{Rat}_d$ dans $T(f)$. Dans toute la suite, on identifiera donc $T_f\mathrm{Rat}_d$ à $T(f)$.

On notera aussi $\mathrm{aut}(\mathbb{P}^1)$ l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{P}^1$ et $\mathcal{O}(f)$ l'ensemble des fractions rationnelles de degré d conjuguées à f par une transformation de Möbius. D'après [BE09], proposition 1, $\mathcal{O}(f)$ est une sous-variété de dimension complexe 3 de Rat_d, et $T_f\mathcal{O}(f) = \Delta_f\mathrm{aut}(\mathbb{P}^1) \subset T(f)$.

Proposition 2.4.18. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$ tel que $\overline\partial\xi \in \mathrm{bel}(f)$. Alors $\Delta_f\xi \in T(f)$. Si de plus on suppose que ξ s'annule sur un ensemble Z de cardinal 3, alors :

$$D\Psi^Z(0) \cdot \overline\partial\xi = -\Delta_f\xi.$$

Démonstration. Un calcul simple montre que pour presque tout $z \notin \mathrm{Crit}(f)$, $\overline\partial f^*\xi = f^*\overline\partial\xi$. Donc d'après le lemme de Weyl, $\Delta_f\xi = \xi - f^*\xi$ est holomorphe sur $\mathbb{P}^1 - \mathrm{Crit}(f)$. Comme ξ est continue, on a $\Delta_f\xi = O(1/f')$ au voisinage de $\mathrm{Crit}(f)$, donc $\Delta_f\xi$ a en tout point critique c de f un pôle d'ordre au plus la multiplicité de c comme point critique de f ; donc $\Delta_f\xi \in T(f)$.

Par ailleurs, si $\mu_\lambda \in \mathrm{bel}(f)$ est une courbe analytique passant par 0, avec $\mu_\lambda = \lambda\overline\partial\xi + o(\lambda)$, alors on a :

$$\phi^Z_{\mu_\lambda} = \mathrm{Id} + \lambda\xi + o(\lambda)$$

où $\phi^Z_{\mu_\lambda}$ est l'unique homéomorphisme quasiconforme associé à μ_λ fixant Z (voir [GL00] ou [Hub06]). Si l'on différentie par rapport à λ la relation

$$\phi^Z_{\mu_\lambda} \circ f = f_\lambda \circ \phi^Z_{\mu_\lambda},$$

on obtient alors :

$$\xi \circ f = \dot f + Df(\xi),$$

où $\dot f = \frac{df_\lambda}{d\lambda}_{|\lambda=0}$. Ce qui s'écrit encore :

$$\eta := Df^{-1}(\dot f) = -\Delta_f\xi.$$

□

On notera $D\Psi(0) : \mathrm{bel}(f) \to T(f)/T_f\mathcal{O}(f)$ comme le quotient à l'arrivée de l'application linéaire $D\Psi^Z(0) : \mathrm{bel}(f) \to T(f)$. Cette application ne dépend pas du choix de Z.

Proposition 2.4.19. Soit ξ un champ de vecteur quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$ tel que $\overline\partial\xi \in \mathrm{bel}(f)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\overline\partial\xi \in \ker D\Psi(0)$

ii) $\Delta_f\xi \in \Delta_f\mathrm{aut}(\mathbb{P}^1)$

iii Il existe $h \in \mathrm{aut}(\mathbb{P}^1)$ tel que $\xi - h$ s'annule sur Λ_f

Démonstration. Les deux premiers points sont équivalents d'après [BE09], proposition 1.

iii) $\Rightarrow$ *ii)* : si $\xi - h$ s'annule sur Λ_f, alors comme Λ_f est invariant $\Delta_f(\xi - h)$ s'annule aussi sur Λ_f. Donc $\Delta_f(\xi - h)$ est un champ de vecteurs méromorphe (d'après la proposition précédente) s'annulant sur l'ensemble Λ_f qui n'est pas discret, donc $\Delta_f(\xi - h) = 0$ par le principe des zéros isolés.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* : si $\Delta_f(\xi - h) = 0$, alors $\xi - h$ doit s'annuler sur V_f, par continuité de $\xi - h$. Donc $(f^k)^*(\xi - h)(v) = (\xi - h)(v) = 0$ pour tout $k \geq 0$. De plus, si $f^p(z) = v \in V_f$, alors $(f^p)^*(\xi - h)(z) = 0 = (\xi - h)(z)$. Donc $(\xi - h)$ s'annule sur la grande orbite critique de f, donc sur Λ_f par continuité. □

Notons que si l'on normalise ξ en imposant qu'il s'annule sur un ensemble Z invariant par f de cardinal 3, alors la proposition 2.4.19 reste vraie en remplaçant h par 0 dans les points *ii)* et *iii)*, et $D\Psi(0)$ par $D\Psi^Z(0)$ dans le point *i)*.

On aura également besoin de la différentielle de Ψ^Z en un point arbitraire de $\mathrm{Bel}(f)$. On rappelle le fait suivant de théorie de Teichmüller (cf [Hub06]) :

Définition 2.4.20. Soit ψ un homéomorphisme quasiconforme de $\mathbb{P}^1$. Pour toute forme de Beltrami, on note $\psi^*\mu$ la forme de Beltrami correspondant à $\phi_\mu \circ \psi$, où ϕ_μ est une forme de Beltrami associée à μ.

On notera aussi $\psi_* = (\psi^{-1})^*$.

Proposition 2.4.21. Pour tout homéomorphisme quasiconforme ψ, l'application ψ^* est biholomorphe.

Nous aurons besoin de considérer seulement ici des applications $\Psi_f^Z : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ et $\Psi_g^Z : \mathrm{Bel}(g) \to \mathrm{Rat}_d$ associées à des fractions rationnelles f et g différentes. Dans toute la suite, il n'y aura pas de confusion possible et les indices f et g seront omis.

Proposition 2.4.22. Soit $\mu \in \mathrm{Bel}(f)$ et ψ l'homéomorphisme quasiconforme associé fixant Z. Soit $g = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$. Alors

$$D\Psi_f^Z(\mu) = D\Psi_g^Z(0) \circ D\phi_*(\mu)$$

En particuliers, $\mathrm{rg} D\Psi_f^Z(\mu) = \mathrm{rg} D\Psi_g^Z(0)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout ϕ_0 et ϕ_λ associés à des éléments μ_λ et μ_0 de $\mathrm{bel}(f)$:

$$\phi_\lambda \circ f \circ \phi_\lambda^{-1} = (\phi_\lambda \circ \phi_0^{-1}) \circ \phi_0 \circ f \circ \phi_0^{-1} \circ (\phi_\lambda \circ \phi_0^{-1})^{-1}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\Psi_f^Z(\mu_\lambda) = \Psi_g^Z(\phi_*\mu_\lambda)$$

si l'on a pris soin de supposer que ϕ_λ et ϕ_0 fixent Z. Il suffit alors de prendre une courbe analytique μ_λ de $\mathrm{bel}(f)$, et de différentier en $\lambda = 0$. □

2.4.2.3 Calcul de dimension

Le but de cette section est de montrer que $\Psi^Z : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ est de rang constant.

Définition 2.4.23. On dit qu'un point critique est acyclique s'il n'est pas prépériodique. On dit que deux points critiques sont dans la même classe critique fermée acyclique si les deux sont acycliques et dans l'ensemble de Fatou et que les adhérences de leurs grandes orbites critiques coïncident.

Le point clé pour appliquer le théorème du rang est le décompte suivant de dimension :

Théorème 2.4.24. *Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. Alors*

$$\mathrm{rg} D\Psi(0) = n_H + n_J + n_a - n_p$$

où n_H est le nombre de cycles d'anneaux de Hermann de f, n_J est le nombre de champs de droites invariants ergodiques, n_a est le nombre de classes critiques fermées acycliques, et n_p est le nombre de cycles paraboliques.

Définition 2.4.25. Soit $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ une application holomorphe, où $\mathcal{S}$ est une surface de Riemann. Notons $M_f(\mathcal{S})$ l'espace des différentielles de Beltrami invariantes par f, et $N_f(\mathcal{S})$ le sous-espace de $M_f(\mathcal{S})$ des différentielles de Beltrami de la forme $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteur quasiconforme hyperboliquement borné sur $\mathcal{S}$.

Définition 2.4.26. Soit $(\mathcal{S}_i)_{i\in I}$ une famille (au plus dénombrable) de 1-variétés complexes $\mathcal{S}_i$. Le produit restreint $\Pi^*_{i\in I} M(\mathcal{S}_i)$ est défini par :

$$\{(\mu_i)_{i\in I}, \sup_{i\in I} \|\mu_i\|_{L^\infty(\mathcal{S}_i)} < \infty\}$$

Théorème 2.4.27. *Soit f une fraction rationnelle, et Ω un ouvert complètement invariant. Soit $\Omega = \bigsqcup_i \Omega_i$ une partition de Ω en ouverts Ω_i complètement invariants par f. Alors*

$$M_f(\Omega)/N_f(\Omega) \simeq \Pi^*_i M(\Omega_i)/N(\Omega_i)$$

Démonstration. Il est clair que l'on a $M_f(\Omega) = \Pi_i M(\Omega_i)$.

Soit $\overline{\partial}\xi \in N_f(\Omega)$. Alors d'après le corollaire 1.3.1, on a :

$$\xi = \sum_i \xi_i$$

où ξ_i est un champ de vecteur quasiconforme qui coïncide avec ξ sur Ω_i, et tel que $\xi_i = 0$ en dehors de Ω_i. Ceci montre que $N_f(\Omega) = \Pi_i N_f(\Omega_i)$.

Donc $M_f(\Omega)/N_f(\Omega) = \bigoplus_i M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i)$. □

Enfin, nous aurons besoin d'utiliser le théorème de classification des composantes de Fatou, qui est un corollaire du théorème de Sullivan sur la non-existence de domaines errants. Notons que McMullen (voir [McM14])a donné une preuve directe et purement infinitésimale du théorème de Sullivan, qui notamment n'utilise pas de théorie Teichmüller dynamique. Sa preuve est basée sur l'utilisation de champs de vecteurs quasiconformes. Nous allons en doner ici une version un peu raccourcie à l'aide du théorème A.

Théorème 2.4.28 (Pas de domaines errants, Sullivan)**.** *Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. Alors f n'a pas de domaine errant.*

Comme dans les autres versions de la preuve du théorème de Sullivan, l'argument est grandement simplifié par le lemme suivant, dû à Baker :

Lemme 2.4.29 (Lemme de Baker)**.** *Supposons que $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un domaine errant. Alors pour n assez grand, Ω_n est simplement connexe et $f_{|\Omega_n}$ est univalente.*

Démonstration du théorème 2.4.28. Supposons que f ait un domaine errant. D'après le lemme de Baker, il existe une composante de Fatou U dans l'orbite de ce domaine errant qui soit simplement connexe.

On peut construire des différentielles de Beltrami invariantes sur $\mathbb{P}^1$ en choisissant des différentielles de Beltrami μ sur U et en les tirant en arrière par f et par les branches de f^{-1} le long du domaine errant, et en les prolongeant par 0 en dehors de l'orbite du domaine errant. On a le droit de tirer en arrière par les branches inverses de f puisque d'après le lemme de Baker,

$f_{|f^n(U)}$ est univalente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, la donnée d'une différentielle de Beltrami sur U détermine de manière unique une différentielle de Beltrami invariante sur $\mathbb{P}^1$. Considérons l'espace vectoriel $V \subset \mathrm{bel}(f)$ des différentielles de Beltrami obtenues de cette manière à partir de formes de Beltrami sur U de la forme :

$$\mu_{|U} = \phi^* \left(\sum_{k=1}^{n} a_k k \overline{z}^{k-1} \frac{\overline{dz}}{dz} \right)$$

où les a_k sont des nombres complexes et $\phi : U \to \Delta$ est une coordonnée uniformisante.

Lemme 2.4.30. *Soit $\mu \in V$ et soit ξ un champ de vecteurs quasiconforme sur $\mathbb{P}^1$ tel que $\mu = \overline{\partial}\xi$. Si ξ est hyperboliquement borné sur U, alors $\mu = 0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer ceci pour $\tilde{\xi} = \phi_* \xi$, puisque la propriété d'être hyperboliquement bornée est invariante par le biholomorphisme ϕ. On a :

$$\tilde{\xi}(z) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k - h(z) \right) \frac{d}{dz}$$

où h est holomorphe sur Δ.

Si $\tilde{\xi}$ est hyperboliquement borné, alors il s'étend continûment par 0 sur le cercle unité S^1. Donc h s'étend continûment sur le cercle unité via la formule :

$$\hat{h}(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k}$$

et donc :

$$\hat{h}(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in \Delta \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k} & \text{sinon} \end{cases}$$

est holomorphe sur tout $\mathbb{P}^1$. Comme $\hat{h}$ coincide avec $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k}$ en dehors de Δ, ceci implique que tous les a_k doivent être nuls, et donc que $\mu = 0$ sur U. Alors, par définition de μ, on en déduit que $\mu = 0$ sur $\mathbb{P}^1$. □

D'après le théorème A, on a prouvé que si $\mu \in V$ est infinitésimalement triviale sur U, alors $\mu = 0$. De plus, d'après la proposition 2.4.19, si $\mu \in \ker D\Psi^Z(0)$, alors μ est infinitésimalement triviale sur U. On a donc construit un sous-espace $V \subset \mathrm{bel}(f)$ de dimension infinie tel que $V \cap \ker D\Psi^Z(0) = \{0\}$. Ceci contredit le fait que $D\Psi^Z(0)$ a un rang fini. □

Notons que cette preuve n'utilise que de l'analyse fonctionnelle linéaire, et ne nécessite en fait pas l'information que l'application linéaire $\mathrm{bel}(f) \ni \overline{\partial}\xi \mapsto f^*\xi - \xi \in T(f)$ est la différentielle $D\Psi^Z(0)$, mais seulement la description de son noyau et le fait qu'elle ait un rang fini. En particulier, nous n'avons utilisé que la "version infinitésimale" du théorème d'Ahlfors-Bers, à savoir la résolution de l'équation $\overline{\partial}\xi = \mu$.

On aura également besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.4.31. *Soit Ω un ouvert hyperbolique de $\mathbb{P}^1$ (pas nécessairement connexe) et $f : \Omega \to \Omega$ un revêtement holomorphe de Ω, tel que Ω/f soit une surface de Riemann (connexe). Alors la projection $\pi_1 : \Omega \to \Omega/f$ induit un identification :*

$$M_f(\Omega)/N_f(\Omega) \simeq M(\Omega/f)/N(\Omega/f).$$

Démonstration. Il est clair que $M_f(\Omega) \simeq M(\Omega/f)$. Prouvons que tout élément de $N_f(\Omega)$ passe au quotient en un élément de $N(\Omega/f)$: soit $\mu = \overline{\partial}\xi \in N_f(\Omega)$, de ξ est hyperboliquement borné. Nous allons prouver que ξ est f-invariant et donc passe au quotient en un champ de vecteur sur Ω/f. Comme μ est f-invariant et $f : \Omega \to \Omega$ est un revêtement, $\xi - f^*\xi$ est un champ de vecteur holomorphe. De plus, $\xi - f^*\xi$ est aussi hyperboliquement borné puisque f est une isométrie pour la métrique hyperbolique de Ω. En relevant via un revêtement universel au disque unité Δ, il est facile de voir qu'un tel champ de vecteur doit être identiquement nul. Donc ξ est f-invariant et μ passe au quotient en un élement de $N(\Omega/f)$.

Soit $\mu = \overline{\partial}\xi \in N(\Omega/f)$. Comme l'application $\pi_1 : \Omega \to \Omega/f$ est un revêtement entre surfaces de Riemann hyperboliques, c'est une isométrie locale pour les métriques hyperboliques, et donc $\xi_1 = \pi_1^*\xi$ est un champ de vecteur quasiconforme hyperboliqment borné, qui est invariant par f par construction. D'après le théorème A, $\hat{\xi_1}$ prolongé par 0 en dehors de Ω est encore quasiconforme (et invariant) et $\mu = \overline{\partial}\hat{\xi_1} \in N_f(\Omega)$. Ceci prouve que $N_f(\Omega) \simeq N(\Omega/f)$. □

Lemme 2.4.32. *Soit U une composante périodique de Ω_f, de période $p \in \mathbb{N}^*$. Soit Ω l'ouvert complètement invariant de Ω_f engendré par U. Alors la restriction à U induit un isomorphisme $M_f(\Omega) \to M_{f^p}(U)$, envoyant $N_f(\Omega)$ sur $N_{f^p}(U)$. En particulier,*

$$M_f(\Omega)/N_f(\Omega) \simeq M_{f^p}(U)/N_{f^p}(U)$$

Démonstration. Toute différentielle de Beltrami $\mu \in M_f(\Omega)$ est invariante par f donc par f^p. Réciproquement, si μ est une différentielle de Beltrami sur U invariante par f^p, alors μ se prolonge en une différentielle de Beltrami $\tilde{\mu}$ invariante sur Ω_i de la manière suivante : si V est une composante de Ω_i, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ (défini à un multiple de p près) tel que $f^k_{|V} : V \to U$. On définit alors $\tilde{\mu}_{|V} = (f^k)^*\mu$, et cette définition est valide si V est sur le cycle de U puisque $\mu = (f^p)^*\mu$.

Cette identification envoie $N_f(\Omega)$ sur $N_{f^p}(U)$ puisque si $\mu = \overline{\partial}\xi \in M_f(\Omega)$, alors $\hat{\xi}(z) = \xi(z)$ si $z \in U$ et 0 sinon est tel que $\overline{\partial}\hat{\xi} = \mu_{|U}$ d'après le théorème A, et donc $\mu_{|U} \in N_{f^p}(U)$. Réciproquement, prouvons que la restriction $N_f(\Omega) \to N_{f^p}(U)$ est surjective : soit $\mu \in N_{f^p}(U)$. Comme on a prouvé que $M_f(\Omega) \to M_{f^p}(U)$ est surjective, il existe une extension $\tilde{\mu} \in M_f(\Omega)$ qui prolonge μ à Ω, et $\tilde{\mu}$ restreinte à chaque composante V de Ω est obtenue par un tiré en arrière de la forme $(f^{-m} \circ f^n)^*\mu$. De plus, par définition de Ω_f, les branches $(f^{-m} \circ f^n)^*\mu$ sont des revêtements de composantes de Ω, et donc sont des isométries locales pour la métrique hyperbolique de Ω. Comme $\mu \in N_{f^p}(U)$, il existe un champ de vecteur quasiconforme ξ sur U tel que $\overline{\partial}\xi = \mu$ et ξ est hyperboliquement borné sur U. Donc, sur chaque composante de Ω, $\tilde{\mu} = \overline{\partial}((f^{-m} \circ f^n)^*\xi)$, et $(f^{-m} \circ f^n)^*\xi$ est hyperboliquement bornée sur cette composante. Donc $\tilde{\mu} \in N_f(\Omega)$. □

Lemme 2.4.33. *Soit μ une différentielle de Beltrami invariante par une fonction holomorphe g. Dans chacun des deux cas suivants : $g(z) = e^{2i\pi\alpha}z$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, et $g(z) = z^d$, $d \geq 2$, μ est alors invariante par toutes les rotations, et s'écrit en coordonnées locales :*

$$\mu(re^{it}) = c(r)e^{2it}\frac{d\overline{z}}{dz}$$

Démonstration. La preuve est une modification de la preuve classique de l'ergodicité des rotations d'angles irrationnels.

Commençons par le cas d'une rotation d'angle irrationnel : $g(z) = e^{2i\pi\alpha}z$. Soit μ une différentielle de Beltrami invariante par g. On a, en coordonnées :

$$\mu(z) = g^*\mu(z) = e^{-4i\pi\alpha}\mu(e^{2i\pi\alpha}z) \tag{2.4.1}$$

En développant en séries de Fourier le long des cercles $|z| = r$, on voit que μ doit être de la forme

$$\mu(re^{it}) = c(r)e^{2it}\frac{d\overline{z}}{dz}$$

où c est une fonction L^∞.

En effet, si l'on note $c_n(r)$ le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de $t \mapsto \mu(re^{it})$, on déduit de 2.4.1 que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(r)e^{4i\pi\alpha} = c_n(r)e^{2in\pi\alpha}$$

Comme $\alpha \notin \mathbb{Q}$, ceci implique que $c_n(r) = 0$ pour tout $n \neq 2$ et pour tout $r \in (0,1)$. Donc, si l'on pose $c(r) := c_2(r)$, on obtient :

$$\mu(re^{it}) = c(r)e^{2it}\frac{d\overline{z}}{dz} \tag{2.4.2}$$

En particulier, la différentielle de Beltrami μ est invariante par rotation, et on vérifie aisément que toute différentielle de Beltrami invariante par rotation doit être de cette forme.

Si l'on suppose maintenant que $g(z) = z^2$, $d \geq 2$, et que μ est invariante par g, alors μ est invariante par toutes les branches de $g^{-n} \circ g^n$, et donc par toutes les rotations d'angles $\frac{2k\pi}{d^n}$, for all $k \in \mathbb{N}$:

$$\mu(z) = e^{-4ik\pi/d^n}\mu(e^{2ik\pi/d^n}z).$$

De même, en développant en série de Fourier le long des cercles centrés en 0, on obtient :

$$\mu(re^{it}) = c(r)e^{2it}\frac{d\overline{z}}{dz}.$$

□

Lemme 2.4.34. *Soit $A(R)$ l'anneau $\{1 < |z| < R\}$, et Δ le disque unité. Soit $g(z) = e^{2i\pi\alpha}z$ une rotation d'angle irrationnel. Alors :*

i) $\dim M_g(A(R))/N_g(A(R)) = 1$

ii) $\dim M_g(\Delta)/N_g(\Delta) = 0$.

Démonstration. Soit μ une différentielle de Beltrami invariante par g. On a, en coordonnées :

$$\mu(z) = g^*\mu(z) = e^{-4i\pi\alpha}\mu(e^{2i\pi\alpha}z)$$

Soit $r > 0$ fixé, et notons $c_n(r)$ les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique $t \mapsto \mu(re^{it})$. Par identification, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(r)e^{4i\pi\alpha} = c_n(r)e^{2in\pi\alpha}$$

Comme α est irrationnel, on en déduit que $c_n(r) = 0$ pour tout $n \neq 2$, et donc que $\mu(re^{it}) = c(r)e^{2it}\frac{\overline{dz}}{dz}$: μ est donc en fait invariant par toutes les rotations. Si l'on considère un champ de vecteur ξ de la forme

$$\xi(re^{it}) = h(r)re^{it}\frac{d}{dz}$$

où $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction dont la dérivée au sens des distributions est une fonction L^∞, on vérifie que

$$\overline{\partial}\xi(re^{it}) = rh'(r)e^{2it}\frac{d\overline{z}}{dz}.$$

Donc si $\mu(re^{it}) = c(r)e^{it}\frac{d\overline{z}}{dz}$, alors si l'on appelle h l'unique primitive de $r \mapsto c(r)/r$ s'annulant en $r = 1$ et $\xi(re^{it}) = rh(r)e^{it}\frac{d}{dz}$, on a bien $\overline{\partial}\xi = \mu$ au sens des distributions, et ξ est un champ de vecteur quasiconforme sur tout $\mathbb{P}^1$ s'annulant sur le cercle unité.

D'après le théorème A, ceci implique que $\mu \in N_g(\Delta)$ et que $\mu \in N_g(A(R))$ si et seulement si $h(R) = 0$. On en déduit que $M_g(\Delta) = N_g(\Delta)$ et que $N_g(A(R))$ est de codimension 1 dans $M_g(A(R))$. □

Nous sommes maintenant à même de démontrer le théorème 2.4.24.

Démonstration du théorème 2.4.24. Comme $\ker D\Psi(0) = N_f(\mathcal{F}) = N_f(\Omega_f)$ d'après la proposition 2.4.19, où $\mathcal{F}$ est l'ensemble de Fatou de f et $\mathcal{J}$ son ensemble de Julia, on a :

$$\mathrm{bel}(f)/\ker D\Psi(0) = (\mathrm{Fix}_{\mathcal{J}} \oplus M_f(\mathcal{F}))/N_f(\mathcal{F})$$

où $\mathrm{Fix}_{\mathcal{J}}$ désigne l'espace des éventuels champs de droites invariants de f.

Si c est un point critique de f, alors l'adhérence de sa grande orbite est égale à l'union de l'ensemble de Julia $\mathcal{J}$, d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble dénombrable de cercles lisses (si l'orbite de c rencontre un cycle superattractif, de Siegel ou d'anneaux de Herman). Donc Λ_f coïncide avec $\mathcal{J}$ à un ensemble de mesure de Lebesgue négligeable près. Donc $M_f(\mathcal{F})$ s'identifie canoniquement à $M_f(\Omega_f)$. On en déduit :

$$\mathrm{Fix}(f)/\ker D\Psi(0) = \mathrm{Fix}_J \oplus M_f(\Omega_f)/N_f(\Omega_f)$$

Considérons la relation d'équivalence sur l'ensemble des composantes connexes de Ω_f qui identifie deux composantes connexes si et seulement si elles sont dans la même grande orbite, et soit Ω_i les classes de cette relation. Les Ω_i forment une partition de Ω_f en ouverts disjoints complètement invariants. D'après le théorème 2.4.27, on a :

$$\mathrm{rg}D\Psi(0) = \dim \mathrm{Fix}_J + \sum_i \dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i).$$

Chaque composante de Ω_i est envoyée par f^n pour n assez grand dans une composante de Fatou périodique U (même si les composantes de Ω_i ne sont pas elles même nécessairement prépériodiques). Calculons $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i)$ selon la nature de la composante de Fatou périodique qu'elle rencontre. Il y a 5 cas à distinguer, selon la nature de cette composante U. Notons n_i le nombre de classes critiques fermées acycliques rencontrant la grande orbite de U.

a) Le cas d'un cycle attractif

Si U est une composante d'un bassin attractif et Ω_i rencontre U, alors Ω_i est la grande orbite de U privée de l'ensemble dénombrable des points des orbites critiques attirés par ce cycle et du cycle lui-même. Donc toute composante de Ω_i est prépériodique à $U - \Lambda_f$. Ainsi, $f_{|\Omega_i} : \Omega_i \to \Omega_i$ agit discrètement, et $X_i = \Omega_i/f$ est une surface de Riemann. Dans une coordonnée linéarisante pour f^k sur le bassin immédiat d'attraction (où $k \in \mathbb{N}^*$ est la période du cycle et ρ est son multiplicateur), notons $A = \{|\rho| \leq z < 1\}$. C'est un domaine fondamental pour l'action de f sur le cycle de composantes de Fatou V contenant U, et $A - \Lambda_f$ est un domaine fondamental pour l'action de f sur Ω_i. Donc X_i est le tore $X = A/f$ privé d'un nombre fini n_i de points, égal au nombre de points de l'ensemble post-critique dans A, c'est-à-dire le nombre de classes critiques fermées rencontrant V.

D'après les lemmes 2.4.32 et 2.4.31, $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) = \dim M(X_i)/N(X_i)$. Comme X_i est un tore privé d'un nombre fini de points, tout champ de vecteur quasiconforme hyperboliquement borné sur X_i s'étend en un champ de vecteur quasiconforme s'annulant sur les points marqués. Donc le quotient $M(X_i)/N(X_i)$ est exactement le plan tangent à l'espace de Teichmüller de X_i, qui a une dimension égale au nombre n_i de points marqués (voir par exemple [Hub06]).

b) Le cas d'une composante parabolique

Si U est un bassin parabolique et Ω_i rencontre U, alors Ω_i est la grande orbite de U privée de la grande orbite des points critiques qui sont capturés par U. En particuliers, toute composante de Ω_i est itérée après un nombre fini d'itérations sur U privé d'un ensemble dénombrable de points, et est donc prépériodique. De plus, $f_{|\Omega_i} : \Omega_i \to \Omega_i$ agit discrètement, donc $X_i = \Omega_i/f$ est une surface de Riemann, qui est isomorphe à $X = U/f^p$ privé des classes de grandes orbites critiques intersectant U, où p est la période du cycle parabolique associé à U.

Via une coordonnée de Fatou, l'action de f^p sur U est conjuguée à celle de $z \mapsto z + 1$ sur un demi-plan supérieur, donc X est isomorphe à un cylindre, et X_i est isomorphe à un cylindre privé

d'un nombre fini n_i de points correspondant aux n_i grandes orbites critiques capturées par U. Donc X est isomorphe à la sphère de Riemann privée de deux points a_1 et a_2, et X_i est isomorphe à la sphère de Riemann privé de $n_i + 2$ points $a_1, \ldots, a_{n_i+2}$ où les a_j, $j \geq 2$, correspondent aux grandes orbites critiques rencontrant U.

La projection $\pi : \Omega_i \to X_i$ induit un isomorphisme entre $M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i)$ et $M(X_i)/N(X_i)$, d'après les lemmes 2.4.32 et 2.4.31. Par ailleurs, les éléments de $M(X)$ sont de la forme $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteur quasiconforme s'annulant sur a_1 et a_2, et comme l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{P}^1$ est de dimension 3, $M(X_i)/N(X_i)$ s'identifie à $\bigoplus_{3\leq j\leq n_i+2} T_{a_j}\mathbb{P}^1$, qui est un espace de dimension $n_i - 1$. Remarquons que $n_i - 1 \geq 0$ car il existe toujours au moins un point critique attiré dans le bassin parabolique.

c) Le cas d'un disque de Siegel

Si U est un disque de Siegel, alors l'intersection entre Λ_f et le cycle de U consiste en une union finie de n_i cercles lisses, où n_i est le nombre de classes critiques acycliques fermées capturées par le cycle de disque de Siegel (on peut avoir $n_i = 0$). Donc toute composante de Ω_i est prépériodique et est itérée en temps fini soit sur un anneau périodique A_i inclus dans U (si $n_i \neq 0$), soit sur le disque de Siegel périodique tout entier si $n_i = 0$. Dans les deux cas, notons V cette composante de périodique de Ω_i sur laquelle est itérée toute composante de Ω_i.

D'après le lemme 2.4.32, l'espace $M_f(\Omega_i)$ s'identifie à l'espace $M_{f^p}(V)$ des différentielles de Beltrami sur V et invariantes par $f^p_{|V}$, où p est la période du cycle de U, et de même $N_f(\Omega_i)$ s'identifie à $N_{f^p}(V)$. Une coordonnée ϕ linéarisante pour f^p conjugue $f^p : V \to V$ à $g(z) = e^{2i\pi\alpha}z$ sur le disque unité ou un anneau $A(R)$, où α est un nombre de rotation irrationnel. Donc d'après le lemme 2.4.34, $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) = 1$ si $n_i \neq 0$ et 0 sinon. On obtient donc $\sum_{j\in J} \dim M_f(\Omega_j)/N_f(\Omega_j) = n_i$.

d) Le cas d'un anneau de Hermann

Ce cas de figure est très semblable au précédent : Ω_i consiste encore en la grande orbite d'un anneau invariant. La seule différence est que même s'il n'y a pas de points critiques acycliques dans l'anneau de Hermann, les composantes de Ω_i sont prépériodiques à un anneau et non pas à un disque, et donc $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) = 1$. On obtient donc : $\sum_{j\in J} \dim M_f(\Omega_j)/N_f(\Omega_j) = n_i+1$ où n_i est le nombre de classes critiques fermées acycliques capturés par U.

e) Le cas d'un cycle superattractif

Si U est un une composante du bassin d'attraction d'un cycle superattractif, alors $\Lambda_f \cap U$ est une union dénombrable d'équipotentielles (qui sont des cercles lisses) et du cycle superattractif lui-même.

Supposons dans un premier temps qu'il n'y ait aucun point critique capturé par le cycle superattractif. Alors il y a une unique classe Ω_i qui intersecte U, et c'est la grande orbite de U toute entière. D'après le lemme 2.4.32, $M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) \simeq M_{f^p}(U)/N_{f^p}(U)$, où p est la période de U. Via une coordonnée de Böttcher, $f^p_{|U} : U \to U$ est conjugué à $g(z) = z^k$, $k \geq 2$. Si $\mu \in M_g(\Delta)$, alors μ est invariante par g et donc par toute branche de $g^{-n} \circ g^n$. Donc μ est invariante par toutes les rotations d'angle rationnel. Comme dans la preuve du lemme 2.4.34, on en déduit que μ est invariant par toutes les rotations et donc que $M_g(\Delta) = N_g(\Delta)$. Donc s'il n'y a pas de points critiques attiré par le cycle superattractif, alors $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) = 0$.

Supposons maintenant que $n_i > 0$, où n_i est le nombre de classes critiques fermées acycliques rencontrant U. Appelons r_j, $j \leq n_i$, le rayon maximal en coordonnées de Böttcher parmi les cercles correspondant à une classe d'équivalence feuilletée de points critiques acycliques, numérotées par ordre décroissant. Notons $A(r, r')$ l'anneau $\{r' < |z| < r\}$. Soit $\Omega_j \subset \Omega_f$ une classe rencontrant U. Alors pour toute composante V de Ω_j, il existe une unique branche de $f^{-k} \circ f^l$ qui envoie V sur l'anneau $A(r_{j-1}, r_j)$ (avec la convention $r_{-1} = 1$). Par un raisonnement similaire au lemme 2.4.32, $M_f(\Omega_j)$ s'identifie alors à l'espace des différentielles de Beltrami sur $A(r_{j-1,r_j})$

invariantes par toutes les branches de $f^{-n} \circ f^n$, $n \in \mathbb{N}$. Donc via les coordonnées de Böttcher, $M_f(\Omega_i)$ s'identifie à l'espace $M_g(A)$ des différentielles de Beltrami invariantes par rotation sur un anneau A, et on en déduit $\dim M_f(\Omega_i)/N_f(\Omega_i) = 1$. Donc $\sum_{j\in J} \dim M_f(\Omega_j)/N_f(\Omega_j) = n_i$.

En récapitulant, chaque composante de Fatou périodique U apporte une contribution de dimension n_i, où n_i est le nombre de classes critiques fermées acycliques rencontrant U, sauf les anneaux de Herman qui apportent une contribution $n_i + 1$ et les bassins paraboliques qui apportent une contribution $n_i - 1$.

De plus et par définition, les champs de droites invariants ergodiques forment une base de l'espace Fix_J des champs de droites invariants, donc $\dim \mathrm{Fix}_{\mathcal{J}} = n_J$. Donc on obtient bien :

$$\mathrm{rg} D\Psi(0) = n_H + n_J + n_a - n_p.$$

□

2.4.2.4 Structure complexe

Rappelons la version suivante du théorème du rang constant (pour une référence, voir [Bou07], p. 53).

Théorème 2.4.35 (Théorème du rang constant)**.** *Soit $\Psi : U \to F$ une application holomorphe, où U est un ouvert d'un espace de Banach complexe E et F est une variété complexe de dimension finie. Supposons que* $\mathrm{rank} D\Psi = r$ *soit constante sur U. Alors pour tout $x_0 \in U$, il existe un germe de difféomorphisme analytique $\chi : (F, \Psi(x_0)) \to (T_{\Psi(x_0)}F, 0)$ et un germe de difféomorphisme analytique $\phi : \mathrm{Im} D\Psi(x_0) \oplus \ker D\Psi(x_0) \to E$ tel que pour tout $(u, v) \in \mathrm{Im} D\Psi(x_0) \oplus \ker D\Psi(x_0)$ au voisinage de $\phi^{-1}(x_0)$,*

$$\chi \circ \Psi \circ \phi(u, v) = u.$$

Corollaire 2.4.1. Soit $\Psi : U \to F$ vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus. Alors pour tout $z_0 \in \Psi(U)$, la fibre $M = \Psi^{-1}(z_0)$ est une sous-variété de Banach de E, de codimension r et dont l'espace tangent en $x_0 \in \Psi^{-1}(z_0)$ est $T_{x_0}M = \ker D\Psi(x_0)$.

Démonstration. Avec les notations du théorème du rang constant, on a $\Psi(x) = z_0$si et seulement si $\chi \circ \Psi(u, v) = \chi(z_0) = u$, où $(u, v) = \psi^{-1}(x)$, ce qui équivaut à $\psi(\chi(z_0), v)) = x$. Comme ψ est un (germe de) difféomorphisme, ceci fournit une carte locale en x_0 pour M, qui est donc une sous-variété de Banach modelée sur $\ker D\Psi(x_0)$. □

La première application du théorème 2.4.24 est que Ψ^Z a un rang constant :

Corollaire 2.4.2. Soit f une fraction rationnelle, Z un triplet de points et $\mu \in \mathrm{Bel}(f)$. Alors $\mathrm{rg} D\Psi^Z(0) = \mathrm{rg} D\Psi^Z(\mu)$.

Démonstration. Il est clair que n_f, n_p et n_H sont invariants par conjugaison quasiconforme. Le nombre n_J est également invariant puisqu'un homéomorphisme quasiconforme preserve les ensembles de mesure de Lebesgue nulle (voir [GL00]). Donc si $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ conjugue quasiconformément f à une autre fraction rationnelle g, alors ϕ^* envoie les champs de droite invariants par f sur les champs de droites invariants par g. Le lemme 2.4.22 conclue la preuve. □

Rappelons que $\mathrm{QC}(f)$ est le groupe des homéomorphismes quasiconformes de $\mathbb{P}^1$ commutant avec f.

Définition 2.4.36. On notera $\mathcal{B}\mathrm{QC}(f)$ l'espace des formes de Beltrami correspondant aux éléments de $\mathrm{QC}(f)$. De même, on notera $\mathcal{B}\mathrm{QC}_0(f)$ l'espace des formes de Beltrami associées aux éléments de $\mathrm{QC}_0(f)$.

Notons que l'on a $\mathcal{B}\mathrm{QC}_0(f) \subset \mathcal{B}\mathrm{QC}(f) \subset \mathrm{Bel}(f)$.

Corollaire 2.4.3. L'espace $\mathcal{B}\mathrm{QC}(f)$ est une sous-variété de Banach de $\mathrm{Bel}(f)$, d'espace tangent au point base égal à l'espace $N_f(\Omega_f)$ des différentielles de Beltrami de la forme $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteurs quasiconforme invariant par f.

Démonstration. L'espace des formes de Beltrami associées aux homéomorphismes quasiconformes commutant avec f est exactement la fibre $\Psi^{-1}(f)$. Mais d'après le corollaire précédent, Ψ^Z a un rang constant sur $\mathrm{Bel}(f)$, donc d'après le théorème du rang constant, $(\Psi^Z)^{-1}(f)$ est une sous-variété de Banach de codimension finie, dont l'espace tangent au point base est $\ker D\Psi(0) = N_f(\Omega_f)$. De plus, $N_f(\Omega_f)$ est aussi l'espace des formes de Beltrami de la forme $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteurs quasiconforme invariant par f, d'après la proposition 2.4.19. □

Notons qu'en particulier, $\mathcal{B}\mathrm{QC}(f)$ est localement connexe par arc au point base. Donc tout élément de $\mathcal{B}\mathrm{QC}(f)$ suffisamment proche du point base appartient en fait à $\mathcal{B}\mathrm{QC}_0(f)$.

Proposition 2.4.37. La prémétrique de Teichmüller est une métrique.

En particulier, ceci implique que $\mathrm{Teich}(f)$ est un espace séparé.

Démonstration. Soir $[\mu]$ et $[\nu]$ des points de $\mathrm{Teich}(f)$ tels que $d_T([\mu],[\nu]) = 0$. Ceci signifie qu'il existe une suite de représentants ϕ_n et ψ_n de $[\mu]$ et $[\nu]$ respectivement tels que la dilatatation maximale de $\phi_n \circ \psi_n^{-1}$ tende vers 1.

Les fractions rationnelles $g = \phi_n \circ f \circ \phi_n^{-1}$ et $h = \psi_n \circ f \circ \psi_n^{-1}$ ne dépendent pas des représentants ϕ_n et ψ_n. Comme les coefficients de Beltrami de $\phi_n \circ \psi_n^{-1}$ tendent vers 0 dans la topologie L^∞, on en déduit que $\phi_n \circ \psi_n^{-1}$ converge uniformément vers l'identité, et donc que $g = h$ et que tous les $\phi_n \circ \psi_n^{-1}$ appartiennent à $\mathrm{QC}(f)$. Comme par hypothèse les formes de Beltrami associées à $\phi_n \circ \psi_n^{-1}$ tendent vers 0, on en déduit que pour n suffisamment grand elles appartiennent à un voisinage connexe par arc de 0 dans $\mathcal{B}\mathrm{QC}(f)$, et donc dans $\mathcal{B}\mathrm{QC}_0(f)$.

Ceci signifie exactement que $[\mu] = [\nu]$ dans $\mathrm{Teich}(f)$. □

Théorème 2.4.38. *Il existe une unique structure de variété complexe sur* $\mathrm{Teich}(f)$ *faisant de la projection* $\pi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Teich}(f)$ *une application holomorphe. Pour cette structure complexe,* π *est une submersion scindée.*

Démonstration du théorème 2.4.38. Soit $\mu \in \mathrm{Bel}(f)$. D'après le théorème du rang constant 2.4.2, il existe des germes de biholomorphismes $\phi : (\mathrm{Im}D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu), 0) \to (\mathrm{Bel}(f), \mu)$ et $\chi : (\mathrm{Rat}_d, g) \to (\mathrm{Rat}_d, g)$ tels que $\chi \circ \Psi^Z \circ \phi(u,v) = u$ pour tout $(u,v) \in \mathrm{Im}D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu)$, où $g = \phi_\mu \circ f \circ \phi_\mu^{-1}$.

En particulier, $\Psi^Z \circ \phi(u_1, v_1) = \Psi^Z \circ \phi(u_2, v_2)$ si et seulement si $u_1 = u_2$; de plus, si l'on note $\mu_i = \phi(u_i, v_i)$, $1 \leq i \leq 2$, alors $\Psi^Z(\mu_1) = \Psi^Z(\mu_2)$ si et seulement si $\phi_1^Z \circ (\phi_2^Z)^{-1} \in \mathrm{QC}(f)$ où ϕ_i^Z est l'homéomorphisme quasiconforme correspondant à μ_i et fixant Z.

Rappelons que $\pi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Teich}(f)$ est l'application quotient.

Lemme 2.4.39. *Pour* μ_1 *et* μ_2 *dans* $\mathrm{Bel}(f)$ *suffisamment près du point base, on a* $\pi(\mu_1) = \pi(\mu_2)$ *si et seulement si* $u_1 = u_2$.

Preuve du lemme 2.4.39. En effet, si $\pi(\mu_1) = \pi(\mu_2)$, alors $\phi_1^Z \circ (\phi_2^Z)^{-1} \in \mathrm{QC}_0(f)$ et en particulier $\phi_1^Z \circ (\phi_2^Z)^{-1} \in \mathrm{QC}(f)$, donc $u_1 = u_2$. Si l'on suppose maintenant que $u_1 = u_2$, alors $\psi := \phi_1^Z \circ (\phi_2^Z)^{-1} \in \mathrm{QC}(f)$, et il s'agit prouver qu'en fait $\psi \in \mathrm{QC}_0(f)$. Soit $\phi_i^Z(t)$ les homéomorphismes quasiconformes correspondant à $\mu_i(t) = \phi(tu_i, tv_i)$, $1 \leq i \leq 2$ et $t \in [0,1]$, et $\psi_t = \phi_1^Z(t) \circ (\phi_2^Z)(t)^{-1}$. Puisque pour tout $t \in [0,1]$, $\mu_i(t) = \phi^{-1}(tu_i, tvi)$, on a $\psi_t \in \mathrm{QC}(f)$, et $\psi_0 = \mathrm{Id}$. Les applications $t \mapsto \mu_i(t)$ sont analytiques, donc d'après la version paramétrique du théorème d'Ahlfors-Bers c'est aussi le cas des applications $t \mapsto \phi_i^Z(t)$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{P}^1$, l'application $t \mapsto \psi_t(z) = \phi_1^Z(t) \circ (\phi_2^Z)(t)^{-1}(z)$ est continue et ψ_t est une isotopie à l'identité à travers des éléments de $\mathrm{QC}(f)$. De plus, comme les $\phi_i^Z(t)$ ont une dilatation uniformément bornée, c'est aussi le cas de ψ_t.[1] Donc $\psi = \psi_1 \in \mathrm{QC}_0(f)$, ce qui achève la preuve du lemme. □

1. Notons cependant que le coefficient de Beltrami de ψ_t ne dépend pas a priori continument de t.

Lemme 2.4.40. *La paramétrisation $\phi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Im}D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu)$ passe au quotient en une paramétrisation $\tilde{\phi} : \mathrm{Im}D\Psi^Z(\mu) \to \mathrm{Teich}(f)$ qui donne à $\mathrm{Teich}(f)$ une structure de variété topologique. De plus, $\pi : \mathrm{Bel}(f) \to \mathrm{Teich}(f)$ est une application fibrée.*

Preuve du lemme 2.4.40. Soit $\mu \in \mathrm{Bel}(f)$, et $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que le disque $D(\mu, \epsilon)$ soit contenu dans le domaine de définition des coordonnées locales ϕ^{-1} fournies par le théorème du rang constant. Considérons l'application $\tilde{\pi} : \mathrm{Im}D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu) \to \mathrm{Teich}(f)$ definie par $\tilde{\pi} = \pi \circ \phi$. D'après le lemme 2.4.39, il existe une application $\tilde{\phi} : \mathrm{Im}D\Psi^Z(\mu) \to \mathrm{Teich}(f)$ telle que $\tilde{\pi}(u, 0) = \tilde{\phi}(u)$, et cette application est une bijection sur son image. De plus, elle est continue puisque π et ϕ sont continues. Donc, quitte à restreindre, c'est un homéomorphisme sur son image. Ceci fournit donc paramétrisation locale $\tilde{\phi}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bel}(f) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Im}D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ \mathrm{Teich}(f) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathrm{Im}D\Psi^Z(\mu) \end{array}$$

où π_1 est la projection sur la première coordonnée. Puisque d'après la proposition 2.4.37 l'espace $\mathrm{Teich}(f)$ est séparé, ceci prouve que c'est une variété topologique. De plus, ce diagramme signifie exactement que π est une application fibrée. □

Nous allons maintenant prouver qu'il existe une structure complexe sur $\mathrm{Teich}(f)$ qui rende l'application quotient π holomorphe. Ce sera une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.4.41. *Soit X une variété topologique, M une variété complexe, et $h : X \to M$ une application continue tel que pour tout $x \in X$ il existe des paramétrisations ϕ et ψ qui fassent commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ (X, x) & \xrightarrow{h} & (M, h(x)) \end{array}$$

(l'application i étant l'injection linéaire canonique). Alors il existe une structure complexe sur X qui rend h holomorphe.

Démonstration du lemme 2.4.41. Soit ϕ_1, ϕ_2 and ψ_1, ψ_2 des paramétrisations de X et M respectivement, dont les images respectives ont une intersection non vide. Nous allons prouver que la fonction de transition $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est holomorphe. En effet, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C}^n, 0) & & \xrightarrow{i} & & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & & \swarrow{\scriptstyle \psi_1} & \\ X & \xrightarrow{h} & M & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ \uparrow{\scriptstyle \phi_2} & & & \nwarrow{\scriptstyle \psi_2} & \\ (\mathbb{C}^n, 0) & & \xrightarrow{i} & & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \end{array}$$

On a donc $\Phi(x, 0) = (\phi(x), 0)$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ (suffisamment près de 0), où $\phi = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est une fonction de transition pour X, et $\Phi = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ est une fonction (holomorphe) de transition pour M. En particulier, ϕ est holomorphe. Ceci prouve que les cartes ϕ_i forment un atlas complexe. Par construction, f est holomorphe pour cet atlas. □

Retournons maintenant à la preuve du théorème. D'après le lemme 2.4.39, l'application Ψ_T^Z : Teich$(f) \to \mathrm{Rat}_d$ satisfait les conditions du lemme 2.4.41, où les paramétrisations de $X =$ Teich(f) sont celles du lemme 2.4.40. Donc, il existe une structure complexe sur Teich(f) qui rende l'application Ψ_T^Z : Teich$(f) \to \mathrm{Rat}_d$ holomorphe. De plus, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bel}(f) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Im}D\Psi^Z(\mu) \oplus \ker D\Psi^Z(\mu) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ \mathrm{Teich}(f) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathrm{Im}D\Psi^Z(\mu) \end{array}$$

prouve que π est une submersion holomorphe scindée. Clairement, il y a au plus une telle structure complexe sur Teich(f). □

Nous allons maintenant prouver que l'espace de Teichmüller s'immerge dans l'espace des paramètres. Ce résultat est le but de [Ast14].

Théorème B. L'application Ψ_T^Z : Teich$(f) \to \mathrm{Rat}_d$ est une immersion, dont l'image est transverse à $\mathcal{O}(f)$.

Démonstration. D'après le corollaire 2.4.2 il suffit de montrer que c'est une immersion en 0. Par définition, on a $\Psi^Z = \Psi_T^Z \circ \pi$, et donc

$$D\Psi^Z(0) = D\Psi_T^Z([0]) \circ D\pi(0)$$

L'injectivité de $D\Psi_T^Z([0])$ est alors équivalente à la propriété : $\ker D\Psi^Z(0) = \ker D\pi(0)$.

D'après la proposition 2.4.19, $\ker D\Psi^Z(0) = N_f(\Omega_f)$, et d'après le corollaire 2.4.3, $\ker D\pi(0) = N_f(\Omega_f)$, ce qu'il fallait démontrer. □

On peut maintenant prouver le corollaire 2.4.4, qui concerne la description des espaces tangents et cotangents $T_0\mathrm{Teich}(f)$ and $T_0^*\mathrm{Teich}(f)$.

Corollaire 2.4.4. On a l'identification suivante :

$$T_0\mathrm{Teich}(f) = \mathrm{bel}(f)/\{\overline{\partial}\xi, \xi = f^*\xi\}$$

$$T_0^*\mathrm{Teich}(f) = Q(\Lambda_f)/\overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}.$$

Démonstration. La première partie est une conséquence directe du corollaire 2.4.3.

Comme Teich(f) est une variété de dimension finie, il suffit de montrer que

$$\left(Q(\Lambda_f)/\overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}\right)^*$$

s'identifie à $T_0\mathrm{Teich}(f)$.

Soit $E = Q(\Lambda_f)$, et $F = \overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}$. Comme F est fermé, le dual topologique de E/F est $F^\perp \subset E^*$. On a $E^* = \mathrm{Bel}(\mathbb{P}^1)/N(\Omega_f)$. De plus, $F^\perp = \ker \Delta_f$, puisque $\Delta_f : E^* \to E^*$ est l'opérateur adjoint de ∇_f. Donc :

$$(E/F)^* = \{\mu \in \mathrm{bel}(f)\}/\{\mu \in N_f(\Omega_f)\} = T_0\mathrm{Teich}(f)^*$$

□

Notons que l'on en déduit en particulier que $Q(\Lambda_f)/\overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}$ a une dimension finie, inférieure ou égale à $2d-2$.

2.5 Espace de déformation d'Epstein

Dans cette section, nous présentons la théorie des espaces de déformations d'Epstein (voir [Eps09], [Eps93] et [BE09]), qui lui a permis entre autre d'obtenir des résultats fondamentaux sur la transversalité du lieu dans l'espace des paramètres où certaines relations critiques sont préservées.

L'idée est la suivante : on se donne deux ensembles finis A et B tels que $A \subset B$ et $f(A) \subset B$, et l'on s'intéresse à $f_{|A} : A \to B$. Pour que cela ait un sens dynamique, il faut que A soit composé de cycles ou de morceaux d'orbites critiques de f. On veut décrire les fractions rationnelles g pour lesquelles on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^1, A) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{P}^1, B) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{P}^1, \phi(A)) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{P}^1, \psi(B)) \end{array}$$

où ϕ et ψ sont des bijections, avec $\phi_{|A} = \psi_{|A}$.

On va construire une variété complexe $\mathrm{Def}_A^B(f)$, qui va paramétriser holomorphiquement des fractions rationnelles de la forme $g = \phi \circ f \circ \psi^{-1}$, où $\phi_{|A} = \psi_{|A}$ et ϕ et ψ sont des homéomorphismes quasiconformes. On obtient ainsi un espace plus grand que $\mathrm{Teich}(f)$, qui paramétrise les fractions rationnelles de la forme $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. Plus précisément, on verra qu'il y a une immersion naturelle de $\mathrm{Teich}(f)$ dans les espaces $\mathrm{Def}_A^B(f)$.

2.5.1 Définition et généralités

Définition 2.5.1. Soit $A \subset B \subset \mathbb{P}^1$ deux ensembles finis. On définit $\varpi_{A,B} : \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, B) \to \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, A)$ l'application d'oubli, qui est induite par l'identité

$$\mathrm{Id} : \mathrm{bel}(\mathbb{P}^1 \setminus A) \to \mathrm{bel}(\mathbb{P}^1 \setminus B).$$

Définition 2.5.2. Soit $A, B \subset \mathbb{P}^1$ deux ensembles finis tels que $A \subset f^{-1}(B)$ et $V_f \subset B$. Comme $f : \mathbb{P}^1 - f^{-1}(B) \to \mathbb{P}^1 - B$ est un revêtement, on peut tirer en arrière par f toute structure complexe sur $\mathbb{P}^1 - B$ pour obtenir une structure complexe sur $\mathbb{P}^1 - f^{-1}(B)$ et donc sur $\mathbb{P}^1 - A$. Cette application de tiré en arrière passe au quotient et définit une application holomorphe $\sigma_{f,A,B} : \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, B) \to \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, A)$.

Définition 2.5.3. Soit $A, B \subset \mathbb{P}^1$ des ensembles finis, tels que
- $A \subset B \cap f^{-1}(B)$
- $\mathrm{card}\, A \geq 3$
- $V_f \subset B$.

On définit $\mathrm{Def}_A^B(f) = \{\tau \in \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, B), \varpi_{A,B}(\tau) = \sigma_{f,A,B}(\tau)\}$

Proposition 2.5.4. La codifférentielle de $\varpi_{A,B}$ est l'injection $D\varpi_{A,B}(0) : Q(A) \to Q(B)$. La codifférentielle de $\sigma_{f,A,B}$ est le poussé en avant $D\sigma_{f,A,B}(0) = f_* : Q(A) \to Q(B)$.

Voir [Eps09].

Théorème 2.5.5. *Soit f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$ qui n'est pas un exemple de Lattès. Alors l'espace* $\mathrm{Def}_A^B(f)$ *est une sous-variété de* $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, B)$*, de dimension* $\mathrm{card}\, B - A$ *et de plan cotangent* $Q(B)/\nabla_f Q(A)$.

Démonstration. D'après le théorème des fonctions implicites, il suffit de montrer que $D\sigma_{f,A,B} - D\varpi_{A,B}$ est surjective. Or d'après la proposition 2.5.4 et la proposition 2.3.2, l'application duale $D^*\sigma_{f,A,B} - D^*\varpi_{A,B} : Q(A) \to Q(B)$ est injective (puisque f n'est pas un exemple de Lattès), ce qui achève la preuve. Le fait que la dimension soit égale à $\mathrm{card}\, B - A$ vient du fait que $\dim Q(B) = \mathrm{card}\, B - 3$, $\dim Q(A) = \mathrm{card}\, A - 3$, et de l'injectivité de ∇_f sur $Q(A)$. □

Il y a une application holomorphe naturelle $\Phi_{A,B} : \mathrm{Def}_A^B(f) \to \mathrm{rat}_d$ donnée par $[\mu] \mapsto g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, où ψ est un homéomorphisme quasiconforme associé à $[\mu]$ et ϕ est un second homéomorphisme quasiconforme associé à $\sigma_{f,A,B}([\mu]) = \varpi_{A,B}([\mu])$. On peut montrer (voir [Eps09]) que la classe de g dans rat_d ne dépend pas du choix des représentants ϕ et ψ. Comme dans le cas de l'espace de Teichmüller dynamique, on peut relever cette application en une application holomorphe $\Phi_{A,B}^Z : \mathrm{Def}_A^B(f) \to \mathrm{Rat}_d$ par le choix d'un ensemble $Z \subset A$ de cardinal 3, en normalisant ϕ et ψ par la condition de fixer Z point par point.

Si $\lambda \mapsto [\mu_\lambda]$ est une courbe holomorphe dans $\mathrm{Def}_A^B(f)$ représentée par un homéomorphisme quasiconforme ψ_λ, et

$$f_\lambda = \psi_\lambda \circ f \circ \phi_\lambda^{-1} = \Phi_{A,B}^Z([\mu_\lambda]) \in \mathrm{Rat}_d,$$

un calcul simple montre que :

$$\eta := Df^{-1} \cdot \dot{f} = f^*\dot{\psi} - \dot{\phi} \tag{2.5.1}$$

(on rappelle que la notation $\dot{f}$ désigne la dérivée par rapport à λ en $\lambda = 0$).

Théorème 2.5.6. *L'application $\Phi_{A,B}^Z : \mathrm{Def}_A^B(f) \to \mathrm{Rat}_d$ est une immersion holomorphe si A ne contient pas de cycles paraboliques.*

Voir [Eps09] pour la preuve. Une conséquence majeure de ce résultat est que l'on peut transférer tous les résultats de transversalités prouvés dans l'espace $\mathrm{Def}_A^B(f)$ à Rat_d.

On suppose maintenant qu'on a choisi A de façon à ce que A ne contienne pas de cycle parabolique. Soit ϕ un homéomorphisme quasiconforme de $\mathbb{P}^1$, dont la forme de Beltrami μ est f-invariante : alors $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$ est une fraction rationnelle. En particulier, si l'on note $[\mu]$ la classe de μ dans $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1 - B)$, on voit que $[\mu] \in \mathrm{Def}_A^B(f)$. Autrement dit, il existe une application naturelle $\Phi : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Def}_A^B(f)$. Cette application est holomorphe. A. Epstein a une preuve non publiée du fait que cette application est une immersion, et en a déduit que l'application $\Psi_T^Z : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Rat}_d$ est une immersion, à l'aide du théorème 2.5.6.

Nous suivons ici un cheminement logique différent : on a démontré directement que Ψ_T^Z était une immersion, donc comme $\Psi_T^Z = \Phi_{A,B} \circ \Phi$, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.5.1. Supposons que f ne soit pas un exemple de Lattès et que A ne contienne pas de cycles paraboliques. Alors l'application $\Phi : \mathrm{Teich}(f) \to \mathrm{Def}_A^B(f)$ est une immersion.

Notons que la codifférentielle de Φ est l'application linéaire naturelle

$$D\Phi(0)^* : Q(B)/\nabla_f Q(A) \to Q(\Lambda_f)/\overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}$$

induite par l'inclusion $Q(B) \to Q(\Lambda_f)$.

En particulier, son noyau est :

$$\ker D\Phi(0)^* = \left(Q(B) \cap \overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}\right) / \nabla_f Q(A).$$

2.6 Application : valeurs critiques sommables

Définition 2.6.1. Une valeur critique v d'une fraction rationnelle f est dite sommable si la série $\sum_{n\geq 0} \|Df^n(v)\|^{-1}$ converge (la norme est celle de la métrique sphérique).

Théorème 2.6.2 (Makienko, [Mak05], [Mak10])**.** *Soit f une fraction rationnelle qui n'est pas un exemple de Lattès, a r valeurs critiques sommables v_i, aucun anneau de Herman et telle que l'adhérence des orbites des v_i sont des C-compacts. Alors*

$$\dim \ker D\Phi(0)^* \geq r.$$

En particulier, $\dim \mathrm{Teich}(f) \leq 2d - 2 - r$.

Démonstration. Soit $u_v \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ une forme linéaire non nulle de support inclus dans le singleton $\{v\}$, où v est une valeur critique sommable. Soit $w_n = \sum_{k=0}^{n}(f^k)_* u_v$: w_n est bien définie puisque comme v est sommable, $f^n(v) \notin \mathrm{Crit}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La condition de sommabilité implique que w_n converge dans $\Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ vers un élément w vérifiant $\nabla_f w = u_v$.

Soit $Z \subset \mathbb{P}^1$ un 3-cycle répulsif de f. D'après le théorème 1.4.8, il existe une différentielle quadratique $q \in Q(K \cup Z)$ et $r_1 \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ de support inclus dans Z telles que $w = \overline{\partial} q + r_1$. On obtient donc :

$$\nabla_f \overline{\partial} q = u_v - \nabla_f r_1,$$

le terme de droite étant une forme linéaire de support inclus dans $Z \cup \{v\}$, car $f(Z) = Z$. D'après la proposition 1.4.10, $f_* q$ est régulière et d'après la proposition 1.4.11, on a : $\mathrm{supp}\,(\overline{\partial}\nabla_f q) \subset V_f \cup Z$: donc $\nabla_f q \in Q(V_f \cup Z)$.

Les r valeurs critiques sommables fournissent r différentielles quadratiques linéairement indépendantes, par injectivité de ∇_f (théorème 2.3.8) et unicité dans le théorème 1.4.8. Ces différentielles quadratiques appartiennent par construction à

$$Q(B) \cap \nabla_f Q(\Lambda_f) \subset \ker D\Phi(0)^*.$$

(en effet, ici $A = Z$ et donc $Q(A) = \{0\}$). □

En particulier, ce théorème affirme que si toutes les valeurs critiques sont sommables, que f n'a pas d'anneaux de Herman et que son ensemble de Julia est un C-compact (ces deux dernières propriétés étant automatiquement vérifiées si f est un polynôme), alors f n'a pas de champs de droites invariants (cf. conjecture 2.1.12).

Nous allons maintenant donner une preuve simplifiée d'un résultat de Levin (voir [Lev11]).

Soit $\lambda \mapsto f_\lambda$ une famille holomorphe à un paramètre de fractions rationnelles de degré $d \geq 2$. On rappelle les notations suivantes :

$$\eta = Df^{-1} \cdot \frac{df_\lambda}{d\lambda}_{|\lambda=0} \in T(f)$$

est un champ de vecteur méromorphe à pôles inclus dans $\mathrm{Crit}(f)$, de multiplicités au plus celles des points critiques de f. L'espace vectoriel complexe $T(f)$ des tels champs de vecteurs a une dimension égale à $2d+1$ et s'identifie canoniquement à $T_f \mathrm{Rat}_d$.

On notera aussi :

$$\eta_n = Df^{-n} \cdot \frac{d(f_\lambda)^n}{d\lambda}_{|\lambda=0}.$$

Ainsi, $\eta = \eta_1$.

Lemme 2.6.3. *On a :*

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} (f^k)^* \eta$$

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$:

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} (f^k)^* \eta.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\eta_{n+1} &= Df^{-(n+1)} \cdot \frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} f_\lambda^{n+1} \\
\eta_{n+1} &= Df^{-(n+1)} \cdot \left(\dot{f} \circ f^n + Df \circ f^n \cdot (\dot{f^n}) \right) \\
\eta_{n+1} &= (f^n)^* \eta + Df^{-n} \cdot (\dot{f^n}) \\
\eta_{n+1} &= (f^n)^* \eta + \eta_n.
\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence. □

Une conséquence de cette formule est que si v est une valeur critique sommable, alors $\eta_n(v)$ converge :

Définition 2.6.4. Si v est une valeur critique sommable, on note

$$\xi(v) = \sum_{k=0}^{\infty} (f^k)^* \eta(v) \in T_v \mathbb{P}^1.$$

Une façon de penser à ces vecteurs $\xi(v_i)$ est comme un ratio limite entre une dérivée dynamique (par rapport à z) et paramétrique (par rapport à λ).

On rappelle que l'application $\nabla_f : Q(K) \to Q(K \cup V_f)$, K étant un compact invariant de l'ensemble de Julia, est injective dans chacun des deux cas suivants :

— f n'a pas de champs de droites invariants

— K est un C-compact et f n'a pas d'anneaux de Herman.

Théorème 2.6.5 (Levin, [Lev11])**.** *Supposons que f soit une fraction rationnelle qui a r valeurs critiques sommables $(v_i)_{1\leq i\leq r}$, et que si $i \neq j$, v_i ne soit pas dans l'orbite de v_j. Suposons aussi que ∇_f soit injective sur $Q(K)$, où K est l'adhérence des orbites des v_i. L'application linéaire*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : T(f) &\to \bigoplus_{1\leq i\leq r} T_{v_i}\mathbb{P}^1 \\ \eta &\mapsto (\xi(v_i))_{1\leq i\leq r} \end{aligned}$$

a un rang maximal, c'est-à-dire égal à r.

Démonstration. Soit $A = Z$ un cycle répulsif de cardinal 3 de f. Soit $B = A \cup V_f$. Comme dans la preuve du théorème 2.6.2, à chaque valeur critique sommable v_i on va associer une différentielle quadratique intégrable q_i telle que $\nabla_f q_i \in Q(B)$. D'après le théorème 2.5.5, la dimension de $\mathrm{Def}_A^B(f)$ est égale au nombre de valeurs critiques de f, donc en particulier est supérieure à r. D'après le théorème 2.5.6, il suffit donc de montrer que la restriction de $\mathcal{V}$ à l'image de $D\Phi_{A,B}^Z(0)$ a un rang égal à r. Pour $\eta \in \mathrm{Im}\, D\Phi_{A,B}^Z(0)$, on a $\eta = 0$ sur Z et donc $(f^n)^*\eta = 0$ sur Z pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, il suffit de prouver le résultat en remplaçant les vecteurs $\xi(v_i)$ par les nombres complexes

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \log \mathrm{BR}(z_1, z_2, z_3, v_i + t\xi(v_i)) = \mathrm{Res}(\phi_i \cdot \xi, v_i)$$

où $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$, BR est le birapport, et ϕ_i est la différentielle quadratique élémentaire de pôles z_1, z_2, z_3, v_i codant la différentielle logarithmique du birapport (voir proposition 1.2.12). En effet, l'application $T_{v_i}\mathbb{P}^1 \ni \mathbf{v} \mapsto \mathrm{Res}(\phi_i \cdot \mathbf{v}, v_i) \in \mathbb{C}$ est un isomorphisme.

Soit donc $\eta = D\Phi_{A,B}^Z(0) \cdot [\mu]$, où $\eta \in T(f)$ et $[\mu] \in T_0\mathrm{Def}_A^B(f)$.

On posera

$$B_i^Z([\mu]) := \frac{d}{dt}_{|t=0} \log \mathrm{BR}(z_1, z_2, z_3, v_i + t\xi(v_i)),$$

où $\xi(v_i) \in T_{v_i}\mathbb{P}^1$ est associé à η et à $[\mu] \in T_0\mathrm{Def}_A^B(f)$.

Soit $q_{i,0} = \phi_i$, et soit $u_i \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ la forme linéaire de support $\{v_i\}$ définie par $T_{v_i}\mathbb{P}^1 \ni \mathbf{v} \mapsto \mathrm{Res}(\phi_i \cdot \mathbf{v}, v_i) \in \mathbb{C}$. Comme dans la preuve du théorème 2.6.2, on pose $w_i = \sum_{n\geq 0} f_*^n u_i$, et q_i la différentielle quadratique régulière telle que $\overline{\partial} q_i = w_i$. Par construction,

$$q_i = \sum_{n\geq 0} q_{i,n}$$

où $q_{i,n}$ est une différentielle quadratique élémentaire ayant des pôles en $f^n(v_i)$ et en $B = Z \cup V_f$, et tel que $\overline{\partial} q_{i,n} = f_*^n \overline{\partial} q_{i,0}$.

Remarqons que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, f^n(v_i)) = B_i^Z([\mu]).$$

En effet, par définition,

$$\langle f_*^n u_i, \eta\rangle = \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot(f^n)^*\eta, f^n(v_i)) = \frac{d}{dt}\log \mathrm{BR}\left(z_1, z_2, z_3, v_i + t((f^n)^*\eta)(v_i)\right),$$

et $\xi(v_i) = \sum_{n\geq 0}((f^n)^*\eta)(v_i)$.

Si $\lambda \mapsto [\mu_\lambda]$ est une courbe holomorphe de $\mathrm{Def}_A^B(f)$ tangente à $[\mu] \in T_0\mathrm{Def}_A^B(f)$ au point base, on peut relever $\lambda \mapsto [\mu_\lambda]$ en une courbe holomorphe de représentants $\lambda \mapsto \mu_\lambda$, et les solutions normalisées ψ_λ des équations de Beltrami associées vérifient que $\overline{\partial}\dot{\psi} = \overline{\partial}\frac{d}{d\lambda}\psi_\lambda$ est un représentant de $[\mu]$.

Le lemme suivant va permettre de déterminer une représentation naturelle de la forme linéaire B_i^Z en termes de différentielles quadratiques :

Lemme 2.6.6. *Soit $\mu = \overline{\partial}\dot{\psi}$ un représentant de $[\mu] \in T_0\mathrm{Def}_A^B(f)$. On a :*

$$\int_{\mathbb{P}^1} \nabla_f q_i \cdot \mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, f^n(v_i)).$$

Démonstration du lemme 2.6.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la forme différentielle $q_{i,n}\cdot\eta$ est méromorphe sur $\mathbb{P}^1$, donc la somme de ses résidus est nulle : donc

$$\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, f^n(v)) = -\sum_{z\in Z\cup C_f} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, z).$$

Donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, f^n(v_i)) = -\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{z\in Z\cup C_f} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta)$$

D'après 2.5.1, on a $\eta = f^*\dot{\psi} - \dot{\phi}$, et $\dot{\phi} = \dot{\psi}$ sur $A = Z$. Donc pour tout $z \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, z) = \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot(f^*\dot{\psi} - \cdot\psi), z) = \mathrm{Res}(f_*q_{i,n}\cdot\dot{\psi}, f(z)) - \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\dot{\psi}, z).$$

Donc :

$$-\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{z\in A} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, z) = \sum_{z\in A} \mathrm{Res}(\nabla_f q_i\cdot\dot{\psi}, z).$$

De plus, pour tout $c \in V_f$:

$$\begin{aligned}
-\sum_{c\in C_f} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, c) &= -\sum_{c\in C_f} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot(f^*\dot{\psi} - \dot{\phi}), c)\\
&= -\sum_{c\in C_f} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot f^*\dot{\psi}, c)\\
&= -\sum_{v\in V_f} \mathrm{Res}(f_*q_{i,n}\cdot\dot{\psi}, v)\\
&= \sum_{v\in V_f} \mathrm{Res}(\nabla_f q_{i,n}\cdot\dot{\psi}, v)
\end{aligned}$$

et donc :

$$-\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{c\in C_f} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, c) = \sum_{v\in V_f} \mathrm{Res}(\nabla_f q_i\cdot\dot{\psi}, v).$$

Pour résumer, on a donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}(q_{i,n}\cdot\eta, f^n(v_i)) = \sum_{z\in B} \mathrm{Res}(\nabla_f q_i\cdot\dot{\psi}, z).$$

Il suffit alors pour conclure d'appliquer la proposition 1.1.11, qui affirme que

$$\sum_{z\in B} \mathrm{Res}(\nabla_f q_i\cdot\dot{\psi}, z) = \int_{\mathbb{P}^1} \nabla_f q_i\cdot\overline{\partial}\dot{\psi}.$$

□

Retournons maintenant à la preuve du théorème 2.6.5. D'après le lemme ci-dessus, on a donc :

$$B_i^Z([\mu]) = \int_{\mathbb{P}^1} \nabla_f q_i\cdot[\mu]$$

pour tout $[\mu]\in \mathrm{Def}_A^B(f)$. Autrement dit, la classe de la différentielle quadratique $\nabla_f q_i$ dans $Q(B)/\nabla_f Q(A)$ représente la forme linéaire $B_i^Z : T_0\mathrm{Def}_A^B(f)\to\mathbb{C}$. Or, les classes des r différentielles quadratiques $\nabla_f q_i$ sont linéairement indépendantes dans $T_0^*\mathrm{Def}_A^B(f) = Q(B)/\nabla_f Q(A)$, par injectivité de ∇_f (voir théorème 2.3.8). Donc, les r formes linéaires B_i^Z sont linéairement indépendantes, ce qui équivaut au fait que l'application $\mathcal{V}$ ait un rang égal à r. □

2.7 Déformation de mesures

Dans cette section, nous introduisons un espace de déformation $\mathrm{Def}_K(f)$ analogue dans un certain sens à l'espace de déformation d'Epstein $\mathrm{Def}_A^B(f)$, où K est un compact invariant arbitraire (en particulier, pas nécessairement fini). La grande différence réside dans le fait que nous ne pouvons garantir en général que $\mathrm{Def}_K(f)$ est muni d'une structure de sous-variété analytique. Par contre, tout mouvement holomorphe dynamique de K se factorise par $\mathrm{Def}_K(f)$, donc si l'on suppose *a priori* l'existence d'un mouvement holomorphe dynamique paramétré par une variété complexe Λ, on pourra toujours supposer que $\Lambda\subset\mathrm{Def}_K(f)$. On a alors une description du plan cotangent $T_0^*\Lambda$ en termes de différentielles quadratiques.

Si l'on se donne une mesure de Radon invariante ergodique ν sur un compact hyperbolique K, on construira une (classe de) différentielle quadratique représentant la différentielle de l'exposant de Lyapunov de ν. Cette construction (de nature purement formelle) généralise la construction d'une classe de différentielle quadratique représentant la différentielle du multiplicateur d'un cycle (voir [Eps09]).

2.7.1 Mouvements holomorphes dynamiques et espaces de déformation

Définition 2.7.1. Soit f une fraction rationnelle et K un compact invariant par f. Soit $h : K\times\Lambda\to\mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe de K. On dit que h est un mouvement holomorphe dynamique s'il existe une application holomorphe $\Lambda\ni\lambda\mapsto f_\lambda\in\mathrm{Rat}_d$ telle que pour tout $\lambda\in\Lambda$, pour tout $z\in K$:

$$h_\lambda\circ f(z) = f_\lambda\circ h_\lambda(z).$$

De plus, on dira que h est admissible si les valeurs critiques de f_λ dépendent holomorphiquement de λ, et si $\lambda\mapsto f_\lambda$ est une immersion.

Définition 2.7.2. Soit K un compact invariant par f. On notera :
- $\varpi_K : \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, K\cup V_f)\to\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, K)$ l'application d'oubli
- $\sigma_{f,K} : \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, K\cup V_f)\to\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, K)$ l'application de tiré en arrière
- $\mathrm{Def}_K(f) = \{\tau\in\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, K\cup V_f), \varpi_K(\tau) = \sigma_{f,K}(\tau)\}$

La définition de $\mathrm{Def}_K(f)$ est calquée sur celle des espaces de déformations d'Epstein. Cependant, lorsque K est de cardinal infini, il n'est pas clair en général que $\mathrm{Def}_K(f)$ est une sous-variété complexe de $\mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, K \cup V_f)$. Ce serait notamment le cas si l'application $\varpi_K - \sigma_{f,K}$ était Fredholm (on fait ici un abus de notation : la soustraction n'est définie que localement et en coordonnées). Ceci nous amène à la question suivante :

Question : Sous quelle condition sur un compact K invariant par f peut-on garantir l'existence d'une constante $C_K > 0$ telle que l'application $\nabla_f : Q(K) \to Q(K \cup V_f)$ vérifie

$$\|q\| \leq C_K \|\nabla_f q\| \tag{2.7.1}$$

pour tout $q \in Q(K)$?

Nous verrons que même lorsque $\nabla_f : Q(K) \to Q(K \cup V_f)$ est injective, il n'existe pas nécessairement une telle constante lorsque K est de cardinal infini.

Il reste par contre vrai que tout point de $\mathrm{Def}_K(f)$ correspond à un triplet (ϕ, ψ, g), g étant une fraction rationnelle, faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^1, K) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{P}^1, K \cup V_f) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ (\mathbb{P}^1, \phi(K)) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{P}^1, \psi(K \cup V_f)) \end{array}$$

Soit $Z \subset K$ un ensemble de cardinal 3. On notera $\Psi_K^Z : \mathrm{Def}_K(f) \to \mathrm{Rat}_d$ l'application qui au triplet (ϕ, ψ, g) associe g, où ϕ et ψ sont normalisées en fixant ponctuellement Z. Si $\mathrm{Def}_K(f)$ contient une variété complexe Λ, alors $\Psi_K^Z : \Lambda \to \mathrm{Rat}_d$ est holomorphe.

La proposition suivante, qui est une application dynamique du théorème 2.4.13, dit essentiellement que $\mathrm{Def}_K(f)$ est l'ensemble universel paramétrant tout mouvement holomorphe dynamique admissible de K.

Proposition 2.7.3. Soit $(h, \lambda \mapsto f_\lambda)$ un mouvement holomorphe dynamique admissible. Soit $\phi : \Lambda \to \mathrm{Teich}(\mathbb{P}^1, K \cup V_f)$ l'application holomorphe fournie par le théorème 2.4.13. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\phi(\lambda) \in \mathrm{Def}_K(f)$, et $f_\lambda = \Psi_K^Z \circ \phi(\lambda)$.

Démonstration. Si $\phi(\lambda) \in \mathrm{Teich}(K \cup V_f)$ est représenté par un homéomorphisme quasiconforme ψ_λ, on sait par hypothèse que $\psi_\lambda \circ f = f_\lambda \circ \psi_\lambda$ sur K. Soit χ_λ l'unique représentant de $\sigma_{f,K}(\phi(\lambda))$ tel que $g_\lambda = \psi_\lambda \circ f \circ \chi_\lambda^{-1}$ soit holomorphe sur $\mathbb{P}^1 - V_f$. L'application g_λ est continue et holomorphe en dehors d'un ensemble fini, donc est holomorphe sur tout $\mathbb{P}^1$: g_λ est donc une fraction rationnelle. Ses valeurs critiques (avec multiplicité) sont les éléments de $\psi_\lambda(V_f)$, c'est-à-dire les mêmes que celles de f_λ. De plus, elle est homotope à f_λ. Donc $f_\lambda = g_\lambda$, et $\psi_\lambda \circ f = \chi_\lambda \circ f$ sur K ; comme $f(K) = K$, on en déduit que ψ_λ coïncide avec χ_λ sur K, et donc que $\sigma_{f,K}(\tau) = \varpi_{f,K}(\tau)$. □

Dans la suite, on s'intéressera seulement à des petites déformations de f. Étant donnée la proposition 2.7.3, si Λ est une variété complexe de dimension $k \leq 2d-2$ paramétrant un mouvement dynamique holomorphe admissible de K, alors pour des considérations locales on ne perd pas de généralité à supposer que Λ est un petit polydisque de dimension k dans $\mathrm{Def}_K(f)$. Si c'est le cas, alors

$$T_0\Lambda \subset \ker(D\sigma_{f,K}(0) - D\varpi_{K \cup V_f, K}(0)),$$

et tout élément de $Q(K \cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$ définit naturellement une forme linéaire sur $T_0\Lambda$.

Corollaire 2.7.1. Soit K un compact invariant. Supposons que $\nabla_f Q(K)$ soit dense dans $Q(K \cup V_f)$. Alors il n'existe pas de mouvement holomorphe dynamique admissible non-trivial de K.

Démonstration. Soit trois points $z_i \in K$, $1 \leq 1 \leq 3$, et $z \in K - \{z_i\}$. La différentielle au point base de la fonction $B : \Lambda \ni \lambda \mapsto \log \mathrm{BR}(z_1 : z_2 : z_3 : z)$ est représentée par la classe de $q_{z_1,z_2,z_3,z}$ dans $Q(K \cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$ (voir proposition 1.2.12). Donc, si $Q(K \cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$ est trivial, aucun point ne bouge, et donc tout mouvement holomorphe admissible est en fait trivial. □

Ainsi, si par exemple $K = \mathcal{J}$, on obtient l'obstruction suivante à la $\mathcal{J}$-stabilité : si $\nabla_f Q(\mathcal{J})$ est dense dans $Q(\mathcal{J} \cup V_f)$ alors f n'est pas $\mathcal{J}$-stable.

2.7.2 Transformée de Beurling-Ahlfors

Dans toute cette section, K désigne un compact invariant par f, de mesure de Lebesgue nulle, et $h : K \times \Lambda \to \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe dynamique admissible, paramétré par $\Lambda \subset \mathrm{Def}_K(f)$.

Soit ν une mesure de Radon invariante ergodique pour f, à support inclus dans K. On note $\nu_\lambda = (h_\lambda)_*\nu$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, ν_λ est une mesure de Radon invariante et ergodique pour f_λ. On note $\mathcal{L}_\nu(\lambda)$ l'exposant de Lyapunov de ν_λ pour f_λ. La fonction $\mathcal{L}_\nu$ est donc bien définie, et est harmonique sur Λ.

Rappelons le fait suivant classique en théorie du potentiel :

Théorème 2.7.4. *Soit ν une mesure de Radon de support K compact dans $\mathbb{C}$. Soit*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \log|z - y| d\nu(y).$$

Alors u est une fonction sous-harmonique, harmonique en dehors de K, et $dd^c u = \nu$ (au sens des courants).

La fonction u s'appelle le potentiel logarithmique de la mesure ν.

Théorème 2.7.5. *Soit ν une mesure de Radon invariante par f, de support $K \subsetneq \mathbb{P}^1$. Soit z une coordonnée affine dans laquelle $K \subset \mathbb{C}$. La classe de divergence le long de K*

$$B(\nu) = \left[\int_{\mathbb{C}} \frac{d\nu(y)}{(z-y)^2} dz^2 \right]$$

est indépendante de la coordonnée z. De plus, si $\int_K \|Df\|^{-2} d\nu < +\infty$ elle est invariante par f.

Remarquons que si K est hyperbolique, il est inclus dans l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$, et donc K ne peut pas être $\mathbb{P}^1$ tout entière, et dans ce cas on pourra donc bien trouver une carte affine dans laquelle $K \subset \mathbb{C}$. De plus, seule la classe de divergence de q est bien définie (indépendante des coordonnées). La notation $B(\nu)$ fait référence à la transformation de Beurling-Ahlfors, qui fait également intervenir une convolution avec $\frac{1}{z^2}$.

Démonstration. Montrons que la divergence $B(\nu)$ ne dépend pas du choix de coordonnées z. Remarquons que si l'on note u le potentiel logarithmique de ν (dans la coordonnée z), alors

$$2\pi \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{d\nu(y)}{(z-y)^2}.$$

Soit $w = \phi(z)$ une nouvelle coordonnée affine dans laquelle $K \subset \mathbb{C}$, et posons $\psi = \phi^{-1}$. Il suffit de montrer que les différentielles quadratiques $\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z) dz^2$ et $\frac{\partial^2}{\partial w^2} u \circ \psi(w) dw^2$ diffèrent d'une différentielle quadratique intégrable sur K. On a :

$$\frac{\partial}{\partial w} u(\psi(w)) = \psi'(w) \frac{\partial u}{\partial z}(\psi(w))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial w^2}u(\psi(w)) = \psi''(w)\frac{\partial u}{\partial z}(\psi(w)) + (\psi'(w))^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\psi(w)).$$

Donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial w^2}u\circ\psi(w)dw^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z)dz^2 = \frac{\psi''(w)}{\psi'(w)^2}\frac{\partial u}{\partial z}(z)dz^2$$

avec $\psi(w) = z$.

Or, $\frac{\partial u}{\partial z} = \int_{\mathbb{C}} \frac{d\nu(y)}{z-y}$, et ψ est un changement de carte holomorphe, donc $\frac{\psi''(w)}{\psi(w)^2}\frac{\partial u}{\partial z}(z)dz^2$ est une différentielle quadratique intégrable au voisinage de K. Donc la divergence est bien inchangée par changement de cartes.

Soit $q = \int_{\mathbb{C}} \frac{d\nu(y)}{(z-y)^2}dz^2$ une différentielle quadratique représentant $B(\nu)$ (dans une coordonnée z choisie telle que $f^{-1}(K) \subset \mathbb{C}$). Montrons que sa divergence est invariante. Commençons par calculer f_*q :

$$\begin{aligned}
f_*q(z) &= \sum_{x\in f^{-1}(z)} \frac{1}{f'(x)^2}\int_{\mathbb{C}} \frac{d\nu(y)}{(x-y)^2}dz^2 \\
&= \int_{\mathbb{C}} \sum_{x\in f^{-1}(z)} \frac{d\nu(y)}{f'(x)^2(x-y)^2}dz^2 \\
&= \int_{\mathbb{C}} f_*\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2}\right)d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{1}{(z-f(y))^2} + \frac{f''(y)}{f'(y)^2}\frac{1}{z-f(y)}\right)d\nu(y)dz^2 + \phi
\end{aligned}$$

où ϕ est une différentielle quadratique qui a des pôles au plus simples aux valeurs critiques de f, et un pôle au plus double en $f(\infty) \notin K$: donc la divergence de ϕ le long de K est nulle. Pour la dernière égalité, on a utilisé le lemme 2.2.6. Par ailleurs, la différentielle quadratique $\int_{\mathbb{C}} \frac{f''(y)}{f'(y)^2}\frac{1}{z-f(y)}d\nu(y)dz^2$ est intégrable au voisinage de K puisque par hypothèse,

$$\|Df\|^{-1} \in L^2(\nu).$$

Donc la divergence de q est bien invariante. □

Rappelons que si $[q]$ est une divergence invariante le long de K, $\nabla_f[q]$ définit naturellement un élément de

$$Q(K\cup V_f)/\overline{\nabla_f Q(K)}$$

et définit donc naturellement un élément de $T_0^*\Lambda$.

Définition 2.7.6. Si $\Phi : \Lambda \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, on dira qu'une divergence invariante code la différentielle $D\Phi(0)$ si elle représente cette différentielle dans $T_0^*\Lambda$. Dans le cas d'une fonction $\Phi : \Lambda \to \mathbb{R}$ qui est $\mathbb{R}$-différentiable, on dit qu'une divergence invariante $[q]$ code la différentielle $D\Phi(0)$ si pour tout $[\mu] \in T_0\Lambda$,

$$D\Phi(0)\cdot[\mu] = \Re\left(\int_{\mathbb{P}^1} \nabla_f[q]\cdot[\mu]\right).$$

Théorème 2.7.7. *Soit K un compact hyperbolique invariant, et ν une mesure de Radon invariante régulière de support K. Alors la divergence $B(\nu)$ code la différentielle de l'exposant de Lyapunov de ν, $D\mathcal{L}_\nu(0)$.*

Démonstration. Soit ν une mesure de Radon comme dans les hypothèses du théorème.

Il suffit de prouver le théorème pour un représentant de $\nabla_f B(\nu)$: on travaillera donc avec un représentant $\phi \in Q(V_f \cup Z)$.

Rappelons quelques notations : si $[\mu] \in T_0\Lambda$ est représenté par $\overline{\partial}\xi$, où ξ est un champ de vecteur quasiconforme, alors les valeurs de ξ (Z-normalisé) sur K ne dépendent que de $[\mu]$ et non du choix du représentant. De plus, ξ est le champ de vecteur correspondant au mouvement holomorphe de K :

$$\xi = \frac{dh_\lambda}{d\lambda}_{|\lambda=0}.$$

Si l'on note $\eta = Df^{-1} \cdot \frac{df_\lambda}{d\lambda} \in T_f\mathrm{Rat}_d$ la déformation infinitésimale correspondante, c'est-à-dire $\eta = D\Phi_K^Z(0) \cdot [\mu]$, on a la relation suivante sur K :

$$\eta = f^*\xi - \xi,$$

et η est un champ de vecteur méromorphe, dont les pôles sont exactement les points critiques de f avec la même multiplicité.

Lemme 2.7.8. *Il existe un représentant q de $B(\nu)$ tel que $\nabla_f q \in Q(V_f \cup Z)$ et*

$$D\mathcal{L}_\nu(0) \cdot [\mu] = -\Re\left(\sum_{y \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, y)\right)$$

Démonstration. Notons que dans la preuve de ce lemme, on effectuera des calculs en coordonnées et que le représentant exhibé (et encore moins sa construction) n'est pas nécessairement naturel. Ce n'est pas gênant puisque la conclusion du théorème porte sur un objet qui est lui bien défini : la divergence $B(\nu)$.

Commençons par calculer $D\mathcal{L}_\nu(0) \cdot [\mu]$. Observons que comme K est hyperbolique, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et pour tout $y \in K$, $f'_\lambda \circ h_\lambda(y) \neq 0$. Donc pour tout $y \in K$, $\log|f'_\lambda \circ h_\lambda(y)| = \Re\left(\log f'_\lambda \circ h_\lambda(y)\right)$ est bien définie (et est indépendante du choix de la branche de logarithme complexe, qui peut dépendre de y). De plus, on a :

$$\frac{d}{dt}\log|f'_t \circ h_t(y)| = \Re\left(\frac{d}{dt}\log f'_t \circ h_t(y)\right) = \Re\left(\frac{f''(y)}{f'(y)}\xi(y) + \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)}\right).$$

(la différentiation étant réelle).

Comme $(\lambda, y) \mapsto \log|f'_\lambda \circ h_\lambda(y)|$ est intégrable par rapport à ν en y et analytique en λ, on peut dériver sous l'intégrale :

$$D\mathcal{L}_\nu(0) \cdot [\mu] = \int_K \frac{d}{d\lambda}\log|f'_\lambda \circ h_\lambda(y)|d\nu(y) \tag{2.7.2}$$

$$= \int_K \Re\left(\frac{f''(y)}{f'(y)}\xi(y) + \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)}\right)d\nu(y). \tag{2.7.3}$$

Soit $q_2 = \int_K \frac{d\nu(y)}{(z-y)^2}$, Z-normalisé de manière à n'avoir comme pôles en dehors de K que 3 pôles simples en Z : q_2 est un représentant de $B(\nu)$.

D'après le lemme 2.2.6,

$$\nabla_f q_2 = \int_K \frac{f''(y)}{f'(y)^2}\frac{d\nu(y)}{(z - f(y))}dz^2 + \phi_2$$

où $\phi_2 \in Q(V_f \cup Z)$.

Soit $u \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ définie par :

$$\langle u, X\rangle = \int_K \frac{f''(y)}{f'(y)} \frac{X \circ f(y)}{f'(y)} d\nu(y) = f_*(\frac{f''}{f'} \otimes \nu).$$

Ainsi, u est bien définie puisque K est hyperbolique, et donc ne contient pas de points critiques. D'après la proposition 1.4.24, il existe $v \in \Gamma(T\mathbb{P}^1)^*$ telle que $\nabla_f v = -u$, et une différentielle quadratique régulière $q_1 \in Q(K \cup V_f)$ telle que le support de $\overline{\partial} q_1 - v$ soit contenu dans Z. En particulier, si l'on pose $q = q_1 + q_2$, on a $\nabla_f q \in Q(V_f \cup Z)$ et q représente $B(\nu)$. De plus, q_1 est de la forme :

$$q_1 = \int_K q_1(y) d\nu(y)$$

où $q_1(y) \in Q(V_f \cup Z \cup \{y\})$.

On a :

$$\begin{aligned}
-\sum_{z \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, z) &= -\sum_{z \in C_f \cup Z} \int_K \mathrm{Res}\left((q_1(y) + \frac{dz^2}{(z-y)^2}) \cdot \eta, z \right) d\nu(y) \\
&= \int_K \mathrm{Res}(q_1(y) \cdot \eta, y) d\nu(y) + \int_K \mathrm{Res}\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2} \cdot \eta, y \right) d\nu(y) \\
&= \int_K \mathrm{Res}(q_1(y) \cdot (f^*\xi - \xi), y) d\nu(y) + \int_K \mathrm{Res}\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2} \cdot \eta, y \right) d\nu(y)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\eta(z) = \eta(y) + (z-y)\left(\frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)} - \frac{\dot{f}(y) f''(y)}{f'(y)^2} \right) + O(z-y)$$

et donc

$$\mathrm{Res}\left(\frac{dz^2}{(z-y)^2} \cdot \eta, y \right) = \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)} - \frac{f''(y)}{f'(y)^2} \dot{f}(y).$$

En réinjectant, on en déduit :

$$\begin{aligned}
-\sum_{z \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, z) &= \langle v, f^*\xi - \xi \rangle + \int_K \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)} - \frac{f''(y)}{f'(y)} \eta(y) \\
&= \langle u, \xi \rangle + \int_K \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)} + \frac{f''}{f'}(y)\xi(y) - \frac{f''}{f'}(y) f^*\xi(y) d\nu(y)
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de u, c'est-à-dire :

$$\langle u, \xi \rangle = \int_K \frac{f''}{f'}(y) f^*\xi(y) d\nu(y),$$

on a donc :

$$-\sum_{z \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, z) = \int_K \left(\frac{f''(y)}{f'(y)} \xi(y) + \frac{\dot{f}'(y)}{f'(y)} \right) d\nu(y).$$

Le lemme est alors prouvé, au regard de l'équation 2.7.2. □

Retournons maintenant à la preuve du théorème 2.7.7. D'après le lemme ci-dessus, il existe un représentant q de $B(\nu)$ tel que $\nabla_f q \in Q(V_f \cup Z)$ et

$$D\mathcal{L}_\nu(0) \cdot [\mu] = -\Re\left(\sum_{y \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, y) \right).$$

Or, si $y \in Z$, $\eta(y) = f^*\xi(y) - \xi(y)$, et donc :

$$\mathrm{Res}(q \cdot \eta, y) = \mathrm{Res}(q \cdot (\xi - f^*\xi), y).$$

De plus, si $c \in C_f$ est un point critique, et que c_λ est un point critique de f_λ dépendant holomorphiquement de λ, tel que $c = c_0$, on a :

$$\frac{d}{d\lambda}_{|\lambda=0} f_\lambda(c_\lambda) = \frac{df_\lambda}{d\lambda}_{|\lambda=0}(c).$$

Donc :

$$\begin{aligned} -\sum_{y \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot \eta, y) &= \sum_{y \in C_f \cup Z} \mathrm{Res}(q \cdot (\xi - f^*\xi), y) \\ &= \sum_{y \in V_f \cup Z} \mathrm{Res}(\nabla_f q \cdot \xi, y) \\ &= \int_{\mathbb{P}^1} \nabla_f q \cdot \overline{\partial}\xi. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de la proposition 1.1.11 et du fait que $\nabla_f q \in Q(K \cup V_f)$. Pour achever la preuve du théorème, rappelons que la quantité

$$\int_{\mathbb{P}^1} \nabla_f q \cdot \overline{\partial}\xi$$

ne dépend ni du représentant q de $B(\nu)$, ni du représentant $\overline{\partial}\xi$ de $[\mu] \in T_0\Lambda$. □

2.8 Sommes de Birkhoff de différentielles quadratiques

Dans cette section, nous allons nous intéresser au comportement des sommes de Birkhoff :

$$S_n q = \frac{1}{n} \sum_{k \leq n-1} f_*^k q$$

où $q \in Q(\Lambda_f)$.

L'intérêt de ces sommes vient notamment du fait que $S_n q$ converge vers 0 (dans $Q(\Lambda_f)$) si et seulement si $q \in \overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}$, c'est-à-dire si et seulement si q représente la forme linéaire triviale dans $T_0^*\mathrm{Teich}(f)$ (voir [Mak10]).

Ainsi, dans le cas des polynômes quadratiques, on pourrait reformuler la conjecture "pas de champ de droite invariants" de la façon suivante : notons q_c une différentielle quadratique élémentaire ayant un pôle en c et trois pôles sur un 3-cycle de f_c.

Conjecture 2.8.1. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $c \in \mathcal{J}(f_c)$, où $f_c(z) = z^2 + c$. Alors $S_n q_c$ converge vers 0.

Nous allons étudier le comportement de $S_n q$ en l'absence de champs de droite invariants. On montrera notamment que dans le cas où K est l'adhérence d'une orbite critique capturée par un cycle attractif, la propriété 2.7.1 n'est pas vérifiée.

L'outil principal est le résultat suivant de théorie ergodique :

Théorème 2.8.2 (Lemme ergodique de la moyenne)**.** *Soit $T : X \to X$ un opérateur non-dilatant d'un espace de Banach X, et $S_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$. Il y a exactement trois possibilités (mutuellement exclusives) :*

- *$S_n x$ admet une suite extraite convergeant faiblement vers 0 : alors $x \in \overline{(\mathrm{Id} - T)X}$ et $S_n x$ converge en fait vers 0 en norme*

— *$S_n x$ admet une suite extraite convergeant faiblement vers $y \neq 0$: alors y est un point fixe de T et $S_n x$ converge en fait vers y en norme*
— *$S_n x$ n'a aucune valeur d'adhérence faible dans X.*

Proposition 2.8.3. Soit $q \in Q(\Lambda_f)$. La suite $\|S_n q\|$ converge vers une limite l avec $l \leq \|[q]\|_T$, la norme de $[q] \in T_0^*\text{Teich}(f)$ pour la métrique de Teichmüller.

Démonstration. Soit $q \in Q(\Lambda_f)$. Commençons par montrer que $n\|S_n q\|$ vérifie la propriété de sous-additivité

$$(n+p)\|S_{n+p} q\| \leq n\|S_n q\| + p\|S_n q\|.$$

ce qui implique classiquement que $\|S_n q\|$ converge vers son infimum. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}(n+p)S_{n+p} q &= \sum_{k=0}^{n+p-1} f_*^k q \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_*^k q + f_*^n \sum_{k=0}^{p-1} f_*^k q\end{aligned}$$

et donc, comme $\|f_* q\| \leq \|q\|$ pour toute différentielle quadratique intégrable q :

$$(n+p)\|S_{n+p} q\| \leq n\|S_n q\| + p\|S_p q\|.$$

Il reste maintenant à montrer que la limite de $\|S_n q\|$ est inférieure à la distance de q à $\overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)}$. Soit $\epsilon > 0$, et soit $\phi_1, \phi_2 \in Q(\Lambda_f)$ telles que $q = \nabla_f \phi_1 + \phi_2$, avec $\|\phi_2\| \leq \delta + \epsilon$, où $\delta := d(q, \overline{\nabla_f Q(\Lambda_f)})$. On a :

$$S_n q = \nabla_f S_n \phi_1 + S_n \phi_2,$$

et $\|\nabla_f S_n \phi_1\| = O(\frac{1}{n})$, et $\lim_{n\to\infty} \|S_n \phi_2\| \leq \|\phi_2\|$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n q\| \leq \delta + \epsilon,$$

et comme ϵ est arbitraire, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n q\| \leq \delta.$$

□

Rappelons la définition suivante :

Définition 2.8.4. On appellera anneau de rotation toute composante connexe de Ω_f qui est un anneau de module fini inclus dans un anneau de Herman ou un disque de Siegel.

Si $\Omega \subset \mathbb{P}^1$ est un ouvert complètement invariant par f, notons $\text{Fix}(f_*, \Omega)$ l'espace des différentielles quadratiques invariantes par f dans $Q(\Omega)$.

Proposition 2.8.5. Soit $\Omega \subset \Omega_f$ la grande orbite d'un anneau de rotation, et $q \in Q(\Omega)$. Alors $Q(\Omega) = \text{Fix}(f_*, \Omega) \oplus \overline{\nabla_f Q(\Omega)}$ et $S_n q$ converge vers la projection de q sur $\text{Fix}(f_*)$ parallèlement à $\overline{\nabla_f Q(\Omega)}$.

Démonstration. D'après le lemme ergodique moyen, si $q \in Q(\Omega)$ est tel que $S_n q$ ne converge pas vers 0, alors $q \notin \overline{\nabla_f Q(\Omega)}$. Par ailleurs, l'analyse faite dans la section 2.4.2.3 montre que $\dim Q(\Omega)/\overline{\nabla_f Q(\Omega)} = 1$, et l'opérateur $f_* : Q(\Omega) \to \Omega$ admet exactement une droite de vecteur propre. Donc $Q(\Omega) = \text{Fix}(f_*, \Omega) \oplus \overline{\nabla_f Q(\Omega)}$ et le reste est une application directe du lemme ergodique de la moyenne. □

Proposition 2.8.6. Soit $\Omega \subset \Omega_f$ l'intersection de Ω_f et de la grande orbite du bassin d'attraction d'un cycle attractif, superattractif ou parabolique, et $q \in Q(\Omega)$. Alors ou bien $q \in \overline{\nabla_f Q(\Omega)}$ et $S_n q$ converge vers 0, ou bien $S_n q$ n'a aucune valeur d'adhérence faible dans $Q(\Omega)$. Dans le second cas, la suite de mesures $|S_n q|$ converge faiblement-* vers une somme de diracs équidistribués le long du cycle, de masse totale $|[q]|_T$.

Démonstration. Supposons que $q \in Q(\Omega)$ et $q \notin \overline{\nabla_f Q(\Omega)}$. Alors $S_n q$ ne converge pas vers 0, et comme $f_* : Q(\Omega) \to Q(\Omega)$ n'a pas de points fixes non nuls, la suite de différentielles quadratiques $S_n q$ n'a aucune valeur d'adhérence faible dans $Q(\Omega)$ d'après le lemme ergodique moyen.

Cependant, par compacité faible-*, la suite de mesures $|S_n q|$ admet au moins une valeur d'adhérence, que l'on notera ν. Cette valeur d'adhérence ne peut pas être nulle, et est une mesure de Radon invariante, de support inclus dans l'adhérence $\overline{\Omega}$. Comme tout point du bassin d'attraction converge vers le cycle, le support de ν est en fait inclus dans le cycle lui-même et la frontière du bassin, qui est incluse dans l'ensemble de Julia $\mathcal{J}$. Or ν ne peut pas charger l'ensemble de Julia : en effet, pour n'importe quel ensemble $A \subset \mathbb{P}^1$ tel que $f^{-1}(A) \subset A$, la suite $\int_A |S_n q|$ est décroissante, donc converge vers $\nu(A)$ et est majorée par

$$\int_A S_n|q| = \frac{1}{n} \sum_{k \leq n-1} \int_{f^{-n}(A)} |q|.$$

Soit U un ouvert de Ω tel que $f^{-1}(U) \subset U$ (on peut par exemple construire un tel ouvert en prenant un domaine fondamental D, et en posant $U = \sum_{n \geq 0} f^{-n}(D)$). Posons $A = (\mathbb{P}^1 - \Omega) \cup U$: alors A est un voisinage de la frontière $\partial\Omega$. De plus, la suite $\int_{f^{-n}(A)} |q|$ converge vers 0. Donc $\nu(A) = 0$ et donc $\nu(\partial\Omega) = \nu(\mathcal{J}(f)) = 0$.

Ceci prouve que ν est une mesure supportée par le cycle et invariante, donc elle ne peut qu'être une somme de diracs équidistribuée le long du cycle. Par ailleurs, la masse totale de $|S_n q|$ décroit, donc elle converge, et donc ne dépend pas de la suite extraite. Donc la suite de mesures $|S_n q|$ n'a qu'une valeur d'adhérence faible-*, donc converge. □

Corollaire 2.8.1. Supposons que f n'ait pas de champ de droites invariant. Alors pour tout $q \in Q(\Lambda_f)$, la suite de mesures $|S_n q|$ converge faiblement-* vers une mesure de Radon invariante, qui ne dépend que de la classe de q dans $Q(\Lambda_f)/\overline{\nabla_f Q(\Omega)}$, et de masse totale inférieure à $\|[q]\|_T$.

Démonstration. Comme f n'a pas de champ de droites invariants, il n'y a pas de différentielles quadratiques invariantes intégrables supportées par son ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$. Il suffit alors d'appliquer les propositions ci-dessus. □

Chapitre 3

Domaine errant en dimension supérieure

Le but de ce chapitre est de prouver le théorème 3.1.2, qui fournit une famille d'exemples d'endomorphismes polynômiaux de $\mathbb{C}^2$ ayant un domaine errant (voir [ABD$^+$14]). On rappelle qu'en dimension complexe un, le théorème de non-errance de Sullivan (théorème 2.4.28) affirme qu'une fraction rationnelle ne peut pas avoir de domaines errants. Le théorème 3.1.2 montre donc que la situation est différente en dimension supérieure.

3.1 Généralités

3.1.1 Énoncé

Le résultat principal du chapitre est :

Théorème 3.1.1. *Il existe des polynômes de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ tel que pour tout polynôme g de la forme $g(w) = w - w^2 + O(w^3)$, le produit fibré*

$$P(z, w) = \left(f(z) + \frac{\pi^2}{4} w, g(w) \right)$$

ait un domaine errant, qui s'accumule sur la droite invariante $\{w = 0\}$.

En particulier, on peut choisir le polynôme g de sorte qu'il ait le même degré que celui de f. Alors P se prolonge holomorphiquement en une application sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. De plus, on fournira une famille d'exemples à coefficients réels dont le domaine errant intersecte $\mathbb{R}^2$. Enfin, notons qu'il s'agit du premier exemple de domaine errant d'orbite bornée : en effet, la question de trouver un exemple de fonction transcendante entière ayant un domaine errant d'orbite bornée est ouverte.

Plus précisément, la condition requise sur f est que son *application de Lavaurs* de phase 0, noté $\mathcal{L}_f$, ait un point fixe attractif. L'application de Lavaurs sera définie précisément dans la section 3.2. Pour l'instant, précisons seulement qu'il s'agit d'une application holomorphe transcendante $\mathcal{L}_f : \mathcal{B}_f \to \mathbb{C}$ définie sur le bassin parabolique de f. On associera canoniquement une telle application $\mathcal{L}_f$ à tout polynôme f de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$, et l'application $\mathcal{L}_f$ dépendra holomorphiquement de f.

L'énoncé complet du théorème précédent est donc :

Théorème 3.1.2. *Soit un polynôme de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ dont l'application de Lavaurs de phase 0 a un point fixe attractif. Alors pour tout polynôme g de la forme $g(w) = w - w^2 + O(w^3)$, le produit fibré*

$$P(z, w) = \left(f(z) + \frac{\pi^2}{4} w, g(w) \right)$$

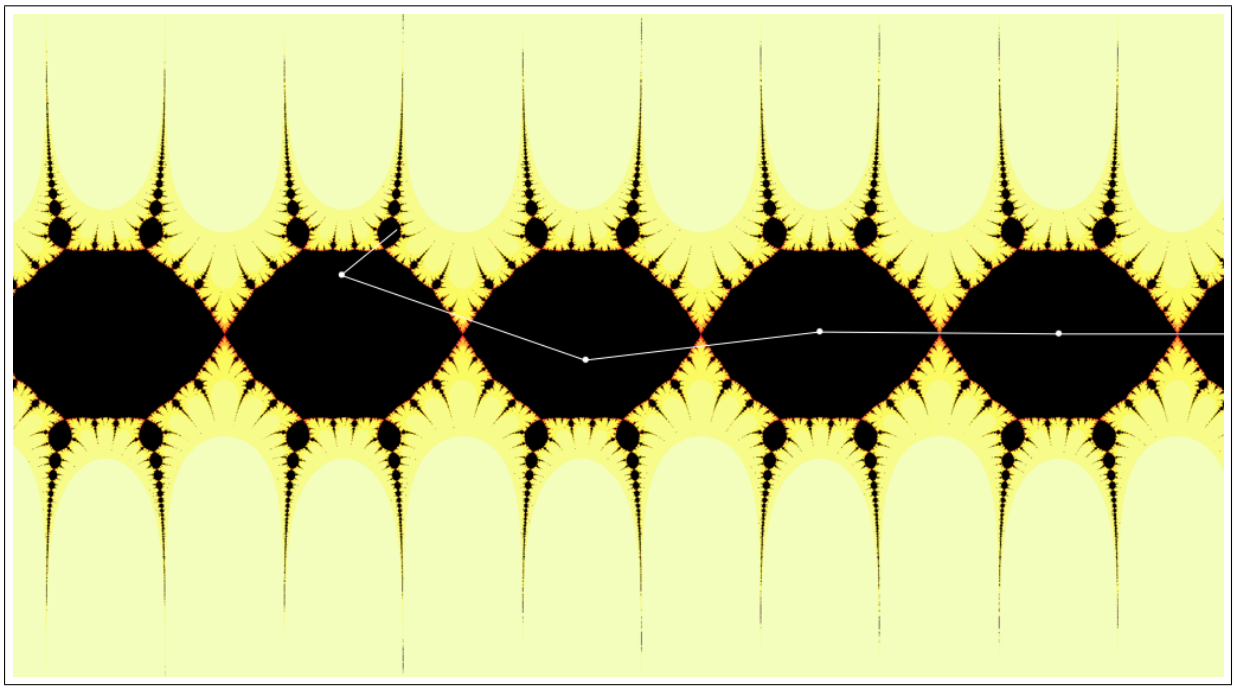


FIGURE 3.0.1 – Un domaine errant pour la fonction transcendente $z \mapsto z - \sin(z) + 2\pi$. L'ensemble de Julia est la frontière entre la partie jaune et la partie noire. L'orbite d'un point du domaine errant est représentée en blanc.

a un domaine errant, qui s'accumule sur la droite invariante $\{w = 0\}$.

Nous verrons dans la section 3.2 comment construire des polynômes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont l'application de Lavaurs vérifie cette condition, qui n'est donc pas vide. Plus précisément, on montrera :

Proposition 3.1.3. Il existe des polynômes de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ dont l'application de Lavaurs a un point fixe attractif, dans chacune des deux familles suivantes :
- $f_a(z) = z + z^2 + az^3$, avec $a \in \mathbb{C}$
- $f_b(z) = z + z^2 + bz^4$, avec $b \in \mathbb{R}$

De plus, dans la seconde famille, le point attractif que l'on construira sera réel.

3.1.2 Stratégie

Le mécanisme à la base de la construction est le suivant : on veut construire un produit fibré $P(z, w)$ tel qu'il existe une suite extraite d'itérées P^{m_k} qui converge sur un ouvert U vers un point limite $(\hat{z}, 0)$ non prépériodique.

Proposition 3.1.4. Supposons qu'il existe un ouvert U et une suite d'entiers $m_k \to \infty$ tels que P^{m_k} converge sur U vers un point $(\hat{z}, 0)$ non prépériodique. Alors P a un domaine errant.

Démonstration. On peut supposer que l'ouvert U est connexe, quitte à le restreindre. Commençons par prouver que U est dans l'ensemble de Fatou. Par normalité, il suffit de prouver que la famille totale des itérées $\{P^n, n \in \mathbb{N}\}$ est bornée (uniformément en n) sur U. Ceci vient du fait que l'infini est (super)attractif pour P et donc si une orbite de P est non bornée, alors elle converge vers l'infini. Or l'existence d'une valeur d'adhérence finie $(\hat{z}, 0)$ empêche ce comportement.

Soit donc Ω_0 la composante de Fatou dans laquelle U est inclus, et pour $i \in \mathbb{N}$, posons $\Omega_i = P^i(\Omega_0)$. Il s'agit de montrer que si $i \neq j$, alors $\Omega_i \neq \Omega_j$. Remarquons que si P^{m_k} converge

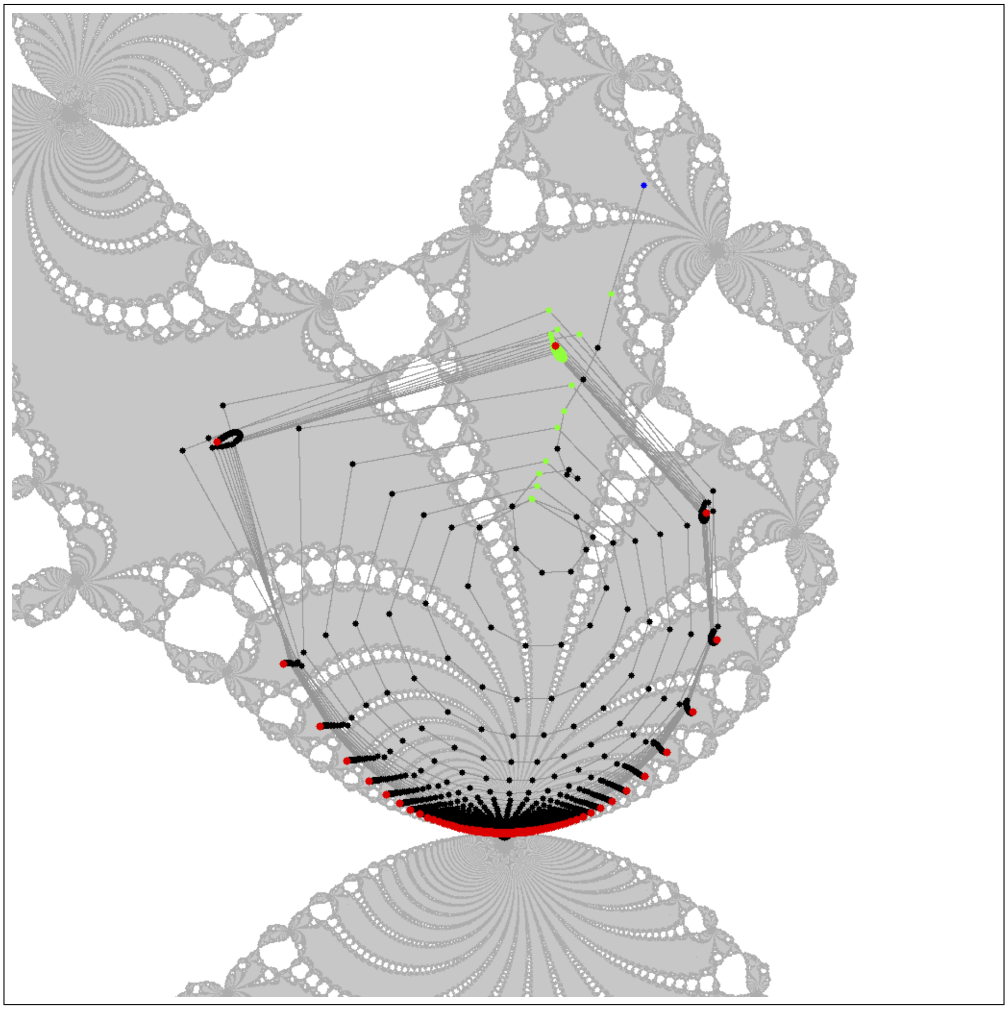


FIGURE 3.1.1 – Projection sur la droite $\{w = 0\}$ d'une orbite (en noir) dans un domaine errant. Le point de départ est dessiné en bleu, en haut à droite. Les points rouges forment l'ensemble ω-limite de l'orbite (on verra que ce sont exactement l'union des points fixes attractifs de $\mathcal{L}_f$ et de $\{0\}$). Les points verts correspondent aux points d'une suite extraite convergente.

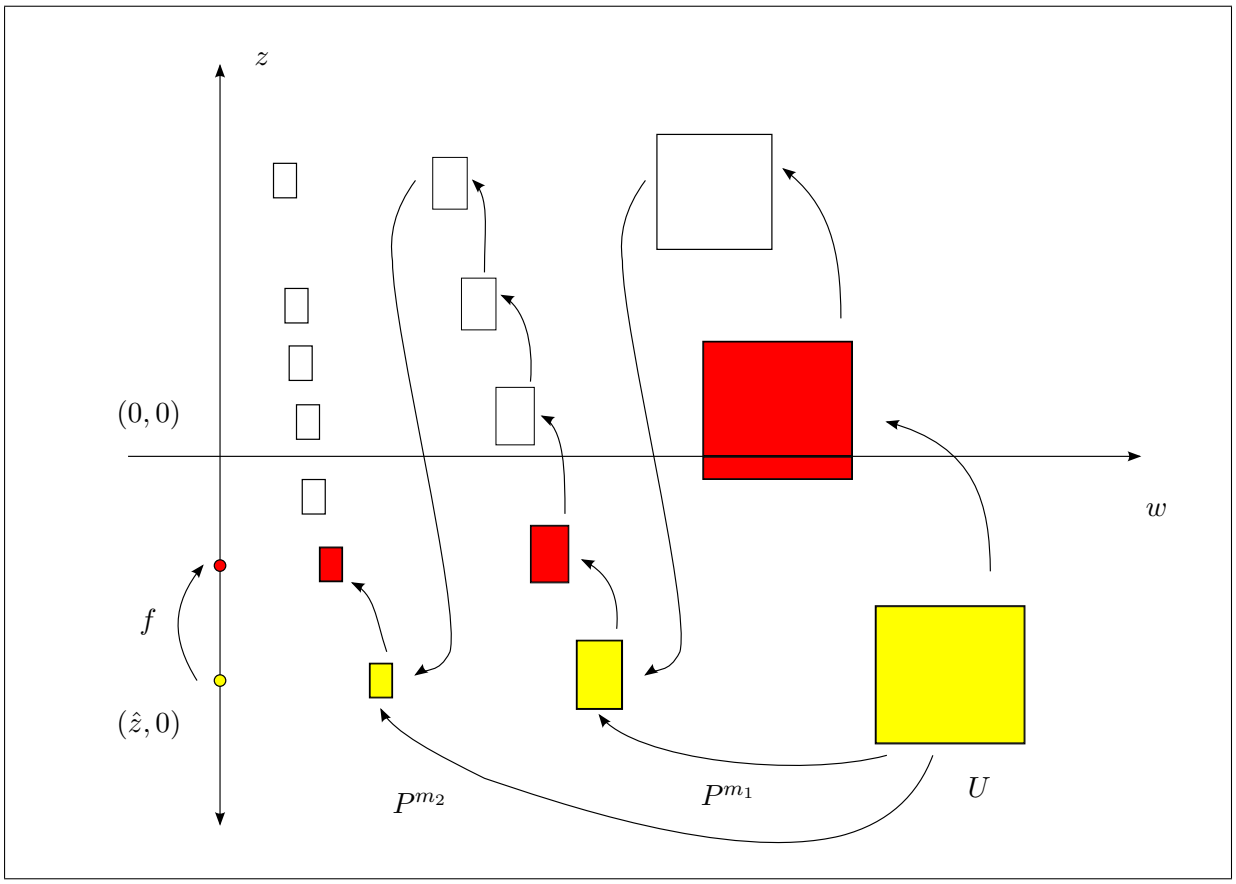


FIGURE 3.1.2 – Schéma de la dynamique de P pour $(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathcal{B}_g$. Chaque boîte est un ouvert de $\mathbb{C}^2$ inclus dans une composante de Fatou différente.

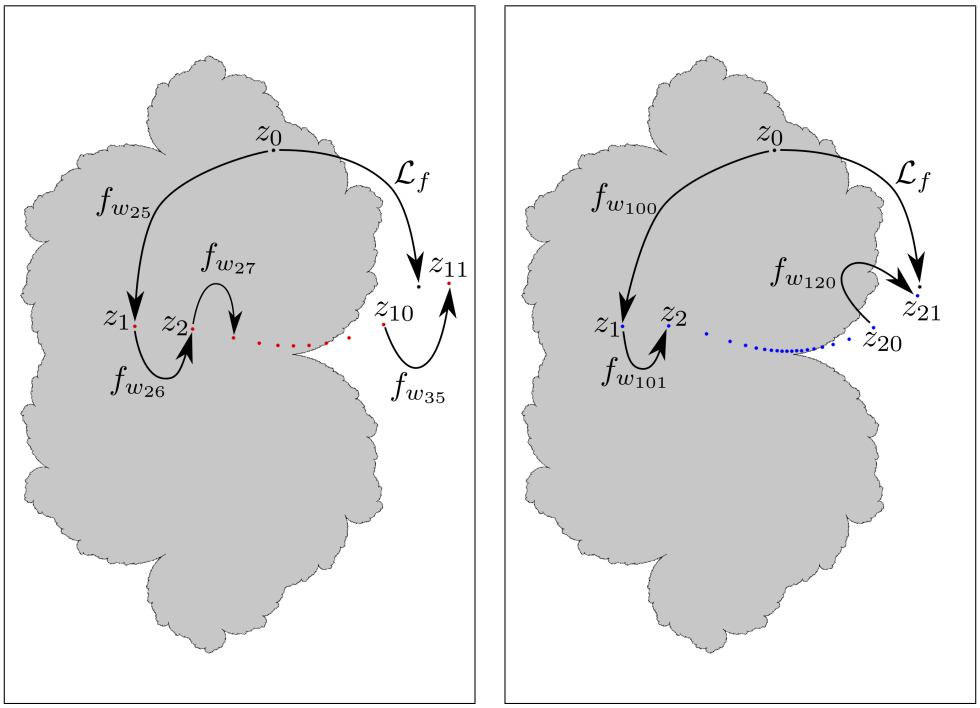


FIGURE 3.1.3 – Illustration du théorème 3.1.5 pour $f(z) = z + z^2 + 0.95z^3$ et $g(w) = w - w^2$. Le bassin parabolique $\mathcal{B}_f$ est coloré en gris. Il est invariant par f, mais pas par $f_w := f + \frac{\pi^2}{4}w$ pour $w \neq 0$. L'application de Lavaurs $\mathcal{L}_f$ est définie sur $\mathcal{B}_f$. Les points $z_0 = -0.05 + 0.9i$ et leurs images $\mathcal{L}_f(z_0)$ sont indiqués. Les autres points sont les points z_k qui sont définis par $P^{\circ k}(z_0, w_{n^2}) = \big(z_k, w_{n^2+k}\big)$ pour $1 \leq k \leq 2n+1$ et $w_m = g^{\circ m}(1/2)$. Si n est assez grand, les points z_{2n+1} sont proches de $\mathcal{L}_f(z_0)$. A gauche : $n = 5$, il y a 11 points rouges. A droite : $n = 10$, il y a 21 points bleu.

vers $(\hat{z}, 0)$ sur U, alors P^{m_k} converge en fait vers $(\hat{z}, 0)$ sur Ω_0 tout entier : en effet, par le théorème d'Arzela-Ascoli, P^{m_k} admet au moins une valeur d'adhérence en tant que suite de fonctions holomorphes sur Ω_0. De plus, toute valeur d'adhérence de cette suite est une fonction holomorphe sur Ω_0, coïncidant avec la fonction constante égale à $(\hat{z}, 0)$ sur U, donc en fait P^{m_k} converge vers la fonction constante égale à $(\hat{z}, 0)$ sur tout Ω_0.

Par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite P^{m_k} converge sur Ω_i vers $P^i(\hat{z}, 0) = (f^i(\hat{z}), 0)$. Or, comme $(\hat{z}, 0)$ est supposé avoir une orbite infinie, on a donc que si $i \neq j$, $P^i(\hat{z}, 0) \neq P^j(\hat{z}, 0)$, et donc $\Omega_i \neq \Omega_j$.

Ceci prouve bien que la suite de composantes $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}} = (P^n(\Omega_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est errante. □

La stratégie pour réaliser un produit fibré ayant cette propriété est d'adapter une technique de dynamique classique en une variable, l'implosion parabolique. Le point clé de la construction est fourni par la proposition suivante :

Théorème 3.1.5 (théorème clé)**.** *Lorsque $n \to \infty$, la suite d'applications*

$$\mathbb{C}^2 \ni (z, w) \mapsto P^{\circ 2n+1}\big(z, g^{\circ n^2}(w)\big) \in \mathbb{C}^2$$

converge localement uniformément dans $\mathcal{B}_f \times \mathcal{B}_g$ vers l'application

$$\mathcal{B}_f \times \mathcal{B}_g \ni (z, w) \mapsto \big(\mathcal{L}_f(z), 0\big) \in \mathbb{C} \times \{0\}.$$

La démonstration est plutôt technique et calculatoire, et fera l'objet de la section 3.5. Elle nécessitera la construction de coordonnées adaptées, les *coordonnées de Fatou approchées*, que l'on définira dans la section 3.4.

Nous allons maintenant prouver le résultat principal 3.1.2 à partir du théorème clé 3.1.5.

Démonstration du théorème 3.1.2. On suppose ici que le théorème 3.1.5 est démontré, et que f, g sont des polynômes comme dans l'énoncé du théorème 3.1.2.

Soit $\xi \in \mathcal{B}_f$ un point fixe attractif de l'application de Lavaurs $\mathcal{L}_f$. Soit V un disque centré en ξ, choisi de telle façon à ce que $\mathcal{L}_f(V)$ soit relativement compact dans V. Alors $\mathcal{L}_f^{\circ k}(V)$ converge vers ξ quand $k \to \infty$. Soit $W \Subset \mathcal{B}_g$ un disque arbitraire.

Notons $\pi_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ la projection sur la première coordonnée, c'est-à-dire $\pi_1(z, w) := z$. D'après le théorème 3.1.5, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\pi_1 \circ P^{\circ(2n+1)}(V \times g^{\circ n^2}(W)) \Subset V.$$

Soit U une composante connexe de l'ouvert $P^{-n_0^2}\big(V \times g^{\circ n_0^2}(W)\big)$.

Au vu de la proposition 3.1.4, il suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme 3.1.6. *La suite $(P^{\circ n^2})_{n\geq 0}$ converge localement uniformément vers $(\xi, 0)$ sur U.*

Démonstration du lemme 3.1.6. Une récurrence facile montre que pour tout entier $n \geq n_0$,

$$P^{\circ n^2}(U) \subseteq V \times g^{\circ n^2}(W). \tag{3.1.1}$$

En effet, ceci est vrai par définition pour $n = n_0$. Supposons maintenant que l'inclusion est vraie pour $n \geq n_0$. Alors

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ P^{\circ(n+1)^2}(U) &= \pi_1 \circ P^{\circ(2n+1)}\left(P^{\circ n^2}(U)\right) \\ &\subset \pi_1 \circ P^{\circ(2n+1)}\left(V \times g^{\circ n^2}(W)\right) \subset V, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (3.1.1).

Par conséquent, la suite $(P^{\circ n^2})_{n\geq 0}$ est uniformément bornée, et donc normale, sur U. Par ailleurs, toute valeur d'adhérence de cette suite de fonctions est de la forme $(z, 0)$ pour un certain $z \in V$. De plus, $(z, 0)$ est une valeur limite (associée à une suite extraite (n_k)) si et seulement si $\big(\mathcal{L}_f(z), 0\big)$ est une valeur limite (associée à la suite extraite $(1 + n_k)$). On en déduit que l'ensemble des valeurs d'adhérence est totalement invariant par $\mathcal{L}_f : V \to V$, et doit donc être réduit au point attractif ξ de $\mathcal{L}_f$, ce qui achève la preuve. □

□

3.2 Dynamique parabolique en une variable

Nous allons effectuer dans cette section un aperçu de la théorie classique de la dynamique parabolique locale en une variable, et notamment de l'implosion parabolique. Dans un souci de simplicité, et comme ce sera suffisant pour prouver le théorème 3.1.2, nous nous restreindrons au cas d'un polynôme avec un point fixe parabolique simple.

Dans le reste de cette section, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un polynôme de la forme

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + O(z^4) \quad \text{avec} \quad a_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dans la coordonnée $Z = -1/(a_2 z)$, l'expression de f devient

$$F(Z) = Z + 1 + \frac{b}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right) \quad \text{avec} \quad b = 1 - \frac{a_3}{a_2^2}.$$

Choisissons $R > 0$ suffisamment grand pour que F soit univalente sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0, R)$, et que l'on ait

$$\sup_{|Z|>R} \big|F(Z) - Z - 1\big| < \frac{1}{10}, \ \sup_{|Z|>R} \big|F'(Z) - 1\big| < \frac{1}{10}. \tag{3.2.1}$$

Notons $\mathbb{H}_R$ le demi-plan droit $\mathbb{H}_R := \{Z \in \mathbb{C} \ ; \ \Re(Z) > R\}$ et $-\mathbb{H}_R$ le demi-plan gauche correspondant.

Enfin, notons $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ la branche principale du logarithme.

3.2.1 Coordonnée de Fatou attractive

Lorsque $\Re(Z) \to +\infty$,

$$\begin{aligned} F(Z) - b\log\big(F(Z)\big) &= Z + 1 + \frac{b}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right) - b\log\left(Z + 1 + \frac{b}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right)\right) \\ &= Z - b\log Z + 1 + O\left(\frac{1}{Z^2}\right). \end{aligned}$$

L'application F est univalente sur le demi-plan droit $\mathbb{H}_R$ et pour $Z \in \mathbb{H}_R$, on a :

$$F^{\circ m}(Z) - b\log\big(F^{\circ m}(Z)\big) = Z - b\log Z + m + O(1) \quad \text{quand} \quad m \to +\infty.$$

Il s'ensuit que la suite d'applications univalentes

$$\mathbb{H}_R \ni Z \longmapsto F^{\circ m}(Z) - m - b\log m \in \mathbb{C}$$

est normale et converge localement uniformément vers une application univalente $\Phi_F : \mathbb{H}_R \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\Phi_F \circ F = T_1 \circ \Phi_F \quad \text{avec} \quad T_1(Z) = Z + 1.$$

De plus,

$$\Phi_F(Z) = Z - b\log Z + o(1) \quad \text{quand} \quad \Re(Z) \to +\infty.$$

En transférant ceci à la coordonnée initiale, on voit que la suite d'applications $\mathcal{B}_f \to \mathbb{C}$ définies par

$$z \longmapsto -\frac{1}{a_2 \cdot f^{\circ m}(z)} - m - b\log m \tag{3.2.2}$$

converge localement uniformément vers une *coordonnée de Fatou attractive* $\phi_f : \mathcal{B}_f \to \mathbb{C}$ qui semi-conjugue $f : \mathcal{B}_f \to \mathcal{B}_f$ à $T_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, c'est-à-dire que $\phi_f \circ f = T_1 \circ \phi_f$, et qui vérifie

$$\phi_f(z) = -\frac{1}{a_2 z} - b\log\left(-\frac{1}{a_2 z}\right) + o(1) \quad \text{quand} \quad \Re(-1/z) \to +\infty.$$

La restriction de ϕ_f au *pétale attractif*

$$P_f^{\mathrm{att}} := \left\{ z \in \mathbb{C} \ ; \ \Re\left(-\frac{1}{a_2 z}\right) > R \right\}$$

coïncide avec $z \mapsto \Phi_F\big(-1/(a_2 z)\big)$, donc est univalente.

De plus, la convergence dans (3.2.2) est localement uniforme par rapport à f dans l'ouvert $\mathcal{B} = \{(f, z), \ z \in \mathcal{B}_f\}$, ce qui prouve le résultat suivant :

Proposition 3.2.1. L'application ϕ_f dépend holomorphiquement de f.

La figure 3.2.1 (appelée *l'échiquier parabolique* de f), illustre le comportement de la coordonnée de Fatou attractive prolongée à tout $\mathcal{B}_f$ pour $f_1(z) = z + z^2 + z^3$ qui a deux points critiques $c^{\pm} := (-1 \pm i\sqrt{2})/3$. Le bassin parabolique $\mathcal{B}_f$ est coloré de la façon suivante :

— bleu si $\Im\big(\phi_f(z)\big) > \Im\big(\phi_f(c^+)\big)$,
— rouge si $\Im\big(\phi_f(z)\big) < \Im\big(\phi_f(c^-)\big)$,
— vert si $\Im\big(\phi_f(c^-)\big) < \Im\big(\phi_f(z)\big) < \Im\big(\phi_f(c^+)\big)$.

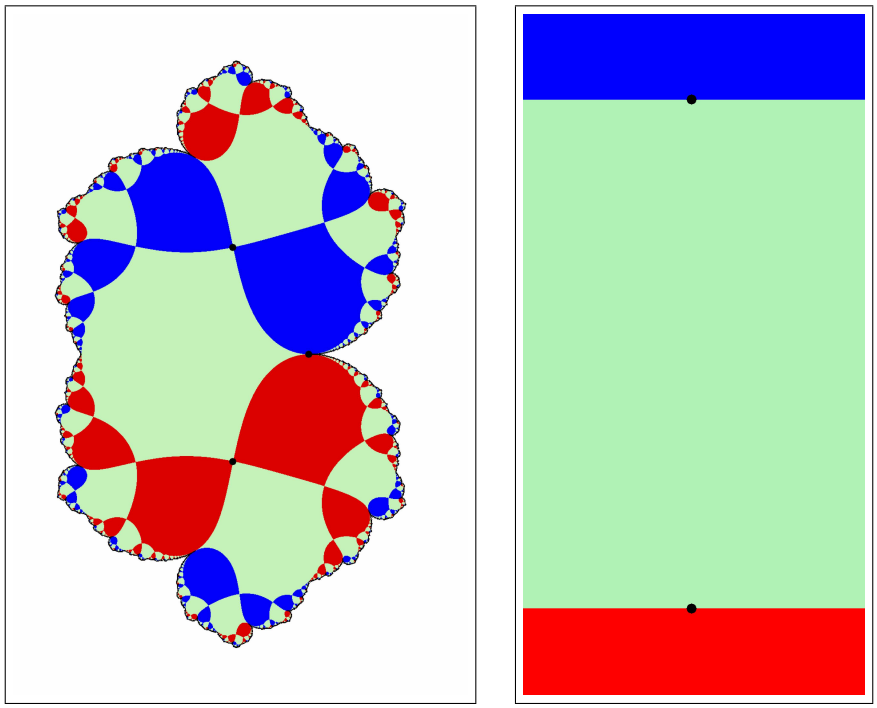


FIGURE 3.2.1 – A gauche : le bassin parabolique $\mathcal{B}_f$. La coordonnée de Fatou attractive ϕ_f est univalente sur chaque case. Elle envoie chaque case bleue sur un demi-plan supérieur, chaque case rouge sur un demi-plan inférieur et chaque case verte sur une bande horizontale. Le point parabolique 0 et les points critiques $c^{\pm}$ sont représentés. A droite : l'image de ϕ_f. Les points $\phi_f(c^{\pm})$ sont représentés.

3.2.2 Coordonnée de Fatou répulsive

Lorsque $\Re(Z) \to -\infty$,

$$\begin{aligned} F\big(Z + b\log(-Z)\big) &= Z + b\log(-Z) + 1 + \frac{b}{Z + b\log(-Z)} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right) \\ &= (Z+1) + b\log(-Z-1) + O\left(\frac{1}{Z^2}\right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que si $R > 0$ est suffisamment grand et $\Re(Z) < -R$, alors

$$F^{\circ m}\big((Z-m) + b\log(m-Z)\big) = O(1) \quad \text{quand} \quad m \to +\infty.$$

Si c'est le cas, la suite d'applications univalentes

$$-\mathbb{H}_R \ni Z \longmapsto F^{\circ m}(Z - m + b\log m) \in \mathbb{C}$$

converge localement uniformément vers une application $\Psi_F : -\mathbb{H}_R \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\Psi_F \circ T_1 = F \circ \Psi_F.$$

De plus,

$$\Psi_F(Z) = Z + b\log(-Z) + o(1) \quad \text{quand} \quad \Re(Z) \to -\infty.$$

En transférant ceci à la coordonnée initiale, on voit que

$$\mathbb{C} \ni Z \longmapsto f^{\circ m}\left(-\frac{1}{a_2 \cdot (Z - m + b\log m)}\right) \in \mathbb{C} \tag{3.2.3}$$

converge localement uniformément vers une *paramétrisation de Fatou répulsive* $\psi_f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui semi-conjugue $T_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ à $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, c'est-à-dire que $\psi_f \circ T_1 = f \circ \psi_f$, et qui vérifie

$$-\frac{1}{\psi_f(Z)} = Z + b\log(-Z) + o(1) \quad \text{quand} \quad \Re(Z) \to -\infty.$$

La restriction de ψ_f au demi-plan gauche $-\mathbb{H}_R$ coïncide avec $Z \mapsto -1/\big(a_2\Psi_F(Z)\big)$, et est donc univalente. L'image $P_f^{\text{rep}} := \psi_f(-\mathbb{H}_R)$ est appelée un *pétale répulsif*.

La preuve de la proposition suivante est similaire au cas attractif (voir [BÉE13], section 5 pour les détails).

Proposition 3.2.2. L'application ψ_f dépend holomorphiquement de f.

3.2.3 Application de Lavaurs

Pour $\sigma \in \mathbb{C}$, l'application de Lavaurs de phase σ est l'application

$$L_{f,\sigma} := \psi_f \circ T_\sigma \circ \phi_f : \mathcal{B}_f \to \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad T_\sigma(Z) = Z + \sigma.$$

Pour la preuve du théorème 3.1.2, nous aurons seulement besoin de l'application de Lavaurs $\mathcal{L}_f := \mathcal{L}_{f,0} := \psi_f \circ \phi_f$ de phase 0. L'intérêt des applications de Lavaurs vient du résultat suivant, dû à Pierre Lavaurs (voir [Lav89]) :

Théorème 3.2.3 (Lavaurs)**.** *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ lorsque $z \to 0$. Pour $\varepsilon \in \mathbb{C}$, posons $f_\varepsilon(z) := f(z) + \varepsilon^2$. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et $(m_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers, telles que*

$$\frac{\pi}{\varepsilon_n} - m_n \to \sigma \in \mathbb{C} \quad \textit{quand} \quad n \to +\infty.$$

Alors la suite de polynômes $f_{\varepsilon_n}^{\circ m_n}$ converge localement uniformément sur $\mathcal{B}_f$ vers $\mathcal{L}_{f,\sigma}$.

Il sera également intéressant de considérer l'application

$$\mathcal{E}_f := \phi_f \circ \psi_f : \mathcal{U}_f \to \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_f := \psi_f^{-1}(\mathcal{B}_f).$$

La paramétrisation répulsive ψ_f semi-conjugue $\mathcal{E}_f : \mathcal{U}_f \to \mathbb{C}$ à $\mathcal{L}_f : \mathcal{B}_f \to \mathbb{C}$.

Les propositions 3.2.1 et 3.2.2 impliquent que $\mathcal{E}_f$ et$\mathcal{L}_f$ dépendent analytiquement de f :

Proposition 3.2.4. Les applications $\mathcal{E}_f$ et $\mathcal{L}_f$ dépendent holomorphiquement de f.

Notons que $\mathcal{E}_f$ commute avec T_1 :

$$\mathcal{E}_f \circ T_1 = \phi_f \circ \psi_f \circ T_1 = \phi_f \circ f \circ \psi_f = T_1 \circ \phi_f \circ \psi_f = T_1 \circ \mathcal{E}_f.$$

Donc, le revêtement universel $\exp : \mathbb{C} \ni Z \longmapsto e^{2\pi i Z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ semi-conjugue $\mathcal{E}_f : \mathcal{U}_f \to \mathbb{C}$ à une application

$$e_f : U_f \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{avec} \quad U_f := \exp(\mathcal{U}_f) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

L'application e_f a des singularités effaçables en 0 et ∞, et se prolonge donc en une application $e_f : \widehat{U}_f \to \mathbb{P}^1$, où $\widehat{U}_f := U_f \cup \{0, \infty\} \subset \mathbb{P}^1$. L'application $e_f : \widehat{U}_f \to \widehat{\mathbb{C}}$ est appelée *l'application de corne* associée à f. Comme l'a observé Adam Epstein dans sa thèse [Eps93], cette application de corne est une application de type fini (voir la définition 3.2.5 ci-dessous).

La figure 3.2.2 illustrate le comportement de l'application $\mathcal{E}_f$ pour $f(z) = z + z^2 + z^3$.

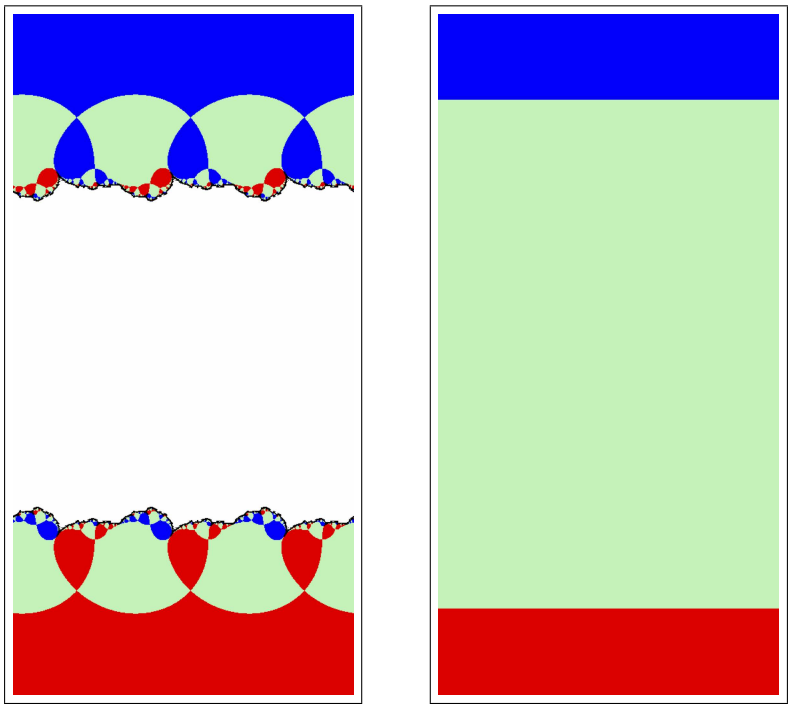


FIGURE 3.2.2 – Comportement de l'application $\mathcal{E}_f$ pour $f(z) = z+z^2+z^3$. Le domaine $\mathcal{U}_f$ a deux composantes connexes, l'une contenant un demi-plan supérieur et l'autre un demi-plan inférieur. Le domaine est divisé en cases selon le comportement de $\mathcal{E}_f$. La restriction de E_f à chaque case est univalente. L'image des cases bleues est le demi-plan supérieur bleu à droite. L'image des cases rouges est le demi-plan inférieur rouge à droite. L'image des cases vertes est la bande verte horizontale à droite.

3.2.4 Applications de type fini

Soit $h : W \to X$ une application analytique entre variétés complexes de dimension un, éventuellement non connexes. On dit que $x \in X$ est une *valeur régulière* pour h si pour un certain voisinage U de x, $h_{|V} : V \to U$ est un homéomorphisme pour chaque composante V de $h^{-1}(U)$, et une *valeur singulière* pour h sinon. Notons que l'ensemble $S(h)$ des valeurs singulières est fermé. Rappelons que $w \in W$ est un *point critique* si la dérivée de h en w est nulle, et qu'alors $h(w) \in X$ est une *valeur critique*. On dit que $x \in X$ est une *valeur asymptotique* si h tend vers x le long d'un chemin sortant de tout compact de W. On montre à l'aide d'outils élémentaires de théorie des revêtements que l'union des valeurs critiques et des valeurs asymptotiques est dense dans $S(h)$. En particulier, tout point isolé de $S(h)$ est une valeur critique ou une valeur asymptotique.

Définition 3.2.5. Une application holomorphe $h : W \to X$ entre variété complexes de dimension 1 est dite *de type fini* si

— h n'est nulle part localement constante,
— h n'a pas de singularités effaçables isolées,
— X est une union finie de surfaces de Riemann compactes, et
— $S(h)$ est finie.

Si $h : W \to X$ est une application de type fini avec $W \subseteq X$, on dit que h est une application de type fini sur X.

Soit $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ un polynôme, et soit $\phi_f : \mathcal{B}_f \to \mathbb{C}$ une coordonnée de Fatou attractive définie sur le bassin parabolique d'un point fixe de f de multiplicateur 1 et soit $\psi_f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ une paramétrisation de Fatou répulsive associée. Posons

$$\mathcal{E}_f = \phi_f \circ \psi_f : \mathcal{U}_f \to \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_f = (\psi_f)^{-1}(\mathcal{B}_f).$$

Enfin, posons $\widehat{U}_f = \exp(\mathcal{U}_f) \cup \{0, \infty\}$ et soit $e_f : \widehat{U}_f \to \widehat{\mathbb{C}}$ défini par

$$\exp \circ \mathcal{E}_f = e_f \circ \exp .$$

Le résultat suivant est énoncé dans [BÉE13], Proposition 7.3.

Proposition 3.2.6. L'application $e_f : \widehat{U}_f \to \mathbb{P}^1$ est une application de type fini sur $\mathbb{P}^1$. Ses valeurs singulières sont :

— 0 et ∞, qui sont des valeurs asymptotiques de e_f, et
— les images par $\exp \circ \phi_f$ des orbites critiques de f contenues dans $\mathcal{B}_f$, qui sont les valeurs critiques de e_f.

3.3 Applications de Lavaurs avec un point fixe attractif

Le but de cette section est de construire des polynômes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont l'application de Lavaurs a un point fixe attractif. Ainsi, on aura prouvé que la condition du théorème 3.1.2 n'est pas vide.

3.3.1 Exemples cubiques

Dans cette partie, nous allons construire la première de deux familles de polynômes f dont l'application de Lavaurs a des points attractifs. Ici, la famille en question sera de degré 3, soit le plus petit degré possible (l'application de Lavaurs de $z \mapsto z + z^2$ ne convenant pas). Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit $f_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ le polynôme cubique défini par

$$f_a(z) = z + z^2 + az^3.$$

Nous allons prouver que si $r > 0$ est suffisamment proche de 0 et $a \in D(1-r, r)$, alors l'application de Lavaurs $\mathcal{L}_{f_a} : \mathcal{B}_f \to \mathbb{C}$ a un point fixe attractif. Remarquons que comme $\mathcal{L}_{f_a}$ commute avec f_a, il y a alors une infinité de tels points fixes.

Posons

$$\mathcal{U}_a := \psi_{f_a}^{-1}(\mathcal{B}_{f_a}),\ \mathcal{E}_a := \phi_{f_a} \circ \psi_{f_a} : \mathcal{U}_a \to \mathbb{C}.$$

C'est un ouvert qui contient un demi-plan supérieur et un demi-plan inférieur. Remarquons que $\psi_{f_a} : \mathcal{U}_a \to \mathcal{B}_{f_a}$ semi-conjugue $\mathcal{E}_a$ à $\mathcal{L}_{f_a}$. Comme ψ_{f_a} est univalente dans un demi-plan gauche, il suffit de prouver que $\mathcal{E}_a$ a un point fixe attractif dont la partie réelle est arbitrairement proche de $-\infty$. Comme $\mathcal{E}_a$ commute avec la translation de 1, il suffit de prouver que $\mathcal{E}_a : \mathcal{U}_a \to \mathbb{C}$ a un point fixe attractif.

l'ouvert $\mathcal{U}_a$ est invariant par T_1 et l'application $\mathcal{E}_a$ commute avec T_1. L'ensemble

$$\mathcal{U} := \left\{(a, Z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\ ;\ Z \in \mathcal{U}_a\right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{C}^2$ et l'application

$$\mathcal{E} : \mathcal{U} \ni (a, Z) \mapsto \mathcal{E}_a(Z) \in \mathbb{C}$$

est analytique. Le revêtement universel

$$\exp : \mathbb{C} \ni Z \mapsto e^{2\pi i Z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

semi-conjugue $\mathcal{E}_a$ à une application

$$e_a : U_a \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{avec} \quad U_a := \exp(\mathcal{U}_a) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

L'ouvert U_a est un voisinage de 0 et ∞ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'application e_a a des singularités effaçables 0 et ∞, voir la preuve du lemme 3.3.1 ci-dessous, et se prolonge donc en une application $e_a : \widehat{U}_a \to \mathbb{P}^1$, où $\widehat{U}_a := U_a \cup \{0, \infty\} \subset \mathbb{P}^1$. On pose

$$\widehat{U} := \left\{(a, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1\ ;\ z \in \widehat{U}_a\right\}.$$

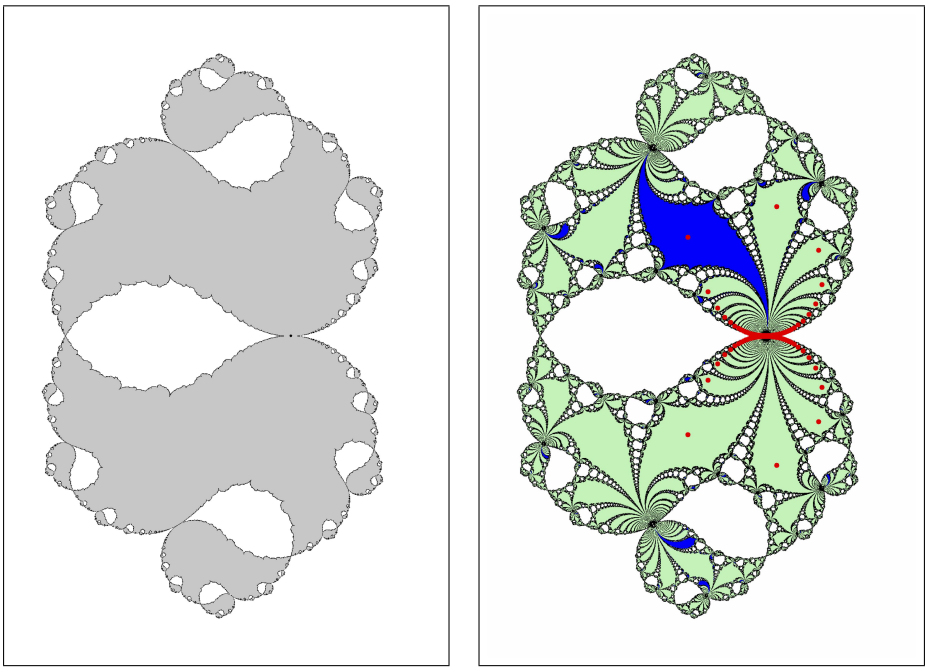


FIGURE 3.3.1 – Comportement de $\mathcal{L}_f$ pour $f(z) = z+z^2+0.95z^3$. A gauche : l'ensemble des points $z \in \mathcal{B}_f$ dont l'image par $\mathcal{L}_f$ reste dans $\mathcal{B}_f$. La restriction de $\mathcal{L}_f$ au domaine blanc borné est un revêtement de $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{B}_f}$. A droite : l'application de Lavaurs $\mathcal{L}_f$ a deux ensembles complexe conjugués de points fixes. Les points fixes de $\mathcal{L}_f$ sont indiqués en rouge et leurs bassins d'attraction en bleu (pour l'un de ces points fixes, et en vert pour les autres).

Lemme 3.3.1. *Les points* 0 *et* ∞ *dans* $\mathbb{P}^1$ *sont des points fixes de* $e_a : \widehat{U}_a \to \mathbb{P}^1$. *Ces deux points fixes ont un multiplicateur égal à* $e^{2\pi^2(1-a)}$.

Démonstration. Lorsque $\Im(Z) \to +\infty$, on a :

$$-\frac{1}{\psi_{f_a}(Z)} = Z + (1-a)\log(-Z) + o(1)$$

où log est la branche principale du logarithme. Remarquons que $\log(-Z) = \log(Z) - \pi i$ as $\Im(Z) \to +\infty$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_a(Z) = \phi_{f_a} \circ \psi_{f_a}(Z) &= Z + (1-a)\log(-Z) + o(1) \\ &\quad - (1-a)\log\big(Z + (1-a)\log(-Z) + o(1)\big) + o(1) \\ &= Z + (1-a)\log(Z) - \pi i(1-a) - (1-a)\log(Z) + o(1) \\ &= Z - \pi i(1-a) + o(1).\end{aligned}$$

Par conséquent, comme $z = \exp(Z) \to 0$, on a :

$$e_a(z) = e^{2\pi i Z} \cdot e^{2\pi^2(1-a)+o(1)} = e^{2\pi^2(1-a)} z \cdot \big(1 + o(1)\big),$$

d'où l'on déduit que 0 est un point fixe de e_a de multiplicateur $e^{2\pi^2(1-a)}$. Un argument similaire prouve que ∞ est aussi un point fixe de e_a de multiplicateur $e^{2\pi^2(1-a)}$. □

En particulier, on voit que pour $a = 1$, l'application e_1 a des points fixes multiples en 0 et ∞.

Lemme 3.3.2. *La multiplicité de* 0 *et* ∞ *comme points fixes de* e_1 *est* 2.

Démonstration. L'application $e_1 : \widehat{U}_1 \to \mathbb{P}^1$ est une application de type fini dans le sens d'Epstein (voir la section 3.2.4). Donc chaque pétale attractif en 0 ou en ∞ doit capturer une orbite infinie d'une valeur singulière de e_1. En effet, si ce n'était pas le cas, la composante B du bassin immédiat contenant ce pétale éviterait les valeurs singulières de e_1. La restriction $e_1 : B \to B$ serait alors un revêtement et la coordonnée de Fatou attractive correspondante s'étendrait en un revêtement $\phi : B \to \mathbb{C}$. Ceci forcerait B à être isomorphe à $\mathbb{C}$, ce qui est impossible puisque B est inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

D'après la proposition 3.2.6, l'application de type fini e_1 admet exactement deux valeurs critiques (les images des valeurs critiques de f_1 par l'application $\exp \circ \phi_{f_1}$) et deux valeurs singulières fixes qui sont respectivement 0 et ∞. Il s'ensuit que le nombre de pétales attractifs en 0 plus le nombre de pétales attractifs en ∞ est au plus 2. Donc ce nombre doit être égal à 2, d'où le résultat. □

Lorsque l'on perturbe a proche de 1, le point fixe multiple en 0 se scinde en une paire de points fixes de e_a : l'un en 0 avec multiplicateur $e^{2\pi^2(1-a)}$ et un autre que l'on note $\xi(a)$, avec multiplicateur $\rho(a)$. Nous allons utiliser un calcul classique de résidus pour estimer ce multiplicateur. Soit γ un petit lacet autour de 0. La formule de Cauchy donne :

$$\frac{1}{1-e^{2\pi^2(1-a)}} + \frac{1}{1-\rho(a)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-e_a(z)} \underset{a\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-e_1(z)} \in \mathbb{C}.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{1-\rho(a)} = \frac{1}{2\pi^2(1-a)} + O(1) \quad \text{quand} \quad a \to 1.$$

Observons maintenant que

$$\rho(a) \in \mathbb{D} \iff \Re\left(\frac{1}{1-\rho(a)}\right) > \frac{1}{2},$$

et de même,

$$a \in D(1-r,r) \iff \Re\left(\frac{1}{2\pi^2(1-a)}\right) > \frac{1}{4\pi^2 r}.$$

Par conséquent, lorsque $r > 0$ est suffisamment proche de 0 et $a \in D(1-r,1)$, on en déduit que $\big|\rho(a)\big| < 1$, donc $\xi(a)$ est un point fixe attractif.

Soit finalement $Z(a)$ une préimage de $\xi(a)$ par exp, c'est-à-dire $\exp\big(Z(a)\big) = \xi(a)$. Alors pour a suffisamment proche de 1, $Z(a)$ est un point fixe de $\mathcal{E}_a$. En effet, remarquons que $\mathcal{E}_a\big(Z(a)\big) - Z(a)$ est un entier qui ne dépend pas du choix de préimage $Z(a)$. Donc, il suffit de prouver que

$$\lim_{a\to 1} \mathcal{E}_a\big(Z(a)\big) - Z(a) = 0.$$

Nous allons le voir de la manière suivante. La fonction $\mathcal{E}_a - \mathrm{Id}$ est périodique de période 1, donc est de la forme $u_a \circ \exp$ pour un certaine fonction $u_a : \widehat{U}_a \to \mathbb{C}$. La fonction

$$u : \widehat{U} \ni (a,z) \longmapsto u_a(z) \in \mathbb{C}$$

est analytique, donc continue. Donc,

$$\lim_{a\to 1} \mathcal{E}_a\big(Z(a)\big) - Z(a) = \lim_{a\to 1} u\big(a,\xi(a)\big) = u(1,0) = \lim_{\Im(Z)\to+\infty} \mathcal{E}_1(Z) - Z = 0.$$

La dernière égalité vient du lemme 3.3.1. Ceci prouve que pour a suffisamment proche de 1, $Z(a)$ est un point fixe de $\mathcal{E}_a$ de multiplicateur $\rho(a)$, ce qui achève la preuve de la première partie de la proposition 3.1.3. □

3.3.2 Exemples réels

Dans cette section, nous allons prouver la deuxième partie de la proposition 3.1.3, à savoir l'existence de polynômes dans la famille $f_b(z) := z + z^2 + bz^4$ dont l'application de Lavaurs a un point fixe attractif réel.

Plus précisément, nous allons chercher un paramètre $b \in (-8/27, 0)$ tel que l'application de Lavaurs $\mathcal{L}_{f_b}$ ait un point fixe critique dans $\mathbb{R} \cap \mathcal{B}_{f_b}$.

Étant donnée la construction du domaine errant, ceci impliquera que le produit fibré associé a une composante de Fatou errante qui intersecte $\mathbb{R}^2$.

Schéma de la preuve. Posons

$$b := -\frac{1+2c}{4c^3} \quad \text{avec} \quad c \in [-3/2, -1/2],\ f_c(z) := z + z^2 - \frac{1+2c}{4c^3} z^4.$$

Lorsque c décrit l'intervalle $(-3/2, -3/4)$, le paramètre correspondant b décroit de $-4/27$ à $-8/27$ et quand c croit de $-3/4$ à $-1/2$, le paramètre b croît de $-8/27$ à 0. Le point c est un point critique du polynôe f_c. Par conséquent,

$$\deg_c \phi_{f_c} = \deg_c T_1 \circ \phi_{f_c} = \deg_c \phi_{f_c} \circ f_c = (\deg_{f_c(c)} \phi_{f_c}) \cdot (\deg_c f_c) \geq 2.$$

Donc, c est un point critique de ϕ_{f_c}, et donc un point critique de $\mathcal{L}_{f_c}$.

Fait 1 : lorsque $c \in (-3/2, -1/2]$, le point critique c appartient au bassin parabolique $\mathcal{B}_{f_c}$.

Fait 2 : la fonction $\mathfrak{L} : (-3/2, -1/2] \to \mathbb{R}$ définie par $\mathfrak{L}(c) := \mathcal{L}_{f_c}(c)$ est continue.

Fait 3 : $\mathfrak{L}(-1/2) > 0$.

Fait 4 : il existe une suite c_n convergeant vers $-3/2$ avec $\mathfrak{L}(c_n) < c_n$.

Ces quatre faits sont suffisants pour prouver la proposition. En effet, la fonction $c \mapsto \mathfrak{L}(c) - c$ prend une valeur strictement positive en $c = -1/2$ et prend des valeurs strictement négatives arbitrairement proche de $-3/2$. Comme elle est continue, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle s'annule en au moins un point de $(-3/2, -1/2)$. □

Une expérience numérique suggère que la fonction $\mathfrak{L}(c) - c$ s'annule pour une valeur de c proche de -0.586. Ainsi, pour

$$f(z) = z + z^2 - 0.2136 z^4$$

l'application de Lavaurs $\mathcal{L}_f : \mathcal{B}_f \to \mathbb{C}$ a un point fixe (super)attractif.

Démonstration du fait 1. Il suffit de montrer que $z < f_c(z) \leq 0$ pour $z \in [c, 0)$. En effet, si ce n'est pas le cas, la suite $(f_c^n(c))_{n \geq 0}$ reste dans $[c, 0)$ et est décroissante, donc elle doit converger vers le seul point fixe dans $[c, 0]$, c'est-à-dire le point fixe parabolique 0.

Pour voir que $f_c - \mathrm{Id} > 0$ sur $[c, 0)$, remarquons que si $c \in [-3/2, -1/2]$, alors $b \in [-8/27, 0]$ et si $z \in [c, 0)$, alors

$$1 + bz^2 \geq 1 + bc^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4c} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Donc :

$$f_c(z) - z = z^2 + bz^4 = z^2 \cdot (1 + bz^2) \geq \frac{2}{3} z^2 > 0.$$

Pour voir que $f_c \leq 0$ sur $[c, 0)$, il suffit de prouver que $g(z) := 1 + z + bz^3 \geq 0$ sur $[c, 0)$. Comme précédemment, si $c \in [-3/2, -1/2]$ et $z \in [c, 0)$, on a :

$$g'(z) = 1 + 3bz^2 \geq 1 + 3bc^2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4c} \geq -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0.$$

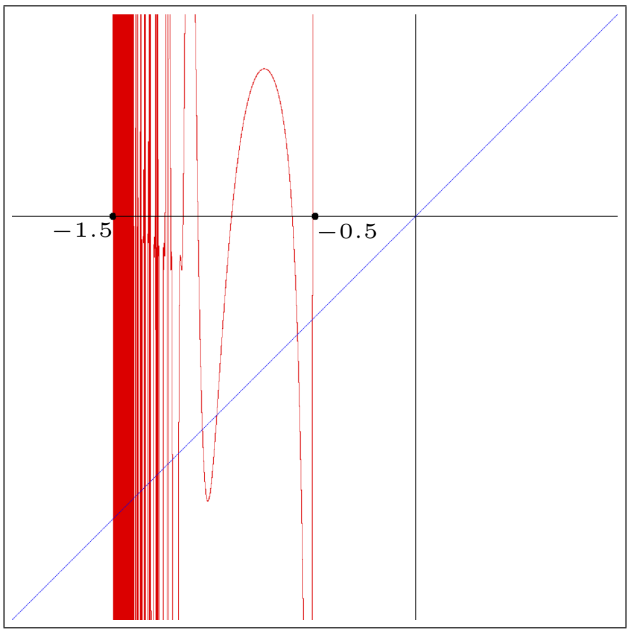


FIGURE 3.3.2 – Le graphe de la fonction $\mathfrak{L} : (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$, qui intersecte la diagonale. Quand c tend vers $-\frac{3}{2}$, $\mathfrak{L}(c)$ accumule tout l'intervalle $f(\mathbb{R}) = (-\infty, x]$ avec $x := \frac{27}{16} + \frac{9}{8}\sqrt{3} \simeq 3.63$. Chaque intersection avec la diagonale correspond à un paramètre $c \in \mathbb{R}$ pour lequel l'application de Lavaurs $\mathcal{L}_{f_c}$ a un point fixe superattractif.

Donc, g est croissante sur $[c, 0)$ et comme

$$g(c) = 1 + c + bc^3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}c \geq 0.$$

la preuve du fait 1 est achevée. □

Démonstration du fait 2. Pour $c \in \mathbb{C} \setminus 0$ on peut considérer la coordonnée de Fatou attractive ϕ_{f_c} et la paramétrisation de Fatou répulsive ψ_{f_c} de f_c (normalisée avec la même convention que dans la section 3.2). Les formules (3.2.2) et (3.2.3) définissant ϕ_{f_c} et ψ_{f_c} comme limites montrent que ϕ_{f_c} et ψ_{f_c} prennent des valeurs réelles sur l'axe réel. Posons

$$\mathcal{B} := \big\{(c, z) \in \big(\mathbb{C} \setminus \{0\}\big) \times \mathbb{C} \ ; \ z \in \mathcal{B}_{f_c}\big\}.$$

Les propositions 3.2.1 et 3.2.2 impliquent que

$$\mathcal{B} \ni (c, z) \mapsto \phi_{f_c}(z) \in \mathbb{C}, \ \big(\mathbb{C} \setminus \{0\}\big) \times \mathbb{C} \ni (c, Z) \mapsto \psi_{f_c}(z) \in \mathbb{C}$$

sont continues, ainsi que leur composition

$$\mathcal{L} : \mathcal{B} \ni (c, z) \mapsto \psi_{f_c} \circ \phi_{f_c}(z).$$

Par ailleurs, pour $c \in (-3/2, 1/2]$, le point (c, c) appartient à $\mathcal{B}$ et donc on en déduit que la fonction $\mathfrak{L} : c \mapsto \mathcal{L}(c, c)$ est continue sur $(-3/2, -1/2]$. □

Démonstration du fait 3. Soit $c = -1/2$, de sorte que $f := f_{-1/2}$ est le polynôme quadratique $z \mapsto z + z^2$. La paramétrisation de Fatou répulsive envoie les réels suffisamment proche de $-\infty$ sur des points de $\mathbb{R}^+$ qui sont proches de 0. Comme $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ et comme $\psi_f(z) = f^{\circ m} \circ \psi_f(z - m)$ pour tout $m \geq 0$, on voit que $\psi_f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. Par conséquent, $\mathfrak{L}(-1/2) = \psi_f \circ \phi_f(-1/2) > 0$. □

Démonstration du fait 4. Commençons par étudier le comportement de $\phi_{f_c}(c)$ lorsque c est proche de $-3/2$. Posons $c = -\frac{3}{2} + t$. On calcule :

$$f_c(c) = \frac{3}{4}c + \frac{1}{2}c^2 = -\frac{3}{4}t + O(t^2).$$

Soit $\Phi(c) := \phi_{f_c}(c)$. Alors le développement asymptotique de ϕ_{f_c} (voir section 3.2.1) en 0 donne :

$$\Phi(c) = \phi_{f_c} \circ f_c(c) - 1 = \frac{4}{3t} - \log\left(\frac{4}{3t}\right) - 1 + o(1)$$

Donc, la suite d'applications (Φ_n) définies par :

$$\Phi_n(u) := \Phi\left(-\frac{3}{2} + \frac{4}{3(n+u)}\right) - n + \log n + 1$$

converge uniformément vers l'identité sur les compacts de $\mathbb{R}$.

Considérons maintenant l'application $f := f_{c_0}$ pour $c_0 := -3/2$.

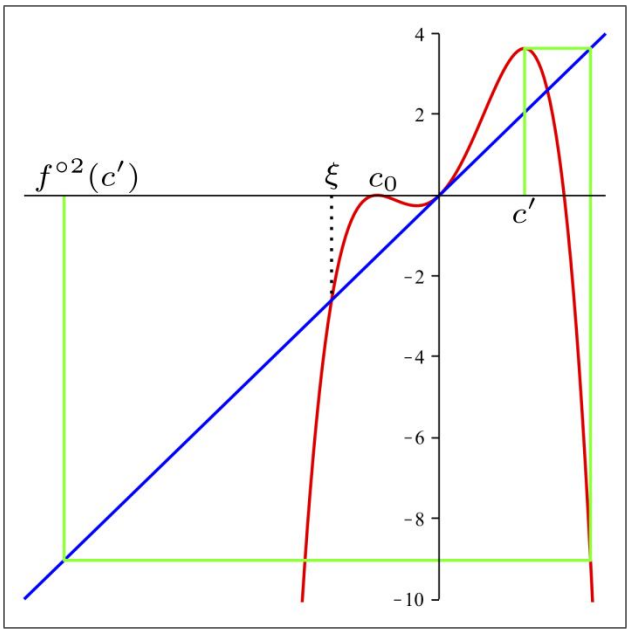


FIGURE 3.3.3 – Le graphe de la fonction $f(z) := z + z^2 - \frac{4}{27}z^4$ et les premières itérées du point critique $c' := \frac{3}{4}(1+\sqrt{3})$.

Les points fixes de f sont 0, $\xi := -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $\xi' := \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Les point critiques de f sont $c_0 = -\frac{3}{2}$, $c' := \frac{3}{4}(1+\sqrt{3})$ et $c'' := \frac{3}{4}(1-\sqrt{3})$. On voit que

$$f^{\circ 2}(c') < \xi < c_0 < c'' < 0 < c' < \xi' < f(c').$$

Donc, f envoie l'intervalle $(-\infty, \xi)$ dans lui-même et les orbites de tout point de cet intervalle convergent vers $-\infty$. En particulier, l'orbite de c' converge vers $-\infty$. De plus, $f - \mathrm{Id} \geq 0$ sur $[0, c']$, et f est croissante sur $[0, c']$. Donc, on peut définir une suite $(c'_m)_{m\geq 0}$ par récurrence en posant $c'_0 := c'$ et pour $m \geq 0$,

$$c'_{m+1} \in (0, c'),\ f(c'_{m+1}) = c'_m.$$

Cette suite est décroissante et converge vers un point fixe de f, donc converge vers 0.

Fixons m_0 suffisamment grand pour que $x := c'_{m_0}$ appartienne au pétale répulsif P_f^{rep}. Alors $f^{\circ(m_0+2)}(x) < \xi$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que pour tout $c \in (c_0, c_0 + \varepsilon)$, le point x

appartienne au pétale répulsif de f_c et $f_c^{\circ m_0+2}(x) < \xi(c)$, où $\xi(c)$ est le plus petit point fixe réel de f_c. En particulier, pour tout $m \geq m_0 + 2$, on a : $f^{\circ m}(x) < \xi(c) < c$.

Pour $c \in (c_0, c_0 + \varepsilon)$, posons

$$\Psi(c) := \psi_{f_c}^{-1}(x)$$

et

$$\Psi_n(u) := \Psi\left(-\frac{3}{2} + \frac{4}{3(n+u)}\right).$$

Remarquons que $\Psi(c) = X_0 + O(t)$ comme x est dans le pétale répulsif de f_c et ψ_c dépend continument de c. Donc, on a $\Psi_n(u) = X_0 + O(1/n)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ceci implique pour n assez grand, l'équation

$$\Phi_n(u) = \Psi_n(u) + \{\log n\}$$

admet au moins une solution $u_n \in (X_0 - 1, X_0 + 2)$, où $\{\log n\}$ désigne la partie fractionnaire de $\log n$.

Posons alors :

$$c_n := -\frac{3}{2} + \frac{4}{3(n+u_n)},\ s_n := \lfloor \log n \rfloor.$$

On a :

$$\begin{aligned}\phi_{f_{c_n}}(c_n) &= \Phi_n(u_n) + n - \log n - 1 \\ &= \Psi_n(u_n) + \{\log n\} + n - \log n - 1 \\ &= \Psi_n(u_n) + n - s_n - 1.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(c_n) &= \psi_{f_{c_n}} \circ \phi_{f_{c_n}}(c_n) \\ &= \psi_{f_{c_n}}\big(\Psi_n(u_n) + n - s_n - 1\big) \\ &= \psi_{f_{c_n}}\big(\psi_{f_{c_n}}^{-1}(x) + n - s_n - 1\big) = f_{c_n}^{\circ(n-s_n-1)}(x).\end{aligned}$$

Enfin, comme $n - s_n - 1 > m_0$ pour n suffisamment grand et comme $f^{\circ m}(x) < c$ pour tout $m \geq m_0 + 2$ et pour tout $c \in (c_0, c_0 + \varepsilon)$, on en déduit que $\mathfrak{L}(c_n) = f_{c_n}^{\circ(n-s_n-1)}(x) < c_n$ pour n assez grand. Ceci achève la preuve du fait 4. □

3.4 Construction de coordonnées de Fatou approchées

Dans cette section, nous allons construire des *coordonnées de Fatou approchées* adaptées à notre cadre de dynamique fibrée. On considère des polynômes $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme :

$$f(z) = z + z^2 + az^3 + O(z^4),\ g(w) = w - w^2 + O(w^3).$$

On pose

$$f_w(z) = f(z) + \frac{\pi^2}{4}w.$$

On veut montrer qu'il existe des coordonnées φ_w et $\varphi_{g(w)}$ qui en un certain sens sont des approximations des coordonnées de Fatou de f dans des domaines bien choisis, et tels que $\varphi_{g(w)} \circ f_w \circ \varphi_w^{-1}$ ressemble à une translation. Ces changements de variables sont normalisés de façon à ce que $\varphi_{g(w)} \circ f_w \circ \varphi_w^{-1}$ soit défini dans une région qui sera presque une bande verticale de largeur 1 et sera proche d'être la translation de vecteur $\sqrt{w}/2$. Ces coordonnées seront données par des formules explicites : dans ce sens notre approche est similaire à celle de [BSU12].

3.4.1 Notation

Les notations suivantes seront utilisées dans le reste de cette section ainsi que dans la suivante (voir aussi la figure 3.4.1).

Tout d'abord, fixons $R > 0$ suffisamment grand pour que $F : Z \mapsto -1/f(-1/Z)$ soit univalente sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$, et

$$\sup_{|Z|>R} \left|F(Z) - Z - 1\right| < \frac{1}{10}, \ \sup_{|Z|>R} \left|F'(Z) - 1\right| < \frac{1}{10}.$$

Appelons $\mathbb{H}_R$ le demi-plan droit $\mathbb{H}_R := \left\{Z \in \mathbb{C} \ ; \ \Re(Z) > R\right\}$ et $-\mathbb{H}_R$ le demi-plan gauche $-\mathbb{H}_R := \left\{Z \in \mathbb{C} \ ; \ \Re(Z) < -R\right\}$. Définissons le *pétale attractif* P_f^{att} par

$$P_f^{\text{att}} = \left\{z \in \mathbb{C} \ ; \ \Re\left(-\frac{1}{z}\right) > R\right\}$$

Alors :

— la restriction de la coordonnée de Fatou attractive ϕ_f au pétale attractif P_f^{att} est univalente, et

— la restriction de la paramétrisation ψ_f au demi-plan gauche $-\mathbb{H}_R$ est univalente.

Nous utiliserons la notation ψ_f^{-1} seulement pour la branche inverse $\psi_f^{-1} : P_f^{\text{rep}} \to -\mathbb{H}_R$ de ψ_f dans le pétale répulsif $P_f^{\text{rep}} := \psi_f(-\mathbb{H}_R)$. Rappelons que

$$\phi_f \circ f = T_1 \circ \phi_f, \quad f \circ \psi_f = \psi_f \circ T_1,$$

$$\phi_f(z) \sim -\frac{1}{z} \quad \text{quand} \quad \Re\left(-\frac{1}{z}\right) \to +\infty, \ \psi_f(Z) \sim -\frac{1}{Z} \quad \text{quand} \quad \Re(Z) \to -\infty.$$

Ensuite, pour $r > 0$ on pose $B_r := D(r, r)$ et on fixe $r > 0$ suffisamment petit pour que

$$B_r \subset \mathcal{B}_g, \ g(B_r) \subset B_r.$$

Dans le reste du chapitre, on supposera que $w \in B_r$, et donc $g^{\circ m}(w) \to 0$ lorsque $m \to +\infty$. La notation $\sqrt{w}$ désigne la branche de la racine carrée sur B_r qui a une partie réelle positive.

Enfin, on fixe un réel positif

$$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}. \tag{3.4.1}$$

La raison de ce choix d'intervalle de valeurs pour α sera explicité durant la preuve. Pour $w \in B_r$, posons

$$r_w := |w|^{(1-\alpha)/2} \underset{w\to 0}{\longrightarrow} 0, \ R_w := |w|^{-\alpha/2} \underset{w\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Soit $\mathcal{R}_w$ le rectangle

$$\mathcal{R}_w := \left\{\mathcal{Z} \in \mathbb{C} \ ; \ \frac{r_w}{10} < \Re(\mathcal{Z}) < 1 - \frac{r_w}{10} \text{ and } -\frac{1}{2} < \Im(\mathcal{Z}) < \frac{1}{2}\right\}, \tag{3.4.2}$$

et soit D_w^{att} et D_w^{rep} les disques

$$D_w^{\text{att}} := D\left(R_w, \frac{R_w}{10}\right), \ D_w^{\text{rep}} := D\left(-R_w, \frac{R_w}{10}\right).$$

Dans cette section, la notation $O(h)$ désigne une quantité qui est définie pour $w \in B_r$ suffisamment proche de 0 et qui est bornée par une $C \cdot h$, où C est une constante indépendante de w. De même, $o(h)$ désigne une quantité telle que $o(h)/h$ converge vers zero lorsque $w \to 0$.

3.4.2 Propriétés des coordonnées de Fatou approchées

Notre but dans ce paragraphe est d'énoncer précisément les propriétés des coordonnées de Fatou approchées, de manière axiomatique. Les constructions de ces coordonnées ainsi que la preuve du fait qu'elles vérifient ces propriétés seront présentées dans la suite.

Nous affirmons qu'il existe une famille de domaines (V_w) et d'application d'univalentes $(\varphi_w : V_w \to \mathbb{C})$ paramétrées par $w \in B_r$, vérifiant les propriétés suivantes :

Propriété 1 (Comparaison avec les coordonnées de Fatou attractives)**.** *Lorsque $w \to 0$ dans B_r,*

$$D_w^{\text{att}} \subset \phi_f\left(V_w \cap P_f^{\text{att}}\right), \ \sup_{Z \in D_w^{\text{att}}} \left| \frac{2}{\sqrt{w}} \cdot \varphi_w \circ \phi_f^{-1}(Z) - Z \right| \longrightarrow 0.$$

Ceci signifie que $\frac{2}{\sqrt{w}}\varphi_w$ est une approximation des coordonnées de Fatou du côté attractif. Il existe une propriété similaire du côté répulsif :

Propriété 2 (Comparaison avec les coordonnées de Fatou répulsives)**.** *Lorsque $w \to 0$ dans B_r, on a :*

$$1 + \frac{\sqrt{w}}{2} \cdot D_w^{\text{rep}} \subset \varphi_w\left(V_w \cap P_f^{\text{rep}}\right)$$

et

$$\sup_{Z \in D_w^{\text{rep}}} \left| \psi_f^{-1} \circ \varphi_w^{-1}\left(1 + \frac{\sqrt{w}}{2} Z\right) - Z \right| \longrightarrow 0.$$

Enfin, la dernière propriété affirme que $\frac{2}{\sqrt{w}}\varphi_w$ est presque une coordonnée de Fatou :

Propriété 3 (Conjugaison approchée à une translation)**.** *Lorsque $w \to 0$ dans B_r, on a :*

$$\mathcal{R}_w \subset \varphi_w(V_w), \quad f_w \circ \varphi_w^{-1}(\mathcal{R}_w) \subset V_{g(w)}$$

et

$$\sup_{\mathcal{Z} \in \mathcal{R}_w} \left| \varphi_{g(w)} \circ f_w \circ \varphi_w^{-1}(\mathcal{Z}) - \mathcal{Z} - \frac{\sqrt{w}}{2} \right| = o(w).$$

Pour améliorer la présentation de la preuve, qui comporte plusieurs changement de coordonnées, on adoptera les conventions suivantes :

- les caractères d'imprimerie (comme z, V_w, ...) seront utilisés pour les objets auxquels on pense comme vivant dans les coordonnées initiales ;
- les lettres cursives (comme $\mathcal{Z}$, $\mathcal{R}_w$, ...) seront utilisées pour les objets auxquels on pense comme vivant dans les coordonnées de Fatou approchées
- la coordonnée Z sera utilisées pour la coordonnée de Fatou exacte.

On écrira donc des expressions comme $\phi_f(z) = Z$ ou $\varphi_w(z) = \mathcal{Z}$.

Le produit fibré P fixe l'origine et laisse invariante la droite complexe $\{w = 0\}$. On peut poser la question de l'existence d'autres *courbes paraboliques invariantes* près de l'origine, dans le sens d'Écalle et Hakim (voir [Éca85] et [Hak98]).

Question. Existe-t-il des applications holomorphes $\xi^{\pm} : B_r \to \mathbb{C}$ telles que $\xi^{\pm}(w) \to 0$ lorsque $w \to 0$ et telles que $f_w \circ \xi^{\pm}(w) = \xi^{\pm} \circ g(w)$ pour $w \in B_r$?

Nous nous contenterons d'un résultat plus faible :

Lemme 3.4.1. *Soit $\zeta^{\pm} : B_r \to \mathbb{C}$ défini par*

$$\zeta^{\pm}(w) = \pm c_1\sqrt{w} + c_2 w \quad \textit{avec} \quad c_1 = \frac{\pi i}{2}, \, c_2 = \frac{a\pi^2}{8} - \frac{1}{4}.$$

Alors,

$$f_w \circ \zeta^{\pm}(w) = \zeta^{\pm} \circ g(w) + O(w^2).$$

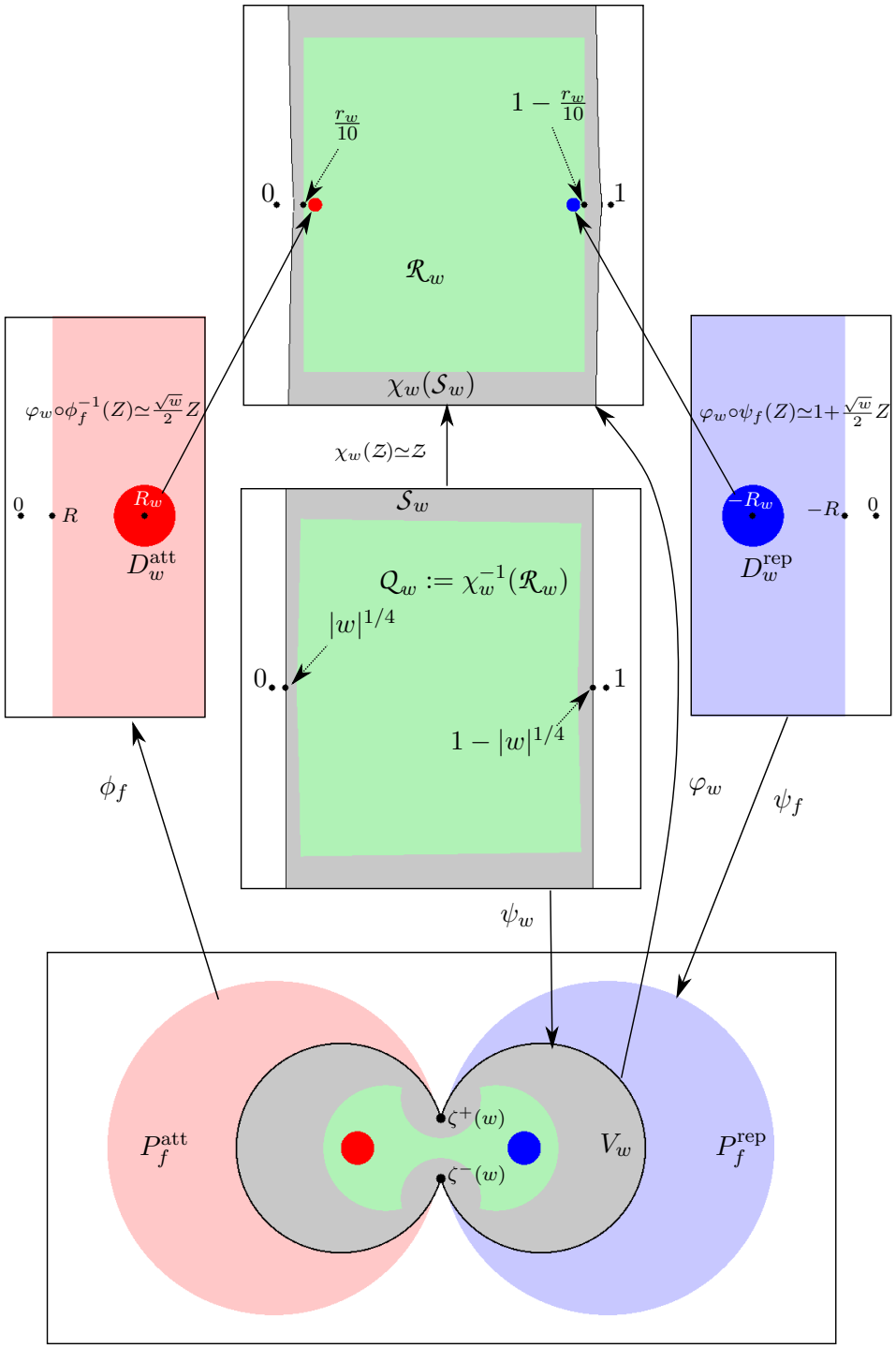


FIGURE 3.4.1 – Les différents changements de coordonnées utilisés dans la preuve.

Démonstration. Un calcul élémentaire montre que

$$f_w \circ \zeta^{\pm}(w) = \pm c_1\sqrt{w} + \left(c_2 + c_1^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) w \pm (ac_1^3 + 2c_1c_2)w\sqrt{w} + O(w^2).$$

D'autre part

$$\sqrt{g(w)} = \sqrt{w} - \frac{1}{2}w\sqrt{w} + O(w^2),$$

donc

$$\zeta \circ g(w) = \pm c_1\sqrt{w} + c_2 w \mp \frac{c_1}{2}w\sqrt{w} + O(w^2).$$

On déduit le résultat du choix de c_1 et c_2 puisque

$$c_2 + c_1^2 + \frac{\pi^2}{4} = c_2,\ ac_1^3 + 2c_1c_2 = -\frac{c_1}{2}.$$ □

Soit $\psi_w : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 \setminus \{\zeta^+(w), \zeta^-(w)\}$ le revêtement universel défini par

$$\psi_w(\mathcal{Z}) := \frac{\zeta^-(w) \cdot e^{2\pi i\mathcal{Z}} - \zeta^+(w)}{e^{2\pi i\mathcal{Z}} - 1} = ic_1\sqrt{w}\cot(\pi\mathcal{Z}) + c_2 w. \tag{3.4.3}$$

La restriction de ce revêtement universel est univalente sur une bande verticale

$$\mathcal{S}_0 := \left\{\mathcal{Z} \in \mathbb{C}\ ;\ 0 < \Re(\mathcal{Z}) < 1\right\},$$

et son inverse est donné par

$$\psi_w^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\log\left(\frac{z - \zeta^+(w)}{z - \zeta^-(w)}\right).$$

Dans cette formule, $\log(\cdot)$ désigne la branche du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et telle que $\log(-1) = \pi i$.

Pour $w \in B_r$, soit $\chi_w : \mathcal{S}_0 \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\chi_w(\mathcal{Z}) := \mathcal{Z} - \frac{\sqrt{w}(1-a)}{2}\log\left(\frac{2\sin(\pi\mathcal{Z})}{\pi\sqrt{w}}\right), \tag{3.4.4}$$

où la branche du logarithme est ici définie sur $\frac{1}{\sqrt{w}}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$ et s'annule en 1.

Considérons maintenant

$$\mathcal{S}_w := \left\{\mathcal{Z} \in \mathbb{C}\ ;\ |w|^{1/4} < \Re(\mathcal{Z}) < 1 - |w|^{1/4}\right\}$$

et son image par ψ_w :

$$V_w := \psi_w(\mathcal{S}_w) \subset \mathbb{C}.$$

Lemme 3.4.2. *Si $w \in B_r$ est suffisamment proche de 0, alors $\chi_w : \mathcal{S}_w \to \mathbb{C}$ est univalente. De plus, χ_w est proche de l'identité dans le sens suivant :*

$$\textit{si } \mathcal{Z} \in \mathcal{S}_w \cap \{\mathcal{Z},\ \Im(\mathcal{Z}) < 1\} \textit{ alors } \chi_w(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + O\left(|w|^{1/2}\log|w|\right) = \mathcal{Z} + o(r_w).$$

Démonstration. Remarquons que

$$\chi_w'(\mathcal{Z}) = 1 - \frac{\sqrt{w}(1-a)\pi}{2}\cot(\pi\mathcal{Z}),\ \sup_{\mathcal{Z}\in\mathcal{S}_w}\left|\cot(\pi\mathcal{Z})\right| \in O\left(|w|^{-1/4}\right).$$

Par conséquent,

$$\sup_{\mathcal{Z}\in\mathcal{S}_w}\left|\chi_w'(\mathcal{Z}) - 1\right| \in O\left(|w|^{1/4}\right).$$

Si $\chi_w(\mathcal{Z}_1) = \chi_w(\mathcal{Z}_2)$, alors

$$|\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_1| = \big|(\chi_w(\mathcal{Z}_1) - \mathcal{Z}_1) - (\chi_w(\mathcal{Z}_2) - \mathcal{Z}_2)\big| \leq \sup_{[\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2]} \big|\chi_w'(\mathcal{Z}) - 1\big| \cdot |\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_1|.$$

Lorsque w est suffisamment proche de 0, le supremum est inférieur à 1 et on a nécessairement $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2$.

La seconde assertion du lemme est une conséquence directe de la définition de χ_w et du fait que sur $\mathcal{S}_w \cap \{\Im(\mathcal{Z}) < 1\}$, $|\sin(\pi\mathcal{Z})| \geq c\,|w|^{1/4}$ pour une certaine constante c. □

On supposera dorénavant que w est suffisamment proche de 0 pour que $\chi_w : \mathcal{S}_w \to \mathbb{C}$ soit univalente.

Définition 3.4.3. Les coordonnées de Fatou approchées φ_w sont les applications

$$\varphi_w := \chi_w \circ \psi_w^{-1} : V_w \to \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad w \in B_r.$$

Nous allons montrer que ces coordonnées de Fatou approchées vérifient les propriétés 1, 2 and 3.

3.4.3 Comparaison avec la coordonnée de Fatou approchée

Dans ce paragraphe, nous prouverons que les coordonnées de Fatou approchées φ_w vérifient la propriété 1, c'est-à-dire que lorsque $w \to 0$ dans B_r, $D_w^{\mathrm{att}} \subset \phi_f(V_w)$ et

$$\sup_{Z \in D_w^{\mathrm{att}}} \left| \frac{2}{\sqrt{w}} \cdot \varphi_w \circ \phi_f^{-1}(Z) - Z \right| \longrightarrow 0. \tag{3.4.5}$$

Rappelons que $R_w = |w|^{-\alpha/2}$, $r_w = |w|^{1/2} R_w = |w|^{(1-\alpha)/2}$, et $D_w^{\mathrm{att}} = D(R_w, R_w/10)$.

Démonstration de la propriété 1.
Étape 1. Commençons par prouver que $D_w^{\mathrm{att}} \subset \phi_f(V_w)$. Remarquons que $R_w \to +\infty$ lorsque $w \to 0$, et donc $D_w^{\mathrm{att}} \subset \phi_f(P_f^{\mathrm{att}})$ pour w proche de 0. Si $z \in \phi_f^{-1}(D_w^{\mathrm{att}})$, alors

$$\phi_f(z) = -\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right) = O\left(R_w\right).$$

De plus,

$$\zeta^{\pm}(w) = \pm\frac{\pi i}{2}\sqrt{w}\big(1 + o(1)\big),\ \frac{\zeta^{\pm}(w)}{z} = O\left(r_w\right).$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{z - \zeta^+(w)}{z - \zeta^-(w)}\right) &= \log\left(1 - \frac{\zeta^+(w)}{z}\right) - \log\left(1 - \frac{\zeta^-(w)}{z}\right) \\ &= -\frac{\zeta^+(w)}{z} + \frac{\zeta^-(w)}{z} + O\left(r_w^2\right) = -\pi i\frac{\sqrt{w}}{z} + O\left(r_w^2\right).\end{aligned}$$

Comme $\alpha > 1/2$, on a $r_w^2 = |w|^{1-\alpha} = o\left(|w|^{1/2}\right)$, et il s'ensuit que

$$\mathcal{Z} := \frac{1}{2\pi i}\log\left(\frac{z - \zeta^+(w)}{z - \zeta^-(w)}\right) = -\frac{\sqrt{w}}{2z} + O\left(r_w^2\right) = -\frac{\sqrt{w}}{2z} + o\left(|w|^{1/2}\right). \tag{3.4.6}$$

Donc, la partie réelle de $\mathcal{Z}$ est comparable à r_w et comme $|w|^{1/4} = o\left(r_w\right)$, on en déduit que $\mathcal{Z} \in \mathcal{S}_w$, donc $z = \psi_w(\mathcal{Z}) \in V_w$ pour $w \in B_r$ suffisamment proche de 0.

Étape 2. Nous allons maintenant prouver (3.4.5). Remarquons que

$$\sup_{Z\in D_w^{\mathrm{att}}}\left|\frac{2}{\sqrt{w}}\cdot\varphi_w\circ\phi_f^{-1}(Z)-Z\right|=\sup_{z\in\phi_f^{-1}(D_w^{\mathrm{att}})}\left|\frac{2}{\sqrt{w}}\cdot\varphi_w(z)-\phi_f(z)\right|.$$

Observons d'abord que quand w tend vers 0, le domaine $\phi_f^{-1}(D_w^{\mathrm{att}})$ tend aussi vers 0. Donc, si $z\in\phi_f^{-1}(D_w^{\mathrm{att}})$, alors

$$\phi_f(z)=-\frac{1}{z}-(1-a)\log\left(-\frac{1}{z}\right)+o(1).$$

Par ailleurs,

$$\frac{2\sin(\pi\mathcal{Z})}{\pi\sqrt{w}}=\frac{2}{\sqrt{w}}\big(\mathcal{Z}+o(\mathcal{Z})\big)=-\frac{1}{z}+o\left(\frac{1}{z}\right).$$

Donc, avec l'estimation (3.4.6) on en déduit que

$$\begin{aligned}\varphi_w(z)=\chi_w(\mathcal{Z})&=\mathcal{Z}-\frac{\sqrt{w}\cdot(1-a)}{2}\log\left(\frac{2\sin(\pi\mathcal{Z})}{\pi\sqrt{w}}\right)\\&=-\frac{\sqrt{w}}{2z}+o\left(|w|^{1/2}\right)-\frac{\sqrt{w}\cdot(1-a)}{2}\log\left(-\frac{1}{z}+o\left(\frac{1}{z}\right)\right)\\&=\frac{\sqrt{w}}{2}\left(-\frac{1}{z}-(1-a)\log\left(-\frac{1}{z}\right)+o\left(1\right)\right)\\&=\frac{\sqrt{w}}{2}\big(\phi_f(z)+o(1)\big),\end{aligned}\tag{3.4.7}$$

ce qui achève la preuve. □

3.4.4 Comparaison avec les coordonnées de Fatou répulsives

Dans ce paragraphe, nous allons prouver la propriété 2, c'est-à-dire que lorsque $w\to 0$ in B_r,

$$\mathcal{D}'_w:=1+\frac{\sqrt{w}}{2}\cdot D_w^{\mathrm{rep}}\subset\varphi_w\left(V_w\cap P_f^{\mathrm{rep}}\right)$$

et

$$\sup_{Z\in D_w^{\mathrm{rep}}}\left|\psi_f^{-1}\circ\varphi_w^{-1}\left(1+\frac{\sqrt{w}}{2}Z\right)-Z\right|\longrightarrow 0.$$

La preuve est comparable à celle de 1.

Démonstration de la propriété 2.
Étape 1. Commençons par prouver que pour $w\in B_r$ suffisamment proche de 0, le disque $\mathcal{D}'_w$ est inclus dans $\varphi_w(V_w)$. Remarquons que si l'on note encore $r_w=|w|^{1/2}R_w=|w|^{(1-\alpha)/2}$, on a

$$\mathcal{D}'_w=D\left(1-\frac{\sqrt{w}R_w}{2},\frac{r_w}{20}\right).$$

Comme $\alpha>1/2$, on a $|w|^{1/4}=o(r_w)$. De plus, $\Re(\sqrt{w})>\frac{\sqrt{2}}{2}|w|^{1/2}$ pour $w\in B_r$, et donc

$$\mathcal{D}''_w:=D\left(1-\frac{\sqrt{w}R_w}{2},\frac{r_w}{10}\right)\subset\mathcal{S}_w.$$

De plus,d'après le lemme 3.4.2, $\chi_w(\mathcal{Z})=\mathcal{Z}+o(r_w)$ pour $\mathcal{Z}\in\mathcal{D}''_w$, donc

$$\mathcal{D}'_w\subset\chi_w(\mathcal{D}''_w)\subset\chi_w(\mathcal{S}_w)=\varphi_w(V_w).$$

Étape 2. Étant donné $Z \in D_w^{\mathrm{rep}}$, on pose

$$\mathcal{X} := \chi_w^{-1}\left(1 + \frac{\sqrt{w}}{2} Z\right).$$

Remarquons que $\sqrt{w}Z$ a un module égal à r_w. Posons aussi

$$z := \varphi_w^{-1}\left(1 + \frac{\sqrt{w}}{2} Z\right) = ic_1\sqrt{w}\cot(\pi\mathcal{X}) + c_2 w. \tag{3.4.8}$$

D'après le lemme 3.4.2 on a

$$\mathcal{X} - 1 = \frac{\sqrt{w}}{2} Z \cdot \big(1 + o(1)\big) = O(r_w),$$

et donc

$$\cot(\pi\mathcal{X}) = \cot\big(\pi(\mathcal{X} - 1)\big) = \frac{2}{\pi\sqrt{w}Z}\big(1 + o(1)\big).$$

En se souvenant que $c_1 = \pi i/2$, d'après (3.4.8) on peut déduire :

$$z = \frac{2ic_1}{\pi Z} \cdot \big(1 + o(1)\big) \quad \text{avec} \quad \frac{2ic_1}{\pi Z} = -\frac{1}{Z} \in D\left(|w|^{\alpha/2}, \frac{|w|^{\alpha/2}}{2}\right).$$

Donc, lorsque $w \in B_r$ est suffisamment proche de 0, $z \in P_f^{\mathrm{rep}}$ et

$$\psi_f^{-1}(z) = -\frac{1}{z} - (1 - a)\log\left(\frac{1}{z}\right) + o(1).$$

De plus,

$$\frac{2\sin(\pi\mathcal{X})}{\pi\sqrt{w}} = -\frac{2\sin(\pi(\mathcal{X} - 1))}{\pi\sqrt{w}} = -\frac{2}{\sqrt{w}}\left(\frac{\sqrt{w}}{2} Z \cdot \big(1 + o(1)\big)\right) = \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right).$$

Enfin, comme dans (3.4.7), on calcule :

$$\begin{aligned} Z = \frac{2}{\sqrt{w}}\big(\chi_w(\mathcal{X}) - 1\big) &= -\frac{1}{z} + o(1) - (1 - a)\log\left(\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right) \\ &= \psi_f^{-1}(z) + o(1) \\ &= \psi_f^{-1} \circ \varphi_w^{-1}\left(1 + \frac{\sqrt{w}}{2} Z\right) + o(1). \end{aligned}$$

ceci achève la preuve de la propriété 2. □

3.4.5 Propriété de translation approchée

Dans ce paragraphe, nous prouverons que les coordonnées de Fatou approchées φ_w vérifient la propriété 3, c'est-à-dire : lorsque $w \to 0$ dans B_r, on a les inclusions $\mathcal{R}_w \subset \varphi_w(V_w)$ et $f_w \circ \varphi_w^{-1}(\mathcal{R}_w) \subset V_{g(w)}$ (rappelons que le rectangle $\mathcal{R}_w$ a été défini en (3.4.2)), et

$$\sup_{Z \in \mathcal{R}_w} \left|\varphi_{g(w)} \circ f_w \circ \varphi_w^{-1}(Z) - Z - \frac{\sqrt{w}}{2}\right| = o(w).$$

Esquisse de preuve. Soit

$$\psi^0 := \psi_w,\ \psi^2 := \psi_{g(w)},\ \chi^0 := \chi_w, \text{and } \chi^2 := \chi_{g(w)}.$$

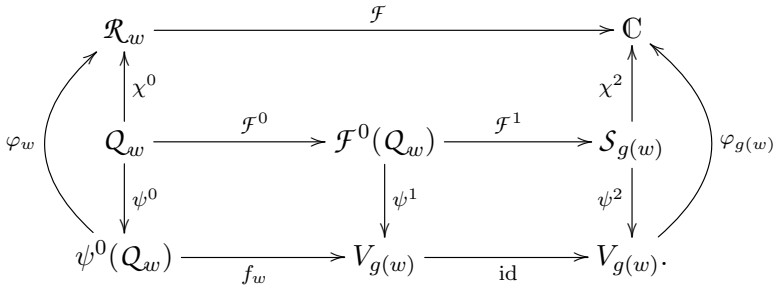
Pour surmonter la difficulté venant du fait que $f_w \circ \zeta^{\pm}$ n'est pas exactement égal à $\zeta^{\pm} \circ g$ (voir le lemme 3.4.1), plutôt que de travailler directement avec $\psi_2 \circ f_w \circ \psi_0^{-1}$, on introduit un changement de coordonnées intermédiaire

$$\psi^1 : \mathbb{C} \ni \mathcal{Z} \mapsto \frac{f_w\big(\zeta^-(w)\big) \cdot e^{2\pi i \mathcal{Z}} - f_w\big(\zeta^+(w)\big)}{e^{2\pi i \mathcal{Z}} - 1} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \big\{ f_w\big(\zeta^+(w)\big), f_w\big(\zeta^-(w)\big) \big\}.$$

Soit $\mathcal{H}$ la bande verticale

$$\mathcal{H} := \big\{ \mathcal{Z} \in \mathbb{C} \ ; \ -1 < \Im(\mathcal{Z}) < 1 \big\}.$$

Nous verrons qu'il existe des relevés $\mathcal{F}^0 : \mathcal{S}_w \to \mathbb{C}$, $\mathcal{F}^1 : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ et une application $\mathcal{F} : \mathcal{R}_w \to \mathbb{C}$ telles que le diagramme suivant commute :



Étape 1. Prouvons que $\mathcal{R}_w \subset \varphi_w(V_w) = \chi^0(\mathcal{S}_w)$ et que

$$\sup_{\mathcal{Z} \in \mathcal{R}_w} \big|\varphi_w^{-1}(\mathcal{Z})\big| = O\left(|w|^{\alpha/2}\right).$$

Posons $\mathcal{Q}_w := (\chi^0)^{-1}(\mathcal{R}_w) \subset \mathcal{S}_w$.

Étape 2. Nous allons définir $\mathcal{F}^0$ sur $\mathcal{S}_w$ et prouver que pour $\mathcal{Z} \in \mathcal{Q}_w$,

$$\mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + \frac{\sqrt{w}}{2} + \frac{\pi(1-a)w}{4} \cot(\pi \mathcal{Z}) + o(w). \tag{3.4.9}$$

En particulier, pour w suffisamment proche de 0, $\mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + O\left(|w|^{1/2}\right)$, et donc $\mathcal{F}^0(\mathcal{Q}_w) \subset \mathcal{H}$.

Étape 3. On définit $\mathcal{F}^1$ sur $\mathcal{H}$ et on prouve que pour $\mathcal{Z} \in \mathcal{H}$,

$$\mathcal{F}^1(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + o(w).$$

En particulier, pour w suffisamment proche de 0, $\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) = \mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) + o(w)$, d'où l'on déduit que

$$\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(\mathcal{Q}_w) \subset \mathcal{S}_{g(w)} \quad \text{donc} \quad f_w \circ \varphi_w^{-1}(\mathcal{R}_w) \subset V_{g(w)}.$$

Étape 4. On utilise χ^0 et χ^2 pour éliminer le troisième terme dans le terme de droite de (3.4.9). Plus précisément, on définit $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{R}_w$ et on prouve que pour $\mathcal{Z} \in \mathcal{R}_w$,

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + \frac{\sqrt{w}}{2} + o(w).$$

La propriété 3 est alors prouvée. □

3.4.5.1 Démonstration de l'étape 1

On prouve que $\mathcal{R}_w \subset \varphi_w(V_w)$ et que

$$\sup_{\mathcal{Z}\in\mathcal{R}_w} \left|\varphi_w^{-1}(\mathcal{Z})\right| = O\left(|w|^{\alpha/2}\right).$$

Soit $\mathcal{R}'_w \subset \mathcal{S}_w$ le rectangle

$$\mathcal{R}'_w := \left\{\mathcal{Z}\in\mathcal{S}_w \ ; \ \frac{r_w}{20} < \Re(\mathcal{Z}) < 1 - \frac{r_w}{20} \text{ and } -1 < \Im(\mathcal{Z}) < 1\right\},$$

avec comme précédemment $r_w := |w|^{(1-\alpha)/2}$. On voit que $\mathcal{R}_w \subset \mathcal{R}'_w$ et la distance entre les frontières est $r_w/20$. Par ailleurs, d'après le lemme 3.4.2, pour $\mathcal{Z}\in\mathcal{R}'_w$, $\chi_w(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + o(r_w)$. Il s'ensuit que $\chi_w(\partial\mathcal{R}'_w)$ entoure $\mathcal{R}_w$, et donc

$$\mathcal{R}_w \subset \chi_w(\mathcal{R}'_w) \subset \chi_w(\mathcal{S}_w) = \varphi_w(V_w),$$

ce qu'il fallait montrer.

Pour prouver l'estimation sur $\varphi_w^{-1}(\mathcal{Z})$, posons $\mathcal{Q}_w := \chi_w^{-1}(\mathcal{R}_w)$. Comme $\varphi_w = \chi_w \circ \psi_w^{-1}$, on voit que $\varphi_w^{-1}(\mathcal{R}_w) = \psi_w(\mathcal{Q}_w)$. La suite d'inclusions précédente montre que $\mathcal{Q}_w \subset \mathcal{R}'_w$. Donc, de

$$\psi_w(\mathcal{Z}) = ic_1\sqrt{w}\cot(\pi\mathcal{Z}) + c_2 w,$$

on déduit que

$$\begin{aligned}\sup_{\mathcal{Z}\in\mathcal{R}_w} \left|\varphi_w^{-1}(\mathcal{Z})\right| = \sup_{\mathcal{Z}\in\mathcal{Q}_w} \left|\psi_w(\mathcal{Z})\right| &\le \sup_{\mathcal{Z}\in\mathcal{R}'_w} \left|\psi_w(\mathcal{Z})\right| \\ &= O\left(\frac{|w|^{1/2}}{r_w}\right) + O(w) = O\left(|w|^{\alpha/2}\right).\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de l'étape 1.

3.4.5.2 Démonstration de l'étape 2

On définit $\mathcal{F}^0$ sur $\mathcal{S}_w$ et on prouve que pour $\mathcal{Z}\in\mathcal{Q}_w$,

$$\mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + \frac{\sqrt{w}}{2} + \frac{\pi(1-a)w}{4}\cot(\pi\mathcal{Z}) + o(w) = \mathcal{Z} + O\left(|w|^{1/2}\right).$$

Étape 2.1. Commençons par définir $\mathcal{F}^0$. Il sera pratique de poser $w = \varepsilon^2$ pour que les développements limités par rapport à $\sqrt{w}$ deviennent des développement limités en ε. Soit

$$\zeta_0^{\pm}(\varepsilon) := \zeta^{\pm}(\varepsilon^2) = \pm c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2, \ \zeta_1^{\pm}(\varepsilon) := f_{\varepsilon^2}\circ\zeta_0^{\pm}(\varepsilon) \text{ and } \zeta_2^{\pm}(\varepsilon) := \zeta^{\pm}\circ g(\varepsilon^2).$$

Fixons $r_1 > 0$ suffisamment petit pour que la seule préimage de 0 par f dans $D(0,2r_1)$ soit 0. Choisissons $r_2 > 0$ tel que pour $\varepsilon\in D(0,r_2)$, la seule préimage de $\zeta_1^{\pm}(\varepsilon) := f_{\varepsilon^2}(\zeta_0^{\pm})(\epsilon)$ par f_{ε^2} dans $D(0,r_1)$ soit $\zeta_0^{\pm}(\varepsilon)$. La fonction

$$(z,\varepsilon) \longmapsto \frac{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^+(\varepsilon)}{z - \zeta_0^+(\varepsilon)} \cdot \frac{z - \zeta_0^-(\varepsilon)}{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^-(\varepsilon)}$$

se prolonge holomorphiquement à $\Delta := D(0,r_1)\times D(0,r_2)$ et ne s'y annule pas. De plus, elle est constante égale à 1 pour $\varepsilon = 0$. On pose

$$u : (z,\varepsilon) \longmapsto \frac{1}{2\pi i}\log\left(\frac{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^+(\varepsilon)}{z - \zeta_0^+(\varepsilon)} \cdot \frac{z - \zeta_0^-(\varepsilon)}{f_{\varepsilon^2}(z) - \zeta_1^-(\varepsilon)}\right)$$

où la branche du logarithme est choisie pour que $u(z,0)\equiv 0$. Considèrons l'application $\mathcal{F}^0$ définie sur $\mathcal{S}_w$ par

$$\mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) := \mathcal{Z} + u\big(\psi^0(\mathcal{Z}),\varepsilon\big).$$

Alors, pour $\mathcal{Z}\in\mathcal{S}_w$, on pose

$$z := \psi^0(\mathcal{Z}) \in V_w \quad \text{et donc} \quad \mathcal{Z} = \frac{1}{2\pi i}\log\left(\frac{z-\zeta_0^+(\varepsilon)}{z-\zeta_0^-(\varepsilon)}\right).$$

Lorsque $\mathcal{Z}$ prend ses valeurs dans $\mathcal{S}_w$, z évite les points $\zeta_0^\pm(\varepsilon)$ et reste dans un petit disque centré en 0, donc $f_{\varepsilon^2}(z)$ évite les points $\zeta_1^\pm(\varepsilon) = f_{\varepsilon^2}\big(\zeta_0^\pm(\varepsilon)\big)$. On peut donc définir

$$\mathcal{Z}_1 := \frac{1}{2\pi i}\log\left(\frac{f_{\varepsilon^2}(z)-\zeta_1^+(\varepsilon)}{f_{\varepsilon^2}(z)-\zeta_1^-(\varepsilon)}\right)$$

où la branche est choisie pour que

$$\mathcal{Z}_1 - \mathcal{Z} = u(z,\varepsilon) = u\big(\psi^0(\mathcal{Z}),\varepsilon\big) = \mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) - \mathcal{Z}.$$

On a donc :

$$\psi^1\circ\mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) = \psi^1(\mathcal{Z}_1) = f_{\varepsilon^2}(z) = f_{\varepsilon^2}\circ\psi^0(\mathcal{Z}).$$

En d'autres termes, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_w & \xrightarrow{\mathcal{F}^0} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle\psi^0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi^1} \\ V_w & \xrightarrow[f_w]{} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}). \end{array}$$

Étape 2.2. Nous allons maintenant prouver que pour $(z,\varepsilon)\in\Delta$, on a l'estimation suivante :

$$2\pi i u(z,\varepsilon) = 2c_1\varepsilon - 2c_1(1-a)\varepsilon z + O(\varepsilon z^2) + O(\varepsilon^3).$$

En effet, observons que :

$$\frac{f_{\varepsilon^2}(z)-\zeta_1^+(\varepsilon)}{z-\zeta_0^+(\varepsilon)}\cdot\frac{z-\zeta_0^-(\varepsilon)}{f_{\varepsilon^2}(z)-\zeta_1^-(\varepsilon)} = \frac{f(z)-f\big(\zeta_0^+(\varepsilon)\big)}{z-\zeta_0^+(\varepsilon)}\cdot\frac{z-\zeta_0^-(\varepsilon)}{f(z)-f\big(\zeta_0^-(\varepsilon)\big)},$$

d'où

$$2\pi i u(z,\varepsilon) = \log\left(\frac{1-f\big(\zeta_0^+(\varepsilon)\big)/f(z)}{1-\zeta_0^+(\varepsilon)/z}\right) - \log\left(\frac{1-f\big(\zeta_0^-(\varepsilon)\big)/f(z)}{1-\zeta_0^-(\varepsilon)/z}\right).$$

Rappelons que $\zeta_0^\pm(\varepsilon) = \pm c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2$, donc

$$f\big(\zeta_0^\pm(\varepsilon)\big) = \pm c_1\varepsilon + c_3\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad \text{avec} \quad c_3 := c_2 + c_1^2.$$

Comme u est holomorphe sur Δ et $u(z,0)\equiv 0$, u admet un développement de la forme : $u(z,\varepsilon) = u_1(z)\varepsilon + u_2(z)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ sur Δ. Pour déterminer u_1 et u_2 on écrit

$$\log\left(\frac{1-f\big(\zeta_0^\pm(\varepsilon)\big)/f(z)}{1-\zeta_0^\pm(\varepsilon)/z}\right) = \pm c_1\cdot\left(-\frac{1}{f(z)}+\frac{1}{z}\right)\cdot\varepsilon + \left(-\frac{c_3}{f(z)} - \frac{c_1^2}{2\big(f(z)\big)^2} + \frac{c_2}{z} + \frac{c_1^2}{2z^2}\right)\cdot\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

et en considérant la différence entre les deux expressions on obtient :

$$\begin{aligned} 2\pi i u(z,\varepsilon) &= 2c_1 \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f(z)}\right) \cdot \varepsilon + O(\varepsilon^3) \\ &= 2c_1\varepsilon - 2c_1(1-a)\varepsilon z + O(\varepsilon z^2) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Étape 2.3. Nous allons maintenant prouver (3.4.9). Si $\mathcal{Z} \in \mathcal{Q}_w$ et

$$z := \psi^0(\mathcal{Z}) = ic_1\varepsilon \cot(\pi\mathcal{Z}) + c_2\varepsilon^2 = ic_1\varepsilon \cot(\pi\mathcal{Z}) + o(\varepsilon),$$

on déduit de l'étape 1 de la preuve (voir (3.4.10)) que $z = O\left(|\varepsilon|^\alpha\right)$. Comme $\alpha > 1/2$ on voit que $O(\varepsilon z^2) = O\left(|\varepsilon|^{1+2\alpha}\right) \subset o(\varepsilon^2)$. [1] Donc, pour $\mathcal{Z} \in \mathcal{Q}_w$,

$$\begin{aligned} u\left(\psi^0(\mathcal{Z}),\varepsilon\right) &= \frac{2c_1}{2\pi i}\varepsilon - \frac{c_1^2 \cdot (1-a)}{\pi}\varepsilon^2 \cot(\pi\mathcal{Z}) + o(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi(1-a)\varepsilon^2}{4}\cot(\pi\mathcal{Z}) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + u\left(\psi^0(\mathcal{Z}),\varepsilon\right)$, on obtient l'estimation souhaitée (3.4.9), ce qui achève la preuve de l'étape 2.

3.4.5.3 Preuve de l'étape 3

Nous allons définir $\mathcal{F}^1$ sur la bande verticale $\mathcal{H}$ et prouver que

$$\mathcal{F}^1(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + o(w).$$

L'idée est que comme la distance $\left|\zeta_2^\pm - \zeta_1^\pm\right|$ est bien plus petite que $\left|\zeta_1^+ - \zeta_1^-\right|$, $(\psi^2)^{-1} \circ \psi^1$ est très proche de l'identité.

Étape 3.1. Commençons par définir $\mathcal{F}^1$. Soit $\mu_1 : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\mu_2 : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ les transformations de Möbius définies par (rappelons que $\varepsilon = \sqrt{w}$) :

$$\mu_1(z) := \frac{z - \zeta_1^+(\varepsilon)}{z - \zeta_1^-(\varepsilon)},\ \mu_2(z) := \frac{z - \zeta_2^+(\varepsilon)}{z - \zeta_2^-(\varepsilon)}.$$

La transformation de Möbius $\mu := \mu_2 \circ \mu_1^{-1} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ envoie $\mu_1 \circ \zeta_2^+(\varepsilon)$ sur 0, $\mu_1 \circ \zeta_2^-(\varepsilon)$ to ∞ et fixe 1. Posons

$$\delta^+ := \mu_1 \circ \zeta_2^+(\varepsilon) = \frac{\zeta_2^+(\varepsilon) - \zeta_1^+(\varepsilon)}{\zeta_2^+(\varepsilon) - \zeta_1^-(\varepsilon)},\ \delta^- := \frac{1}{\mu_1 \circ \zeta^-(\varepsilon)} = \frac{\zeta_2^-(\varepsilon) - \zeta_1^-(\varepsilon)}{\zeta_2^-(\varepsilon) - \zeta_1^+(\varepsilon)}.$$

Remarquons que

$$\zeta_2^\pm(\varepsilon) - \zeta_1^\pm(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^4\right) \quad \text{alors que} \quad \zeta_2^\pm(\varepsilon) - \zeta_1^\mp(\varepsilon) = i\pi\varepsilon \cdot \big(1 + o(1)\big),$$

donc

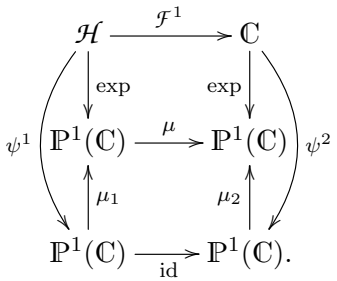
$$\delta^+ = O\left(\varepsilon^3\right),\ \delta^- = O\left(\varepsilon^3\right).$$

Donc, l'image de la bande horizontale $\mathcal{H} = \{-1 < \Im(\mathcal{Z}) < 1\}$ par la fonction exponentielle

$$\exp : \mathbb{C} \ni \mathcal{Z} \mapsto e^{2\pi i \mathcal{Z}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

1. C'est à cause de ce calcul qu'on a fait le choix de borne inférieur pour α.

évite δ^+ et $1/\delta^-$ et $\mu : \exp(\mathcal{H}) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se relève en une application $\mathcal{F}^1 : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ telle que le diagramme suivant commute :



Comme $\mu(1) = 1$, le choix de relevé est complètement déterminé par $\mathcal{F}^1(0) = 0$.

Étape 3.2. Nous allons estimer $\mathcal{F}^1(\mathcal{Z}) - \mathcal{Z}$. Comme $\mu(\delta^+) = 0$, $\mu(1/\delta^-) = \infty$ et $\mu(1) = 1$, on en déduit que

$$\mu(z) = z \cdot \frac{1-\delta^-}{1-\delta^+} \cdot \frac{1-\delta^+/z}{1-\delta^- z}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{F}^1(\mathcal{Z}) - \mathcal{Z} = \log(1-\delta^-) - \log(1-\delta^+) + \log(1-\delta^+/z) + \log(1-\delta^- z),$$

où log est la branche principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (les arguments des quatre logarithmes sont proches de 1). Comme $\delta^+ = O\left(\varepsilon^3\right)$ and $\delta^- = O\left(\varepsilon^3\right)$, on en déduit que

$$\sup_{\mathcal{Z} \in \mathcal{H}} \left|\mathcal{F}^1(\mathcal{Z}) - \mathcal{Z}\right| = O\left(\varepsilon^3\right) \subset o(\varepsilon^2) = o(w),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Étape 3.3. Prouvons que $\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(\mathcal{Q}_w) \subset \mathcal{S}_{g(w)}$. Tout d'abord, on a vu dans l'étape 1 que $\mathcal{Q}_w \subset \mathcal{R}'_w$. Comme w est petit,

$$\left|g(w)\right|^{1/4} = |w|^{1/4} + o\left(|w|^{1/4}\right),$$

hence $\mathcal{R}'_w \subset \mathcal{S}_{g(w)}$ et la distance entre les frontières est comparable à $|w|^{1/4}$. Comme $\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + O\left(|w|^{1/2}\right)$ sur $\mathcal{Q}_w$ et $|w|^{1/2} = o\left(|w|^{1/4}\right)$, on voit que $\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(\mathcal{Q}_w) \subset \mathcal{S}_{g(w)}$.

On en déduit que

$$f_w \circ \varphi_w^{-1}(\mathcal{R}_w) = f_w \circ \psi_w(\mathcal{Q}_w) = \psi_{g(w)}\big(\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0(\mathcal{Q}_w)\big) \subset \psi_{g(w)}(\mathcal{S}_{g(w)}) = V_{g(w)},$$

ce qui achève la preuve de l'étape 3.

3.4.5.4 Démonstration de l'étape 4

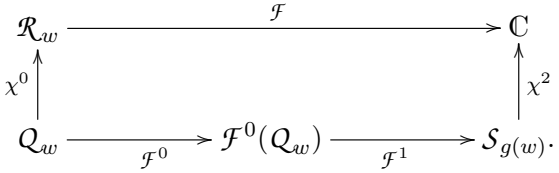
Nous allons définir $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{R}_w$ et prouver que

$$\mathcal{F}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} + \frac{\sqrt{w}}{2} + o(w).$$

Soit

$$\mathcal{F} := \chi^2 \circ (\mathcal{F}^1 \circ \mathcal{F}^0) \circ (\chi^0)^{-1} : \mathcal{R}_w \to \mathbb{C},$$

tel que le diagramme suivant commute :



Pour $\mathcal{Z} \in \mathcal{Q}_w$, posons

$$v(\mathcal{Z}) := \frac{\sqrt{w}}{2} + \frac{\pi(1-a)w}{4}\cot(\pi\mathcal{Z}) = \frac{\sqrt{w}}{2} + o\left(|w|^{1/2}\right),$$

où la seconde égalité se déduit du fait que $\cot(\pi\mathcal{Z}) = O(r_w^{-1})$ sur $\mathcal{Q}_w$. Écrivons alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\chi^0(\mathcal{Z})\right) &= \chi^2\left(\mathcal{Z} + v(\mathcal{Z}) + o(w)\right)\\ &= \mathcal{Z} + v(\mathcal{Z}) + o(w) + \frac{\sqrt{g(w)}(1-a)}{2}\cdot\log\left(\frac{2\sin\left(\pi\mathcal{Z} + \pi v(\mathcal{Z}) + o(w)\right)}{\sqrt{g(w)}}\right). \quad (3.4.10)\end{aligned}$$

En utilisant

$$\sqrt{g(w)} = \sqrt{w + O\left(w^2\right)} = \sqrt{w} + O\left(|w|^{3/2}\right),$$

et avec le même argument que dans le lemme 3.4.2, on voit que le logarithme dans (3.4.10) est $O(\log|w|)$. On en déduit donc :

$$\mathcal{F}\left(\chi^0(\mathcal{Z})\right) = \mathcal{Z} + v(\mathcal{Z}) - \frac{\sqrt{w}(1-a)}{2}\log\left(\frac{2\sin\left(\pi\mathcal{Z} + \pi v(\mathcal{Z})\right)}{\pi\sqrt{w}}\right) + o(w),$$

par conséquent :

$$\mathcal{F}\left(\chi^0(\mathcal{Z})\right) - \chi^0(\mathcal{Z}) = v(\mathcal{Z}) - \frac{\sqrt{w}(1-a)}{2}\log\left(\frac{\sin\left(\pi\mathcal{Z} + \pi v(\mathcal{Z})\right)}{\sin(\pi\mathcal{Z})}\right) + o(w).$$

De l'estimation $v(\mathcal{Z}) = \sqrt{w}/2 + o\left(|w|^{1/2}\right)$, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left(\pi\mathcal{Z} + \pi v(\mathcal{Z})\right)}{\sin(\pi\mathcal{Z})} &= \frac{\sin(\pi\mathcal{Z}) + \frac{\pi\sqrt{w}}{2}\cos(\pi\mathcal{Z}) + o\left(|w|^{1/2}\right)}{\sin(\pi\mathcal{Z})}\\ &= 1 + \frac{\pi\sqrt{w}}{2}\cdot\cot(\pi\mathcal{Z}) + o\left(|w|^{1/2}\right).\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\chi^0(\mathcal{Z})\right) - \chi^0(\mathcal{Z}) &= \frac{\sqrt{w}}{2} + \frac{\pi(1-a)w}{4}\cot(\pi\mathcal{Z})\\ &\quad - \frac{\sqrt{w}(1-a)}{2}\cdot\frac{\pi\sqrt{w}}{2}\cot(\pi\mathcal{Z}) + o(w)\\ &= \frac{\sqrt{w}}{2} + o(w).\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de l'étape 4, et donc de la propriété 3 des coordonnées de Fatou approchées. □

3.5 Preuve du résultat clé

Le but de cette section est de prouver le théorème clé 3.1.5.

3.5.1 Notations

Soit C_f un compact inclus dans $\mathcal{B}_f$ et C_g un compact inclus dans $\mathcal{B}_g$. Il s'agit de montrer que la suite d'applications

$$\mathbb{C}^2 \ni (z,w) \mapsto P^{\circ 2n+1}\left(z, g^{\circ n^2}(w)\right) \in \mathbb{C}^2$$

converge uniformément sur $C_f \times C_g$ vers l'application

$$C_f \times C_g \ni (z,w) \mapsto \big(\mathcal{L}_f(z), 0\big) \in \mathbb{C} \times \{0\}.$$

Pour $(z,w) \in C_f \times C_g$ et pour $m \geq 0$, posons

$$w_m := g^{\circ m}(w).$$

Cette suite converge uniformément vers 0 sur C_g, donc la difficulté consiste à prouver que la première coordonnée converge uniformément vers $\mathcal{L}_f(z)$.

Dans ce but, nous allons devoir estimer plusieurs quantités qui dépendent d'un entier $k \in [0, 2n+1]$ (correspondant à un itéré $m = n^2 + k \in [n^2, (n+1)^2]$). Nous adoptons la convention suivant laquelle la notation $o(\cdot)$ or $O(\cdot)$ désigne une estimation uniforme sur $C_f \times C_g$, et ne dépendant que de n, c'est-à-dire une estimation uniforme en $k \in [0, 2n+1]$.

Pour $m_2 \geq m_1 \geq 0$, posons

$$\mathbf{f}_{m_2,m_1} := f_{w_{m_2-1}} \circ \cdots \circ f_{w_{m_1}} \quad \text{avec} \quad f_w(z) := f(z) + \frac{\pi^2}{4} w.$$

Par convention, une composition vide est l'identité, donc $\mathbf{f}_{m,m} = \mathrm{id}$. Ainsi :

$$P^{\circ 2n+1}\big(z, g^{\circ n^2}(w)\big) = \big(\mathbf{f}_{(n+1)^2,n^2}(z), w_{(n+1)^2}\big)$$

donc nous devons prouver que

$$\mathbf{f}_{(n+1)^2,n^2}(z) = \mathcal{L}_f(z) + o(1).$$

3.5.2 Schéma de la preuve

Rappelons que $R > 0$ a été choisi suffisamment grand pour que $F : Z \mapsto -1/f(-1/Z)$ vérifie

$$\sup_{|Z|>R} \big|F(Z) - Z - 1\big| < \frac{1}{10}, \ \sup_{|Z|>R} \big|F'(Z) - 1\big| < \frac{1}{10}. \tag{3.5.1}$$

Le pétale répulsif P_f^{rep} est l'image de $-\mathbb{H}_R$ par l'application univalente ψ_f, et la notation ψ_f^{-1} est réservée pour la branche inverse $\psi_f^{-1} : P_f^{\mathrm{rep}} \to \mathbb{H}_R$.

Posons

$$k_n := \lfloor n^\alpha \rfloor = o(n) \quad \text{où} \quad \frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3} \text{ comme dans (3.4.1).}$$

La preuve sera découpée en quatre propositions que l'on énoncera indépendamment, correspondant aux trois parties de la transition entre n^2 et $(n+1)^2$ itérées. Les preuves seront données dans les sections 3.5.4 à 3.5.7.

Commençons par montrer que pour les k_n premières itérations, l'orbite reste proche d'une orbite de f (la borne $\alpha < 2/3$ est utilisée ici).

Proposition 3.5.1 (Entrée dans le batteur à oeufs)**.** Soit $z \in C_f$ et soit x_n^ι défini par $x_n^\iota := \mathbf{f}_{n^2+k_n,n^2}(z)$. [2]

Alors, $x_n^\iota \sim -1/k_n$, d'où $x_n^\iota \in \mathcal{B}_f$ pour n suffisamment grand. De plus,

$$\phi_f\left(x_n^\iota\right) = \phi_f\left(f^{\circ k_n}(z)\right) + o(1) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Les deux propositions suivantes ont pour objet la phase où le nombre d'itération est compris entre $n^2 + k_n$ et $(n+1)^2 - k_n$.

2. L'exposant ι désigne *incoming* (entrant), et dans la proposition 3.5.4 ci-dessous, o désigne *outgoing* (sortant). Cette convention a été introduite dans [BSU12].

Proposition 3.5.2 (Longueur de transition)**.** Lorsque $n \to \infty$,

$$2n \cdot \left(\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_m}}{2} \right) = 2n - 2k_n + o(1).^{3}$$

Proposition 3.5.3 (Passage dans le batteur à oeufs)**.** Soit $(x_n^\iota)_{n\geq 0}$ une suite telle que $x_n^\iota \sim -1/k_n$, et donc $x_n^\iota \in \mathcal{B}_f$ pour n suffisamment grand. Posons

$$x_n^o := \mathbf{f}_{(n+1)^2-k_n, n^2+k_n}\left(x_n^\iota\right).$$

Alors, $x_n^o \sim 1/k_n$, et donc $x_n^o \in P_f^{\mathrm{rep}}$ pour n suffisamment grand. De plus, lorsque $n \to \infty$,

$$\psi_f^{-1}\left(x_n^o\right) = \phi_f\left(x_n^\iota\right) + 2n \cdot \left(\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_m}}{2} \right) - 2n + o(1) = \phi_f\left(x_n^\iota\right) - 2k_n + o(1).$$

La dernière proposition est similaire à la proposition 3.5.1.

Proposition 3.5.4 (Sortie du batteur à oeufs)**.** Soit $(x_n^o)_{n\geq 0}$ une suite contenue dans P_f^{rep} telle que $\psi_f^{-1}\left(x_n^o\right) = -k_n + O(1)$ quand $n \to +\infty$. Alors

$$\mathbf{f}_{(n+1)^2,(n+1)^2-k_n}\left(x_n^o\right) = f^{\circ k_n}\left(x_n^o\right) + o(1) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Démonstration de la proposition 3.1.5. Commençons par la proposition 3.5.1 : si $z \in C_f$, alors

$$x_n^\iota := \mathbf{f}_{n^2+k_n, n^2}(z)$$

vérifie $x_n^\iota \sim -1/k_n$ et quand $n \to +\infty$,

$$\phi_f\left(x_n^\iota\right) = \phi_f\left(f^{\circ k_n}(z)\right) + o(1) = \phi_f(z) + k_n + o(1).$$

D'après la proposition 3.5.3,

$$x_n^o := \mathbf{f}_{(n+1)^2-k_n, n^2+k_n}\left(x_n^\iota\right) = \mathbf{f}_{(n+1)^2-k_n, n^2}(z)$$

vérifie $x_n^o \sim 1/k_n$ et quand $n \to +\infty$,

$$\psi_f^{-1}\left(x_n^o\right) = \phi_f(z) + k_n - 2k_n + o(1) = \phi_f(z) - k_n + o(1).$$

Enfin, comme $\phi_f(z) - k_n + o(1) = -k_n + O(1)$, la proposition 3.5.4 implique que quand $n \to +\infty$,

$$\mathbf{f}_{(n+1)^2,n^2}(z) = \mathbf{f}_{(n+1)^2,(n+1)^2-k_n}\left(x_n^o\right) = f^{\circ k_n}\left(x_n^o\right) + o(1).$$

Ceci achève donc la preuve de la proposition 3.1.5 puisque

$$\begin{aligned} f^{\circ k_n}\left(x_n^o\right) = f^{\circ k_n} \circ \psi_f \circ \psi_f^{-1}\left(x_n^o\right) &= \psi_f\left(\psi_f^{-1}\left(x_n^o\right) + k_n\right) \\ &= \psi_f\big(\phi_f(z) + o(1)\big) = \mathcal{L}_f(z) + o(1). \end{aligned}$$ □

3. Rappelons que $\sqrt{w}$ est la racine carré qui a une partie réelle positive.

3.5.3 Comparaison avec l'implosion parabolique classique

Les propositions 3.5.1, 3.5.3 et 3.5.4 restent valides si au lieu de travailler avec la suite $\big(w_m := g^{\circ m}(w)\big)$, on utilise la suite (w'_m) définie par

$$w'_m := \frac{1}{n^2} \quad \text{if} \quad n^2 \le m \le (n+1)^2 - 1.$$

Dans ce cas, la seule modification nécessaire est dans la proposition 3.5.2 qui doit être remplacée par :

$$2n \cdot \left(\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w'_m}}{2} \right) = 2n \cdot \left(\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{1}{2n} \right) = 2n - 2k_n + 1 + o(1).$$

En suivant la preuve de la proposition 3.1.5, on obtient :

$$f_{1/n^2}^{\circ(2n+1)}(z) = \psi_f\big(\phi_f(z) + 1 + o(1)\big) = f \circ \mathcal{L}_f(z) + o(1).$$

On peut donc voir que dans notre contexte non autonome, où la dynamique décélère lentement au fur et à mesure que l'orbite passe dans le batteur à oeufs, il faut exactement une itération supplémentaire pour faire la transition que dans le cas classique en dimension un.

3.5.4 Longueur de transition

Dans ce paragraphe, nous allons prouver la proposition 3.5.2, qui concerne seulement la dynamique de g. Il s'agit de montrer que

$$\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_m}}{2} = 1 - \frac{k_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Rappelons que $\phi_g : \mathcal{B}_g \to \mathbb{C}$ désigne la coordonnée de Fatou attractive de g. Pour tout $k \ge 0$, on a :

$$\phi_g(w_{n^2+k}) = \phi_g(w) + n^2 + k = n^2 + k + O(1).^{4}$$

Par conséquent, pour $k \in [k_n, 2n - k_n]$ on a :

$$w_{n^2+k} = \phi_g^{-1}\big(n^2 + k + O(1)\big) = \frac{1}{n^2 + k + O(\log n)}$$

et

$$\sqrt{w_{n^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + k + O(\log n)}} = \frac{1}{n} - \frac{k}{2n^3} + O\left(\frac{\log n}{n^3}\right).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_n}^{2n-k_n} \sqrt{w_{n^2+k}} &= \frac{2n - 2k_n + 1}{n} - \frac{2n(2n - 2k_n + 1)}{4n^3} + O\left(\frac{\log n}{n^2}\right) \\ &= 2 - \frac{2k_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

4. Rappelons que les notations $o(\cdot)$ et $O(\cdot)$ signifient que les estimations sont uniformes sur $C_f \times C_g$ et par rapport à $k \in [0, 2n+1]$.

3.5.5 Entrée dans le batteur à oeufs

Dans ce paragraphe, nous allons prouver la proposition 3.5.1, c'est-à-dire : si $z \in C_f$ et $x_n^\iota := \mathbf{f}_{n^2+k_n,n^2}(z)$, alors, quand $n \to +\infty$,

$$x_n^\iota \sim -\frac{1}{k_n},\ \phi_f\left(x_n^\iota\right) = \phi_f\left(f^{\circ k_n}(z)\right) + o(1).$$

3.5.5.1 Entrée dans le pétale attractif

Fixons $\kappa_0 \geq 1$ suffisamment grand pour que

$$f^{\circ\kappa_0}(C_f) \subset P_f^{\mathrm{att}}.$$

Pour chaque $k \geq 0$ fixé, la suite de polynômes $(f_{w_{n^2+k}})_{n\geq 0}$ converge localement uniformément vers f. Il s'ensuit que pour tout $k \in [1, \kappa_0]$, la suite $\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}$ converge uniformément vers $f^{\circ k}$ sur C_f. En particulier, si n est suffisamment grand, alors

$$\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(C_f) \subset \mathcal{B}_f \text{ pour } k \in [1,\kappa_0],\ \text{et } \mathbf{f}_{n^2+\kappa_0,n^2}(C_f) \subset P_f^{\mathrm{att}}.$$

De plus, comme $\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0,n^2}(z)$ est proche de $f^{\kappa_0}(z)$, alors pour n suffisamment grand on a également

$$k_n > \frac{10}{\left|\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0,n^2}(z)\right|} \text{ pour } z \in C_f. \tag{3.5.2}$$

3.5.5.2 L'orbite reste dans le pétale attractif

Nous allons maintenant prouver que si n est suffisamment grand et $k \in [\kappa_0, k_n]$, alors $\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(C_f) \subset P_f^{\mathrm{att}}$.

Pour cela, nous allons travailler dans la coordonnée $Z = -1/z$. Pour $m \geq 0$, considèrons la fraction rationnelle F_m définie par :

$$F_m(Z) := -\frac{1}{f_{w_m}(-1/Z)} = F(Z) - \frac{\pi^2 w_m \cdot [F(Z)]^2}{4 + \pi^2 w_m \cdot F(Z)}.$$

Il faut penser à la fraction rationnelle F_m comme à une perturbation de F. Remarquons pourtant que le terme d'erreur $F_m(Z) - F(Z)$ *n'est pas* négligeable par rapport à $F(Z)$ quand $Z \to \infty$, et donc il faut contrôler précisément pour quelles valeurs de Z cette erreur est effectivement petite.

Comme $F(Z) \sim Z$ quand $z \to \infty$ et comme $w_{n^2+k} \in O(1/n^2)$ pour $k \in [0, k_n]$, on a :

$$\sup_{|Z|=R} \left|F_{n^2+k}(Z) - F(Z)\right| = o(1) \text{ and } \sup_{|Z|=2k_n} \left|F_{n^2+k}(Z) - F(Z)\right| = O\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right) = o(1).$$

En particulier, d'après le principe du maximum et le choix de R (voir (3.5.1)) pour n suffisamment grand, si $k \in [0, k_n]$ alors

$$\sup_{R<|Z|<2k_n} \left|F_{n^2+k}(Z) - Z - 1\right| < \frac{1}{10}.$$

Une récurrence facile sur k montre que pour tout $k \in [\kappa_0, k_n]$ et pour tout $z \in C_f$,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(z)} \in \overline{D}\left(-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0,n^2}(z)} + k - \kappa_0, \frac{k-\kappa_0}{10}\right) \\ \subset \left\{Z \in \mathbb{C}\ ;\ \Re(Z) > R \text{ and } |Z| < 2k_n\right\}. \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

En effet, l'hypothèse de récurrence est clairement vraie pour $k = \kappa_0$ et si elle est vraie pour $k \in [\kappa_0, k_n - 1]$, alors

$$-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+k+1,n^2}(z)} = F_{n^2+k}\left(-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(z)}\right) \in \overline{D}\left(-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(z)} + 1, \frac{1}{10}\right)$$
$$\subset \overline{D}\left(-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0,n^2}(z)} + k - \kappa_0 + 1, \frac{k-\kappa_0}{10} + \frac{1}{10}\right).$$

Si Z appartient à ce dernier disque, alors

$$\Re(Z) > \Re\left(-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0,n^2}(z)}\right) + k - \kappa_0 + 1 - \frac{k-\kappa_0+1}{10} > R + \frac{9}{10}(k-\kappa_0+1) > R$$

et en utilisant (3.5.2),

$$|Z| < \left|-\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0,n^2}(z)}\right| + k - \kappa_0 + 1 + \frac{k-\kappa_0+1}{10} < \frac{1}{10}k_n + \frac{11}{10}k_n < 2k_n.$$

Ceci montre que $\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(z) \in P_f^{\mathrm{att}}$ pour tout $k \in [\kappa_0, k_n]$ et pour tout $z \in C_f$.

3.5.5.3 Estimations en coordonnée de Fatou attractive

Nous allons enfin prouver que pour $k \in [0, k_n]$

$$\phi_f\big(\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(z_n)\big) = \phi_f\big(f^{\circ k}(z)\big) + o(1).$$

Ceci est clairement vrai pour $k \in [1, \kappa_0]$ puisque pour chaque k, la suite $(\mathbf{f}_{n^2+k,n^2})$ converge uniformément vers $f^{\circ k}$ sur C_f. Il suffit donc de prouver cette estimation pour $k \in [\kappa_0, k_n]$.

On a : $\phi_f'(z) \sim 1/z^2$ as $z \to 0$ in P_f^{att}. Par ailleurs, on a vu dans (3.5.3) que pour $k \in [\kappa_0, k_n]$,

$$\left|\frac{1}{\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(z_n)}\right| \le 2k_n.$$

Il s'ensuit que pour $k \in [\kappa_0, k_n - 1]$ et $z \in C_f$,

$$\sup_{I_k} |\phi_f'| \in O(k_n^2) \quad \text{avec} \quad I_k := \big[f \circ \mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(z), \mathbf{f}_{n^2+k+1,n^2}(z)\big],$$

et donc

$$\begin{aligned}\phi_f\big(\mathbf{f}_{n^2+k+1,n^2}(z)\big) &= \phi_f\left(f\big(\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(z)\big) + \frac{\pi^2}{4}w_{n^2+k}\right)\\ &= \phi_f \circ f\big(\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(z)\big) + w_{n^2+k} \cdot \sup_{I_k} |\phi_f'| \cdot O(1)\\ &= \phi_f\big(\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(z)\big) + 1 + O\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $k \in [\kappa_0, k_n]$,

$$\begin{aligned}\phi_f\big(\mathbf{f}_{n^2+k,n^2}(z)\big) &= \phi_f\big(\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0,n^2}(z)\big) + k - \kappa_0 + O\left(\frac{k_n^3}{n^2}\right)\\ &= \phi_f\big(f^{\circ\kappa_0}(z)\big) + k - \kappa_0 + o(1)\\ &= \phi_f\big(f^{\circ k}(z)\big) + o(1),\end{aligned}$$

où la seconde inégalité vient de l'estimation $\mathbf{f}_{n^2+\kappa_0,n^2}(z) = f^{\circ\kappa_0}(z) + o(1)$ et du fait que $k_n^3 = O\left(n^{3\alpha}\right)$ puisque $\alpha < 2/3$.

En prenant $k = k_n$, on en déduit que

$$\phi_f(x_n^\iota) = \phi_f\big(\mathbf{f}_{n^2+k_n,n^2}(z)\big) + o(1) = \phi_f(z) + k_n + o(1) = k_n + O(1)$$

et donc, $x_n^\iota \sim -1/\phi_f(x_n^\iota) \sim -1/k_n$. La preuve de la proposition 3.5.1 est alors achevée. □

3.5.6 Passage dans le batteur à oeufs

Dans cette section, nous allons prouver la proposition 3.5.3, c'est-à-dire : si $(x_n^\iota)_{n\geq 0}$ est une suite telle que $x_n^\iota \sim -1/k_n$ et si

$$x_n^o := \mathbf{f}_{(n+1)^2-k_n,n^2+k_n}\left(x_n^\iota\right),$$

alors, quand $n \to +\infty$,

$$x_n^o \sim \frac{1}{k_n},\ \psi_f^{-1}\left(x_n^o\right) = \phi_f\left(x_n^\iota\right) + n \cdot \left(\sum_{m=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \sqrt{w_m}\right) - 2n + o(1).$$

La preuve utilise les coordonnées de Fatou approchées construites dans la section 3.4. On reprendra toutes les notations développées dans cette section (en particulier les propriétés 1, 2 et 3).

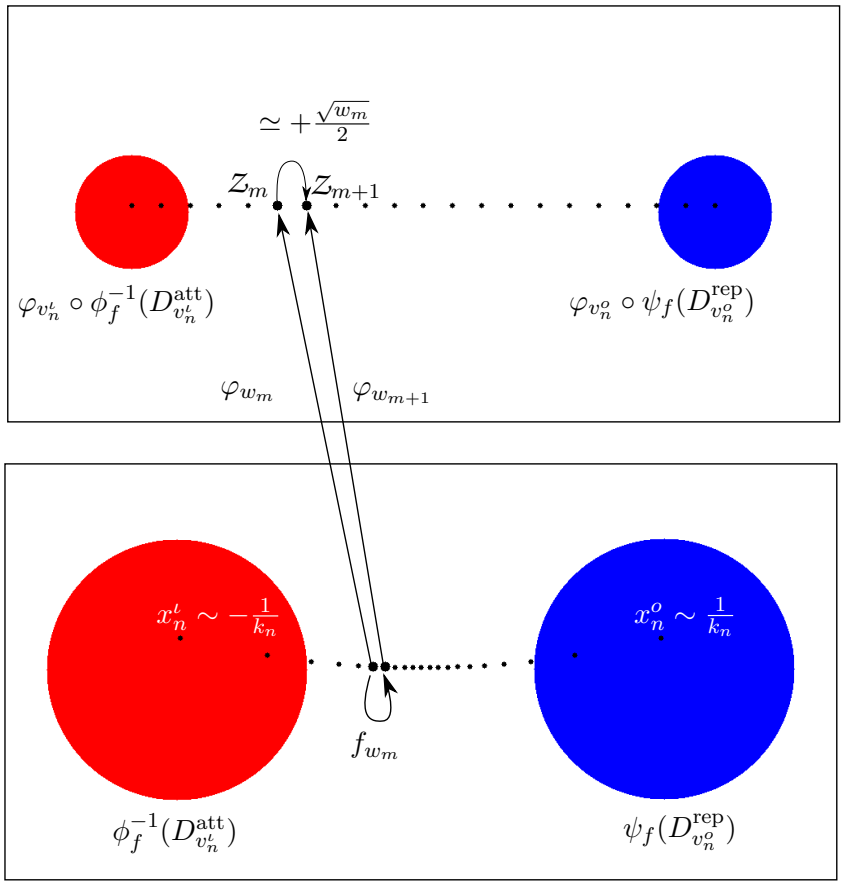


FIGURE 3.5.1 – L'application $\varphi_{w_{m+1}} \circ f_{w_m} \circ \varphi_{w_m}^{-1}$ est proche de la translation de vecteur $\frac{\sqrt{w_m}}{2}$.

Démonstration. Soit $v_n^\iota := w_{n^2+k_n}$ dans B_r pour n suffisamment grand.

Étape 1. Si $x_n^\iota \sim -1/k_n$, alors pour n suffisamment grand, $x_n^\iota \in P_f^{\text{att}}$. Posons $Y_n := \phi_f(x_n^\iota)$ et remarquons que

$$Y_n \sim -\frac{1}{x_n^\iota} \sim k_n \sim n^\alpha \sim |v_n^\iota|^{-\alpha/2} \text{ et donc } Y_n \in D^{\text{att}}_{v_n^\iota} \text{ pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

D'après la propriété 1, pour n suffisamment grand, $x_n^\iota = \phi_f^{-1}(Y_n) \in V_{v_n^\iota}$ et

$$\frac{2}{\sqrt{v_n^\iota}} \cdot \varphi_{v_n^\iota}(x_n^\iota) = \frac{2}{\sqrt{v_n^\iota}} \cdot \varphi_{v_n^\iota} \circ \phi_f^{-1}(Y_n) = Y_n + o(1) = \phi_f(x_n^\iota) + o(1). \tag{3.5.4}$$

Étape 2. Nous allons maintenant prouver par récurrence sur m que pour tout $m \in [n^2+k_n, (n+1)^2 - k_n]$,

$$\mathbf{f}_{m,n^2+k_n}(x_n^\iota) \in V_{w_m}$$

et

$$\mathcal{Z}_m := \varphi_{w_m} \circ \mathbf{f}_{m,n^2+k_n}(x_n^\iota) = \varphi_{w_n}(x_n^\iota) + \sum_{j=n^2+k_n}^{m-1} \left(\frac{\sqrt{w_m}}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

En effet, pour $m = n^2 + k_n$, on a : $w_m = v_n^\iota$ et d'après l'étape 1,

$$\mathbf{f}_{m,n^2+k_n}(x_n^\iota) = x_n^\iota \in V_{v_n^\iota} = V_{w_m},$$

donc l'hypothèse de récurrence est vraie dans ce cas.

Supposons maintenant que l'hypothèse de récurrence soit vraie pour un certain $m \in [n^2 + k_n, (n+1)^2 - k_n - 1]$. D'après l'étape 1,

$$\varphi_{v_n^\iota}(x_n^\iota) = \frac{\sqrt{v_n^\iota}}{2} \cdot \big(\phi_f(x_n^\iota) + o(1)\big) = \frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right). \tag{3.5.5}$$

De plus,

$$\sqrt{w_m} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + O(n)}} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{Z}_m = \frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right) + (m - n^2 - k_n) \cdot \left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{m-n^2}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right),$$

et donc

$$\frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right) \le \Re(\mathcal{Z}_m) \le 1 - \frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right), \ \Im(\mathcal{Z}_m) = o(1).$$

Comme $r_{w_m} = |w_m|^{(1-\alpha)/2} \sim k_n/n$, on voit que pour n suffisamment grand, $\mathcal{Z}_m \in \mathcal{R}_{w_m}$. D'après la propriété 3,

$$\mathbf{f}_{m+1,n^2+k_n}(x_n^\iota) = f_{w_m} \circ \mathbf{f}_{m,n^2+k_n}(x_n^\iota) \in V_{w_{m+1}}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{m+1} &= \phi_{w_{m+1}} \circ f_{w_m} \circ \phi_{w_m}^{-1}(\mathcal{Z}_m) = \mathcal{Z}_m + \frac{\sqrt{w_m}}{2} + o(w_m) \\
&= \varphi_{v_n^\iota}(x_n^\iota) + \sum_{j=n^2+k_n}^{m-1} \left(\frac{\sqrt{w_j}}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{\sqrt{w_m}}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \varphi_{v_n^\iota}(x_n^\iota) + \sum_{j=n^2+k_n}^{m} \left(\frac{\sqrt{w_j}}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Étape 3. Nous allons maintenant traiter le cas où $m := (n+1)^2 - k_n$; posons

$$v_n^o := w_{(n+1)^2-k_n},\ x_n^o := \mathbf{f}_{(n+1)^2-k_n,n^2+k_n}(x_n^\iota).$$

D'après l'étape 2 de la preuve, $x_n^o \in V_{v_n^o}$ et

$$\varphi_{v_n^o}(x_n^o) = \varphi_{v_n^\iota}(x_n^\iota) + \sum_{j=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \left(\frac{\sqrt{w_j}}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \tag{3.5.6}$$

En particulier, en utilisant (3.5.5) et la proposition 3.5.2 on obtient

$$\varphi_{v_n^o}(x_n^o) = \frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right) + 1 - \frac{k_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{k_n}{2n} + o\left(\frac{k_n}{n}\right) \tag{3.5.7}$$

Posons

$$X_n := \frac{2}{\sqrt{v_n^o}} \cdot \big(\varphi_{v_n^o}(x_n^o) - 1\big) \quad \text{et donc} \quad \varphi_{v_n^o}(x_n^o) = 1 + \frac{\sqrt{v_n^o}}{2} \cdot X_n.$$

Comme $2/\sqrt{v_n^o} \sim 2n$, de (3.5.7) on déduit que $X_n = -k_n \cdot (1 + o(1))$. Comme de plus $k_n \sim (v_n^o)^{(1-\alpha)/2}$ il s'ensuit que pour n suffisamment grand, $X_n \in D_{v_n^o}^{\mathrm{rep}}$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\psi_f^{-1}(x_n^o) &= \psi_f^{-1} \circ \varphi_{v_n^o}^{-1}\left(1 + \frac{\sqrt{v_n^o}}{2} \cdot X_n\right) = X_n + o(1) \\
&= \frac{2}{\sqrt{v_n^o}} \cdot \left(\varphi_{v_n^\iota}(x_n^\iota) + \left(\sum_{j=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_j}}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{v_n^o}} \cdot \left(\frac{\sqrt{v_n^\iota}}{2}\big(\phi_f(x_n^\iota) + o(1)\big) + \left(\sum_{j=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_j}}{2}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \\
&= \phi_f(x_n^\iota) + 2n \cdot \left(\sum_{j=n^2+k_n}^{n^2+2n-k_n} \frac{\sqrt{w_j}}{2}\right) - 2n + o(1)
\end{aligned}$$

où l'on déduit la première ligne de la propriété 2, la seconde ligne suit de (3.5.6), la troisième ligne de la propriété 1, et la dernière ligne vient de $v_n^\iota \sim v_n^o \sim \frac{1}{n^2}$. Ceci achève la preuve. □

3.5.7 Sortie du batteur à oeufs

Dans ce paragraphe, nous allons prouver la proposition 3.5.4, c'est-à-dire : si $(x_n^o)_{n\geq 0}$ est une suite contenue dans le pétale P_f^{rep} et si

$$\psi_f^{-1}(x_n^o) = -k_n + O(1),$$

alors, quand $n \to +\infty$,

$$\mathbf{f}_{(n+1)^2,(n+1)^2-k_n}(x_n^o) = f^{\circ k_n}(x_n^o) + o(1).$$

Posons $x_{n,0}^o := x_n^o$ et pour $k \in [1, k_n]$, posons

$$x_{n,k}^o := \mathbf{f}_{(n+1)^2-k_n+k,(n+1)^2-k_n}(x_n^o)$$

3.5.7.1 Dans le pétale répulsif

Soit κ_1 un entier tel que pour tout $n \geq 0$,

$$\Re\big(\psi_f^{-1}(x_n^o)\big) + k_n + R < \kappa_1.$$

Nous allons prouver par récurrence sur k que pour n suffisamment grand, si $k \in [0, k_n - \kappa_1]$, alors

$$x_{n,k}^o \in P_f^{\mathrm{rep}},\ \psi_f^{-1}(x_{n,k}^o) = \psi_f^{-1}(x_n^o) + k + k \cdot O\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right).$$

Tout d'abord, l'hypothèse de récurrence est clairement vraie pour $k = 0$. Supposons donc qu'elle est vérifiée pour un certain $k \in [0, k_n - \kappa_1 - 1]$. Comme dans la proposition 3.5.1, comme $\alpha < 2/3$ et $k \leq k_n$, $kO(k_n^2/n^3) \subset o(1)$. Il s'ensuit que pour n suffisamment grand,

$$\Re\big(\psi_f^{-1}(x_{n,k}^o)\big) = \Re\big(\psi_f^{-1}(x_n^o)\big) + k + o(1) < k + \kappa_1 - k_n - R \leq -R - 1.$$

Comme $x^o_{n,k+1} = f_{w_{(n+1)^2-k_n+k}}(x^o_{n,k}) = f(x^o_{n,k}) + o(1)$ et $f \circ \psi_f = \psi_f \circ T_1$, quitte à choisir n plus grand s'il le faut, $x^o_{n,k+1}$ appartient au pétale répulsif P_f^{rep}.

Ensuite, comme

$$(\psi_f^{-1})'(z) \sim \frac{1}{z^2} \text{ quand } z \to 0 \text{ in } P_f^{\text{rep}},$$

comme dans la proposition 3.5.1 on voit que

$$\begin{aligned}
\psi_f^{-1}(x^o_{n,k+1}) &= \psi_f^{-1}\left(f(x^o_{n,k}) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \psi_f^{-1} \circ f(x^o_{n,k}) + O\left(\frac{1}{n^2\left|x^o_{n,k}\right|^2}\right) \\
&= \psi_f^{-1}(x^o_{n,k}) + 1 + O\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right) \\
&= \psi_f^{-1}(x^o_n) + k + 1 + (k+1) \cdot O\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat par récurrence.

3.5.7.2 Sortie du pétale répulsif

D'après l'étape précédente, on a :

$$\psi_f^{-1}(x^o_{n,k_n-\kappa_1}) = \psi_f^{-1}(x^o_n) + k_n - \kappa_1 + o(1) = \psi_f^{-1} \circ f^{\circ k_n-\kappa_1}(x^o_n) + o(1).$$

En appliquant ψ_f des deux côtés, on obtient :

$$x^o_{n,k_n-\kappa_1} = f^{\circ k_n-\kappa_1}(x^o_n) + o(1).$$

Comme la suite de polynômes $\mathbf{f}_{(n+1)^2,(n+1)^2-\kappa_1}$ converge localement uniformément vers $f^{\circ\kappa_1}$, on en déduit que

$$x^o_{n,k_n} = \mathbf{f}_{(n+1)^2,(n+1)^2-k_n}(x^o_n) = f^{\circ k_n}(x^o_n) + o(1),$$

ce qui achève la preuve de la proposition 3.5.4. □

Bibliographie

[ABD+14] Matthieu Astorg, Xavier Buff, Romain Dujardin, Han Peters, and Jasmin Raissy. A two-dimensional polynomial mapping with a wandering Fatou component. *arXiv preprint arXiv :1411.1188*, 2014.

[Ast14] Matthieu Astorg. On the dynamical Teichmüller space. *preprint ; arXiv :1406.1464*, 2014.

[Avi02] Artur Avila. Infinitesimal perturbations of rational maps. *Nonlinearity*, 15(5) :685–704, 2002.

[Bak76] Irvine N. Baker. An entire function which has wandering domains. *Journal of the Australian Mathematical Society (Series A)*, 22(02) :173–176, 1976.

[BC12] Xavier Buff and Arnaud Chéritat. Quadratic julia sets with positive area. *Ann. of Math.*, 176(2) :673–746, 2012.

[BE09] Xavier Buff and Adam L. Epstein. Bifurcation measure and postcritically finite rational maps. *Complex dynamics : families and friends ; edited by Dierk Schleicher*, pages 491–512, 2009.

[BÉE13] Xavier Buff, Jean Écalle, and Adam Epstein. Limits of degenerate parabolic quadratic rational maps. *Geom. Funct. Anal*, 23 :42–95, 2013.

[Ben05] Robert L. Benedetto. Wandering domains and nontrivial reduction in non-archimedean dynamics. *Illinois Journal of Mathematics*, 49(1) :167–193, 2005.

[Bis15] Christopher J. Bishop. Constructing entire functions by quasiconformal folding. *Acta Math.*, 214(1) :1–60, 2015.

[BL89] A.M. Blokh and M. Yu Lyubich. Non-existence of wandering intervals and structure of topological attractors of one dimensional dynamical systems 2. the smooth case. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 9(04) :751–758, 1989.

[Bou07] Nicolas Bourbaki. *Variétés différentielles et analytiques : fascicule de résultats.* Springer, 2007.

[Bra92] Bodil Branner. *Cubic polynomials : turning around the connectedness locus.* Matematisk Inst., Danmarks tekniske Hojskole, 1992.

[BSU12] Eric Bedford, John Smillie, and Tetsuo Ueda. Parabolic bifurcations in complex dimension 2. *preprint ; arXiv :1208.2577*, 2012.

[BTFP13] Luka Boc-Thaler, John Eric Fornæss, and Han Peters. Fatou components with punctured limit sets. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, pages 1–14, 2013.

[CG93] Lennart Carleson and Theodore W Gamelin. *Complex dynamics*, volume 69. Springer Science & Business Media, 1993.

[Den32] Arnaud Denjoy. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 11 :333–376, 1932.

[Duj14] Romain Dujardin. A non-laminar green current. *preprint ; arXiv 1309.6656*, 2014.

[Éca85] Jean Écalle. Les fonctions résurgentes. tome III : l'équation du pont et la classification analytique des objects locaux. Prépublications Math. Orsay 85-05. *Université de Paris-Sud, Orsay*, 1985.

[EL92] Alexandre Eremenko and Mikhail Yu Lyubich. Dynamical properties of some classes of entire functions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42(4) :989–1020, 1992.

[EM88] Clifford J. Earle and Curtis T. McMullen. Quasiconformal isotopies. *Holomorphic functions and moduli*, 1 :143–154, 1988.

[Eps93] Adam L. Epstein. *Towers of finite type complex analytic maps.* PhD thesis, City University of New York, 1993.

[Eps99] Adam Epstein. Infinitesimal Thurston rigidity and the Fatou-Shishikura inequality. *arXiv preprint math/9902158*, 1999.

[Eps09] Adam L. Epstein. Transversality in holomorphic dynamics. *Manuscript available on http ://www.warwick.ac.uk/mases*, 2009.

[FH08] Nuria Fagella and Christian Henriksen. The Teichmüller space of an entire function. *Complex dynamics*, pages 297–330, 2008.

[FS98] John Erik Fornaess and Nessim Sibony. Fatou and julia sets for entire mappings in. *Mathematische Annalen*, 311(1) :27–40, 1998.

[FS01] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Some open problems in higher dimensional complex analysis and complex dynamics. *Publicacions matematiques*, 45(2) :529–547, 2001.

[Gau12] Thomas Gauthier. Strong bifurcation loci of full Hausdorff dimension. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.(4)*, 45(6) :947–984, 2012.

[GK86] Lisa R. Goldberg and Linda Keen. A finiteness theorem for a dynamical class of entire functions. *Ergodic theory and dynamical systems*, 6(02) :183–192, 1986.

[GL00] Frederick P. Gardiner and Nikola Lakic. *Quasiconformal Teichmüller Theory*, volume 76. AMS Bookstore, 2000.

[Guc79] John Guckenheimer. Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps. *Communications in Mathematical Physics*, 70(2) :133–160, 1979.

[Hak98] Monique Hakim. Analytic transformations of $(\mathbb{C}^p, 0)$ tangent to the identity. *Duke mathematical journal*, 92(2) :403–428, 1998.

[Her84] M. Herman. Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de riemann. *Bull. Soc. Math. France*, 112(1) :93–142, 1984.

[Hub06] John H. Hubbard. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics*, volume 1. Matrix Pr., 2006.

[Jon99] Mattias Jonsson. Dynamics of polynomial skew-products on $\mathbb{C}^2$. *Mathematische Annalen*, 314(3) :403–447, 1999.

[Lav89] Pierre Lavaurs. *Systemes dynamiques holomorphes : explosion de points périodiques paraboliques*. PhD thesis, Paris 11, 1989.

[Lev11] Genadi Levin. Perturbations of weakly expanding critical orbits. *preprint ; arXiv :1111.6270*, 2011.

[Lil04] Krastio Lilov. *Fatou theory in two dimensions*. PhD thesis, University of Michigan, 2004.

[Lyu89] M. Yu Lyubich. Non-existence of wandering intervals and structure of topological attractors of one dimensional dynamical systems : 1. the case of negative Schwarzian derivative. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 9(04) :737–749, 1989.

[Mak01] Peter M. Makienko. Remarks on Ruelle operator and invariant line field problem. *preprint ; arXiv : math/0110093*, 2001.

[Mak05] Peter M. Makienko. Remarks on the Ruelle operator and the invariant line fields problem II. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25(05) :1561–1581, 2005.

[Mak10] Peter M. Makienko. Remarks on the dynamic of the Ruelle operator and invariant differentials. *Dal nevost. Mat. Zh.*, pages 180–205, 2010.

[McM94] Curtis T. McMullen. *Complex dynamics and renormalization*. Number 135. Princeton University Press, 1994.

[McM14] Curtis T. McMullen. Riemann surfaces, dynamics and geometry. *lectures note available at http ://math.harvard.edu/ ctm/home/text/class/harvard/275/rs/rs.pdf*, 2014.

[MDMVS92] M. Martens, W. De Melo, and S. Van Strien. Julia-Fatou-Sullivan theory for real one-dimensional dynamics. *Acta Mathematica*, 168(1) :273–318, 1992.

[Mil06] John W. Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 160. Springer, 2006.

[Mit00] Sudeb Mitra. Teichmüller spaces and holomorphic motions. *Journal d'Analyse Mathématique*, 81(1) :1–33, 2000.

[MS98] Curtis T. McMullen and Dennis P. Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III : the Teichmüller space of a holomorphic dynamical system. *Advances in Mathematics*, 135(2) :351–395, 1998.

[PV14] Han Peters and Liz Raquel Vivas. A polynomial skew-product with a wandering Fatou-disk. *Preprint ; arXiv : 1405.1340*, 2014.

[Sul85] Dennis Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I : solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. *Annals of mathematics*, pages 401–418, 1985.

[Tru09] Eugenio Trucco. Wandering Fatou components and algebraic Julia sets. *Preprint ; arXiv : 0909.4528*, 2009.

[vS00] Sebastian van Strien. Misiurewicz maps unfold generically (even if they are critically non-finite). *Fund. Math*, 163(1) :39–54, 2000.