



Comprendre le monde,  
construire l'avenir®



N° d'ordre :

Université Paris-Sud  
Faculté des Sciences d'Orsay

## SYNTHÈSE EN FRANÇAIS DE LA THÈSE

*présentée pour obtenir*

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

*par*

Yangqin FANG

## Ensembles minimaux, existence et régularité

Directeur de thèse : M. Guy DAVID

Rapporteurs : M. Francesco MAGGI  
Mme. Severine RIGOT

Soutenue le 21 Septembre 2015 devant le jury composé de :

M. Guy DAVID	: Directeur de thèse
M. Antoine LEMENANT	: Examineur
M. Simon MASNOU	: Examineur
M. Pierre PANSU	: Examineur
Mme. Severine RIGOT	: Rapporteur
M. Fillippo SANTAMBROGIO	: Examineur

## Résumé

Cette thèse s'intéresse principalement à l'existence et à la régularité des ensembles minimaux.

On commence par montrer que le problème de Plateau étudié par Reifenberg admet au moins une solution. C'est-à-dire que, si l'on se donne un ensemble compact  $B \subset \mathbb{R}^n$  et un sous-groupe  $L$  du groupe d'homologie de Čech  $\check{H}_{d-1}(B; G)$  de dimension  $(d - 1)$  sur un groupe abélien  $G$ , on montre qu'il existe un ensemble compact  $E \supset B$  tel que  $L$  est contenu dans le noyau de l'homomorphisme  $\check{H}_{d-1}(B; G) \rightarrow \check{H}_{d-1}(E; G)$  induit par l'application d'inclusion  $B \rightarrow E$ , et pour lequel la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^d(E \setminus B)$  est minimale (sous ces contraintes).

Ensuite, on montre que pour tout ensemble presque minimal glissant  $E$  de dimension 2, dans un domaine régulier  $\Sigma$  ressemblant localement à un demi-espace, associé à la frontière glissante  $\partial\Sigma$ , et tel que  $E \supset \partial\Sigma$ , il se trouve qu'à la frontière  $E$  est localement équivalent, par un homéomorphisme biHölderien qui préserve la frontière, à un cône minimal glissant contenu dans un demi-plan  $\Omega$ , avec frontière glissante  $\partial\Omega$ . De plus les seuls cônes minimaux possibles dans ce cas sont  $\partial\Omega$  seul, ou son union avec un cône de type  $\mathbb{P}_+$  ou  $\mathbb{Y}_+$ .

# Chapitre 1

## Introduction

L'étude des propriétés géométriques des ensembles est centrale dans la théorie géométrique de la mesure. En particulier, l'existence et la régularité d'ensembles ayant des propriétés de minimalité sont des sujets très populaires. Souvent ces ensembles sont associés à des notions physiques fortes. Par exemple, les films de savon sont bien modélisés par les ensembles minimaux au sens d'Almgren (définis ci-dessous). La théorie géométrique de la mesure est née de l'étude du problème de Plateau, qui vient cependant de l'observation expérimentale par un physicien, Joseph Plateau, qui observa que lorsque l'on plonge un fil de fer dans de l'eau savonneuse, puis qu'on le retire, la forme qu'on obtient est un ensemble minimal porté par le fil. En gros le problème de Plateau est celui de l'existence, puis de la régularité, d'ensemble minimaux avec une contrainte de frontière.

### 1.1 Existence

Au cours du 20<sup>ème</sup> siècle, le problème de Plateau a été résolu avec de nombreuses modélisations différentes. La première solution a été donnée par Jesse Douglas [10] and Tibor Radó [25], en décrivant les films comme des images paramétrées d'un disque. Leur manière d'énoncer le problème est célèbre ; cependant les solutions ne tiennent pas compte de ce qui se produit lorsque deux surfaces se croisent, et oublient les surfaces non orientables, de sorte que certains types de films de savon ne sont pas représentés.

La manière la plus populaire d'énoncer et de résoudre le problème de Plateau est d'utiliser les ensembles de périmètre fini (De Giorgi) et les courants (Federer and Fleming). En particulier, Federer and Fleming [13] ont introduit les courants dans le sujet. Ils ont démontré un théorème d'existence très général, pour un courant intégral  $S$  dont la masse est minimale sous la contrainte de bord  $\partial S = T$  (où  $T$  est un courant intégral donné de bord nul), comme conséquence d'un résultat de compacité. Les courants minimaux (pour la masse) ont une théorie de régularité très riche ; voir [20] pour une bonne description du sujet.

Reifenberg [26] a utilisé l'homologie de Čech pour décrire le problème de

Plateau comme suit. Soient  $B \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble compact (qu'on voit comme un bord)  $d \in (0, n)$  un entier, et  $G$  un groupe abélien. On se donne aussi un sous-groupe  $L$  du groupe d'homologie de Čech  $\check{H}_{d-1}(B; G)$  de dimension  $d-1$  sur  $B$ . On dit que l'ensemble compact  $S \subset \mathbb{R}^n$  a un bord algébrique qui contient  $L$  quand  $B \subset S$  et  $L$  est contenu dans le noyau de l'homomorphisme  $\check{H}_{d-1}(B; G) \rightarrow \check{H}_{d-1}(S; G)$  induit par l'inclusion  $i_{B,S} : B \rightarrow S$ . Reifenberg [26] a démontré que quand  $B$  est un ensemble compact de dimension  $(d-1)$  et  $G$  est un groupe abélien compact, alors il existe toujours au moins un ensemble compact  $S \supset B$ , qui a un bord algébrique contenant  $L$ , et dont la mesure de Hausdorff  $d$ -dimensionnelle est minimale (sous cette contrainte). On appelle  $S$  un minimiseur de Reifenberg homologique.

Plus récemment Thierry De Pauw [22] a démontré l'existence de minimiseurs aussi quand  $G = \mathbb{Z}$  est le groupe des entiers relatifs,  $n = 3$ ,  $d = 2$ , et  $B$  est formé de courbes lisses.

Nous allons généraliser les résultats de Reifenberg à tout groupe abélien  $G$  et tout ensemble compact  $B$  : nous montrerons que pour tout choix de groupe abélien  $G$  et d'ensemble compact  $B \subset \mathbb{R}^n$ , et pour tout sous-groupe  $L \subset \check{H}_{d-1}(B; G)$ , il existe un compact  $S$ , qui a un bord algébrique contenant  $L$ , et qui minimise  $\mathcal{H}^d(S \setminus B)$  parmi les ensembles compacts qui ont un bord algébrique contenant  $L$ . De plus nous pourrions remplacer la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^d(S \setminus B)$  par  $J_F(S \setminus B)$ , l'intégrale sur  $S \setminus B$  d'un "intégrant elliptique généralisé"  $F$ . Disons quelques mots de la notation  $J_F$  et des intégrants elliptiques ; les définitions précises se trouvent au paragraphe 3.1, et l'énoncé correspondant est le théorème 1.2. On note  $G(n, d)$  la Grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension  $d$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . On pose, lorsque  $E$  est de mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^d(E)$  finie et  $F : \mathbb{R}^n \times G(n, d) \rightarrow \mathbb{R}^+$  est positive,

$$J_F(E) = \int_{x \in E_{rec}} F(x, T_x E) d\mathcal{H}^d(x) + \int_{x \in E_{irr}} \left\{ \sup_{\pi \in G(n, d)} F(x, \pi) \right\} d\mathcal{H}^d(x),$$

où  $E_{rec}$  et  $E_{irr}$  sont les parties rectifiable et purement non rectifiable de  $E$ . Un intégrant elliptique généralisé est une fonction positive  $F : \mathbb{R}^n \times G(n, d) \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

$$0 < c_1 \leq F \leq c_2 < +\infty, \text{ pour certaines constantes } c_1, c_2 > 0,$$

et

$$J_F(\pi \cap B(x, r)) \leq J_F(S) + h(r)r^d$$

pour tout  $d$ -plan affine  $\pi$  passant par  $x$  et tout ensemble rectifiable compact  $S \subset B(x, r)$  qui contient  $\pi \cap \partial B(x, r)$  mais ne peut pas être envoyé dans

$\pi \cap \partial B(x, r)$  par une application Lipschitzienne  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $\varphi|_{\pi \cap \partial B(x, r)} = \text{id}$ ; ici  $h : [0, +\infty] \rightarrow [0, \infty]$  est une fonction croissante donnée à l'avance telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$ .

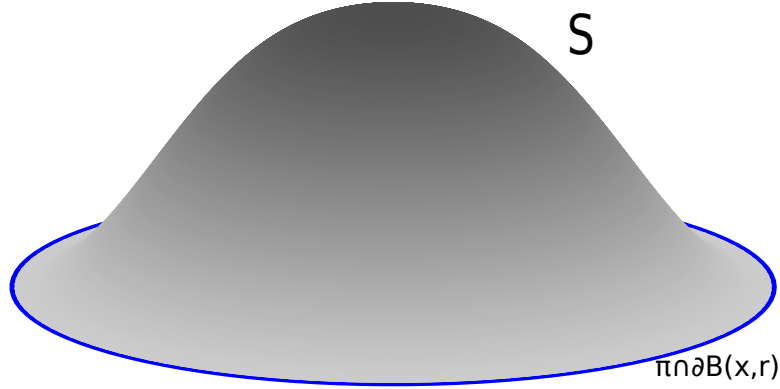


FIGURE 1.1 –  $J_F(\pi \cap B(x, r)) \leq J_F(S) + h(r)r^d$

Pour l’auteur, les minimiseurs de Reifenberg homologiques donnent souvent une meilleure description des films de savon que les courants minimiseurs de masse, et ils sont plus proches des (supports fermés des) courants minimiseurs de taille, qui sont les courants  $S$  qui minimisent la quantité  $Size(S)$  sous la même condition  $\partial S = T$  que plus haut, mais où la taille  $Size(S)$  est, en gros, la mesure de Hausdorff de l’ensemble où la fonction multiplicité qui définit  $S$  comme courant intégral est non nulle. Ainsi, la masse de  $S$  compte la multiplicité, mais pas la taille. On renvoie à [12, 13, 22] pour des définitions précises, et un compte-rendu plus détaillé du problème de Plateau pour les minimiseurs de taille. Faisons juste deux observations ici, en rapport avec le problème de Reifenberg. La Figure 1.2 représente le support d’un courant minimiseur de taille, mais pas de masse (la multiplicité sur le cercle central est 2, donc la masse est plus grande que la taille).

Même quand le courant de bord  $T$  est le courant d’intégration sur une courbe lisse (mais possiblement nouée) dans  $\mathbb{R}^3$ , il n’y a pas de théorème général d’existence pour les courants minimiseurs de taille. Cependant Frank Morgan [20] a démontré l’existence d’un courant minimiseur de taille lorsque le bord est une variété lisse contenue dans la frontière d’un corps convexe, et Thierry de Pauw and Robert Hardt [23] ont démontré l’existence de courants qui minimisent des énergies qui se situent entre masse et taille (typiquement, obtenues en intégrant une petite puissance de la multiplicité).

La raison pour laquelle la démonstration usuelle (par compacité) d’existence pour les courants minimiseurs de masse ne passe pas aux minimiseurs de taille est que la taille de  $S$  ne donne aucun contrôle sur la multiplicité,

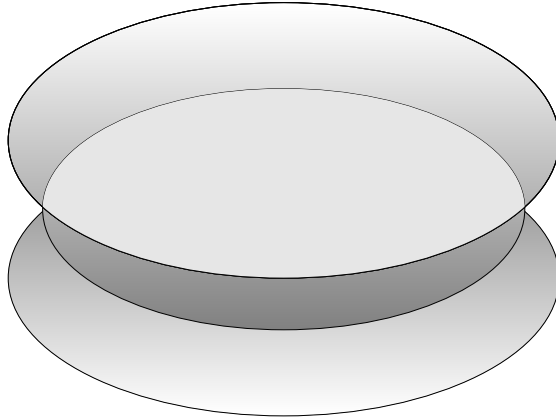


FIGURE 1.2 – courant minimiseur de taille, mais pas de masse

de sorte que la limite d'une suite minimisante pourrait très bien ne pas avoir une masse finie, donc ne même pas exister en tant que courant. Cette observation est liée à la raison pour laquelle Reifenberg s'est restreint aux groupes compacts (de sorte que les multiplicités ne tendent pas vers l'infini).

Dans [2], F. Almgren propose une méthode pour prouver le théorème de Reifenberg, et même l'étendre à des groupes  $G$  quelconques et des intégrants elliptiques assez généraux. La méthode utilise les varifolds (alors récemment découverts), ou les chaînes bémol, et un argument de feuilles multiples pour résoudre le problème des grandes multiplicités. L'argument est aussi fort subtil et elliptique. Incidemment, Almgren utilise les groupes d'homologie relative de Vietoris  $H_d^v$  au lieu des groupes d'homologie de Čech. Dans son papier, le bord  $B$  est un ensemble compact  $(d - 1)$ -rectifiable dans  $\mathbb{R}^n$ , tel que  $\mathcal{H}^{d-1}(B) < +\infty$ , et une surface est un ensemble compact  $d$ -rectifiable  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $\sigma \in H_d^v(\mathbb{R}^n, B; G)$ , on dit que  $S$  engendre  $\sigma$  quand  $i_k(\sigma) = 0$ , où l'on note  $H_d^v(\mathbb{R}^n, B; G)$  le  $d$ -ième groupe d'homologie relative de Vietoris de la paire  $(\mathbb{R}^n, B)$ , et où

$$i_k : H_d^v(\mathbb{R}^n, B; G) \rightarrow H_d^v(\mathbb{R}^n, B \cup S; G)$$

est l'homomorphisme induit par l'inclusion  $i : B \rightarrow B \cup S$ . Signalons que Dowker, in [11, Theorem 2a] a démontré que les groupes d'homologie de Čech et Vietoris sur un groupe abélien  $G$  sont isomorphes pour des espaces topologiques quelconques.

Le problème de Plateau homologique est clairement lié au problème des minimiseurs de taille, et par exemple T. De Pauw [22] montre que dans le cas simple où  $B$  est une courbe lisse, les infimums pour les deux problèmes sont égaux. Dans le même papier, T. De Pauw étend également le théorème de

Reifenberg (pour des courbes dans  $\mathbb{R}^3$ ) au groupe  $G = \mathbb{Z}$ . Malheureusement, bien que sa démonstration utilise de la minimisation de courants, elle ne donne pas l'existence d'un courant minimiseur de taille (il faudrait encore construire un courant sur l'ensemble minimal obtenu).

Soient  $\mathcal{C}$  une collection d'ensembles compacts et  $F$  un intégrant. On renvoie au début du chapitre 3 pour des définitions précises des intégrants, des intégrants elliptiques généralisés, et de l'intégrale  $J_F(E)$  d'un intégrant  $F$  sur l'ensemble  $E$ .

On pose

$$m(\mathcal{C}, F) = \inf\{J_F(E \setminus B) \mid E \in \mathcal{C}\}.$$

Au chapitre 3.2, on démontre le résultat d'existence général suivant.

**Theorem 1.1.** *Soient  $F$  un intégrant elliptique généralisé et  $\mathcal{C}$  une classe de parties compactes de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que  $\mathcal{C}$  vérifie les conditions suivantes :*

- (1) *Pour toute fonction Lipschitzienne  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $\varphi|_B = \text{id}_B$  et tout  $E \in \mathcal{C}$ ,  $\varphi(E) \in \mathcal{C}$  ;*
- (2) *Pour toute suite  $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{C}$  telle que  $E_k \rightarrow E$  en distance de Hausdorff,  $E \in \mathcal{C}$ .*

*Alors il existe  $E \in \mathcal{C}$  tel que  $J_F(E \setminus B) = m(\mathcal{C}, F)$ .*

En fait, l'existence de minimiseurs homologues de Reifenberg est une conséquence immédiate de ce théorème. En effet, soient  $B \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble compact,  $F$  intégrant elliptique généralisé,  $G$  un groupe abélien, et  $L$  un sous-groupe de  $\check{H}_{d-1}(B; G)$ . Notons  $\mathcal{C}_{\check{C}ech}(B, G, L)$  la collection des ensembles compacts  $E$  tels que  $B \subset E$  et  $L$  est contenu dans le noyau de l'homomorphisme  $\check{H}_{d-1}(B; G) \rightarrow \check{H}_{d-1}(E; G)$  induit par l'application d'inclusion  $B \rightarrow E$ .

**Theorem 1.2.** *Il existe un ensemble compact  $E \in \mathcal{C}_{\check{C}ech}(B, G, L)$  tel que*

$$J_F(E \setminus B) = m(\mathcal{C}_{\check{C}ech}(B, G, L), F).$$

La démonstration du théorème repose sur deux développements récents qui lui permettent de fonctionner plus facilement et d'éviter les problèmes de grande multiplicité.

Le premier développement est un lemme introduit par Dal Maso, Morel, et Solimini [19] dans le contexte de la fonctionnelle de Mumford-Shah, et qui donne une condition suffisante, portant sur une suite d'ensembles  $E_k$  qui converge en distance de Hausdorff vers une limite  $E$ , pour qu'on ait l'inégalité de semicontinuité inférieure

$$\mathcal{H}^d(E) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^d(E_k). \quad (1.1)$$

Ce résultat sera très pratique quand on cherchera un minimiseur à l'aide d'une suite minimisante. Les hypothèses originales du lemme de [19] ne sont pas toujours agréables à vérifier, mais heureusement Guy David [4] a décrit des moyens de l'appliquer à une suite d'ensembles quasiminimaux. Il a démontré que si  $\{E_k\}$  est une suite d'ensembles quasiminimaux (réduits) avec une même constante de quasiminimalité, alors la limite de Hausdorff de la suite est aussi quasiminimale, avec la même constante de quasiminimalité, et de plus l'inégalité de semicontinuité (1.1) est satisfaite. Voir le théorème 3.4 dans [4]. La démonstration utilise le lemme de [19].

Ici on veut non seulement trouver un ensemble qui minimise la mesure de Hausdorff, mais aussi obtenir le même résultat pour l'intégrale d'un intégrant. Pour ceci il semble crucial de disposer d'une inégalité de semicontinuité inférieure pour l'intégrale d'un intégrant. Heureusement, pour une classe assez large d'intégrants, on peut obtenir l'inégalité de semicontinuité suivant.

**Theorem 1.3.** *Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert et  $F$  un intégrant elliptique généralisé. Soit  $\{E_k\}_{k=1}^\infty$  une suite dans  $GQM(U, M, \delta, \varepsilon_0, \mathcal{H}^d)$  telle que  $E_k$  converge vers  $E$  dans  $U$ . On suppose que  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$  est suffisamment petit. Alors*

$$J_F(E) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} J_F(E_k). \quad (1.2)$$

Signalons que notre démonstration du théorème 3.8 (pour l'inégalité (2.1.2)) est fort différente de la preuve du lemme de [19] ou du théorème 3.4 dans [4]. Par ailleurs, il ne faut pas espérer que l'inégalité (2.1.2) soit vraie pour tout intégrant. Pour certains intégrants, on trouve aisément une suite d'ensembles quasiminimaux telle que (1.2) est fautive ; voir l'exemple en fin de paragraphe 3.1.3.

Mais l'outil principal pour notre démonstration du théorème 1.1 sera un résultat récent de V. Feuvrier [14], où il construit des réseaux polyédriques adaptés à un ensemble rectifiable donné (penser aux cubes dyadiques usuels, mais où l'on se débrouille pour que les faces soient souvent presque parallèles à l'ensemble) qui lui permettent de construire une suite minimisante composée d'ensembles qui sont localement uniformément quasiminimaux, de sorte qu'on peut lui appliquer notre inégalité de semicontinuité.

Une telle construction a été utilisée par Xiangyu Liang [18], pour démontrer des résultats d'existence d'ensembles minimisant la mesure de Hausdorff sous des conditions homologiques qui généralisent des contraintes de séparation (en codimensions supérieures à 1).

Donnons une idée de la démonstration du théorème 1.1. On part d'une suite minimisante  $\{E_k\} \subset \mathcal{C}$ . On utilise une technique découverte par Vincent Feuvrier, qui permet de construire une nouvelle suite  $\{E_k''\}$ , où  $E_k''$  est



un compétiteur de  $E_k$ ,

$$J_F(E_k'' \setminus B) \leq (1 + 2^{-k})J_F(E_k \setminus B),$$

et avec des propriétés supplémentaires (quasiminimalité uniforme) qui permettent d'appliquer un résultat de semicontinuité inférieure (le théorème 3.8) et montrer que l'ensemble limite  $E = \lim E_k''$  est un minimiseur. Pour le théorème 1.2, on doit juste montrer que  $\mathcal{C}_{\check{C}ech}(B, G, L)$  vérifie les deux conditions du théorème 1.1. La première est claire, et la seconde vient de la propriété de continuité de l'homologie de Čech vis à vis des limites inverses.

## 1.2 Régularité

Dans [6, 7], Guy David a proposé d'étudier une variante du problème de Plateau, avec des conditions de bord glissantes. On se donne un ensemble fermé  $B \subset \mathbb{R}^n$ , et un ensemble initial fermé  $E_0 \supset B$ . Un compétiteur de  $E_0$  dans l'ouvert  $U$  est un ensemble  $\varphi_1(E_0)$ , où  $\{\varphi_t\}_{0 \leq t \leq 1}$  est une famille d'applications de  $E \cap U$  dans  $U$  telle que  $\varphi_0 = \text{id}$ ,  $\varphi_t(E \cap B) \subset B$ , la fonction  $(x, t) \mapsto \varphi_t(x)$  est continue sur  $E \cap U \times [0, 1]$  et coïncide avec l'identité hors d'une partie compacte de  $E \times [0, 1]$ ; on renvoie au chapitre 4 pour les détails. On veut trouver un compétiteur  $E$  dont la mesure  $\mathcal{H}^d(E \setminus B)$  soit minimale. La condition au bord  $\varphi_t(E \cap B) \subset B$  semble très naturelle pour le problème de Plateau (décrire des films de savon). L'un de ses avantages (par rapport à fixer les points de  $B$ ) est qu'il semble alors plus facile de prouver des propriétés de régularité au bord. En fait, [8] est une préparation à la démonstration de telles propriétés.

Le théorème 1.1 ne donne aucun résultat d'existence pour le problème de Plateau avec conditions glissantes au bord. Mais dans [17, 24], les auteurs proposent une approche directe au problème de Plateau. Ils prouvent un résultat d'existence, qui dit que quand  $B$  est un ensemble fermé tel que  $\mathcal{H}^d(B) = 0$ , il existe (au moins) un minimiseur pour le problème de Plateau avec conditions glissantes au bord (et en prenant pour  $E_0$  l'ensemble lui-même). Une autre approche, plus désagréable, est la suivante : commencer par prouver que les ensembles minimaux glissants ont assez de régularité au bord pour être la cible de rétractions lipschitziennes dans un voisinage, puis appliquer ceci à la limite d'une suite minimisante pour montrer qu'elle est encore un compétiteur du  $E_0$  initial.

Il est important et intéressant d'étudier la régularité des films de savon. Joseph Plateau déclara que les surfaces formées par des bulles de savon ne sont en contact que de deux manières possibles : soit trois surfaces se rencontrent, avec un angle de  $120^\circ$  le long d'une courbe, soit six surfaces se rencontrent

en un sommet, en faisant des angles de  $3 \arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109^\circ$ . C'est ce qu'a prouvé Jean Taylor [27]. Elle a démontré que tout ensemble presque minimal de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$  est localement  $C^1$ -équivalent à un cône minimal dans  $\mathbb{R}^3$ , et que les seuls cônes minimaux dans  $\mathbb{R}^3$  sont les plans, et les cônes de type  $\mathbb{Y}$  (voir la Figure 1.3), et de type  $\mathbb{T}$  (Figure 1.4).

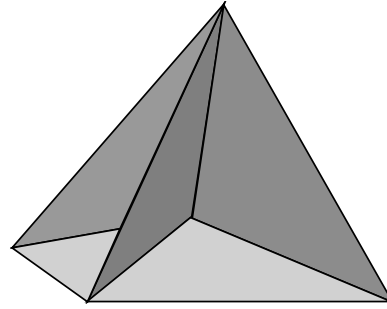
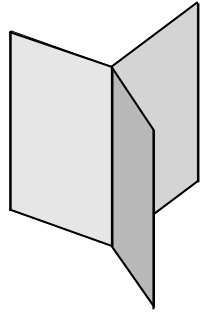


FIGURE 1.3 – un cône de type  $\mathbb{Y}$       FIGURE 1.4 – un cône de type  $\mathbb{T}$

Ainsi, pour certaines solutions du problème de Plateau, le théorème de Jean Taylor's donne une description claire et élégante de leur comportement loin du bord. Par contre on sait très peu de choses sur leur comportement au bord. En fait, il y a assez peu de résultats de régularité qui vont jusqu'au bord. Dans [1], on trouve un résultat pour les varifolds ; dans [15], un résultat pour les solutions d'un problème de Plateau spécifique ; dans [29], un résultat pour les courants qui minimisent la masse. Citons également un résultat de J. Taylor [28] sur le comportement au bord de chaînes bémol minimisantes, ou de manière équivalente d'ensembles de périmètre finis minimisants. On trouve également dans [16] ou [21] une conjecture concernant les divers types de singularité d'un film de dimension 2 près de la frontière. On est encore loin de résoudre cette conjecture.

Dans [5] et [3], Guy David donne une démonstration nouvelle et plus détaillée d'une bonne partie du résultat de régularité de Jean Taylor's sur les ensembles presque minimaux au sens d'Almgren, de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$ , et généralise le résultat à  $\mathbb{R}^n$  (mais avec seulement une équivalence Höldérienne). En même temps, il prouve un théorème de presque monotonie de la densité pour les ensembles presque minimaux (loin du bord). En fait, sa démonstration de régularité Höldérienne repose sur la propriété de presque monotonie et un théorème de paramétrage de Reifenberg. Dans [8, Part VI : Monotone density], il démontre un résultat semblable (presque monotonie de la densité) mais au bord pour un ensemble presque minimal glissant. C'est ce qui nous permettra de démontrer un résultat de régularité Höldérienne jusqu'au bord, pour certains ensembles presque minimaux glissants. C'est le

théorème suivant.

**Theorem 1.4.** *Soit  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  un ensemble fermé connexe dont la frontière  $\partial\Sigma$  est une variété de classe  $C^1$  de dimension 2. Soient  $x$  un point de  $\partial\Sigma$ ,  $U$  un voisinage de  $x$ , et  $E \subset \Sigma$  un  $(U, h)$ -ensemble presque minimal glissant associé à la frontière  $\partial\Sigma$  et tel que  $E \supset \partial\Sigma$ . Alors pour tout petit  $\tau > 0$ , on peut trouver un rayon  $\rho > 0$ , un cône minimal glissant  $Z$  dans un demi espace  $\Omega$  associé à la frontière  $L_1 = \partial\Omega$ , et enfin un homéomorphisme biHöldérien  $\phi : B(x, 3\rho/2) \cap \Omega \rightarrow B(x, 2\rho) \cap \Sigma$  tel que*

$$\begin{aligned} \phi(x) &\in \partial\Sigma \text{ pour } x \in L_1 \cap B(x, 3\rho/2), \quad \|\phi - \text{id}\|_\infty \leq 3\tau\rho, \\ C|z - y|^{1+\tau} &\leq |\phi(z) - \phi(y)| \leq C^{-1}|z - y|^{\frac{1}{1+\tau}}, \\ B(x, \rho) \cap \Sigma &\subset \phi\left(B\left(x, \frac{3\rho}{2}\right) \cap \Omega\right) \subset B(x, 2\rho) \cap \Sigma, \\ E \cap B(x, \rho) &\subset \phi\left(Z \cap B\left(x, \frac{3\rho}{2}\right)\right) \subset E \cap B(x, 2\rho). \end{aligned}$$

La liste des cônes minimaux glissants dans le demi espace  $\Omega$  associés à la frontière  $L_1 = \partial\Omega$ , et qui contiennent  $L_1$ , n'est pas compliquée. Ce sont le cône  $L_1$  seul, et les cônes  $L_1 \cup Z$ , où  $Z$  est un cône de type  $\mathbb{P}_+$  ou  $\mathbb{Y}_+$ . Voir le chapitre 4.2 pour des définitions précises, et le théorème 4.15 pour un énoncé.

Notre hypothèse que  $E \supset \partial\Sigma$  semble une condition raisonnable pour des films de savon. Quand on trempe un fil de fer dans de l'eau savonneuse, puis qu'on le retire, on obtient (souvent) un film de savon ; le fil est notre frontière glissante et le film serait modélisé par un ensemble presque minimal glissant. En fait la surface semble bien contenir le fil (tout le fil est mouillé). Ainsi notre hypothèse que  $E \supset \partial\Sigma$  semble naturelle à l'auteur.

Il serait aussi très intéressant de considérer la régularité au bord des ensembles presque minimaux glissants, sans la contrainte de contenir le bord. Mais malheureusement, sans supposer que  $E \supset \partial\Sigma$ , nous n'avons pas de résultat satisfaisant. C'est parce que dans ce cas, les limites par explosion de  $E$  en un point du bord peuvent aussi être des cônes de type  $\mathbb{T}_+$  (voir le chapitre 4.2 pour définition, et la figure 1.5) ou de type  $\mathbb{V}$  (cette fois voir [9, p. 9], et la figure 1.6).

Quand  $E$  a une limite par explosion de type  $\mathbb{V}$ , on s'attend à des difficultés sérieuses pour la démonstration (voir la figure 1.7, qui est un exemple potentiel de film de savon, pour lequel la régularité semble difficile à démontrer).

Pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on considère la mesure  $\mu_\lambda = \mathcal{H}^2 - (1 - \lambda)\mathcal{H}^2 \llcorner \partial\Sigma$  définie par  $\mu_\lambda(E) = \lambda\mathcal{H}^2(E \cap \partial\Sigma) + \mathcal{H}^2(E \setminus \partial\Sigma)$  pour tout ensemble  $E \subset \mathbb{R}^3$ .

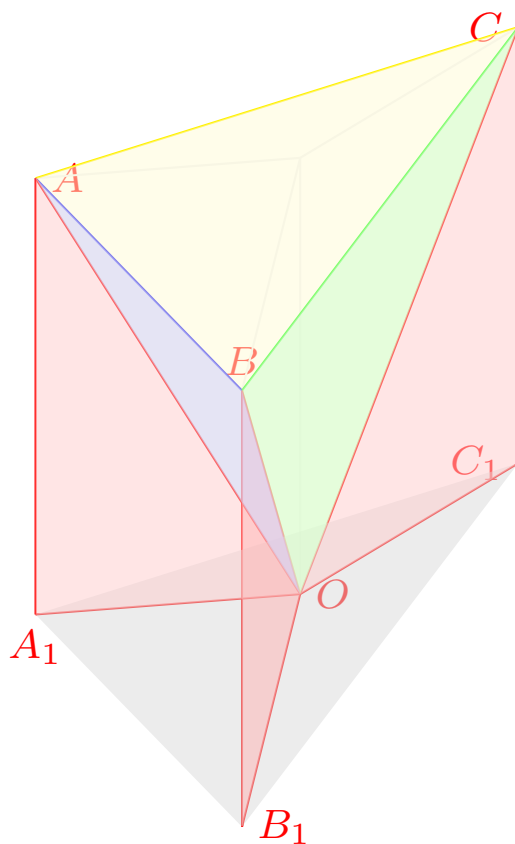


FIGURE 1.5 – cône de type  $\mathbb{T}_+$

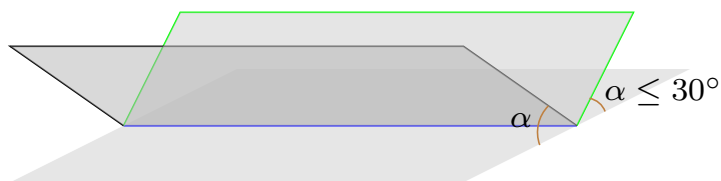


FIGURE 1.6 – cône de type  $\mathbb{V}$

On définit les ensembles presque minimaux pour  $\mu_\lambda$  comme on l'a fait dans la définition 4.2, mais en remplaçant la mesure de Hausdorff usuelle par  $\mu_\lambda$  ; on dira dans la suite que ces ensembles sont  $(U, h, \mu_\lambda)$  presque minimaux glissants. Le théorème ci-dessus dit que tout ensemble  $(U, h, \mu_0)$  presque minimal glissant (dans  $\Sigma$ , et avec la frontière glissante  $\partial\Sigma$ ) est localement biHölder-

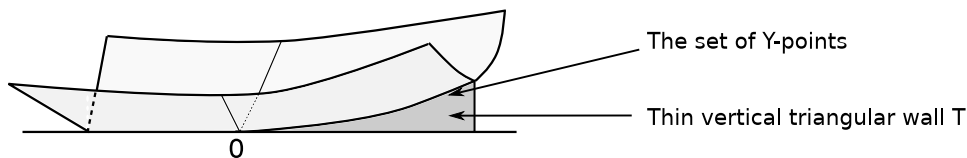


FIGURE 1.7 – Une limite par explosion en 0 est un cône de type  $\mathbb{V}$

équivalent à un cône minimal glissant (pour la mesure  $\mu_0$  et dans un demi-espace  $\Omega$  avec la frontière glissante  $\partial\Omega$ ). Une question naturelle est de savoir si tout ensemble  $(U, h, \mu_\lambda)$  presque minimal glissant est localement biHölder-équivalent à un cône minimal glissant (pour la mesure  $\mu_\lambda$ ). En fait, le cas où  $\lambda = 1$  est équivalent à ce dont on a parlé ci-dessus, à savoir la régularité au bord des ensembles presque minimaux glissants sans supposer qu'ils contiennent la frontière, et la question semble difficile. Quand  $0 < \lambda < 1$ , il faut d'abord donner la liste des cônes minimaux pour la mesure  $\mu_\lambda$ , et nous ne souhaitons pas élaborer ici.

Jean Taylor [28, Theorem 5] a démontré des résultats de cet ordre (et en fait plus précis), en étudiant la régularité au bord pour des problèmes de capillarité. La situation était quand même différente, parce qu'elle considérait des chaînes bémol (ou de manière équivalente, d'ensembles de Caccioppoli); La situation était quand même différente; en particulier,  $\mathbb{Y}_+$  (qui sépare l'espace en trois composantes) n'intervient pas comme cône tangent dans son étude.

# Bibliographie

- [1] William K Allard, *On the first variation of a varifold : boundary behavior*, Annals of Mathematics (1975), 418–446.
- [2] F. J. Almgren, *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems among surfaces of varying topological type and singularity structure*, Ann. of Math. **87** (1968), no. 2, 321–391.
- [3] G. David,  *$C^{1+\alpha}$  Hölder regularity of two-dimensional almost-minimal sets in  $\mathbb{R}^n$* , Journal of Geometric Analysis **20**, no. 4, 837–954.
- [4] ———, *Limits of Almgren quasiminimal sets*, Proceedings of the conference on Harmonic Analysis, Mount Holyoke, A.M.S. Contemporary Mathematics series **320** (2003), 119–145.
- [5] ———, *Hölder regularity of two-dimensional almost-minimal sets in  $\mathbb{R}^n$* , Annales de la faculté des sciences de Toulouse **18** (2009), no. 1, 65–246.
- [6] ———, *Should we solve Plateau’s problem again ?*, Advances in Analysis : The Legacy of Elias M. Stein. Edited by Charles Fefferman, Alexandru D. Ionescu, DH Phong, and Stephen Wainger, Princeton Mathematical Series **50** (2012), 108–145.
- [7] ———, *Regularity of minimal and almost minimal sets and cones : J. Taylor’s theorem for beginners*, Analysis and geometry of metric measure spaces **56** (2013), 67–117.
- [8] ———, *Local regularity properties of almost and quasiminimal sets with a sliding boundary condition* (2014), Preprint, available at <http://arxiv.org/abs/1401.1179>.
- [9] ———, *A monotonicity formula for minimal sets with a sliding boundary condition* (2014), Preprint, available at <http://arxiv.org/abs/1408.7093>.
- [10] Jesse Douglas, *Solutions of the problem of Plateau*, Transactions of the American Mathematical Society **33** (1931), 263–321.
- [11] C. H. Dowker, *Homology groups of relations*, Ann. of Math. **56** (1952), no. 1, 84–95.
- [12] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [13] H. Federer and W. Fleming, *Normal and integral currents*, Ann. of Math. **72** (1960), no. 3, 458–520.
- [14] V. Feuvrier, *Condensation of polyhedral structures onto soap films* (2009). Preprint, <http://arxiv.org/abs/0906.3505>.
- [15] Robert Hardt and Leon Simon, *Boundary regularity and embedded solutions for the oriented plateau problem*, Annals of Mathematics (1979), 439–486.
- [16] Gary Lawlor and Frank Morgan, *Curvy slicing proves that triple junctions locally minimize area*, Journal of Differential Geometry **44** (1996), no. 3, 514–528.
- [17] C. De Lellis, F. Ghiraldin, and F. Maggi, *A direct approach to Plateau’s problem* (2014), Preprint, available at <http://arxiv.org/abs/1408.4047>.

- [18] Xiangyu Liang, *Topological minimal sets and their applications*, Calc. Var. Partial Differential Equations **47** (2013), no. 3-4, 523–546.
- [19] G. Dal Maso, J. M. Morel, and S. Solimini, *A variational method in image segmentation : Existence and approximation results*, Acta. Math. **1** (1992), no. 168, 89–151.
- [20] F. Morgan, *Size-minimizing rectifiable currents*, Invent. Math. **96** (1989), no. 2, 333–348.
- [21] ———, *Geometric measure theory : A beginner’s guide*, 4th ed., Academic Press, Inc., San Diego, 2009.
- [22] T. De Pauw, *Size minimizing surfaces with integral coefficients*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **42** (2007).
- [23] T. De Pauw and R. Hardt, *Size minimization and approximation problems*, Calc. Var. Partial Differential Equations **17** (2003), 405–442.
- [24] G. De Philippis, A. De Rosa, and F. Ghiraldin, *A direct approach to Plateau’s problem in any codimension* (2015), Preprint, available at <http://arxiv.org/abs/1501.07109>.
- [25] T. Radó, *The problem of the least area and the problem of Plateau*, Mathematische Zeitschrift **32** (1930), no. 1, 763–796.
- [26] E. R. Reifenberg, *Solution of the plateau problem for  $m$ -dimensional surfaces of varying topological type*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960).
- [27] J. E. Taylor, *The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces*, Ann. of Math **103** (1976), 489–539.
- [28] ———, *Boundary regularity for solutions to various capillarity and free boundary problems*, Communications in Partial Differential Equations **2** (1977), no. 4, 323–357.
- [29] Brian White, *Regularity of area-minimizing hypersurfaces at boundaries with multiplicity*, Seminar on minimal submanifolds, 1983, pp. 293–301.