



HAL
open science

Sur le spectre des exposants d'approximation diophantienne classiques et pondérés

Antoine Marnat

► **To cite this version:**

Antoine Marnat. Sur le spectre des exposants d'approximation diophantienne classiques et pondérés. Théorie des nombres [math.NT]. Université de Strasbourg, 2015. Français. NNT : 2015STRAD042 . tel-01226270v2

HAL Id: tel-01226270

<https://theses.hal.science/tel-01226270v2>

Submitted on 6 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE MSII 269

IRMA UMR 7501

THÈSE présentée par :

Antoine MARNAT

soutenue le : **24 novembre 2015**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : **Mathématiques**

**Sur le spectre des exposants
d'approximation diophantienne
classiques et pondérés**

THÈSE dirigée par :

M.BUGAUD Yann

M.CHEVALLIER Nicolas

Professeur, Université de Strasbourg

Professeur, Université de Haute Alsace

RAPPORTEURS :

M. ROY Damien

M. LAURENT Michel

Professeur, Université d'Ottawa

Directeur de Recherche, CNRS Aix Marseille Université

AUTRES MEMBRES DU JURY :

M. MAUCOURANT François

M. STOLL Thomas

Maître de Conférence, Université Rennes 1

Professeur, Institut Elie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine

Sur le spectre des exposants d'approximation
diophantienne classiques et pondérés

Antoine MARNAT
marnat@math.unistra.fr

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg et C.N.R.S.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex

Thèse de doctorat sous la direction de

Yann BUGEAUD et Nicolas CHEVALLIER
yann.bugeaud@math.unistra.fr nicolas.chevallier@uha.fr

Remerciements

Happiness only real when shared.

—John Krakauer, *Into the Wild*

Merci, à qui de droit -car je n'arriverai pas à être exhaustif.

Tout particulièrement, un grand merci à Yann Bugeaud et Nicolas Chevallier d'avoir accepté de m'encadrer pour mon travail de thèse. Ils ont su à merveille me laisser une grande liberté tout en étant à chaque fois présent quand nécessaire pour m'aiguiller, me débloquent et partager leur culture mathématique.

Merci également à Michel Laurent et Damien Roy d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je me suis appuyé sur leur travaux (très) récents pour mes recherches, travaux à travers lesquels j'ai découvert avec plaisir les approximations diophantiennes. Merci Damien pour le temps passé à discuter au téléphone depuis Ottawa et à relire mes travaux.

Merci à François Maucourant et Thomas Stoll d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie également l'IRMA et son équipe aussi bien scientifique qu'administrative de m'avoir accueilli pour ces 3 années, tout particulièrement mes co-bureaux Abdoulaye, Jérémy et Shanshan ainsi que les autres thésards Vincent, Amaury, Florian, Guillaume, Clément, Auguste, Mohamad, Stéphane, Michel, Philippe, Amandine, Romain, Thomas, Simon, Arthur, Ranine, Audrey, Jérôme et Olivier pour la bonne ambiance lors des repas au RU ou des séminaires doctorants.

La thèse est l'aboutissement de nombreuses années d'études, qui pierre après pierre ont construit le mathématicien et l'homme que je suis aujourd'hui. J'ai toujours eu la chance d'avoir des enseignants qui ont su pousser ma curiosité, depuis l'école élémentaire avec Mme Guthardt et Mme Zeiter, les années collège en section bilingue avec Mme Muller, Mme Schwartz et Mme Jordan, puis les années lycée en section Abibac avec M. Berguin, Mme Rilling, Mme Hinze et M. Machon. Un grand merci à Thierry Schwarz, qui en MPSI m'a fait découvrir les "vraies" maths pour la première fois, confirmant mon attrait en la matière, et à Patrick Généaux en MP* qui m'a aidé à intégrer l'ENS.

Je remercie du fond du coeur l'ENS -et donc notre premier empereur venu de Corse. J'y ai bénéficié d'un terreau pour mon développement mathématiques d'une part -avec une formation d'excellence parfois à la carte, des collègues enthousiastes avec lesquels nous avons par exemple établi une Théorie de la Vanne- mais aussi mon développement personnel grâce à un climat original de liberté et d'émulation intellectuelle à travers le mélange avec les autres filières, notamment les 2SEPs. Ces échanges permettent de ne pas s'enfermer dans le carcan de sa discipline. Sans oublier l'Allocation Spécifique Normalien qui a financé cette thèse, et le statut avantageux de normalien.

Mais le résultat d'un travail de recherche en mathématiques n'est pas uniquement le fruit d'un savoir académique. *Mens sana in corpore sano*. Merci à mes coloc' de ces 3 années : Jean, Chloé, Janina, Agata, Tesch, Renata, Samaneh, Maria et Manon pour les bons moments passés à la maison et en dehors. Merci à ma famille et mes amis de Strasbourg, Rennes, Grenoble, et des quatre coins du monde. Qu'il s'agisse de monter un meuble d'une marque suédoise, se faire piéger sur la presqu'île de St Jacut, manger la peuf des 7 Laux, boire du Diplomatico au Fat Black, se prendre la tempête en Laponie, manger un plat bleu dans l'appart' avec la plus belle vue de Sydney, apprendre la vie au Moyen-Orient, au Kirghizstan ou en Amérique du Sud, aller chercher des podiums à Vienne, Brest ou Reims, faire des parties de belote en 10000pts dans les trains allemands, monter sur le sommet oriental de la plus belle montagne du monde, jouer au möllky, faire l'Eiger Ultra Trail ou simplement lancer un freesbee, faire un BBQ dans le jardin de Meylan, danser même après le lever du soleil, se prendre des branlées en Foot U mais gagner le rugby des InterENS, prendre le thé au couchant sur le Bosphore, jouer à PES en mangeant du tiramisu crème de marron, passer du temps en montagne, ou témoigner à votre mariage. Toutes ces choses sont les épices de la vie qui contribuent à un corps et un esprit sain. Merci Lucile - pour le passé, le présent et le futur.

Enfin, je ne remercie *pas* Simon Billouet de m'avoir initié à CandyCrush, ni Stéphane Marseglia pour les trop nombreuses vies qu'il m'a données.

PS : Merci à Salim Himmi, je ne sais pas trop pourquoi mais lui oui.

à Arthur, Nicolas et Xavier partis trop tôt

Table des matières

Introduction	1
1 Cas de la dimension 1	6
1.1 Définitions et résultats	6
1.2 Fractions continues	9
2 Cas de la dimension 2	13
2.1 Exposants classiques	13
2.2 Exposants multiplicatifs et pondérés	15
2.3 Suite de points minimaux, meilleures approximations	22
2.4 Résultats pour le spectre pondéré	24
2.5 Démonstration du Théorème 2.10	28
2.6 Résultats dans le cas multiplicatif	32
3 Cas de la dimension $n \geq 2$	37
3.1 Boîte à outils	37
3.1.1 Corps convexes, minima et produit extérieur	37
3.1.2 Distance et hauteur d'un sous-espace affine rationnel	39
3.2 Définition des exposants	40
3.3 Résultats sur le spectre	42
3.4 Géométrie paramétrique des nombres	45
3.4.1 Résultats	52
3.4.2 Exposants de Schmidt et Summerer	54
3.5 Applications de la géométrie paramétrique des nombres	59
3.5.1 Démonstration alternative du Théorème 2.2	59
3.5.2 Démonstration du Théorème 3.14	69
3.6 Géométrie paramétrique des nombres et pondération	70
3.6.1 Correspondance de Dani et pondération	70
3.6.2 Incompatibilité entre la pondération du flot et la pondération issue du cas multiplicatif	76
3.7 Questions ouvertes et perspectives	86
3.7.1 Exposants classiques	86
3.7.2 Pondération	87
3.7.3 Exposants multiplicatifs	87

Annexe A There is no analogue to Jarník’s relation for twisted diophantine approximation	88
A.1 Introduction and main result	88
A.2 Sequence of minimal points and proof of Theorems A.3 and A.4 . . .	92
A.3 Proof of the lemmas on minimal points	96
Annexe B About Jarník’s-type relation in higher dimension	102
Introduction	102
B.1 Parametric Geometry of Numbers	104
B.2 Proof of Theorem B.3	107
B.3 An alternative proof of Theorem B.2	111
B.4 Proof of Theorem B.4 and Theorem B.8	115
Bibliographie	126

Introduction

"Alors, par quoi ça commence ?" est la question qu'on se pose généralement en ouvrant un livre.

—Olaf Candau, *Narcisse*

Exposants d'approximation diophantienne classiques

Dans le domaine des approximations diophantiennes, le premier résultat important remonte à 1842 avec le Théorème de Dirichlet [13]. Auparavant, la théorie des fractions continues avait déjà permis d'établir certains résultats.

Théorème A (Dirichlet, 1842). *Soient r et s deux entiers supérieurs à 1, on pose $n = rs$. Pour $i = 1, \dots, s$ et $j = 1, \dots, r$, soit $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{i,j})_{i,j}$ un n -uplet de nombres réels. Soit $Q > 1$ un nombre réel. Alors il existe des entiers $q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_s$ tels que*

$$1 \leq \max_{1 \leq j \leq r} |q_j| \leq Q \text{ et } \max_{1 \leq i \leq s} |\theta_{i,1}q_1 + \dots + \theta_{i,r}q_r - p_i| \leq Q^{-\frac{r}{s}} \quad (a)$$

Une question naturelle est alors de savoir s'il existe des n -uplets pour lesquels il est possible d'améliorer l'exposant r/s . C'est l'objet de la théorie des exposants d'approximation diophantienne, qui mesurent pour un n -uplet donné l'exposant optimal dans des inégalités du même type que (a).

Lorsque $r = n$ et $s = 1$, on identifie la matrice $\boldsymbol{\theta}$ à un point de \mathbb{R}^n . On définit ainsi pour un n -uplet $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ l'exposant ordinaire $\omega(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant uniforme $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels ω tels que le système

$$1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} |q_j| \leq Q \text{ et } 0 < |\theta_1q_1 + \dots + \theta_nq_n - p| \leq Q^{-\omega} \quad (a_1)$$

admet des solutions entières pour des nombres réels Q arbitrairement grand (resp. pour tout nombre réel Q assez grand). Lorsque $s = n$ et $r = 1$, on identifie également la matrice $\boldsymbol{\theta}$ à un point de \mathbb{R}^n . On définit pour un n -uplet $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ l'exposant ordinaire $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant uniforme $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels λ tels que le système

$$1 \leq |q| \leq Q \text{ et } 0 < \max_{1 \leq i \leq n} |\theta_iq - p_i| \leq Q^{-\lambda} \quad (a_2)$$

admet des solutions entières pour des nombres réels Q arbitrairement grand (resp. pour tout nombre réel Q assez grand).

Ces exposants ont été définis et étudiés dans les travaux de Khintchine [26] [27], Jarník [21] et plus récemment de Bugeaud et Laurent [7], [8]. On peut définir d'autres exposants d'approximation, par exemple par des nombres algébriques ou des polyômes. À ce propos voir le survol de Bugeaud [6].

Une fois ces quatre exposants définis, un objectif est de déterminer le *spectre* de tout ou partie de ces exposants, à savoir les valeurs prises par le quadruplet $\Omega(\boldsymbol{\theta}) = (\omega(\boldsymbol{\theta}), \lambda(\boldsymbol{\theta}), \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}), \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}))$ lorsque $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ décrit \mathbb{R}^n avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Le cas dépendants étant pathologique.

Le spectre des exposants ordinaires est donné par le principe de transfert de Khintchine [26].

Théorème B (Principe de transfert de Khintchine, 1926). *Les inégalités*

$$\frac{\omega(\boldsymbol{\theta})}{(n-1)\omega(\boldsymbol{\theta}) + n} \leq \lambda(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{\omega(\boldsymbol{\theta}) - n + 1}{n} \quad (k)$$

sont valables pour tout point $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ de \mathbb{R}^n avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} .

De plus, Jarník [23] a établi que ces deux inégalités sont optimales, si on ne prend en compte que les deux exposants ordinaires ω et λ . Concernant les exposants uniformes, Jarník a démontré en dimension 2 la relation suivante.

Théorème C (Identité de Jarník, 1938). *Pour tout couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ avec $1, \theta_1, \theta_2$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , on a la relation*

$$\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})} = 1. \quad (j)$$

Il donne également des inégalités de transfert pour les exposants uniformes en dimension n quelconque, en faisant remarquer par un contre-exemple qu'il n'y a plus de relation. Récemment German [15] a amélioré ce transfert avec le théorème suivant.

Théorème D (German, 2012). *Soit $n \geq 2$. Pour tout n -uplet de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ \mathbb{Q} -linéairement indépendants, on a*

$$\frac{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) - 1}{(n-1)\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})} \leq \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) - n + 1}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})}. \quad (g)$$

Bugeaud et Laurent [8] ont amélioré le transfert ordinaire de Khintchine en faisant intervenir les exposants uniformes.

Théorème E (Bugeaud, Laurent, 2009). *Pour tout n -uplet de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , on a les inégalités de transfert suivantes.*

$$\frac{(\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) - 1)\omega(\boldsymbol{\theta})}{((n-2)\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) + 1)\omega(\boldsymbol{\theta}) + (n-1)\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})} \leq \lambda(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{(1 - \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}))\omega(\boldsymbol{\theta}) - n(2 - \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}))}{n-1}. \quad (\text{bl})$$

Mais on ne sait pas à l'heure actuelle si ces relations sont optimales en dimension quelconque. Par contre, dans le cas particulier de la dimension $n = 2$, Laurent [32] a pu établir de spectre complet des quatre exposants.

Théorème F (Laurent, 2009). *Pour tout couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ avec $1, \theta_1, \theta_2$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , le spectre $\Omega(\boldsymbol{\theta}) = (\omega(\boldsymbol{\theta}), \lambda(\boldsymbol{\theta}), \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}), \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}))$ vérifie les relations*

$$2 \leq \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) \leq +\infty, \quad \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) - 1}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})}, \quad \frac{\omega(\boldsymbol{\theta})(\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) - 1)}{\omega(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})} \leq \lambda(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{\omega(\boldsymbol{\theta}) - \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) + 1}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})}.$$

Lorsque $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) < \omega(\boldsymbol{\theta}) = +\infty$, ces relations s'interprètent comme $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) - 1 \leq \lambda(\boldsymbol{\theta}) \leq +\infty$ et lorsque $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) = +\infty$, on obtient $\omega(\boldsymbol{\theta}) = \lambda(\boldsymbol{\theta}) = +\infty$ et $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = 1$.

Réciproquement, pour tout quadruplet $(\omega, \lambda, \hat{\omega}, \hat{\lambda}) \in (\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\})^4$ vérifiant les conditions précédentes, il existe un point $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $1, \theta_1, \theta_2$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} tel que $\Omega(\boldsymbol{\theta}) = (\omega, \lambda, \hat{\omega}, \hat{\lambda})$.

En 1967, Schmidt [48] généralise le problème en étudiant comment un sous-espace vectoriel A de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n peut être approché, dans l'espace ambiant, par des sous-espaces de dimension donnée, définis sur un corps de nombre fixé K . Dans cette optique, il introduit la notion de hauteur d'un tel sous-espace, et fut amené à étudier différents angles d'approximation dépendant de la dimension de A . Ce travail important a été récemment revu par Laurent dans le cas qui nous intéresse, à savoir le cas où A est de dimension 1 et $K = \mathbb{Q}$ est le corps des nombres rationnels. Alors, A est engendré par un seul vecteur \mathbf{u} et il n'y a qu'un angle d'approximation à considérer. On se placera dans le cas où $\mathbf{u} = (1, \theta_1, \dots, \theta_n)$. Cela a amené Laurent à introduire une famille de n exposants ordinaires (resp. uniformes) $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ (resp. $\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{n-1}$) qui interpolent entre $\omega_0 = \lambda$ et $\omega_{n-1} = \omega$ (resp. $\hat{\omega}_0 = \hat{\lambda}$ et $\hat{\omega}_{n-1} = \hat{\omega}$). Reprenant les résultats de Schmidt avec ces notations, Laurent [33] décompose le principe de transfert de Khintchine en une série d'inégalités avec ces n exposants, appelées *Going Up* et *Going Down* (Théorème 3.7).

Dans des travaux récents (2009 [50] puis 2013 [51]) Schmidt et Summerer ont introduit la *géométrie paramétrique des nombres* qui apporte une nouvelle approche

sur les exposants d'approximation diophantienne. Il s'agit d'étudier le comportement simultané des minima successifs du corps convexe suivant par rapport au réseau \mathbb{Z}^n

$$\mathcal{C}_u(Q) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq Q^{-1} \right\},$$

lorsque le paramètre réel Q tend vers l'infini. Ici $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n et $\|\mathbf{x}\|_2$ la norme euclidienne associée. Ces minima successifs sont directement reliés aux $2n$ exposants d'approximation diophantienne par la Proposition 3.17. Roy [47] ramène l'étude des spectres à une étude combinatoire sur un ensemble de graphes appelés *n-systèmes généralisés*. Cette nouvelle approche a permis à Roy [46] de montrer que les inégalités de *Going Up* et *Going Down* étaient optimales (Théorème 3.7).

Dans cette thèse, on s'intéresse aux exposants uniformes. On montre que le transfert de German est optimal (Théorème 3.12), si on ne prend en compte que ces deux exposants uniformes. On peut alors se demander s'il existe en dimension quelconque une relation algébrique entre les n exposants uniformes. Une telle relation n'existe pas d'après le Théorème 3.14.

Exposants d'approximation diophantienne multiplicatifs et pondérés

Dans le système (a) du théorème de Dirichlet, on peut changer les max - correspondant à une norme sup - par toute autre norme. En effet en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Nos exposants sont donc indépendants du choix de la norme. Par contre, on peut changer les max par une moyenne géométrique, pour obtenir le système suivant.

$$1 \leq \left(\prod_{1 \leq j \leq r} |q_j| \right)^{\frac{1}{r}} \leq Q \text{ et } \left(\prod_{1 \leq i \leq s} |\theta_{i,1}q_1 + \cdots + \theta_{i,r}q_r - p_i| \right)^{\frac{1}{s}} \leq Q^{-\frac{r}{s}} \quad (\text{b})$$

Ceci donne lieu à la théorie des exposants d'approximation diophantienne multiplicatifs. Une question ouverte emblématique de ce domaine est la *conjecture de Littlewood*.

En ce qui concerne le spectre des exposants d'approximation diophantienne multiplicatifs, German [15] a établi un théorème de transfert (Théorème 2.15), valable aussi bien pour les exposants ordinaires qu'uniformes. Par contre, on ne connaît pas le spectre complet.

On peut également introduire des exposants d'approximation diophantienne pondérés, intermédiaires entre les exposants classiques et les exposants multiplicatifs.

Ils sont définis par le système suivant.

$$1 \leq \max_{1 \leq j \leq r} |q_j|^{\frac{1}{r\mu_j}} \leq Q \text{ et } \max_{1 \leq i \leq s} |\theta_{i,1}q_1 + \cdots + \theta_{i,r}q_r - p_i|^{\frac{1}{s\nu_i}} \leq Q^{-\frac{r}{s}} \quad (\text{c})$$

où $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ (resp. $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_s)$) est un r -uplet (resp. s -uplet) de nombres réels positifs vérifiant $\mu_1 + \cdots + \mu_r = 1$ (resp. $\nu_1 + \cdots + \nu_s = 1$).

Le cas des approximations diophantiennes pondérées a été étudié par S. Harrap, cf. [17] [18]. On peut appliquer un théorème (Théorème 2.8) de Badziahin, Pollington et Velani à ce cas, nous donnant un transfert entre les exposants pondérés ordinaires d'une part, et uniformes d'autre part.

Dans cette thèse, on adapte la méthode employée par Laurent dans le cas de la dimension 2 pour les exposants classiques aux cas multiplicatif et pondérés, dans le but d'obtenir le spectre complet des exposants ordinaires *et* uniformes. On en déduit les Théorèmes 2.10, 2.12 et 2.18. Mais malheureusement ces résultats ne sont pas optimaux, puisqu'ils n'améliorent les résultats de transferts connus que dans certains cas.

Plan de la thèse

Les résultats sont présentés par dimension croissante.

Dans le premier chapitre, on présente le cas de la dimension 1. On s'applique à montrer comment la théorie de fractions continues permet de déterminer le spectre complet.

Dans le deuxième chapitre, on traite le cas de la dimension $n = 2$. On présente notamment le Théorème 2.2 de Laurent déterminant le spectre complet. On applique alors la méthode et les outils de Laurent aux cas multiplicatif et pondéré.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la dimension $n \geq 3$ quelconque. On présente les résultats connus, introduit la *géométrie paramétrique des nombres*, et enfin les nouveaux résultats qu'elle a permis d'établir.

Cas de la dimension 1

L'homme qui veut déplacer une montagne, commence par enlever les petites pierres.

—Confucius

Dans ce chapitre, on considère un nombre réel ξ , dont on va étudier la qualité de l'approximation par des nombres rationnels à l'aide des exposants d'approximation diophantienne. Les résultats de cette première section sont connus depuis le XIX^e siècle avec notamment les travaux de Dirichlet [14].

Nous profiterons de ce premier chapitre pour détailler des démonstrations en dimension 1 qui seront refaites plus succinctement en dimension supérieure.

1.1 Définitions et résultats

On définit l'exposant $\omega(\xi)$ (resp. l'exposant uniforme $\hat{\omega}(\xi)$) d'un nombre réel ξ comme le supremum des nombres réels w pour lesquels le système

$$0 < |x\xi + y| \leq X^{-w}, 1 \leq \max(|x|, |y|) \leq X$$

admet une solution entière (x, y) pour des nombres réels X arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel X assez grand).

Ces exposants peuvent être infinis. Si ξ est un nombre rationnel, ses deux exposants sont nuls, à cause de la condition $0 < |x\xi + y|$. Si -comme le font certains auteurs- on omet cette condition, ses exposants sont infinis. Des exposants nuls sont toutefois plus cohérents avec par exemple le Théorème 1.5. De toute manière, dans la suite, on exclura le cas rationnel. On s'intéressera aux valeurs prises par la paire $(\omega(\xi), \hat{\omega}(\xi))$ lorsque ξ parcourt les nombres irrationnels, appelé *spectre* des exposants ω et $\hat{\omega}$.

Le *Schubfachprinzip* - principe des tiroirs - de Dirichlet [14] nous donne la proposition suivante, qui se généralise facilement en dimension supérieure.

Proposition 1.1. *Soit ξ un nombre réel. Ses exposants d'approximation diophantienne vérifient*

$$1 \leq \hat{\omega}(\xi) \leq \omega(\xi) \leq +\infty.$$

Preuve. Il s'agit du Théorème A dans le cas $m = n = 1$.

Il suffit de montrer que pour tout nombre réel ξ et tout entier $X \geq 1$, l'équation

$$|x\xi + y| \leq X^{-1}$$

admet une solution. On considère les $X + 1$ points $0, \{\xi\}, \dots, \{X\xi\}$ (où $\{\cdot\}$ désigne la partie fractionnaire) qui subdivisent l'intervalle $[0, 1]$ en X sous-intervalles. Au moins l'un de ces intervalles est de longueur au plus $1/X$. Il existe donc des nombres entiers k, l, m et n avec $0 \leq k < l \leq X$ tels que

$$|(l\xi - m) - (k\xi - n)| \leq \frac{1}{X}.$$

On obtient le résultat voulu en posant $y = m - n$ et $x = l - k$ qui sont bien majorés par X . Ceci implique bien $1 \leq \hat{\omega}(\xi) \leq \omega(\xi) \leq +\infty$. □

Le théorème suivant donne le spectre en dimension 1.

Théorème 1.2. *Soit un nombre réel irrationnel ξ , ses exposants d'approximation diophantienne vérifient la relation*

$$1 = \hat{\omega}(\xi) \leq \omega(\xi) \leq +\infty.$$

Réciproquement, pour tout élément ω de l'intervalle $[1, +\infty]$, il existe un nombre réel ξ tel que $\hat{\omega}(\xi) = 1$ et $\omega(\xi) = \omega$.

La démonstration de ce théorème se fera en 1.2, après avoir introduit les fractions continues qui en seront le principal outil.

Concernant la densité de ce spectre, Khintchine a montré le résultat suivant dans [25].

Théorème 1.3 (Khintchine, 1924). *Au sens de la mesure de Lebesgue, presque tout nombre réel ξ vérifie $\omega(\xi) = 1$.*

Ainsi, le Théorème A de Dirichlet n'est améliorable que sur un ensemble de mesure nulle. Pour obtenir des informations plus précises, il est naturel de considérer la *dimension de Hausdorff*. Dans ce sens, Jarník [20] et Besicovitch [2] ont montré indépendamment le théorème suivant

Théorème 1.4 (Jarník-Besicovitch, 1929). *Notons W_ω l'ensemble des nombres réels ξ tels que $\omega(\xi) = \omega$. Sa dimension de Hausdorff est donnée par*

$$\dim_H(W_\omega) = \frac{2}{\omega + 1}.$$

Voir [19] de Hausdorff pour l'introduction de la notion de dimension éponyme.

La première utilisation des exposants d'approximation diophantienne découle du résultat suivant dû à Liouville [35].

Théorème 1.5 (Liouville, 1844). *Soit α un nombre réel algébrique. On a la majoration*

$$\omega(\alpha) \leq \deg(\alpha) - 1.$$

Corollaire 1.6. *D'une part, pour tout nombre réel algébrique quadratique α , on a $\omega(\alpha) = 1$. D'autre part si α est un nombre irrationnel vérifiant $\omega(\alpha) = +\infty$, alors il est transcendant.*

Historiquement, c'est le premier critère de transcendance. Liouville a ainsi construit une classe de nombres transcendants de la forme

$$\sum_{n \geq 1} a_n 10^{-n!} \tag{1.1}$$

avec a_n valant 0 ou 1, dont l'exposant ordinaire est infini.

On appelle *nombres de Liouville*, tout nombre réel irrationnel vérifiant $\omega(\alpha) = +\infty$.

Preuve du Théorème 1.5 On applique le théorème de Rolle au polynôme minimal de α .

□

En 1955, Roth [45] établit un résultat bien plus fort qui lui valut la médaille Fields.

Théorème 1.7 (Roth, 1955). *Pour tout nombre irrationnel algébrique α et pour tout ε , l'inéquation*

$$|x\alpha - y| < \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions entières.

Corollaire 1.8. *Tout nombre irrationnel algébrique α vérifie $\omega(\alpha) = 1$.*

Ainsi, il suffit de montrer que $\omega(\xi) > 1$ pour montrer que ξ est transcendant. Ce critère a des limites, puisqu'il n'existe pas de méthode générique effective pour calculer la valeur de l'exposant $\omega(\xi)$.

Nous allons maintenant introduire la notion de fractions continues, qui permet de résoudre la question du spectre en dimension 1 (Théorème 1.2).

1.2 Fractions continues

Pour tout nombre réel ξ , son *développement en fraction continue* est donnée de manière univoque par la limite

$$\xi = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite (éventuellement finie) de nombres entiers. Si le développement est fini, on s'interdit de finir par $a_n = 1$ lorsque $n \geq 1$ pour avoir l'unicité.

Le nombre réel ξ est rationnel si et seulement si son développement en fraction continue est fini.

On note $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ la $n^{\text{ème}}$ *réduite* de la fraction continue. Les a_i sont appelés les *quotients partiels*.

Les réduites ont l'intérêt de donner une bonne approximation rationnelle. La proposition suivante nous indique comment les construire effectivement :

Proposition 1.9. *En posant $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = a_0$ et $q_0 = 1$, on a la relation de récurrence*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ et } q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

et les égalités

$$\begin{aligned} q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} &= (-1)^n, \\ q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} &= (-1)^{n-1} a_n. \end{aligned}$$

La preuve se fait facilement par induction.

Le théorème suivant de Legendre [34] nous assure que les réduites comprennent toutes les bonnes approximations.

Théorème 1.10 (Legendre, 1798). *Soit ξ un nombre réel. Tout nombre rationnel $\frac{a}{b}$ non nul tel que*

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$$

est une réduite de ξ .

Le résultat suivant nous donne un encadrement de la qualité de l'approximation par des réduites.

Proposition 1.11. *Pour tout nombre irrationnel ξ et tout entier n , on a l'encadrement*

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Preuve du Théorème 1.2 On commence par montrer que $\hat{\omega}(\xi) \leq 1$ pour tout nombre réel irrationnel ξ . Combiné avec la Proposition 1.1, cela implique que $\hat{\omega}(\xi) = 1$. Soit $\xi = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ un nombre réel irrationnel et $(\frac{p_n}{q_n})_{n \geq 1}$ la suite de ses réduites.

Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $X_n = q_{n+1} - 1$, et on considère un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ tel que $a, b \leq X_n$. Si $|b\xi + a| < \frac{1}{2b}$, alors par le Théorème 1.10 de Legendre, $\frac{a}{b}$ est une réduite $\frac{p_k}{q_k}$ de ξ , avec $k \leq n$. On a donc

$$|q_k \xi + p_k| > \frac{1}{q_k + q_{k+1}} > \frac{1}{q_n + q_{n+1}} > \frac{1}{q_{n+1} \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)}$$

car $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ implique $q_n \leq \frac{q_{n+1}}{a_{n+1}}$ et donc

$$|q_k \xi + p_k| > \frac{1}{X_{n+1} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)} > \frac{1}{2X_n}.$$

Sinon, comme X_n tend vers l'infini, pour un n assez grand on a

$$|b\xi + a| \geq \frac{1}{2b} \geq \frac{1}{2X_n}$$

qui est donc une minoration valable dans tout les cas. On obtient donc $\hat{\omega}(\xi) \leq 1$, et combiné avec la Proposition 1.1 on en déduit $\hat{\omega}(\xi) = 1$.

Les nombres de Liouville (1.1) vérifient $\omega(\xi) = \infty$, et les nombres algébriques α vérifient $\omega(\alpha) = 1$. Il reste à montrer que pour un nombre réel $1 < \omega < +\infty$ donné, il existe un nombre réel ξ tel que $\omega(\xi) = \omega$. Nous allons construire un tel nombre réel à l'aide des fractions continues. On pose

$$\xi_\omega = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots],$$

avec $a_0 = a_1 = 1$ et $a_n = \lfloor q_n^{\omega-1} \rfloor$ pour $n \geq 2$. Ici $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. On remarque d'abord que $q_n = o(q_{n+1})$. En effet d'après la formule de calcul par récurrence des q_n , on a

$$q_{n+1} = \lfloor q_n^{\omega-1} \rfloor \cdot q_n + q_{n-1}$$

et donc

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \lfloor q_n^{\omega-1} \rfloor + \frac{q_{n-1}}{q_n}.$$

Comme q_n tend vers l'infini et $\omega - 1 > 0$, le terme $\lfloor q_n^{\omega-1} \rfloor$ est positif et tend vers l'infini. On écrit alors

$$\frac{q_{n+1}}{q_n^\omega} = \frac{\lfloor q_n^{\omega-1} \rfloor}{q_n^{\omega-1}} + \frac{q_{n-1}}{q_n^\omega}.$$

Le premier terme tend vers 1, et le deuxième vers 0 par la remarque précédente. On a donc

$$q_{n+1} \sim_\infty q_n^\omega.$$

Par l'encadrement de la Proposition 1.11 et le Théorème 1.10, on en déduit que $\omega(\xi_\omega) = \omega$.

Ceci achève la preuve du Théorème 1.2. □

Preuve du Théorème 1.3 La démonstration du Théorème 1.3 repose sur le lemme de Borel-Cantelli [3, 9].

Lemme 1.12 (Borel-Cantelli, 1909). *Soit $(E_n)_{n \geq 0}$ une suite de sous-ensembles boréliens de \mathbb{R} telle que la somme*

$$\sum_{n \geq 0} \lambda(E_n)$$

des mesures de Lebesgue des sous-ensembles E_n converge, alors

$$\lambda\left(\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} E_n\right) = 0.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, on considère l'ensemble

$$E_q = \bigcup_{p=0}^q \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \right] \cap [0, 1].$$

On observe que

$$\lambda(E_q) = \frac{2}{q^{1+\varepsilon}}$$

est le terme d'une série convergente. En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, on obtient donc que la mesure de Lebesgue de l'ensemble suivant est nulle :

$$\lambda \left(\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{q \geq N} E_q \right) = 0.$$

Or

$$\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{q \geq N} E_q = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid \omega(x) \geq 1 + \varepsilon\}.$$

D'où le résultat. □

La démonstration du Théorème 1.2 se base essentiellement sur le développement d'un nombre réel en fraction continue. Il existe différentes extensions des fractions continues en dimension supérieure. Malheureusement aucune d'entre elles ne possède à la fois la propriété de donner toutes les bonnes approximations (les réduites), et d'en estimer la taille de manière effective. Voir le survol de Chevallier [10] à ce sujet.

Cas de la dimension 2

Il faut être deux pour être trois.

—Benjamin Péret

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux différents exposants d'approximation diophantienne d'un point du plan réel $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. Le cas de la dimension supérieure sera abordé au chapitre suivant. Ces exposants ont été définis et étudiés par exemple dans les travaux de Khintchine [26, 27], Jarník [21] et plus récemment de Bugeaud et Laurent [7, 8]. Nous considérerons des points $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ avec 1, θ_1 et θ_2 \mathbb{Q} -linéairement indépendants, car s'ils sont linéairement dépendants, on se ramène au cas de la dimension 1, vu précédemment. Nous expliquerons ce phénomène de manière plus générale à l'aide de la géométrie paramétrique des nombres en 3.4.1. En dimension 1, les fractions continues permettent de calculer les exposants, mais en dimension supérieure les fractions continues multidimensionnelles n'ont malheureusement pas de propriétés suffisantes pour en déduire des résultats, comme expliqué dans [10]. Dans un premier temps, nous définirons les exposants classiques et les résultats les concernant, puis les exposants multiplicatifs et enfin le cas pondéré.

2.1 Exposants classiques

On définit l'exposant $\omega(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant uniforme $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels ω tels que le système

$$0 < |x\theta_1 + y\theta_2 + z| \leq X^{-\omega}, 1 \leq \max\{|x|, |y|\} \leq X$$

admet une solution entière (x, y, z) pour des nombres réels X arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel X assez grand).

On définit l'exposant $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant uniforme $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels λ tels que le système

$$0 < \max(|z\theta_1 - x|, |z\theta_2 - y|) \leq X^{-\lambda}, 1 \leq |z| \leq X$$

admet une solution entière (x, y, z) pour des nombres réels X arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel X assez grand).

Certains exposants peuvent être infinis. Les exposants $\omega(\boldsymbol{\theta})$ et $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})$ représentent l'approximation par une forme linéaire, c'est à dire la distance à une droite, tandis que les exposants $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ et $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$ représentent l'approximation par des points, c'est à dire la distance à un réseau.

On s'intéresse à l'ensemble des valeurs prises par le quadruplet

$$\Omega(\boldsymbol{\theta}) = (\omega(\boldsymbol{\theta}), \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}), \lambda(\boldsymbol{\theta}), \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}))$$

lorsque $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ parcourt le plan réel avec $1, \theta_1$ et θ_2 \mathbb{Q} -linéairement indépendants, appelé *spectre* des exposants $(\omega, \hat{\omega}, \lambda, \hat{\lambda})$. Si $1, \theta_1, \theta_2$ sont \mathbb{Q} -linéairement dépendants, on se ramène au cas connu de la dimension 1, à savoir $\Omega(\boldsymbol{\theta}) = (0, 0, 0, 0)$ si θ_1 et θ_2 sont rationnels, $\Omega(\boldsymbol{\theta}) = (0, \lambda, 0, 1)$ où $\lambda \in [1, \infty]$ si l'un d'eux au moins est irrationnel.

Le principe des tiroirs de Dirichlet nous donne les premières minoration :

$$\lambda(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \omega(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) \geq 2.$$

On déduit également du Théorème 1.2 que

$$\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) \leq 1.$$

Pour la démonstration, on pourra se référer à la démonstration de la Proposition 2.4 qui utilise le premier théorème de Minkowski (Théorème 3.1), extension du principe des tiroirs.

À l'aide d'un lemme de Borell-Cantelli, on peut montrer qu'au sens de la mesure de Lebesgue, pour presque tout couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta}$ les quatre exposants valent

$$\lambda(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \omega(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) = 2.$$

Comme en dimension 1, le Théorème A de Dirichlet n'est améliorable que pour un ensemble de mesure nulle.

Concernant les exposants uniformes, Jarník a démontré dans [22] la relation remarquable suivante

Théorème 2.1 (Jarník, 1938). *Soit $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ un couple de nombres réels avec $1, \theta_1, \theta_2$ \mathbb{Q} -linéairement indépendants, ses deux exposants uniformes vérifient la relation*

$$\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = 1 - \frac{1}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})}. \tag{2.1}$$

Concernant les exposants ordinaires, le théorème de transfert de Khintchine [49] établit des relations entre $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ et $\omega(\boldsymbol{\theta})$ (Théorème B).

En dimension 2, le spectre complet est donné par un théorème de Laurent [32] :

Théorème 2.2 (Laurent, 2009). *Pour tout couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ avec $1, \theta_1, \theta_2$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , le quadruplet $\Omega(\boldsymbol{\theta}) = (\omega(\boldsymbol{\theta}), \lambda(\boldsymbol{\theta}), \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}), \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}))$ vérifie les relations*

$$2 \leq \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) \leq +\infty, \quad \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) - 1}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})}, \quad \frac{\omega(\boldsymbol{\theta})(\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) - 1)}{\omega(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})} \leq \lambda(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{\omega(\boldsymbol{\theta}) - \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) + 1}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})}.$$

Lorsque $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) < \omega(\boldsymbol{\theta}) = +\infty$, ces relations s'interprètent comme $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) - 1 \leq \lambda(\boldsymbol{\theta}) \leq +\infty$ et lorsque $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) = +\infty$, on obtient $\omega(\boldsymbol{\theta}) = \lambda(\boldsymbol{\theta}) = +\infty$ et $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = 1$.

Réciproquement, pour tout quadruplet $(\omega, \lambda, \hat{\omega}, \hat{\lambda}) \in (\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\})^4$ vérifiant les conditions précédentes, il existe un point $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $1, \theta_1, \theta_2$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} tel que $\Omega(\boldsymbol{\theta}) = (\omega, \lambda, \hat{\omega}, \hat{\lambda})$.

Les résultats antérieurs ne prenaient pas en compte les exposants uniformes, c'est par ce biais que Laurent a obtenu le spectre complet. Pour cela, il a utilisé la notion de suite de points minimaux qui sera introduite au paragraphe 2.3. Cette approche ne se généralise pas en dimension supérieure, car il y a un phénomène de dualité entre point et droite spécifique à la dimension 2. Une démonstration alternative du Théorème 2.2 utilisant la géométrie paramétrique des nombres sera donnée au paragraphe 3.5.1

On remarquera que le Théorème 2.2 impose que si l'un des exposants ordinaires a sa valeur presque sûre, alors les quatre exposants prennent leur valeur presque sûre. De même, la relation de Jarník impose que si l'un des exposants uniformes prend sa valeur presque sûre, c'est le cas des deux exposants uniformes. Cette simultanéité a été montrée dans un contexte matriciel plus général par Schmidt et Wang dans [52].

2.2 Exposants multiplicatifs et pondérés

Dans le sous-chapitre précédent, on a considéré des exposants quantifiant comment pour certains couples de nombres réels, le Théorème A de Dirichlet pouvait être amélioré. À l'image du premier théorème de Minkowski (Théorème 3.1), on a considéré la norme sup pour majorer la taille des nombres entiers approchant nos nombres réels. Toutefois, il est également possible de considérer plutôt la *moyenne géométrique*, ce qui donne lieu à l'étude des approximations diophantiennes dites

multiplicatives. Ce cadre a été moins étudié, notamment car il est bien plus difficile.

Le lecteur pourra se référer au survol de Bugeaud [5] sur le sujet pour plus de détails.

Dans ce sous-chapitre, nous allons commencer par définir les exposants multiplicatifs, puis des exposants pondérés intermédiaires. L'étude de ceux-ci a pour but d'obtenir des informations sur le cas multiplicatif.

On définit l'exposant multiplicatif ordinaire $\omega_{\times}(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant multiplicatif uniforme $\hat{\omega}_{\times}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels ω tels que le système

$$0 < |x\theta_1 + y\theta_2 + z| \leq X^{-\omega}, (\max(1, |x|) \max(1, |y|))^{\frac{1}{2}} \leq X$$

admet une solution entière en (x, y, z) pour des nombres réels X arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel X assez grand).

On définit l'exposant multiplicatif ordinaire $\lambda_{\times}(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant multiplicatif uniforme $\hat{\lambda}_{\times}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels λ tels que le système

$$0 < (|z\theta_1 - x||z\theta_2 - y|)^{\frac{1}{2}} \leq X^{-\lambda}, 0 < |z| \leq X$$

admet une solution entière en (x, y, z) pour des nombres réels X arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel X assez grand).

Comme dans le cas classique, ces exposants peuvent être infinis.

On remarque que les ensembles de la forme $\{|xy| \leq X\}$ peuvent être paramétrés par l'union non dénombrable des ensembles de la forme $\{|x| \leq X^i, |y| \leq X^j\}$ avec $0 \leq i, j \leq 1$ et $i + j = 1$. Voir la Figure 2.1.

Il est donc naturel d'étudier les exposants pondérés suivants, qui s'adaptent à cette pondération.

Soient deux nombres réels i et j avec $0 \leq i, j \leq 1$ et $i + j = 1$.

On définit l'exposant pondéré ordinaire $\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant pondéré uniforme $\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels ω tels que le système

$$0 < |x\theta_1 + y\theta_2 + z| \leq X^{-\omega}, \max(|x|^{\frac{1}{2i}}, |y|^{\frac{1}{2j}}) \leq X$$

admet une solution entière en (x, y, z) pour des nombres réels X arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel X assez grand).

On définit l'exposant pondéré ordinaire $\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant pondéré uniforme $\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels λ tels que le système

$$0 < \max(|z\theta_1 - x|^{\frac{1}{2i}}, |z\theta_2 - y|^{\frac{1}{2j}}) \leq X^{-\lambda}, 0 < |z| \leq X$$

admet une solution entière en (x, y, z) pour des nombres réels X arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel X assez grand).

Comme dans les cas précédents, ces exposants peuvent être infinis.

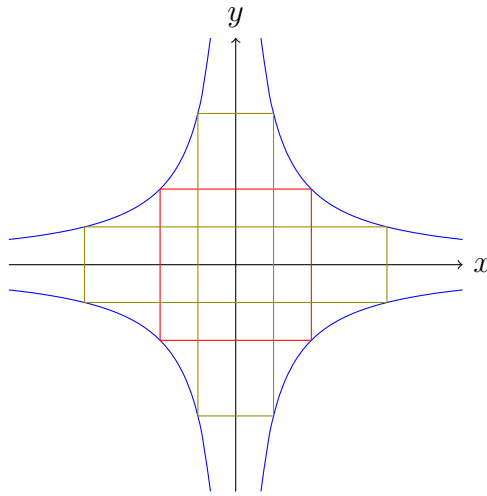


FIGURE 2.1 – Paramétrisation des domaines hyperboliques par des rectangles.

En bleu, le domaine hyperbolique $\{|xy| \leq X\}$, en vert des ensembles de la forme $\{|x| \leq X^i, |y| \leq X^j\}$ avec $0 \leq i, j \leq 1$ et $i + j = 1$ et en rouge le cas particulier $i = j = 1/2$.

On remarque que la définition des exposants pondérés est compatible avec l'utilisation du premier théorème de Minkowski (Théorème 3.1). On pourra donc adapter les outils développés dans le cas classique pour les étudier. Au lieu de considérer une fenêtre à l'infini carrée (en rouge sur la Figure 2.1), on considère ici des rectangles (en vert sur la Figure 2.1) qui s'écrasent à l'infini dans le sens où le rapport entre la longueur et la largeur tend vers l'infini avec X .

Le cas des approximations diophantiennes pondérées a été étudié par Harrap, cf. [17] [18].

On s'intéresse dans la suite à l'ensemble des valeurs prises par le quadruplet $\Omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = (\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}), \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}), \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}), \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}))$ lorsque $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ parcourt le plan réel

avec $1, \theta_1$ et θ_2 \mathbb{Q} -linéairement indépendants, appelé *spectre pondéré*.

On pourra simplifier la question en utilisant des propriétés de symétrie évidentes énoncées dans la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 , pour tout $0 \leq i, j \leq 1$ tels que $i + j = 1$, on a les égalités*

$$\begin{aligned}\lambda_{\times}(\theta_1, \theta_2) &= \lambda_{\times}(\theta_2, \theta_1), & \omega_{\times}(\theta_1, \theta_2) &= \omega_{\times}(\theta_2, \theta_1), \\ \lambda_{i,j}(\theta_1, \theta_2) &= \lambda_{j,i}(\theta_2, \theta_1), & \omega_{i,j}(\theta_1, \theta_2) &= \omega_{j,i}(\theta_2, \theta_1),\end{aligned}$$

également valables avec les exposants uniformes

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_{\times}(\theta_1, \theta_2) &= \hat{\lambda}_{\times}(\theta_2, \theta_1), & \hat{\omega}_{\times}(\theta_1, \theta_2) &= \hat{\omega}_{\times}(\theta_2, \theta_1), \\ \hat{\lambda}_{i,j}(\theta_1, \theta_2) &= \hat{\lambda}_{j,i}(\theta_2, \theta_1), & \hat{\omega}_{i,j}(\theta_1, \theta_2) &= \hat{\omega}_{j,i}(\theta_2, \theta_1).\end{aligned}$$

Les relations simples avec les exposants classiques sont données dans la proposition suivante :

Proposition 2.4. *Soit $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ un couple de nombres réels tel que $1, \theta_1, \theta_2$ sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants. Soient i, j, k, l des nombres réels positifs inférieurs à 1 avec $i + j = 1 = k + l$. On a les relations*

$$2 \leq \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \leq \omega_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{1}{\min(i, j)} \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}), \quad (\text{i})$$

$$2 \leq \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \leq \hat{\omega}_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{1}{\min(i, j)} \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}), \quad (\text{ii})$$

$$\frac{1}{2} \leq \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \leq \lambda_{\times}(\boldsymbol{\theta}), \quad (\text{iii})$$

$$\frac{1}{2} \leq \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \leq \hat{\lambda}_{\times}(\boldsymbol{\theta}), \quad (\text{iv})$$

$$\min\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{l}\right) \omega_{k,l}(\boldsymbol{\theta}) \leq \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \leq \max\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{l}\right) \omega_{k,l}(\boldsymbol{\theta}), \quad (\text{v})$$

$$\min\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{l}\right) \hat{\omega}_{k,l}(\boldsymbol{\theta}) \leq \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \leq \max\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{l}\right) \hat{\omega}_{k,l}(\boldsymbol{\theta}), \quad (\text{vi})$$

$$\min\left(\frac{k}{i}, \frac{l}{j}\right) \lambda_{k,l}(\boldsymbol{\theta}) \leq \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \leq \max\left(\frac{k}{i}, \frac{l}{j}\right) \lambda_{k,l}(\boldsymbol{\theta}), \quad (\text{vii})$$

$$\min\left(\frac{k}{i}, \frac{l}{j}\right) \hat{\lambda}_{k,l}(\boldsymbol{\theta}) \leq \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \leq \max\left(\frac{k}{i}, \frac{l}{j}\right) \hat{\lambda}_{k,l}(\boldsymbol{\theta}), \quad (\text{viii})$$

$$\hat{\lambda}_{1,0}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\lambda}_{0,1}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}, \quad (\text{ix})$$

$$\hat{\omega}_{1,0}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_{0,1}(\boldsymbol{\theta}) = 2. \quad (\text{x})$$

De (viii) on déduit la majoration $\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{1}{2 \min(i,j)}$, par contre on n'a pas a priori de majoration de $\hat{\lambda}_\times(\boldsymbol{\theta})$.

La démonstration de cette proposition repose entièrement sur des minoration obtenues par le premier théorème de Minkowski (Théorème 3.1), qui illustre le principe des tiroirs de Dirichlet. Elle sera donnée en fin de paragraphe. Une première conséquence est le théorème suivant.

Théorème 2.5. *Pour tout couple de réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ avec $1, \theta_1, \theta_2$ sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants, les fonctions suivantes sont continues sur $]0, 1[$*

$$\begin{aligned} i \mapsto \omega_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}), \quad i \mapsto \hat{\omega}_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}), \\ i \mapsto \lambda_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}), \quad i \mapsto \hat{\lambda}_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

Cette continuité donne le corollaire suivant.

Corollaire 2.6. *Pour tout couple $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ avec $1, \theta_1, \theta_2$ sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants, s'il existe $0 < i < 1$ tel que*

$$\omega_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}) = +\infty \text{ (resp. } \hat{\omega}_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}) = +\infty \text{ , resp. } \lambda_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}) = +\infty),$$

alors pour tout $0 < i < 1$,

$$\omega_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}) = +\infty \text{ (resp. } \hat{\omega}_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}) = +\infty \text{ , resp. } \lambda_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}) = +\infty).$$

On rappelle que $\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ est fini.

Preuve du Théorème 2.5 Pour montrer la continuité, on utilise pleinement les inégalités (v), (vi), (vii) et (viii) de la Proposition 2.4. Pour $i \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1-i-\varepsilon}{1-i} \omega_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}) &\leq \omega_{i+\varepsilon,1-i-\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{i+\varepsilon}{i} \omega_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}), \\ \frac{i}{i+\varepsilon} \lambda_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}) &\leq \lambda_{i+\varepsilon,1-i-\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{1-i}{1-i-\varepsilon} \lambda_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \omega_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}) &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{i+\varepsilon,1-i-\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{i+\varepsilon,1-i-\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) \leq \omega_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}), \\ &\text{et donc } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{i+\varepsilon,1-i-\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) = \omega_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}), \\ \lambda_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}) &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{i+\varepsilon,1-i-\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{i+\varepsilon,1-i-\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) \leq \lambda_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}), \\ &\text{et donc } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{i+\varepsilon,1-i-\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) = \lambda_{i,1-i}(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

d'où la continuité. □

Preuve de la Proposition 2.4 Commençons par montrer les minoration de (i), (ii), (iii) et (iv).

Soit un couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$. Soient $0 \leq i, j \leq 1$ deux nombres réels vérifiant $i + j = 1$ et un nombre réel X . On considère le corps convexe $\mathcal{C}_\lambda(X)$ de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{C}_\lambda(X) = \begin{cases} |x_0| & \leq X \\ |x_0\theta_1 - x_1| & \leq X^{-i} \\ |x_0\theta_2 - x_2| & \leq X^{-j} \end{cases} .$$

On calcule alors son volume,

$$\text{vol}(\mathcal{C}_\lambda(X)) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \theta_1 & -1 & 0 \\ \theta_2 & 0 & -1 \end{bmatrix} (2X)(2X^{-i})(2X^{-j}) = 8.$$

On peut donc appliquer le premier théorème de Minkowski (Théorème 3.1), qui nous assure l'existence d'un point $(a, b, c) \in \mathcal{C}_\lambda(X) \cap \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ pour tout paramètre réel X . En particulier

$$|a| \leq X, \quad |a\theta_1 - b|^{\frac{1}{2i}} \leq X^{-\frac{1}{2}}, \quad |a\theta_2 - c|^{\frac{1}{2j}} \leq X^{-\frac{1}{2}},$$

et donc $\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1}{2}$.

On considère maintenant le corps convexe $\mathcal{C}_\omega(X)$ de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{C}_\omega(X) = \begin{cases} |z_0 + z_1\theta_1 + z_2\theta_2| & \leq X^{-2} \\ |z_1| & \leq X^{2i} \\ |z_2| & \leq X^{2j} \end{cases} .$$

On calcule alors son volume,

$$\text{vol}(\mathcal{C}_\omega(X)) = \det \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (2X^{-2})(2X^{2i})(2X^{2j}) = 8.$$

On peut donc appliquer le premier théorème de Minkowski (Théorème 3.1), qui nous assure l'existence d'un point $(p, q, r) \in \mathcal{C}_\omega(X) \cap \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ pour tout paramètre réel X . En particulier

$$|p + q\theta_1 + r\theta_2| \leq X^{-2}, \quad |q|^{\frac{1}{2i}} \leq X, \quad |r|^{\frac{1}{2j}} \leq X,$$

et donc $\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq 2$.

Pour tout nombre réel X , on considère les ensembles

$$\begin{aligned}
S_1(X) &= \{\omega \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3, 0 < |x\theta_1 + y\theta_2 + z| \leq X^{-\omega}, |x|^{\frac{1}{2i}}, |y|^{\frac{1}{2j}} \leq X\}, \\
S_2(X) &= \{\omega \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3, 0 < |x\theta_1 + y\theta_2 + z| \leq X^{-\omega}, |xy|^{\frac{1}{2}} \leq X\}, \\
S_3(X) &= \{\omega \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3, 0 < |x\theta_1 + y\theta_2 + z| \leq X^{-\omega}, |x|^{\frac{1}{2i}}, |y|^{\frac{1}{2j}} \leq X^{\frac{1}{\min(i,j)}}\}, \\
S_4(X) &= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3, \max(|z\theta_1 + x|^{\frac{1}{2i}}, |z\theta_2 + y|^{\frac{1}{2j}}) \leq X^{-\lambda}, 0 < |z| \leq X\}, \\
S_5(X) &= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3, |z\theta_1 + x| \cdot |z\theta_2 + y| \leq X^{-\lambda}, 0 < |z| \leq X\}.
\end{aligned}$$

Pour tout nombre réel X , on a les inclusions d'ensembles suivantes

$$\begin{aligned}
S_1(X) &\subset S_2(X) \subset S_3(X), \\
S_4(X) &\subset S_5(X),
\end{aligned}$$

dont on déduit les inégalités (i), (ii), (iii) et (iv). On s'intéresse maintenant aux inégalités (v), (vi), (vii) et (viii). Elles sont déduites des calculs suivants. La notation X a.g. signifie "pour X arbitrairement grand".

$$\begin{aligned}
\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, |z\theta_1 + x|^{\frac{1}{2i}}, |z\theta_2 + y|^{\frac{1}{2j}} \leq X^{-\lambda}, 0 < |z| \leq X, X \text{ a.g.} \right\}, \\
&= \max\left(\frac{k}{i}, \frac{l}{j}\right) \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, \right. \\
&\quad \left. |z\theta_1 + x|^{\frac{1}{2i}}, |z\theta_2 + y|^{\frac{1}{2j}} \leq X^{-\max(\frac{k}{i}, \frac{l}{j})\lambda}, 0 < |z| \leq X, X \text{ a.g.} \right\}, \\
&\geq \max\left(\frac{k}{i}, \frac{l}{j}\right) \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, \right. \\
&\quad \left. |z\theta_1 + x|^{\frac{1}{2k}}, |z\theta_2 + y|^{\frac{1}{2l}} \leq X^{-\lambda}, 0 < |z| \leq X, X \text{ a.g.} \right\}, \\
&= \max\left(\frac{k}{i}, \frac{l}{j}\right) \lambda_{k,l}(\boldsymbol{\theta}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \min\left(\frac{k}{i}, \frac{l}{j}\right) \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, \right. \\
&\quad \left. |z\theta_1 + x|^{\frac{1}{2i}}, |z\theta_2 + y|^{\frac{1}{2j}} \leq X^{-\min(\frac{k}{i}, \frac{l}{j})\lambda}, 0 < |z| \leq X, X \text{ a.g.} \right\}, \\
&\leq \min\left(\frac{k}{i}, \frac{l}{j}\right) \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, \right. \\
&\quad \left. |z\theta_1 + x|^{\frac{1}{2k}}, |z\theta_2 + y|^{\frac{1}{2l}} \leq X^{-\lambda}, 0 < |z| \leq X, X \text{ a.g.} \right\}, \\
&= \min\left(\frac{k}{i}, \frac{l}{j}\right) \lambda_{k,l}(\boldsymbol{\theta}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \sup \left\{ w \in \mathbb{R} \mid 0 < |x\theta_1 + y\theta_2 + z| \leq X^{-w}, |x|^{\frac{1}{2i}}, |y|^{\frac{1}{2j}} \leq X, X \text{ a.g.} \right\}, \\
&\leq \sup \left\{ w \in \mathbb{R} \mid 0 < |x\theta_1 + y\theta_2 + z| \leq \tilde{X}^{-\frac{w}{\max(\frac{i}{k}, \frac{j}{l})}}, |x|^{\frac{1}{2k}}, |y|^{\frac{1}{2l}} \leq \tilde{X}, \tilde{X} \text{ a.g.} \right\} \\
&= \max\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{l}\right) \omega_{k,l}(\boldsymbol{\theta}), \\
\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &\geq \sup \left\{ w \in \mathbb{R} \mid 0 < |x\theta_1 + y\theta_2 + z| \leq \tilde{X}^{-\frac{w}{\min(\frac{i}{k}, \frac{j}{l})}}, |x|^{\frac{1}{2k}}, |y|^{\frac{1}{2l}} \leq \tilde{X}, \tilde{X} \text{ a.g.} \right\} \\
&= \min\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{l}\right) \omega_{k,l}(\boldsymbol{\theta}).
\end{aligned}$$

Concernant (iv) et (x), on suppose d'abord $i = 0$ et $j = 1$, on calcule alors :

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_{0,1}(\boldsymbol{\theta}) &= \sup \{ w \in \mathbb{R} \mid 0 < |x\theta_1 + y\theta_2 + z| \leq X^{-w}, |x|^\infty, |y|^{\frac{1}{2}} \leq X, X \text{ a.g.} \} \\
&= \sup \{ w \in \mathbb{R} \mid 0 < |y\theta_2 + z| \leq X^{-w}, |y| \leq X^2, X \text{ a.g.} \} \\
&= 2\hat{\omega}(\theta_2) = 2, \\
\hat{\lambda}_{0,1}(\boldsymbol{\theta}) &= \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \max(|z\theta_1 - x|^\infty, |z\theta_2 - y|^{\frac{1}{2}}) \leq X^{-\lambda}, 0 < |z| \leq X, X \text{ a.g.} \} \\
&= \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid |z\theta_2 - y| \leq X^{-2\lambda}, 0 < |z| \leq X, X \text{ a.g.} \} \\
&= \frac{1}{2}\hat{\omega}(\theta_2) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Mutatis mutandis $i = 1, j = 0$ et on a bien tous les résultats annoncés. \square

2.3 Suite de points minimaux, meilleures approximations

On définit maintenant la notion de suite de *points minimaux*. Elle a été introduite par Davenport et Schmidt dans [12, §3] et Jarník dans [22].

Soit un entier $k \geq 1$. Soit L et N deux fonctions de \mathbb{Z}^k dans \mathbb{R}_+ .

On appelle suite de points minimaux $(M_i)_{i \geq 0} \in (\mathbb{Z}^k)^\mathbb{N}$ de L par rapport à N une suite telle que

- $N(M_i)$ est une suite strictement croissante minorée par 1,
- $L(M_i)$ est une suite strictement décroissante majorée par 1,
- pour tout point $M \in \mathbb{Z}^k$, si $N(M) < N(M_{i+1})$ alors $L(M) \geq L(M_i)$.

Pour avoir l'existence d'une telle suite, il est suffisant que L admette un minimum sur les ensembles de la forme

$$E_B = \{X \in \mathbb{Z}^k \mid N(X) \leq B\},$$

avec B un paramètre réel. Cette condition sera toujours vérifiée dans les cas considérés. Classiquement, la fonction N est une norme, usuellement la norme canonique de \mathbb{R}^n . Dans un certain contexte, on parle parfois de suite de *meilleures approximations* (cf. [31]).

Il n'y a pas a priori unicité de la suite de points minimaux. En effet, pour un point minimal M_i il peut exister M'_i tel que $L(M_i) = L(M'_i)$ et $N(M_i) = N(M'_i)$ et on obtient une autre suite de points minimaux en remplaçant M_i par M'_i .

Il est toujours possible de normaliser les fonctions L et N pour vérifier les conditions $N(M_0) \geq 1$ et $L(M_0) \leq 1$. Ces conditions ne sont donc pas restrictives. Elles sont imposées pour simplifier l'utilisation des points minimaux.

Faisons maintenant le lien avec les exposants d'approximation diophantienne. Avec les mêmes notations que précédemment, on peut définir des exposants généraux de la manière suivante :

On définit l'exposant ordinaire $\omega_{L,N}(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant uniforme $\hat{\omega}_{L,N}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels ω tels que le système

$$0 < L(X) \leq H^{-\omega}, N(X) \leq H$$

admet une solution entière $X \in \mathbb{Z}^k$ pour des nombres réels H arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel H assez grand).

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.7. *Pour $(M_i)_{i \geq 0}$ une suite de points minimaux de L par rapport à N , on obtient les exposants d'approximation par les limites suivantes :*

$$\begin{aligned} \omega_{L,N} &= \limsup_{i \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log L(M_i)}{\log N(M_i)} \right), \\ \hat{\omega}_{L,N} &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log L(M_i)}{\log N(M_{i+1})} \right). \end{aligned}$$

Remarque. Le résultat est indépendant du choix de la suite de points minimaux.

Pour les problèmes qui nous intéressent dans ce chapitre, on se placera en dimension $n = 2$. Ainsi, pour les exposants $\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ et $\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$, on choisira les fonctions

$$N(X) = \max(|x|, |y|) \text{ et } L(X) = \max(d(x\theta_1, \mathbb{Z})^{\frac{1}{2i}}, d(y\theta_2, \mathbb{Z})^{\frac{1}{2j}}).$$

Pour les exposants $\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ et $\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$, on choisira les fonctions

$$N(X) = \max(|x|^{\frac{1}{2i}}, |y|^{\frac{1}{2j}}) \text{ et } L(X) = d(x\theta_1 + y\theta_2, \mathbb{Z}).$$

Ici, $d(\cdot, \mathbb{Z})$ désigne la distance aux entiers.

Il s'agit maintenant de démontrer la Proposition 2.7.

Preuve de la Proposition 2.7

On commence par se fixer $w \in \mathbb{R}$, et on considère l'ensemble

$$E_w = \{H \in \mathbb{R} \mid L(X) \leq H^{-w}, N(X) \leq H \text{ admet une solution entière } X \in \mathbb{Z}^k\}.$$

On partitionne cet ensemble de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E_w &= \cup_{i \geq 1} \{N(M_i) \leq H < N(M_{i+1}) \mid L(X) \leq H^{-w}, N(X) \leq H \text{ admet une solution } X \in \mathbb{Z}^k\} \\ &= \cup_{i \geq 1} E_{w,i}. \end{aligned}$$

Pour un entier i donné et un nombre réel H compris entre $N(M_i)$ et $N(M_{i+1})$, s'il existe une solution entière $X \in \mathbb{Z}^k$ au système

$$0 < L(X) \leq H^{-w}, N(X) \leq H,$$

d'après les propriétés des points minimaux elle vérifie

$$L(M_i) \leq L(X) \leq H^{-w} \text{ et } N(M_i) \leq N(X) \leq H < N(M_{i+1}).$$

Pour que l'ensemble $E_{w,i}$ soit non vide, il est donc nécessaire que

$$L(M_i) \leq N(M_i)^{-w} \text{ i.e. } w \leq -\frac{\log L(M_i)}{\log N(M_i)}.$$

C'est suffisant car alors M_i convient. Pour que $E_{w,i}$ soit tout l'intervalle $N(M_i) \leq H < N(M_{i+1})$, il est nécessaire et suffisant que

$$L(M_i) \leq N(M_{i+1})^{-w} \text{ i.e. } w \leq -\frac{\log L(M_i)}{\log N(M_{i+1})}.$$

On en déduit les deux formules annoncées. □

2.4 Résultats pour le spectre pondéré

Le meilleur résultat connu est le théorème de Badziahin, Pollington et Velani [1] suivant, qui se place dans un contexte plus général :

Théorème 2.8 (Badziahin, Pollington, Velani, 2011). *Soient deux nombres entiers n et m . Soit une matrice réelle $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{r,s})$ avec $1 \leq s \leq m$ et $1 \leq r \leq n$. Soient*

$$L_t(\mathbf{q}) := \sum_s \theta_{ts} q_s \quad (1 \leq s \leq m, 1 \leq t \leq n)$$

n formes linéaires en m variables et soient

$$M_s(\mathbf{u}) := \sum_t \theta_{ts} u_t$$

l'ensemble transposé de m formes linéaires en n variables. Supposons qu'il existe des m -uplets de nombres entiers $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ tels que

$$\|L_t(\mathbf{q})\| \leq C_t, \quad |q_s| \leq X_s,$$

pour des constantes C_t et X_s vérifiant

$$\max_s \{D_s := (l-1)X_s^{-1}d^{1/(l-1)}\} < 1$$

où

$$d := \prod_t C_t \prod_s X_s \quad \text{et} \quad l := m + n.$$

Alors il existe des n -uplets d'entiers $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tels que

$$\|M_s(\mathbf{u})\| \leq D_s, \quad |u_t| \leq U_t,$$

avec

$$U_t := (l-1)C_t^{-1}d^{1/(l-1)}.$$

Ici, $\|\cdot\|$ représente la distance aux entiers.

Ce théorème s'applique au cas pondéré, où il s'énonce de la manière suivante.

Corollaire 2.9. *Soit un couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ et $0 \leq i, j \leq 1$ avec $i + j = 1$, on a les bornes*

$$\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{2 \max(i, j)(2\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 1)}{1 + 2\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(2 \max(i, j) - 1)} \quad \text{et} \quad \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 2(2 \max(i, j) - 1)}{(2 + \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}))2 \max(i, j)}.$$

Pour obtenir le corollaire, on applique deux fois le Théorème 2.8, une première fois avec les paramètres

$$\begin{aligned} m &= 1, & n &= 2, \\ L_1 &= \theta_1 q_1 + \theta_2 q_2, & C_1 &= H^{-\omega}, \\ M_1 &= \theta_1 q_1, & M_2 &= \theta_2 q_2, \\ X_1 &= H^{2i}, & X_2 &= H^{2j}, \end{aligned}$$

et une deuxième fois avec les paramètres

$$\begin{aligned} m &= 2, & n &= 1, \\ L_1 &= \theta_1 q_1, & C_1 &= H^{-2i\lambda}, \\ L_2 &= \theta_2 q_2, & C_2 &= H^{-2j\lambda}, \\ M_1 &= \theta_1 q_1 + \theta_2 q_2, & X_1 &= H. \end{aligned}$$

□

Lorsque $i = j = 1/2$, on retrouve les inégalités de transfert de Khintchine :

$$\begin{aligned} \omega(\boldsymbol{\theta}) &\geq 2\lambda(\boldsymbol{\theta}) + 1, \\ \lambda(\boldsymbol{\theta}) &\geq \frac{\omega(\boldsymbol{\theta})}{\omega(\boldsymbol{\theta}) + 2}. \end{aligned}$$

Comme dans le cas classique, ce résultat ne prend pas en compte l'exposant uniforme. On établit des relations faisant intervenir les exposants uniformes, en s'inspirant de la méthode de Laurent.

Théorème 2.10. *Pour tout couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, avec $1, \theta_1, \theta_2$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , et pour $0 \leq i, j \leq 1$ tels que $i + j = 1$, on a les relations*

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &\geq \frac{\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \left(\frac{\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})}{2 \max(i,j)} - 1 \right)}{2(\min(i,j) \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + \max(i,j) \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}))}, \\ \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &\geq \frac{(\min(i,j) \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + \max(i,j) \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})) 4 \max(i,j)}{1 - 2 \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \min(i,j)}. \end{aligned}$$

On remarque que dans le cas $i = j = \frac{1}{2}$, on retrouve bien

$$\begin{aligned} \omega(\boldsymbol{\theta}) &\geq \frac{\lambda(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta})}{1 - \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta})}, \\ \lambda(\boldsymbol{\theta}) &\geq \frac{\omega(\boldsymbol{\theta})(\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) - 1)}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) + \omega(\boldsymbol{\theta})}. \end{aligned}$$

Ceci correspond au Théorème 2.2. Par contre, les bornes ne sont a priori pas optimales lorsque $i \neq j$.

On a vu que le Théorème 2.10 améliore le Corollaire 2.9 de Badziahin, Pollington et Velani [1] dans le cas symétrique $i = j = 1/2$. Malheureusement il n'est pas toujours meilleur dans les autres cas comme expliqué dans la proposition suivante.

Proposition 2.11. *On pose $M = \max(i, j)$ et $m = \min(i, j)$. Le Théorème 2.10 améliore le Corollaire 2.9 aux conditions suivantes.*

D'une part, pour la minoration de $\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ si et seulement si

$$\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{4M\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 2M)}{\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})^2 + 2M\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 4m(m - M)}.$$

En particulier c'est le cas lorsque $\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq 4$ et dans le cas $M = m = 1/2$.

D'autre part, pour la minoration de $\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$, si et seulement si

$$\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1 + \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(2M + 4m(M - m)\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}))}{2 + 4\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(2m - M)}.$$

C'est le cas en particulier si $M = m = 1/2$, mais pour M proche de 1 ce n'est pas forcément possible.

Le Théorème 2.10 sera démontré au sous-chapitre 2.5.

On s'intéresse maintenant aux exposants uniformes. Par les encadrement de la Proposition 2.4 et la relation de Jarník (2.1), on a le premier encadrement suivant :

$$\frac{1}{2M} - \frac{1}{\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})} \leq \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{1}{2m} - \frac{1}{\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})}, \quad (2.2)$$

où $M = \max(i, j)$ et $m = \min(i, j)$.

Dans l'article [39] situé en Annexe A, l'auteur démontre le résultat suivant qui est le résultat principal de cette partie.

Théorème 2.12. *Soit deux nombres réels strictement positifs $i > j$ tels que $i + j = 1$, et un nombre réel $\hat{\omega}$ tel que $\hat{\omega} > 6i$. On considère l'intervalle*

$$I = \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{2j}{\hat{\omega}} \right), \min \left(\frac{1}{2j} \left(1 - \frac{2i}{\hat{\omega}} \right), \frac{1}{2i} \right) \right[$$

qui dépend des paramètres i, j et $\hat{\omega}$. Alors pour tout $\hat{\lambda}$ dans l'intervalle I , il existe un nombre non dénombrable de points $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ du plan \mathbb{R}^2 , avec $1, \theta_1, \theta_2$ \mathbb{Q} -linéairement indépendants, tels que

$$\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega} \text{ et } \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\lambda}.$$

On remarque que lorsque le couple i, j tend vers le cas symétrique $i = j = 1/2$, l'intervalle I tend bien à se réduire au singleton $\{1 - \frac{1}{\hat{\omega}}\}$, et on retrouve la relation de Jarník (2.1).

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.13. *Les exposants uniformes pondérés $\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ et $\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ ne sont pas liés par une relation analogue à la relation de Jarník (2.1) lorsque $i \neq j$.*

En revanche, l'intervalle du théorème précédent est plus petit que l'intervalle de l'encadrement naïf (2.2) ; connaître le spectre exact reste donc une question ouverte.

Preuve de la Proposition 2.11 Soit un couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ avec $1, \theta_1, \theta_2$ \mathbb{Q} -linéairement indépendants, et deux nombres réels positifs i et j de somme 1. On veut savoir à quelles conditions le Théorème 2.10 améliore le Corollaire 2.9.

On commence par traiter la minoration de $\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$. On utilise les notations $M = \max(i, j)$ et $m = \min(i, j)$. Le Théorème 2.10 améliore le Corollaire 2.9 si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) - 2M)}{2M(2m\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 2M\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}))} &\geq \frac{\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 2(2M - 1)}{(2 + \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}))2M}, \\ (\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 2(M - m))(2m\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 2M\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})) &\leq \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) - 2M)(2 + \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})), \\ \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(2M\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})^2 - 2m(M - m)) &\geq 2M\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(2\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 4M), \\ \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &\geq \frac{4M\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 2M)}{\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})^2 + 2M\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 2m(m - M)}. \end{aligned}$$

On considère maintenant la minoration de $\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$. Le Théorème 2.10 améliore le Corollaire 2.9 si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{2M(2\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 1)}{1 + 2\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(2M - 1)} &\leq \frac{(m\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + M\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}))4M}{1 - 2\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})m}, \\ (1 - 2\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(M - m))(2m\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 2M\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})) &\geq (2\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) + 1)(1 - 2\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})m), \\ \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &\geq \frac{1 + \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(2M + 4m(M - m)\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}))}{2 + \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})(8m - 4M)}. \end{aligned}$$

□

2.5 Démonstration du Théorème 2.10

On s'inspire de la démonstration de Laurent [32] utilisant une suite de points minimaux - telle qu'introduite par Davenport et Schmidt dans [12, §3] et Jarník

dans [22].

Soit $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ tel que $1, \theta_1, \theta_2$ soient \mathbb{Q} -linéairement indépendants et $0 \leq i, j \leq 1$ tels que $i + j = 1$. On note $X = (x, y, z)$ un élément de \mathbb{Z}^3 . On pose alors les fonctions

$$\begin{aligned} L(X) &= |x\theta_1 + y\theta_2 + z|, & M_{i,j}(X) &= \max(|z\theta_1 - x|^{\frac{1}{2i}}, |z\theta_2 - y|^{\frac{1}{2j}}), \\ |X|_{i,j} &= \max(|x|^{\frac{1}{2i}}, |y|^{\frac{1}{2j}}), & |X| &= |z|. \end{aligned}$$

On considère une suite des droites minimales $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ (resp. points minimaux $(P_n)_{n \geq 1}$) de L (resp. $M_{i,j}$) par rapport à $|\cdot|_{i,j}$ (resp. $|\cdot|$). On définit alors les quantités

$$\begin{aligned} h_n &= |\Delta_n|_{i,j}, & L_n &= L(\Delta_n), \\ q_n &= |P_n|, & M_n &= M_{i,j}(P_n). \end{aligned}$$

Par la définition de point minimal, on a les croissances et décroissances de suite suivantes

$$\begin{aligned} 1 < h_1 < h_2 < h_3 < \dots & ; & 1 < q_1 < q_2 < q_3 < \dots \\ 1 > L_1 > L_2 > L_3 > \dots & ; & 1 > M_1 > M_2 > M_3 > \dots \end{aligned}$$

En outre, si $|\Delta|_{i,j} < h_{n+1}$ (resp. $|P| < q_{n+1}$) alors $L(\Delta) \geq L_n$ (resp. $M_{i,j}(P) \geq M_n$).

On introduit les exposants v_n, v'_n, w_n et w'_n définis par

$$\begin{aligned} L_n &= h_n^{-v_n} = h_{n+1}^{-w_n}, \\ M_n &= q_n^{-v'_n} = q_{n+1}^{-w'_n}. \end{aligned}$$

Ils sont significatifs dans la mesure où la Proposition 2.7 nous donne

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}(\theta) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n, & \lambda_{i,j}(\theta) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} v'_n, \\ \hat{\omega}_{i,j}(\theta) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} w_n, & \hat{\lambda}_{i,j}(\theta) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} w'_n. \end{aligned}$$

On remarque que, par minimalité, Δ_n et Δ_{n+1} (resp. P_n et P_{n+1}) ne sont pas proportionnels, et donc $Q_n = \Delta_n \wedge \Delta_{n+1} \neq 0$ et $D_n = P_n \wedge P_{n+1} \neq 0$.

Il n'y a pas unicité de la suite de meilleure approximation, pour la suite on se fixe donc un choix noté $(\Delta_n)_{n \geq 1} = (r_n, s_n, t_n)_{n \geq 1}$ et $(P_n)_{n \geq 1} = (a_n, b_n, c_n)_{n \geq 1}$.

On va maintenant utiliser la dualité entre point et droite spécifique au cas de la dimension deux. En effet, il se trouve que deux droites minimales successives pour les formes linéaires donne un point minimal, et que la droite passant par deux points minimaux successifs est une droite minimale. On considère donc la droite passant par les points P_n et P_{n+1} ,

$$D_n = P_n \wedge P_{n+1} = \left(\left| \begin{array}{cc} b_n & b_{n+1} \\ c_n & c_{n+1} \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n+1} \\ c_n & c_{n+1} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{array} \right| \right),$$

dont on va majorer la norme. On a

$$\begin{aligned} |b_n c_{n+1} - b_{n+1} c_n| &= |c_{n+1}(b_n - c_n \theta_2) - c_n(b_{n+1} - c_{n+1} \theta_2)| \\ &\leq q_{n+1}(M_n)^{2j} + q_n(M_{n+1})^{2j} \leq 2q_{n+1}M_n^{2j} \\ &\leq 2q_{n+1}^{1-2jw'_n}, \\ |a_{n+1}c_n - a_n c_{n+1}| &= |c_{n+1}(a_n - c_n \theta_1) - c_n(a_{n+1} - c_{n+1} \theta_1)| \\ &\leq q_{n+1}M_n^{2i} + q_n M_{n+1}^{2i} \leq 2q_{n+1}M_n^{2i} \\ &\leq 2q_{n+1}^{1-2iw'_n}, \end{aligned}$$

dont on déduit que

$$|D_n|_{i,j} \leq \max\left(2^{\frac{1}{2i}} q_{n+1}^{\frac{1-2jw'_n}{2i}}, 2^{\frac{1}{2j}} q_{n+1}^{\frac{1-2iw'_n}{2j}}\right) \leq 2^{\frac{1}{2\min(i,j)}} q_{n+1}^{\frac{1-2w'_n \min(i,j)}{2\max(i,j)}}.$$

On cherche maintenant à estimer $L(D_n)$.

$$\begin{aligned} |L(D_n)| &\leq \left| \left| \begin{array}{cc} b_n & b_{n+1} \\ c_n & c_{n+1} \end{array} \right| \theta_1 - \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n+1} \\ c_n & c_{n+1} \end{array} \right| \theta_2 + \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{array} \right| \right| \\ &\leq |(c_n \theta_1 - a_n)(c_{n+1} \theta_2 - b_{n+1}) - (c_n \theta_2 - b_n)(c_{n+1} \theta_1 - a_{n+1})|, \\ &\leq M_n^{2i} M_{n+1}^{2j} + M_n^{2j} M_{n+1}^{2i}, \\ &\leq 2q_{n+1}^{-2(\min(i,j)v'_n + \max(i,j)w'_n)}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$L(D_n) \leq 2 \left(\frac{|D_n|_{i,j}}{2^{\frac{1}{2\min(i,j)}}} \right)^{\frac{-4(\min(i,j)v'_n + \max(i,j)w'_n) \max(i,j)}{1-2w'_n \min(i,j)}}.$$

On remarque que l'exposant $\frac{4(\min(i,j)v'_n + \max(i,j)w'_n) \max(i,j)}{1-2w'_n \min(i,j)}$ est une fonction croissante de w'_n et v'_n . Pour $\varepsilon > 0$, et n assez grand on a donc, en notant $M = \max(i, j)$ et $m = \min(i, j)$:

$$\begin{aligned} \frac{4(mv'_n + Mw'_n)M}{1-2w'_n m} &\geq \frac{4(mv'_n + M \liminf_{n \rightarrow \infty} w'_n)M}{1-2 \liminf_{n \rightarrow \infty} w'_n m} - \varepsilon \\ &\geq \frac{(mv'_n + M \hat{\lambda}_{i,j}(\theta))4M}{1-2\hat{\lambda}_{i,j}(\theta)m} - \varepsilon. \end{aligned}$$

On peut donc minorer l'exposant $\omega_{i,j}(\theta)$ en passant convenablement à la limite supérieure :

$$\omega_{i,j}(\theta) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{4(mv'_n + Mw'_n)M}{1 - 2w'_n m} \geq \frac{(m\lambda_{i,j}(\theta) + M\hat{\lambda}_{i,j}(\theta))4M}{1 - 2\hat{\lambda}_{i,j}(\theta)m}.$$

Pour l'autre inégalité, on considère de manière duale le point d'intersection des droites Δ_n et Δ_{n+1} :

$$Q_n = \Delta_n \wedge \Delta_{n+1} = \left(\left| \begin{array}{cc} s_n & s_{n+1} \\ t_n & t_{n+1} \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ t_n & t_{n+1} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ s_n & s_{n+1} \end{array} \right| \right).$$

On commence par majorer sa norme :

$$\begin{aligned} |Q_n| &= \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ s_n & s_{n+1} \end{array} \right| = |r_n s_{n+1} - r_{n+1} s_n| \leq h_n^{2i} h_{n+1}^{2j} + h_{n+1}^{2i} h_n^{2j} \\ &\leq h_n^{2i + \frac{v_n}{w_n} 2j} + h_n^{2j + \frac{v_n}{w_n} 2i} \\ &\leq 2h_n^{2\min(i,j) + 2\max(i,j)\frac{v_n}{w_n}}. \end{aligned}$$

On estime ensuite $M_{i,j}(Q_n)$, à savoir :

$$\begin{aligned} \left| \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ s_n & s_{n+1} \end{array} \right| \theta_1 - \left| \begin{array}{cc} s_n & s_{n+1} \\ t_n & t_{n+1} \end{array} \right| \right| &= |s_{n+1}(r_n \theta_1 + s_n \theta_2 + t_n) \\ &\quad - s_n(r_{n+1} \theta_1 + s_{n+1} \theta_2 + t_{n+1})| \\ &\leq h_{n+1}^{2j} L(\Delta_n) + h_n^{2j} L(\Delta_{n+1}) \\ &\leq 2h_{n+1}^{2j} L_n \leq 2h_n^{2j\frac{v_n}{w_n} - v_n}, \\ \left| \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ s_n & s_{n+1} \end{array} \right| \theta_2 - \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ t_n & t_{n+1} \end{array} \right| \right| &= |-r_{n+1}(r_n \theta_1 + s_n \theta_2 + t_n) \\ &\quad + r_n(r_{n+1} \theta_1 + s_{n+1} \theta_2 + t_{n+1})| \\ &\leq h_{n+1}^{2i} L(\Delta_n) + h_n^{2i} L(\Delta_{n+1}) \\ &\leq 2h_{n+1}^{2i} L_n \leq 2h_n^{2i\frac{v_n}{w_n} - v_n}, \end{aligned}$$

et donc

$$M_{i,j}(Q_n) \leq \max\left(\left(2h_n^{2j\frac{v_n}{w_n} - v_n}\right)^{\frac{1}{2j}}, \left(2h_n^{2i\frac{v_n}{w_n} - v_n}\right)^{\frac{1}{2i}}\right) \leq 2^{\frac{1}{\min(i,j)}} h_n^{\frac{v_n}{w_n} - \frac{v_n}{2\max(i,j)}}.$$

Finalement, on obtient

$$M_{i,j}(Q_n) \leq 2^{\frac{1}{\min(i,j)}} \left(\frac{|Q_n|}{2}\right)^{\frac{v_n(1 - \frac{w_n}{2\max(i,j)})}{2(\min(i,j)w_n + \max(i,j)v_n)}}.$$

La encore, l'exposant $\frac{v_n(\frac{w_n}{2^{\max(i,j)}} - 1)}{2(\min(i,j)w_n + \max(i,j)v_n)}$ est une fonction croissante de v_n et w_n . Soit $\varepsilon > 0$ et n assez grand, on a , en posant $M = \max(i, j)$ et $m = \min(i, j)$

$$\frac{v_n(\frac{w_n}{2M} - 1)}{2(mw_n + Mv_n)} \geq \frac{v_n(\frac{\hat{\omega}_{i,j}(\theta)}{2M} - 1)}{2(m\hat{\omega}_{i,j}(\theta) + Mv_n)} - \varepsilon.$$

On obtient alors la minoration de l'exposant $\lambda_{i,j}(\theta)$ annoncée :

$$\lambda_{i,j}(\theta) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n(\frac{w_n}{2M} - 1)}{2(mw_n + Mv_n)} \geq \frac{\omega_{i,j}(\theta)(\frac{\hat{\omega}_{i,j}(\theta)}{2^{\max(i,j)}} - 1)}{2(\min(i, j)\hat{\omega}_{i,j}(\theta) + \max(i, j)\omega_{i,j}(\theta))}.$$

□

Concernant les dimensions supérieures, à l'instar du cas classique, les relations de dualité sont moins évidentes. Nous n'avons pas trouvé de construction similaire facile de suites de points minimaux liées.

2.6 Résultats dans le cas multiplicatif

Le cas multiplicatif est plus difficile. Concernant le principe de transfert de Khintchine, le résultat le plus avancé est dû à German [15].

Soit un entier n . On note pour $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ les quantités

$$\Pi(\mathbf{z}) = \left(\prod_{1 \leq i \leq n} |z_i| \right)^{\frac{1}{n}} \text{ et } \Pi'(\mathbf{z}) = \left(\prod_{1 \leq i \leq n} \max(1, |z_i|) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Théorème 2.14 (German, 2011). *Soit la matrice réelle*

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_{1,1} & \cdots & \theta_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n,1} & \cdots & \theta_{n,m} \end{pmatrix}.$$

S'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ tels que

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leq X, \quad \Pi(\boldsymbol{\theta}\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq U$$

où $0 < U < 1 \leq X$, alors il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tels que

$$\Pi'(\mathbf{y}) \leq Y, \quad \Pi(\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq V,$$

$$|\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{y} - \mathbf{x}|_\infty \leq \Delta_d V^m Y^n$$

où

$$Y = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} (X^m U^{1-m})^{\frac{1}{d-1}}, \quad V = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} (X^{1-n} U^n)^{\frac{1}{d-1}}$$

avec $d = n + m$ et $\sqrt{d/2} \leq \Delta_d = \frac{1}{2^{d-1}\sqrt{d}} \text{vol}_{d-1} \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{B}_\infty^d \mid \sum_{i=1}^d x_i = 0 \right\} \leq \sqrt{d}$.

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.15. *Dans le cas multiplicatif en dimension 2 on a les encadrements*

$$\frac{\omega_{\times}(\boldsymbol{\theta})}{2 + \omega_{\times}(\boldsymbol{\theta})} \leq \lambda_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{\omega_{\times}(\boldsymbol{\theta}) - 1}{2},$$

$$\frac{\hat{\omega}_{\times}(\boldsymbol{\theta})}{2 + \hat{\omega}_{\times}(\boldsymbol{\theta})} \leq \hat{\lambda}_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{\hat{\omega}_{\times}(\boldsymbol{\theta}) - 1}{2}.$$

Quantitativement, comme dans le cas classique, Wang et Yu [53] ont montré le théorème suivant.

Théorème 2.16 (Wang, Yu, 1981). *Les inégalités*

$$\omega_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\omega}_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \geq 2$$

$$\lambda_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\lambda}_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1}{2}$$

sont des égalités pour presque tout point $\boldsymbol{\theta}$ du plan réel \mathbb{R}^2 au sens de la mesure de Lebesgue.

Plus précisément, en considérant la dimension de Hausdorff, Bugeaud fait remarquer dans son survol [5] qu'on peut combiner les démonstrations des résultats de Bovey et Dodson [4] et Yu [54] pour obtenir le théorème suivant.

Théorème 2.17 (Bugeaud, 2009). *Soient des nombres réels $\omega \geq 2$ et $\lambda \geq 1/2$. La dimension de Hausdorff de l'ensemble des couples de réels d'exposant multiplicatif fixé est donnée par*

$$\dim_H\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2 \mid \omega_{\times}(\boldsymbol{\theta}) = \omega\} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{\omega}{2}},$$

$$\dim_H\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_{\times}(\boldsymbol{\theta}) = \lambda\} = 1 + \frac{2}{1 + 2\lambda}.$$

Remarque. Comme dans le cas classique, le Corollaire 2.15 donne l'équivalence des cas presque sûrs

$$\hat{\omega}_{\times}(\boldsymbol{\theta}) = 2 \Leftrightarrow \hat{\lambda}_{\times}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2},$$

$$\omega_{\times}(\boldsymbol{\theta}) = 2 \Leftrightarrow \lambda_{\times}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2},$$

déjà remarquée dans [52].

En adaptant la méthode de Laurent au cas multiplicatif, on améliore le résultat de German dans le cas particulier de la dimension 2, et à certaines conditions.

Théorème 2.18. *Dans le cas multiplicatif, pour tout couple de nombres réels $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ tel que $1, \theta_1, \theta_2$ soient \mathbb{Q} -linéairement indépendants. On a la relation*

$$\lambda_{\times}(\theta) \geq \frac{\omega_{\times}(\theta)(\hat{\omega}_{\times}(\theta) - 2)}{\hat{\omega}_{\times}(\theta) + \omega_{\times}(\theta)}.$$

Remarque. Ce n'est un raffinement du Corollaire 2.15 que si

$$\hat{\omega}_{\times}(\theta) \geq \frac{4\omega_{\times}(\theta) + 2}{\omega_{\times}(\theta)}.$$

Ce qui est par exemple toujours le cas lorsque $\hat{\omega}_{\times}(\theta) \geq 5$.

Concernant les exposants uniformes, savoir si une relation analogue à celle de Jarník (2.1) dans le cas classique existe reste un problème ouvert.

Preuve du Théorème 2.18 La preuve utilise la même construction que dans le cas classique.

Soit $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ tel que $1, \theta_1, \theta_2$ soient \mathbb{Q} -linéairement indépendants. Si $\hat{\omega}_{\times}(\theta) = 2$, le résultat est évident, on pourra donc supposer que $\hat{\omega}_{\times}(\theta) > 2$. On note $X = (x, y, z)$ un élément de \mathbb{Z}^3 . On pose alors les fonctions

$$\begin{aligned} L_{\theta}(X) &= |x\theta_1 + y\theta_2 + z| & , & \quad M_{\theta}(X) = (|z\theta_1 - x| \cdot |z\theta_2 - y|)^{\frac{1}{2}}, \\ |X|_L &= |\max(1, |x|) \max(1, |y|)|^{\frac{1}{2}} & , & \quad |X|_M = |z|. \end{aligned}$$

Comme on considère des points entiers, les domaines hyperboliques sont en fait bornés, et on peut donc considérer des droites minimales notées $(\Delta_n)_{n \geq 1} = (r_n, s_n, t_n)_{n \geq 1}$ et des points minimaux $(P_n)_{n \geq 1} = (a_n, b_n, c_n)_{n \geq 1}$ tels que

$$\begin{aligned} h_n &= |\Delta_n|_L & , & \quad L_n = L_{\theta}(\Delta_n), \\ q_n &= |P_n|_M & , & \quad M_n = M_{\theta}(P_n), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 1 &< h_1 < h_2 < h_3 < \dots & ; & \quad 1 < q_1 < q_2 < q_3 < \dots \\ 1 &> L_1 > L_2 > L_3 > \dots & ; & \quad 1 > M_1 > M_2 > M_3 > \dots \end{aligned}$$

et si $|\Delta|_L < h_{n+1}$ (resp. $|P|_M < q_{n+1}$) alors $L_{\theta}(\Delta) \geq L_n$ (resp. $M_{\theta}(P) \geq M_n$).

On introduit les exposants v_n, v'_n, w_n et w'_n définis par

$$L_n = h_n^{-v_n} = h_{n+1}^{-w_n},$$

$$M_n = q_n^{-v'_n} = q_{n+1}^{-w'_n},$$

qui sont significatifs dans la mesure où la Proposition 2.7 donne

$$\begin{aligned} \omega_\times(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n, & \lambda_\times(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} v'_n, \\ \hat{\omega}_\times(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} w_n, & \hat{\lambda}_\times(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} w'_n. \end{aligned}$$

On remarquera que par minimalité, Δ_n et Δ_{n+1} ne sont pas proportionnels, et que donc $Q_n = \Delta_n \wedge \Delta_{n+1} \neq 0$. Nous allons donc comme dans le cas linéaire constater que le point d'intersection Q_n de deux droites minimales Δ_n assure une bonne approximation simultanée. Par contre on ne sait pas dire si $D_n = P_n \wedge P_{n+1}$ est une bonne droite d'approximation.

On commence par considérer le point d'intersection de Δ_n et Δ_{n+1} :

$$Q_n = \Delta_n \wedge \Delta_{n+1} = \left(\left| \begin{array}{cc} s_n & s_{n+1} \\ t_n & t_{n+1} \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ t_n & t_{n+1} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ s_n & s_{n+1} \end{array} \right| \right).$$

On veut estimer $M_\theta(Q_n)$ en fonction de $|Q_n|_M$ via $h_n = \sqrt{r_n s_n}$.

$$\begin{aligned} |Q_n|_M &= \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ s_n & s_{n+1} \end{array} \right| = |r_n s_{n+1} - r_{n+1} s_n|, \\ &\leq 2h_n^2 h_{n+1}^2 \leq 2h_n^{2(1+\frac{v_n}{w_n})}. \end{aligned}$$

On majore ensuite indépendamment les facteurs de $M_\theta(Q_n)$:

$$\begin{aligned} \left| \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ s_n & s_{n+1} \end{array} \right| \theta_1 - \left| \begin{array}{cc} s_n & s_{n+1} \\ t_n & t_{n+1} \end{array} \right| \right| &= |s_{n+1}(r_n \theta_1 + s_n \theta_2 + t_n) - s_n(r_{n+1} \theta_1 + s_{n+1} \theta_2 + t_{n+1})|, \\ &\leq h_{n+1}^2 L_n + h_n^2 L_{n+1}, \\ &\leq 2h_{n+1}^2 L_n = 2h_n^{2\frac{v_n}{w_n} - v_n}. \\ \left| \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ s_n & s_{n+1} \end{array} \right| \theta_2 - \left| \begin{array}{cc} r_n & r_{n+1} \\ t_n & t_{n+1} \end{array} \right| \right| &= | -r_{n+1}(r_n \theta_1 + s_n \theta_2 + t_n) + r_n(r_{n+1} \theta_1 + s_{n+1} \theta_2 + t_{n+1}) |, \\ &\leq 2h_n^{2\frac{v_n}{w_n} - v_n}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } M_\theta(Q_n) \leq \left(4h_n^{4\frac{v_n}{w_n} - 2v_n} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 4 \left(\frac{|Q_n|_M}{2} \right)^{\frac{w_n}{2(v_n+w_n)}(2\frac{v_n}{w_n} - v_n)} \leq 4 \left(\frac{|Q_n|_M}{2} \right)^{-\frac{v_n(w_n-2)}{2(w_n+v_n)}}.$$

L'exposant $\frac{v_n(w_n-2)}{2(w_n+v_n)}$ est une fonction croissante de w_n strictement positive. Pour $\varepsilon > 0$, on en déduit que pour tout entier n assez grand,

$$\frac{v_n(w_n - 2)}{2(w_n + v_n)} \geq \frac{v_n(\hat{\omega}_\times(\boldsymbol{\theta}) - \varepsilon - 2)}{2(\hat{\omega}_\times(\boldsymbol{\theta}) - \varepsilon + v_n)}.$$

Par passage à la limite pour des valeurs non bornées de n telles que v_n tende vers $\omega_\times(\boldsymbol{\theta})$ on obtient alors :

$$\lambda_\times(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{\omega_\times(\boldsymbol{\theta})(\hat{\omega}_\times(\boldsymbol{\theta}) - 2)}{2(\omega_\times(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\omega}_\times(\boldsymbol{\theta}))}.$$

□

Remarque. Cette fois-ci, un seul sens peut être adapté, car les termes multipliés n'étant plus minorés par 1 (entiers) ils ne sont plus majorés.

Cas de la dimension $n \geq 2$

Quand tu arrives en haut de la montagne, continue de grimper.

—Proverbe tibétain

Dans ce chapitre, on note $n \geq 2$ la dimension de l'espace ambiant, et on considère le n -uplet $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Pour chacun de ces n -uplet, on définit $2n$ exposants d'approximation diophantienne, dont a va étudier le spectre. Au préalable, il nous faut introduire quelques notions qui seront utiles par la suite.

3.1 Boîte à outils

Dans ce chapitre et le chapitre 3.4, on note $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ le produit scalaire canonique des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathbb{R}^n , et $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ la norme euclidienne du vecteur \mathbf{x} .

3.1.1 Corps convexes, minima et produit extérieur

On appelle *corps convexe* de \mathbb{R}^n un ensemble compact convexe et d'intérieur non vide de \mathbb{R}^n . Dans la suite on considèrera des corps convexes \mathcal{C} symétriques par rapport à l'origine, c'est à dire que si \mathbf{x} appartient à \mathcal{C} alors $-\mathbf{x}$ également. Étant donné un corps convexe \mathcal{C} de \mathbb{R}^n symétrique par rapport à l'origine, on définit son *corps convexe polaire* (ou *réciproque*)

$$\mathcal{C}^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq 1\}.$$

On appelle *réseau* de \mathbb{R}^n un \mathbb{Z} -module discret Λ de \mathbb{R}^n de rang maximal. Pour un réseau Λ donné, on définit le *réseau dual*

$$\Lambda^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in \Lambda, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour un corps convexe \mathcal{C} de \mathbb{R}^n fixé, on définit sa *jauge*

$$\iota_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) = \inf\{\alpha > 0 \mid \mathbf{x} \in \alpha\mathcal{C}\}.$$

Étant donné un corps convexe \mathcal{C} et un réseau Λ de \mathbb{R}^n , pour $1 \leq d \leq n$ on définit le *d^{ème} minimum successif* de \mathcal{C} par rapport à Λ comme le réel

$$\lambda_d(\mathcal{C}, \Lambda) = \min\{\lambda > 0 \mid \lambda\mathcal{C} \text{ contient } d \text{ points de } \Lambda \text{ linéairement indépendants}\}.$$

Dans la suite, le volume d'un corps convexe est celui associé à la mesure de Lebesgue, tandis que le volume d'un réseau Λ est donné, indépendamment du choix d'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, par

$$\text{vol}(\Lambda) = 2^n \det(\mathcal{B}).$$

Lorsque le corps convexe ou le réseau est évident, on allégera les notations en l'omettant. Minkowski [41] a établi les deux théorèmes suivants concernant les minima successifs, que l'on a déjà évoqués précédemment.

Théorème 3.1 (Premier théorème de Minkowski, 1896). *Soient un corps convexe symétrique par rapport à l'origine \mathcal{C} et un réseau Λ de \mathbb{R}^n , si $\text{vol}(\mathcal{C}) \geq 2^n \text{vol}(\Lambda)$ alors \mathcal{C} contient au moins un point du réseau Λ autre que l'origine.*

Théorème 3.2 (Deuxième théorème de Minkowski, 1896). *Soient un corps convexe symétrique par rapport à l'origine \mathcal{C} et un réseau Λ de \mathbb{R}^n . Le produit des minima successifs est encadré de la manière suivante :*

$$\frac{2^n}{n!} \text{vol}(\Lambda) \leq \lambda_1(\mathcal{C}, \Lambda) \cdots \lambda_n(\mathcal{C}, \Lambda) \text{vol}(\mathcal{C}) \leq 2^n \text{vol}(\Lambda).$$

Le résultat suivant dû à Mahler [36] relie les minima successifs d'un réseau avec ceux de son dual.

Théorème 3.3 (Mahler, 1939). *Soient un réseau Λ et un corps convexe symétrique par rapport à l'origine \mathcal{C} dans \mathbb{R}^n . Alors pour tout entier $1 \leq d \leq n$, on a l'encadrement*

$$1 \ll \lambda_d(\Lambda, \mathcal{C}) \lambda_{n-d+1}(\Lambda^*, \mathcal{C}^*) \ll 1$$

où les constantes ne dépendent que de la dimension n .

Dans [37, 38], Mahler associe, pour chaque nombre entier $d = 1, \dots, n-1$, à un corps convexe \mathcal{C} de \mathbb{R}^n un corps convexe $\mathcal{C}^{(d+1)}$ dans le produit extérieur $\bigwedge^{d+1} \mathbb{R}^n$ de la manière suivante.

$$\mathcal{C}^{(d+1)} = \text{Conv}\{x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{d+1} \in \bigwedge^{d+1} \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_{d+1} \in \mathcal{C}\}.$$

Il démontre le théorème suivant liant les minima des deux corps convexes.

Théorème 3.4 (Mahler, 1954). Soit \mathcal{C} un corps convexe de \mathbb{R}^n symétrique par rapport à l'origine et posons $N = \binom{n}{d}$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les minima successifs de \mathcal{C} , et d un entier positif inférieur à n . Soient M_1, \dots, M_N les produits de d facteurs λ_k distincts rangés par ordre croissant. Les minima successifs μ_1, \dots, μ_N de $\mathcal{C}^{(d)}$ vérifient

$$0 < cM_k \leq \mu_k \leq M_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

où c est une constante dépendant uniquement de la dimension.

On dira que deux familles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de corps convexes paramétrées par Q sont *comparables* s'il existe un nombre réel $\kappa > 1$ tel que pour toutes les valeurs du paramètre Q , on ait les inclusions

$$\kappa^{-1}\mathcal{C}_1(Q) \subset \mathcal{C}_2(Q) \subset \kappa\mathcal{C}_1(Q).$$

3.1.2 Distance et hauteur d'un sous-espace affine rationnel

On définit la *distance projective* de deux points non nuls \mathbf{x} et \mathbf{y} de \mathbb{R}^n par

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2},$$

où $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ est le produit extérieur des vecteur \mathbf{x} et \mathbf{y} .

Cela représente le sinus de l'angle aigu entre les droites engendrés par \mathbf{x} et \mathbf{y} dans \mathbb{R}^n . On vérifie facilement que c'est une fonction continue et symétrique sur $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^2$ vérifiant l'inégalité triangulaire.

Pour tout point non nul \mathbf{x} de \mathbb{R}^n , et tout sous-espace L non vide de \mathbb{R}^n , on définit la distance de \mathbf{x} à L par

$$d(\mathbf{x}, L) = \inf_{\mathbf{y} \in L} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in L, \|\mathbf{y}\|_2=1} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

On dit qu'un sous-espace L de \mathbb{R}^n est rationnel s'il est engendré par des éléments rationnels. Lorsque $L \neq \{0\}$, c'est équivalent à demander que $L \cap \mathbb{Z}^n$ soit un réseau dans L . Comme Schmidt dans [48], on définit alors la *hauteur* du sous-espace vectoriel L , notée $H(L)$, comme le co-volume de ce réseau dans L . Elle est donnée par la formule

$$H(L) = \|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_m\|_2 = \sqrt{\det(x_i \cdot x_j)},$$

où $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ est n'importe quelle base de $L \cap \mathbb{Z}^n$ et $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne canonique sur $\wedge^m \mathbb{R}^n$. En particulier, on a $H(\mathbb{R}^n) = 1$ et $H(L) \geq 1$.

On établit alors le lemme suivant.

Lemme 3.5. *Soit un entier n et un entier $d < n$. Pour tout sous-espace L de \mathbb{R}^n de dimension d , il existe un sous-espace L' de dimension $d+1$ de la forme $L' = L \oplus \mathbf{y}\mathbb{R}$ satisfaisant*

$$H(L') \leq H(L).$$

Pour montrer ce lemme, on considère $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ une base du réseau $L \cap \mathbb{Z}^n$ dans L . Soit alors \mathbf{u} un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n perpendiculaire à L . Pour tout vecteur \mathbf{y} de $L \oplus \mathbf{u}\mathbb{R}$, on a

$$H(L \oplus \mathbf{y}\mathbb{R}) = \|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_d \wedge \mathbf{y}\|_2 = \|\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_d\|_2 |\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}| = H(L) |\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}|.$$

Par le premier théorème de Minkowski (Théorème 3.1) appliqué au corps convexe symétrique

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{x} \in L \oplus \mathbf{u}\mathbb{R} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1 \text{ et } |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq 1\},$$

il existe un point entier \mathbf{y} dans $L \oplus \mathbf{u}\mathbb{R}$ vérifiant $|\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}| \leq 1$, ce qui donne le résultat. \square

3.2 Définition des exposants

On commence par définir une généralisation des quatre exposants classiques $\omega, \lambda, \hat{\omega}, \hat{\lambda}$ de la dimension 2 en dimension supérieure. Ils ont été introduits et étudiés par Khintchine [26, 27], Jarník [22] et Bugeaud et Laurent [7, 8].

On définit l'exposant ordinaire $\omega(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant uniforme $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels ω tel que le système

$$0 < \|p_1\theta_1 + \dots + p_n\theta_n\| \leq H^{-\omega}, \quad 1 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |p_i| \leq H$$

admet une solution entière (p_1, \dots, p_n) pour des nombres réels H arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel H suffisamment grand). Ici $\|\cdot\|$ désigne de nouveau la distance aux entiers.

On définit l'exposant ordinaire $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant uniforme $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels λ tel que le système

$$0 < \max_{1 \leq i \leq n} \|q\theta_i\| \leq H^{-\lambda}, \quad 0 < |q| \leq H$$

admet une solution entière q pour des nombres réels H arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel H suffisamment grand).

Comme pour les dimensions inférieures, ces exposants peuvent être infinis.

Le premier théorème de Minkowski pour les corps convexes (Théorème 3.1) donne les minoration

$$\begin{aligned}\omega(\boldsymbol{\theta}) &\geq \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) \geq n, \\ \lambda(\boldsymbol{\theta}) &\geq \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant définir des exposants intermédiaires.

Soit d un nombre entier tel que $0 \leq d \leq n - 1$, on définit l'exposant ordinaire $\omega_d(\boldsymbol{\theta})$ (resp. l'exposant uniforme $\hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels ω tels qu'il existe des sous-espaces vectoriels rationnels $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de dimension $d + 1$ tels que le système

$$0 < H(L) \leq H \text{ et } H(L)d(\mathbf{u}, L) \leq H^{-\omega}$$

soit vérifié pour des nombres réels H arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel H suffisamment grand). Ici $\mathbf{u} = (\theta_1, \dots, \theta_n, 1)$, $H(L)$ est la hauteur de L , et $d(\mathbf{u}, L)$ est la distance entre le point \mathbf{u} et le sous-espace L telles que définies en 3.1.2. Ces exposants peuvent être infinis.

Ces exposants ont été introduits par Laurent [33], mais déjà implicitement étudiés par Schmidt lorsqu'il a établi le *théorème des sous-espaces* [48]. Ils interpolent entre les exposants classiques $\omega(\boldsymbol{\theta}) = \omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta})$ et $\lambda(\boldsymbol{\theta}) = \omega_0(\boldsymbol{\theta})$ (resp. $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})$ et $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta})$).

Lemme 3.6. *Pour tout n -uplet $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ on a les relations*

$$\begin{aligned}\omega_0(\boldsymbol{\theta}) &\leq \omega_1(\boldsymbol{\theta}) \leq \dots \leq \omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta}), \\ \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) &\leq \hat{\omega}_1(\boldsymbol{\theta}) \leq \dots \leq \hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}).\end{aligned}$$

Preuve du Lemme 3.6 Les relations découlent du Lemme 3.5. En effet pour tout entier $d < n$, si un sous-espace vectoriel rationnel L de dimension d vérifie

$$0 < H(L) \leq H \text{ et } H(L)d(\mathbf{u}, L) \leq H^{-\omega}$$

alors il existe un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ tel que le sous-espace vectoriel rationnel $L' = L \oplus \mathbf{y}\mathbb{R}$ vérifie

$$0 < H(L') \leq H(L) \leq H \text{ et } d(\mathbf{u}, L') \leq d(\mathbf{u}, L),$$

et donc

$$0 < H(L') \leq H \text{ et } H(L')d(\mathbf{u}, L') \leq H^{-\omega}.$$

Ceci montre les inégalités. □

Pour chaque entier $0 \leq d \leq n - 1$ on obtient les minoration (cf. [48, Théorème 13])

$$\omega_d(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{d+1}{n-d}. \quad (3.1)$$

On donnera une démonstration plus simple de cette minoration en section 3.4.1. À nouveau, au sens de la mesure de Lebesgue, pour presque tout $\boldsymbol{\theta}$ et $0 \leq d \leq n - 1$, les exposants vérifient

$$\omega_d(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta}) = \frac{d+1}{n-d}.$$

Comme dans le cadre de la dimension 1, la démonstration repose sur un lemme de Borel-Cantelli (cf [33]).

Nous allons maintenant étudier le spectre de tout ou partie de ces $2n$ exposants, c'est à dire l'ensemble des valeurs prises par le quadruplet

$$\Omega(\boldsymbol{\theta}) = (\omega_0(\boldsymbol{\theta}), \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}), \dots, \omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta}), \hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}))$$

lorsque $\boldsymbol{\theta}$ parcourt les points de \mathbb{R}^n à coordonnées \mathbb{Q} -linéairement indépendantes avec 1.

3.3 Résultats sur le spectre

Nous allons commencer par donner le spectre des n exposants ordinaires. Il prend la forme d'inégalités de *Going Up* et *Going Down* établies par Laurent [33]. Roy [46] a montré qu'elles étaient optimales. Ces inégalités décomposent le transfert de Khintchine (Théorème B) à l'aide des exposants intermédiaires.

Théorème 3.7 (Laurent, Roy, Schmidt, 2014). *Soit $n \geq 2$, pour tout n -uplet de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ \mathbb{Q} -linéairement indépendant. Les exposants ordinaires vérifient*

$$\omega_0(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1}{n}$$

ainsi que les relations suivantes pour $1 \leq d \leq n - 1$:

$$\frac{d\omega_d(\boldsymbol{\theta})}{\omega_d(\boldsymbol{\theta}) + d + 1} \leq \omega_{d-1}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{(n-d)\omega_d(\boldsymbol{\theta}) - 1}{n-d+1}, \quad (3.2)$$

avec la convention que le rapport de gauche vaut d si $\omega_d(\boldsymbol{\theta}) = +\infty$. Réciproquement, pour tout n -uplet $\omega_0, \dots, \omega_{n-1} \in [0, +\infty]$, vérifiant $\omega_0 \geq \frac{1}{n}$ et

$$\frac{d\omega_d}{\omega_d + d + 1} \leq \omega_{d-1} \leq \frac{(n-d)\omega_d - 1}{n-d+1},$$

il existe un n -uplet $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ de nombres réels avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ \mathbb{Q} -linéairement indépendants tels que pour $0 \leq d \leq n-1$, on ait

$$\omega_d(\boldsymbol{\theta}) = \omega_d \quad \text{et} \quad \hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta}) = \frac{d+1}{n-d}.$$

Dans (3.2), la minoration de $\omega_{d-1}(\boldsymbol{\theta})$ est appelée *Going Down* et la majoration *Going Up*.

Contrairement au cas de la dimension $n = 2$, où le Théorème 2.2 donne le spectre mêlé des exposants ordinaires et uniformes, en dimension $n \geq 3$ le spectre des $2n$ exposants n'est pas encore connu. Commençons par remarquer que la démonstration des inégalités de *Going Up* et *Going Down* (3.2) reste valable pour les exposants uniformes.

Proposition 3.8. *Soit $n \geq 2$, pour tout n -uplet de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ \mathbb{Q} -linéairement indépendant. Les exposants uniformes vérifient*

$$\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1}{n}$$

ainsi que les relations suivantes pour $1 \leq d \leq n-1$:

$$\frac{d\hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta})}{\hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta}) + d + 1} \leq \hat{\omega}_{d-1}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{(n-d)\hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta}) - 1}{n-d+1}, \quad (3.3)$$

avec la convention que le rapport de gauche vaut d si $\hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta}) = +\infty$.

Une autre amélioration du principe de transfert de Khintchine (Théorème B) est le résultat suivant de Bugeaud et Laurent [7] faisant intervenir les exposants uniformes.

Théorème 3.9 (Bugeaud, Laurent, 2009). *Pour tout n -uplet de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , on a les inégalités de transfert suivantes.*

$$\frac{(\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) - 1)\omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta})}{((n-2)\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) + 1)\omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) + (n-1)\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})} \leq \omega_0(\boldsymbol{\theta})$$

$$\omega_0(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{(1 - \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}))\omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) - n(2 - \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}))}{n-1}.$$

Dans [22], lorsque Jarník établit la relation (2.1), il remarque qu'une telle relation algébrique entre $\hat{\omega}_0$ et $\hat{\omega}_{n-1}$ n'est plus valable en dimension $n \geq 3$. Pour cela il construit deux n -uplets $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\psi}$ tels que

$$\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\psi}) = +\infty, \quad \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = 1 \quad \text{et} \quad \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{n-1}.$$

Il établit un premier résultat de transfert

Théorème 3.10 (Jarník, 1938). *Soit $n \geq 2$. Pour tout n -uplet de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ \mathbb{Q} -linéairement indépendants, on a*

$$\frac{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})}{(n-1)\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) + n} \leq \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) - n + 1}{n}.$$

Si $\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = n$, l'intervalle se réduit au singleton $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n}$, et réciproquement si $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n}$, cela impose $\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = n$.

Récemment, German [16] a amélioré le théorème précédent.

Théorème 3.11 (German, 2012). *Soit $n \geq 2$. Pour tout n -uplet de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ \mathbb{Q} -linéairement indépendants, on a*

$$\frac{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) - 1}{(n-1)\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})} \leq \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) - n + 1}{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})}.$$

On remarquera que si $n = 2$, on retrouve la relation de Jarník (2.1). Le théorème suivant montre que le transfert de German est optimal, et donne donc le spectre du couple $(\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_{n-1})$.

Théorème 3.12. *Soit un entier $n \geq 2$, soit un nombre $\hat{\omega} \in [n, +\infty]$ et soit un nombre réel $\hat{\lambda}$ dans l'intervalle $\left[\frac{\hat{\omega}-1}{(n-1)\hat{\omega}}, \frac{\hat{\omega}-n+1}{\hat{\omega}}\right]$, avec la convention que l'intervalle pour $\hat{\lambda}$ est $\left[\frac{1}{n-1}, 1\right]$ si $\hat{\omega} = +\infty$. Alors il existe un nombre indénombrable de n -uplets de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ avec $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ \mathbb{Q} -linéairement indépendants tels que $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}$ et $\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\lambda}$.*

On peut alors se demander si en dimension $n \geq 3$ il existe une relation algébrique de type Jarník entre les n exposants uniformes $\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{n-1}$. Dans ce cas, la dimension du spectre des n exposants serait strictement inférieure à n . Le théorème suivant montre qu'une telle relation est impossible.

Théorème 3.13. *Pour tout entier $n \geq 3$, le spectre des exposants $\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{n-1}$ est un sous-ensemble de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ d'intérieur non vide.*

Les démonstrations des Théorèmes 3.12 et 3.13, ainsi qu'une démonstration alternative du Théorème 3.11 se trouve dans l'article [40], situé en Annexe B.

Lorsque $n \geq 3$, le spectre des exposants uniformes semble plus complexe. Les relations de la Proposition 3.8 sont, à la connaissance de l'auteur, les meilleures connues à ce jour. En les combinant toutes, on obtient un intervalle pour $\hat{\omega}_0$ en fonction de $\hat{\omega}_{n-1}$. Celui-ci est plus large que celui des Théorèmes 3.11 et 3.12 : cela montre que ces relations ne peuvent pas être optimales dans leur ensemble. Le théorème suivant montre que dans un certain sens, le *Going Down* est optimal.

Théorème 3.14. *Soit un entier $n \geq 3$, et un nombre réel $\hat{\omega}_{n-1} \geq n$ fixé. Il existe un n -uplet $\boldsymbol{\theta}$ de nombres réels \mathbb{Q} -linéairement indépendants avec 1 tel que*

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) &= \hat{\omega}_{n-1}, \\ \hat{\omega}_{d-1}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{(n-d)\hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta}) - 1}{n-d+1}, \quad \text{pour } 2 \leq d \leq n-1.\end{aligned}$$

Seul le dernier *Going Down* concernant l'exposant $\hat{\omega}_0$ ne semble pas optimal. Déterminer le spectre des exposants uniformes pris dans leur ensemble reste un problème ouvert.

Ces trois derniers théorèmes ont été établis grâce à la géométrie paramétrique des nombres, que nous présentons au sous-chapitre suivant.

3.4 Géométrie paramétrique des nombres

La géométrie paramétrique des nombres a été introduite récemment par Schmidt et Summerer [50, 51], et complétée par Roy [47, 46]. Il s'agit de l'étude des n minima successifs d'une famille de corps convexes de \mathbb{R}^n à un paramètre réel comme fonction de ce paramètre. En choisissant convenablement la famille, on peut faire le lien avec les exposants d'approximation diophantienne en dimension n . C'est une nouvelle façon très commode d'étudier les problèmes d'approximation simultanée.

Géométrie paramétrique des nombres

Nous utiliserons ici les notations de Roy, qui sont essentiellement duales de celles de Schmidt et Summerer.

Soit un entier $n \geq 2$, et $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^{n+1} de norme euclidienne $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$. Pour un paramètre réel $Q \geq 1$, on considère le corps convexe symétrique par rapport à l'origine

$$\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(Q) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq Q^{-1} \right\},$$

où $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ est le produit scalaire usuel des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} . Pour $1 \leq d \leq n+1$, on note $\lambda_d(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(Q))$ le $d^{\text{ème}}$ minimum de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(Q)$ relativement au réseau \mathbb{Z}^{n+1} . Pour un nombre réel positif q et $1 \leq d \leq n+1$ on pose

$$L_{\mathbf{u},d}(q) = \log \lambda_d(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)).$$

Finalement, on définit la multifonction suivante associée à \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_u : [0, \infty[&\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ q &\mapsto (L_{u,1}(q), \dots, L_{u,n+1}(q)). \end{aligned}$$

Le réseau \mathbb{Z}^n étant invariant par permutation des coordonnées, \mathbf{L}_u est inchangé si on permute les coordonnées de \mathbf{u} . Comme $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ on peut supposer que $u_0 \neq 0$, ce que l'on fera par la suite. La multifonction \mathbf{L}_u a les propriétés suivantes.

Proposition 3.15. *Les composantes $L_{u,d}$ de \mathbf{L}_u pour $1 \leq d \leq n+1$ sont continues et affines par morceau de pente 0 ou 1. Elles vérifient $L_{u,1} \leq L_{u,2} \leq \dots \leq L_{u,n+1}$. On a également l'équivalent suivant pour leur somme :*

$$L_{u,1}(q) + \dots + L_{u,n+1}(q) = q + o(q).$$

Proposition 3.16. *Les coordonnées de $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_n)$ sont \mathbb{Q} -linéairement dépendantes si et seulement si $L_{u,1}$ est constante pour q assez grand.*

Preuve de la Proposition 3.15 Pour montrer cette proposition, nous allons considérer la jauge de tout les points du réseau \mathbb{Z}^n par rapport aux corps convexes $\mathcal{C}_u(Q)$.

Soit \mathbf{x} un point du réseau \mathbb{Z}^n et un nombre réel $q > 0$, on considère sa jauge par rapport au corps convexe $\mathcal{C}_u(e^q)$

$$\lambda_{\mathbf{x}}(q) = \min (\lambda > 0 \mid \mathbf{x} \in \lambda \mathcal{C}_u(e^q)).$$

On pose alors

$$L_{\mathbf{x}}(q) = \log \lambda_{\mathbf{x}}(q) = \max (\log \|\mathbf{x}\|_2, q + \log |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|),$$

qui est une fonction affine en deux morceaux de pentes 0 et 1. On remarque alors que le graphe conjoint des $n+1$ composantes de $\mathbf{L}_u = (L_{u,1}, \dots, L_{u,n+1})$ est inclus dans le graphe conjoint des fonctions $L_{\mathbf{x}}$ lorsque \mathbf{x} décrit \mathbb{Z}^n . On en déduit que le graphe conjoint de \mathbf{L}_u est affine par morceaux de pentes 0 et 1. L'estimation de la somme découle directement du deuxième théorème de Minkowski (Théorème 3.2).

On remarquera que la composante $L_{u,1}$ est donnée par le minimum suivant :

$$L_{u,1}(q) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n} L_{\mathbf{x}}(q).$$

Par conséquent, lorsque $L_{u,1}$ admet un maximum local en q_0 (sa pente passe de 1 à 0), alors $L_{u,1}(q_0) = L_{u,2}(q_0)$.

□

Preuve de la Proposition 3.16 Si les coordonnées de \mathbf{u} sont dépendantes, il existe un point \mathbf{x} dans \mathbb{Z}^n tel que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Dans ce cas,

$$\lambda_{\mathbf{x}}(q) = \|\mathbf{x}\|_2$$

et $L_{\mathbf{x}}$ est la fonction constante $\log \|\mathbf{x}\|_2$.

Réciproquement si $L_{\mathbf{u},1}$ est constante pour q assez grand, alors il existe \mathbf{x} dans \mathbb{Z}^n tel que $L_{\mathbf{x}}$ est la fonction constante, ce qui implique que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ et donc les coordonnées de \mathbf{u} sont \mathbb{Q} -linéairement dépendantes. \square

La proposition suivante relie les exposants d'approximation diophantienne associés à $\boldsymbol{\theta} = (\frac{u_1}{u_0}, \dots, \frac{u_n}{u_0})$ au comportement asymptotique de la multifonction $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$. Elle a d'abord été établie par Schmidt et Summerer dans [50, Théorème 1.4] et [51, Relations (1.8) et (1.9)]. Avec les notations de Roy [46, Proposition 3.1], elle s'exprime de la manière suivante.

Proposition 3.17 (Schmidt, Summerer, 2009). *Soit $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ de norme euclidienne $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ avec $u_0 \neq 0$. On pose $\boldsymbol{\theta} = (\frac{u_1}{u_0}, \dots, \frac{u_n}{u_0})$. Pour tout entier $1 \leq d \leq n$, on a les relations*

$$\begin{aligned} \liminf_{q \rightarrow +\infty} \frac{L_{\mathbf{u},1}(q) + \dots + L_{\mathbf{u},d}(q)}{q} &= \frac{1}{1 + \omega_{n-d}(\boldsymbol{\theta})}, \\ \limsup_{q \rightarrow +\infty} \frac{L_{\mathbf{u},1}(q) + \dots + L_{\mathbf{u},d}(q)}{q} &= \frac{1}{1 + \hat{\omega}_{n-d}(\boldsymbol{\theta})}. \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on connaît explicitement une multifonction $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_{n+1}) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ est négligeable devant q , alors on peut calculer les $2n$ exposants $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}), \dots, \hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}), \omega_0(\boldsymbol{\theta}), \dots, \omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta})$ du point $\boldsymbol{\theta}$ en remplaçant $L_{\mathbf{u},d}$ par P_d dans la formule précédente pour $1 \leq d \leq n$. Dans cette optique, on considère la famille de multifonctions suivantes introduites par Roy dans [46].

Définition 3.18 (Roy, 2014). Soit I un sous-intervalle de $[0, \infty[$ d'intérieur non vide. Un $(n+1)$ -système généralisé sur I est une multifonction continue affine par morceaux $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_{n+1}) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ avec les propriétés suivantes.

- (S1) Pour tout $q \in I$, on a $0 \leq P_1(q) \leq \dots \leq P_{n+1}(q)$ et $P_1(q) + \dots + P_{n+1}(q) = q$.
- (S2) Si H est un sous-intervalle ouvert non vide de I sur lequel \mathbf{P} est différentiable, alors il existe des entiers \underline{r}, \bar{r} avec $1 \leq \underline{r} \leq \bar{r} \leq n+1$ tels que $P_{\underline{r}}, P_{\underline{r}+1}, \dots, P_{\bar{r}}$ coïncident sur tout l'intervalle H et ont pour pente $1/(\bar{r} - \underline{r} + 1)$ tandis que toutes les autres composantes P_d de \mathbf{P} sont constantes sur H .

(S3) Si q est un point intérieur de I où \mathbf{P} n'est pas différentiable, si $\underline{r}, \bar{r}, \underline{s}, \bar{s}$ sont les entiers tels que

$$P'_d(q^-) = \frac{1}{\bar{r} - \underline{r} + 1} \quad (\underline{r} \leq d \leq \bar{r}) \quad \text{et} \quad P'_d(q^+) = \frac{1}{\bar{s} - \underline{s} + 1} \quad (\underline{s} \leq d \leq \bar{s}),$$

et si $\underline{r} < \bar{s}$, alors on a $P_{\underline{r}}(q) = P_{\underline{r}+1}(q) = \dots = P_{\bar{s}}(q)$.

Ici $P'_d(q^-)$ (resp. $P'_d(q^+)$) désigne la dérivée à gauche (resp. à droite) de P_d en q . Le résultat suivant combine le Théorème 4.2 et le Corollaire 4.7 de [46].

Théorème 3.19 (Roy, 2014). *Pour tout point non nul $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un nombre réel $q_0 \geq 0$ et un $(n+1)$ -système généralisé \mathbf{P} sur $[q_0, +\infty[$ tels que $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ est borné sur $[q_0, +\infty[$. Réciproquement, pour tout $(n+1)$ -système généralisé \mathbf{P} sur un intervalle $[q_0, +\infty[$ avec $q_0 \geq 0$, il existe un point non nul $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ est borné sur $[q_0, +\infty[$.*

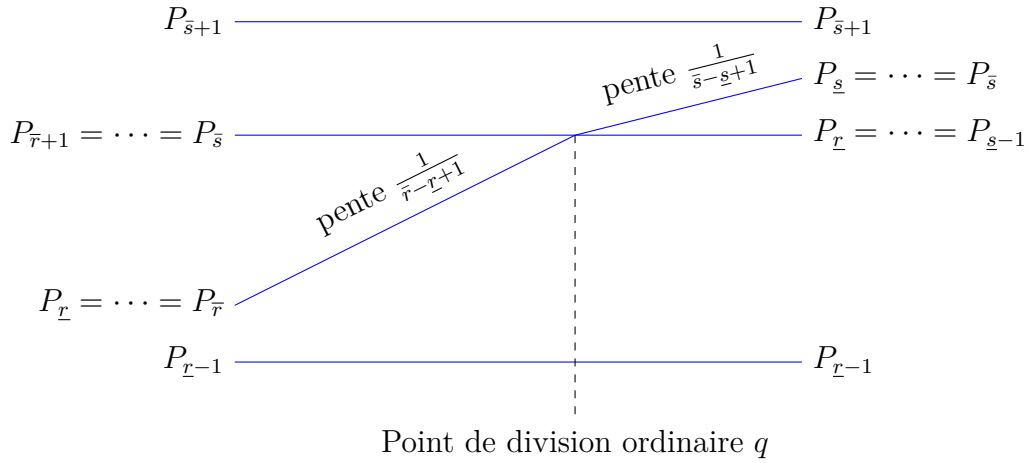
Considérant la remarque après la Proposition 3.17, ce résultat réduit la détermination du spectre des exposants d'approximation diophantienne à une étude combinatoire de $(n+1)$ -systèmes généralisés.

Avant de démontrer la Proposition 3.17, nous allons clarifier ce qu'est un $(n+1)$ -système généralisé. Même si la définition semble compliquée, cet objet est facile à comprendre à partir du *graphe conjoint* de \mathbf{P} , à savoir l'union des graphes de ses composantes P_1, \dots, P_{n+1} sur l'intervalle de définition I de \mathbf{P} . Nous l'expliquons maintenant.

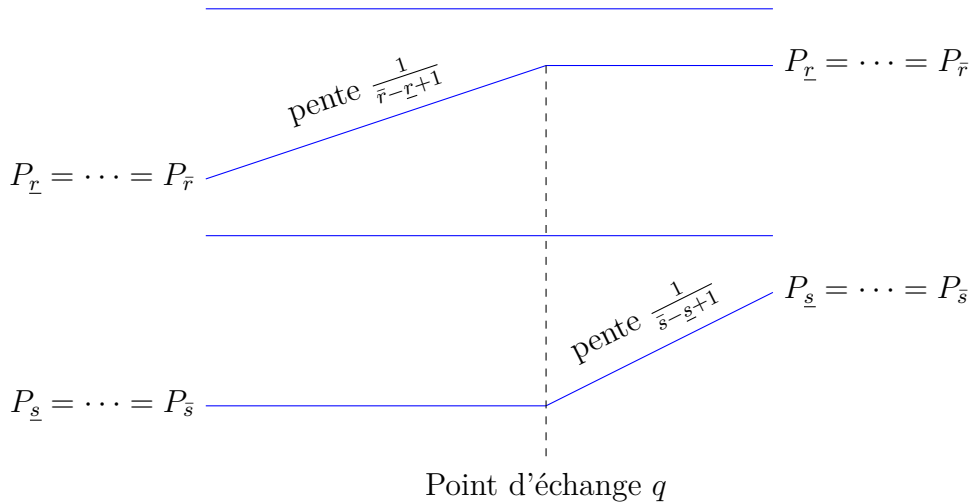
Un *point de division* de \mathbf{P} est une borne de I contenue dans I ou un point intérieur de I où \mathbf{P} n'est pas différentiable. Ces points forment un sous ensemble discret de I . Entre deux points de division consécutifs $q^* < q$ de I , le graphe de chaque composante de \mathbf{P} est un segment de droite. Tous ces segments de droite sont de pente nulle sauf un segment de droite de pente $1/t$ où t est le nombre de composantes de \mathbf{P} dont le graphe sur $[q^*, q]$ est ce segment de droite. Par la condition $P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_{n+1}$, il existe des composantes consécutives $P_{\underline{r}}, \dots, P_{\bar{r}}$ de \mathbf{P} avec $\bar{r} - \underline{r} + 1 = t$. Si q est un point intérieur de I , et si $P_{\underline{s}}, \dots, P_{\bar{s}}$ sont les composantes de \mathbf{P} dont le graphe a pour pente $\frac{1}{\bar{s} - \underline{s} + 1}$ à droite de q , alors il y a deux cas.

1. Si $\underline{r} < \bar{s}$, on dit que q est un *point de division ordinaire*. Dans ce cas, on a $P_{\underline{r}}(q) = \dots = P_{\bar{s}}(q)$ d'après la propriété (S3). Cela implique que $\underline{r} \leq \underline{s}$ et $\bar{r} \leq \bar{s}$, comme par définition $P_{\underline{s}}(q) = P_{\bar{s}}(q)$ et $P_{\bar{r}}(q) = P_{\underline{r}}(q)$ et les composantes sont classées par ordre croissant. Parmi $P_{\underline{r}}, \dots, P_{\bar{s}}$, les composantes P_j avec $\underline{s} \leq j \leq \bar{r}$ (s'il en existe) changent de pente de $\frac{1}{\bar{r} - \underline{r} + 1}$ à $\frac{1}{\bar{s} - \underline{s} + 1}$. Celles avec $j \leq \min(\bar{r}, \underline{s} - 1)$ changent de pente de $\frac{1}{\bar{r} - \underline{r} + 1}$ à 0. Les composantes restantes

P_j avec $\bar{r} + 1 \leq j \leq \bar{s} - 1$ (s'il en existe) ont une pente constante nulle dans un voisinage de q .



2. Sinon, on a $\underline{r} > \bar{s}$ car il est impossible que $\underline{r} = \bar{s}$ (ou sinon \mathbf{P} est différentiable en q). On dit alors que q est un *point d'échange*. Dans ce cas, on a $P_{\underline{r}}(q) = \dots = P_{\bar{r}}(q) > P_{\bar{s}}(q)$, ce qui signifie que l'extrémité supérieure du segment de droite de pente $\frac{1}{\bar{r}-\underline{r}+1}$ à la gauche de q est au dessus de l'extrémité inférieure du segment de droite de pente $\frac{1}{\bar{s}-\bar{s}+1}$ à la droite de q .



Proposition 3.20. *Le graphe conjoint d'un $(n+1)$ -système généralisé \mathbf{P} détermine de manière unique l'application \mathbf{P} si l'on connaît la valeur de \mathbf{P} en un point de son intervalle de définition.*

Preuve de la Proposition 3.17 La preuve repose sur une définition alternative des exposants $\omega_d(\boldsymbol{\theta})$ et $\hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta})$, donnée par Bugeaud et Laurent dans [8, §4].

Lemme 3.21 (Bugeaud, Laurent, 2007). *Soit un entier d compris entre 0 et $n - 1$. Alors l'exposant $\omega_d(\boldsymbol{\theta})$ (resp. $\hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta})$) est le supremum des nombres réels ω tels que le système*

$$0 < \|\mathbf{z}\| \leq Q, \quad \|\mathbf{z} \wedge (1, \theta_1, \dots, \theta_n)\| \leq Q^{-\omega} \quad (3.4)$$

admet une solution $\mathbf{z} \in \wedge^{d+1} \mathbb{Z}^{n+1}$ pour des nombres réels Q arbitrairement grands (resp. pour tout nombre réel Q assez grand).

Pour tout nombre entier d entre 0 et $n - 1$, et tout nombre réel $Q \geq 1$, on définit le corps convexe

$$\mathcal{K}_{\boldsymbol{\theta}}^{(d+1)}(Q) = \{\mathbf{z} \in \wedge^{d+1} \mathbb{R} \mid \|\mathbf{z}\| \leq Q, \|\mathbf{z} \wedge (1, \theta_1, \dots, \theta_n)\| \leq 1\}.$$

Montrons que $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\theta}}^{(d+1)}(Q)$ est comparable au $(d+1)$ ème corps extérieur de $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}(Q)$. Il s'agit du [8, §4 Lemme 3] avec $U = Q$ et $V = 1$.

On commence par remarquer que $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}(Q)$ est comparable à \mathcal{P} défini par

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x_0| \leq Q, |x_0\theta_i - x_i| \leq 1, 1 \leq i \leq n\}.$$

Or \mathcal{P} est comparable à l'enveloppe convexe des points

$$\pm Q\mathbf{u}, \pm e_1, \pm e_n$$

où $e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ et $\mathbf{u} = (1, \theta_1, \dots, \theta_n)$. Le $(d+1)$ ème corps extérieur de $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}(Q)$ est donc comparable à l'enveloppe convexe dans $\wedge^{d+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ du produit extérieur de $d+1$ de ces points, à savoir des points

$$\pm e_{i_0} \wedge \dots \wedge e_{i_d}, \quad 1 \leq i_0 < \dots < i_d \leq n,$$

et

$$\pm Q\mathbf{u} \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}, \quad 1 \leq i_0 < \dots < i_d \leq n.$$

Les points \mathbf{z} de cette forme vérifient

$$\|\mathbf{z}\| \ll Q, \quad \|\mathbf{z} \wedge \mathbf{u}\| \ll 1,$$

d'où la première inclusion. Inversement, si un point \mathbf{z} de $\wedge^{d+1} \mathbb{R}^{n+1}$ appartient à $\mathcal{K}_{\boldsymbol{\theta}}^{(d+1)}(Q)$, on le décompose dans la base composée de $d+1$ produits extérieurs de la base $(\mathbf{u}, e_1, \dots, e_n)$, à savoir

$$\mathbf{z} = \sum a_{i_0, i_1, \dots, i_d} e_{i_0} \wedge \dots \wedge e_{i_d} + \sum b_{i_1, i_2, \dots, i_d} \mathbf{u} \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}.$$

On a alors les estimations $\sum |a_{i_0, i_1, \dots, i_d}| + \sum |b_{i_1, i_2, \dots, i_d}| \asymp |\mathbf{z}| \leq Q$ et $\sum |a_{i_0, i_1, \dots, i_d}| \asymp |\mathbf{u} \wedge \mathbf{z}| \leq 1$. D'où la deuxième inclusion et le résultat.

Reprenons la preuve de la Proposition 3.17. Par le Théorème 3.4, le premier minimum de $\mathcal{K}_\theta^{(j+1)}(Q)$ par rapport à $\Lambda^{j+1} \mathbb{Z}^{n+1}$ vérifie

$$\lambda_1(\mathcal{K}_\theta^{(j+1)}(Q)) \asymp \lambda_1(\mathcal{K}_\theta^{(1)}(Q)) \dots \lambda_{j+1}(\mathcal{K}_\theta^{(1)}(Q)).$$

Comme $\mathcal{K}_\theta^{(1)}(Q)$ est comparable au dual de $\mathcal{C}_\theta(Q)$, il découle du Théorème 3.3 que

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathcal{K}_\theta^{(d+1)}(Q)) &\asymp \lambda_{n+1}(\mathcal{C}_\theta(Q))^{-1} \dots \lambda_{n-d+1}(\mathcal{C}_\theta(Q))^{-1} \\ &\asymp Q^{-1} \lambda_1(\mathcal{C}_\theta(Q)) \dots \lambda_{n-d}(\mathcal{C}_\theta(Q)), \end{aligned}$$

en utilisant le deuxième théorème de Minkowski (Théorème 3.1).

On remarque alors que le corps convexe défini par le système d'équation (3.4) est $Q^{-\omega} \mathcal{K}_\theta^{(d+1)}(Q^{\omega+1})$. Son premier minimum est donc majoré et minoré par le produit

$$Q^{-1} \lambda_1(\mathcal{C}_\theta(Q^{\frac{1}{\omega+1}})) \dots \lambda_{n-d}(\mathcal{C}_\theta(Q^{\frac{1}{\omega+1}}))$$

à une constante multiplicative positive près indépendante de Q et ω , lorsque $Q \geq 1$ et $\omega + 1 \geq 0$. Par le Lemme 3.21, l'exposant $\omega_d(\theta)$ (resp. $\hat{\omega}_d(\theta)$) est le supremum des nombres réels ω tels que ce premier minimum est inférieur à 1 pour des nombres réels Q arbitrairement grand (resp. pour tout nombre réel Q assez grand). Comme ces exposants sont strictement positifs, on peut supposer $\omega > -1$. On choisit alors le paramètre $Q = \exp(\frac{q}{\omega+1})$, avec $q > 0$. On obtient alors la condition

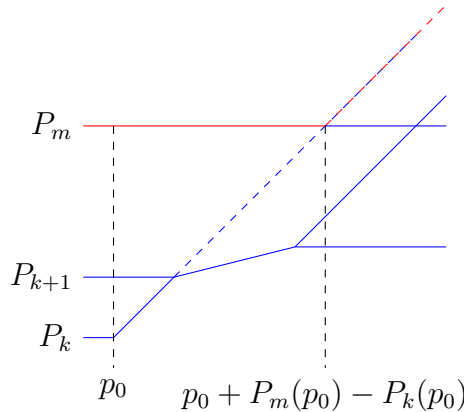
$$\frac{L_{u,1}(q) + \dots + L_{u,n-d}(q)}{q} \leq \frac{1}{1 + \omega}.$$

Ce qui achève la preuve. □

Proposition 3.22. *Pour tous les entiers $1 \leq k < m \leq n + 1$, si p_0 est un point de division tel que P_k n'est pas différentiable, alors pour tout $p > p_0$, P_m est constant sur l'intervalle $[p_0, p_0 + P_m(p_0) - P_k(p_0)]$. En particulier, on a*

$$P_m(p) \leq \max(P_m(p_0), P_k(p_0) + p - p_0).$$

Preuve. Cela découle du fait que les pentes valent au plus 1, comme on peut le voir sur la figure suivante.



Soit donc un entier $1 \leq k \leq n$, et p_0 un point de division tel que P_k n'est pas différentiable et un point $p > p_0$. Si la composante P_{k+1} n'est pas constante sur l'intervalle $[p_0, p]$, alors par définition il existe un point de division p_1 dans l'intervalle $]p_0, p[$ tel que P_{k+1} n'est pas différentiable en p_1 et $P_k(p_1) = P_{k+1}(p_1)$. Comme la dérivée P'_k est majorée par 1, on obtient :

$$P_k(p_1) - P_k(p_0) \leq p_1 - p_0.$$

On en déduit

$$p \geq p_1 \geq p_0 + P_{k+1}(p_0) - P_k(p_0),$$

d'où le résultat pour $m = k + 1$. On en déduit facilement le résultat par récurrence. \square

Proposition 3.23. *Lorsque seule la composante P_1 croît, on ne peut avoir qu'un point de division ordinaire. Ainsi, lorsque $P'_1(q) = 1$, on sait que seule la composante P_1 croît jusqu'à atteindre la valeur $P_2(q)$.*

3.4.1 Résultats

Dans ce sous-chapitre, nous commençons par expliquer comment interpréter les résultats classiques dans le contexte de la géométrie paramétrique des nombres, puis nous énonçons les résultats obtenus grâce à celle-ci.

Commençons par une remarque sur la dépendance linéaire des coordonnées de θ . Nous avons dit précédemment que dans ce cas, on se ramenait au cas de la dimension inférieure. Cela s'explique facilement à l'aide du graphe conjoint d'un $(n+1)$ -système généralisé. D'après la Proposition 3.16, si les coordonnées sont dépendantes, alors P_1 est constante pour q assez grand, et le jeu combinatoire sur les n composantes restantes donne les valeurs possibles des exposants. On se ramène donc bien au cas de la dimension inférieure, en n'excluant pas que celle-ci se réduise à nouveau si P_2 est à son tour constante pour q assez grand.

Les deux conditions $P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_{n+1}$ et $P_1(q) + P_2(q) + \dots + P_{n+1}(q) = q$, impliquent les majorations, pour tout entier d entre 1 et n .

$$P_1(q) + \dots + P_d(q) \leq \frac{d}{n+1}q.$$

On en déduit par la Proposition 3.17 et le Théorème 3.19 les minoration

$$\omega_d(\theta) \geq \hat{\omega}_d(\theta) \geq \frac{d+1}{n-d}.$$

On sait qu'au sens de la mesure de Lebesgue, ces minoration sont presque sûrement des égalités :

$$\omega_d(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta}) = \frac{d+1}{n-d}.$$

Lorsque l'on a toutes ces égalités, cela implique qu'asymptotiquement il existe des nombres réels q arbitrairement grands tels que toutes les composantes aient une valeur $\frac{q}{n+1} + o(q)$. Le comportement presque sûr des fonctions \mathbf{L}_u est donc que toutes ses composantes sont à distance $o(q)$ de la droite $q \mapsto \frac{q}{n+1}$.

On remarque également que lorsque l'un des exposants $\omega_d(\boldsymbol{\theta})$ prend la valeur $\frac{d+1}{n-d}$, alors les deux conditions $P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_{n+1}$ et $P_1(q) + P_2(q) + \dots + P_{n+1}(q) = q$ imposent que les composantes P_1, \dots, P_d valent $\frac{q}{n+1} + o(q)$, et finalement que toutes les composantes valent $\frac{q}{n+1} + o(q)$. Si l'un des exposants uniformes prend sa valeur presque sûre, alors tous les n exposants uniformes prennent leur valeur presque sûre, et si un exposant ordinaire prend sa valeur presque sûre, alors les $2n$ exposants prennent leur valeur presque sûre. Ces résultats de simultanéité sont déjà montrés par Schmidt et Wang [52].

Dans le cas de la dimension $n = 1$, Keita [24] a pu établir précisément un lien entre la décomposition en fraction continue du réel considéré et les extrema locaux de la multifonction dans les notations duales de Schmidt et Summerer.

Concernant la dimension $n = 2$, on présente dans le sous-chapitre suivant une démonstration alternative du Théorème 2.2, et comment interpréter la relation de Jarník (2.1).

Grace à cette théorie, pour toute dimension $n \geq 1$, Roy a pu démontrer que les inégalités de *Going Up* et *Going Down* étaient optimales, donnant le spectre des n exposants ordinaires. Les Théorèmes 3.12, 3.13 et 3.14 donnent des éléments de réponse sur le spectre des n exposants uniformes.

Une autre avancée permise par la géométrie paramétrique des nombres est la minoration du rapport $\frac{\omega_0(\boldsymbol{\theta})}{\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta})}$ (resp. $\frac{\omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta})}{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})}$) en fonction de $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta})$ (resp. $\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})$). En dimension $n = 2$, Jarník a montré que

$$\frac{\omega_1(\boldsymbol{\theta})}{\hat{\omega}_1(\boldsymbol{\theta})} \geq \hat{\omega}_1(\boldsymbol{\theta}) - 1.$$

On a également

$$\frac{\omega_0(\boldsymbol{\theta})}{\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta})} \geq \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}).$$

En dimension $n = 3$, Moshchevitin [43] a établi la relation

$$\frac{\omega_0(\boldsymbol{\theta})}{\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta})} \geq \frac{\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) + \sqrt{4\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) - 3\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta})^2}}{2(1 - \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}))},$$

où $\omega_0(\boldsymbol{\theta}) = \infty$ si $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = 1$. Grâce à la géométrie paramétrique des nombres, Schmidt et Summerer [50] ont donné une preuve alternative, ainsi que la minoration duale

$$\frac{\omega_2(\boldsymbol{\theta})}{\hat{\omega}_2(\boldsymbol{\theta})} \geq \frac{\sqrt{4\hat{\omega}_2(\boldsymbol{\theta}) - 3} - 1}{2}.$$

Ces minoration sont optimales. Une telle minoration en dimension supérieure reste un problème ouvert, qui s'inscrit dans la problématique plus générale d'établir le spectre joint des $2n$ exposants ordinaires et uniformes.

3.4.2 Exposants de Schmidt et Summerer

Dans cette section, nous définissons les $2n$ exposants introduits par W. M. Schmidt et L. Summerer [50, 51], qui correspondent aux limites supérieures et inférieures des $\frac{P_d(q)}{q}$. Leur spectre n'est pas connu, même pour $n = 2$ et n'est pas lié à celui des $2n$ exposants définis précédemment. Cela reste un problème ouvert.

Nous allons reprendre les notations et définitions de [50, 51].

Pour un n -uplet $\boldsymbol{\theta} = (1, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ de réels \mathbb{Q} -linéairement indépendants, on considère les réseaux de \mathbb{R}^n de covolume 1 définis par

$$\begin{aligned} \Lambda = \Lambda(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{pmatrix} 1 & & & -\theta_1 \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & -\theta_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{Z}^n \\ &= \{(p_1 - p_n\theta_1, \dots, p_{n-1} - p_n\theta_{n-1}, p_n), (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n\} \subset \mathbb{R}^n \\ \Lambda^* = \Lambda^*(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \theta_1 & \dots & \theta_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{Z}^n \\ &= \{(p_1, \dots, p_{n-1}, p_1\theta_1 + \dots + p_{n-1}\theta_{n-1} + p_n), (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n\} \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Notons le cube unité $\mathcal{C} = \{\mathbf{p} \mid |p_i| \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$ et son dual $\mathcal{C}^* = \{\mathbf{p} \mid |p_1| + \dots + |p_n| \leq 1\}$. Soient $\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)$ des fonctions de somme nulle, pour $q > 0$ on pose l'application linéaire $T_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$T_q : \mathbf{p} := (p_1, \dots, p_n) \mapsto (e^{\beta_1(q)} p_1, \dots, e^{\beta_n(q)} p_n).$$

On définit l'application linéaire duale $T_q^* = T_q^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$T_q^* : \mathbf{p} := (p_1, \dots, p_n) \mapsto (e^{-\beta_1(q)} p_1, \dots, e^{-\beta_n(q)} p_n).$$

On note $\mathcal{C}(q) = T_q(\mathcal{C})$ (resp. $\mathcal{C}^*(q) = (T_q(\mathcal{C}))^* = T_q^*(\mathcal{C}^*)$) et $\lambda_i(q)$ (resp. $\lambda_i^*(q)$) le $i^{\text{ème}}$ minimum successif par rapport à Λ et $\mathcal{C}(q)$ (resp. Λ^* et $\mathcal{C}^*(q)$). On remarque que $\mathcal{C}(q)$ et $\mathcal{C}^*(q)$ sont de volume constant, comme la somme des $\beta_j(t)$ est nulle.

On définit alors les exposants de Schmidt-Summerer de la manière suivante.

Définition 3.24. Pour $\boldsymbol{\theta} = (1, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ un n -uplet de nombres réels \mathbb{Q} -linéairement indépendants on définit pour $1 \leq d \leq n$:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda_d(q)}{q}, \\ \underline{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda_d(q)}{q}, \\ \overline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda_d^*(q)}{q}, \\ \underline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda_d^*(q)}{q}. \end{aligned}$$

On a trivialement

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_{\beta,1}(\boldsymbol{\theta}) &\leq \overline{\varphi}_{\beta,2}(\boldsymbol{\theta}) \leq \dots \leq \overline{\varphi}_{\beta,n}(\boldsymbol{\theta}), \\ \underline{\varphi}_{\beta,1}(\boldsymbol{\theta}) &\leq \underline{\varphi}_{\beta,2}(\boldsymbol{\theta}) \leq \dots \leq \underline{\varphi}_{\beta,n}(\boldsymbol{\theta}), \\ \overline{\varphi}_{\beta,1}^*(\boldsymbol{\theta}) &\leq \overline{\varphi}_{\beta,2}^*(\boldsymbol{\theta}) \leq \dots \leq \overline{\varphi}_{\beta,n}^*(\boldsymbol{\theta}), \\ \underline{\varphi}_{\beta,1}^*(\boldsymbol{\theta}) &\leq \underline{\varphi}_{\beta,2}^*(\boldsymbol{\theta}) \leq \dots \leq \underline{\varphi}_{\beta,n}^*(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

Le deuxième théorème de Minkowski (Théorème 3.2) nous donne un encadrement du produit des λ_d :

$$\frac{\det \Lambda}{n!} \leq \lambda_1 \dots \lambda_n \leq \det \Lambda.$$

On se place maintenant dans le cas particulier symétrique, i.e. on choisit $\beta_1(q) = \dots = \beta_{n-1}(q) = -q$ et $\beta_n(q) = (n-1)q$. Dans ce cas, on enlèvera le $\boldsymbol{\beta}$ des notations

pour les alléger.

On en déduit pour tout $1 \leq d \leq n$ les encadrements de nos exposants

$$-(n-1) \leq \underline{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta}) \leq \overline{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta}) \leq 1,$$

$$-(n-1) \leq \underline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta}) \leq \overline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta}) \leq 1.$$

Théorème 3.25 (Schmidt, Summerer, 2009). *Pour $1 \leq d \leq n$ on a*

$$0 \leq \overline{\varphi}_{\beta,1}(\boldsymbol{\theta}) + \cdots + \overline{\varphi}_{\beta,d-1}(\boldsymbol{\theta}) + \underline{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta}) + \overline{\varphi}_{\beta,d+1}(\boldsymbol{\theta}) + \cdots + \overline{\varphi}_{\beta,n}(\boldsymbol{\theta}),$$

$$0 \geq \underline{\varphi}_{\beta,1}(\boldsymbol{\theta}) + \cdots + \underline{\varphi}_{\beta,d-1}(\boldsymbol{\theta}) + \overline{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta}) + \underline{\varphi}_{\beta,d+1}(\boldsymbol{\theta}) + \cdots + \underline{\varphi}_{\beta,n}(\boldsymbol{\theta}).$$

On remarque que dans le cas symétrique les exposants $\overline{\varphi}_d(\boldsymbol{\theta})$, $\overline{\varphi}_d^*(\boldsymbol{\theta})$, $\underline{\varphi}_d^*(\boldsymbol{\theta})$, $\underline{\varphi}_d(\boldsymbol{\theta})$ sont reliés par la relation suivante :

Proposition 3.26. *Pour $\boldsymbol{\theta} = (1, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ un n -uplet de nombres réels \mathbb{Q} -linéairement indépendants, pour $1 \leq d \leq n$ et les fonctions $\beta_1(q) = \cdots = \beta_{n-1}(q) = -q$ et $\beta_n(t) = (n-1)q$, on a*

$$\overline{\varphi}_d(\boldsymbol{\theta}) = -\underline{\varphi}_{n+1-d}^*(\boldsymbol{\theta}),$$

$$\underline{\varphi}_d(\boldsymbol{\theta}) = -\overline{\varphi}_{n+1-d}^*(\boldsymbol{\theta}).$$

Il suffit donc d'étudier les exposants $\overline{\varphi}_d(\boldsymbol{\theta})$ et $\underline{\varphi}_d(\boldsymbol{\theta})$. Nous démontrons cette proposition à la fin de ce sous-chapitre. Les résultats de Schmidt et Summerer consistent en l'étude des fonctions continues affines par morceaux $\tilde{L}_d(q) = \log \lambda_d(q)$ pour $1 \leq d \leq n$. Le théorème suivant relie les exposants de Schmidt-Summerer avec les exposants classiques introduits précédemment.

Théorème 3.27 (Schmidt, Summerer, 2009). *Pour $1, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ des nombres réels \mathbb{Q} -linéairement indépendants, et avec les notations précédentes les concernant, on a*

$$\begin{aligned} (1 + \lambda(\boldsymbol{\theta}))(n - 1 + \underline{\varphi}_1(\boldsymbol{\theta})) &= (1 + \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}))(n - 1 + \overline{\varphi}_1(\boldsymbol{\theta})) = n \\ (1 + \omega(\boldsymbol{\theta}))(1 - \underline{\varphi}_n(\boldsymbol{\theta})) &= (1 + \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}))(1 - \overline{\varphi}_1(\boldsymbol{\theta})) = n \end{aligned}$$

En conséquence, les quatres exposants classiques $\omega, \lambda, \hat{\omega}, \hat{\lambda}$ déterminent les exposants d'indice 1 et n de Schmidt et Summerer $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_n, \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_n$ et *vice versa*. Par contre, les exposants $\overline{\varphi}_d$ pour les indices $2 \leq d \leq n$ ne sont pas liés aux exposants intermédiaires introduits par Laurent. Dans [50, 51] Schmidt et Summerer expriment

avec les exposants $\underline{\varphi}_d$ et $\overline{\varphi}_d$ des relations équivalentes ou plus fortes que l'égalité de Jarník (2.1) [22], le Théorème 2.2 de Laurent [32], et les principes de transfert de Khintchine [26, 27, 49].

Dans ce cadre, il est naturel de définir les exposants suivants.

Définition 3.28. Soit $\boldsymbol{\theta} = (1, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ un n -uplet de nombres réels \mathbb{Q} -linéairement indépendants, $0 \leq \mu_1, \dots, \mu_{n-1} \leq n-1$ des nombres réels de somme $n-1$ et un entier $1 \leq d \leq n$. On définit $\lambda_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$ (resp. $\hat{\lambda}_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels λ tels que le système

$$\begin{aligned} 0 < |y_n| &\leq H \\ 0 < \max_{1 \leq k \leq n-1} (|\theta_k y_n - y_k|)^{\frac{1}{\mu_k}} &\leq H^{-\lambda}, \end{aligned}$$

admet d solutions entières $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$ linéairement indépendantes pour des nombres réels H arbitrairement grand (resp. pour tout nombre réel H assez grand). On définit également $\omega_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$ (resp. $\hat{\omega}_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$) comme le supremum des nombres réels ω tels que le système

$$\begin{aligned} 0 < \max_{1 \leq k \leq n-1} |y_k|^{\frac{1}{\mu_k}} &\leq H \\ 0 < |\theta_1 y_1 + \dots + \theta_{n-1} y_{n-1} + y_n| &\leq H^{-\omega}, \end{aligned}$$

admet d solutions entières $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$ linéairement indépendantes pour des nombres réels H arbitrairement grand (resp. pour tout nombre réel H assez grand).

Dans le cas symétrique $\mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = 1$ on enlèvera $\boldsymbol{\mu}$ des notations pour les alléger. On obtient alors

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) &= \lambda(\boldsymbol{\theta}), & \hat{\lambda}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) &= \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}), \\ \omega^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) &= \omega(\boldsymbol{\theta}), & \hat{\omega}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) &= \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

Pour $n = 3$ on retrouve la définition pondérée du chapitre 2.2 avec $\mu_1 = 2i$ et $\mu_2 = 2j$.

Le Théorème 3.27 se généralise alors à

Théorème 3.29 (Schmidt, Summerer, 2013). *Dans le cas symétrique $\mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = 1$, pour tout nombre entier $1 \leq d \leq n$, on a*

$$\begin{aligned} (1 + \lambda^{(d)}(\boldsymbol{\theta}))(n-1 + \underline{\varphi}_d(\boldsymbol{\theta})) &= (1 + \hat{\lambda}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}))(n-1 + \overline{\varphi}_d(\boldsymbol{\theta})) = n, \\ (1 + \hat{\omega}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}))(1 + \overline{\varphi}_d^*(\boldsymbol{\theta})) &= (1 + \omega^{(d)}(\boldsymbol{\theta}))(n-1 + \underline{\varphi}_d^*(\boldsymbol{\theta})) = n. \end{aligned}$$

En utilisant les relations de la Proposition 3.26, on obtient le corollaire

Corollaire 3.30. *Pour tout nombre entier d entre 1 et n ,*

$$\lambda^{(d)}(\boldsymbol{\theta})\hat{\omega}^{(n+1-d)}(\boldsymbol{\theta}) = 1 = \hat{\lambda}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})\omega^{(n+1-d)}(\boldsymbol{\theta})$$

Preuve du corollaire En appliquant la relation $\bar{\varphi}_d^*(\boldsymbol{\theta}) = -\underline{\varphi}_{n+1-d}(\boldsymbol{\theta})$ dans l'égalité du Théorème 3.29 on obtient :

$$(1 + \hat{\omega}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}))(1 - \underline{\varphi}_{n+1-d}(\boldsymbol{\theta})) = n.$$

Or le Théorème 3.29 donne également

$$\underline{\varphi}_{n+1-d}(\boldsymbol{\theta}) = 1 - \frac{n\lambda^{(d)}(\boldsymbol{\theta})}{1 + \lambda^{(d)}(\boldsymbol{\theta})},$$

on obtient l'égalité annoncée $\lambda^{(d)}(\boldsymbol{\theta})\hat{\omega}^{(n+1-d)}(\boldsymbol{\theta}) = 1$ en combinant les deux égalités précédentes. L'égalité $1 = \hat{\lambda}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})\omega^{(n+1-d)}(\boldsymbol{\theta})$ se montre de manière identique. \square

Preuve de la Proposition 3.26 On commence par montrer que la valeur des exposants est indépendante du choix du corps convexe, et que l'on peut donc supposer que l'on travaille avec le cube unité \mathcal{C} . En effet soit \mathcal{K} un corps convexe, alors il existe des constantes c_1 et c_2 telles que $c_1\mathcal{K} \subset \mathcal{C} \subset c_2\mathcal{K}$ et alors $c_1\mathcal{K}(q) \subset \mathcal{C}(q) \subset c_2\mathcal{K}(q)$ ce qui implique

$$c_2^{-1}\lambda_d(\Lambda, \mathcal{K}, q) \leq \lambda_d(\Lambda, \mathcal{C}, q) \leq c_1^{-1}\lambda_d(\Lambda, \mathcal{K}, q),$$

qui donne la majoration

$$|\tilde{L}_d(\Lambda, \mathcal{K}, q) - \tilde{L}_d(\Lambda, \mathcal{C}, q)| < c_3,$$

dont on déduit l'indépendance par égalité des limites supérieures et inférieures. On s'est donc ramené au cas du cube unité. On considère alors l'inégalité de Mahler (Théorème 3.3). En l'appliquant au corps convexe $\mathcal{C}(q)$ on obtient

$$|\tilde{L}_d^*(q) + \tilde{L}_{n+1-d}(q)| < c,$$

dont on déduit

$$\bar{\varphi}_d(\boldsymbol{\theta})^* + \underline{\varphi}_{n+1-d}(\boldsymbol{\theta}) = 0 \text{ et } \underline{\varphi}_d^*(\boldsymbol{\theta}) + \bar{\varphi}_{n+1-d}(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Ce qui montre notre proposition. \square

3.5 Applications de la géométrie paramétrique des nombres

Dans ce sous-chapitre, nous présentons deux démonstrations utilisant la géométrie paramétrique des nombres. La preuve des Théorèmes 3.12 et 3.13, utilisant les mêmes outils, se trouve dans l'article [40] situé en Annexe B.

3.5.1 Démonstration alternative du Théorème 2.2

Nous donnons ici une démonstration alternative du Théorème 2.2 de Laurent [32] utilisant la géométrie paramétrique des nombres. Pour cela, nous allons d'abord construire une famille de points atteignant toutes les valeurs du spectre. Pour la réciproque, via l'étude des 3-systèmes, on commencera par établir la relation de Jarník (2.1), pour ensuite montrer les encadrements des exposants ω et λ .

Soient quatre nombres réels ω , $\hat{\omega}$, λ et $\hat{\lambda}$ vérifiant

$$\hat{\lambda} + \frac{1}{\hat{\omega}} = 1, \hat{\omega} \geq 2 \text{ et } \frac{\omega(\hat{\omega} - 1)}{\omega + \hat{\omega}} \leq \lambda \leq \frac{\omega - \hat{\omega} - 1}{\hat{\omega}}.$$

Nous allons construire un point $\theta \in \mathbb{R}^2$ tel que $\omega(\theta) = \omega$, $\hat{\omega}(\theta) = \hat{\omega}$, $\lambda(\theta) = \lambda$ et $\hat{\lambda}(\theta) = \hat{\lambda}$.

Soit un réel strictement positif q_0 . On définit la suite géométrique de réels $(q_{5m})_{m \geq 0}$ par

$$q_{5m} = \frac{\lambda(\omega + 1)}{(1 + \lambda)(\hat{\omega} - 1)} q_{5(m-1)}, \text{ pour } m \geq 1.$$

On définit également pour tout $m \geq 1$

$$\begin{aligned} q_{5m+1} &= \frac{2\hat{\omega} - 1}{\hat{\omega} + 1} q_{5m}, \\ q_{5m+2} &= \frac{2(\omega - \lambda) + \lambda + 1}{(\hat{\omega} + 1)(\lambda + 1)} q_{5m}, \\ q_{5m+3} &= \frac{\omega + 1}{\hat{\omega} + 1} q_{5m}, \\ q_{5m+4} &= \frac{\lambda\omega + 2\omega - \lambda}{(\hat{\omega} + 1)(\lambda + 1)} q_{5m}. \end{aligned}$$

Lemme 3.31. *Sous l'hypothèse*

$$\hat{\lambda} + \frac{1}{\hat{\omega}} = 1, \hat{\omega} \geq 2 \text{ et } \frac{\omega(\hat{\omega} - 1)}{\omega + \hat{\omega}} \leq \lambda \leq \frac{\omega - \hat{\omega} - 1}{\hat{\omega}},$$

la suite $(q_m)_{m \geq 0}$ est croissante :

$$q_{5m} \leq q_{5m+1} \leq \cdots \leq q_{5m+5}.$$

Preuve. Avec les notations précédentes, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} q_{5m} \leq q_{5m+1} &\Leftrightarrow \hat{\omega} \geq 2, \\ q_{5m+1} \leq q_{5m+2} &\Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\omega - \hat{\omega} + 1}{\hat{\omega}}, \\ q_{5m+2} \leq q_{5m+3} &\Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega + 2} \leq \lambda, \\ q_{5m+3} \leq q_{5m+4} &\Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\omega - 1}{2}, \\ q_{5m+4} \leq q_{5m+5} &\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\omega(\hat{\omega} - 1)}{\omega + \hat{\omega}}. \end{aligned}$$

On remarque qu'on voit apparaître les relations de transfert de Khintchine ne faisant pas intervenir les exposants uniformes.

Nous allons construire un 3-système généralisé \mathbf{P} dont le graphe conjoint est invariant par dilatation de facteur $\frac{\lambda(\omega+1)}{(1+\lambda)(\hat{\omega}-1)}$ sur l'intervalle $[q_0, \infty[$. Ainsi, il suffit de définir \mathbf{P} sur un intervalle générique $[q_{5m}, q_{5(m+1)}]$. Le motif du graphe conjoint de \mathbf{P} est donné par la Figure 3.1.

En pointillés rouges et verts, on trouve le graphe générique pour les valeurs extrémales correspondant à $q_{5m+1} = q_{5m+2}$ et $q_{5m+4} = q_{5m+5}$.

\mathbf{P} est défini en q_{5m} par

$$\begin{aligned} P_1(q_{5m}) &= P_2(q_{5m}) = \frac{1}{1 + \hat{\omega}} q_{5m}, \\ P_3(q_{5m}) &= \frac{\hat{\omega} - 1}{1 + \hat{\omega}} q_{5m}, \end{aligned}$$

et en $q_{5m+3} = \frac{\omega+1}{\hat{\omega}+1} q_{5m}$ par

$$\begin{aligned} P_1(q_{5m+3}) &= \frac{1}{1 + \hat{\omega}} q_{5m}, \\ P_2(q_{5m+3}) &= \frac{\omega - \lambda}{(1 + \hat{\omega})(1 + \lambda)} q_{5m}, \\ P_3(q_{5m+3}) &= \frac{\lambda}{1 + \lambda} q_{5m}, \end{aligned}$$

La somme des composantes en q_{5m} et q_{5m+3} vaut bien q_{5m} et q_{5m+3} respectivement, et la définition de la suite $(q_m)_{m \geq 0}$ assure l'invariance par dilatation.

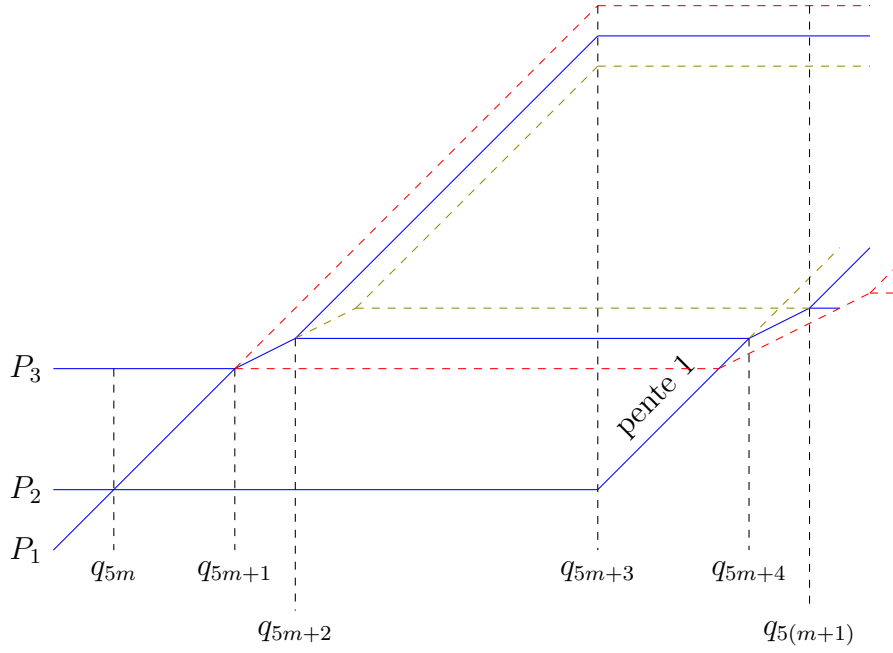


FIGURE 3.1 – Graphe conjoint de \mathbf{P} sur un intervalle générique $[q_{5m}, q_{5(m+1)}]$.

Pour $k = 0, \dots, 4$ le graphe a un unique segment de pente strictement positive sur l'intervalle $[q_{5m+k}, q_{5m+k+1}]$. Les points q_{5m+k} sont des points de division pour $k = 0, \dots, 4$. Le point q_{5m+3} est un *point d'échange*, alors que les autres sont des *points de division ordinaires*.

Par l'invariance par dilatation, on peut alors aisément calculer les limites suivantes.

$$\begin{aligned} \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_1(q)}{q} &= \max_{q \in [q_0, q_5]} \frac{P_1(q)}{q} = \frac{P_1(q_0)}{q_0} = \frac{1}{1 + \hat{\omega}}, \\ \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{P_1(q)}{q} &= \min_{q \in [q_0, q_5]} \frac{P_1(q)}{q} = \frac{P_1(q_3)}{q_3} = \frac{1}{1 + \omega}, \\ \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_3(q)}{q} &= \max_{q \in [q_0, q_5]} \frac{P_3(q)}{q} = \frac{P_3(q_3)}{q_3} = \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \\ \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{P_3(q)}{q} &= \min_{q \in [q_0, q_5]} \frac{P_3(q)}{q} = \frac{P_3(q_1)}{q_1} = \frac{\hat{\omega} - 1}{2\hat{\omega} - 1} = \frac{\hat{\lambda}}{1 + \hat{\lambda}}. \end{aligned}$$

La Proposition 3.17 et le Théorème 3.19 nous assure alors l'existence d'un point $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\omega(\boldsymbol{\theta}) = \omega, \quad \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}, \quad \lambda(\boldsymbol{\theta}) = \lambda \quad \text{et} \quad \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\lambda}.$$

Ceci achève la première partie de la preuve alternative du Théorème 2.2.

Nous allons maintenant donner une preuve de la relation de Jarník (2.1) à l'aide de la géométrie paramétrique des nombres, c'est un cas particulier du Théorème 3.12.

La raison pour laquelle on a une égalité en dimension 2, mais seulement un encadrement en dimension supérieure est la suivante. La fonction $\frac{P_1(q)}{q}$ (resp. $\frac{P_3(q)}{q}$) admet ses maxima locaux (resp. ses minima locaux) en des points de division où $P_1(q) = P_2(q)$ (resp. $P_3(q) = P_2(q)$). En dimension 2, en ces points, la troisième composante $P_3(q)$ (resp. $P_1(q)$) est entièrement déterminée. En dimension supérieure il y a de la liberté.

Considérons un 3-système généralisé \mathbf{P} , on pose les deux quantités $\hat{\omega}$ et $\hat{\lambda}$ tels que

$$\begin{aligned}\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_1(q)}{q} &= \frac{1}{1 + \hat{\omega}}, \\ \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{P_3(q)}{q} &= \frac{\hat{\lambda}}{1 + \hat{\lambda}}.\end{aligned}$$

Commençons par le cas où la première limite est nulle, on posera $\hat{\omega} = \infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, et q assez grand $P_1(q) \leq \varepsilon q$. On en déduit que $P_2(q) + P_3(q) \geq q(1 - \varepsilon)$. Alors, il y a deux possibilités. Soit il existe des q infiniment grands tels que $P_2(q) = P_3(q)$ et la limite inférieure vaut $1/2$ et $\hat{\lambda} = 1$, satisfaisant l'égalité (2.1). Soit ce n'est pas le cas, ce qui implique que P_1 et P_2 sont constantes à partir d'un certain q , et la limite inférieure vaut 1 pour un $\hat{\lambda}$ infini. Il s'agit du cas où les coordonnées ne sont pas linéairement indépendantes avec 1.

On considère maintenant le cas où $\hat{\omega}$ et $\hat{\lambda}$ sont des nombres réels. On commence par écarter le cas où $P_1(q) = P_2(q) = P_3(q)$ pour des q arbitrairement grand. En effet dans ce cas on trouve le cas des valeur presque sûres, à savoir $\hat{\omega} = 2$ et $\hat{\lambda} = \frac{1}{2}$, qui satisfait bien l'égalité (2.1). Alors, on remarque que

$$0 < \frac{P_1(q)}{q} < \frac{1}{3}.$$

On en déduit que la fonction $q \mapsto \frac{P_1(q)}{q}$ est croissante si $P_1'(q) > 0$ et décroissante si $P_1'(q) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite supérieure, il existe un point réel q_1 tel que $q \geq q_1$ implique que

$$\frac{P_1(q)}{q} \leq \frac{1}{1 + \hat{\omega}} + \varepsilon.$$

On considère alors un point $p_1 \geq q_1$ tel que

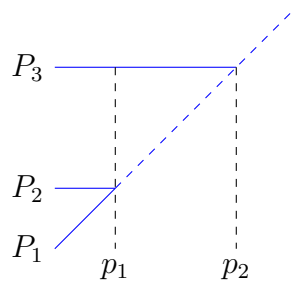
$$P_1(p_1) = P_2(p_1) \leq \frac{1}{1 + \hat{\omega}} + \varepsilon.$$

On a alors

$$P_3(p_1) = p_1 - P_1(p_1) - P_2(p_1) \geq p_1 \frac{\hat{\omega} - 1 - 2\varepsilon(1 + \hat{\omega})}{1 + \hat{\omega}}.$$

On considère ensuite le point $p_2 = p_1 + (P_3(p_1) - P_2(p_1))$. En appliquant la Proposition 3.22, on obtient alors la majoration suivante (en fait $P_3(p_2) = P_3(p_1)$)

$$\frac{P_3(p_2)}{p_2} \leq \frac{\hat{\omega} - 1 - 2\varepsilon(1 + \hat{\omega})}{2\hat{\omega} - 1 - 2\varepsilon(1 + \hat{\omega})}.$$



On en déduit finalement que

$$\frac{\hat{\lambda}}{1 + \hat{\lambda}} \leq \frac{\hat{\omega} - 1}{2\hat{\omega} - 1},$$

ce qui implique que $\hat{\lambda} + \frac{1}{\hat{\omega}} \leq 1$. Il s'agit maintenant de montrer l'inégalité inverse pour conclure. On remarque d'abord que l'égalité est vérifiée pour les valeurs presque sûres, on exclut ce cas pour la suite.

Il existe des points de division arbitrairement grands $p \geq q_0$ tels que $q \mapsto \frac{P_3(q)}{q}$ admette un minimum local en p et

$$\left| \frac{P_3(p)}{p} - \frac{\hat{\lambda}}{1 + \hat{\lambda}} \right| \leq \varepsilon.$$

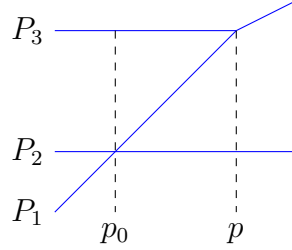
On suppose toujours que $P_3(p) \neq P_1(p)$.

On considère alors le point réel $p_0 = \max\{q \leq p \mid P_1(q) = P_2(q)\}$. En p_0 , on a les valeurs

$$P_1(p_0) = P_2(p_0) \leq p_0 \left(\frac{1}{1 + \hat{\omega}} + \varepsilon \right)$$

$$P_3(p_0) = p_0 - 2P_1(p_0) \geq p_0 \frac{\hat{\omega} - 1 - 2\varepsilon(\hat{\omega} + 1)}{1 + \hat{\omega}}.$$

On commence par remarquer que la fonction $q \mapsto P_1(q)$ est constante sur l'intervalle $[p_0, p]$. En effet si ce n'est pas le cas, il existe un point réel $p_0 < p_1 < p$ où la fonction affine par morceaux P_1 a pour pente 1. Comme p est un minimum local de $\frac{P_3(q)}{q}$, la dérivée à droite $P_3'(p^+)$ est non nulle, et donc la dérivée $P_1'(p^+)$ est nulle (sinon $P_1 = P_2 = P_3$ pour des q arbitrairement grands, et on est dans le cas presque sûr exclu). Ainsi il existe un point dans l'intervalle ouvert $]p_1, p[$ où P_1 change de pente. En ce point, $P_1 = P_2$, ce qui contredit la définition de p_0 .



Nous allons évaluer $\frac{P_3(p)}{p}$ pour obtenir notre résultat. On a

$$p = p_0 + P_2(p) - P_2(p_0) + P_3(p) - P_3(p_0) \leq p_0 + 2P_3(p) - P_2(p_0) - P_3(p_0) \leq 2P_3(p) + P_1(p_0).$$

Ainsi,

$$\frac{P_3(p)}{p} \geq \frac{P_3(p)}{2P_3(p) + P_1(p_0)},$$

qui est une fonction croissante de $P_3(p)$. La minoration

$$P_3(p) \geq P_3(p_0)$$

donne donc

$$\frac{P_3(p)}{p} \geq \frac{P_3(p_0)}{2P_3(p_0) + P_1(p_0)} \geq \frac{p_0 - 2P_1(p_0)}{2p_0 - 3P_1(p_0)},$$

qui est une fonction décroissante de $P_1(p_0)$. La majoration

$$P_1(p_0) \leq p_0 \frac{1 + \varepsilon(1 + \hat{\omega})}{1 + \hat{\omega}}$$

donne alors l'estimation

$$\frac{P_3(p)}{p} \geq \frac{\hat{\omega} - 1 - 2\varepsilon}{2\hat{\omega} - 1 - 3\varepsilon}.$$

Finalement, on en déduit que

$$\frac{\hat{\lambda}}{1 + \hat{\lambda}} \geq \frac{\hat{\omega} - 1}{2\hat{\omega} - 1}.$$

Ceci est équivalent à l'inégalité $\hat{\lambda} + 1/\hat{\omega} \geq 1$, ce qui achève notre preuve alternative de la relation de Jarník (2.1).

Nous allons maintenant montrer l'encadrement de λ en fonction de $\hat{\omega}$ et ω , en utilisant les propriétés des 3-systèmes généralisés.

Soit \mathbf{P} un 3-système généralisé. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un nombre réel q_0 tel que pour tout $q > q_0$,

$$\frac{1 - \varepsilon}{1 + \omega} \leq \frac{P_1(q)}{q} \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 + \hat{\omega}}.$$

On considère alors la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ des points de division ordonnés par ordre croissant $q_n \geq q_0$ tels que $P_1(q_n) = P_2(q_n)$, la dérivée à droite $P'_{1+}(q_n) = 0$ et

$$\inf\{q > q_n \mid P_2(q) = P_3(q)\} < \inf\{q > q_n \mid P_1(q) = P_2(q)\}.$$

Il s'agit des points de division tels que $P_1(q) = P_2(q)$ puis P_1 reste localement constante tandis que P_2 croît jusqu'à atteindre la valeur de P_3 , ou bien croît avec P_3 avec une pente $1/2$.

On pose alors les points suivants :

$$\begin{aligned} r_n &= \min\{q \geq q_n \mid P'_{1+}(q) = 1\}, \\ s_n &= \min\{q \geq q_n \mid P_1(q) = P_2(q)\}, \\ a_n &= \min\{q \geq q_n \mid P_2(q) = P_3(q)\}. \end{aligned}$$

Par définition de q_n et par la Proposition 3.22 on a $a_n = q_n + P_3(q_n) - P_2(q_n)$. Remarquons également que l'égalité $P_1(q) = P_2(q) = P_3(q)$ n'est possible que sur les intervalles $[s_n, q_{n+1}]$, par définition de a_n et s_n .

On commence par exclure le cas où il existe une infinité de points q tels que $P_1(q) = P_2(q) = P_3(q)$. On peut supposer que q_0 est assez grand pour que cela n'arrive jamais. Dans ce cadre, on a le lemme suivant.

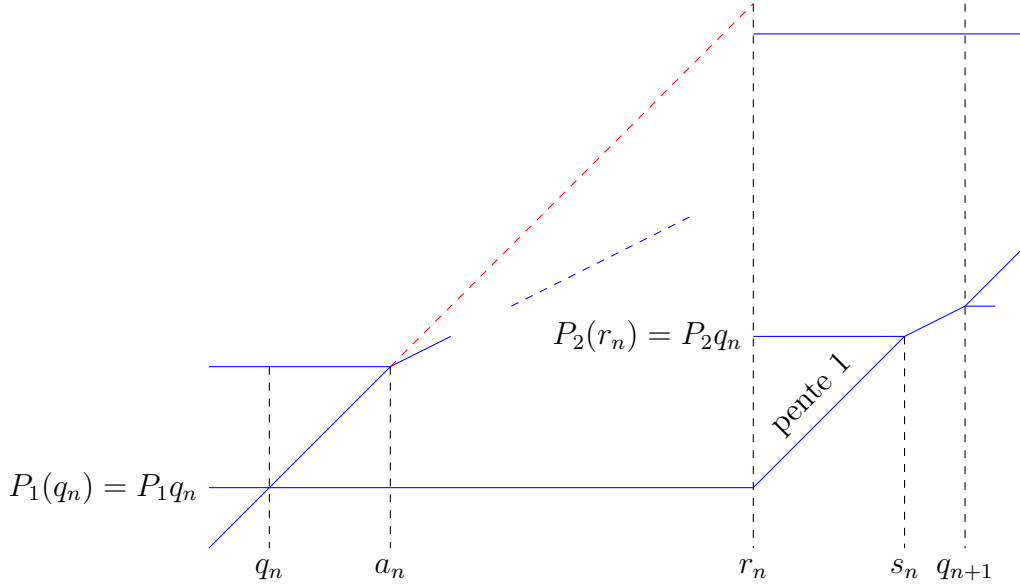


FIGURE 3.2 – Graphe conjoint de \mathbf{P} sur un intervalle $[q_n, q_{n+1}]$, cas où $P_1(q) = P_2(q) = P_3(q)$ est exclu .

Lemme 3.32.

$$\begin{aligned} \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_1(q)}{q} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{[r_n, r_{n+1}]} \frac{P_1(q)}{q} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_1(q_n)}{q_n} = \frac{1}{1 + \hat{\omega}}, \\ \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{P_1(q)}{q} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{[q_n, q_{n+1}]} \frac{P_1(q)}{q} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_1(r_n)}{r_n} = \frac{1}{1 + \omega}, \\ \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_3(q)}{q} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{[q_n, q_{n+1}]} \frac{P_3(q)}{q} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{[a_n, r_n]} \frac{P_3(q)}{q} = \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \end{aligned}$$

Preuve. Par le premier théorème de Minkowski (Théorème 3.1), on sait que $\omega \geq \hat{\omega} \geq 2$. On en déduit que les deux premières limites du Lemme 3.32 sont inférieures à $1/3$. Ainsi, P_1 croît si et seulement si $\frac{P_1(q)}{q}$ croît. Par définition, P_1 est constante sur l'intervalle $[q_n, r_n]$, et a une pente moyenne supérieure à $1/3$ sur l'intervalle $[r_n, q_{n+1}]$. On a donc

$$\begin{aligned} \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_1(q)}{q} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{[r_n, r_{n+1}]} \frac{P_1(q)}{q} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_1(q_n)}{q_n} = \frac{1}{1 + \hat{\omega}}, \\ \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{P_1(q)}{q} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{[q_n, q_{n+1}]} \frac{P_1(q)}{q} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P_1(r_n)}{r_n} = \frac{1}{1 + \omega}. \end{aligned}$$

On sait que $\frac{P_3(q)}{q} \geq \frac{1}{3}$ avec égalité si et seulement si $P_1(q) = P_2(q) = P_3(q) = q/3$. Par définition et par la Proposition 3.22, on sait que P_3 est constante sur l'intervalle

$[q_n, a_n]$. On rappelle qu'il est exclu que $P_1(q) = P_2(q) = P_3(q)$, donc P_3 est constante sur $[r_n, q_{n+1}]$. On en déduit la restriction d'intervalle

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_3(q)}{q} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{[q_n, q_{n+1}]} \frac{P_3(q)}{q} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{[a_n, r_n]} \frac{P_3(q)}{q} = \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

□

On commence par majorer λ , et donc majorer $\max_{[a_n, r_n]} \frac{P_3(q)}{q}$. Soit un indice $n \geq 1$, on pose les nombres réels P_1, P_2 tels que

$$P_1(q_n) = P_1 q_n \text{ et } P_2(r_n) = P_2 q_n.$$

On note $m_n \in [a_n, r_n]$ le point où $\frac{P_3(q)}{q}$ atteint son maximum sur cet intervalle. Par la Proposition 3.22, on a

$$\max_{[a_n, r_n]} \frac{P_3(q)}{q} = \frac{P_3(m_n)}{m_n} \leq \frac{P_1 q_n + m_n - q_n}{m_n}$$

Le terme de droite est une fonction croissante de m_n , qui est majoré par r_n . On en déduit que

$$\max_{[a_n, r_n]} \frac{P_3(q)}{q} \leq \frac{P_1 q_n + r_n - q_n}{r_n}.$$

Or $\frac{P_1 q_n}{r_n} = \frac{P_1(r_n)}{r_n} \leq \frac{1+\varepsilon}{1+\hat{\omega}}$, donc

$$\max_{[a_n, r_n]} \frac{P_3(q)}{q} \leq \frac{r_n - q_n \frac{\hat{\omega}(1+\varepsilon)}{1+\hat{\omega}}}{r_n}.$$

Comme $\frac{q_n(1+\varepsilon)}{1+\hat{\omega}} \geq P_1 q_n \geq \frac{r_n(1-\varepsilon)}{1+\omega}$, la minoration

$$q_n \geq \frac{r_n(1+\hat{\omega})(1-\varepsilon)}{(1+\omega)(1+\varepsilon)}$$

donne

$$\max_{[a_n, r_n]} \frac{P_3(q)}{q} \leq \frac{r_n(1 - \frac{\hat{\omega}}{1+\omega})(1+\varepsilon_1)}{r_n} \leq \frac{1+\omega-\hat{\omega}}{1+\omega}(1+\varepsilon_1),$$

Ici, ε_1 tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro.

On en déduit que $\frac{\lambda}{1+\lambda} \leq \frac{1+\omega-\hat{\omega}}{1+\omega}$, i.e. la majoration voulue

$$\lambda \leq \frac{1+\omega-\hat{\omega}}{\hat{\omega}}.$$

Il s'agit maintenant d'établir la minoration de λ , en minorant $\max_{[a_n, r_n]} \frac{P_3(q)}{q}$.

Tout d'abord, on note que

$$\frac{P_2(s_n)}{s_n} = \frac{P_2 q_n}{r_n + q_n(P_2 - P_1)} \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 + \hat{\omega}},$$

dont on déduit la majoration

$$q_n P_2 \leq \frac{r_n - q_n P_1}{\hat{\omega}} (1 + \varepsilon_2),$$

où ε_2 tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro.

On considère alors

$$\begin{aligned} \max_{[a_n, r_n]} \frac{P_3(q)}{q} &\geq \frac{P_3(r_n)}{r_n} = \frac{r_n - P_1 q_n - P_2 q_n}{r_n} \\ &\geq \frac{r_n - P_1 q_n - \frac{r_n - q_n P_1}{\hat{\omega}} (1 + \varepsilon_2)}{r_n} \\ &\geq \left(1 - \frac{P_1 q_n}{r_n}\right) \frac{\hat{\omega} - 1}{\hat{\omega}} (1 + \varepsilon_3), \end{aligned}$$

avec ε_2 et ε_3 qui tendent vers zéro lorsque ε tend vers zéro.

Par définition de la lim inf, il existe une suite extraite $q_{\varphi(n)}$ telle que $\frac{P_1 q_{\varphi(n)}}{r_{\varphi(n)}}$ tende vers $\frac{1}{1+\omega}$. A partir d'un certain rang, on a donc

$$\max_{[a_{\varphi(n)}, r_{\varphi(n)}]} \frac{P_3(q)}{q} \geq \left(1 - \frac{1}{1+\omega}\right) \frac{\hat{\omega} - 1}{\hat{\omega}} (1 + \varepsilon_5) = \frac{\omega(\hat{\omega} - 1)}{\hat{\omega}(1 + \omega)} (1 + \varepsilon_4),$$

avec ε_4 qui tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro.

On en déduit $\frac{\lambda}{1+\lambda} \geq \frac{\omega(\hat{\omega}-1)}{\hat{\omega}(1+\omega)}$, qui donne la minoration voulue

$$\lambda \geq \frac{\omega(\hat{\omega} - 1)}{\hat{\omega} + \omega}.$$

On considère maintenant le cas où $P_1(q) = P_2(q) = P_3(q)$ pour des nombres réels q arbitrairement grands, et donc $\hat{\omega} = 2$. La minoration $\max_{[a_n, r_n]} \frac{P_3(q)}{q} \geq \frac{P_3(r_n)}{r_n}$ reste valable, tandis que pour la majoration, on a naïvement

$$\frac{P_3(q)}{q} \leq \frac{q - P_1(q) - P_2(q)}{q} \leq 1 - \frac{2}{1 + \omega} = \frac{\omega - 1}{1 + \omega},$$

qui est la majoration voulue lorsque $\hat{\omega} = 2$.

Ceci achève la preuve du Théorème 2.2. □

3.5.2 Démonstration du Théorème 3.14

Pour la démonstration du Théorème 3.14, nous allons à nouveau construire un $(n + 1)$ -système généralisé.

Soit un nombre réel q_0 , un entier $n \geq 3$ et fixons un nombre réel $\hat{\omega}_{n-1} > n$. En effet, si $\hat{\omega}_{n-1} = n$ alors on est dans le cas bien connu des exposants presque sûrs. On définit la suite $(q_m)_{m \geq 0}$ par

$$q_{m+1} = (\hat{\omega}_{n-1} - n + 1)q_m \text{ pour } m \geq 0.$$

La suite $(q_m)_{m \geq 1}$ est bien strictement croissante.

Nous construisons alors un $(n + 1)$ -système généralisé \mathbf{P} dont le graphe est invariant par la dilatation de facteur $(\hat{\omega}_{n-1} - n + 1)$ sur l'intervalle $[q_0, +\infty[$. Ainsi, il suffit de définir \mathbf{P} sur un intervalle générique $[q_m, q_{m+1}]$. Nous allons le faire en donnant son graphe conjoint.

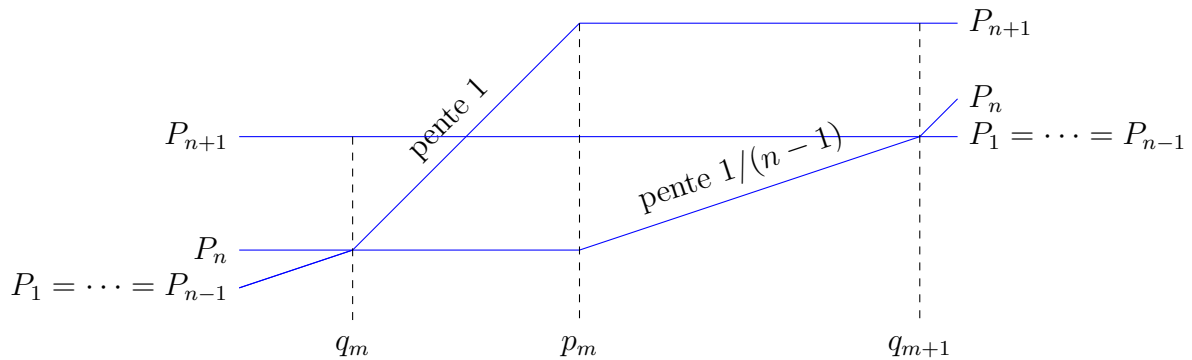


FIGURE 3.3 – Graphe conjoint de \mathbf{P} sur un intervalle générique $[q_m, q_{m+1}]$.

Pour tout entier $m \geq 0$, on définit \mathbf{P} en q_m comme suit :

$$P_1(q_m) = \dots = P_n(q_m) = \frac{q_m}{1 + \hat{\omega}_{n-1}}, \text{ et } P_{n+1}(q_m) = \frac{\hat{\omega}_{n-1} - n + 1}{\hat{\omega}_{n-1} + 1} q_m.$$

Par définition de la suite q_m , le graphe conjoint est bien invariant par dilatation de rapport $(\hat{\omega}_{n-1} - n + 1)$.

Sur les intervalles $[q_m, p_m]$ et $[p_m, q_{m+1}]$, le graphe a un unique segment de pente strictement positive, de pente respectivement 1 et $1/(n - 1)$. Les points de division p_m sont des *points d'échange*, les autres points de division sont des *points de division ordinaires*.

Grace à l'invariance par dilatation, pour tout nombre entier d entre 1 et $n - 1$, on calcule facilement

$$\begin{aligned} \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_1(q) + \cdots + P_d(q)}{q} &= \max_{q_0 \leq q \leq q_1} \frac{P_1(q) + \cdots + P_d(q)}{q} \\ &= \frac{P_1(q_0) + \cdots + P_d(q_0)}{q_0} = \frac{d}{1 + \hat{\omega}_{n-1}}. \end{aligned}$$

Pour tout nombre entier $1 \leq d \leq n - 1$, par le Théorème 3.19, on en déduit l'existence d'un point $\boldsymbol{\theta}$ de \mathbb{R}^n tel que

$$\frac{1}{1 + \hat{\omega}_{n-d}(\boldsymbol{\theta})} = \frac{d}{1 + \hat{\omega}_{n-1}}.$$

En particulier, $\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_{n-1}$. Pour tout nombre entier $2 \leq d \leq n - 1$, on en déduit

$$\frac{1}{1 + \hat{\omega}_{d-1}(\boldsymbol{\theta})} = \frac{n - d + 1}{n - d} \cdot \frac{1}{1 + \hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta})}.$$

On obtient les égalités voulues

$$\hat{\omega}_{d-1}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{(n - d)\hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta}) - 1}{n - d + 1}.$$

3.6 Géométrie paramétrique des nombres et pondération

Dans cette section, nous allons discuter de la manière d'ajouter une pondération aux résultats de géométrie paramétrique des nombres. Malheureusement, nous allons constater que la pondération induite par le cas multiplicatif (introduite en 2.2) n'est pas compatible avec la pondération naturelle apparaissant dans le cadre de la géométrie paramétrique des nombres définie dans [50, 51].

Nous allons commencer par traiter un exemple, la correspondance de Dani [11]. Pour un couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$, il s'agit de faire le lien entre les vecteurs singuliers et mal approchables, et le comportement asymptotique d'un réseau de \mathbb{R}^3 sous l'action d'un flot bien choisi.

3.6.1 Correspondance de Dani et pondération

Nous allons maintenant présenter une application des exposants diophantiens, constatée par Dani [11]. Il est en effet possible de faire un lien entre les exposants

diophantiens d'un couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ et le comportement du premier minimum d'un réseau lui étant associé sous l'action d'un flot ergodique.

Commençons par poser les notations. Pour $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ un couple de réels tel que $1, \theta_1, \theta_2$ sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants, on considère le réseau de covolume unitaire suivant

$$\Lambda_{-\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\theta_1 \\ 0 & 1 & -\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{Z}^3 = \{(p_1 - q\theta_1, p_2 - q\theta_2, q), (p_1, p_2, q) \in \mathbb{Z}^3\} \subset \mathbb{R}^3$$

et son dual

$$\Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta_1 & \theta_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{Z}^3 = \{(p_1, p_2, p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + q), (p_1, p_2, q) \in \mathbb{Z}^3\} \subset \mathbb{R}^3$$

On considère le flot ergodique

$$a_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{R}),$$

qui agit sur $Y_3 = SL_3(\mathbb{R})/SL_3(\mathbb{Z})$ l'ensemble des réseaux de \mathbb{Z}^3 de covolume 1. Soit enfin

$$K(\varepsilon) = \{\Lambda \in Y_3 \mid \min_{v \in \Lambda \setminus \{0\}} \|v\| < \varepsilon\},$$

qui est le complémentaire d'un compact d'après le critère de compacité de Mahler [44]. Ici $\|\cdot\|$ est une norme quelconque; nous sommes en dimension finie, elles sont donc toutes équivalentes. Le choix de la norme n'influera donc pas sur les propriétés asymptotiques que nous allons énoncer.

Pour énoncer la prochaine proposition, nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 3.33. Soit une fonction continue et décroissante $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1[$. On dit que le point $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ est φ -approchable (resp. uniformément φ -approchable) si l'inégalité

$$0 < \|q\boldsymbol{\theta} - \mathbf{p}\| \leq \varphi(q)$$

admet une infinité de solutions entières $(\mathbf{p}, q) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}$ (resp. admet une solution entière pour tout entier q assez grand). Ici $\|\cdot\|$ représente la distance (au sens de la norme sup) au réseau des entiers \mathbb{Z}^n .

Ainsi, $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ (resp. $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$) est le maximum des nombres réels λ tels que $\boldsymbol{\theta}$ est φ -approchable (resp. uniformément φ -approchable) pour $\varphi(q) = cq^{-\lambda}$, avec c une constante réelle non nulle.

La proposition suivante, appelée correspondance de Dani, fait le lien entre les propriétés diophantiennes d'un couple de réels $\boldsymbol{\theta}$ et la distribution de l'orbite de $a_t \cdot \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}}$. Elle est due à Kleinbock et Margulis [29, 30], et est valable en fait en toute dimension.

Proposition 3.34. *Soit une fonction continue et décroissante $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1[$. Il existe une fonction $r := r_\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1[$ telle que*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2 \text{ est } \varphi\text{-approchable} &\Leftrightarrow a_t \cdot \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}} \in K(r(t_n)) \text{ pour } t_n \rightarrow \infty, \\ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2 \text{ est uniformément } \varphi\text{-approchable} &\Leftrightarrow a_t \cdot \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}} \in K(r(t)) \text{ pour } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Dans les faits, on définit r comme la fonction telle que $\varphi(e^{2t} r(t)) = e^{-t} r(t)$. Cette proposition peut se reformuler avec les exposants.

Corollaire 3.35 (Kleinbock, Margulis). *Soit un couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ et deux nombres réels $\omega > 2$ et $\lambda > \frac{1}{2}$, alors il existe deux fonctions $r_\lambda, r_\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, 1)$ telles que :*

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{\theta}) > \lambda &\Rightarrow a_{t_n} \cdot \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}} \in K(r(t_n)) \text{ pour une suite } (t_n)_{n \geq 1} \text{ qui tend vers l'infini} \\ &\Rightarrow \lambda(\boldsymbol{\theta}) \geq \lambda, \\ \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) > \lambda &\Rightarrow a_t \cdot \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}} \in K(r(t)), \forall t \geq t_0 \\ &\Rightarrow \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) \geq \lambda, \\ \omega(\boldsymbol{\theta}) > \omega &\Rightarrow a_{t_n}^{-1} \cdot \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \in K(r(t_n)) \text{ pour une suite } (t_n)_{n \geq 1} \text{ qui tend vers l'infini} \\ &\Rightarrow \omega(\boldsymbol{\theta}) \geq \omega, \\ \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) > \omega &\Rightarrow a_t^{-1} \cdot \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \in K(r(t)), \forall t \geq t_0 \\ &\Rightarrow \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) \geq \omega. \end{aligned}$$

Dans les faits, on choisit $r_\lambda(t) = \exp(\frac{1-2\lambda}{1+\lambda}t)$ et $r_\omega(t) = \exp(\frac{2-\omega}{1+\omega}t)$. Cette correspondance fait le lien entre le comportement du premier minimum d'une famille de réseaux, et le fait qu'un vecteur soit singulier (i.e. $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) > 2$ ou $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) > 1/2$).

Proposition 3.36. *En notant $\lambda_1(\Lambda)$ le premier minimum du réseau Λ par rapport*

à la boule unité de \mathbb{R}^n , on obtient les formules

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} -\frac{\log \lambda_1(a_t \cdot \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}})}{\log t}, \\ \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{t \rightarrow \infty} -\frac{\log \lambda_1(a_t \cdot \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}})}{\log t}, \\ \omega(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} -\frac{\log \lambda_1(a_t^{-1} \cdot \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^*)}{\log t}, \\ \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{t \rightarrow \infty} -\frac{\log \lambda_1(a_t^{-1} \cdot \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^*)}{\log t}.\end{aligned}$$

Comme expliqué précédemment, ces quatre limites sont indépendantes du choix de la norme.

Preuve de la Proposition 3.35 Regardons ce que signifie le passage de notre flot $a_t \cdot \Lambda$ dans l'ensemble $K(\varepsilon)$.

Si $a_t \cdot \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}} \in K(r_\lambda(t))$, alors il existe un triplet d'entiers $(p_1, p_2, q) \in \mathbb{Z}^3$ tels que

$$\begin{aligned}\begin{cases} e^{-2t} |q| < r_\lambda(t) \\ e^t |p_1 + q\theta_1| < r_\lambda(t) \\ e^t |p_2 + q\theta_2| < r_\lambda(t) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |q| < e^{\frac{3t}{1+\lambda}} \\ |p_1 + q\theta_1| < e^{\frac{-3t\lambda}{1+\lambda}} \\ |p_2 + q\theta_2| < e^{\frac{-3t\lambda}{1+\lambda}} \end{cases}, \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} H &= e^{\frac{3t}{1+\lambda}} \\ |q| &< H \\ \max(|p_1 + q\theta_1|, |p_2 + q\theta_2|) &< H^{-\lambda} \end{cases},\end{aligned}$$

et on en déduit les expressions données pour les exposants $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ et $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$. De manière similaire, si $a_t^{-1} \cdot \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \in K(r_\omega(t))$, alors il existe un triplet d'entiers $(p_1, p_2, q) \in \mathbb{Z}^3$ tels que

$$\begin{aligned}\begin{cases} e^{2t} |p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + q| < r_\omega(t) \\ e^{-t} |p_1| < r_\omega(t) \\ e^{-t} |p_2| < r_\omega(t) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + q| < e^{\frac{-3\omega t}{1+\omega}} \\ |p_1| < e^{\frac{3t}{1+\omega}} \\ |p_2| < e^{\frac{3t}{1+\omega}} \end{cases}, \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} H &= e^{\frac{3t}{1+\omega}} \\ |p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + q| &< H^{-\omega} \\ \max(|p_1|, |p_2|) &< H \end{cases},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit les expressions données pour les exposants $\omega(\boldsymbol{\theta})$ et $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})$.

□

On adapte maintenant cette correspondance au cas pondéré. Comme dans la définition des exposants pondérés en 2.2, il s'agit de déformer la fenêtre en l'infini (cf figure 2.1).

Pour deux nombres réels positifs i et j de somme 1, on considère le flot pondéré suivant, qui est ergodique d'après un théorème de Moore [42] :

$$a_{t,i,j} = \begin{pmatrix} e^{2it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2jt} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{R}).$$

Ce flot agit sur $Y_3 = SL_3(\mathbb{R})/SL_3(\mathbb{Z})$ l'ensemble des réseaux de \mathbb{Z}^3 de covolume 1. Pour $\varepsilon > 0$, soit l'ensemble

$$K_{i,j}(\varepsilon) = \left\{ \Lambda \in Y_3 \mid \min_{(x,y,z) \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\max(|x|^{1/2i}, |y|^{1/2j}, |z|) \right) \leq \varepsilon \right\}.$$

Dans ce cadre, on obtient la proposition suivante.

Proposition 3.37. *Soit un couple de nombres réels $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, deux nombres réels positifs i et j tels que $i + j = 1$, deux nombres réels $\omega \geq 2$ et $\lambda \geq \frac{1}{2}$, alors il existe deux fonctions $r_\lambda, r_\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, 1)$ telles que :*

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) > \lambda &\Rightarrow a_{t_n,i,j} \cdot \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}} \in K_{i,j}(r(t_n)) \text{ pour une suite } (t_n)_{n \geq 1} \text{ qui tend vers l'infini} \\ &\Rightarrow \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \lambda, \\ \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) > \lambda &\Rightarrow a_{t,i,j} \cdot \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}} \in K_{i,j}(r(t)) , \forall t \geq t_0 \\ &\Rightarrow \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \lambda, \\ \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) > \omega &\Rightarrow a_{t_n,i,j}^{-1} \cdot \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \in K_{i,j}(r(t_n)) \text{ pour une suite } (t_n)_{n \geq 1} \text{ qui tend vers l'infini} \\ &\Rightarrow \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \omega, \\ \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) > \omega &\Rightarrow a_{t,i,j}^{-1} \cdot \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \in K_{i,j}(r(t)) , \forall t \geq t_0 \\ &\Rightarrow \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \omega. \end{aligned}$$

Dans les faits, on choisit à nouveau $r_\lambda(t) = \exp(\frac{1-2\lambda}{1+\lambda}t)$ et $r_\omega(t) = \exp(\frac{2-\omega}{1+\omega}t)$.

Lorsque i ou j est nul, une partie du réseau est invariante sous l'action du flot. Le cas $i = j = \frac{1}{2}$ correspond bien au cas classique. Par contre, la pondération ne nous a plus permis d'exprimer les exposants diophantiens comme limite inférieure

ou supérieure du premier minimum d'une famille de réseaux. En fait, la pondération issue du cas multiplicatif (2.2) nous oblige à tordre la fenêtre à l'infini $K_{i,j}(\varepsilon)$, ce qui empêche de faire apparaître des minima de réseau. Ces minima sont étudiés dans la Géométrie paramétrique des nombres. A priori, la présence de n -uplets de fonctions $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$ dans l'introduction de Schmidt et Summerer [50, 51] permet de considérer une pondération très générale. Malheureusement elle n'est pas compatible avec la pondération issue du cas multiplicatif. Nous développerons ce point dans le prochain sous-chapitre.

Preuve de la Proposition 3.37 On utilise le même schéma de preuve que le cas classique.

Si $a_{t,i,j} \cdot \Lambda_{-\theta} \in K_{i,j}(r_\lambda(t))$, alors il existe un triplet d'entiers $(p_1, p_2, q) \in \mathbb{Z}^3$ tels que

$$\begin{aligned} \begin{cases} e^{-2t} |q| < r_\lambda(t) \\ e^{2it} |p_1 + q\theta_1| < r_\lambda(t)^{2i} \\ e^{2jt} |p_2 + q\theta_2| < r_\lambda(t)^{2j} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |q| < e^{\frac{3t}{1+\lambda}} \\ |p_1 + q\theta_1|^{\frac{1}{2i}} < e^{\frac{-3t\lambda}{1+\lambda}} \\ |p_2 + q\theta_2|^{\frac{1}{2j}} < e^{\frac{-3t\lambda}{1+\lambda}} \end{cases}, \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} H &= e^{\frac{3t}{1+\lambda}} \\ |q| &< H \\ \max(|p_1 + q\theta_1|^{\frac{1}{2i}}, |p_2 + q\theta_2|^{\frac{1}{2j}}) &< H^{-\lambda} \end{cases}, \end{aligned}$$

et on en déduit les propriétés données pour les exposants $\lambda_{i,j}(\theta)$ et $\hat{\lambda}_{i,j}(\theta)$. De manière similaire, si $a_{t,i,j}^{-1} \cdot \Lambda_{\omega,\theta} \in K_{i,j}(r_\omega(t))$, alors il existe un triplet d'entiers $(p_1, p_2, q) \in \mathbb{Z}^3$ tels que

$$\begin{aligned} \begin{cases} e^{2t} |p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + q| < r_\omega(t) \\ e^{-2it} |p_1| < r_\omega(t)^{2i} \\ e^{-2jt} |p_2| < r_\omega(t)^{2j} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + q| < e^{\frac{-3\omega t}{1+\omega}} \\ |p_1|^{\frac{1}{2i}} < e^{\frac{3t}{1+\omega}} \\ |p_2|^{\frac{1}{2j}} < e^{\frac{3t}{1+\omega}} \end{cases}, \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} H &= e^{\frac{3t}{1+\omega}} \\ |p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + q| &< H^{-\omega} \\ \max(|p_1|^{\frac{1}{2i}}, |p_2|^{\frac{1}{2j}}) &< H \end{cases}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les propriétés annoncées pour les exposants $\omega_{i,j}(\theta)$ et $\hat{\omega}_{i,j}(\theta)$.

□

3.6.2 Incompatibilité entre la pondération du flot et la pondération issue du cas multiplicatif

[...] von den sicheren Dingen das Sicherste ist der Zweifel.

—Bertold Brecht

Dans ce sous-chapitre, nous allons montrer que la pondération issue du cas multiplicatif (2.2) n'est pas compatible avec la pondération des flots avec des n -uplets de fonction $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$ énoncée par Schmidt et Summerer [50, 51]. Nous avons déjà vu que leurs exposants intermédiaires $\bar{\varphi}_d$ et $\underline{\varphi}_d$ ne sont pas liés aux exposants intermédiaires ω_d et $\hat{\omega}_d$ introduits par Laurent, mais à des exposants $\omega^{(d)}$ et $\hat{\omega}^{(d)}$. Nonobstant ce fait, nous allons montrer que l'on n'a pas d'équivalent pondéré du Théorème 3.29 qui relierait les exposants pondérés $\bar{\varphi}_{\beta,d}$ et $\underline{\varphi}_{\beta,d}$ aux exposants pondérés $\omega_{\mu}^{(d)}$ et $\hat{\omega}_{\mu}^{(d)}$.

Pour pouvoir établir des relations entre les différents exposants pondérés, il est nécessaire que les fonctions $\beta_k(t)$ soient linéaires de la forme $\beta_k(t) = b_k t$. Ainsi $\frac{\beta_k(t)}{t}$ est un nombre réel lorsque cette fraction apparaît. Si ce n'est pas le cas, nous ne pouvons a priori rien dire.

La proposition suivante donne le meilleur résultat que l'on puisse obtenir.

Proposition 3.38. *Soit $\theta = (1, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ un n -uplet de nombres réels. Soit $\beta = (\beta_1(t), \dots, \beta_{n-1}(t), -(n-1)t)$ un n -uplet de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de somme nulle, et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, -(n-1))$, $\mu_k \geq 0$, un n -uplet de réels de somme nulle. Pour chaque $1 \leq d \leq n$ on a les majorations et minorations conditionnelles suivantes :*

- Si pour tout entier k entre 1 et $n-1$, on a $\beta_k(t) = t + \frac{n\lambda_{\mu}^{(d)}(\theta)}{1+\lambda_{\mu}^{(d)}(\theta)}t(\mu_k - 1)$, alors

$$(1 + \lambda_{\mu}^{(d)}(\theta))(n - 1 + \underline{\varphi}_{\beta,d}(\theta)) \leq n.$$

- Si pour tout entier k entre 1 et $n-1$, on a $\beta_k(t) = t + \frac{n\hat{\lambda}_{\mu}^{(d)}(\theta)}{1+\hat{\lambda}_{\mu}^{(d)}(\theta)}t(\mu_k - 1)$, alors

$$(1 + \hat{\lambda}_{\mu}^{(d)}(\theta))(n - 1 + \bar{\varphi}_{\beta,d}(\theta)) \leq n.$$

- Si pour tout entier k entre 1 et $n-1$, on a $\mu_k = 1 + \left(\frac{\beta_k(t)}{t} - 1\right) \frac{1}{1 - \underline{\varphi}_{\beta,d}(\theta)}$, alors

$$(1 + \lambda_{\mu}^{(d)}(\theta))(n - 1 + \underline{\varphi}_{\beta,d}(\theta)) \geq n.$$

- Si pour tout entier k entre 1 et $n-1$, on a $\mu_k = 1 + \left(\frac{\beta_k(t)}{t} - 1\right) \frac{1}{1 - \bar{\varphi}_{\beta,d}(\theta)}$, alors

$$(1 + \hat{\lambda}_{\mu}^{(d)}(\theta))(n - 1 + \bar{\varphi}_{\beta,d}(\theta)) \geq n.$$

– Si pour tout entier k entre 1 et $n - 1$, on a $\beta_k(t) = t + \frac{n}{1 + \hat{\omega}_\mu^{(d)}(\boldsymbol{\theta})} t(\mu_k - 1)$, alors

$$(1 + \hat{\omega}_\mu^{(d)}(\boldsymbol{\theta}))(1 + \bar{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta})) \leq n.$$

– Si pour tout entier k entre 1 et $n - 1$, on a $\beta_k(t) = t + \frac{n}{1 + \omega_\mu^{(d)}(\boldsymbol{\theta})} t(\mu_k - 1)$, alors

$$(1 + \omega_\mu^{(d)}(\boldsymbol{\theta}))(1 + \underline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta})) \leq n.$$

– Si pour tout entier k entre 1 et $n - 1$, on a $\mu_k = 1 + \left(\frac{\beta_k(t)}{t} - 1\right) \frac{1 + \bar{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta})}{n}$, alors

$$(1 + \hat{\omega}_\mu^{(d)}(\boldsymbol{\theta}))(1 + \bar{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta})) \geq n.$$

– Si pour tout entier k entre 1 et $n - 1$, on a $\mu_k = 1 + \left(\frac{\beta_k(t)}{t} - 1\right) \frac{1 + \underline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta})}{n}$, alors

$$(1 + \omega_\mu^{(d)}(\boldsymbol{\theta}))(1 + \underline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta})) \geq n.$$

Cette proposition découle du lemme suivant.

Lemme 3.39. *Dans les conditions de la proposition précédente et pour tout entier d entre 1 et n , on a les inégalités suivantes.*

– Pour un nombre réel a tel que $0 \leq a < \lambda_\mu^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$, si pour tout entier k entre 1 et $n - 1$ on a $\beta_k(t) = t + \frac{na}{1+a} t(\mu_k - 1)$, alors on obtient la majoration

$$\underline{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{1 - (n - 1)a}{1 + a}.$$

– Pour un nombre réel a tel que $0 \leq a < \hat{\lambda}_\mu^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$, si pour tout entier k entre 1 et $n - 1$ on a $\beta_k(t) = t + \frac{na}{1+a} t(\mu_k - 1)$, alors on obtient la majoration

$$\bar{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{1 - (n - 1)a}{1 + a}.$$

– Pour un nombre réel b tel que $1 > b > \underline{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta})$, si pour tout entier k entre 1 et $n - 1$ on a $\mu_k = 1 + \frac{1}{1-b} \left(\frac{\beta_k(t)}{t} - 1\right)$, alors on obtient la minoration

$$\lambda_\mu^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1 - b}{(n - 1) + b}.$$

– Pour un nombre réel b tel que $1 > b > \bar{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta})$, si pour tout entier k entre 1 et $n - 1$ on a $\mu_k = 1 + \frac{1}{1-b} \left(\frac{\beta_k(t)}{t} - 1\right)$, alors on obtient la minoration

$$\hat{\lambda}_\mu^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1 - b}{(n - 1) + b}.$$

Pour un nombre réel a tel que $0 \leq a < \omega_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$, si pour tout entier k entre 1 et $n-1$ on a $\beta_k(t) = t + \frac{n}{1+a}t(\mu_k - 1)$, alors on obtient la majoration

$$\underline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{n-1-a}{1+a}.$$

Pour un nombre réel a tel que $0 \leq a < \hat{\omega}_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$, si pour tout entier k entre 1 et $n-1$ on a $\beta_k(t) = t + \frac{n}{1+a}t(\mu_k - 1)$, alors on obtient la majoration

$$\overline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{n-1-a}{1+a}.$$

Pour un nombre réel b tel que $1 > b > \underline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta})$, Si pour tout entier k entre 1 et $n-1$ on a $\mu_k = 1 + \frac{1+b}{n}(\frac{\beta_k(t)}{t} - 1)$, alors on obtient la minoration

$$\omega_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{n-1-b}{b+1}.$$

Pour un nombre réel b tel que $1 > b > \overline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta})$, Si pour tout entier k entre 1 et $n-1$ on a $\mu_k = 1 + \frac{1+b}{n}(\frac{\beta_k(t)}{t} - 1)$, alors on obtient la minoration

$$\hat{\omega}_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{n-1-b}{b+1}.$$

Le problème de ces relations est que le lien entre les $\beta_k(t)$ et les μ_k dépend du paramètre a ou b , sauf dans le cas symétrique $\beta_1(t) = \dots = \beta_{n-1}(t) = t$ et $\mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = 1$ où l'on retrouve les relations du Théorème 3.29. En effet, en prenant l'exemple du premier cas, si on fixe $\lambda_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$, faire varier a revient à faire varier $\boldsymbol{\beta}$. Le Lemme 3.41 montre qu'il n'y a pas d'autres relations possibles.

On obtient la Proposition 3.38 en choisissant respectivement la valeur maximale pour a et minimale pour b dans le Lemme 3.39.

Pour démontrer le Lemme 3.39, nous allons devoir introduire quelques notations.

Soit $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1(t), \dots, \beta_{n-1}(t), -(n-1)t)$ un n -uplet de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de somme nulle, et $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, -(n-1))$, $\mu_k \geq 0$, un n -uplet de nombres réels de somme nulle. Soit deux nombre réel $Q > 0$ et $\nu > 0$ et deux paramètres réels t , et f . On considère les quatre ensembles paramétrés suivants.

$$\begin{aligned}
B(\boldsymbol{\beta}, t, \nu) &= \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_k| \leq \nu e^{-\beta_k(t)}, 1 \leq k \leq n-1, |x_n| \leq \nu e^{-(n-1)t}\}, \\
C(\boldsymbol{\mu}, Q, f) &= \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_k| \leq Q^{-\mu_k f}, 1 \leq k \leq n-1, |x_n| \leq Q\}, \\
D(\boldsymbol{\beta}, t, \nu) &= \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_k| \leq \nu e^{\beta_k(t)}, 1 \leq k \leq n-1, |x_n| \leq \nu e^{-(n-1)t}\}, \\
E(\boldsymbol{\mu}, Q, f) &= \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_k| \leq Q^{\mu_k}, 1 \leq k \leq n-1, |x_n| \leq Q^{-f}\}.
\end{aligned}$$

Pour chaque nombre entier d entre 1 et n , on pose alors $\tilde{L}_d(\boldsymbol{\beta}, t)$ (resp. $\tilde{L}_d^*(\boldsymbol{\beta}, t)$) le plus petit nombre réel ν tel qu'il y ait d vecteurs linéairement indépendants dans l'intersection $B(\boldsymbol{\beta}, t, \nu) \cap \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}}$ (resp. $D(\boldsymbol{\beta}, t, \nu) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^*$) et $M_d(\boldsymbol{\mu}, Q)$ (resp. $M_d^*(\boldsymbol{\mu}, Q)$) le plus grand nombre réel f tel qu'il y ait d vecteurs linéairement indépendants dans l'intersection $C(\boldsymbol{\mu}, Q, f) \cap \Lambda_{-\boldsymbol{\theta}}$ (resp. $E(\boldsymbol{\mu}, Q, f) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^*$).

On obtient alors l'analogie suivant de la Proposition 2.7.

Proposition 3.40.

$$\begin{aligned}
\underline{\varphi}_{\boldsymbol{\beta}, d}(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d(\boldsymbol{\beta}, t)}{t} \right), & \overline{\varphi}_{\boldsymbol{\beta}, d}(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d(\boldsymbol{\beta}, t)}{t} \right), \\
\hat{\lambda}_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{Q \rightarrow \infty} (M_d(\boldsymbol{\mu}, Q)), & \lambda_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{Q \rightarrow \infty} (M_d(\boldsymbol{\mu}, Q)), \\
\underline{\varphi}_{\boldsymbol{\beta}, d}^*(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d^*(\boldsymbol{\beta}, t)}{t} \right), & \overline{\varphi}_{\boldsymbol{\beta}, d}^*(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d^*(\boldsymbol{\beta}, t)}{t} \right), \\
\hat{\omega}_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{Q \rightarrow \infty} (M_d^*(\boldsymbol{\mu}, Q)), & \omega_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{Q \rightarrow \infty} (M_d^*(\boldsymbol{\mu}, Q)).
\end{aligned}$$

Nous allons utiliser cette proposition pour démontrer le Lemme 3.39.

Lemme 3.41. *On a l'égalité des ensembles*

$$C(\boldsymbol{\mu}, Q, f) = B(\boldsymbol{\beta}, t, \nu)$$

si et seulement si les paramètres vérifient le système suivant :

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1+f}{n} \log Q, \\
\beta_k(t) &= t + t \frac{nf}{1+f} (\mu_k - 1), \\
\log \nu &= (1 - (n-1)f) \frac{\log Q}{n}.
\end{aligned}$$

Il est équivalent au système

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1 - \log \nu}{n-1 + \log \nu}, \\
\mu_j &= \left(\frac{\beta_j(t)}{t} - 1 \right) \frac{t}{t - \log \nu} + 1, \\
\log Q &= \frac{n}{1+f} t.
\end{aligned}$$

On a également l'égalité des ensembles

$$D(\boldsymbol{\beta}, t, \nu) = E(\boldsymbol{\mu}, Q, f)$$

si et seulement si les paramètres vérifient le système suivant :

$$\begin{aligned} t &= \frac{1+f}{n} \log Q, \\ \beta_k(t) &= t + t \frac{n}{1+f} (\mu_k - 1), \\ \log \nu &= ((n-1) - f) \frac{\log Q}{n}. \end{aligned}$$

Il est équivalent au système

$$\begin{aligned} f &= \frac{1 - \log \nu}{n - 1 + \log \nu}, \\ \mu_k &= \left(\frac{\beta_k(t)}{t} - 1 \right) \frac{\log \nu + t}{nt} + 1, \\ \log Q &= \frac{nt}{1+f}. \end{aligned}$$

Preuve du Lemme 3.41 Pour montrer le lemme, il suffit de résoudre les équations. Pour la première égalité on obtient le système

$$\begin{cases} \nu e^{-\beta_k(t)} = Q^{-\mu_k f} \\ \nu e^{(n-1)t} = Q. \end{cases}$$

En passant au logarithme, on obtient

$$\begin{cases} \log \nu - \beta_k(t) = -\mu_k f \log Q \\ \log \nu + (n-1)t = \log Q. \end{cases}$$

En sommant sur tout les indices k de 1 à $n-1$, on obtient $\log \nu = t - f \log Q$, et en injectant dans la deuxième égalité on trouve

$$t = \frac{1+f}{n} \log Q.$$

En remplaçant $\log Q$ dans la somme, on trouve

$$\log \nu = (1 - (n-1)f) \frac{t}{1+f},$$

et en reprenant la première équation on trouve

$$\beta_k(t) = \frac{t}{1+f} (1 - (n-1)f + nf\mu_k).$$

On inverse facilement ces relations pour obtenir

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1 - \log \nu}{n - 1 + \log \nu}, \\
\mu_k &= \left(\frac{\beta_k(t)}{t} - 1 \right) \frac{t}{t - \log \nu} + 1, \\
\log Q &= \frac{n}{1+f} t.
\end{aligned}$$

Ceci est le résultat annoncé. Réciproquement avec ces paramètres, on peut calculer

$$\begin{aligned}
\nu e^{(n-1)t} &= e^{(1-(n-1)f) \frac{t}{1+f} + (n-1)t} = e^{\frac{nt}{1+f}} = Q, \\
\nu e^{-\beta_k(t)} &= e^{(1-(n-1)f) \frac{t}{1+f} - \beta_k(t)} = e^{\frac{-nt\mu_k}{1+f}} = Q^{-\mu_k}.
\end{aligned}$$

D'où l'équivalence.

On considère maintenant la deuxième égalité du lemme qui nous amène au système suivant :

$$\begin{cases} \log \nu + \beta_k(t) &= \mu_k \log Q \\ \log \nu - (n-1)t &= -f \log Q \end{cases}$$

que l'on résout de manière similaire en sommant sur les k puis réinjectant dans les bonnes équations pour trouver l'équivalence annoncée.

□

Preuve du Lemme 3.39 Nous allons montrer les inégalités dans l'ordre.

Soit d'abord un nombre réel a vérifiant $0 \leq a < \lambda_{\mu}^{(d)}(\theta)$, alors il existe une suite réelle $(Q_m)_{m \geq 0}$ tendant vers l'infini tel que pour tout m il y ait d vecteurs linéairement indépendants dans l'intersection $C(\mu, Q_m, a) \cap \Lambda_{\theta} \setminus \{0\}$, et donc par le Lemme 3.41 aussi dans l'intersection $B(\beta, t_m, \nu_m) \cap \Lambda_{\theta} \setminus \{0\}$ avec les paramètres

$$\begin{aligned}
t_m &= \frac{1+a}{n} \log Q_m, \\
\beta_k(t) &= (1 - (n-1)a + n\mu_k a) \frac{t_m}{1+a}, \\
\log \nu_m &= (1 - (n-1)a) \frac{t_m}{1+a}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\underline{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d(\boldsymbol{\beta}, t)}{t} \right), \\
&\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d(\boldsymbol{\beta}, t_m)}{t_m} \right), \\
&\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \nu_m}{t_m} \right), \\
&\leq \frac{1 - (n-1)a}{1+a},
\end{aligned}$$

qui est la première inégalité annoncée, avec ses paramètres.

Soit maintenant un nombre réel a vérifiant $0 \leq a < \hat{\lambda}_{\mu}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$, alors pour tout nombre réel Q assez grand il y a d vecteurs linéairement indépendants dans l'intersection $C(\boldsymbol{\mu}, Q, a) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}} \setminus \{0\}$, et donc par le Lemme 3.41 aussi dans l'intersection $B(\boldsymbol{\beta}, t_Q, \nu_Q) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}} \setminus \{0\}$ avec les paramètres

$$\begin{aligned}
t_Q &= \frac{1+a}{n} \log Q, \\
\beta_k(t) &= (1 - (n-1)a + n\mu_k a) \frac{t_Q}{1+a}, \\
\log \nu_Q &= (1 - (n-1)a) \frac{t_Q}{1+a}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d(\boldsymbol{\beta}, t)}{t} \right), \\
&= \limsup_{Q \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d(\boldsymbol{\beta}, t_Q)}{t_Q} \right), \\
&\leq \limsup_{Q \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \nu_Q}{t_Q} \right), \\
&\leq \frac{1 - (n-1)a}{1+a},
\end{aligned}$$

qui est la deuxième inégalité annoncée, avec ses paramètres.

Soit maintenant un nombre réel b vérifiant $1 \geq b > \underline{\varphi}_{\beta,d}(\boldsymbol{\theta})$, alors il existe une suite réelle $(t_m)_{m \geq 1}$ tendant vers l'infini tel que pour tout m , il y ait d vecteurs

linéairement indépendants dans l'intersection $B(\boldsymbol{\beta}, t_m, e^{t_m b}) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}} \setminus \{0\}$, et donc par le Lemme 3.41 aussi dans l'intersection $C(\boldsymbol{\mu}, Q_m, a_m)$ avec les paramètres

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1-b}{(n-1)+b}, \\ \log Q_m &= \frac{n}{1+a_m} t_m, \\ \mu_k &= \frac{\beta_k(t)}{t} \left(\frac{1}{1-b} \right) - \frac{b}{1-b}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \lambda_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{Q \rightarrow \infty} M_d(\boldsymbol{\mu}, Q), \\ &\geq \limsup_{m \rightarrow \infty} M_d(\boldsymbol{\mu}, e^{\frac{nt_m}{1+a_m}}), \\ &\geq \limsup_{m \rightarrow \infty} a_m, \\ &\geq \frac{1-b}{(n-1)+b}, \end{aligned}$$

qui est la troisième inégalité annoncée avec ses paramètres.

Soit maintenant un nombre réel b vérifiant $1 \geq b > \bar{\varphi}_{\boldsymbol{\beta}, d}(\boldsymbol{\theta})$, alors pour tout nombre réel t assez grand, il y a d vecteurs linéairement indépendants dans l'intersection $B(\boldsymbol{\beta}, t, e^{tb}) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}} \setminus \{0\}$, et donc par le Lemme 3.41 aussi dans l'intersection $C(\boldsymbol{\mu}, Q_t, a_t)$ avec les paramètres

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{1-b}{(n-1)+b}, \\ \log Q_t &= \frac{n}{1+a_t} t, \\ \mu_k &= \frac{\beta_k(t)}{t} \left(\frac{1}{1-b} \right) - \frac{b}{1-b}. \end{aligned}$$

On calcule donc

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{Q \rightarrow \infty} M_d(\boldsymbol{\mu}, Q), \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} M_d(\boldsymbol{\mu}, e^{\frac{nt}{1+a_t}}), \\ &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} a_t, \\ &\geq \frac{1-b}{(n-1)+b}, \end{aligned}$$

qui est la quatrième inégalité annoncée, avec ses paramètres.

On montre maintenant les résultats sur les duaux. Soit un nombre réel a vérifiant $0 \leq a < \omega_{\mu}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$, alors il existe une suite réelle $(Q_m)_{m \geq 1}$ tendant vers l'infini telle que pour tout m , l'intersection $E(\boldsymbol{\mu}, Q_m, a) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \setminus \{0\}$ contienne d vecteurs linéairement indépendants, et donc par le Lemme 3.41 aussi l'intersection $D(\boldsymbol{\beta}, t_m, \nu_m) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \setminus \{0\}$ avec les paramètres

$$\begin{aligned} t_m &= \log Q_m \frac{a+1}{n}, \\ \log \nu_m &= t_m \frac{(n-1) - a}{a+1}, \\ \beta_k(t) &= \frac{t}{a+1} (\mu_k n - (n-1) + a). \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d^*(\boldsymbol{\beta}, t)}{t} \right), \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d^*(\boldsymbol{\beta}, t_m)}{t_m} \right), \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \nu_m}{t_m}, \\ &\leq \frac{n-1-a}{a+1}, \end{aligned}$$

qui est la cinquième inégalité annoncée, avec ses paramètres.

Soit maintenant un nombre réel a vérifiant $0 \leq a < \hat{\omega}_{\mu}^{(d)}(\boldsymbol{\theta})$, alors pour tout nombre réel Q assez grand il y a d vecteurs linéairement indépendants dans l'intersection $E(\boldsymbol{\mu}, Q, a) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \setminus \{0\}$ et donc par le Lemme 3.41 aussi dans l'intersection $D(\boldsymbol{\beta}, t_Q, \nu_Q) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \setminus \{0\}$ avec les paramètres

$$\begin{aligned} t_Q &= \log Q \frac{a+1}{n}, \\ \log \nu_Q &= t_Q \frac{(n-1) - a}{a+1}, \\ \beta_k(t) &= \frac{t}{a+1} (\mu_k n - (n-1) + a). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d^*(\boldsymbol{\beta}, t)}{t} \right), \\
&= \limsup_{Q \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \tilde{L}_d^*(\boldsymbol{\beta}, t_Q)}{t_Q} \right), \\
&\leq \limsup_{Q \rightarrow \infty} \frac{\log \nu_Q}{t_q}, \\
&\leq \frac{d-a}{a+1}
\end{aligned}$$

qui est la sixième inégalité annoncée, avec ses paramètres.

Soit maintenant un nombre réel b vérifiant $1 > b > \overline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta})$, alors pour tout nombre réel t assez grand, il y a d vecteurs linéairement indépendants dans l'intersection $D(\boldsymbol{\beta}, t, e^{tb}) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \setminus \{0\}$ et donc par le Lemme 3.41 également dans l'intersection $E(\boldsymbol{\mu}, Q_t, a_t) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \setminus \{0\}$ avec les paramètres

$$\begin{aligned}
\log Q_t &= \frac{n}{a+1}t, \\
a_t &= \frac{n-1-b}{b+1}, \\
\mu_k &= \frac{\beta_k(t)}{t} \frac{b+1}{n} + \frac{n-1-b}{n}.
\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{Q \rightarrow \infty} M_d^*(\boldsymbol{\mu}, Q), \\
&= \liminf_{t \rightarrow \infty} M_d^*(\boldsymbol{\mu}, Q), \\
&\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} a_t, \\
&\geq \frac{n-1-b}{b+1}
\end{aligned}$$

qui est la septième inégalité annoncée, avec ses paramètres.

Soit enfin un nombre réel b vérifiant $1 > b > \underline{\varphi}_{\beta,d}^*(\boldsymbol{\theta})$, alors il existe une suite réelle $(t_m)_{m \geq 1}$ tendant vers l'infini telle que pour tout m , il y ait d vecteurs linéairement indépendants dans l'intersection $D(\boldsymbol{\beta}, t_m, e^{t_m b}) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \setminus \{0\}$ et donc par le Lemme 3.41

également dans l'intersection $E(\boldsymbol{\mu}, Q_m, a_m) \cap \Lambda_{\boldsymbol{\theta}}^* \setminus \{0\}$ avec les paramètres

$$\begin{aligned}\log Q_m &= \frac{n}{a+1} t_m, \\ a_m &= \frac{n-1-b}{b+1}, \\ \mu_k &= \frac{\beta_k(t)}{t} \frac{b+1}{n} + \frac{n-1-b}{n}.\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}\omega_{\boldsymbol{\mu}}^{(d)}(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{Q \rightarrow \infty} M_d^*(\boldsymbol{\mu}, Q), \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} M_d^*(\boldsymbol{\mu}, Q_t), \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} a_t, \\ &\leq \frac{n-1-b}{b+1}\end{aligned}$$

qui est la dernière inégalité annoncée, avec ses paramètres.

Nous venons donc de montrer le Lemme 3.39. □

3.7 Questions ouvertes et perspectives

I now walk into the wild.

—John Krakauer, *Into the Wild*

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur les problèmes ouverts relatifs aux résultats énoncés dans cette thèse, à savoir essentiellement l'étude des spectres de différents exposants d'approximation diophantienne. Pour plus d'autres questions ouvertes les concernant, on pourra se référer au survol de Bugeaud [6].

3.7.1 Exposants classiques

Concernant les exposants d'approximation diophantienne classique, le spectre complet est connu en dimension 1 et 2. En dimension supérieure, cela reste un problème ouvert important. Toutefois, des résultats sont déjà connus. Le Théorème 3.7 donne le spectre des exposants ordinaire, et en dimension 3, on a les minoration

optimales des rapports entre exposants uniforme et ordinaires données à la fin du paragraphe 3.4.1. Par contre, on sait que les meilleures relations (3.2) connues pour les exposants uniformes ne sont pas les meilleures possible.

Pour atteindre le spectre complet en dimension quelconque, il y a différentes étapes et approches possibles :

- Déterminer le spectre des exposants uniformes pour $n = 3$ puis $n \geq 3$ quelconque.
- En dimension quelconque, donner une minoration des rapports $\frac{\omega_0}{\hat{\omega}_0}$ et $\frac{\omega_{n-1}}{\hat{\omega}_{n-1}}$, puis des rapports intermédiaires $\frac{\omega_d}{\hat{\omega}_d}$ pour d entre 1 et $n - 2$. C'est une première étape pour mêler les spectres ordinaires et uniformes.
- En dimension quelconque, déterminer le spectre des 4 exposants principaux $\hat{\omega}_{n-1}$, ω_{n-1} , ω_0 et $\hat{\omega}_0$, en commençant par le cas $n = 3$.
- Déterminer le spectre des $2n$ exposants ordinaires et uniformes, en commençant par le cas $n = 3$.

3.7.2 Pondération

Dans le cas pondéré, il reste beaucoup de travail à faire. La encore, l'objectif est de connaître le spectre pondéré complet en dimension quelconque. Malheureusement, il n'est même pas connu en dimension 2. Une première étape serait de déterminer indépendamment les spectres des exposants ordinaires et des exposants uniformes, en dimension 2.

Il serait intéressant de développer une géométrie paramétrique des nombres pondérée, en choisissant un n -uplet de fonctions β de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dont les composantes sont affines - pour avoir un graphe conjoint avec des composantes affines par morceaux. Le but étant d'obtenir un résultat analogue au Théorème 3.19 de Roy.

3.7.3 Exposants multiplicatifs

Dans le cas multiplicatif, on a le Théorème 2.15 qui donne un transfert entre les deux exposants ordinaires et entre les deux exposants multiplicatifs. Ce théorème n'est malheureusement pas optimal, comme on l'a vu pour la dimension 2. Il faudrait d'abord traiter le cas de la dimension 2 avant d'envisager la dimension supérieure. Une première question étant de savoir s'il existe un analogue de la relation de Jarník, et donc le spectre des exposants uniformes. On rappelle que dans ce cadre, la *géométrie paramétrique des nombres* ne s'applique pas. Connaître le *spectre multiplicatif* semble un problème ouvert a priori difficile.

Annexe A

There is no analogue to Jarník's relation for twisted diophantine approximation

Mon imitation n'est point un esclavage

–Jean de La Fontaine, *Épître à Huet*

Abstract Jarník gave a relation between the two most classical uniform exponents of Diophantine approximation in dimension 2. In this paper we consider a twisted case, between the classical and the multiplicative one, and we show that no analogue to Jarník's relation holds.

A.1 Introduction and main result

Given $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ with 1, θ_1 , θ_2 linearly independent over \mathbb{Q} , the exponent $\omega(\boldsymbol{\theta})$ (resp. the uniform exponent $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})$) is defined as the supremum of the real numbers ν such that for arbitrarily large real number H (resp. for every sufficiently large real number H) the system of inequalities

$$|q - p_1\theta_1 - p_2\theta_2| \leq H^{-\nu}, \quad |p_1| \leq H, \quad |p_2| \leq H$$

has an integer solution (p_1, p_2, q) with $(p_1, p_2) \neq (0, 0)$.

On the other hand, the exponent $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ (resp. the uniform exponent $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$) is the supremum of the real numbers ν such that for arbitrarily large real number H (resp. for every sufficiently large real number H) the system of inequalities

$$|q| \leq H, \quad |q\theta_1 - p_1| \leq H^{-\nu}, \quad |q\theta_2 - p_2| \leq H^{-\nu}$$

has an integer solution (p_1, p_2, q) with $q \neq 0$.

Dirichlet's box principle (or Minkowski's first convex body theorem) provides the lower bounds

$$\omega(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) \geq 2 \quad \text{and} \quad \lambda(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1}{2}.$$

The first result is Jarník's relation [22] linking both uniform exponents :

Théorème A.1 (Jarník, 1938). *For any pair of real numbers $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ with 1, θ_1, θ_2 linearly independent over \mathbb{Q} , both uniform exponents satisfy the relation*

$$\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})} = 1. \quad (*)$$

Recently, Laurent [32] proved a theorem giving every possible value of the quadruple $\Omega(\boldsymbol{\theta}) = (\omega(\boldsymbol{\theta}), \lambda(\boldsymbol{\theta}), \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}), \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}))$ when $\boldsymbol{\theta}$ ranges over \mathbb{R}^n such that 1, θ_1, θ_2 are \mathbb{Q} -linearly independent, called *spectrum*.

Théorème A.2 (Laurent, 2009). *For any pair of real numbers $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ with 1, θ_1, θ_2 linearly independent over \mathbb{Q} the four exponents of Diophantine approximation satisfy the relations*

$$2 \leq \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) \leq +\infty, \quad \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})} = 1, \quad \frac{\omega(\boldsymbol{\theta})(\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})-1)}{\omega(\boldsymbol{\theta})+\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})} \leq \lambda(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{\omega(\boldsymbol{\theta})-(\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})-1)}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})}.$$

Conversely, for each quadruple $\omega, \hat{\omega}, \lambda, \hat{\lambda}$ satisfying

$$2 \leq \hat{\omega} \leq +\infty, \quad \hat{\lambda} + \frac{1}{\hat{\omega}} = 1, \quad \frac{\omega(\hat{\omega}-1)}{\omega+\hat{\omega}} \leq \lambda \leq \frac{\omega-(\hat{\omega}-1)}{\hat{\omega}}.$$

there exists a pair of real numbers $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ with 1, θ_1, θ_2 linearly independent over \mathbb{Q} with

$$\begin{aligned} \omega(\boldsymbol{\theta}) &= \omega, & \lambda(\boldsymbol{\theta}) &= \lambda, \\ \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) &= \hat{\omega}, & \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) &= \hat{\lambda}. \end{aligned}$$

In [22], Jarník noticed that there is no analogue to relation (*) in higher dimension. It is an open question to find an analogue to Jarník's relation in the multiplicative case, recently studied by German [15].

Given $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ with 1, θ_1, θ_2 linearly independent over \mathbb{Q} , the multiplicative exponent $\omega_{\times}(\boldsymbol{\theta})$ (resp. the uniform multiplicative exponent $\hat{\omega}_{\times}(\boldsymbol{\theta})$) is defined as the supremum of the real numbers ν such that for arbitrarily large real number H (resp. for every sufficiently large real number H) the system of inequalities

$$|q - p_1\theta_1 - p_2\theta_2| \leq H^{-\nu}, \quad \max(1, |p_1|) \max(1, |p_2|) \leq H^2$$

has an integer solution (p_1, p_2, q) with $(p_1, p_2) \neq (0, 0)$.

On the other hand, the multiplicative exponent $\lambda_{\times}(\boldsymbol{\theta})$ (resp. the uniform multiplicative exponent $\hat{\lambda}_{\times}(\boldsymbol{\theta})$) is the supremum of the real numbers ν such that for arbitrarily large real number H (resp. for every sufficiently large real number H) the system of inequalities

$$|q| \leq H, \quad |q\theta_1 - p_1| \cdot |q\theta_2 - p_2| \leq H^{-2\nu}$$

has an integer solution (p_1, p_2, q) with $q \neq 0$.

Minkowski's first convex body theorem [41] provides the lower bounds

$$\omega_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\omega}_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \geq 2 \quad \text{and} \quad \lambda_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\lambda}_{\times}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1}{2}.$$

We observe that

$$\{x, y \in \mathbb{R} \mid |xy| \leq H^2\} = \cup_{0 \leq i \leq 1} \{x, y \in \mathbb{R} \mid |x| \leq H^{2i}, |y| \leq H^{2(1-i)}\},$$

where we have a union of uncountably many sets. It is thus natural to consider the following twisted exponents. See the paper of Harrap [17] for further twisted Diophantine approximation.

Given $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ with $1, \theta_1, \theta_2$ linearly independent over \mathbb{Q} , and i, j non negative real numbers with $i + j = 1$, the twisted exponent $\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ (resp. the uniform twisted exponent $\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$) is defined as the supremum of the real numbers ν such that for arbitrarily large real number H (resp. for every sufficiently large real number H) the system of inequalities

$$|q - p_1\theta_1 - p_2\theta_2| \leq H^{-\nu}, \quad |p_1| \leq H^{2i}, \quad |p_2| \leq H^{2j}$$

has an integer solution (p_1, p_2, q) with $(p_1, p_2) \neq (0, 0)$.

On the other hand, the twisted exponent $\lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ (resp. the uniform twisted exponent $\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$) is the supremum of the real numbers ν such that for arbitrarily large real number H (resp. for every sufficiently large real number H) the system of inequalities

$$|q| \leq H, \quad |q\theta_1 - p_1| \leq H^{-2i\nu}, \quad |q\theta_2 - p_2| \leq H^{-2j\nu}$$

has an integer solution (p_1, p_2, q) with $q \neq 0$.

Again, Minkowski's first convex body theorem [41] provides the lower bounds

$$\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq 2 \quad \text{and} \quad \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1}{2}.$$

In his PhD thesis, the author gives relations analogue to those of Theorem A.2 in the twisted case. At present, there is no construction proving that these relations are best possible.

The goal of this paper is to show that there is no analogue to Jarník's relation in the twisted case. We first need to introduce the following notion.

Fix two real numbers $R > 1$ and $\mu > 1$, we call (μ, R) -sequences a pair of sequences of positive integers $(A_n)_{n \geq 1}$ and $(B_n)_{n \geq 1}$ satisfying the following properties :

- (i) There exist disjoint finite non-empty sets of prime numbers S and T such that, for each $n \geq 1$, the set S contains all the prime factors of A_n and the set T contains all the prime factors of B_n .
- (ii) For each $p \in S$ and $q \in T$, the sequence $(v_p(A_n))_{n \geq 1}$ and $(v_q(B_n))_{n \geq 1}$ are strictly increasing sequences of positive integers.
- (iii) We have

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(A_{n+1})}{\log(A_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(B_{n+1})}{\log(B_n)} = \mu \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(B_n)}{\log(A_n)} = R.$$

For fixed $R > 1$ and $\mu > 1$ and any choice of S and T , one can construct such sequences. For example, suppose that $S = \{p_1, \dots, p_k\}$ and $T = \{q_1, \dots, q_l\}$, where $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l$ are distinct prime numbers. Setting $P = p_1 p_2 \cdots p_k$ and $Q = q_1 q_2 \cdots q_l$, we consider

$$A_n = P^{\lfloor a\mu^n \log Q \rfloor} \quad \text{and} \quad B_n = Q^{\lfloor a\mu^n R \log P \rfloor},$$

where $\lfloor x \rfloor$ is the integer part of the real number x . Then the sequences $(A_n)_{n \geq 1}$ and $(B_n)_{n \geq 1}$ form a pair of (μ, R) -sequences, provided that the real parameter a is large enough to ensure property (ii).

Théorème A.3. *Let i, j be two non negative real numbers with $i \geq j$ and $i + j = 1$. Fix two real numbers μ and R satisfying the conditions :*

$$\mu > 2, \quad R < j(\mu - 2), \quad R > \frac{\mu}{\mu - 2} \quad \text{and} \quad R > \frac{\mu}{i(\mu - 1)}. \quad (\text{A.1})$$

For any (μ, R) -sequences $(A_n)_{n \geq 1}$ and $(B_n)_{n \geq 1}$, we consider the pair of real numbers

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) = \left(\sum_{n \geq 1} A_n^{-1}, \sum_{n \geq 1} B_n^{-1} \right).$$

Its twisted exponents satisfy

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \min \left(2j \frac{\mu - 1}{R}, 2i \frac{\mu - 1}{\mu} R \right), \\ \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \min \left(\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{R}{\mu - 1} \right), \frac{1}{2j} \left(1 - \frac{\mu}{(\mu - 1)R} \right) \right), \\ \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= 2i(\mu - 1). \end{aligned}$$

Hence, for any (μ, R) -sequences, one get a point $\boldsymbol{\theta}$. Theorem A.3 then computes the three exponents $\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$, $\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ and $\omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$ for each i, j for which (A.1) holds.

92A.2. Sequence of minimal points and proof of Theorems A.3 and A.4

Note that in the case $i = j = 1/2$, one gets

$$\begin{aligned}\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) &= \min\left(\frac{\mu-1}{R}, \frac{\mu-1}{\mu}R\right), \\ \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) &= \min\left(1 - \frac{R}{\mu-1}, 1 - \frac{\mu}{(\mu-1)R}\right),\end{aligned}$$

and we recover $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = 1 - \frac{1}{\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta})}$ (*).

With a suitable choice of the parameters μ and R , we can deduce the following theorem as a corollary.

Théorème A.4. *Let i, j be two non negative real numbers with $i \geq j$ and $i + j = 1$. Let \hat{w} be a real number with $\hat{w} > 6i$ and*

$$\hat{\lambda} \in \left[\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{2j}{\hat{w}}\right), \min\left(\frac{1}{2i}, \frac{1}{2j} \left(1 - \frac{2i}{\hat{w}}\right)\right) \right).$$

There exists uncountably many $\boldsymbol{\theta}$ such that $\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{w}$ and $\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\lambda}$.

Thus, no analogue to Jarník's relation holds for the twisted Diophantine approximation. It is still an open question to find the optimal interval for $\hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$.

Notation : Given two sequences $(a_n)_{n \geq 1}$ and $(b_n)_{n \geq 1}$, we write $a_n \gg b_n$ (resp. $a_n \ll b_n$) if, for sufficiently large n , there exists a real number c_1 such that $a_n \geq c_1 b_n$ (resp. there exists a real number c_2 such that $a_n \leq c_2 b_n$). Finally, we write $a_n \asymp b_n$ if both $a_n \gg b_n$ and $a_n \ll b_n$.

A.2 Sequence of minimal points and proof of Theorems A.3 and A.4

The main tool to compute the exponents of Diophantine approximation and prove Theorem A.3 is the notion of minimal points, as introduced by Davenport and Schmidt in [12, §3] or Jarník in [22].

Let L and N be two functions from \mathbb{Z}^l to \mathbb{R}_+ where k is a positive integer.

Définition A.5. A sequence of minimal points $(M_k)_{k \geq 0} \in (\mathbb{Z}^l)^{\mathbb{N}}$ from L relatively to N is a sequence such that

- (i) $(N(M_k))_{k \geq 0}$ is an increasing sequence with $N(M_0) \geq 1$,

- (ii) $(L(M_k))_{k \geq 0}$ is a decreasing sequence with $L(M_0) \leq 1$,
- (iii) for every $k \geq 0$ and every point $M \in \mathbb{Z}^l$, if $N(M) < N(M_{k+1})$ then $L(M) \geq L(M_k)$.

We can normalize any functions L and N to satisfy the conditions $N(M_0) \geq 1$ and $L(M_0) \leq 1$. These conditions are not restrictive. They are imposed to simplify the further use of minimal points. Note that there is no unicity, because it may exist M_k and M'_k such that $L(M_k) = L(M'_k)$ and $N(M_k) = N(M'_k)$ but $M_k \neq M'_k$.

Let $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ be an integer triple. Consider the following functions with parameters i, j and $\boldsymbol{\theta}$

$$\begin{aligned} L_\lambda(\mathbf{x}) &= \max\left(|x_0\theta_1 - x_1|^{1/(2i)}, |x_0\theta_2 - x_2|^{1/(2j)}\right), \\ N_\lambda(\mathbf{x}) &= |x_0|, \\ L_\omega(\mathbf{x}) &= |x_1\theta_1 + x_2\theta_2 - x_0|, \\ N_\omega(\mathbf{x}) &= \max\left(|x_1|^{1/(2i)}, |x_2|^{1/(2j)}\right), \end{aligned}$$

where $|x|$ is the absolute value of the real number x . They are related to the twisted exponents through the following proposition.

Proposition A.6. *Let $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ be a pair of real numbers and $0 < j \leq i < 1$ such that $i + j = 1$. Let $(a_n)_{n \geq 1}$ (resp. $(b_n)_{n \geq 1}$) be a sequence of minimal points of $\boldsymbol{\theta}$ relatively to L_λ and N_λ (resp. to L_ω and N_ω). We have the relations*

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log L_\lambda(a_n)}{\log N_\lambda(a_{n+1})} \right), & \lambda_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log L_\lambda(a_n)}{\log N_\lambda(a_n)} \right), \\ \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log L_\omega(b_n)}{\log N_\omega(b_{n+1})} \right), & \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log L_\omega(b_n)}{\log N_\omega(b_n)} \right). \end{aligned}$$

We omit the proof of Proposition A.6. It is an easy consequence of the definitions of a sequence of minimal points and of the twisted exponents.

This proposition gives us the exact values of the two uniform exponents if we have enough information about the tail of a sequence of minimal points, since only the asymptotic behavior is significant. From now on, every statement is implicitly considered for sufficiently large n .

For every (μ, R) -sequences $(A_n)_{n \geq 1}$ and $(B_n)_{n \geq 1}$ with μ and R satisfying the conditions (A.1) from Theorem A.3, we set $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) = \left(\sum_{n \geq 1} A_n^{-1}, \sum_{n \geq 1} B_n^{-1} \right)$. We also set for every integer $n \geq 1$ the integers

$$A'_n = \sum_{k=1}^n A_n A_k^{-1} \quad \text{and} \quad B'_n = \sum_{k=1}^n B_n B_k^{-1}. \tag{A.2}$$

With this notation, we have

94A.2. Sequence of minimal points and proof of Theorems A.3 and A.4

Lemme A.7. *Under the assumption of Theorem A.3, the sequence of primitive integer points*

$$(A'_1, A_1, 0), (B'_1, 0, B_1), \dots, (A'_n, A_n, 0), (B'_n, 0, B_n), (A'_{n+1}, A_{n+1}, 0), \dots \quad (\text{A.3})$$

consists ultimately of a sequence of minimal points for L_ω with respect to N_ω .

Lemme A.8. *Under the assumption of Theorem A.3, consider*

$$C_n = (A_n B_n, A'_n B_n, A_n B'_n) \text{ and } D_n = (A_{n+1} B_n, A'_{n+1} B_n, A_{n+1} B'_n).$$

Ultimately, C_n and D_n consist in minimal points for L_λ with respect to N_λ . We denote by $E_{n,1}, \dots, E_{n,s_n}$ (resp. $F_{n,1}, \dots, F_{n,t_n}$) the intermediate minimal points for L_λ with respect to N_λ between $C_n = E_{n,0}$ and $D_n = E_{n,s_n+1}$ (resp. $D_n = F_{n,0}$ and $C_{n+1} = F_{n,t_n+1}$).

For $0 \leq k \leq s_n$ and $0 \leq k' \leq t_n$, the intermediate minimal points are of the shape

$$E_{n,k} = \left(E_{n,k,0}, E_{n,k,1}, \frac{E_{n,k,0}}{B_n} B'_n \right),$$

$$F_{n,k'} = \left(F_{n,k',0}, F_{n,k',1}, \frac{F_{n,k',0}}{A_n} A'_n \right).$$

Furthermore, they satisfy

$$L_\lambda(F_{n,k}) = \|F_{k,n,0}\theta_2\|^{1/2j} \asymp \left(\frac{1}{N_\lambda(F_{n,k+1})} A_{n+1} \right)^{1/2j}, \quad N_\lambda(F_{n,1}) \asymp \frac{B_{n+1}}{B_n},$$

$$L_\lambda(E_{n,k}) = \|E_{k,n,0}\theta_1\|^{1/2i} \asymp \left(\frac{1}{N_\lambda(E_{n,k+1})} B_n \right)^{1/2i}, \quad N_\lambda(E_{n,1}) \asymp \frac{A_{n+1}}{A_n},$$

where $\|x\|$ denotes the distance from the real number x to a nearest integer.

Lemmas A.7 and A.8 will be proved in Section A.3. We show now how Theorem A.3 and A.4 can be derived from Proposition A.6 and Lemmas A.7 and A.8.

Proof of Theorem A.3.

First, notice that

$$|A_n \theta_1 - A'_n| \asymp |A_n A_{n+1}^{-1}| \quad \text{and} \quad |B_n \theta_2 - B'_n| \asymp |B_n B_{n+1}^{-1}|.$$

Using Proposition A.6, we can thus compute

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \min \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log |A'_n - A_n \theta_1|}{\log |B_n|^{1/2j}}, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log |B'_n - B_n \theta_2|}{\log |A_{n+1}|^{1/2i}} \right), \\ &= \min \left(2j \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log A_{n+1} - \log A_n}{\log B_n}, 2i \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log B_{n+1} - \log B_n}{\log A_{n+1}} \right), \\ &= \min \left(2j \frac{\mu - 1}{R}, 2i \frac{\mu - 1}{\mu} R \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \min \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{0 \leq k \leq s_n} \left(-\frac{\log L_\lambda(E_{n,k})}{\log N_\lambda(E_{n,k+1})} \right), \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{0 \leq k \leq t_n} \left(-\frac{\log L_\lambda(F_{n,k})}{\log N_\lambda(F_{n,k+1})} \right) \right), \\
 &= \min \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{0 \leq k \leq s_n} \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{\log B_n}{\log E_{n,k+1,0}} \right), \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{0 \leq k \leq t_n} \frac{1}{2j} \left(1 - \frac{\log A_{n+1}}{\log F_{n,k+1,0}} \right) \right), \\
 &= \min \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{\log B_n}{\log E_{n,1,0}} \right), \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} \left(1 - \frac{\log A_{n+1}}{\log F_{n,1,0}} \right) \right), \\
 &= \min \left(\frac{1}{2i} \left(1 - \frac{R}{\mu - 1} \right), \frac{1}{2j} \left(1 - \frac{\mu}{(\mu - 1)R} \right) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \max \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log |A'_n - A_n \theta_1|}{\log |A_n|^{\frac{1}{2j}}}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log |B'_n - B_n \theta_2|}{\log |B_n|^{\frac{1}{2i}}} \right), \\
 &= \max \left(2j \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log A_{n+1} - \log A_n}{\log |A_n|}, 2i \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log B_{n+1} - \log B_n}{\log |B_n|} \right), \\
 &= \max(2i(\mu - 1), 2j(\mu - 1)) = 2i(\mu - 1).
 \end{aligned}$$

This completes the proof of Theorem A.3. □

Proof of Theorem A.4.

Theorem A.4 is a corollary from Theorem A.3 if we choose the parameters from the following proposition

Proposition A.9. *For every $\hat{\omega} > 6i$, the parameters*

$$\begin{aligned}
 R &\in \left(\frac{\hat{\omega}}{2i}, \frac{\hat{\omega}}{2i} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{16ij}{\hat{\omega}^2}}}{2} \right), \\
 \mu &= \frac{2iR}{2iR - \hat{\omega}}.
 \end{aligned}$$

satisfy the conditions (A.1) from Theorem A.3.

The key point is to notice that

$$R \in \left(\frac{\hat{\omega}}{2i}, \frac{\hat{\omega}}{2i} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{16ij}{\hat{\omega}^2}}}{2} \right)$$

is equivalent to

$$0 < R(2iR - \hat{\omega}) < 2j.$$

With the choices of the Proposition A.9, we have

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \min\left(2j\frac{\mu-1}{R}, 2i\frac{\mu-1}{\mu}R\right), \\ &= \min\left(2j\frac{\hat{\omega}}{R(2iR-\hat{\omega})}, \hat{\omega}\right) = \hat{\omega}, \\ \hat{\lambda}_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) &= \min\left(\frac{1}{2i}\left(1-\frac{R(2iR-\hat{\omega})}{\hat{\omega}}\right), \frac{1}{2j}\left(1-\frac{2i}{\hat{\omega}}\right)\right), \\ &\in \left(\frac{1}{2i}\left(1-\frac{2j}{\hat{\omega}}\right), \min\left(\frac{1}{2i}, \frac{1}{2j}\left(1-\frac{2i}{\hat{\omega}}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

To get uncountably many pairs $\boldsymbol{\theta}$ with given exponents, note that Theorem A.3 also holds for

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2) = \left(\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n A_n^{-1}, \sum_{n \geq 1} \varepsilon'_n B_n^{-1}\right),$$

where ε_n and ε'_n are ± 1 . In this case we define

$$A'_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_n A_n \varepsilon_k A_k^{-1} \quad \text{and} \quad B'_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon'_n B_n \varepsilon'_k B_k^{-1}.$$

□

A.3 Proof of the lemmas on minimal points

First of all, observe that in the definition of (μ, R) -sequences, the condition (ii) on the disjointness of the sets S and T of prime numbers ensures that for every $n \geq 1$,

$$\gcd(A_n, B_n) = \gcd(A_n, A'_n) = \gcd(B_n, B'_n) = 1,$$

where A'_n and B'_n are given by (A.2). This ensures that the terms in the sequences in Lemmas A.7 and A.8 are primitive points.

Proof of Lemma A.7.

Since $R > 1$ and $i \geq j$ we have $|A_n|^{\frac{1}{2i}} < |B_n|^{\frac{1}{2j}}$. Furthermore, the condition $R < j(\mu - 2)$ from (A.1) implies that $\frac{\mu}{R} > \frac{i}{j}$. This implies that $|B_n|^{\frac{1}{2j}} < |A_{n+1}|^{\frac{1}{2i}}$. Thus, the sequence (A.3) is increasing with respect to N_ω . To prove that it consists ultimately of consecutive minimal points for L_ω with respect to N_ω , it is enough to show that, if n is large enough, there is no primitive integer point $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2)$ either with

$$N_\omega(\boldsymbol{x}) = \max\{|x_1|^{\frac{1}{2i}}, |x_2|^{\frac{1}{2j}}\} < B_n^{\frac{1}{2j}} \quad \text{and} \quad L_\omega(\boldsymbol{x}) = |x_0 - x_1\theta_1 - x_2\theta_2| < |A'_n - A_n\theta_1|, \quad (\text{A.4})$$

or with

$$N_\omega(\mathbf{x}) = \max\{|x_1|^{\frac{1}{2i}}, |x_2|^{\frac{1}{2j}}\} < A_{n+1}^{\frac{1}{2i}} \text{ and } L_\omega(\mathbf{x}) = |x_0 - x_1\theta_1 - x_2\theta_2| < |B'_n - B_n\theta_2|. \quad (\text{A.5})$$

Assuming that there is a primitive point (x_0, x_1, x_2) satisfying (A.4), one finds

$$\begin{aligned} A_n B_n x_0 - A'_n B_n x_1 - A_n B'_n x_2 &= A_n B_n (x_0 - x_1\theta_1 - x_2\theta_2) \\ &\quad - B_n (A'_n - A_n\theta_1)x_1 - A_n (B'_n - B_n\theta_2)x_2 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

The left hand side of this equality is an integer. If it is 0, then B_n divides $A_n B'_n x_2$, thus B_n divides x_2 and so $x_2 = 0$ because of the hypothesis $|x_2| < B_n$. Thus we obtain $A_n x_0 - A'_n x_1 = 0$. As \mathbf{x} is a primitive point, this implies that $(x_0, x_1) = \pm(A'_n, A_n)$ and so $|x_0 - x_1\theta_1 - x_2\theta_2| = |A'_n - A_n\theta_1|$ contrary to the hypothesis. So the left hand side of (A.6) has absolute value at least 1 and thus

$$\begin{aligned} 1 &\leq A_n B_n |A'_n - A_n\theta_1| + B_n |A'_n - A_n\theta_1| |x_1| + A_n |B'_n - B_n\theta_2| |x_2| \\ &\ll A_n^2 A_{n+1}^{-1} B_n + A_n A_{n+1}^{-1} B_n^{1+i/j} + A_n B_n^2 B_{n+1}^{-1}, \end{aligned}$$

because

$$|A'_n - A_n\theta_1| \leq 2 \frac{A_n}{A_{n+1}} \text{ and } |B'_n - B_n\theta_2| \leq 2 \frac{B_n}{B_{n+1}}.$$

We obtain a contradiction by showing that the three summands in the last expression above tend to zero as n goes to infinity. First, $R < \mu - 2$ implies that

$$R + 2 - \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log A_n + \log B_n - \log A_{n+1}}{\log A_n} = -\rho_1 < 0.$$

That is,

$$A_n^2 A_{n+1}^{-1} B_n \sim_{n \rightarrow \infty} A_n^{-\rho_1} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Then, $R < j(\mu - 1)$ implies that

$$R + j(1 - \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{j \log A_n + \log B_n - j \log A_{n+1}}{\log A_n} = -\rho_2 < 0.$$

That is,

$$A_n A_{n+1}^{-1} B_n^{1/j} \sim_{n \rightarrow \infty} A_n^{-\rho_2/j} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Finally, $(\mu - 2)R > 1$ implies that

$$R(\mu - 2) - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log A_n + 2 \log B_n - \log B_{n+1}}{-\log A_n} = \rho_3 > 0.$$

That is,

$$A_n B_n^2 B_{n+1}^{-1} \sim_{n \rightarrow \infty} A_n^{-\rho_3} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Similarly, if the condition (A.5) has a solution (x_0, x_1, x_2) , A_{n+1} can not divide x_1 and we deduce the lower bound

$$\begin{aligned} 1 &\leq A_{n+1}B_n|B'_n - B_n\theta_1| + B_n|A'_{n+1} - A_{n+1}\theta_1||x_1| + A_{n+1}|B'_n - B_n\theta_2||x_2| \\ &\ll B_n^2B_{n+1}^{-1}A_{n+1} + B_nA_{n+1}^2A_{n+2}^{-1} + A_{n+1}^{1+j/i}B_nB_{n+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Again, the three summands in this expression tend to zero as n goes to infinity because $R(\mu - 2) > \mu$, $R < \mu(\mu - 2)$ and $R(\mu - 1) > \frac{\mu}{i}$ according to (A.1). Thus, we proved Lemma A.7. \square

Proof of Lemma A.8.

First, we show that ultimately the point C_n and D_n are minimal points for L_λ with respect to N_λ , then we prove the properties of the minimal points lying respectively between C_n and D_n and D_n and C_{n+1} .

Since $A_{n+1} > A_n$ and $B_{n+1} > B_n$ by the property about valuations of (μ, R) -sequences, the sequence

$$C_1, D_1, \dots, C_n, D_n, C_{n+1}, \dots$$

is strictly increasing with respect to N_λ .

Note that, if n is large enough

$$\begin{aligned} L_\lambda(C_n) &= \max\{|A_n\theta_1 - A'_n|B_n\}^{1/(2i)}, \{|B_n\theta_2 - B'_n|A_n\}^{1/(2j)}\}, \\ &= (|A_n\theta_1 - A'_n|B_n)^{1/(2i)}, \\ &\asymp (A_nA_{n+1}^{-1}B_n)^{1/(2i)}, \end{aligned}$$

since $|B_n\theta_2 - B'_n|A_n \asymp A_nB_{n+1}^{-1}B_n$ goes faster to zero than $|A_n\theta_1 - A'_n|B_n \asymp A_nA_{n+1}^{-1}B_n$ and we have $j \leq i$.

Suppose that a non-zero integer point $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ satisfies

$$L_\lambda(\mathbf{x}) \leq L_\lambda(C_n) \quad \text{and} \quad N_\lambda(\mathbf{x}) = |x_0| \leq N_\lambda(D_n) = A_{n+1}B_n. \quad (\text{A.7})$$

We have the integer determinant

$$\left| \det \begin{pmatrix} x_0 & x_2 \\ B_n & B'_n \end{pmatrix} \right| \leq |x_0||B'_n - B_n\theta_2| + B_n|x_2 - x_0\theta_2| \ll A_{n+1}B_n^2B_{n+1}^{-1} + B_nL_\lambda(C_n)^{2j}. \quad (\text{A.8})$$

Since $R(\mu - 2) > \mu$, the first summand $A_{n+1}B_n^2B_{n+1}^{-1}$ tends to zero as n goes to infinity. Since $R < j(\mu - 1)$ and $L_\lambda(C_n) \asymp (A_nA_{n+1}^{-1}B_n)^{1/(2i)}$, it follows that $B_nL_\lambda(C_n)^{2j}$ tends to zero as well. Thus, if n is large enough, the determinant in (A.8)

is zero. Then, (x_0, x_2) is a non-zero integral multiple of (B_n, B'_n) , in particular B_n divides x_0 . Consider the integer determinant, for $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ with the stronger assumption that $N_\lambda(\mathbf{x}) \leq N_\lambda(C_n) = A_n B_n$:

$$\left| \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ A_n & A'_n \end{pmatrix} \right| \leq |x_0| |A'_n - A_n \theta_1| + A_n |x_1 - x_0 \theta_1| \ll A_n^2 B_n A_{n+1}^{-1} + A_n L_\lambda(C_n)^{2i}. \quad (\text{A.9})$$

Since $R < \mu - 2$ summands tends to zero as n goes to infinity. Thus for sufficiently large n , the determinant in (A.9) is zero. Then, (x_0, x_1) is a non-zero integral multiple of (A_n, A'_n) , in particular A_n divides x_0 . Since A_n and B_n are coprime, $A_n B_n$ divides x_0 and $N_\lambda(\mathbf{x}) \geq A_n B_n = N_\lambda(C_n)$. This proves that C_n is a minimal point for L_λ with respect to N_λ .

Similarly, if a non-zero integer point $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ satisfies

$$L_\lambda(\mathbf{x}) \leq L_\lambda(D_n) \asymp (A_{n+1} B_n B_{n+1}^{-1})^{1/(2j)} \quad \text{and} \quad |x_0| \leq N_\lambda(C_{n+1}) = A_{n+1} B_n$$

and if n is large enough, then (x_0, x_1) is a non-zero integral multiple of (A_{n+1}, A'_{n+1}) and if we strengthen the condition to $N_\lambda(\mathbf{x}) \leq N_\lambda(D_n) = A_{n+1} B_n$, then (x_0, x_2) is a non zero integer multiple of (B_n, B'_n) . Thus, D_n is a minimal point for L_λ with respect to N_λ .

Consider any minimal point $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ with $N_\lambda(C_n) \leq x_0 < N_\lambda(D_n)$. We claim that for n large enough, we have

$$L_\lambda(\mathbf{x}) = |x_0 \theta_1 - x_1|^{1/(2i)}.$$

Indeed, for such \mathbf{x} , recall that (x_0, x_2) is an integer multiple of (B_n, B'_n) . Since x_0 is strictly less than $A_{n+1} B_n$ and B_n and A_{n+1} are coprime, the points (x_0, x_1) and (A_{n+1}, A'_{n+1}) are linearly independent. Thus we have

$$1 \leq \left| \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ A_{n+1} & A'_{n+1} \end{pmatrix} \right| \leq |x_0| |A'_{n+1} - A_{n+1} \theta_1| + A_{n+1} |x_1 - \theta_1 x_0|.$$

This provides

$$|x_1 - \theta_1 x_0| \gg \frac{1}{A_{n+1}}, \quad (\text{A.10})$$

because $R > \mu(\mu - 2)$ implies for sufficiently large n

$$|x_0| |A'_{n+1} - A_{n+1} \theta_1| \leq A_{n+1}^2 B_n A_{n+2}^{-1} \leq \frac{1}{2}.$$

Furthermore,

$$|x_2 - \theta_2 x_0| = \frac{x_0}{B_n} |B_n \theta_2 - B'_n| \ll \frac{A_{n+1} B_n}{B_{n+1}}. \quad (\text{A.11})$$

Finally, the condition $R > \frac{\mu}{i(\mu-1)}$ implies that $\left(\frac{A_{n+1}B_n}{B_{n+1}}\right)^{1/(2j)}$ tends to zero faster than $A_{n+1}^{-1/(2i)}$. Hence the result.

Let $E_{n,0} = C_n, E_{n,1}, \dots, E_{n,s_n}, E_{n,s_n+1} = D_n$ denote a sequence of minimal points L_λ with respect to N_λ , chosen with positive first coordinate. Suppose that n is large enough, by the above each $E_{n,k}$ has the form

$$E_{n,k} = \left(E_{n,k,0}, E_{n,k,1}, \frac{E_{n,k,0}}{B_n} B'_n \right) \quad \text{where} \quad \frac{E_{n,k,0}}{B_n} \in \mathbb{N}^* \quad (0 \leq k \leq s_n + 1),$$

and we have $L_\lambda(E_{n,k})^{2i} = |E_{n,k,0}\theta_1 - E_{n,k,1}|$ for $k = 0 \dots, s_n$ but not for $k = s_n + 1$.

We now show that

$$\frac{B_n}{2N_\lambda(E_{n,k+1})} \leq L_\lambda(E_{n,k})^{2i} \leq \frac{B_n}{N_\lambda(E_{n,k+1})}.$$

By Minkowski's first convex body theorem, for each real number $H > 0$, there exists a non-zero integer point (x_0, x_1) satisfying the three conditions

$$B_n \mid x_0, \quad |x_0| \leq H \quad \text{and} \quad |x_0\theta_1 - x_1| \leq \frac{B_n}{H}.$$

For n large enough, fix $k \in \{1, \dots, s_n\}$ and choose H in the range

$$N_\lambda(E_{n,k}) < H < N_\lambda(E_{n,k+1}),$$

then we get a non-zero integer point $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ where x_0 and x_1 are given by Minkowski's theorem and $x_2 = x_0 B_n^{-1} B'_n$. This point satisfies

$$N_\lambda(E_{n,k}) < N_\lambda(\mathbf{x}) < N_\lambda(E_{n,k+1})$$

and the conditions (A.10) and (A.11). So,

$$L_\lambda(\mathbf{x})^{2i} = |x_0\theta_1 - x_1| \leq \frac{B_n}{H}.$$

By definition of minimal points, we have $L_\lambda(E_{n,k}) < L_\lambda(\mathbf{x})$. Thus, by letting H tend to $E_{n,k+1,0}$ we get the upper bound

$$L_\lambda(E_{n,k})^{2i} \leq \frac{B_n}{N_\lambda(E_{n,k+1})}.$$

For the lower bound, notice that B_n divides $E_{n,k,0}$ and $E_{n,k+1,0}$, and that two consecutive minimal points are independent. Thus

$$\begin{aligned} B_n &\leq \left| \det \begin{pmatrix} E_{n,k,0} & E_{n,k,1} \\ E_{n,k+1,0} & E_{n,k+1,1} \end{pmatrix} \right| \leq E_{n,k,0} |E_{n,k+1,1} - \theta_1 E_{n,k+1,0}| + E_{n,k+1,0} |E_{n,k,1} - E_{n,k,0} \theta_1|, \\ &\leq 2E_{n,k+1,0} |E_{n,k,1} - E_{n,k,0} \theta_1|. \end{aligned}$$

So,

$$L_\lambda(E_{n,k})^{2i} \geq \frac{B_n}{2N_\lambda(E_{n,k+1})}.$$

In particular, since $E_0 = C_n$ we have

$$N_\lambda(E_{n,1}) \asymp \frac{B_n}{L_\lambda(C_n)^{2i}} \asymp \frac{B_n}{A_n A_{n+1}^{-1} B_n} \asymp \frac{A_{n+1}}{A_n}.$$

Similarly, we show that for n large enough, any minimal point $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$ with $N_\lambda(D_n) \leq N_\lambda(\mathbf{x}) < N_\lambda(C_{n+1})$ has

$$L_\lambda(\mathbf{x}) = |x_0 \theta_2 - x_2|^{1/(2j)},$$

and that the intermediate minimal points $F_{n,k} = (F_{n,k,0}, F_{n,k,1}, \frac{F_{n,k,0}}{A_{n+1}} A'_{n+1})$ satisfy

$$\frac{A_{n+1}}{2N_\lambda(F_{n,k+1})} \leq L_\lambda(F_{n,k})^{2j} \leq \frac{A_{n+1}}{N_\lambda(F_{n,k+1})}.$$

via Minkowski's first convex body theorem and consideration on a good determinant.

This completes the proof of Lemma A.8. □

Annexe B

About Jarník's-type relation in higher dimension

[...] à vouloir faire le tour du monde, on finit par se rattraper soi-même.

—Mélanie Sadler, *Comment les grands de ce monde se promènent en bateau*

Abstract Using the Parametric Geometry of Numbers introduced recently by W.M. Schmidt and L. Summerer [50, 51] and results by D. Roy [47, 46], we show that German's transference inequalities between the two most classical exponents of uniform Diophantine approximation are optimal. Further, we establish that the spectrum of the n uniform exponents of Diophantine approximation in dimension n is a subset of \mathbb{R}^n with non empty interior. Thus, no Jarník-type relation holds between them.

Introduction

Throughout this paper, the integer $n \geq 1$ denotes the dimension of the ambient space, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ denotes an n -tuple of real numbers such that $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ are \mathbb{Q} -linearly independent, and $\|x\|$ denotes the distance between the real number x and its nearest integer.

Let d be an integer with $0 \leq d \leq n - 1$. We define the exponent $\omega_d(\boldsymbol{\theta})$ (resp. the uniform exponent $\hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta})$) as the supremum of the real numbers ω for which there exist rational affine subspaces $L \subset \mathbb{R}^n$ such that

$$\dim(L) = d, \quad H(L) \leq H \quad \text{and} \quad H(L)d(\boldsymbol{\theta}, L) \leq H^{-\omega}$$

for arbitrarily large real numbers H (resp. for every sufficiently large real number H). Here $H(L)$ denotes the height of L (see [48] for more details), and $d(\boldsymbol{\theta}, L) = \min_{P \in L} d(\boldsymbol{\theta}, P)$ is the minimal distance between $\boldsymbol{\theta}$ and a point of L .

These exponents were introduced originally by M. Laurent [33] and W. M. Schmidt [48]. They interpolate between the classical exponents $\omega(\boldsymbol{\theta}) = \omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta})$ and $\lambda(\boldsymbol{\theta}) = \omega_0(\boldsymbol{\theta})$ (resp. $\hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})$ and $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta})$) that were introduced by A. Khintchine [26, 27], V. Jarník [22] and Y. Bugeaud and M. Laurent [7, 8].

We have the relations

$$\omega_0(\boldsymbol{\theta}) \leq \omega_1(\boldsymbol{\theta}) \leq \cdots \leq \omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta}),$$

$$\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) \leq \hat{\omega}_1(\boldsymbol{\theta}) \leq \cdots \leq \hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}),$$

and Minkowski's First Convex Body Theorem [41] and Mahler's compound convex bodies theory provide the lower bounds

$$\omega_d(\boldsymbol{\theta}) \geq \hat{\omega}_d(\boldsymbol{\theta}) \geq \frac{d+1}{n-d}, \quad \text{for } 0 \leq d \leq n-1.$$

When the dimension is $n = 1$, we have the equality $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = 1$. In [22], V. Jarník showed that in dimension $n = 2$, we have the following algebraic relation between $\hat{\omega}_1(\boldsymbol{\theta})$ and $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta})$:

$$\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\hat{\omega}_1(\boldsymbol{\theta})} = 1. \quad (*)$$

Furthermore, V. Jarník noted that, in higher dimension $n \geq 3$, no algebraic relation holds anymore. He proved [22, Satz 3] that for $n \geq 2$, there exist two n -tuples of real numbers $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ and $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ such that

$$\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\nu}) = +\infty, \quad \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = 1 \quad \text{and} \quad \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{n-1}.$$

V. Jarník also proved the following transference theorem :

Théorème B.1 (Jarník, 1938). *Let $n \geq 2$. For any n -tuples of real number $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ such that $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ are \mathbb{Q} -linearly independent, we have*

$$\frac{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})}{(n-1)\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) + n} \leq \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) - n + 1}{n}.$$

If $\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = n$, the interval reduces to the single point $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n}$.

Remarque. O. German [16] and A. Khinchin [28] claim that V. Jarník [22] proved the existence of n -tuples $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ with $\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = +\infty$ and $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) \in (\frac{1}{n-1}, 1)$. It appears to the author that this is not written explicitly in [22].

Recently, O. German [16] improved Theorem B.1 :

Théorème B.2 (German, 2012). *With the notation of Theorem B.1, we have*

$$\frac{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) - 1}{(n-1)\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})} \leq \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) - (n-1)}{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})}. \quad (**)$$

Note that the interval reduces to a single point if $n = 2$, and that in this case we recover Jarník's relation (*).

The first goal of this paper is to prove that German's inequalities are best possible.

Théorème B.3. *Let $n \geq 2$ be an integer, let $\hat{\omega} \in [n, +\infty]$ and let $\hat{\lambda} \in \left[\frac{\hat{\omega}-1}{(n-1)\hat{\omega}}, \frac{\hat{\omega}-n+1}{\hat{\omega}}\right]$, where we understand that the interval for $\hat{\lambda}$ is $\left[\frac{1}{n-1}, 1\right]$ when $\hat{\omega} = +\infty$. Then there exist uncountably many n -tuples of real numbers $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, with $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ \mathbb{Q} -linearly independent, such that $\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}$ and $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\lambda}$.*

Thus, the inequalities (**) of German describe the set of all the possible values for the pair $(\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}), \hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}))$ as $\boldsymbol{\theta}$ runs through all points $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ such that $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ are \mathbb{Q} -linearly independent, called the *spectrum* of $(\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_{n-1})$.

One can wonder if in higher dimension ($n \geq 3$), there exists a Jarník-type relation between the n uniform exponents $\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{n-1}$. Then, the dimension of the spectrum of the n uniform exponents would be strictly less than n . The next theorem states that no such algebraic relation holds.

Théorème B.4. *For every integer $n \geq 3$, the spectrum of $\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{n-1}$ is a subset of \mathbb{R}^n with nonempty interior.*

We also know the spectrum of other families of exponents. M. Laurent [32] described the full spectrum of the four exponents $\omega_0(\boldsymbol{\theta}), \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}), \omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta}), \hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta})$ in the case of dimension $n = 2$. In his PhD thesis, the author gives an alternative proof of this result. However, for $n \geq 3$ this spectrum is still unknown.

D. Roy showed in [46] that the going-up and going-down transference inequalities of W. M. Schmidt [48] and M. Laurent [33] describe the full spectrum of the n exponents $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$.

In section B.1, we introduce Parametric Geometry of Numbers, which is the main tool to prove Theorem B.3 (section B.2) and Theorem B.4 (section B.4), and to give an alternative proof of Theorem B.2 (section B.3).

B.1 Parametric Geometry of Numbers

We use the notation introduced by D. Roy in [47, 46] which is essentially dual to the one of W. M. Schmidt and L. Summerer [50, 51]. We refer the reader to these papers for further details. Here $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ is the usual scalar product

of vectors \mathbf{x} and \mathbf{y} , and $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ is the usual Euclidian norm.

Let $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_n)$ be a vector in \mathbb{R}^{n+1} , with Euclidean norm $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$. For a real parameter $Q \geq 1$ we consider the convex body

$$\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(Q) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq Q^{-1} \right\}.$$

For $1 \leq d \leq n+1$ we denote by $\lambda_d(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(Q))$ the d -th minimum of $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(Q)$ relatively to the lattice \mathbb{Z}^{n+1} . For $q \geq 0$ and $1 \leq d \leq n+1$ we set

$$L_{\mathbf{u},d}(q) = \log \lambda_d(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)).$$

Finally, we define the following map associated with \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{u}} : [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ q &\mapsto (L_{\mathbf{u},1}(q), \dots, L_{\mathbf{u},n+1}(q)). \end{aligned}$$

The lattice \mathbb{Z}^{n+1} is invariant under permutation of coordinates. Hence, $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$ remains the same if we permute the coordinates in \mathbf{u} . Since $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ we can thus assume that $u_0 \neq 0$.

The following proposition links the exponents of Diophantine approximation associated with $\boldsymbol{\theta} = (\frac{u_1}{u_0}, \dots, \frac{u_n}{u_0})$ to the behavior of the map $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$, assuming $u_0 \neq 0$. It was first stated by W.M.Schmidt and L.Summerer in [50] (Theorem 1.4). It also appears as Relations (1.8) and (1.9) in [51]. In the notation of D.Roy [46] (Proposition 3.1), it reads as follows.

Proposition B.5. *Let $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, with Euclidean norm $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ and $u_0 \neq 0$. Set $\boldsymbol{\theta} = (\frac{u_1}{u_0}, \dots, \frac{u_n}{u_0})$. We have the following relations :*

$$\begin{aligned} \liminf_{q \rightarrow +\infty} \frac{L_{\mathbf{u},1}(q) + \dots + L_{\mathbf{u},k}(q)}{q} &= \frac{1}{1 + \omega_{n-k}(\boldsymbol{\theta})}, \\ \limsup_{q \rightarrow +\infty} \frac{L_{\mathbf{u},1}(q) + \dots + L_{\mathbf{u},k}(q)}{q} &= \frac{1}{1 + \hat{\omega}_{n-k}(\boldsymbol{\theta})}. \end{aligned}$$

Thus, if we know an explicit map $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_{n+1}) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, such that $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ is bounded, then we can compute the $2n$ exponents $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}), \dots, \hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}), \omega_0(\boldsymbol{\theta}), \dots, \omega_{n-1}(\boldsymbol{\theta})$ for the above point $\boldsymbol{\theta}$ upon replacing $L_{\mathbf{u},d}$ by P_d in the above formulas for $1 \leq d \leq n$. For this purpose, we consider the following family of maps, introduced by D. Roy in [46].

Définition B.6 (Roy, 2014). Let I be a subinterval of $[0, \infty)$ with non-empty interior. A generalized $(n+1)$ -system on I is a continuous piecewise linear map $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_{n+1}) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ with the following three properties.

- (S1) For each $q \in I$, we have $0 \leq P_1(q) \leq \dots \leq P_{n+1}(q)$ and $P_1(q) + \dots + P_{n+1}(q) = q$.
- (S2) If H is a non empty open subinterval of I on which \mathbf{P} is differentiable, then there are integers \underline{r}, \bar{r} with $1 \leq \underline{r} \leq \bar{r} \leq n+1$ such that $P_{\underline{r}}, P_{\underline{r}+1}, \dots, P_{\bar{r}}$ coincide on the whole interval H and have slope $1/(\bar{r} - \underline{r} + 1)$ while any other component P_d of \mathbf{P} is constant on H .
- (S3) If q is an interior point of I at which \mathbf{P} is not differentiable, if $\underline{r}, \bar{r}, \underline{s}, \bar{s}$ are the integers for which

$$P'_d(q^-) = \frac{1}{\bar{r} - \underline{r} + 1} \quad (\underline{r} \leq d \leq \bar{r}) \quad \text{and} \quad P'_d(q^+) = \frac{1}{\bar{s} - \underline{s} + 1} \quad (\underline{s} \leq d \leq \bar{s}),$$

and if $\underline{r} < \bar{s}$, then we have $P_{\underline{r}}(q) = P_{\underline{r}+1}(q) = \dots = P_{\bar{s}}(q)$.

Here $P'_d(q^-)$ (resp. $P'_d(q^+)$) denotes the left (resp. right) derivative of P_d at q . The next result combine Theorem 4.2 and Corollary 4.7 of [46].

Théorème B.7 (Roy, 2014). *For each non-zero point $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$, there exists $q_0 \geq 0$ and a generalized $(n+1)$ -system \mathbf{P} on $[q_0, \infty)$ such that $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ is bounded on $[q_0, \infty)$. Conversely, for each generalized $(n+1)$ -system \mathbf{P} on an interval $[q_0, \infty)$ with $q_0 \geq 0$, there exists a non-zero point $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ such that $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ is bounded on $[q_0, \infty)$.*

In view of the remark following Proposition B.5, this result reduces the determination of the joint spectrum of Diophantine approximation exponents to a combinatorial study of generalized $(n+1)$ -systems.

Although the definition of a generalized $(n+1)$ -system $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_{n+1})$ may look complicated, it is easy to understand in terms of the *combined graph* of \mathbf{P} , that is the union of the graphs of P_1, \dots, P_{n+1} over the interval of definition I of \mathbf{P} . We explain this below.

A *division point* of \mathbf{P} is an endpoint of I contained in I or an interior point of I at which \mathbf{P} is not differentiable. Such points form a discrete subset of I . Between two consecutive division points $q^* < q$ of I , the graph of each component of \mathbf{P} is a line segment. All these line segments have slope 0 except for one line segment of positive slope $1/t$ where t is the number of components of \mathbf{P} whose graph over $[q^*, q]$ is that line segment. In view of the condition $P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_{n+1}$, there must be consecutive components $P_{\underline{r}}, \dots, P_{\bar{r}}$ of \mathbf{P} with $\bar{r} - \underline{r} + 1 = t$. If q is also an interior point of I and if $P_{\underline{s}}, \dots, P_{\bar{s}}$ are the components of \mathbf{P} whose graph has positive slope $\frac{1}{\bar{s} - \underline{s} + 1}$ to the right of q , then there are two cases.

- 1) If $\underline{r} < \bar{s}$, we say that q is an *ordinary division point*. In this case, we have $P_{\underline{r}}(q) = \dots = P_{\bar{s}}(q)$ according to (S3). This implies that $\underline{r} \leq \underline{s}$ and $\bar{r} \leq \bar{s}$.

Among $P_{\underline{r}}, \dots, P_{\bar{s}}$, the components P_j with $\underline{s} \leq j \leq \bar{r}$ (if any) change slope from $\frac{1}{\bar{r}-\underline{r}+1}$ to $\frac{1}{\bar{s}-\underline{s}+1}$. Those with $j \leq \min(\bar{r}, \underline{s} - 1)$ change slope from $\frac{1}{\bar{r}-\underline{r}+1}$ to 0. The remaining components P_j with $\bar{r} + 1 \leq j \leq \underline{s} - 1$ (if any) have constant slope 0 in a neighborhood of q . The reader is invited to draw a picture for himself or to look at those in [46, §4].

- 2) Otherwise, we have $\underline{r} > \bar{s}$ because it cannot happen that $\underline{r} = \bar{s}$ (or \mathbf{P} is differentiable at q). Then, we say that q is a *switch point*. In this case, we have $P_{\underline{r}}(q) = \dots = P_{\bar{r}}(q) > P_{\underline{s}}(q) = \dots = P_{\bar{s}}(q)$ which mean that the end point of the line segment of slope $\frac{1}{\bar{r}-\underline{r}+1}$ at the left of q lies above the initial point of the line segment of slope $\frac{1}{\bar{s}-\underline{s}+1}$ at the right of q .

It can be shown that the combined graph of a generalized $(n + 1)$ -system \mathbf{P} uniquely determines the map \mathbf{P} provided that we know the value of \mathbf{P} at one point of its interval of definition. An example of this is shown in [46, §4]. We will see two other examples in the sections B.2 and B.4.

In [50, 51] W. M. Schmidt and L. Summerer introduce the following exponents for an integer $1 \leq d \leq n$:

$$\underline{\varphi}_d = \liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{u,d}(q)}{q},$$

$$\bar{\varphi}_d = \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{u,d}(q)}{q}.$$

For these exponents, we have the following analogue of Theorem B.4 :

Théorème B.8. *For every integer $n \geq 3$, the spectrum of $\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n$ is a subset of \mathbb{R}^n with non empty interior.*

B.2 Proof of Theorem B.3

In this section, we construct a family of generalized $(n + 1)$ -systems. Then, via Theorem B.7, we get a family of n -tuples having the requested properties stated in Theorem B.3. We first treat the case where $\hat{\omega}_{n-1}$ is finite and $n \geq 3$. We will explain later how to adapt the construction if $n = 2$ or $\hat{\omega}_{n-1}$ is infinite.

Let q_0 be a positive real number, fix a real number $\hat{\omega} \geq n \geq 2$ and set a parameter a with $\frac{1}{n-1} \leq a \leq 1$. We define the sequence $(q_{6m})_{m \geq 0}$ by :

$$q_{6m} = (1 + a(\hat{\omega} - n))q_{6(m-1)}, \text{ for } m \geq 1.$$

We construct a generalized $(n + 1)$ -system \mathbf{P} whose graph is invariant under the dilation of factor $(1 + a(\hat{\omega} - n))$ on the interval $[q_0, +\infty)$. Thus, we only need to

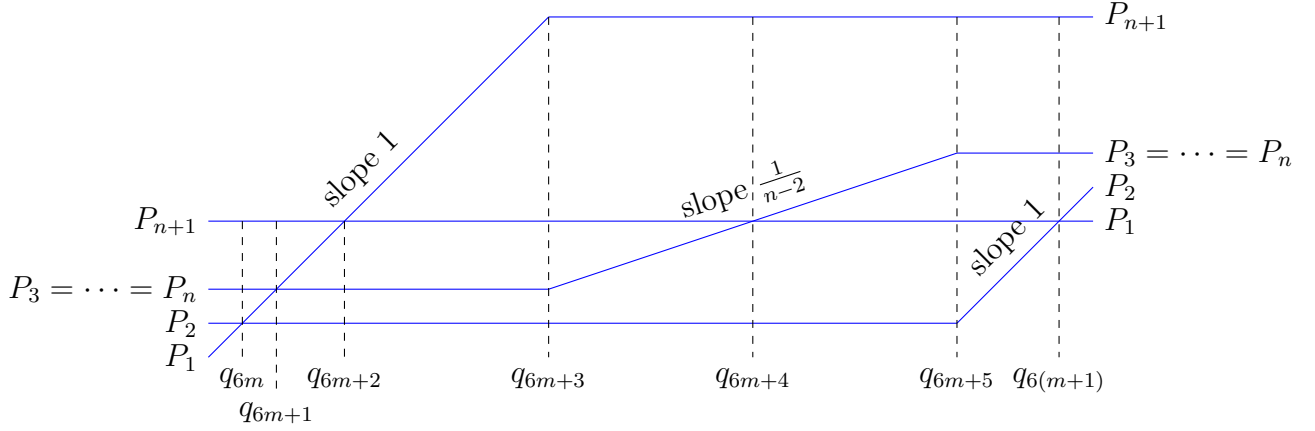


FIGURE B.1 – Combined graph of \mathbf{P} on a generic interval $[q_{6m}, q_{6(m+1)}]$

define \mathbf{P} on a generic interval $[q_{6m}, q_{6(m+1)}]$. Here is the pattern of the combined graph of \mathbf{P} :

For every integer $m \geq 0$, we define \mathbf{P} at q_{6m} as follows :

$$\begin{aligned} P_1(q_{6m}) &= P_2(q_{6m}) = \frac{q_{6m}}{\hat{\omega} + 1}, \\ P_3(q_{6m}) &= \dots = P_n(q_{6m}) = \frac{1 + \left(\frac{1-a}{n-2}\right)(\hat{\omega} - n)}{\hat{\omega} + 1} q_{6m}, \\ P_{n+1}(q_{6m}) &= \frac{1 + a(\hat{\omega} - n)}{\hat{\omega} + 1} q_{6m}. \end{aligned}$$

Here the parameter a says how large P_{n+1} is at each point q_{6m} . The condition $a \geq \frac{1}{n-1}$ imposes the condition $P_{n+1}(q_{6m}) \geq P_n(q_{6m})$, and the condition $a \leq 1$ imposes that $P_3(q_{6m}) \geq P_2(q_{6m})$. We have the dilation condition $\mathbf{P}(q_{6(m+1)}) = \mathbf{P}((1 + a(\hat{\omega} - n))q_{6m}) = (1 + a(\hat{\omega} - n))\mathbf{P}(q_{6m})$ by the definition of the sequence $(q_{6m})_{m \geq 0}$.

For $k = 0, \dots, 5$ the graph has only one line segment of positive slope on the interval $[q_{6m+k}, q_{6m+k+1}]$. The graph is clearly the combined graph of a generalized $(n+1)$ -system with seven division points q_{6m}, \dots, q_{6m+6} . The points q_{6m+3} and q_{6m+5} are switch points while the others are ordinary division points. Furthermore it is uniquely defined since we know the value of \mathbf{P} at the point q_{6m} , where as requested

$$P_1(q_{6m}) + \dots + P_{n+1}(q_{6m}) = q_{6m}.$$

Easy calculations give

$$\begin{aligned}
q_{6m} &= (1 + a(\hat{\omega} - n))q_{6(m-1)}, & q_{6m+1} &= \frac{(n-2)(\hat{\omega}+1)+(1-a)(\hat{\omega}-n)}{(n-2)(\hat{\omega}+1)}q_{6m}, \\
q_{6m+2} &= \frac{(n+1)+(1+a)(\hat{\omega}-n)}{\hat{\omega}+1}q_{6m}, & q_{6m+3} &= \frac{\hat{\omega}+(1+a(\hat{\omega}-n))^2}{\hat{\omega}+1}q_{6m}, \\
q_{6m+4} &= \frac{1+(1+a(\hat{\omega}-n))(n+a(\hat{\omega}-n))}{\hat{\omega}+1}q_{6m}, & q_{6m+5} &= \frac{1+2a(\hat{\omega}-n)+\hat{\omega}(1+a(\hat{\omega}-n))}{\hat{\omega}+1}q_{6m}.
\end{aligned}$$

We now compute its associated exponents with Proposition B.5. One can notice that the local minima and maxima of the functions $q \rightarrow \frac{P_j(q)}{q}$, $j = 1, \dots, n+1$ are located at division points where P_j changes slope from zero to non zero.

Since \mathbf{P} is invariant under dilation of factor $(1 + a(\hat{\omega} - n))$ we have for every $m \geq 0$, every $1 \leq d \leq n+1$, and every q in $[q_{6m}, q_{6m+6})$ the relation

$$\frac{P_d(q)}{q} = \frac{P_d\left(q \frac{q_0}{q_{6m}}\right)}{q \frac{q_0}{q_{6m}}}.$$

Thus,

$$\begin{aligned}
\limsup_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_1(q)}{q} &= \max_{q_0 \leq q \leq q_6} \frac{P_1(q)}{q} = \frac{P_1(q_0)}{q_0} = \frac{1}{\hat{\omega} + 1}, \\
\liminf_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_{n+1}(q)}{q} &= \min_{q_0 \leq q \leq q_6} \frac{P_{n+1}(q)}{q} = \frac{P_{n+1}(q_2)}{q_2} = \frac{1 + a(\hat{\omega} - n)}{n + 1 + (1 + a)(\hat{\omega} - n)},
\end{aligned}$$

because the component P_{n+1} changes slope from zero to some positive value only at q_{6m+2} .

Then, according to Proposition B.5, Theorem B.7 gives us the existence of an n -tuple $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ such that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) + 1} &= \limsup_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_1(q)}{q} = \frac{1}{\hat{\omega} + 1}, \\
\frac{\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta})}{\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) + 1} &= \liminf_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_{n+1}(q)}{q} = \frac{1 + a(\hat{\omega} - n)}{n + 1 + (1 + a)(\hat{\omega} - n)}.
\end{aligned}$$

Thus, this $\boldsymbol{\theta}$ satisfies

$$\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega} \quad \text{and} \quad \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1 + a(\hat{\omega} - n)}{\hat{\omega}}.$$

When a runs through the interval $[\frac{1}{n-1}, 1]$, then $\hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta})$ runs through the interval $\left[\frac{\hat{\omega}-1}{(n-1)\hat{\omega}}, \frac{\hat{\omega}-(n-1)}{\hat{\omega}}\right]$.

If $n = 2$, we remove the line $P_3 = \dots = P_n$ and the interval $[q_{6m+3}, q_{6m+5}]$ from the generic graph on the interval $[q_{6m}, q_{6(m+1)}]$, the parameter a is then forced to be equal to 1. Thus, we construct $\boldsymbol{\theta}$ with

$$\hat{\omega}_1(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega} \quad \text{and} \quad \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = 1 - \frac{1}{\hat{\omega}},$$

and recover Jarník's relation (*).

If $\hat{\omega}$ is infinite, we replace $\hat{\omega}$ by $m + n + 1$ in our construction. For a given real number q_0 we consider the sequence $(q_{6m})_{m \geq 0}$ defined by

$$q_{6m} = (m + 1)q_{6(m-1)}.$$

The figure 1 still represents the combined graph from \mathbf{P} on a generic interval $[q_{6m}, q_{6m+6}]$, with the following settings at q_{6m} :

$$\begin{aligned} P_1(q_{6m}) &= P_2(q_{6m}) = \frac{q_{6m}}{m + n + 2}, \\ P_3(q_{6m}) &= \dots = P_n(q_{6m}) = \frac{1 + (\frac{1-a}{n-2})(m+1)}{m + n + 2} q_{6m}, \\ P_{n+1}(q_{6m}) &= \frac{1 + a(m+1)}{m + n + 2} q_{6m}. \end{aligned}$$

Note that the combined graph is not invariant under dilation anymore. We have

$$\begin{aligned} \limsup_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_1(q)}{q} &= \limsup_{m \rightarrow +\infty} \max_{q_{6m} \leq q \leq q_{6(m+1)}} \frac{P_1(q)}{q} = \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{P_1(q_{6m})}{q_{6m}} = \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m + n + 2} = 0, \\ \liminf_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_{n+1}(q)}{q} &= \liminf_{m \rightarrow +\infty} \min_{q_{6m} \leq q \leq q_{6(m+1)}} \frac{P_{n+1}(q)}{q} = \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{P_{n+1}(q_{6m+2})}{q_{6m+2}} \\ &= \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{1 + a(m+1)}{n + 1 + (1+a)(m+1)} = \frac{a}{a+1}. \end{aligned}$$

Again, Theorem B.7 gives us the existence of an n -tuple $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ such that

$$\hat{\omega}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = +\infty \quad \text{and} \quad \hat{\omega}_0(\boldsymbol{\theta}) = a,$$

where a runs through the interval $[\frac{1}{n-1}, 1]$.

Note that if $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ are \mathbb{Q} -linearly dependent, then there exists an integer point $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ such that $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| = 0$. This implies that $L_{\mathbf{u},1}(q)$ is bounded above by $\log(\|\mathbf{x}\|_2)$. In our construction by dilatation P_1 is not bounded, hence the independence by contradiction.

To complete the proof of Theorem B.3, we have to check that we can construct uncountably many n -tuples with given exponents. Let $\hat{\omega}$ and $\hat{\lambda}$ as in Theorem B.3, and a the parameter such that Theorem B.7 provides an n -tuple θ whose exponents satisfy

$$\hat{\omega}_{n-1}(\theta) = \hat{\omega}, \text{ and } \hat{\omega}_0(\theta) = \hat{\lambda} = \frac{1 + a(\hat{\omega} - n)}{\hat{\omega}}.$$

Fix q_0 a real number to start the construction from \mathbf{P} as above with parameter a . For every ρ_1 and ρ_2 such that $q_0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq q_5$, we denote by \mathbf{P}_{ρ_1} and \mathbf{P}_{ρ_2} the $(n+1)$ -generalized system with parameter a starting in ρ_1 and ρ_2 . We have $\mathbf{P}_{\rho_1}(q_6) \neq \mathbf{P}_{\rho_2}(q_6)$ and

$$\|\mathbf{P}_{\rho_1}(q_{6m}) - \mathbf{P}_{\rho_2}(q_{6m})\|_{\infty} = \frac{q_{6m}}{q_6} \|\mathbf{P}_{\rho_1}(q_6) - \mathbf{P}_{\rho_2}(q_6)\|_{\infty} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty,$$

where $\|(x_1, \dots, x_n)\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

Thus, their difference is unbounded, and they cannot correspond to the same θ via Theorem B.7. This ends the proof of Theorem B.3.

□

B.3 An alternative proof of Theorem B.2

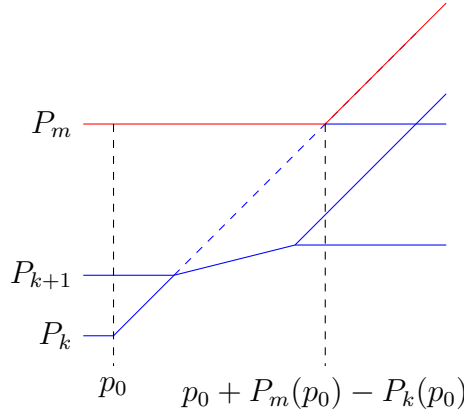
In this section, we give an alternative proof of Theorem B.2 using arguments from parametric geometry of numbers.

One can notice that the minimal or maximal values of the components of \mathbf{P} are reached at the division points. The condition **(S3)** translates into the fact that for every division point q , the right endpoint of the segment with non-zero slope ending at q lies above the left endpoint of the one starting at q . A first consequence is that when P_1 is non constant, it increases until reaching $P_2(q)$. A second consequence is the following proposition.

Proposition B.9. *For every $1 \leq k < m \leq n+1$, if p_0 is a division point such that P_k has slope changing from 0 to 1 at p_0 , then we have for every $p > p_0$*

$$P_m(p) \leq \max(P_m(p_0), P_k(p_0) + p - p_0).$$

In particular, P_m is constant on the interval $[p_0, p_0 + P_m(p_0) - P_k(p_0)]$.



We first show that the upper bound in Theorem B.2 is optimal.

Let \mathbf{P} be a generalized $(n + 1)$ -system, and $\hat{\omega}$ the real number such that

$$\limsup_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_1(q)}{q} = \frac{1}{\hat{\omega} + 1}.$$

If this limit is zero, we set $\hat{\omega} = +\infty$. We treat this case after.

Let $\varepsilon > 0$. There exist arbitrarily large division points p_0 where $\frac{P_1(q)}{q}$ has a local maximum and

$$\frac{1 - \varepsilon}{\hat{\omega} + 1} \leq \frac{P_1(p_0)}{p_0} \leq \frac{1 + \varepsilon}{\hat{\omega} + 1}.$$

Since q_0 is a local maximum, we have $P_1(q_0) = P_2(q_0)$. Furthermore, $P_1(q) \leq P_2(q) \leq \dots \leq P_{n+1}(q)$ and $P_1(q) + \dots + P_{n+1}(q) = q$ provide

$$P_{n+1}(p_0) \leq p_0 - nP_1(p_0) \leq \frac{\hat{\omega} + 1 - n - n\varepsilon}{\hat{\omega} + 1} p_0.$$

At the point $p = p_0 + \frac{\hat{\omega} - n - n\varepsilon}{\hat{\omega} + 1} p_0$, according to Proposition B.9, we have the upper bound

$$P_{n+1}(p) \leq \max(P_{n+1}(p_0), P_1(p_0) + p - p_0) \leq \frac{1 + \varepsilon + \hat{\omega} - n - n\varepsilon}{\hat{\omega} + 1} p_0.$$

Thus, for arbitrarily large real numbers p , we have

$$\frac{P_{n+1}(p)}{p} \leq \frac{\hat{\omega} + 1 - n - (n - 1)\varepsilon}{2\hat{\omega} - n + 1 - n\varepsilon},$$

thus

$$\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + 1} = \liminf_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_{n+1}(q)}{q} \leq \frac{\hat{\omega} + 1 - n}{2\hat{\omega} - n + 1},$$

giving that

$$\hat{\lambda} \leq \frac{\hat{\omega} - (n-1)}{\hat{\omega}}.$$

If $\hat{\omega}$ is infinite, then we have

$$-\varepsilon \leq \frac{P_1(p_0)}{p_0} \leq \varepsilon, \quad P_1(p_0) = P_2(p_0).$$

Using Proposition B.9 at the point $p = 2p_0 - n\varepsilon$ we get

$$P_{n+1}(p) \leq p_0 - (n+1)\varepsilon.$$

Thus, for arbitrarily large real numbers p , we have

$$\frac{P_{n+1}(p)}{p} \leq \frac{p_0 - (n+1)\varepsilon}{2p_0 - n\varepsilon}.$$

This implies that

$$\hat{\lambda} \leq 1.$$

Thus, we have proved that the upper bound in Theorem B.2 is optimal. We now consider the lower bound.

Let \mathbf{P} be a generalized $(n+1)$ -system, and $\hat{\omega}, \hat{\lambda}$ the real numbers such that

$$\limsup_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_1(q)}{q} = \frac{1}{\hat{\omega} + 1}, \quad \liminf_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_{n+1}(q)}{q} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + 1},$$

where we understand that $\hat{\omega} = +\infty$ if the corresponding lim sup is zero. Again, we treat this case after.

Let $\varepsilon_1 > 0$. There exists a real number q_0 such that $q \geq q_0$ implies

$$\frac{P_1(q)}{q} \leq \frac{1 + \varepsilon_1}{\hat{\omega} + 1}.$$

Let $\varepsilon_2 > 0$. There exist arbitrarily large division points $p \geq q_0$ where $\frac{P_1(q)}{q}$ has a local minimum and

$$\left| \frac{P_{n+1}(p)}{p} - \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + 1} \right| \leq \varepsilon_2.$$

Let $p_0 = \max \{q \leq p \mid P_1(q) = P_2(q)\}$. At the point p_0 we have

$$\begin{aligned} P_1(p_0) &= P_2(p_0) \leq \frac{1 + \varepsilon_1}{\hat{\omega} + 1} p_0 \quad \text{and} \\ P_{n+1}(p_0) &\geq \frac{p_0 - 2P_1(p_0)}{n-1} \end{aligned}$$

since $p_0 = P_1(p_0) + \cdots + P_{n+1}(p_0) \leq 2P_1(p_0) + (n-1)P_{n+1}(p_0)$.

We first show that $q \rightarrow P_1(q)$ is constant on the interval $[p_0, p]$. If not, there exists a real number $p_0 < p_1 < p$ where P_1 has slope 1. Since p is a local minimum from $\frac{P_1(q)}{q}$, we have $P_1'(p^-) = 0$. Thus, there exists a point in (p_1, p) where P_1 changes slope from 1 to 0. At this point $P_1 = P_2$, which contradicts the definition of p_0 . Thus,

$$P_1(p_0) = P_1(p).$$

We can write

$$\begin{aligned} p = p_0 + \sum_{k=1}^{n+1} (P_k(p) - P_k(p_0)) &\leq p_0 + \sum_{k=2}^{n+1} (P_{n+1}(p) - P_k(p_0)) \\ &\leq p_0 + nP_{n+1}(p) - \sum_{k=2}^{n+1} P_k(p_0) \\ &\leq nP_{n+1}(p) + P_1(p_0). \end{aligned}$$

Thus,

$$\frac{P_{n+1}(p)}{p} \geq \frac{P_{n+1}(p)}{nP_{n+1}(p) + P_1(p_0)},$$

which is an increasing function of $P_{n+1}(p)$. Since

$$P_{n+1}(p) \geq P_{n+1}(p_0) \geq \frac{p_0 - 2P_1(p_0)}{n-1},$$

we have

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}(p)}{p} &\geq \frac{\frac{p_0 - 2P_1(p_0)}{n-1}}{n \frac{p_0 - 2P_1(p_0)}{n-1} + P_1(p_0)}, \\ &\geq \frac{p_0 - 2P_1(p_0)}{np_0 - (n+1)P_1(p_0)}, \end{aligned}$$

which is a decreasing function of $P_1(p_0)$. Since

$$P_1(p_0) \leq \frac{1 + \varepsilon_1}{\hat{\omega} + 1} p_0,$$

we have

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}(p)}{p} &\geq \frac{p_0 - 2 \frac{1 + \varepsilon_1}{\hat{\omega} + 1} p_0}{np_0 - (n+1) \frac{1 + \varepsilon_1}{\hat{\omega} + 1} p_0}, \\ &\geq \frac{\hat{\omega} - 1 - 2\varepsilon_1}{n\hat{\omega} - 1 - (n+1)\varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Thus,

$$\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + 1} \geq \frac{\hat{\omega} - 1 - 2\varepsilon_1}{n\hat{\omega} - 1 - (n + 1)\varepsilon_1} - \varepsilon_2.$$

This gives the expected bound

$$\hat{\lambda} \geq \frac{\hat{\omega} - 1}{(n - 1)\hat{\omega}}.$$

If $\hat{\omega}$ is infinite, we consider a real number q_0 such that $q \geq q_0$ implies

$$\frac{P_1(q)}{q} \leq \varepsilon_1.$$

This provides the following estimates at p :

$$\frac{P_{n+1}(p)}{p} \geq \frac{1 - 2\varepsilon_1}{n - (n + 1)\varepsilon_1}.$$

Thus, we get

$$\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + 1} \geq \frac{1 - 2\varepsilon_1}{n - (n + 1)\varepsilon_1} - \varepsilon_2.$$

This gives the expected bound

$$\hat{\lambda} \geq \frac{1}{n - 1}.$$

Thus, we have proved that the lower bound is optimal. This ends the proof of Theorem B.2. □

B.4 Proof of Theorem B.4 and Theorem B.8

In this section, we construct a family of generalized $(n + 1)$ -systems with n parameters which via Theorem B.7 provides us with a family of n -tuples whose uniform exponents can be expressed as a function of the n parameters. Then, we show that the Jacobian of this function is non-zero.

We define the set of admissible values Δ_n to be the set of points $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ such that

$$\begin{aligned}
x_1 &> n \\
\frac{1}{x_1 + 1} &< x_3 \leq x_4 \leq \cdots \leq x_n, \\
1 - x_n &\geq \frac{2}{x_1 + 1} + x_3 + \cdots + x_n, \\
\frac{x_{k+1}}{x_k} &\leq x_2 \quad \text{for } 2 \leq k \leq n-1, \\
x_2 &\leq \frac{x_{k+2}}{x_k} \quad \text{for } 2 \leq k \leq n-2, \\
\frac{1 - \left(\frac{2}{x_1+1} + x_3 + \cdots + x_n\right)}{x_n} &\leq x_2 \leq \frac{1 - \left(\frac{2}{x_1+1} + x_3 + \cdots + x_n\right)}{x_{n-1}}.
\end{aligned}$$

This set is non empty, see Proposition B.11 below.

Let q_0 be a positive real number, fix the dimension $n \geq 3$. For every $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$, we set the $n+2$ parameters $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}, C$ and $\hat{\omega} > n$ such that

$$\begin{aligned}
\hat{\omega} = x_1, \quad C = x_2, \quad A_1 = A_2 = \frac{1}{x_1+1}, \\
A_k = x_k \text{ for } 3 \leq k \leq n, \quad A_{n+1} = 1 - \left(\frac{2}{x_1+1} + x_3 + \cdots + x_n\right).
\end{aligned}$$

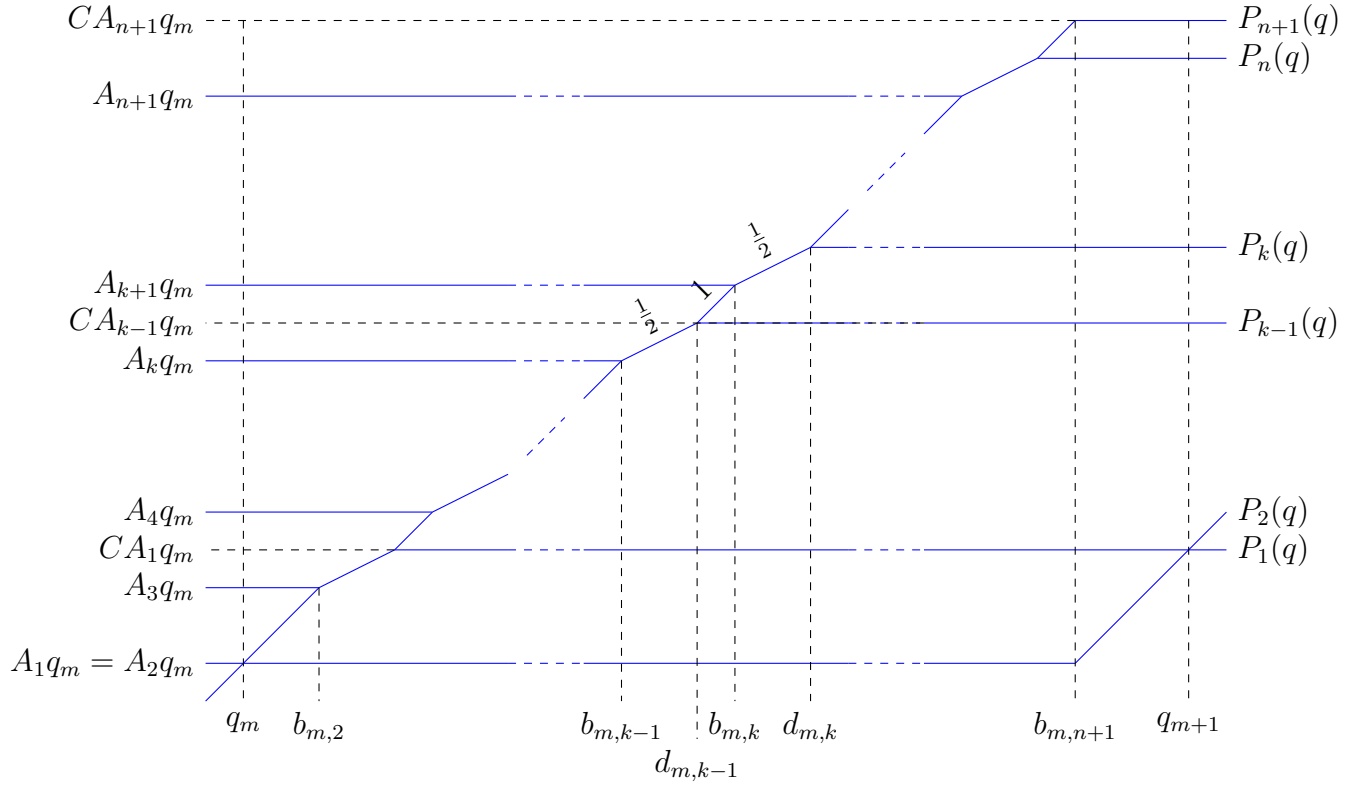
This implies that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hat{\omega} + 1} &= A_1 = A_2 < A_3 \leq A_4 \leq \cdots \leq A_{n+1}, \\
1 &= A_1 + A_2 + \cdots + A_{n+1}, \\
\frac{A_{k+1}}{A_k} &\leq C \leq \frac{A_{k+2}}{A_k} \text{ for } 2 \leq k \leq n-1, \\
\frac{A_{n+1}}{A_n} &\leq C.
\end{aligned}$$

We define the sequence $(q_m)_{m \geq 0}$ by :

$$q_m = Cq_{m-1} = C^m q_0.$$

Note that $C \geq \frac{A_3}{A_2} > 1$. We construct a generalized $(n+1)$ -system \mathbf{P} invariant under the dilation of factor C . Again, we only need to define the pattern of the combined graph of \mathbf{P} on the interval $[q_m, q_{m+1}]$. Here is its figure

FIGURE B.2 – Pattern of the combined graph of \mathbf{P} on the generic interval $[q_m, q_{m+1}]$

For every integer $m \geq 0$ we define \mathbf{P} at q_m as follows :

$$P_k(q_m) = A_k q_m \text{ for } 1 \leq k \leq n + 1.$$

The condition $A_{k+1} \geq A_k$ implies that $P_{k+1} \geq P_k$, and the condition $\frac{A_{k+1}}{A_k} \leq C \leq \frac{A_{k+2}}{A_k}$ implies that $P_k(q_m) \leq P_{k-1}(q_{m+1}) \leq P_{k+1}(q_m)$, for $k = 3, \dots, n$.

The graph has only one line segment of positive slope on the intervals $[q_m, b_{m,2}]$, $[b_{m,n+1}, q_{m+1}]$ and $[b_{m,k-1}, d_{m,k}]$, $[d_{m,n-1}, b_{m,k}]$ for $3 \leq k \leq n + 1$. It is clearly the combined graph of a generalized $(n + 1)$ -system with the $2n + 1$ division points q_m , q_{m+1} , $b_{m,k}$ and $d_{m,l}$ for $2 \leq k \leq n + 1$ and $2 \leq l \leq n$. They are all ordinary division points except $b_{m,n+1}$ which is a switch point.

For every $m \geq 1$, an easy calculation gives for $2 \leq k \leq n + 1$ the following values

at $b_{m,k}$:

$$\begin{aligned} P_1(b_{m,k}) &= A_1 q_m, \\ P_d(b_{m,k}) &= C A_d q_m \text{ for } 2 \leq d \leq k-1, \\ P_k(b_{m,k}) &= A_{k+1} q_m, \\ P_d(b_{m,k}) &= A_d q_m \text{ for } k+1 \leq d \leq n+1. \end{aligned}$$

For $2 \leq k \leq n$ we have the following values at $d_{m,k}$:

$$\begin{aligned} P_1(d_{m,k}) &= A_1 q_m, \\ P_d(d_{m,k}) &= C A_d q_m \text{ for } 2 \leq d \leq k, \\ P_{k+1}(d_{m,k}) &= C A_k q_m, \\ P_d(d_{m,k}) &= A_d q_m \text{ for } k+2 \leq d \leq n+1. \end{aligned}$$

We now compute the associated exponents of this graph with Proposition B.5. Recall that the local maxima and minima of the functions $q \rightarrow \frac{P_1(q) + \dots + P_k(q)}{q}$, with $1 \leq k \leq n$ are located at division points.

Since \mathbf{P} is invariant under dilation of factor C we have for every $m \geq 0$, for every $1 \leq k \leq n+1$, and every $q \in [q_m, q_{m+1})$

$$\frac{P_k(q)}{q} = \frac{P_k\left(q \frac{q_0}{q_m}\right)}{q \frac{q_0}{q_m}}.$$

We consider the n real numbers $\hat{\omega}_{n-1}, \dots, \hat{\omega}_0$ such that for $k = 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \limsup_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_1(q) + \dots + P_k(q)}{q} &= \max_{q \in [q_0, q_1]} \frac{P_1(q) + \dots + P_k(q)}{q} \\ &= \max \left(\frac{P_1(d_{0,k}) + \dots + P_k(d_{0,k})}{d_{0,k}}, \frac{P_1(b_{0,k}) + \dots + P_k(b_{0,k})}{b_{0,k}} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \hat{\omega}_{n-k}}, \\ \limsup_{q \rightarrow +\infty} \frac{P_1(q)}{q} &= \max_{q \in [q_0, q_1]} \frac{P_1(q)}{q} = A_1 = \frac{1}{1 + \hat{\omega}} = \frac{1}{1 + \hat{\omega}_{n-1}}. \end{aligned}$$

Via Theorem B.7, we get an n -tuple $\boldsymbol{\theta}$ such that $\hat{\omega}_{n-k}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{\omega}_{n-k}$ for $k = 1, \dots, n$.

For $k = 2, \dots, n$, we have

$$\hat{\omega}_{n-k} = \min_{q \in \{d_{0,k}, b_{0,k}\}} \left(\frac{P_1(q) + \dots + P_{n+1}(q)}{P_1(q) + \dots + P_k(q)} - 1 \right) = \min(y_k, z_k),$$

where

$$y_k = \frac{CA_k + 1 - (A_1 + \cdots + A_{k+1})}{A_1 + C(A_2 + \cdots + A_k)},$$

$$z_k = \frac{1 - (A_1 + \cdots + A_k)}{A_1 + C(A_2 + \cdots + A_{k-1}) + A_{k+1}}.$$

Since $P_1 + \cdots + P_k$ has slope $\frac{1}{2}$ between $b_{0,k}$ and $d_{0,k}$, we have either

$$1 \leq z_k = \hat{\omega}_{n-k} \leq y_k$$

or

$$y_k = \hat{\omega}_{n-k} \leq z_k \leq 1.$$

Since $\hat{\omega}_0 \leq \hat{\omega}_1 \leq \cdots \leq \hat{\omega}_{n-1}$, there exists an index k_0 such that

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{n-k} &= z_k > 1 & \text{if } k \leq k_0, \\ \hat{\omega}_{n-k} &= y_k \leq 1 & \text{if } k > k_0. \end{aligned}$$

The lower bound $\hat{\omega}_{n-1} \geq n$ imposes $k_0 \geq 1$ and the upper bound $\hat{\omega}_0 \leq 1$ imposes that $k_0 \leq n - 1$.

Note that if $n = 2$, then A_3 is forced to be equal to $1 - 2A_2$, this implies that

$$\hat{\omega}_0 = z_0 = \frac{A_3}{A_1 + A_3} = \frac{1 - 2A_1}{1 - A_1} = 1 - \frac{1}{\hat{\omega}_1}.$$

Thus we have Jarník's relation (*).

We consider the following map Φ :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\hat{\omega}, C, A_3, A_4, \dots, A_n) &\mapsto (\hat{\omega}_{n-1}, \dots, \hat{\omega}_0). \end{aligned}$$

Proposition B.10. *There exists a point $X = (\hat{\omega}, C, A_3, A_4, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^n$ in the interior of Δ_n such that the Jacobian of Φ at X is non-zero.*

Thus, Φ provides an open neighborhood from $\Phi(X)$ in \mathbb{R}^n included in the spectrum of $\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{n-1}$. This proves Theorem B.4.

□

Proof of Proposition B.10. Note that $\frac{\partial \hat{\omega}_{n-1}}{\partial C} = \frac{\partial \hat{\omega}_{n-1}}{\partial A_3} = \dots = \frac{\partial \hat{\omega}_{n-1}}{\partial A_n} = 0$. Thus, it is enough to prove that the following Jacobian is non-zero :

$$J_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{\omega}_{n-2}}{\partial C} & \frac{\partial \hat{\omega}_{n-2}}{\partial A_3} & \dots & \frac{\partial \hat{\omega}_{n-2}}{\partial A_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{\omega}_0}{\partial C} & \frac{\partial \hat{\omega}_0}{\partial A_3} & \dots & \frac{\partial \hat{\omega}_0}{\partial A_n} \end{vmatrix}$$

Suppose $k > k_0$. Then $\hat{\omega}_{n-k} = y_k$. We set the quantities δ_k, a_k, c_k, u_k and v_k such that

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\omega}_{n-k}}{\partial C} &= \frac{A_1 A_k + (A_2 + \dots + A_k)(1 - (A_1 + \dots + A_{k+1}))}{(A_1 + C(A_2 + \dots + A_k))^2} = \frac{c_k}{\delta_k^2}, \\ \frac{\partial \hat{\omega}_{n-k}}{\partial A_l} &= 0 \text{ if } l > k + 1, \\ \frac{\partial \hat{\omega}_{n-k}}{\partial A_l} &= \frac{-1}{A_1 + C(A_2 + \dots + A_k)} = \frac{a_k}{\delta_k^2} \text{ if } l = k + 1, \\ \frac{\partial \hat{\omega}_{n-k}}{\partial A_l} &= \frac{(C - 1)\delta_k - C(CA_k + 1 - (A_1 + \dots + A_{k+1}))}{(A_1 + C(A_2 + \dots + A_{k-1}) + A_{k+1})^2} = \frac{u_k}{\delta_k^2} \text{ if } l = k, \\ \frac{\partial \hat{\omega}_{n-k}}{\partial A_l} &= \frac{-\delta_k - C(CA_k + 1 - (A_1 + \dots + A_{k+1}))}{(A_1 + C(A_2 + \dots + A_{k-1}) + A_{k+1})^2} = \frac{v_k}{\delta_k^2} \text{ if } 3 \leq l < k. \end{aligned}$$

More precisely,

$$\begin{aligned} \delta_k &= A_1 + C(A_2 + \dots + A_k), \\ a_k &= -\delta_k, \\ c_k &= A_1 A_k + (A_2 + \dots + A_k)(1 - (A_1 + \dots + A_{k+1})), \\ u_k &= (C - 1)\delta_k - C(CA_k + 1 - (A_1 + \dots + A_{k+1})), \\ v_k &= u_k - C a_k. \end{aligned}$$

Notice that c_k is independent from C , a_k is a polynomial in C of degree 1 with leading coefficient $A_2 + \dots + A_k$, and u_k is a polynomial in C of degree 2 with leading coefficient $A_2 + \dots + A_{k-1}$.

Suppose that $k \leq k_0$. Then $\hat{\omega}_{n-k} = z_k$. Again, we set the quantities δ_k, a_k, c_k, u_k

and v_k such that

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\omega}_{n-k}}{\partial C} &= -\frac{(1 - (A_1 + \cdots + A_k))(A_2 + \cdots + A_{k-1})}{(A_1 + C(A_2 + \cdots + A_{k-1}) + A_{k+1})^2} = \frac{c_k}{\delta_k^2}, \\ \frac{\partial \hat{\omega}_{n-k}}{\partial A_l} &= 0 \text{ if } l > k + 1, \\ \frac{\partial \hat{\omega}_{n-k}}{\partial A_l} &= -\frac{1 - (A_1 + \cdots + A_k)}{(A_1 + C(A_2 + \cdots + A_{k-1}) + A_{k+1})^2} = \frac{a_k}{\delta_k^2} \text{ if } l = k + 1, \\ \frac{\partial \hat{\omega}_{n-k}}{\partial A_l} &= \frac{-1}{A_1 + C(A_2 + \cdots + A_{k-1}) + A_{k+1}} = \frac{u_k}{\delta_k^2} \text{ if } l = k, \\ \frac{\partial \hat{\omega}_{n-k}}{\partial A_l} &= \frac{-(A_1 + C(A_2 + \cdots + A_{k-1}) + A_{k+1}) - C(1 - (A_1 + \cdots + A_k))}{(A_1 + C(A_2 + \cdots + A_{k-1}) + A_{k+1})^2} = \frac{v_k}{\delta_k^2} \text{ if } 3 \leq l < k.\end{aligned}$$

More precisely,

$$\begin{aligned}\delta_k &= A_1 + C(A_2 + \cdots + A_{k-1}) + A_{k+1}, \\ a_k &= -(1 - (A_1 + \cdots + A_k)), \\ c_k &= a_k(A_2 + \cdots + A_{k-1}), \\ u_k &= -\delta_k, \\ v_k &= u_k + Ca_k.\end{aligned}$$

Notice that a_k and c_k are independent from C , and u_k is a polynomial in C of degree 1 with leading coefficient $-(A_2 + \cdots + A_{k-1})$.

With this notation, if we factor the $(k-1)^{\text{th}}$ row by $\frac{1}{\delta_k^2}$ for every $2 \leq k \leq n$ the Jacobian J_n can be written as

$$J_n = \prod_{k=2}^n \frac{1}{\delta_k^2} \begin{vmatrix} c_2 & a_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ c_3 & u_3 & a_3 & \ddots & & & \vdots \\ c_4 & v_4 & u_4 & a_4 & \ddots & & \vdots \\ c_5 & v_5 & v_5 & u_5 & a_5 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & v_{n-1} & \cdots & \cdots & v_{n-1} & u_{n-1} & a_{n-1} \\ c_n & v_n & \cdots & \cdots & \cdots & v_n & u_n \end{vmatrix}.$$

Using the relation $v_k = u_k \pm Ca_k$, we successively subtract the k th column from the columns 2 to $k-1$, with k taking the values from $n-1$ down to 2. We then

have

$$J_n = \prod_{k=2}^n \frac{1}{\delta_k^2} \begin{vmatrix} c_2 & a_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ c_3 & u_3 - a_3 & a_3 & \ddots & & & & & & \vdots \\ c_4 & Ca_4 & u_4 - a_4 & a_4 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & Ca_{k_0} & u_{k_0} - a_{k_0} & a_{k_0} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -Ca_{k_0+1} & u_{k_0+1} - a_{k_0+1} & a_{k_0+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & u_{n-1} - a_{n-1} & a_{n-1} & \vdots \\ c_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -Ca_n & u_n & \vdots \end{vmatrix}.$$

If we write the corresponding matrix with the degrees of the coefficients from J_n viewed as a polynomial in C we get :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Thus, J_n is a polynomial in C of degree

$$\deg_C(J_n) \leq (k_0 - 2) + 2(n - k_0) = 2n - k_0 + 2 \geq n - 1$$

with leading coefficient

$$L = (-1)^{n-k_0} \prod_{k=3}^n (A_2 + \cdots + A_{k-1}).$$

It is non-zero since every terms in the product is non-zero. Thus, for a given choice of parameters A_1, \dots, A_n and $\hat{\omega}$, the Jacobian J_n is zero at at most $2n$ values of C .

Proposition B.11. *The subset $E_n \subset \mathbb{R}^n$ of points $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ such that*

$$\begin{aligned} x_1 &= n + \frac{n(n-1)}{4(n-3)} \quad \text{if } n \neq 3, \\ x_1 &> n \quad \quad \quad \text{if } n = 3, \\ x_k &= \frac{1 + \frac{2(k-2)}{n(n-1)}(x_1 - n)}{x_1 + 1} \quad \text{for } 3 \leq k \leq n+1, \\ x_2 &\in \left(1 + \frac{2}{n(n-1)}(x_1 - n), 1 + \frac{8}{3n(n-1)}(x_1 - n) \right) \end{aligned}$$

is included in the interior of Δ_n .

Thus, with the induced choice of parameters, J_n is zero at at most $2n$ points on E_n , but we have uncountably many points in E_n . Thus there exists a point X in $E_n \subset \overset{\circ}{\Delta}_n$ at which J_n is non-zero. This proves Proposition B.10 and thus Theorem B.4. □

Proof of Proposition B.11. For $X \in E_n$ we consider the corresponding choice of parameters

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= x_1, \quad C = x_2, \quad A_1 = A_2 = \frac{1}{x_1 + 1}, \\ A_k &= x_k \text{ for } 3 \leq k \leq n, \quad A_{n+1} = 1 - \left(\frac{2}{x_1 + 1} + x_3 + \dots + x_n \right). \end{aligned}$$

We have as requested

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{\omega} + 1} &= A_1 = A_2 < A_3 < A_4 < \dots < A_{n+1}, \\ 1 &= A_1 + A_2 + \dots + A_{n+1}. \end{aligned}$$

If we write $C = 1 + c(\hat{\omega} - n)$ and $A_k = \frac{1 + a_k(\hat{\omega} - n)}{\hat{\omega} + 1}$, for $2 \leq k \leq n+1$, where $a_k = \frac{2(k-2)}{n(n-1)}$ the conditions

$$\begin{aligned} \frac{A_{k+1}}{A_k} &< C < \frac{A_{k+2}}{A_k} \quad \text{for } 2 \leq k \leq n-1, \\ \frac{A_{n+1}}{A_n} &< C, \end{aligned}$$

can be rewritten as

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{1 + a_k(\hat{\omega} - n)} < c < \frac{a_{k+2} - a_k}{1 + a_k(\hat{\omega} - n)} \text{ for } 2 \leq k \leq n-1,$$

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{1 + a_n(\hat{\omega} - n)} < c.$$

Since $a_{k+1} - a_k = \frac{2}{n(n-1)}$ and $a_{k+2} - a_k = \frac{4}{n(n-1)}$, we have

$$c > \max_{2 \leq k \leq n} \frac{2}{n(n-1) + 2(k-2)(\hat{\omega} - n)} = \frac{2}{n(n-1)},$$

$$c < \min_{2 \leq k \leq n-1} \frac{4}{n(n-1) + 2(k-2)(\hat{\omega} - n)} = \frac{4}{n(n-1) + 2(n-3)(\hat{\omega} - n)},$$

$$< \frac{8}{3n(n-1)},$$

using the relation $\hat{\omega} = n + \frac{n(n-1)}{4(n-3)}$. If $n = 3$, we get the upper bound $\frac{4}{n(n-1)} > \frac{8}{3n(n-1)}$.

This completes the proof of Proposition B.11. □

Proof of Theorem B.8

We consider the same generalized $(n+1)$ -system as above. Notice that for $1 \leq k \leq n$ we have $P_k \leq P_{n+1}$ and thus

$$\bar{\varphi}_k = \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_k(q)}{q} \in [0, \frac{1}{2}].$$

Hence, we have

$$\bar{\varphi}_k = \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{P_k(q)}{q} = \max_{q \in [q_0, q_1]} \frac{P_k(q)}{q} = \frac{P_k(d_{m,k})}{d_{m,k}} = \frac{CA_k}{A_1 + C(A_2 + \cdots + A_k) + CA_k + (A_{k+2} + \cdots + A_{n+1})}$$

Again, we consider the map Φ' :

$$\Phi' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\hat{\omega}, C, A_3, A_4, \dots, A_n) & \mapsto & (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n). \end{array}$$

We prove Theorem B.8 if we show that its jacobian is a non zero polynomial in C .

We set $\delta_k = A_1 + C(A_2 + \cdots + A_k) + CA_k + (A_{k+2} + \cdots + A_{n+1})$ and write

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial C} &= \frac{A_k(A_1 + A_{k+2} + \cdots + A_{n+1})}{(A_1 + C(A_2 + \cdots + A_k) + CA_k + (A_{k+2} + \cdots + A_{n+1}))^2} = \frac{c_k}{\delta_k^2}, \\ \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial A_l} &= \frac{C^2 A_k}{\delta_k^2} \text{ if } 3 \leq l < k, \\ \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial A_k} &= \frac{C\delta_k - 2C^2 A_k}{\delta_k^2} = \frac{a_k}{\delta_k^2}, \\ \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial A_{k+1}} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial A_l} &= \frac{CA_k}{\delta_k^2} \text{ if } l > k + 1. \end{aligned}$$

Notice that u_k is independent from C , and a_k is a polynomial in C of degree 2 with leading coefficient $A_2 + \cdots + A_{k-1}$. We then consider the Jacobian from Φ' :

$$J'_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial C} & \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial A_3} & \cdots & \frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial A_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial C} & \frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial A_3} & \cdots & \frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial A_n} \end{vmatrix}.$$

We factor the $(k-1)^{\text{th}}$ row by $\frac{1}{\delta_k^2}$ for every $2 \leq k \leq n$ and subtract the last column to the column 3 to $n-1$. Then, we get the following matrix with the degrees of the coefficients from J'_n viewed as a polynomial in C :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 2 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Hence, J'_n is a polynomial in C of degree

$$\deg_C(J'_n) \leq 2n - 3$$

with leading coefficient

$$L = A_1 \prod_{k=3}^n (A_2 + \cdots + A_{k-1}) \neq 0.$$

This establishes Theorem B.8. □

Acknowledgements

The author thanks Damien Roy for careful reading and useful remarks.

Bibliographie

- [1] Dzmitry Badziahin, Andrew Pollington, and Sanju Velani. On a problem in simultaneous diophantine approximation : Schmidt's conjecture. *Annals of Mathematics*, 174 :1837–1883, 2011.
- [2] Abram Besicovitch. Sets of fractionnal dimension (iv) : on rationnal approximation to real numbers. *J. Lond. Math. Soc.*, 9 :126–131, 1934.
- [3] Émile Borel. Les probabilités denombrables et leurs applications arithmétiques. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 27 :247–271, 1909.
- [4] John D. Bovey and Michael M. Dodson. The fractional dimension of sets whose simultaneous rational approximations have errors with a small product. *Bull. London Math. Soc.*, 10(2) :213–218, 1978.
- [5] Yann Bugeaud. Multiplicative Diophantine approximation. In *Dynamical systems and Diophantine approximation*, volume 19 of *Sémin. Congr.*, pages 105–125. Soc. Math. France, Paris, 2009.
- [6] Yann Bugeaud. Exponents of Diophantine approximation. *ArXiv e-prints*, February 2015.
- [7] Yann Bugeaud and Michel Laurent. On exponents of homogeneous and inhomogeneous diophantine approximation. *Moscow Math. J.*, 5 :747–766, 2005.
- [8] Yann Bugeaud and Michel Laurent. Exponents of diophantine approximation. *Diophantine Geometry Proceedings*, 4 :101–121, 2007.
- [9] Francesco P. Cantelli. Sulla probabilità come limite della frequenza. *Rom. Acc. L. Rend. (5)*, 26(1) :39–45, 1917.
- [10] Nicolas Chevallier. A survey of best simultaneous diophantine approximations, 2011.
- [11] Shrikrishna G. Dani. Divergent trajectories of flows on homogeneous spaces and diophantine approximation. *J. Reine Angew. Math.*, 359 :55–89, 1985.
- [12] Harold Davenport and Wolfgang M. Schmidt. Approximation to real numbers by algebraic integers. *Acta Arithmetica*, 15 :393–416, 1969.
- [13] Johann P. G. Lejeune Dirichlet. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie die Zahlen. *S.-B. Preuss. Akad. Wiss.*, pages 93–95, 1842.
- [14] Johann P. G. Lejeune Dirichlet. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Vierte, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Chelsea Publishing Co., New York, 1968.

- [15] Oleg N. German. Transference inequalities for multiplicative Diophantine exponents. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 275(Klassicheskaya i Sovremennaya Matematika v Pole Deyatelnosti Borisa Nikolaevicha Delone) :227–239, 2011.
- [16] Oleg N. German. On Diophantine exponents and Khintchine's transference principle. *Mosc. J. Comb. Number Theory*, 2(2) :22–51, 2012.
- [17] Stephen Harrap. Twisted inhomogeneous Diophantine approximation and badly approximable sets. *Acta Arith.*, 151(1) :55–82, 2012.
- [18] Stephen Harrap and Nikolay Moshchevitin. A note on weighted badly approximable linear forms. *ArXiv e-prints*, January 2015.
- [19] Felix Hausdorff. Dimension und äußeres Maß. *Math. Ann.*, 79(1-2) :157–179, 1918.
- [20] Vojtěch Jarník. Diophantischen Approximationen und Hausdorffsches Mass. *Mat. Sbornik*, 36 :371–382, 1929.
- [21] Vojtěch Jarník. Zur theorie der diophantischen approximationen. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 39(1) :403–438, 1932.
- [22] Vojtěch Jarník. Zum khintchineschen "Übertragungssatz". *Trav. Inst. Math. Tbilissi*, 3 :193–212, 1938.
- [23] Vojtěch Jarník. Über einen satz von a. kintchine. ii. *Acta arith.*, Warszawa, 2, *Prace mat.-fiz.* 45, pages 1–22, 1937.
- [24] Aminata D. T. Keita. Continued fractions and parametric geometry of numbers. *ArXiv e-prints*, January 2015.
- [25] Alexandre Ya. Khintchine. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximationen. *Math. Ann.*, 92 :115–125, 1924.
- [26] Alexandre Ya. Khintchine. Über eine klasse linearer diophantischer approximationen. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 50, pages 170–195, 1926.
- [27] Alexandre Ya. Khintchine. Zur metrischen theorie der diophantischen approximationen. *Math.Z.*, 24 :706–714, 1926.
- [28] Alexandre Ya. Khintchine. On some applications of the method of the additional variable. *Amer. Math. Soc. Translation*, 1950(18) :14, 1950.
- [29] Dmitry Ya. Kleinbock. *Nondense orbits of nonquasiunipotent flows and applications to Diophantine approximation*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1996. Thesis (Ph.D.)–Yale University.
- [30] Dmitry Ya. Kleinbock. Flows on homogeneous spaces and Diophantine properties of matrices. *Duke Math. J.*, 95(1) :107–124, 1998.
- [31] Jeffrey C. Lagarias. Best Diophantine approximations to a set of linear forms. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 34(1) :114–122, 1983.
- [32] Michel Laurent. Exponents of diophantine approximation in dimension two. *Canad. J. Math.*, 61 :165–189, 2009.

-
- [33] Michel Laurent. On transfer inequalities in Diophantine approximation. In *Analytic number theory*, pages 306–314. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
- [34] Adrien-Marie Legendre. *Essai sur la théorie des nombres*. Cambridge Library Collection. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. Reprint of the second (1808) edition.
- [35] Joseph Liouville. Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationnelles algébriques. *J. Math. Pures et Appl*, 1(16) :133–142, 1851.
- [36] Kurt Mahler. Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper. *Časopis Pěst. Mat. Fys.*, 68 :93–102, 1939.
- [37] Kurt Mahler. On compound convex bodies. I. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 5 :358–379, 1955.
- [38] Kurt Mahler. On compound convex bodies. II. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 5 :380–384, 1955.
- [39] Antoine Marnat. There is no analogue to Jarník's relation for twisted Diophantine approximation. *ArXiv e-prints*, September 2014.
- [40] Antoine Marnat. About Jarník's type relation in higher dimension. *in preparation*, 2015.
- [41] Hermann Minkowski. *Geometrie der Zahlen*. Bibliotheca Mathematica Teubneriana, Band 40. Johnson Reprint Corp., New York-London, 1968.
- [42] Calvin C. Moore. Ergodicity of flows on homogeneous spaces. *Amer. J. Math*, 88 :154–178, 1966.
- [43] Nikolay Moshchevitin. Exponents for three-dimensional simultaneous Diophantine approximations. *Czechoslovak Math. J.*, 62(137)(1) :127–137, 2012.
- [44] Madabusi S. Raghunathan. *Discrete subgroups of Lie groups*. Springer-Verlag, Berlin and New-York, 1972.
- [45] Klaus F. Roth. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 2 :1–20; corrigendum, 168, 1955.
- [46] Damien Roy. Spectrum of the exponents of best rational approximation. *Math. Z.*, 13 pages, à paraître.
- [47] Damien Roy. On Schmidt and Summerer parametric geometry of numbers. *Ann. of Math.*, 182 :739–786, 2015.
- [48] Wolfgang M. Schmidt. On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations. *Ann. of Math. (2)*, 85 :430–472, 1967.
- [49] Wolfgang M. Schmidt. *Diophantine approximation*, volume 785. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [50] Wolfgang M. Schmidt and Leonhard Summerer. Parametric geometry of numbers and applications. *Acta Arithmetica*, 140(1) :67–91, 2009.

-
- [51] Wolfgang M. Schmidt and Leonhard Summerer. Diophantine approximation and parametric geometry of numbers. *Monatsch. Math.*, 169(1) :51–104, 2013.
- [52] Wolfgang M. Schmidt and Yuan Wang. A note on a transference theorem of linear forms. *Sci. Sinica*, 22(3) :276–280, 1979.
- [53] Yuan Wang and Kun Rui Yu. A note on some metrical theorems in Diophantine approximation. *Chinese Ann. Math.*, 2(1) :1–12, 1981.
- [54] Kun Rui Yu. Hausdorff dimension and simultaneous rational approximation. *J. London Math. Soc. (2)*, 24(1) :79–84, 1981.

Sur le spectre des exposants d'approximation diophantienne classiques et pondérés

Résumé

Pour un n -uplet de nombres réels, vu comme un point de l'espace projectif, on définit pour chaque indice d entre 0 et $n-1$ deux exposants d'approximation diophantienne (un ordinaire et un uniforme) qui mesurent l'approximabilité de celui-ci par des sous-espaces rationnels de dimension d dans l'espace projectif. Il se trouve que ces $2n$ exposants ne sont pas indépendants les uns des autres. Cette thèse s'inscrit dans l'étude du spectre de tout ou partie de ces exposants, qui a fait l'objet de nombreux travaux récents. On utilise notamment les outils récents de la géométrie paramétrique des nombres pour étudier le spectre des exposants uniforme, et on traite un cas pondéré en dimension deux.

Mots-clefs : Spectre des exposants d'approximation diophantienne, Géométrie paramétrique des nombres, Approximations diophantiennes.

Résumé en anglais

Given a n -tuple of real numbers, seen as a point in the projective space, one can define for each index d between 0 and $n-1$ two exponents of diophantine approximation (an ordinary and a uniform) which measure the approximability of this n -tuple by rational subspaces of dimension d in the projective space. These $2n$ exponents are not independent. This thesis is part of the study from the spectrum of all or part of these exponents, which have been much studied recently. We use recent tools coming from the parametric geometry of numbers to study the spectrum of the uniform exponents, and deal with a twisted case in dimension two.

Keywords : Diophantine approximations, Parametric geometry of numbers, spectrum of Diophantine exponents.