



**HAL**  
open science

# Simulation numérique directe de la turbulence hélicitaire maximale et modèles LES de la turbulence magnétohydrodynamique

Mouloud Kessar

► **To cite this version:**

Mouloud Kessar. Simulation numérique directe de la turbulence hélicitaire maximale et modèles LES de la turbulence magnétohydrodynamique. Mécanique [physics.med-ph]. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAI042 . tel-01225126

**HAL Id: tel-01225126**

**<https://theses.hal.science/tel-01225126v1>**

Submitted on 5 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **Simulation numérique directe de la turbulence hélicitaire maximale et modèles LES de la turbulence magnétohydrodynamique.**

### **THÈSE**

Pour obtenir le grade de

### **DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Mécanique des fluides, Énergétique, Procédés**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Mouloud KESSAR**

Thèse dirigée par **Franck PLUNIAN** et  
codirigée par **Guillaume BALARAC**

préparée au sein du **Laboratoire LEGI**  
dans **l'École Doctorale IMEP2**

Thèse soutenue publiquement le **06/07/2015**  
devant le jury composé de :

**Pr, Sébastien, GALTIER**

Professeur, Laboratoire de Physique des Plasmas,  
École Polytechnique, Examineur

**Pr, Bernard, KNAEPEN**

Professeur, Physics Department  
Université Libre de Bruxelles, Rapporteur

**Dr Yannick, PONTY**

Directeur de Recherche, Laboratoire Lagrange,  
Observatoire de la Côte d'Azur, Rapporteur

**Pr Franck, PLUNIAN**

Professeur, Laboratoire ISTERre,  
Université de Grenoble, Directeur de thèse

**Dr Guillaume, BALARAC**

Maitre de Conférences, Laboratoire LEGI,  
Université de Grenoble, co-directeur de thèse





---

## Remerciements

Le manuscrit est enfin bouclé, la soutenance est passée, voici le moment d'écrire la partie de cet ouvrage qui sera probablement la plus lue (No Pressure...). Si je devais dédier une page de remerciement à chaque personne qui en méritait, je pourrais doubler la taille de ce manuscrit. Je vais malgré tout rester concis, alors pardonnez moi d'avance si votre nom n'apparaît pas dans ces quelques lignes.

Je vais commencer par remercier membres du jury pour leurs retours sur ce travail, aussi bien dans les rapports que lors des questions pendant la soutenance. Individuellement, je tiens à remercier Sébastien Galtier, pour avoir accepté de présider le jury, Bernard Knaeppen qui n'a pas pu être présent physiquement à la soutenance, mais qui y a malgré tout assisté en visio-conférence, et Yannick Ponty pour avoir suivi l'évolution de cette thèse au fil des années.

Viennent à présent les directeurs de thèse, communément appelés "chefs". Franck et Guillaume ont tout deux des domaines de spécialisation différents, et c'est la combinaison de leurs conseils qui m'a permis d'aller au bout de cette thèse. Par ailleurs, il est difficile de passer à coter de leur dévouement, qui les pousse à être disponibles jusqu'à 7 jours par semaine. De Franck, je n'oublierai pas les heures de discussions lors de nos visites à l'Université de Perm, ni les activités culturelles réalisées avec Rodion. De Guillaume, je n'oublierai pas sa passion du sport, ni son côté ultra-bosseur, ou le temps passé en Californie à échanger avec les chercheurs et chercheuses de la NASA AMES. Merci à tous les deux pour ces trois années.

J'ai réalisé ma thèse principalement au LEGI, je vais donc commencer par remercier ce laboratoire pour m'avoir accueilli pendant tout ce temps. Mention spéciale pour Patrick, l'amoureux des tartes aux noix, qui nous permet à nous, petitEs thésardEs de l'équipe MOST, de faire notre travail. Je ne peut que remercier les différents thésards qui ont partagé mon bureau pendant trois ans, Laurent, notamment pour cette passion commune des mangas, Borris, montagnard chevronné, Nico, grimpeur inarrêtable, Antoine fan de vélo et geek à ses heures perdues... J'ai également une pensée pour les personnes présentes aux pauses ou dans les couloirs du bâtiment A, Uros, Sylvia, Lucas, Nathanael, Alex(x2), Yves, Stéphane, Henda, Fred ( alias Père Castor), Giovanni, Régianne, et pour celles qui sont parties du LEGI avant moi, Mathieu, Jean, Jean-Baptiste, Olivier, Guillaume (alias Cornic), Eric, Christophe.

J'ai également passé du temps au laboratoire ISTerre, au sein de l'équipe Géodynamo. Je tiens à remercier chaleureusement l'ensemble de cette équipe pour m'avoir accueilli, notamment lors des périodes de fermetures du LEGI. Cette double affiliation m'a permis de voir de près le fonctionnement de deux équipes de recherches assez différentes. Merci aux thésardEs de cette équipe, François, Simon, Gabrielle, Ainhoa, Jérémie, Olivier, et aux permanentEs, Henri-Claude, Dominique, Nicolas, Phillipe, Claire, David.

I have now to write this short passage in English, to make sure that the people acknowledged here will understand it. First, of course Rodion, thanks for all this good work done together, and for all the fun, let's play pool again! In addition I will also thank here all the people from the ICMM whom welcomed me twice in their group, and that I enjoyed being in different conferences, Peter, Andrei, Irina, Andrei...

Après le monde universitaire, il est temps à présent de remercier les personnes qui m'ont accompagné depuis "l'extérieur". Je commencerais avant tout par les camarades

---

et amiEs du ciné-club, Manu, Lucie, et Clem, pour toutes les discussions passionnées, qui une fois commencées ne s'arrêtent jamais. Je remercie également toutes les personnes rencontrées à Grenoble ou à Corbeil, dans différents contextes, et qui m'ont soutenu toutes ces longues années d'études, Florian Pz, Vanessa, Nada, Faren, Sophia, Yannick et bien d'autres...

Mes derniers mots vont à ma famille, mes grands parents, mes frères, et surtout mes parents, pour tout.

---

<b>Notations</b>		<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>		<b>5</b>
<b>I Turbulence hydrodynamique</b>		<b>7</b>
<b>2 État de l'art</b>		<b>9</b>
2.1 Généralités . . . . .		9
2.2 Statistiques . . . . .		9
2.2.1 Dans l'espace physique . . . . .		9
2.2.2 Dans l'espace spectral . . . . .		12
2.3 Turbulence non hélicitaire et hélicitaire . . . . .		15
2.3.1 Cascade d'énergie . . . . .		15
2.3.2 Turbulence hélicitaire . . . . .		17
2.4 Statistiques spécifiques à la turbulence hélicitaire . . . . .		19
<b>3 Simulation Numérique Directes d'écoulements turbulents</b>		<b>23</b>
3.1 Turbulence Homogène isotrope forcée . . . . .		24
3.1.1 Dérivation d'un forçage aléatoire, non hélicitaire, $F_{Alv1}$ (Alvelius 1999). . . . .		24
3.1.2 Dérivation d'un forçage aléatoire, hélicitaire aux grandes échelles, $F_{Alv2}$ . . . . .		26
3.1.3 Dérivation d'un forçage aléatoire, hélicitaire sans injection d'énergie, $F_{Hel}$ . . . . .		27
3.2 Outils statistiques . . . . .		29
3.2.1 Spectres . . . . .		29
3.2.2 Flux . . . . .		33
<b>4 Résultats</b>		<b>35</b>
4.1 Validation du forçage $F_{Alv2}$ . . . . .		35
4.2 Validation du forçage $F_{Hel}$ . . . . .		38
4.2.1 Retour sur l'analyse dimensionnelle . . . . .		38

4.2.2	$F_{Alv1}$ et $F_{Hel}$	39
4.2.3	$F_{Alv2}$ et $F_{Hel}$	43
4.3	Statistiques	44

## II Turbulence magnétohydrodynamique : Simulation et modélisation 51

<b>5</b>	<b>État de l'art : turbulence MHD</b>	<b>53</b>
5.1	Généralités	53
5.2	Effet dynamo : concept physique	56
5.3	Le rôle de l'hélicité en turbulence MHD	57
5.3.1	Effet $\alpha$ et $\omega$ approche phénoménologique	57
5.3.2	Écoulements MHD en présence d'hélicité	58
5.4	Outils statistiques	59
<b>6</b>	<b>État de l'art : modélisation de la turbulence MHD</b>	<b>63</b>
6.1	Introduction	63
6.2	Formalisme de la séparation d'échelle : opération de filtrage dans l'espace physique.	65
6.3	LES en turbulence hydrodynamique	66
6.3.1	Modèle de Smagorinsky (1963)	67
6.3.2	Le modèle du gradient (Leonard 1974)	69
6.3.3	Introduction aux modèles mixtes : le Modèle de Clark	69
6.4	Expression des modèles de turbulence utilisé pour les LES en MHD	69
6.4.1	Notion de diffusivité turbulente en magnétohydrodynamique.	69
6.4.2	Smagorinsky/Theobald (SLM)	70
6.4.3	Modèle d'hélicité croisée (CHM)	72
6.4.4	Modèle du gradient (GM)	73
6.4.5	Modèle Mixte : Extension du modèle de Clark aux cas MHD (MG-SLM)	73
<b>7</b>	<b>Méthodologie</b>	<b>75</b>
7.1	Introduction	75
7.2	Simulations numériques directes d'écoulements turbulents en présence d'un champ magnétique	76
7.3	Séparation d'échelles dans l'espace physique en turbulence MHD	77
7.4	Évaluation des modèles de turbulence utilisé en LES	82
7.4.1	Notion de tests a priori	82
7.4.2	Notion de tests a posteriori	84
<b>8</b>	<b>Simulations numériques directes : Analyse des équilibres énergétiques</b>	<b>85</b>
8.1	Simulations numériques directes d'écoulements turbulents en présence d'un champ magnétique	85
8.2	Résultats sur les équilibres énergétiques et transferts associés.	89
8.2.1	Équilibre global des énergies sur-maillles	90
8.2.2	Équilibre global des énergies sous-maillles	93

## TABLE DES MATIÈRES

---

8.2.3	Équilibre local . . . . .	95
<b>9</b>	<b>Évaluation des performances des modèles de turbulence</b>	<b>103</b>
9.1	Configuration non-hélicitaire (NH01) . . . . .	103
9.1.1	Test a priori . . . . .	103
9.1.2	Test a posteriori . . . . .	106
9.2	Configuration hélicitaire sans modèle d'hypodiffusivité (H01) . . . . .	108
9.2.1	Test a priori . . . . .	108
9.2.2	Test a posteriori . . . . .	111
9.3	Configuration hélicitaire avec modèle d'hypodiffusivité (H02) . . . . .	112
9.3.1	Test a priori . . . . .	112
9.3.2	Test a posteriori . . . . .	114
<b>10</b>	<b>Conclusions et perspectives.</b>	<b>117</b>





## LISTE DES SYMBOLES

$\mathbf{u}$	Champ de vitesse
$p$	Pression du fluide
$\nu$	Viscosité du fluide
$\lambda$	Micro-échelle de Taylor.
$L$	Échelle intégrale.
$l_K$	Échelle de Kolmogorov.
$R_{ij}^c$	Tenseur des corrélations d'ordre deux de la vitesse
$Re$	Nombre de Reynolds
$R_\lambda$	Nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor.
$R_L$	Nombre de Reynolds basé sur l'échelle intégrale.
$\epsilon$	Injection d'énergie.
$\delta$	Injection d'hélicité.
$\eta(k)$	Densité spectrale (volumique) d'injection d'hélicité par unité de temps.
$F_{Alv1}$	Forçage d'Alvelius non-hélicitaire (version classique)
$F_{Alv2}$	Forçage d'Alvelius hélicitaire
$F_{Hel}$	Forçage Hélicitaire sans injection d'énergie.
$k_f$	Nombre d'onde auquel le forçage est appliqué.
$E$	Énergie cinétique ( partie I)
$E^\pm$	Énergie contenue dans les modes hélicitaires positifs/négatifs.

---

$H$	Hélicité cinétique.
$H^\pm$	Hélicité contenue dans les modes hélicitaires positifs/négatifs.
$\tau_E$	Temps caractéristiques de l'énergie.
$\tau_H$	Temps caractéristiques de l'hélicité.
$S^E(\mathbf{k})$	Transfert d'énergie effectué depuis le vecteur d'onde $\mathbf{p}$ (émetteur), vers le récepteur $\mathbf{k}$ , à l'aide du médiateur $\mathbf{q}$ .
$S^H(\mathbf{k})$	Transfert d'hélicité effectué depuis le vecteur d'onde $\mathbf{p}$ (émetteur), vers le récepteur $\mathbf{k}$ , à l'aide du médiateur $\mathbf{q}$ .
$S_E^{a,b,c}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$	Transferts d'énergie vers le nombre d'onde $\mathbf{k}$ , depuis le mode $\mathbf{p}$ , à l'aide du médiateur $\mathbf{q}$ , décomposés à l'aide des modes hélicitaires positifs/négatifs.
$T^E(\mathbf{k})$	Transfert d'énergie depuis tous les modes $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ , vers le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ .
$T^H(\mathbf{k})$	Transfert d'hélicité depuis tous les modes $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ , vers le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ .
$T_E^{a,b,c}(\mathbf{k}, t)$	Transferts d'énergie vers le nombre d'onde $\mathbf{k}$ décomposés à l'aide des modes hélicitaires positifs/négatifs.
$\Pi^E(k)$	Flux d'énergie cinétique.
$\Pi^H(k)$	Flux d'hélicité cinétique.
$\Pi_E^\pm(\mathbf{k}')$	Flux d'énergie $E^\pm$
$\Pi_E^{abc}(k)$	Flux d'énergie décomposés à l'aide des modes hélicitaires
$\mathbf{a}$	Potentiel vecteur magnétique.
$\mathbf{b}$	Champ magnétique
$\mathbf{j}$	Densité de courant
$\eta$	Diffusivité magnétique (Partie II)
$P_m$	Nombre de Prandtl magnétique
$R_{m\lambda}$	Nombre de Reynolds magnétique basé sur la micro échelle de Taylor
$E_k$	Énergie cinétique (partie II).
$E_m$	Énergie magnétique.
$E_t$	Énergie totale.
$H_c$	Hélicité croisée.
$H_m$	Hélicité magnétique.

---

## TABLE DES MATIÈRES

---

$H_r$	Hélicité résiduelle.
$\alpha_m$	Exposant du modèle d'hypodiffusivité magnétique
$\mu_m$	Coefficient du modèle d'hypodiffusivité magnétique
<i>LES</i>	Larges Eddy Simulations/ Simulations des Grandes Échelles.
$\bar{\mathbf{u}}$	Champ de vitesse filtré.
$\bar{\mathbf{b}}$	Champ de magnétique filtré.
$G_\Delta$	noyau du filtre de taille $\Delta$
$M_k$	Moment d'ordre $k$ du filtre $G_\Delta$ .
<i>GS</i>	Grid-scales/échelles simulées en LES
<i>SGS</i>	Subgrid-scales/échelles non simulées en LES
$\tau_{ij}^b$	Tenseur sous-maille de Maxwell.
$\tau_{ij}^u$	Tenseur sous-maille de Reynolds.
$\tau_{ij}^{ub}$	Tenseur sous-maille de l'équation d'induction.
$\bar{J}_{ij}$	Tenseur de rotation magnétique.
$\bar{S}_{ij}^b$	Tenseur de taux de déformation magnétique.
$\bar{S}_{ij}^u$	Tenseur de taux de déformation.
$\Delta$	Taille du filtre $\Delta$
$\hat{\Delta}$	Seconde taille de filtre $\hat{\Delta} > \Delta$ .
$\nu_t$	Viscosité turbulente.
$\eta_t$	Diffusivité magnétique turbulente.
$C_\lambda$	Coefficient de la diffusivité magnétique turbulente.
$C_\nu$	Coefficient du modèle de type viscosité turbulente.
$L_{ij}^b$	Tenseur de Leonard associé au tenseur sous-maille de Maxwell.
$L_{ij}^u$	Tenseur de Leonard associé au tenseur sous-maille de Reynolds.
$L_{ij}^{u-b}$	Tenseur de Leonard associé à la différence des tenseurs sous-maille de Reynolds et de Maxwell.
$L_{ij}^{ub}$	Tenseur de Leonard associé au tenseur sous-maille de l'équation d'induction.
$E_k^{GS}$	Énergie cinétique sur-maille

---

- $E_k^{SGS}$  Énergie cinétique sous-maille
- $E_m^{GS}$  Énergie magnétique sur-maille
- $E_m^{SGS}$  Énergie magnétique sous-maille
- $F^{GS}$  Injection d'énergie aux échelles sur-maillles.
- $F^{SGS}$  Injection d'énergie aux échelles sous-maillles.
- VI Dissipation d'énergie cinétique sur-maille.
- IV Terme d'échange entre énergies cinétique et magnétique sur-maille.
- IX Transferts sous-maillles lié au terme d'advection.
- X Transferts sous-maillles lié à la force de Lorentz.
- XVI Dissipation d'énergie cinétique sous-maille.
- XXIII Dissipation d'énergie magnétique sur-maille.
- XXVIII Dissipation d'énergie magnétique sous-maille.
- XIV Terme d'échange entre énergies cinétique et magnétique sous-maille.
- XXIV Transferts sous-maillles d'énergie magnétique.
- I, XI, XVIII et XXV Fluctuations temporelles des différentes énergies.
- II, XII, XIX et XXVI Termes d'advection des différentes énergies.
- XXVII, XXIX et XXX Termes diffusifs, qui n'influencent pas l'équilibre global.
- XVII, XXI, XXIII Termes diffusifs, qui n'influencent pas l'équilibre global.
- VIII, XIII, XV Termes diffusifs, qui n'influencent pas l'équilibre global.
- III, V, VII Termes diffusifs, qui n'influencent pas l'équilibre global.

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

La turbulence est un problème étudié depuis le 15<sup>e</sup> siècle, notamment avec les travaux de Leonard de Vinci qui décrit la formation des tourbillons dans des écoulements au sein de rivières ou de bassins. Ce phénomène est présent dans les océans, l'atmosphère, le noyau terrestre, les étoiles, le milieu interstellaire ou encore les galaxies. La diversité des fluides dans lesquels ce phénomène est observé contribue à expliquer pourquoi l'analyse de la turbulence est loin d'être aisée. Selon les contextes les fluides peuvent être stratifiés, conducteurs, diphasiques etc... Néanmoins la turbulence présente quelques caractéristiques génériques qui permettent de l'identifier lorsqu'elle est présente au sein d'un écoulement. L'une des caractéristiques de la turbulence est la large gamme d'échelles spatiales concernées par son action. En effet, on constate généralement des mouvements de grande échelle dans les écoulements, mais la présence de tourbillons montre aussi l'existence de structures plus petites. Les grands tourbillons sont générés à cause d'instabilités, qui peuvent être liés à de la convection, du cisaillement... Ces grands tourbillons perdent de l'énergie au profit de tourbillons plus petits. On constate alors la présence de tourbillons de plus en plus petits, jusqu'à atteindre l'échelle de dissipation visqueuse.

L'énergie cinétique cascade ainsi des grandes vers les petites échelles. Une des premières études phénoménologiques sur le sujet fut réalisée au 19<sup>e</sup> siècle par Richardson [81]. Puis au 20<sup>e</sup> siècle, Kolmogorov [55] formalisa la cascade d'énergie cinétique en proposant un modèle de la répartition de cette énergie aux différentes échelles. Néanmoins, ce modèle n'est vérifié que pour des écoulements homogènes et isotropes, et pour lesquels les seuls paramètres sont l'injection d'énergie et l'échelle à laquelle la turbulence est observée. Pour des objets comme le noyau terrestre ou la zone convective du Soleil, la physique est plus complexe. En effet, dans ces cas là, le fluide étant conducteur de l'électricité, la dynamique de l'écoulement est couplée à celle du champ magnétique respectivement de la Terre ou du Soleil. Parker [72] a suggéré que la présence d'événements cycloniques (typiquement des rouleaux de convection) permettait d'amplifier le champ magnétique d'une étoile. Ceci est généralement favorisé par la présence d'hélicité cinétique<sup>1</sup>. L'influence de l'hélicité cinétique sur le champ magnétique d'un écoulement conducteur est ainsi l'une des principales motivations de l'étude de la turbulence hélicitaire.

---

1. Voir le chapitre 2 pour une définition.

Dans les années 1970, Brissaud *et al* [21] se sont notamment demandés si le fait d’injecter massivement de l’hélicité cinétique dans un écoulement (non conducteur) pouvait modifier la cascade d’énergie cinétique. Ils ont montrés que dans le cas où la physique de l’écoulement est contrôlée par l’injection d’hélicité et non plus par l’injection d’énergie, le comportement énergétique de la turbulence est modifié, et ne correspond plus à l’analyse réalisée par Kolmogorov. Néanmoins l’analyse proposée par Brissaud *et al* [21] n’a actuellement pas été vérifiée numériquement ou expérimentalement, et constitue l’un des enjeux de l’étude de la turbulence hélicitaire.

Pour les écoulements conducteurs de l’électricité présents dans la zone convective du Soleil ou au sein du noyau terrestre, on cherche généralement à déterminer comment le champ magnétique est généré grâce à la turbulence. L’une des méthodes employées consiste à réaliser des simulations numériques de ces objets. Néanmoins, la présence de turbulence impose de résoudre de très nombreuses échelles dans le cas de simulations numériques directes. Bien que la puissance de calcul actuelle soit en pleine expansion, elle reste insuffisante pour effectuer des simulations réalistes des objets géophysiques ou astrophysiques. Une solution connue sous le nom de Large Eddy Simulations consiste alors à résoudre les grandes échelles de l’écoulement, et à modéliser les interactions entre les grandes et les petites échelles. De nombreux efforts ont été réalisés pour développer des modèles de turbulence aussi bien en hydrodynamique que pour les écoulements conducteurs. Il s’agit encore aujourd’hui d’un domaine de recherche très actif.

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont pour ambition de poursuivre les efforts de recherche à la fois sur la compréhension de la dynamique de la turbulence hélicitaire et sur la modélisation de la turbulence magnétohydrodynamique (pour des fluides conducteurs de l’électricité). Ainsi, ce manuscrit est composé de deux parties distinctes. Dans la première partie nous nous intéresserons à la turbulence hélicitaire hydrodynamique. Nous allons dans un premier temps introduire les équations et grandeurs utiles à l’étude de la turbulence. Nous introduirons ensuite différents forçages dans le but de confirmer numériquement l’analyse de Brissaud *et al* [21]. Finalement nous réaliserons plusieurs simulations numériques d’écoulements turbulents en présence d’hélicité, et effectuerons une analyse statistique de ces simulations.

Dans la seconde partie de ce manuscrit nous nous intéresserons principalement à la modélisation de la turbulence magnétohydrodynamique. Dans un premier temps nous présenterons le contexte général de la turbulence magnétohydrodynamique. Puis nous décrirons divers modèles utilisés en turbulence magnétohydrodynamique. Nous réaliserons ensuite plusieurs simulations numériques directes d’écoulements conducteurs. Nous finirons par une évaluation des performances des modèles de turbulence, sur la base des résultats obtenus par simulations directes.

**Première partie**  
**Turbulence hydrodynamique**





## 2.1 Généralités

La physique des écoulements turbulents est régie par les équations de Navier-Stokes, qui s'écrivent sous la forme suivante dans une limite incompressible :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  est le champ de vitesse et  $p(\mathbf{x}, t)$  est la pression du fluide. Les grandeurs notées en gras telles que la vitesse  $\mathbf{u}$  désignent des vecteurs. Par ailleurs, la masse volumique et la viscosité du fluide sont notées  $\rho$  et  $\nu$ . La force  $\mathbf{f}$  est une force externe qui permet l'injection d'énergie. Le terme d'advection  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  est responsable de la génération de la turbulence dans l'écoulement. Ce terme d'advection est en concurrence avec les effets visqueux  $\nu \Delta \mathbf{u}$ . Lorsque l'écoulement est dominé par les effets visqueux, il est dit laminaire, et lorsque le terme d'advection est dominant l'écoulement est considéré comme turbulent.

## 2.2 Statistiques

### 2.2.1 Dans l'espace physique

Afin de caractériser le caractère turbulent ou laminaire d'un écoulement, le rapport des termes visqueux et d'advection conduit au nombre de Reynolds,

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.3)$$

où  $U$  et  $L$  sont une vitesse et une longueur caractéristique de l'écoulement étudié. Historiquement ce nombre sans dimension fut introduit par Reynolds dans le cadre de l'étude

d'un fluide circulant dans une conduite cylindrique [80],  $L$  et  $U$  étant le diamètre de la conduite et la vitesse moyenne dans la conduite. Cela lui a permis de caractériser la transition entre un régime laminaire, correspondant à  $R_e < 2000$ , et un écoulement turbulent associé à  $R_e > 3000$ , avec un régime transitoire pour  $2000 < R_e < 3000$ .

Depuis cette étude, des longueurs et vitesses plus adaptées aux écoulements turbulents furent introduites. Afin de déterminer ces grandeurs caractéristiques, la première étape consiste à introduire une séparation entre les parties moyennes<sup>1</sup> et fluctuantes de l'écoulement. Si l'on note  $u_i$  la composante dans la direction  $i$  (avec  $i = x, y$  ou  $z$ ) du champ de vitesse,  $u_i$  se décompose alors sous la forme,

$$u_i = \langle u_i \rangle + u'_i, \quad (2.4)$$

avec  $\langle u_i \rangle$  la valeur moyenne du champ de vitesse, et  $u'_i$  sa partie fluctuante. L'équation de transport de la partie moyenne s'écrit alors, grâce à la convention d'Einstein, de la façon suivante :

$$\partial_t \langle u_i \rangle + \langle u_j \rangle \partial_j \langle u_i \rangle = -\partial_i \langle p \rangle + \nu \partial_j^2 \langle u_i \rangle - \partial_j R_{ij} + \langle f_i \rangle \quad (2.5)$$

où  $R_{ij} = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle = \langle u'_i u'_j \rangle$  est le tenseur de Reynolds, qui correspond aux interactions entre les parties moyenne et fluctuante de l'écoulement. Bien que le choix spécifique de l'opérateur de Reynolds, dépende du problème considéré, il doit respecter les propriétés suivantes :

$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b} \rangle, \quad (2.6)$$

$$\langle C \cdot \mathbf{a} \rangle = C \cdot \langle \mathbf{a} \rangle, \quad (2.7)$$

$$\langle \langle \mathbf{a} \rangle \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} \rangle \cdot \langle \mathbf{b} \rangle, \quad (2.8)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_1} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{a} \rangle}{\partial x_1}, \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont deux champs vectoriels quelconques,  $C$  est une constante, et  $x_1$  une direction quelconque de l'écoulement. De cette séparation entre les parties moyennes et fluctuantes de l'écoulement, on en déduit la définition de l'énergie cinétique turbulente<sup>2</sup> :

$$E = \frac{1}{2} \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_i(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (2.10)$$

et d'une vitesse caractéristique de l'écoulement turbulent,  $U_{r.m.s} = \sqrt{\frac{2}{3} E}$  (où r.m.s signifie root mean square).

Pour calculer un nombre de Reynolds il reste à déterminer une longueur caractéristique de la turbulence. Pour cela on introduit le tenseur des corrélations d'ordre deux de la vitesse. Ce tenseur noté  $R_{ij}^c$  s'exprime de la façon suivante :

$$R_{ij}^c(\mathbf{r}, t) = \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle. \quad (2.11)$$

1. Ici la moyenne est temporelle et spatiale. Dans le cas d'écoulement anisotropes, la moyenne peut également n'être spatiale que dans une ou deux direction. Voir [100] pour un exemple en MHD.

2. Ici la moyenne est calculée sur tout l'espace.

## 2.2 Statistiques

---

En introduisant un vecteur transverse et un vecteur longitudinal au vecteur  $\mathbf{r}$ , le tenseur des corrélations peut être décomposé en une partie longitudinale et une partie transverse. Cette décomposition se fait à l'aide de deux fonctions adimensionnelles, notées  $f(r, t)$  pour la partie transverse, et  $g(r, t)$  pour la partie longitudinale, où  $r = |\mathbf{r}|$  [11] :

$$f(r, t) = \frac{\langle u'_\perp(\mathbf{x}, t)u'_\perp(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_\perp, t) \rangle}{\langle u'_\perp(\mathbf{x}, t)u'_\perp(\mathbf{x}, t) \rangle}, \quad (2.12)$$

$$g(r, t) = \frac{\langle v'_\parallel(\mathbf{x}, t)v'_\parallel(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_\parallel, t) \rangle}{\langle u'_\parallel(\mathbf{x}, t)u'_\parallel(\mathbf{x}, t) \rangle}, \quad (2.13)$$

$$R_{ij}^c(\mathbf{r}, t) = 2E_k(g(r, t)\delta_{ij} + (f(r, t) - g(r, t))\frac{r_i r_j}{r^2}) \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{e}_\perp$  et  $\mathbf{e}_\parallel$  désignent un vecteur unitaire transverse et longitudinal au vecteur  $\mathbf{r}$  respectivement. Par ailleurs, grâce à l'hypothèse d'incompressibilité du fluide,  $g$  peut s'exprimer en fonction de  $f$  :

$$g(r, t) = f(r, t) + \frac{r}{2} \frac{df}{dr} \quad (2.15)$$

À partir des expressions de  $g$  et  $f$ , il est possible de définir deux longueurs caractéristiques de l'écoulement  $L$  et  $\lambda$ .  $L$  désignant l'échelle intégrale et  $\lambda$  désignant l'échelle de Taylor [91]. Elles correspondent respectivement à la longueur de cohérence des grandes et petites structures tourbillonnaires de l'écoulement. Chacune de ces grandeurs peut se décomposer en une longueur transverse et une longueur longitudinale. Pour l'échelle intégrale ( $L$ ) elles s'écrivent de la façon suivante [11] :

$$L_\perp = \int_0^\infty g(r, t) dr, \quad (2.16)$$

$$L_\parallel = \int_0^\infty f(r, t) dr, \quad (2.17)$$

et pour l'échelle de Taylor [91, 92] :

$$\lambda_\parallel = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Big|_{r=0, t}\right)^{-1/2}, \quad (2.18)$$

$$\lambda_\perp = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \Big|_{r=0, t}\right)^{-1/2}, \quad (2.19)$$

L'échelle de Taylor peut également s'exprimer en fonction de l'énergie turbulente et des gradients moyens de l'écoulement [92, 77, 59] :

$$\lambda_\parallel = \frac{\sqrt{2}U_{r.m.s}}{\sqrt{\langle (\partial u_1(\mathbf{x}, t)/\partial x_1)^2 \rangle}}, \quad (2.20)$$

$$\lambda_\perp = \frac{U_{r.m.s}}{\sqrt{\langle (\partial u_1(\mathbf{x}, t)/\partial x_1)^2 \rangle}}, \quad (2.21)$$

où 1 correspond à une direction quelconque de l'écoulement. Les longueurs transverses et longitudinales sont dépendantes l'une de l'autre, comme le montre l'équation (2.15), et leur ratio est une constante qui, pour un écoulement isotrope, s'exprime sous la forme :

$$\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = \sqrt{2}, \quad (2.22)$$

$$\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} = 2. \quad (2.23)$$

À partir de la vitesse  $U_{r.m.s}$ , ainsi que des différentes longueurs précédemment introduites, il est donc possible de définir deux nombres de Reynolds :

$$R_{\lambda} = \frac{U_{r.m.s}\lambda_{\perp}}{\nu}, \quad (2.24)$$

$$R_L = \frac{U_{r.m.s}L_{\perp}}{\nu}, \quad (2.25)$$

$R_{\lambda}$  étant désigné comme le nombre de Reynolds, basé sur la micro-échelle de Taylor, et  $R_L$  étant le nombre de Reynolds basé sur l'échelle intégrale. Ici le choix des longueurs transverses est arbitraire, et dans la littérature les longueurs longitudinales sont aussi utilisées. Ainsi, Lesieur [59] donne une définition du nombre de Reynolds basé sur des longueurs transverses, et Pope [77] donne une définition ayant recours aux longueurs longitudinales. Dans la suite de ce manuscrit nous utiliserons un nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle transverse de Taylor.

Pour compléter cette introduction, nous introduisons ici la notion d'hélicité cinétique. Cette quantité, qui peut être présentée simplement comme un produit scalaire entre le champ de vitesse et le champ de vorticité,  $\omega(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , est interprétée comme étant le nombre de nœuds présents dans le champ de vorticité [66]. Nous pouvons alors définir l'hélicité cinétique turbulente  $H$ , et le tenseur des corrélations d'ordre deux entre le champ de vitesse et le champ de vorticité,

$$H = \frac{1}{2} \langle u'_i(\mathbf{x}, t)\omega'_i(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (2.26)$$

$$R_{ij}^H(\mathbf{r}, t) = \langle u'_i(\mathbf{x}, t)\omega'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle. \quad (2.27)$$

Lorsque l'écoulement est symétrique, l'hélicité cinétique est nulle. Néanmoins une perte de parité dans l'écoulement se traduit par une hélicité cinétique non-nulle.

## 2.2.2 Dans l'espace spectral

Une autre analyse de la turbulence, explorée en profondeur depuis plusieurs décennies, repose sur une description dans l'espace spectral. En supposant que l'écoulement est  $2\pi$  périodique, nous pouvons appliquer une transformation de Fourier au champ de vitesse, qui s'exprime alors de la façon suivante :

## 2.2 Statistiques

---

$$u_l(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} u_l(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x} = u_l^*(-\mathbf{k}, t) \quad (2.28)$$

où  $u_l$  est la composante spectrale du champ de vitesse dans la direction  $l$ , et  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde. Par ailleurs on note  $u_l^*$  la quantité conjuguée du nombre complexe  $u_l$ .

Le tenseur des corrélations d'ordre 2 de la vitesse, précédemment exprimé dans l'espace physique, est également utile dans l'espace spectral, notamment pour définir la densité spectrale de l'énergie. Dans un premier temps, nous définissons le tenseur spectral du champ de vitesse  $\phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$  comme étant la transformée de Fourier du tenseur des corrélations d'ordre deux  $R_{ij}^c(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} R_{ij}^c(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (2.29)$$

Le tenseur des corrélations d'ordre deux dans l'espace de Fourier s'écrit alors sous la forme,

$$R_{ij}^c(\mathbf{k}', t) = \langle u_i(\mathbf{k}, t) u_j^*(\mathbf{k}', t) \rangle_k = \phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.30)$$

où  $\langle \rangle_k$  désigne une moyenne sur les nombres d'ondes  $\mathbf{k}$ . Le lien avec l'énergie cinétique se fait sous la forme d'une intégrale sur tout l'espace, de la trace du tenseur spectral de la vitesse  $\phi$ ,

$$E = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \phi_{ii}(\mathbf{k}, t) \rangle_k \quad (2.31)$$

Dans l'espace spectral, la densité volumique de l'énergie cinétique s'écrit alors en fonction de la trace du tenseur  $\phi$ ,

$$E(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \phi_{ij}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad (2.32)$$

Par ailleurs, nous avons précédemment introduit l'hélicité cinétique, et le tenseur des corrélations entre le champ de vitesse et le champ de vorticité. Nous pouvons exprimer de nouveau ce tenseur dans l'espace de Fourier :

$$R_{ij}^H(\mathbf{k}', t) = \langle u_i(\mathbf{k}, t) \omega_j^*(\mathbf{k}', t) \rangle = \phi_{ij}^H(\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.33)$$

où le tenseur spectral hélicitaire  $\phi_{ij}^H$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi_{ij}^{H_u}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} R_{ij}^{H_u}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (2.34)$$

De même que pour l'énergie cinétique, l'hélicité cinétique dans l'espace physique est reliée au tenseur spectral hélicitaire,

$$H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \phi_{ij}^H(\mathbf{k}, t) \rangle_k. \quad (2.35)$$

Finalement, la densité spectrale de l'hélicité cinétique s'écrit alors en fonction de la trace du tenseur  $\phi^H$ ,

$$H(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \phi_{ii}^H(\mathbf{k}, t). \quad (2.36)$$

À présent, nous souhaitons établir les expressions des transferts et flux d'énergie et d'hélicité. Tout d'abord, notons que l'équation de transport de la densité spectrale de l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme suivante [59, 95, 74],

$$(\partial_t + \nu k^2) E_k(\mathbf{k}, t) = T^E(\mathbf{k}, t) \quad (2.37)$$

où  $T^E(\mathbf{k}, t)$  est le transfert d'énergie depuis tous les modes  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ , vers le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Il s'écrit sous la forme,

$$T^E(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{q} \\ \mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}}} (S^E(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + S^E(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p})) \quad (2.38)$$

où  $S^E(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$  représente le transfert d'énergie effectué depuis le vecteur d'onde  $\mathbf{p}$  (émetteur), vers le récepteur  $\mathbf{k}$ , à l'aide du médiateur  $\mathbf{q}$ . Ce transfert mode à mode s'exprime de la façon suivante,

$$S^E(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = -I \{ [\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{q})] [\mathbf{u}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k})] \} \quad (2.39)$$

Du fait de l'interaction entre trois modes distincts, tels que  $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ , on parle d'interactions triadiques. Ces transferts ont été largement étudiés pour différents types d'écoulements isotropes, et sont également utiles à la définition d'une autre grandeur physique importante en turbulence, les flux d'énergies. En effet, le passage de l'un à l'autre se fait simplement via une intégrale bornée. Considérons un nombre d'onde  $k$ . Le flux d'énergie  $\Pi^E(k)$ , s'exprime alors en fonction des transferts,

$$\Pi^E(k) = - \int_0^k T^E(\mathbf{k}') d\mathbf{k}'. \quad (2.40)$$

L'espace de Fourier est ici séparé en deux. Nous pouvons définir une sphère de rayon  $k$ , et le flux d'énergie présenté ici correspond à l'énergie qui provient de l'intérieur de la sphère, pour aller vers l'extérieur de celle-ci. Le signe moins dans l'équation (2.40) est introduit par convention afin que le flux soit positif lorsque l'énergie sort de la sphère de rayon  $k$ , et négatif lorsque l'énergie rentre dans cette sphère [59]. En conséquence un flux

## 2.3 Turbulence non hélicitaire et hélicitaire

---

positif correspond à une cascade directe (des grandes vers les petites échelles). Un flux négatif correspond à une cascade inverse (des petites vers les grandes échelles).

Cette approche peut être étendue aux transferts et flux d'hélicité cinétique. Nous obtenons :

$$\partial_t H_k(\mathbf{k}, t) = T^H(\mathbf{k}, t) \quad (2.41)$$

$$T^H(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{q} \\ \mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}}} (S^H(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + S^H(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p})), \quad (2.42)$$

$$S^H(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} I \{ [\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{q})][\mathbf{u}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{k})] + [\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{q})][\mathbf{w}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k})] \}, \quad (2.43)$$

$$\Pi^H(k) = -\int_0^k T^H(\mathbf{k}') dk'. \quad (2.44)$$

Dans l'étude que nous faisons dans ce manuscrit, ce sont les densités spectrales, ainsi que les flux, d'énergie et d'hélicité que nous analyserons numériquement pour différents types d'écoulements.

## 2.3 Turbulence non hélicitaire et hélicitaire

### 2.3.1 Cascade d'énergie

Une des premières explications phénoménologiques de la turbulence date du début du 20e siècle, et fut proposée par Richardson [81]. Dans son étude, il suppose qu'une perturbation est introduite à grande échelle  $l_0$  conduisant à l'injection d'énergie dans l'écoulement à cette même échelle. Par la suite, cette énergie est transférée vers des échelles de plus en plus petites, jusqu'à être dissipée sous forme de chaleur, du fait de la viscosité de fluide. En partant des équations de Navier-Stokes, moyennées dans tout l'espace, nous en déduisons l'équation de transport de l'énergie cinétique pour un écoulement turbulent, homogène et isotrope :

$$\frac{1}{2} \partial_t \langle \mathbf{u}^2 \rangle = \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \rangle - \nu \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (2.45)$$

Les termes de pression et d'advection sont nuls en moyenne, et donc n'apparaissent pas dans l'équation. En régime stationnaire, l'énergie cinétique moyenne est constante, il y a bien un équilibre global entre l'injection d'énergie, noté  $\epsilon$  et la dissipation d'énergie, via l'égalité :

$$\nu \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \rangle = \epsilon \quad (2.46)$$

Le terme  $\nabla^2$  est d'autant plus grand que les échelles concernées sont plus petites. Il est donc dominant à petite échelle. L'énergie injectée à grande échelle est donc dissipée principalement à petite échelle. Il y a donc un transfert d'énergie des grandes vers les



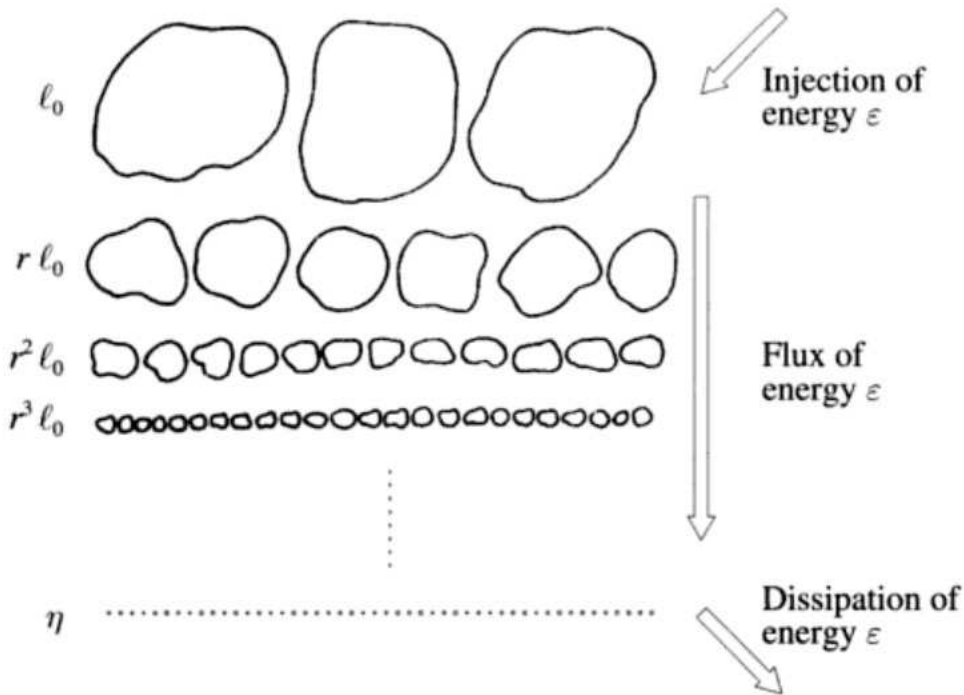


FIGURE 2.1 – Illustration de la cascade d’énergie selon Richardson, image extraite du livre de Frisch [39].

petites échelles (figure 1.1). On voit alors l’apparition de structures tourbillonnaires de plus en plus petites dans l’écoulement. La gamme d’échelle entre l’injection et la dissipation est appelée zone inertielle.

Par la suite, Kolmogorov [55] formalisa cette cascade d’énergie en ayant recours à une approche dimensionnelle. Cette analyse commence par l’introduction de trois hypothèses majeures [39],

- Supposons que pour des nombres de Reynolds suffisamment grands, les petites échelles turbulentes  $l$  sont statistiquement indépendantes du comportement de l’échelle d’injection d’énergie  $l_0$ , lorsque  $l \ll l_0$ . En particulier, si l’écoulement est anisotrope aux grandes échelles, l’isotropie est restaurée aux petites échelles.
- L’écoulement est auto-similaire à toutes les échelles
- Le taux de dissipation par unité de masse  $\epsilon$  est fini et non nul.

Par ailleurs, Kolmogorov introduit ce qui est connu sous le nom de ‘première hypothèse de similarité’ [39]. *Pour des nombres de Reynolds suffisamment grands, la dissipation d’énergie  $\epsilon$  et la viscosité sont les seuls paramètres qui contrôlent les statistiques aux petites échelles.* Cette première hypothèse de similarité mène à l’introduction de l’échelle de Kolmogorov, aussi désignée comme étant l’échelle de dissipation. Cette échelle correspond à la transition entre la zone inertielle et le début du régime dissipatif. Cette échelle s’exprime de la façon suivante,

## 2.3 Turbulence non hélicitaire et hélicitaire

---

$$l_K = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}. \quad (2.47)$$

Une seconde hypothèse de similarité est par la suite introduite par Kolmogorov, et est formulée ainsi : *Pour des nombres de Reynolds suffisamment grands, dans le régime inertiel, les statistiques sont contrôlées uniquement par le nombre d'onde  $k$  ainsi que par  $\epsilon$ .*

Cette seconde hypothèse de similarité permet d'exprimer la densité spectrale d'énergie cinétique en fonction uniquement du nombre d'onde  $k$  et du taux d'injection  $\epsilon$ ,

$$E(k, t) = C_E \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (2.48)$$

où  $C_E$  est une constante. Cette expression de la densité spectrale de l'énergie cinétique, qui caractérise l'autosimilarité d'un écoulement turbulent, est connue sous le nom de loi en  $k^{-5/3}$  de Kolmogorov-Obukhov [55, 71]. Enfin on conserve l'hypothèse de Richardson selon laquelle le flux  $\Pi^E$  est constant dans toute la zone inertielle et égal à  $\epsilon$ . Cette phénoménologie de la cascade de Kolmogorov fut confirmée aussi bien expérimentalement que numériquement, et est introduite ici comme point de départ pour l'étude de la turbulence hélicitaire.

### 2.3.2 Turbulence hélicitaire

Nous avons précédemment introduit l'hélicité cinétique comme étant le produit scalaire entre le champ de vitesse et le champ de vorticité. Dans l'espace physique, l'équation de transport suivante régit l'évolution de cette quantité :

$$\begin{aligned} \partial_t \langle H(\mathbf{x}, t) \rangle = & \quad \nu \langle u(\mathbf{x}, t) \cdot \Delta \omega(\mathbf{x}, t) \rangle + \langle \omega(\mathbf{x}, t) \cdot \Delta u(\mathbf{x}, t) \rangle \\ & + \langle u(\mathbf{x}, t) \cdot (\nabla \times f(\mathbf{x}, t)) \rangle + \langle \omega(\mathbf{x}, t) \cdot f(\mathbf{x}, t) \rangle, \end{aligned} \quad (2.49)$$

où  $\langle \rangle$  signifie comme précedemment une intégration sur tout le volume. La moyenne des termes d'advection et de pression sont nuls. L'hélicité moyenne est donc un invariant de l'écoulement d'un fluide non visqueux. La dissipation d'hélicité est en équilibre avec l'injection, comme vu précedemment pour l'énergie. Cette injection est noté  $\delta$ ,

$$\delta = \nu \langle u(\mathbf{x}, t) \Delta \omega(\mathbf{x}, t) \rangle + \langle \omega(\mathbf{x}, t) \Delta u(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (2.50)$$

$$= \langle u(\mathbf{x}, t) \cdot (\nabla \times f(\mathbf{x}, t)) \rangle + \langle \omega(\mathbf{x}, t) \cdot f(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (2.51)$$

Comme précedemment nous pouvons effectuer une analyse dimensionnelle afin d'établir les lois d'échelle des densités spectrales d'énergie et d'hélicité cinétique. Pour un nombre de Reynolds suffisamment grand, les densités spectrales d'énergie  $E(k)$  et d'hélicité  $H(k)$  dans la zone inertielle sont régies par trois grandeurs physiques,  $\epsilon$ ,  $\delta$ , et  $k$ . Nous avons donc

5 grandeurs ( $E(k)$ ,  $H(k)$ ,  $k$ ,  $\epsilon$  et  $\delta$ ) pour seulement 2 dimensions (longueur et temps). On en déduit [48, 47] :

$$E(k, t) \sim \delta^{b-5/3} \epsilon^{7/3-a} k^{-a}, \quad (2.52)$$

$$H(k, t) \sim \delta^{b-2/3} \epsilon^{4/3-b} k^{-b}. \quad (2.53)$$

Pour établir des prédictions sur les pentes des densités spectrales d'énergie et d'hélicité, il est donc nécessaire de contraindre d'avantage notre problème. Pour cela nous introduisons d'abord les deux temps caractéristiques de l'énergie  $\tau_E$  et de l'hélicité  $\tau_H$ , qui s'expriment sous la forme suivante dans la zone inertielle [56],

$$\tau_E(k) = \left( \int_0^k p^2 E(p) dp \right)^{-1/2}, \quad (2.54)$$

$$\tau_H(k) = \left( \int_0^k p^3 H(p) dp \right)^{-1/2}. \quad (2.55)$$

Ces temps caractéristiques peuvent être exprimés également en fonction des densités spectrales et des flux [21],

$$\tau_E(k) \sim \frac{kE(k)}{\Pi^E(k)} \quad (2.56)$$

$$\tau_H(k) \sim \frac{kH(k)}{\Pi^H(k)}. \quad (2.57)$$

Pour contraindre notre problème nous pouvons supposer que les temps caractéristiques contrôlant les cascades d'énergie et d'hélicité sont les mêmes, et ne dépendent que du taux d'injection d'énergie  $\epsilon$ .

$$\tau_E(k) = \tau_H(k) = (\epsilon k^2)^{-1/3}, \quad (2.58)$$

Ce temps correspond au temps de retournement des structures tourbillonnaires. En supposant que les flux sont constants dans le régime inertiel, avec  $\Pi^E(k) = \epsilon$  et  $\Pi^H(k) = \delta$ , nous trouvons [21],

$$E(k, t) = C_E \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (2.59)$$

$$H(k, t) = C_H \delta \epsilon^{-1/3} k^{-5/3}. \quad (2.60)$$

Les lois de puissances obtenues aux équations (2.59) et (2.60) correspondent à  $a = b = 5/3$  pour les équations (2.52) et (2.53). On parle ici de cascade simultanée d'énergie et d'hélicité, avec des lois de puissance identiques pour l'énergie et l'hélicité.

En supposant maintenant que la turbulence soit contrôlée par l'injection d'hélicité avec donc un temps caractéristique  $\tau_H = (\delta k)^{-1/3}$ . En supposant de plus que le flux d'hélicité est constant et égal à  $\delta$ , on trouve  $H(k) \sim \delta^{2/3} k^{-4/3}$ . En supposant enfin que l'hélicité est maximale on a  $H(k) = kE(k)$ , impliquant  $E(k) \sim \delta^{2/3} k^{-7/3}$  [21].

## 2.4 Statistiques spécifiques à la turbulence hélicitaire

---

Ce qui revient à choisir  $a = 7/3$  et  $b = 4/3$  dans les équations (2.52) et (2.53). Les densités spectrales s'expriment alors de la façon suivante [21],

$$E(k, t) = C_E \delta^{2/3} k^{-7/3}, \quad (2.61)$$

$$H(k, t) = C_H \delta^{2/3} k^{-4/3}. \quad (2.62)$$

Le taux d'injection d'énergie  $\epsilon$  n'apparaissant pas dans les densités spectrales d'énergie et d'hélicité nous parlons dans ce cas de cascade purement hélicitaire.

La cascade simultanée d'énergie et d'hélicité a déjà été confirmée numériquement à l'aide de DNS [24]. En revanche ce n'est pas le cas de la cascade d'hélicité pure. Brisaud *al* [21] suggèrent que la loi en  $k^{-7/3}$  puisse être trouvée pour des configurations d'écoulements telles que  $\epsilon = 0$  et  $\delta \neq 0$ . Une possibilité d'après eux serait l'apparition d'une cascade inverse d'énergie aux échelles plus grandes que l'échelle d'injection d'hélicité  $l_0$ . Dans le chapitre 3, nous introduisons différents forçages, qui permettront au chapitre 4 de valider numériquement les trois types de cascade que nous venons d'introduire. Ici nous considérons une turbulence homogène et isotrope, sans rotation globale. Dans le cas d'une rotation globale l'hypothèse d'isotropie tomberait et les lois de puissance seraient différentes [43].

## 2.4 Statistiques spécifiques à la turbulence hélicitaire

Afin d'étudier la turbulence hélicitaire, le champ de vitesse peut être décomposé en modes hélicitaires positifs et négatifs. Cette décomposition, basée sur les vecteurs propres de l'opérateur rotationnel, fut introduite dans un premier temps par Craya [33], dans l'espace physique. Elle fut par la suite utilisée dans l'espace de Fourier, afin d'étudier les cascades jointes d'énergie et d'hélicité, notamment au travers de calcul de flux [98, 24, 60]. Via cette décomposition, les champs de vitesse et de vorticité spectraux s'écrivent sous la forme,

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}, t) = a_+(\mathbf{k}, t)\mathbf{h}_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k}, t)\mathbf{h}_-(\mathbf{k}) \quad (2.63)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}, t) = a_+(\mathbf{k}, t)\mathbf{h}_+(\mathbf{k}) - a_-(\mathbf{k}, t)\mathbf{h}_-(\mathbf{k}), \quad (2.64)$$

où  $\mathbf{h}_\pm(\mathbf{k})$  représentent la base formée par les vecteurs propres du rotationnel, pour un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  donné. Les termes  $a_\pm(\mathbf{k}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{h}_\pm^*(\mathbf{k})$  sont les coefficients du champ de vitesse dans cette base. Par ailleurs, les vecteurs hélicitaires s'expriment de la façon suivante :

$$\mathbf{h}_\pm(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\kappa} \pm i\boldsymbol{\nu}, \quad (2.65)$$

avec  $\boldsymbol{\kappa} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ , et  $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathbf{z} \times \boldsymbol{\kappa}}{|\mathbf{z} \times \boldsymbol{\kappa}|}$ , où  $\mathbf{z}$  est un vecteur unitaire choisi arbitrairement.

Nous pouvons alors définir les vecteurs vitesses positifs et négatifs, notés  $\mathbf{u}_\pm$ ,

$$\mathbf{u}_\pm(\mathbf{k}, t) = a_\pm(\mathbf{k}, t)\mathbf{h}_\pm(\mathbf{k}) \quad (2.66)$$

$$\mathbf{u}_\pm(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} \mathbf{u}_\pm(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (2.67)$$

Nous pouvons étendre cette décomposition à des quantités telles que l'énergie ou encore l'hélicité. Ce qui mène aux définitions suivantes pour les densités spectrales de ces deux quantités [24],

$$E^\pm(k, t) = \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{k}'|=k} \mathbf{u}_\pm(\mathbf{k}', t) \cdot \mathbf{u}_\pm^*(\mathbf{k}', t) dk' \quad (2.68)$$

$$H^\pm(k, t) = \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{k}'|=k} \boldsymbol{\omega}_\pm(\mathbf{k}', t) \cdot \mathbf{u}_\pm^*(\mathbf{k}', t) dk' \quad (2.69)$$

En présence d'une forte hélicité positive, nous devrions nous attendre à une forte influence des modes hélicitaires positifs sur l'écoulement, et a contrario, à une faible influence des modes négatifs. Ceci devrait se voir sur les spectres d'énergie  $E^\pm$  et d'hélicité  $H^\pm$ , comme suggéré par Lesieur [59],

$$E^+(k, t) = \frac{1}{2} \left( E(k) + \frac{H(k)}{k} \right) \quad (2.70)$$

$$E^-(k, t) = \frac{1}{2} \left( E(k) - \frac{H(k)}{k} \right) \quad (2.71)$$

Les équations (2.70) et (2.71) furent exprimées pour le cas d'une cascade jointe d'énergie et d'hélicité par Ditlevsen et Giuliani [35]. Dans leur étude, les énergies positives et négatives s'écrivent alors sous la forme :

$$E^+(k, t) = \frac{C_E}{2} \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-5/3} + \frac{C_H}{2} \delta \epsilon^{\frac{1}{3}} k^{-8/3} \quad (2.72)$$

$$E^-(k, t) = \frac{C_E}{2} \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-5/3} - \frac{C_H}{2} \delta \epsilon^{\frac{1}{3}} k^{-8/3} \quad (2.73)$$

Compte tenu des lois de puissances impliquées, les différences entre les deux spectres doivent être visibles uniquement pour de faibles nombres d'ondes, au début de la zone inertielle. C'est ce que confirment les observations numériques réalisées avec des modèles en couches [60]. Dans le cas d'une cascade d'hélicité maximale, nous réécrivons les équations (2.70) et (2.71) sous la forme,

$$E^+(k, t) = \frac{C_E + C_H}{2} \delta^{\frac{2}{3}} k^{-7/3} \quad (2.74)$$

$$E^-(k, t) = \frac{C_E - C_H}{2} \delta^{\frac{2}{3}} k^{-7/3} \quad (2.75)$$

Ce type de cascade n'ayant jamais été observé, nous en profiterons également pour vérifier les lois de puissances concernant les énergies  $E^+$  et  $E^-$ .

Nous avons précédemment introduit les transferts et flux d'énergie et d'hélicité. Il est possible d'étendre la décomposition en modes hélicitaires à ces quantités, le transfert d'énergie pouvant s'écrire de la façon suivante [98],

$$T_E(\mathbf{k}, t) = \sum_{a,b,c=\pm} T_E^{a,b,c}(\mathbf{k}, t) \quad (2.76)$$

$$T_E^{a,b,c}(\mathbf{k}) = \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{q} \\ \mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}}} (S_E^{a,b,c}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})), \quad (2.77)$$

$$S_E^{a,b,c}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = -I \{ [\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}^c(\mathbf{q})][\mathbf{u}^b(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}^a(\mathbf{k})] \}. \quad (2.78)$$

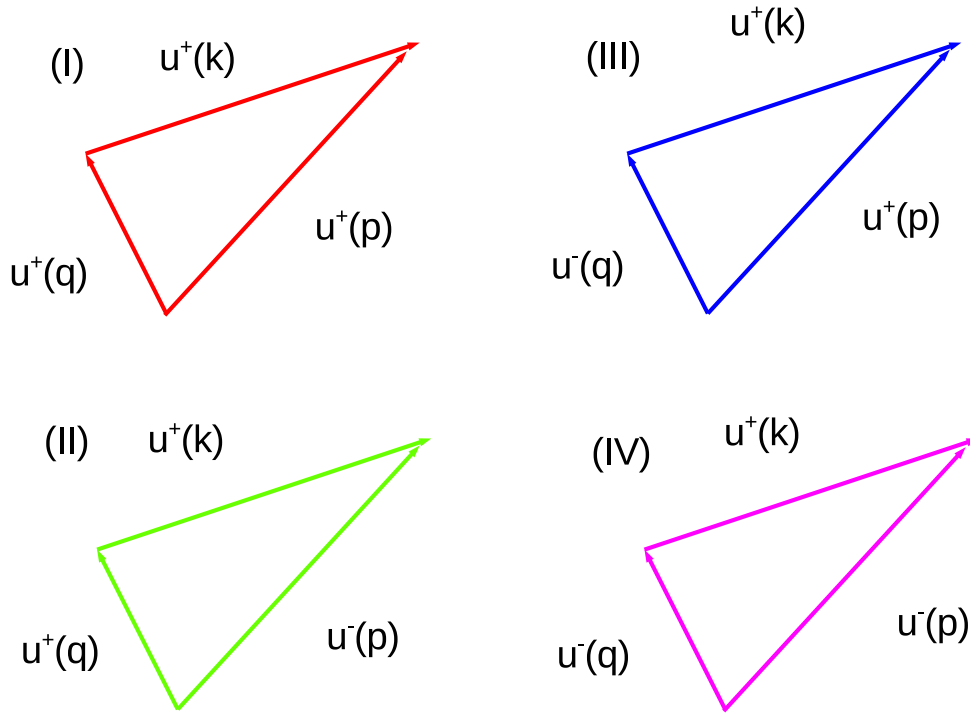


FIGURE 2.2 – Les interactions triadiques liées aux modes hélicitaires peuvent être réparties en 4 classes distinctes, où  $p$  est le nombre d’onde émetteur,  $k$  le nombre d’onde récepteur et  $q$  le nombre d’onde médiateur. Les 4 classes sont ici représentées en choisissant uniquement les interactions telles que le mode récepteur soit un mode hélicitaire positif. Les 4 autres interactions se retrouvent par symétrie. En effet, en changeant simultanément les trois signes des modes d’une triade, nous obtenons la deuxième triade de la même classe. Par exemple les deux triades de la classe I sont  $+++$  et  $---$  [12, 13].

Ici,  $a, b$ , et  $c$  peuvent être remplacés soit par des signes “+” soit par des signes “-”. Ces huit transferts représentent les différentes interactions possibles entre modes hélicitaires, qu’elles soit purement positives, négatives, ou bien qu’il s’agisse d’interactions entre modes hélicitaires de signes différents. En effet,  $S_E^{a,b,c}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$  représente les transferts d’énergie du nombre d’onde  $\mathbf{p}$  (émetteur), vers le nombre d’onde  $\mathbf{k}$  (récepteur), à l’aide du nombre d’onde  $\mathbf{q}$  (médiateur) [95].

C’est grâce à ces transferts que les flux d’énergies utiles à l’étude de la turbulence hélicitaire sont calculés. Classiquement les huit transferts sont regroupés, afin de se limiter à des représentations basées sur un flux d’énergie positive, et un flux d’énergie négative. C’est notamment ce qui est fait par Chen *et al* [24], ou Lessinnes *et al* [60]. Ces termes de transferts s’expriment en fonction des huit autres de la façon suivante :

$$T_E^+(\mathbf{k}, t) = T_E^{+,+,+}(\mathbf{k}, t) + T_E^{+,+,-}(\mathbf{k}, t) + T_E^{+,-,+}(\mathbf{k}, t) + T_E^{+,-,-}(\mathbf{k}, t) \quad (2.79)$$

$$T_E^-(\mathbf{k}, t) = T_E^{-,+,+}(\mathbf{k}, t) + T_E^{-,+,-}(\mathbf{k}, t) + T_E^{-,-,+}(\mathbf{k}, t) + T_E^{-,-,-}(\mathbf{k}, t) \quad (2.80)$$

Les flux d'énergie  $\Pi_E^+$  et  $\Pi_E^-$  s'expriment alors en fonction de deux transferts d'énergie, via une intégrale :

$$\Pi_E^\pm(\mathbf{k}') = - \int_0^k T_E^\pm(\mathbf{k}') dk' \quad (2.81)$$

Dans le cas d'une cascade jointe d'énergie et d'hélicité, en présence d'une forte hélicité positive, ces flux montrent que l'essentiel de la cascade directe d'énergie est liée au flux d'énergie positive  $\Pi_E^+$ . En revanche, dans le cas d'une cascade non hélicitaire, l'intensité des flux  $\Pi_E^+$  et  $\Pi_E^-$  est similaire [24, 60].

Par ailleurs, ces différentes interactions triadiques sont regroupés en 4 classes, comme résumé sur la figure 2.4. D'aucun pourrait imaginer qu'en présence d'une cascade d'hélicité maximale, l'influence des modes hélicitaires négatifs soit négligeable. Les interactions de classes II, III et IV n'auraient alors aucune influence sur l'écoulement, de même que les interactions de type  $---$ . C'est en tout cas ce que suggère Lucas Biferale [12, 13], et qui l'amène lorsqu'il réalise des simulations numériques, à ne résoudre que l'équation de transport des modes hélicitaires positifs. Cette idée mènerait notamment à une énergie  $E^-$  nulle, qui se traduit par une hélicité relative unitaire dans la zone inertielle dans le cas d'une cascade d'hélicité maximale. Par la suite, nous réaliserons des simulations numériques directes pour les différents types de cascades. Nous vérifierons également si l'approche proposée par Biferale est viable ou non, notamment grâce à la décomposition en modes hélicitaires que nous venons d'introduire.

## CHAPITRE 3

# SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTES D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS

Afin de réaliser des simulations numériques directes d'écoulements turbulents, nous avons recours à un code pseudo-spectral développé au LEGI, le code SCALES. Ce code utilise un schéma temporel du type Runge-Kutta de second ordre, résout exactement les termes de dissipation [58, 74], et utilise une règle de "de-aliasing" en 3/2. Les conditions aux limites sont quand à elles  $2\pi$  périodiques. Ce code permet de générer des écoulements turbulents via l'utilisation de forçages appliqués sur le champ de vitesse, qu'ils soient aléatoires, isotropes [4, 19, 51] ou non [82, 85]. Mais également de réaliser des Simulations des Grandes Échelles (SGE) si nécessaire. Afin d'assurer la stabilité des simulations réalisées, nous utilisons une contrainte CFL [30] sur le pas de temps, avec un nombre de Courant  $C = 0.5$ .

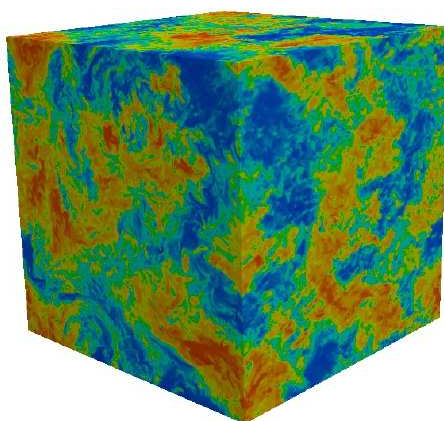


FIGURE 3.1 – Représentation d'une composante du champ de vitesse, pour une simulation discrétisée sur  $1024^3$  points de grilles, avec un nombre de Reynolds de  $R_\lambda = 230$



## 3.1 Turbulence Homogène isotrope forcée

### 3.1.1 Dérivation d'un forçage aléatoire, non hélicitaire, $F_{Alv1}$ (Alvelius 1999).

Afin d'étudier des écoulements turbulents vérifiant les observations de Kolmogorov [55], à l'aide d'un code numérique tel que SCALES, nous avons recours à des forçages aléatoires, qui permettent de générer des écoulements turbulents. L'injection de l'énergie est contrôlée via le terme de forçage  $\mathbf{f}$  (voir équation (2.1)), en modifiant l'intensité du forçage, l'échelle à laquelle l'injection d'énergie est maximale ou encore la viscosité de l'écoulement. L'un des problèmes que pose ce type de forçage est qu'il est parfois difficile de s'assurer à l'avance de la validité de la simulation, notamment si la résolution choisie permet de dissiper toute l'énergie injectée.

L'une des particularités du forçage introduit par Alvelius [4], est de contrôler cette injection d'énergie en imposant un nombre de Reynolds  $R_\lambda$ , et une séparation d'échelle entre l'échelle de Kolmogorov et la plus petite échelle résolue numériquement, ce qui permet à toute l'énergie injectée d'être dissipée, limitant ainsi le risque d'instabilités numériques. Afin d'obtenir l'expression de ce forçage, il faut d'abord étudier son influence sur le champ de vitesse, puis sur l'énergie, en occultant les termes d'advection et de dissipation visqueuse, puis en effectuant une discrétisation temporelle des équations de Navier-Stokes et de l'équation de l'énergie dans l'espace de Fourier. Alvelius [4] parvient à montrer que l'injection totale d'énergie pendant un intervalle de temps  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{K^{n+1} - K^n}{2\Delta t} = P_1 + P_2, \quad (3.1)$$

où  $K^n$  est l'énergie cinétique totale à l'instant  $t_n$ ,  $P_1$  est relié à l'énergie injectée dans tout l'espace via les termes d'autocorrélation du forçage, et  $P_2$  est relié à l'énergie injectée grâce aux corrélations entre le champ de vitesse et le forçage. Ces deux puissances s'écrivent sous la forme,

$$P_1 = \frac{\Delta t}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{f}_{\mathbf{k}}^n \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{k}}^{n*} dk^3 + c.c., \quad (3.2)$$

$$P_2 = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{f}_{\mathbf{k}}^n \cdot \mathbf{u}^n(\mathbf{k})^* dk^3 + c.c., \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{f}_{\mathbf{k}}^n$  désigne le forçage à l'instant  $t_n$ . Afin de s'assurer d'un contrôle simple de l'injection d'énergie, Alvelius propose d'imposer une contrainte sur le forçage telle que,

$$\mathbf{f}_{\mathbf{k}}^n \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{n*} + c.c. = 0. \quad (3.4)$$

Ce qui revient à contrôler l'injection d'énergie uniquement via les termes d'autocorrélation du forçage, tout en éliminant l'énergie injectée via les corrélations vitesse-forçage. Étant donné que la divergence du champ de vitesse est nulle, il est préférable d'imposer un forçage dont l'expression analytique mène à une divergence nulle également afin de ne pas modifier la pression. La forme du forçage suggérée par Alvelius mène donc à,

### 3.1 Turbulence Homogène isotrope forcée

$$\mathbf{f}(\mathbf{k}, t) = A(\mathbf{k}, t)\mathbf{e}_1(\mathbf{k}, t) + B(\mathbf{k}, t)\mathbf{e}_2(\mathbf{k}, t). \quad (3.5)$$

Les vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont des vecteurs unitaires tels que  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ .  $A$  et  $B$  sont les coefficients aléatoires associés aux vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ . Afin de contrôler l'intensité du forçage, une contrainte doit être imposée sur ces coefficients,

$$\langle AA^* \rangle_k + \langle BB^* \rangle_k = \frac{F(k)}{2\pi k^2}, \quad (3.6)$$

où  $F(k)$  est une fonction qui permet de définir l'intensité du forçage pour un nombre d'onde donné. Cette intensité est reliée à la puissance  $P_1$  via l'égalité  $\frac{P_1}{\Delta t} = \int_0^\infty F(k)dk$ . Par ailleurs la notation  $\langle \rangle_k$  désigne une moyenne effectuée sur tous les nombres d'ondes inclus sur la surface d'une sphère de rayon  $k$ . Les coefficients prennent la forme suivante,

$$A(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{F(k)}{2\pi k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(i\theta_1) g_A(\phi) \quad (3.7)$$

$$B(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{F(k)}{2\pi k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(i\theta_2) g_B(\phi) \quad (3.8)$$

où  $g_A$  et  $g_B$  sont deux fonctions telles que  $g_A(\phi) + g_B(\phi) = 1$ , et  $\theta_1, \theta_2$ , et  $\phi$  sont des nombres choisis aléatoirement à chaque pas de temps et pour chaque nombre d'onde, tels que  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ , et  $\phi \in [0, \pi]$ . De plus, comme indiqué dans l'équation (3.4), les corrélations vitesse-force doivent être nulles. Ce qui mène à l'introduction d'une contrainte supplémentaire sur l'angle  $\theta_1$  :

$$\tan \theta_1 = \frac{g_A(\phi)\mathcal{R}\{\xi_1\} + g_B(\phi)(\sin \psi \mathcal{I}\{\xi_2\} + \cos \psi \mathcal{R}\{\xi_2\})}{-g_A(\phi)\mathcal{I}\{\xi_1\}(\sin \psi \mathcal{R}\{\xi_2\} - \cos \psi \mathcal{I}\{\xi_2\})} \quad (3.9)$$

où  $\xi_1 = \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{e}_1$ ,  $\xi_2 = \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{e}_2$  et  $\psi = \theta_2 - \theta_1$ . Il reste ici deux paramètres aléatoires,  $\phi$  et  $\psi$ , qui permettent de s'assurer que le forçage est différent à chaque pas de temps. En supposant l'équilibre entre l'injection d'énergie et la dissipation, Alvelius parvient à exprimer la puissance injectée par le forçage,  $P_1$ , ainsi que l'échelle de forçage  $k_f$ , en fonction du nombre de Reynolds  $R_\lambda$ , de l'échelle de Kolmogorov  $l_K$ , et de la viscosité  $\nu$ ,

$$C_\eta = l_K k_{max}, \quad (3.10)$$

$$P_1 = \nu^3 / l_K^4, \quad (3.11)$$

$$k_f = \frac{2\pi}{l_K \left(\frac{3}{20} R_\lambda^2\right)^{3/4}}. \quad (3.12)$$

Ici,  $k_{max}$  est le nombre d'onde maximal disponible dans la simulation. Et  $C_\eta$  est une constante, qui permet d'établir la séparation d'échelle entre l'échelle de Kolmogorov  $l_K$ , et la plus petite échelle disponible. Une simulation numérique directe est bien résolue lorsque  $C_\eta \geq 1.5$ . À présent, nous donnons les choix spécifiques de vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  proposés par Alvelius,

$$e_{1x} = \frac{k_y}{(k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad e_{1y} = \frac{k_x}{(k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad e_{1z} = 0 \quad (3.13)$$

$$e_{2x} = \frac{k_x k_z}{k(k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad e_{2y} = \frac{k_y k_z}{k(k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad e_{2z} = -\frac{(k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}}}{k} \quad (3.14)$$

Ces deux vecteurs forment une base<sup>1</sup> avec le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . À présent, nous pouvons également donner l'expression proposée par Alvelius pour l'intensité du forçage,

$$F(k) = A_P \exp\left(-\frac{(k - k_f)^2}{c}\right), \quad (3.15)$$

$$A_P = \frac{P_1}{\Delta_t} \frac{1}{\int_{k_a}^{k_b} \exp\left(-\frac{(k - k_f)^2}{c}\right) dk}. \quad (3.16)$$

Ici, le forçage est appliqué dans une couche d'épaisseur  $k_a - k_b$ , centrée en  $k_f$ . Les choix spécifiques réalisés ici mènent à  $k_a = k_f - 2$ ,  $k_b = k_f + 1$  et  $c = 0.5$ . Le paramètre  $A_P$  est inversement proportionnel au pas de temps, afin d'imposer un taux d'injection d'énergie indépendant du pas de temps. Par ailleurs, afin d'assurer l'isotropie de l'écoulement, les fonctions  $g_A$  et  $g_B$  sont choisies de la forme suivante<sup>2</sup> :

$$g_A(\phi) = \sin(2\phi) \quad (3.17)$$

$$g_B(\phi) = \cos(2\phi) \quad (3.18)$$

Les études numériques effectuées par Alvelius à l'aide de ce forçage, noté  $F_{Alv1}$  par la suite, lui ont permis de générer une cascade de Kolmogorov vérifiant les expressions (3.10), (3.11) et (3.12).

### 3.1.2 Dérivation d'un forçage aléatoire, hélicitaire aux grandes échelles, $F_{Alv2}$ .

Le forçage introduit initialement par Alvelius étant non hélicitaire, il ne permet pas la génération d'une cascade jointe d'énergie et d'hélicité. Un exemple de forçage isotrope et aléatoire qui permet de générer une cascade jointe est celui introduit par Brandenburg [19]. Ce forçage fut introduit afin d'étudier les écoulements turbulents en présence d'un champ magnétique. Nous souhaitons à présent obtenir un forçage isotrope, hélicitaire, et pour lequel nous conservons un contrôle sur le nombre de Reynolds similaire à celui du forçage présenté précédemment.

Le forçage utilisé par Brandenburg, fut introduit en imposant une direction du forçage projetée sur l'un des modes hélicitaires. En appliquant la même idée nous allons à présent modifier le forçage d'Alvelius, afin de le rendre hélicitaire. Pour cela nous décomposons en modes hélicitaires le forçage  $F_{Alv1}$ , donné par l'équation (3.5), puis nous procédons comme Alvelius [4]. La décomposition du forçage en modes hélicitaires donne alors,

$$\mathbf{f}_{\pm}(\mathbf{k}, t) = (A(\mathbf{k}, t)\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{h}_{\pm}^* + B(\mathbf{k}, t)\mathbf{e}_2(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{h}_{\pm}^*)\mathbf{h}_{\pm} \quad (3.19)$$

Dans nos simulations numériques si nous souhaitons injecter une hélicité positive, nous utiliserons le forçage  $\mathbf{f}_{Alv2} = \mathbf{f}_+$ . Pour la dérivation du forçage hélicitaire, nous avons fait

1. Attention : les vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  peuvent être nuls, ce qui peut impacter l'intensité du forçage notamment lorsque  $k_f$  est faible. Dans cette étude nous avons choisi l'échelle de forçage telle que  $k_f > 2.2$ , minimisant ainsi l'influence des modes pour lesquels ces vecteurs s'annulent.

2. Ce forçage peut également être anisotrope, en modifiant  $g_A$  et  $g_B$ . Voir [4] pour plus de détails à ce sujet.

### 3.1 Turbulence Homogène isotrope forcée

---

un choix spécifique pour le vecteur arbitraire  $\mathbf{z}$ . En effet, nous avons choisi  $\mathbf{z}$  égal à  $\mathbf{e}_2$ . Ce qui donne l'expression suivante pour  $\mathbf{h}_\pm$ ,

$$\mathbf{h}_\pm = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 \quad (3.20)$$

En ne prenant en compte que la partie positive du forçage, l'énergie injectée correspond à la moitié de celle nécessaire pour générer le même nombre de Reynolds que dans le cas du forçage non hélicitaire. Afin de conserver le même nombre de Reynolds, les termes A et B s'expriment ici sous les formes suivantes :

$$A(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{F(k)}{\pi k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(i\theta_1) g_A(\phi), \quad (3.21)$$

$$B(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{F(k)}{\pi k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(i\theta_2) g_B(\phi), \quad (3.22)$$

où  $g_A$ ,  $g_B$ , et  $F(k)$  gardent ici les mêmes définitions que précédemment. Nous considérons ici  $\theta_2$  et  $\phi$  comme des nombres aléatoires, ce qui ne diffère pas du forçage non hélicitaire. Par ailleurs, la condition sur la nullité des termes de corrélation entre le champ de vitesse et le forçage s'applique toujours dans le cas présent. Cette contrainte mène à l'expression suivante pour l'angle  $\theta_1$ ,

$$\tan \theta_1 = \frac{(g_A + g_B \sin \psi)(\text{R}\{\xi_1\} + \text{Im}\{\xi_2\}) + (g_B \cos \psi)(\text{Im}\{\xi_1\} + \text{R}\{\xi_2\})}{g_b \cos \psi(\text{R}\{\xi_1\} - \text{R}\{\xi_2\}) + (g_A + g_B \sin(\psi))(\text{Im}\{\xi_1\} + \text{Im}\{\xi_2\})} \quad (3.23)$$

Nous n'avons pas non plus changé les définitions de  $\xi_1$  et  $\xi_2$  facilitant ainsi l'implémentation de ce forçage. Il est courant de vérifier le caractère hélicitaire du forçage en calculant le produit scalaire du forçage  $\mathbf{f}(\mathbf{k})$  avec son rotationnel  $i\mathbf{k} \times \mathbf{f}(\mathbf{k})$ . Dans le cas du forçage  $F_{Alv1}$ , ce produit scalaire est nul, alors qu'il est maximal dans le cas du forçage hélicitaire  $F_{Alv2}$ . Avec l'expression introduite ici, l'hélicité injectée par le forçage est maximale. Bien qu'il soit possible d'introduire une quantité moindre d'hélicité, nous nous limiterons ici au forçage qui injecte le maximum d'hélicité à une échelle donnée.

#### 3.1.3 Dérivation d'un forçage aléatoire, hélicitaire sans injection d'énergie, $F_{Hel}$ .

Comme expliqué dans le chapitre 2, une simple analyse dimensionnelle montre qu'il n'est pas impossible de construire une cascade obéissant à une loi en  $k^{-7/3}$  pour la densité spectrale d'énergie. Le problème de cette approche est la nécessité de ne pas injecter d'énergie dans l'écoulement, mais uniquement de l'hélicité. Il est difficile d'imaginer une cascade turbulente sans injection d'énergie. Le forçage  $F_{Alv2}$  permet d'injecter aussi bien de l'énergie que de l'hélicité. Néanmoins ce forçage permet uniquement de générer une cascade jointe d'énergie et d'hélicité. Ceci peut être compris comme une injection d'hélicité trop faible pour mener à une cascade régie par une loi en  $k^{-7/3}$ . Une solution pour valider cette loi consiste à séparer l'injection d'énergie et l'injection d'hélicité, en ayant recours à deux forçages distincts. De cette façon pour un taux d'injection d'énergie  $\epsilon$  donné, nous

pouvons injecter une quantité d'hélicité plus importante que dans le cas du forçage  $F_{Alv2}$ . L'injection d'énergie est localisée à l'échelle de forçage  $k_f$ , tandis que nous injectons de l'hélicité à toutes les échelles de la zone inertielle. Nous venons d'introduire deux forçages capables d'injecter de l'énergie, avec ou sans injection d'hélicité. À présent nous allons dériver l'expression d'un forçage capable d'injecter de l'hélicité sans injecter d'énergie. Dans un premier temps nous commençons par écrire les équations de transport des fluctuations locales d'énergie cinétique et d'hélicité cinétique liées au forçage,

$$\frac{1}{2}\partial_t \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k^* = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k^* + c.c = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{2}\partial_t (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{w}_k^* + \mathbf{u}_k^* \cdot \mathbf{w}_k) = \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{f}_k^* + \mathbf{u}_k^* \cdot (i\mathbf{k} \times \mathbf{f}_k) + c.c = \eta(\mathbf{k}), \quad (3.25)$$

$\eta(\mathbf{k})$  est ici l'injection d'hélicité pour un vecteur d'onde donné. En supposant un forçage de la forme :

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{k} \times \mathbf{p}(\mathbf{k}, t), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{k}, t) = a(\mathbf{k}, t)\mathbf{e}_a(\mathbf{k}, t) + ib(\mathbf{k}, t)\mathbf{e}_b(\mathbf{k}, t), \quad (3.27)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions dont nous cherchons l'expression, et  $\mathbf{e}_a$  et  $\mathbf{e}_b$  sont deux vecteurs unitaires choisis aléatoirement. On trouve une solution de la forme,

$$a(\mathbf{k}, t) = -\frac{\eta(k)}{4k^2 D}(\mathbf{u}_k^I, \mathbf{k}, \mathbf{e}_b) \quad (3.28)$$

$$b(\mathbf{k}, t) = \frac{\eta(k)}{4k^2 D}(\mathbf{u}_k^R, \mathbf{k}, \mathbf{e}_a) \quad (3.29)$$

où  $D = (\mathbf{u}_k^R, \mathbf{k}, \mathbf{e}_a) \cdot (\mathbf{u}_k^R, \mathbf{e}_b) + (\mathbf{u}_k^I, \mathbf{k}, \mathbf{e}_b) \cdot (\mathbf{u}_k^I, \mathbf{e}_a)$ ,  $\mathbf{u}_k^R = R(\mathbf{u}_k)$ ,  $\mathbf{u}_k^I = I(\mathbf{u}_k)$ . Il est également nécessaire de faire un choix spécifique concernant la forme de  $\eta(k)$ , que nous exprimons ainsi :

$$\eta(k) = \eta_0 \left| \frac{k}{k_f} \right|^{-\alpha}, \text{ si } k \geq k_f \quad (3.30)$$

$$\eta(k) = 0, \text{ si } k < k_f \quad (3.31)$$

La normalisation par  $k_f$  permet de nous assurer que  $\eta(\mathbf{k}, |\mathbf{k}| = k_f) = \eta_0$ . Le paramètre  $\eta_0$  est l'amplitude de l'injection d'hélicité, et  $\alpha$  est un réel positif. Ces deux paramètres permettent de contrôler l'intensité du forçage à toute les échelles de la zone inertielle. Le principal problème avec cette approche, est que nous n'avons pas pris en compte l'injection d'énergie liée à l'autocorrélation du forçage, comme c'est le cas dans l'équation (3.1). Il est impossible de construire un forçage dénué de toute injection d'énergie. Néanmoins, l'objectif dans le cas présent, est d'utiliser un forçage spécifique pour l'énergie, et un second pour l'hélicité. Il convient alors de simplement s'assurer que l'injection d'énergie lié au forçage non énergétique,  $F_{Hel}$  reste faible comparé à l'énergie injectée par les forçages  $F_{Alv1}$  ou  $F_{Alv2}$ . Ce qui revient à dire que :

$$\int_0^\infty \mathbf{f}_{Hel} \cdot \mathbf{f}_{Hel}^* \ll \int_0^\infty \mathbf{f}_{Alv1} \cdot \mathbf{f}_{Alv1}^*. \quad (3.32)$$

## 3.2 Outils statistiques

---

Nous pouvons dès à présent remarquer que le forçage  $f_{Hel}$  ne dépend que du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , et qu'il n'est pas normalisé en fonction du pas de temps, contrairement aux deux forçages d'Alvelius pour lesquels la normalisation temporelle résulte des équations (3.15) et (3.16). Le taux d'injection d'énergie est alors proportionnel au pas de temps pour le forçage  $f_{Hel}$ , tandis que ce taux d'injection d'énergie est indépendant du pas de temps pour les forçages  $f_{Alv1}$  et  $f_{Alv2}$  (voir dérivation du forçage  $f_{Alv1}$ ). Choisir des pas de temps faibles permet de s'assurer que le taux d'injection d'énergie lié au forçage  $f_{Hel}$  reste négligeable par rapport à celui du forçage  $f_{Alv1}$ . Par ailleurs, le forçage étant aléatoire, le dénominateur  $D$  des équations (3.28) et (3.29) peut être très faible localement, et mener à une très forte injection d'énergie que nous voulons absolument éviter. Une solution consiste alors à utiliser un "clipping", qui revient à enlever les points qui injectent trop d'énergie dans l'écoulement. De plus, nous ne souhaitons pas que le forçage ait une influence sur les échelles de dissipation. Ces deux constats mènent à la condition suivante sur le dénominateur,

$$D(\mathbf{k}, t) \geq |\mathbf{u}_k^2|k \left( Clip_A + (Clip_B \frac{k}{k_\nu})^\beta \right). \quad (3.33)$$

Ici  $Clip_A$ ,  $Clip_B$  et  $\beta$  sont des paramètres permettant de contrôler l'influence du clipping sur le forçage. Le forçage n'est appliqué que lorsque cette condition est remplie. L'influence de ce clipping peut notamment se traduire par une valeur effective de  $\eta(k)^{eff}$  plus faible que  $\eta(k)$ . Il conviendra donc de vérifier que  $\eta^{eff}(k)$  vérifie bien une loi de puissance de la forme (2.30) mais avec des paramètres  $\eta_0^{eff}$  et  $\alpha^{eff}$  que l'on déterminera a posteriori.

## 3.2 Outils statistiques

### 3.2.1 Spectres

En hydrodynamique et magnétohydrodynamique à l'issue de la réalisation de simulations numériques directes, un diagnostic courant est la représentation des densités spectrales des énergies et hélicités cinétiques et magnétiques. De manière à représenter ces quantités, les formules intégrales que nous avons introduites précédemment sont discrétisées en suivant une procédure expliquée dans différents ouvrages de référence [59, 92, 77]. Toutefois cette procédure conduit systématiquement à un pic d'énergie au nombre d'onde  $k = 9$ . Cela est visible sur la figure 3.2 où nous avons compilé les spectres représentés dans différentes études [2, 17, 20, 23, 36, 37, 49, 51, 65, 76]. Ces spectres sont des spectres d'énergie cinétique, d'énergie magnétique, ou encore d'énergie d'un scalaire passif, et sont calculés à partir de simulations utilisant différentes méthodes numériques et divers forçages. Le pic observé à  $k=9$  est suivi de deux creux pour  $k = 15$  et  $k = 19$ . Non seulement il paraît difficile d'imaginer une explication physique à ces comportements, qui pourraient sembler universels, mais nous allons montrer ici qu'ils proviennent d'un biais dans le calcul des spectres. Ces erreurs ne sont pas observables pour des approches 1-D, telles que les approches EDQNM [78], ou les études ayant recours aux modèles en couches [74].

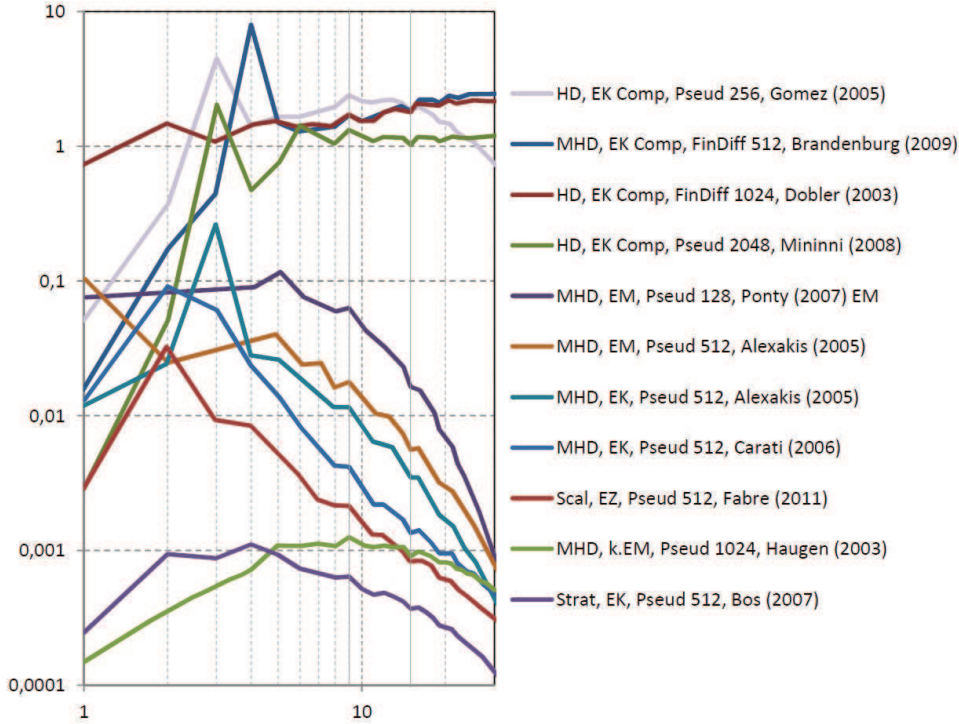


FIGURE 3.2 – Densités spectrales d’énergies de différentes natures, représentées par différents auteurs, à l’aide de différents codes et diverses résolutions. Les notations HD, MHD, Scal désignent les problèmes respectivement d’hydrodynamique, de magnétohydrodynamique, et pour du transport de scalaire passif. Les notations EK, EM et EZ correspondent aux énergies cinétiques, magnétiques, et scalaire. Pseud et FinDiff correspondent aux méthodes numériques utilisées, à savoir pseudo-spectral ou différences finies. Les nombres 128, 512, 1024 et 2048 représentent les résolutions spatiales utilisées. Les nombres d’ondes  $k = 9$  et  $k = 15$  sont symbolisés par des lignes verticales solides.

**D’où vient ce biais ?** Supposons dans un premier temps que nous ayons accès à une grille cartésienne discrétisée dans l’espace de Fourier, avec une taille de grille  $\delta k$ . Cette grille peut être divisée en couches  $S_n$  d’épaisseur  $\Delta k$ . La densité spectrale d’énergie cinétique  $E_k(k, t)$  est alors discrétisée sous la forme suivante,

$$E_n = \frac{(\delta k)^3}{\Delta k} \sum_{\mathbf{k}' \in S_n} \hat{E}(\mathbf{k}'), \quad (3.34)$$

où  $E_n$  est la densité spectrale d’énergie cinétique de la couche  $S_n$  définie par

$$S_n = \{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3 / n\Delta k - \Delta k/2 < |\mathbf{k}'| \leq n\Delta k + \Delta k/2\}. \quad (3.35)$$

En pratique, le choix de la largeur des couches est souvent basé sur  $\Delta k = \delta k = 1$ , ce qui mène à un préfacteur unitaire dans l’équation (3.34). Par ailleurs, le nombre d’onde correspondant à la couche  $S_n$  est,

$$k_n = n\Delta k. \quad (3.36)$$

## 3.2 Outils statistiques

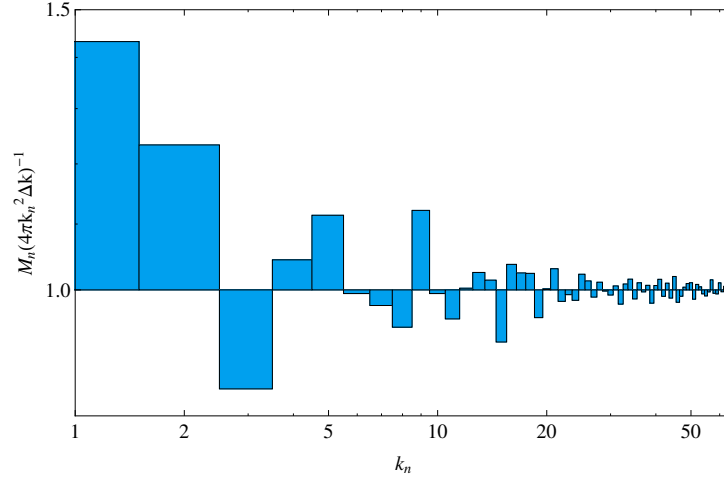


FIGURE 3.3 – Densité des nombres d’ondes appartenant à la couche  $S_n$  en fonction de  $k_n$ , pour  $\Delta k = \delta k$ .

Le problème provient du fait que le nombre  $M_n$  de vecteurs d’ondes  $\mathbf{k}'$ , inclus dans la couche  $S_n$ , n’est pas exactement proportionnel au volume de la couche, comme montré à la figure 3.3. La densité  $M_n$  présente même des extremums aux nombres d’ondes  $k_n = 9$ ,  $k_n = 15$  et  $k_n = 19$ , ce qui explique le comportement suspect des spectres à ces mêmes nombres d’ondes (figure 3.2).

Sur la figure 3.3, nous notons également un pic à  $k = 5$ , qui peut également être responsable des pics observés à  $k = 5$  sur différents spectres, notamment celui calculé par Ponty *et al.* [76]

**Comment corriger ce biais ?** Nous venons de montrer que l’hypothèse selon laquelle le nombre de points dans une couche est proportionnel au volume de cette couche est erronée, et qu’elle peut mener à des erreurs d’interprétation sur la physique présente dans les écoulements étudiés numériquement. Cette hypothèse peut être accompagnée dans la littérature d’un commentaire sur sa validité. En effet, elle n’est viable que pour des grands nombres d’ondes, i.e pour  $k \gg \delta k$  [59]. Néanmoins, aucune solution alternative n’est disponible, et nous proposons et comparons diverses solutions dans ce paragraphe. La première étape afin de trouver une solution au problème présenté ici, est de corriger l’hypothèse selon laquelle le nombre de points dans une couche est proportionnel au volume de cette couche. Ce qui mène à l’introduction d’une nouvelle forme pour la densité spectrale,

$$E_n^* = \frac{4\pi k_n^2}{M_n} \sum_{\mathbf{k}' \in S_n} \hat{E}(\mathbf{k}'). \quad (3.37)$$

où  $M_n$  comme défini ci-dessus, est le nombre de vecteurs d’ondes contenus dans la couche  $S_n$ . Afin d’avoir une meilleure estimation du nombre d’onde le plus adapté pour la couche  $S_n$ , nous calculons simplement la moyenne de tous les nombres d’ondes contenus dans cette couche. Ce nombre d’onde moyen, noté  $k_n^*$ , s’exprime alors de la façon suivante,



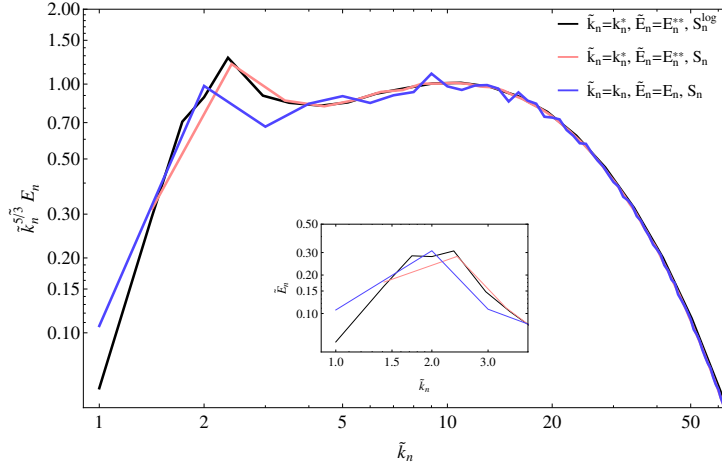


FIGURE 3.4 – Spectres d'énergie cinétique compensés  $\tilde{k}_n^{5/3} \tilde{E}_n$  en fonction du nombre d'onde  $\tilde{k}_n$ . Les courbes sont réalisées à partir d'une SND résolue sur  $256^3$  points, basée sur le forçage  $F_{Alv1}$ , et un nombre de Reynolds  $R_\lambda = 100$ . Deux des courbes correspondent à  $\tilde{k}_n = k_n$  et  $\tilde{E}_n = E_n$  ou  $E_n^{**}$  avec des couches espacées linéairement, tandis que la troisième correspond à  $\tilde{k}_n = k_n^*$  et  $\tilde{E}_n = E_n^{**}$  avec des couches espacées de façon logarithmique. Le zoom correspond aux mêmes courbes à de faibles nombres d'ondes, proches de l'échelle de forçage

$$k_n^* = \frac{1}{M_n} \sum_{\mathbf{k}' \in S_n} |\mathbf{k}'|. \quad (3.38)$$

Dans le même temps, nous introduisons une autre définition de la densité spectrale dans une couche  $S_n$  notée  $E_n^{**}$ , et qui est exprimée ainsi,

$$E_n^{**} = \frac{4\pi}{M_n} \sum_{\mathbf{k}' \in S_n} \hat{E}(\mathbf{k}') |\mathbf{k}'|^2. \quad (3.39)$$

Cette définition est plus cohérente avec le calcul d'une intégrale effectué sur une surface de rayon  $|\mathbf{k}'| = k$ . Finalement, comme nous cherchons, via les calculs de spectres, à vérifier les lois de puissances présentées dans le chapitre 2, nous introduisons la définition suivante pour des couches espacées logarithmiquement,

$$S_n^{log} = \{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3 / \lambda^n \delta k < |\mathbf{k}'| \leq \lambda^{n+1} \delta k\}. \quad (3.40)$$

Afin de tester nos nouvelles définitions, de  $k_n^*$  et  $E_n^{**}$ , nous utilisons les résultats d'une simulation numérique directe, discrétisée sur  $256^3$  points de grilles. Cette DNS est réalisée à l'aide du forçage d'Alvelius non hélicitaire, qui permet de générer une turbulence homogène et isotrope. Sur la figure 3.4, la densité spectrale de l'énergie cinétique compensée par  $k^{-5/3}$  est représentée, en utilisant aussi bien la méthode classique, basée sur  $k_n$  et  $E_n$ , que les deux nouvelles définitions basées sur  $k_n^*$  et  $E_n^{**}$ . Pour  $k_n^*$  et  $E_n^{**}$ , les nombres d'ondes sont soit espacés linéairement, soit logarithmiquement, avec  $\lambda = 1.21$ . Cette valeur de  $\lambda$  est la valeur minimale pour qu'aucune des couches ne soit vide. On peut noter que les

## 3.2 Outils statistiques

---

deux spectres basés sur  $k_n^*$  et  $E_n^{**}$  sont nettement plus lisses que le spectre classique. Pour les faibles nombres d'ondes, correspondant au forçage, la méthode logarithmique est plus fidèle que celle utilisant les couches linéairement espacées. C'est donc cette définition que nous utiliserons pour tous les spectres dans la suite de ce manuscrit. Ce travail sur les spectres a fait l'objet d'une publication [89].

### 3.2.2 Flux

Dans le chapitre 2, nous avons introduit la notion de flux d'énergie et d'hélicité. Les expressions données précédemment étaient basées sur les interactions triadiques explicites. Néanmoins d'un point de vue numérique il peut être extrêmement coûteux, notamment à des résolutions élevées, de calculer les flux à partir de ce genre d'expression. Nous allons ici détailler une méthode de calcul, basée sur une transformation de Fourier des termes non linéaires de l'équation de Navier-Stokes. L'idée consiste à ne plus calculer les flux dans l'espace de Fourier via une double boucle sur tout l'espace, mais de calculer le terme d'advection dans l'espace physique, puis d'effectuer une transformation de Fourier de ce terme, qui est alors uniquement dépendant du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Le flux d'énergie  $\Pi^E(k)$  s'exprime alors ainsi :

$$\Pi^E(k) = \int_0^k \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot TF((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})(\mathbf{k}') dk', \quad (3.41)$$

et il en va de même pour les flux exprimés grâce à la décomposition en modes hélicitaires,

$$\Pi_E^{abc}(k) = \int_0^k \mathbf{u}^a(\mathbf{k}') \cdot TF((\mathbf{u}^c \cdot \nabla) \mathbf{u}^b)(\mathbf{k}') dk'. \quad (3.42)$$

La figure 3.5 résume les flux hélicitaires que nous calculons. Nous pouvons voir deux flux pour lesquels l'émetteur et le récepteur sont des modes positifs. Dans un cas le médiateur est un mode hélicitaire positif et dans l'autre un mode hélicitaire négatif (classe I et II). Il en est de même pour les flux d'énergie négative. En ce qui concerne les échanges entre énergie positive et négative, les transferts vont aussi par paires, en fonction du signe du mode servant de médiateur. Dans le cas du flux  $\Pi^{+-+}$ , l'énergie est transférée depuis  $E_+^<$  vers  $E_-^<$  et  $E_-^>$ . Avec le formalisme que nous utilisons ici, il est impossible de faire la distinction entre les transferts de  $E_+^<$  vers  $E_-^<$  et ceux de  $E_+^<$  vers  $E_-^>$ . Il en est de même pour tous les autres flux liés aux interactions de classe III et IV. Bien que cette approche puisse paraître rudimentaire, elle est amplement suffisante dans un premier temps pour avoir une idée de l'importance des interactions entre modes hélicitaires positifs et négatifs dans le cas d'une cascade d'hélicité maximale. Finalement, la discrétisation choisie pour le calcul de flux est la même que celle que nous avons décidé de prendre pour les spectres, à savoir les couches espacés logarithmiquement.

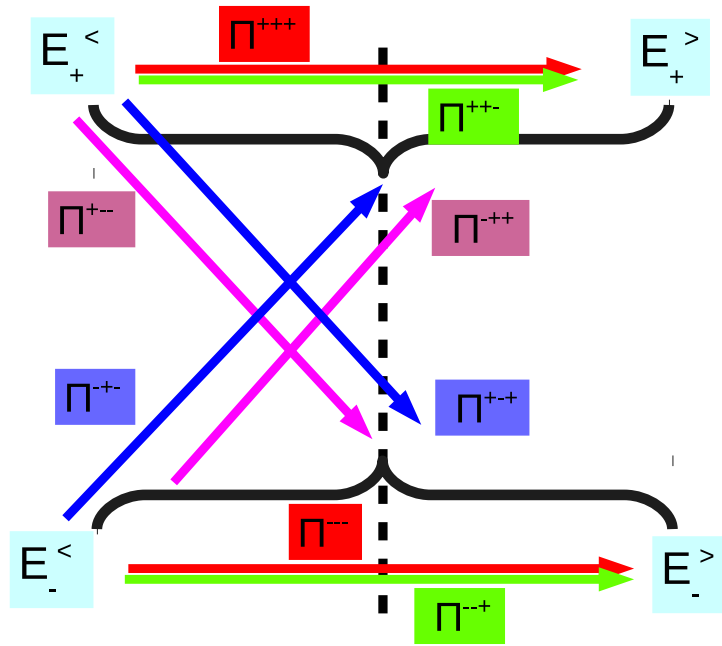


FIGURE 3.5 – Représentation des différents flux accessibles grâce à la décomposition en modes hélicitaires. Les couleurs sont les mêmes que celles utilisées pour le schéma 2.4, les flux d'une même couleur appartenant à une même classe d'interactions triadiques.  $E_{\pm}^{\leq}$  (respectivement  $E_{\pm}^{\geq}$ ) désigne l'énergie liée au modes  $h_{\pm}$  contenue à l'intérieur (respectivement extérieur) d'une sphère de rayon  $k$ . Le code des couleurs a été établi pour rendre compte des 4 classes de transfert d'énergie établies par Biferale [12, 13]. Les flux rouge, magenta, vert et bleu correspondent aux transferts d'énergie de classe I, II, III et IV.

## 4.1 Validation du forçage $F_{Alv2}$

Dans un premier temps, nous souhaitons nous assurer du fonctionnement du forçage hélicitaire  $F_{Alv2}$ . Nous nous assurerons que les critères imposés lors de la dérivation du forçage sont bien restitués lors de la réalisation de DNS. Nous cherchons notamment à vérifier que le nombre de Reynolds obtenu a posteriori correspond à celui donné en entrée, ou encore que l'injection d'hélicité cinétique est maximale à l'échelle du forçage. Afin de valider ce forçage, nous réalisons deux simulations numériques directes, avec une résolution de  $256^3$  points de grilles. Pour l'une nous utilisons le forçage  $F_{Alv2}$  et pour l'autre  $F_{Alv1}$ . Nous imposons en entrée un nombre de Reynolds de l'ordre de  $R_\lambda = 100$ , une séparation entre l'échelle de Kolmogorov  $k_\eta$  et le nombre d'onde maximal  $k_{max}$  telle que  $k_{max}/k_\eta = 1.5$ . La viscosité choisie est  $\nu = 0.002$ , ce qui conduit à une échelle de forçage telle que  $k_f = 2.2$ .

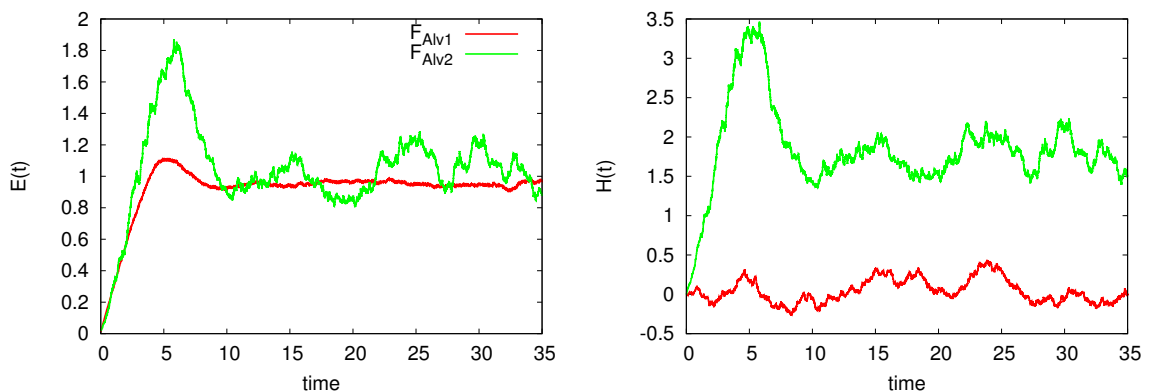


FIGURE 4.1 – Évolution temporelle de l'énergie (gauche) et de l'hélicité (droite). La courbe rouge correspond au cas non hélicitaire, et la courbe verte au cas hélicitaire.

Sur les figures 4.1 et 4.2, sont représentées les évolutions temporelles de l'énergie cinétique, l'hélicité cinétique, ou encore du nombre de Reynolds. Les niveaux d'énergie

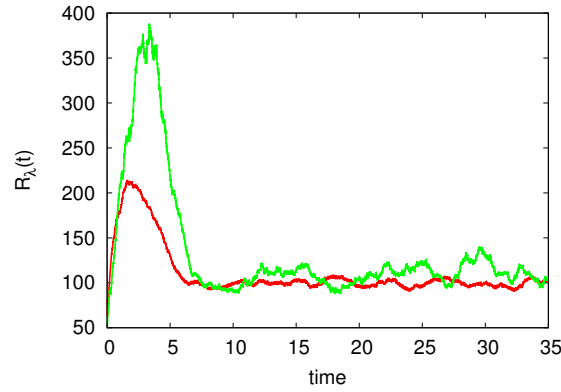


FIGURE 4.2 – Évolution temporelle du nombre de Reynolds basé sur la micro-échelle de Taylor. Le code couleur est identique à celui de la figure 4.1.

cinétique sont similaires, néanmoins les fluctuations d'énergie sont plus importantes en présence d'hélicité. Par ailleurs, l'hélicité cinétique fluctue autour de zéro dans le cas non hélicitaire, et reste strictement positive en régime stationnaire dans le cas hélicitaire. En ce qui concerne le nombre de Reynolds, nous remarquons que le contrôle souhaité sur cette quantité fonctionne aussi bien pour le forçage classique, que pour sa version hélicitaire, la différence principale venant de l'amplitude des fluctuations, plus importante dans le cas hélicitaire que pour le forçage  $F_{Alv1}$ .

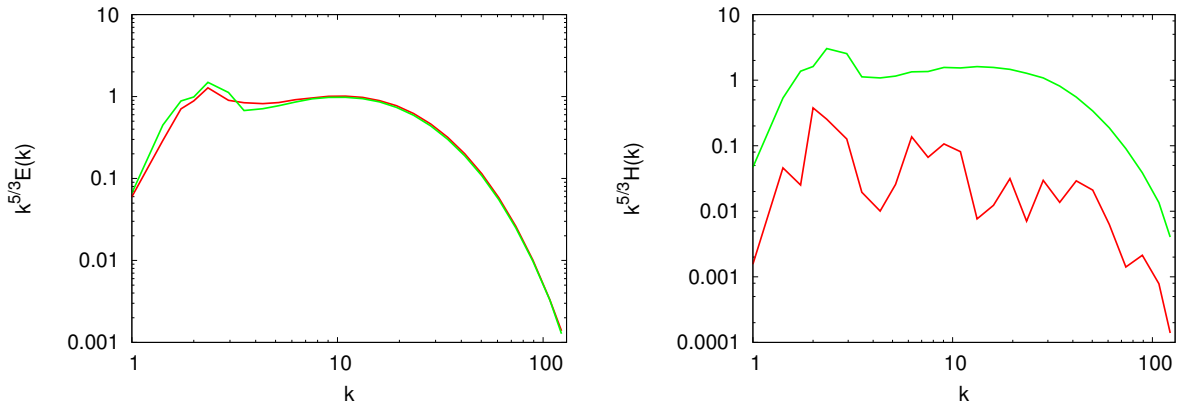


FIGURE 4.3 – Densités spectrales de l'énergie cinétique (gauche) et de l'hélicité cinétique (droite), en fonction du nombre d'onde. Ces deux grandeurs sont normalisées par  $k^{5/3}$ .

D'un point de vue spectral, on remarque que la densité d'énergie cinétique est très similaire dans les deux cas, les lois de puissances restant proches dans les cas hélicitaires et non hélicitaires (figure 4.3). Ce comportement est attendu pour ce type d'écoulement, comme le montrent l'analyse dimensionnelle et les modèles en couches [60]. Pour la densité spectrale d'hélicité cinétique, nous remarquons que les comportements des courbes sont très différents. Bien que la zone inertielle soit relativement courte, la normalisation permet de constater que pour quelques nombres d'ondes les lois asymptotiques définies analytiquement sont proches des observations. En effet, le cas hélicitaire suit une cascade nette,

## 4.1 Validation du forçage $F_{Alv2}$

régie par une pente en  $k^{-5/3}$ , alors que dans le cas non hélicitaire, l'allure de la courbe, n'est pas très nette et plus faible de 2 ordres de grandeur. Ceci est de nouveau cohérent avec l'approche dimensionnelle, et les études effectuées avec des modèles en couches [60].

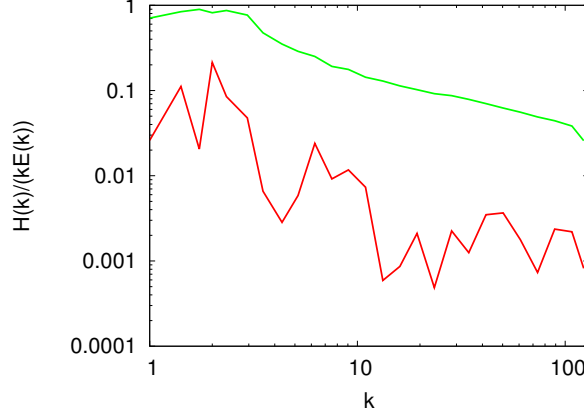


FIGURE 4.4 – Densité spectrale de l'hélicité relative.

La figure 4.4 représente la densité spectrale de l'hélicité relative. Comme vu en section 3.1.2, le forçage d'Alvelius hélicitaire correspond à une hélicité maximale à l'échelle de forçage. La valeur de l'hélicité relative à cette échelle étant très proche de l'unité, nous confirmons a posteriori que l'injection d'hélicité à l'échelle de forçage est bien maximale pour le forçage  $F_{Alv2}$ . La décroissance en fonction de  $k$  de la densité spectrale de l'hélicité relative est voisine d'une loi en  $k^{-1}$ , conformément à une double cascade d'énergie et d'hélicité en  $k^{-5/3}$ .

Nous présentons les flux d'énergie et d'hélicité sur la figure 4.5. Comme nous nous y attendions, les flux d'énergie sont quasiment identiques, conformément aux contraintes établies lors de la dérivation des forçages hélicitaires. En revanche des différences sont visibles pour les flux d'hélicité. En effet, le flux d'hélicité présente une partie plate dans la zone inertielle pour le cas hélicitaire, alors qu'il n'a pas d'amplitude significative dans le cas non hélicitaire. Ces résultats sont en accord avec l'idée d'une cascade simultanée d'énergie et d'hélicité (loi en  $k^{-5/3}$ ) dans ce type de configurations, comme observé antérieurement

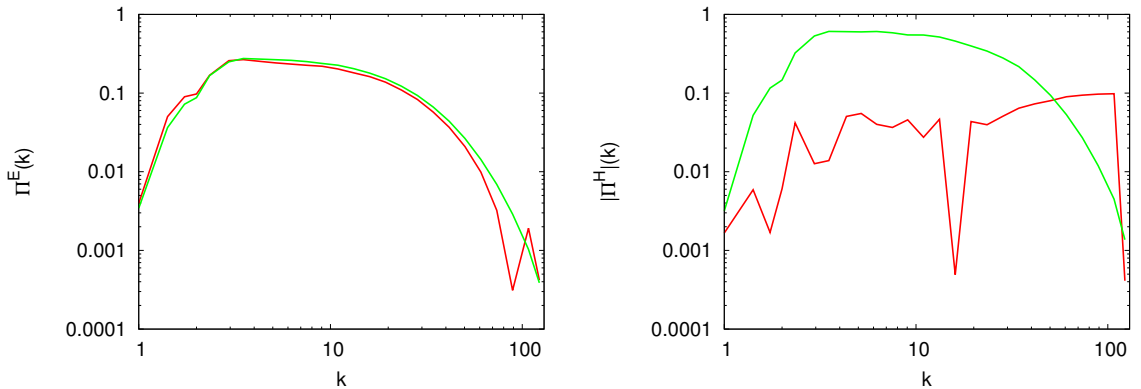


FIGURE 4.5 – Représentation des flux d'énergie (gauche) et d'hélicité (droite).

[24, 60]. Ces deux forçages peuvent à présent être utilisés en supplément du forçage  $F_{Hel}$  pour contrôler l'injection d'énergie (section 4.2), ou bien comme forçage pour générer un effet dynamo dans le cas d'écoulements conducteurs de l'électricité (voir partie II).

## 4.2 Validation du forçage $F_{Hel}$

### 4.2.1 Retour sur l'analyse dimensionnelle

Comme présenté dans le chapitre 2, la présence d'une forte injection d'hélicité dans l'écoulement peut mener à une loi en  $k^{-7/3}$  pour la densité spectrale d'énergie cinétique. Afin d'obtenir cette loi de puissance, Brissaud *et al* [21] supposent une injection d'énergie nulle, et une injection d'hélicité localisée à une échelle unique, menant à un flux constant d'hélicité. Le problème est que sans injection d'énergie nous ne voyons pas comment établir un écoulement. C'est pourquoi nous considérons ici une injection d'énergie non nulle, localisée à une échelle unique  $k_f$  et une injection d'hélicité non nulle dans toute la zone inertielle. Ceci mène à un flux d'énergie constant, et à un flux d'hélicité croissant avec le nombre d'onde  $k$ .

Nous avons vu précédemment qu'un spectre en  $k^{-7/3}$  pouvait être obtenu si le temps caractéristique hélicitaire  $\tau_H$  était inférieur au temps caractéristique de l'énergie  $\tau_E$ . Afin de valider cette condition sur les temps caractéristiques, supposons dans un premier temps que l'hélicité relative est égale à une constante, notée  $C_r$ , dans la zone inertielle. Nous savons que  $C_r$  doit nécessairement être inférieure à l'unité [59]. D'après les équations (2.56) et (2.57), Le rapport des temps caractéristiques s'exprime alors de la façon suivante,

$$\frac{\tau_H}{\tau_E} = \frac{C_r k \Pi^E(k)}{|\Pi^H(k)|} \quad (4.1)$$

Le temps hélicitaire est plus court que le temps énergétique lorsque la condition suivante sur les flux est vérifiée,

$$|\Pi^H(k)| \geq C_r k |\Pi^E(k)| \quad (4.2)$$

Le flux d'énergie étant supposé constant, et égal à  $\epsilon$ , l'inégalité (4.2) se réécrit de la façon suivante,

$$|\Pi^H(k)| \geq C_r k \epsilon \quad (4.3)$$

La détermination du flux d'hélicité est donnée par l'équation :

$$|\Pi^H(k)| = \left| \int_{k_f}^k \int_{k_f}^k \int_{k_f}^k \eta(k') d^3 k' \right| \quad (4.4)$$

où  $\eta(k)$  est donné par les équations (3.30) et (3.31).

Dans le cas du forçage  $F_{Hel}$ , pour<sup>1</sup>  $\alpha \neq 1$ ,  $\alpha \neq 2$  et  $\alpha \neq 3$ , le flux d'hélicité s'exprime de la façon suivante :

$$|\Pi^H(k)| = \eta_0 k_f^3 \left| -\frac{(k/k_f)^2}{2(-\alpha+1)} + \frac{(k/k_f)}{(-\alpha+2)} + \frac{(k/k_f)^{-\alpha+3}}{(-\alpha+1)(-\alpha+2)(-\alpha+3)} + C_I \right| \quad (4.5)$$

1. Afin de simplifier le raisonnement, nous ne traiterons pas les cas particuliers  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$  et  $\alpha = 3$ .

## 4.2 Validation du forçage $F_{Hel}$

Nom du cas test	forçages utilisés	$R_\lambda$ initial	$k_f$	$\eta_0$	CFL
NH01	$F_{Alv1}$	100	2.2	0.0	0.5
NH02	$F_{Alv1+Hel}$	100	2.2	0.05	0.5
NH03	$F_{Alv1+Hel}$	100	2.2	0.3	0.5
NH04	$F_{Alv1+Hel}$	100	2.2	0.5	0.25
NH05	$F_{Alv1+Hel}$	100	2.2	1.0	0.01
NH06	$F_{Alv1+Hel}$	100	2.2	5.0	0.05
H01	$F_{Alv2}$	85	2.8	0.0	0.5
H02	$F_{Alv2+Hel}$	85	2.8	0.5	0.5

TABLE 4.1 – Résumé des paramètres utilisés pour les diverses simulations. Toutes les simulations sont réalisées avec  $256^3$  points de grille. Le paramètre  $\alpha$  vaut 2.2 .

où  $C_I$  représente les constantes d'intégrations, et où l'on a supposé que  $\eta_0 > 0$  et  $\alpha > 0$ . Avec ces hypothèses, nous pouvons remarquer que la loi de puissance sur  $k$  dominant la partie gauche de l'inégalité est une loi en  $k^2$  (pour  $\alpha > 1$ ). Pour des nombres d'ondes assez grands, et pour  $\alpha > 1$ , l'inégalité (4.3) s'exprime alors sous la forme suivante,

$$\eta_0 k_f^3 \left| -\frac{(k/k_f)^2}{2(-\alpha + 1)} \right| \geq C_r k \epsilon \quad (4.6)$$

Il est alors évident que cette inégalité est vérifiée pour de très grands nombre d'ondes. En revanche, ce sont les choix spécifiques des paramètres  $\alpha$  et  $\eta_0$  qui permettent ensuite de s'assurer de la validité de l'inégalité (4.3) dans toute la zone inertielle. Par la suite, afin de valider ce forçage, nous fixerons  $\alpha = 2.2$ , et nous réaliserons des DNS pour différentes valeurs de  $\eta_0$ .

### 4.2.2 $F_{Alv1}$ et $F_{Hel}$

Nous avons dans un premier temps réalisé une DNS à l'aide du forçage non hélicitaire  $F_{Alv1}$ . À partir de l'état stationnaire, nous relançons des DNS en utilisant une combinaison des deux forçages,  $F_{Alv1}$  et  $F_{Hel}$ . Nous utilisons différentes valeurs de  $\eta_0$  dans le but de confirmer l'existence d'une loi en  $k^{-7/3}$ . Les paramètres de ces DNS sont regroupés dans le tableau (4.1). Nous utilisons une résolution et un nombre de Reynolds qui permettent de générer un écoulement turbulent, mais pour lesquels la cascade d'énergie est présente dans une zone inertielle étroite. Par ailleurs, afin de contrôler du mieux possible l'injection d'énergie, nous avons modifié la valeur du nombre de Courant (colonne CFL dans le tableau(4.1)) pour diminuer le pas de temps, et par conséquent l'influence du forçage  $F_{Hel}$  sur le niveau d'énergie dans l'écoulement. Dans le cas du forçage  $F_{Hel}$ , l'injection indésirable d'énergie est proportionnelle au pas de temps, ainsi qu'à  $\eta_0^2$ , tandis que le taux d'injection d'énergie est indépendant du pas de temps pour les forçages  $F_{Alv1}$  et  $F_{Alv2}$ . Il est en effet nécessaire de diminuer le pas de temps pour minimiser l'injection d'énergie liée au forçage  $F_{Hel}$  lorsque  $\eta_0$  augmente. Dans le cas  $NH06$ , le nombre de Courant est divisé par 10 par rapport au cas sans injection d'hélicité,  $NH01$ . L'échelle de forçage pour  $F_{Alv1}$  et  $F_{Alv2}$  correspond à  $k_f = 2.2$ .



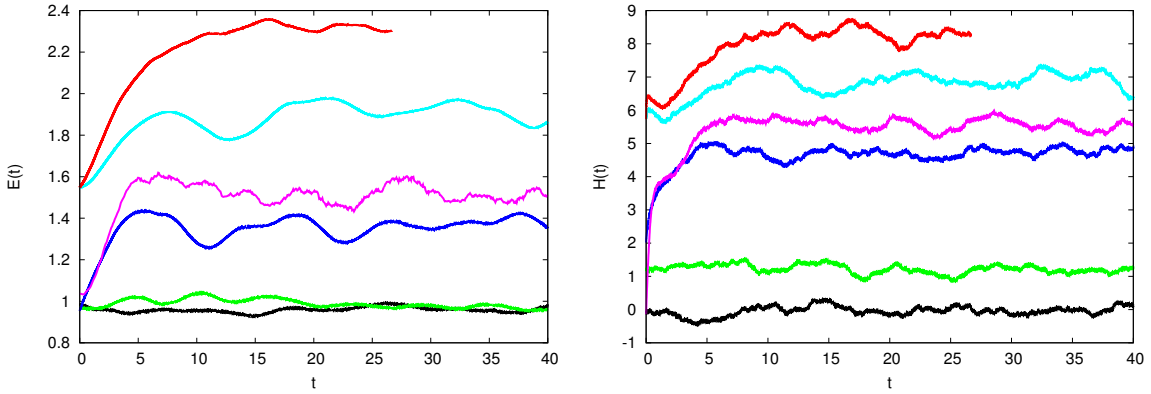


FIGURE 4.6 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique (gauche) et de l'hélicité cinétique (droite). Les courbes noires correspondent au cas  $NH01$ , les vertes au cas  $NH02$ , les bleues foncées au cas  $NH03$ , les magentas au cas  $NH04$ , les cyans au cas  $NH05$  et finalement les rouges au cas  $NH06$ .

La figure 4.6 représente l'évolution temporelle de l'énergie cinétique et de l'hélicité cinétique pour les configurations d'écoulement de  $NH01$  à  $NH06$ . Pour  $\eta_0 = 0.05$ , nous remarquons que le niveau d'énergie n'est pas modifié par rapport au cas  $\eta_0 = 0$ . Dans le même temps, l'effet du forçage hélicitaire est clairement visible sur l'évolution de l'hélicité cinétique. En effet, nous pouvons constater que pour des valeurs strictement positives de  $\eta_0$ , l'hélicité cinétique est en permanence positive, alors que dans le cas classique elle fluctue autour de zéro. Par ailleurs, plus la valeur de  $\eta_0$  est importante, plus l'énergie et l'hélicité moyennes sont élevées.

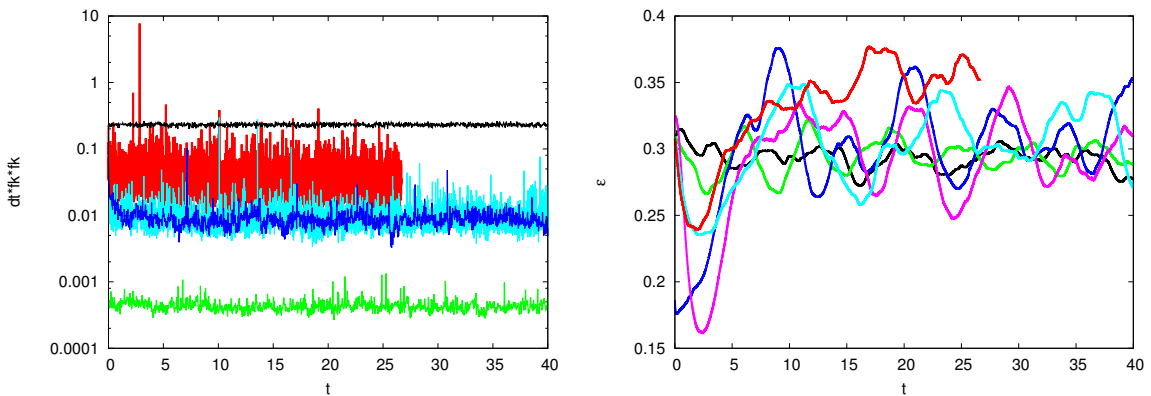


FIGURE 4.7 – Évolution temporelle de l'injection d'énergie par unité de temps,  $\int_0^\infty dt \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{f}_k^*$  pour chaque forçage (gauche) et de la dissipation d'énergie,  $\epsilon = \langle \nu \mathbf{u} \Delta \mathbf{u} \rangle$  (droite). L'injection d'énergie pour le forçage de grande échelle est toujours la même, elle n'est donc représentée qu'une fois (courbe noire). Le code couleur est le même que sur la figure 4.6. A gauche le cas  $NH04$  n'est pas représenté pour des raisons de visibilité (Cette courbe est située entre celles de  $NH03$  et  $NH05$ ).

À gauche de la figure 4.7 est représenté l'évolution temporelle de l'injection d'énergie

## 4.2 Validation du forçage $F_{Hel}$

via les termes d'autocorrélation des forçages, et à droite la dissipation d'énergie  $\epsilon$  pour différentes valeurs de  $\eta_0$ . Nous constatons que les fluctuations temporelles de l'injection d'énergie peuvent être occasionnellement très importantes en augmentant  $\eta_0$ . Néanmoins en valeur moyenne, cette injection indésirable d'énergie reste faible par rapport à l'injection d'énergie ( $\eta_0 = 0$ ). Le rapport entre les deux injections d'énergies peut aller de 0.05% dans le cas où  $\eta_0 = 0.05$ , à environ 15% dans le cas où  $\eta_0 = 5$ . Dans la figure 4.7 de droite on observe que la dissipation d'énergie est à peu près constante de valeur moyenne autour de 0.3 quelque soit les valeurs de  $\eta_0$ . Cela est une preuve supplémentaire que le forçage  $F_{Hel}$  n'injecte pas, ou très peu, d'énergie cinétique.

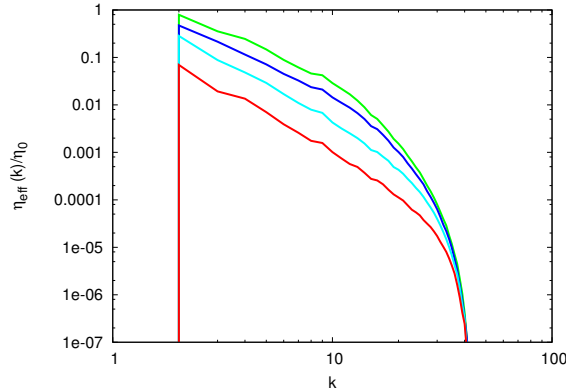


FIGURE 4.8 – Représentation de l'injection d'hélicité  $\eta(k)$  normalisé par  $\eta_0$ . Les courbes sont représentées pour différentes valeurs de  $\eta_0$  et permettent d'évaluer l'influence du clipping sur l'injection d'hélicité. Le code couleur est le même que sur la figure 4.6

Sur la figure 4.8 nous comparons les densités spectrales du taux d'injection d'hélicité pour différentes configurations. La pente correspond bien à  $k^{-\alpha}$ . Nous observons bien l'effet du clipping dans les échelles de dissipation. Nous remarquons que l'influence du clipping dans la zone inertielle croît avec  $\eta_0$ . En effet, nous pouvons remarquer une différence allant jusqu'à un facteur dix sur la valeur effective de  $\eta_0$ , en comparaison de la valeur choisie initialement<sup>2</sup>.

Les spectres d'énergies représentés sur la figure 4.9 présentent deux limites asymptotiques dans la zone inertielle. L'une est régie par une loi en  $k^{-5/3}$ , et l'autre par une loi en  $k^{-7/3}$ . Pour de faibles valeurs de  $\eta_0$ , la densité spectrale de l'énergie cinétique suit la limite en  $k^{-5/3}$ , tandis que pour de grandes valeurs de  $\eta_0$ , nous sommes face à une cascade maximale d'hélicité. Le passage de l'une à l'autre de ces limites se fait en augmentant la valeur de  $\eta_0$ . La transition montre d'abord une accumulation d'énergie à la fin du régime inertiel, puis cette accumulation est présente pour de plus en plus d'échelles avec l'augmentation de  $\eta_0$ . La différence d'amplitude pour l'énergie cinétique observée sur la figure 4.6 correspond donc à l'accumulation d'énergie dans le régime inertiel observée à la figure 4.9.

2. Il n'est pas trivial de comprendre ce comportement. Néanmoins nous pensons que le problème provient du fait que l'écoulement soit proche d'une saturation en hélicité (i.e l'hélicité relative est proche de l'unité). Il n'est plus tout à fait possible d'injecter de l'hélicité sans injecter localement de l'énergie. Ceci se traduit par un très faible dénominateur  $D$  (voir équations (3.28) et (3.29)), et une forte influence du clipping sur le forçage  $F_{Hel}$  (voir (3.33)).

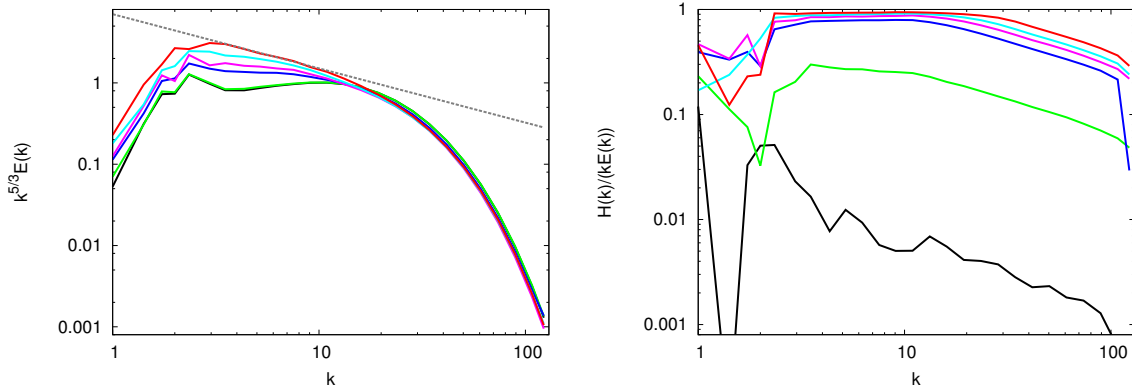


FIGURE 4.9 – Densités spectrales de l'énergie cinétique (gauche) et de l'hélicité relative (droite), en fonction du nombre d'onde.

Nous constatons également que l'hélicité relative se rapproche progressivement d'une limite asymptotique constante. Malgré nos efforts, nous ne pouvons pas atteindre une valeur unitaire pour l'hélicité relative, la valeur de saturation est ici plus proche de 0.9. Nous tenterons d'expliquer cette saturation à l'aide de la décomposition en modes hélicitaires dans la section suivante.

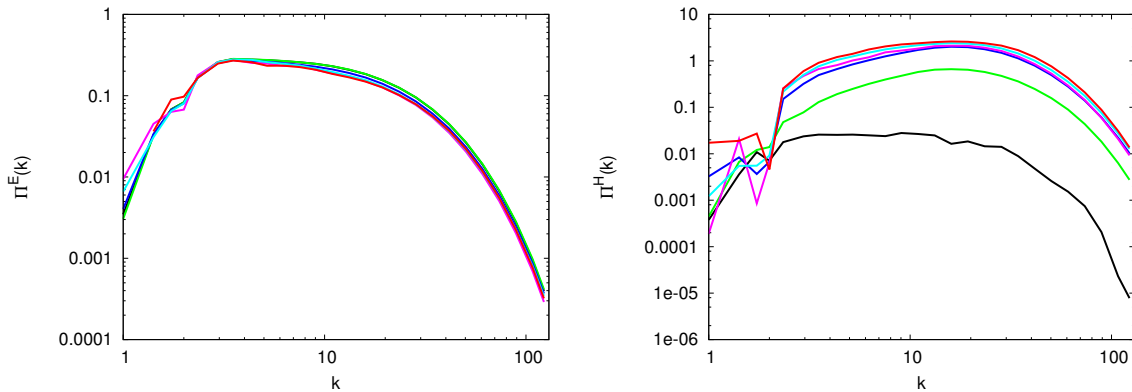


FIGURE 4.10 – Représentation des flux d'énergie  $\Pi^E$  (gauche) et d'hélicité  $\Pi^H$  (droite), en fonction du nombre d'onde.

En plus des spectres d'énergie et d'hélicité, nous nous intéressons aux flux d'énergie et d'hélicité. Ces quantités sont représentés sur la figure 4.10. En ce qui concerne les flux d'énergie, nous n'observons pas de changement flagrant de comportement entre les différents cas. En revanche, nous constatons que plus la valeur de  $\eta_0$  est importante, et plus l'amplitude du flux d'hélicité l'est également. Par ailleurs, nous pouvons remarquer que les flux ne présentent pas de parties plates, et ne sont donc à aucun moment constant par rapport au nombre d'onde  $k$ . Avec les DNS réalisées ici, il n'est pas possible d'établir clairement une loi de puissance pour les flux d'hélicité, la zone inertielle étant beaucoup trop étroite. Cette question sur l'allure du flux d'hélicité pourra faire l'objet d'une étude ultérieure.

Finalement, sur la figure 4.11 nous avons représenté le flux relatif d'hélicité à gauche,

## 4.2 Validation du forçage $F_{Hel}$

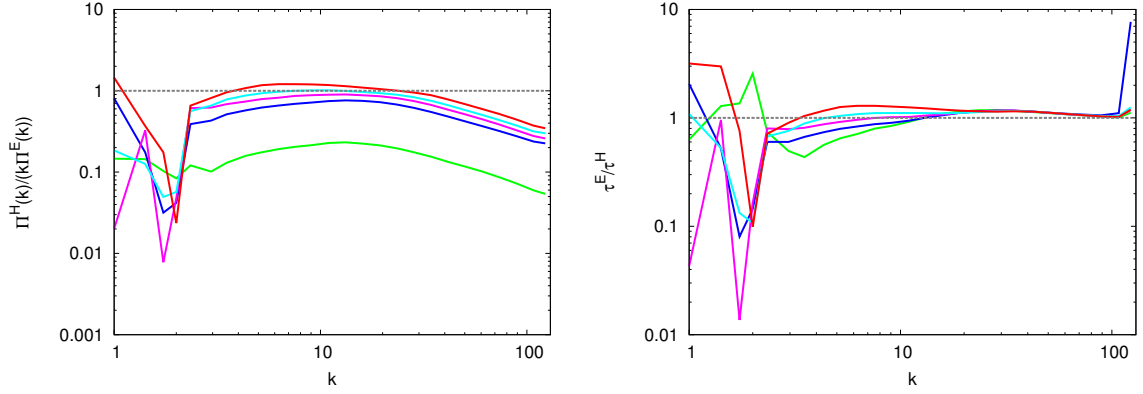


FIGURE 4.11 – Représentation du rapport des temps caractéristiques énergie sur hélicité (droite), et du flux relatif d’hélicité (gauche) en fonction du nombre d’onde, pour les configurations NH02-NH06.

ainsi que le rapport des temps caractéristiques énergie sur hélicité à droite. Nous remarquons que lorsque le flux relatif d’hélicité augmente avec  $\eta_0$ . Il est même plus grand que l’unité dans le cas *NH06*, et ce dans toute la zone comprise entre l’échelle de dissipation et l’échelle de forçage. Pour de faibles valeurs de  $\eta_0$  le temps de l’énergie est plus court que le temps hélicitaire. C’est le cas notamment pour la configuration *NH02* dont le spectre d’énergie est proche d’une loi en  $k^{-5/3}$  dans la zone inertielle, conformément aux prédictions dimensionnelles. Finalement un temps hélicitaire plus court que le temps énergétique (cas *NH06*) mène à l’observation d’une loi en  $k^{-7/3}$ .

### 4.2.3 $F_{Alv2}$ et $F_{Hel}$

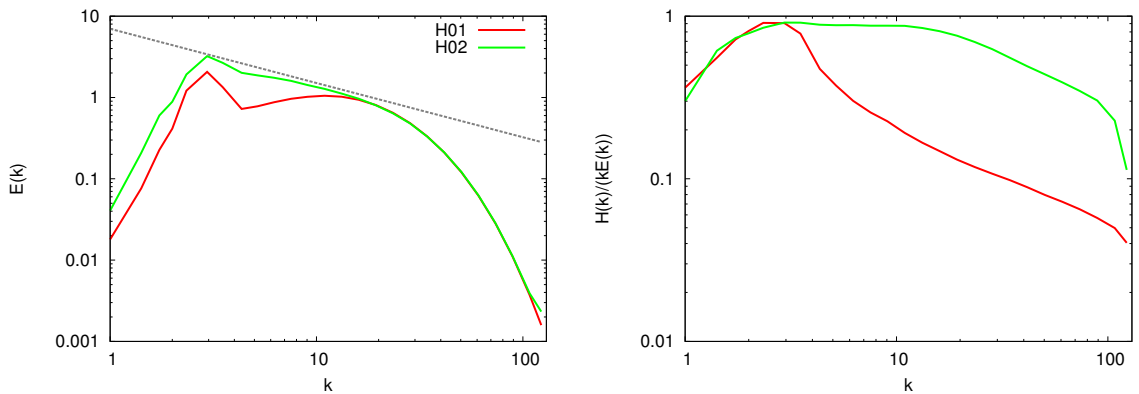


FIGURE 4.12 – Représentation de la densité spectrale d’énergie cinétique (gauche) et de la densité spectrale d’hélicité relative (droite). La courbe en rouge correspond au cas *H01*, et celle en verte au cas *H02* (voire tableau 4.1).

À présent nous réalisons des tests similaires, en ayant recours cette fois au forçage d’Alvelius hélicitaire à grande échelle. Cette fois-ci, nous n’avons réalisé qu’une seule

simulation ayant recours au forçage hélicitaire réparti,  $F_{Hel}$ . Le tableau 4.1 résume les paramètres de différentes simulations réalisées. Une première configuration d'écoulement est établie, avec une valeur nulle pour  $\eta_0$  (configuration *H02*). Puis une DNS est relancée à partir de l'état convergé pour une valeur de  $\eta_0$  prise égale à 0.5 (configuration *H02*). Comme le montre la figure 4.12, la loi en  $k^{-7/3}$  pour la densité spectrale d'énergie est de nouveau la limite asymptotique dans le régime inertiel. En ce qui concerne les spectres d'hélicité relative, le cas *H01* présente un extremum à l'échelle de forçage, puis décroît lorsque le nombre d'onde augmente, tandis que dans le cas *H02* l'hélicité relative est quasi constante. Dans les deux cas le maximum d'hélicité relative s'approche à nouveau de 0,9.

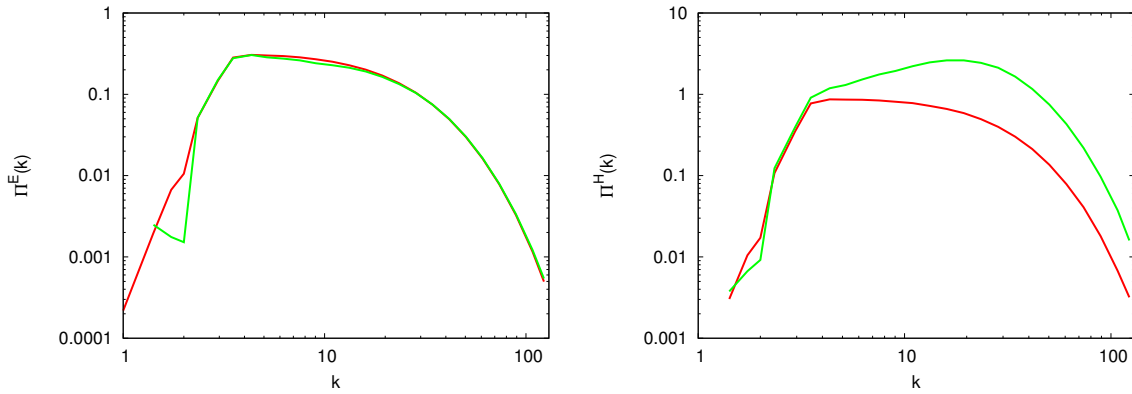


FIGURE 4.13 – Représentation des flux d'énergie  $\Pi^E$  (gauche) et d'hélicité  $\Pi^H$  (droite), en fonction du nombre d'onde. Le code couleur est le même que celui de la figure 4.12.

Les flux d'énergie ne montrent encore une fois pas de différence entre le cas *H01* et le cas *H02*, les flux d'hélicité eux sont différents. En effet, comme explicité précédemment, dans le cas *H01*, le flux  $\Pi^H$  présente une forme plate dans le régime inertiel, caractéristique d'une cascade jointe d'énergie et d'hélicité. En revanche, le comportement de ce flux dans le cas *H02* est plus proche des cas *NH02-6*, qui augmentent jusqu'à l'échelle de Kolmogorov, là où le forçage n'a plus d'effet, et où la dissipation commence à être importante. Bien que nous puissions encore augmenter la valeur de  $\eta_0$ , les résultats actuels sont suffisamment proches des limites asymptotiques théoriques pour confirmer les observations obtenues dans la section précédente.

### 4.3 Statistiques

Les densités spectrales pour les deux modes hélicitaires  $E^+$ ,  $E^-$  sont représentées sur la figure 4.14 pour les différents cas du tableau 4.1. Les croix représentent le mode hélicitaire positif, et les carrés le mode hélicitaire négatif. En l'absence d'hélicité (courbes noires), les spectres de  $E^+$  et  $E^-$  se superposent. Plus la quantité d'hélicité est importante dans l'écoulement, et plus l'écart se creuse entre les spectres d'énergie des deux modes. Dans le cas du forçage d'Alvelius hélicitaire seul (*H01*), l'écart est surtout net près de l'échelle de forçage, et les deux spectres se rapprochent assez vite dans la zone inertielle, ce qui correspond aux attentes théoriques [35] et études antérieures [60]. Dans le cas *H02*,  $E^+$  et  $E^-$  restent écartés tout le long de la zone inertielle. À gauche de la figure 4.14, nous

### 4.3 Statistiques

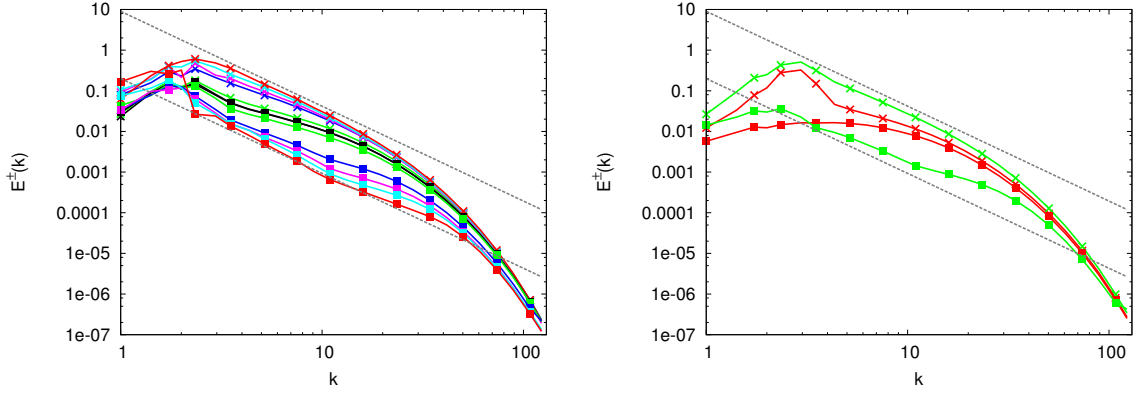


FIGURE 4.14 – Représentation des densités spectrales d’énergie  $E^+$  (croix) et  $E^-$  (carrés). À gauche toutes les configurations pour lesquelles le forçage  $f_{Alv}$  est utilisé, et la figure de droite concerne les cas H01 et H02. Les couleurs de la figure de gauche sont les mêmes que la figure 4.6

pouvons constater que lorsque  $\eta_0$  augmente, l’écart augmente également entre les deux spectres. Le spectre d’énergie lié aux modes hélicitaires positifs,  $E^+$ , suit une loi en  $k^{-7/3}$  pour de grandes valeurs de  $\eta_0$ . Il en est de même pour  $E^-$ . Le fait que  $E^-$  ne soit pas nulle contribue à expliquer que l’hélicité relative ne soit pas unitaire dans toute la zone inertielle. En effet, d’après les équations (2.70) et (2.71), l’hélicité relative est relié aux densités  $E^+$  et  $E^-$  via l’équation suivante,

$$\frac{H_u(k)}{kE_u(k)} = \frac{E^+ - E^-}{E^+ + E^-}. \quad (4.7)$$

Nous avons ensuite calculés les flux  $\Pi^{+++}$ ,  $\Pi^{++-}$ , etc, avec les définitions introduite dans la section 3.2.2. Par la suite nous avons calculé les flux  $\Pi^+$  et  $\Pi^-$  qui sont définis de la façon suivante,

$$\Pi^+ = \Pi^{+++} + \Pi^{++-} + \Pi^{+-+} + \Pi^{+--} \quad (4.8)$$

$$\Pi^- = \Pi^{-++} + \Pi^{-+-} + \Pi^{-+-} + \Pi^{---} \quad (4.9)$$

Si on définit une sphère de rayon  $k$ ,  $\Pi^+$  (respectivement  $\Pi^-$ ) correspond à l’énergie contenue dans les modes hélicitaires positifs(respectivement négatifs) qui sort de cette sphère de rayon  $k$  pour aller dans des modes hélicitaires négatifs (resp. positifs), ou bien à des échelles plus petites. Ces flux  $\Pi^+$  et  $\Pi^-$  sont représentés sur la figure 4.15 pour toutes les configurations. D’une façon générale, le signe positif (respectivement négatif) pour  $\Pi^\pm$  est une perte (resp. gain) d’énergie  $E^\pm$  à l’intérieur de la sphère de rayon  $k$ . Commençons par comparer les cas  $NH01$  (en noir à gauche de la figure 4.15) et  $H01$  (en rouge à droite de la figure 4.15), qui correspondent respectivement à la cascade de Kolmogorov et à la cascade d’hélicité suivant une loi en  $k^{-5/3}$  pour la densité spectrale de l’énergie cinétique. Dans un premier temps nous constatons que les flux  $\Pi^+$  et  $\Pi^-$  sont similaires à ceux obtenus par Chen *et al* [24] et Lessinnes *et al* [60]. En effet, dans le cas non hélicitaire, ces deux flux sont positifs et de même amplitude, ce qui traduit un transfert d’énergie majoritairement des grandes vers les petites échelles. Dans le cas  $H01$ ,

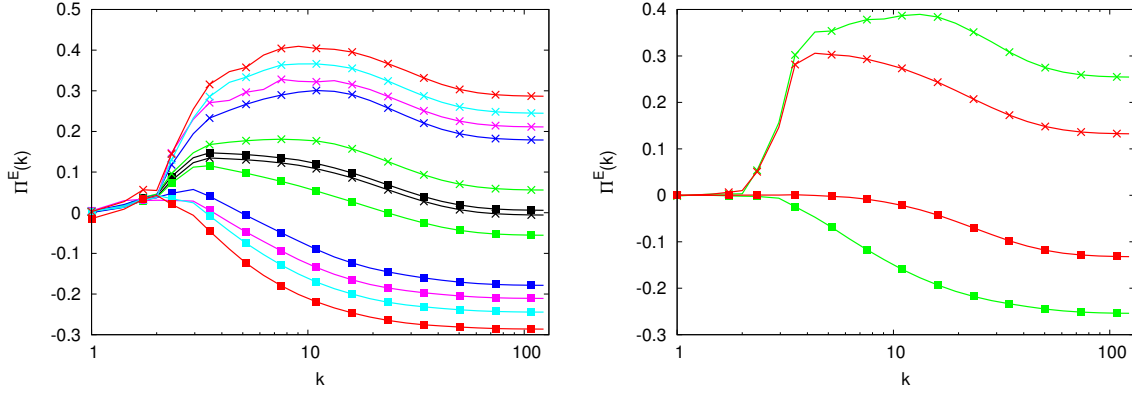


FIGURE 4.15 – Représentation des flux  $\Pi^+$  (croix) et  $\Pi^-$  (carrés) pour les différentes configurations présentées dans le tableau 4.1. À gauche sont représentées les résultats pour les configurations  $NH01$  à  $NH06$  en conservant le code couleur introduit à la figure 4.6. À droite les courbes représentent les configuration  $H01$  (rouge) et  $H02$  (vert).

aux petites échelles, les flux sont de signes contraires, ce qui correspond à un échange entre les deux énergies  $E^+$  et  $E^-$ , et l'essentiel des transferts directs sont réalisés via  $\Pi^+$  dans la zone inertielle, tandis que le flux  $\Pi^-$  est proche de zéro. Ce simple constat, permet d'ores et déjà d'observer l'influence de l'hélicité sur les transferts d'énergie.

À présent comparons les flux  $\Pi^+$  et  $\Pi^-$  pour les configurations  $NH01$  à  $NH06$  (à gauche sur la figure 4.15). Nous pouvons constater que lorsque l'injection d'hélicité augmente, le flux  $\Pi^-$  devient négatif. Cela exprime probablement un transfert d'énergie provenant des modes hélicitaires positifs vers les modes hélicitaires négatifs. Toutefois à ce stade on ne peut pas exclure une cascade inverse des modes hélicitaires négatifs.

Par ailleurs à droite de la figure 4.15 sont présentés les flux pour les cas  $H01$  et  $H02$ . Dans les deux cas, le flux  $\Pi^-$  ne contribue aucunement à la cascade directe, mais le signe négatif du flux traduit de nouveau un gain d'énergie  $E^-$ . Lorsque nous injectons de l'hélicité dans la zone inertielle, les échanges entre énergies augmentent en intensité dans le cas  $H02$ , et le flux  $\Pi^+$  est également plus intense à toutes les échelles. A nouveau il est difficile de dire si le signe négatif du flux  $\Pi^-$  dans la zone inertielle représente un transfert inverse, ou bien un gain d'énergie lié aux interactions entre  $E^+$  et  $E^-$ .

À présent nous souhaitons déterminer quels sont les flux qui permettent d'expliquer en détail les comportements de  $\Pi^+$  et  $\Pi^-$ . Nous nous intéressons donc aux huit flux obtenus à l'aide de la décomposition hélicitaire ( $\Pi^{+++}, \Pi^{++-}$ , etc...). Ces flux sont représentés pour les configurations  $NH01$  à  $NH06$  sur la figure 4.16. D'une façon générale, nous notons que les flux qui sont nuls pour  $k = 128$  représentent des échanges entre échelles d'un même mode positif ou négatif ( $\Pi^{+++}$ ,  $\Pi^{++-}$ ,  $\Pi^{-+-}$  et  $\Pi^{---}$ ). Par ailleurs les flux qui sont non nuls pour  $k = 128$  correspondent à des termes d'échanges entre  $E^+$  et  $E^-$  ( $\Pi^{+-+}$ ,  $\Pi^{+--}$ ,  $\Pi^{-++}$  et  $\Pi^{-+-}$ ).

D'autres comportements communs à toutes les configurations sont observables. Notamment le fait que les flux  $\Pi^{+-+}$  et  $\Pi^{-+-}$  soient toujours de signe positif dans la zone inertielle, les rend responsables de la cascade directe d'énergie cinétique. Les flux  $\Pi^{+++}$  et  $\Pi^{---}$  sont quant à eux toujours négatifs, ils sont donc responsables de cascades inverses. Enfin les flux  $\Pi^{+-+}$ ,  $\Pi^{+--}$ ,  $\Pi^{-++}$  et  $\Pi^{-+-}$  se compensent globalement, car ils sont

### 4.3 Statistiques

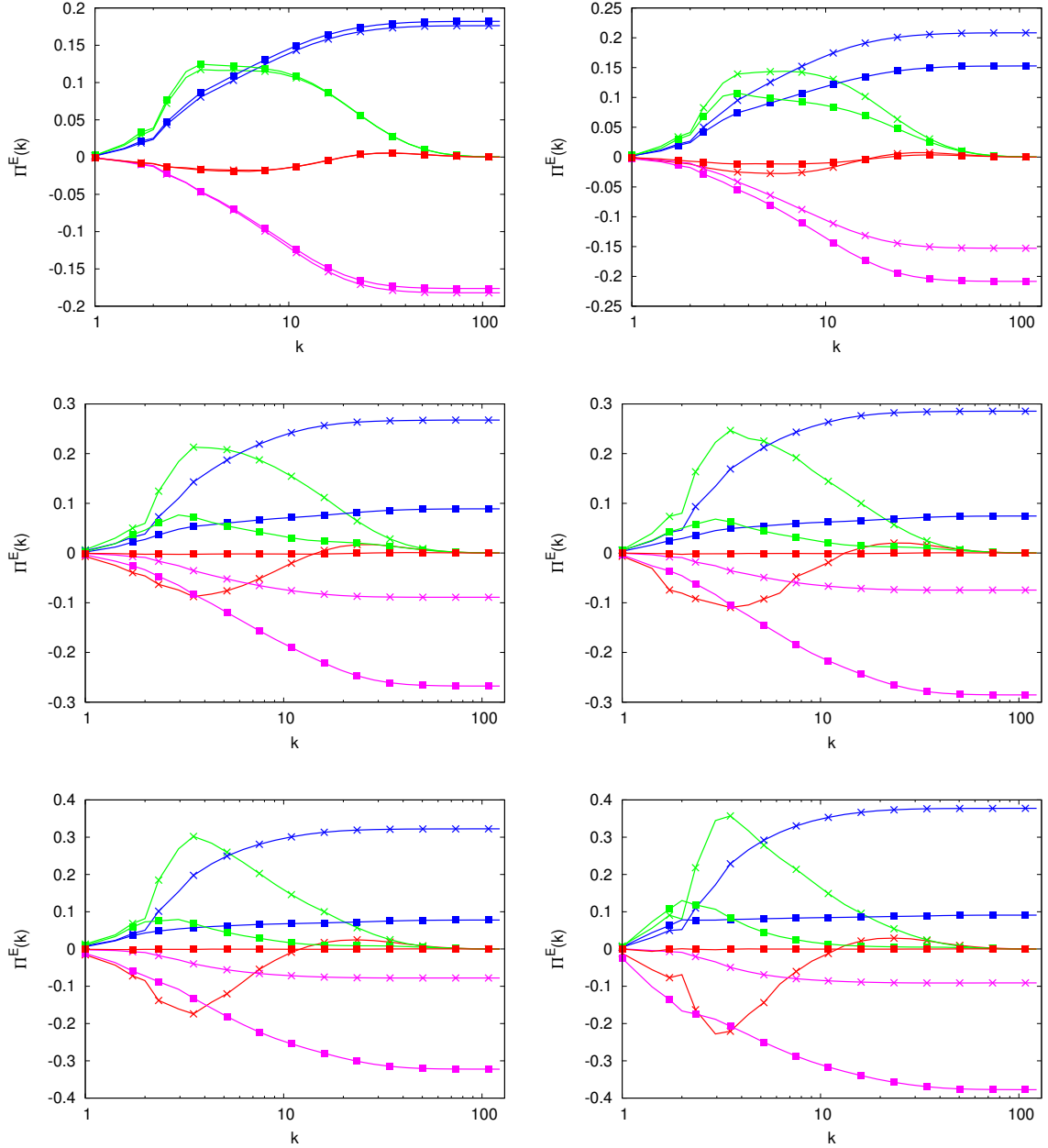


FIGURE 4.16 – Flux d'énergie, décomposé à l'aide des modes hélicitaires. Les couleurs sont identiques à celles utilisés sur les schémas 2.4 et 3.5. Les courbes rouges représentent les interactions de classe I, en vert celles de classe II, en bleu celles de classe 3, et la quatrième classe est représentée en rose. Les symboles permettent d'identifier les interactions liées à  $E^+$  ou à  $E^-$ . Les croix (respectivement carrés) sont associées à des triades dont le récepteur est un mode hélicitaire positif (respectivement négatif). Les courbes en grises représentent la somme des quatre flux pour un récepteur donné. Ici les résultats concernant les cas NH01 à NH06 sont présentés. NH01 : en haut à gauche, NH02 : en haut à droite NH03 : au milieu à gauche, NH04 : au milieu à droite, NH05 : en bas à gauche, NH06 : en bas à droite. Légende :  $\Pi^{+++}$  — $\times$ —,  $\Pi^{---}$  — $\blacksquare$ —,  $\Pi^{+--}$  — $\times$ —,  $\Pi^{-++}$  — $\blacksquare$ —,  $\Pi^{+-}$  — $\times$ —,  $\Pi^{-+}$  — $\blacksquare$ —,  $\Pi^{++}$  — $\times$ —,  $\Pi^{--}$  — $\blacksquare$ —.



responsables des échanges entre  $E^+$  et  $E^-$ .

A la figure 4.16 nous avons repris le même code couleur qu'à la figure 2.5, chaque couleur représentant une classe (I, II, III, ou IV) de transfert d'énergie. En l'absence d'hélicité (configuration  $NH01$ ), les flux d'une même classe sont de même intensité, du fait de la symétrie de l'écoulement. Lorsque nous injectons de l'hélicité (configurations  $NH02$  à  $NH06$ ), les symétries de l'écoulement sont brisées, et cette brisure de symétries se propage alors aux huit flux. En effet, nous pouvons constater que plus  $\eta_0$  est important, et plus les courbes des flux d'une même classe sont dissociées.

Par ailleurs nous observons que le flux  $\Pi^{+++}$  augmente en intensité lorsque l'injection d'hélicité augmente. C'est également le cas du flux  $\Pi^{++-}$ , dont l'amplitude est plus importante que celle du flux  $\Pi^{+++}$ , ce qui conduit au final à une cascade directe d'énergie. Dans la section 4.2.2, nous avons observé une saturation de l'hélicité relative pour une valeur constante proche de 0.9. La raison pour laquelle on n'atteint pas la valeur 1 est liée à une quantité d'énergie contenue dans les modes hélicitaires négatifs, faible mais non négligeable en comparaison à celle contenue dans les modes hélicitaires positifs. Les comportements des termes d'échanges entre  $E^+$  et  $E^-$  ( $\Pi^{+-+}$ ,  $\Pi^{+--}$ ,  $\Pi^{-++}$  et  $\Pi^{-+-}$ ) permettent une compréhension des observations concernant l'hélicité relative. La somme de  $\Pi^{+-+}$  et  $\Pi^{+--}$  est de signe positif, ce qui traduit un transfert d'énergie de  $E^+$  vers  $E^-$ . La somme  $\Pi^{-++} + \Pi^{-+-}$  est négative et donc confirme un transfert d'énergie depuis les modes hélicitaires positifs vers les modes négatifs. Le forçage non hélicitaire d'Alvelius utilisé pour les configurations  $NH01$  à  $NH06$  injecte autant d'énergie dans les modes hélicitaires positifs que dans les modes négatifs. C'est bien l'action du forçage hélicitaire  $F_{Hel}$  qui contraint l'énergie à se cantonner aux modes positifs, en injectant de l'hélicité positive, tandis que les termes d'échanges entre  $E^+$  et  $E^-$  imposent la présence d'énergie dans les modes hélicitaires négatifs.

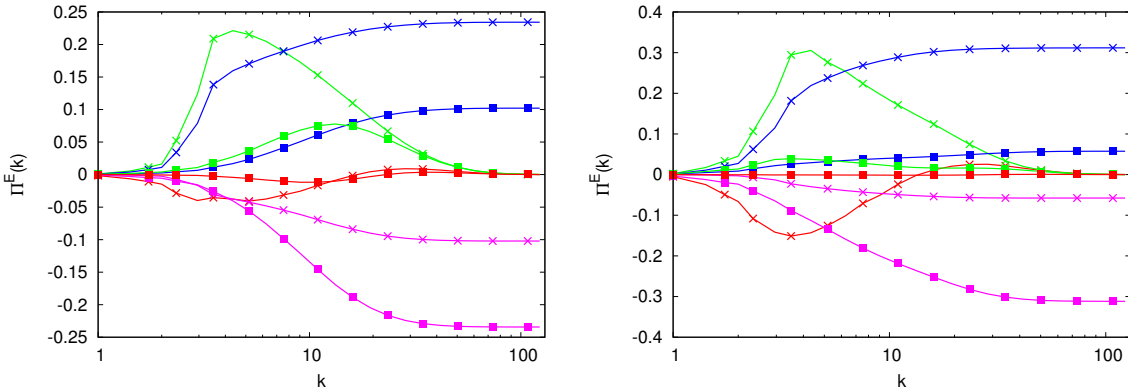


FIGURE 4.17 – Flux d'énergie, décomposés à l'aide des modes hélicitaires. Les couleurs sont identiques à celles utilisés sur la figure 4.16. A gauche,  $H01$ , à droite  $H02$ .

Les résultats des calculs de flux pour les configurations  $H01$  et  $H02$  sont finalement présentés sur la figure 4.17. Les comportements observés précédemment pour les flux responsables des cascades d'énergie,  $\Pi^{+++}$ ,  $\Pi^{++-}$ ,  $\Pi^{-++}$  et  $\Pi^{-+-}$ , se retrouvent de nouveau ici. En effet, les transferts inverses sont de nouveau dominés par le terme  $\Pi^{+++}$ , dans toute la zone inertielle, la cascade directe d'énergie cinétique est liée au flux  $\Pi^{++-}$ , et la somme de ces deux flux est de signe positif, ce qui traduit une cascade directe d'énergie cinétique.

### 4.3 Statistiques

---

Par ailleurs les termes d'échanges traduisent de nouveau, pour les configurations  $H01$  et  $H02$ , des transferts d'énergie depuis  $E^+$  vers  $E^-$ . Le fait d'injecter de l'hélicité à toutes les échelles dans le cas  $H02$  augmente également l'intensité des flux  $\Pi^{+++}$  et  $\Pi^{++-}$ . Dans le cas  $H01$ , pour lequel seule la version hélicitaire du forçage d'Alvelius est utilisée, l'énergie injectée par le forçage n'est injectée que dans les modes hélicitaires positifs. De nouveau, ce sont les termes d'échanges entre  $E^+$  et  $E^-$  qui permettent la présence d'énergie dans les modes hélicitaires négatifs. C'est ensuite grâce à ces modes hélicitaires négatifs que l'énergie cinétique contenue dans les modes positifs peut cascader des grandes vers les petites échelles dans la zone inertielle.

Une interrogation que nous avons à présent concerne la validité des résultats présentés par Biferale *et al* [12, 13]. En effet, ils présentent des simulations numériques réalisées en ne résolvant que l'équation de transport des modes hélicitaires positifs, en supposant que l'énergie  $E^-$  est nulle. Ils observent notamment la présence d'une cascade inverse d'énergie cinétique, visible sur les spectres d'énergies  $E^+$ . De notre point de vue, un premier point d'interrogation concerne l'absence des transferts de classe II (associés aux flux  $\Pi^{+-}$  et  $\Pi^{-+}$ ). Ces transferts permettent entre autres choses de s'assurer que la cascade d'énergie cinétique reste globalement directe, et leur absence pourrait mener à des conclusions erronées. Nous pouvons notamment imaginer des simulations telles qu'une cascade inverse d'énergie domine l'écoulement faute de processus permettant d'assurer une cascade directe. Le second point d'interrogation concerne le fait que dans leur écoulement l'hélicité relative est constante et unitaire dans toute la zone inertielle. Cela n'est possible qu'en l'absence de modes hélicitaires négatifs. Or nous avons vu dans nos simulations que ce genre de configuration paraît peu probable dans la mesure où il y a nécessairement un flux d'énergie des modes hélicitaires positifs vers les négatifs. Cette limite semble donc singulière.



## Deuxième partie

### Turbulence magnétohydrodynamique : Simulation et modélisation



## 5.1 Généralités

Pour de nombreux objets géophysiques ou astrophysiques, telles que les planètes, les étoiles ou encore les galaxies, l'étude des interactions entre un champ magnétique et un fluide conducteur peut permettre d'expliquer différents phénomènes observés. On peut notamment tenter d'expliquer la formation des taches et éruptions solaires (voir la description de la figure 5.1), ou encore l'existence du champ magnétique de la Terre. Dans le cas de la Terre, l'hypothèse utilisée par les géophysiciens est que l'énergie cinétique contenue dans le noyau liquide est convertie en énergie magnétique via un effet dynamo. C'est cette dynamo qui permettrait de générer le champ magnétique de la Terre.

Pour ces objets, les interactions entre le fluide qui les constituent, et le champ magnétique qui les traversent sont décrites par les équations de la magnétohydrodynamique. Ces équations sont dérivées à partir des équations de Maxwell et des équations de Navier-Stokes. Dans une limite non relativiste (i.e où la vitesse du fluide est négligeable par rapport à celle de la lumière) et incompressible, ces équations, une fois adimensionnées, s'expriment sous la forme suivante,

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{b} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (5.1)$$

$$\partial_t \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + \eta \Delta \mathbf{b}, \text{ et} \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (5.3)$$

où  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  est le champ magnétique,  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{b}$  est la densité de courant et  $\eta$  est la diffusivité magnétique. Le terme  $+\mathbf{j} \times \mathbf{b}$  désigne la force de Lorentz, c'est ce terme représente la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse. L'équation de transport du champ magnétique est généralement désignée comme l'équation d'induction, et où le terme  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b})$  est le terme d'induction. Ce terme peut se décomposer en un terme d'advection  $-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b}$ , qui est responsable du transport turbulent du champ magnétique, et un terme lié au cisaillement du champ de vitesse  $((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u})$  qui est quant à lui responsable de la génération du champ magnétique par effet dynamo.

Bien entendu si nous considérons de nouveau des champs périodiques, il est possible d'exprimer ces deux quantités dans l'espace de Fourier, comme nous l'avons fait



FIGURE 5.1 – Cette image est une photographie du Soleil prise par les télescopes orbitaux NuSTAR et SDO de la NASA. Il s’agit d’une superposition de deux images, l’une effectuée en ultraviolet (avec SDO), qui correspond aux couleurs dans les tons rouge, et l’autre réalisée en rayons X (avec NuSTAR), qui correspond aux structures vertes/bleues. Pour les nuances de rouges, les zones lumineuses sont des régions extrêmement chaudes. L’étude de la MHD permettrait d’expliquer pourquoi les régions autour des taches solaires sont très chaudes. Une hypothèse serait que ces taches sont un peu plus froides que les régions qui les entourent car le champ magnétique qui les génère réduit la convection thermique.

précédemment pour le champ de vitesse. Ainsi,

$$u_l(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} u_l(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x} = u_l^*(-\mathbf{k}, t) \quad (5.4)$$

$$b_l(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} b_l(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x} = b_l^*(-\mathbf{k}, t) \quad (5.5)$$

où  $u_l(\mathbf{k}, t)$  et  $b_l(\mathbf{k}, t)$  sont donc les transformés de Fourier des champs de vitesse et magnétiques respectivement.

Afin d’étudier la turbulence MHD, des grandeurs similaires à celles utilisées en turbulence hydrodynamique peuvent être définies. Notons dans un premier temps qu’en l’absence de viscosité et de diffusivité magnétique, il existe trois quantités invariantes en turbulence MHD (voire par exemple [44]). Il s’agit de l’hélicité magnétique  $H_m$ , de l’hélicité croisée  $H_c$ , ainsi que de l’énergie totale  $E_t$ , qui est la somme de l’énergie cinétique  $E_k$  et de l’énergie magnétique  $E_m$ . Les énergies totale, cinétique et magnétique s’expriment de la façon suivante,

$$E_k = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (5.6)$$

$$E_m = \frac{1}{2} \langle \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (5.7)$$

$$E_t = E_k + E_m. \quad (5.8)$$

## 5.1 Généralités

---

Ici les crochets  $\langle . \rangle$  désignent à nouveau une moyenne sur tout l'espace. L'hélicité croisée correspond à la corrélation entre le champ de vitesse et le champ magnétique et s'exprime de la façon suivante,

$$H_c = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (5.9)$$

Finalement le troisième invariant en MHD est l'hélicité magnétique,

$$H_m = \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (5.10)$$

où  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  est le potentiel vecteur magnétique, tel que  $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$  et  $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ . L'hélicité croisée correspond aux corrélations entre le champ de vitesse et le champ magnétique. L'interprétation de l'hélicité magnétique en MHD se fait par analogie avec celle de l'hélicité cinétique en hydrodynamique. En effet, en l'absence de diffusivité, l'hélicité magnétique permet de mesurer l'entortillement des lignes de champ magnétiques, ainsi que le nombre de nœuds dans le champ magnétique [67].

Ces quantités peuvent être également définies dans l'espace spectral, et leurs densités volumiques s'expriment alors de la façon suivante,

$$E_k = \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \mathbf{u}^*(\mathbf{k}, t), \quad (5.11)$$

$$E_m = \frac{1}{2} \mathbf{b}(\mathbf{k}, t) \mathbf{b}^*(\mathbf{k}, t), \quad (5.12)$$

$$H_m = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{k}, t) \mathbf{b}^*(\mathbf{k}, t), \quad (5.13)$$

$$H_c = \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \mathbf{b}^*(\mathbf{k}, t). \quad (5.14)$$

Par ailleurs, nous avons introduit dans le chapitre 2.2.1 le nombre de Reynolds, qui permet d'évaluer le rapport entre le terme d'advection et les effets visqueux. Ce nombre est également utilisé en MHD, généralement accompagné de son équivalent magnétique. En effet, nous pouvons introduire un nombre de Reynolds magnétique noté  $R_{m\lambda}$ , qui permet d'évaluer le rapport entre le terme d'induction  $\mathbf{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{b})$  et la diffusion magnétique  $\eta \Delta \mathbf{b}$  dans l'équation de transport du champ magnétique (5.2). Le lien entre le nombre de Reynolds  $R_\lambda$  et le nombre de Reynolds magnétique se fait grâce au nombre de Prandtl magnétique,  $P_m = \frac{\nu}{\eta}$ , qui est le rapport entre la diffusivité magnétique et la viscosité. Nous conservons ainsi la définition introduite précédemment pour le nombre de Reynolds basé sur la micro échelle de Taylor, ce qui nous donne,

$$R_\lambda = \frac{U_{r.m.s} \lambda_\perp}{\nu}, \quad (5.15)$$

$$R_{m\lambda} = \frac{U_{r.m.s} \lambda_\perp}{\eta} \quad (5.16)$$

$$P_m = \frac{R_{m\lambda}}{R_\lambda} \quad (5.17)$$



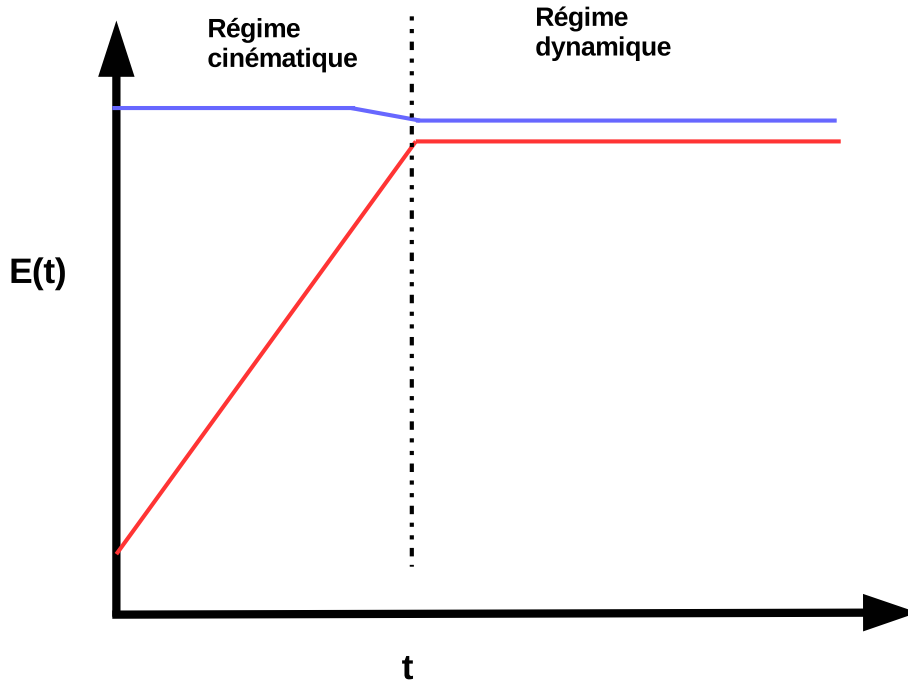


FIGURE 5.2 – Représentation schématique de l'évolution temporelle des énergies cinétique et magnétique (les ordonnées sont en échelle logarithmique). L'énergie magnétique est tracée en rouge, et l'énergie cinétique en bleu.

## 5.2 Effet dynamo : concept physique

Dans la vie de tous les jours, la dynamo est associée à une conversion d'énergie mécanique en énergie électrique par exemple grâce à la rotation des roues d'un vélo et de la présence d'un aimant. En magnétohydrodynamique le concept reste similaire sauf qu'ici il n'y a pas forcément d'aimant, la génération du champ magnétique résultant d'une instabilité de type dynamo. L'étude de la dynamo turbulente est au cœur des études sur l'origine du champ magnétique de la Terre. Le noyau terrestre étant constitué de métal liquide, donc conducteur de l'électricité, la turbulence MHD dans le noyau permettrait alors d'expliquer l'existence du champ magnétique terrestre.

Plusieurs expériences telles que les dynamo de Karlsruhe [90], Riga [75, 41] et VKS [68] ont permis d'observer un effet dynamo. L'approche numérique permet également d'étudier ce phénomène, malgré les difficultés à obtenir des nombres de Reynolds réalistes avec la puissance de calcul actuelle.

On peut distinguer différents types de dynamo. On peut ainsi distinguer les dynamos cinématiques ou dynamiques. La dynamo cinématique correspond à une configuration pour laquelle le champ magnétique est amplifié, mais la rétroaction de ce dernier sur le champ de vitesse, qui se fait via la force de Lorentz, est négligée. Cette approche peut être employée d'un point de vue numérique, notamment en supposant que le profil du champ de vitesse est connu (voir [94] pour un exemple récent). En revanche, dans le

## 5.3 Le rôle de l'hélicité en turbulence MHD

---

cas d'une dynamo dynamique, l'action du champ magnétique n'est plus négligeable, et le champ de vitesse est alors modifié. En pratique, d'un point de vue numérique il est fréquent d'observer des configurations d'écoulement présentant une phase de croissance du champ magnétique pendant laquelle l'action de la force de Lorentz sur le champ de vitesse reste négligeable par rapport aux termes d'advections, de forçage, ou encore de dissipation. Dans cette phase, l'énergie magnétique croît exponentiellement avec le temps, avant d'atteindre une phase de saturation. La phase de croissance est désignée comme étant la phase cinématique, et la phase de saturation la phase dynamique (voir figure 5.2).

Nous pouvons par ailleurs distinguer les dynamos de petites échelles des dynamos de grandes échelles. Pour un écoulement turbulent, on peut associer une échelle caractéristique (typiquement : l'échelle intégrale introduite en partie I). Si la dynamo suscitée par cet écoulement permet de générer un champ magnétique dont l'échelle caractéristique<sup>1</sup> est plus petite que celle du champ de vitesse, on parle alors de dynamo de petite échelle. En revanche si l'échelle caractéristique du champ magnétique est plus grande que celle du champ de vitesse on parle alors de dynamo de grande échelle. Ces deux types de dynamos peuvent être observées numériquement à l'aide de forçages aléatoires [19, 50], et leur existence est attendue dans le Soleil, ou encore dans le noyau terrestre.

**Théorèmes anti dynamo** Les conditions nécessaires à l'obtention d'un effet dynamo au sein d'un écoulement turbulent sont encore mal connues, mais des travaux théoriques ont permis de déterminer des configurations d'écoulement pour lesquelles l'établissement d'un effet dynamo est impossible. Le premier théorème fut démontré par Cowling [32] et Backus *al* [5]. Le théorème de Cowling consiste à dire que la dynamo ne peut pas se développer en présence si les champs de vitesse et magnétique sont tous les deux axisymétriques. L'impossibilité de générer un effet dynamo fut par la suite démontré pour d'autres configurations, notamment dans le cas d'écoulement bidimensionnels [102].

## 5.3 Le rôle de l'hélicité en turbulence MHD

### 5.3.1 Effet $\alpha$ et $\omega$ approche phénoménologique

Les effets  $\alpha$  et  $\omega$  ont été introduits afin de décrire les différents mécanismes d'amplification du champ magnétique. Ils furent étudiés pour la première fois par Parker [72], qui s'intéressait aux dynamos solaires et terrestres. Ces deux effets ont pour particularité d'apparaître en présence d'une rotation différentielle, et de convection. L'effet  $\omega$  fut introduit afin d'évaluer l'influence des forces de cisaillement sur la génération d'un champ de grande échelle. Dans le cas du soleil par exemple la rotation de la Terre entraîne la déformation du champ magnétique dipolaire et permet de générer un champ magnétique toroïdal. La figure 5.3 présente une vue schématique des deux effets. Pour l'effet  $\omega$ , on suppose que le champ magnétique est purement poloïdal (composante  $B_P$  sur la figure 5.3). Les lignes de champs magnétiques sont alors étirées dans la directions toroïdale du fait de la rotation différentielle, générant ainsi un champ magnétique dans la direction toroïdale (composante  $B_T$  sur la figure). L'effet  $\alpha$  permet de générer un champ dipolaire à partir d'un

---

1. L'échelle caractéristique peut désigner par exemple la taille des structures du champ magnétique.

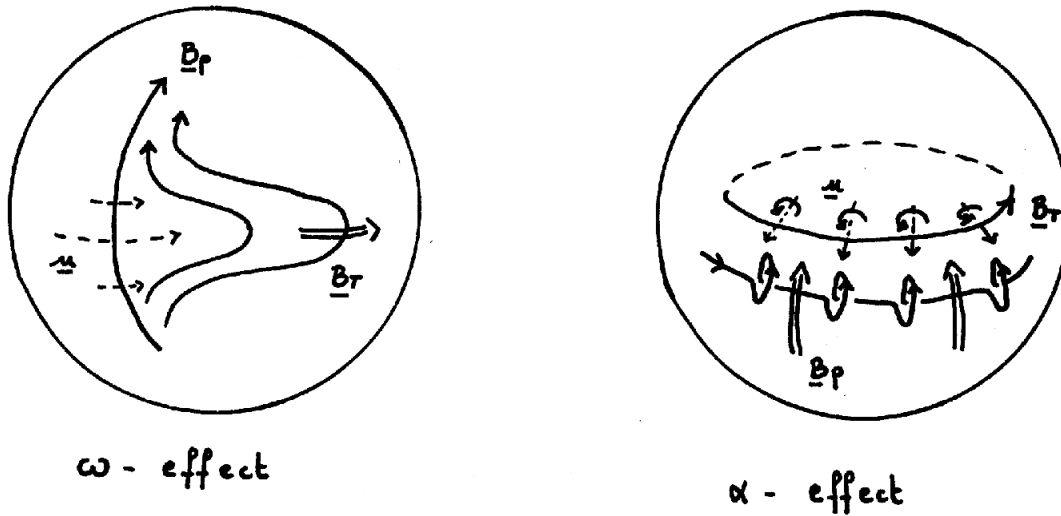


FIGURE 5.3 – Représentation des effets  $\alpha$  et  $\omega$ . À gauche le champ magnétique toroïdal (noté  $B_T$ ) est généré à partir du champ magnétique poloïdal (noté  $B_P$ ), grâce à l'action d'une rotation différentielle (effet  $\omega$ ). À droite le champ poloïdal est généré à partir d'un champ toroïdal, grâce à des rouleaux de convection. (image extraite de la thèse de Courvoisier [31])

champ toroïdal grâce par exemple à des rouleaux de convection. Sur la figure 5.3 (droite) le champ magnétique est initialement toroïdal. Les lignes de champ ont alors tendance à faire des 'boucles' sous l'action des rouleaux de convection. La formation des boucles se fait parallèlement à la génération d'une composante poloïdale pour le champ magnétique. Les prérequis pour l'établissement d'un effet  $\alpha$  au sein d'un écoulement peuvent être remplis via la présence d'hélicité cinétique [72].

Combinés, ces deux phénomènes représentent la dynamo  $\alpha\omega$ .

### 5.3.2 Écoulements MHD en présence d'hélicité

Plusieurs forçages furent développés pour générer des écoulements turbulents menant à un effet dynamo lors de la réalisation de simulations numériques directes. On peut notamment nommer les forçages de Roberts [82], ou encore l'écoulement CP [42]. Le point de départ des études numériques s'intéressant à la turbulence hélicitaire en présence d'un champ magnétique, réside dans la volonté d'explorer la physique s'articulant autour de l'effet  $\alpha$ . Les travaux de Frish *et al* [40] et Pouquet *et al* [78] ont démontré l'existence d'une cascade inverse d'hélicité magnétique en présence d'hélicité cinétique. C'est dans ce contexte que Brandenburg [19] a introduit un forçage aléatoire injectant aussi bien de l'énergie que de l'hélicité cinétique à l'échelle de forçage pour tenter d'observer une cascade inverse d'énergie magnétique, ainsi qu'un effet  $\alpha$ . L'un des intérêts d'utiliser un forçage aléatoire et isotrope, est de s'assurer de l'absence de rotation globale, et donc de s'affranchir de l'effet  $\omega$ . On parle de dynamo  $\alpha^2$  et non plus  $\alpha\omega$ .

Les configurations d'écoulements générées par ce forçage ont permis d'observer une cascade inverse d'hélicité magnétique. La figure 5.4 à gauche présente les spectres d'énergie magnétique obtenus lors de la réalisation de simulation numériques directes. On observe

## 5.4 Outils statistiques

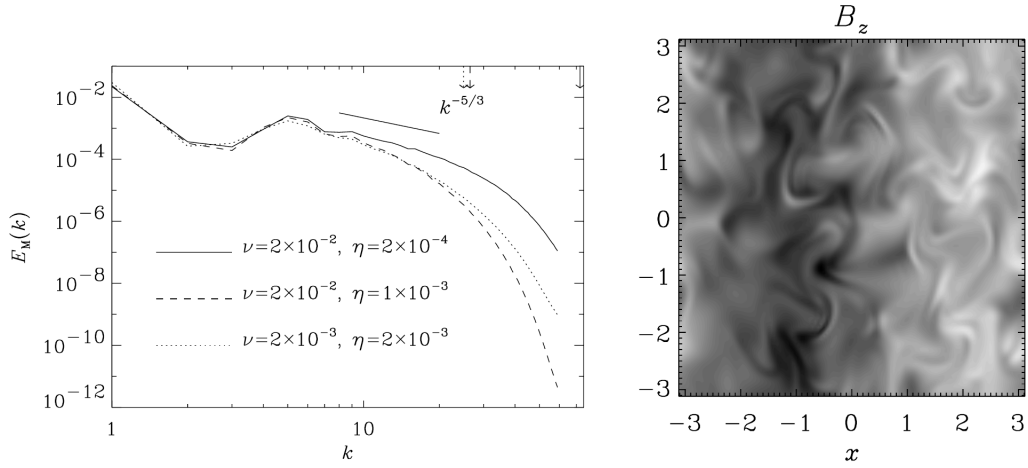


FIGURE 5.4 – Divers résultats extrait d’un article de Brandenburg [19]. À gauche, on représente les spectres d’énergie magnétique, et à droite une tranche d’une des composantes du champ magnétique. On peut constater une accumulation d’énergie magnétique dans la plus grande échelle sur les spectres, ainsi que la présence de structures de grandes échelles pour le champ magnétique, et ainsi que d’une direction d’anisotropie.

notamment la présence d’une accumulation d’énergie aux grandes échelles de l’écoulement résultant d’une cascade inverse d’hélicité magnétique. On parle ici de dynamo de grande échelle. Cette cascade inverse se traduit notamment par l’émergence de structures de grandes échelles pour le champ magnétique, comme le montre la figure 5.4 (droite). Le champ magnétique adopte ici une direction d’anisotropie, qui semble être uniquement dépendante des conditions initiales [19].

Ce forçage proposé par Brandenburg dispose aussi bien d’une version hélicitaire que d’une version non hélicitaire, qui fut utilisé afin de comparer les dynamos de petites et de grandes échelles [50]. Il s’agit actuellement du seul forçage aléatoire hélicitaire ayant permis de produire ce type de résultats. Nous tenterons dans ce manuscrit de confirmer ces résultats à l’aide des forçages d’Alvelius, hélicitaires et non-hélicitaires présentés dans la première partie.

## 5.4 Outils statistiques

Dans la partie précédente, nous avons introduit les interactions triadiques ainsi que les définitions des termes de transferts et de flux d’énergie cinétique en turbulence hydrodynamique. Ces définitions furent étendues à la magnétohydrodynamique, et les équations de transport des densités spectrales des énergies cinétiques et magnétiques s’expriment alors sous la forme suivante [3, 64, 74, 95],

$$(\partial_t + \nu k^2)E_k(\mathbf{k}, t) = T^{uu}(\mathbf{k}, t) + T^{ub}(\mathbf{k}, t) + R\{\mathbf{f}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}^*(\mathbf{k})\} \quad (5.18)$$

$$(\partial_t + \eta k^2)E_m(\mathbf{k}, t) = T^{bb}(\mathbf{k}, t) + T^{bu}(\mathbf{k}, t), \quad (5.19)$$

où  $T^{uu}(\mathbf{k}, t)$  (respectivement  $T^{bb}(\mathbf{k}, t)$ ) désigne les transferts d'énergie cinétique (respectivement magnétique) depuis tous les nombres d'ondes vers le nombre d'onde  $\mathbf{k}$ . De plus, les termes  $T^{ub}$  et  $T^{bu}$  représentent les termes d'échange<sup>2</sup> entre l'énergie magnétique et l'énergie cinétique [3]. L'action de la dynamo se fait au travers de ces termes d'échanges. Ces transferts s'expriment sous la forme d'une somme de transferts liés aux interactions triadiques,

$$T^{uu}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{q} \\ \mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}}} (S^{uu}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + S^{uu}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p})), \quad (5.20)$$

$$T^{ub}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{q} \\ \mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}}} (S^{ub}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + S^{ub}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p})), \quad (5.21)$$

$$T^{bu}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{q} \\ \mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}}} (S^{bu}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + S^{bu}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p})), \quad (5.22)$$

$$T^{bb}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{q} \\ \mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}}} (S^{bb}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + S^{bb}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p})). \quad (5.23)$$

où  $S^{xy}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$  représente le transfert d'énergie effectué depuis le champ  $x$  associé au vecteur d'onde  $\mathbf{p}$  (émetteur), vers le récepteur  $y$  associé au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , à l'aide d'un médiateur (champ  $\mathbf{u}$  ou  $\mathbf{b}$ ) associé au vecteur  $\mathbf{q}$ . Ce transfert mode à mode s'exprime de la façon suivante,

$$S^{uu}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = -I \{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{q})][\mathbf{u}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k})]\}, \quad (5.24)$$

$$S^{ub}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = +I \{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{q})][\mathbf{b}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k})]\}, \quad (5.25)$$

$$S^{bu}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = +I \{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{q})][\mathbf{u}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{k})]\}, \quad (5.26)$$

$$S^{bb}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = -I \{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{q})][\mathbf{b}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{k})]\}. \quad (5.27)$$

Bien que la démarche soit légèrement différente du cas hydrodynamique, il est possible via une intégration de calculer les flux d'énergie en turbulence MHD. Pour ce faire, nous séparons l'espace de Fourier en deux zones, à l'aide d'une sphère de rayon  $k_c$ . On note  $x^<$  le champ  $x$  contenues à l'intérieur de la sphère de rayon  $k_c$ , et  $x^>$  celui contenu à l'extérieur. Par ailleurs,  $E^{u<}$  (resp.  $E^{b<}$ ) est utilisé pour définir l'énergie cinétique (resp. magnétique) contenue dans les modes tels que  $|\mathbf{k}| < k_c$ . L'énergie cinétique associée aux modes tels que  $|\mathbf{k}| > k_c$  est notée  $E^{u>}$ , et l'énergie magnétique est quant à elle notée  $E^{b>}$ . Les flux d'énergie entre ces différentes énergie sont alors exprimés de la façon suivante [74],

---

2. Attention : Il n'y a pas de relation triviale entre  $T^{ub}$  et  $T^{bu}$  du type  $T^{ub} = -T^{bu}$ .

$$\Pi^{x<y<} = \sum_{|\mathbf{k}|<k_c, |\mathbf{p}|<k_c} S^{xy}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + S^{xy}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (5.28)$$

$$\Pi^{x<y>} = \sum_{|\mathbf{k}|<k_c, |\mathbf{p}|>k_c} S^{xy}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + S^{xy}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (5.29)$$

$$\Pi^{x>y<} = \sum_{|\mathbf{k}|>k_c, |\mathbf{p}|<k_c} S^{xy}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + S^{xy}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (5.30)$$

$$\Pi^{x>y>} = \sum_{|\mathbf{k}|>k_c, |\mathbf{p}|>k_c} S^{xy}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + S^{xy}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (5.31)$$

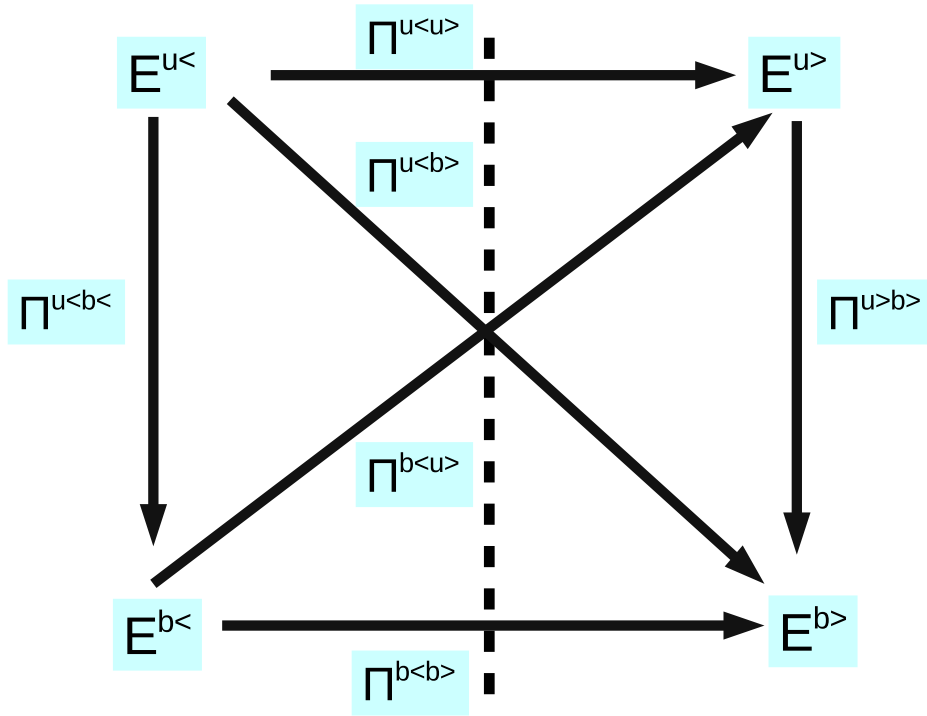


FIGURE 5.5 – Schéma symbolisant les flux accessibles avec le formalisme présenté par Plunian *et al* [74] et Verma [95].

La figure 5.5 représente une partie des flux spectraux accessibles, aussi bien avec des modèles en couches que pour des DNS. On observe des termes d'échange entre toutes ces énergies. Ainsi,  $\Pi^{u<b>}$  (resp.  $\Pi^{b<u>}$ ) désigne le flux qui permet de convertir l'énergie cinétique (resp. magnétique) de grande échelle  $E^{u<}$  (resp.  $E^{b<}$ ) en énergie magnétique (resp. cinétique) de petite échelle  $E^{b>}$  (resp.  $E^{u>}$ ). De façon similaire,  $\Pi^{u>b>}$  (resp.  $\Pi^{b<b>}$ ) désigne le flux qui permet de convertir l'énergie cinétique de grande échelle  $E^{b<}$  en énergie magnétique de petite échelle  $E^{b>}$  (resp. grande échelle  $E^{u<}$ ). Finalement,  $\Pi^{u<u>}$  (resp.  $\Pi^{b<b>}$ ) représente le flux d'énergie cinétique (resp. magnétique) de l'intérieur vers l'extérieur de la sphère de rayon  $k_c$ .

Ce formalisme spectral fut notamment utilisé par Alexakis *et al* [3] afin de comparer les transferts d'énergie pour des écoulements hélicitaires et non-hélicitaires. Dans le cas

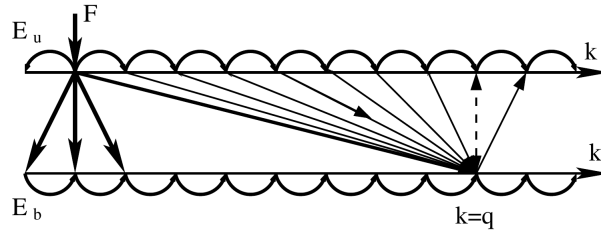


FIGURE 5.6 – Représentation schématique des transferts issue de [3].

d'écoulements non-hélicitaires, les transferts d'énergie cinétiques et magnétiques se font essentiellement des grandes vers les petites échelles. En revanche pour les configurations hélicitaires, les transferts d'énergies ne sont majoritairement directs que pour des nombres d'ondes plus grandes que celui auquel le forçage est appliqué, i.e pour  $k > k_f$  (voir figure 5.6). Les transferts sont en effet inverses pour des nombres d'ondes tels que  $k < k_f$  [3]. Dans ce manuscrit, nous tenterons de fournir des analyses similaires à celles que nous venons de présenter, en utilisant un formalisme développé dans l'espace physique (voir chapitre 7).

## CHAPITRE 6

# ÉTAT DE L'ART : MODÉLISATION DE LA TURBULENCE

MHD

### 6.1 Introduction

Pour les différents contextes géophysiques ou astrophysiques que nous pouvons étudier en MHD, les nombres de Reynolds hydrodynamiques et magnétiques impliqués dans ces écoulements turbulents sont extrêmement grands. Cela implique que le champ de vitesse et le champ magnétique se développent sur une large gamme d'échelles : des grandes échelles induites par le forçage de l'écoulement, jusqu'aux petites échelles où les effets dissipatifs dominent. L'étude de ces configurations via l'outil numérique requiert a priori la discrétisation de l'ensemble de ces échelles. On parle alors de DNS pour *direct numerical simulation*. Ainsi, le problème majeur est que malgré les progrès colossaux réalisés dans le développement des super-calculateurs ces dernières décennies, il est pour l'heure impossible de réaliser des DNS réalistes de galaxies, d'étoiles, ou encore de noyaux planétaires. Plusieurs approches sont alors possibles. L'une consiste à réaliser des simulations numériques directes avec des nombres de Reynolds nettement plus faibles que dans les contextes réalistes. Néanmoins la turbulence reste faiblement développée, avec une trop faible séparation entre les grandes échelles et les petites échelles dissipatives. Une autre solution consiste à effectuer une distinction entre les parties moyennes et fluctuantes d'un écoulement à l'aide d'un opérateur de Reynolds (voire partie I pour la définition). Les interactions entre les parties moyennes et fluctuantes de l'écoulement sont modélisées. Cette méthode, connue sous le nom de RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) est peu coûteuse d'un point de vue numérique, mais ne permet pas de décrire les structures instantanées de la turbulence qui sont importantes pour la compréhension de nombreux phénomènes. Une solution alternative entre le RANS et la DNS est connue sous le nom de LES *Large Eddy Simulations* (i.e Simulations des Grandes Échelles). Cette approche consiste à distinguer les grandes et les petites échelles de l'écoulement. Ainsi, seules les plus grandes échelles de l'écoulement sont explicitement simulées et les interactions entre les grandes et les petites échelles sont modélisées. Cette séparation d'échelle est réalisée formellement à l'aide d'une opération de filtrage, que nous allons détailler dans la section 6.2. Une comparaison entre les DNS, LES, et simulations RANS est présentée sur la figure



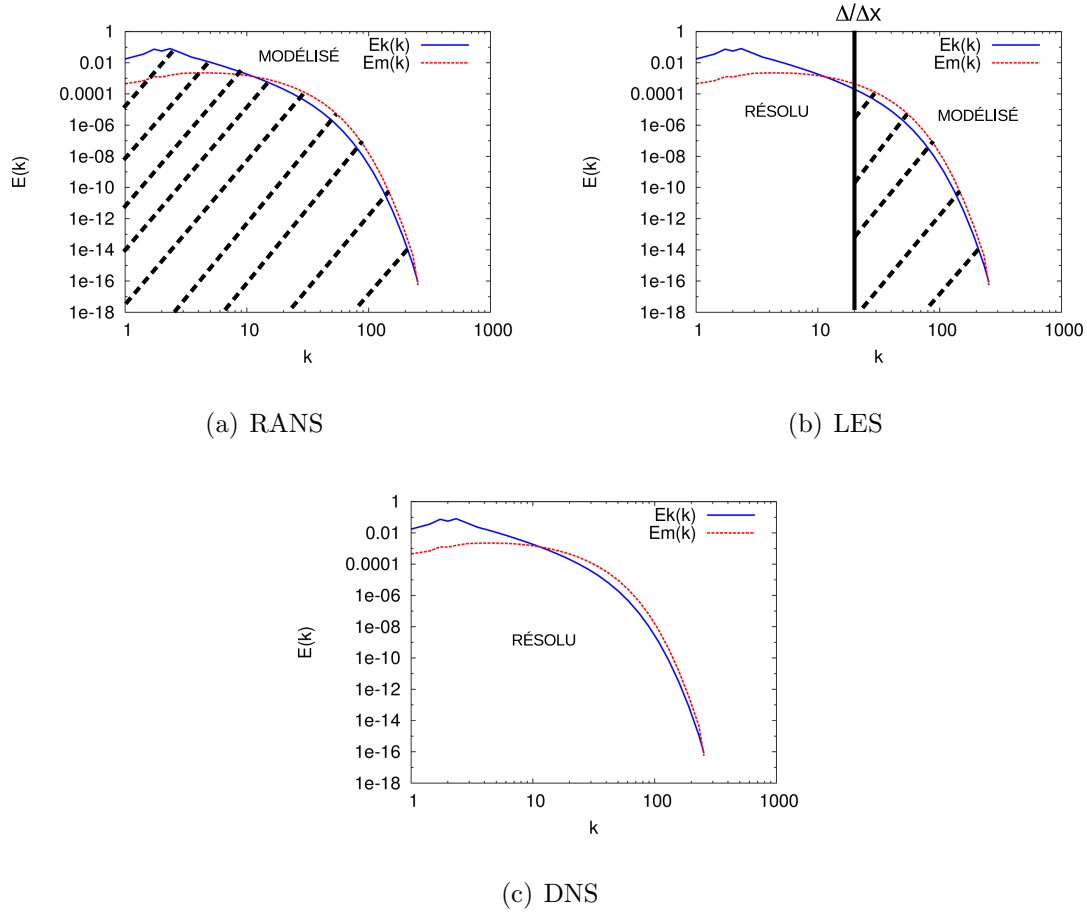


FIGURE 6.1 – Représentation de spectres d'énergie cinétique et magnétique en fonction du nombre d'onde. Les trois cas permettent de comparer les échelles accessibles (i.e. les échelles résolues) lors de la réalisation de simulation RANS, de LES ou encore de DNS.

6.1 qui illustre sur des spectres d'énergie cinétique et magnétique, les différentes échelles résolues ou modélisées selon les approches.

Dans ce manuscrit, nous cherchons à évaluer les performances de différents modèles de turbulence présents dans la littérature, et utilisés pour la réalisation de LES. Nous allons dans un premier temps commencer par définir ce que sont ces LES. L'idée de base des LES est d'introduire une séparation d'échelle à l'aide d'une opération de filtrage. Il convient toutefois de distinguer les LES spectrales des LES non-spectrales, car certaines différences apparaissent dans le formalisme entre ces deux cas. Dans le cas des LES spectrales l'opération de filtrage est appliquée dans l'espace de Fourier, et les modèles sont exprimés dans le même espace. La limitation des LES spectrales est la nécessité de recourir à des codes spectraux, disposant de conditions aux limites périodiques afin de pouvoir décrire les champs dans l'espace de Fourier. Ces LES spectrales ont fait l'objet de nombreuses études spécifiques aussi bien en hydrodynamique qu'en magnétohydrodynamique [28, 7], et ne seront pas détaillées ici. Les LES non-spectrales font donc l'objet de ce manuscrit. De nombreux modèles furent introduits et comparés dans ce contexte, aussi bien en hydrodynamique [86, 38, 29, 97] qu'en magnétohydrodynamique [93, 69, 62].

## 6.2 Formalisme de la séparation d'échelle : opération de filtrage dans l'espace physique.

Dans ce travail, à partir des bases de données DNS que nous allons établir à l'aide des forçages  $F_{Alv1}$  et  $F_{Alv2}$ , nous souhaitons évaluer la capacité prédictive des LES en turbulence MHD. Cette évaluation sera ainsi faite en appliquant le formalisme utilisé pour la réalisation des LES à nos résultats DNS. L'idée dans un premier temps est d'introduire une séparation d'échelles à l'aide d'une opération de filtrage. Le filtre est un produit de convolution appliqué aux champs de vitesse  $\mathbf{u}$  et magnétique  $\mathbf{b}$ . Le champ filtré est donc défini de la façon suivante :

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{y})G_{\Delta}(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad (6.1)$$

Ici  $G_{\Delta}$  est le noyau du filtre de taille  $\Delta$ , qui peut avoir différentes formes,  $f$  est un champ quelconque, et  $\bar{f}$  est le champ filtré. Quelque soit la forme du filtre, il doit avoir trois propriétés :

1. La conservation des constantes  $\overline{Cste} = Cste \iff \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\Delta}(x')dx' = 1$  ;
2. La linéarité  $\overline{a(x) + b(x)} = \bar{a}(x) + \bar{b}(x)$  ;
3. La commutation avec les dérivées  $\overline{\partial_j a(x)} = \partial_j \bar{a}(x)$  .

Il existe différentes formes possibles pour les filtres, on peut notamment citer :

1. Le filtre boîte (box filter) :

$$G_{\Delta}(x - y) = \frac{1}{\Delta} \text{ si } |x - y| \leq \frac{\Delta}{2}$$

$$G_{\Delta}(x - y) = 0 \text{ si } |x - y| > \frac{\Delta}{2}$$

2. Le filtre gaussien :

$$G_{\Delta}(x - y) = \frac{\gamma}{\pi\Delta^2} \exp\left(-\frac{\gamma|x - y|^2}{\Delta^2}\right)$$

3. Le filtre porte (spectral cutt-off) :

$$G_{\Delta}(x - y) = \frac{\Delta \sin\left(\frac{\pi}{\Delta}(x - y)\right)}{\pi(x - y)}$$

Lors de la réalisation de LES, l'opération de filtrage est le plus souvent implicite, induite par les schémas de discrétisation utilisés. Dans ce travail, nous utiliserons un filtre cut-off qui permettra d'émuler les quantités filtrées produites par une discrétisation spectrale. Les conclusions de notre étude pourront ainsi directement s'appliquer aux LES que nous réaliserons et qui s'appuieront sur cette discrétisation. On rencontre également le filtre gaussien dans les études MHD pour différent types de codes [22, 6].

La séparation d'échelle introduite par l'opération de filtrage permet de définir des échelles plus grandes que la taille de filtre  $\Delta$ , qui sont appelées échelles sur-maillages, et

des échelles plus petites que la taille de filtre, qui elles sont appelées échelles sous-maillages. Ainsi, en plus des champs filtrés, on peut introduire la notion de champs de vitesse et champ magnétiques sous-maillages. Le champ complet est ainsi décomposé en son champ filtré et son champ sous-maille (noté par des “SGS”, pour subgrid-scales),

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^{SGS} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{b}^{SGS} \quad (6.3)$$

Cette opération de filtrage peut ensuite être appliquée au système d’équation (5.1)-(5.3), afin d’obtenir les équations de transports des champs de vitesse et champ magnétique sur-maillages,

$$\partial_t \bar{u}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{u}_i = -\partial_i \bar{\Pi} + \bar{b}_j \partial_j \bar{b}_i + \nu \partial_j^2 \bar{u}_i - \partial_j (\tau_{ij}^u - \tau_{ij}^b), \quad (6.4)$$

$$\partial_t \bar{b}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{b}_i = \bar{b}_j \partial_j \bar{u}_i + \eta \partial_j^2 \bar{b}_i - \partial_j \tau_{ij}^{ub}, \text{ et} \quad (6.5)$$

$$\partial_i \bar{u}_i = \partial_i \bar{b}_i = 0. \quad (6.6)$$

où  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\bar{\mathbf{b}}$  sont les champs de vitesse filtré et le champ magnétique filtré respectivement, et  $\bar{\Pi}$  la pression totale filtrée (incluant la pression magnétique). Ce système d’équations est écrit à l’aide de la convention d’Einstein. Du fait de la présence de termes non-linéaires, l’opération de filtrage mène à l’introduction de 3 tenseurs sous-maillages,

$$\tau_{ij}^u = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \quad (6.7)$$

$$\tau_{ij}^b = \overline{b_i b_j} - \bar{b}_i \bar{b}_j, \text{ et} \quad (6.8)$$

$$\tau_{ij}^{ub} = \overline{b_i u_j} - \bar{b}_i \bar{u}_j - (\overline{u_i b_j} - \bar{u}_i \bar{b}_j). \quad (6.9)$$

Le premier tenseur,  $\tau_{ij}^u$ , est relié au terme d’advection, tandis que le second tenseur,  $\tau_{ij}^b$ , est lié à la force de Lorentz dans l’équation de Navier-Stokes. Ces tenseurs sont souvent désignés comme les tenseurs sous-maillages de Reynolds et Maxwell, respectivement. Le dernier tenseur,  $\tau_{ij}^{ub}$ , dérive du filtrage du terme d’induction dans l’équation de transport du champ magnétique. Ce sont ces trois tenseurs qui traduisent les interactions entre échelles sur-maillages et sous-maillages. Lorsque nous réalisons des LES, ces tenseurs sous-maillages ne sont pas explicitement résolus, car seules les échelles sur-maillages sont simulées. Les tenseurs doivent alors être estimés par des modèles, basés sur les grandeurs résolues. La détermination de ces modèles sous-maillages est le principal enjeu en LES.

## 6.3 LES en turbulence hydrodynamique

Nous commençons ici par introduire différents modèles dans le contexte de la LES en turbulence hydrodynamique. En l’absence de champ magnétique, seul le tenseur sous-maille de Reynolds,  $\tau_{ij}^u$  doit être modélisé, et le système d’équation s’écrit alors,

$$\partial_t \bar{u}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{u}_i = -\partial_i \bar{p} + \nu \partial_j^2 \bar{u}_i - \partial_j \tau_{ij}^u, \quad (6.10)$$

$$\partial_i \bar{u}_i = 0. \quad (6.11)$$

De nombreux modèles existent pour fermer ces équations [84, 86, 38, 10, 101]. Nous allons à présent introduire des modèles utilisés en hydrodynamique, qui ont par la suite été étendus à la magnétohydrodynamique.

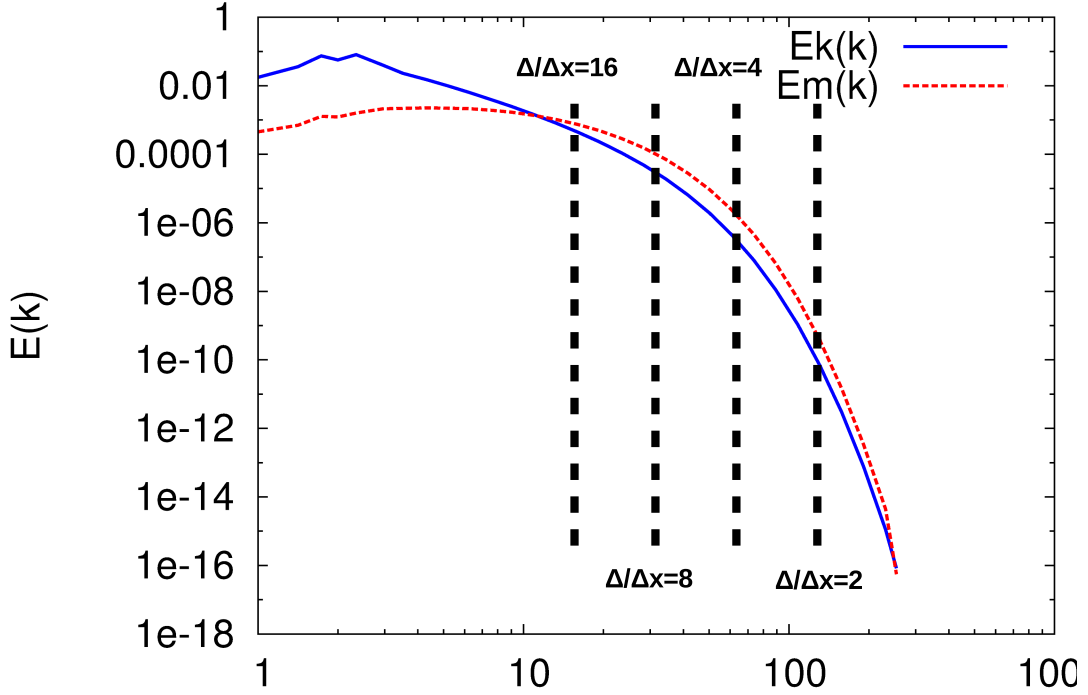


FIGURE 6.2 – Représentation de spectres d'énergie cinétique et magnétique en fonction du nombre d'onde. Les traits pointillés désignent la séparation introduite par l'opération de filtrage. Les grandes échelles (sur-maillages) sont situées à gauche de la séparation, et les petites échelles (sous-maillages) à droite.

#### 6.3.1 Modèle de Smagorinsky (1963)

L'un des premiers modèles de turbulence introduit pour la réalisation de simulations de grandes échelles fut présentée dans un journal de météorologie au début des années 60, par Smagorinsky [86]. Ce modèle est basé sur la notion de viscosité turbulente. Cette notion fut introduite dans un premier temps pour fermer les équations de Reynolds, par Boussinesq en 1877 [18]. La principale justification pour introduire une viscosité turbulente est de dire qu'étant donné que les transferts s'exercent principalement des grandes vers les petites échelles de l'énergie cinétique, cela est similaire à une perte d'énergie aux grandes échelles. Cette perte d'énergie est alors assimilée à une dissipation d'énergie cinétique. Le tenseur sous-maille est donc modélisé de la façon suivante pour la réalisation de LES,

$$\tau_{ij}^u = -\nu_t \overline{S}_{ij}^u \quad (6.12)$$

$$(6.13)$$

Où  $\nu_t = C_\nu \Delta^2 |\overline{S}^u|$  est la viscosité turbulente<sup>1</sup>,  $\overline{S}_{ij}^u = \frac{1}{2}(\partial_j \overline{u}_i + \partial_i \overline{u}_j)$  est le tenseur de taux de déformation, et  $\Delta$  est la taille de filtre.  $C_\nu$  est un coefficient, qui peut être déterminé

1. Avec  $|\overline{S}^u| = (2\overline{S}_{ij}^u \overline{S}_{ij}^u)^{1/2}$

de façon statique, souvent proche de  $C_\nu = 0.08$ . Néanmoins cette évaluation n'est pas toujours la plus adaptée, une procédure dynamique fut proposée dans les années 90 par Germano *et al* [46] et Lilly [61]. L'idée est de supposer l'auto similarité de l'écoulement dans le régime inertiel afin d'évaluer la valeur de ce coefficient au cours du temps lors d'une LES. Formellement, la démarche consiste à filtrer une seconde fois l'équation de Navier-Stokes, avec une taille de filtre  $\hat{\Delta}$ , plus grande que  $\Delta$ . La largeur du second filtre dépend généralement du type de filtre utilisé. Pour un filtre Gaussien on a  $\hat{\Delta} = \sqrt{5}\Delta$  [45, 97, 37] et pour un filtre cut-off on a  $\hat{\Delta} = 2\Delta$  [46, 97, 37]. L'équation (6.10) filtrée une seconde fois devient alors :

$$\partial_i \widehat{u}_i + \widehat{u}_j \partial_j \widehat{u}_i = -\partial_i \widehat{p} + \nu \partial_j^2 \widehat{u}_i - \partial_j T_{ij}^u \quad (6.14)$$

où  $T_{ij}^u = \widehat{u_i u_j} - \widehat{u}_i \widehat{u}_j$ . En soustrayant  $\widehat{\tau}_{ij}^u$  à  $T_{ij}^u$ , on obtient l'expression du tenseur de Leonard,

$$L_{ij}^u = T_{ij}^u - \widehat{\tau}_{ij}^u = \widehat{u_i u_j} - \widehat{u}_i \widehat{u}_j \quad (6.15)$$

Par ailleurs les tenseurs  $\widehat{\tau}_{ij}^u$  et  $T_{ij}^u$  peuvent s'exprimer également à partir du modèle introduit précédemment, pour les tailles de filtres qui leur correspondent :

$$T_{ij}^u = C_\nu \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}^u| \widehat{S}_{ij}^u \quad (6.16)$$

$$\widehat{\tau}_{ij}^u = C_\nu \Delta^2 |\widehat{S}^u| \widehat{S}_{ij}^u \quad (6.17)$$

En assumant l'auto-similarité de l'écoulement, nous faisons l'hypothèse que le coefficient  $C_\nu$  est le même pour les deux tailles de filtres. Il est alors possible de réécrire le tenseur de Leonard grâce au modèle :

$$L_{ij}^u = C_\nu M_{ij}^u \quad (6.18)$$

avec

$$M_{ij}^u = \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}^u| \widehat{S}_{ij}^u - \Delta^2 |\widehat{S}^u| \widehat{S}_{ij}^u \quad (6.19)$$

Afin de minimiser l'erreur liée au choix du coefficient, une méthode des moindres carrés est utilisée, et le coefficient s'exprime alors sous la forme suivante [61],

$$C_\nu = \frac{\langle L_{ij}^u M_{ij}^u \rangle}{\langle M_{kl}^u M_{kl}^u \rangle} \quad (6.20)$$

où l'on a supposé ici que le coefficient était le même dans tout l'espace.

### 6.3.2 Le modèle du gradient (Leonard 1974)

Ce modèle dérive d'un développement en série de Taylor de l'opération de filtrage. Il fut introduit par Leonard en 1974 [38]. Si l'on note  $f$  la quantité que nous souhaitons étudier, et  $\bar{f}$  sa partie filtrée, alors on a [84],

$$\bar{f} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} M_k \Delta^k \frac{\partial^k f}{\partial x^k}. \quad (6.21)$$

Où  $M_k$  désigne le moment d'ordre  $k$  du filtre  $G_\Delta$ . Le tenseur sous-maille  $\tau_{ij}^u$  est alors modélisé de la façon suivante [38],

$$\tau_{ij}^u = \frac{1}{2} \Delta^2 M_2 (\partial_k \bar{u}_i \partial_k \bar{u}_j) \quad (6.22)$$

Pour les filtres Gaussien et boîte, l'expression du moment d'ordre deux est identique, et mène à l'expression suivante,

$$\tau_{ij}^u = \frac{\Delta^2}{12} (\partial_k \bar{u}_i \partial_k \bar{u}_j) \quad (6.23)$$

### 6.3.3 Introduction aux modèles mixtes : le Modèle de Clark

L'une des particularités du modèle du gradient est sa capacité à reproduire des transferts directs, ainsi que des transferts inverses d'énergie. Ce double aspect peut également poser des problèmes de stabilité numérique [97], ce modèle ne permettant pas de contrôler l'intensité des transferts inverses, il peut notamment injecter localement de l'énergie au lieu de la dissiper. Une solution proposée par Clark [29] consiste à combiner un modèle de type viscosité turbulente avec le modèle du gradient, afin de limiter l'intensité des transferts inverses. Le tenseur  $\tau_{ij}^u$  est alors modélisé de la façon suivante,

$$\tau_{ij}^u = -C_\nu \Delta^2 |\bar{S}^u| \bar{S}_{ij}^u + \frac{\Delta^2}{12} (\partial_k \bar{u}_i \partial_k \bar{u}_j) \quad (6.24)$$

## 6.4 Expression des modèles de turbulence utilisé pour les LES en MHD

Les trois modèles que nous venons d'introduire pour les LES d'écoulements hydrodynamiques ont tous été étendus à la MHD.

### 6.4.1 Notion de diffusivité turbulente en magnétohydrodynamique.

Dans les années 60, la théorie du champ moyen est introduite par Steenbeck *et al* [88]. Il s'agit dans un premier temps d'effectuer une séparation d'échelle entre les parties moyennes et fluctuantes des champs de vitesses et magnétiques, en appliquant un

opérateur de Reynolds à l'équation d'induction, qui s'exprime alors de la façon suivante,

$$\partial_t \mathbf{B} = \text{rot}(\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle) + \eta \Delta \mathbf{B} \quad (6.25)$$

Où on a noté  $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle$ , et  $\mathbf{B} = \langle \mathbf{b} \rangle$  les champs de vitesse et magnétique moyens. Les parties fluctuantes de ces champs sont alors notées  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{U}$  et  $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{B}$ . Ici le terme  $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$  est appelé force électromotrice turbulente (notée FEM), et correspond à l'action des échelles turbulentes sur le champ moyen  $\mathbf{B}$ .

Cette force électromotrice turbulente est un terme de fermeture, que Steenbeck *et al* [88] ont tenté de réécrire en effectuant un développement en série de Taylor. C'est ainsi que sont introduits trois phénomènes, permettant de réécrire l'expression de la FEM [88, 57, 79],

$$\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle = \alpha \mathbf{B} + \beta \mathbf{J} + \gamma \boldsymbol{\Omega} \quad (6.26)$$

Ici les termes  $\alpha \mathbf{B}$  et  $\gamma \boldsymbol{\Omega}$  sont introduits pour reproduire une phénoménologie identique<sup>2</sup> à celle présentée par Parker [72], et décrite dans le chapitre précédent. Ces deux termes sont responsables de l'amplification du champ magnétique moyen. Le terme  $\beta \mathbf{J}$  est appelé effet  $\beta$ . Contrairement aux deux autres, ce phénomène est censé diminuer l'intensité du champ magnétique. C'est la raison pour laquelle il est associé à une diffusivité turbulente.

Lors d'études de la turbulence MHD dans un contexte RANS, le terme  $\alpha$  est souvent modélisé à l'aide de l'hélicité résiduelle<sup>3</sup>, le terme  $\beta$  à l'aide de la norme de la densité de courant, et le terme  $\gamma$  est quant à lui modélisé à l'aide de l'hélicité croisée [99]. Bien que l'objet de ce manuscrit ne soit pas d'évaluer les performances des modèles RANS utilisables en MHD, la diffusivité magnétique turbulente est généralement le point de départ pour introduire des modèles sous-mailles en LES.

## 6.4.2 Smagorinsky/Theobald (SLM)

L'un des premiers modèles de turbulence introduit pour la réalisation de simulations de grandes échelles est un modèle de type viscosité turbulente. Le modèle original (SLM par la suite), introduit par Theobald *et al* [93], est constitué d'un modèle de Smagorinsky statique pour l'équation de transport du champ de vitesse, et d'un modèle de type diffusivité magnétique turbulente, pour l'équation d'induction. Les tenseurs sous mailles s'écrivent alors ainsi :

$$\tau_{ij}^u - \tau_{ij}^b = \tau_{ij}^{u-b} = -\nu_t \overline{S}_{ij}^u \quad (6.27)$$

$$\tau_{ij}^{ub} = -\eta_t \overline{J}_{ij}. \quad (6.28)$$

Où  $\nu_t = C_\nu \Delta^2 |\overline{S}^u|$  est la viscosité turbulente, identique à celle utilisée pour le modèle classique de Smagorinsky. De même  $\eta_t = C_\lambda \Delta^2 |\overline{j}|$  représente la diffusivité magnétique turbulente.  $\overline{J}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j \overline{b}_i - \partial_i \overline{b}_j)$  représente le tenseur de rotation magnétique.

2. À l'origine, Steenbeck *et al* ne connaissaient pas les travaux de Parker, et ont travaillé de façon indépendante pour retrouver une phénoménologie similaire à celle proposée par Parker. Voir [83] pour plus de détails à ce sujet.

3. Le développement de l'effet  $\alpha$  est généralement facilité par la présence d'hélicité résiduelle :  $H_r = -\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{j}$  [40, 78].

## 6.4 Expression des modèles de turbulence utilisé pour les LES en MHD

Comme pour le modèle hydrodynamique de Smagorinsky, ce jeu de modèle fut d'abord introduit avec des coefficients statiques, puis la procédure dynamique classique fut étendu à ce modèle [1]. Afin de calculer les deux coefficients dynamiquement, une seconde opération de filtrage est appliquée aux équations (6.4) et (6.5), menant aux équations (6.29) et (6.30) :

$$\partial_i \widehat{u_i} + \widehat{u_j} \partial_j \widehat{u_i} = -\partial_i \widehat{\Pi} + \widehat{b_j} \partial_j \widehat{b_i} + \nu \partial_j^2 \widehat{u_i} - \partial_j (T_{ij}^{u-b}) \quad (6.29)$$

$$\partial_i \widehat{b_i} + \widehat{u_j} \partial_j \widehat{b_i} = \widehat{b_j} \partial_j \widehat{u_i} + \eta \partial_j^2 \widehat{b_i} - \partial_j T_{ij}^{ub} \quad (6.30)$$

où  $T_{ij}^{u-b} = \widehat{u_i u_j} - \widehat{u_i} \widehat{u_j} - (\widehat{b_i b_j} - \widehat{b_i} \widehat{b_j})$  et  $T_{ij}^{ub} = \widehat{u_i b_j} - \widehat{u_i} \widehat{b_j} - (\widehat{b_i u_j} - \widehat{b_i} \widehat{u_j})$ . Nous pouvons également introduire les tenseurs  $\widehat{\tau_{ij}^{u-b}}$  et  $\widehat{\tau_{ij}^{ub}}$  qui représentent les tenseurs  $\tau_{ij}^{u-b}$  et  $\tau_{ij}^{ub}$  après application d'une opération de filtrage.

Les tenseurs  $T_{ij}^{u-b}$  (resp.  $T_{ij}^{ub}$ ) et  $\widehat{\tau_{ij}^{u-b}}$  (resp.  $\widehat{\tau_{ij}^{ub}}$ ), peuvent toujours être modélisés à l'aide de la relation (6.27) (resp. (6.28)). Comme en hydrodynamique, une hypothèse d'auto-similarité de l'écoulement est utilisée afin de justifier l'utilisation d'un même coefficient pour les deux tailles de filtre. Ce qui mène aux formes suivantes pour ces deux tenseurs :

$$T_{ij}^{u-b} = C_\nu \widehat{\Delta^2} |\widehat{S}^u| \widehat{S}_{ij}^u \quad (6.31)$$

$$\widehat{\tau_{ij}^{u-b}} = C_\nu \widehat{\Delta^2} |\widehat{S}^u| \widehat{S}_{ij}^u \quad (6.32)$$

En soustrayant  $\widehat{\tau_{ij}^{u-b}}$  à  $T_{ij}^{u-b}$ , on obtient l'expression du tenseur de Leonard  $L_{ij}^{u-b}$  (6.15) pour l'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} L_{ij}^{u-b} &= T_{ij}^{u-b} - \widehat{\tau_{ij}^{u-b}} \\ &= \widehat{u_i u_j} - \widehat{u_i} \widehat{u_j} - (\widehat{b_i b_j} - \widehat{b_i} \widehat{b_j}) \\ &= C_\nu M_{ij}^{u-b} \end{aligned}$$

Où l'on a introduit le tenseur  $M_{ij}^{u-b}$ , tel que  $M_{ij}^{u-b} = \widehat{\Delta^2} |\widehat{S}^u| \widehat{S}_{ij}^u - \widehat{\Delta^2} |\widehat{S}^u| \widehat{S}_{ij}^u$ .

Pour l'équation d'induction, la démarche est similaire et mène à l'introduction de deux nouveaux tenseurs :

$$\begin{aligned} L_{ij}^{ub} &= T_{ij}^{ub} - \widehat{\tau_{ij}^{ub}} \\ &= \widehat{b_i u_j} - \widehat{b_i} \widehat{u_j} - (\widehat{u_i b_j} - \widehat{u_i} \widehat{b_j}) \\ &= C_\lambda M_{ij}^{ub} \\ M_{ij}^{ub} &= \widehat{\Delta^2} |\widehat{J}| \widehat{J}_{ij} - \widehat{\Delta^2} |\widehat{J}| \widehat{J}_{ij} \end{aligned}$$

Les coefficients  $C_\nu$  et  $C_\lambda$  sont ainsi calculés de la même façon qu'introduit précédemment

$$C_\nu = \frac{\langle L_{ij}^{u-b} M_{ij}^{u-b} \rangle}{\langle M_{kl}^{u-b} M_{kl}^{u-b} \rangle} \quad (6.33)$$

$$C_\lambda = \frac{\langle L_{ij}^{ub} M_{ij}^{ub} \rangle}{\langle M_{kl}^{ub} M_{kl}^{ub} \rangle} \quad (6.34)$$



### 6.4.3 Modèle d'hélicité croisée (CHM)

Le modèle d'hélicité croisé (noté CHM par la suite), fut introduit par Müller et Carati [69] et est également basé sur les notions de viscosité et diffusivité turbulentes. Dans le cas présent, les viscosité et diffusivité turbulentes sont définies à l'aide de quantités basées sur l'hélicité croisée. L'idée de base de ce modèle est d'écrire dans un premier temps les termes d'échanges d'hélicité entre grandes et petites échelles. Pour cela, nous pouvons ré-écrire les équations de transport des champ de vitesse et magnétiques filtrés (6.4) et (6.5) de la façon suivante,

$$\partial_t \bar{u}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{u}_i \sim -\partial_j \tau_{ij}^{u-b}, \quad (6.35)$$

$$\partial_t \bar{b}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{b}_i \sim -\partial_j \tau_{ij}^{ub}. \quad (6.36)$$

L'équation de transport de la densité d'hélicité croisé sur-maille<sup>4</sup>,  $H_c^{GS} = \bar{u}_i \bar{b}_i$ , s'exprime alors de la façon suivante,

$$\partial_t \bar{u}_i \bar{b}_i + \bar{u}_j \partial_j (\bar{u}_i \bar{b}_i) \sim -\bar{b}_i \partial_j \tau_{ij}^{u-b} - \bar{u}_i \partial_j \tau_{ij}^{ub}. \quad (6.37)$$

En utilisant les propriétés de symétrie des tenseurs sous-mailles  $\tau_{ij}^u$  et  $\tau_{ij}^b$  (et donc celui du tenseur  $\tau_{ij}^{u-b}$ ) et le caractère antisymétrique du tenseur  $\tau_{ij}^{ub}$ , cette équation se réécrit sous la forme suivante,

$$\partial_t \bar{u}_i \bar{b}_i + \bar{u}_j \partial_j (\bar{u}_i \bar{b}_i) = -\partial_j (\bar{b}_i \tau_{ij}^{u-b}) - \partial_j (\bar{u}_i \tau_{ij}^{ub}) + \tau_{ij}^{u-b} \bar{S}_{ij}^b + \tau_{ij}^{ub} \bar{\Omega}_{ij}. \quad (6.38)$$

Où  $\bar{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j \bar{u}_i - \partial_i \bar{u}_j)$  désigne le tenseur de rotation hydrodynamique.  $\bar{S}_{ij}^b = \frac{1}{2}(\partial_j \bar{b}_i + \partial_i \bar{b}_j)$  est le tenseur de taux déformation magnétique. Notons  $\epsilon^{C_v} = \tau_{ij}^{u-b} \bar{S}_{ij}^b$  et  $\epsilon^{C_b} = \tau_{ij}^{ub} \bar{\Omega}_{ij}$  la dissipation sous-maille d'hélicité croisé liée respectivement à l'équation de Navier-Stokes, et celle liée à l'équation d'induction. Müller et Carati [69] supposent que ces dissipations locales d'hélicité croisé peuvent s'exprimer sous les formes suivantes<sup>5</sup>,

$$\epsilon^{C_v} \sim |\bar{S}^u : \bar{S}^b|^{\frac{1}{2}} \quad (6.39)$$

$$\epsilon^{C_b} \sim |\bar{\mathbf{j}} \cdot \bar{\mathbf{w}}|^{\frac{1}{2}} \quad (6.40)$$

Les tenseurs sous-mailles modélisés s'expriment ainsi de la façon suivante [69],

$$\tau_{ij}^{u-b} = -C_\nu \Delta^2 |\bar{S}^u : \bar{S}^b|^{\frac{1}{2}} \bar{S}_{ij}^u \quad (6.41)$$

$$\tau_{ij}^{ub} = -C_\lambda \Delta^2 \text{sgn}(\bar{\mathbf{j}} \cdot \bar{\mathbf{w}}) |\bar{\mathbf{j}} \cdot \bar{\mathbf{w}}|^{\frac{1}{2}} \bar{J}_{ij}, \quad (6.42)$$

où le terme  $\text{sgn}(\bar{\mathbf{j}} \cdot \bar{\mathbf{w}})$  a été ajouté de façon à introduire des transferts inverses d'hélicité magnétique et d'énergie magnétique. Les coefficients  $C_\nu$  et  $C_\lambda$  sont également calculées dynamiquement, avec la même procédure que pour le modèle SLM.

4. Qui correspond à l'hélicité croisée accessible lors de la réalisation de LES.

5. En général on suppose que  $\tau^{u-b} \sim \bar{S}_{ij}^u$  et  $\tau^{ub} \sim \bar{J}_{ij}$ .

### 6.4.4 Modèle du gradient (GM)

Nous avons présenté le modèle du gradient pour la turbulence hydrodynamique. Ce modèle a été étendu à la turbulence MHD par Müller et Carati [69], avant d'être utilisé pour des études traitant de la turbulence dans le noyau terrestre [62, 63, 6]. Ce modèle, contrairement aux précédents modèles (SLM et CHM) que nous venons de présenter n'est pas basé sur une viscosité turbulente et une diffusivité magnétique turbulente, mais sur un développement de Taylor de l'opération de filtrage. Pour des filtres boîtes et Gaussiens, il s'exprime de la façon suivante,

$$\tau_{ij}^u = \frac{\Delta^2}{12} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial_k} \right) \quad (6.43)$$

$$\tau_{ij}^b = \frac{\Delta^2}{12} \left( \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial_k} \frac{\partial \bar{b}_j}{\partial_k} \right) \quad (6.44)$$

$$\tau_{ij}^{ub} = \frac{\Delta^2}{12} \left( \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial_k} - \frac{\partial \bar{b}_j}{\partial_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial_k} \right). \quad (6.45)$$

Nous allons ici restreindre notre étude à la version statique de ce modèle, alors que les coefficients  $\frac{1}{12}$  peuvent être remplacés par des constantes calculées à l'aide d'une procédure dynamique [62, 63]. Ce modèle est connu pour mener à de simulations instables en hydrodynamique, car il fournit des transferts inverses trop importants. Le fait de changer le coefficient de ce modèle peut en effet augmenter les transferts directs, mais augmenter également les transferts inverses. C'est la raison pour laquelle nous ne traiterons pas la version dynamique de ce modèle.

**Remarque :** Ce modèle est ici désigné par le nom de 'modèle du gradient'. Dans la littérature [62, 63], on le trouve également sous le nom de 'scale similarity model' pour des LES en turbulence MHD. L'un des problèmes que nous avons avec cette dénomination, est qu'elle peut prêter à confusion, du fait que le modèle de similarité d'échelle désigne un autre modèle introduit en hydrodynamique par Bardina [10], et qui fut dérivé en MHD par Buffett [22]. Le second point est que ce modèle fut introduit dans un premier temps par Müller et Carati [69], comme 'modèle du gradient', avant d'être dérivé de façon indépendante par Matsui et Buffett [62]. Il apparaît donc plus cohérent pour nous de garder la dénomination 'modèle du gradient' (noté modèle GM par la suite).

### 6.4.5 Modèle Mixte : Extension du modèle de Clark aux cas MHD (MGSLM)

Finalement, un dernier modèle peut être introduit. En effet, nous avons vu précédemment que le modèle du gradient pouvait mener à des simulations numériques instables en turbulence hydrodynamique. Une solution consiste à introduire une viscosité turbulente en plus du développement de Taylor. Ce nouveau modèle est connu sous le nom de modèle mixte ou encore modèle de Clark [29]. Ce modèle mixte fut également introduit en MHD

par Müller et Carati [69]. Il peut être écrit sous la forme suivante [8],

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^{u-b} &= -C_\nu \Delta^2 (|\bar{S}^u|) \bar{S}_{ij}^u + \frac{\Delta^2}{12} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial_k} \right) - \frac{\Delta^2}{12} \left( \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial_k} \frac{\partial \bar{b}_j}{\partial_k} \right) \\ \tau_{ij}^{ub} &= -C_\lambda \Delta^2 |\bar{j}| \bar{J}_{ij} + \frac{\Delta^2}{12} \left( \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial_k} - \frac{\partial \bar{b}_j}{\partial_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial_k} \right),\end{aligned}$$

Où les coefficients des viscosité et diffusivité magnétique turbulentes sont de nouveau calculés dynamiquement [69].

## 7.1 Introduction

Comme nous l'avons déjà évoqué, l'objectif de cette seconde partie est notamment d'évaluer les performances des modèles de turbulence, ou modèles sous-mailles, utilisés lors de la réalisation de LES. Diverses études existent pour l'évaluation de ce type de modèles de turbulence, dans différents contextes. Certaines comparent des observations à des simulations numériques. C'est le cas notamment de Jacoutot *et al* [53], qui utilisent différents modèles de turbulence pour réaliser des simulations de la zone de convection du soleil et les comparer aux observations satellitaires. Une autre approche consiste à réaliser des simulations numériques directes et à les comparer à des simulations de grandes échelles. Buffett [22] a notamment réalisé une comparaison de modèles de turbulence dans le cas de problèmes de géodynamos. Müller et Carati [69] ont également réalisé des comparaisons entre différents modèles dans un contexte de turbulence incompressible en décroissance, ou pour de la turbulence homogène et isotrope (incompressible). D'autres travaux se sont intéressés aux LES pour des écoulements conducteurs pour de faible nombre de Reynolds magnétique [54, 96]. Nous pouvons également citer les travaux de Chernyshov *et al* [27] qui ont permis d'introduire des modèles pour les LES en turbulence MHD compressible, qu'il s'agisse de décroissance [26] ou de turbulence forcée [27].

Dans le chapitre 6, nous avons introduit différents modèles de turbulence. Nous allons évaluer les performances de ces modèles en présence d'hélicité cinétique, et d'une cascade inverse d'énergie magnétique, ce qui n'a jamais été fait auparavant. De plus les DNS réalisées dans les études ultérieures se placent dans des configurations d'écoulements faiblement très turbulentes, et dans certains cas [22, 69] il est même possible de réaliser des LES stables sans recourir à des modèles de turbulence (on parle alors de DNS sous-résolues). Nous souhaitons ici réaliser une étude des performances des modèles de turbulences pour des configurations pour lesquelles le recourt à un modèle est indispensable. Une possibilité consiste à considérer par exemple des écoulements de turbulence forcée, pour des nombres de Reynolds plus élevés que dans les études précédentes.

Une première étape pour l'évaluation des modèles de turbulence consiste alors à réaliser diverses DNS afin de constituer une base de données. Dans ce travail, nous souhaitons

comparer les performances des modèles pour des configurations d'écoulements hélicitaires et non-hélicitaire. Ensuite il nous faut extraire des DNS des informations sur la physique que les modèles doivent reproduire. Nous utiliserons ainsi le formalisme des LES pour quantifier les transferts d'énergie au sein d'écoulements turbulents. Ensuite nous effectuerons des tests pour savoir dans quelle mesure les modèles de turbulence sont capables de reproduire ces transferts d'énergie (tests a priori). Finalement nous réaliserons des LES afin de conforter les observations réalisées sur les performances des modèles lors des tests a priori. L'objectif de ce chapitre est ainsi de présenter les méthodes utilisées pour la réalisation des DNS, de dériver les équations bilan des énergies avec le formalisme LES, et finalement de détailler un peu plus les notions de tests a priori et a posteriori.

## 7.2 Simulations numériques directes d'écoulements turbulents en présence d'un champ magnétique

Afin de réaliser des DNS d'écoulements turbulents magnétisés nous avons une nouvelle fois recours au code SCALES. Pour l'équation d'induction, les termes de dissipations sont calculés de façon exacte, comme pour l'équation de transport du champ de vitesse [58, 74]. En ce qui concerne le terme d'induction nous calculons d'abord les termes non linéaires ( $u \times b$ ), dans l'espace physique. Nous calculons la transformée de Fourier de ce terme, et nous dérivons ensuite son rotationnel. Cette méthode est la plus efficace pour des codes pseudo-spectraux, elle permet de conserver la nullité de la divergence du champ magnétique.

**Cascade inverse et hypoviscosité** Nous souhaitons dans un premier temps confirmer à l'aide de notre forçage hélicitaire  $F_{Alv2}$  les résultats obtenus par Brandenburg [19]. Tout comme le nôtre, le forçage introduit par Brandenburg est aléatoire, et est aligné avec les vecteurs propres de l'opérateur rotationnel. Ce type de forçage génère un écoulement qui permet l'apparition d'une cascade inverse d'énergie magnétique, qui suit elle-même une cascade inverse d'hélicité magnétique.

L'observation de cascades inverses n'est pas un problème spécifique à la turbulence MHD. En effet, c'est un phénomène qui est observé également pour l'énergie cinétique dans différents contextes, tels que la turbulence 2D [15, 14, 25, 16], dans certains cas extrêmes de turbulence hélicitaire [12, 13], ou encore en présence de rotation et de stratification [52, 70]. L'un des points communs à ces configurations lors de la réalisation de DNS est l'accumulation d'énergie dans la plus grande échelle résolue. Ceci peut conduire à des problèmes de stationnarité, l'énergie cinétique pouvant croître faiblement mais sans jamais atteindre un état stationnaire [12, 13].

Une solution proposée consiste alors à introduire un modèle d'hypoviscosité (ou hypofriction), qui permet de dissiper artificiellement l'énergie qui s'accumule au cours de temps dans les grandes échelles. Cette solution est utilisée régulièrement en présence d'une cascade inverse, que ce soit en turbulence 2D [15, 14, 25, 16], en turbulence géostrophique [87], ou encore en turbulence hélicitaire [12, 13]. Nous souhaitons donc vérifier l'efficacité et l'utilité des modèles d'hypoviscosités en turbulence MHD, en présence d'une cascade inverse d'énergie magnétique. Formellement, lorsque ce modèle est utilisé en hydrodynamique, l'équation de Navier-Stokes s'écrit alors sous la forme suivante,

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} + \mu_k \Delta^{-\alpha_k} \mathbf{u} \quad (7.1)$$

où  $\mu_k$  est une constante permettant de régler l'intensité de la dissipation d'énergie liée à ce modèle. Par ailleurs le coefficient  $\alpha_k$  permet de contrôler la largeur de l'intervalle d'échelles dans lequel la dissipation d'énergie est effective. Lorsque  $\alpha_k = 0$ , cette dissipation est identique à toutes les échelles, et lorsque  $\alpha_k \rightarrow \infty$  la dissipation hypovisqueuse est localisée aux grandes échelles.

En ce qui concerne la cascade inverse d'énergie magnétique, nous pouvons écrire le modèle d'hypodiffusivité magnétique sous la forme suivante,

$$\partial_t \mathbf{b}(\mathbf{k}, t) \approx -\mu_m k^{-2\alpha_m} \mathbf{b}(\mathbf{k}, t) \quad (7.2)$$

$\mu_m$  et  $\alpha_m$  sont les contreparties magnétiques des constantes  $\mu_k$  et  $\alpha_k$ . Il fut montré que les modèles d'hypoviscosité pouvait influencer directement les échelles incluses dans la zone inertielle, lorsque la valeur de  $\alpha$  était trop faible [16]. Nous avons décidé de n'appliquer ce modèle que dans les plus grandes échelles du champ magnétique. Ce qui revient à choisir une valeur proche de l'infini de  $\alpha_m$ . En pratique le modèle n'est donc appliqué uniquement pour les modes tels que  $|\mathbf{k}| = 1$ . Par ailleurs, nous ne nous attendons pas à observer de cascade inverse d'énergie cinétique, nous imposerons donc  $\mu_k = 0$ . Nous effectuerons donc une comparaison entre une configuration ayant recours à un modèle d'hypofriction magnétique, tel que  $\mu_m = 0.005$ , et une configuration classique de turbulence hélicitaire magnétisée, en l'absence d'hypoviscosité.

### 7.3 Séparation d'échelles dans l'espace physique en turbulence MHD

Afin d'évaluer les performances des modèles de turbulence utilisés en LES, nous pouvons distinguer les performances structurelles et fonctionnelles des modèles [84, 9]. La notion de performances structurelles vise notamment à évaluer les capacités des modèles à reproduire les tenseurs sous-maillages  $\tau_{ij}^u$ ,  $\tau_{ij}^b$  et  $\tau_{ij}^{ub}$ . L'approche fonctionnelle consiste à évaluer les effets du modèle sur les quantités transportées (champ de vitesse, champ magnétique, énergies...), et non le tenseur sous-maille lui-même. Nous cherchons dans ce manuscrit à vérifier que les modèles de turbulence présentés dans le chapitre 6 sont capables de réaliser des LES, et dans quelle mesure ils modifient les équilibres énergétiques. Cette approche fonctionnelle nécessite dans un premier temps d'écrire les équations de transports des énergies cinétique et magnétique, en introduisant une séparation entre l'énergie contenue dans les grandes échelles et celle contenue dans les échelles plus petites que la taille de filtre  $\Delta$ .

**Énergies cinétique et magnétique aux grandes et petites échelles** A partir des champs filtrés, nous pouvons définir des énergies sur-maillages et sous-maillages, qui correspondent respectivement à l'énergie contenue dans les grandes échelles, et à l'énergie contenue dans les échelles plus petites que la taille de filtre  $\Delta$ . Lors de la réalisation de LES, seules les énergies sur-maillages peuvent être calculées.

Afin d'établir les équilibres énergétiques d'un écoulement turbulent MHD, nous devons dans un premier temps établir les équations de transports des différentes énergies. L'énergie cinétique sur-maille est définie comme :  $E_k^{GS} = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$ . Pour l'équation de transport de  $E_k^{GS}$ , le point de départ est de multiplier l'équation (6.4) par  $\overline{u_i}$ , ce qui mène à l'équation suivante,

$$\begin{aligned} \partial_t 2E_k^{GS} + \partial_j (\overline{u_j u_i u_i}) = & - 2\partial_i (\overline{\Pi u_i}) + 2\overline{u_i} \partial_j (\overline{b_j b_i}) + \nu \partial_j (\partial_j (\overline{u_i u_i})) - 2\nu (\partial_j \overline{u_i})^2 \\ & - \overline{u_i} \partial_j (\tau_{ij}^u - \tau_{ij}^b) + 2\overline{f_i u_i} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Par ailleurs, en utilisant les propriétés de symétrie des tenseurs de Reynolds et Maxwell, il est possible de distinguer les termes de dissipation sous-maille des termes de diffusion. En effet, ces deux tenseurs sont des tenseurs symétriques, tels que  $\tau_{ij}^u = \tau_{ji}^u$  et  $\tau_{ij}^b = \tau_{ji}^b$ . Les termes  $\overline{u_i} \partial_j \tau_{ij}^u$  et  $\overline{u_i} \partial_j \tau_{ij}^b$  s'écrivent alors  $\overline{u_i} \partial_j \tau_{ij}^u = -2\overline{S_{ij}^u} \tau_{ij}^u + 2\partial_j (\overline{u_i} \tau_{ij}^u)$  et  $\overline{u_i} \partial_j \tau_{ij}^b = -2\overline{S_{ij}^b} \tau_{ij}^b + 2\partial_j (\overline{u_i} \tau_{ij}^b)$

Cette distinction entre les termes de diffusion et de dissipation se fait également pour les termes visqueux. L'équation de transport de l'énergie cinétique sur-maille s'écrit alors,

$$\begin{aligned} \underbrace{\partial_t \overline{u_i u_i}}_I + \underbrace{\partial_j (\overline{u_j u_i u_i})}_{II} = & - \underbrace{2\partial_i (\overline{\Pi u_i})}_{III} + \underbrace{2\overline{u_i} \partial_j (\overline{b_j b_i})}_{IV} + \underbrace{\nu \partial_j (\partial_j (\overline{u_i u_i}))}_V - \underbrace{2\nu (\partial_j \overline{u_i})^2}_{VI} \\ & - \underbrace{2\partial_j (\overline{u_i} \tau_{ij}^u)}_{VII} + \underbrace{2\partial_j (\overline{u_i} \tau_{ij}^b)}_{VIII} + \underbrace{2\overline{S_{ij}^u} \tau_{ij}^u}_{IX} - \underbrace{2\overline{S_{ij}^b} \tau_{ij}^b}_X + \underbrace{2\overline{f_i u_i}}_{FGS} \end{aligned} \quad (7.4)$$

En ce qui concerne l'énergie cinétique sous-maille  $E_k^{SGS}$ , deux définitions sont possibles. L'une est simplement la différence entre l'énergie cinétique,  $E_k = \frac{1}{2}u_i^2$  et l'énergie cinétique sur-maille. L'énergie cinétique sous-maille s'exprime alors de la façon suivante :  $E_k^{SGS} = \frac{1}{2}(u_i u_i - \overline{u_i u_i})$ . La seconde définition propose  $E_k^{SGS} = \frac{1}{2}(\overline{u_i u_i} - \overline{u_i u_i}) = \frac{1}{2}\tau_{ii}^u$  est la différence entre l'énergie cinétique filtrée, et l'énergie cinétique sur-maille. Pour de faibles tailles de filtres, ces deux définitions sont équivalentes [84]. Par ailleurs, les termes d'échanges entre les grandes échelles, et les échelles sous-mailles sont les mêmes pour les deux définitions. Nous garderons ici la définition la plus répandue, à savoir  $E_k^{SGS} = \frac{1}{2}\tau_{ii}^u$ .

Pour établir l'équation de transport de l'énergie cinétique sous-maille, il faut dans un premier temps écrire l'équation de transport de l'énergie cinétique  $E_k$ ,

$$\partial_t 2E_k + u_j \partial_j u_i u_i = \partial_i (u_i P) + u_i b_j \partial_j b_i + \nu \partial_j \partial_j u_i u_i - 2\nu (\partial_j u_i)^2 \quad (7.5)$$

On applique ensuite l'opération de filtrage à cette équation (7.5),

$$\partial_t \overline{u_i u_i} + u_j \partial_j \overline{u_i u_i} = \overline{\partial_i (u_i P)} + \overline{u_i b_j \partial_j b_i} + \nu \partial_j \partial_j \overline{u_i u_i} - 2\nu \overline{(\partial_j u_i)^2} \quad (7.6)$$

Finalement on soustrait l'équation (7.4) à l'équation (7.6) pour obtenir l'équation de transport de l'énergie cinétique sous-maille,

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\partial_t \tau_{ii}^u}_{XI} + \underbrace{\partial_j (\bar{u}_j \tau_{ii}^u)}_{XII} = & - \underbrace{2\partial_i (\bar{u}_i \bar{\Pi} - \bar{u}_i \bar{\Pi})}_{XIII} + \underbrace{2 (\bar{u}_i \partial_j (\bar{b}_j \bar{b}_i) - \bar{u}_i \partial_j (\bar{b}_j \bar{b}_i))}_{XIV} + \underbrace{\nu \partial_j (\partial_j \tau_{ii}^u)}_{XV} \\
 & - \underbrace{2\nu ((\partial_j \bar{u}_i)^2 - (\partial_j \bar{u}_i)^2)}_{XVI} + \underbrace{2\partial_j (\bar{u}_i \tau_{ij}^u)}_{VII} - \underbrace{2\partial_j (\bar{u}_i \tau_{ij}^b)}_{VIII} - \underbrace{2\bar{S}_{ij} \tau_{ij}^u}_{IX} + \underbrace{2\bar{S}_{ij} \tau_{ij}^b}_{X} \\
 & - \underbrace{\partial_j (\bar{u}_i \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_i \bar{u}_j)}_{XVII} + \underbrace{2 (\bar{f}_i \bar{u}_i - \bar{f}_i \bar{u}_i)}_{FSGS}. \tag{7.7}
 \end{aligned}$$

Nous définissons également l'énergie magnétique sur-maille,  $E_m^{GS} = \frac{1}{2} \bar{b}_i \bar{b}_i$ . Afin d'écrire l'équation de transport de cette dernière, nous procédons de la même façon que pour  $E_k^{GS}$ . On multiplie l'équation (6.5) par  $\bar{b}_i$ , menant ainsi à l'équation suivante,

$$\begin{aligned}
 \partial_t \bar{b}_i \bar{b}_i + \partial_j (\bar{u}_j \bar{b}_i \bar{b}_i) = & 2\partial_j (\bar{b}_j \bar{b}_i \bar{u}_i) - 2 \bar{u}_i \partial_j (\bar{b}_j \bar{b}_i) + \eta \partial_j (\partial_j (\bar{b}_i \bar{b}_i) - 2\eta (\partial_j \bar{b}_i)^2) \\
 & - 2\bar{b}_i \partial_j (\tau_{ij}^{ub}) \tag{7.8}
 \end{aligned}$$

Cette équation peut se réécrire en utilisant les propriétés antisymétriques du tenseur  $\tau_{ij}^{ub}$ , telles que  $\tau_{ij}^{ub} = -\tau_{ji}^{ub}$

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\partial_t \bar{b}_i \bar{b}_i}_{XVIII} + \underbrace{\partial_j (\bar{u}_j \bar{b}_i \bar{b}_i)}_{XIX} = & \underbrace{2\partial_j (\bar{b}_j \bar{b}_i \bar{u}_i)}_{XX} - \underbrace{2 \bar{u}_i \partial_j (\bar{b}_j \bar{b}_i)}_{IV} + \underbrace{\eta \partial_j (\partial_j (\bar{b}_i \bar{b}_i))}_{XXI} - \underbrace{2\eta (\partial_j \bar{b}_i)^2}_{XXII} \\
 & - \underbrace{2\partial_j (\bar{b}_i \tau_{ij}^{ub})}_{XXIII} + \underbrace{2\tau_{ij}^{ub} \bar{J}_{ij}}_{XXIV} \tag{7.9}
 \end{aligned}$$

où  $\bar{J}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j \bar{b}_i - \partial_i \bar{b}_j)$  est également un tenseur antisymétrique. En ce qui concerne l'énergie magnétique sous-maille, définie comme  $E_m^{SGS} = \frac{1}{2} (\bar{b}_i \bar{b}_i - \bar{b}_i \bar{b}_i) = \frac{1}{2} \tau_{ii}^b$ , nous procédons de façon analogue à l'énergie cinétique sous-maille afin d'établir son équation de transport. Nous partons également de l'équation de transport de l'énergie magnétique,  $E_m = \frac{1}{2} b_i b_i$ ,

$$\partial_t 2E_m + u_j \partial_j 2E_m = b_i b_j \partial_j + \eta \partial_j \partial_j b_i b_i - 2\eta (\partial_j b_i)^2 \tag{7.10}$$

Nous filtrons à présent l'équation (7.10), ce qui nous donne

$$\partial_t \bar{b}_i \bar{b}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{b}_i \bar{b}_i = \bar{b}_i \bar{b}_j \partial_j \bar{u}_i + \eta \partial_j \partial_j \bar{b}_i \bar{b}_i - 2\eta (\partial_j \bar{b}_i)^2 - \partial_j R_j^b \tag{7.11}$$

avec  $R_j^b = \bar{u}_j \bar{b}_i \bar{b}_i - \bar{u}_j \bar{b}_i \bar{b}_i$ . Ensuite nous soustrayons l'équation (7.9) à l'équation (7.11), afin d'obtenir l'équation de transport de l'énergie magnétique sous-maille,

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\partial_t \tau_{ii}^b}_{XXV} + \underbrace{\partial_j (\bar{u}_j \tau_{ii}^b)}_{XXVI} = & \underbrace{\eta \partial_j (\partial_j (\tau_{ii}^b))}_{XXVII} - \underbrace{2\eta ((\partial_j \bar{b}_i)^2 - (\partial_j \bar{b}_i)^2)}_{XXVIII} + \underbrace{2\partial_j (\bar{b}_j \bar{b}_i \bar{u}_i - \bar{b}_j \bar{b}_i \bar{u}_i)}_{XXIX} \\
 & - \underbrace{2(\bar{u}_i \bar{b}_j \partial_j \bar{b}_i - \bar{u}_i \bar{b}_j \partial_j \bar{b}_i)}_{XIV} + \underbrace{2\partial_j (\bar{b}_i \tau_{ij}^{ub})}_{XXIII} - \underbrace{2\tau_{ij}^{ub} \bar{J}_{ij}}_{XXIV} \\
 & - \underbrace{\partial_j R_j^b}_{XXX}. \tag{7.12}
 \end{aligned}$$



**Fluctuations temporelles et termes de diffusion** Une fois ces équations écrites, il est important de préciser la signification des différents termes. Les termes  $I$ ,  $XI$ ,  $XVIII$  et  $XXV$  représentent les fluctuations temporelles des différentes énergies. En régime stationnaire, la moyenne temporelle de ces termes est nul. Les termes  $II$ ,  $XII$ ,  $XIX$  et  $XXVI$  sont les termes de transport advectifs de ces énergies. Ils décrivent une redistribution locale d'énergie par le champ de vitesse résolue et leur moyenne spatiale (dans un domaine périodique) est nulle. Lors d'un bilan d'énergie global (correspondant à l'application de moyenne volumique aux équations de transports), équilibrant les différents flux d'énergie, ces termes correspondent à des termes diffusifs, qui sont globalement nuls, c'est-à-dire qui ne conduisent pas à un transfert global d'énergie. Le terme  $III$  (resp.  $XIII$ ) représente une redistribution d'énergie cinétique sur-maille (resp. sous-maille) réalisée par le gradient de pression sur-maille (resp. sous-maille). Il s'agit à nouveau de termes diffusifs. Les termes  $V$ ,  $XV$ ,  $XXI$ , et  $XXVII$  sont des termes liés de diffusion visqueuse ou magnétique, et n'ont pas d'influence sur le bilan global.

Les termes  $VII$ , et  $VIII$  apparaissent aussi bien dans les équations (7.4) que (7.7). Ils représentent une redistribution d'énergie entre l'énergie cinétique sur-maille et l'énergie cinétique sous-maille. Ce sont des termes de diffusion sous-maille associés respectivement au tenseur de Reynolds et au tenseur de Maxwell, et ne contribuent pas au bilan énergétique global. Le terme  $XXIII$  apparaît dans les équations de transport des énergies magnétiques sur-maille et sous-maille. Il s'agit d'un terme de diffusion sous-maille, similaire aux termes  $VII$  et  $VIII$ . Le terme  $XVII$  (resp.  $XXIX$  et  $XXX$ ) quand à lui représente une redistribution locale d'énergie cinétique (resp. magnétique) sous-maille, est également un terme diffusif. Le terme  $XX$  est également un terme diffusif, qui n'a pas d'influence global sur l'écoulement, et est relié au transport de l'hélicité croisé par le champ magnétique.

**Termes de forçages et dissipation** L'injection d'énergie se fait via le forçage  $\mathbf{f}$ , à une échelle donné. Selon la taille de filtre utilisée le forçage sera localisé dans les grandes échelles, ou les petites échelles. C'est la raison pour laquelle les équations comportent un terme d'injection d'énergie lié au forçage pour les échelles sur-maillages  $F^{GS}$ , et un second pour les échelles sous-maillages :  $F^{SGS}$ .

La dissipation d'énergie est assurée par la viscosité et la diffusivité magnétique. Ainsi la dissipation visqueuse d'énergie cinétique sur-maille (resp. sous-maille) est représenté par le terme  $VI$  (resp.  $XVI$ ). De plus le terme  $XXII$  (resp.  $XXVIII$ ) correspond à la dissipation d'énergie magnétique aux échelles sur-maillages (resp. sous-maillages).

**Termes d'échanges entre énergies cinétiques et magnétiques**  $IV$  est un terme qui apparaît dans deux équations, celle de l'énergie cinétique sur-maille, ainsi que dans celle de l'énergie magnétique sur-maille, à la différence près que dans l'équation (7.9) le terme apparaît avec un signe négatif. Il s'agit donc d'un terme d'échange, entre  $E_k^{GS}$  et  $E_m^{GS}$ , et qui est donc un terme relevant de la présence de dynamo au sein de l'écoulement. On note la présence d'un terme commun aux équations de transport des énergies cinétique et magnétique sous mailles. Le terme  $XIV$  représente les échanges entre ces deux énergies, via un effet dynamo effectif aux échelles plus faible que l'échelle de coupure.

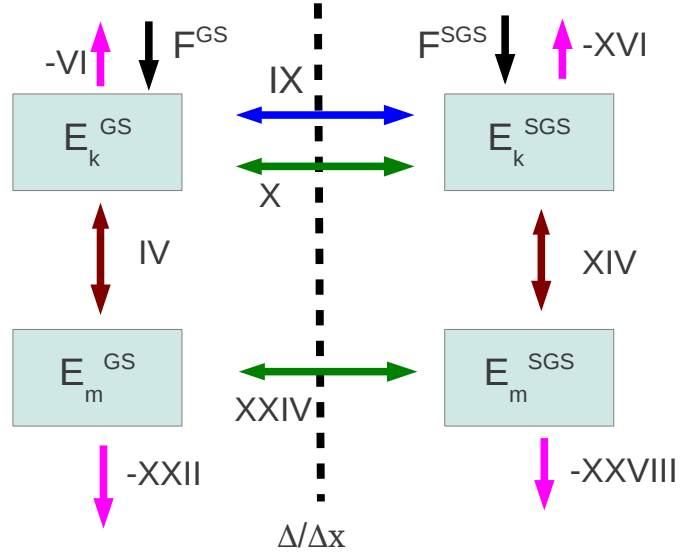


FIGURE 7.1 – Schéma symbolisant les termes de transferts non diffusifs, qui contrôlent les bilans d'énergie. Ici  $\Delta_x$  désigne le pas d'espace que nous utilisons pour discrétiser le domaine de calcul.

**Termes d'échanges entre énergies sur-maïlles et sous-maïlles** Les termes  $IX$  et  $X$  apparaissent aussi bien dans les équations 7.4 que 7.7. Ils représentent les échanges entre l'énergie cinétique sur-maïlle et l'énergie cinétique sous-maïlle. Ce n'est pas le cas en revanche des termes  $IX$  et  $X$  qui sont considérés comme des termes de dissipation sous-maïlle, qui eux ont une influence sur le bilan énergétique global.  $IX$  ici représentant les transferts d'énergie cinétique lié à l'advection, tandis que  $X$  est relié à la force de Lorentz. Le terme  $XXIV$  apparaît dans les équations de transport des énergie magnétiques sur-maïlle et sous maïlle. Il s'agit d'un terme de dissipation sous-maïlle, similaire aux termes  $IX$  et  $X$ .

**Équations pour les bilans d'énergie** De nombreux termes n'ayant pas d'influence sur les bilans d'énergie, les équations introduites précédemment peuvent être moyennés, on peut alors écrire le bilan d'énergie de la façon suivante pour l'énergie cinétique,

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\langle \partial_t \bar{u}_i \bar{u}_i \rangle}_I &= \underbrace{\langle +2\bar{u}_i \partial_j (\bar{b}_j \bar{b}_i) \rangle}_{IV} - \underbrace{\langle 2\nu (\partial_j \bar{u}_i)^2 \rangle}_{VI} + \underbrace{\langle 2\bar{f}_i \bar{u}_i \rangle}_{FGS} \\
 &+ \underbrace{\langle 2\bar{S}_{ij}^u \tau_{ij}^u \rangle}_{IX} - \underbrace{\langle 2\bar{S}_{ij}^u \tau_{ij}^b \rangle}_X
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\langle \partial_t \tau_{ii}^u \rangle}_{XI} &= \underbrace{\langle 2(\bar{u}_i \partial_j (\bar{b}_j \bar{b}_i) - \bar{u}_i \partial_j (\bar{b}_j \bar{b}_i)) \rangle}_{XIV} - \underbrace{\langle 2\nu ((\partial_j \bar{u}_i)^2 - (\partial_j \bar{u}_i)^2) \rangle}_{XVI} \\
 &- \underbrace{\langle 2\bar{S}_{ij}^u \tau_{ij}^u \rangle}_{IX} + \underbrace{\langle 2\bar{S}_{ij}^u \tau_{ij}^b \rangle}_X + \underbrace{\langle 2(\bar{f}_i \bar{u}_i - \bar{f}_i \bar{u}_i) \rangle}_{FSGS},
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Et sous la forme suivante pour l'énergie magnétique,

$$\underbrace{\langle \partial_t \bar{b}_i \bar{b}_i \rangle}_{XVIII} = -\underbrace{\langle 2 \bar{u}_i \partial_j (\bar{b}_j \bar{b}_i) \rangle}_{IV} - \underbrace{\langle 2\eta (\partial_j \bar{b}_i)^2 \rangle}_{XXII} + \underbrace{\langle 2\tau_{ij}^{ub} \bar{J}_{ij} \rangle}_{XXIV} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle \partial_t \tau_{ii}^b \rangle}_{XXV} &= -\underbrace{\langle 2\eta ((\partial_j \bar{b}_i)^2 - (\partial_j \bar{b}_i)^2) \rangle}_{XXVIII} - \underbrace{\langle 2(u_i \bar{b}_j \partial_j \bar{b}_i - \bar{u}_i \bar{b}_j \partial_j \bar{b}_i) \rangle}_{XIV} \\ &\quad - \underbrace{\langle 2\tau_{ij}^{ub} \bar{J}_{ij} \rangle}_{XXIV}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Ici les crochets  $\langle \rangle$  désignent une moyenne volumique, ce qui explique que les fluctuations temporelles ne soient pas nulles. Dans un régime stationnaire, si ces crochets désignent aussi une moyenne temporelle, alors les termes de variations temporelles,  $\langle I \rangle$ ,  $\langle XI \rangle$ ,  $\langle XVIII \rangle$  et  $\langle XXV \rangle$  sont nuls.

La figure 7.1 résume les différents transferts qui contrôlent la physique de l'écoulement. On remarque notamment que le formalisme des LES ne conduit pas exactement aux mêmes échanges que le formalisme spectrale introduit dans le chapitre 5. On peut noter l'absence de terme d'échanges entre l'énergie cinétique contenue dans les petites échelles, et l'énergie magnétique contenue dans les grandes échelles. De plus l'échange d'énergie entre les échelles sous-maillages de l'énergie magnétique et les échelles sur-maillages de l'énergie cinétique n'apparaît pas formellement dans les équations dérivées avec l'opération de filtrage. En revanche, la force de Lorentz introduit un terme d'échange entre les grandes et les petites échelles de l'énergie cinétique, qui n'apparaît pas à l'aide du formalisme spectral.

## 7.4 Évaluation des modèles de turbulence utilisés en LES

### 7.4.1 Notion de tests a priori

Nous venons d'introduire les équations des énergies sur-maillages et sous-maillages. trois termes échanges entre grandes et petites échelles viennent d'être mis en évidence :

$$IX = \tau_{ij}^u \bar{S}_{ij}^u, \quad (7.17)$$

$$-X = \tau_{ij}^b \bar{S}_{ij}^u, \quad (7.18)$$

$$XXIV = \tau_{ij}^{ub} \bar{J}_{ij}. \quad (7.19)$$

Ces trois termes de dissipation sous-maille sont reliés aux différents tenseurs sous-maillages qu'il faut modéliser en LES. Afin de correctement reproduire les équilibres énergétiques en turbulence MHD, les modèles de turbulence utilisés doivent permettre de correctement prédire ces termes d'échanges. Les tests a priori consistent à filtrer les champs de vitesse et magnétique obtenus à partir des DNS. Ainsi, nous pouvons calculer les tenseurs sous-maillages exacts, et les comparer à la prédiction de ces tenseurs déduites des modèles introduit dans le chapitre 6. Nous pouvons également comparer les transferts exacts et ceux prédits par les modèles.

## 7.4 Évaluation des modèles de turbulence utilisé en LES

**Séparation des tenseurs de Reynolds et de Maxwell** En général, les tenseurs  $\tau_{ij}^u$  et  $\tau_{ij}^b$  sont modélisés ensemble, comme dans le cas du modèle SLM par exemple :

$$\tau_{ij}^{u-b} = \tau_{ij}^u - \tau_{ij}^b = -C_\nu \bar{\Delta}^2 |\bar{S}^u| \bar{S}_{ij}^u. \quad (7.20)$$

Bien que ce modèle puisse être utilisé en l'état, nous avons séparé les parties magnétique et hydrodynamique dans l'équation de Navier-Stokes, afin d'approfondir l'évaluation des modèles sous-mailles. Notre motivation réside dans le fait qu'à ce stade nous ne pouvons pas écarter la possibilité que les termes  $IX$  et  $-X$  adoptent des comportements différents l'un de l'autre, et il peut donc être intéressant d'évaluer séparément les performances des modèles pour les tenseurs de Reynolds et de Maxwell. Le modèle SLM pour l'équation de transport du champ de vitesse se réécrit alors :

$$\tau_{ij}^u = -C_{\nu_R} \Delta^2 |\bar{S}^u| \bar{S}_{ij}^u \quad (7.21)$$

$$\tau_{ij}^b = C_{\nu_M} \Delta^2 |\bar{S}^u| \bar{S}_{ij}^u \quad (7.22)$$

Les coefficients  $C_{\nu_R}$  et  $C_{\nu_M}$  peuvent alors être calculés dynamiquement. Les tenseurs nécessaires aux procédures dynamiques introduits précédemment peuvent être réécrit de la sorte,

$$T_{ij}^{u-b} = T_{ij}^u - T_{ij}^b \quad (7.23)$$

$$T_{ij}^u = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u_i}} \widehat{\overline{u_j}} \quad (7.24)$$

$$T_{ij}^b = \widehat{\overline{b_i b_j}} - \widehat{\overline{b_i}} \widehat{\overline{b_j}} \quad (7.25)$$

Le tenseur de Leonard se décompose ainsi :

$$L_{ij}^{u-b} = L_{ij}^u - L_{ij}^b \quad (7.26)$$

$$L_{ij}^u = \widehat{\overline{\overline{u_i u_j}}} - \widehat{\overline{\overline{u_i}}} \widehat{\overline{\overline{u_j}}} \quad (7.27)$$

$$L_{ij}^b = \widehat{\overline{\overline{b_i b_j}}} - \widehat{\overline{\overline{b_i}}} \widehat{\overline{\overline{b_j}}} \quad (7.28)$$

$$M_{ij}^{u-b} = M_{ij}^u = M_{ij}^b \quad (7.29)$$

Ce qui mène à l'introduction aux formules suivantes pour les deux constantes,

$$C_{\nu_R} = \frac{\langle L_{ij}^u M_{ij}^u \rangle}{\langle M_{kl}^u M_{kl}^u \rangle} \quad (7.30)$$

$$C_{\nu_M} = \frac{\langle L_{ij}^b M_{ij}^b \rangle}{\langle M_{kl}^b M_{kl}^b \rangle} \quad (7.31)$$

Formellement on peut remarquer que grâce à cette procédure dynamique on a bien  $C_\nu = C_{\nu_R} + C_{\nu_M}$ . Cette séparation peut bien entendu être appliquée pour tous les modèles introduits dans ce manuscrit.

### 7.4.2 Notion de tests a posteriori

Une fois que nous avons réalisé les tests a priori<sup>1</sup>, nous aurons une idée des défauts de chaque modèle, et nous pourrions ensuite réaliser des LES pour établir la validité des modèles. La première étape pour la réalisation des tests a posteriori est de rediscrétiser les DNS sur des résolutions plus faibles. Par exemple si la résolution d'une DNS est de  $512^3$  points de grille, nous pouvons rediscrétiser les champs de vitesse et magnétique sur une résolution de  $64^3$  points. Ensuite nous démarrons une Simulation de Grandes Échelles en utilisant l'un des modèles de turbulence à partir des champs rediscrétisés. Finalement, nous comparons les résultats statistiques de la DNS, tels que l'évolution temporelle des énergies, ou encore les spectres d'énergies cinétique et magnétique, aux résultats des LES.

---

1. qui correspond donc à la comparaison directe des termes sous-mailles exacts et des modèles, à partir des données issues des DNS filtrées.

## CHAPITRE 8

# SIMULATIONS NUMÉRIQUES DIRECTES : ANALYSE DES ÉQUILIBRES ÉNERGÉTIQUES

### 8.1 Simulations numériques directes d'écoulements turbulents en présence d'un champ magnétique

Différentes simulations numériques directes ont été réalisées en utilisant les forçages non-hélicitaire  $F_{Alv1}$  et hélicitaire  $F_{Alv2}$ . Nous cherchons notamment à retrouver la présence d'une cascade inverse d'énergie magnétique observée précédemment [19, 50] lorsque de l'hélicité cinétique est injectée dans un écoulement conducteur.

Le tableau 8.1 référence les valeurs des différents paramètres utilisés pour les trois configurations réalisées. Ces trois simulations sont initialement des turbulences homogènes isotropes réalisées sur un domaine tri-périodique de taille  $2\pi$  dans chaque direction, discrétisé par  $512^3$  points de grille.

Pour les configurations hélicitaires, l'échelle de forçage a été choisie de façon à permettre de développement d'une cascade inverse d'énergie magnétique. En effet, Haugen *et al* [50] ont démontré qu'il fallait une échelle de forçage telle que  $k_f > 2.3$  pour que la présence d'hélicité dans l'écoulement permette l'apparition de ce phénomène inverse. Les nombres de Reynolds et de Prandl sont choisis de façon à assurer la stabilité des DNS, c'est-à-dire la résolution de l'ensemble des échelles, jusqu'aux échelles dissipatives. On peut noter que pour les configurations hélicitaires, le nombre de Reynolds  $R_\lambda$  est plus faible que dans le cas non-hélicitaire. En effet, l'échelle de forçage étant plus petite, la séparation entre l'échelle de forçage et les échelles dissipatives est également plus petite,

Nom du cas test	forçage utilisé	$R_\lambda$ initial	$k_f$	$P_m$	$\nu$	$\mu_m$
NH01	$F_{Alv1}$	70	2.2	1.0	0.002	0.0
H01	$F_{Alv2}$	50	3.7	1.0	0.002	0.0
H02	$F_{Alv2}$	50	3.7	1.0	0.002	0.005

TABLE 8.1 – Résumé des paramètres utilisés pour les diverses simulations.

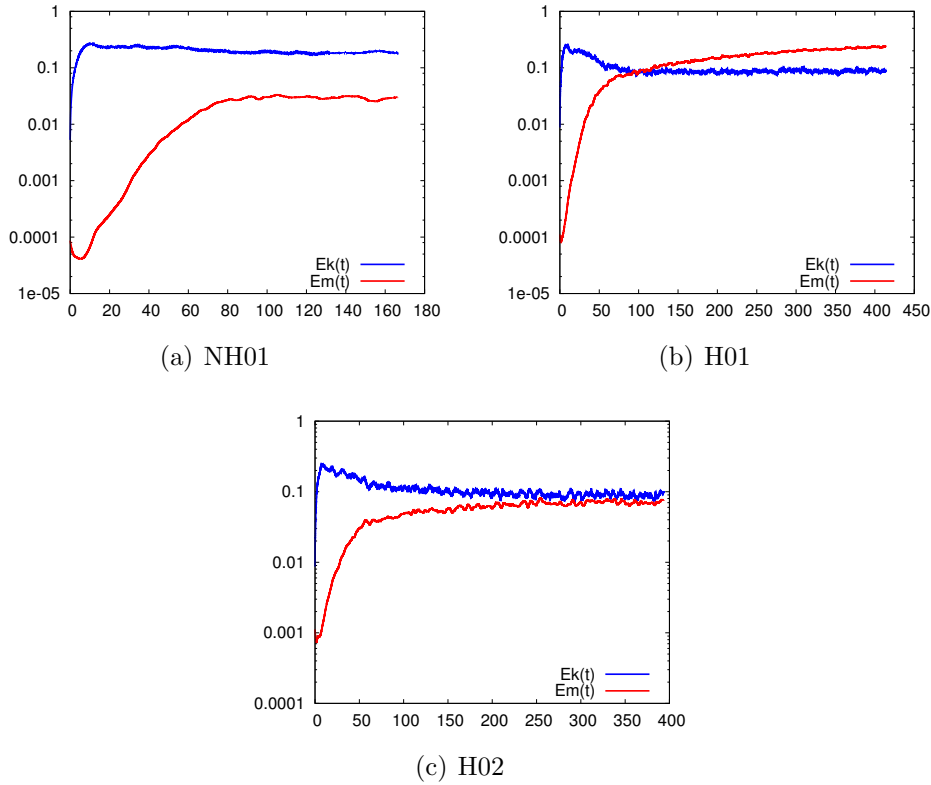


FIGURE 8.1 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique  $E_k(t)$  et de l'énergie magnétique  $E_m(t)$ , pour différents cas. En haut à gauche, les résultats sont présentés pour le cas non hélicitaire,  $NH01$ . La courbe situé en haut à droite, correspond au cas  $H01$ , et celle située en bas au cas  $H02$ .

ce qui laisse moins de place au développement de la turbulence. Par ailleurs seule la configuration  $H02$  fut réalisée à l'aide d'un modèle d'hypodiffusivité magnétique, afin d'être comparée au cas  $H01$ .

Pour chaque configuration un état initial est généré aléatoirement en imposant un spectre, avec un niveau d'énergie cinétique plus élevé que celui d'énergie magnétique, comme le montre la figure 8.1. Comme attendu, l'énergie magnétique entre ensuite dans une phase de croissance, avant d'atteindre une phase de saturation. Nous retrouvons donc ici une première phase de dynamo cinématique, suivie d'une dynamo dynamique (voir chapitre 5). En l'absence d'hélicité, l'énergie magnétique est toujours inférieure à l'énergie cinétique, y compris dans la phase de saturation. En revanche, dans le cas  $H01$  lorsque de l'hélicité est injectée, le niveau d'énergie magnétique est supérieur à celui de l'énergie cinétique. Le recours au modèle d'hypodiffusivité change fortement le niveau d'énergie magnétique, et de façon indirecte le niveau d'énergie cinétique. En effet, dans la phase de saturation, l'énergie magnétique continue à croître faiblement dans le cas  $H01$ , alors qu'elle est stationnaire dans le cas  $H02$ . Une seconde différence entre les cas  $H01$  et  $H02$  est que dans le cas  $H02$ , l'énergie magnétique reste plus faible que l'énergie cinétique.

La figure 8.2 représente les densités spectrales des énergies cinétique et magnétique pour les trois configurations dans la phase de saturation. Dans le cas non hélicitaire, les spectres d'énergie cinétique et magnétique sont quasiment superposés au delà de  $|k| > 15$ ,

## 8.1 Simulations numériques directes d'écoulements turbulents en présence d'un champ magnétique

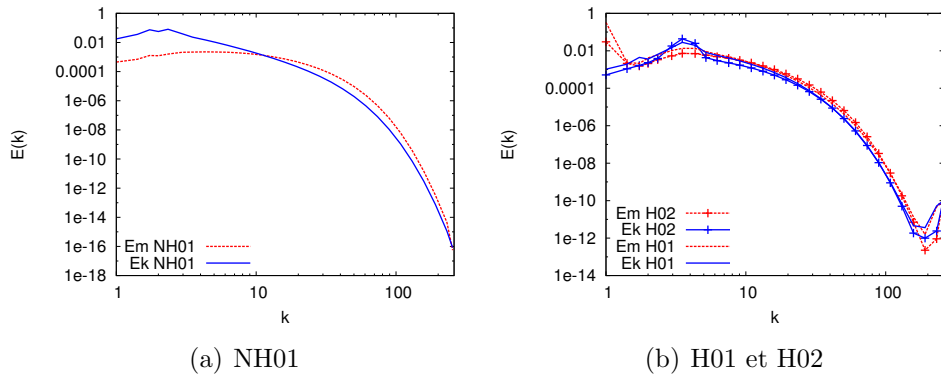


FIGURE 8.2 – Densités spectrales d'énergie cinétique (en rouge) et magnétique (en bleu) en fonction du nombre d'onde pour les trois configurations. Le pic sur les courbes d'énergie cinétique correspond à l'échelle de forçage. La figure de gauche correspond au cas non-hélicitaire. Sur la figure de droite, les courbes avec les croix représentent la configuration  $H02$ , et les autres spectres correspondent au cas  $H01$ .

et le niveau d'énergie magnétique est plus faible que le niveau d'énergie cinétique dans les grandes échelles. Bien que l'équipartition d'énergie s'observe également pour les configurations hélicitaires aux échelles plus petites que l'échelle de forçage, des différences sont notables aux grandes échelles. En effet, nous constatons la présence d'une accumulation d'énergie dans la plus grande échelle disponible pour les configurations hélicitaires. Cette accumulation traduit la présence d'une cascade inverse d'hélicité magnétique. Finalement nous pouvons constater quelques différences entre les cas  $H01$  et  $H02$ . En effet, l'énergie magnétique accumulée dans la plus grande échelle est moins importante en présence d'une hypodiffusivité magnétique. Bien que la différence soit moins flagrante, le niveau d'énergie magnétique dans la zone inertielle est également plus faible pour le cas  $H02$  que pour le cas  $H01$ .

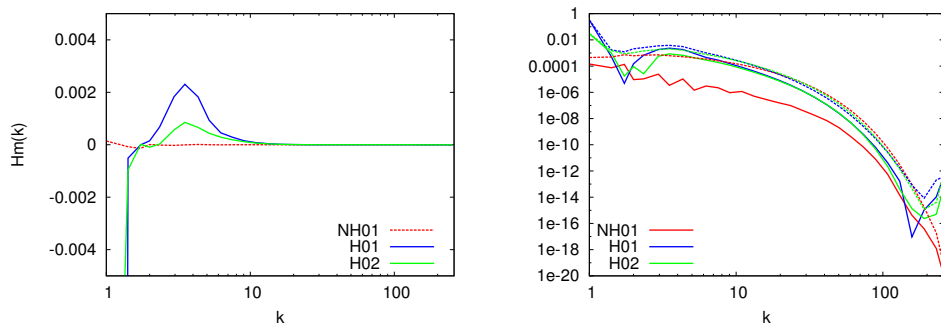


FIGURE 8.3 – L'hélicité n'étant pas une quantité définie positive, son signe peut changer localement. À droite la valeur absolue de la densité spectrale de l'hélicité magnétique (lignes solides) est comparée avec  $k^{-1}E_m(k)$  (lignes discontinues). À gauche est représentée la densité spectrale de l'hélicité magnétique (sans la valeur absolue). Les courbes rouges correspondent au cas  $NH01$ , celles en bleu au cas  $H01$ , et celles en vert au cas  $H02$ .

La figure 8.3 représente les densités spectrales d'hélicité magnétique. Nous pouvons



constater dans un premier temps que la condition de réalisation [67],

$$E_m(k, t) \geq k|H_m(k, t)| \quad (8.1)$$

est vérifiée numériquement (voir figure de droite). En effet, pour les trois configurations, les courbes représentant  $E_m(k)/k$  sont systématiquement au dessus des courbes représentant  $|H_m(k)|$ . Dans le cas non hélicitaire, l'écart entre les deux courbes est plus important que pour les configurations hélicitaires. Par ailleurs, cette inégalité est pratiquement à saturation dans les cas hélicitaires. De plus, nous pouvons constater que les observations faites auparavant sur les spectres d'énergie magnétique sont liés aux comportements des spectres hélicité magnétique. Nous constatons en effet la présence d'une cascade inverse d'hélicité magnétique dans les configurations hélicitaires, qui entraîne l'accumulation d'énergie magnétique aux grandes échelles du fait de l'inégalité (8.1). La dernière observation que nous pouvons faire concerne le signe de l'hélicité magnétique, nous constatons notamment que l'hélicité magnétique aux échelles plus petites que l'échelle de forçage est de signe positif, tandis que celle présente dans les grandes échelles est de signe négatif. Ceci fut également observé à l'aide de flux d'hélicité magnétique [19].

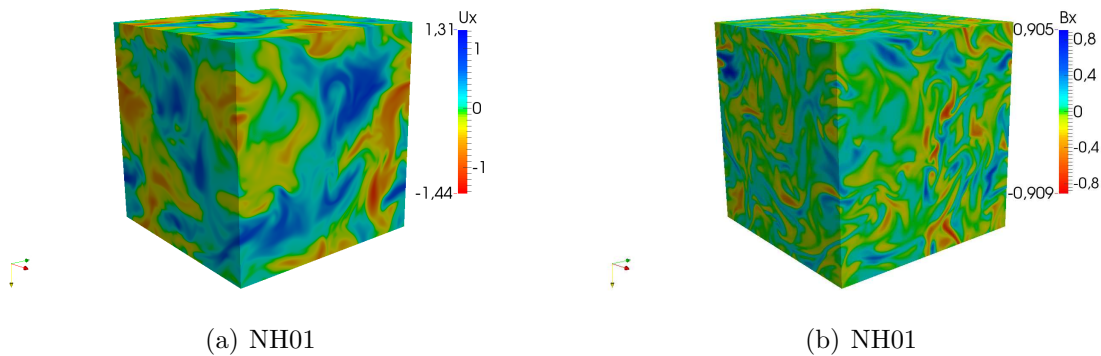


FIGURE 8.4 – Représentation de la composante du champ magnétique et du champ de vitesse dans la direction  $x$  pour le cas non-hélicitaire. La figure de gauche représente la vitesse, et celle de droite le champ magnétique.

Nous avons représenté des visualisations du champ magnétique et du champ de vitesse sur la figure 8.4 pour la configuration non-hélicitaire, et sur la figure 8.5 pour les configurations hélicitaires. Nous pouvons constater que dans le cas du forçage non hélicitaire, le champ magnétique reste de petite échelle, c'est à dire que ces structures visibles ont des tailles typiquement proches de l'échelle de forçage. En revanche en présence d'hélicité, nous constatons l'apparition de structures de plus grandes échelles, et l'apparition d'une direction d'anisotropie, conformément aux observations réalisées pour des forçages similaires [19]. Pour l'heure la seule certitude concernant le choix de la direction d'anisotropie est une forte dépendance aux conditions initiales aléatoires [19].

## 8.2 Résultats sur les équilibres énergétiques et transferts associés.

---

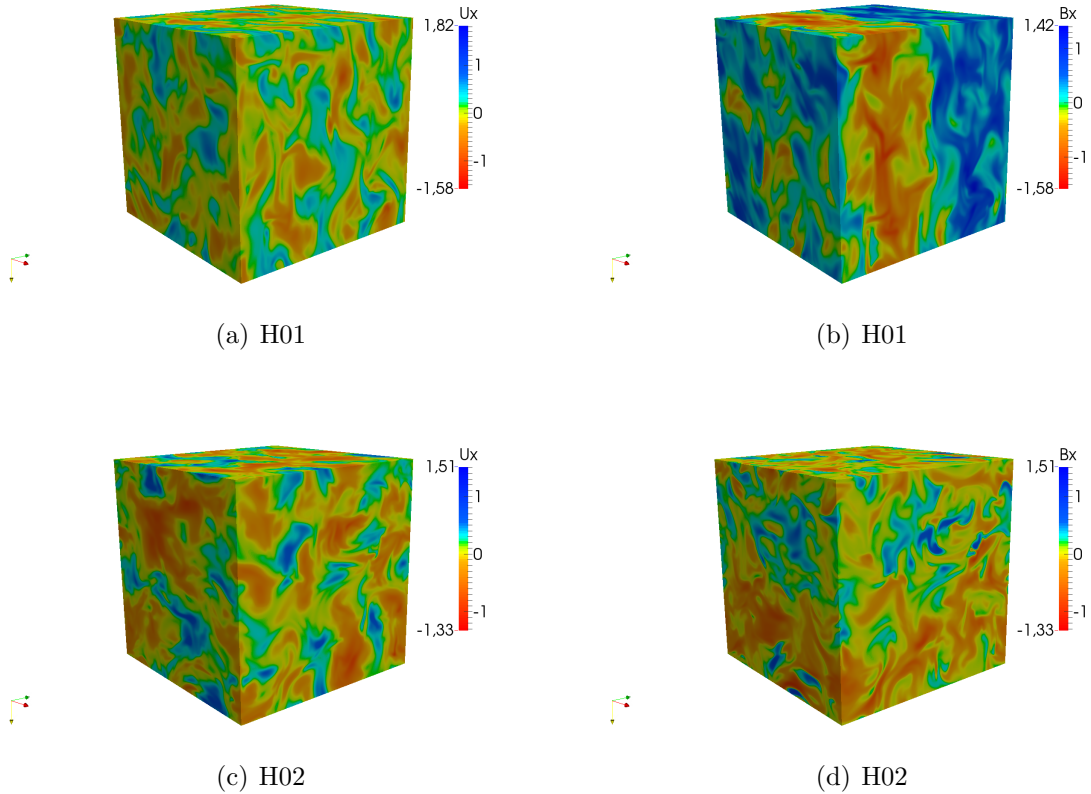


FIGURE 8.5 – Représentation de la composante du champ magnétique et du champ de vitesse dans la direction  $x$ . La colonne de gauche représente la vitesse, et celle de droite le champ magnétique. La ligne du haut correspond au cas hélicitaire  $H01$ , et la ligne du bas correspond au cas hélicitaire  $H02$ .

## 8.2 Résultats sur les équilibres énergétiques et transferts associés.

Les simulations qui viennent d'être présentées vont maintenant être utilisées comme base de données pour analyser les équilibres énergétiques induits par la séparation d'échelles issue d'une opération de filtrage. Une telle analyse doit nous permettre de mieux appréhender le rôle des termes sous-maillages qui doivent être modélisés en SGE et qui sont responsables des transferts d'énergie entre les échelles sur-maillages et sous-maillages. Ainsi, les échanges vont dans un premier temps être analysés globalement (Eq. (7.13)-(7.16)) afin d'évaluer l'intensité et le sens de ces transferts en comparaisons aux autres termes apparaissant dans les équations d'équilibre énergétique. Le comportement local des termes de transferts va également être étudié. En particulier, la validité d'une hypothèse d'équilibre locale au niveau des énergies sous-maillages sera également étudiée puisque c'est une hypothèse qui est souvent faite pour développer des modèles sous-maillages [73].

## 8.2.1 Équilibre global des énergies sur-maïles

A partir des équations dérivées précédemment (Eq. 7.13 et 7.15), nous pouvons étudier dans un premier temps le bilan global d'énergie sur-maïlle (correspondant aux énergies explicitement résolues lors d'une SGE). Les bilans d'énergie sont réalisés dans le régime stationnaire où les fluctuations temporelles sont nulles dans les cas *NH01* et *H02*, ou négligeables dans le cas *H01*.

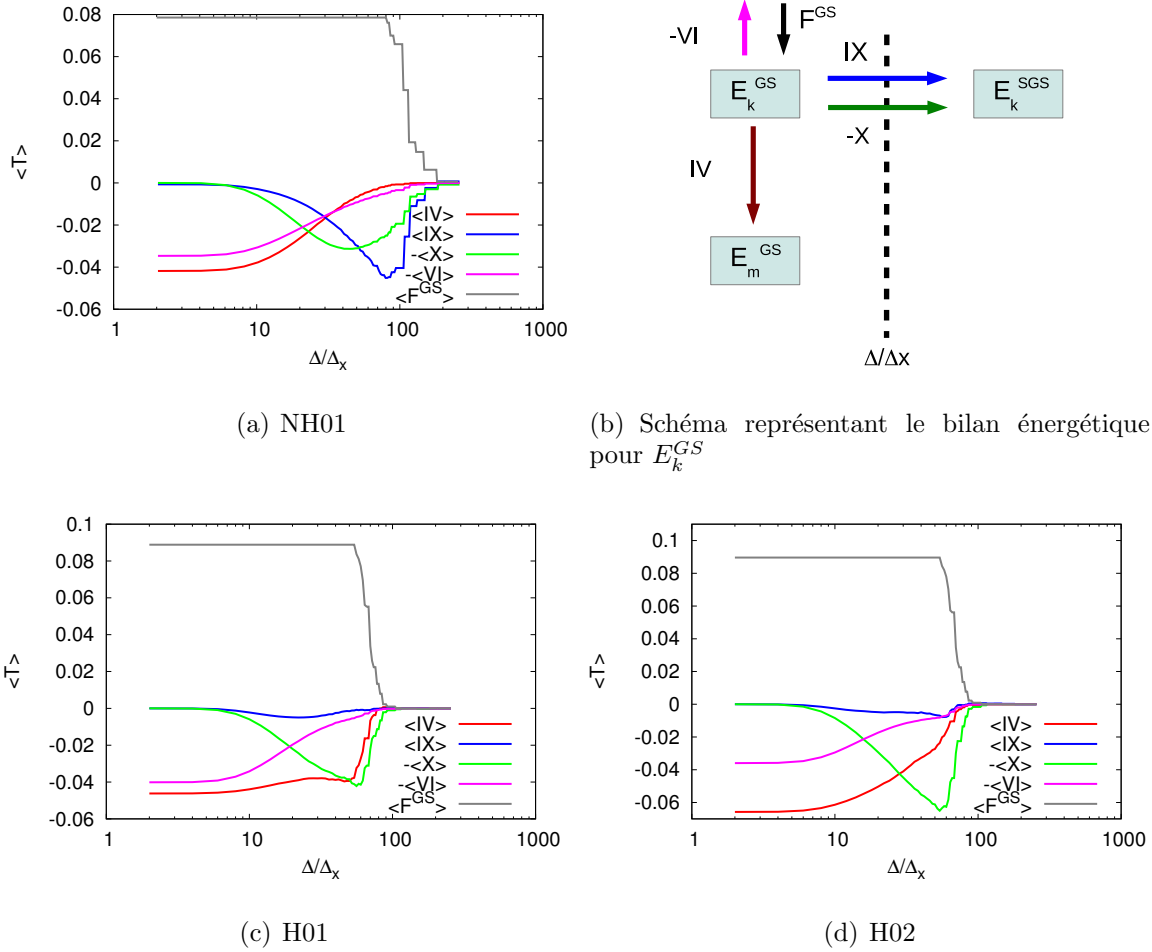


FIGURE 8.6 – Transferts moyens pour l'énergie cinétique sur-maïlle en fonction de  $\Delta/\Delta_x$  avec  $\Delta$  la taille de filtre et  $\Delta_x$  la résolution spatiale de la DNS. Dans le cas non hélicitaire (respectivement hélicitaire) l'échelle de forçage correspond à  $\Delta/\Delta_x \sim 120$  (respectivement  $\Delta/\Delta_x \sim 80$ ).

La figure 8.6 présente l'équilibre énergétique pour l'énergie cinétique sur-maïlle pour les trois SND. Il s'agit d'un équilibre entre le terme de forçage,  $\langle F^{GS} \rangle$ , la dissipation moléculaire,  $-\langle VI \rangle$ , la dynamo entre les énergies cinétique et magnétique sur-maïles,  $\langle IV \rangle$ , et les transferts entre les échelles sur-maïles et sous-maïles,  $\langle IX \rangle$  et  $-\langle X \rangle$  (cf figure 7.1). Parmi tous ces termes, seule la dissipation moléculaire est une perte nette d'énergie. Sur cette figure, une valeur négative correspond à une de perte pour l'énergie considérée, et une valeur positive est associée à un gain d'énergie. Dans chaque cas, pour de petites tailles de filtre, le transfert vers l'énergie cinétique sous-maïlle est faible, et le gain d'énergie due

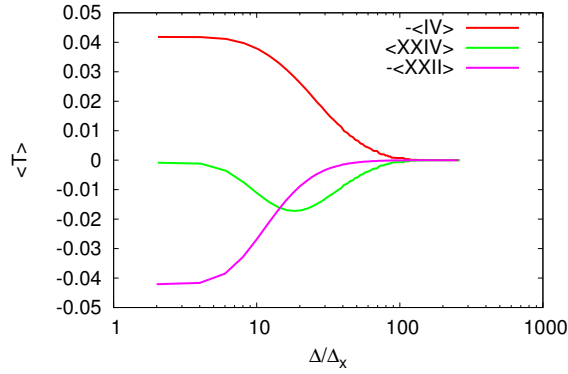
## 8.2 Résultats sur les équilibres énergétiques et transferts associés.

---

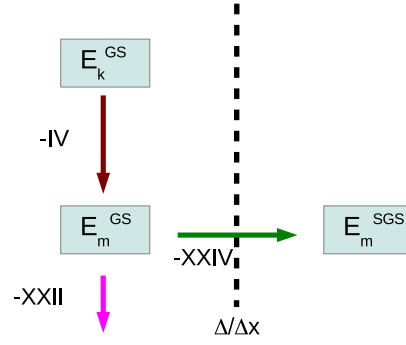
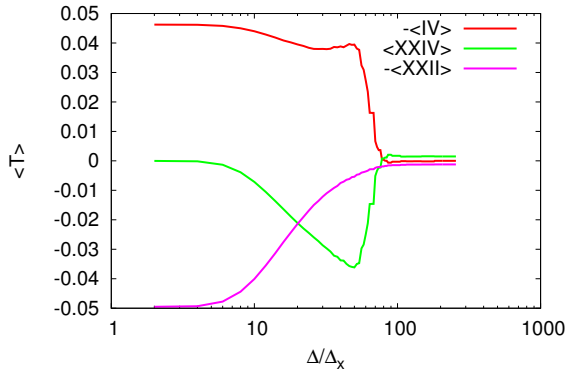
au forçage est compensé par la dissipation moléculaire et le transfert d'énergie cinétique sur-maille vers l'énergie magnétique sur-maille. Lorsque la taille de filtre augmente, la part d'énergie transférée entre les grandes et les petites échelles de l'énergie cinétique augmente, aussi bien pour les transferts liés à l'advection que pour ceux liés à la force de Lorentz. On peut noter que l'amplitude de la dissipation moléculaire diminue fortement lorsque la taille de filtre augmente, ce qui montre que l'essentiel de la dissipation visqueuse a lieu aux petites échelles, qui sont incluses dans les échelles sous-mailles pour des tailles de filtre suffisamment grandes. Les termes de transferts  $-\langle X \rangle$  et  $\langle IX \rangle$  sont négatifs. Ainsi le terme de transfert lié à la force de Lorentz, comme le terme de transfert lié à l'advection, participe à un transfert direct de l'énergie contenue à grande échelle vers une production d'énergie à petite échelle. Pour une séparation d'échelle suffisamment large entre l'échelle de forçage et les échelles de dissipation, ces termes doivent présenter un plateau pour les tailles de filtre correspondant à la zone inertielle. Ici cette zone reste assez étroite, et seules quelques tailles de filtres sont concernées.

Bien que les observations précédentes soient valables pour chacun des cas, nous pouvons observer des différences. Commençons par comparer les cas  $NH01$  et  $H01$ . La principale différence est le comportement relatif des termes  $\langle IX \rangle$  et  $-\langle X \rangle$ . Dans le cas non-hélicitaire le flux lié au terme d'advection  $\langle IX \rangle$ , et celui lié à la force de Lorentz  $-\langle X \rangle$ , ont des amplitudes similaires, la production d'énergie cinétique sous-maille étant donc due à ces deux mécanismes de façon équilibrée. En revanche ces transferts sous-mailles sont essentiellement dominés par la force de Lorentz dans le cas  $H01$ , et les transferts dus au terme d'advection ne participent que très faiblement à la production d'énergie cinétique sous-maille. Cette observation est valable également pour le cas  $H02$ . En revanche, en comparant les deux configurations hélicitaires, nous remarquons que le terme correspondant aux échanges entre l'énergie cinétique sur-maille et l'énergie magnétique sur-maille adopte un comportement différent selon la présence ou l'absence d'une hypodiffusivité magnétique. En effet, dans le cas  $H01$ , la courbe correspondant au terme  $\langle IV \rangle$  est dans un premier temps plate pour de faibles tailles de filtre et décroît très rapidement aux abords de l'échelle de forçage. Tandis que dans le cas  $H02$  le comportement de ce flux est plus proche du cas non hélicitaire. Ainsi, nous observons une décroissance moins rapide de l'amplitude de ce flux lorsque la taille de filtre augmente pour le cas  $H02$ . Dans le cas  $H01$  l'essentiel de l'effet dynamo se fait au début de la zone inertielle, proche de l'échelle de forçage, tandis que dans le cas  $H02$ , ces échanges entre énergie magnétique et cinétique se font à des échelles nettement plus faibles.

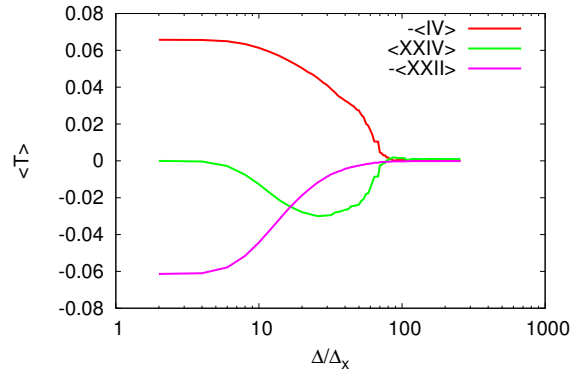
La figure 8.7 montre maintenant le bilan pour l'énergie magnétique sur-maille pour les trois configurations. Dans ce cas, le terme  $\langle IV \rangle$ , responsable de la transformation d'énergie cinétique sur-maille en énergie magnétique sur-maille, agit comme un terme source. Ce terme est en équilibre avec le terme de transfert entre échelles sur-mailles et sous-mailles de l'énergie magnétique  $\langle XXIV \rangle$ , ainsi qu'avec la dissipation magnétique sur-maille  $\langle XXII \rangle$ . Nous pouvons faire ici des comparaisons avec le bilan effectué pour l'énergie cinétique sur-maille. En effet, la dissipation magnétique sur-maille,  $\langle XXII \rangle$ , diminue rapidement lorsque la taille de filtre augmente montrant que la dissipation magnétique se produit essentiellement aux petites échelles. Concernant le transfert entre les échelles sur-mailles et sous-mailles, pour les trois configurations, le flux sous-maille d'énergie magnétique est d'abord négligeable pour de petites tailles de filtres, puis devient négatif montrant qu'une partie de l'énergie magnétique sur-maille est transférée pour produire de



(a) NH01 EmGS

(b) Schéma représentant le bilan énergétique pour  $E_m^{GS}$ 

(c) H01 EmGS



(d) NH01 EmSGS

FIGURE 8.7 – Transferts moyens pour l'énergie magnétique sur-maille en fonction de  $\Delta/\Delta_x$  avec  $\Delta$  la taille de filtre et  $\Delta_x$  la résolution spatiale de la DNS. Dans le cas non hélicitaire (respectivement hélicitaire) l'échelle de forçage correspond à  $\Delta/\Delta_x \sim 120$  (respectivement  $\Delta/\Delta_x \sim 80$ ).

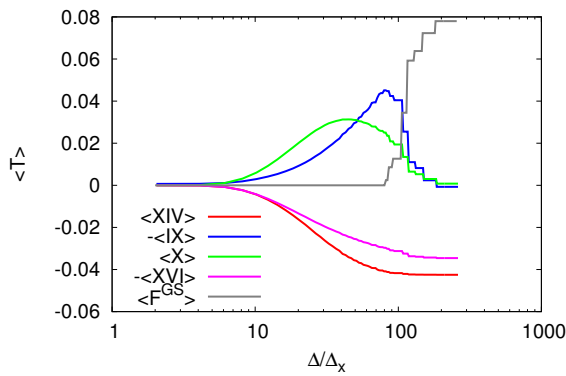
l'énergie magnétique sous-maille. Pour la configuration non hélicitaire, le transfert sous-maille moyen d'énergie magnétique est toujours négatif, ce qui montre globalement un transfert direct d'énergie magnétique, des grandes vers les petites échelles. D'un autre coté, dans le cas hélicitaire *H01* un changement de signe du transferts peut être observé pour des tailles de filtres plus grandes que l'échelle de forçage. Ce type de comportement est en adéquation avec les études réalisées à l'aide d'un formalisme spectrale [3], et est lié à l'apparition d'une cascade inverse d'énergie magnétique aux échelles supérieures à l'échelle de forçage. Le cas *H02* présente une cascade inverse nettement moins importante sur les spectres que le cas *H01*, et ceci se traduit par un flux inverse plus faible en magnitude que le dans le cas *H01*.

L'analyse des équilibres énergétiques sur-mailles dans les différentes configurations permet ainsi de tirer plusieurs conclusions qui seront d'intérêt pour la modélisation SGE de tels écoulements. Ainsi, les différents flux sous-mailles sont globalement négatifs (pour des échelles de filtrage inférieure à l'échelle de forçage), synonyme d'une perte d'énergie

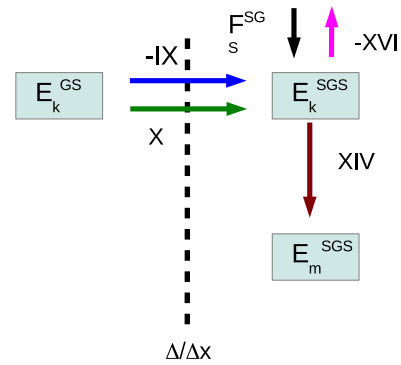
## 8.2 Résultats sur les équilibres énergétiques et transferts associés.

sur-maille au profit d'une production d'énergie sous-maille. Ainsi un modèle sous-maille devra principalement traduire une dissipation de l'énergie résolue, comme le permettent les modèles de type viscosité ou diffusivité sous-maille. On peut également noter que les deux flux sous-mailles apparaissant dans l'équilibre de l'énergie cinétique sur-maille (celui dû à l'advection et celui dû à la force de Lorentz) peuvent être d'intensité très différentes selon les configurations, illustrant la difficulté à considérer ces deux effets au sein d'un unique modèle.

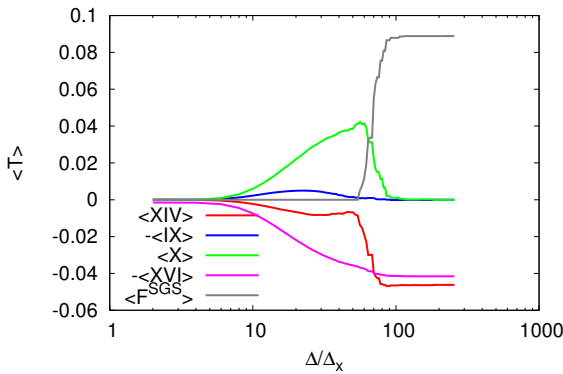
### 8.2.2 Équilibre global des énergies sous-mailles



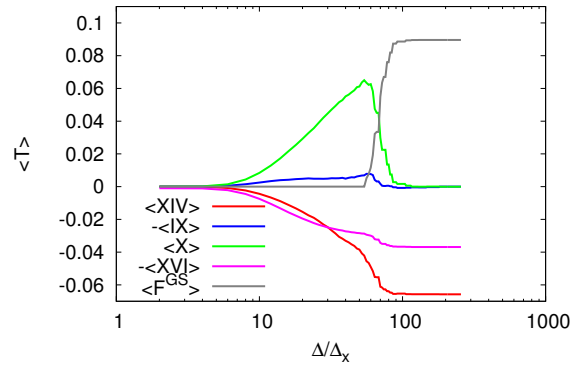
(a) NH01



(b) Schéma représentant le bilan énergétique pour  $E_k^{SGS}$



(c) H01



(d) H02

FIGURE 8.8 – Transferts moyens pour l'énergie cinétique sous-maille en fonction de  $\Delta/\Delta_x$  avec  $\Delta$  la taille de filtre et  $\Delta_x$  la résolution spatiale de la DNS. Dans le cas non hélicitaire (respectivement hélicitaire) l'échelle de forçage correspond à  $\Delta/\Delta_x \sim 120$  (respectivement  $\Delta/\Delta_x \sim 80$ ).

La connaissance des équilibres énergétiques des énergies sous-mailles peut être le point de départ pour l'introduction de nouveaux modèles. Par exemple, pour une turbulence hydrodynamique, la production d'énergie cinétique sous-maille induite par le flux sous-maille dû au terme d'advection (le seul existant dans ce cas) est globalement compensée

par la dissipation moléculaire. Ainsi, certains modèles ont pour hypothèse de départ que cette compensation est locale et instantanée, même si des travaux ont depuis montré la non-validité de cette hypothèse [34].

Pour les cas de turbulence MHD, l'équilibre global des énergies sous-mailles fait intervenir plus de deux termes (Eq. (7.14) et (7.16)), autant pour l'énergie cinétique que pour l'énergie magnétique (voir les figures 8.8(b) et 8.9(b)). L'équilibre énergétique aux échelles sous-mailles en turbulence MHD ne peut donc pas être vu comme un équilibre de type "production égal dissipation" et une analyse plus fine est nécessaire. Ainsi, la figure 8.8 présente le bilan pour l'énergie cinétique sous-maille. L'équilibre est fait entre le terme de forçage, les termes d'échanges entre énergies sous-maille et sur-maille,  $-\langle IX \rangle$  et  $\langle X \rangle$ , un terme de dissipation moléculaire,  $-\langle XVI \rangle$ , et un terme de dynamo  $-\langle XIV \rangle$ . Les termes  $-\langle IX \rangle$  et  $\langle X \rangle$  sont ici positifs, ils agissent donc comme des termes de production d'énergie cinétique sous-maille. L'amplitude du terme de dissipation moléculaire sous-maille augmente avec  $\Delta$ . Ceci s'explique par le fait que l'essentiel de la dissipation s'effectue aux petites échelles, et pour de faibles tailles de filtre, le nombre d'échelles contenues dans les régions sous-mailles est faible également. Il en est de même pour le terme de dynamo entre l'énergie magnétique sous-maille et l'énergie cinétique sous-maille,  $\langle XIV \rangle$ , dont le signe traduit une 'perte' d'énergie cinétique, au profit de l'énergie magnétique. Ces deux termes croissent avec la taille de filtre, jusqu'à l'échelle de forçage, à partir de laquelle ils sont constants.

Les observations précédentes pour l'énergie cinétique sous-maille sont valables pour les trois configurations d'écoulement. Néanmoins des différences peuvent être notées entre chacun des cas. En effet, dans le cas non hélicitaire, *NH01*, nous avons déjà remarqué que les termes  $-\langle IX \rangle$  et  $-\langle X \rangle$  avaient des amplitudes similaires. C'est également le cas des  $\langle XVI \rangle$  et  $-\langle XIV \rangle$  (figure 8.8(b)). Comme vu précédemment, l'essentiel de la dynamo est réalisée à des échelles proches de l'échelle de forçage dans le cas *H01*. Ainsi, pour une taille de filtre plus faible que l'échelle du forçage, l'équilibre énergétique sous-maille est principalement dû à une production via la force de Lorentz et une perte dû à la dissipation moléculaire. Dans le cas *H02*, la dynamo est plus significative : la production via la force de Lorentz est ainsi compensée à la fois par la dissipation moléculaire et le transfert vers l'énergie magnétique sous-maille.

Pour les configurations hydrodynamiques une vue schématique du bilan énergétique est la suivante : l'énergie est injecté à grande échelle ; cette énergie cascade ensuite vers les petites échelles grâce au terme d'advection  $\langle IX \rangle$ , avant d'être dissipée par effet visqueux. En revanche dans le cas de la turbulence MHD, les différents comportements que nous venons d'observer ne permettent pas de dresser un schéma aussi synthétique. En effet, les termes de transferts  $-\langle IX \rangle$  et  $-\langle X \rangle$  s'équilibrent globalement avec les termes  $\langle XVI \rangle$  et  $-\langle XIV \rangle$ . Néanmoins, il n'est pas possible de supposer un équilibre global entre le terme  $-\langle IX \rangle$  et le terme  $-\langle XVI \rangle$  ou entre le terme  $\langle X \rangle$  et le terme  $\langle XIV \rangle$ , notamment à cause du comportement de ces différents termes dans les cas hélicitaires. En effet, la force de Lorentz est responsable du transferts des grandes vers les petites échelles, mais l'énergie transférée aux petites échelles n'est pas nécessairement transformée en énergie magnétique par effet dynamo, elle est peut être dissipée par effet visqueux.

Finalement la figure 8.9 présente le bilan pour l'énergie magnétique sous-maille. Ici la dissipation magnétique  $-\langle XVIII \rangle$  est en équilibre avec la dynamo sous-maille  $-\langle XIV \rangle$  et les transferts entre énergies magnétiques sur-maille et sous-maille,  $-\langle XXIV \rangle$ . Les

## 8.2 Résultats sur les équilibres énergétiques et transferts associés.

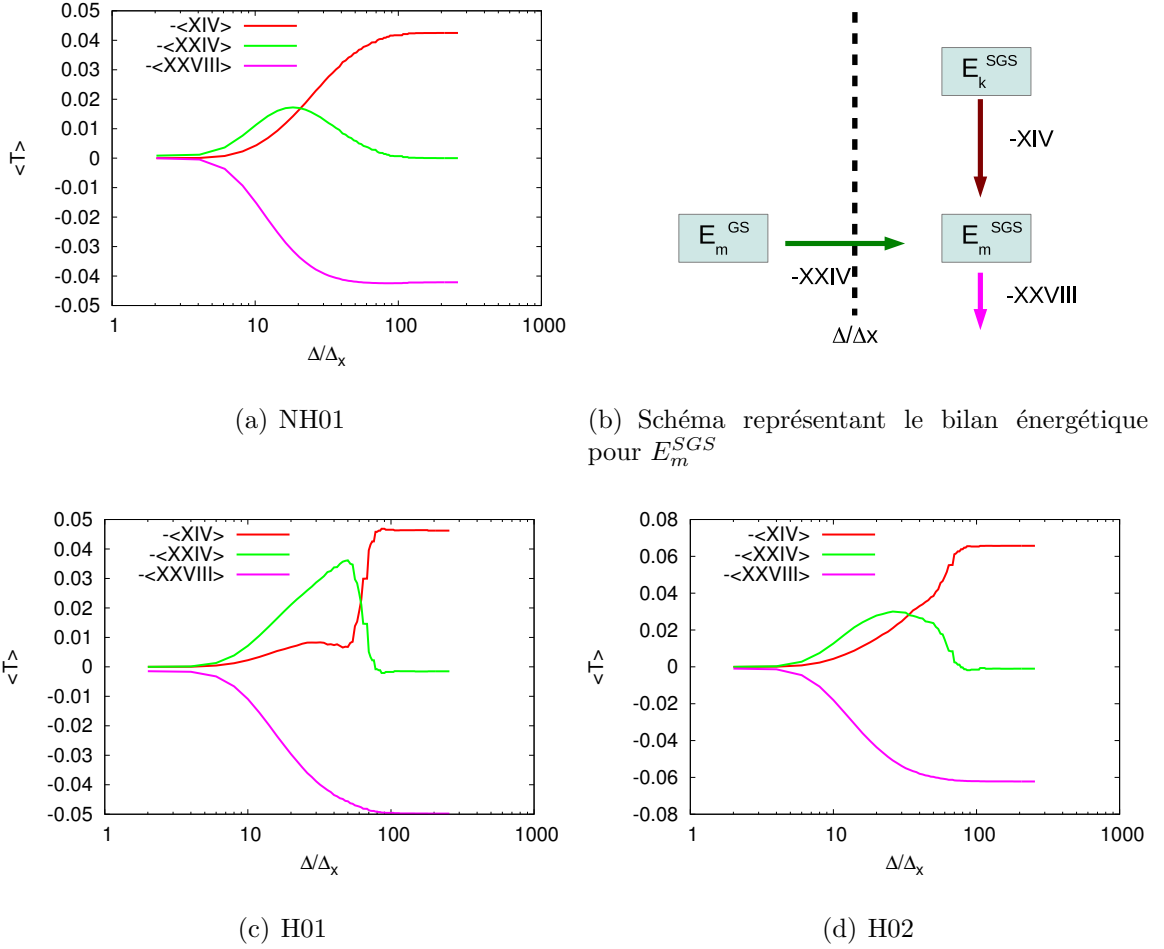


FIGURE 8.9 – Transferts moyens pour l'énergie magnétique sous-maille en fonction de  $\Delta/\Delta_x$  avec  $\Delta$  la taille de filtre et  $\Delta_x$  la résolution spatiale de la DNS. Dans le cas non hélicitaire (respectivement hélicitaire) l'échelle de forçage correspond à  $\Delta/\Delta_x \sim 120$  (respectivement  $\Delta/\Delta_x \sim 80$ ).

termes de dynamo  $-\langle XIV \rangle$  et de transferts sous-mailles  $-\langle XXIV \rangle$  sont positifs, et correspondent donc ici à des termes de production. La dissipation magnétique sous-maille  $-\langle XVIII \rangle$  a un comportement similaire à la dissipation moléculaire sous-maille  $-\langle XVI \rangle$ . En effet, son amplitude est faible au début, et augmente rapidement avec la taille de filtre, pour compenser l'injection d'énergie qui provient des grandes échelles grâce au terme  $-\langle XXIV \rangle$ , ainsi que celle qui provient de l'effet dynamo  $-\langle XIV \rangle$ . Ainsi, là encore, l'hypothèse d'un équilibre même global de type "production sous-maille égale dissipation moléculaire" n'est pas valide.

### 8.2.3 Équilibre local

Dans la section précédente nous avons effectué une analyse global des transferts, cette analyse nous a permis de tirer plusieurs conclusions qui permettent de mieux comprendre le rôle énergétiques des tenseurs sous-mailles qui doivent être modéliser en LES. Ainsi, comme dans le cas d'une turbulence hydrodynamique, il a été observé que ces termes



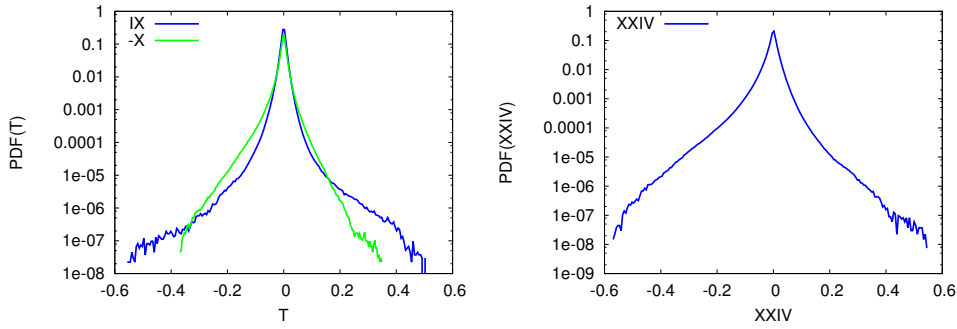


FIGURE 8.10 – Fonction de densité de probabilité(PDF) des échanges entre échelles sur-maillages et sous-maillages pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique (droite) pour une taille de filtre donnée,  $\Delta/\Delta_x = 8$ , dans le cas *NH01*.

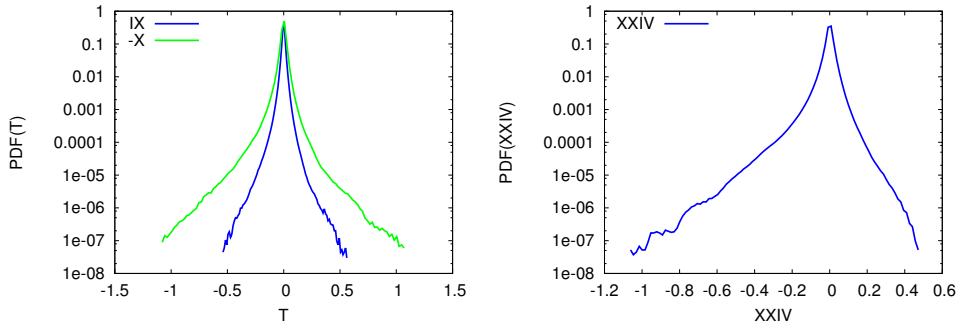


FIGURE 8.11 – Fonction de densité de probabilité(PDF) des échanges entre échelles sur-maillages et sous-maillages pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique (droite) pour une taille de filtre donnée,  $\Delta/\Delta_x = 8$ , dans le cas *H01*.

conduisent globalement à des transferts directs des grandes vers les petites échelles, validant des hypothèses de type viscosité ou diffusivité magnétique sous-maille pour les modéliser. Par contre, aux échelles sous-maillages, les équilibres sont plus complexes qu'en turbulence hydrodynamique. En effet, les termes de transferts de type "dynamo" ne permettent plus un équilibre de type "production sous-maille égal à la dissipation moléculaire". Finalement, il a également été observé que la production sous-maille d'énergie cinétique peut avoir deux sources (la force de Lorentz et le terme d'advection) et que l'importance relative de chacune de ces sources dépendait de la configuration de l'écoulement.

Au-delà de cette analyse globale, une analyse locale peut également conduire à des informations importantes pour l'analyse de modèles sous-maillages. Cette analyse locale est menée avec deux objectifs, (i) avoir une description locale des termes de production sous-maille (termes *IX*, *-X* et *XXIV*), en particulier en ce qui concerne le sens des transferts et (ii) évaluer si les équilibres globaux en sous-maille se vérifient également localement. Ainsi, dans un premier temps, afin de décrire localement le comportement des termes de production sous-maille, les figures 8.10, 8.11 et 8.12 représentent les PDF (probability density function) des termes *IX*, *-X* et *XXIV* pour  $\Delta/\Delta_x = 8$ . Comme nous pouvions nous y attendre, les transferts d'énergie sont essentiellement directs, néanmoins des inversions sont observées localement. Nous pouvons également remarquer que ces PDF

## 8.2 Résultats sur les équilibres énergétiques et transferts associés.

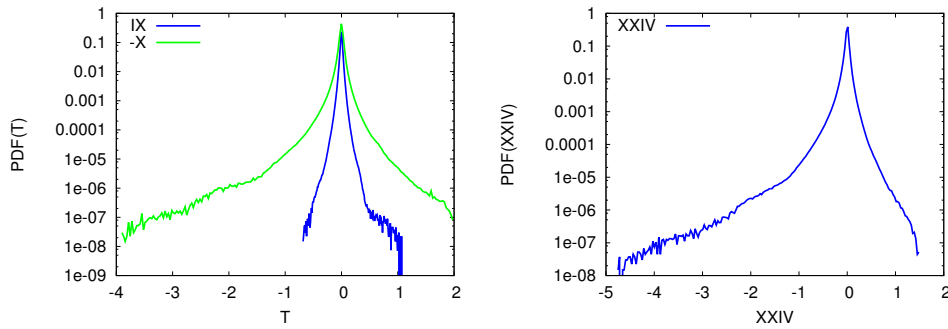


FIGURE 8.12 – Fonction de densité de probabilité(PDF) des échanges entre échelles sur-maillages et sous-maillages pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique (droite) pour une taille de filtre donnée,  $\Delta/\Delta_x = 8$ , dans le cas *H02*.

ne sont pas symétriques, l'allure des parties positives, représentant les transferts inverses, étant différentes de celles des parties négatives, associées aux transferts directs, pour les trois configurations. Le fait que la queue de la partie positive décroisse généralement plus rapidement que la partie négative montre d'une part que les phénomènes inverses sont moins fréquents que les transferts directs, et d'autre part que les transferts entre échelles sur-maillages et sous-maillages sont des phénomènes intermittents.

Dans le cas non hélicitaire *NH01* les transferts entre énergies cinétiques sur-maille et sous-maille sont similaires, comme le montrent les PDF des termes *IX* et *-X*. En revanche dans le cas hélicitaire *H01*, la force de Lorentz domine le terme d'advection, aussi bien pour les transferts directs que pour les transferts inverses d'énergie. Finalement dans le cas *H02*, l'effet du terme *-X* est nettement plus intermittent que pour les autres configurations.

En ce qui concerne les transferts d'énergie magnétique entre échelles sur-maillages et sous-maillages, les figures 8.10, 8.11 et 8.12 montrent que dans le cas non hélicitaire, la partie négative de la PDF décroît nettement moins vite que dans les cas hélicitaires. Par ailleurs, le cas *H02* montre des extrema nettement plus importants que les autres configurations.

Comme nous l'avons dit, un autre intérêt d'une étude locale des transferts et d'observer si les équilibres globaux se vérifie localement, puisque ce sont des hypothèses qui constituent les points de départ de certains modèles. Ainsi, dans la section précédente, nous avons montré que du point de vue de l'énergie cinétique sous-maille, l'injection d'énergie liée aux termes  $-\langle IX \rangle$  et  $\langle X \rangle$  était compensée par la dissipation moléculaire sous-maille,  $-\langle XVI \rangle$ , ainsi que par la dynamo  $\langle XIV \rangle$ . On a alors un équilibre global qui s'écrit sous la forme :

$$-\langle IX \rangle + \langle X \rangle = -\langle XIV \rangle + \langle XVI \rangle,$$

pour des tailles de filtres plus petites que l'échelle de forçage. Nous allons à présent montrer qu'une vision basée sur un équilibre local tel que  $-IX + X = -XIV + XVI$  est erronée.

Pour évaluer la validité de l'hypothèse d'équilibre locale, des PDF jointes peuvent être utilisées [34]. Si *A* et *B* sont deux champs de l'écoulement bornés respectivement par  $[a_0; a_1]$  et  $[b_0; b_1]$ . La PDF jointe consiste à calculer la probabilité (normée) pour tout couple  $(a; b)$  de l'espace  $[a_0; a_1] \times [b_0; b_1]$ . Si  $A = B$ , seul les couples  $(a; b)$  tel que  $a = b$

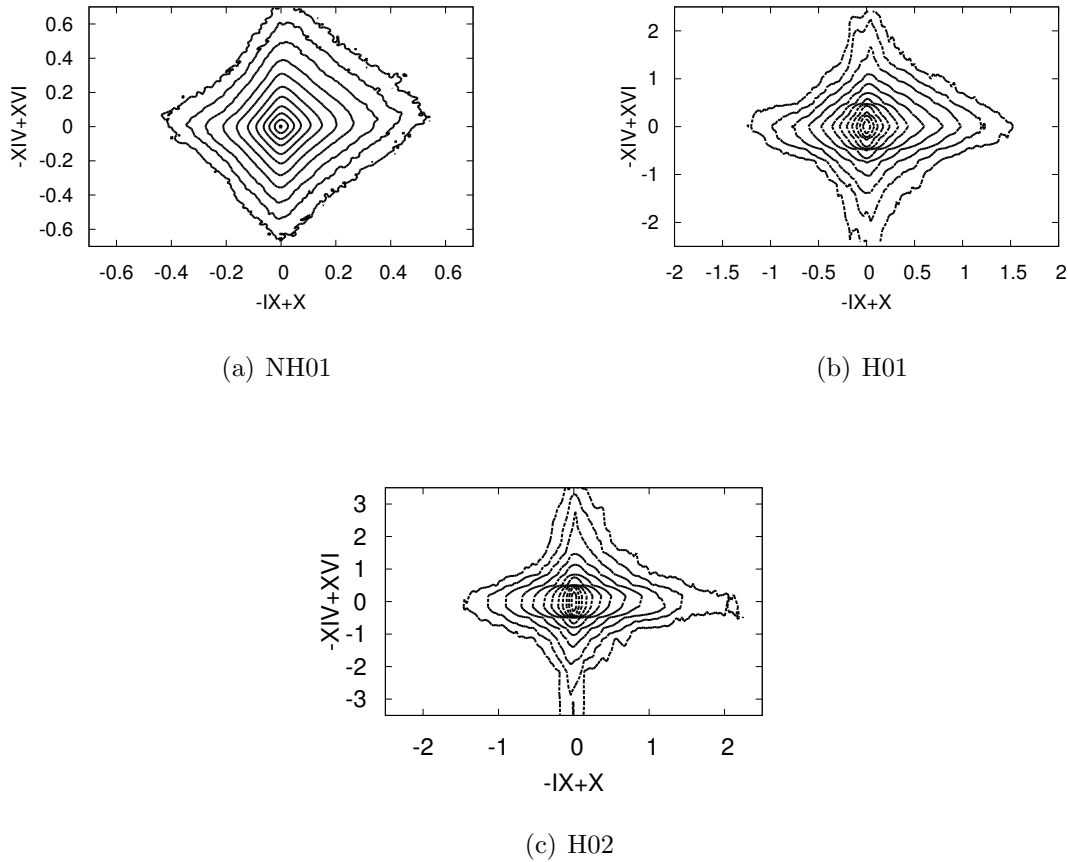


FIGURE 8.13 – Représentation des iso-contours des valeurs des PDF jointes de  $-IX+X$  et  $XVI-XIV$  pour les trois configurations. Les isocontours sont espacés logarithmiquement. Les résultats sont présentés pour une taille de filtre telle que  $\Delta/\Delta_x = 8$ .

seront de probabilité non nulle. Ainsi la PDF jointe de  $-IX+X$  et de  $XVI-XIV$  est illustrée à la figure 8.13 pour les trois configurations d'écoulement. Ces figures montrent les iso-contours des valeurs de la PDF jointe avec un pas logarithmique. Pour les trois configurations, les iso-contours s'écartent assez nettement de la droite  $x=y$ , synonyme d'égalité entre les deux quantités. Ainsi, l'équilibre global ne se vérifie pas localement. On voit même qu'il y a une probabilité non-négligeable d'avoir  $-IX+X$  et  $XVI-XIV$  de signe opposé. Cela montre que localement,  $-IX+X$  et  $XVI-XIV$  peuvent tous les deux jouer le rôle de "source" ou de "puits" d'énergie cinétique sous-maille.

Par ailleurs, nous avons également constaté un équilibre global pour l'énergie magnétique sous-maille. Les apports en énergie viennent des grandes échelles via le terme  $-\langle XXIV \rangle$  ainsi que de l'énergie cinétique sous-maille via le terme de dynamo  $\langle -XIV \rangle$ . L'énergie est ensuite dissipé du fait de la diffusivité magnétique, à travers un terme de dissipation,  $\langle -XXVIII \rangle$ . L'équilibre global s'exprime alors sous la forme suivante :

$$-\langle XIV \rangle - \langle XXIV \rangle = \langle XXVIII \rangle.$$

Un équilibre local supposerait que l'égalité  $-XIV - XXIV = XXVIII$  soit vérifiée en

## 8.2 Résultats sur les équilibres énergétiques et transferts associés.

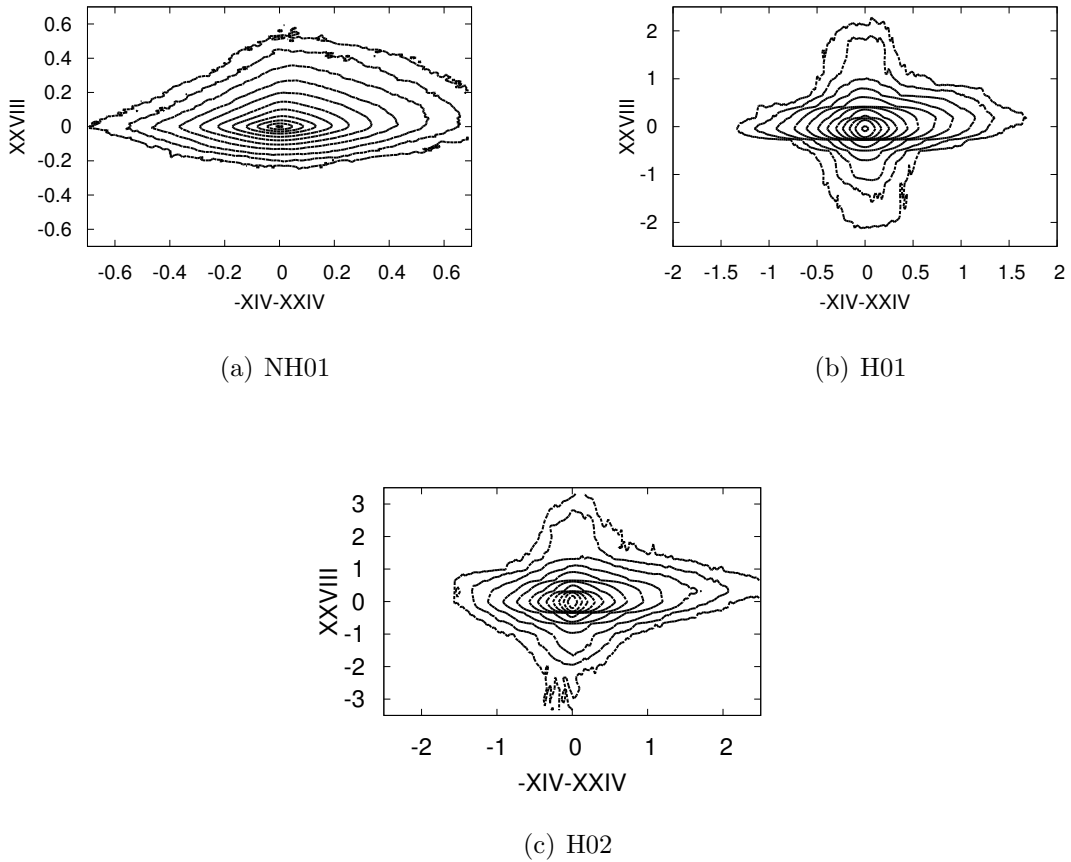


FIGURE 8.14 – Représentation des iso-contours des valeurs des PDF jointes de  $-XIV - XXIV$  et  $XXVIII$  pour les trois configurations. Les isocontours sont espacés logarithmiquement. Les résultats sont présentés pour une taille de filtre telle que  $\Delta/\Delta_x = 8$ .

tout point de l'espace.

La figure 8.14 présente alors la PDF jointe des termes  $-XIV - XXIV$  et  $XXVIII$  pour les trois configurations d'écoulement. On voit de nouveau, comme pour l'énergie cinétique sous-maille, que l'allure des PDF jointes est éloignée d'une courbe telle que  $x = y$ . Les deux quantités sont donc localement différentes, démontrant que l'équilibre observé globalement n'est pas vérifié localement. À nouveau les termes  $-XIV - XXIV$  et  $XXVIII$  peuvent être localement de signes opposés. Ces termes peuvent agir simultanément comme des termes "sources", ou des "puits" d'énergie magnétique sous-maille.

Le dernier point que nous souhaitons aborder ici, concerne la modélisation des tenseurs  $\tau^u$  et  $\tau^b$ . Ces deux tenseurs sont souvent considérés comme un seul et même tenseur :  $\tau^{u-b} = \tau^u - \tau^b$  pour la modélisation. C'est notamment ce qui est fait pour les modèles SLM et CHM. L'hypothèse qui est faite ici dans ce cas consiste à dire que les deux tenseurs ont des formes identiques. D'un point de vue énergétique, cela signifierai que les termes  $IX$  et  $-X$  ont également des structures identiques. Pour vérifier la validité de cette hypothèse, nous introduisons les termes adimensionnés  $IX'$  et  $X'$ ,

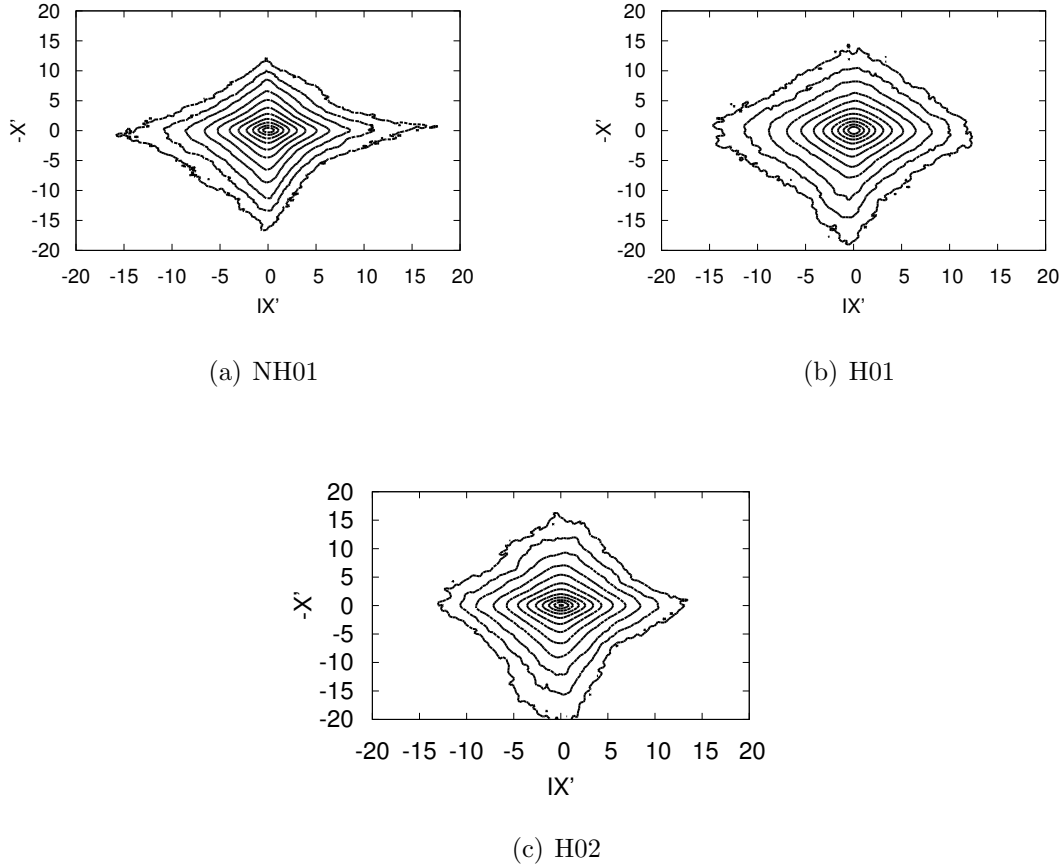


FIGURE 8.15 – Nous représentons ici les PDF jointes des termes  $IX'$  et  $-X'$  pour les trois configurations. Ici  $IX' = \frac{IX - \langle IX \rangle}{\sigma(IX)}$  où  $\sigma(IX)$  est l'écart type de  $IX$ , et  $-X' = \frac{-X + \langle X \rangle}{\sigma(-X)}$ . Les résultats sont présentés pour une taille de filtre telle que  $\Delta/\Delta_x = 8$ .

$$IX' = \frac{IX - \langle IX \rangle}{\sigma(IX)} \quad (8.2)$$

$$-X' = \frac{-X + \langle X \rangle}{\sigma(-X)}. \quad (8.3)$$

Ici nous avons retranché les valeurs moyennes des termes  $IX$  et  $X$ , et avons adimensionné ces termes par leur écart type, noté  $\sigma$ . Nous avons réalisé ceci pour une taille de filtre donné,  $\Delta/\Delta_x = 8$ . Afin de déterminer si ces deux termes de transferts ont la même structure, nous avons tracé les PDF jointes de  $IX'$  et  $-X'$  sur la figure 8.15. L'allure des PDF jointes est de nouveau éloigné d'une droite de type  $x = y$ . Ceci montre que les termes  $IX'$  et  $-X'$  sont complètement décorrélés l'un de l'autre. Il apparaît alors clairement que ces deux termes adimensionnés ont des structures différentes pour chacune des trois configurations. Il est donc nécessaire de fournir des modèles appropriés pour chacun des tenseurs  $\tau^u$  et  $\tau^b$ , si l'on souhaite prédire du mieux possible les transferts entre énergie cinétique sur-maille et énergie cinétique sous-maille. Concrètement, dans l'hypothèse où l'on dispo-

## 8.2 Résultats sur les équilibres énergétiques et transferts associés.

---

serai d'un modèle idéal pour le tenseur sous-maille de Reynolds,  $\tau^u$ , il ne suffit donc pas de simplement inclure les termes magnétiques dans la procédure dynamique pour modéliser le tenseur de Maxwell<sup>1</sup>. Un travail spécifique est donc nécessaire au développement de modèles de turbulence pour la force de Lorentz.

---

1. C'est ce qui a été fait par Agullo *et al* [1] pour le modèle SLM.



## CHAPITRE 9

# ÉVALUATION DES PERFORMANCES DES MODÈLES DE TURBULENCE

Dans le chapitre 8 nous avons réalisé trois DNS, puis nous avons étudié les transferts d'énergie cinétique et magnétique à l'aide du formalisme des SGE pour ces trois configurations. Ceci est le point de départ de l'étude que nous allons réaliser ici. Nous avons notamment montré que pour l'ensemble de nos bases de données, bien que les transferts d'énergie entre échelles résolues et échelles sous-mailles soit globalement directs, ces transferts peuvent également être inverses localement. Par ailleurs, selon les configurations d'écoulements considérées, les comportements relatifs des tenseurs de Reynolds et Maxwell peuvent changer. En effet, nous avons constaté que les transferts liés au tenseur de Maxwell pouvaient dominer les transferts sous-mailles d'énergie cinétique pour les configurations hélicitaires.

Nous cherchons dans ce dernier chapitre à vérifier la capacité des modèles à bien reproduire les transferts sous-mailles d'énergie cinétique et magnétique. Nous allons donc réaliser des tests a priori et a posteriori pour les quatre familles de modèles introduit dans le chapitre 6 (CHM, GM, SLM et MGSLM). Afin de simplifier le raisonnement nous appliquerons la démarche tests 'a priori + a posteriori' à une configuration classique (cas non-hélicitaire) dans un premier temps, avant de traiter la configuration  $H01$ , puis nous finirons par la seconde configuration hélicitaire ( $H02$ ).

## 9.1 Configuration non-hélicitaire (NH01)

### 9.1.1 Test a priori

**Flux globaux** Les modèles sous-mailles sont d'abord évalués à l'aide de tests a priori dans le cas non-hélicitaire. La figure 9.1 montre les transferts sous-mailles d'énergie prédits par différents modèles à partir de la DNS filtrée. Il s'agit ainsi de filtrer les champs DNS et d'évaluer à partir de ces champs filtrés la prédiction des différents transferts par les différents modèles. Ces transferts sont ainsi représentés en fonction de la taille de filtre. Les transferts d'énergie cinétique sont représentés à gauche et les transferts d'énergie magnétiques sont à droite. Les transferts exacts sont également représentés afin de les



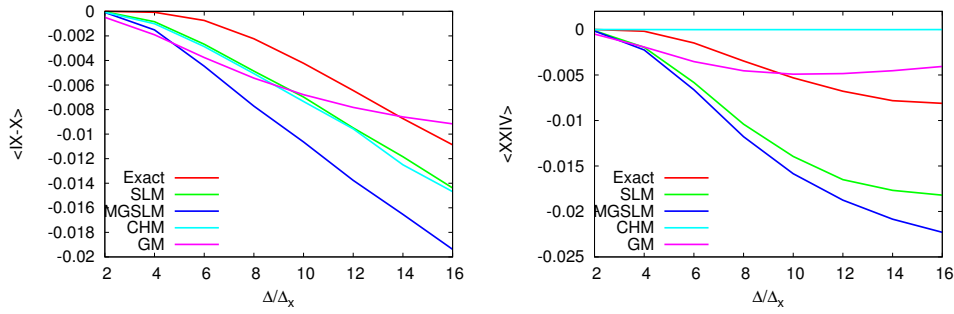


FIGURE 9.1 – Transferts sous-maillles moyens prédit par les modèles en fonction de la taille de filtre, pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique (droite), dans le cas non hélicitaire. Les termes exacts sont montrés pour comparaison.

comparer aux prédictions des différents modèles. D'une façon générale, lorsque l'intensité d'un transfert prédit par un modèle est plus importante que celle du transfert exact, on parle de sur-estimation des transferts, qui est associée à une sur-dissipation sous-maille d'énergie de la part du modèle.

Nous pouvons dans un premier temps remarquer que pour de grandes tailles de filtres, le modèle du gradient mène à une sous-dissipation d'énergie cinétique et magnétique. Ce type de comportement peut mener à des simulations numériques instables. Ce comportement est connu en hydrodynamique [38], ainsi que pour le transport d'un scalaire passif [9]. Inversement, les SLM et MGSLM prédisent à toutes les tailles de filtres des sur-dissipations d'énergie cinétique et magnétique, ce qui pourrait modifier l'équilibre énergétique lors de la réalisation d'une LES. Finalement, le CHM prédit une intensité des transferts d'énergie cinétique similaire au SLM. En revanche, ce modèle ne prédit pas de dissipation d'énergie magnétique. Ce comportement du CHM fut déjà observé par Müller et Carrati [69], qui précisaient que lors de la réalisation d'une LES à l'aide de ce modèle, le manque de dissipation sous-maille d'énergie magnétique était compensé par l'action de la force de Lorentz à travers le terme d'échange entre énergie cinétique sur-maille et énergie magnétique sur-maille ( terme  $IV$  ). Néanmoins, ce processus devrait mener à une modification de l'équilibre énergétique des LES par rapport à celui des DNS.

Afin d'approfondir l'évaluation de la capacité prédictive des modèles les termes  $\langle IX \rangle$  et  $\langle -X \rangle$  sont étudiés séparément. C'est ce qu'illustre la figure 9.2. Dans le cas présent, les termes exacts  $\langle IX \rangle$  et  $\langle -X \rangle$  ont des amplitudes similaires (pour  $\Delta/\Delta_x < 8$ ). Les modèles devraient donc proposer des amplitudes similaires pour chacun des transferts modélisés. C'est globalement le cas pour les modèles GM, CHM et SLM. Néanmoins la dissipation prédite par le MGSLM est nettement plus importante pour le terme  $\langle -X \rangle$  que pour le terme  $\langle IX \rangle$  (pour  $\Delta/\Delta_x < 8$ ). La sur-dissipation observée pour la somme des termes  $\langle IX - X \rangle$  provient donc essentiellement ici d'une mauvaise modélisation du terme  $-\langle X \rangle$ . Par ailleurs nous remarquons également que, bien que l'écart soit faible, le CHM prédit une dissipation moins importante que le SLM pour le terme  $\langle IX \rangle$ , tandis que l'inverse est observé pour le terme  $\langle -X \rangle$ . Cette subtilité dans les comportements des modèles CHM et SLM n'était pas observée sur la figure 9.1 (gauche), pour laquelle les deux modèles prédisaient la même dissipation sous-maille globale d'énergie cinétique.

## 9.1 Configuration non-hélicitaire (NH01)

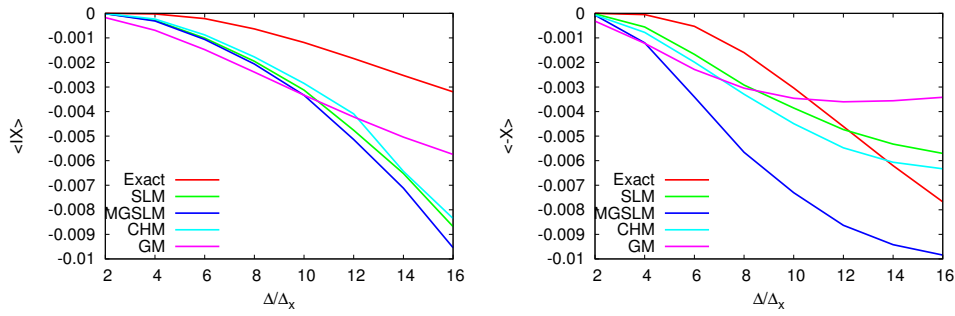


FIGURE 9.2 – Transferts sous-maillages moyens prédit par les modèles en fonction de la taille de filtre, pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique (droite), dans le cas non hélicitaire. Le terme exact est montré pour comparaison.

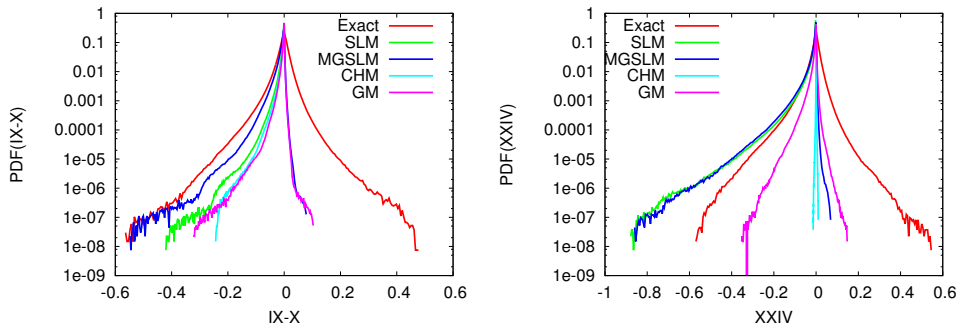


FIGURE 9.3 – Fonction de densité de probabilité (PDF) des transferts sous-maillages pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique (droite) pour  $\Delta/\Delta_x = 8$  dans le cas non-hélicitaire. Nous comparons ici les transferts modélisés aux termes exacts.

**PDF** Au-delà de l'analyse globale qui vient d'être faire, le comportement local des modèles peut être évalué. Ainsi, la figure 9.3 montre les PDF des transferts sous-maillages prédits par les modèles pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique (droite), pour  $\Delta/\Delta_x = 8$ . Les PDF des transferts exacts sont également représentées pour pouvoir comparer aux prédictions. Dans un premier temps les transferts d'énergie cinétique sont considérés. Comme nous nous y attendions, les modèles SLM et CHM sont des modèles purement dissipatifs, et ne prédisent donc aucun transfert inverse. D'un autre côté, le MGSLM et le GM prédisent des transferts inverses, mais la partie positive de la courbe décroît plus rapidement pour les modèles que pour le terme exact, ce qui dénote une forte sous-estimation des transferts inverses par ces modèles. De plus, tous les modèles prédisent une décroissance plus rapide de la partie négative de la PDF en comparaison au transfert exact. Ceci montre l'incapacité de ces modèles à reproduire correctement l'intermittence des transferts sous-maillages d'énergie cinétique. Le MGSLM est le modèle le plus proche du transfert exact, tandis que le CHM prédit la plus faible amplitude pour les transferts directs.

En ce qui concerne les transferts sous-maillages d'énergie magnétique, le SLM apparaît également comme un modèle purement dissipatif, comme nous nous y attendions. Tous les autres modèles, MGSLM, CHM et GM, sont capables de prédire des transferts inverses,

mais nettement plus faible en intensité que les transferts exacts. Le CHM prédit une très faible amplitude de transferts (directs et inverses), ce qui explique l'absence de transferts moyens pour ce modèle. Le modèle GM prédit une amplitude plus élevée que le modèle CHM, aussi bien pour les transferts directs que les transferts inverses, néanmoins les prédictions fournies par ce modèle restent plus faibles que le terme exact. Inversement, les transferts directs sont fortement sur-estimés par le SLM et le MGSLM, avec des PDF qui présentent des parties négatives plus élevées pour les modèles que pour le terme exact. Ces deux modèles prédisent donc une intermittence spatiale plus importante en comparaisons aux transferts exacts, ce qui peut modifier la dynamique de l'écoulement lors de la réalisation de LES.

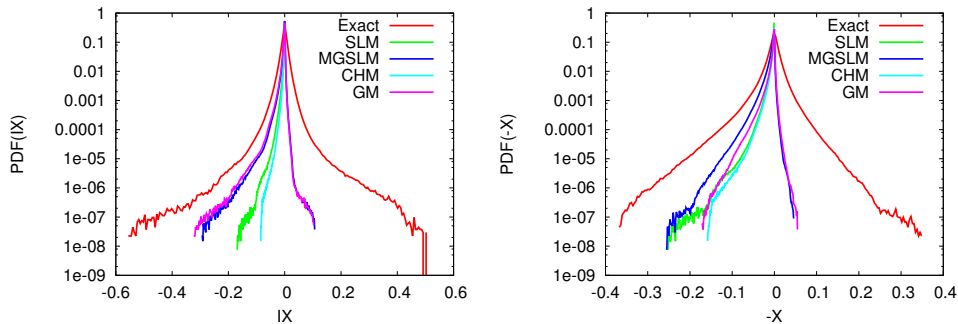


FIGURE 9.4 – Fonction de densité de probabilité (PDF) des transferts sous-maillages pour le terme  $IX$  (gauche) et le terme  $X$  (droite) pour  $\Delta/\Delta_x = 8$  dans le cas non-hélicitaire. Nous comparons ici les transferts modélisés aux termes exacts.

La figure 9.4 présente finalement les PDF des termes  $IX$  et  $-X$  pour une taille de filtre  $\Delta/\Delta_x = 8$ . De nouveau, les modèles SLM et CHM sont purement dissipatifs, et les modèles MGSLM et GM prédisent aussi bien des transferts directs qu'inverses. Néanmoins tous ces modèles sous-estiment l'intermittence des transferts aussi bien pour le terme  $IX$  que pour le terme  $-X$ . On peut remarquer que dans le cas du terme  $IX$  les modèles SLM et CHM fournissent les plus mauvaises prédictions, tandis que les performances du MGSLM sont très proches du GM. Dans le cas du terme  $-X$ , le modèle MGSLM est le moins éloigné du terme exact.

### 9.1.2 Test a posteriori

Pour compléter l'évaluation des performances des modèles sous-maillages, nous réalisons à présent des tests a posteriori. Des LES sont réalisées pour chaque famille de modèles sous-maillages. Les LES sont réalisées sur une grille de  $64^3$  points (la DNS était réalisée sur une grille de  $512^3$  points). Les conditions initiales sont générées à partir d'un champ de la DNS dans le régime saturé, en re-discrétisant ce champ grâce à une interpolation spectrale. Cette interpolation a notamment pour conséquence la suppression des échelles plus petite que la nouvelle taille de maille, et est équivalente à l'usage d'un filtre boîte sur les champs de vitesse et magnétique. Les résultats des LES sont comparés aux résultats obtenus à partir de la DNS filtrée.

La figure 9.5 montre l'évolution temporelle des énergies cinétiques et magnétiques résolues obtenues lors de la réalisation de LES, avec les modèles CHM et GM ainsi

## 9.1 Configuration non-hélicitaire (NH01)

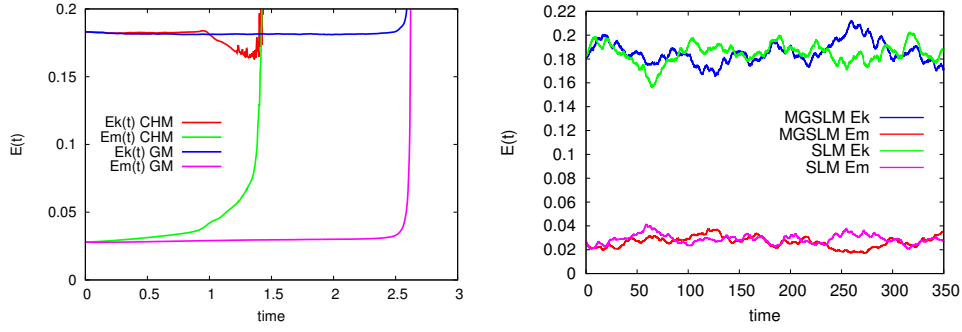


FIGURE 9.5 – Évolution temporelle des énergies cinétique et magnétique résolues dans le cas non-hélicitaire, pour les LES réalisées à l’aide du CHM, GM (gauche), SLM et MGSML (droite).

que SLM et MGSML (droite). Les LES réalisées à l’aide des modèles CHM et GM mènent à des simulations instables, et présentent rapidement une importante croissance des énergies cinétique et magnétique résolues. Ce comportement est bien connu pour le GM aussi bien pour des écoulements hydrodynamiques [97], que pour des écoulements magnétohydrodynamiques [69]. Ceci est dû à une sous-estimation locale des transferts directs, ainsi qu’à la présence locale de transferts inverses, aussi bien pour l’énergie cinétique que pour l’énergie magnétique, comme nous l’avons observé lors des tests a priori.

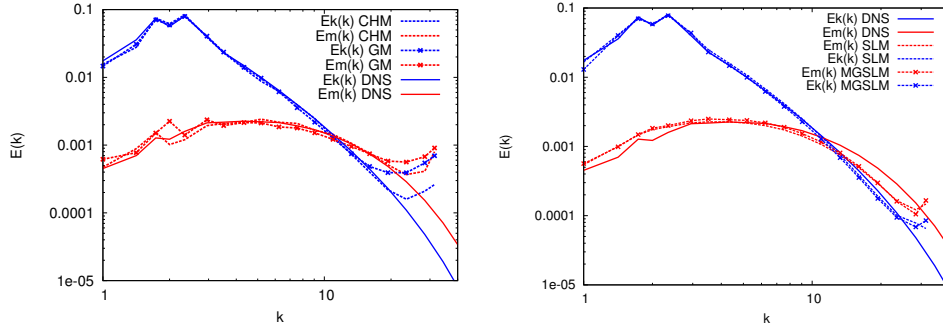


FIGURE 9.6 – Spectres des énergies cinétique,  $E_k(k)$ , et magnétique,  $E_m(k)$ . Comparaison entre les résultats des DNS et des LES réalisées avec les modèles CHM et GM (gauche), SLM et MGSML (droite). Les spectres sont présentés à  $t = 0.75$  pour le cas du CHM, et à  $t = 2.5$  pour le modèle GM. Les spectres sont moyennés temporellement pour les SLM et MGSML.

La figure 9.6 présente les spectres d’énergie cinétique et magnétique obtenus lors de la réalisation de LES. Ces spectres sont comparés aux spectres obtenus à partir des DNS. Les résultats sont présentés pour les modèles CHM et GM (à gauche) et SLM et MGSML à droite. Ainsi, on observe que dans le cas des modèles CHM et GM, la croissance des énergies observée sur la figure 9.5 est d’abord initiée par une accumulation d’énergie aux petites échelles des spectres d’énergie cinétique et magnétique. Cette accumulation d’énergie caractérise le comportement instable du modèle GM via la génération de fluctuations non-physiques aux petites échelles. En ce qui concerne le modèle CHM, il mène

à une accumulation d'énergie magnétique dès le début de la simulation, comme le montre la figure 9.5. Ceci est directement lié aux résultats des tests a priori qui démontrent que ce modèle ne fournit pas de transferts d'énergie magnétique entre échelles sur-maillages et sous-maillages. Ce comportement s'observe également sur les spectres d'énergie magnétique, qui montrent des fortes fluctuations non-physiques aux plus petites échelles accessibles en LES (figure 9.6). Les fluctuations non-physiques de l'énergie magnétique résolue finissent par perturber l'énergie cinétique résolue, menant à une simulation numérique instable. Le processus évoqué par Müller et Carrati [69] n'est alors pas suffisant pour compenser l'accumulation d'énergie magnétique dans le cas présent.

Inversement, l'utilisation des modèles SLM et MGSLM permet la réalisation de LES stables. En effet, les énergies magnétiques et cinétiques résolues sont proches des valeurs de la DNS filtrée (qui correspondent à la valeur initiale,  $t = 0$ , sur la figure 9.6). La figure 9.6 (droite) montre les spectres d'énergie cinétique et magnétique pour chaque modèle, comparés aux résultats de la DNS. Cependant nous constatons que les spectres d'énergie magnétique obtenus grâce à la réalisation des LES sont plus faible en intensité que ceux de la DNS, notamment aux petites échelles résolues. Ce comportement est probablement lié à la sur-estimation du transfert d'énergie magnétique entre échelles sur-maillages et sous-maillages observée lors des tests a priori pour ces modèles.

## 9.2 Configuration hélicitaire sans modèle d'hypodiffusivité (H01)

La seconde configuration d'écoulement est à présent considérée. Ce cas est principalement dominé par l'énergie magnétique, avec une cascade inverse aux grandes échelles et une importante quantité d'hélicité. Compte tenu de l'incapacité des modèles CHM et GM à réaliser des LES stables en absence d'hélicité, nous n'évaluerons que les performances des modèles SLM et MGSLM pour cette seconde configuration.

### 9.2.1 Test a priori

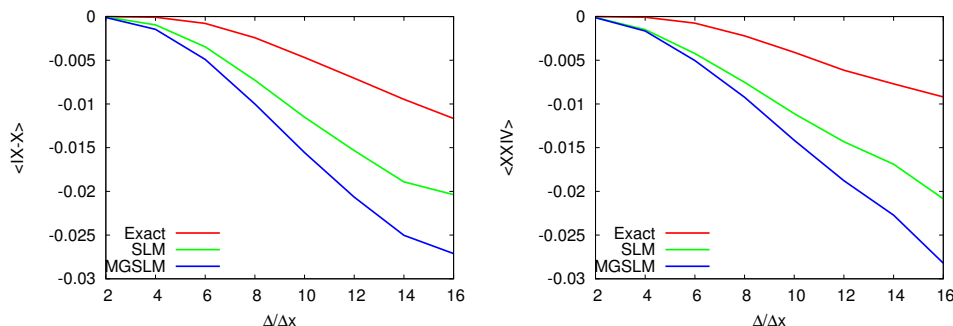


FIGURE 9.7 – Transferts sous-maillages moyens prédit par les modèles en fonction de la taille de filtre, pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique (droite), dans le cas premier cas hélicitaire (H01). Les termes exacts sont montrés pour comparaison.

## 9.2 Configuration hélicitaire sans modèle d'hypodiffusivité (H01)

**Flux globaux** Les modèles SLM et MGSLM sont d'abord évalués au travers de test a priori. Les flux sous-maillages d'énergie cinétique et magnétique prédits par les modèles sont évalués pour différentes tailles de filtre et sont comparés avec les résultats de la DNS filtrée sur la figure 9.7. Au même titre que pour la configuration non hélicitaire, nous constatons une large sur-estimation de l'intensité des transferts pour chaque modèle, la plus forte sur-estimation étant de nouveau trouvée pour le MGSLM.

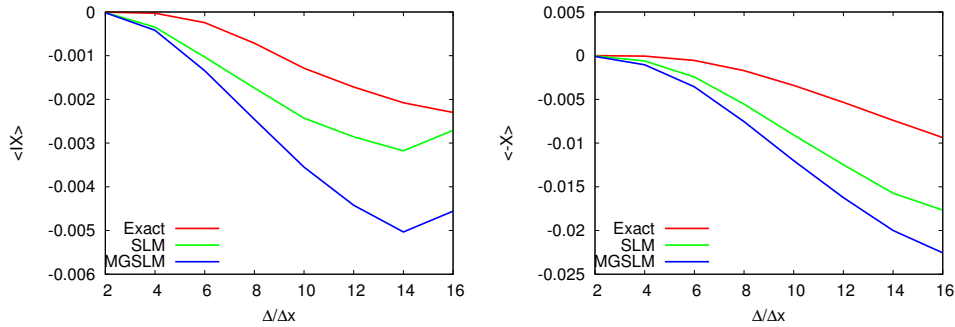


FIGURE 9.8 – Transferts sous-maillages moyens prédit par les modèles en fonction de la taille de filtre, pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique(droite), dans le premier cas hélicitaire(H01). Le terme exact est montré pour comparaison.

Nous avons à nouveau séparé les termes  $\langle IX \rangle$  et  $\langle -X \rangle$  comme le montre la figure 9.8. Comme pour les termes  $\langle IX - X \rangle$  et  $\langle XXIV \rangle$ , les deux modèles, SLM et MGSLM sur-estiment les transferts sous-maillages d'énergie cinétique. Contrairement au cas NH01, ici le terme de transfert  $\langle -X \rangle$  exact domine largement les transferts d'énergie cinétique, et est nettement plus important que le terme  $\langle IX \rangle$ . Nous remarquons que les modèles présentent des comportements similaires. En effet, nous pouvons constater que les transferts prédits par les modèles SLM et MGSLM sont nettement plus intenses pour le terme  $\langle -X \rangle$  que pour le terme  $\langle IX \rangle$ . Ceci est dû à la procédure dynamique utilisé pour les deux familles de modèles. Sans la partie magnétique de la procédure dynamique, les transferts  $\langle IX - X \rangle$  seraient sous-estimés.

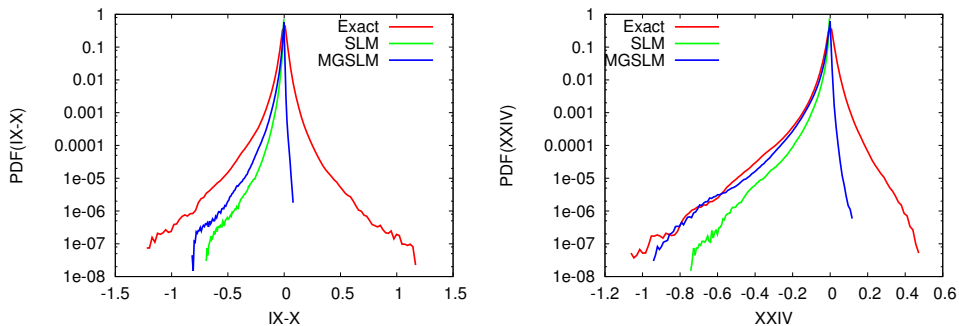


FIGURE 9.9 – Fonction de densité de probabilité (PDF) des transferts sous-maillages pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique(droite) pour  $\Delta/\Delta_x = 8$  dans le premier cas hélicitaire. Nous comparons ici les transferts modélisés aux termes exacts.

**PDF** Pour analyser localement les modèles, les PDF des transferts sous-mailles prédits par les modèles pour les énergie cinétique (gauche) et magnétique (droite) sont représentés sur la figure 9.9, et comparées avec les résultats de la DNS filtrée. Comme évoqué précédemment (chapitre 8), du fait d’une domination de l’énergie magnétique, les transferts sous-mailles exacts d’énergie cinétique liés à la force de Lorentz ainsi que les transferts sous-mailles d’énergie magnétique sont plus intermittents, avec des fluctuations plus importantes que dans le cas non-hélicitaire. Les modèles sous-mailles ne sont pas capable de reproduire ces comportements et les PDF des transferts prédits par le SLM et le MGSLM dans le cas hélicitaire sont très proches des PDF obtenues dans le cas non-hélicitaire. Pour les transferts d’énergie cinétique, ceci implique que les modèles ne sont pas capables de reproduit les transferts directs les plus intenses, alors que nous avons vu que le MGSLM était proche des résultats de la DNS dans le cas non-hélicitaire. Étant donné que les modèles sur-estiment le transfert moyen, ils prédisent donc les transferts directs avec une plus faible intermittence, et des fluctuations nettement moins fortes.

La même tendance est trouvée pour les transferts sous-mailles directs d’énergie magnétique prédits par le SLM, contrairement au cas non-hélicitaire, où le modèle prédit un niveau plus élevé de fluctuations en comparaison avec les résultats de la DNS. Le MGSLM est plus proche que le SLM des résultats de la DNS pour les transferts directs, mais sous-estime une nouvelle fois l’intensité des phénomènes inverses.

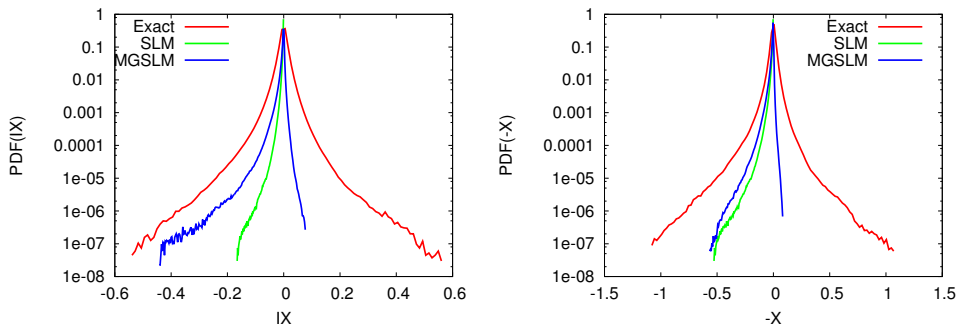
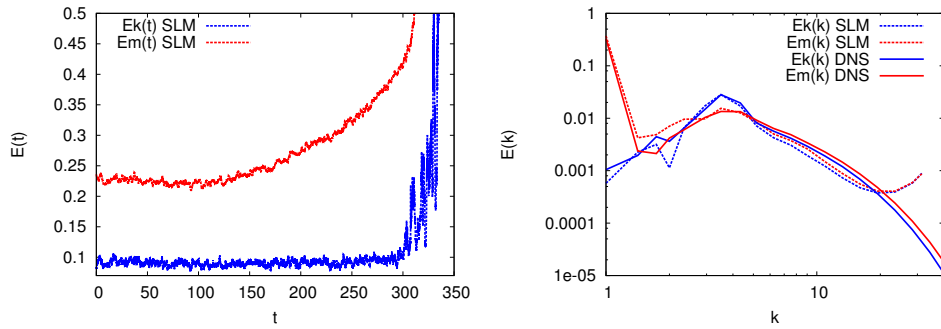


FIGURE 9.10 – Fonction de densité de probabilité (PDF) des transferts sous-mailles pour le terme  $IX$  (gauche) et le terme  $X$  (droite) pour  $\Delta/\Delta_x = 8$  dans le premier cas hélicitaire(H01). Nous comparons ici les transferts modélisés aux termes exacts.

La figure 9.10 représente les PDF des termes  $IX$  (gauche) et  $-X$  (droite) pour un taille de filtre donnée ( $\Delta/\Delta_x = 8$ ). Les résultats sont présentés pour les modèles SLM et MGSLM, et comparés aux termes exacts. L’intermittence des transferts est de nouveau mal reproduite par les modèles de turbulence, aussi bien pour le terme  $IX$  que pour le terme  $X$ . L’amplitude des transferts directes prédite par les modèles SLM et MGSLM est notamment trop faible par rapport aux transferts exacts. Pour les deux cas, c’est le modèle MGSLM qui présente la PDF la plus proche de celle des termes exacts, notamment du fait de la prédiction de transferts inverses par ce modèle. Des différences sont notables entre les résultats associés au terme  $IX$  de ceux associés au terme  $-X$ . Pour les transferts liés à la force de Lorentz, les transferts prédits par le modèle MGSLM sont plus éloignés du terme exact que pour le terme  $IX$ . En revanche les transferts prédits par le modèle SLM sont légèrement plus proches des transferts directs exacts pour le terme  $-X$  que pour le

## 9.2 Configuration hélicitaire sans modèle d'hypodiffusivité (H01)



(a) Évolution temporelle des énergies cinétique et magnétique. (b) Spectres des énergies cinétique et magnétique.

FIGURE 9.11 – Évolution temporelle (gauche) des énergies cinétiques et magnétiques résolues dans le cas hélicitaire, pour des LES réalisées avec les modèles SLM. Densité spectrales (droite) des énergies cinétique et magnétique pour une LES (à  $t=150$ ) et une DNS.

terme  $IX$ . Ici les performances des deux modèles ne sont pas similaires pour le terme  $IX$  et le terme  $X$ .

Les résultats des tests a priori montrent une nouvelle fois que les prédictions des modèles s'écartent des évaluations exactes tirées de la DNS, et risquent de mener à des différences sensibles entre les DNS et les LES.

### 9.2.2 Test a posteriori

Pour compléter l'analyse des performances des modèles sous-mailles pour cette configuration d'écoulement, des tests a posteriori sont à présent réalisés, de façon similaire au cas non hélicitaire. Les LES sont réalisées sur une grille composée de  $64^3$  points, en partant d'un état initial extrait des résultats de la DNS dans le régime saturé.

Dans ces tests, les comportements des deux modèles, MGSLM et SLM ont été similaires, nous ne discuterons donc que des résultats du SLM. La figure 9.11 (gauche) montre une évolution des énergies cinétiques et magnétiques résolues pour une LES réalisée avec le modèle SLM. Ce modèle (ainsi que le MGSLM, non montré) mène à une simulation instable, avec une croissance rapide des deux énergies. La figure 9.11 (droite) montre les spectres d'énergie. Pour des échelles intermédiaires, la LES conduit à des spectres d'énergie inférieurs à ceux de la DNS. Ceci est lié à une sur-estimation des transferts d'énergie magnétique et cinétique entre échelles sur-mailles et sous-mailles, comme observé grâce aux tests a priori. Néanmoins, aux plus petites échelles résolues, on note une forte accumulation d'énergie cinétique et magnétique.

Pour comprendre ce comportement, la densité spectrale (PSD) du transfert sous-maille d'énergie magnétique est considérée, aussi bien pour le modèle SLM que pour la DNS filtrée. Ceci permet de quantifier la répartition des transferts au sein des différentes échelles. La figure 9.12 montre la PSD des transferts d'énergie magnétique exacts et modélisés, correspondant au terme  $XXIV$ , pour les configurations hélicitaires et non-hélicitaires. Le comportement instable du modèle dans le cas hélicitaire peut ainsi être expliqué grâce à la combinaison de deux phénomènes. En effet, nous remarquons dans



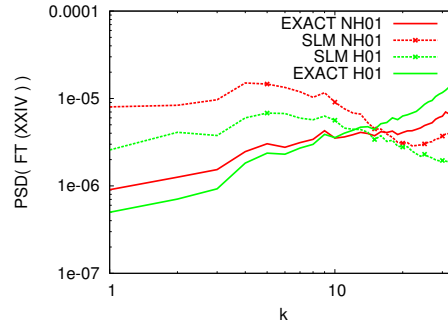


FIGURE 9.12 – Densité spectrale des transferts sous-maillages d’énergie magnétique. Comparaison entre les termes exacts et ceux prédits par le modèle SLM dans les cas non-hélicitaire et hélicitaire (H01).

un premier temps que la PSD du terme exact est plus importante dans le cas hélicitaire que dans le cas non-hélicitaire aux plus petites échelles résolues en LES, tandis que la PSD des termes modélisés est plus importante dans le cas non-hélicitaire que dans le cas hélicitaire. Ceci mène à une forte sous-dissipation aux plus petites échelles résolues dans le cas hélicitaire, en comparaison du cas non-hélicitaire. L’énergie s’accumule donc aux plus petites échelles résolues, menant à une simulation instable. A l’inverse, tant pour le cas hélicitaire que non-hélicitaire, on peut noter que la forte sur-dissipation induite par les modèles se produit principalement aux grandes échelles.

### 9.3 Configuration hélicitaire avec modèle d’hypodiffusivité (H02)

La troisième configuration d’écoulement est à présent considérée. Ce cas présente une quasi équipartition des énergies magnétique et cinétique, une cascade inverse aux grandes échelles, et une forte quantité d’hélicité. La principale différence avec la configuration précédente provient de l’usage d’un modèle d’hypo-diffusivité magnétique qui retire de l’énergie magnétique dans la plus grande échelle via une dissipation. Nous testerons de nouveau uniquement les modèles SLM et MGSLM, pour cette dernière configuration.

#### 9.3.1 Test a priori

**Flux globaux** Les résultats pour les transferts moyens sont similaires aux deux configurations précédentes pour les deux familles de modèles. En effet, nous constatons que pour le SLM et le MGSLM sur-estiment l’intensité des transferts directs d’énergie cinétique et magnétique (figure 9.13). De plus, le MGSLM est à nouveau le modèle qui présente la plus forte sur-dissipation d’énergie.

La figure 9.14 représente les flux liés aux termes  $\langle IX \rangle$  et  $\langle -X \rangle$ . Les conclusions sont identiques à celles observées pour la première configuration hélicitaire. On remarque notamment que les deux modèles sur-estiment les flux liés aux termes  $\langle IX \rangle$  et  $\langle -X \rangle$ . De plus, l’essentiel de la dissipation sous-maille prédite par les les modèles SLM et MGSLM pour le terme  $\langle IX - X \rangle$  est lié à la dissipation prédite pour le terme  $\langle -X \rangle$ .

### 9.3 Configuration hélicitaire avec modèle d'hypodiffusivité (H02)

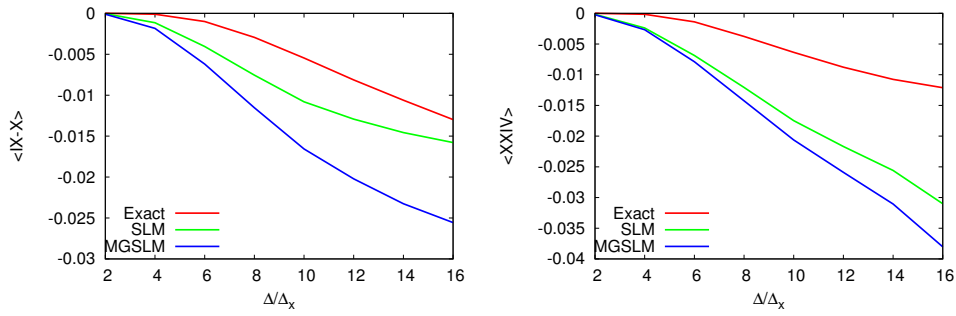


FIGURE 9.13 – Transferts sous-maillages moyens prédit par les modèles en fonction de la taille de filtre, pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique (droite), dans le second cas hélicitaire (H02). Les termes exacts sont montrés pour comparaison.

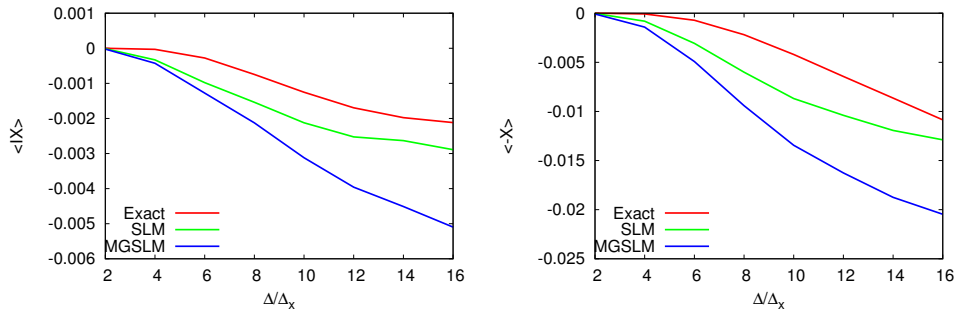


FIGURE 9.14 – Transferts sous-maillages moyens prédit par les modèles en fonction de la taille de filtre, pour le terme  $IX$  (gauche) et le terme  $-X$  (droite), dans le second cas hélicitaire (H02). Les termes exacts sont montrés pour comparaison.

**PDF** Comme pour les précédentes configurations nous présentons sur la figure 9.15 les PDF des termes  $IX - X$  et  $XXIV$  modélisés et exacts pour une taille de filtre donnée. Les résultats présentés pour le terme  $IX - X$  dans le cas  $H02$  sont similaires à ceux présentés pour le cas  $H01$ . En effet, les deux modèles sous-estiment à nouveau l'intermittence des transferts d'énergie cinétique, et le MGSLM reste le modèle le moins éloigné du terme exact. En revanche pour les transferts d'énergie magnétique les résultats sont légèrement différents entre les deux configurations hélicitaires. En effet dans le cas  $H02$  les deux modèles sur-estiment nettement l'intensité des transferts directs d'énergie magnétiques alors que les transferts directs d'énergie magnétiques étaient sous-estimés dans le cas du SLM pour la configuration  $H01$ . Bien que les modèles ne reproduisent pas de façon exact les transferts d'énergie magnétique, le changement de comportement des modèles entre les deux configurations hélicitaires laissent espérer l'observation de LES stables lors de la réalisations de tests a posteriori. Cependant, la sur-estimation des transferts d'énergie par les modèles devrait s'observer sur les spectres d'énergie cinétique et magnétique lors de la réalisation des tests a posteriori.

Finalement nous distinguons les termes  $IX$  et  $-X$ , et nous représentons leur PDF sur la figure 9.16. De même que pour la configuration  $H01$ , les transferts prédits pour les termes  $IX$  et  $-X$  par les modèles SLM et MGSLM dans le cas  $H02$  reproduisent mal l'in-

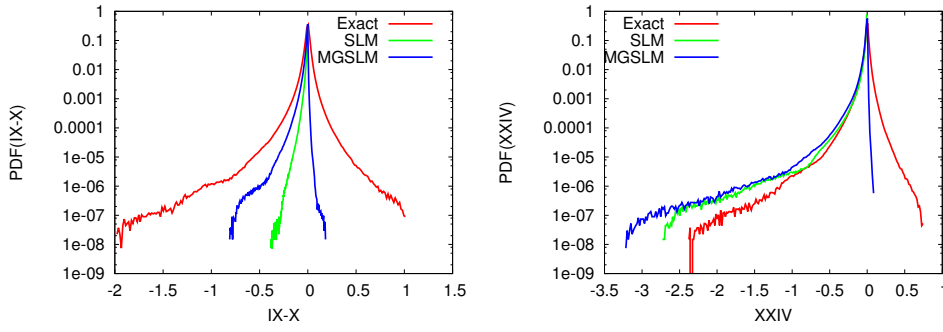


FIGURE 9.15 – Fonction de densité de probabilité (PDF) des transferts sous-maillages pour l'énergie cinétique (gauche) et l'énergie magnétique (droite) pour  $\Delta/\Delta_x = 8$  dans le second cas hélicitaire (H02). Nous comparons ici les transferts modélisés aux termes exacts.

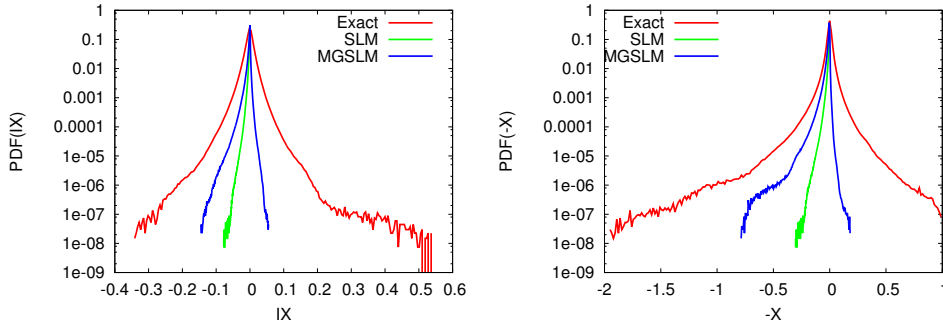


FIGURE 9.16 – Fonction de densité de probabilité (PDF) des transferts sous-maillages pour le terme  $IX$  (gauche) et le terme  $-X$  (droite) pour  $\Delta/\Delta_x = 8$  dans le second cas hélicitaire. Nous comparons ici les transferts modélisés aux termes exacts.

termittence des transferts d'énergie cinétique. De nouveau, nous observons également que ce sont les transferts prédits pour le terme  $-X$  qui présentent la plus forte intermittence.

### 9.3.2 Test a posteriori

Nous finalisons cette étude en réalisant des LES pour la deuxième configuration hélicitaire, à l'aide des modèles SLM et MGSLM. Les LES sont de nouveau réalisées sur une grille composée de  $64^3$  points, en partant d'un état initial extrait des résultats de la DNS dans le régime saturé.

La figure 9.17 montre une évolution des énergies cinétiques et magnétiques résolues pour une LES réalisées avec les modèles SLM (gauche) et MGSLM (droite). Ces modèles mènent à des simulations stables, avec des niveaux d'énergie cinétique et magnétique similaires quelque soit le modèle utilisé. On note cependant un décalage assez important entre le niveau d'énergie prédit par les LES et le niveau d'énergie de la DNS filtrée (que l'on retrouve au temps  $t = 0$  des LES).

La figure 9.18 montre les spectres d'énergie cinétiques et magnétiques obtenues lors de la réalisation des LES avec le modèle SLM (gauche) et le modèle MGSLM (droite). Nous remarquons que l'accumulation d'énergie magnétique aux grandes échelles est plus

### 9.3 Configuration hélicitaire avec modèle d'hypodiffusivité (H02)

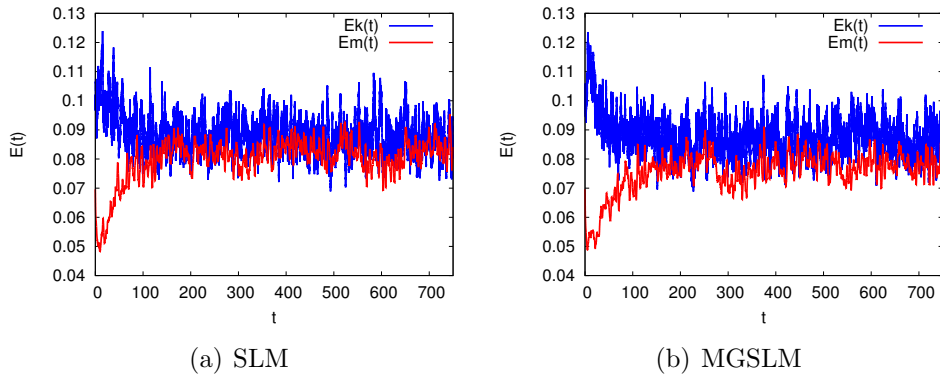


FIGURE 9.17 – Évolution temporelle des énergies magnétique et cinétique résolues, pour des LES réalisées avec le modèle SLM (gauche) et le modèle MGSLM (droite), pour un écoulement hélicitaire en présence d'une hypo-diffusivité magnétique.

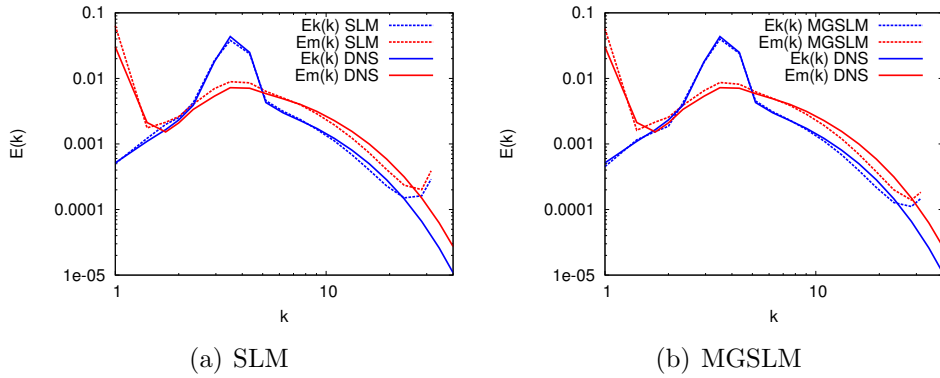


FIGURE 9.18 – Spectres des énergies cinétique et magnétique. Comparaison entre les résultats des DNS et des LES réalisées avec les modèles SLM (gauche), et MGSLM (droite).

importante pour les LES que pour la DNS, ce qui permet d'expliquer la différence de niveau d'énergie entre la DNS filtre et la LES<sup>1</sup>. Pour des échelles intermédiaires, la LES conduit à des spectres d'énergie inférieur à ceux de la DNS. Ceci est lié à une sur-estimation des transferts d'énergie magnétique et cinétique entre échelles sur-maîles et sous-maîles, comme observé grâce aux tests a priori. Néanmoins, aux plus petites échelles résolues, on note une accumulation d'énergie cinétique et magnétique. Ces conclusions sont valables

1. L'origine exact du décalage est pour nous loin d'être limpide. Actuellement nous nous demandons si cette observation est liée à la fiabilité du modèle d'hypodiffusivité ou aux modèles LES. On peut par exemple imaginer que l'une des conséquences des mauvaises prédictions des transferts sous-maîles par les modèles LES soit d'amplifier l'intensité des phénomènes inverses, alimentant ainsi le champ magnétique de grande échelle. La constante du modèle d'hypodiffusivité restant la même, cette situation mènerait alors à un nouvel équilibre énergétique aux grandes échelles. De plus, contrairement au modèles de turbulence utilisés en LES, les modèles d'hypofrictions ne sont jamais évalués en comparaison à un terme exact, et nous ne savons pas dans quelle mesure le niveau d'énergie magnétique aux grandes échelles est réaliste, et si le modèle d'hypodiffusivité utilisé ici adopte une réaction approprié à la physique présente dans l'écoulement.

pour les deux modèles. L'écart entre les spectres LES et DNS aux petites échelles est légèrement plus important dans le cas du modèle MGSLM que pour le cas du modèle SLM. Ceci reste conforme aux observations réalisées a priori pour les flux d'énergie magnétique sous-maille. En effet, cette sur-dissipation est plus importante dans le cas du modèle MGSLM que pour le modèle SLM.

Il est donc possible de réaliser des LES en présence d'une cascade inverse d'énergie magnétique, à condition de traiter convenablement cette dernière. Nous pensons que les résultats observés pour la configuration *H01* ne sont donc pas liés à l'incapacité des modèles de turbulence à prévenir correctement l'accumulation d'énergie magnétiques aux petites échelles, mais à une accumulation massive d'énergie magnétique aux grandes échelles, qui fini par modifier la nature de la cascade turbulente, menant à une accumulation d'énergie aux petites échelles, et à des simulations numériques instables.

**En résumé** Nous avons démontré que deux des modèles présentés dans le chapitre 6 n'étaient pas capables de réaliser des LES, et que ceci pouvait être expliqué à l'aide d'une évaluation a priori des performances de ces deux modèles. Dans le cas du CHM, c'est l'absence de dissipation sous-maille d'énergie magnétique qui mène à des LES instables. Dans le cas du modèle GM, c'est la prédiction de transferts inverses localement qui permet d'expliquer l'instabilité des LES, comme observé précédemment [69]. Nous avons cependant identifié deux familles de modèles qui permettent de réaliser des LES : SLM et MGSLM. Ces modèles permettent de réaliser des LES stables, aussi bien pour la configuration non-hélicitaire que pour la seconde configuration hélicitaire. Les spectres d'énergies cinétique et magnétique prédit par les LES avec les modèles SLM et MGSLM sont cependant moins énergétiques aux petites échelles que les spectres des DNS. Ceci est dû à une sur-dissipation sous-maille d'énergie cinétique et magnétique, qui a été observée lors des tests a priori. Les tests a priori ont également démontré que l'intermittence des transferts sous-mailles est mal estimée par les modèles SLM et MGSLM, aussi bien pour l'énergie cinétique que pour l'énergie magnétique. De plus nous avons vu dans le chapitre précédant qu'il était nécessaire de modéliser de façon indépendante les tenseurs sous-mailles de Reynolds et de Maxwell. Il reste donc des efforts à faire sur la modélisations des différents tenseurs afin d'améliorer les prédictions des LES en turbulence MHD.

## CHAPITRE 10

### CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.

Dans la première partie de ce manuscrit nous avons confirmé l'existence d'une loi asymptotique en  $k^{-7/3}$  pour les spectres d'énergie cinétique, comme suggérée par Brisaud *et al* [21] en présence d'une forte injection d'hélicité cinétique. Nous avons également constaté que l'hélicité relative dans la zone inertielle est très proche de l'unité, sans toutefois l'atteindre strictement, contrairement à ce qui est observé pour les équations de Navier-Stokes décimées [12, 13]. Afin d'expliquer cette observation, nous avons décomposé les transferts d'énergie cinétique à l'aide des modes hélicitaires. Nous avons constaté que les échanges entre l'énergie contenue dans les modes hélicitaires positifs et celle contenue dans les modes hélicitaires négatifs ne sont jamais nuls. Même en injectant de l'hélicité positive à toutes les échelles il reste toujours de l'énergie dans les modes hélicitaires négatifs. Or l'hélicité relative ne peut être unitaire que si l'énergie contenue dans les modes hélicitaires négatifs (dans le cas d'une injection d'hélicité positive) est nulle. Le cas des équations de Navier-Stokes décimées semble donc être une limite singulière, que nous ne pouvons atteindre en intégrant les équations de Navier-Stokes complètes.

Différentes perspectives peuvent être proposées suite à ce travail, concernant la turbulence hélicitaire. Maintenant que nous avons réussi à montrer l'existence d'une cascade d'énergie cinétique en  $k^{-7/3}$ , nous pourrions dans un premier temps utiliser ce type de cascade pour des écoulements conducteurs. Puis nous pourrions étendre les études de transferts à l'aide de la composition en modes hélicitaires aux écoulements conducteurs, notamment afin de mieux comprendre l'apparition d'une cascade inverse d'énergie magnétique en présence d'hélicité cinétique.

Dans la seconde partie, nous avons dans un premier temps confirmé à l'aide du forçage d'Alveius hélicitaire les résultats obtenus par Brandenburg [19]. En effet, nous avons pu confirmer l'existence d'une cascade inverse d'énergie magnétique en présence d'hélicité cinétique dans des DNS. À partir des bases de données que nous avons établies, nous avons réalisé une étude des transferts d'énergie en turbulence MHD, pour des configurations hélicitaires et non hélicitaires. Nous avons notamment pu confirmer que la cascade inverse d'énergie magnétique observée pour les configurations hélicitaires est située à des échelles plus grandes que l'échelle de forçage, comme observé à l'aide du formalisme spectral [3].

Nous avons aussi identifié plusieurs comportements à partir des DNS qui permettent d'établir des objectifs que les modèles sous-mailles idéaux doivent être capable de re-

produire. Aussi bien pour les configurations non-hélicitaires que pour les configurations hélicitaires, les modèles de turbulence doivent essentiellement reproduire des transferts d'énergie allant des grandes vers les petites échelles. Néanmoins, les transferts d'énergie peuvent également être inverses localement. Par ailleurs nous avons également démontré que les équilibres énergétiques qui sont valables d'un point de vue global ne sont pas retrouvés localement. Ceci montre qu'il n'est pas possible d'utiliser d'hypothèses liées à l'existence d'équilibres locaux pour le développement de nouveaux modèles de turbulence. Finalement, nous avons également démontré qu'il était nécessaire de développer des modèles spécifiques au tenseur sous-maille de Maxwell, sans s'appuyer sur les modèles existants pour le tenseur sous-maille de Reynolds.

Dans le dernier chapitre, nous avons évalué les performances de différents modèles existants dans la littérature. Nous avons montré qu'en présence d'une cascade inverse d'énergie magnétique il était nécessaire de "pomper" de l'énergie aux grandes échelles, à l'aide d'un modèle d'hypodiffusivité, afin d'espérer réaliser des simulations stables.

Nous avons également démontré que le modèle CHM n'était pas capable de réaliser des LES stables, du fait de son incapacité à prédire une quelconque dissipation d'énergie magnétique. Le modèle GM quant à lui n'est pas capable de réaliser des LES stables, du fait d'une sous-prédiction des transferts aussi bien directs qu'inverses, comme observé en hydrodynamique [97]. Seuls les modèles SLM et MGSLM sont ici capables de réaliser des LES stables, aussi bien pour les configurations non-hélicitaires que pour les configurations hélicitaires. Néanmoins les sur-estimations des transferts directs impactent les spectres d'énergies cinétique et magnétique aux petites échelles pour ces deux modèles. En effet, les spectres d'énergies obtenus lors de la réalisation de LES présentent des petites échelles moins énergétiques que celles des DNS filtrées.

Ainsi les performances des différents modèles évalués ici montrent la nécessiter d'efforts supplémentaires dans la modélisation des trois tenseurs sous-mailles, entre autre pour mieux prédire l'intermittence des transferts sous-mailles, ainsi que pour diminuer la sur-estimation globale des transferts prédits par les modèles de turbulence.

# Articles





**Systematic bias in the calculation of spectral density from a three-dimensional spatial grid**

Rodion Stepanov\*

*Institute of Continuous Media Mechanics, Korolyov Street 1, 614013 Perm, Russia and Department of Applied Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii Avenue 29, 614990 Perm, Russia*

Franck Plunian

*Université Grenoble Alpes, ISTERre, F-38000 Grenoble, France and CNRS, ISTERre, F-38000 Grenoble, France*

Mouloud Kessar and Guillaume Balarac

*Université Grenoble Alpes, LEGI, F-38000 Grenoble, France and CNRS, LEGI, F-38000 Grenoble, France*

(Received 8 September 2014; published 21 November 2014)

The energy spectral density  $E(k)$ , where  $k$  is the spatial wave number, is a well-known diagnostic of homogeneous turbulence and magnetohydrodynamic turbulence. However, in most of the curves plotted by different authors, some systematic kinks can be observed at  $k = 9, 15,$  and  $19$ . We claim that these kinks have no physical meaning and are in fact the signature of the method that is used to estimate  $E(k)$  from a three-dimensional spatial grid. In this paper we give another method in order to get rid of the spurious kinks and to estimate  $E(k)$  much more accurately.

DOI: [10.1103/PhysRevE.90.053309](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.053309)

PACS number(s): 47.11.Kb, 47.27.-i

**I. MOTIVATION**

Assuming isotropic and homogeneous hydrodynamic turbulence, Kolmogorov predicted that the kinetic energy spectral density should have a universal power scaling of  $k^{-5/3}$  [1], where  $k$  is the spatial wave number. Since then, the energy spectral density has become a useful diagnostic tool for various configurations, including anisotropic and magnetohydrodynamic turbulence. The definition of the spectral density  $E(k)$  is given by [2]

$$E(k) = \int_{|\mathbf{k}'|=k} \hat{E}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad (1)$$

where  $\hat{E}(\mathbf{k}')$  is the Fourier transform of the autocorrelation of a scalar field or the trace of the autocorrelation tensor of a vector field, e.g., velocity or magnetic field [3].

We look at definition (1) from the point of view of turbulence in a computational box. In practice, the numerical implementation of (1) for  $\hat{E}(\mathbf{k}')$  given on a regular grid of mesh is not discussed. However, some common features can be distinguished in the results. As an example, a compilation of curves corresponding to kinetic, magnetic, and passive-scalar energy spectra obtained in hydrodynamic or magnetohydrodynamic turbulence is plotted in Fig. 1. Though these spectra have been obtained by various authors [4–13], using various methods, forcing, and degrees of resolution, we note a systematic bump at the scale  $k = 9$ , followed by two holes at scales  $k = 15$  and  $19$ . Bumpy spectra are familiar in the context of wave turbulence, usually interpreted as the signature of traveling modes [14], but they are found in time frequency only. Here, however, it is difficult to imagine any physical ground for the systematic  $k = 9, 15,$  and  $19$  kinks appearing in the inertial range. It is fair to say that usually these kinks are just ignored in discussions of physical or even numerical aspects of the results [15,16], even if the bump at

$k = 9$  has already been interpreted as a physical effect [12]. Another hole at  $k = 3$  might be found, but it is usually hidden by the forcing scales.

In Sec. II we show that, in fact, these kinks are produced by a systematic bias coming from the standard approach to estimating  $E(k)$  on a spatial grid. In Sec. III we present a method to estimate  $E(k)$  in order to circumvent this bias. Since such a bias is more striking in three-dimensional (3D) turbulence than in 2D turbulence, in this paper we consider only the case of 3D data sets. An alternative definition for the 2D case is, however, given in Sec. IV. In 1D models, such as eddy-damped quasinormal Markovian models [17] or shell models [18] of turbulence, this bias does not exist.

**II. WHERE DOES THE BIAS COME FROM?**

The standard approach to estimating the continuous quantity  $E(k)$  from a set of Fourier modes given on a regular grid of mesh  $\delta k$  is to divide the Fourier space in shells  $S_n$  of thickness  $\Delta k$ . Then the spectral density  $E_n$  can be defined as [2]

$$E_n = \frac{(\delta k)^3}{\Delta k} \sum_{\mathbf{k}' \in S_n} \hat{E}(\mathbf{k}'), \quad (2)$$

with

$$S_n = \{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3 : n\Delta k - \Delta k/2 < |\mathbf{k}'| \leq n\Delta k + \Delta k/2\}. \quad (3)$$

Usually it is natural to take  $\Delta k = \delta k = 1$ , leading to a unity prefactor in (2). The wave number  $k_n$  corresponding to shell  $S_n$  is usually taken to obey an arithmetic progression. Then it is defined as

$$k_n = n\Delta k. \quad (4)$$

The problem is that the number  $M_n$  of wave vectors  $\mathbf{k}'$  belonging to  $S_n$  is not exactly proportional to the shell volume, as depicted in Fig. 2 for  $\Delta k = \delta k$ . The density of  $M_n$  even reaches local extrema at  $k_n = 9, 15,$  and  $19$ , which clearly explains the kinks appearing in Fig. 1. Changing the value of

\*rodion@icmm.ru

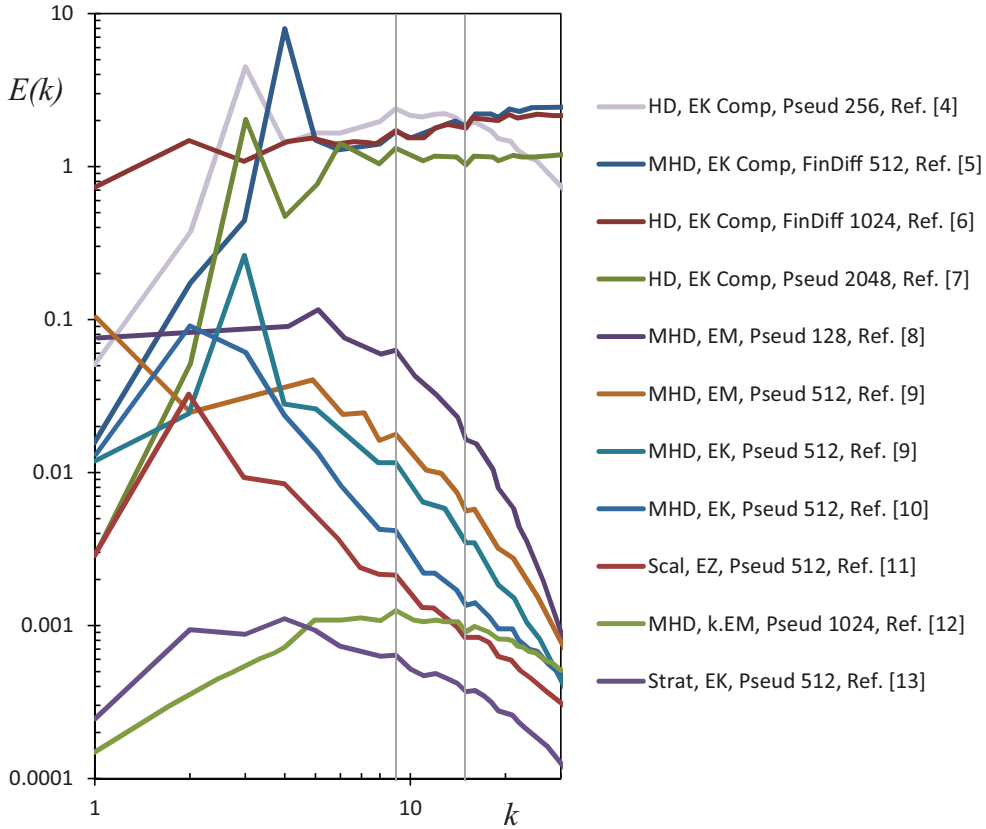


FIG. 1. (Color online) Energy spectra calculated by different authors, with different codes, different resolutions, and for different quantities. The denotations HD, MHD, and Scal stand for hydrodynamic, magnetohydrodynamic, and passive-scalar problems, respectively. The denotations EK, EM, and EZ stand for kinetic, magnetic, and passive-scalar energies, respectively. Pseud and FinDiff stand for pseudospectral and finite-difference resolution methods, respectively, and the numbers 128, 512, 1024, and 2048 correspond to the spatial resolution. The vertical grid lines  $k = 9$  and  $15$  are highlighted as solid lines. The legend is kept in the same order as the curves from top to bottom at  $k = 9$ .

$\Delta k$  would not help. For  $\Delta k < \delta k$  the number of local extrema is getting larger, while taking  $\Delta k > \delta k$  leads to a spurious power law as the result of an overaveraging procedure. In Fig. 2 we note another bump at  $k = 5$ , which presumably is also responsible for the peaks at  $k = 5$  visible in several spectra of Fig. 1, like the one calculated by Ponty *et al.* [8].

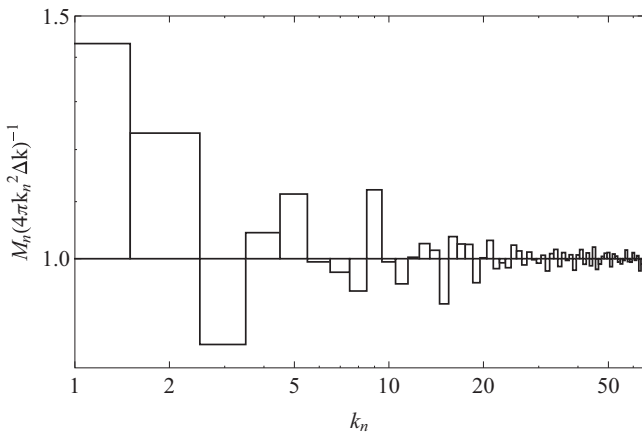


FIG. 2. Density of the number of vectors belonging to shell  $S_n$  versus  $k_n$  for  $\Delta k = \delta k$ .

### III. HOW TO CIRCUMVENT THE BIAS

Starting from (1), we note that  $E(k)$  is a surface integral, over  $|\mathbf{k}'| = k$ . Keeping in mind that the surface of a shell of radius  $|\mathbf{k}'|$  is equal to  $4\pi |\mathbf{k}'|^2$ , we then introduce the following definition for the spectral density in shell  $S_n$ , now denoted  $E_n^*$ , in the form

$$E_n^* = \frac{4\pi}{M_n} \sum_{\mathbf{k}' \in S_n} \hat{E}(\mathbf{k}') |\mathbf{k}'|^2, \quad (5)$$

where again  $M_n$  is the number of vectors  $\mathbf{k}'$  belonging to shell  $S_n$ .

Similarly, in order to estimate the mean wave number in shell  $S_n$ , we suggest to simply average all wave numbers belonging to  $S_n$ . This average wave number, now denoted by  $k_n^*$ , is given by

$$k_n^* = \frac{1}{M_n} \sum_{\mathbf{k}' \in S_n} |\mathbf{k}'|. \quad (6)$$

Finally, as we are looking for an energy spectral density satisfying some power law, it makes sense to use a geometric progression, instead of an arithmetic one, for  $k_n$ . Then the shells are logarithmically spaced ( $n \propto \log k_n$ ), instead of being

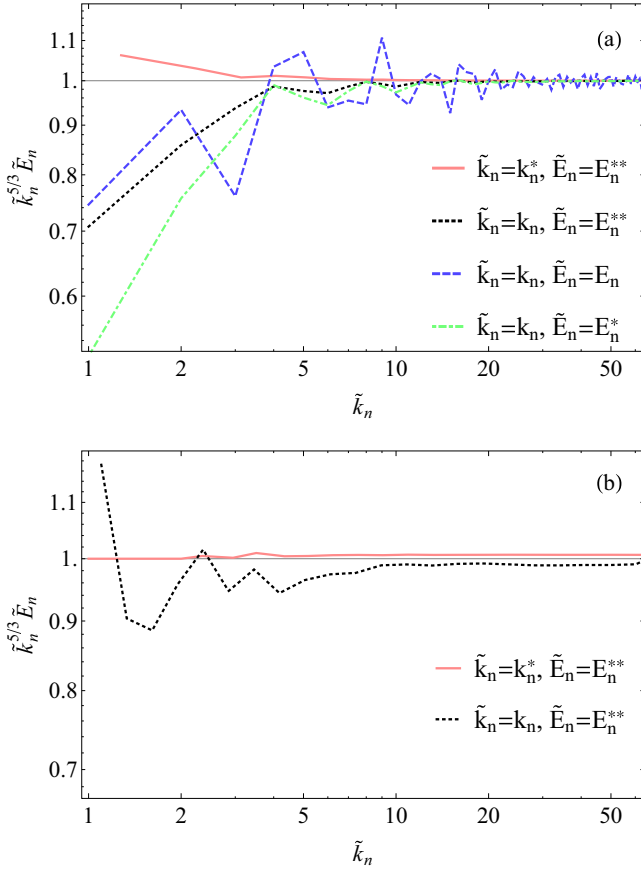


FIG. 3. (Color online) Compensated spectral density  $\tilde{k}_n^{5/3} \tilde{E}_n$  versus  $\tilde{k}_n$  for (a) linearly spaced shells  $S_n$  and (b) logarithmically spaced shells  $S_n^{\text{log}}$ . (a) The four curves correspond to  $\tilde{k}_n = k_n$  or  $k_n^*$  and  $\tilde{E}_n = E_n$  or  $E_n^*$ . (b) The curves corresponds to  $\tilde{E}_n = E_n^*$  and  $\tilde{k}_n = k_n$  or  $k_n^*$ .

linearly spaced ( $n \propto k_n$ ). Then we define the new shells as

$$S_n^{\text{log}} = \{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3 : \lambda^n \delta k < |\mathbf{k}'| \leq \lambda^{n+1} \delta k\}, \quad (7)$$

where  $\lambda$  is some scalar value larger than unity.

In order to test our definitions  $k_n^*$  and  $E_n^*$ , we consider a synthetic set of data with spectral coefficients  $\hat{E}(\mathbf{k}') = \frac{1}{4\pi} |\mathbf{k}'|^{-11/3}$ . It corresponds to the exact spectral density  $E(k) = k^{-5/3}$ .

In Fig. 3 we consider two cases depending on whether the shells are linearly spaced [Fig. 3(a)] or logarithmically spaced [Fig. 3(b)]. For linearly spaced shells, the curves depend on the definitions taken for the wave number and the spectral density. We immediately see that taking  $E_n$  for the spectral energy density leads to noisy results. The best result is obtained taking  $k_n^*$  and  $E_n^*$ . Now taking  $k_n^*$  and  $E_n^*$  with logarithmically spaced shells [Fig. 3(b)] leads to a result very close to the theoretical  $k^{-5/3}$  curve. Though the choice of the logarithmically shell spacing  $\lambda$  is arbitrary, we suggest to take  $\lambda = 1.21$  because it is the minimum value of  $\lambda$  for which we found no empty shell.

Finally, in Fig. 4 we consider data from a  $256^3$  direct numerical simulation (DNS) of homogeneous isotropic turbulence with a random forcing [11]. The kinetic energy spectral density  $E(k)$ , compensated by  $k^{-5/3}$ , is plotted with three

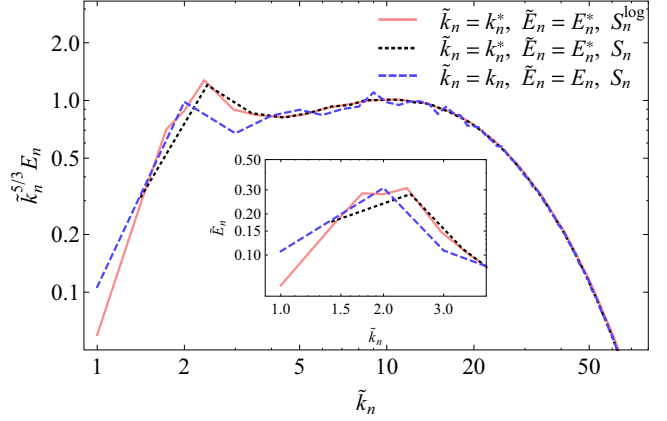


FIG. 4. (Color online) Compensated spectral density  $\tilde{k}_n^{5/3} \tilde{E}_n$  versus  $\tilde{k}_n$  from hydrodynamic turbulent DNS data. Two curves correspond to  $\tilde{k}_n = k_n$  and  $\tilde{E}_n = E_n$  or  $E_n^*$  and linearly spaced shells and the third curve corresponds to  $\tilde{k}_n = k_n^*$  and  $\tilde{E}_n = E_n^*$  and logarithmically spaced shells. The inset shows the spectral density at low wave numbers in the range of forcing scales.

kinds of estimates:  $k_n$  and  $E_n$  (linearly spaced shells),  $k_n^*$  and  $E_n^*$  (linearly spaced shells), and  $k_n^*$  and  $E_n^*$  (logarithmically spaced shells with  $\lambda = 1.21$ ). As can be seen, the curves are remarkably smooth using  $k_n^*$  and  $E_n^*$ . In the inset the spectral density  $E(k)$  is plotted for low values of  $k$  (without compensation). Using  $E_n^*$ ,  $k_n^*$ , and logarithmically spaced shells (black curve), the almost constant plateau around  $k = 2$  corresponds indeed to the forcing scales in which the energy power has been applied in the DNS.

#### IV. CONCLUSION

The goal of this paper was to understand why some systematic artificial kinks appear in plots of energy spectral density issued from various DNSs of 3D turbulence. We showed that they are the consequence of a non-self-similar distribution of Fourier modes in the spherical shells used to calculate the energy spectral density. We gave definitions (5) and (6) for calculating the mean energy spectral density and mean wave number in each shell. These definitions can be applied to either linearly or logarithmically spaced shells, the second one being more precise and providing a better result at low wave numbers. The same definitions can be generalized to other scalar quantities of interest, such as enstrophy, kinetic helicity in hydrodynamics, magnetic helicity, and cross helicity in magnetohydrodynamics. Finally, similar definitions can be derived for 2D problems,  $S_n$  being rings instead of shells. In this case the definition of the wave number in ring  $S_n$  is still given by (6), but the definition of spectral energy density (5) must be replaced by

$$E_n^* = \frac{2\pi}{M_n} \sum_{\mathbf{k}' \in S_n} \hat{E}(\mathbf{k}') |\mathbf{k}'|. \quad (8)$$

#### ACKNOWLEDGMENTS

This collaboration benefited from the International Research Group Program supported by the Perm region government. R.S. acknowledges support from Grant No.

YD-520.2013.2 from the Council of the President of the Russian Federation and Grant No. 14-01-96010 from the Russian Foundation of Basic Research. M.K., G.B., and F.P. acknowledge support from the Rhone-Alpes region through

the CIBLE program. This work was granted access to the HPC resources of IDRIS under the Allocation No. 20142a0611 made by GENCI and to the supercomputer URAN of the Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS.

- 
- [1] A. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **30**, 299 (1941).
  - [2] M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*, 3rd ed. (Kluwer, Dordrecht, 1997).
  - [3] H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence* (MIT Press, Cambridge, 1972).
  - [4] D. O. Gómez, P. D. Mininni, and P. Dmitruk, *Adv. Space Res.* **35**, 899 (2005).
  - [5] A. Brandenburg, *Astrophys. J.* **697**, 1206 (2009).
  - [6] W. Dobler, N. E. L. Haugen, T. A. Yousef, and A. Brandenburg, *Phys. Rev. E* **68**, 026304 (2003).
  - [7] P. D. Mininni, A. Alexakis, and A. Pouquet, *Phys. Rev. E* **77**, 036306 (2008).
  - [8] Y. Ponty, P. D. Mininni, J.-F. Pinton, H. Politano, and A. Pouquet, *New J. Phys.* **9**, 296 (2007).
  - [9] A. Alexakis, P. D. Mininni, and A. Pouquet, *Phys. Rev. E* **72**, 046301 (2005).
  - [10] D. Carati, O. Debliquy, B. Knaepen, B. Teaca, and M. Verma, *J. Turbul.* **7**, 1 (2006).
  - [11] Y. Fabre and G. Balarac, *Phys. Fluids* **23**, 115103 (2011).
  - [12] N. E. L. Haugen, A. Brandenburg, and W. Dobler, *Astrophys. J. Lett.* **597**, L141 (2003).
  - [13] W. J. T. Bos, L. Liechtenstein, and K. Schneider, *Phys. Rev. E* **76**, 046310 (2007).
  - [14] A. Figueroa, N. Schaeffer, H.-C. Nataf, and D. Schmitt, *J. Fluid Mech.* **716**, 445 (2013).
  - [15] F. K. Chow and P. Moin, *J. Comput. Phys.* **184**, 366 (2003).
  - [16] O. Desjardins, G. Blanquart, G. Balarac, and H. Pitsch, *J. Comput. Phys.* **227**, 7125 (2008).
  - [17] A. Pouquet, U. Frisch, and J. Leorat, *J. Fluid Mech.* **77**, 321 (1976).
  - [18] F. Plunian, R. Stepanov, and P. Frick, *Phys. Rep.* **523**, 1 (2013).

# Non-Kolmogorov cascade of helicity driven turbulence

Mouloud Kessar<sup>1</sup>, Franck Plunian<sup>2</sup>, Rodion Stepanov<sup>3,4</sup>, Guillaume Balarac<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univ. Grenoble Alpes, CNRS, LEGI, Grenoble, France;

<sup>2</sup> Univ. Grenoble Alpes, CNRS, ISTERre, Grenoble, France;

<sup>3</sup> Institute of Continuous Media Mechanics, Korolyov str. 1, 614013 Perm, Russia;

<sup>4</sup> Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii av. 29, 614990 Perm, Russia\*

(Dated: September 4, 2015)

We solve the Navier-Stokes equations with two simultaneous forcings. One forcing is applied at a given large-scale and it injects energy. The other forcing is applied at all scales belonging to the inertial range and it injects helicity. In this way we can vary the degree of turbulence helicity from non helical to maximally helical. We find that increasing the rate of helicity injection does not change the energy flux. On the other hand the level of total energy is strongly increased and the energy spectrum gets steeper. The energy spectrum spans from a Kolmogorov scaling law  $k^{-5/3}$  for a non-helical turbulence, to a non-Kolmogorov scaling law  $k^{-7/3}$  for a maximally helical turbulence. In the later case we find that the characteristic time of the turbulence is not the turnover time but a time based on the helicity injection rate.

We also analyse the results in terms of helical modes decomposition. For a maximally helical turbulence one type of helical mode is found to be much more energetic than the other one, by several orders of magnitude. The energy cascade of the most energetic type of helical mode results from the sum of two fluxes. One flux is negative and can be understood in terms of a decimated model. This negative flux is however not sufficient to lead an inverse energy cascade. Indeed the other flux involving the least energetic type of helical mode is positive and the largest. The least energetic type of helical mode is then essential and cannot be neglected.

PACS numbers: 47.27.-i, 47.27.Ak, 47.27.Gs

Considering the case of three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence, Kolmogorov [1] assumed the existence of a range of scales, the so-called inertial range, in which the viscous dissipation can be neglected. In absence of dissipation the kinetic energy is a conserved quantity. In spectral space the flux of kinetic energy is constant, leading to an energy cascade from large to small scales, provided energy is injected at large scale. From a straightforward dimensional analysis the spectral density of kinetic energy  $E(k)$  can be expressed in terms of the energy injection rate  $\varepsilon$  and wave number  $k$ ,

$$E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (1)$$

In absence of viscosity not only energy is a conserved quantity but also helicity [2, 3], which is defined as

$$H(t) = \int_V \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV, \quad (2)$$

where  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  is the velocity field at position  $\mathbf{x}$  and time  $t$ , and integration is made over the volume  $V$ . Similarly to energy, the helicity conservation is equivalent having a constant helicity flux. Provided energy and helicity are both injected at large scale, helicity is expected to cascade jointly with energy in the inertial range, obeying the following scaling law [4–6]

$$H(k) \propto \eta \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad (3)$$

where  $H(k)$  is the spectral density of helicity and  $\eta$  the injection rate of helicity. Contrary to enstrophy in two-dimensional turbulence, helicity is not sign-defined and therefore not reputed for having any influence on the energy spectrum, letting the scaling law (1) unchanged [7].

Though the simultaneous scaling laws (1) and (3) are characteristic of the so-called helical turbulence [6], they cannot be justified from dimensional grounds like Kolmogorov did for the non helical turbulence. Indeed the problem now consists in five variables  $E(k), H(k), k, \varepsilon$  and  $\eta$  and only two dimensions, length and time. Applying the  $\Pi$ -theorem [8] and assuming that  $E(k)$  and  $H(k)$  obey some scaling laws, we find [9, 10]

$$E(k) \propto \varepsilon^{7/3-a} \eta^{a-5/3} k^{-a}, \quad H(k) \propto \varepsilon^{4/3-b} \eta^{b-2/3} k^{-b} \quad (4)$$

where  $a$  and  $b$  are two free parameters. Therefore we need additional constraints to derive the power laws for  $E(k)$  and  $H(k)$ .

One way to argue for the simultaneous  $k^{-5/3}$  scaling laws (1) and (3) is to assume that the fluxes of energy and helicity  $\Pi_E(k)$  and  $\Pi_H(k)$  are constant in the inertial range, such that  $\Pi_E(k) = \varepsilon$  and  $\Pi_H(k) = \eta$ . In addition we have to set that the characteristic times  $\tau_E$  and  $\tau_H$  for the energy and helicity transfers are given by the turbulence turnover time  $\tau_E = \tau_H \propto (\varepsilon k^2)^{-1/3}$ . Then estimating both energy and helicity fluxes as [5, 11]

$$\Pi_E(k) = kE(k)/\tau_E(k), \quad \Pi_H(k) = kH(k)/\tau_H(k), \quad (5)$$

leads to (1) and (3). In the notations of (4) this would correspond to  $a = b \equiv 5/3$ .

Instead we could think of spectral laws independent of  $\varepsilon$ , leading to [5]

$$E(k) \propto \eta^{2/3} k^{-7/3}, \quad H(k) \propto \eta^{2/3} k^{-4/3}. \quad (6)$$

In the notations of (4) this would correspond to  $a = b + 1 \equiv 7/3$ . Providing evidence of such scaling laws (6), is still a

challenging issue and has never been observed so far in direct numerical simulations. Recently, a step forward has been made by solving the so-called decimated Navier-Stokes (NS) equations [12, 13]. It consists in splitting each Fourier modes of the velocity field in positive and negative helical modes, and in solving the NS equations keeping only one type of mode. By construction the resulting turbulence is then exactly maximally helical, i.e.  $|H(k)| = kE(k)$ . In such a decimated model helicity is still a conserved quantity, but now it gets the property to be sign-definite. It then plays a role similar to enstrophy in 2D turbulence, leading to a  $k^{-5/3}$  inverse cascade of energy at scales larger than the forcing scale [12]. In the inertial range the helicity cascade is direct, with an energy scaling law  $E(k) \propto k^{-7/3}$  [13]. In a recent experimental study [14] two scaling laws have also been found, the authors arguing for the existence of two such opposite cascades, but with dominant non-local transfers leading to  $E(k) \propto k^{-1}$  and  $E(k) \propto k^{-2}$ .

Here we present another strategy that does not assume any simplification of the NS equations and which is based on the fact that the scaling laws (6) do not depend on  $\varepsilon$ . Such a  $\varepsilon$  independence is expected as soon as  $\tau_H \leq \tau_E$ , then speaking of a helicity driven turbulence. From (5) and applying the exact constraint  $|H(k)| \leq kE(k)$ , a sufficient condition for having  $\tau_H \leq \tau_E$  is given by

$$\Pi_H(k) \geq k\Pi_E(k). \quad (7)$$

One way to satisfy such a flux condition (7) is to inject energy at large scale such that  $\Pi_E(k) = \varepsilon$  and helicity at all scales such that  $\Pi_H(k) \geq k\varepsilon$ . This is the strategy which is followed in the present letter, similarly to [15, 16].

Using a pseudo-spectral code we solve the NS equations

$$\partial_t \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (8)$$

where  $\nu$ ,  $p$  and  $\mathbf{f}$  are respectively the viscosity, the pressure and the flow forcing. The forcing is divided in two parts  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^E + \mathbf{f}^H$ , where  $\mathbf{f}^E$  is the energy forcing applied at some given large scale  $k_F^{-1}$ , and  $\mathbf{f}^H$  is the helicity forcing applied at all scales within the inertial range.

Both parts of the forcing  $\mathbf{f}^E$  and  $\mathbf{f}^H$  are delta-correlated in time and divergence free. Following [17] they are defined such that the power input comes from the force-force correlation only and not from the velocity-force correlation. In spectral space this corresponds to

$$\mathbf{u}_k^* \cdot \mathbf{f}_k^E + c.c. = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{u}_k^* \cdot \mathbf{f}_k^H + c.c. = 0 \quad (10)$$

where  $\mathbf{f}_k^E$  and  $\mathbf{f}_k^H$  are the Fourier coefficients of  $\mathbf{f}^E$  and  $\mathbf{f}^H$ .

For  $\mathbf{f}^E$  we use the exact same forcing as in [17] with a force-force correlation given by

$$|\mathbf{f}_k^E|^2 = F(\mathbf{k})/2\pi k^2, \quad (11)$$

where  $F(\mathbf{k})$  obeys to a Gaussian distribution around  $k = k_F$ . As in [17]  $F(\mathbf{k})$  is defined as inversely proportional to the time

step of the computation, in order to guarantee an injection rate of energy which is independent from the value of the time step. The level of helicity injected by  $\mathbf{f}^E$  is not controlled a priori, but the results show that it is statistically insignificant.

In order to inject helicity the forcing  $\mathbf{f}^H$  has to satisfy, in spectral space,

$$(\nabla \times \mathbf{u})_k^* \cdot \mathbf{f}_k^H + \mathbf{u}_k^* \cdot (\nabla \times \mathbf{f}^H)_k + c.c. = \eta(\mathbf{k}), \quad (12)$$

where  $\eta(\mathbf{k})$  is a helicity injection rate per unit volume. We take

$$\eta(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{for } |\mathbf{k}| < k_F \quad (13)$$

$$\eta(\mathbf{k}) = \eta_0 (|\mathbf{k}|/k_F)^{-\alpha} \quad \text{for } |\mathbf{k}| \geq k_F \quad (14)$$

with  $\alpha = 2.2$  in order to have a spectral density of helicity injection rate  $|\mathbf{k}|^2 \eta(\mathbf{k})$  almost flat. Of course such a forcing extending on the whole inertial range might change the intermittency properties of the turbulence [18]. However we find that the level of dissipation with and without  $\mathbf{f}^H$  is statistically unchanged. Finally two issues have to be clarified, both related to the fact that the energy power coming from the force-force correlation of  $\mathbf{f}^H$  is not controlled a priori and that we need to keep it at a level sufficiently lower than the one injected by  $\mathbf{f}^E$ . These rather technical issues are detailed in the Appendix.

Applying a classic criterion [19] in order to ensure the resolution of a sufficiently large range of dissipation scales, taking a grid of  $256^3$  points and setting  $\nu = 2 \cdot 10^{-3}$  and  $R_\lambda = 100$ , where  $R_\lambda$  is the Reynolds number based on the Taylor microscale, leads to an energy injection rate  $\varepsilon \approx 0.2$  and a forcing wave number  $k_F \approx 2.2$ . Finally all subsequent results correspond to statistically steady states.

In Figure 1 top and bottom, the spectral density of energy  $E(k)$  and relative helicity  $H(k)/(kE(k))$  are represented for five values of helicity injection  $\eta_0$ , ranging from non-helical turbulence ( $\eta_0 = 0$ ) to maximally helical turbulence ( $\eta_0 = 5$ ). Clearly, increasing  $\eta_0$  steepens the energy spectral density at large scales, with a scaling law varying from  $k^{-5/3}$  for non-helical, to  $k^{-7/3}$  for maximally helical turbulence (top of Figure 1). For  $\eta_0 \neq 0$  a well defined spectrum of relative helicity is obtained with a rather flat part. For  $\eta_0 = 1$  and  $\eta_0 = 5$  the relative helicity is about unity over an extended range of scales, showing that the turbulence is close to a maximally helical state (bottom of Figure 1).

The fluxes of energy and helicity,  $\Pi_E(k)$  and  $\Pi_H(k)$ , are plotted in top and bottom of Figure 2, for again the same five values of  $\eta_0$ . In the top figure we see that  $\Pi_E(k)$  is almost independent of  $\eta_0$ , showing that the spurious energy injection produced by the helical forcing  $\mathbf{f}^H$  is small compared to the energy injected by  $\mathbf{f}^E$ . On the other hand in the bottom figure we see that  $\Pi_H(k)$  is getting higher when increasing the value of  $\eta_0$ . Therefore we conclude a posteriori that the injections of energy and helicity are well prescribed by  $\mathbf{f}^E$  and  $\mathbf{f}^H$  respectively.

Relying on (5) and knowing the flux and spectral density of energy and helicity, we can calculate the two characteristic

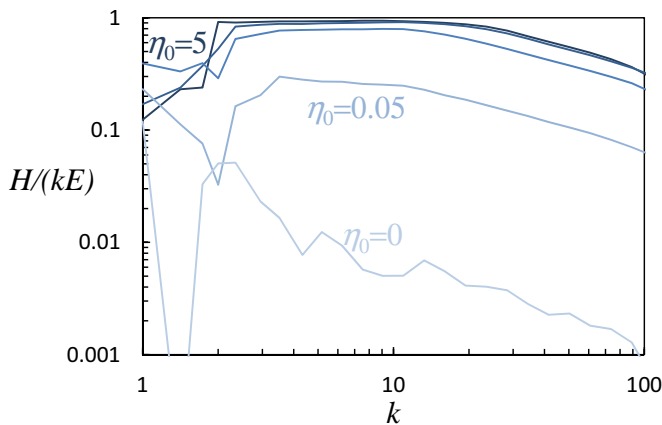
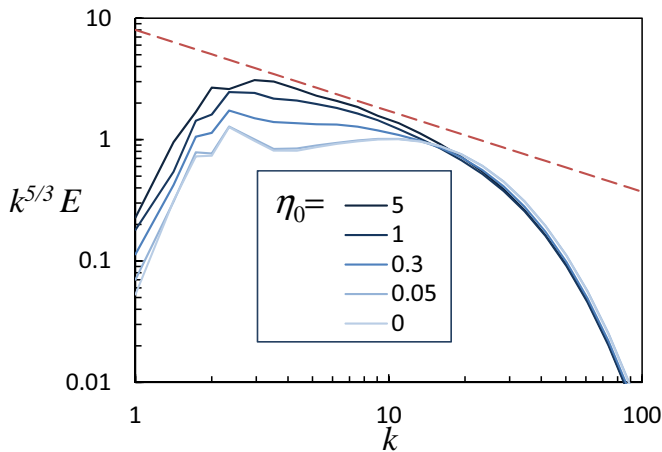


FIG. 1: (Color online) Spectral density of energy (top) and relative helicity (bottom), for five values of the helicity injection rate:  $\eta_0 = 0, 0.05, 0.3, 1$  and  $5$ . In the top figure the energy is normalized by  $k^{-5/3}$  and the red dashed curve corresponds to  $k^{-7/3}$ .

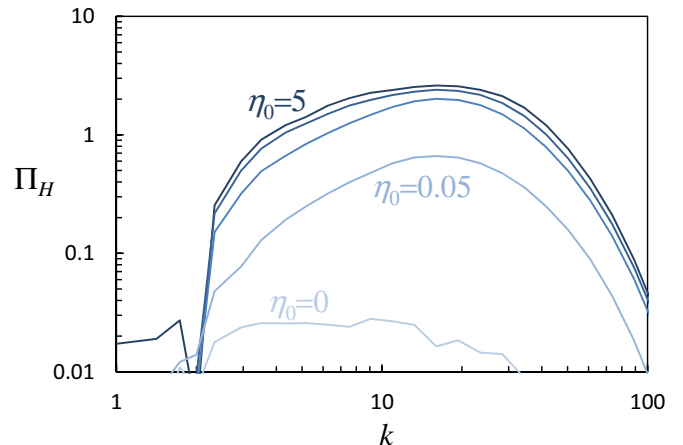
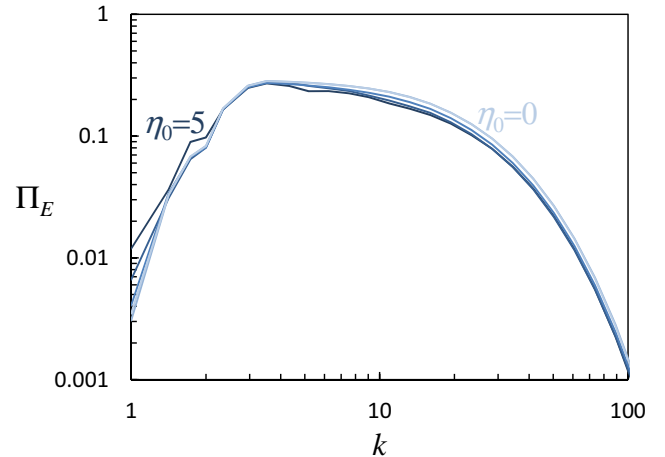


FIG. 2: (Color online) Flux of energy  $\Pi_E$  (top) and helicity  $\Pi_H$  (bottom) for the same five values of  $\eta_0$  as in Figure 1 and same color code.

times,  $\tau_E(k)$  and  $\tau_H(k)$ , in order to determine which one is the smallest and therefore which one controls the turbulence. In Figure 3 the ratio  $\tau_H(k)/\tau_E(k)$  is plotted for  $\eta_0 = 0.05, 0.3, 1$  and  $5$ . For sufficiently large values of  $\eta_0$ , typically  $\eta_0 = 1$  and  $\eta_0 = 5$ , we see that for  $k \in [3, 12]$   $\tau_H(k)/\tau_E(k) < 1$ , suggesting a turbulence governed by the helicity injection rate. On the other hand for low values of  $\eta_0$ , typically  $\eta_0 = 0.05$  and  $\eta_0 = 0.3$ , and in the same range of scales we find  $\tau_H(k)/\tau_E(k) > 1$ , suggesting a turbulence governed by the energy injection.

Up to now it has been demonstrated that injecting a sufficiently high rate of helicity over the whole inertial range of a turbulent flow leads to a  $k^{-7/3}$  scaling law for the energy spectral density and that the characteristic time of such maximally helical turbulence is the one based on the helicity injection rate. Apart from studies assuming drastic simplification of the NS equations [12, 13, 15, 16], this is the first direct numerical simulation in which helicity is shown to have some effect on three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence.

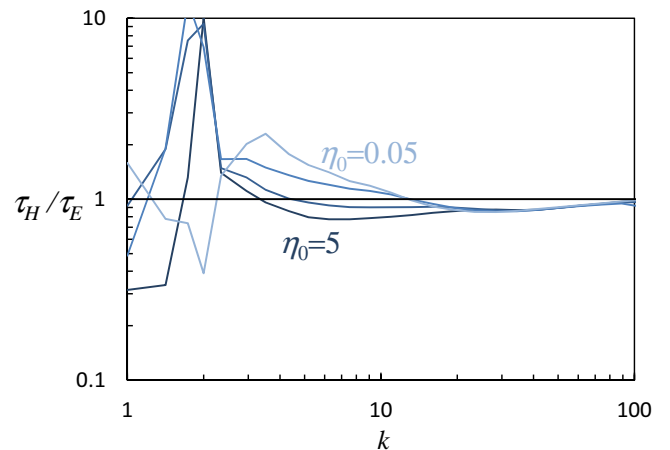


FIG. 3: (Color online) Ratio  $\tau_H(k)/\tau_E(k)$  versus  $k$  for  $\eta_0 = 0.05, 0.3, 1$  and  $5$  and same color code as in Figure 1.



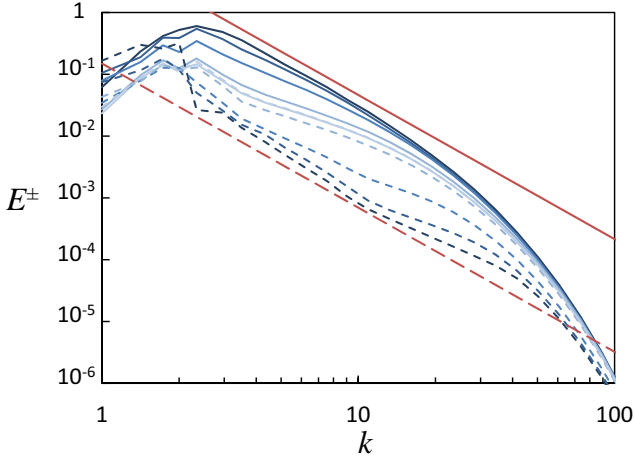


FIG. 4: (Color online) Energy spectra  $E^+(k)$  (solid line) and  $E^-(k)$  (dashed line) for the same five values of  $\eta_0$  as in Figure 1 and same color code. Increasing  $\eta_0$  the curves spread from the center towards the two (red) dashed and solid straight lines corresponding to  $k^{-7/3}$ .

Now the question arises how our results fit in with the scenario described by the decimated model [12, 13]. As the injection of positive helicity is made at all scales and at each time step, we expect a strong dominance of the positive helical modes compared to the negative helical modes. Then according to [12, 13] we could expect an inverse cascade of energy. However the energy fluxes plotted in Figure 2 are always positive, demonstrating a direct cascade of energy. To clarify this paradox we now analyse our results in terms of helical modes decomposition.

In Fourier space the velocity field is split into two helical modes per wave vector

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{k}) + \mathbf{u}^-(\mathbf{k}) \quad (15)$$

$$= u^+(\mathbf{k})\mathbf{h}^+(\mathbf{k}) + u^-(\mathbf{k})\mathbf{h}^-(\mathbf{k}) \quad (16)$$

where  $u^\pm$  are complex scalars and  $\mathbf{h}^\pm$  are the eigenvectors of the curl operator satisfying  $\mathbf{i}\mathbf{k} \times \mathbf{h}^\pm = \pm|\mathbf{k}|\mathbf{h}^\pm$  [20, 21]. The energy spectral density of each helical mode, defined by  $E^\pm(k) = |u^\pm(k)|^2$ , is plotted in Figure 4, for again the same five values of  $\eta_0$  as in Figure 1. For each value of  $\eta_0$  we observe that both spectra  $E^\pm(k)$  obey to the same scaling laws, again varying from  $k^{-5/3}$  for  $\eta_0 = 0$  to  $k^{-7/3}$  for  $\eta_0 = 5$ . This is consistent with the results of Figure 1 and the relation  $E(k) = E^+(k) + E^-(k)$ . For  $\eta_0 = 0$  both spectra  $E^\pm(k)$  are identical as expected for a non helical turbulence. Increasing  $\eta_0$  both spectra separate apart from each other,  $E^+(k)$  prevailing over  $E^-(k)$  by two orders of magnitude for  $\eta_0 = 5$ .

Following [22, 23] we now analyse the fluxes between the helical modes. We denote by  $\Pi_b^{a<}(k)$  the energy flux from the inside region of a  $\mathbf{u}^a$ -sphere of radius  $k$  to all wave numbers of  $\mathbf{u}^b$ , where  $a, b \equiv \pm$ . It is defined as

$$\Pi_b^{a<}(k) = \int_{|\mathbf{k}'| \leq k} \mathbf{u}^a(\mathbf{k}') \cdot FT\{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}^b\}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' \quad (17)$$

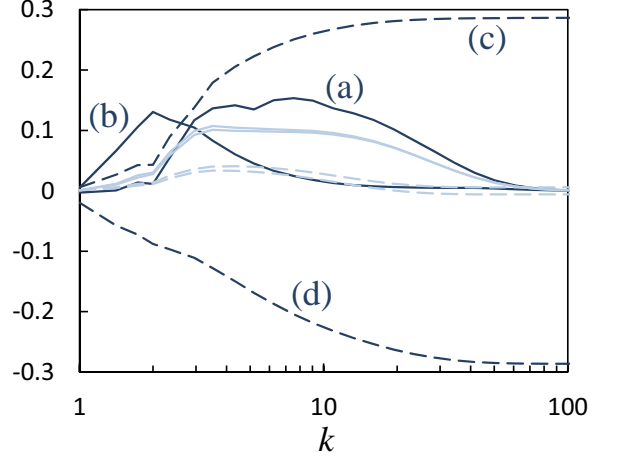
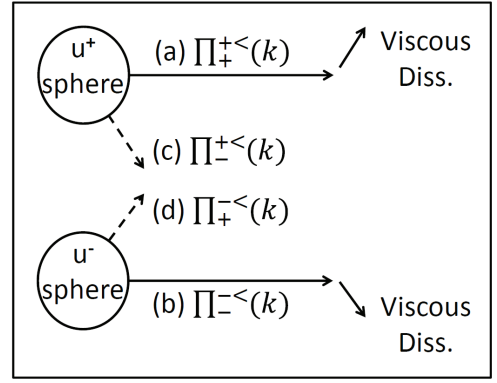


FIG. 5: (Color online) Top: Various energy fluxes in helical turbulence.  $\Pi_b^{a<}(k)$  denotes the energy flux from the inside region of a  $\mathbf{u}^a$ -sphere of radius  $k$  to all wave numbers of  $\mathbf{u}^b$ , where  $a, b \equiv \pm$ . Bottom: The dark (light) curves correspond to  $\eta_0 = 5$  ( $\eta_0 = 0$ ). The solid curves correspond to  $\Pi_+^{+<}(k)$  and  $\Pi_-^{-<}(k)$ , the dashed curves to  $\Pi_+^{+<}(k)$  and  $\Pi_-^{-<}(k)$ . For  $\eta_0 = 5$ : (a) corresponds to  $\Pi_+^{+<}(k)$ , (b) to  $\Pi_-^{-<}(k)$ , (c) to  $\Pi_+^{+<}(k)$  and (d) to  $\Pi_-^{-<}(k)$ .

where  $FT\{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}^b\}$  denotes the Fourier transform of the non linear term  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}^b$ . The four fluxes  $\Pi_\pm^{a<}(k)$  are represented schematically in Figure 5 (top). They are plotted in Figure 5 (bottom) for  $\eta_0 = 0$  (light curves) and  $\eta_0 = 5$  (dark curves). The sum of these four fluxes corresponds to the energy flux plotted in Figure 2 (top). For  $\eta_0 = 5$  the fluxes (c)  $\Pi_+^{+<}(k)$  and (d)  $\Pi_-^{-<}(k)$  are much larger than for  $\eta_0 = 0$ . In addition they are of opposite sign corresponding to a net flux of energy from the positive to the negative helical modes, balancing each other at small scales (large  $k$ ).

Let us now focus on the flux (a)  $\Pi_+^{+<}(k)$ . By definition the energy flux from the inside region of a  $\mathbf{u}^+$ -sphere of radius  $k$  to itself is zero. This implies that  $\Pi_+^{+<}(k) = \Pi_+^{+>}(k)$ , which is the energy flux from the inside region of the  $\mathbf{u}^+$ -sphere of radius  $k$  to the outside of that same  $\mathbf{u}^+$ -sphere. Now the fact that in Figure 5 (bottom)  $\Pi_+^{+>}(k)$  is always positive means that there is a direct cascade of energy. This is in contrast with the inverse cascade found with the decimated model of [12, 13].

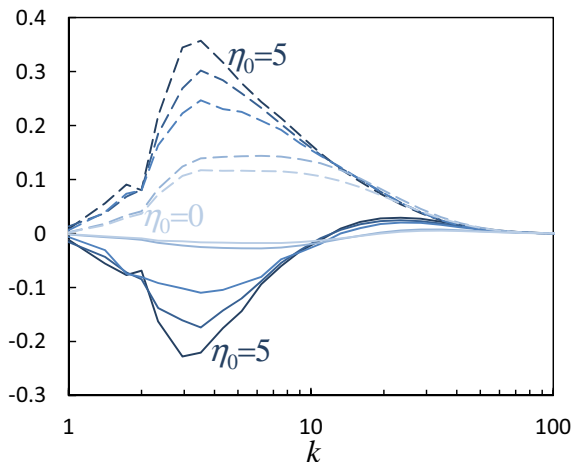


FIG. 6: (Color online) Energy fluxes  $+\Pi_{+>}^{\pm}(k)$  (solid) and  $-\Pi_{+>}^{\pm}(k)$  (dashed) for the same five values of  $\eta_0$  as in Figure 1 and same color code. Increasing  $\eta_0$  from 0 to 5 the solid curves at  $k = 3$  decrease and the dashed curves increase.

Finally we push one step further by splitting the flux  $\Pi_{+>}^{\pm}(k)$  into two parts  $\Pi_{+>}^{\pm}(k) = +\Pi_{+>}^{\pm}(k) + -\Pi_{+>}^{\pm}(k)$  with

$$\pm\Pi_{+>}^{\pm}(k) = \int_{|\mathbf{k}'| \leq k} \mathbf{u}^{\pm}(\mathbf{k}') \cdot FT\{(\mathbf{u}^{\pm} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{\pm}\}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}'. \quad (18)$$

In (18)  $\pm\Pi_{+>}^{\pm}(k)$  denotes the energy flux from the inside region of a  $\mathbf{u}^{\pm}$ -sphere of radius  $k$  to the outside of the  $\mathbf{u}^{\pm}$ -sphere, with  $\mathbf{u}^{\pm}$  acting as a mediator on the non linear interactions. Both fluxes  $\pm\Pi_{+>}^{\pm}(k)$  are plotted in Figure 6 for again the same five values of  $\eta_0$  as in Figure 1. The flux  $+\Pi_{+>}^{\pm}(k)$  is always negative in agreement with the arguments given in [12, 13] for the decimated model. However the flux  $-\Pi_{+>}^{\pm}(k)$  is positive and always the largest in absolute value. This shows that even if the turbulence is strongly positively helical, the presence of negative helical modes is nevertheless essential to give the right sign of the energy fluxes. Though the decimated model is mathematically appealing because it reproduces an exact maximally helical flow, it is eventually singular as in practice the existence of both types of helical modes cannot be avoided.

ISTerre and LEGI are part of Labex OSUG@2020 (ANR10LABX56) and Labex Tec21 (ANR11LABX30). We acknowledge support from region Rhône-Alpes through the CIBLE program, IDRIS and CIMENT for HPC resources.

#### APPENDIX: THE HELICITY FORCING

The helicity forcing is defined in its spectral form as

$$\mathbf{f}_k^H = \mathbf{k} \times \mathbf{p}(\mathbf{k}, t) \quad (19)$$

with

$$\mathbf{p}(\mathbf{k}, t) = a(\mathbf{k}, t)\mathbf{e}_1(\mathbf{k}, t) + ib(\mathbf{k}, t)\mathbf{e}_2(\mathbf{k}, t), \quad (20)$$

$\mathbf{e}_1(\mathbf{k}, t)$  and  $\mathbf{e}_2(\mathbf{k}, t)$  being two unit vectors with directions changing randomly at each time step. The resolution of equations (10) and (12) leads to

$$a(\mathbf{k}, t) = -\frac{\eta(\mathbf{k})}{4D|\mathbf{k}|^2} (\Im(\mathbf{u}_k), \mathbf{k}, \mathbf{e}_2) \quad (21)$$

$$b(\mathbf{k}, t) = \frac{\eta(\mathbf{k})}{4D|\mathbf{k}|^2} (\Re(\mathbf{u}_k), \mathbf{k}, \mathbf{e}_1), \quad (22)$$

with

$$D(\mathbf{k}, t) = (\Re(\mathbf{u}_k), \mathbf{k}, \mathbf{e}_1) (\Re(\mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{e}_2) + (\Im(\mathbf{u}_k), \mathbf{k}, \mathbf{e}_2) (\Im(\mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{e}_1). \quad (23)$$

As stated above, the energy forcing  $\mathbf{f}^E$  is inversely proportional to the time step [17]. Conversely  $\mathbf{f}^H$  does not depend on the time step, implying that the level of energy rate which comes from the force-force correlation of  $\mathbf{f}^H$  is proportional to the time step. Therefore provided the time step is sufficiently small, the energy rate coming from the force-force correlation of  $\mathbf{f}^H$  can be maintained at a sufficiently low level compared to the energy rate coming from the force-force correlation of  $\mathbf{f}^E$ . In other words to maintain a spurious power injected by  $\mathbf{f}^H$  at a low level it is necessary to decrease the time step when increasing  $\eta_0$ .

Finally we apply a *clipping* condition in order to prevent any spurious energy injection coming from singular solutions of equations (10) and (12). Indeed as the forcing  $\mathbf{f}^H$  is random in time we cannot prevent the value of  $D$  given in (23) to be zero and lead to singular solutions  $a(\mathbf{k}, t)$  and  $b(\mathbf{k}, t)$ . In addition we do not want to force energy nor helicity in the dissipative range (corresponding to scales  $k \geq k_v$  where  $k_v \approx \varepsilon^{1/4} \nu^{-3/4}$ ). Therefore at each time step the helical forcing  $\mathbf{f}^H$  is applied provided the following condition is satisfied

$$D(\mathbf{k}, t) \geq |\mathbf{k}||\mathbf{u}_k|^2 \left( A + B \left( \frac{k}{k_v} \right)^\beta \right), \quad (24)$$

where  $A$ ,  $B$  and  $\beta$  are positive constants whose values depend on  $\eta_0$ .

\* Electronic address: Franck.Plunian@ujf-grenoble.fr

- [1] A. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **30**, 299 (1941).
- [2] J. Moreau, C. R. Acad. Sci. Paris **252**, 2810 (1961).
- [3] H. Moffatt, J. Fluid Mech. **35**, 117 (1969).
- [4] M. Lesieur, U. Frisch, and A. Brissaud, Ann. Geophys. **27**, 151 (1971).
- [5] A. Brissaud, U. Frisch, J. Leorat, M. Lesieur, and A. Mazure, Phys. Fluids **16**, 1366 (1973).
- [6] Q. Chen, S. Chen, G. L. Eyink, and D. D. Holm, Phys. Rev. Lett. **90**, 214503 (2003).
- [7] P. D. Mininni, A. Alexakis, and A. Pouquet, Phys. Rev. E **74**, 016303 (2006).
- [8] G. I. Barenblatt, *Dimensional analysis* (Gordon and Breach publishers, 1987).



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] O. Agullo, W.-C. Muller, B. Knaepen, and D. Carati. Large eddy simulation of decaying magnetohydrodynamic turbulence with dynamic subgrid-modeling. Physics of Plasmas, 8(7) :3502–3505, 2001.
- [2] A. Alexakis, P. D. Mininni, and A. Pouquet. Shell-to-shell energy transfer in magnetohydrodynamics. I. Steady state turbulence. Phys. Rev. E, 72(4) :046301, October 2005.
- [3] A. Alexakis, P. D. Mininni, and A. Pouquet. Shell-to-shell energy transfer in magnetohydrodynamics. i. steady state turbulence. Phys. Rev. E, 72 :046301, Oct 2005.
- [4] K. Alvelius. Random forcing of three-dimensional homogeneous turbulence. Physics of Fluids, 550(2) :1880, 1999.
- [5] GE Backus and S Chandrasekhar. On cowling’s theorem on the impossibility of self-maintained axisymmetric homogeneous dynamos. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 42(3) :105, 1956.
- [6] J. Baerenzung, M. Holschneider, and V. Lesur. Bayesian inversion for the filtered flow at the earth’s core-mantle boundary. Journal of Geophysical Research : Solid Earth, 119(4) :2695–2720, 2014.
- [7] J. Baerenzung, H. Politano, Y. Ponty, and A. Pouquet. Spectral modeling of magnetohydrodynamic turbulent flows. Phys. Rev. E, 78 :026310, Aug 2008.
- [8] G. Balarac, A. G. Kosovichev, O. Brugière, A. A. Wray, and N. N. Mansour. Modeling of the subgrid-scale term of the filtered magnetic field transport equation. ArXiv e-prints, October 2010.
- [9] G. Balarac, J. Le Sommer, X. Meunier, and A. Volland. A dynamic regularized gradient model of the subgrid-scale scalar flux for large eddy simulations. Physics of Fluids, 25(7) :-, 2013.
- [10] J. Bardina, J. H. Ferziger, and W. C. Reynolds, editors. Improved subgrid-scale models for large-eddy simulation, July 1980.

- [11] G. K. Batchelor. The theory of homogeneous turbulence. Cambridge university press, 1953.
- [12] L. Biferale, S. Musacchio, and F. Toschi. Inverse Energy Cascade in Three-Dimensional Isotropic Turbulence. Phys. Rev. Lett., 108(16) :164501, April 2012.
- [13] L. Biferale, S. Musacchio, and F. Toschi. Split energy–helicity cascades in three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 730 :309–327, 2013.
- [14] G. Boffetta, A. Celani, and M. Vergassola. Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence : Deviations from gaussian behavior. Phys. Rev. E, 61 :R29–R32, Jan 2000.
- [15] V. Borue. Inverse energy cascade in stationary two-dimensional homogeneous turbulence. Phys. Rev. Lett., 72 :1475–1478, Mar 1994.
- [16] W. J.T. Bos and J-P. Bertoglio. Large-scale bottleneck effect in two-dimensional turbulence. Journal of Turbulence, page N30, 2009.
- [17] W. JT. Bos, L. Liechtenstein, and K. Schneider. Small-scale intermittency in anisotropic turbulence. Phys. Rev. E, 76(4) :046310, 2007.
- [18] J. Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires présentés par divers savants à l’Académie des Sciences, 1877.
- [19] A. Brandenburg. The inverse cascade and nonlinear alpha-effect in simulations of isotropic helical hydromagnetic turbulence. The Astrophysical Journal, 550(2) :824, 2001.
- [20] A. Brandenburg. Large-scale Dynamos at Low Magnetic Prandtl Numbers. The Astrophysical Journal, 697 :1206–1213, June 2009.
- [21] A. Brissaud, U. Frisch, J. Leorat, M. Lesieur, and A. Mazure. Helicity cascades in fully developed isotropic turbulence. Physics of Fluids, 16 :1366–1367, 1973.
- [22] B. A. Buffett. A comparison of subgrid-scale models for large-eddy simulations of convection in the earth’s core. Geophysical Journal International, 153(3) :753–765, 2003.
- [23] D. Carati, O. Debligny, B. Knaepen, B. Teaca, and M. Verma. Energy transfers in forced mhd turbulence. Journal of Turbulence, 7 :1–12, 2006.
- [24] Q. Chen, S. Chen, and G. L. Eyink. The joint cascade of energy and helicity in three-dimensional turbulence. Physics of Fluids, 15(2) :361–374, 2003.
- [25] S. Chen, R. E. Ecke, G. L. Eyink, M. Rivera, M. Wan, and Z. Xiao. Physical mechanism of the two-dimensional inverse energy cascade. Phys. Rev. Lett., 96 :084502, Feb 2006.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [26] A. A. Chernyshov, K. V. Karelsky, and A. S. Petrosyan. Development of large eddy simulation for modeling of decaying compressible magnetohydrodynamic turbulence. Physics of Fluids, 19(5) :-, 2007.
- [27] A. A. Chernyshov, K. V. Karelsky, and A. S. Petrosyan. Forced turbulence in large-eddy simulation of compressible magnetohydrodynamic turbulence. Physics of Plasmas, 17(10) :-, 2010.
- [28] J.-P. Chollet and M. Lesieur. Parameterization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures. Journal of the Atmospheric Sciences, 38, 04 1981.
- [29] R. A. Clark, J. H. Ferziger, and W. C. Reynolds. Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow. Journal of Fluid Mechanics, 91 :1–16, 3 1979.
- [30] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik. Mathematische Annalen, 100(1) :32–74, 1928.
- [31] A. Courvoisier. Dynamo Action and the Generation of Large-Scale Magnetic Field in Astrophysics. PhD thesis, Faculté des sciences de l’université de Grenoble, 2006.
- [32] T. G. Cowling. The magnetic field of sunspots. mnras, 94 :39–48, November 1933.
- [33] A. Craya. Contribution à l’analyse de la turbulence associée à des vitesses moyennes. PhD thesis, Faculté des sciences de l’université de Grenoble, 1957.
- [34] C. B. da Silva and O. Métais. On the influence of coherent structures upon interscale interactions in turbulent plane jets. Journal of Fluid Mechanics, 473 :103–145, 12 2002.
- [35] P. D. Ditlevsen and P. Giuliani. Dissipation in helical turbulence. Physics of Fluids, 13(11) :3508–3509, 2001.
- [36] W. Dobler, N. E. L. Haugen, T. A. Yousef, and A. Brandenburg. Bottleneck effect in three-dimensional turbulence simulations. Phys. Rev. E, 68 :026304, Aug 2003.
- [37] Y. Fabre and G. Balarac. Development of a new dynamic procedure for the clark model of the subgrid-scale scalar flux using the concept of optimal estimator. Physics of Fluids, 23(11) :-, 2011.
- [38] F.N. Frenkiel and R.E. Munn, editors. Energy Cascade in Large-Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows, volume 18, Part A of Advances in Geophysics. Elsevier, 1975.
- [39] U. Frisch. Turbulence : The Legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge University Press, 1995.
- [40] U. Frisch, A. Pouquet, J. LÉOrat, and A. Mazure. Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in magnetohydrodynamic turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 68 :769–778, 4 1975.

- 
- [41] A. Gailitis, Olgerts Lielausis, Ernests Platacis, Gunter Gerbeth, and Frank Stefani. Riga dynamo experiment and its theoretical background. Physics of Plasmas, 11(5) :2838–2843, 2004.
- [42] D. J Galloway and M. RE. Proctor. Numerical calculations of fast dynamos in smooth velocity fields with realistic diffusion. Nature, 1992.
- [43] S. Galtier. Theory for helical turbulence under fast rotation. Phys. Rev. E, 89 :041001, Apr 2014.
- [44] S. Galtier. Weak turbulence theory for rotating magnetohydrodynamics and planetary flows. Journal of Fluid Mechanics, 757 :114–154, 10 2014.
- [45] M Germano. Turbulence : the filtering approach. Journal of Fluid Mechanics, 238 :325–336, 1992.
- [46] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. Physics of Fluids, 3 :1760–1765, July 1991.
- [47] E. Golbraikh. Helicity turbulent spectra in the presence of energy and helicity fluxes. Phys. Lett. A, 354 :214–216, 2006.
- [48] E. Golbraikh and S. Moiseev. Different spectra formation in the presence of helical transfer. Phys. Lett. A, 305 :173–175, 2002.
- [49] D. O Gómez, P. D. Mininni, and P. Dmitruk. Mhd simulations and astrophysical applications. Adv. Space Res., 35(5) :899–907, 2005.
- [50] N. E. Haugen, A. Brandenburg, and W. Dobler. Simulations of nonhelical hydro-magnetic turbulence. Phys. Review E, 70(1) :016308, July 2004.
- [51] N. E. L. Haugen, A. Brandenburg, and W. Dobler. Is nonhelical hydromagnetic turbulence peaked at small scales? The Astrophysical Journal Letters, 597(2) :L141, 2003.
- [52] J. R. Herring and O. Métais. Numerical experiments in forced stably stratified turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 202 :97–115, 5 1989.
- [53] L. Jacoutot, A. G. Kosovichev, A. A. Wray, and N. N. Mansour. Numerical Simulation of Excitation of Solar Oscillation Modes for Different Turbulent Models. The Astrophysical Journal, 682 :1386–1391, August 2008.
- [54] B Knaepen and P. Moin. Large-eddy simulation of conductive flows at low magnetic reynolds number. Physics of Fluids, 16(5) :1255–1261, 2004.
- [55] A.N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 30 :299–303, 1941.
- [56] R. H. Kraichnan. Inertial-range transfer in two- and three-dimensional turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 47 :525–535, 6 1971.
-

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [57] F. Krause and K-H. Rädler. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Pergamon Press Oxford, 1980.
- [58] A. K. Kuczaj and B. J. Geurts. Mixing in manipulated turbulence. Journal of Turbulence, page N67, 2006.
- [59] M. Lesieur. Turbulence in Fluids (3rd revised and enlarged edition). Kluwer Academic, 1997.
- [60] T. Lessinnes, F. Plunian, R. Stepanov, and D. Carati. Dissipation scales of kinetic helicities in turbulence. Physics of Fluids, 23(3) :-, 2011.
- [61] D. K. Lilly. A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. Physics of Fluids, 4(3) :633–635, 1992.
- [62] H. Matsui and B. A. Buffett. Sub-grid scale model for convection-driven dynamos in a rotating plane layer. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 153(1–3) :108 – 123, 2005. Studies of the Earth’s Deep Interior SEDI 2004.
- [63] H. Matsui and B. A. Buffett. Characterization of subgrid-scale terms in a numerical geodynamo simulation. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 223(0) :77 – 85, 2013. 13th SEDI conference.
- [64] P. D. Mininni, A. Alexakis, and A. Pouquet. Shell-to-shell energy transfer in magnetohydrodynamics. ii. kinematic dynamo. Phys. Rev. E, 72 :046302, Oct 2005.
- [65] P. D. Mininni, A. Alexakis, and A. Pouquet. Nonlocal interactions in hydrodynamic turbulence at high reynolds numbers : The slow emergence of scaling laws. Phys. Rev. E, 77 :036306, Mar 2008.
- [66] H. K. Moffatt. The degree of knottedness of tangled vortex lines. Journal of Fluid Mechanics, null :117–129, 1 1969.
- [67] H.K. Moffatt. Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids. Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge University Press, 1978.
- [68] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoïn, M. Moulin, Ph. Odier, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié, and F. Ravelet. Generation of a magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium. Phys. Rev. Lett., 98 :044502, Jan 2007.
- [69] W.-C. Muller and D. Carati. Dynamic gradient-diffusion subgrid models for incompressible magnetohydrodynamic turbulence. Physics of Plasmas, 9(3) :824–834, 2002.
- [70] O. Métais, P. Bartello, E. Garnier, J.J. Riley, and M. Lesieur. Inverse cascade in stably stratified rotating turbulence. Dynamics of Atmospheres and Oceans, 23(1–4) :193 – 203, 1996. Stratified flows.
- [71] A.M. Obukhov. On the energy distribution in the spectrum of turbulent flows. Izv. Akad. Nauk SSSR, 5 :453–566, 1941.



- [72] E. N. Parker. Hydromagnetic Dynamo Models. The Astrophysical Journal, 122 :293, September 1955.
- [73] U. Piomelli and J.R. Chasnov. Large-eddy simulations : Theory and applications. In M. Hallböck, D.S. Henningson, A.V. Johansson, and P.H. Alfredsson, editors, Turbulence and Transition Modelling, volume 2 of ERCOFTAC Series, pages 269–336. Springer Netherlands, 1996.
- [74] F. Plunian, R. Stepanov, and P. Frick. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence. Physics Reports, 523(1) :1–60, 2013.
- [75] Y.B. Ponomarenko. Theory of the hydromagnetic generator. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 14(6) :775–778, 1973.
- [76] Y. Ponty, P. D. Mininni, J-F Pinton, H. Politano, and A. Pouquet. Dynamo action at low magnetic prandtl numbers : mean flow versus fully turbulent motions. New Journal of Physics, 9(8) :296, 2007.
- [77] S. B. Pope. Turbulent flows. Cambridge, 2000.
- [78] A. Pouquet, U. Frisch, and J. Léorat. Strong mhd helical turbulence and the non-linear dynamo effect. Journal of Fluid Mechanics, 77 :321–354, 9 1976.
- [79] K-H. Rädler and M. Rheinhardt. Mean-field electrodynamics : critical analysis of various analytical approaches to the mean electromotive force. Geophysical & Astro Fluid Dynamics, 101(2) :117–154, 2007.
- [80] O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels. Proc. R. Soc. Lond, 1883.
- [81] L. F. Richardson. Weather prediction by numerical process. 1922.
- [82] G. O. Roberts. Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 271(1216) :411–454, 1972.
- [83] K.-H. Rädler. Mean-field dynamo theory : Early ideas and today’s problems. In Magnetohydrodynamics, volume 80 of Fluid Mechanics And Its Applications, pages 55–72. Springer Netherlands, 2007.
- [84] P. Sagaut. Large eddy simulation for incompressible flows. Springer, 2002.
- [85] I. E. Sarris, H. Jeanmart, D. Carati, and G. Winckelmans. Box-size dependence and breaking of translational invariance in the velocity statistics computed from three-dimensional turbulent kolmogorov flows. Physics of Fluids, 19(9) :–, 2007.
- [86] J. Smagorinsky. General Circulation Experiments with the Primitive Equations. Monthly Weather Review, 91 :99, 1963.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [87] K. S. Smith, G. Boccaletti, C. C. Henning, I. Marinov, C. Y. Tam, I. M. Held, and G. K. Vallis. Turbulent diffusion in the geostrophic inverse cascade. Journal of Fluid Mechanics, 469 :13–48, 10 2002.
- [88] M. Steenbeck, F. Krause, and Ke-H Rädler. A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of coriolis forces. Z. Naturforsch, 21 :369–376, 1966.
- [89] R. Stepanov, F. Plunian, M. Kessar, and G. Balarac. Systematic bias in the calculation of spectral density from a three-dimensional spatial grid. Phys. Rev. E, 90 :053309, Nov 2014.
- [90] R. Stieglitz and U. Müller. Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. Physics of Fluids, 13(3) :561–564, 2001.
- [91] G. I. Taylor. The spectrum of turbulence. In Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, volume 164, pages 476–490. The Royal Society, 1938.
- [92] H. Tennekes and J. L. Lumley. A first course in turbulence. The MIT Press, 1972.
- [93] M. L. Theobald, P. A. Fox, and S. Sofia. A subgrid-scale resistivity for magnetohydrodynamics. Physics of plasmas, 1 :3016, 1994.
- [94] S. M. Tobias and F. Cattaneo. - Shear-driven dynamo waves at high magnetic Reynolds number. Nature, - 497(- 7450) :- – 465, may 2013.
- [95] M. K. Verma. Statistical theory of magnetohydrodynamic turbulence : recent results. Physics Reports, 401 :229–380, November 2004.
- [96] A. Viré, D. Krasnov, T. Boeck, and B. Knaepen. Modeling and discretization errors in large eddy simulations of hydrodynamic and magnetohydrodynamic channel flows. Journal of Computational Physics, 230(5) :1903 – 1922, 2011.
- [97] B Vremen, B. Geurts, and H. Kuerten. Large-eddy simulation of the turbulent mixing layer. Journal of Fluid Mechanics, 339 :357–390, 1997.
- [98] F. Waleffe. Inertial transfers in the helical decomposition. Physics of Fluids, 5(3) :677–685, 1992.
- [99] N. Yokoi. Modeling the turbulent cross-helicity evolution : production, dissipation, and transport rates. Journal of Turbulence, 12 :N27, 2011.
- [100] N. Yokoi and G. Balarac. Cross-helicity effects and turbulent transport in magnetohydrodynamic flow. Journal of Physics Conference Series, 318(7) :072039, December 2011.
- [101] C. Yu, Z. Xiao, Y. Shi, and S. Chen. Joint-constraint model for large-eddy simulation of helical turbulence. Phys. Rev. E, 89 :043021, Apr 2014.
- [102] Y. B. Zeldovich. the magnetic field in the two-dimensional of a conducting turbulent fluid. Zh. Eksp. Teor. Fiz., 1957.

---

## Abstract

---

Homogeneous and isotropic turbulence was first formalized by Kolmogorov (1941), through dimensional analysis. He managed to show that the spectral density of kinetic energy,  $E(k)$ , was following a  $k^{-5/3}$  law. This behaviour is known as Kolmogorov's cascade. For many geophysical and astrophysical flow, kinetic helicity plays an important role. For instance, Parker (1955) showed that for conductive fluids such as Sun, kinetic helicity could contribute to amplify the magnetic field. Brissaud *et al* (1973) tried to show that kinetic helicity could have an influence on the spectral density of kinetic energy. Through dimensional analysis they suggested the existence of a cascade for which the kinetic energy spectra would follow a  $k^{-7/3}$  law. In the first part of this thesis we will confirm thanks to Direct Numerical Simulations (DNS) the existence of such an asymptotic limit in  $k^{-7/3}$ . We will also use helical decomposition to perform a deep analysis of the physics encountered within such flows.

In several geophysical and astrophysical fluids, turbulence is very strong, and involves a large range of scales. Despite the strong development of computational resources the last few decades, it remains impossible to simulate this range of scales for realistic configurations. One solution is known as Large Eddy Simulations (LES). While a LES is performed, only the large scales of the flow are resolved, and the interactions between large and small scales are modeled. Several turbulence models have been developed for LES of turbulence. Nevertheless, the limitations of these models are not always well known for magnetohydrodynamic (MHD) turbulence, i.e for conductive fluids that can be encountered in geophysics and astrophysics. In the second part of this thesis we will evaluate the functional performances (see Sagaut (2002)) of these models for several flow configurations involving turbulent dynamo action, i.e when a magnetic field is amplified through the action of a turbulent conductive fluid. In particular we will study the capabilities of LES models to reproduce energy exchanges between large and small scales. In order to do so, we will perform several DNS, for both non-helical flows (i.e leading to small scale dynamo) and helical flows (i.e leading to large scale dynamo). Thanks to a filtering operation we will compute the exact subgrid-scale transfers and compare them to the predictions given by several models. Finally we will achieve LES using subgrid-scale models and we will compare them to filtered DNS.

**Keywords :** Turbulence, Helicity, Magnetohydrodynamic, Numerical simulation, Large-Eddy Simulation

---

## Résumé

---

La turbulence homogène et isotrope fut formalisée par Kolmogorov (1941), à l'aide d'une analyse dimensionnelle. Il parvint à démontrer que la densité spectrale de l'énergie cinétique,  $E(k)$  suivait une loi en  $k^{-5/3}$ . Ce comportement est connu sous le nom de cascade de Kolmogorov. Dans de nombreux contextes géophysiques ou astrophysiques, l'hélicité cinétique joue un rôle important. Parker (1955) a notamment démontré que l'hélicité cinétique pouvait contribuer à l'amplification d'un champ magnétique pour des écoulements conducteurs. Brissaud *et al* (1973) ont alors tenté de déterminer l'influence que l'hélicité cinétique pouvait avoir sur les spectres d'énergie cinétique. Brissaud *et al* (1973) suggèrent l'existence d'une cascade pour laquelle les spectres d'énergie cinétique suivent une loi en  $k^{-7/3}$ . Dans la première partie de ce manuscrit nous allons confirmer à l'aide de simulations numériques directes (DNS) l'existence d'une loi asymptotique en  $k^{-7/3}$ . Nous aurons également recouru à la décomposition en modes hélicitaires afin d'analyser de manière approfondie la physique qui régit ces écoulements.

Dans de nombreux écoulements géophysiques ou astrophysiques, la turbulence est très forte, et une très large gamme d'échelles est impliquée. Bien que la puissance des calculateurs ait considérablement augmenté ces dernières années, il n'est toujours pas possible de simuler l'ensemble de cette gamme d'échelles pour des configurations réalistes. Une solution connue sous le nom de Large Eddy Simulations (LES) permet de réaliser des simulations de ce type d'écoulement. Concrètement, lors de la réalisation d'une LES, les grandes échelles de l'écoulement sont résolues, et les interactions entre les grandes et les petites échelles de l'écoulement sont modélisées. Divers modèles de turbulence existent déjà pour la réalisation de LES en turbulence. Néanmoins leurs limites ne sont pas toujours bien connues dans le cadre de la turbulence magnétohydrodynamique (MHD), c'est-à-dire pour les fluides conducteurs de l'électricité que l'on rencontre en géophysique ou astrophysique. Dans la seconde partie de ce manuscrit nous allons donc évaluer les performances fonctionnelles (voir Sagaut (2002)) de ces différents modèles dans des configurations correspondant à des dynamos turbulentes, c'est-à-dire à des régimes où un champ magnétique est généré par un fluide conducteur animé d'un mouvement turbulent. Nous étudierons notamment la capacité des modèles LES à reproduire les échanges énergétiques entre grandes et petites échelles. Pour ce faire, nous réaliserons plusieurs DNS, pour des écoulements non-hélicitaires (menant à des dynamos de petites échelles) et des écoulements hélicitaires (menant à des dynamos de grandes échelles). À l'aide d'une opération de filtrage, nous calculerons les transferts sous-mailles exacts, puis les comparerons aux prédictions fournies par les modèles. Finalement nous réaliserons des LES à l'aide des différents modèles et nous les comparerons aux DNS filtrées.

**Mots clés :** Turbulence, Hélicité, Magnétohydrodynamique, Simulation numérique, Simulation des Grandes Echelles