



HAL
open science

Jeux de défense et ensembles tropicaux

Jean-Alexandre Anglès d'Auriac

► **To cite this version:**

Jean-Alexandre Anglès d'Auriac. Jeux de défense et ensembles tropicaux. Informatique et théorie des jeux [cs.GT]. Université Paris Sud - Paris XI, 2015. Français. NNT : 2015PA112235 . tel-01221003

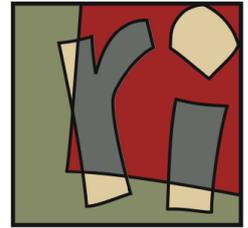
HAL Id: tel-01221003

<https://theses.hal.science/tel-01221003>

Submitted on 27 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ECOLE DOCTORALE : INFORMATIQUE PARIS SUD
LABORATOIRE DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE

DISCIPLINE : INFORMATIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue le 24 septembre 2015 par

Jean-Alexandre Anglès d'Auriac

Jeux de défense et ensembles tropicaux

Directeur de thèse : M. Yannis Mannoussakis

Professeur (Université Paris Sud)

Composition du jury :

Président du jury :

M. Bruno Escoffier

Professeur (Université Paris 6)

Rapporteurs :

M. Pascal Berthomé

Professeur (INSA Centre Val de Loire)

M. Éric Angel

Professeur (Université d'Évry Val d'Essonne)

Examineurs :

Mme. Johanne Cohen

Chargée de Recherche (Université Paris Sud)

M. Joffroy Beauquier

Professeur (Université Paris Sud)

Remerciements

Je remercie en premier lieu mon directeur de thèse, Yannis Mannoussakis, pour m'avoir accueilli dans l'équipe, et guidé avec patience et bienveillance. C'est lui qui a rendu cette thèse possible.

Je remercie aussi chaleureusement pour leur relecture attentive du manuscrit mes rapporteurs Éric Angel et Pascal Berthomé ; tout particulièrement ce dernier pour ses remarques pertinentes qui ont permis de débusquer maintes coquilles et quelques plus grosses erreurs qui s'étaient glissées dans ce document.

Je remercie Joffroy Beauquier et Johanne Cohen, d'avoir pris part au jury, et en particulier cette dernière pour m'avoir aidé à préparer la présentation.

Je remercie les membres de l'équipe avec lesquels j'ai eu le plaisir de travailler et que j'ai apprécié côtoyer : Lin Chen, Johanne Cohen, Nathann Cohen, Alexandre Dambreville, Sylvie Delaët, Antoine Deza, Selma Djelloul, Abdelhakim El Maftouhi, Ararat Harutyunyan, Sylvain Legay, Johana Luviano, Léandro Montéro, Narayanan Narayanan, MedYahya Ould MedSalem, Viviane Pons, Jean-Baptiste Priez, Laurent Rosaz, Johan Thapper, Nicolas Thiéry, Aladin Virmaux, Renyu Xu.

Résumé

Le premier volet de la présente thèse porte sur l'étude de graphes dont les sommets sont colorés. Nous étudions comment la recherche d'ensembles de sommets classiques est affectée lorsqu'on ajoute la contrainte qu'ils soient tropicaux, c'est-à-dire contiennent au moins un sommet de chacune des couleurs. Nous démontrons les résultats suivants :

- La recherche d'un sous-graphe connexe et tropical de taille minimum est NP-complet, même si l'on restreint les entrées aux arbres ou aux graphes d'intervalle. Nous décrivons un algorithme capable de déterminer la taille minimum d'un tel ensemble dans un graphe quelconque en $\mathcal{O}(n2^c)$.
- La recherche d'un ensemble dominant tropical de taille minimum dans un chemin est APX-complet. Cependant, nous décrivons un algorithme capable de déterminer la taille minimum d'un tel ensemble dans un graphe d'intervalles en $\mathcal{O}(n^22^c)$.
- La recherche d'une couverture par sommets tropicale de taille minimum dans un chemin est APX-complet. Nous décrivons un algorithme capable de déterminer la taille minimum d'un tel ensemble dans un chemin en $\mathcal{O}(n2^c)$.
- Déterminer l'existence d'un indépendant tropical sur un chemin est NP-complet.

De plus, nous montrons divers résultats structurels qui lient la taille d'un sous-graphe connexe tropical minimum à des paramètres du graphe tels que le nombre de couleurs, le nombre d'arêtes, le degré minimum, ...

Dans le second volet, nous étudions des jeux sur des graphes, appelés jeux de défense, où des attaquants ciblent des sommets et des défenseurs protègent des sous-graphes. On s'intéresse à l'existence d'un équilibre de Nash lorsque les défenseurs protègent des arêtes, et lorsqu'ils protègent des chemins de taille au plus p .

Lorsque les défenseurs protègent des arêtes, on montre notamment que déterminer si le jeu pour un graphe G , n défenseurs et α attaquants, admet un équilibre de Nash revient à déterminer si G possède un indépendant dominant de taille inférieure ou égale à α , problème NP-complet dans le cas général.

Lorsque les défenseurs protègent des chemins de taille p , l'existence d'un équilibre de Nash dans un jeu avec n défenseurs est liée à la notion de p -indépendant. Un ensemble de sommets est p -indépendant si toutes les paires de sommets sont à distance supérieure à p . Déterminer l'existence d'un p -indépendant maximal de taille inférieure ou égale à α dans un graphe quelconque est NP-complet. Notre algorithme MIN2STABLEMAX permet de calculer la taille minimum d'un 2-indépendant maximal dans un arbre.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Notations et définitions	5
2.1	Graphes	5
2.2	Graphes sommet-colorés	7
2.3	Théorie des jeux	8
2.4	Complexité	8
2.5	Liste de problèmes utilisés pour les réductions dans la suite.	9
3	Ensembles tropicaux	13
3.1	Sous-graphes connexes tropicaux minimum	14
3.1.1	NP-complétude	14
3.1.2	Solvabilité à paramètre fixé (algorithme FPT)	19
3.1.3	Bornes supérieures	21
3.2	Dominants tropicaux minimum	27
3.2.1	NP-complétude	28
3.2.2	Approximations	32
3.2.3	Solvabilité à paramètre fixé (algorithme FPT)	39
3.2.4	Bornes supérieures	43
3.3	Autres ensembles tropicaux	43
4	Jeux de défense	51
4.1	Introduction	51
4.2	Modèle général	52
4.3	Modèle des arêtes	55
4.4	Modèle des chemins	63
4.5	Autres modèles	80
5	Conclusion	83

Chapitre 1

Introduction

Les graphes sont un modèle très générique. Ils permettent de représenter tout type d'entités, pour s'intéresser aux relations qu'elles ont entre elles deux à deux. Ils ont été introduits par Euler dès 1736, pour résoudre le problème dit des ponts de Königsberg. Le problème était le suivant : la ville de Königsberg est traversée par un fleuve, la Pregolia, avec une île et une presqu'île, et elle possède de nombreux ponts pour relier les rives du fleuve. Est-il possible de trouver un chemin qui traverse chacun des ponts une et une seule fois ? Pour modéliser le problème, il suffit de représenter chaque berge, et chacun des ponts reliant deux berges, sans plus de détail. En d'autres termes, on ne considérera plus que des relations (ici des ponts) entre des objets (ici les berges) sans s'embarrasser d'aucun autre détail sur les objets en questions, ou sur leurs relations. Lorsque l'on généralise le modèle obtenu, les objets prenant le rôle des berges, qu'on représente généralement sous la forme d'un point, sont appelés sommets. Les relations entre ces objets, prenant le rôle des ponts, sont appelées arêtes, et généralement représentées par des traits entre les points. Ce modèle, très générique, pouvant modéliser des problèmes extrêmement variés, est utilisé dans de très nombreux domaines. Certaines applications viendront naturellement à l'esprit, comme la représentation de réseaux informatiques (filaires ou non), ou de l'internet, des réseaux routiers (calculs des trajets pour le guidage par GPS, gestion des encombrements, . . .) d'autres sont moins évidentes. On peut citer la gestion de projet, où l'objectif est de prévoir la durée et de gérer les contraintes d'un chantier où sont généralement impliqués un très grand nombre de sous-traitants et de tâches élémentaires liées entre elles. Voir par exemple, la méthode PERT, développée par la marine américaine en 1958 pour gérer la construction des missiles Polaris [MRCF59]). Cependant, pour la plupart des applications citées ci-dessus, le modèle des graphes dans sa plus simple expression ne suffit plus, et il devient nécessaire de « surcharger » le modèle, en ajoutant d'autres informa-

tions sur les sommets ou les arêtes nécessaires pour la résolution du problème. Les surcharges les plus courantes consistent à ajouter une orientation sur les arêtes (graphes orientés), un nombre sur les arêtes ou sur les sommets (qui peut représenter un coût, une utilité, une capacité, une longueur, etc.), à autoriser des arêtes contenant plus de deux sommets (hypergraphes), ...

Dans le chapitre 2, nous allons introduire succinctement les notions de bases, et définir les notations utilisées dans ce document.

Dans le chapitre 3, nous allons considérer le cas des graphes sommets-colorés. Dans ce modèle, à chaque sommet est attribué une couleur, qui correspond à la nature, ou à un des aspects de la nature de ce sommet. Cette approche ne doit pas être confondue avec celle, très étudiée, où l'on cherche à attribuer à chaque sommet une couleur de façon à observer une certaine propriété. En effet, dans notre cas, les couleurs représentent des caractéristiques intrinsèques des objets représentés par les sommets, sur lesquelles on ne peut agir. On peut assez naturellement se poser la question de la difficulté de trouver un ensemble vérifiant une propriété particulière et contenant au moins un sommet de chaque couleur. Par exemple, si les couleurs représentent par exemple des ressources, ou des capacités de productions, posséder au moins une de chaque est une exigence assez naturelle. Nous allons montrer que pour quatre types classiques d'ensembles de sommets au moins, (ensembles connexes, dominants, couvertures par sommets et indépendants) ajouter cette contrainte rend les problèmes réellement plus difficiles, du point de vue de la complexité algorithmique. En effet, même en restreignant nos problèmes à des classes de graphes très restrictives, comme les chemins, sur lesquels les versions sans couleurs des problèmes peuvent facilement être résolues relativement efficacement (en temps polynomial), les versions tropicales restent elles difficiles à traiter en temps raisonnable (NP-complètes).

Dans le chapitre 4, nous allons nous intéresser à un jeu sur un graphe. La théorie des jeux modélise et permet d'étudier les situations où un certain nombre d'entités interagissent entre elles, en cherchant chacune à maximiser leur profit personnel. Cette théorie est très utilisée en économie, où elle modélise bien la compétition entre acteurs concurrents, mais aussi par exemple en biologie, notamment dans l'étude des mécanismes à l'œuvre dans l'évolution et la sélection naturelle. Un jeu est défini par un ensemble de joueurs, les possibilités d'actions (appelées stratégies) accessibles pour chaque joueur, ainsi que le profit (ou le coût) que retire chaque joueur d'une partie en fonction de la stratégie qu'il a choisie, ainsi que de celles de tous les autres joueurs. Les équilibres de Nash sont une notion centrale de la théorie des jeux. Ils décrivent une situation où la stratégie de chaque joueur est la meilleure réponse possible à la stratégie des autres joueurs. Une telle situation est dite stable, car aucun des joueurs n'a d'intérêt à changer unilatéralement de stratégie.

On parle d'équilibre de Nash mixte lorsque chaque joueur assigne une probabilité à chacune des stratégies qui lui sont offertes plutôt que d'en choisir une directement. Dans ces conditions, c'est l'espérance de gain qui doit être maximale pour chaque joueur en fonction des distributions de probabilité de tous les joueurs. Par opposition, un équilibre de Nash où chaque joueur choisit une stratégie fixe plutôt qu'une distribution de probabilité sur ses stratégies est appelé équilibre de Nash pur. Un des résultats les plus célèbres et les plus fondamentaux de théorie des jeux, dû à John Nash, affirme que pour tout jeu avec un nombre fini de joueurs, et où chaque joueur a accès à un nombre fini de stratégies, il existe un équilibre de Nash mixte [Nas51]. Cependant, pour un tel jeu, l'existence d'un équilibre de Nash pur n'est pas garantie. Nous allons dans le chapitre 4 présenter l'étude d'un jeu sur un graphe, où le graphe représente un réseau, et les joueurs sont pour certains des attaquants cherchant à compromettre les machines sur le réseau, et pour d'autres des défenseurs cherchant à protéger les machines du réseau contre les attaquants. L'étude se focalisera sur la recherche d'équilibres de Nash pur. Deux modèles seront étudiés, en fonction des capacités des défenseurs. Dans le premier modèle, les défenseurs peuvent défendre les deux extrémités d'une arête, alors que dans le second ils sont capables de défendre tous les sommets le long d'un chemin. Nous proposerons dans les deux cas une caractérisation en terme de théorie des graphes de la présence d'un équilibre de Nash, et étudierons la difficulté de déterminer, en fonction d'un graphe et d'un nombre d'attaquants et de défenseurs, l'existence ou non d'un équilibre de Nash. Nous serons amenés à introduire la notion, purement de théorie des graphes, d'ensembles p -stables. Un ensemble p -stable est une extension de la notion d'ensemble stable, mais où on exige des sommets de l'ensemble qu'ils soient à distance supérieure à p les uns des autres plutôt que de ne simplement pas être adjacents. À la surprise de l'auteur, il n'a pas réussi à trouver de mention de cette extension qui paraît pourtant fort naturelle dans la littérature. Nous démontrerons que la recherche d'un p -stable de taille k dans un graphe, de même que celle d'un stable, est un problème NP-complet.

Chapitre 2

Notations et définitions

On utilisera les définitions et notations suivantes :

2.1 Graphes

- Un *graphe* $G = (V, E)$ est une paire ordonnée, dont le premier élément V est un ensemble qu'on appelle ensemble des *sommets*, et le deuxième, E , qu'on appelle ensemble des *arêtes*, est un ensemble de paires de sommets. On appelle extrémité de l'arête e les deux sommets u et v qui constituent l'arête et on notera indifféremment $e = uv$ ou $e = vu$. Une représentation classique d'un graphe consiste à symboliser chaque sommet par un point, et chaque arête par un trait reliant les deux points correspondant aux deux extrémités de l'arête.
- Le *degré* d'un sommet u , noté $d(u)$, est le nombre d'arêtes dont u est une extrémité. On notera Δ le plus grand degré parmi les sommets du graphe, et δ le plus petit degré parmi les sommets. Deux sommets sont dit *voisins* l'un de l'autre (ou *adjacents*) s'ils sont les deux extrémités d'une des arêtes du graphe. Le *voisinage* d'un sommet v , noté $N(v)$, est l'ensemble de ses voisins. Le *voisinage clos* de v , noté $N[v]$, est l'union de son voisinage et de lui-même. Le voisinage d'un ensemble S de sommets, noté $N(S)$, est l'ensemble des sommets hors de S qui sont voisins d'un sommet de S . Un *chemin* est une suite de sommets (u_0, u_1, \dots, u_k) telle que $\forall 0 \leq i < k, u_i u_{i+1} \in E$. Un *cycle* est un chemin dont le premier sommet est le même que le dernier sommet. La *taille* (ou *longueur*) d'un chemin est le nombre d'arêtes qu'il contient. La *distance* entre deux sommets u et v , notée $d(u, v)$, est la taille d'un plus court chemin qui a pour extrémités u et v . Par convention, la distance d'un sommet à lui-même est zéro.

-
- Un *sous-graphe* $G' = (V', E')$ d'un graphe $G = (V, E)$ est un graphe tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Le sous-graphe G' est dit *induit* (par V') si $\forall e = uv \in E$ telle que $u, v \in V'$, on a $e \in E'$. Dans la suite de ce travail, on ne considérera que des sous-graphes induits. On notera $G \setminus u$ le sous-graphe induit par $V \setminus u$.
 - Dans un graphe donné, un ensemble de sommets est dit *connexe* si, pour tout couple de sommets (u, v) dans l'ensemble, il existe un chemin dont u et v sont les extrémités. Un ensemble de sommets S est dit *k-connexe* si tout sous-ensemble obtenu en enlevant $k - 1$ sommets à S est connexe. Un ensemble de sommets I est un *indépendant* s'il n'existe aucune paire de sommets dans I adjacent l'un à l'autre. Un sommet u tel que $V \setminus \{u\}$ ne soit pas connexe est appelé un *point d'articulation*, ou *sommet de séparation*. Un (ensemble) *dominant* dans un graphe G est un ensemble de sommets D tel que tout sommet de G soit appartient à D , soit est adjacent à un sommet appartenant à D . On note $\gamma(G)$ le cardinal minimum d'un dominant du graphe G , appelé aussi *nombre de domination*.
 - Un graphe est dit *planaire* si il existe une représentation du graphe sur un plan telle qu'aucun des traits symbolisant des arêtes ne se croisent entre eux. Un graphe *complet* est un graphe où E est l'ensemble des paires d'éléments de V , c'est-à-dire que toutes les arêtes possibles sont présentes dans le graphe. Une *clique* est un ensemble de sommets qui induisent un sous-graphe complet. On dit qu'un graphe G est un *graphe chemin* s'il est connexe et qu'il a deux sommets de degré un, et le reste de degré deux. Un *graphe étoilé* est un graphe contenant au moins trois sommets, dont un sommet appelé *centre* qui est relié à tous les autres, et qui ne contient pas d'autres arêtes. Un *graphe biparti* est un graphe $G = (V, E)$ tel qu'on puisse diviser V en deux ensembles V_1 et V_2 qui sont des ensembles indépendants dans G . Un *graphe scindé* est un graphe $G = (V, E)$ tel qu'on puisse diviser V en deux ensembles V_1 et V_2 où V_1 est une clique et V_2 est un indépendant dans G .
 - Un *arbre* est un graphe connexe sans cycles. Un arbre enraciné est un arbre dont un des sommets est individualisé et appelé racine. Dans la suite du document, si un arbre n'a pas de racine désignée, on considérera qu'un sommet choisi arbitrairement est la racine. Dans un arbre, le père d'un sommet u , qu'on note $p(u)$ est le seul voisin de u qui est plus proche de la racine, les autres sommets étant appelé les enfants, ou fils, de u , et l'ensemble des enfants est dénoté $C(u)$. La racine elle-même n'a pas de père, et n'a que des fils. On appelle sous-arbre enraciné en u , qu'on note $T(u)$, le sous-graphe complet de taille maxi-

- mum qui contient u mais ne contient pas $p(u)$.
- Un *couplage* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble d'arêtes F tel qu'aucun sommet de V ne soit l'extrémité de deux arêtes dans F . Un couplage maximum dans G est un couplage dont le cardinal est maximum parmi tous les couplages dans G . On dénotera par convention le cardinal d'un couplage maximum de G par $M(G)$ (où M s'il n'y a pas d'ambiguïté).
 - On dira d'une arête qu'elle couvre un sommet si ce sommet est une des extrémités de l'arête, et inversement on dira d'un sommet qu'il couvre une arête s'il est l'une des extrémités de l'arête. On dira qu'un ensemble de sommets couvre une arête si et seulement si au moins un des sommets de l'ensemble couvre l'arête, et de même un ensemble d'arêtes couvre un sommet si et seulement si une arête de l'ensemble couvre le sommet. Un ensemble A couvre un autre ensemble B si chaque élément de l'ensemble B est couvert par A . Une couverture par arêtes d'un graphe G est un ensemble d'arêtes de G qui couvre tous les sommets de G . Une couverture par sommets de G est un ensemble de sommets de G qui couvre toutes les arêtes de G . Une couverture par sommets indépendante du graphe G est un ensemble de sommets de G qui est à la fois un ensemble indépendant et une couverture par sommets de G .
 - Étant donné un ensemble d'intervalles \mathcal{I} de \mathcal{R} , le graphe d'intersection G correspondant possède un sommet pour chaque intervalle de \mathcal{I} , et deux sommets de G sont reliés par une arête si et seulement si les intervalles de \mathcal{I} correspondants s'intersectent. Un graphe G est dit *graphe d'intervalles* s'il existe un ensemble d'intervalles \mathcal{I} tel que G soit le graphe d'intersection de \mathcal{I} .

2.2 Graphes sommet-colorés

- Une *coloration* d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction c qui à chaque sommet de V associe une couleur. On notera G^c le graphe G muni d'une coloration utilisant c couleurs. De plus, on désignera la couleur du sommet u par $c(u)$ et les couleurs des sommets d'un sous-graphe H par $c(H)$. Une coloration c d'un graphe G est dite *propre* si pour toute paire u et v de sommets de G adjacents, on a $c(u) \neq c(v)$. On dénotera $\chi(G)$ le nombre chromatique d'un graphe G , c'est-à-dire, le nombre de couleurs minimum sur toutes les colorations propres de G . De plus, on notera $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble des couleurs utilisés par la coloration de G^c , c'est-à-dire $\mathcal{C}(G) = c(G)$.

-
- Un ensemble de sommets S du graphe G^c est dit *tropical* si pour tout sommet u de G^c , il existe un sommet v dans S tel que $c(u) = c(v)$. Autrement dit, S contient au moins un représentant pour chacune des couleurs présentes dans le graphe.
 - Un ensemble de sommets S de G^c est *arc-en-ciel* s'il est tropical et que pour toute paire de sommets u et v de S , $c(u) \neq c(v)$, c'est-à-dire que S contient exactement un représentant pour chacune des couleurs présentes dans le graphe.

2.3 Théorie des jeux

La théorie des jeux est un domaine des mathématiques visant à modéliser des situations où diverses entités interagissent de façon compétitive ou collaborative, chacune cherchant à maximiser ses propres gains, ou à minimiser ses propres pertes. Formellement, un *jeu* est défini par

- Un ensemble de *joueurs*.
- Pour chaque joueur, un ensemble de *stratégies* possibles, où chaque stratégie représente l'ensemble des choix que le joueur fera durant une partie. Un *profil* est l'attribution à chaque joueur d'une de ses stratégies, décrivant ainsi l'ensemble des choix de tous les joueurs lors d'une partie.
- Pour chaque joueur, une *fonction de profit*, qui a un profil associé un nombre, qu'on appelle le *profit* du joueur.

Un *équilibre de Nash* [Nas50, Nas51] est un profil s tel qu'aucun des joueurs ne puisse unilatéralement améliorer son profit personnel. Formellement, s est un équilibre de Nash si pour tout joueur i , et pour tout profil s' ne différant de s que sur la stratégie choisi par i , le profit de i est plus important dans s que dans s' .

2.4 Complexité

On va donner une présentation informelle des concepts de complexité algorithmique qui seront utilisés dans ce document.

La classe de problèmes NP contient l'ensemble des problèmes de décision pour lesquels il existe un algorithme pour vérifier *une solution* en un nombre polynomial d'étapes élémentaires. Cependant, cela ne garantit pas qu'il existe un algorithme capable de trouver une solution en un nombre polynomial d'étapes. Un problème *NP-complet* est un problème tel que démontrer qu'il peut être résolu en un nombre polynomial d'étapes implique que tous

les problèmes de NP puissent eux aussi être résolus en un nombre polynomial d'étapes. Démontrer qu'un problème donné est NP-complet se fait généralement en montrant que si l'on peut le résoudre en un nombre polynomial d'étapes, alors on pourra résoudre en un nombre polynomial d'étapes un autre problème, dont on a déjà démontré qu'il est NP-complet. On notera parfois par abus de langage qu'un problème d'optimisation est NP-complet, ce qui revient à dire que le problème de décision associé est NP-complet.

Étant donné un problème d'optimisation, un algorithme fournit une *approximation* dans un facteur $\alpha > 1$ (aussi notée α -approximation) si, pour toute instance du problème donnée en entrée, en notant OPT la taille d'une solution optimale et SOL la taille de la solution renvoyée par l'algorithme, on a $\frac{1}{\alpha}\text{OPT} \leq \text{SOL} \leq \alpha\text{OPT}$. Pour un problème de maximisation, cela revient donc à $\frac{1}{\alpha}\text{OPT} \leq \text{SOL}$, et pour un problème de minimisation, à $\text{SOL} \leq \alpha\text{OPT}$. On dénote par APX la classe des problèmes pour lesquels il existe une machine de Turing déterministe et un certain α tel que la machine de Turing calcule une α -approximation du problème en temps polynomial. Un schéma d'approximation en temps polynomial (polynomial time approximation scheme, PTAS) pour un problème donné est une fonction qui pour tout $\alpha > 1$ fournit un algorithme polynomial renvoyant une α -approximation du problème. Une PTAS-réduction est une réduction en temps polynomial d'un problème vers un autre problème qui conserve les approximations. Formellement, une réduction d'un problème A vers un problème B est une PTAS-réduction si elle associe en temps polynomial à toute instance de A une instance de B et qu'il existe une fonction $f :]1, \infty[\rightarrow]1, \infty[$ telle qu'à partir d'une $f(\alpha)$ -approximation de l'instance de B, on sache construire en temps polynomial une α -approximation de l'instance de A. De ce fait, s'il existe une PTAS-réduction d'un problème A vers un problème B et qu'il existe une PTAS pour le problème B, alors il existe une PTAS pour le problème A. Un problème est APX-difficile si tout problème dans APX se PTAS-réduit vers lui. Un problème est APX-complet s'il est à la fois APX-difficile et dans APX. De plus, si $P \neq NP$, alors il existe des problèmes dans APX qui ne sont pas APX-complets [CKST95].

2.5 Liste de problèmes utilisés pour les réductions dans la suite.

ENSEMBLE DOMINANT :

Entrée : Un graphe G et un entier k .

Question : Existe-t-il un ensemble dominant de taille k dans G ?

ENSEMBLE DOMINANT est APX-difficile d'après le théorème 3.3. de [AK00a] qui garantit que ENSEMBLE DOMINANT restreint aux graphes de degré maximum 3 est APX-complet.

ENSEMBLE DOMINANT INDÉPENDANT :

Entrée : Un graphe G et un entier k .

Question : Existe-t-il un ensemble indépendant maximal de taille $\leq k$ dans G ?

On rappelle qu'un ensemble indépendant maximal de G est aussi un dominant de G . ENSEMBLE DOMINANT INDÉPENDANT est NP-complet d'après [GJ79].

3-SAT :

Entrée : Une formule sous forme clausale avec 3 littéraux par clause.

Question : Existe-t-il une assignation des variables telle que la formule soit vérifiée ?

3-SAT est NP-complet d'après [Coo71].

SAT-3-OCC :

Entrée : Une formule sous forme clausale où chaque variable apparaît dans au plus 3 clauses.

Question : Existe-t-il une assignation des variables telle que la formule soit vérifiée ?

SAT-3-OCC est NP-complet d'après [GJ79].

COUVERTURE PAR SOMMETS :

Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier k .

Question : Existe-t-il un ensemble S de k sommets de V tel que toute arête de E ait l'une de ses extrémités dans S ?

COUVERTURE PAR SOMMETS est APX-complet, même lorsque les graphes possibles en entrée sont restreints aux graphes cubiques[AK00b].

COUVERTURE PAR ENSEMBLES :

Entrée : Un ensemble fini d'éléments \mathcal{U} appelé univers, une collection C de sous-ensembles de \mathcal{U} , et un entier $0 < k < |C|$.

Question : Existe-t-il k éléments de C dont l'union soit égale à \mathcal{U} .

Ce problème est NP-complet d'après [Kar72].

Remarque : ENSEMBLE DOMINANT et COUVERTURE PAR SOMMETS sont des cas particuliers de COUVERTURE PAR ENSEMBLE. Dans le cas d'ensemble dominant, l'univers est l'ensemble des sommets, et la collection contient, pour chaque sommet du graphe, son voisinage clos. Dans le cas de la couverture par sommets, l'univers est l'ensemble des arêtes, et la collection contient, pour chaque sommet du graphe, l'ensemble des arêtes adjacentes à ce sommet.

Chapitre 3

Ensembles tropicaux

Dans cette section, nous allons considérer sur des graphes sommets-colorés, de façon non nécessairement propre. Une coloration d'un graphe peut avoir de nombreuses significations : dans un graphe représentant le web, la coloration d'une page pourra représenter sa thématique, dans le cas d'un graphe issu de l'étude du métabolisme d'une cellule en biologie, les couleurs peuvent correspondre à un type de réaction [FFHV11, LFS06], ...

Une grande partie des travaux sur les colorations de graphe s'intéresse à savoir s'il est possible, étant donné un graphe non-coloré en entrée, d'attribuer une couleur à chacun des sommets de telle façon à ce que certaines propriétés soient observées, par exemple que deux sommets partageant la même couleur ne soient jamais trop proches l'un de l'autre [GJ79]. Ces travaux correspondent à des modèles où la couleur représente quelque chose sur lequel les opérateurs ont au moins un certain contrôle ; un modèle classique étant la modélisation d'un ensemble d'émetteurs/récepteurs sans fils, où la couleur d'un sommet correspond à la fréquence qu'il utilise pour ses communications, et où l'on veut garantir qu'il n'y aura pas d'interférences entre les différents émetteurs en choisissant les fréquences intelligemment. Nous avons choisi d'étudier une situation différente où les couleurs représentent des caractéristiques des sommets que nous ne pouvons changer. Cette approche est par exemple nécessaire pour traiter certains problèmes issus de la biologie, et plus précisément de l'étude du réseau métabolique d'une cellule. Le réseau métabolique est l'ensemble des nombreuses interactions chimiques qui *peuvent* avoir lieu entre les diverses molécules au sens d'une cellule : quelles molécules réagissent entre elles, agissent en tant que catalyseurs pour une réaction, ou au contraire comme inhibiteurs, ... Une représentation possible pour cet ensemble de données complexe est un graphe sommet-coloré. Un des problèmes issu de l'étude des réseaux métaboliques est la recherche de motif. Dans la recherche de motif, on reçoit en entrée un graphe dont les

sommets sont colorés, et un *motif* (c'est-à-dire un ensemble de couleurs, avec une cardinalité pour chaque couleur). L'objet du problème est de trouver un ensemble de sommets connexes dont les couleurs sont *exactement* celles du motif. Ainsi, si le motif est $\{\{\text{rouge},2\},\{\text{bleu},1\}\{\text{vert},3\}\}$, il s'agira de trouver un ensemble de 6 sommets exactement, connexe, contenant 3 sommets verts, deux sommets rouges et un sommet bleu. Ce problème est NP-complet, et le reste même avec de fortes restrictions sur les entrées possibles. Notamment, ce problème reste NP-complet même si l'on restreint les entrées aux arbres de degré maximum 3 et les motifs à des ensembles de couleurs tous de cardinalité 1, et de même si l'on restreint les entrées aux graphes bipartis de degré maximum 4, et aux motifs contenant exactement deux couleurs [FFHV11].

Nous allons présenter la notion d'ensembles tropicaux, c'est-à-dire d'ensembles qui contiennent, pour chaque couleur utilisée dans la coloration du graphe, au moins un sommet de cette couleur. Tout d'abord, nous allons nous intéresser au problème de la recherche du plus petit ensemble connexe tropical, qui se rapproche du problème de recherche de motif. Puis, nous allons étudier la recherche d'un ensemble dominant tropical de taille minimum. L'article [CCK⁺14] propose des algorithmes exacts pour trouver le plus petit ensemble connexe tropical, dont le temps d'exécution est exponentiel.

3.1 Sous-graphes connexes tropicaux minimum

Dans cette section, on s'intéresse au problème de trouver dans un graphe connexe sommet-coloré G^c un sous-graphe connexe dont l'ensemble des sommets est tropical, et de cardinal minimum. On notera $\mathbf{tc}(G)$ ce cardinal. Les résultats de cette section sont aussi présentés dans l'article [dCM⁺], et issus d'une collaboration avec les auteurs de l'article en question.

SOUS-GRAPHE CONNEXE TROPICAL MINIMUM (SCTM) :

Entrée : Un graphe connexe sommet-coloré G^c et un entier k .

Question : Existe-t-il un sous-graphe connexe tropical de taille k .

SCTM arc en ciel est le cas particulier où on se demande s'il existe un sous-graphe connexe arc-en-ciel, c'est-à-dire SCTM dans le cas où $k = c$.

3.1.1 NP-complétude

Théorème 3.1.1. *SCTM restreint aux arbres est NP-complet.*

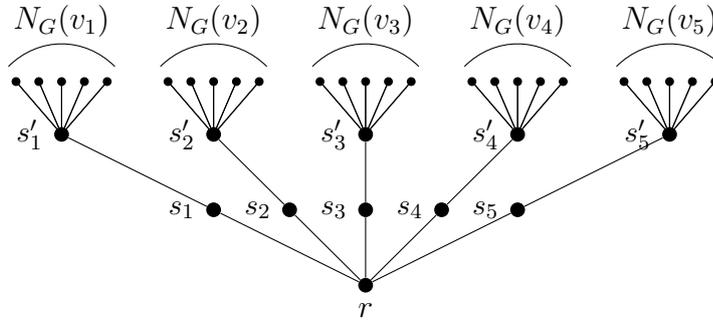
Démonstration. La réduction s'obtient depuis ENSEMBLE DOMINANT sur un graphe quelconque.

Soit le graphe G une instance de ENSEMBLE DOMINANT avec pour sommets v_1, v_2, \dots, v_n .

On définit l'arbre T^c sommet-coloré avec $n + 2$ couleurs c_1, c_2, \dots, c_{n+2} de la façon suivante.

Soit r un sommet de couleur c_{n+2} , et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

- Soit s_i un sommet de couleur c_{n+1} adjacent à r ,
- Soit s'_i un sommet de couleur c_i adjacent à s_i ,
- Pour chaque sommet $v_j \in N(v_i)$, on ajoute un sommet de couleur c_j adjacent à s'_i .



Par la structure et la coloration de T^c , tout sous-graphe tropical connexe H contient r , et donc pour chaque couleur c_i , avec $1 \leq i \leq n$, si s'_i n'est pas dans H , alors il existe un s'_j adjacent à un sommet de H de couleur c_i . On remarque que si H est un sous-graphe connexe tropical minimal, alors il contient exactement un sommet de couleur c_1, c_2, \dots, c_n .

On peut associer un sous-graphe tropical connexe de T^c à un ensemble dominant de G de la façon décrite dans la suite. Un ensemble dominant S de G , ainsi qu'une fonction f qui associe à chaque sommet $v \in G \setminus S$ un élément de S qui le domine, correspond au sous-graphe tropical connexe H contenant les sommets suivants :

- le sommet r ,
- les sommets s_i et s'_i de T^c pour chaque $v_i \in S$,
- pour chaque sommet $v_i \in G \setminus S$, le sommet adjacent à s'_j de couleur c_i où $v_j = f(v_i)$.

Par construction, le graphe H est bien connexe et tropical.

Réciproquement, étant donné un sous-graphe connexe tropical minimal H de T^c , on peut construire un dominant S de G ainsi qu'une fonction f de la façon suivante : v_i appartient à S si et seulement si s'_i est un sommet de H , et pour chaque $v_j \notin S$, $f(v_j) = v_i$ où i est tel que s'_i soit le voisin du

sommet de couleur c_j dans H (H étant connexe tropical minimal, s'_i existe et est unique).

En conséquence, il y a une bijection entre un couple (S, f) associé à un dominant S de G et un sous-graphe tropical minimal connexe H de T^c .

De plus, on vérifie l'égalité suivante.

$$|H| = 1 + 2|S| + n - |S| = 1 + |S| + n$$

De ce fait, en considérant le cas où S est un ensemble dominant minimum, on obtient

$$\mathbf{tc}(T^c) = 1 + \gamma(G) + n$$

ce qui permet de conclure que notre opération est bien une réduction polynomiale de ENSEMBLE DOMINANT vers SCTM. De plus, elle s'effectue bien en temps polynomial, donc SCTM est bien NP-complet. □

On remarque que par la réduction, le problème reste NP-complet même si on se restreint aux arbres de profondeur 3 (où la profondeur d'un arbre est la plus grande distance entre un sommet et la racine).

Théorème 3.1.2. *SCTM arc-en-ciel restreint aux graphes d'intervalle est NP-complet.*

Démonstration. Vérifier si un ensemble de sommets correspond bien à un sous-graphe connexe tropical peut être fait en nombre polynomial d'opérations. Notre problème est bien dans NP.

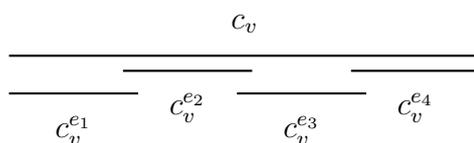
On va effectuer une réduction à partir de COUVERTURE PAR SOMMETS (VC). Considérons une instance de VC sur un graphe G pour un entier k . On définit alors un graphe d'intervalles sommet-coloré comme suit. Il est coloré à l'aide des $2m + n + 2$ couleurs suivantes :

- pour chaque arête $e \in E$, on introduit les deux couleurs c_u^e et c_v^e , où u et v sont les deux extrémités de e ,
- pour chaque sommet $u \in V$, on introduit la couleur c_u ,
- on introduit de plus les deux couleurs c_{gauche} et c_{droite} .

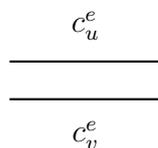
On définit notre graphe d'intervalles en décrivant un ensemble d'intervalles colorés lui correspondant. Pour cela, nous allons décrire des gadgets, c'est-à-dire des ensembles d'intervalles colorés. Ces gadgets seront alignés séquentiellement de la gauche vers la droite de façon à ce que parmi les intervalles d'un gadget, seuls ceux dont l'extrémité droite est la plus à droite intersectent des intervalles du gadget suivant, et que les seuls intervalles du gadget suivant qu'ils interceptent soient ceux dont l'extrémité gauche est la

plus à gauche. Le gadget le plus à gauche consistera en un seul intervalle de la couleur c_{gauche} , et le plus à droite sera un intervalle de la couleur c_{droite} . Ces deux intervalles seront les seuls à être coloriés par ces couleurs. Entre eux, on utilisera trois types de gadgets, et l'ordre respectif de ces gadgets n'aura aucune incidence sur la preuve.

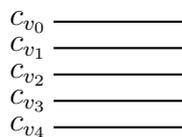
Type 1 : On définit un gadget de type 1 pour chaque sommet dans V . Si le sommet v est l'extrémité des arêtes $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{d(v)}$, alors le gadget w_v correspondant à v est défini comme suit. Il contient $d(v)$ intervalles de couleur $c_v^{e_1}, c_v^{e_2}, \dots, c_v^{e_{d(v)}}$, et un intervalle de couleur c_v . L'intervalle de couleur $c_v^{e_i}$ n'intersecte que les intervalles de couleur $c_v^{e_{i-1}}, c_v^{e_{i+1}}$, et c_v . L'intervalle de couleur c_v commence au même endroit que l'intervalle de couleur $c_v^{e_1}$ et finit au même endroit que l'intervalle $c_v^{e_{d(v)}}$. Par exemple, si v est un sommet de degré quatre, les intervalles sont définis comme suit.



Type 2 : Pour chaque arête $e = uv$ de E , on définit le gadget w'_e comme suit. Il contient deux intervalles de couleur c_u^e et c_v^e , qui ont les mêmes extrémités.



Type 3 : Un gadget de type 3 w'' consistera en n intervalles, tous avec les mêmes extrémités, et colorié avec chacun une couleur correspondant à un sommet différent de G . On introduira $n - k$ gadgets de ce type.



Montrons qu'en partant d'une couverture par sommets C des arêtes de G de taille au plus k , on peut construire un sous-graphe connexe arc-en-ciel dans le graphe d'intervalles. Le sous-graphe sera induit par les sommets correspondant à l'ensemble S d'intervalles suivant :

- les deux intervalles des extrémités, de couleur c_{gauche} et c_{droite} ,

-
- pour chaque gadget de type 1 correspondant au sommet u de G , l'intervalle de couleur c_u si u est dans C , et tous les intervalles de couleur $c_u^{e_i}$, pour $i = 1, 2, \dots, d(v)$ sinon,
 - pour chaque gadget de type 2 correspondant à l'arête $e = uv$ de G , l'intervalle de couleur c_u^e si u est dans C , et l'intervalle de couleur c_v^e si v est dans C .
 - pour chaque gadget de type 3, on choisit une couleur distincte parmi les au moins $n - k$ couleurs correspondant aux sommets de G qui n'appartiennent pas à C ,
 - pour chaque couleur n'ayant aucun représentant, s'il en existe (c'est-à-dire si C à moins de k sommets), on ajoute n'importe quel intervalle avec cette couleur.

Par construction, notre sous-graphe contient bien chaque couleur une et une seule fois, comme on va le montrer. Les couleurs correspondant aux sommets de G apparaissent uniquement soit dans un gadget de type 1 si le sommet associé est dans C , soit dans un gadget de type 3 sinon. La couleur associée à une arête e et un sommet v de G apparaît uniquement dans un gadget de type 2 si u est dans C , ou dans un gadget de type 1 si u n'est pas dans C . Les couleurs c_{gauche} et c_{droite} sont prises une et une seule fois.

Pour montrer la connexité, il suffit de montrer que pour tout gadget, on relie les deux extrémités du gadget avec des intervalles de S . Pour les gadgets de type 1 et 3, cela est clair par définition. Pour les gadgets de type 2, c'est le cas car au moins une des deux extrémités de l'arête correspondante doit appartenir à C .

Montrons maintenant qu'en partant d'un ensemble S de k intervalles tels que le sous-graphe induit par les sommets correspondants soit connexe et arc-en-ciel, on obtient une couverture par sommets C du graphe G de taille au plus k . On construit C de la façon suivante : pour le gadget de type 1 correspondant au sommet u de G , u appartient à C si et seulement si l'intervalle de couleur c_u du gadget appartient à S . On observe que l'ensemble S contient nécessairement les intervalles de couleur c_{gauche} et c_{droite} . De ce fait, comme S induit un sous-graphe connexe, pour tout gadget, S doit contenir des intervalles dont l'union couvre tout l'espace du gadget.

On va montrer que l'ensemble C est bien une couverture. Comme les intervalles de S au sein d'un gadget de type 2 doivent couvrir tout l'espace du gadget, S doit contenir au moins un des deux intervalles de chaque gadget de type 2. Ainsi, pour toute arête $e = uv$ de G , la couleur c_u^e ou la couleur c_v^e a un représentant dans S issu d'un gadget de type 2. Donc dans le gadget de type 1 associé à u (ou v), l'intervalle de couleur c_u^e (ou c_v^e) n'appartient pas à S . Conséquemment, dans ce gadget, l'intervalle de couleur c_u (ou c_v) est dans S , ce qui implique que u (ou v) est dans C . Ainsi, chaque arête de

G est bien couverte par un sommet de C . De plus, S doit contenir au moins un intervalle dans chaque gadget de type 3. De ce fait, S contient au moins $n - k$ intervalles avec des couleurs correspondant à des sommets. Comme S contient chacune des couleurs correspondant à un sommet une et une seule fois (S est arc-en-ciel), il ne pourra pas contenir plus que k intervalles avec une couleur correspondant à un sommet dans les gadgets de type 1. Donc C contiendra au plus k sommets. Ceci démontre qu'on a bien une réduction. Celle-ci étant polynomiale, le théorème est démontré. \square

Théorème 3.1.3. *SCTM restreint aux graphes scindés est NP-complet.*

Démonstration. De même que pour le théorème précédent, il est facile de vérifier que SCTM restreint aux graphes scindés est dans NP. On va exhiber une réduction de VERTEX COVER vers SCTM sur un graphe scindé. Étant donné un graphe quelconque G , on lui associe le graphe scindé sommet-colorié S_G suivant :

- Pour chaque sommet $v \in V(G)$ il y a dans S_G un sommet $S_G(v)$. Tous les sommets $S_G(v)$ sont adjacents deux à deux, et ont la couleur 0.
- Pour chaque arête $uv \in E(G)$ il y a dans S_G un sommet $S_G(uv)$ adjacent à $S_G(u)$ et $S_G(v)$. Chaque sommet $S_G(uv)$ est colorié avec une couleur unique.

S_G est bien un graphe scindé coloré avec $m + 1$ couleurs : si l'on définit V_0 comme l'ensemble des sommets de couleur 0 et V_1 comme le reste des sommets, V_0 est bien une clique et V_1 est bien un ensemble indépendant.

On va montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des sous-graphes tropicaux connexes minimum de S_G et les solutions optimales pour VERTEX COVER dans G .

Soit X un sous-graphe tropical connexe de S_G de taille k . Comme $V_1 \subseteq X$, définissons $V_2 = X \setminus V_1$. On remarque que V_2 correspond à une couverture par sommets dans G de taille $k - m$. En effet, X est connexe et de ce fait V_2 , pour chaque sommet $S_G(uv)$, doit contenir soit $S_G(u)$ soit $S_G(v)$.

À l'inverse, en partant d'une couverture par les sommets de G de taille k' , on peut obtenir un sous-graphe connexe tropical de taille $k' + m$.

Ainsi, on a bien une réduction de VERTEX COVER vers MCTS restreint aux graphes scindés, qui s'effectue bien en temps polynomial. MCTS restreint aux graphes scindés est donc bien NP-difficile, et donc NP-complet. \square

3.1.2 Solvabilité à paramètre fixé (algorithme FPT)

Théorème 3.1.4. *SCTM peut être résolu en $\mathcal{O}(n^2 \times m \times 8^c)$ opérations.*

Démonstration. Soit G^c un graphe sommet-colorié quelconque et \mathcal{C} l'ensemble des couleurs des sommets de G^c . Pour chaque sommet $u \in G^c$, soit \mathcal{C}_u la fonction qui à chaque sous-ensemble de couleurs S associe l'ordre minimum d'un sous-graphe connexe contenant u , et au moins un représentant de chaque couleur de S . Ainsi, l'ordre du plus petit sous-graphe connexe tropical sera égal à $\min_{v \in V} \mathcal{C}_v(\mathcal{C})$.

On va calculer les fonctions $\mathcal{C}_u(S)$ pour tout sommet u et tout ensemble de couleurs $S \subseteq \mathcal{C}$ avec l'algorithme 1, qui suit des principes proches de ceux de la programmation dynamique.

Algorithme 1 Algorithme de calcul des \mathcal{C}_u

INITIALISATION

for all $u \in V, S \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ **do**

if $S = \{c(u)\}$ **then**

$\mathcal{C}_u(S) \leftarrow 1$

else

$\mathcal{C}_u(S) \leftarrow n$

end if

end for

BOUCLE PRINCIPALE

while $\exists e = uv \in V, S_u, S_v \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ tels que $\mathcal{C}_u(S_u) + \mathcal{C}_v(S_v) < \mathcal{C}_u(S_u \cup S_v)$

do

$\mathcal{C}_u(S_u \cup S_v) \leftarrow \mathcal{C}_u(S_u) + \mathcal{C}_v(S_v)$

end while

Prouvons que l'algorithme 1 est correct. Tout d'abord, on montre par induction qu'à chaque itération de l'algorithme, pour tout sommet u et tout ensemble S de couleurs, si $\mathcal{C}_u(S) = k$ alors il existe bien un sous-graphe connexe d'ordre k contenant u , et au moins un représentant de chaque couleur dans S . Après l'initialisation, pour $S = \{c(u)\}$, le sous-graphe en question est simplement le sommet u isolé ; pour $S \neq \{c(u)\}$, le sous-graphe en question est G pris tout entier. Considérons maintenant que la propriété soit vraie avant une itération de la boucle principale, qui s'applique sur l'arête uv . Dans ce cas, soit H_u (respectivement H_v) le sous-graphe d'ordre $\mathcal{C}_u(S_u)$ (respectivement $\mathcal{C}_v(S_v)$) contenant u , (respectivement v), et un représentant de chaque couleur de S_u (respectivement S_v). En prenant l'union de H_u et H_v , on obtient un sous-graphe connexe d'ordre au plus $\mathcal{C}_u(S_u) + \mathcal{C}_v(S_v)$, et contenant u ainsi qu'au moins un représentant de chaque couleur dans $S_u \cup S_v$. Ainsi, $\mathcal{C}_u(S)$ est bien toujours égale à la taille d'un sous-graphe connexe contenant u et pour chaque couleur de S au moins un sommet de cette couleur.

Nous allons maintenant montrer qu'à la fin de l'algorithme ces valeurs

sont minimum. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe à la fin de l'algorithme un sommet u et un sous-graphe connexe H d'ordre k tel que $k < \mathcal{C}_u(c(H))$. Soit T un sous-arbre couvrant de H enraciné en u . Pour tout sommet v de H , on notera $T(v)$ le sous-arbre de T enraciné en v . La propriété \mathcal{P} sera dite satisfaite par un sommet v de T si $\mathcal{C}_v(c(T(v))) \leq |T(v)|$. On montre par induction structurelle qu'à la fin de l'algorithme, tous les sommets de T satisfont \mathcal{P} . Si v est une feuille, ce résultat est évident car $T(v) = \{v\}$, et $\mathcal{C}_v(c(T(v))) = 1$ de par l'initialisation de notre algorithme. Montrons que si tous les fils v_1, \dots, v_r d'un sommet v satisfont \mathcal{P} , alors v aussi satisfait \mathcal{P} . Puisque l'algorithme s'est arrêté, la boucle principale ne peut s'appliquer sur l'arête vv_1 avec les ensembles de couleurs $\{c(v)\}$ et $c(T(v_1))$. On en déduit que $\mathcal{C}_v(c(v) \cup c(T(v_1))) \leq \mathcal{C}_v(c(v)) + \mathcal{C}_{v_1}(c(T(v_1)))$. On sait que $c(v) \cup c(T(v_1)) = c(v \cup T(v_1))$, que $\mathcal{C}_v(c(v)) = 1$ (par l'initialisation) et $\mathcal{C}_{v_1}(c(T(v_1))) \leq |T(v_1)|$ (par induction, v_1 satisfait \mathcal{P}), donc $\mathcal{C}_v(c(v \cup T(v_1))) \leq 1 + |T(v_1)|$. En appliquant le même raisonnement, la boucle principale de notre algorithme ne pouvant s'appliquer sur l'arête vv_2 avec les ensembles $c(\{v\} \cup T(v_1))$ et $c(T(v_2))$, on obtient $\mathcal{C}_v(c(v \cup T(v_1) \cup T(v_2))) \leq 1 + |T(v_1)| + |T(v_2)|$. En procédant de façon similaire pour chaque fils de v , on obtient que $\mathcal{C}_v(c(T(v))) = \mathcal{C}_v(c(v \cup T(v_1) \cup \dots \cup T(v_j))) \leq 1 + |T(v_1)| + \dots + |T(v_j)| = |T(v)|$. Ainsi, on a bien montré que v satisfait \mathcal{P} , et donc par induction que tout sommet de T satisfait \mathcal{P} . Ainsi, $\mathcal{C}_u(c(H)) = \mathcal{C}_u(c(T(u))) \leq |T(u)| = k$, ce qui contredit notre hypothèse de départ sur H . L'algorithme 1 est donc correct.

Analysons maintenant la complexité de l'algorithme 1. L'initialisation demandera simplement de procéder à $n \times 2^c$ affectations. L'identification d'une arête uv et de deux ensembles S_u, S_v tels que la boucle principale puisse être appliquée demandera de vérifier au plus $m \times 2^c \times 2^c$ possibilités, et vérifier une possibilité prend un nombre constant d'opérations. Appliquer la boucle principale va faire décroître strictement la valeur $\mathcal{C}_u(S_u \cup S_v)$. Il n'y a que $n \times 2^c$ valeurs à calculer, et chaque valeur ne pourra diminuer qu'au plus n fois. De ce fait, la boucle principale sera itérée au plus $n \times 2^c \times n$ fois. Donc la complexité de l'algorithme sera bien de $\mathcal{O}(n^2 \times m \times 8^c)$, comme requis. Il faudra ensuite rechercher un minimum parmi n valeurs, ce qui n'augmentera pas la complexité asymptotique de l'algorithme. \square

3.1.3 Bornes supérieures

Dans cette section, on donnera des conditions suffisantes pour qu'un graphe sommet-colorié ait des sous-graphes connexes tropicaux arc-en-ciel, ou proche d'être arc-en-ciel. Notre premier résultat lie $\mathbf{tc}(G^c)$ au nombre chromatique $\chi(G)$.

Proposition 3.1.5. *Si G^c est un graphe proprement colorié avec $\chi(G)$ couleurs, alors il contient un sous-graphe connexe tropical arc-en-ciel.*

Démonstration. Soit $V_1 \subseteq V$ une classe de couleurs de G^c . Il doit exister un sommet de $v \in V_1$ dont les voisins contiennent un représentant de chacune des autres couleurs, sinon tous les sommets de V_1 pourraient être recolorés chacun avec une couleur n'apparaissant pas dans son voisinage, ce qui donnerait une coloration propre de G avec $\chi(G) - 1$ couleurs. De ce fait, en prenant v et un voisin de v de chacune des couleurs, on obtient un sous-graphe connexe tropical arc-en-ciel. \square

Avant de prouver le résultat suivant, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.6. *Soit G un graphe connexe. Si G contient (au moins) i points d'articulation, alors le nombre m d'arêtes de G vérifie*

$$m \leq \binom{n-i}{2} + i$$

Démonstration. On va utiliser une preuve par récurrence sur i . Le résultat est évident lorsque $i = 0$, car chaque arête doit relier une paire de sommets différents. On appelle *bloc* d'un graphe G une composante 2-connexe maximale de G , et on dit d'un bloc qu'il est un bloc *feuillu* s'il contient exactement un point d'articulation. Si $i > 0$, alors il existe un sommet v appartenant à un bloc feuillu de G qui n'est pas un point d'articulation. Si v a un degré de 1, alors $G \setminus v$ a au moins $i - 1$ points d'articulation et est connexe, donc par induction, en utilisant la propriété sur $G \setminus v$,

$$m = |E(G \setminus v)| + 1 \leq \binom{(n-1) - (i-1)}{2} + (i-1) + 1 = \binom{n-i}{2} + i.$$

Sinon, $G \setminus v$ possède au moins i points d'articulation et v est adjacent à au plus un seul d'entre eux. On note C l'ensemble des points d'articulation de $G \setminus V$. On remarque que v ne peut être adjacent à tous les sommets de $V(G) \setminus C$, car il ne peut être adjacent qu'aux sommets de son bloc. De ce fait, v a un degré au plus $n - 1 - 1 - (i - 1) = n - i - 1$ (le graphe a n sommets, mais v ne peut être adjacent ni à lui-même, ni à au moins un sommet d'un autre bloc qui n'est pas point d'articulation, ni à $i - 1$ sommets d'articulation), et par induction, en utilisant la propriété sur $G \setminus v$,

$$m \leq |E(G \setminus v)| + n - i - 1 \leq \binom{n-i-1}{2} + (n-i-1) + i = \binom{n-i}{2} + i.$$

\square

Théorème 3.1.7. *Soit G^c un graphe connexe sommet-coloré avec n sommets et m arêtes. Pour tout entier non-négatif k , si $m \geq \binom{n-k-2}{2} + n - c + 2$, alors $\text{tc}(G^c) \leq c + k$.*

Démonstration. On raisonne par induction sur n . Si $n \leq c + k$, alors G^c lui-même est un (sous-)graphe connexe d'ordre au plus $c + k$. On peut donc considérer dans la suite que $n \geq c + k + 1$. Soit $F \subseteq V$ l'ensemble des sommets dont la couleur a au moins deux représentants dans le graphe. Alors $|F| \geq n - c + 1$, car on aura au plus $c - 1$ couleurs n'ayant qu'un représentant.

Soit $i = n - c + 1$. On a considéré que $k \leq n - c - 1 = i - 2$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} \binom{n-k-2}{2} + n - c + 2 &= \binom{n-(k+2)}{2} + i + 1 \\ &\geq \binom{n-i}{2} + i + 1. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $m \geq \binom{n-k-2}{2} + n - c + 2$, donc d'après le lemme 3.1.6, on sait que G^c possède moins de i points d'articulation. Puisque $|F| \geq i$, F contient un sommet v qui n'est pas un point d'articulation.

On considère d'abord le cas où $d(v) \geq n - k - 1$. Soit $N[v]$ le voisinage clos de v . Alors $G - N[v]$ est d'ordre au plus k . Soit p le nombre de couleurs ayant un représentant dans $N[v]$. Nous allons construire un sous-graphe connexe tropical d'ordre au plus $k + c$. Tout d'abord, on inclut v , et $p - 1$ voisins de v de façon à avoir un représentant pour chacune des p couleurs présentes dans $N[v]$. Pour chaque couleur z non présente dans $N[v]$, on ajoute une composante connexe H de $G - N[v]$ qui contient un sommet de couleur z , et un sommet du voisinage de v adjacent à H pour garder la connexité. Dans le pire des cas, on ajoutera aux p sommets initiaux tous les k sommets du graphe $G - N[v]$, ainsi que $c - p$ sommets pour assurer la connexité, ce qui donne bien un sous-graphe contenant au plus $c + k$ sommets.

Maintenant, considérons le cas $d(v) \leq n - k - 2$. Soient $G' = G \setminus v$, n' le nombre de sommets de G' , m' le nombre d'arêtes de G' et c' le nombre de couleurs de G' . Puisque v n'est pas un point d'articulation, G' est connexe. On a $n' = n - 1$, $c' = c$ car on a choisi v tel qu'il existe un autre sommet dans G de la même couleur que v , et

$$\begin{aligned}
m' &\geq m - (n - k - 2) \\
&\geq \binom{n - k - 2}{2} + n - c + 2 - (n - k - 2) \\
&= \binom{n - k - 2}{2} + n - c + 1 - (n - k - 3) \\
&= \binom{n - k - 3}{2} + n - c + 1 \\
&= \binom{n' - k - 2}{2} + n' - c + 2.
\end{aligned}$$

Par induction, il existe un sous-graphe connexe tropical d'ordre $c + k$ dans G' . Les mêmes sommets induisent aussi un sous-graphe connexe tropical d'ordre $c + k$ dans G . Ceci démontre l'induction et la preuve. \square

On remarque que la preuve ci-dessus fournit un algorithme qui trouve un sous-graphe connexe tropical d'ordre au plus $c + k$ en temps polynomial, sous les hypothèses du théorème. Nous allons maintenant montrer que la borne sur le nombre d'arête est stricte, c'est-à-dire qu'il existe un graphe ayant $\binom{n-k-2}{2} + n - c + 1$ arêtes n'ayant pas de sous-graphe connexe tropical d'ordre $c + k$ (ou moins). Soit deux entiers n et $k < n - 2$. Considérons le graphe complet arc-en-ciel K_{n-k-2}^c sur $n - k - 2$ sommets, coloré avec les couleurs $\{1, 2, \dots, n - k - 2\}$. Appelons x_1 le sommet de couleur 1 dans K_{n-k-2}^c . Ajoutons un chemin $x_1 v_1 v_2 \cdots v_{k+2}$, $v_i \notin V(K_{n-k-2}^c)$. Colorons v_{k+2} avec la couleur 0 et tous les autres v_i avec la couleur 1. Le graphe résultant a exactement $\binom{n-k-2}{2} + n - c + 1$ arêtes, mais le seul sous-graphe tropical connexe qu'il contient (lui-même) a $c + k + 1$ sommets.

Théorème 3.1.8. *Soit G^c un graphe sommet-coloré de degré minimum δ . Si $\delta \geq \frac{n}{2}$ et $c \geq \frac{n}{2}$, alors G^c a un sous-graphe connexe arc-en-ciel.*

Démonstration. Soit S le plus grand sous-graphe connexe ne contenant aucune paire de sommets ayant la même couleur dans un graphe G^c correspondant aux hypothèses du théorème. Considérons par contradiction que $|S| < c$. De ce fait, il existe un sommet $v \in G^c \setminus S$ tel que la couleur de v n'a aucun représentant dans S . De plus, v n'est adjacent à aucun sommet de S , car S est maximum. On distingue maintenant deux cas, en fonction de la connectivité de S .

1. Tout d'abord, si S est 2-connecte. Pour chaque sommet $u \in S$, comme $\delta \geq \frac{n}{2}$ et que v n'est pas relié à u , $|N(u) \cap N(v)| \geq 2$. De plus,

puisque $N(v) \cap S = \emptyset$, on a $N(u) \cap N(v)$ disjoint de S . Si un sommet $w \in N(u) \cap N(v)$ a une couleur différente de celle de u , alors soit w' le sommet de S tel que $c(w') = c(w)$, w' existe car S est maximum et $w' \neq u, v, w$. On définit $S' = S \cup \{v, w\} \setminus \{w'\}$. Comme S est 2-connexe, $S \setminus \{w'\}$ est connexe, et donc S' aussi. De plus, par définition, S' n'a aucune paire de sommets ayant la même couleur, et $|S'| = |S| + 1$ (S contient un sommet de moins (w'), et deux sommets de plus (w et v , qui ne font pas partie de S)), ce qui contredit l'hypothèse que S soit maximum. Donc, tous les sommets dans $N(u) \cap N(v)$ ont la même couleur que le sommet u . Comme ceci est vrai pour tous les sommets u de S , $N(v)$ contient chaque couleur contenue dans S . Ceci implique qu'il existe un sous-graphe connexe arc-en-ciel contenu dans $N(v)$ d'ordre $|S| + 1$, ce qui contredit l'hypothèse que S est maximum.

2. Ensuite, si S n'est pas 2-connexe. Soit U un sous-ensemble de S contenant de chaque bloc feuillu de S exactement un sommet qui n'est pas un point d'articulation.

Définissons $T = N(S)$. Toutes les couleurs qui apparaissent dans T apparaissent aussi dans S , donc dans $G \setminus T$. Ceci implique que $|G \setminus T| \geq c \geq n/2$, et donc que $|T| \leq n/2$.

On considère maintenant $d(U \cup \{v\}, T)$, c'est-à-dire le nombre d'arêtes entre $U \cup \{v\}$ et T . Notez qu'un sommet $u \in U$ contenu dans un bloc feuillu $B \subseteq S$ a au plus $|B| - 1$ voisins dans S et que $\sum_{B \text{ bloc feuillu}} (|B| - 1) \leq |S| - 1$ car cette somme n'inclut que les sommets de S qui font partie d'un bloc feuillu et ne sont pas des points d'articulation. Il en découle que

$$\begin{aligned}
d(U \cup \{v\}, T) &\geq \overbrace{\left(|U| \frac{n}{2} - |S| + 1 \right)}^{\# \text{ min d'arêtes reliant } U \text{ à } T} + \overbrace{\left(\frac{n}{2} - (n - |S| - |T|) + 1 \right)}^{\# \text{ min d'arêtes reliant } v \text{ à } T} \\
&= (|U| + 1) \frac{n}{2} - n + |T| + 2 \\
&= (|U| - 1) \frac{n}{2} + |T| + 2 \\
&\geq (|U| - 1)|T| + |T| + 2 \\
&> |U||T|.
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a un sommet $u \in T$ adjacent à au moins $|U| + 1$ sommets dans $U \cup \{v\}$, c'est-à-dire tous les sommets de $U \cup \{v\}$. Comme u est relié à un sommet qui n'est pas un point d'articulation dans chaque bloc-feuille de S , $S \cup \{u\}$ est 2-connexe. Soit u' un sommet de S coloré

avec la même couleur que u . Alors $(S \setminus u') \cup \{u, v\}$ est un sous-graphe connexe arc-en-ciel d'ordre $|S| + 1$, ce qui contredit l'hypothèse de maximalité de S . Ceci conclut l'argument et la preuve. □

La preuve du théorème 3.1.8 fournit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 3.1.9. *Soit G^c un graphe sommet-colorié d'ordre n et de degré minimum δ . Si $\delta \geq \frac{n}{2}$ et $c \geq \frac{n}{2}$, alors on peut trouver un sous-graphe connexe arc-en-ciel en temps polynomial.*

Le théorème suivant montre que le théorème 3.1.8 ne peut pas être significativement amélioré. On introduit $\delta_r(G^c)$ le degré arc-en-ciel minimum G^c , c'est-à-dire le plus petit nombre de couleurs qu'un sommet de G^c a dans son voisinage.

Théorème 3.1.10. *On a les résultats suivants :*

1. *Pour tout $\epsilon, \epsilon' \in [0, 1)$, il existe un graphe sommet-colorié G^c tel que $\delta(G^c) \geq \epsilon n$, $\delta_r(G^c) \geq \epsilon' c$ et G^c n'a pas de sous-graphe connexe tropical arc-en-ciel.*
2. *Pour tout entier positif p , il existe un graphe sommet-colorié G^c tel que $\delta(G^c) \geq n - c + p$ et G^c n'a pas de sous-graphe connexe tropical arc-en-ciel.*
3. *Pour tout entier positif p et tout $\epsilon \in [0, 1)$, il existe un graphe sommet-colorié G^c tel que $\delta \geq \epsilon n$, G^c est p -connexe et n'a pas de sous-graphe connexe tropical arc-en-ciel.*

Démonstration. Soit i, j, k trois entiers positifs, $k \geq 2$. On définit le graphe $G(i, j, k)$ qui servira pour la preuve de ces trois résultats comme suit :

- $G(i, j, k)$ se compose de k cliques sommet-disjointes H_1, H_2, \dots, H_k , chacune d'ordre i , et k cliques sommet-disjointes D_1, D_2, \dots, D_k , chacune d'ordre j .
- Pour tout $l \neq l'$, chaque sommet de la clique H_l est adjacent à chaque sommet de $H_{l'}$ et à chaque sommet de $D_{l'}$.

$G(i, j, k)$ a les propriétés suivantes :

- $n = |V(G(i, j, k))| = k(i + j)$.
- $\delta = (k - 1)i + j - 1$.
- $G(i, j, k)$ est $i(k - 1)$ -connexe.

En faisant varier i, j, k et la coloration, on peut prouver les trois affirmations du théorème comme suit.

1. On considère $G(i, j, k)$ avec chaque sommet de H_l coloré avec la couleur 1, pour $l = 1, \dots, k$. Chaque D_l contient un représentant des couleurs $2, 3, \dots, j$ et un sommet de couleur $j + l$. On dénote le graphe $G(i, j, k)$ ainsi coloré G^c . Il satisfait les propriétés suivantes :

- $c = j + k$.

- $\delta_r(G^c) = j$.

Soit $\epsilon, \epsilon' \in [0, 1)$. Soit $k > \frac{1}{1-\epsilon}$ et $j > \frac{\epsilon'k}{1-\epsilon'}$. Alors $\delta_r(G^c) = j = \epsilon'j + (1 - \epsilon')j > \epsilon'(j + k) = \epsilon'c$ et $\frac{\delta}{n} \rightarrow \frac{k-1}{k} > \epsilon$ quand $i \rightarrow \infty$. Pour une valeur de i suffisamment élevée, on obtient un graphe avec $\delta > \epsilon n$, $\delta_r > \epsilon'c$. Il ne contient pas de sous-graphe connexe tropical arc-en-ciel. En effet, un tel sous-graphe devrait contenir un sommet de chaque D_l . De ce fait, il devrait contenir des sommets issus d'au moins deux H_l . Ceci contredit le fait que chaque couleur devrait n'être présente qu'une seule fois.

2. On considère $G(i, j, k)$ avec chaque sommet dans les H_l coloré avec la couleur 1, pour $l = 1, \dots, k$, et les jk sommets des D_l sont colorés avec les couleurs $\{2, 3, \dots, jk + 1\}$ de façon à ce que chaque couleur apparaisse sur exactement un sommet. Appelons G^c le graphe résultant. Alors G^c possède les propriétés suivantes :

- $c = jk + 1$

- $\delta_r(G^c) = j$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $j \geq i + p$. Alors $\delta = (k - 1)i + j - 1 \geq ki + p - 1 = n - c + p$. Le graphe G^c n'a pas de sous-graphe connexe tropical arc-en-ciel. En effet, un tel sous-graphe devrait contenir les sommets de chaque D_l . De ce fait, il devrait contenir des sommets issus d'au moins deux H_l . Ceci contredit le fait que chaque couleur devrait n'être présente qu'une seule fois.

3. On considère $G(i, j, k)$ coloré comme dans le cas précédent, qu'on appelle G^c . Soit $p \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in [0, 1)$. On pose $j \in \mathbb{N}$, $k > \frac{1}{1-\epsilon}$. Si $i \geq \frac{p}{k-1}$, alors G^c est p -connexe. De plus $\frac{\delta}{n} \rightarrow \frac{k-1}{k} > \epsilon$ quand $i \rightarrow \infty$. Pour une valeur de i suffisamment grande, G^c est p -connexe avec $\delta \geq \epsilon n$. Par le même raisonnement que dans le cas précédent, G^c n'a pas de sous-graphe connexe tropical arc-en-ciel.

□

3.2 Dominants tropicaux minimum

Dans la section suivante, nous allons nous intéresser aux ensembles dominants tropicaux. Les résultats présentés ici le sont aussi dans l'article [dMK⁺],

et sont issus d'une collaboration avec les auteurs de l'article en question. On rappelle qu'étant donné un graphe G , un ensemble dominant dans G est un ensemble D de sommets de G tel que tout sommet de G soit fait partie de D , soit est adjacent à un sommet dans D . Le problème de trouver un ensemble dominant de taille minimum dans un graphe quelconque est NP-complet, et même APX-difficile[HL90]. Autrement dit, si $P \neq NP$, alors il existe une valeur $0 < \alpha < 1$ telle qu'aucun algorithme qui s'exécute en temps polynomial ne peut garantir de fournir un ensemble dominant de taille au plus α fois la taille d'un dominant minimum.

Le problème de l'ensemble dominant tropical (TDS) est défini comme suit.

ENSEMBLE DOMINANT TROPICAL (TDS) :

Entrée : Un graphe sommet-colorié G^c et un entier $k \geq c$.

Question : Existe-t-il un ensemble dominant tropical de taille au plus k ?

Le problème de l'ensemble dominant arc-en-ciel (RDS) est défini comme suit.

ENSEMBLE DOMINANT ARC-EN-CIEL (RDS) :

Entrée : Un graphe sommet-colorié G^c .

Question : Existe-t-il un ensemble dominant tropical de taille c ?

On notera γ^t la taille d'un dominant tropical minimum.

3.2.1 NP-complétude

Dans cette section, nous allons montrer que le problème RDS est NP-complet. Comme RDS est un cas particulier de TDS, ceci implique que le problème TDS est lui aussi NP-complet.

Théorème 3.2.1. *Le problème RDS, même restreint aux graphes chemins, est NP-complet.*

Démonstration. Le problème RDS est clairement dans NP. La réduction s'obtient à partir du problème 3-SAT. Soit (I, Y) une instance de 3-SAT où $I = (l_1 \vee l_2 \vee l_3) \wedge (l_4 \vee l_5 \vee l_6) \wedge \dots \wedge (l_{X-2} \vee l_{X-1} \vee l_X)$ est une collection de $\tau = X/3$ clauses sur un ensemble fini $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ de variables booléennes. À partir de cette instance, on définit un chemin sommet-coloré \mathcal{P} tel que \mathcal{P} contient un ensemble dominant arc-en-ciel si et seulement si (I, Y) est satisfiable.

Pour définir \mathcal{P} , on construit tout d'abord un segment $\mathcal{P}_0 = vv'v_0v_1 \dots v_{4\tau}$, et on colore ses sommets comme suit. Les sommets v et v' sont colorés en noir (noté b sur les schémas). Les sommets $v_0, v_4, v_8, \dots, v_{4\tau-4}, v_{4\tau}$ sont chacun colorés d'une couleur unique. Les sommets restants, qu'on appellera dans la suite *clausaux*, sont colorés de v_1 à $v_{4\tau-1}$ avec les couleurs $1_0, 2_0, 3_0, \dots, X_0$. La figure 3.1 montre \mathcal{P}_0 quand $X = 6$.

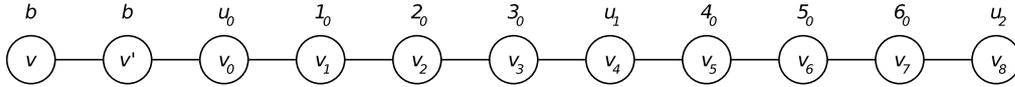


FIGURE 3.1 – Exemple de \mathcal{P}_0 quand $X = 6$

Ensuite, on définit d'autres gadgets comme suit : Pour chaque littéral l_i , $i = 1, \dots, X$, on considère la liste de tous les littéraux $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_{k_i}}$ qui sont antithétiques à l_i (on rappelle qu'un littéral est antithétique à un autre s'il n'est vrai que quand l'autre est faux, et inversement ; l' est antithétique à l si et seulement si $l' = \bar{l}$). On associe ensuite à chacun de ces littéraux l_{i_f} , $f = 1, \dots, k_i$ un gadget de contrainte w_{i,i_f} sur cinq sommets défini de la façon suivante :

- un premier sommet A avec une couleur unique, suivi de
- un sommet P , qu'on dénommera comme le *sommet positif* du gadget, aura la couleur i_f ,
- un *sommet médian* M de couleur noire,
- un sommet N , qu'on dénommera comme le *sommet négatif* du gadget, et qui aura la couleur i_{f-1} ,
- un sommet L , qu'on dénommera *sommet lien* et qui aura la couleur c_{i,i_f} si $i < i_f$ et $c_{i_f,i}$ sinon (car on souhaite avoir une seule couleur associée à la paire de littéraux $\{l_i, l_{i_f}\}$).

Voir la figure 3.2.

Pour finir, on obtient le chemin \mathcal{P} en concaténant à \mathcal{P}_0 tous ces gadgets de façon séquentielle, et en ajoutant un sommet final F de couleur unique. Cette construction peut s'effectuer en temps polynomial car on a $\mathcal{O}(X^2)$ gadgets.

Considérons d'abord qu'il existe un assignation des variables y_1, \dots, y_m qui satisfait l'instance de 3-SAT. En partant de cette assignation, on peut trouver un ensemble dominant tropical arc-en-ciel \mathcal{D} pour \mathcal{P} de la façon suivante :

1. \mathcal{D} contient v et tous les sommets de couleur unique.

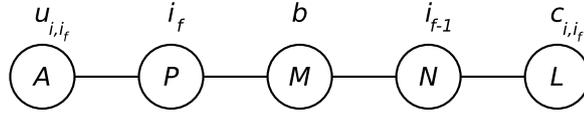


FIGURE 3.2 – Un gadget de contrainte w_{i,i_f} (pour $i < i_f$)

2. Pour tout littéral l_i assigné à vrai, on ajoute le sommet clausal de couleur i_0 à \mathcal{D} , ainsi que pour tout $f = 1, \dots, k_i$ (s'il en existe), le sommet positif P et le sommet lien L de w_{i,i_f} à \mathcal{D} .
3. Pour tout littéral l_i assigné à faux, et tout $f = 1, \dots, k_i$ (s'il en existe), on ajoute le sommet négatif N de w_{i,i_f} à \mathcal{D} .
4. S'il reste des couleurs qui n'ont pas encore de représentant dans \mathcal{D} , on ajoute un représentant arbitraire pour cette couleur.

On peut vérifier que chaque couleur a exactement un représentant dans \mathcal{D} . Ceci est direct pour la couleur noire, les couleurs uniques, et les couleurs i_f . Pour la couleur d'un sommet de lien L d'un gadget $w_{i,j}$, comme les littéraux l_i et l_j sont antithétiques, exactement un d'entre eux est vrai, donc $c_{i,j}$ (ou $c_{j,i}$ le cas échéant) n'a qu'un représentant dans \mathcal{D} .

Montrons maintenant que \mathcal{D} est un ensemble dominant. Observons tout d'abord que v' est dominé par v (et aussi par v_0). De plus, comme toute clause contient au moins un littéral vrai, chaque sommet clausal soit est dans \mathcal{D} , soit a un voisin dans \mathcal{D} . Pour finir, chaque gadget de contrainte a soit son sommet négatif, soit son sommet positif et son sommet de lien, dans \mathcal{D} . Dans ces deux cas, tous les sommets du gadget sont couverts par \mathcal{D} . Ainsi \mathcal{D} est bien un ensemble dominant arc-en-ciel. Un exemple de la construction de \mathcal{P} et de l'ensemble dominant arc-en-ciel correspondant \mathcal{D} pour une assignation de variables arbitraire est fourni en figure 3.3.

On va maintenant montrer que de façon réciproque, si \mathcal{D} est un ensemble dominant arc-en-ciel pour \mathcal{P} , alors on peut trouver une assignation de variables qui vérifie notre instance de 3-SAT. On considère tout d'abord une assignation partielle où pour chaque sommet clausal de couleur i_0 présent dans \mathcal{D} , l_i est vrai. Supposons par l'absurde que cette méthode entraîne une incohérence, c'est-à-dire qu'elle tente d'assigner une variable à vrai et à faux à la fois. Cela implique que \mathcal{D} contient deux sommets clausaux de couleur i_0 et j_0 , respectivement, tels que l_i et l_j soit antithétiques. Supposons, sans perte de généralité, que $i < j$. Comme l_i et l_j sont antithétiques, il existe deux gadgets w_{i,i_f} , $i_f = j$, et $w_{j,j_{f'}}$, $j_{f'} = i$, où les sommets liens ont la couleur $c_{i,j}$ (comme $i < j$). Nous allons montrer que ces deux sommets sont inclus dans

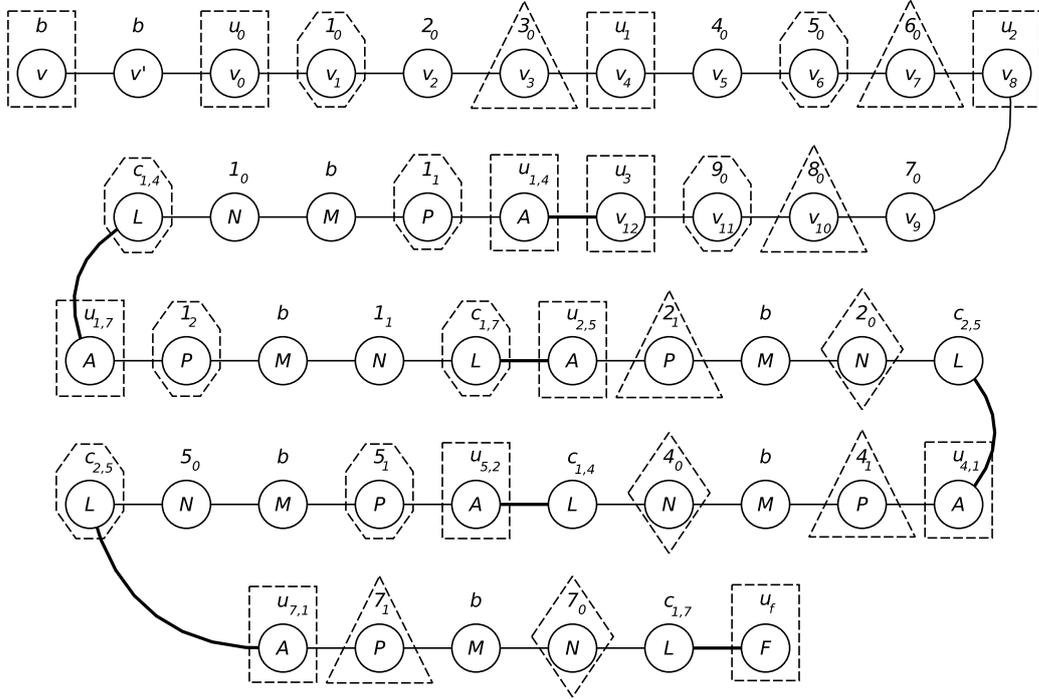


FIGURE 3.3 – Construction de \mathcal{P} pour la formule $(y_1 \vee \overline{y_2} \vee y_3) \wedge (\overline{y_1} \vee y_2 \vee y_3) \wedge (\overline{y_1} \vee y_3 \vee y_4)$ où $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 w_{1,4} w_{1,7} w_{2,5} w_{4,1} w_{5,2} w_{7,1} F$. La couleur des sommets est affichée au dessus de ceux-ci, et les arêtes épaisses marquent la séparation entre deux gadgets. Les sommets entourés par des \square, \circ, \diamond et \triangle pointillés sont ceux inclus lors des phases 1, 2, 3 et 4, respectivement, de l'obtention d'un ensemble dominant arc-en-ciel \mathcal{D} correspondant à l'assignation $y_1 = y_2 = y_4 = \text{VRAI}$ et $y_3 = \text{FAUX}$.

\mathcal{D} , ce qui contredit l'hypothèse que \mathcal{D} est arc-en-ciel. Considérons w_{i,i_f} (une preuve similaire marche pour $w_{j,j_{f'}}$).

Supposons tout d'abord que $f = 1$. Si L n'appartient pas à \mathcal{D} , alors N doit être dans \mathcal{D} car, M étant noir, il ne peut être dans \mathcal{D} qui est arc-en-ciel et contient déjà v où v' qui sont eux-même noirs. Cependant, la couleur de N est i_0 , et \mathcal{D} contient déjà le sommet clausal de cette couleur. Donc L appartient à \mathcal{D} .

Supposons ensuite que $f > 1$. De la même façon, si L n'appartient pas à \mathcal{D} , alors N doit appartenir à \mathcal{D} . Comme la couleur de N est i_{f-1} , alors le sommet P de $w_{i,i_{f-1}}$ ne peut appartenir à \mathcal{D} car il a la même couleur. Ainsi, comme \mathcal{D} doit dominer le sommet M de $w_{i,i_{f-1}}$, on a que le sommet N de

couleur i_{f-2} de $w_{i,i_{f-1}}$ appartient à \mathcal{D} . En suivant le même argument, on a que le sommet négatif N appartient à \mathcal{D} pour tout w_{i,i_k} , $k = f, \dots, 1$. Ceci introduit une contradiction car N de w_{i,i_1} a pour couleur i_0 et \mathcal{D} contient déjà un sommet clausal de cette couleur. Ainsi L appartient à \mathcal{D} .

En appliquant le même raisonnement pour $w_{j,j_{f'}}$, on obtient que \mathcal{D} contient deux sommets de couleur $c_{i,j}$. Ceci contredit l'hypothèse que \mathcal{D} est arc-en-ciel. Ainsi, notre assignation partielle est cohérente. On complète l'assignation en mettant à vrai toute variable non encore assignée.

Il reste à vérifier que l'assignation obtenue vérifie l'instance de 3-SAT. Comme chaque sommet clausal est couvert par \mathcal{D} , cela implique que pour chaque clause, on a un littéral qui est assigné à vrai, c'est-à-dire que notre assignation est bien une solution à l'instance de 3-SAT. Ceci conclut l'argument, et la preuve du théorème. \square

3.2.2 Approximations

Nous allons maintenant considérer les possibilités d'approximation pour le problème TDS.

Remarque 3.2.1. *Le problème TDS est un cas particulier de COUVERTURE PAR ENSEMBLES. En effet, étant donné un graphe sommet-coloré G^c , TDS sur G^c correspond à une instance I de COUVERTURE PAR ENSEMBLES définie de la façon suivante. L'univers \mathcal{U} de I est constitué de l'union de l'ensemble des sommets V de G^c et de l'ensemble $c(V)$ des couleurs présentes dans G^c . La collection de I contient, pour chaque sommet u de G^c , un ensemble I_u contenant $N[u]$ et $c(u)$. Un sous-ensemble W de sommets de G^c est un dominant tropical de taille k si et seulement si les ensembles de la collection correspondants aux sommets de W forment une couverture par ensembles de taille k de \mathcal{U} . En conséquence, les résultats d'approximation connus pour COUVERTURE PAR ENSEMBLES s'appliquent aussi à TDS.*

Proposition 3.2.2. *On peut approximer TDS dans un rapport $\ln(n) - \ln(\ln(n)) + \Theta(1)$.*

Démonstration. COUVERTURE PAR ENSEMBLES peut être approximé dans un rapport $\ln t - \ln \ln t + \Theta(1)$, où t est la taille de l'univers de l'instance de COUVERTURE PAR ENSEMBLES, d'après un résultat de Slavík [Sla96]. On se rapporte à la construction de la remarque 3.2.1. Ici, $t = n + c \leq 2n$. Ainsi, TDS peut être approximé avec un ratio $\ln 2 + \ln n - (\ln(\ln 2 + \ln n)) + \theta(1)$. Or $\ln 2 + \ln n - (\ln(\ln 2 + \ln n)) - (\ln 2 + \ln n - (\ln(\ln n))) = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2 + \ln n) = \ln\left(\frac{\ln n}{\ln 2 + \ln n}\right) < 0$ pour $n > 1$. On vérifie donc bien le ratio annoncé. \square

Pour $\Delta \geq 2$, appelons Δ -TDS le problème de trouver un dominant tropical minimum pour un graphe de degré borné par Δ .

Proposition 3.2.3. *Δ -TDS peut être approximé dans un ratio $\ln(\Delta + 2) + \frac{1}{2}$, pourvu que $\Delta \geq 3$.*

Démonstration. On se base sur la construction de la remarque 3.2.1, et un algorithme d'approximation de COUVERTURE PAR ENSEMBLES, proposé par Duh et Fürer [cDF97], avec un ratio de $\sum_{i=1}^k \frac{1}{i} - \frac{1}{2} < \ln k + \frac{1}{2}$, où k est une borne supérieure sur la cardinalité des ensembles, lorsque $k \geq 5$. Dans le cas présent, $k = \Delta + 2$ car $|N(v)| \leq \Delta$ pour tout v , d'où le résultat. \square

Proposition 3.2.4. *Il existe deux constantes $C > 0$ et $\Delta_0 \geq 3$ tel que pour tout $\Delta \geq \Delta_0$, il est NP-difficile d'approximer Δ -TDS dans un ratio $\ln \Delta - C \ln \ln \Delta$.*

Démonstration. Chlebíková et Chlebík ont montré ce résultat pour les graphes bipartis non colorés [CC08, Theorem 3]. Il s'applique donc au cas où $c = 1$. \square

On va maintenant montrer que dans les familles de graphes sommet-colorés où le nombre de couleurs est borné en fonction du nombre de domination, TDS se PTAS-réduit vers MDS.

Proposition 3.2.5. *Soit \mathcal{G} un famille de graphes sommet-colorés pour laquelle il existe une fonction calculable $\theta:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $r \in]0, \infty[$, si $G^c \in \mathcal{G}$ et $n(G^c) \geq \theta(r)$, alors $c \leq r \cdot \gamma(G^c)$. Le problème TDS restreint à \mathcal{G} se PTAS-réduit vers MDS restreint à \mathcal{G} .*

Démonstration. Soit un graphe sommet-coloré $G^c \in \mathcal{G}$, et G le graphe obtenu à partir de G^c en oubliant simplement les couleurs. Soit $r > 0$. Nous allons montrer qu'à partir d'un dominant S de G constituant une $1 + r$ approximation de MDS, on peut construire en temps polynomial un dominant tropical de G^c , noté S' , constituant une $1 + 2r$ -approximation de TDS.

Si G^c a moins de $\theta(r)$ sommets, alors on calcule un dominant tropical minimum S' pour G^c . Celui-ci peut être calculé en temps polynomial car il n'y a qu'un nombre fini de graphes d'ordre inférieur à $\theta(r)$. Puisque optimal, S' est bien une $1 + 2r$ -approximation de TDS sur G^c .

Si G^c a au moins $\theta(r)$ sommets alors soit S' l'ensemble obtenu en ajoutant à S un représentant de chaque couleur qui n'avait pas de représentant dans

S . Montrons que S' est bien une $1 + 2r$ approximation. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{|S'|}{\gamma^t(G^c)} &\leq \frac{|S| + c}{\max\{\gamma(G), c\}} \\ &\leq \frac{|S| + c}{\gamma(G)} \\ &\leq 1 + r + \frac{c}{\gamma(G^c)} \leq 1 + 2r. \end{aligned}$$

On a bien calculé S' en temps polynomial, et obtenu une $1+2r$ -approximation de TDS sur G^c . Ceci conclut l'argument et la preuve. \square

De par le résultat ci-dessus, et comme MDS correspond au cas particulier de TDS où $c = 1$, pour toute famille \mathcal{G} vérifiant les hypothèses du théorème, la complexité de trouver une approximation pour TDS restreint aux graphes de \mathcal{G} est équivalente à celle de MDS restreint aux graphes de \mathcal{G} . Plus précisément, si MDS restreint aux graphes de \mathcal{G} est APX-complet, alors TDS restreint aux graphes de \mathcal{G} l'est aussi, et si MDS restreint aux graphes de \mathcal{G} admet un PTAS, alors TDS restreint aux graphes de \mathcal{G} admet un PTAS lui aussi.

Montrons maintenant que lorsque l'on ne pose pas de restrictions sur le nombre de couleurs, alors même avec des restrictions fortes sur les graphes en entrée, approximer l'ensemble dominant tropical minimum est bien plus difficile que de trouver l'ensemble dominant (non-nécessairement tropical) minimum.

Théorème 3.2.6. *TDS restreint aux chemins est APX-complet. De ce fait, 2-TDS est aussi APX-complet.*

Démonstration. Tout d'abord, exhibons une 2-approximation de 2-TDS en temps polynomial, pour montrer que le problème est dans la classe APX.

Soit P^c une instance de 2-TDS. Comme P^c a pour degré maximum 2, on sait calculer en $\mathcal{O}(n)$ opérations un dominant minimum (non nécessairement tropical) pour P^c . On peut ensuite, toujours en $\mathcal{O}(n)$ opérations, ajouter un sommet de chacune des couleurs n'ayant pas encore de représentant dans P^c . L'ensemble obtenu est au plus de taille $\gamma(G^c) + c - 1$. De plus, la solution optimale ne peut être inférieure ni à $\gamma(P^c)$ (car elle doit bien être un dominant) ni à c (car elle doit bien être tropicale). De ce fait, le dominant tropical calculé en temps $\mathcal{O}(n)$ sera bien au pire d'ordre deux fois plus élevé que la solution optimale sur P^c . Ainsi, 2-TDS est bien dans la classe APX.

Nous allons maintenant montrer que TDS est APX-difficile, en effectuant une réduction depuis 3-VC (Couverture par sommet où les entrées sont restreintes aux graphes cubiques), qui est APX-complet d'après [AK00b]. Considérons une instance de 3-VC sous la forme d'un graphe cubique $G = (V, E)$.

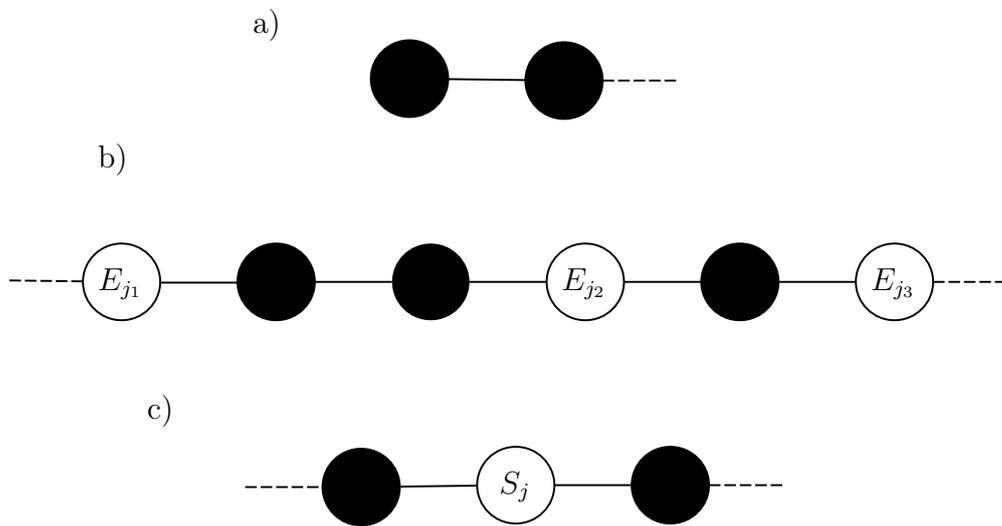


FIGURE 3.4 – Gadgets pour la réduction du théorème 3.2.6
. a) Gadget V_0 . b) Gadget V_j . c) Articulation entre le gadget V_j et le gadget V_{j+1}

Soit v_1, \dots, v_n une énumération de V , et e_1, \dots, e_m une énumération de E . On va construire un chemin sommet-coloré P^c en utilisant les $n + m + 1$ couleurs suivantes : Noir, E_i pour $1 \leq i \leq m$, et n couleurs uniques S_j pour $0 \leq j \leq n - 1$.

Le chemin P^c consiste en $n + 1$ gadgets : le gadget V_0 , et les gadgets V_1, \dots, V_n qui représentent les sommets de G . Deux gadgets consécutifs V_j et V_{j+1} , $0 \leq j \leq n - 1$, sont joints entre eux par une *articulation* consistant en un sommet de couleur unique S_j entouré de deux sommets de couleur noire, comme décrit dans la figure 3.4(c). Le gadget V_0 consiste en deux sommets de couleurs noire, comme décrit dans la figure 3.4(a). Si v_j est incident aux arêtes e_{j_1} , e_{j_2} , et e_{j_3} , le gadget V_j consiste en un chemin coloré comme dans la figure 3.4(b).

Soit σ un dominant tropical de P^c de taille k , et montrons qu'on peut en déduire une couverture par sommets de taille au plus $k - 3n - 1$ pour G . Construisons un autre dominant tropical σ' depuis σ , avec une structure qui nous intéresse, et dont la taille sera au maximum égale à celle de σ . Pour tout j , σ contient le sommet de couleur S_j . De même, σ' les contient. Au moins un des deux premiers sommets de couleur noire doit aussi être dans σ . On pose que σ' contient exactement le premier de ces deux sommets. Pour chaque partie V_j , si σ contient seulement les deux sommets de couleur noire, alors on pose que σ' contient les deux mêmes sommets. Autrement, parmi les sommets de V_j et les deux sommets noirs adjacents à V_j , σ doit contenir au moins trois sommets. Dans ce cas, on pose que σ' contient exactement E_{j_1} , E_{j_2} , et E_{j_3} . Comme σ est un ensemble dominant tropical, σ' en est aussi un, par construction. Il est aussi clair que $|\sigma| \geq |\sigma'|$.

On construit maintenant une solution $g(G, \sigma')$ pour le problème de couverture par sommets sur G , de la façon suivante. On pose $v_j \in g(G, \sigma')$ si et seulement si $\{E_{j_1}, E_{j_2}, E_{j_3}\} \subseteq \sigma'$. Alors,

$$|g(G, \sigma')| = |\sigma'| - 1 - 3n$$

(σ contient 1 sommet noir, n sommets de couleur unique, et pour chacun des n V_j , $j > 0$, deux sommets qui ne correspondent pas à un sommet dans $g(G, \sigma')$).

Réciproquement, à toute couverture par sommets de G , on peut associer le dominant tropical de P^c consistant en le premier sommet noir, l'ensemble des sommets de couleur unique, et pour tout V_j , $j > 1$, si v_j appartient à la couverture, alors les trois sommets de couleur E_{j_1} , E_{j_2} , et E_{j_3} , et sinon, les deux sommets de couleur noire de V_j .

On note $\tau(G)$ le nombre de sommets dans une couverture par sommets de taille minimum dans G . Par ce qui précède, $\gamma^t(P^c) = \tau(G) + 1 + 3n$. De plus,

chaque sommet couvrant exactement 3 arêtes, toute couverture par sommets de G contient au moins $\frac{|E|}{3} = \frac{n}{2}$ sommets, d'où $\tau(G) \geq \frac{n}{2}$.

Supposons que l'on dispose d'un dominant tropical σ' de P^c qui soit une α -approximation de TDS. Alors on a $|\sigma'| = (1 + \alpha)\gamma^t(P^c)$. En utilisant notre correspondance, on en déduit une couverture par sommets U , telle que

$$\begin{aligned}
|U| &= |\sigma'| - 1 - 3n \\
&= (1 + \alpha)\gamma^t(P^c) - 1 - 3n \\
&= (1 + \alpha)(\tau(G) + 1 + 3n) - 1 - 3n \\
&= \tau(G) + \alpha(\tau(G) + 1 + 3n) \\
&\leq \tau(G) + \alpha(\tau(G) + \tau(G) + 3(2\tau(G))) \\
&\leq \tau(G) + \alpha(8\tau(G)) \\
&\leq (1 + 8\alpha)\tau(G).
\end{aligned}$$

Ainsi, U est une $(1+8\alpha)$ -réduction. On a donc bien une PTAS-réduction, ce qui conclut la preuve. \square

La NP-complétude induite par le résultat précédent reste vraie même lorsque le nombre de couleurs est relativement restreint par rapport au nombre de sommets du graphe chemin.

Corollaire 3.2.7. *Soit $0 < \epsilon < 1$, et $\mathcal{P}(\epsilon)$ l'ensemble des graphes chemins sommet-colorés P tels que $c(P) = \Omega(|P|^\epsilon)$ (c'est-à-dire $|P| = \mathcal{O}(c(P)^{1/\epsilon})$). Alors TDS restreint à $\mathcal{P}(\epsilon)$ est NP-complet.*

Démonstration. Toutes les restrictions de TDS sont bien dans NP. On réduit depuis TDS sur un chemin sans restriction sur le nombre de couleurs, qui est NP-complet d'après le théorème 3.2.6. Soit P^c un graphe chemin sommet-coloré avec n sommets. On construit le graphe chemin sommet-coloré Q^{c+2} avec restriction sur le nombre de couleurs de la façon suivante. Soit c_1 et c_2 deux couleurs qui ne sont pas présentes dans P^c . On relie à une des extrémités d'une copie de P^c un sommet de couleur c_1 , lui-même relié à un sommet de couleur c_2 . On relie ensuite le sommet de couleur c_2 à un chemin monochromatique de couleur c_1 et contenant $3n^{1/\epsilon}$ sommets. Le graphe Q^{c+2} s'obtient bien à partir de P^c en un nombre polynomial d'opérations, car ϵ est fixé. De plus, on a bien que $|Q^{c+2}| = n + 3n^{1/\epsilon} + 2 = \mathcal{O}(n^{1/\epsilon})$. Or $0 < \epsilon \leq n$, donc $|Q^{c+2}| = \mathcal{O}(c^{1/\epsilon}) = \mathcal{O}((c+2)^{1/\epsilon}) = \mathcal{O}(c(Q^{c+2})^{1/\epsilon})$. Le graphe Q^{c+2} est donc bien dans la restriction de TDS considérée.

On va montrer qu'il existe un dominant tropical de taille k dans P^c si et seulement si il existe un dominant tropical de taille $k + 1 + n^{1/\epsilon}$ dans Q^{c+2} . En effet, s'il existe un dominant tropical de taille k dans P^c , en considérant

les mêmes sommets dans Q^{c+2} et en ajoutant le sommet de couleur c_2 et un sommet sur trois de couleur c_1 dans le long chemin monochrome, on obtient bien un dominant tropical de taille $k + 1 + n^{1/\epsilon}$ dans Q^{c+2} . De même, si l'on considère un dominant tropical D de taille $k + 1 + n^{1/\epsilon}$ dans Q^{c+2} , il contiendra nécessairement $n^{1/\epsilon}$ sommets dans le chemin de couleur c_1 , le sommet de couleur c_2 , et donc au plus k sommets dans la partie correspondant à P^c . Soit ces k sommets forment un dominant sur P^c , auquel cas on constate qu'il est bien tropical sur P^c et on conclut, soit ils ne forment pas un dominant, auquel cas cela veut dire que D contenait le sommet de couleur c_1 adjacent à la partie correspondant à P^c . De ce fait, D possède au plus $k - 1$ sommets dans la partie correspondant à P^c . En ajoutant à ces sommets le sommet qui était relié au sommet de couleur c_1 dans D , on obtient bien un dominant tropical de taille au plus k . Ceci conclut la réduction et donc la preuve. \square

Théorème 3.2.8. *Il existe un algorithme qui, étant donné un graphe cycle C^c sommet-coloré à n sommets, avec n multiple de 3, renvoie une approximation du dominant tropical minimum pour C^c dans un ratio $\min\{\frac{1}{3}(r^{-1} + 2), 1 + 2r\}$, où $r = c/n$.*

Démonstration. Soit $C^c = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$. On définit $\sigma_0 = \{v_i | i \equiv 0 \pmod{3}\}$. De façon similaire, $\sigma_1 = \{v_i | i \equiv 1 \pmod{3}\}$, et $\sigma_2 = \{v_i | i \equiv 2 \pmod{3}\}$. L'algorithme est le suivant. On choisit $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que σ_i contienne le plus de couleurs parmi σ_1, σ_2 et σ_3 . Alors σ_i contient au moins $c/3$ couleurs distinctes. On choisit S n'importe quel sous-ensemble de V contenant exactement un représentant de chaque couleur non présente dans σ_i . L'ensemble $\sigma = \sigma_i \cup S$ est un dominant tropical.

Calculer σ se fait en un nombre polynomial d'opérations, et σ approxime TDS dans un ratio α , où

$$\alpha \leq \frac{|\sigma|}{\text{Opt}_{TDS}(G)} \leq \frac{n + 2c}{3} \frac{1}{\max\{n/3, c\}} \leq \min\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{n}{c} + 2\right), 1 + 2\frac{c}{n}\right\}.$$

\square

Corollaire 3.2.9. *TDS restreint aux cycles de taille multiple de 3 peut être approximé dans un facteur $5/3$.*

Démonstration. On pose $f(x) = \frac{1}{3}(x^{-1} + 2)$ et $g(x) = 1 + 2x$. Pour $x = 1/3$, on obtient que $f(x) = g(x) = 5/3$. Lorsque $x > 1/3$, $f(x) < 5/3$ car f est décroissante, et lorsque $x < 1/3$, $g(x) < 5/3$ car $g(x)$ est croissante. Ainsi, $\forall x, \min(f(x), g(x)) \leq 5/3$. En reportant ce résultat à la formule du théorème 3.2.8, on obtient le résultat. \square

On remarque que l'algorithme exposé dans la preuve du théorème 3.2.8 peut être utilisé pour des chemins ou des cycles sommet-colorés ayant des longueurs quelconques, pour obtenir des ensembles tropicaux qui soient presque des dominants (il suffira de leur rajouter au maximum deux sommets). Par conséquent, pour n suffisamment grand, le coefficient d'approximation est à peu près le même.

3.2.3 Solvabilité à paramètre fixé (algorithme FPT)

Nous allons maintenant montrer que pour les chemins, et les graphes d'intervalles, trouver le nombre de sommets dans un ensemble dominant tropical minimum peut être accompli en temps polynomial si l'on pose des restrictions sur le nombre de couleurs en fonction de la taille du graphe.

Théorème 3.2.10. *Le problème TDS restreint aux graphes chemins sommet-colorés peut être résolu par un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n2^c)$.*

Démonstration. Soit un graphe chemin $P^c = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$, avec les couleurs $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, \dots, c_{c-1}\}$. On introduit les valeurs $\text{OPT}_{\text{in}}(i, S)$, $\text{OPT}_{\text{cov}}(i, S)$, et $\text{OPT}_{\text{out}}(i, S)$, où $0 \leq i \leq n$ et $S \subseteq \mathcal{C}$, qui sont égales au cardinal du plus petit ensemble de sommets, s'il en existe un, contenant les couleurs S , qui domine v_0, \dots, v_{i-1} et, respectivement, qui contient v_i , qui contient v_{i-1} et pas v_i , et qui ne contient ni v_i ni v_{i-1} . Si un tel ensemble de sommets n'existe pas, on attribue la valeur ∞ .

Tout d'abord,

$$\text{OPT}_{k \in \{\text{in}, \text{cov}, \text{out}\}}(0, S) = \begin{cases} 1 & k = \text{in} \text{ et } S = \{c(v_0)\}, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, pour $i > 0$,

$$\text{OPT}_{\text{cov}}(i, S) = \text{OPT}_{\text{in}}(i-1, S)$$

$$\text{OPT}_{\text{out}}(i, S) = \text{OPT}_{\text{cov}}(i-1, S)$$

et, si $c(v_i) \in S$ alors

$$\text{OPT}_{\text{in}}(i, S) = \min_{k \in \{\text{in}, \text{cov}, \text{out}\}, S' \in \{S, S \setminus \{c(v_i)\}\}} \text{OPT}_k(i-1, S') + 1$$

et sinon

$$\text{OPT}_{\text{in}}(i, S) = \infty.$$

Ces formules permettent, par programmation dynamique, de calculer $\text{OPT}_{\text{in}}(n-1, \mathcal{C})$ et $\text{OPT}_{\text{cov}}(n-1, \mathcal{C})$ en $\mathcal{O}(n2^c)$ opérations. Or $\gamma^t(P^c) = \min(\text{OPT}_{\text{in}}(n-1, \mathcal{C}), \text{OPT}_{\text{cov}}(n-1, \mathcal{C}))$.

□

Nous allons montrer que l'algorithme ci-dessus peut être étendu aux graphes d'intervalles.

Soit G^c un graphe d'intervalles sommet-coloré. Considérons une représentation de G^c sous la forme des intervalles $I_i = [l_i, r_i]$ pour chaque sommet u_i avec $i = 1, \dots, n$. On considérera que les sommets sont classés par ordre non-décroissant selon r_i . On utilise la notation $[u_i, u_j]$ pour dénommer les sommets compris entre u_i et u_j dans l'ordre qu'on vient d'énoncer.

On dit qu'un ensemble U de sommet est *propre* si, pour tout $i, j \in U$, on n'a ni $I_i \subseteq I_j$ ni $I_j \subseteq I_i$. On définit un *i -préfixe* comme un ensemble propre U de sommets dont le plus grand sommet est u_i et qui domine $[u_1, u_i]$.

Soit $f: \mathcal{P}(\mathcal{C}) \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la fonction qui, à un sous-ensemble de couleurs $S \subseteq \mathcal{C}$ et un entier i , renvoie le nombre minimum d'éléments dans un i -préfixe qui contient un représentant de chaque couleur de S s'il en existe un, et ∞ sinon.

Lemme 3.2.11. *Soit U un i -préfixe. Alors il domine précisément les mêmes sommets que $[u_1, u_i]$. En particulier, U domine G si et seulement si $[u_1, u_i]$ domine G .*

Démonstration. On sépare les sommets de V en trois catégories : les sommets de $[u_1, u_i]$, les sommets de $[u_i, u_n]$ qui sont couverts par u_i , et les sommets de $[u_i, u_n]$ qui ne sont pas couverts par u_i . Les sommets de $[u_1, u_i]$ sont évidemment couverts par l'ensemble $[u_1, u_i]$ lui-même, et U couvre $[u_1, u_i]$ par la définition d'un i -préfixe. Les sommets couverts par u_i sont couverts à la fois par $[u_1, u_i]$ et par U , car ces deux ensembles contiennent u_i . Soit u_j un sommet de $[u_i, n]$ qui n'est pas couvert par u_i . Comme u_j est plus grand que u_i , $r_j \geq r_i$. Donc, comme u_j n'est pas couvert par u_i , on a $l_j > r_i \geq r_k \forall k \in [1, i]$. Donc aucun des sommets de $[u_i, u_n]$ qui ne sont pas couverts par u_i ne peut être couvert par $[u_1, u_i]$. Comme $U \subseteq [u_1, u_i]$, ils ne sont pas non plus couverts par U . Les sommets couverts par $[u_1, u_n]$ et par U sont donc bien exactement les mêmes. \square

Lemme 3.2.12. *Pour tout graphe d'intervalles G^c , on a*

$$\gamma^t = \min\{f(S, i) + |\mathcal{C} \setminus S| \mid S \subseteq \mathcal{C}; u_i \in V; [u_1, u_i] \text{ domine } G^c\}.$$

Démonstration. Pour tout entier i et tout ensemble de couleur S considérés, la fonction $f(S, i)$ donne la taille minimum d'un ensemble de sommets U qui contient un représentant de chaque couleur de S et qui, d'après le lemme 3.2.11, domine G^c . En ajoutant à U un sommet de chaque couleur de $\mathcal{C} \setminus S$, on obtient un ensemble dominant tropical (non nécessairement propre) de taille $f(S, i) + |\mathcal{C} \setminus S|$. Ainsi, chaque expression $f(S, i) + |\mathcal{C} \setminus S|$ du côté

droit de notre équation correspond à la taille d'un dominant tropical, donc γ^t est bien inférieur ou égal au minimum d'entre elles.

Pour l'inégalité opposée, soit U un dominant tropical minimum de G^c . On construit un ensemble U' de la façon suivante : on commence avec $U' = U$, puis tant qu'il existe un sommet u_j tel que $U' \setminus \{u_j\}$ soit toujours un dominant, on met à jour U' comme valant $U' \setminus \{u_j\}$. Soit u_i le plus grand sommet de U' , et S l'ensemble des couleurs ayant un représentant dans U' . Par construction, U' est un i -préfixe. Comme U est tropical, $|U| \geq |U'| + |\mathcal{C} \setminus S| \geq f(S, i) + |\mathcal{C} \setminus S|$. Comme S et i vérifient bien les conditions de notre formule, $\gamma^t = |U| \geq \min\{f(S, i) + |\mathcal{C} \setminus S| \mid S \subseteq \mathcal{C}; u_i \in V; [u_1, u_i] \text{ domine } G^c\}$.

On a bien démontré les deux inégalités, ce qui permet d'affirmer l'égalité. \square

Lemme 3.2.13. *Soit G^c un graphe d'intervalles sommet-coloré, et soit U un i -préfixe de G^c . Soit $U' = U \setminus \{u_i\}$, et soit u_j le plus grand sommet de U' . Alors U' est un j -préfixe.*

Démonstration. Comme U' est un sous-ensemble de U qui est propre, U' est bien propre. Vérifions que U' couvre bien tous les sommets de $[u_1, u_j]$. Par contradiction, soit u_k un sommet dans $[u_1, u_j]$ qui n'est pas couvert par U' . Le sommet u_k est aussi dans $[u_1, u_i]$, donc il est couvert par un sommet de U . Si u_k est couvert par un sommet v de U autre que u_i , il est couvert par v dans U' . Donc le sommet de U qui couvre u_k est u_i . Comme $u_k \in [u_1, u_j]$, $r_k \leq r_j \leq r_i$. Comme u_j ne couvre pas u_k , cela implique que $r_k < l_j$. Comme U est propre et que $r_j \leq r_i$, on a $l_j \leq l_i$. Donc $r_k < l_i$, ce qui contredit l'hypothèse que i couvre u_k . Ainsi, U' est propre, couvre $[u_1, u_j]$, et son plus grand sommet est u_j . L'ensemble U' est bien un j -préfixe. \square

On donne maintenant la relation de récurrence sur la fonction f qui permet l'algorithme de programmation dynamique.

Lemme 3.2.14. *Soit G^c un graphe d'intervalles. Alors, la fonction f satisfait les équations suivantes :*

$$\begin{aligned} - f(\{c(i)\}, i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ domine } [1, i], \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \\ - f(S, i) &= 1 + \min\{f(S', j) \mid S' \cup \{c(i)\} = S; j < i; I_i \not\subseteq I_j; I_j \not\subseteq I_i; [u_1, u_j] \cup \{u_i\} \text{ domine } [u_1, u_i]\} \text{ s'il existe au moins un couple } (S', j) \\ &\text{ qui satisfait les conditions, et } \infty \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Démonstration. La première formule est une conséquence directe des définitions de f et d'un i -préfixe.

Pour les besoins de la preuve de la seconde formule, on note $g(S, i)$ l'expression $1 + \min\{f(S', j) \mid S' \cup \{c(i)\} = S \wedge j < i \wedge I_i \not\subseteq I_j \wedge I_j \not\subseteq I_i \wedge [1, j] \cup \{i\} \text{ domine } [1, i]\}$.

Par la définition de $f(S, i)$, on sait que si $f(S, i) \neq \infty$, il existe un i -préfixe U contenant exactement les couleurs de S tel que $|U| = f(S, i)$. On considère l'ensemble $U' = U \setminus \{i\}$, et on dénote j le plus grand élément de U' . D'après le lemme 3.2.13, U' est un j -préfixe. Soit S' l'ensemble des couleurs de U' . On a $f(S, i) = |U| = |U'| + 1 \geq 1 + f(S', j)$, avec S' et j qui respectent les conditions de $g(S, i)$. Donc $f(S, i) \geq g(S, i)$.

Soient S^* un ensemble de couleurs et j^* un entier qui vérifient les conditions de $g(x)$ et tels que $g(x) = 1 + f(S^*, j^*)$, s'il en existe. Soit U^* un j^* -préfixe tel que $|U^*| = f(S^*, j^*)$. On considère l'ensemble de sommets $U = (U^* \cup \{i\})$. D'après le lemme 3.2.11, on sait que U^* couvre les mêmes sommets que $[1, j]$, donc U couvre bien les mêmes sommets que $[1, j] \cup \{i\}$. Ceci combiné aux conditions sur S' et j permet d'affirmer que U est bien un i -préfixe qui possède un représentant de chaque couleur dans S . Or $|U| = f(S^*, j^*) + 1 = g(S, i)$, par construction. Donc $f(S, i) \leq g(S, i)$.

En combinant les deux inégalités précédentes, on démontre ainsi l'égalité $f(S, i) = g(S, i)$ dans le cas où il existe au moins un ensemble de couleurs S' et un entier j qui vérifient les conditions de $g(S, i)$.

De plus, supposons que $g(S, i) = \infty$, mais que $f(S, i) \neq \infty$. Alors, on pourrait appliquer la première inégalité, qui nous donnerait que $f(S, i) \geq \infty$, ce qui est une contradiction. De même, supposons que $f(S, i) = \infty$, mais que $g(S, i) \neq \infty$. Les conditions pour appliquer la seconde inégalité serait rassemblées, et donc on aurait $g(S, i) \geq \infty$, ce qui n'est pas possible. Ainsi, l'égalité reste valable en toute circonstances. \square

Théorème 3.2.15. *Étant donné un graphe d'intervalles G^c et une représentation de ce graphe d'intervalles, on peut calculer en $\mathcal{O}(2^c n^2)$ étapes la taille $\gamma^t(G^c)$ d'un dominant tropical minimum pour G^c .*

Démonstration. En utilisant les formules prouvées dans le lemme 3.2.14, on peut par programmation dynamique calculer $f(S, i)$ pour tout ensemble de couleurs et tout entier i en temps $\mathcal{O}(2^c n^2)$. On peut ensuite déterminer en temps $\mathcal{O}(n)$ le plus petit entier i tel que $[1, i]$ couvre tout le graphe. Pour finir, on utilise la formule démontrée dans le lemme 3.2.12 pour déterminer γ^t en temps $\mathcal{O}(2^c n)$ en fonction des $f(S, i)$ qu'on a calculé. La complexité de l'algorithme complet est donc bien $\mathcal{O}(2^c n^2)$. \square

Ainsi, pour $c = \mathcal{O}(\log n)$, on peut résoudre TDS sur les graphes d'intervalle en temps polynomial.

3.2.4 Bornes supérieures

Proposition 3.2.16. *Pour tout graphe G^c , $\gamma^t \leq \gamma + c - 1$. De plus, il existe des graphes pour lesquels cette borne est atteinte.*

Démonstration. La borne supérieure découle du fait que prendre un dominant minimum dans G^c et ajouter un sommet de chaque couleur qui n'a pas de représentant dans le dominant permet d'obtenir un dominant tropical. Pour obtenir un cas où cette borne est atteinte, considérons un cycle de longueur $3 \times \gamma$, avec $\gamma \in \mathbb{N}$, avec tous les sommets colorés avec la même couleur. Ajoutons $c - 1$ sommets tous reliés à un même sommet u du cycle et à aucun autre sommet, chacun avec une couleur unique. Dans ce cas, le dominant tropical minimum est l'ensemble contenant tous les sommets à couleur unique, ainsi que tout sommet dont la distance à u est un multiple de 3. Ce dominant tropical minimum atteint la borne. \square

Proposition 3.2.17. *Soit G^c un graphe tel que $\delta(G^c) > n - \sqrt{n} + 1$. Alors $\gamma^t \leq c + 1$.*

Démonstration. Comme $\delta(G^c) > n - \sqrt{n} + 1$, alors le complément \bar{G}^c de G^c satisfait $\Delta(\bar{G}^c) \leq \sqrt{n} - 1$. De ce fait, le diamètre de \bar{G}^c est d'au moins 3. Donc d'après un théorème de [HHS98], le nombre de domination γ de G^c est au plus de 2. Le résultat sur γ^t découle de la proposition 3.2.16. \square

3.3 Autres ensembles tropicaux

D'autres recherches d'ensembles classiques de théorie des graphes deviennent des problèmes NP-complet lorsqu'on ajoute comme condition que les ensembles en question soient tropicaux. Par exemple, introduisons le problème suivant :

COUVERTURE PAR SOMMETS TROPICALE MINIMUM :

Entrée : Un graphe sommet-coloré G^c .

Question : La taille du plus petit ensemble de sommets qui constitue une couverture par sommets tropicale de G^c .

Lemme 3.3.1. *Il est possible de fournir une 2-approximation de COUVERTURE PAR SOMMETS TROPICALE MINIMUM restreint aux graphes chemins en temps linéaire.*

Démonstration. Soit P^c un graphe chemin sommet-coloré $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$. Il est possible d'exhiber en temps linéaire un ensemble quelconque U de sommets de P^c qui soit arc-en-ciel, c'est-à-dire qui contienne exactement un représentant pour chacune des couleurs de P^c . On note de plus que sur le chemin $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$, l'ensemble $U' = \{u_1, u_3, u_5, \dots\}$ des sommets d'indice impair est une couverture par sommets de taille minimum. Considérons maintenant l'ensemble $U \cup U'$, et notons τ^c la taille minimum d'une couverture par sommets tropicale sur P^c . Toute couverture par sommets tropicale de P^c contient au moins un sommet de chaque couleur présente dans P^c , donc $|U| \leq \tau^c$. De même, une couverture par sommets tropicale de P^c est a fortiori une couverture par sommets de P^c , donc $|U'| \leq \tau^c$. En combinant les deux dernières inégalités, on déduit $|U \cup U'| \leq 2\tau^c$. On a donc calculé $U \cup U'$ en temps linéaire, et il s'agit bien d'une 2-approximation de notre problème. \square

Théorème 3.3.2. COUVERTURE PAR SOMMETS TROPICALE MINIMUM *restreint aux graphes chemins est un problème APX-complet.*

Démonstration. La preuve de ce théorème est très proche de la preuve du théorème 3.2.6.

Tout d'abord, notre problème est bien dans la classe APX d'après le lemme 3.3.1. Nous allons maintenant réduire le problème COUVERTURE PAR SOMMETS restreint aux graphes cubiques vers notre problème. Soit $G = (V, E)$ une instance de COUVERTURE PAR SOMMETS cubique, u_1, \dots, u_n une énumération de V , et e_1, \dots, e_m une énumération de E . On construit un chemin P^c , coloré avec les couleurs $\{\text{noire}, E_1, E_2, \dots, E_m, U_0, U_1, U_2, \dots, U_n\}$, de la façon suivante. À l'une des extrémités du chemin se trouve un sommet de couleur noire, qu'on notera sommet initial, relié à un autre sommet de couleur noire, lui-même relié à un sommet de couleur U_0 . Ce sommet U_0 est lui-même relié à un sous-chemin comportant $6n$ sommets. On va détailler les couleurs de ces sommets en considérant ces $6n$ sommets comme n groupes successifs de 6 sommets, que nous appellerons dans la suite blocs. Les couleurs du i -ième bloc sont liées au sommet u_i de la façon suivante. Soit e_j, e_k et e_l les arêtes adjacentes au sommet u_i . Alors, au sein du i -ième bloc, le premier sommet sera de couleur E_j , le deuxième sommet de couleur noire, le troisième sommet de couleur E_k , le quatrième sommet de couleur noire, le cinquième sommet de couleur E_l , et le dernier sommet de couleur U_i . La figure 3.5 illustre la réduction pour une clique de taille 3.

Le chemin P^c s'obtient bien en un nombre polynomial d'étapes, et possède $n + m + 2$ couleurs ainsi que $6n + 3$ sommets. Nous allons montrer qu'il existe une couverture par sommets de taille t pour G si et seulement s'il existe une couverture par sommets de taille $t + 3n + 2$ pour P^c .

Soit σ une couverture de taille t pour G . Considérons σ' l'ensemble de sommets de P^c qui contient le sommet initial, tous les sommets de couleur U_i , et, pour chaque bloc i , les deux sommets de couleur noire si u_i n'appartient pas à σ ou les trois sommets de couleur E_j , E_k et E_l si u_i appartient à σ . On vérifie aisément que σ' est bien une couverture par sommets. De plus, σ' contient par définition un représentant de la couleur noire et de chacune des couleurs U_i . Pour toute couleur E_j , comme σ est une couverture par sommets de G , σ contient un sommet u_i adjacent à l'arête e_j , donc σ' contient un sommet de couleur E_j dans le i -ième bloc de P^c . Donc σ' est bien une couverture par sommets tropicale de P^c . De plus, par construction, σ' contient bien $t + 3n + 2$ sommets.

Soit σ' une couverture tropicale sur P^c de taille $t + 3n + 2$. On définit σ de la façon suivante : pour $1 \leq i \leq n$, u_i appartient à σ si et seulement si σ' contient au moins 4 sommets du bloc i de P^c . Vérifions la taille de σ . On note que σ' contient nécessairement soit le sommet initial, soit son voisin (pour couvrir la première arête), ainsi que tous les sommets de couleur U_i (car leur couleur n'est présente sur aucun autre sommet et que σ' est tropicale). En plus de cela, on remarque qu'au sein de chaque bloc, en plus du sommet de couleur U_i , il faut qu'il y ait au moins deux sommets du bloc présents dans σ' pour obtenir une couverture par sommets. Étant donné que σ' contient nécessairement ces $3n + 2$ sommets, σ contient donc bien au maximum t sommets. Montrons que σ est bien une couverture par sommets. Soit e_j une arête de G . Comme σ' est tropicale, pour chaque couleur E_j , σ' doit contenir un sommet de couleur E_j , issu du, disons, i -ème bloc. Or dans ce cas, σ' ne peut pas couvrir toutes les autres arêtes du i -ème bloc avec seulement le sommet de couleur U_i et un unique autre sommet. De ce fait, σ doit contenir u_i . Or, comme le i -ème bloc de P^c contenait un sommet de couleur E_j , u_i est adjacent à l'arête e_j dans G . L'ensemble σ est donc bien une couverture par sommets de G .

On dénote par $\tau(G)$ la taille d'une couverture par sommets minimum de G , et par $\tau^c(P^c)$ la taille d'une couverture par sommets tropicale minimum de P^c . On note que par les résultats précédents, $\tau^c(P^c) = \tau(G) + 3n + 2$. On note aussi que $\tau(G) \geq n/2 \geq 2$. Considérons que l'on ait, pour un $\alpha > 0$, un algorithme fournissant une couverture par sommets tropicale σ' de P^c , de taille $(1 + \alpha)\tau^c(P^c)$. On en déduit, par le procédé décrit ci-dessus, une

couverture par sommets σ de G de taille

$$\begin{aligned}
|\sigma| &= |\sigma'| - 3n - 2 \\
&= (1 + \alpha)\tau^c(P^c) - 3n - 2 \\
&= (1 + \alpha)(\tau(G) + 3n + 2) - 3n - 2 \\
&= \tau(G) + \alpha(\tau(G) + 3n + 2) \\
&\leq \tau(G) + \alpha(\tau(G) + 3(2\tau(G)) + \tau(G)) \\
&\leq \tau(G) + \alpha(8\tau(G)) \\
&\leq (1 + 8\alpha)\tau(G).
\end{aligned}$$

Ainsi, un algorithme polynomial fournissant une $(1 + \alpha)$ -approximation d'une couverture par sommets tropicale minimum sur un chemin permet d'obtenir un algorithme polynomial fournissant une $(1 + 8\alpha)$ approximation d'une couverture par sommets minimum sur un graphe cubique, ce qui est un problème APX-complet. Notre problème est donc bien APX-complet lui-même. \square

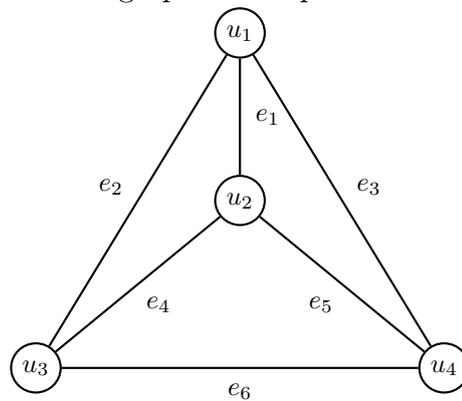
Cependant, COUVERTURE PAR SOMMETS TROPICALE peut être résolu dans les chemins lorsque l'on restreint le nombre de couleurs en fonction de la taille du chemin.

Théorème 3.3.3. COUVERTURE PAR SOMMETS TROPICALE *restreint aux chemins* peut être résolu par un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n2^c)$, où n et c sont respectivement le nombre de sommets et le nombre de couleurs du graphe donné en entrée.

Démonstration. Soit $P^c = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ un chemin sommet-coloré avec les couleurs \mathcal{C} . En vue d'un algorithme de programmation dynamique, on introduit pour tout sommet v_i de P^c et pour tout ensemble de couleurs $S \subseteq \mathcal{C}$ la valeur $f(i, S)$ définie comme suit. La valeur $f(i, S)$ est la taille de la plus petite couverture par sommet du graphe induit par v_0, \dots, v_i qui contienne u_i et un représentant de chacune des couleurs de S si une telle couverture existe, et ∞ sinon. On observe que $f(0, S)$ vaut 1 si $S = \{c(u_0)\}$ et ∞ sinon. De plus, on observe que la formule $f(i, S) = \min_{j \in \{i-1, i-2\}, S' \in \{S, S \setminus c(u_i)\}} c(j, S')$ permet de calculer par programmation dynamique, pour tout i et tout S , la valeur $f(i, S)$, en temps $\mathcal{O}(n2^c)$. Or la taille d'une couverture par sommets tropical de P^c vaut $\min_{j \in \{n, n-1\}, S' \subseteq \mathcal{C}} c(j, S') + |\mathcal{C} \setminus S'|$, et calculer ce minimum peut s'effectuer en $\mathcal{O}(2^c)$. \square

Pour les trois propriétés d'ensembles de sommets précédemment étudiées, l'existence d'un ensemble tropical vérifiant la propriété était garantie par le fait que l'ensemble de tous les sommets du graphe vérifie la propriété. Les

Le graphe de l'instance de COUVERTURE PAR SOMMETS restreint aux graphes cubiques.



Le graphe de COUVERTURE PAR SOMMETS TROPICALE restreint aux graphes d'intervalles obtenu par la réduction.

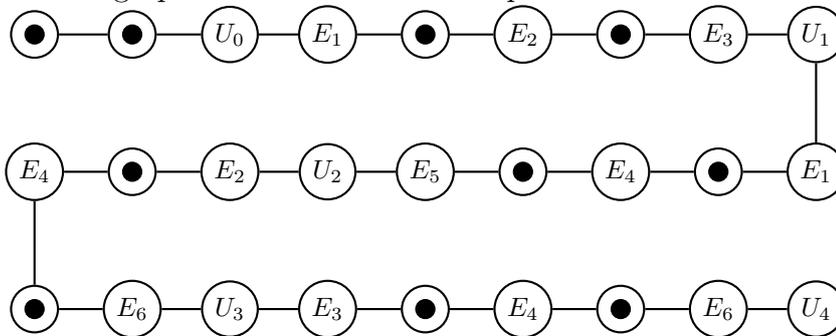


FIGURE 3.5 – Illustration de la réduction de la preuve du théorème 3.3.2.

problèmes envisagés concernaient donc la détermination du nombre minimum de sommets d'un ensemble tropical possédant la propriété. Nous allons maintenant considérer le cas des indépendants tropicaux. Comme l'ensemble de tous les sommets du graphe n'est pas un indépendant, l'existence même d'un indépendant tropical n'est plus garantie.

INDÉPENDANT TROPICAL :

Entrée : Un graphe sommet-coloré G^c .

Question : Existe-t-il un ensemble indépendant tropical dans G^c .

Théorème 3.3.4. *Le problème INDÉPENDANT TROPICAL, même restreint en entrée aux graphes chemins, est NP-complet.*

Démonstration. Vérifier qu'un ensemble de sommets est bien un indépendant tropical peut être effectué en temps polynomial, notre problème est donc bien dans NP. On va réduire le problème SAT-3-OCC vers INDÉPENDANT TROPICAL. On remarque qu'on peut se limiter aux instances de SAT-3-OCC où chaque variable apparaît au plus deux fois sous forme positive et une fois sous forme négative sans perte de généralité.

Soit une formule clausale de SAT-3-OCC avec les restrictions indiquées ci-dessus, avec n variables v_1, v_2, \dots, v_n , et k clauses. On va définir le graphe chemin P^c sommet-coloré avec les couleurs $\{\text{noire}, C_1, C_2, \dots, C_k\}$, de la façon suivante. À l'une des extrémités de P^c se trouve un sommet de couleur noire, qu'on notera sommet initial, qui est relié à un autre sommet de couleur noire, lui-même relié à un sous-chemin de longueur $4n$. On considérera ces $4n$ sommets comme n groupes successifs de 4 sommets, qu'on appellera blocs. Les sommets du i -ième bloc seront colorés en fonction de la variable v_i , de la façon suivante. Soient c_j une clause contenant la variable v_i sous forme positive, c_j la clause contenant la variable v_i sous forme négative, et c_k l'autre clause contenant v_i sous forme positive si cette clause existe. Alors le premier sommet du i -ième bloc sera de couleur C_j , le deuxième sommet de couleur C_k , le troisième sommet de couleur C_l si c_l existe et noire sinon, et le dernier sommet de couleur noire. Sans perte de généralité, chaque variable apparaît au moins une fois sous forme négative et une fois sous forme positive. P^c s'obtient bien en un nombre polynomial d'opérations.

S'il existe une assignation des variables satisfaisant la formule SAT-3-OCC, on construit à partir de celle-ci l'ensemble de sommets I de P^c suivant. L'ensemble I contient le sommet initial, et pour chaque bloc i , il contient le premier et troisième sommet du bloc si v_i est assignée à vraie, et le deuxième

sommet sinon. On vérifie facilement que l'ensemble I est bien un indépendant : en effet, il ne contient pas construction jamais deux sommets consécutifs. De plus, I contient le sommet initial, et pour chaque clause c_i , il existe une variable v_j dont l'assignation rend la clause vraie, ce qui implique que I contienne un sommet de la couleur C_i dans le j -ième bloc de P^c . Ainsi, I est bien un indépendant tropical de P^c .

Inversement, considérons qu'il existe un indépendant tropical I sur P^c , et montrons qu'on peut en déduire une assignation qui satisfait toutes les clauses c_i . Chaque bloc i donne l'assignation de la variable v_i de la façon suivante : si le premier ou le troisième sommet du bloc est dans I , alors la variable v_i est assignée à vraie, sinon elle est assignée à faux. Vérifions que la clause c_i , pour tout i , est bien satisfaite. On sait que I contient au moins un sommet u de couleur C_i . Considérons que u est dans le j -ième bloc. Si u est le premier ou le troisième sommet du j -ième bloc, alors la variable v_j est assignée à vraie, et c_i est donc satisfaite. Si u est le deuxième sommet du j -ième bloc, alors comme I est un indépendant, il ne contient ni le premier ni le troisième sommet du bloc. Ainsi, v_j est assignée à faux, et c_i est donc satisfaite. Ceci conclut la réduction et donc la preuve.

□

Chapitre 4

Jeux de défense

4.1 Introduction

Dans cette section, nous allons étudier une extension d'un jeu mathématique introduit par Marios Mavronikolas, Vicky Papadopoulou, Anna Philippou et Paul Spirakis dans [MPPS08, MPPS05]. Le jeu en question est inspiré par les travaux présentés par Tom Markham et Charlie Payne dans [MP01] pour une architecture de pare-feu distribué. Ce jeu se joue sur un réseau, représenté par un graphe, entre n joueurs. L'un de ces joueurs, le défenseur, représente le pare-feu décrit dans [MP01] et va choisir une arête du graphe dont il va protéger les extrémités, et les autres joueurs, qu'on appellera attaquants, choisissent un sommet qu'il voudront attaquer. Tous ces joueurs effectuent leur choix simultanément et indépendamment. Une fois que les joueurs ont déterminé leur choix, le profit du défenseur est le nombre d'attaquants qu'il a interceptés. C'est-à-dire qu'on considère l'arête que le défenseur a choisi et le nombre d'attaquants ayant choisi une des extrémités de cette arête donne le profit du défenseur. L'attaquant gagne 1 s'il n'est pas intercepté, et 0 sinon. Il n'existe pas d'équilibre de Nash pur pour tout jeu de ce type pourvu que le jeu n'ait pas lieu sur un graphe constitué d'une seule arête [MPPS08, MPPS05]. Cependant, il existe des équilibres de Nash mixte, et il existe un algorithme pour calculer l'un d'entre eux en temps polynomial [MMP⁺06]. Celui-ci réduit notre problème à un jeu à deux joueurs à somme nulle, pour ensuite appliquer les résultats de [vN28] pour traduire le problème sous la forme d'un programme linéaire. Cependant, tous les équilibres de Nash ne sont pas également intéressants, c'est pour cela qu'on introduit la notion de prix de la défense. Pour un ensemble d'équilibres de Nash, le prix de la défense correspond au ratio inverse d'attaquants interceptés par le défenseur dans le plus défavorable de ces équilibres. On introduit

alors plusieurs classes d'équilibres de Nash, en cherchant à garantir une borne inférieure sur le prix de la défense pour les équilibres de Nash appartenant à ces catégories. La première catégorie, introduite dans [MPPS08], est celle des équilibres de Nash couplants. Il s'agit d'équilibres de Nash uniformes, où tous les attaquants partagent la même stratégie, où l'ensemble des sommets (potentiellement) attaqués forme un indépendant, et où chaque sommet (potentiellement) attaqué n'est défendu (potentiellement) que par une seule arête.

Une variante de ce problème est introduite dans [GMP⁺06] : au lieu de ne pouvoir défendre qu'une arête, le défenseur se trouve capable de défendre k arêtes, où k est un paramètre du problème. Dans ce modèle, un jeu admet un équilibre de Nash si et seulement si le graphe associé possède une couverture par arêtes de taille k . Les travaux présentés dans [GMP⁺06] fournissent aussi une caractérisation des équilibres de Nash mixte en terme de théorie des graphes, et introduisent les équilibres de Nash k -couplants. Ils démontrent que ceux-ci sont une extension des équilibres de Nash couplants, et fournissent une réduction permettant, pour tout graphe G , de construire un équilibre de Nash k -couplants pour le modèle k -tuple pour G à partir d'un équilibre de Nash matchant pour le modèle original, et inversement. De plus, le profit du défenseur dans le modèle k -tuple sera k fois celui dans le modèle original. Comme cette réduction s'effectue en temps $\mathcal{O}(k \times n)$, les algorithmes polynomiaux pour traiter le cas original peuvent être adaptés simplement pour traiter le cas k -tuple.

Les résultats de cette section sont aussi présentés dans l'article [dCOM⁺], et issus d'une collaboration avec les auteurs de l'article en question.

4.2 Modèle général

Soit $G = (V, E)$ un graphe, \mathcal{C} une famille de sous-graphes induits de G couvrant tous les sommets de G (i.e. $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} V(C) = V(G)$), δ et α deux nombres entiers positifs. Le *jeu de défense* $\Pi_{\delta, \alpha}(G, \mathcal{C})$ est alors défini ainsi :

- L'ensemble des joueurs \mathcal{N} est l'union des ensembles $\mathcal{N}_a = \{a_1, \dots, a_\alpha\}$ et $\mathcal{N}_d = \{d_1, \dots, d_\delta\}$. Les joueurs de l'ensemble \mathcal{N}_a sont appelés des *attaquants*, et les joueurs de l'ensemble \mathcal{N}_d des *défenseurs*.
- L'ensemble des stratégies possibles pour tout attaquant a_i correspond à V , l'ensemble des stratégies possibles pour tout défenseur d_j correspond à \mathcal{C} .
- Pour un profil $s = (s_{d_1}, \dots, s_{d_\delta}, s_{a_1}, \dots, s_{a_\alpha})$, la fonction de profit de l'at-

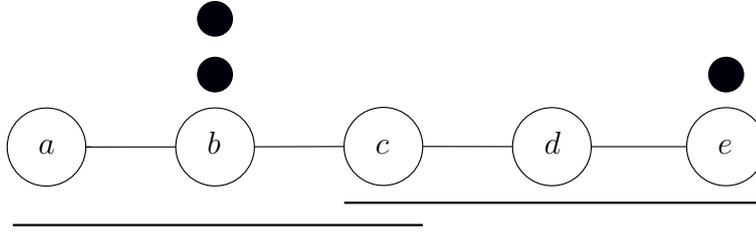


FIGURE 4.1 – Un profil $s = (abc, cde, b, b, e)$ pour le jeu $\Pi_{2,3}(G, \mathcal{C})$, où G est le graphe représenté sur la figure et \mathcal{C} tous les chemins de longueur 3. Chaque ligne représente la stratégie d'un défenseur, et chaque sommet la stratégie d'un attaquant. Remarquez que bien que b soit la stratégie choisie par deux attaquants, le profit du défenseur dont la stratégie est abc n'est quand même que de 1.

l'attaquant a_i est $U_{a_i}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s_{a_i} \notin s_{d_j} \forall j \text{ tel que } 1 \leq j \leq \delta, \\ 0 & \text{si } s_{a_i} \in s_{d_j} \text{ pour un } j \leq j \leq \delta, \end{cases}$, i.e., l'attaquant a un profit de 1 si le sommet de sa stratégie n'est couvert par aucune stratégie choisie par un défenseur et 0 sinon, et la fonction d'utilité du défenseur d_j est la fonction $U_{d_j}(s) = |\{v : v \in s_{d_j} \text{ and } \exists i, 1 \leq i \leq \alpha, s_{a_i} = v\}|$, i.e., le défenseur a un profit égal au nombre de sommets que sa stratégie couvre, et qui sont la stratégie choisie par au moins un attaquant.

La figure 4.1 fournit un exemple.

Lemme 4.2.1. *Si un profil s d'un jeu de défense est un équilibre de Nash, alors tous les défenseurs ont le même profit dans s , d'au moins un. De plus, dans s tous les attaquants ont un profit de zéro.*

Démonstration. Soit un profil s avec deux défenseurs d_i et d_j tels que le profit de d_i soit supérieur au profit de d_j . Si d_j changeait sa stratégie en la stratégie de d_i , son profit serait plus grand, et s n'est donc pas un équilibre de Nash. Le même raisonnement s'applique aux attaquants. De plus, un défenseur qui aurait un profit de zéro pourrait toujours changer de stratégie pour couvrir au moins un attaquant. De ce fait, le profit des défenseurs doit être d'au moins un. Ceci implique qu'au moins un attaquant doit avoir un profit de zéro. Donc tous les attaquants doivent avoir un profit de zéro. \square

Inspiré par le lemme 4.2.1, nous proposons la définition suivante.

Définition 4.2.2. *Un k -équilibre de Nash d'un jeu de défense est un équilibre de Nash tel que chaque défenseur a un profit de k .*

Théorème 4.2.3. *Un jeu $\Pi_{\delta,\alpha}(G, \mathcal{C})$ admet un équilibre de Nash si et seulement si il existe deux ensembles $D \subseteq \mathcal{C}$ et $A \subseteq V$ tels que :*

- (1) $|D| \leq \delta$ et $|A| \leq \alpha$,
- (2) $\forall v \in V, \exists C \in D$ tel que $v \in C$,
- (3) $\forall C \in D, |A \cap V(C)| = \max_{C' \in \mathcal{C}} (|A \cap V(C')|)$.

Démonstration. Soit s un équilibre de Nash pour $\Pi_{\delta,\alpha}(G, \mathcal{C})$.

Soient $A(s)$ l'ensemble des sommets correspondant aux stratégies d'au moins un attaquant dans s , et $D(s)$ l'ensemble des éléments de \mathcal{C} correspondant aux stratégies d'au moins un défenseur dans s . On remarquera tout d'abord que la condition (1) est satisfaite pour $A = A(s)$ et $D = D(s)$ par définition du jeu. Pour prouver la condition (2) par contradiction, supposons qu'il existe un sommet $u \in V$ tel que $\forall C \in D(s), u \notin C$. Il existe au moins un défenseur, et son profit est de plus que 0 d'après le lemme 4.2.1. Ainsi, il y a un attaquant, disons a_i , dont le profit est de 0. L'attaquant a_i augmenterait son profit s'il changeait sa stratégie pour u . Ceci contredit de la même manière le fait que s soit un équilibre de Nash. De la même façon, si la condition (3) n'était pas satisfaite, alors il y aurait un défenseur d_j et un sous-graphe $C \in \mathcal{C}$ tel que $|A(s) \cap V(s_{d_j})| < |A(s) \cap V(C)|$. Ainsi, le défenseur d_j a intérêt à changer sa stratégie pour C , ce qui contredit encore le fait que s soit un équilibre de Nash.

Supposons maintenant qu'il existe deux ensembles D et A satisfaisant les conditions (1), (2) et (3). De par la condition (1), on peut construire un profil s tel que chaque élément de A (respectivement D) soit la stratégie d'au moins un attaquant (respectivement défenseur). Par la condition (2), peu importe la stratégie choisie par un attaquant, il aura toujours un profit de 0. Les attaquants n'ont donc rien à gagner à changer leur stratégie. Par la condition (3), si un défenseur change sa stratégie, il n'augmentera pas son profit. Ainsi s est bien un équilibre de Nash. \square

Dans le cas où le jeu n'a qu'un seul défenseur, on peut en déduire :

Corollaire 4.2.4. $\Pi_{1,\alpha}(G, \mathcal{C})$ a un équilibre de Nash si et seulement si \mathcal{C} contient un sous-graphe couvrant de G .

Lemme 4.2.5. *Si un jeu $\Pi_{\delta,\alpha}(G, \mathcal{C})$ admet un équilibre de Nash, alors pour tout $x, y \geq 0$, le jeu $\Pi_{\delta+x,\alpha+y}(G, \mathcal{C})$ admet un équilibre de Nash lui aussi.*

Démonstration. Soit s un équilibre de Nash pour $\Pi_{\delta,\alpha}(G, \mathcal{C})$. On définit alors le profil s' pour $\Pi_{\delta+x,\alpha+y}(G, \mathcal{C})$ ainsi : les δ premiers défenseurs et les α premiers attaquants choisissent la même stratégie que dans le profil s , et les x derniers défenseurs (respectivement les y derniers attaquants) choisissent la même stratégie que le premier défenseur (respectivement attaquant). Les

nouveaux joueurs ne modifient donc pas les profits associés à chacune des stratégies possibles, aussi bien pour les attaquants que pour les défenseurs. De plus, ils ont le même profit que les joueurs déjà existant, ils ont donc bien le profit maximum parmi les stratégies qui leur sont offertes. \square

Proposition 4.2.6. *Si le jeu $\Pi_{\delta,\alpha}(G, \mathcal{C})$ admet un équilibre de Nash, alors le jeu $\Pi_{n,\alpha}(G, \mathcal{C})$ aussi.*

Démonstration. Si $\delta \leq n$, ceci est une conséquence directe de 4.2.5. Si $\delta > n$, alors soit s un équilibre de Nash pour $\Pi_{\delta,\alpha}(G, \mathcal{C})$. On va construire un équilibre de Nash s' pour $\Pi_{n,\alpha}(G, \mathcal{C})$ de la façon suivante. Les attaquants de s' ont les mêmes stratégies que les attaquants de s . On dénote $s_1, s_2, \dots, s_\alpha$ les stratégies des défenseurs dans s , et s'_1, s'_2, \dots, s'_n celles des défenseurs dans s' . On détermine les stratégies des défenseurs de s' itérativement, de la façon suivante. À la première itération, on choisit $s'_1 = s_1$. À la fin de la i -ième itération, soit V_i l'ensemble des sommets couverts par l'union des stratégies s'_1, s'_2, \dots, s'_i . Si $V_i \neq V$, alors on attribue à s'_{i+1} la stratégie s_j où j est le plus petit entier tel que s_j contiennent un sommet qui n'est pas présent dans V_i . Sinon, alors $s'_{i+1} = s_1$. Comme s est un équilibre de Nash, d'après la preuve du théorème 4.2.3, les stratégies des défenseurs de s couvrent bien tous les sommets de G . De ce fait, pour tout i tel que $|V_i| < n$, on a bien $|V_i| < |V_{i+1}|$. Comme la taille de V_1 était d'au moins 1, et qu'à chacune des $n - 1$ étapes suivantes du procédé d'attribution des stratégies, soit la taille de V_i a augmenté, soit elle valait déjà n , on en déduit que l'ensemble des stratégies des défenseurs de s' couvre bien l'ensemble des sommets du graphe. Les attaquants de s' sont donc bien en position d'équilibre. De plus, les profits des défenseurs dans s' sont identiques à ceux dans s . Les défenseurs sont donc aussi bien en position d'équilibre. On a bien construit s' comme un équilibre de Nash pour $\Pi_{n,\alpha}(G, \mathcal{C})$. \square

4.3 Modèle des arêtes

Dans cette section, on étudie un cas particulier de notre modèle général où l'ensemble \mathcal{C} est l'ensemble des arêtes $E(G)$. Comme \mathcal{C} est fixé, au sein de cette section, on simplifie nos notations, et on dénote notre jeu $\Pi_{\delta,\alpha}(G)$.

Observation 4.3.1. *Comme $\mathcal{C} = E$ doit par définition de \mathcal{C} couvrir tous les sommets, le modèle étudié dans cette section n'est défini que pour les graphes sans sommets isolés. Tout graphe considéré dans cette section sera donc supposé sans sommets isolés.*

Théorème 4.3.2. *Considérons le jeu de défense $\Pi_{\delta,\alpha}(G)$. Si le nombre d'attaquants α est égal ou supérieur à n , alors il existe un équilibre de Nash pour $\Pi_{\delta,\alpha}(G)$ si et seulement si il existe une couverture par arêtes de taille inférieure ou égale à δ . Si le nombre d'attaquants α est strictement inférieur à n , alors il existe un équilibre de Nash pour $\Pi_{\delta,\alpha}(G)$ si et seulement si il existe deux ensembles $D \subseteq E(G)$ et $A \subseteq V(G)$ qui satisfont les conditions suivantes :*

- (i) $|D| \leq \delta$ and $|A| \leq \alpha$,
- (ii) D est une couverture par arêtes de G ,
- (iii) A est une couverture par sommets du graphe $G' = (V, D)$, et
- (iv) A est un ensemble indépendant dans G .

De plus, l'ensemble des sommet attaqués et l'ensemble des arêtes défendues dans un équilibre de Nash peuvent tenir le rôle des ensembles D et A , respectivement.

Démonstration. Dans le cas où le nombre d'attaquants est égal ou supérieur à n , s'il existe un équilibre de Nash, alors il existe une couverture par arêtes de taille au plus δ via le théorème 4.2.3. Réciproquement, s'il existe une couverture par arêtes C de taille au plus δ , alors tout profil ayant au moins un attaquant sur chaque sommet de G et au moins un défenseur sur chaque arête de C est un équilibre de Nash.

Considérons maintenant le cas où $\alpha < n$. Soit s un équilibre de Nash. Appelons D l'ensemble des arêtes de G défendues et A l'ensemble des sommets de G attaqués, dans s . On montre que les conditions (i), (ii), (iii) et (iv) sont satisfaites. Les conditions (i) et (ii) découlent directement du théorème 4.2.3. Comme G ne contient pas de sommets isolés, tout sommet v dans $V(G)$ est incident à au moins une arête e . De ce fait, $|A \cap e| \geq 1$. Par la condition (3) du théorème 4.2.3, on a donc $\forall e' \in D, |A \cap e'| \geq 1$, ce qui implique que A soit une couverture par sommets de (V, D) . Pour conclure, comme le nombre d'attaquants est strictement inférieur à n , il existe un sommet v tel que $v \notin A$. Mais, comme D est une couverture par arêtes, il existe $e \in D$ tel que $v \in e$. De ce fait, $|A \cap e| = 1$. Si A n'était pas un ensemble indépendant, alors la condition (2) du théorème 4.2.3 ne serait pas respectée, ce qui est une contradiction. Toutes les conditions sont bien satisfaites.

À l'inverse, soit A et D qui satisfont les conditions (i), (ii), (iii) et (iv). Par la condition (iii), $\forall e \in D, |A \cap e| \geq 1$. Par (iv) $\forall e' \in E, |A \cap V(e')| \leq 1$. De ce fait, les trois conditions du théorème 4.2.3 sont bien satisfaites, ce qui permet de conclure. \square

En d'autres termes, le théorème 4.3.2 peut s'exprimer de la manière suivante : Si $\alpha < n$, pour que $\Pi_{\delta,\alpha}(G)$ possède un équilibre de Nash, il faut et il

suffit qu'il existe une couverture par arêtes D de G de cardinalité inférieure ou égale à δ , et un ensemble A de sommets indépendant de G de cardinalité inférieure ou égale à α qui forme une couverture par sommets du sous-graphe de G induit par les arêtes de D (noté $G(D)$). Pour obtenir un profil d'équilibre à partir de tels ensembles, il suffit que chaque élément de D corresponde à la stratégie d'un défenseur et que chaque élément de A corresponde à la stratégie d'un attaquant. Ceci est possible grâce à la contrainte de cardinalité sur D et A . Réciproquement, si l'on a un profil d'équilibre de Nash, alors l'ensemble D des stratégies des défenseurs et l'ensemble A des stratégies des attaquants vérifient les conditions ci-dessus.

Avant de pousser plus loin l'étude des situations dans lesquelles un équilibre de Nash existe dans un jeu de défense sur les arêtes, on énonce les propositions suivantes.

Théorème 4.3.3 (Théorème de Gallai[Gal59]). *Soit G un graphe à $n \geq 2$ sommets, sans sommet isolé et M la taille maximum d'un couplage de G . Une couverture par arêtes de G est de taille supérieure ou égale à $n - M$ et si elle est de taille $n - M$ alors elle contient toutes les arêtes d'un couplage maximum de G .*

Démonstration. Soit F une couverture par arêtes de G . Soit F' un couplage maximum de $G(F) = (V, F)$ et M' le cardinal de F' . Puisque (V, F) est un sous-graphe de G , on a $M' \leq M$. Pour chaque sommet v non incident à une arête de F' il existe une arête de F incidente à v (puisque F est une couverture par arêtes) et chaque telle arête a son autre extrémité couverte par une arête de F' (puisque F' est un couplage maximum de (V, F)). Par conséquent la cardinalité de F est supérieure ou égale à $M' + (n - 2M') = n - M' \geq n - M$, et elle n'est égale à $n - M$ que si F' était un couplage de taille M . \square

On remarque qu'à partir d'un couplage maximum, il est aussi facile de construire une couverture par arêtes de taille $n - M$, voir ci-dessous.

Proposition 4.3.4. *Soit G un graphe à $n \geq 2$ sommets, sans sommet isolé et M la taille maximum d'un couplage de G . La taille minimum d'une couverture par arêtes de G est $n - M$.*

Démonstration. Soit $C \subseteq E$ les arêtes d'un couplage de G de cardinalité M . Soit F le sous-ensemble d'arêtes obtenu à partir de C en rajoutant pour chaque sommet v de G qui n'est pas incident à une arête de C une arête de G incidente à v (une telle arête existe puisque v n'est pas un sommet isolé). Par définition l'ensemble F ainsi obtenu est une couverture par arêtes de G et il est de cardinalité égale à $M + (n - 2M) = n - M$. Le théorème 4.3.3

permet de conclure qu'il n'existe pas de couverture par arête de plus petite taille. \square

Proposition 4.3.5. *Une couverture par sommets d'un graphe G est de cardinal supérieur ou égal à M (où M est la taille maximum d'un couplage de G).*

Démonstration. Une couverture par sommets doit posséder au moins une extrémité de chaque arête d'un couplage, et un sommet appartient à au plus une arête du couplage. \square

Proposition 4.3.6. *Un ensemble indépendant de sommets d'un graphe G ne peut contenir plus de $n - M$ sommets (où M est la taille maximum d'un couplage de G).*

Démonstration. Un indépendant possède au plus une extrémité de chaque arête d'un couplage. \square

Corollaire 4.3.7. *Soit $\Pi_{\delta,\alpha}(G)$ un jeu de défense avec un équilibre de Nash. Si $\delta = n - M$, alors $\alpha \geq M$, où M est la taille d'un couplage maximum.*

Démonstration. Le résultat découle du fait que $n - M$ est la taille minimum d'une couverture par arête (théorème 4.3.4) et qu'une telle couverture contient un couplage de taille M (théorème de Gallai, 4.3.3). Par le théorème 4.3.2, l'ensemble des sommets attaqués doit être une couverture par sommets de ce couplage et doit donc être de cardinal $\geq M$ par la proposition 4.3.5. \square

Remarque : si $\delta > n - M$, on peut avoir moins de M attaquants.

Comme on ne peut avoir d'ensemble indépendant de taille strictement supérieure à $n - M$ (proposition 4.3.6), on peut supposer sans perte de généralité que l'on a toujours $\alpha \leq n - M$. De plus, d'après la proposition 4.2.6, on peut aussi sans perte de généralité supposer que l'on a toujours $\delta \leq n$. Ceci nous incite à proposer les définitions suivantes :

Définition 4.3.8. *Soit G un graphe, on définit les notations suivantes :*

- $\Pi_{\alpha}(G)$ dénote le jeu $\Pi_{\delta,\alpha}(G)$ où $\delta = n$,
- $\Pi_{\max}(G)$ dénote le jeu $\Pi_{\alpha}(G)$ où $\alpha = n - M$,
- $\Pi_{\min}(G)$ dénote le jeu $\Pi_{\delta,\alpha}(G)$ où $\alpha = M$ et $\delta = n - M$.

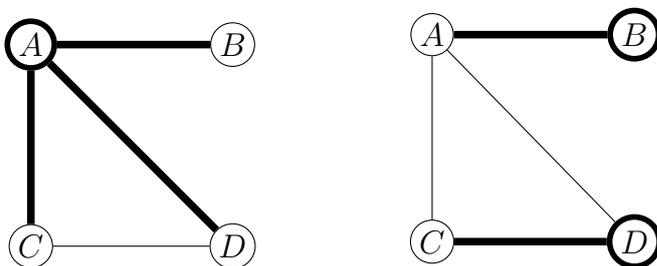


FIGURE 4.2 – Sur le graphe G représenté ci dessus, les jeux $\Pi_{3,1}(G)$ et $\Pi_{2,2}(G)$ possèdent chacun un équilibre de Nash (représenté respectivement à gauche et à droite, où les sommets attaqués et les arêtes défendues sont représentés en gras). Cependant, le jeu $\Pi_{2,1}(G)$ n'admet pas d'équilibre de Nash.

On remarque au passage que si $\Pi_{\delta+x,\alpha}(G)$ et $\Pi_{\delta,\alpha+y}(G)$ admettent tout deux un équilibre de Nash, on ne peut en déduire que $\Pi_{\delta,\alpha}(G)$ aussi. Autrement dit que l'on ne peut minimiser à la fois le nombre d'attaquants et de défenseurs, comme illustré par la figure 4.2.

Nous allons maintenant nous intéresser à la complexité de trouver un équilibre de Nash.

Théorème 4.3.9. *Soit G un graphe sans sommet isolé. $\Pi_{\alpha}(G)$ admet un équilibre de Nash si et seulement si il existe un indépendant maximal dans G de taille inférieure ou égale à α .*

Démonstration. Montrons tout d'abord que s'il existe A un indépendant maximal dans G de taille inférieure ou égale à α , alors $\Pi_{\alpha}(G)$ admet un équilibre de Nash. Par le théorème 4.2.6, on sait que si $\Pi_{m,\alpha}(G)$ admet un équilibre de Nash, alors $\Pi_{\alpha}(G)$ aussi. On va donc montrer que $\Pi_{m,\alpha}(G)$ admet un équilibre de Nash. On définit D comme l'ensemble $\{uv \in E : u \in A\}$. On va prouver que A et D satisfont les conditions du théorème 4.3.2 pour $\Pi_{m,\alpha}(G)$. Les conditions (i) et (iv) sont manifestement satisfaites. On remarque que A est une couverture par sommets de D par construction. La condition (iii) du théorème 4.3.2 est donc satisfaite. On prouve que D est une couverture par sommets. Supposons par contradiction de la condition (ii) qu'il existe un sommet t tel que $\forall e \in D, t \notin e$. Ceci implique que pour tout u dans V , on ait $ut \notin D$. Donc, t ne peut appartenir à A (car G n'a pas de sommets isolés), et $A \cup \{t\}$ est un ensemble indépendant, ce qui contredit la maximalité de A .

S'il existe un équilibre de Nash pour $\Pi_{\alpha}(G)$, le théorème 4.3.2 garantit un ensemble A indépendant de taille au plus α . De plus, cet ensemble A est une couverture par sommets d'une couverture par arête D du graphe. Donc tout

sommet $u \in V \setminus A$ est couvert par une arête e de D , dont l'autre extrémité appartient à A . Ainsi, A est bien un indépendant maximal. \square

Corollaire 4.3.10. *Soit G un graphe. On peut calculer un équilibre de Nash pour $\Pi_{max}(G)$ en temps polynomial.*

Démonstration. Le résultat découle du fait qu'il est possible de calculer un ensemble indépendant maximal A et l'ensemble correspondant D en temps polynomial comme dans la preuve du théorème 4.3.9. \square

Corollaire 4.3.11. *Le problème qui prend en entrée un graphe G et un entier $\alpha > 1$, et qui détermine si le jeu $\Pi_\alpha(G)$ admet un équilibre de Nash est NP-complet.*

Démonstration. Vérifier si un profil est un équilibre de Nash s'effectue bien en temps polynomial, il suffit de tester pour chaque joueur si l'une des n (pour un attaquant) ou m (pour un défenseur) stratégies offre un meilleur profit. Donc le problème est bien dans NP. Par le théorème 4.3.9, notre problème est équivalent à ENSEMBLE DOMINANT INDÉPENDANT. \square

Ce résultat de NP-complétude s'étend à toutes les catégories de graphes pour lesquelles trouver un dominant indépendant de taille minimum est NP-complet, comme les graphes bipartis et les graphes de comparabilité [CP84], et les graphes adjoints (en anglais *line graphs*) [YG80]. Par le théorème 4.3.9, on obtient un algorithme qui détermine si un jeu $\Pi_\alpha(G)$ admet un équilibre de Nash en temps polynomial lorsque G appartient à une classe de graphes pour laquelle on connaît un algorithme qui donne la taille d'un dominant indépendant de taille minimum, comme par exemple les graphes triangulés (donc notamment les graphes d'intervalles et les arbres) [Far82], ou les graphes de co-comparabilité [BK87]. Pour plus de détails, voir le livre [HHS98].

Proposition 4.3.12. *Soit F une couverture par arêtes de G qui est minimum. Alors le graphe $G(F) = (V, F)$ est tel que chaque composante connexe est soit une arête, soit un graphe étoilé. De plus, $G(F)$ contient M composantes connexes, où M est la taille d'un couplage maximum dans G .*

Démonstration. Considérons F une couverture par arêtes de G qui est minimum. Si $G(F)$ contenait deux sommets adjacents x et y de degré supérieur ou égal à 2 alors $F \setminus \{xy\}$ serait encore une couverture par arêtes ; une contradiction à notre hypothèse sur F . Par conséquent chaque composante connexe de $G(F)$ contient au plus un sommet de degré supérieur ou égal à 2, c'est donc soit une arête, soit un graphe étoilé.

Soit k le nombre de composantes connexes. D'après le théorème 4.3.3, $G(F)$ contient toutes les arêtes d'un couplage maximum de G . Or, deux arêtes

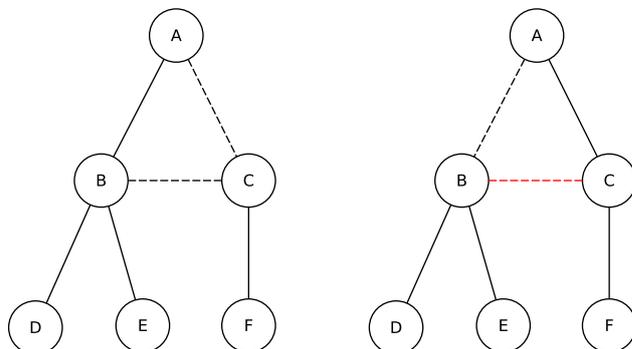


FIGURE 4.3 – Les lignes pleines représentent une couverture par arêtes minimum dans les deux cas. Sur le graphe de gauche, la couverture est équilibrée par l'existence du stable $\{B, F\}$. Dans le graphe de droite, la couverture n'est pas équilibrée, puisque les centres des deux graphes étoilés qui forment la couverture sont adjacents.

de ce couplage maximum ne peuvent appartenir à un même graphe étoilé. Donc, chacune des arêtes du couplage est dans une composante connexe de $G(F)$ différente. Ainsi, $k \geq M$. De plus, chaque composante connexe contient au moins une arête. En prenant une arête dans chaque composante connexe, on obtient un couplage de taille k , donc $k \leq M$. Le nombre de composantes connexes est donc exactement M . \square

Dans le reste de cette section, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 4.3.13. Soit F une couverture par arêtes minimum d'un graphe G . On dit que F est équilibrée s'il existe un ensemble indépendant contenant

- pour toute arête isolée de $G(F)$, une des extrémités de e ,
- pour tout graphe étoilé de $G(F)$, le centre du graphe étoilé.

On remarquera que les couvertures par arêtes d'un graphe donné G ne sont pas nécessairement toutes équilibrées ou toutes non-équilibrées (voir la figure 4.3 pour un exemple).

En vue de démontrer le théorème 4.3.15, on prouve le lemme suivant.

Lemme 4.3.14. Un jeu $\Pi_{\min}(G)$ a un équilibre de Nash si et seulement si G admet une couverture par arêtes minimum équilibrée.

Démonstration. On rappelle que dans $\Pi_{\min}(G)$, α vaut M et δ vaut $n - M$. Soit s un équilibre de Nash pour un jeu $\Pi_{\min}(G)$. Alors, considérons l'ensemble D des arêtes défendues et l'ensemble A des sommets attaqués dans

s. Par le théorème 4.3.2, D est une couverture par arêtes du graphe de taille $n - M$, donc minimum par la proposition 4.3.4. Par le théorème 4.3.2, A est bien un indépendant qui couvre une extrémité de chaque arête de D . Par la proposition 4.3.12, $G(D) = (V, D)$ est constituée de M composantes connexes, et au moins un sommet de chacune de ces composantes connexe doit appartenir à A . Or, A contient exactement M sommets. Chaque composante connexe de $G(D)$ doit donc contenir exactement un sommet de A . Comme A forme une couverture par sommets de $G(D)$, on en déduit que pour toute composante connexe de $G(D)$ qui est un graphe étoilé, le centre de la composante appartient à A .

Soit maintenant D une couverture par arêtes minimum et A un indépendant qui garantit qu'elle est équilibrée. Par la proposition 4.3.4, $|D| = n - M$, et par le théorème 4.3.3, comme A n'a qu'un sommet par composante connexe de $G(D)$, $|A| \leq M$. Ainsi, A et D vérifient bien les quatre conditions nécessaires pour appliquer le théorème 4.3.2, et conclure qu'il existe un équilibre de Nash pour $\Pi_{\min}(G)$. \square

Théorème 4.3.15. *Soit G un graphe tel que chaque couverture par sommets minimum soit équilibrée. Décider si le jeu $\Pi_{\min}(G)$ admet un équilibre de Nash peut être effectué en $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$ étapes.*

Démonstration. On va réduire notre problème, en $\mathcal{O}(m)$ étapes, à une instance de 2-SAT. On calcule un couplage maximum, ce qui peut s'effectuer en $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$ en suivant l'algorithme de [MV80]. On construit une couverture par sommets minimum D à partir de ce couplage maximum, comme dans la preuve du théorème 4.3.3. On définit l'instance ϕ de 2-SAT dont l'ensemble des variables est V de la façon suivante :

- Pour chaque arête uv de G , on ajoute $(\bar{u} \vee \bar{v})$ à ϕ .
- Pour chaque arête isolée uv de $G(D)$, on ajoute $(u \vee v)$ à ϕ .
- Pour chaque graphe étoilé de $G(D)$, avec un centre u , on ajoute (u) à ϕ .

Considérons que D soit équilibrée. On peut alors facilement vérifier qu'en assignant la variable u à vrai si le sommet u est dans A , et à faux sinon, on satisfait ϕ . Inversement, s'il existe une assignation vérifiant ϕ , l'ensemble des sommets dont les variables correspondantes sont assignées à vrai est bien un indépendant (par la première série de clauses), qui contient une extrémité de chacune des arêtes isolées dans D (par la deuxième série de clauses) et qui contient le centre de chaque graphe étoilé de $G(D)$ (par la dernière série de clauses.)

La formule 2-SAT obtenue a n variables, et au plus $2m$ clauses. Elle peut donc être résolue en $\mathcal{O}(m)$ opérations. \square

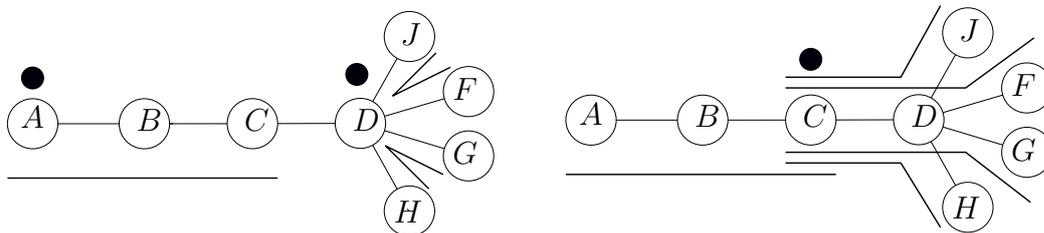


FIGURE 4.4 – Le jeu de défense $\Pi_{3,2}^2(G)$ (3 défenseurs et 2 attaquants) avec G représenté à gauche admet un équilibre de Nash : les attaquants prennent pour cible les sommets A et D , les défenseurs ABC , JDF et GDH . Le jeu de défense $\Pi_{5,1}^2(G)$ (5 défenseurs et 1 attaquant) sur le même graphe G , représenté à droite, admet un équilibre de Nash : l'attaquant cible le sommet C , les défenseurs les sommets ABC , CDJ , CDF , CDG et CDH . Cependant, il n'y a pas d'équilibre de Nash pour $\Pi_{3,1}^2(G)$ (3 défenseurs et 1 attaquant).

Notons que si G est un cycle impair, alors il satisfait les conditions du théorème 4.3.15.

4.4 Modèle des chemins

Dans cette section, nous allons considérer une généralisation du modèle précédent dans laquelle les défenseurs choisissent des chemins plutôt que des arêtes. Plus précisément, nous allons étudier le cas où les stratégies ouvertes aux défenseurs sont tous les chemins de longueur inférieure ou égale à p . On rappelle qu'un chemin de longueur p contient p arêtes et couvre donc $p + 1$ sommets. Comme dans le cas du modèle par arêtes, il n'est pas possible de minimiser les deux types de joueurs à la fois, comme illustré par la figure 4.4. De ce fait, nous allons nous concentrer sur le nombre d'attaquants.

On introduit donc la définition suivante :

Définition 4.4.1. *On dénote par $\mathcal{P}_p(G)$ l'ensemble des chemins de taille inférieure ou égale à p dans G , et on dénote $\Pi_\alpha^p(G)$ le jeu $\Pi_{\delta,\alpha}(G, \mathcal{P}_p)$ où $\delta = n$.*

On rappelle qu'un k -équilibre de Nash, comme défini dans la définition 4.2.2, est un équilibre de Nash où le profit des défenseurs vaut k . On va s'intéresser plus particulièrement aux 1-équilibres de Nash. En effet, il paraît naturel que moins de sommets ne soient attaqués dans un 1-équilibre de Nash que dans un autre type d'équilibre de Nash, et de ce fait que si $\Pi_\alpha^p(G)$

admette un équilibre de Nash quelconque, il admette aussi un 1-équilibre de Nash. Nous prouverons par la suite que c'est le cas sous certaines conditions.

Mais commençons par définir les ensembles p -indépendants maximaux, et montrer qu'ils sont étroitement liés aux 1-équilibres de Nash.

Définition 4.4.2. *Un ensemble p -indépendant maximal S est un ensemble maximal de sommets tel que la longueur du plus court chemin entre n'importe quelle paire de sommets de S est strictement supérieure à p .*

On remarque que la définition d'un ensemble 1-indépendant correspond à la définition d'un ensemble indépendant.

Théorème 4.4.3. *Pour tout graphe G , le jeu $\Pi_\alpha^p(G)$ admet un 1-équilibre de Nash si et seulement si il existe un ensemble p -indépendant maximal de taille inférieure ou égale à α dans G .*

Démonstration. Soit s un 1-équilibre de Nash pour le jeu $\Pi_\alpha^p(G)$. On note A l'ensemble des sommets attaqués. Soient u et v deux sommets de A . Il n'est pas possible que u et v soient à une distance inférieure ou égale à p . En effet, si c'était le cas, il serait possible pour un défenseur de couvrir u et v et d'obtenir un profit d'au moins 2, ce qui contredit le fait que s soit un 1-équilibre de Nash. L'ensemble A est donc un ensemble p -indépendant. Soit w un sommet du graphe G qui n'est ciblé par aucun attaquant. Comme s est un équilibre de Nash, par le théorème 4.2.3, il y a un défenseur d dans s qui couvre w . Le défenseur d doit aussi couvrir un sommet attaqué $w' \in A$, car d a un profit de 1. Les sommets w et w' appartiennent à un chemin de longueur au plus p et sont donc à distance au plus p l'un de l'autre. Ainsi, si l'on ajoute w à A , le résultat n'est plus un p -indépendant. Donc A est bien un ensemble p -indépendant maximal. Comme il n'y a que α attaquants, le cardinal de A est bien au plus α .

Réciproquement, soit A est un ensemble p -indépendant maximal donc le cardinal est au plus α . On considère un profil s défini de la façon suivante. Les attaquants ciblent les sommets de A et chaque sommet de A est ciblé par au moins un attaquant. Les défenseurs de s protègent tous un sommet de A , et chaque sommet de G est protégé par au moins un défenseur. Ceci est possible car A est maximal, et qu'on a n défenseurs, donc pour tout sommet v de G on peut attribuer un défenseur à un chemin couvrant v et un sommet de A . Le profil s est bien un 1-équilibre de Nash : comme A est un p -indépendant, il n'existe aucun chemin de taille au plus p couvrant deux sommets attaqués, et donc aucun défenseur ne peut améliorer son profit ; par construction, tous les sommets sont couverts par au moins un défenseur, les attaquants ne peuvent donc améliorer leur profit. \square

Cependant, nous allons montrer que, pour p fixé, la recherche d'un p -indépendant maximal de taille α dans un graphe quelconque est un problème NP-complet. Pour cela, on va séparer notre problème en deux sous-problèmes, selon la parité de p .

p -INDÉPENDANT MAXIMAL :

Entrée : Un graphe G et un entier $k > 1$.

Question : Existe-t-il un p -indépendant maximal de taille k dans G ?

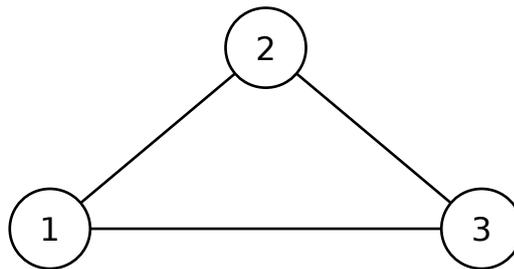
Lemme 4.4.4. *Pour tout p pair, le problème p -INDÉPENDANT MAXIMAL est NP-complet.*

Démonstration. On va effectuer une réduction depuis ENSEMBLE DOMINANT INDÉPENDANT. On pose que $p = 2r$. On remarque tout d'abord que tous les p -indépendants contiennent tous les sommets isolés d'un graphe, on peut donc se restreindre sans perte de généralité aux graphes sans sommet isolé. On définit G' de la façon suivante. Pour chaque sommet v dans G , on crée un sommet v' dans G' , qu'on appelle le *représentant* de v dans G . Pour chaque arête uv dans G , on crée $p - 1$ nouveaux sommets qui forment un chemin entre les représentants de u et de v dans G' , et on appelle les chaînes ainsi obtenues des *chaînes liantes*. On appelle *sommets centraux* les sommets à mi-chemin de ces chaînes, c'est-à-dire ceux qui sont à distance r des deux sommets représentants qui forment les extrémités de la chaîne. On relie entre eux tous les sommets centraux, de façon à ce qu'ils forment une clique. La figure 4.5 illustre la réduction pour $p = 4$. Le graphe G' se calcule bien en un nombre polynomial d'étapes élémentaires.

On va tout d'abord prouver qu'un ensemble p -indépendant de G' de taille supérieure à 1 ne contient que des sommets représentants. Soit u un sommet de G' qui n'est pas un représentant d'un sommet de G , et v un sommet quelconque de G' . Le sommet u appartient à une chaîne liante, et est donc à une distance au plus $r - 1$ d'un sommet central c_1 . Le sommet v est soit à l'extrémité, soit à l'intérieur d'une chaîne liante, et est donc à une distance au plus r d'un sommet central c_2 . Les sommets centraux c_1 et c_2 sont soit égaux, soit adjacents. Les sommets u et v sont donc au plus à une distance $d(u, c_1) + d(c_1, c_2) + d(c_2, v) \leq r - 1 + 1 + r = p$ l'un de l'autre. Ainsi, tout ensemble p -indépendant de G' contenant u ne peut contenir aucun autre sommet.

Soit S un indépendant maximal de taille $\alpha > 1$ dans G . Considérons l'ensemble S' des représentants des sommets de S dans G' . L'ensemble S' est un p -indépendant de taille α dans G' : en effet, si deux sommets de G ne sont pas adjacents, alors il est facile de vérifier que leurs représentants dans G'

L'application de la réduction sur le graphe suivant :



fournit le graphe :

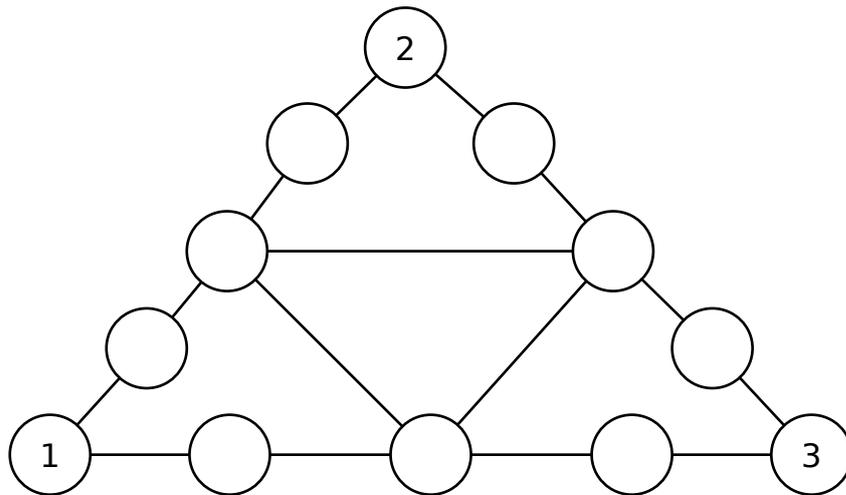


FIGURE 4.5 – Réduction de la recherche d'un indépendant vers celle d'un 4-indépendant, comme décrite dans le lemme 4.4.4.

sont à distance $p + 1$. Montrons qu'il est maximal. Soit u' un sommet de G' n'appartenant pas à S . Le sommet u' est soit un représentant d'un sommet de G n'appartenant pas à S , soit un sommet qui n'est pas un représentant. Si u' n'est pas un représentant, alors $S' \cup \{u'\}$ n'est pas un p -indépendant, car cet ensemble est de taille supérieure à 1 et contient un sommet non représentant, ce qui est impossible d'après le paragraphe précédent. Si u' est le représentant du sommet u de G qui n'appartient pas à S , alors u est adjacent à un sommet v de G appartenant à S . Le sommet u' est donc à distance p du représentant v' de v dans G' . Donc $S' \cup \{u'\}$ n'est pas un p -indépendant. Ainsi, S' est bien un p -indépendant maximal de taille α .

Soit S' un p -indépendant maximal de G' de taille $\alpha > 1$. Par ce qui précède, on sait que S' ne contient que des représentants de sommets de G . On considère donc S l'ensemble des sommets de G dont le représentant est dans S' . L'ensemble S est bien un indépendant, car si deux sommets de S étaient adjacents, leurs représentants seraient à distance p , or S' est un p -indépendant. S'il existait un sommet $u \in V \setminus S$ tel que $S \cup \{u\}$ soit un indépendant, alors si l'on nomme u' le représentant de u dans G' , $S' \cup \{u'\}$ serait un p -indépendant. Or S' est un p -indépendant maximal. Donc S est un indépendant maximal, de taille α .

□

Lemme 4.4.5. *Pour tout p impair, le problème p -INDÉPENDANT MAXIMAL est NP-complet.*

Démonstration. On va effectuer une réduction depuis ENSEMBLE DOMINANT INDÉPENDANT, proche de celle du lemme 4.4.4. On pose que $p = 2r + 1$. On remarque tout d'abord que tous les p -indépendants contiennent tous les sommets isolés d'un graphe, on peut donc se restreindre sans perte de généralité aux graphes sans sommet isolé. On définit G' de la façon suivante. Pour chaque sommet v dans G , on crée un sommet v' dans G' , qu'on appelle le *représentant* de v dans G . Pour chaque arête uv dans G , on crée $2r$ nouveaux sommets qui forment une chaîne entre les représentants de u et de v dans G' , et on appelle les chaînes ainsi obtenues des *chaînes liantes*. On ajoute un dernier sommet, qu'on appelle *sommet central*, et dans chaque chaîne liante, on relie la paire de sommets les plus éloignés des extrémités de la chaîne liante au sommet central. La figure 4.6 illustre la réduction pour $p = 5$. Le graphe G' se calcule bien en un nombre polynomial d'étapes.

On va montrer qu'un ensemble p -indépendant de G' de taille supérieure à 1 ne contient que des sommets représentants. Soit u un sommet de G' qui n'est pas un représentant d'un sommet de G , et v un sommet quelconque de G' . Soit le sommet u appartient à une chaîne liante, et est donc à une distance au plus r du sommet central, soit u est le sommet central lui-même.

Le sommet v est soit à l'extrémité, soit à l'intérieur d'une chaîne liante, soit est le sommet central lui-même et est donc à une distance au plus $r + 1$ d'un sommet central. Les sommets u et v sont donc au plus à une distance $d(u, c) + d(c, v) \leq r + r + 1 = p$ l'un de l'autre. Ainsi, tout ensemble p -indépendant de G' contenant u ne peut contenir aucun autre sommet.

Soit S un indépendant maximal de taille α dans G . Considérons l'ensemble S' des représentants des sommets de S dans G' . L'ensemble S' est un p -indépendant de taille α dans G' : en effet, si deux sommets de G ne sont pas adjacents, alors leurs représentants dans G' sont à distance $p + 1$. Montrons qu'il est maximal. Soit u' un sommet de G' n'appartenant pas à S . Le sommet u' est soit un représentant d'un sommet de G n'appartenant pas à S , soit un sommet qui n'est pas un représentant. Si u' n'est pas un représentant, alors par le paragraphe précédent $S' \cup \{u'\}$ n'est pas un p -indépendant, car cet ensemble est de taille supérieure à 1 et contient un sommet non représentant. Si u' est le représentant du sommet u de G qui n'appartient pas à S , alors u est adjacent à un sommet v de G appartenant à S . Le sommet u' est donc à distance p du représentant v' de v dans G' . Donc $S' \cup \{u'\}$ n'est pas un p -indépendant. Ainsi, S' est bien un p -indépendant maximal de taille α .

Soit S' un p -indépendant maximal de G' de taille $\alpha > 1$. On sait que S' ne contient que des représentants de sommets de G . On considère donc S l'ensemble des sommets de G dont le représentant est dans S' . L'ensemble S est bien un indépendant, car si deux sommets de S étaient adjacents, leurs représentants seraient à distance p , or S' est un p -indépendant. S'il existait un sommet $u \in V \setminus S$ tel que $S \cup \{u\}$ soit un indépendant, alors si l'on nomme u' le représentant de u dans G' , $S' \cup \{u'\}$ serait un p -indépendant. Or S' est un p -indépendant maximal. Donc S est un indépendant maximal, de taille α .

□

En combinant les lemmes 4.4.4 et 4.4.5, on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.4.6. *Pour tout p fixé, décider la présence d'un ensemble p -indépendant maximal de taille $\alpha > 1$ dans un graphe G est NP-complet.*

avec l'implication suivante :

Corollaire 4.4.7. *Le problème qui prend en entrée un graphe G et un entier $\alpha > 1$, et qui détermine si le jeu $\Pi_\alpha^p(G)$ admet un 1-équilibre de Nash est NP-complet.*

On va maintenant s'intéresser au cas où $p = 2$, et montrer que dans ce cas, si un jeu admet un équilibre de Nash, alors il admet un 1-équilibre de Nash.

Observation 4.4.8. $\Pi_\alpha^2(G)$ admet un 3-équilibre de Nash si et seulement si $\alpha \geq n$.

Démonstration. Dans un 3-équilibre de Nash, tous les défenseurs doivent couvrir trois sommets attaqués, donc tous les sommets couverts par un défenseur doivent être attaqués. Or par le théorème 4.2.3, tous les sommets du graphe doivent être couverts par un défenseur, donc tous les sommets doivent être attaqués. \square

En conséquence de l'observation 4.4.8, nous ne considérerons dans la suite plus que les 1- et 2-équilibres de Nash pour les jeux où les défenseurs protègent des chemins de taille au plus 2.

Théorème 4.4.9. Soient s_1 un 1-équilibre de Nash et s_2 un 2-équilibre de Nash dans un jeu $\Pi_n^2(G)$. Il y a plus de sommets attaqués dans s_2 que dans s_1 .

Démonstration. Soit V_1 (respectivement V_2) l'ensemble des sommets attaqués dans un 1-équilibre de Nash s_1 (respectivement 2-équilibre de Nash s_2). Soit u un sommet dans V_1 . Il doit y avoir au moins un défenseur d dans s_2 qui couvre u . Comme d couvre trois sommets, dont deux qui doivent être dans V_2 , il existe un sommet de V_2 à distance au plus 1 de u (possiblement u lui-même). Il existe donc une fonction f attribuant à tout sommet u de V_1 un sommet $f(u)$ dans V_2 tel que $d(u, f(u)) \leq 1$. Cette fonction f est nécessairement injective : si $f(u)$ et $f(v)$ sont égaux, alors u et v sont nécessairement à distance au plus 2 l'un de l'autre (ils sont tous deux à distance au plus 1 de $f(u)$), mais comme V_1 est un ensemble 2-indépendant, cela implique que u égale v . L'existence d'une fonction injective de V_1 vers V_2 montre que $|V_1| \leq |V_2|$, ce qui prouve le théorème. \square

Corollaire 4.4.10. Si $\Pi_\alpha^2(G)$ admet un 2-équilibre de Nash, alors $\Pi_\alpha^2(G)$ admet aussi un 1-équilibre de Nash

Démonstration. Soit s_2 un 2-équilibre de Nash pour $\Pi_\alpha^2(G)$. On note k_2 le nombre de sommets attaqués dans s_2 . Alors $k_2 \leq \alpha$. De plus, il existe un 2-équilibre de Nash s'_2 dans $\Pi_n^2(G)$ avec le même nombre de sommets attaqués (les $n - k_2$ nouveaux attaquants ciblent des sommets déjà attaqués). Comme il existe toujours un 2-indépendant maximal de taille au plus n dans un graphe à n sommets, il existe un 1-équilibre de Nash s_1 pour $\Pi_n^2(G)$ par le théorème 4.4.3. On note k_1 le nombre de sommets attaqués dans s_1 . Par le théorème 4.4.10, on sait que $k_1 \leq k_2 \leq \alpha$. On peut donc construire s'_1 un profil pour $\Pi_\alpha^2(G)$ où les défenseurs ont les mêmes stratégies que dans s_1 , et il y a au moins un attaquant sur chaque sommet attaqué dans s_1 , sans

qu'aucun sommet non attaqué dans s_1 ne soit attaqué dans s'_1 . Les profits et possibilités de profits de chaque joueur étant les mêmes dans s_1 et s'_1 , s_1 est bien un 1-équilibre de Nash dans $\Pi_\alpha^2(G)$. \square

On conclut :

Corollaire 4.4.11. *Le problème qui prend en entrée un graphe G et un entier $\alpha > 1$, et qui détermine si le jeu $\Pi_\alpha^2(G)$ admet un équilibre de Nash est NP-complet.*

Des preuves précédentes, on peut déduire le corollaire suivant :

Corollaire 4.4.12. *Décider s'il existe un équilibre de Nash pour le jeu $\Pi_\alpha(G)$ est NP-complet.*

Démonstration. Par le corollaire 4.4.10, tout jeu $\Pi_\alpha(G)$ qui admet un équilibre de Nash admet un 1-équilibre de Nash. Les théorèmes 4.4.3 puis 4.4.11 permettent de conclure. \square

Dorénavant, nous allons nous concentrer sur les arbres, et montrer que les ensembles 2-indépendants maximaux minimum peuvent y être calculés en temps polynomial. Et ainsi, montrer via les théorèmes 4.4.3 and 4.4.10 que pour tout arbre T , on peut calculer le plus petit α tel que le jeu $\Pi_\alpha(T)$ possède un équilibre de Nash.

Théorème 4.4.13. *Pour tout arbre T , il est possible de calculer un ensemble 2-indépendant maximal minimum en $\mathcal{O}(n)$ opérations.*

Nous allons prouver dans la suite ce théorème en fournissant un algorithme de programmation dynamique, et en montrant qu'il s'effectue bien en nombre polynomial d'opérations. Dans le cadre de cette preuve, et pour faciliter les démonstrations, on considérera que l'arbre T est arbitrairement enraciné en un sommet r . On rappelle que, étant donné un sommet u , on dénote par $T(u)$ le sous-arbre enraciné en u , par $p(u)$ le parent de u , et par $C(u)$ l'ensemble des enfants de u . De plus, nous introduisons pour chaque sommet u quatre ensembles $\mathcal{D}_i(u)$ et quatre différentes valeurs $\text{OPT}_i(u)$, pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, définies comme suit : (voir la figure 4.7 pour un exemple) :

- Soit $\mathcal{D}_0(u)$ l'ensemble de tous les ensembles 2-indépendants maximaux de T contenant u .
- Soit $\mathcal{D}_1(u)$ l'ensemble de tous les ensembles 2-indépendants maximaux de T contenant $p(u)$.
- Soit $\mathcal{D}_2(u)$ l'ensemble de tous les ensembles 2-indépendants maximaux de T contenant un sommet adjacent à $p(u)$ autre que u .

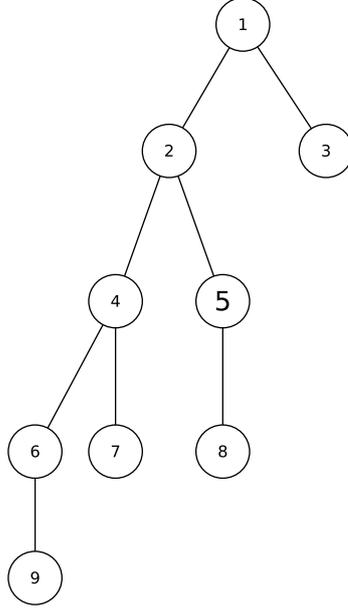


FIGURE 4.7 – Sur ce graphe, $\mathcal{D}_0(5) = \{\{5, 3, 6\}, \{5, 3, 7, 9\}\}$ et $\text{OPT}_0(5) = 1$; $\mathcal{D}_1(5) = \{\{2, 9\}\}$ et $\text{OPT}_1(5) = 0$; $\mathcal{D}_2(5) = \{\{1, 6, 8\}, \{1, 7, 8, 9\}, \{4, 3, 8\}\}$ et $\text{OPT}_2(5) = 1$; $\mathcal{D}_3(5) = \{\{3, 6, 8\}, \{3, 7, 8, 9\}\}$ et $\text{OPT}_3(5) = 1$.

— Soit $\mathcal{D}_3(u)$ l'ensemble de tous les ensembles 2-indépendants maximaux de T ne contenant ni $p(u)$ ni aucun sommet adjacent à $p(u)$.

On pose $\text{OPT}_i(u) = \min_{S \in \mathcal{D}_i(u)} |S \cap T(u)|$, pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

On remarque que pour certains sommets, certains de ces ensembles peuvent être vides. Par exemple, pour une feuille ℓ , l'ensemble $\mathcal{D}_3(\ell)$ est vide, parce que si un ensemble 2-indépendant n'inclut ni ℓ , ni le parent de ℓ , ni aucun sommet adjacent au parent de ℓ , alors cet ensemble 2-indépendant n'est pas maximal : on pourrait obtenir un ensemble 2-indépendant plus grand en lui ajoutant ℓ . De la même façon, pour la racine r de T , les ensembles $\mathcal{D}_1(r)$ et $\mathcal{D}_2(r)$ sont vides car r n'a pas de parent. Dans tous les cas de ce type, où $\mathcal{D}_i(u) = \emptyset$, on pose que $\text{OPT}_i(u) = \infty$, $i = 0, 1, 2, 3$. On notera aussi que $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 forment une partition de l'ensemble de tous les ensembles 2-indépendants maximaux.

Observation 4.4.14. *Si S' est un ensemble 2-indépendant qui n'est pas maximal, alors il existe toujours un ensemble 2-indépendant maximal S contenant S' dans T .*

Démonstration. Il est facile de trouver un ensemble 2-indépendant maximal S en ajoutant à S' tout sommet qui peut l'être sans perdre la propriété de 2-

indépendance, et en recommençant jusqu'à ce qu'il ne reste plus de sommets qui puisse être ajouté. \square

Dans les quatre prochains lemmes, nous allons établir des formules liant, pour tout sommet u n'étant pas une feuille, chaque valeur $\text{OPT}_i(u)$ aux valeurs $\text{OPT}_i(v)$ pour les descendants v de u . Pour cela, nous allons procéder à chaque fois de façon similaire. Tout d'abord, nous allons démontrer que n'importe quel ensemble S de $\mathcal{D}_i(u)$ est de taille supérieure ou égale à la taille donnée dans la formule, en comptant le nombre de sommets de S dans les arbres enracinés dans chacun des fils de u . Ensuite, nous allons construire un ensemble dans $\mathcal{D}_i(u)$ dont la taille sera égale à celle donnée par la formule, et donc minimum d'après le résultat précédent. La construction de cet ensemble se fera en considérant, pour chaque fils, ou parfois petit-fils, v de u , un élément de $\mathcal{D}_j(v)$ dont la restriction dans $T(v)$ est minimum (c'est-à-dire égale à $\text{OPT}_j(v)$). On considérera ensuite l'union S de ces restrictions, auquel on ajoutera éventuellement certains sommets, et en prouvant qu'on peut étendre le 2-indépendant obtenu en un 2-indépendant maximal appartenant bien à $\mathcal{D}_i(u)$. Il est important de s'assurer que le 2-indépendant qu'on étend soit construit pour empêcher les sommets rajoutés d'impliquer que le 2-indépendant maximal ne fasse pas partie de $\mathcal{D}_i(u)$.

Lemme 4.4.15. $\text{OPT}_0(u) = 1 + \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_1(v)$.

Démonstration. Tout d'abord, montrons que

$$\text{OPT}_0(u) \geq 1 + \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_1(v). \quad (4.1)$$

Soit S un ensemble 2-indépendant maximal contenant u . Pour chaque fils v de u , S est dans l'ensemble $\mathcal{D}_1(v)$. Ainsi, le nombre de sommets de S contenus dans le sous-arbre $T(v)$ doit être au moins $\text{OPT}_1(v)$. Remarquons que $S \cap T(u)$ contient aussi u . Ainsi, l'inégalité est vérifiée.

Ensuite, nous allons exhiber un ensemble maximal 2-indépendant S dans l'ensemble $\mathcal{D}_0(u)$ tel que

$$|S \cap T(u)| = 1 + \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_1(v). \quad (4.2)$$

Pour chaque fils v de u , par définition de OPT_1 , nous savons qu'il existe un ensemble maximal 2-indépendant S_v dans $\mathcal{D}_1(v)$ tel que $|S_v \cap T(v)| = \text{OPT}_1(v)$. Considérons l'ensemble S' qui contient u et, pour chaque fils v de u , les sommets du sous-arbre enraciné en v qui appartiennent à S_v , c'est-à-dire $S' = (\bigcup_{v \in C(u)} S_v \cap T(v)) \cup \{u\}$. Prouvons que S' est un ensemble 2-indépendant en montrant que pour toute paire de sommets w, w' appartenant

à S' , on a que w et w' sont à distance au moins 3 l'un de l'autre. En effet, soit w et w' font partie du même ensemble 2-indépendant, auquel cas la réponse est immédiate, soit ils sont dans deux sous-arbres issus de deux fils de u différents. Dans ce deuxième cas, il suffit d'observer qu'aucun enfant de u ne peut appartenir à S' . Ainsi, S' est bien un ensemble 2-indépendant. Par l'observation 4.4.14, il existe un 2-indépendant maximal S contenant S' . On remarque que $|S' \cap T(u)| = |u \cap T(u)| + \sum_{v \in C(u)} |S_v \cap T(v)| = 1 + \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_1(v)$, et que $S \in \mathcal{D}_0(u)$. Ainsi, pour prouver l'équation (4.2), il suffit de montrer que $S \cap T(u) = S' \cap T(u)$. Considérons par contradiction que $S' \cap T(u) \subset S \cap T(u)$. Alors, il existe un sommet w dans $S \cap T(u) \setminus S' \cap T(u)$. Puisque $S' \cap T(u)$ contient u , $w \neq u$, donc $w \in T(v)$ pour un certain fils v de u . Comme S est un ensemble 2-indépendant, w est à distance au moins 3 de tous les autres sommets de S , et donc à distance au moins 3 de tous les autres sommets de S' . Cependant, comme w n'est pas inclus dans S' , il n'est pas non plus inclus dans S_v , ce qui contredit le fait que S_v est maximal. Ainsi, l'équation (4.2) est vérifiée.

Pour conclure la preuve, notons que $\forall S \in \mathcal{D}_0(u)$, $|S \cap T(u)| \geq \text{OPT}_0(u)$. En combinant cette inégalité avec l'inégalité (4.1) et l'équation (4.2), on obtient

$$1 + \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_1(v) = |S \cap T(u)| \geq \text{OPT}_0(u) \geq 1 + \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_1(v).$$

Il en résulte que $\text{OPT}_0(u) = 1 + \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_1(v)$, comme requis. \square

Lemme 4.4.16. *Si $\mathcal{D}_1(u) \neq \emptyset$, alors $\text{OPT}_1(u) = \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_2(v)$.*

Démonstration. Tout d'abord, montrons que

$$\text{OPT}_1(u) \geq \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_2(v). \quad (4.3)$$

En effet, si S est un ensemble 2-indépendant maximal contenant $p(u)$, alors pour chaque fils v de u , $S \in \mathcal{D}_2(v)$. Ainsi, le nombre de sommets de S contenus dans le sous-arbre enraciné en chaque v doit être d'au moins $\text{OPT}_2(v)$. Ceci démontre l'inégalité (4.3).

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un ensemble 2-indépendant maximal S contenant $p(u)$ tel que

$$|S \cap T(u)| = \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_2(v). \quad (4.4)$$

Pour chaque fils v de u , par définition de OPT_2 , il existe un ensemble 2-indépendant maximal S_v de $\mathcal{D}_2(v)$ tel que $|S_v \cap T(v)| = \text{OPT}_2(v)$. Considérons l'ensemble S' qui contient $p(u)$ et, pour chaque fils v de u , contient

les sommets de S_v inclus dans le sous-arbre enraciné en v , c'est-à-dire $S' = (\bigcup_{v \in C(u)} S_v \cap T(v)) \cup p(u)$.

On peut montrer de façon similaire à la preuve utilisée dans le lemme précédent que S' est un ensemble 2-indépendant. De ce fait, par l'observation 4.4.14, il existe un ensemble 2-indépendant maximal S contenant S' . On remarque que $|S' \cap T(u)| = |u \cap T(u)| + \sum_{v \in C(u)} |S_v \cap T(v)| = \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_2(v)$.

À l'aide d'un raisonnement presque identique à celui utilisé dans le lemme précédent, on montre que $S \cap T(u) = S' \cap T(u)$. Par définition, S est un ensemble 2-indépendant maximal et S contient $p(u)$, donc $S \in \mathcal{D}_1(u)$. Ainsi, S vérifie bien l'équation (4). Par définition, $\forall S \in \mathcal{D}_1, |S \cap T(u)| \geq \text{OPT}_1(u)$. En combinant cette dernière inégalité avec l'inégalité (4.3) et l'équation (4.3), on peut conclure que $\sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_2(v) = |S \cap T(u)| \geq \text{OPT}_1(u) \geq \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_2(v)$. Il en découle $\text{OPT}_1(u) = \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_2(v)$. \square

Lemme 4.4.17. *Si $\mathcal{D}_2(u) \neq \emptyset$, alors*

$$\text{OPT}_2(u) = \min\left(\sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_3(v), \min_{v \in C(u)} (\text{OPT}_0(v) + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_2(v'))\right)$$

Démonstration. La condition $\mathcal{D}_2(u) \neq \emptyset$ implique qu'il existe au moins un sommet adjacent à $p(u)$ autre que u lui-même. Appelons s ce sommet.

Pour prouver ce lemme, nous allons utiliser une partition de \mathcal{D}_2 , selon que les ensembles qui composent \mathcal{D}_2 contiennent ou non un fils de u . Il est notable qu'un ensemble 2-indépendant maximal contenu dans \mathcal{D}_2 ne peut contenir qu'au plus un fils de u , car les fils de u sont à une distance 2 les uns des autres.

Nous introduisons donc la partition de $\mathcal{D}_2(u)$ suivante :

- Soit $\mathcal{D}_{2,\emptyset}(u)$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathcal{D}_2(u)$ qui ne contiennent aucun fils de u .
- Pour tout fils v de u , soit $\mathcal{D}_{2,v}(u)$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathcal{D}_2(u)$ qui contiennent v .

En premier lieu, montrons que si $\mathcal{D}_{2,\emptyset}(u) \neq \emptyset$, alors

$$\min_{S \in \mathcal{D}_{2,\emptyset}(u)} (|S \cap T(u)|) = \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_3(v). \quad (4.5)$$

De la même manière que dans la preuve des précédents lemmes, comme pour chaque fils v de u , $S \in \mathcal{D}_{2,\emptyset}(u)$ implique que $S \in \mathcal{D}_3(v)$, on a bien que $\min_{S \in \mathcal{D}_{2,\emptyset}} (|S \cap T(u)|) \geq \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_3(v)$. Pour prouver l'équation (4.5), il

suffit donc de prouver l'existence d'un ensemble 2-indépendant maximal $S \in \mathcal{D}_{2,\emptyset}$ tel que $|S \cap T(u)| = \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_3(v)$.

Pour chaque fils v de u , il existe un ensemble 2-indépendant maximal S_v appartenant à $\mathcal{D}_3(v)$ tel que $|S_v \cap T(v)| = \text{OPT}_3(v)$. On considère l'ensemble $S' = (\bigcup_{v \in C(u)} S_v \cap T(v)) \cup \{s\}$. Par construction, on a $|S' \cap T(u)| = \sum_{v \in C(u)} \text{OPT}_3(v)$. De plus, avec un raisonnement similaire à celui utilisé dans le lemme 4.4.15, on peut montrer que S' est un ensemble 2-indépendant. L'observation 4.4.14 montre qu'il existe un ensemble 2-indépendant maximal S contenant S' . Comme $s \in S'$, aucun sommet de $T(u)$ ne peut être à distance 3 ou plus de tous les sommets de S' . En combinant ceci avec le fait que S' est contenu dans S , on obtient que $|S \cap T(u)| = |S' \cap T(u)|$. Comme S est bien contenu dans $\mathcal{D}_{2,\emptyset}$, on a bien démontré l'équation (4.5).

En second lieu, montrons que pour tout v dans $C(u)$ tel que $\mathcal{D}_{2,v}(u) \neq \emptyset$, on a

$$\min_{S \in \mathcal{D}_{2,v}(u)} (|S \cap T(u)|) = \text{OPT}_0(v) + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_3(v'). \quad (4.6)$$

Pour tout $S \in \mathcal{D}_{2,v}(u)$, on sait que $S \in \mathcal{D}_0(v)$ et pour tout fils $v' \neq v$ de u , $S \in \mathcal{D}_3(v')$. Donc $\min_{S \in \mathcal{D}_{2,v}(u)} (|S \cap T(u)|) \geq \text{OPT}_0(v) + \sum_{v' \in C(u)} \text{OPT}_3(v')$.

Montrons qu'il existe un ensemble 2-indépendant maximal S dans $\mathcal{D}_{2,v}(u)$ tel que $|S \cap T(u)| = \text{OPT}_0(v) + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_2(v')$.

Soit S_v un ensemble 2-indépendant maximal de $\mathcal{D}_0(v)$ tel que $|S_v \cap T(v)| = \text{OPT}_0(v)$. Pour chaque fils v' de u autre que v , soit $S_{v'}$ un ensemble 2-indépendant maximal de $\mathcal{D}_2(v')$ tel que $|S_{v'} \cap T(v')| = \text{OPT}_2(v')$. On considère l'ensemble S' tel que $S' = (\bigcup_{v' \in C(u)} S_{v'} \cap T(v')) \cup \{s\}$. Encore une fois, par un raisonnement similaire, on peut montrer que S' est un ensemble 2-indépendant, et donc qu'il existe un ensemble 2-indépendant maximal S qui contient S' . De plus, chaque sommet de $T(u)$ est à distance deux ou moins d'au moins un sommet de S' . De ce fait, $|S' \cap T(u)| = |S \cap T(u)|$. Donc $|S' \cap T(u)| = \text{OPT}_0(v) + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_2(v')$. Comme S contient s et v , on a bien $S \in \mathcal{D}_{2,v}(u)$. Ainsi l'équation (4.6) est bien vérifiée.

Pour compléter la preuve du lemme, on remarque que tout ensemble dans $\mathcal{D}_2(u)$ doit soit appartenir à $\mathcal{D}_{2,\emptyset}(u)$ soit appartenir à $\mathcal{D}_{2,v}(u)$ pour un certain fils v de u . De ce fait, $\min_{S \in \mathcal{D}_2(u)} (|S \cap T(u)|) = \min(\min_{S \in \mathcal{D}_{2,\emptyset}(u)} |S \cap T(u)|, \min_{v \in C(u), S \in \mathcal{D}_{2,v}(u)} |S \cap T(u)|)$. En appliquant les équations (4.5) et (4.6) sur cette égalité, on obtient la preuve du lemme. \square

Lemme 4.4.18. *Si $\mathcal{D}_3(u) \neq \emptyset$, alors $\text{OPT}_3(u) = \min(\min_{v \in C(u)} (\text{OPT}_0(v) + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_2(v')), \min_{v \in C(u), w \in C(v)} \text{OPT}_0(w) + \sum_{w' \in C(v), w' \neq w} \text{OPT}_2(w') + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_3(v'))$.*

Démonstration. On définit les sous-ensembles de $\mathcal{D}_3(u)$ suivants :

- Pour chaque fils v de u , soit $\mathcal{D}_{3,v}(u)$ l'ensemble de tous les ensembles 2-indépendant maximaux de $\mathcal{D}_3(u)$ qui contiennent v .
- Pour chaque petit-fils w de u , soit $\mathcal{D}_{3,\text{out},w}(u)$ l'ensemble de tous les ensembles 2-indépendants maximaux de $\mathcal{D}_3(u)$ qui ne contiennent aucun fils de u , mais contiennent w .

Tout d'abord, prouvons que pour tout v dans $C(u)$ tel que $\mathcal{D}_{3,v}(u) \neq \emptyset$, alors

$$\min_{S \in \mathcal{D}_{3,v}(u)} (|S \cap T(u)|) = \text{OPT}_0(v) + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_2(v'). \quad (4.7)$$

Pour tout $S \in \mathcal{D}_{3,v}(u)$, comme S contient v , $S \in \mathcal{D}_0(v)$ et pour tout fils v' de u , $v' \neq v$, on obtient $S \in \mathcal{D}_2(v')$. Ainsi, par un raisonnement similaire à celui employé dans les preuves des lemmes précédents, on obtient l'inégalité $\min_{S \in \mathcal{D}_{3,v}(u)} (|S \cap T(u)|) \geq \text{OPT}_0(v) + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_2(v')$. Soit S_v un ensemble 2-indépendant maximal tel que $|S_v \cap T(v)| = \text{OPT}_0(v)$. Pour chaque fils v' de u autre que v , soit $S_{v'}$ un ensemble 2-indépendant maximal tel que $|S_{v'} \cap T(v')| = \text{OPT}_2(v')$. Comme $\mathcal{D}_{3,v}(u) \neq \emptyset$, il existe un ensemble 2-indépendant maximal S'' dans $\mathcal{D}_{3,v}(u)$. Soit s un sommet adjacent à $p(u)$ et autre que u , s'il en existe. Comme S'' est maximal, $S'' \cup \{s\}$ ne peut pas être un ensemble 2-indépendant. De plus, comme $S \in \mathcal{D}_{3,v}(u)$, S'' ne peut pas contenir $p(u)$ ni tout autre sommet adjacent à $p(u)$. En conséquence, pour tout sommet s adjacent à $p(u)$ et qui n'est pas u , il existe aussi un sommet r adjacent à s qui n'est pas $p(u)$. Considérons l'ensemble de sommets R qui ne contient pas $p(u)$, mais contient exactement un sommet adjacent à chacun des voisins de $p(u)$ autres que u . L'ensemble R peut être vide, si u est le seul voisin de $p(u)$. On définit S' comme l'union des ensembles $S_{v'}$ et de R , i.e., $S' = (\bigcup_{v' \in C(u)} S_{v'} \cap T(v')) \cup R$. On peut maintenant prouver par des arguments similaires à ceux des preuves des lemmes précédents que S' est un ensemble 2-indépendant. On sait d'après la remarque 4.4.14 qu'il existe un ensemble 2-indépendant maximal S qui contient S' . Comme tous les sommets de $T(u)$ ont au moins un sommet de S' qui est à distance deux ou moins, $|S \cap T(u)| = |S' \cap T(u)| = \text{OPT}_0(v) + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_2(v')$. Comme S contient à la fois u et R , et S est un ensemble 2-indépendant maximal, on en déduit que $S \in \mathcal{D}_{3,v}(u)$. Ceci prouve l'équation (4.7).

Ensuite, prouvons que pour tous v, w tels que $v, w \in C(u)$ et $\mathcal{D}_{3,\text{out},w}(u) \neq \emptyset$, on a

$$\min_{S \in \mathcal{D}_{3,w}(u)} (|S \cap T(u)|) = \text{OPT}_0(w) + \sum_{w' \in C(v), w' \neq w} \text{OPT}_2(w') + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_3(v'). \quad (4.8)$$

Pour tout $S \in \mathcal{D}_{3,\text{out},w}(u)$, on sait que $S \in \mathcal{D}_0(w)$; $S \in \mathcal{D}_2(w')$ pour tout fils w' de v qui n'est pas w ; et $S \in \mathcal{D}_3(v')$ pour tout fils v' de u qui n'est pas v . De ce fait, $\min_{S \in \mathcal{D}_{3,\text{out},w}(u)} (|S \cap T(u)|) \geq \text{OPT}_0(w) + \sum_{w' \in C(v), w' \neq w} \text{OPT}_2(w') + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_3(v')$. On nomme S_w un ensemble 2-indépendant maximal tel que $|S_w \cap T(w)| = \text{OPT}_0(w)$. Pour chaque fils w' de v autre que w , on nomme $S_{w'}$ un ensemble 2-indépendant maximal tel que $|S_{w'} \cap T(w')| = \text{OPT}_2(w')$. Pour chaque fils v' de u autre que v , on nomme $S_{v'}$ un ensemble 2-indépendant maximal tel que $|S_{v'} \cap T(v')| = \text{OPT}_3(v')$. Comme $\mathcal{D}_{3,\text{out},w}(u) \neq \emptyset$, il existe un ensemble 2-indépendant maximal S'' dans $\mathcal{D}_{3,\text{out},w}(u)$. Si u n'est pas la racine de T , alors, comme S'' est maximal, $S'' \cup p(u)$ n'est pas un ensemble 2-indépendant. Comme ni u , ni $p(u)$, ni aucun sommet adjacent à $p(u)$, ni aucun fils de u ne sont dans S'' , il existe un sommet r à distance 2 de $p(u)$ tel que $r \notin T(u)$. De plus, de la même façon que lors de la preuve de l'équation (4.7), on peut montrer que pour chaque sommet s adjacent à $p(u)$ autre que u , il existe un sommet r adjacent à s autre que $p(u)$. Considérons l'ensemble R qui ne contient pas $p(u)$, mais contient exactement un sommet adjacent à chacun des voisins s de $p(u)$, sauf u . Si u est la racine, alors R est l'ensemble vide. Soit S' l'union des sommets $S_{v'}$, $S_{w'}$ et R , i.e., $S' = \bigcup_{v' \in C(u), v' \neq v} (S_{v'} \cap T(v')) \cup (\bigcup_{w' \in C(v)} (S_{w'} \cap T(w'))) \cup R$. Encore une fois, les mêmes méthodes permettent de montrer que S' est un ensemble 2-indépendant. D'après l'observation 4.4.14, il existe un ensemble 2-indépendant maximal S qui contient S' . Comme chaque sommet de $T(u)$ est à distance inférieure ou égale à 2 d'au moins un sommet dans S' , $|S \cap T(u)| = |S' \cap T(u)|$. Comme S contient à la fois w et R , et ne contient aucun fils de u , $S \in \mathcal{D}_{3,\text{out},w}(u)$. Comme de plus $|S \cap T(u)| = \text{OPT}_0(w) + \sum_{w' \in C(v), w' \neq w} \text{OPT}_2(w') + \sum_{v' \in C(u), v' \neq v} \text{OPT}_3(v')$, on a bien vérifié l'équation (4.8).

Pour conclure, comme $(\bigcup_{v \in C(u)} \mathcal{D}_{3,v}(u)) \cup (\bigcup_{w \in C(C(u))} \mathcal{D}_{3,\text{out},w}(u)) = \mathcal{D}_3$, on en déduit que

$$\text{OPT}_3(u) = \min\left(\min_{S \in \mathcal{D}_{3,v}(u), v \in C(u)} (|S \cap T(u)|), \min_{S \in \mathcal{D}_{3,w}(u), w \in C(C(u))} (|S \cap T(u)|)\right).$$

En appliquant les équations (4.7) et (4.8) sur cette dernière égalité, on obtient la formule du lemme. \square

Démonstration du théorème 4.4.13. L'algorithme 2 utilise les formules des lemmes 4.4.15-4.4.18 pour calculer un ensemble 2-indépendant maximal minimum pour un arbre donné.

Comptons le nombre d'opérations dont l'algorithme aura besoin pour effectuer tous les calculs sur un sommet u . Si u est une feuille, alors l'algorithme n'aura à faire que 4 assignations de variables. Si u n'est pas une feuille, alors

Algorithme 2 Min2stablemax

Require: Un arbre enraciné en r . Les sommets de l'arbre sont triés dans le post-order.

Ensure: Le cardinal du plus petit ensemble 2-indépendant maximal.

```

for  $u$  in postorder do
  if  $\text{children}(u) = \emptyset$  then
     $\text{OPT}_0(u) \leftarrow 1$ ;
     $\text{OPT}_1(u) \leftarrow 0$ ;
     $\text{OPT}_2(u) \leftarrow 0$ ;
     $\text{OPT}_3(u) \leftarrow \infty$ ;
  else
     $\text{OPT}_0(u) \leftarrow 1 + \sum_{v \in \text{children}(u)} \text{OPT}_1(v)$ ;
     $\text{OPT}_1(u) \leftarrow \sum_{v \in \text{children}(u)} (\text{OPT}_2(v))$ ;
     $\Sigma_{\text{OPT}_2, u} \leftarrow \sum_{v \in \text{children}(u)} \text{OPT}_2(v)$ ;
     $\phi(u) \leftarrow \min_{v \in \text{children}(u)} (\text{OPT}_0(v) + \Sigma_{\text{OPT}_2, u} - \text{OPT}_2(v))$ ;
     $\Sigma_{\text{OPT}_3, u} \leftarrow \sum_{v \in \text{children}(u)} \text{OPT}_3(v)$ ;
     $\text{OPT}_2(u) \leftarrow \min(\Sigma_{\text{OPT}_3, u}, \phi(u))$ ;
     $\text{TEMP} \leftarrow \min_{v \in \text{children}(u), \text{ s.t. } \text{children}(v) \neq \emptyset} (\phi(v) + \Sigma_{\text{OPT}_3, v} - \text{OPT}_3(v))$ ;
     $\text{OPT}_3(u) \leftarrow \min(\phi(u), \text{TEMP})$ ;
  end if
end for
return  $\max(\text{OPT}_0(r), \text{OPT}_3(r))$ ;

```

- $\text{OPT}_0(u)$ nécessitera $d(u)$ (degré de u) additions.
- $\text{OPT}_1(u)$ nécessitera $d(u) - 1$ additions.
- $\Sigma_{\text{OPT}_2, u}$ nécessitera $d(u) - 1$ additions.
- $\phi(u)$ nécessitera $2d(u)$ additions et $d(u) - 1$ comparaisons.
- $\Sigma_{\text{OPT}_3, u}$ nécessitera $d(u) - 1$ additions.
- $\text{OPT}_2(u)$ nécessitera une comparaison.
- $\text{OPT}_3(u)$ nécessitera $2d(u)$ additions et $d(u)$ comparaisons.

Le calcul de toutes ces valeurs nécessitera donc $8d(u) - 3$ additions et $2d(u)$ comparaisons. En faisant la somme des calculs effectués sur tous les sommets, on obtient donc $\mathcal{O}(\sum_{u \in T} d(u))$ opérations, ce qui correspond à $\mathcal{O}(m)$ (car $\sum_{u \in T} d(u) = 2m$), et donc à $\mathcal{O}(n)$ (car dans un arbre $m = n - 1$). □

Corollaire 4.4.19. *On peut calculer en $\mathcal{O}(n)$ le plus petit entier α tel que le jeu $\Pi_\alpha(T)$ sur un arbre T accepte un équilibre de Nash pur.*

Démonstration. Par le théorème 4.4.10, on sait que tout jeu $\Pi_\alpha(T)$ ayant un

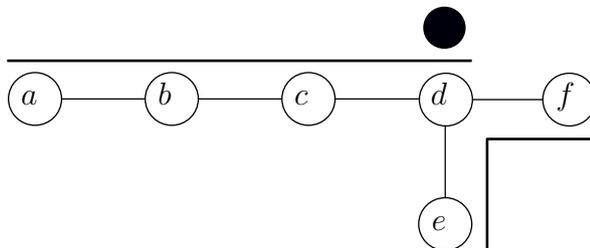


FIGURE 4.8 – On appelle G le graphe représenté ci-dessus. Le jeu $\Pi_{2,1}(G, \mathcal{P}_p)$ admet un équilibre de Nash : l’attaquant cible le sommet d , le premier défenseur cible le chemin de a à d , le deuxième défenseur cible le chemin de d à f . Cependant, le jeu $\Pi_{2,1}(G, \mathcal{P}_p^*)$ n’admet pas d’équilibre de Nash, car il est impossible de couvrir tous les sommets de ce graphe avec deux chemins de longueur 3.

équilibre de Nash a 1-équilibre de Nash. Par le théorème 4.4.3, on sait que α correspond à la cardinalité d’un ensemble 2-indépendant maximal minimum dans T . Par le théorème 4.4.13, on peut calculer la cardinalité d’un ensemble 2-indépendant maximal minimum en $\mathcal{O}(n)$ opérations. \square

4.5 Autres modèles

On propose une variante des p -chemins, les p -chemins de taille fixe, où les défenseurs doivent choisir des chemins de taille exactement égale à p . On remarque que ces deux modèles ne sont pas équivalents dès que p est supérieur à 2.

Définition 4.5.1. On dénote par $\mathcal{P}_p^*(G)$ l’ensemble des chemins de taille exactement p dans G . On dénote aussi $\Pi_{\delta,\alpha}^{p*}(G)$ le jeu $\Pi_{\delta,\alpha}(G, \mathcal{P}_p^*)$, et on dénote $\Pi_{\alpha}^{p*}(G)$ le jeu $\Pi_{n,\alpha}^{p*}(G)$.

Proposition 4.5.2. Pour $p \geq 3$, il existe des graphes G , et des entiers α et δ tels que $\Pi_{\delta,\alpha}^p(G)$ admette un équilibre de Nash, mais $\Pi_{\delta,\alpha}^{p*}(G)$ n’en admette pas. Cependant, lorsque $p = 2$, si $\Pi_{\delta,\alpha}^2(G)$ admet un équilibre de Nash, alors $\Pi_{\delta,\alpha}^{2*}(G)$ en admet un lui aussi.

Démonstration. La figure 4.8 montre que ces deux problèmes ont des réponses différentes pour le même graphe en entrée quand $p \geq 3$. Traitons

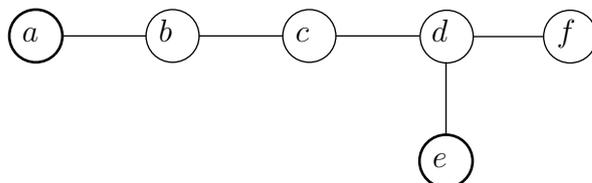


FIGURE 4.9 – Dans le graphe dépeint ci-dessus, qu'on notera G , les sommets a et e forment un 3-indépendant. Cependant, $\Pi_\alpha^p(G)$ ne peut avoir d'équilibre de Nash dans lequel a et e seraient les seuls sommets attaqués, car alors aucun défenseur ne pourrait couvrir f et avoir un profit supérieur à 0.

maintenant le cas où $p = 2$. S'il existe un équilibre de Nash s pour le jeu $\Pi_{\delta,\alpha}^{2*}(G)$, alors s est aussi un équilibre de Nash pour le jeu $\Pi_{\delta,\alpha}^2(G)$. De plus, s'il existe un équilibre de Nash s pour $\Pi_{\delta,\alpha}^2(G)$, on peut construire s' à partir de s de la façon suivante. Tous les attaquants et les défenseurs qui couvraient un chemin de taille deux dans s gardent la même stratégie dans s' . Les défenseurs qui ne défendaient qu'une arête e , respectivement un sommet v , dans s , défendent dans s' un chemin de taille 2 contenant e , respectivement u , dans s' . Les profits et profits potentiels pour les joueurs s et dans s' sont bien les mêmes, donc s' est bien un équilibre de Nash pour $\Pi_{\delta,\alpha}^{2*}(G)$. \square

Observation 4.5.3. *L'existence d'un p -indépendant pour un graphe G ne garantit pas la présence d'un 1-équilibre de Nash pour $\Pi_\alpha^p(G)$.*

On va aussi s'intéresser au cas où les défenseurs protègent tous les sommets à distance r d'un sommet qu'ils choisissent.

Définition 4.5.4. *Soit $\mathcal{S}^r(G)$ l'ensemble contenant, pour chaque sommet u de G , le sous-graphe induit par l'ensemble des sommets à distance au plus r de u .*

Théorème 4.5.5. *Pour tout graphe G , le jeu $\Pi_\alpha(G, \mathcal{S}^r(G))$ admet un 1-équilibre de Nash si et seulement si existe le jeu $\Pi_\alpha^{2r}(G)$ admet un 1-équilibre de Nash.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que pour tout ensemble de sommets A , un élément de $\mathcal{S}^r(G)$ peut couvrir deux sommets de A si et seulement

si il existe un chemin de taille au plus $2r$ entre deux sommets de A . En conséquence, soit A un ensemble de sommets de taille au plus α . Le profit potentiel des défenseurs dans le jeu $\Pi_\alpha(G, \mathcal{S}^r(G))$ quand A est l'ensemble des sommets attaqués est d'au plus 1 si et seulement si le profit potentiel des défenseur dans le jeu $\Pi_\alpha^{2r}(G)$ quand A est l'ensemble des sommets attaqués est d'au plus 1. De plus, pour tout ensemble de sommets A , on peut couvrir n'importe quel sommet de G avec un élément de $\mathcal{S}^r(G)$ qui couvre aussi un sommet de A si et seulement si on peut couvrir n'importe quel sommet de G avec un chemin de taille au plus $2r$ qui couvre aussi un sommet de A . \square

Corollaire 4.5.6. *Pour tout graphe G , le jeu $\Pi_\alpha(G, \mathcal{S}^p(G))$ admet un 1-équilibre de Nash si et seulement si existe un ensemble p -indépendant maximal de taille inférieure ou égale à α dans G .*

Chapitre 5

Conclusion

On va dans ce dernier chapitre dresser un bilan des résultats énoncés dans ce document, et proposer des perspectives de recherches futures.

Les principaux résultats du chapitre 3 montrent que la contrainte de tropicalité augmente fortement la complexité de problèmes de recherche d'ensemble classiques. En effet, les problèmes suivants sont tous NP-complets quand les graphes en entrée sont restreints aux chemins :

- ENSEMBLE DOMINANT TROPICAL (théorème 3.2.1),
- COUVERTURE PAR SOMMET TROPICALE (théorème 3.3.2),
- INDÉPENDANT TROPICAL (théorème 3.3.4).

Les versions non tropicales de ces problèmes sont bien connues pour être NP-complètes dans le cas général, mais restreintes aux chemins elles deviennent trivialement polynomiales.

Parmi ceux que nous avons étudiés, le seul problème tropical qui ne soit pas NP-complet pour les chemins est celui de SOUS-GRAPHE CONNEXE TROPICAL. Il est en effet évident que décider s'il existe un sous-graphe connexe tropical de taille k dans un chemin s'effectue en temps $\mathcal{O}(n)$: il n'y a que $n - k$ sous-graphes connexes de taille k dans un graphe chemin avec n sommets, et il suffit de tous les tester. Néanmoins, SOUS-GRAPHE CONNEXE TROPICAL est NP-complet lorsqu'on limite les entrées à des graphes relativement simples : graphes d'intervalles (théorème 3.1.1), arbres de profondeur au plus 3 (théorème 3.1.2).

Cependant, limiter le nombre de couleurs à être logarithmique en le nombre de sommets du graphe permet souvent de se rapprocher de la complexité de la version non tropicale. Ainsi, nous avons pu exhiber des algorithmes qui sont polynomiaux lorsque le nombre de couleurs est ainsi limité pour :

- ENSEMBLE DOMINANT TROPICAL restreint aux graphes d'intervalles (théorème 3.2.15).

-
- COUVERTURE PAR SOMMET TROPICALE restreint aux graphes chemins (théorème 3.3.3),
 - SOUS-GRAPHE CONNEXE TROPICAL (sans restrictions de classe de graphe, théorème 3.1.4).

Ces résultats pourraient sans doute être raffinés, pour déterminer plus précisément pour chaque problème la limite entre les classes de graphes dans lesquelles le problème reste NP-complet même en limitant le nombre de couleurs soit à un entier fixé, soit en fonction de la taille du graphe, et les classes de graphes pour lesquelles ces restrictions rendent le problème résoluble en un nombre polynomial d'étapes de calcul élémentaires.

Ce chapitre inclut aussi de nombreux résultats structurels sur les graphes pour les sous-graphes connexes tropicaux, ainsi que quelques un pour les dominants tropicaux, qui garantissent des bornes supérieures sur la taille d'un sous-graphe connexe tropical minimum (ou d'un dominant tropical minimum) en fonction de propriétés basiques du graphe comme le degré minimum, le nombre de couleurs, le nombre d'arêtes. . . Par exemple, le théorème 3.1.8 montre que si un graphe G^c avec n sommets a un degré minimum $\geq \frac{n}{2}$ et est coloré avec plus de $\frac{n}{2}$ couleurs, il admet un sous-graphe connexe de taille c , où c est le nombre de couleurs utilisées dans la coloration de G^c . Une telle approche pourrait être aussi appliquée pour les couvertures par sommets tropicales et les ensembles indépendants tropicaux. Le sujet des couvertures par sommet tropicales est d'ailleurs étudié par Alexandre Dambreville dans le cadre de sa thèse. D'autres problèmes de recherche d'ensembles de sommets peuvent être étudiés en version tropicale. Par exemple, qu'en est-il de la recherche d'une clique tropicale dans un graphe ? De même, il serait intéressant de se poser des questions analogues pour les problèmes de recherche d'arêtes, en considérant des graphes arêtes colorés.

Dans le chapitre 4, on a introduit les jeux de défenses, et étudié l'existence d'un équilibre de Nash pur en fonction du type de sous-graphes \mathcal{C} que les défenseurs peuvent choisir comme stratégies, et du nombre d'attaquants et de défenseurs. Tout d'abord, nous avons fourni une formulation du problème en termes de théorie des graphes pour le cas général (théorème 4.2.3). Nous avons affiné celle-ci pour le cas où \mathcal{C} est l'ensemble des arêtes. Nous nous sommes concentrés sur la question du nombre minimum d'attaquants nécessaires pour que le graphe admette un équilibre de Nash lorsque le nombre de défenseurs est assez important pour ne plus être une contrainte. Nous avons démontré que dans ce cas là, le problème se rapportait la recherche d'un ensemble dominant indépendant dont le cardinal est inférieur ou égal au nombre d'attaquants (théorème 4.3.9).

Nous avons ensuite étendu le modèle au cas où les défenseurs protègent des chemins de taille au plus p . Pour étudier les équilibres de Nash, nous les

avons séparés en fonction du profit qu'ils donnent aux défenseurs, pour nous concentrer sur ceux où les défenseurs n'ont qu'un profit de 1, pour lesquels il semble naturel qu'ils soient ceux nécessitant le moins de sommets attaqués. Ceci nous a conduit à introduire la notion d'ensemble p -indépendant, une extension naturelle de celle d'ensemble indépendant où les sommets doivent être à distance au moins $p + 1$ les uns des autres. En effet, l'existence d'un 1-équilibre de Nash dans un jeu avec α attaquants où \mathcal{C} est l'ensemble des chemins de longueur $\leq p$ sur un graphe G est équivalente à celle d'un p -indépendant maximal de taille α sur le graphe G (théorème 4.4.3). Nous avons montré que, pour tout p , trouver un p -indépendant maximal de taille k dans un graphe quelconque est NP-complet (théorème 4.4.6). Cependant, on peut trouver un 2-indépendant maximal de taille minimum dans un arbre en un nombre polynomial d'opérations (à l'aide de l'algorithme MIN2STABLEMAX, théorème 4.4.13). L'étude des p -indépendants est un problème qu'il serait intéressant de pousser plus avant, même indépendamment des questions relatives à l'étude des jeux de défense. En effet, il est sans doute possible d'étendre le principe de notre algorithme calculant les 2-indépendants maximaux minimum dans les arbres aux p -indépendants, mais on peut de plus se poser la question de la complexité de trouver des ensembles p -indépendants dans d'autres catégories de graphes.

Pour revenir aux jeux de défense, pour les jeux où les défenseurs défendent un chemin de taille 2, l'existence d'un équilibre de Nash implique celle d'un 1-équilibre de Nash (théorème 4.4.10). Cependant, dans le cas de chemins de taille p , cette propriété reste à l'état de conjecture. De même, dans un autre modèle intéressant se pose une question similaire. En effet, lorsque les défenseurs choisissent un sommet et défendent tous les sommets à distance r du sommet choisi, l'existence d'un 1-équilibre lorsqu'il y a α attaquants est équivalente à celle d'un $2r$ -indépendant maximal de taille α (corollaire 4.5.6). Cependant, pour ce modèle non plus, le fait qu'un équilibre de Nash implique un 1-équilibre de Nash n'est qu'une conjecture.

Ces travaux ouvrent donc de nombreuses possibilités de futures recherches.

Bibliographie

- [AK00a] Paola Alimonti and Viggo Kann. Some APX-completeness results for cubic graphs. *Theoretical Computer Science*, 237(1-2) :123–134, 2000.
- [AK00b] Paula Alimonti and Viggo Kann. Some APX-completeness results for cubic graphs. *Theor. Comput. Sci.*, 237(1-2) :123–134, 2000.
- [BK87] Andreas Brandstädt and Dieter Kratsch. On domination problems for permutation and other graphs. *Theoretical Computer Science*, 54 :181–198, 1987.
- [CC08] Miroslav Chlebík and Janka Chlebíková. Approximation hardness of dominating set problems in bounded degree graphs. *Inf. Comput.*, 206(11) :1264–1275, 2008.
- [CCK⁺14] Mathieu Chapelle, Manfred Cochefert, Dieter Kratsch, Romain Letourneur, and Mathieu Liedloff. Exact exponential algorithms to find a tropical connected set of minimum size. In Marek Cygan and Pinar Heggernes, editors, *Parameterized and Exact Computation - 9th International Symposium, IPEC 2014, Wrocław, Poland, September 10-12, 2014. Revised Selected Papers*, volume 8894 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 147–158. Springer, 2014.
- [cDF97] Rong chii Duh and Martin Fürer. Approximation of k -set cover by semi-local optimization. In *Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC-1997)*, pages 256–264, 1997.
- [CKST95] Pierluigi Crescenzi, Viggo Kann, Riccardo Silvestri, and Luca Trevisan. Structure in approximation classes. *SIAM Journal on Computing*, 28(5) :1759–1782, October 04 1995.
- [Coo71] Stephen A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In *Conference Record of Third Annual ACM Symposium*

-
- on Theory of Computing*, pages 151–158, Shaker Heights, Ohio, 3–5 1971 1971.
- [CP84] Derek G. Corneil and Yehoshua Perl. Clustering and domination in perfect graphs. *Discrete Appl. Math.*, 9 :27–39, 1984.
- [dCM⁺] Jean-Alexandre Anglès d’Auriac, Nathann Cohen, Abdelhakim El Maftouhi, Ararat Harutyunyan, Sylvain Legay, and Yannis Manoussakis. Tropical connected subgraph in vertex-coloured graphs, in preparation.
- [dCOM⁺] Jean-Alexandre Anglès d’Auriac, Johanne Cohen, MedYahya Ould-MedSalem, Kazuyuki Tanaka, and Yannis Manoussakis. A game on graphs with many non-centralized defenders.
- [dMK⁺] Jean-Alexandre Anglès d’Auriac, Abdelhakim El Maftouhi, Marek Karpinski, Narayanan Narayanan, Laurent Rosaz, Johann Thapper, Yannis Manoussakis, and Léandro Montero. Tropical dominating sets in vertex-coloured graphs.
- [Far82] Martin Farber. Independent domination in chordal graphs. *Operations Research Letters*, 1 :134–138, 1982.
- [FFHV11] Michael R. Fellows, Guillaume Fertin, Danny Hermelin, and Stéphane Vialette. Upper and lower bounds for finding connected motifs in vertex-colored graphs. *J. Comput. Syst. Sci.*, 77(4) :799–811, 2011.
- [Gal59] Tibor Gallai. Über extreme punkt- und kantenmengen. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* 2, pages 133–138, 1959.
- [GJ79] Michael Randolph Garey and David Stifler Johnson. *Computers and intractability; a guide to the theory of NP-completeness*. W.H. Freeman, 1979.
- [GMP⁺06] Marina Gelastou, Marios Mavronicolas, Vicky G. Papadopoulou, Anna Philippou, and Paul G. Spirakis. The power of the defender. In *ICDCS Workshops*, page 37. IEEE Computer Society, 2006.
- [HHS98] Teresa W. Haynes, Stephen T. Hedetniemi, and Peter J. Slater. *Fundamentals of Domination in Graphs*, volume 208 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, 1998.
- [HL90] Stephen Travis Hedetniemi and Renu Chakravarti Laskar. Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters. *dm*, 86 :257–277, 1990.

- [Kar72] Richard M. Karp. *Reducibility Among Combinatorial Problems*, pages 85–103. Plenum Press, NY, 1972.
- [LFS06] Vincent Lacroix, Cristina G. Fernandes, and Marie-France Sagot. Motif search in graphs : Application to metabolic networks. *IEEE/ACM Trans. Comput. Biology Bioinform.*, 3(4) :360–368, 2006.
- [MMP⁺06] Marios Mavronicolas, Loizos Michael, Vicky G. Papadopoulou, Anna Philippou, and Paul G. Spirakis. The price of defense. In *Mathematical Foundations of Computer Science 2006, 31st International Symposium, MFCS 2006, Stará Lesná, Slovakia, August 28-September 1, 2006, Proceedings*, pages 717–728, 2006.
- [MP01] Tom Markham and Charlie Payne. Security at the network edge : A distributed firewall architecture. *DARPA Information Survivability Conference and Exposition.*, 1 :0279, 2001.
- [MPPS05] Marios Mavronicolas, Vicky G. Papadopoulou, Anna Philippou, and Paul G. Spirakis. Network game with attacker and protector entities. In Xiaotie Deng and Ding-Zhu Du, editors, *Algorithms and Computation, 16th International Symposium, ISAAC 2005, Sanya, Hainan, China, December 19-21, 2005, Proceedings*, volume 3827 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 288–297. Springer, 2005.
- [MPPS08] Marios Mavronicolas, Vicky Papadopoulou, Anna Philippou, and Paul G. Spirakis. A network game with attackers and a defender. *Algorithmica*, 51(3) :315–341, 2008.
- [MRCF59] D. G. Malcolm, J. H. Roseboom, C. E. Clark, and W. Fazar. Application of a technique for research and development program evaluation. *Operations Research*, 7(5) :646–669, 1959.
- [MV80] Silvio Micali and Vijay V. Vazirani. An $O(\sqrt{|V|}|E|)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs. In *FOCS*, pages 17–27. IEEE Computer Society, 1980.
- [Nas50] John Forbes Nash. Equilibrium points in n-person games. In *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1950.
- [Nas51] John Forbes Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 2(54) :286–295, 1951.
- [Sla96] Petr Slavík. A tight analysis of the greedy algorithm for set cover. In *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC-1996)*, pages 435–441, 1996.

-
- [vN28] John von Neumann. Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Math. Ann.*, 100 :295–320, 1928.
- [YG80] Mihalis Yannakakis and Fanica Gavril. Edge dominating sets in graphs. *siamam*, 38(3) :364–372, June 1980.