



HAL
open science

Méthodes inverses pour la reconstruction de conductivité hétérogène et la complétion de données thermiques

Xavier Barthélémy

► **To cite this version:**

Xavier Barthélémy. Méthodes inverses pour la reconstruction de conductivité hétérogène et la complétion de données thermiques. Analyse numérique [cs.NA]. Université Toulouse III Paul Sabatier, 2004. Français. NNT: . tel-01228985

HAL Id: tel-01228985

<https://theses.hal.science/tel-01228985>

Submitted on 16 Nov 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université **P**aul **S**abatier de Toulouse
Institut de **M**écanique des **F**luides de **T**oulouse
École Doctorale Edyf

Thèse de Doctorat
Spécialité Dynamique des Fluides et Énergetique

**Méthodes inverses pour la
reconstruction de conductivité
hétérogène et la complétion de
données thermiques**

par Xavier Barthélémy

Thèse soutenue le Lundi 20 Décembre 2004.

Jury :

Jacques MAUSS	Président
Jean Christophe BATSALE	Rapporteur
Amel BEN ABDA	Rapporteur
Faker BEN BELGACEM	Examinateur
Mejdi AZAÏEZ	Directeur
Alain BERGEON	Co-directeur
Franck PLOURABOUÉ	Co-directeur

Résumé :

Ce travail aborde deux problèmes inverses complémentaires liés au contrôle non-destructif thermique.

Le premier problème est la complétion de données associée au problème de Cauchy, pour lequel une étude numérique approfondie de l'algorithme de Kozlov a été menée dans la cadre d'une discrétisation spectrale. Différents éléments de l'algorithme et de sa mise en œuvre ont permis une nette amélioration de la rapidité de convergence et une meilleure compréhension de ses limitations.

Le second problème inverse est celui de la reconstruction de conductivité hétérogène bidimensionnelle à partir de la donnée de cartographies thermiques. Nous proposons une nouvelle méthode pour ce problème, fondée sur la construction d'un maillage Lagrangien, sur lequel la reconstruction de la conductivité est calculée quasi-analytiquement. L'implémentation numérique de la méthode a permis d'en valider le principe et d'en mieux cerner les limitations.

Mots clés : méthodes inverses, équation de la chaleur, coordonnées Lagrangiennes, méthodes spectrales, algorithme de Kozlov, milieux hétérogènes

Abstract :

Two complementary inverse problems related to non-destructive thermal testing are investigated in this work.

First, data completion associated with the Cauchy problem is analysed in the framework of the algorithm proposed by Kozlov. A detailed numerical analysis of this algorithm with spectral collocation methods has led to different improvement in the convergence speed as well as a better understanding of the convergence limitations.

Next, a second inverse problem related to the reconstruction of heterogeneous two-dimensional conductivity field has been studied. A Lagrangian formulation of the problem is investigated. A Lagrangian mesh is built from different thermal maps, onto which a semi-analytical computation of the conductivity is obtained. The numerical implementation of the problem has been carried out so as to validate the method and investigate its limitations.

Keywords : Inverse methods, heat equation, Lagrangian coordinates, spectral methods, Kozlov Algorithm, heterogenous media

Remerciements

Que dire dans les remerciements? Je pourrais, pour commencer, reprendre une phrase d'Oxa qui dit : "160 pages, et pas un gramme de Funck!" Mais c'est aussi le moment où l'on se retrouve face à soi, en se remémorant les bons moments mais aussi les moins évidents. Peut être est ce l'heure de trouver une citation philosophique, que nous a inspiré tant d'années et de combat. Car je pense que c'est une lutte contre soi. On se découvre des facettes de caractères qui n'étaient jamais ressorties avant, dans des conditions de stress assez avancées par moments. J'ai trouvé cela parfois effrayant, et je loue ceux qui m'ont supporté durant toute ces années. J'admire leur patience et leur compréhension. Cela renforce mon amitié envers eux, si besoin avait été. Ces remerciements peuvent ressembler à une liste, mais c'est bien mal résumer les expériences de vie que toutes ces personnes m'ont apporté.

Je vais commencer par remercier L'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, et plus particulièrement le Groupe d'Études des Milieux Poreux de m'avoir accueilli. De même de L'UFR de mécanique de Paul Sabatier, dans lequel j'ai été A.T.E.R.

Je tiens à remercier M. Marc Bonnet d'avoir accepté d'être président de mon jury. De même, je gratifie Mme Ben Abda et M. J.C. Batsale d'avoir bien voulu rapporter sur le manuscrit de cette thèse.

Je remercie M. Mejdî Azaïez d'avoir été mon directeur de thèse.

Je tiens également à remercier M. Alain Bergeon et M. Franck Plouraboué, mes codirecteurs de thèse d'avoir été là, d'avoir toujours su apporter un avis judicieux et des conseils précieux. J'ai appris (un peu) ce qu'est la rigueur grâce à eux, et je me souviendrai toute ma vie de l'adage d'Alain : Il faut toujours commencer par chercher une explication à partir d'arguments simples. La complication nuit souvent à la clarté.

Merci également à Jacques Mauss d'avoir fait parti de mon jury, mais aussi pour ses discussions et son impressionnante connaissance de la science et son histoire qu'il a su partager un peu avec moi.

Je tiens à remercier de tout mon cœur Vanessa. Même si nos chemins sont différents maintenant, elle a su m'apporter tout ce que j'attendais alors. Je pense que je n'aurais jamais pu finir cette thèse sans elle. Elle a toujours été là pour me soutenir, me motiver, me reconforter. Cela restera gravé à jamais en moi.

Je tiens évidemment à remercier mes amis de toujours, Arno et Guitou, et Guillaume, qui m'ont apporté un soutien indéfectible, et ce, quoi qu'il arrive. Je pense que je ne serais pas ainsi sans les innombrables heures de conversation et de conseils sur tous les sujets possibles, du plus personnel au plus général, et ce, dans tout les états possibles. Il est agréable (et j'ai cette chance) de savoir ce que sont de véritables amis.

Je ne peux évidemment pas passer à côté de Dodo, l'homme qui ne dit rien, mais n'en pense pas moins. Il est à la fois si simple et si difficile d'accès. J'ai des fois l'impression de ne pas être à la hauteur avec lui, mais il se charge très vite de remettre les pendules à l'heure. J'espère la réciprocité de l'amitié profonde que je lui porte. Nous avons partagé plein de moments, qui comptent énormément pour moi. Et cela serait évidemment incomplet si je ne parlais pas de Céline et du nouveau venu Corto, et de combien je les aime.

Je tiens également à m'incliner devant Olivier le nain, pour ses avis toujours mesurés, (et ce qui me fait rager) justes et avisés. Tant de recul chez une personne m'étonnera toujours. Je suis sûr qu'il a une ruse (ou une oreillette). Mais je ne vais pas laisser croire qu'il est sérieux,

Je désire tirer mon chapeau à David, l'homme au grand cœur. Il ne lui sert pas seulement à courir longtemps et à enterrer tout le monde, mais aussi à exprimer une grande sensibilité. Il m'a apporté sa bonne humeur permanente, et sa capacité à rebondir et à reconforter.

Comment ne pas citer non plus Cédrico el negrito, l'homme qui réjouit les papilles et le démon de la fête? Il possède un sens du pratique hors norme, Et est toujours disponible pour partager ses avis tant sur la vie que sur le rhum.

Je me dois de saluer aussi Manuel pour sa sensibilité et son amitié, Juan manuel pour sa bonne humeur et sa volonté perpétuelle, ainsi que Gaëlle, célèbre pour son rire, mais aussi pour son amitié et son sens du spectacle. C'est bien peu de mots pour exprimer ce que je ressens envers eux.

Je voudrais également témoigner toute mon affection à Frédo. Il a toujours été là quand j'en ai eu besoin. Il est mon ami, puis a été celui que m'a fait découvrir le monde du silence, et reste l'auteur oublié d'une phrase célèbre des amis de la mer :

”Bon, on va y aller, là!” . J’admire ce personnage qui a eu le courage de changer de vie, qui pourtant paraissait prometteuse au profit de vivre son rêve. chapeau!

Il faut évidemment mentionner Estela, qui sait toujours être là quand il faut, qui a toujours le mot qui faut. Tant de patience et de bon sens chez une telle personne reste étonnant. Ce portrait succinct serait incomplet si je ne mentionnais pas non plus sa force mentale, sa volonté sans faille. Merci!

Comment ne pas parler non plus de Vincent? C’est quelqu’un qui est arrivé relativement récemment dans ma vie, mais qui sait s’ouvrir et ouvrir les autres. Gratifions le de double face, la folle dès qu’il s’agit de ne pas être sérieux, et la sensible, lorsqu’il sait écouter et reconforter. mais je l’imagine déjà réagir à mes propos : ”Mouaiff mais bon!!”

J’en arrive à mon vieux compagnon de grève, Boris et sa compagne, Zaza. Tant de chose que j’ai partagé avec eux, depuis tant de temps. je pense qu’ils m’ont suivi dans toutes les étapes de ma vie universitaire. C’est amusant et reconfortant de voir le parcours suivi par les personnes qu’on estime.

Je voudrais saluer aussi Juju, Aurélie et Lulu, des amis que je commence à connaître depuis un bout de temps.

Je n’oublie pas non plus le beau docteur Ros, aussi connu comme Le castor. Sa légèreté de l’être, et son grand coeur en font quelqu’un d’exceptionnel.

Il faut aussi mentionner mes voisins de bureau et compagnons de travail : pauline, antoine, oxa, farfadet, qui ont toujours supporté mes élucubrations. Ils m’ont vu et supporté dans tous les états, de l’hystérie au zen, de l’insouciance au ”coup de bourre”. Ils ont de grandes qualités humaines (mais aussi scientifique, voyons!) et cela en fait des personnes formidables. Merci de m’avoir accepté comme je suis. Je vous souhaite la meilleure chance pour la suite.

Je salue également tout les membres du groupe Milieu Poreux, que j’ai croisé au cours de ce travail. je pense aux Franck’s, à K’squet, à Fred, à Laurent, à Kader, à Mehdi, à Paul, à Sylvie, à Typhaine et à tous ceux que j’oublie.

A présent, venons en à Delphine et Christophe. En fait je les connais depuis presque 10 ans maintenant. Ils ont partagé avec moi de grands moments, heureux et malheureux. Ils ont su être là quand j’ai eu besoin d’eux, et cela n’a pas de prix à mes yeux.

Je tiens aussi à saluer Stef the death, et le boudchou Émilio. Presque 10 ans déjà que l’on se fréquente!! Une désinvolture apparente pour une personne avec tant de caractère et un grand cœur

Une mention spéciale à Jet lo san, the tai chi Master aussi connu comme Yves Jean Laurent. Comme dirait un certain auteur de bandes dessinées, il est rempli d'humour glacé et sophistiqué, mais c'est aussi un adorable compagnon. Un salut amical aussi à Don Marlio, le parrain de Vice River.

Un merci à mes compagnons de fête depuis longtemps maintenant, connus comme "les cochons" ainsi que les "Zamix". Un merci à Felipe, qui est réapparu dans ma vie. Je salue aussi les Amis de la Mer.

Je voudrais également profiter de ce lieu d'expression pour avoir une pensée pour Yannick Gaëtan Anatole Mauroux.

Je tiens à remercier également mes parents Suzanne et Denis, sans qui tout cela n'aurait jamais été possible. Il est dommage que je n'ai jamais su exprimer mon amour et ma confiance pour des personnes aussi formidables. Ces quelques lignes permettront peut être de leur faire comprendre ce que je n'ai jamais pu ou su leur dire.

Je voudrais aussi remercier mes grand-parents, Rosette et Georges, d'être les personnes les plus gentilles que je connaisse. Je leur envoie toute mon affection.

Je ne sais comment dire et remercier de tant d'affection de la part des gens. J'ai l'impression de faire une liste, mais ce que je voudrais exprimer est plus profond. Je ne saurais jamais exprimer ma joie et ma fierté d'avoir autant d'amis et d'affection. Cela me remplit le cœur, et des fois, j'ai l'impression qu'il va exploser.

ha oui, au fait, pour reprendre mon propos initial, j'ai trouvé la citation : "si j'aurais su, j'aurais venu!"

Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Les problèmes inverses	5
2.1	Introduction	5
2.2	Problèmes directs, problèmes inverses	7
2.2.1	Problème direct	7
2.2.2	Problème inverse	8
2.3	Régularisation de l'inversion	10
2.3.1	Définition et propriétés d'un opérateur régularisant	11
2.3.2	Construction d'un opérateur régularisant	12
2.4	La minimisation	13
2.4.1	Quelques méthodes de minimisations	14
2.4.2	Minimisation d'une fonctionnelle quadratique	15
2.4.3	Méthodes d'évaluation du gradient	16
2.5	Conclusion	18
3	Méthodes numériques	19
3.1	Introduction	19
3.2	Méthodes spectrales	20
3.2.1	Formulation variationnelle	20
3.2.2	Approximation de Galerkin	21
3.2.3	Éléments spectraux	22
3.3	Inversion du système algébrique	24
3.3.1	Méthode directe	25
3.3.2	Méthode itérative	27
3.3.3	Discrétisation temporelle	28

4	Complétion de données à la frontière	29
4.1	Problème de Cauchy : Motivations, domaines d'application	29
4.2	La complétion de données : Un problème mal posé	30
4.2.1	Un exemple	30
4.3	Algorithme de Kozlov	31
4.3.1	Notations	31
4.3.2	Présentation de l'algorithme	32
4.3.3	Critères d'arrêt	33
4.4	Validation	34
4.4.1	Pertinence des critères d'arrêts	34
4.4.2	Influence du maillage	37
4.4.3	Le premier cas : le cas complet	38
4.4.4	Deuxième cas : le cas Dirichlet	41
4.4.5	Troisième cas : le cas Neumann	43
4.4.6	Quatrième cas : le cas mixte	45
4.4.7	Cas où la frontière à compléter est plus grande	47
4.4.8	Conclusion	49
4.5	Cas supplémentaires	50
4.5.1	Étude du cas polynômial	50
4.5.2	Etude de la fonction périodique	51
4.6	Accélération de la convergence	53
4.6.1	Relaxation	54
4.6.2	Raffinage hiérarchique	55
4.6.3	Combinaison du raffinage hiérarchique et de la relaxation	57
4.6.4	Conclusion	58
4.7	Coefficient d'échange, Résistance d'interface	58
4.8	Cas d'une couronne	60
4.9	Conclusion	63
5	Reconstruction de la conductivité	65
5.1	Problème physique	65
5.2	Étude de l'existant	66
5.3	3D-2D pour un exemple donné	68
5.3.1	approche asymptotique pour les milieux minces	68
5.4	Principe d'utilisation de coordonnées Lagrangienne	76

5.4.1	Réécriture de l'équation de la chaleur, et passage au monodimensionnel.	76
5.4.2	Liaison entre deux lignes	78
5.4.3	Extension à l'ensemble des lignes, et réduction du nombre d'inconnues	81
5.4.4	Relation de récurrence	81
5.5	Méthode d'optimisation pour retrouver le scalaire inconnu.	86
5.5.1	Choix de la fonctionnelle	87
5.5.2	Algorithme de minimisation	87
5.5.3	Calcul du gradient de la fonctionnelle J	88
5.6	Implémentation numérique.	92
5.6.1	Calcul du maillage lagrangien	92
5.6.2	Les intersections	94
5.6.3	Les intégrations sur les lignes	95
5.6.4	L'interpolation inverse	96
5.6.5	L'optimisation	96
5.7	Validations et Résultats	97
5.7.1	Validation des lignes de flux	98
5.7.2	Validation des intégrations	99
5.7.3	Validation de l'interpolation inverse	101
5.7.4	Validation du solveur stationnaire	104
5.7.5	Validation des liaisons entre les lignes, et reconstruction globale	105
5.7.6	Effet des perturbations	108
5.7.7	Sensibilité de la fonctionnelle	110
5.7.8	Convergence de l'algorithme.	111
5.7.9	Problèmes d'identifiabilité	111
5.7.10	Tests sur des exemples physiques	113
5.8	Conclusion	123
6	Conclusion générale et Perspectives	127
	Bibliographie	139
A	Numérique	141
A.1	Approximations et polynômes	141
A.1.1	Polynômes de Legendre	141
A.1.2	Quadrature de Gauss-Lobatto	142

A.1.3	Quadrature de Gauss-Radau	142
A.1.4	Polynômes de Lagrange	143
A.2	Produit tensoriel	143
A.3	Traitement des conditions limites de type Dirichlet	144
A.4	Méthode itérative du gradient conjugué préconditionné	144
B	Compléments sur le problème de Cauchy	147
B.1	Formulation mathématique du problème de Cauchy	147
B.2	Détermination de la condition à la limite inconnue $h(x)$	149
B.3	Remarque sur les opérateurs à noyaux et les problèmes inverses.	151
B.4	Condition de stabilité et majoration des erreurs	152

Table des figures

2.1	schéma de principe d'un problème direct	8
2.2	schéma de principe d'un problème inverse	8
2.3	Opérateur régularisant pour $G(p_0) = d_0$	12
4.1	Notations	32
4.2	Tests sur ε_1	35
4.3	Tests sur ε_2	36
4.4	Tests sur le nombre de points de maillage N	37
4.5	géométrie et C.L. du domaine à compléter	38
4.6	C.L. de l'itération $2k$ et $2k + 1$	39
4.7	Résultats du cas complet	40
4.8	Résultats du cas complet	40
4.9	géométrie et C.L. du domaine à compléter	41
4.10	Résultats du cas Dirichlet	42
4.11	Résultats du cas Dirichlet	43
4.12	géométrie et C.L. du domaine à compléter	43
4.13	Résultats du cas Neumann	44
4.14	Résultats du cas Neumann	45
4.15	géométrie et C.L. du domaine à compléter	45
4.16	Résultats du cas Mixte	46
4.17	Résultats du cas Mixte	47
4.18	géométrie et C.L. du domaine à compléter	48
4.19	Résultats du cas Disjoint	48
4.20	Résultats du cas Disjoint	49
4.21	Résultats du cas Polynômial	51
4.22	Résultats du cas Polynômial	52
4.23	Erreur à convergence en fonction du nombre de demi période	52
4.24	Effet des instabilités sur le nombre d'itérations, pour $N = 20$	53

4.25	Résultats sur la relaxation	54
4.26	Raffinage Hiérarchique	56
4.27	Raffinage Hiérarchique et Relaxation	57
4.28	Évaluation de la résistivité de contact sur la frontière à compléter	59
4.29	présentation du problème	60
4.30	Résultats sur la Couronne	61
4.31	Erreur sur la reconstruction de la dérivée	62
4.32	Représentation 3D de l'erreur	62
5.1	Géométrie du domaine 3D	69
5.2	Exemple d'une intersection	79
5.3	Exemple d'informations données par la matrice de transfert	86
5.4	Calcul de la première ligne	93
5.5	Calcul du point de départ de la deuxième ligne	93
5.6	Calcul des isothermes	94
5.7	Erreur dans la construction des lignes de flux	99
5.8	Nombre de lignes dans le maillage	99
5.9	Erreur effectuée lors des intégrations dans le cas de la conductivité linéaire	100
5.10	Erreur effectuée lors des intégrations dans le cas de la conductivité non linéaire	101
5.11	Erreur effectuée lors de l'interpolation inverse	102
5.12	Exemple de cas générateur d'erreur dans l'interpolation inverse	103
5.13	Exemple des deux ensembles de lignes de flux générant des erreurs dans l'interpolation inverse	103
5.14	Erreur L_∞ de T fonction de N , nombre de point du maillage	104
5.15	Erreur effectuée lors de la reconstruction complète	106
5.16	Erreur effectuée lors de la reconstruction complète	106
5.17	Valeur de la fonctionnelle	107
5.18	Erreurs relatives sur les opérations de dérivation et d'intégrations en présence de perturbations aléatoires	109
5.19	Valeur de la fonctionnelle en fonction de $\lambda - \lambda_0$	110
5.20	Comportement de la fonctionnelle lors de l'optimisation	111
5.21	Problèmes d'identificabilité	113
5.22	Représentation des la conductivité à reconstruire	115
5.23	Premier champ de température sur lequel la reconstruction sera effectuée	116

5.24	Second champ de température qui permettra de calculer les liaisons	116
5.25	Erreurs L_∞ de la reconstruction de la conductivité sur les deux types de maillage	117
5.26	Comportement de la fonctionnelle lors de l'optimisation	118
5.27	Premier champ de température sur lequel la reconstruction sera effectuée	119
5.28	Second champ de température qui permettra de calculer les liaisons	119
5.29	Erreurs L_∞ de la reconstruction de la conductivité sur les deux types de maillage	120
5.30	Comportement de la fonctionnelle lors de l'optimisation	121
5.31	Représentation de la conductivité reconstruite pour $\sigma = 0,3$	122
5.32	Représentation des erreurs de reconstruction de la conductivité pour la conductivité donnée en (5.80) et $\sigma = 0,3$	123

Chapitre 1

Introduction générale

Tester des pièces mécaniques et rechercher leurs défauts de fabrication est une problématique industrielle relativement ancienne. En effet, les procédés de fabrication, aussi contrôlés soient-ils, laissent souvent la place au hasard, et il est donc souvent nécessaire de procéder à des vérifications, et d'ajuster les méthodes de production, afin de garantir la qualité produite.

Il faut alors choisir judicieusement (statistiquement) une pièce, et l'analyser en détail. Ces vérifications entraînent parfois la destruction de l'objet, et ne peuvent pas être systématiques. De plus, de telles analyses demandent du temps, et ne peuvent souvent pas être effectuée "en temps réel".

Une autre voie, apparue plus récemment est le contrôle non destructif (CND). Le CND consiste à évaluer l'état d'un système, d'une structure ou d'un matériau sans l'endommager, en vue d'établir un diagnostic. Les tests de CND sont pour la plupart fondés sur l'observation et l'exploitation d'un phénomène physique perturbé par la présence d'une anomalie ou d'une hétérogénéité. Les techniques utilisées sont diverses et dépendent du moyen de détection envisagé. Par exemple, les rayons X et les ondes ultrasonores servent à détecter les défauts dans les matériaux (métaux, plastiques, céramiques), dans les installations (ponts, tunnels, plateformes pétrolières), et sont utilisés dans la restauration d'œuvres d'art.

Cette activité sur le contrôle non destructif, est en plein essor tant par les enjeux industriels qu'elle suscite, que par les défis intellectuels que ces problèmes posent dans leur compréhension et leur mise en œuvre. Le domaine de la recherche s'est naturellement approprié son analyse. Les fondements mathématiques ont été développés dans les années 70, mais l'implantation industrielle reste relativement récente, et a bénéficié des derniers progrès de techniques de mesure et de puissance de calcul.

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à deux types d'applications : la reconstruction de conditions aux limites, aussi appelée complétion de données, et la détection d'hétérogénéités dans des matériaux minces.

Notre vecteur pour cette investigation sera les variations de la température du système à analyser. Nos développements prendront comme point de départ l'équation de la chaleur.

La première partie de cette thèse servira à introduire les bases et définitions de nos problèmes, qui rentrent dans la classe des problèmes inverses. Nous discuterons de ce qui rend ces problèmes si difficile à résoudre, et nous examinerons des techniques de résolution.

Dans une deuxième partie, nous détaillerons les caractéristiques des méthodes numériques que nous avons utilisées. Nous expliquerons la discrétisation retenue pour l'équation de la chaleur, et les solveurs utilisés.

Le troisième chapitre traitera de la complétion de donnée qui intervient dans de nombreuses situations physiques. Il s'agit, par exemple de détecter les défauts de collage de deux pièces, aussi appelé délaminage. Les localisations géométriques de ces défauts interdisent toute mesure directe, et il devient nécessaire de reconstruire les caractéristiques du collage à partir des mesures effectuées sur les parties accessibles de la pièce.

A ces fins, nous exploiterons les résultats de Kozlov, qui a proposé un algorithme de complétion des données. Nous le mettrons en place en utilisant des méthodes spectrales. Nous chercherons à étudier le comportement numérique de la méthode sur des cas tests, portant sur un domaine bidimensionnel carré. Divers types de conditions aux limites seront imposés, et nous évaluerons ses performances relativement à la quantité d'informations disponibles, ainsi que la précision de la reconstruction. Parce que ce processus itératif converge lentement, et nous tâcherons d'en améliorer les performances par l'emploi d'une méthode classique de relaxation, et par un procédé que nous appellerons raffinement hiérarchique. Nous verrons comment l'alliance de ces deux techniques améliore grandement sa vitesse de convergence. La haute précision des méthodes numériques employées nous permettra ainsi de reconstruire un coefficient caractéristique d'interface, la résistance de contact, qui de part sa définition, est très sensible aux erreurs numériques de la complétion. Nous étendrons également les applications à un domaine annulaire.

Le quatrième chapitre sera consacré à la détection d'hétérogénéités de conduction thermiques. Nous présenterons une méthode reconstruction dans des milieux

hétérogènes minces en utilisant un système de coordonnées Lagrangiennes. Nous justifierons l'utilisation de la méthode par un développement qui approchera le comportement thermique d'un milieu mince, soumis à une excitation. Nous expliquerons la méthode de calcul, en réécrivant l'équation de la chaleur sur des lignes de flux de chaleur. Ainsi fait, nous déterminerons une solution semi-analytique pour le champ de conductivité thermique dans le plan, et nous expliquerons comment l'utilisation de deux champs de température nous permet de reconstruire la conductivité sur le tout le domaine à partir de sa connaissance en un seul point. Une méthode d'optimisation, basée sur la minimisation d'une fonctionnelle, servira à retrouver cette valeur. Nous testerons chaque élément de l'implémentation numérique de notre méthode à l'aide de cas tests, puis nous utiliserons ce procédé pour reconstruire la conductivité dans des cas simulés approchant des expériences physiques modèles.

Chapitre 2

Les problèmes inverses

2.1 Introduction

Une grande partie de notre introduction aux problèmes inverses est tirée du cours de D.E.A. "Dynamique des Structures et Couplages" de M. Bonnet sur les méthodes inverses [Bonnet(2000)].

Définir la notion de "problème inverse", bien que simple en apparence, n'est pourtant pas une chose aisée à la vue des nombreux problèmes concernés par cette appellation.

D'un point de vue physique ou expérimental, il est d'usage de qualifier de problèmes inverses l'évaluation d'une grandeur physique p inaccessible à l'expérience, à partir de la mesure d'une autre grandeur notée d accessible à l'expérience, connaissant un modèle mathématique du phénomène étudié G . Ainsi un problème inverse serait de déterminer p dans l'équation symbolique $d = G(p)$.

Cette définition est beaucoup trop vaste, car cela revient à appeler problèmes inverses toute résolution d'équations algébriques, matricielles, différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, ou minimisations. Pour restreindre cet ensemble, il est nécessaire de distinguer deux classes dans la résolution de ces équations.

- Ceux qui admettent pour toute mesure d une solution unique p , continue par rapport à d , sont dit bien posés. Ils seront alors résolus de façon exacte ou approchée par des méthodes classiques.
- Et ceux pour qui le problème est mal posé, c'est à dire que l'existence, l'unicité ou la continuité de la solution (par rapport aux mesures) n'est pas vérifiée. Nous appellerons alors problèmes inverses les situations où nous serons dans ce cas. D'un point de vue physique, cela signifie qu'une mesure, en tenant

compte des incertitudes, peut correspondre à un grand ensemble de valeurs de p , qui peuvent être très différentes les unes des autres.

La physique mathématique a longtemps ignoré ces problèmes, soit en les considérant en dehors de tout sens physique, soit résultant d'une modélisation imparfaite. De nos jours, le caractère mal posé est reconnu comme un problème fondamental, et est le sujet de nombreuses études.

Des méthodes générales ont été développées pour résoudre les problèmes inverses. Certains travaux sont situés en amont, et traitent de l'identifiabilité d'une grandeur. Ce qui revient à savoir si la grandeur considérée est porteuse de suffisamment d'information pour permettre l'identification de ce que l'on cherche. Cette notion est abordée dans la résolution d'un problème inverse modèle dans [Elayyan & Isakov(1997)] ainsi que [Giudici(1991)].

Ces problèmes inverses sont sensibles aux incertitudes, dont les causes peuvent être nombreuses :

- L'origine des données est expérimentale, ce qui implique des erreurs de mesures.
- Elles sont collectées en nombre fini, même si le modèle mathématique les décrit en terme de fonctions.
- La discrétisation du modèle mathématique conduit à effectuer des interpolations d'un modèle continu.
- Le modèle lui même repose sur l'idéalisation d'une situation physique, et d'hypothèses simplificatrices.

Cette sensibilité des problèmes inverses aux incertitudes a modifié notre vision du concept de solution. Nous n'allons plus chercher la solution, au sens strict du terme, associée au modèle et aux mesures, mais chercher tout p , qui, aux incertitudes près, reproduit la mesure d effectuée.

Toute méthode d'inversion doit tenir compte de ces aspects incomplets, imprécis voire redondant. La méthode idéale serait de sélectionner parmi l'ensemble des solutions, celles ayant un sens physique et qui paraissent vraisemblables. Une telle approche est évidemment impossible à mettre en place dès que le nombre de variables à identifier devient grand.

Les méthodes de résolution des problèmes inverses se répartissent, selon Nashed [Nashed(1974)], en trois catégories :

- Les méthodes venant de l'analyse mathématique et de la théorie des fonctions. Elles transforment un problème mal posé en un problème bien posé en jouant sur les espaces utilisés pour décrire les variables et leurs topologies. Les bons

espaces ou les bonnes contraintes sont dictés non pas par des considérations mathématiques, mais par la physique.

- La régularisation des problèmes mal posés est due, initialement, à Tikhonov ([Tikhonov & Arsenin(1977)]). Elle consiste à redéfinir les notions d'inversion, et de solutions (quasi solution, solution approchée), de telle sorte que la solution régularisée, obtenue par inversion du système régularisé, dépende continuellement des données, et approche la solution exacte (lorsqu'elle existe) pour des données proches des valeurs obtenues par la mesure. Le problème initial est remplacé par un problème approché bien posé.
- Les méthodes d'inversion stochastique, développées par Tarantola [Tarantola(1987)], qui supposent que toutes les variables sont aléatoires, afin de représenter les incertitudes. La solution du problème est la fonction de densité de probabilité associée à l'inconnue p et à la mesure d . Il en ressort des grandeurs caractéristiques telle que la valeur moyenne, la valeur de plus grande probabilité, les corrélations, ...

Ces trois approches permettent de fournir des "outils" pour inverser le modèle physique, qui servent à utiliser des conditions choisies *a priori*, ou à sélectionner parmi les solutions celles qui respectent un critère provenant de diverses considérations "extra-mathématiques".

2.2 Problèmes directs, problèmes inverses

Nous pouvons appréhender les notions de problème direct et inverse à l'aide d'une représentation schématique utilisant la notion de système. La résolution d'un système peut être vu comme la réponse d (température, contraintes) à une sollicitation X (conditions aux limites, forces).

2.2.1 Problème direct

Le système étudié dépend de paramètres (notés symboliquement p), tels que la géométrie, les caractéristiques du matériaux. Le problème direct consiste à calculer la réponse du système d à partir de la donnée des sollicitations X , et des paramètres p . Les équations (G) modélisant le problème physique donne le plus souvent la réponse d comme une fonction implicite de X , et p .

$$G(X, p; d) = 0$$

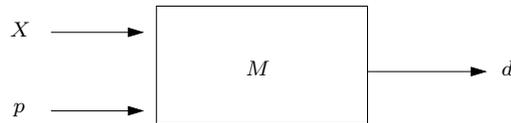


FIG. 2.1 – schéma de principe d'un problème direct

Dans la plupart des cas, les problèmes directs sont bien posés au sens de Hadamard [Hadamard(1902)], [Hadamard(1932)], [Hadamard(1964)].

2.2.2 Problème inverse

La plupart du temps, les problèmes inverses viennent de situations où nous avons une connaissance partielle du système (sur la géométrie, sur les matériaux, sur les conditions aux limites). Ainsi pour résoudre le problème, il est nécessaire, en plus des informations d'entrée (qui peuvent être partielles), de connaître au moins partiellement la sortie d afin de reconstruire les données manquantes. Le terme "inverse" provient du fait que le modèle physique est utilisé à l'envers : Connaissant (pas complètement) la sortie d , nous cherchons à reconstruire le jeu de paramètres et/ou de sollicitations (échappant à la mesure directe) permettant de l'obtenir.

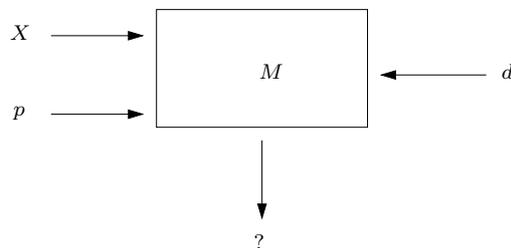


FIG. 2.2 – schéma de principe d'un problème inverse

La notion de problèmes bien et mal posés remonte au premier tiers du XX^{ème} siècle ([Hadamard(1932)] et [Hadamard(1964)]) et fut principalement proposée par J.

Hadamard. La question qui nous occupe, dans ce qui va suivre, est de savoir quelles sont les conditions qui, jointes au modèle, sont propres à déterminer la solution. Hadamard définit donc un problème bien posé qui devra admettre un nombre limité de solutions (ou, tout au plus, une infinité de solutions isolées les unes des autres). Si ce problème différentiel est linéaire, nous pourrions alors préciser qu'il admettra une solution et une seule, autrement dit, qu'il sera possible et déterminé. Ainsi pour savoir si nous devons considérer un type général de problème comme correctement posé, nous devons étudier à son égard les questions suivantes :

- le problème est-il possible ?
- Est-il déterminé ?

Ces deux propriétés peuvent exceptionnellement tomber en défaut, mais alors le problème ne cesse d'être impossible que pour devenir indéterminé. Autrement dit, si nous pouvons nous assurer que le système ne peut admettre plus d'une solution, nous sommes assurés par là même qu'il en admet une.

- Mais, de plus, nous exigeons que la solution soit continue par rapport aux données, c'est à dire qu'une altération très petite de celle-ci ne puisse changer que très peu les valeurs inconnues de la fonction.

Cette condition doit être nécessairement remplie si le problème est relatif à un phénomène physique précis. S'il en est ainsi, les données aux limites correspondent aux valeurs de certaines grandeurs que l'on peut toujours supposer mesurées physiquement. Or, physiquement veut toujours dire approximativement. Si de très petites erreurs suffisaient à changer du tout au tout la marche du phénomène étudié, ce serait comme si les données aux limites n'étaient pas connues du tout ; ou mieux encore, le phénomène paraîtrait, dans de telles conditions, régi non par des lois précises mais par le hasard¹.

Si l'une de ces conditions n'est pas remplie, alors le problème est dit mal posé. Hadamard donna un exemple de problème mal posé en 1902 pour l'équation de Laplace ([Hadamard(1902)]). Nous retrouvons aussi des problèmes mal posés dans la tomographie aux rayons X, le traitement du signal, la reconstruction d'image, la conduction de chaleur, et la technologie radar. Pour des exemples intéressants, voir [Elden *et al.*(2000)] et [Andersson *et al.*(1998)].

Les problèmes mal posés peuvent venir de variations de problèmes directs. Un exemple de problème direct pourrait être un problème où nous voudrions prévoir

¹C'est la conception même de hasard telle que nous la devons à Poincaré : il y a hasard lorsqu'un phénomène semble, pour nos sens, ne pas être déterminé par ses conditions initiales, grâce au fait qu'il est notablement modifié par une altération insensible de celles-ci.

le futur d'une situation physique. Prédire l'état passé du même problème physique connaissant l'état présent peut amener un problème mal posé, appelé par J.B.Keller ([Keller(1976)]) problème inverse.

Souvent, les premières conditions qui rendent un problème bien posé sont satisfaites, car un raisonnement physique prouve l'existence. De plus, si la solution n'est pas unique, nous pouvons utiliser des restrictions supplémentaires afin d'isoler une seule solution. Nous pouvons ainsi satisfaire la deuxième condition. C'est la troisième condition non remplie qui rend un problème mal posé difficile à traiter. Par exemple, les ordinateurs ont une précision finie et introduisent des erreurs dans l'approximation et la résolution des problèmes. Pour des problèmes mal posés, cela signifie qu'il peut exister une erreur non bornée dans des solutions obtenues numériquement.

Lorsque l'une des (ou les deux) premières conditions ne sont pas satisfaites, nous rentrons dans la sous catégories des problèmes d'identifiabilité d'une grandeur. C'est là un sujet d'étude à part entière, avant même de chercher la solution, il faut en effet savoir si elle existe et avoir une idée de son unicité. Voir notamment les études de [Rondi(2000)] pour l'étude de l'unicité et de stabilité de défauts de frontières, [Nanda & Das(1996)], de [Le Meur *et al.*(2002)] pour une détermination d'un flux de chaleur pour un contact solide solide, de [Kang & J.K.Seo(2001)] pour l'étude de l'unicité et de stabilité du problème de conduction inverse avec une seule mesure. Notons également les recherches de [Kugler(2003)] sur l'identification de la conductivité thermique variant avec la température, de [Fernández-Berdaguer(1998)] sur l'identification de paramètres acoustiques, sur la mesure et la détection de fissures par [Ben Abda *et al.*(1999)]. Du même auteur, remarquons une étude théorique sur l'identifiabilité et la stabilité des problèmes inverses géométriques de type sigorini [Ben Abda *et al.*(1997)]. La notion d'identifiabilité au sens des moindres carrés est investigué par [Chavent & Kunisch(2000)]. Une étude de stabilité conditionnelle pour un problème au frontière de Neumann est faite par [Chen *et al.*(2000)], et pour finir ces illustrations, citons [Engl & Kugler(2004)] pour son étude de quelques aspects théorique de problème inverses non linéaire.

2.3 Régularisation de l'inversion

Nous allons donner ici quelques notions de régularisation, bien que nous n'emploierons pas de telles méthodes dans cette thèse.

Nous développons ici le concept de régularisation initialement introduit par Ti-

khonov et Arsenin [Tikhonov & Arsenin(1977)]. L'objectif de toute méthode de régularisation est double. D'une part, cela permet de définir un cadre où nous pouvons incorporer toutes les informations supplémentaires à disposition qui proviennent nécessairement de considérations physiques ou qualitatives extérieures aux mathématiques. En effet, les mathématiques ne remplacent pas l'absence d'informations, mais permettent éventuellement d'utiliser au mieux celles mises à disposition. D'autre part, il faut faire en sorte que la solution obtenue grâce aux informations supplémentaires soit stable vis à vis des mesures. Nous allons effleurer la méthode proposée par Tikhonov, enracinée dans l'analyse fonctionnelle et le calcul des variations. D'autres auteurs ont aussi développé et analysé des méthodes de régularisation, notamment [Elden *et al.*(2000)], ou [Groetsch(1984)] qui étudie la régularisation de Tikhonov pour le problème particulier des équations de Fredholm.

Pour commencer, nous supposons que les ensembles de paramètres à identifier p et de données d sont deux espaces de Hilbert, respectivement P et D . Le problème direct est modélisé à l'aide d'un opérateur $G : P \rightarrow D$.

Le problème inverse s'écrit :

$$\text{trouver } p \in P \text{ tel que } G(p) = d \text{ (} d \in D \text{ donné)}. \quad (2.1)$$

2.3.1 Définition et propriétés d'un opérateur régularisant

L'idée est la suivante : choisissons un couple $(p_0, d_0) \in (P \times D)$ tel que :

$$G(p_0) = d_0, \quad (2.2)$$

où p_0 n'est pas forcément unique.

Définition : Un opérateur $R(d, \alpha)$, dépendant du paramètre réel positif α , est dit régularisant pour l'équation $G(p_0) = d_0$ au voisinage de $d = d_0$, s'il possède les propriétés suivantes :

- Il existe $\delta_1 > 0$ tel que $R(d, \alpha)$ soit défini pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $d_0 \in D$ vérifiant :

$$\|d - d_0\| \leq \delta_1.$$

- Il existe une fonction $\alpha = \alpha(\delta)$ de la variable δ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) \leq \delta_1$ tel que :

$$\|d - d_0\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|R(d, \alpha(\delta)) - p_0\| \leq \varepsilon.$$

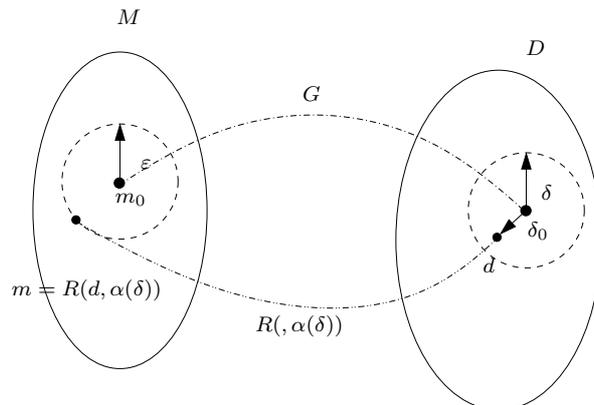


FIG. 2.3 – Opérateur régularisant pour $G(p_0) = d_0$

Cela veut dire qu'un tel opérateur $R(d, \alpha)$ indexé par le paramètre α agit sur un voisinage de d_0 et, moyennant un choix judicieux du paramètre α , transforme tout $d \in D$ voisin de d_0 en $p = R(d, \alpha)$ voisin de p_0 dans P . de plus $p_0 \in P$ peut être approché par $R(d, \alpha)$ d'aussi près que l'on veut avec un bon choix de α .

Dans le cas où l'opérateur G est continu, les opérateurs régularisants vérifient la propriété suivante :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R(G(p), \alpha) = p.$$

2.3.2 Construction d'un opérateur régularisant

Nous pouvons bâtir une régularisation en partant d'un principe de sélection [Tikhonov & Arsenin(1977)]. Si nous supposons que le second membre d possède une erreur ne dépassant pas une certaine valeur δ par rapport au second membre exact d_{exact} ,

$$\|d - d_{exact}\|_D \leq \delta,$$

nous allons alors chercher une solution au problème inverse (2.1) dans le sous ensemble $P_\delta \subset P$ des éléments p vérifiant :

$$\|G(p) - d\|_D \leq \delta. \quad (2.3)$$

Il ne suffit malheureusement pas de prendre un élément quelconque de P_δ . En effet, une telle solution n'est en général pas continue par rapport à δ . Il est donc nécessaire de sélectionner un élément p_δ de P_δ qui soit continu par rapport à δ pourvu que δ soit assez petit.

Nous pouvons choisir par exemple :

$$\Omega(p) = \|p - \bar{p}\|_P^2 \quad \bar{p} \in P \text{ valeur de référence fixée,} \quad (2.4)$$

qui signifie que nous allons chercher parmi toutes les solutions à δ près de (2.1), celle qui est la plus proche d'une valeur de référence \bar{p} jugée vraisemblable ou représentative au regard de considérations physiques.

Il n'y a pas de limitation au choix de Ω , qui traduira de façon mathématique le critère de sélection pour restreindre le champ des solutions approchées. Une fois Ω choisie, la solution régularisée de (2.1) est un élément p_δ qui minimise $\Omega(p)$ sur $P_1 \cap P_\delta$. Cet élément p_δ peut être considéré comme le résultat d'une action de l'opérateur $R(d, \delta)$ sur d , dépendant de δ .

La propriété de toute solution régularisée p_δ est donc de minimiser $\Omega(p)$ sous la contrainte (2.3). Cela revient à minimiser le Lagrangien suivant :

$$S_\alpha(p, d) = \alpha \left[\frac{1}{\alpha} \|G(p) - d\|_D^2 + \Omega(p) \right] = \|G(p) - d\|_D^2 + \alpha \Omega(p), \quad (2.5)$$

où $1/\alpha$ est le multiplicateur de Lagrange associée à la contrainte (2.3).

La propriété suivante :

$$\inf_{p \in P_1} S_\alpha(p, d) = S_\alpha(p_\alpha, d),$$

nous explique que, quel que soit la valeur fixée du paramètre α , $S_\alpha(p, d)$ admet au moins un minimum.

Diverses façons de choisir le paramètre α sont envisageables, mais nous ne les expliquerons pas ici, et en pratique, le choix du paramètre α peut être intuitif, en se rappelant qu'il mesure un compromis.

2.4 La minimisation

Nous avons vu précédemment que la résolution pratique des problèmes inverses nécessite le plus souvent la minimisation d'une fonction-coût. Le problème de minimisation incorpore d'une part l'information physique sur le problème considéré (distance entre les données observées d^{obs} et calculée $d(p)$), et d'autre part des informations *a priori* (terme régularisant $R(p)$) :

$$\min J(p) = \text{dist}(d^{obs}, d(p)) + R(p). \quad (2.6)$$

Dans certains cas, des informations *a priori* sont ajoutées (ou substituées à $R(p)$) au moyen de contraintes d'inégalité, et la minimisation (2.6) est faite sous contraintes.

Rappelons que le problème direct, c'est à dire le calcul de la mesure d à partir du modèle physique pour une valeur donnée de l'inconnue p , nécessite habituellement la résolution d'un problème aux limites et/ou d'évolution, qui en lui même peut se révéler coûteux : d est fonction de p par l'intermédiaire des équations de la physique, appelées équations d'état. Lors de la minimisation de J , chaque évaluation de J nécessite un tel calcul direct. Il existe une littérature abondante sur la minimisation, puisque c'est en effet une méthode commune à de nombreux problèmes inverses. Citons par exemple, pour des généralité sur la minimisation, [Denisov(1999)], ainsi que [Fridman(1956)] pour une méthode d'approximation successive des intégrales de Fredholm.

2.4.1 Quelques méthodes de minimisations

La choix de la méthode de minimisation dépend évidemment des propriétés de la fonctionnelle coût J choisie, et des contraintes éventuellement prises en compte.

Fonctionnelle J différentiable sans contrainte

Ce type de choix est fréquent, en pratique, lorsque la fonctionnelle coût mesure la distance entre l'observé et le calcul en norme quadratique :

$$J(p) = \|d^{obs} - d(p)\|^2 + R(p)$$

Si le terme régularisant $R(p)$ est également différentiable, les méthodes classiques de minimisation faisant appel à l'évaluation du gradient peuvent être utilisées :

- Gradient conjugué
- Newton et quasi Newton (BFGS, par exemple)

Les algorithmes de minimisation mentionnés déterminent une suite de direction de descente s_n construite à partir du gradient $\nabla J(p_n)$ au point courant, et procède à une minimisation unidimensionnelle suivant chacune de ces directions successives :

$$\min_{t \geq 0} J(p_n + s_n t).$$

Chaque type d'algorithme se distingue par le principe mis en œuvre pour construire cette suite. L'évaluation du gradient joue clairement un rôle primordial dans ceux-ci.

Compte tenu du coût numérique d'une évaluation de J (dû principalement à la résolution du problème direct), il est essentiel d'optimiser le coût additionnel de l'évaluation du gradient de J .

Fonctionnelle non différentiable

Cela correspond par exemple au choix de distances en norme L^1 :

$$J(p) = |d^{obs} - d(p)|,$$

ou en norme L^∞

$$J(p) = \max |d^{obs} - d(p)|.$$

L'inversion probabiliste, ou bayésienne, [Tarantola(1987)] conduit dans le cas de densités de probabilité uniforme, à la minimisation d'une norme L^∞ .

Méthodes évolutionnaires, algorithmes génétiques

La minimisation de J peut aussi reposer sur l'utilisation de tirage aléatoire.

2.4.2 Minimisation d'une fonctionnelle quadratique

Si le problème direct est linéaire, une régularisation au sens de Tikhonov ramène souvent la résolution d'un problème inverse à celle d'un problème de minimisation de la forme suivante :

$$\min_p J(p), \quad J(p) = \frac{1}{2} \|Gp - d^{obs}\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|Lp - g\|^2. \quad (2.7)$$

Ici, G est l'opérateur linéaire du modèle physique, α le paramètre de régularisation et $Lp - g$ un stabilisateur (par exemple, l'écart à une valeur moyenne $p - p_0$). La fonctionnelle ainsi construite est définie positive, de sorte que sa minimisation revient à l'annulation de son gradient. Remarquons que la solution optimale n'existe peut être pas. Cependant, avec cette méthode, nous trouverons une solution au sens des moindres carrés. Nous parlons alors de quasiréversibilité [Lattes & Lions(1969)].

Lorsque l'on regarde ce problème de façon discrète, le système linéaire correspondant à l'annulation du gradient s'écrit sous la forme suivante (G^* est le dual de G , et dans les espaces considérés, $G^* = \overline{G^T}$, le transposé conjugué de G) :

$$[G^*G + \alpha L^*L]p = G^*d^{obs} + \alpha L^*g. \quad (2.8)$$

La résolution de ce système linéaire passe par le calcul de la matrice D_α ,

$$D_\alpha = G^*G + \alpha L^*L \quad (2.9)$$

puis, en supposant l'emploi d'un solveur direct à sa factorisation par un algorithme de Choleski. En pratique, il n'est absolument pas recommandé de procéder ainsi, car

le conditionnement $Cond(D_\alpha) \approx Cond(G^*G)$ pour $\alpha \ll 1$. Nous élevons ainsi au carré le conditionnement déjà grand de G , matrice représentant le problème initial. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes alternatives afin de parer à cette difficulté intrinsèque numérique.

2.4.3 Méthodes d'évaluation du gradient

Dans le cas d'une fonctionnelle quadratique, nous avons vu que la minimisation revenait à annuler son gradient. Il est pour cela nécessaire d'avoir une méthode efficace pour calculer ce gradient au point courant. Diverses techniques sont envisageables :

Évaluation par différences finies

Pour des accroissements petits, mais finis, nous pouvons écrire schématiquement

$$\nabla J_p \delta p \approx J(p + \delta p) - J(p)$$

L'évaluation numérique complète du gradient $\{\nabla J_{p_1}, \nabla J_{p_2}, \dots, \nabla J_{p_n}\}$ demande $1 + n$ calculs directs, correspondant à $\delta p = 0$ (évaluation de $J(p)$ au point courant et pour $\Delta p = (\delta p_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \delta p_n)$. Cette approche a l'avantage d'une mise en œuvre simple, mais présente deux inconvénients :

- une évaluation du gradient coûte k calculs directs, k étant le nombre de paramètres
- La dérivation numérique altère la précision de l'évaluation (d'autant plus que l'opération devient instable lorsque $\|\Delta p\| \rightarrow 0$).

Il est donc préférable de remplacer la dérivation numérique coûteuse et peu fiable par d'autres approches reposant sur une dérivation analytique préalable.

Dérivation directe

Illustrons ce principe sur le cas d'une relation linéaire : x est solution d'un système linéaire paramétré par p :

$$A(p)x - f(p) = 0. \quad (2.10)$$

Cette approche repose sur la dérivation par rapport à chaque p_i de l'équation d'état (2.10) :

$$A(p) \partial_{p_i} x = \partial_{p_i} f(p) - \partial_{p_i} A(p) x. \quad (2.11)$$

La dérivée de J s'écrit donc, en utilisant la notation D qui exprime la distance entre d^{obs} et d .

$$\nabla J_{p_i} = \partial_p D(d^{obs}, d) \partial_{p_i} d + \partial_{p_i} R \quad (2.12)$$

Une fois résolue l'équation d'état dérivée (2.11) par rapport à $\partial_{p_i} d$, il faut reporter le résultat dans l'expression de la dérivée partielle ∇J_{p_i} (2.12). Quelques remarques sont à faire sur le procédé :

- Cette méthode repose sur $1 + k$ calculs directs. Cependant, la factorisation et l'assemblage de A est fait dans l'équation d'état, et se retrouve dans l'équation dérivée. Il n'est donc pas nécessaire de répéter cette opération.
- Ainsi, le supplément de calcul pour l'évaluation du gradient est modeste comparée à la résolution de l'équation d'état seule.
- Il n'y a pas lieu de craindre une instabilité liée à la méthode de calcul, qui repose sur l'utilisation répétée de la matrice de l'équation d'état.

Méthode de l'état adjoint

Nous allons voir ici l'aspect discret à des fins de comparaison. L'aspect continu sera vu dans le paragraphe 5.5.1.

La méthode de l'état adjoint repose aussi sur l'utilisation d'une dérivation analytique, mais adopte le point de vue de la minimisation sous contrainte :

$$L(p, d) = \tilde{d}^T (A(p)x - f(p))$$

La contrainte du respect de l'équation d'état (2.10) pour tout p , est associée à un multiplicateur de Lagrange \tilde{d} . On calcule alors la variation totale de L qui cherche à rendre nul le gradient ∇J_{p_i} , avec la notation D qui exprime la distance entre d^{obs} et d , et R le terme régularisant

$$\begin{aligned} \delta L(p, d) &= \delta \left((D(d^{obs}, d) + R) + \tilde{d}^T (A(p)x - f(p)) \right) \\ &= \partial_d D(d^{obs}, d) \cdot \delta d + \partial_p R \cdot \delta p + \tilde{d}^T (\partial_p A \cdot \delta p x - \partial_p f \cdot \delta p + A \cdot \delta d) \\ &= \left\{ \partial_d D(d^{obs}, d) + \tilde{d}^T A \right\} \delta d + \left\{ \partial_p R + \tilde{d}^T (\partial_p A d - \partial_p f) \right\} \delta p. \end{aligned}$$

Notons que le terme en δd est nul pour respecter l'équation d'état. A ce stade, le multiplicateur \tilde{d} n'est pas encore fixé. En partant du principe que la variation de L ne devrait être non nulle qu'en présence de variation de p , on définit l'état adjoint comme la valeur du multiplicateur de Lagrange \tilde{d} telle que le terme en δd s'annule, c'est à dire comme solution de l'équation adjointe :

$$A(p)^T \tilde{d} = -\partial_d D^T(d^{obs}, d(p)). \quad (2.13)$$

Pour ce choix particulier de \tilde{d} , la variation de J induite par une variation de p est donc donnée par :

$$\delta J(p, d) = \delta L(p, d) = \left\{ \partial_p R + \tilde{d}^T (\partial_p A d - \partial_p f) \right\} \delta p, \quad (2.14)$$

dans laquelle d et \tilde{d} sont les solutions respectives de l'équation d'état et de l'équation adjointe. Cette approche possède les caractéristiques suivantes :

- L'état adjoint ne dépend que de l'état courant $d(p)$
- Le calcul du gradient complet ∇J_p repose uniquement sur deux calculs directs (la résolution de l'équation d'état et de l'équation adjointe), et ce, quel que soit le nombre k de paramètres inconnus.

2.5 Conclusion

Les méthodes exposées ici sont liées à la mise en œuvre efficace des algorithmes de minimisation utilisant le gradient de la fonction coût : Gradient conjugué, quasi-Newton, ... Ces derniers, d'utilisation classique et de mise en œuvre bien maîtrisée, sont aveugles par nature : ils partent d'une valeur initiale de l'inconnue à identifier, et ils arrivent à un résultat unique, qui peut être un minimum local ou global. L'utilisateur ignore généralement dans quelle situation il se trouve, sauf dans quelques cas particuliers où la fonction-coût est convexe. Ce résultat peut être assorti d'informations locales complémentaires.

Chapitre 3

Méthodes numériques

3.1 Introduction

A l'exception de rares situations académiques, la modélisation de phénomènes physiques produit des systèmes d'équations dont nous ne pouvons espérer obtenir une solution analytique, et le recours aux méthodes de résolution numérique est alors inévitable. Les systèmes d'équations obtenues dans le cadre de cette thèse n'échappent pas à ce constat et le but de ce chapitre est d'exposer les méthodes numériques mises en place pour résoudre ces équations.

Grâce aux constants progrès de l'informatique, aussi bien au niveau logiciel que matériel, les outils numériques ont gagné une place non négligeable, voire prépondérante, dans l'analyse et la prédiction des caractéristiques de phénomènes physiques de plus en plus complexes. L'un des avantages est que l'expérience numérique offre un moyen d'investigation non-intrusif permettant d'obtenir des informations que ne peuvent parfois atteindre les autres moyens d'études.

Les objectifs d'une approche numérique sont doubles : d'une part obtenir une solution aussi proche que possible de la solution exacte des équations continues et d'autre part, l'obtenir au moindre coût (le temps, de calcul).

Elle procède en deux étapes :

1. Approximer le problème continu de façon cohérente, ce qui conduit à l'obtention d'un système algébrique de dimension finie.
2. Inverser ce dernier le plus efficacement possible.

3.2 Méthodes spectrales

De nombreuses méthodes numériques ont été développées pour résoudre de manière approchée des équations continues. Qu'il s'agisse des volumes finis (VF), différences finies (DF), éléments finis (EF) ou méthodes d'ordre élevé ou spectrales, chacune a ses avantages et ses inconvénients. Notre choix s'est tourné vers les méthodes d'ordre élevé, du fait de leur précision supérieure aux méthodes EF, VF, DF à nombre de degrés de liberté égal.

Une des principales caractéristiques des méthodes d'ordre élevé est, pour des solutions suffisamment régulières, la convergence exponentielle avec le nombre de degré de liberté de l'approximation numérique vers la solution exacte qu'elle approxime. De plus, elles ont l'avantage de créer peu de dissipation et de dispersion numérique.

L'utilisation des méthodes d'ordre élevé a connu un renouveau récent. Les premiers documents majeurs leur étant consacré sont les ouvrages de [Gottlieb & Orszag(1977)], [Funaro(1992)], [Bernardi & Maday(1992)] et, axé plus particulièrement sur leur application en mécanique des fluides, celui de [Canuto *et al.*(1987)]. Depuis, ces méthodes ont bénéficié de nombreuses améliorations tant théoriques que pratiques. L'ouvrage de [Deville *et al.*(2002)] réunit les dernières avancées dans le domaine appliqué aux écoulements incompressibles.

Dans la suite qui va décrire leur mise en œuvre, nous limiterons leur application à l'équation de la chaleur scalaire :

$$-\nabla \cdot (\lambda \nabla u) = f, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1)$$

$$u = g_D, \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (3.2)$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_N, \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad (3.3)$$

où \mathbf{n} est la normale à la frontière pointant vers l'extérieur du domaine. Ici, Ω est un domaine bidimensionnel dont les frontières se scindent en deux parties Γ_D et Γ_N sujettes aux conditions limites de type Dirichlet et Neumann, respectivement. Pour la suite du document, nous considérerons que la fonction λ est au moins \mathcal{C}^1 et positive afin de ne pas changer la nature de l'équation étudiée.

3.2.1 Formulation variationnelle

Introduisons l'espace de Sobolev des fonctions admissibles pour le problème (3.1) sujet à des conditions limites de type Dirichlet homogène (le cas non homogène sera traité par relèvement au bord) :

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}, H^1(\Omega) = \left\{ v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où $L^2(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de carré sommable.

Après multiplication de (3.1) par une fonction test $v \in V$ et intégration sur le domaine Ω , la formulation variationnelle conduit à résoudre le problème suivant : trouver $u \in V$ tel que :

$$\int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla v) d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Gamma_N} v g_N d\Gamma_N, \quad \forall v \in V. \quad (3.4)$$

La contribution de la condition limite de type Neumann apparaît au travers de l'intégrale sur la frontière correspondante, les autres contributions sont nulles du fait de l'appartenance de v à V .

La réécriture de (3.4) sous une forme compacte amène au problème suivant : trouver $u \in V$ tel que :

$$A(u, v) = B(v), \quad \forall v \in V, \quad (3.5)$$

où A est un produit scalaire associé au membre de gauche de (3.4) et B une forme linéaire associé au membre de droite de (3.4). Dans le cas général, le problème ainsi posé admet une solution unique lorsque $\Gamma_D \neq \{\emptyset\}$, mais qui reste toujours inaccessible de manière analytique. Pour pouvoir le résoudre, il convient de le passer en dimension finie par l'approximation que l'on expose dans la section suivante.

3.2.2 Approximation de Galerkin

La résolution numérique du problème (3.5) n'est pas possible du fait du nombre de degrés de liberté infini. C'est pourquoi nous cherchons une approximation en dimension finie par une méthode de Galerkin. Cette approximation doit être consistante, dans le sens où le problème discret tend vers le problème continu lorsque le nombre de degrés de liberté tend vers l'infini.

Nous introduisons donc les espaces d'approximation suivants : $V_N = V \cap \mathbb{P}_N^2$ où \mathbb{P}_N est l'ensemble des polynômes d'une seule variable, de degré inférieur ou égal à N . L'ensemble \mathbb{P}_N^2 est celui des polynômes de deux variables, de degré N . En toute généralité, cet ensemble n'a pas forcément les mêmes degrés dans les directions de l'espace, mais dans un souci de clarté et pour ne pas alourdir les notations, nous allons nous restreindre au cas où l'approximation est du même ordre dans les deux directions.

La formulation de (3.5) devient donc : trouver $u_N \in V_N$ tel que :

$$A(u_N, v_N) = B(v_N), \quad \forall v_N \in V_N. \quad (3.6)$$

Étant donnée une base de \mathbb{P}_N , $\{h_i\}$, $i \in [0, N]$, chacun des éléments de V_N peut s'exprimer sous la forme :

$$u_N = \sum_{i,j=0}^N u_{ij} h_i h_j.$$

Les coefficients u_{ij} sont les inconnus du problème. Ainsi (3.6) devient :

$$\sum_{i,j=0}^N A(h_i h_j, h_k h_l) u_{ij} = B(h_k h_l), \quad \forall k, l \in [0, N]. \quad (3.7)$$

Cette équation ne tient pas encore compte des conditions aux limites de type Dirichlet qui seront traitées dans la section A.3. La méthode décrite jusqu'ici est commune aux éléments finis. La suite des opérations, qui concerne le choix des polynômes et l'évaluation des intégrales, est particulière aux méthodes d'ordre élevé.

3.2.3 Éléments spectraux

Présentée par [Patera(1984)], cette méthode se démarque notamment de celle des éléments finis par le choix de la base de polynômes sur laquelle sont évaluées les inconnues. Ici, la base est construite avec des polynômes de Lagrange associés à un ensemble de points du domaine. Le choix de ces points est propre aux méthodes spectrales, il s'agit de racines de polynômes solutions d'un problème de Sturm-Liouville singulier. Deux types de polynômes sont couramment utilisés : ceux de Chebyshev et ceux de Legendre. D'une mise en œuvre plus aisée dans les problèmes nous concernant, notre choix s'est porté sur les polynômes de Legendre (Voir l'annexe A.1 pour plus de détails sur les outils d'approximation introduit dans cette section).

L'interpolation de Lagrange est effectuée sur une grille de Gauss-Lobatto-Legendre dans chaque direction, dont les points sont dans $[-1, 1]$, domaine de référence mono-dimensionnel. On associe à ce domaine celui, noté Λ de référence des deux variables (s, t) , $\Lambda = [-1, 1]^2$. Le passage d'un point (s, t) du domaine de référence à un point (x, y) du domaine physique rectangulaire $\Omega = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ se fait par la transformation affine :

$$(x, y) = (x_1 + R_x(s + 1), y_1 + R_y(t + 1)), \quad (3.8)$$

où $R_x = \frac{x_2 - x_1}{2}$ et $R_y = \frac{y_2 - y_1}{2}$ sont les rayons des intervalles $[x_1, x_2]$ et $[y_1, y_2]$. Pour des raisons de clarté, nous considérerons dans la suite que le problème est posé dans le carré de référence $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

L'évaluation des intégrales repose sur une formule de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre d'ordre $2N - 1$ et permet d'obtenir le système suivant :

$$A(h_i h_j, h_k h_l) = \iint \lambda h'_i(x) h_j(y) h'_k(x) h_l(y) dx dy + \iint \lambda h_i(x) h'_j(y) h_k(x) h'_l(y) dx dy, \quad (3.9)$$

$$A(h_i h_j, h_k h_l) \approx A_N(h_i h_j, h_k h_l), \quad (3.10)$$

$$A_N(h_i h_j, h_k h_l) = \delta_{lj} \rho_j \sum_{p,k=0}^N \lambda_{pj} h'_i(\xi_p) h'_k(\xi_p) \rho_p + \delta_{ki} \rho_i \sum_{p,l=0}^N \lambda_{ip} h'_j(\xi_p) h'_l(\xi_p) \rho_p. \quad (3.11)$$

L'évaluation des termes est approchée dans l'ensemble \mathbb{P}_N^2 . En effet, le produit des dérivées $h'_i(x) h'_k(y)$ est un polynôme de degré $2N - 2$, et la formule de quadrature est exacte pour un polynôme de degré $2N - 1$. Mais la présence du produit $h_j(y) h_l(y)$ introduit un polynôme de degré $2N$, qui rend cette évaluation approchée.

Pour le second membre, dans le but de ne pas alourdir les notations, une seule contribution des termes faisant intervenir les conditions aux limites de type Neumann est décrite, par exemple celle de la frontière sud Γ_N^s :

$$B(h_k h_l) \approx B_N(h_k h_l) = \rho_k \rho_l f(\xi_k, \xi_l) - \delta_{lN} g_N(\xi_k, -1) \rho_k.$$

Ici, aucun des termes n'est évalué de manière exacte car les données du problème, f et g_N , ne sont pas en général des polynômes.

Nous pouvons définir les matrices de masse M , de rigidité K et de l'opérateur de l'équation de la chaleur H sous forme tensorielle :

$$K_{ij} = \sum_{p,k=0}^N \lambda_{pj} h'_i(\xi_p) h'_k(\xi_p) \rho_p, \\ M_{ij} = \delta_{ij} \rho_i, \\ H = (M \otimes K) + (K \otimes M). \quad (3.12)$$

En notant \mathbf{u} et \mathbf{f} les vecteurs ayant pour composantes respectives $\mathbf{u}_k = u_{ij}$ et $\mathbf{f}_k = f_{ij}$ avec $k = i + (j - 1)(N + 1)$, le système linéaire à résoudre s'écrit :

$$H\mathbf{u} = S\mathbf{f} - \mathcal{N}, \quad (3.13)$$

où \mathcal{N} représente les contributions des conditions limites de type Neumann.

En pratique, la prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet se fait en modifiant certaines lignes et colonnes du système. Pour plus de détails, il sera nécessaire de consulter l'annexe A.3. Nous noterons par la suite H_D et S_D les nouvelles matrices modifiées, tenant compte des conditions aux limites de Dirichlet.

Pour des conditions aux limites de type Dirichlet non homogène, un relèvement des données au bord permet de les prendre en compte. Cette opération revient à transférer au second membre l'application de H à un vecteur construit avec g_D . Finalement, le système devient :

$$H_D\mathbf{u} = S_D\mathbf{f} - \mathcal{N} - Hg_D. \quad (3.14)$$

3.3 Inversion du système algébrique

Quelle que soit la méthode de discrétisation choisie, les équations se mettent sous la forme d'un système linéaire, qui sera noté de façon générale $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. A représente la matrice de la version discrète de l'opérateur de l'équation de la chaleur, \mathbf{x} le vecteur des inconnues, et \mathbf{b} le second membre. La dimension du vecteur \mathbf{x} est égale au nombre d'inconnues n^2 à résoudre, qui peut être très grand. Formellement, la matrice A est de taille $n^2 \times n^2$.

Des méthodes précises et rapides sont nécessaires, ne nécessitant que le minimum de stockage mémoire. Suivant les propriétés de la matrice A , nous utiliserons :

- soit une méthode d'inversion directe.
- soit une méthode itérative.

Dans le cas présent (3.14), la matrice A est symétrique, définie positive.

Les propriétés de la fonction λ , présente dans l'équation (3.9), vont directement conditionner notre choix. Lorsque cette fonction est à variables séparées, nous choisirons d'utiliser la méthode directe dite de diagonalisation successive, alors que dans le cas contraire, nous préférons une méthode itérative. Nous avons choisi à cet effet une méthode de gradient conjugué préconditionné par le laplacien, lui-même inversé une technique de diagonalisation successive.

3.3.1 Méthode directe

La méthode dont nous allons expliquer le principe est décrite en détail dans [Lynch *et al.*(1964)]. La diagonalisation successive, dans le cas le plus général, sert à résoudre de manière directe les systèmes linéaires issus de la discrétisation des équations linéaires aux dérivées partielles. Cela inclue toutes les équations différentielles elliptiques à variables séparables. En effet, si le problème est séparable, alors la solution discrète peut être exprimée comme un produit tensoriel de solutions de plus basse dimension (et donc plus simple). Cela implique que les matrices issues de la discrétisation du système d'équation aux dérivées partielles peuvent aussi se mettre sous la forme de produits tensoriels de matrices d'ordre moins élevé.

Reprenons l'exemple (3.13) d'un système algébrique dont A est la matrice que nous considérons. En notant $h'_i(\xi_p) = D_{p,i}^X$ pour la direction X , rappelons que :

$$A_{k,l,i,j}u_{kl} = \rho_j \sum_{p,k=0}^N \lambda_{pj}u_{k,j}D_{p,k}^X D_{p,i}^X \rho_p + \rho_i \sum_{p,k=0}^N \lambda_{ip}u_{i,k}D_{p,k}^Y D_{p,j}^Y \rho_p. \quad (3.15)$$

Si l'expression de λ est à variables séparées, alors nous pouvons l'écrire :

$$\lambda_{ij} = \lambda_i^X \lambda_j^Y, \quad (3.16)$$

et factoriser dans (3.15) pour obtenir au final :

$$A_{k,l,i,j}u_{kl} = \lambda_j^Y \rho_j \sum_{p,k=0}^N \lambda_p^X u_{k,j} D_{p,k}^X D_{p,i}^X \rho_p u_{k,j} + \lambda_i^X \rho_i \sum_{p,k=0}^N \lambda_p^Y D_{p,k}^Y D_{p,j}^Y \rho_p u_{i,k}, \quad (3.17)$$

$$A_{k,l,i,j}u_{kl} = \lambda_j^Y \rho_j \sum_{k=0}^N M_{i,k}^X u_{k,j} + \lambda_i^X \rho_i \sum_{k=0}^N M_{j,k}^Y u_{i,k}, \quad (3.18)$$

$$M_{i,k}^X = \lambda_p^X u_{k,j} D_{p,k}^X D_{p,i}^X \rho_p, \quad (3.19)$$

$$M_{j,k}^Y = \lambda_p^Y D_{p,k}^Y D_{p,j}^Y \rho_p. \quad (3.20)$$

Sous cette forme, nous pouvons obtenir un système matriciel, qui, en utilisant les notations (3.19) et (3.20), s'écrit sous la forme :

$$M^X U P_X^T + P_Y U M^Y = P_X^T b P_Y, \quad (3.21)$$

$$P_{ij} = \lambda_j \rho_j \delta_{ij}.$$

Il reste à diviser par les poids d'intégration $\rho_i\rho_j$, et nous obtenons :

$$\widetilde{M}^X U + U \widetilde{M}^Y = \widetilde{b}, \quad (3.22)$$

$$\widetilde{b} = \frac{b}{\rho_i\rho_j},$$

$$\widetilde{M} = \frac{M}{\rho_i\rho_j}.$$

\widetilde{M}^X et \widetilde{M}^Y sont des matrices $n \times n$, alors que la matrice A est de dimension $n^2 \times n^2$. Du fait de la dimension de A , inverser cette matrice est très coûteux.

La particularité de la formulation présentée est que la solution exacte peut être évaluée numériquement avec un coût moindre que celui d'une méthode classique itérative. La matrice A va être inversée en utilisant les vecteurs propres et les valeurs propres des matrices X et Y .

Nous supposons que les matrices \widetilde{M}^X et \widetilde{M}^Y sont non singulières et ont des valeurs propres distinctes. Soient K_X et K_Y les matrices diagonales des valeurs propres $\{k_i^X\}$ de X et $\{k_i^Y\}$ de Y . Soient Q_X et Q_Y les matrices de passage définies par :

$$K_X = Q_X^{-1} X Q_X = Q_X^T X Q_X^{-1T}, \quad (3.23)$$

$$K_Y = Q_Y^{-1} B Q_Y = Q_Y^T B Q_Y^{-1T}. \quad (3.24)$$

Il faut maintenant introduire cette décomposition dans (3.22) :

$$\widetilde{M}^X Q_X Q_X^{-1} U + U \widetilde{M}^Y = \widetilde{b},$$

$$K_X Q_X^{-1} U + Q_X^{-1} U \widetilde{M}^Y = Q_X^{-1} \widetilde{b}.$$

et il faut recommencer pour la deuxième partie de droite :

$$K_X Q_X^{-1} U + Q_X^{-1} U Q_Y^{-1T} Q_Y^T \widetilde{M}^Y = Q_X^{-1} \widetilde{b},$$

$$K_X Q_X^{-1} U Q_Y^{-1T} + Q_X^{-1} U Q_Y^{-1T} K_Y = Q_X^{-1} \widetilde{b} Q_Y^{-1T}.$$

Pour simplifier les notations, notons $G = Q_X^{-1} \widetilde{b} Q_Y^{-1T}$ et $V = Q_X^{-1} U Q_Y^{-1T}$. Ainsi nous écrivons le système sous la forme simple suivante :

$$K_X V + V K_Y = (K_X + K_Y) V = G. \quad (3.25)$$

La solution V s'écrit alors :

$$V_{ij} = \frac{G_{ij}}{K_{Xi} + K_{Yj}} \quad (3.26)$$

Il suffit maintenant de revenir à U :

$$U = Q_X V Q_Y^T \quad (3.27)$$

L'évaluation de U (3.27) donne alors la solution exacte du système linéaire. Une manière de voir le fonctionnement de la diagonalisation successive nécessite la décomposition des opérations en trois parties :

- Le second membre est envoyé dans l'espace des valeurs propres : $G = Q_X^{-1} \tilde{b} Q_Y^{-1T}$.
- Le système, maintenant diagonal est résolu de façon évidente dans la base propre : $V = G (K_X + K_Y)^{-1}$.
- La solution calculée est renvoyée dans l'espace physique : $U = Q_X V Q_Y^T$. Ce calcul est l'inverse de la première étape, et renvoie le résultat dans la base de départ. C'est la solution.

L'avantage de cette méthode réside dans le précalcul de toutes les matrices : les matrices de passages et leurs inverses, de même que les valeurs propres sont calculées une seule fois.

Dans le cas des conditions au limites de Neumann sur toutes les frontières du domaine, le système va contenir une valeur propre nulle. La solution est donc définie à une constante près.

3.3.2 Méthode itérative

Lorsque le système d'équation original n'est pas à variables séparables, la solution la plus économique en terme de stockage, de coût de calcul et de stabilité, est d'utiliser une méthode itérative. Celle que nous avons choisie est un gradient conjugué préconditionné (voir [Hestenes & Stiefel(1952)]). Elle est construite sur la formulation faible du problème à résoudre, ce qui a pour avantage de réduire le conditionnement du système, et permet ainsi de le résoudre avec moins d'instabilités numériques.

L'algorithme que nous avons utilisé est détaillé dans l'annexe A.4.

Une manière de diminuer le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence du gradient conjugué, consiste à utiliser un préconditionneur. Plus le préconditionneur approchera le problème initial, meilleur il sera, et le système convergera avec un nombre plus réduit d'itérations. De nombreux préconditionneurs existent dans la littérature, adaptés à chaque problème en particulier. Notre système d'équation (3.1) devient une équation de Poisson dès lors que la fonction λ est constante. Par conséquent, nous avons choisi d'utiliser un préconditionneur utili-

sant la solution du laplacien, muni de conditions aux limites de types Neumann homogènes. Cette solution est déterminée numériquement à l'aide de la diagonalisation successive, dont le principe est vu au paragraphe 3.3.1.

3.3.3 Discrétisation temporelle

Afin de générer des données, nous avons eu besoin d'un solveur instationnaire du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla (\lambda \nabla u) = f \\ u = u_0, \quad \text{à } t = t_0 \\ u = g_D, \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_N, \quad \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Nous avons à cette fin choisi de modifier le solveur stationnaire précédent afin d'inclure un schéma de discrétisation temporel implicite d'ordre 2.

Chapitre 4

Complétion de données à la frontière

4.1 Problème de Cauchy : Motivations, domaines d'application

Les problèmes inverses de transfert de chaleur ont de nombreuses applications dans beaucoup de branches de la science et de l'ingénierie. Par exemple, la température d'une surface très chaude n'est pas facilement mesurable directement avec des capteurs. Habituellement, ces capteurs sont placés juste sous la surface, et la température de la surface est estimée par analyse inverse.

La connaissance de la température sur un bord de domaine inaccessible à des mesures expérimentales constitue un enjeu important tant sur le plan industriel que scientifique. La détermination de la donnée n'est alors possible que grâce à la surabondance d'informations sur une partie non négligeable de la frontière restante. On parle alors de complétion de données. Ce problème rentre dans le cadre très général des problèmes inverses. Il s'agit de retrouver une des conditions aux limites d'un domaine. Ce problème devient important quand les mesures directes sur la frontière considérée sont irréalisables ou impossibles, comme cela arrive dans plein de situations pratiques : par exemple la mesure de températures d'une surface de circuits intégrés. Une des applications possibles est l'analyse non destructive d'un matériau : trouver (ou retrouver) une fracture dans une pièce, ou bien chercher les défauts dans une pièce, composée de deux parties collées, en n'effectuant que des mesures sur les bords du domaine. Habituellement, ces problèmes inverses sont mal-posés, c'est à dire que la solution n'est pas unique et elle est sensible aux erreurs de mesures.

On s'intéresse dans ce travail à l'étude numérique d'un algorithme itératif, introduit par [Kozlov *et al.*(1991)], pour résoudre le problème de Cauchy introduit par la complétion des données. L'objectif étant de mesurer numériquement son efficacité en terme de stabilité, précision et coût dans le cas d'une approximation du modèle par une méthode numérique d'ordre élevé.

Ce problème restant ouvert, d'autres auteurs ont évidemment trouvé des résultats sur la manière de le résoudre. Commençons par [Chen *et al.*(2001b)] et [Eldén(1987)] pour des bases mathématiques et des considérations générales sur les solutions du problème de Cauchy et leur première approche numérique. Citons [Hayashi *et al.*(2002)] pour une méthode directe de résolution du problème à l'aide d'élément aux frontières et [Hon & Wei(2001)] pour l'utilisation de l'algorithme de Backus-Gilbert. L'étude de divers algorithmes a été faite, entre autres par [Hon & Wu(2000)] qui utilise les propriétés des fonctions harmoniques pour améliorer la qualité de la solution numérique, par [Johansson(2004)] qui utilise l'algorithme de Kozlov, par [Titarenko & Yagola(2002)] pour une méthode numérique se servant de polyèdres tronqués comme élément de discrétisation. [Wei *et al.*(2003)] étend l'étude de ce problème bidimensionnel à des problèmes de dimension supérieure à deux. Par exemple, [Marin *et al.*(2001)], [Marin & andD. Lesnic(2002)] et [Mera *et al.*(2000)] résolvent ce problème par la méthode des éléments au frontières.

4.2 La complétion de données : Un problème mal posé

A l'aide d'exemple pour commencer, nous allons montrer que la complétion de données est un problème mal posé. Nous verrons ensuite comment formuler mathématiquement la complétion de données, et nous établirons la solution générale d'un problème de Cauchy et un critère de stabilité dans l'annexe correspondante B.1.

4.2.1 Un exemple

Soit u , fonction de x et y , solution du problème de cauchy, avec les données suivantes :

$$\begin{cases} \Delta u_n(x, y) = 0 & (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \\ u_n(x, 0) = 0 & x \in \mathbf{R} \\ \partial_y u_n(x, 0) = \frac{1}{n} \sin(nx) & x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{R}_+^* \end{cases}$$

La solution cherchée est de la forme $u_n(x, y) = A_n(x) B_n(y)$. La résolution du problème nous donne $u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \operatorname{sh}(ny)$.

Lorsque n tend vers l'infini, la dérivée $\partial_y u_n(x, 0)$ converge uniformément vers 0. cependant, pour $y > 0$, nous remarquons que $u_n(x, y)$ tend vers l'infini. Ainsi, la troisième condition de Hadamard définissant les problèmes bien posés est violée. Le problème est mal posé au sens de Hadamard.

L'article de [Seidman & Eldeén(1990)] (de même que celui de [Berntsson & Eldén(2001)]) nous explique comment borner la solution et ainsi limiter les instabilités à l'aide d'une transformée de Fourier, qui sert ainsi de "filtre" et diminue la dépendance non continue de la solution face aux données à la frontière connues.

4.3 Algorithme de Kozlov

Nous allons donc nous servir des travaux de Kozlov [Kozlov & Maz'ya(1989)], [Kozlov *et al.*(1991)], [Kozlov *et al.*(1990)], [Kozlov & Samsonov(2003)], de Jourhmane et Nachaoui ([Jourhmane & Nachaoui(1996)]), [Jourhmane & Nachaoui(2002)], [Jourhmane & Nachaoui(1999)], et Amel Ben Abda pour évaluer la complétion de données sur la frontière d'un domaine. Nous allons nous servir d'un algorithme itératif, appelé algorithme de Kozlov.

4.3.1 Notations

Dans cette étude, nous considérons l'équation de la chaleur stationnaire : on cherche T solution de

$$\nabla^2 T(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.1)$$

où Ω est un ouvert borné de R^2 , muni des conditions aux limites suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} T|_{\Gamma_1} = f_1, \\ T|_{\Gamma_2} = f_2, \\ \partial_n T|_{\Gamma_2} = q_2, \\ \partial_n T|_{\Gamma_3} = q_3, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où f_1 et f_2 sont les températures mesurées sur Γ_1 et Γ_2 , q_2 et q_3 sont les flux de chaleur imposés sur les normales aux frontières de Ω .

Il faut remarquer que, dans l'expression des conditions aux limites (4.2), la frontière Γ_2 est surdéterminée, puisque à la fois température et flux de chaleur

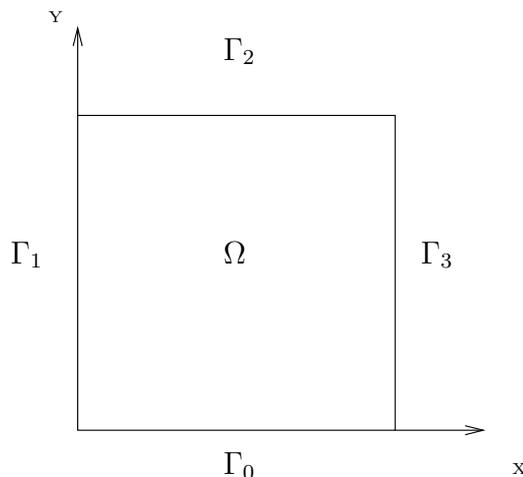


FIG. 4.1 – Notations

sont connus. La frontière Γ_0 est sous déterminée, puisque aucune information n'est spécifiée dessus.

La température et le flux de chaleur sur cette frontière sont donc inconnus et doivent être calculés. Il s'agit donc d'un problème de Cauchy. L'assurance que ce problème inverse, défini par les équations (4.1), et (4.2), soit inversible est que $mes(\Gamma_2) \geq mes(\Gamma_0)$ [Lesnic *et al.*(1997)]. Bien que le problème peut avoir une solution unique, il reste néanmoins instable, comme tout problème inverse, vis à vis des petites perturbations et le problème est mal posé au sens de Hadamard. De plus, nous supposons que les températures et flux mesurés sont compatibles entre eux, afin de nous assurer l'existence et l'unicité de la solution cherchée.

Par conséquent, nous choisissons d'utiliser une méthode numérique directe, pour résoudre le système d'équations linéaires provenant de la discrétisation des équations (4.1), et (4.2). Notre choix s'est porté sur l'algorithme itératif de Kozlov, dont les propriétés seront étudiées.

4.3.2 Présentation de l'algorithme

[Kozlov *et al.*(1991)] proposent de chercher les conditions aux limites f_0 et q_0 sur la frontière Γ_0 , comme solution d'un système itératif où

$$f_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} u^k|_{\Gamma_0}$$

$$\text{et } q_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} v^k|_{\Gamma_0}$$

Cet algorithme possède quatre étapes :

- (i) : On initialise une température $u_0 = T^{(0)}$ sur Γ_0
(ii) : On résout le problème direct bien posé aux conditions aux limites mixtes

$$\begin{cases} \nabla^2 T^{(0)} = 0, \\ T^{(0)}_{|\Gamma_0} = u_0, \\ T^{(0)}_{|\Gamma_1} = f_1, \\ \partial_n T^{(0)}_{|\Gamma_2} = q_2, \\ \partial_n T^{(0)}_{|\Gamma_3} = q_3, \end{cases}$$

$T^{(0)}(x)$ étant calculée on pourra alors obtenir $v_0 = \partial_n T^{(0)}_{|\Gamma_0}$.

- (iii) : On suppose déjà calculées $T^{(2k)}$, on résout alors les deux problèmes suivants :

- solution impaire : on évalue $v_k = \partial_n T^{(2k)}_{|\Gamma_0}$ et on résout

$$\begin{cases} \nabla^2 T^{(2k+1)} = 0, \\ \partial_n T^{(2k+1)}_{|\Gamma_0} = v_k, \\ T^{(2k+1)}_{|\Gamma_1} = f_1, \\ T^{(2k+1)}_{|\Gamma_2} = f_2, \\ \partial_n T^{(2k+1)}_{|\Gamma_3} = q_3. \end{cases}$$

- solution paire : on évalue $u_{k+1} = T^{(2k+1)}_{|\Gamma_0}$ et on résout $T^{(2k+2)}$ solution de

$$\begin{cases} \nabla^2 T^{(2k+2)} = 0, \\ T^{(2k+2)}_{|\Gamma_0} = u_{k+1}, \\ T^{(2k+2)}_{|\Gamma_1} = f_1, \\ \partial_n T^{(2k+2)}_{|\Gamma_2} = q_2, \\ \partial_n T^{(2k+2)}_{|\Gamma_3} = q_3. \end{cases}$$

- (iv) : (iii) est répétée jusqu'à convergence des suites T^{2k} et T^{2k+1} vers T la solution du problème de Cauchy initial. Le critère de convergence est l'écart maximum entre u^k et u^{k+1} .

4.3.3 Critères d'arrêt

Tout algorithme itératif a besoin d'un critère- qui définit la convergence vers la solution. Nous avons donc implémenté deux critères d'arrêt. Le premier, proposé par Kozlov, est un critère de précision naturel. Il mesure la différence entre T^{2k} et T^{2k+1} sur la frontière à compléter Γ_0 . Lorsque la norme L_∞ de celle-ci est suffisamment petite

numériquement, alors la convergence est atteinte, et nous avons une précision maximale pour ce critère. Il paraît clair que plus le seuil est petit, plus la reconstruction est précise, mais au prix d'un nombre d'itérations plus important.

Un deuxième critère d'arrêt se rajoute au premier et permet de mesurer l'évolution de la solution au cours des itérations. Le rapport $\frac{\|T^{2k+2}-T^{2k+3}\|_\infty}{\|T^{2k}-T^{2k+1}\|_\infty}\Big|_{\Gamma_0}$ est une bonne mesure, et se rapproche de 1 lorsque la solution ne change plus beaucoup. Continuer l'algorithme itératif lorsque ce rapport est proche de 1 n'améliorera la qualité de la solution que très peu, pour un nombre d'itération important, puisque la solution ne change que très peu d'une itération à l'autre. (article soumis de M.Azaïez, A. Ben Abda, J. Ben Abdallah, F.Ben Belgacem)

4.4 Validation

Pour réaliser la validation, nous choisissons la solution harmonique

$$T(x, y) = \cos(x) \cosh(y) + \sin(x) \sinh(y). \quad (4.3)$$

Nous comparons nos résultats à ceux trouvées par [Jourhmane & Nachaoui(1996)] qui utilisent une méthode numérique d'éléments aux frontières, ainsi que J. Ben Abdallah qui résout le même problème par une méthode numérique aux éléments finis. Le domaine de calcul est le carré unité.

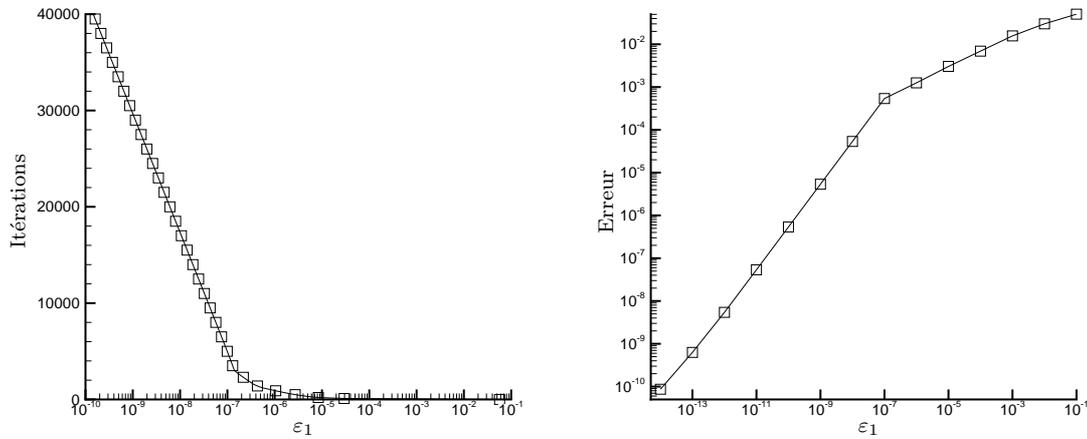
L'avantage de cette solution est de fournir une valeur et une dérivée non nulle aux bords. Nous dégagerons cinq configurations-test dans la carré unité. La différence entre ces essais porte sur la quantité d'informations connues sur les autres bords.

4.4.1 Pertinence des critères d'arrêts

arrêt dû au critère de précision $\|T^{2k} - T^{2k+1}\|_\infty|_{\Gamma_0} < \varepsilon_1$

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à l'évolution du nombre d'itérations en fonction de la valeur ε_1 ainsi qu'à l'erreur de complétion. Dans ces calculs, le nombre de points de maillage a été fixé égal à 15 par direction.

La figure (4.2(a)) nous montre le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère d'arrêt ε_1 . Nous pouvons voir que la courbe est en deux parties. La toute première est à décroissance rapide, jusqu'à $\varepsilon_1 = 10^{-7}$. A partir de cette valeur, la deuxième partie devient linéaire. L'échelle des ε_1 est logarithmique, et ainsi nous en déduisons que le nombre d'itérations nécessaire pour satisfaire le critère d'arrêt

(a) Nombre d'itérations fonction de ε_1 (b) Erreur sur T en fonction de ε_1 FIG. 4.2 – Tests sur ε_1

augmente exponentiellement. Il faut un peu moins de 20000 itérations pour arriver à $\varepsilon_1 = 10^{-8}$, et le double pour satisfaire $\varepsilon_1 = 10^{-10}$.

Nous avons représenté sur la figure 4.2(b) l'erreur L_∞ de la température sur la frontière à compléter du domaine, en fonction de ε_1 . La courbe, tracé sur des échelles log-log, se divise là aussi en deux parties au comportement équivalent. La décroissance de l'erreur est linéaire par morceau, et le seuil de la transition est le même que celui déterminé sur 4.2(a). Il apparaît donc deux régimes de convergence.

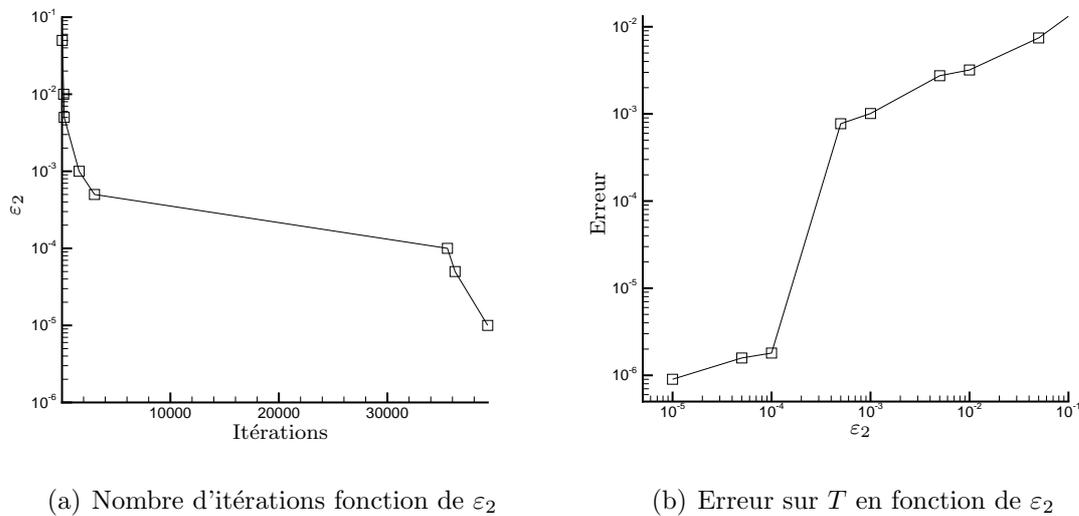
En conclusion, la précision désirée peut être atteinte par un choix approprié de ε_1 ($\varepsilon_1 = 10^{-14}$ amène une erreur d'environ 10^{-10}).

arrêt dû au critère d'évolution
$$\left. \frac{\|T^{2k+2} - T^{2k+3}\|_\infty}{\|T^{2k} - T^{2k+1}\|_\infty} \right|_{\Gamma_0} < 1 - \varepsilon_2$$

Nous allons étudier dans cette partie le nombre d'itérations nécessaires pour satisfaire le critère d'arrêt $1 - \varepsilon_2$, et voir quel est le taux d'erreur associé. Dans ces calculs, le nombre de points de maillage est toujours fixé égal à 15 par direction.

Rappelons que ce critère d'arrêt mesure l'évolution de la solution au cours des itérations. S'il est grand, c'est que la solution se modifie beaucoup à chaque itération, alors que s'il est petit, c'est qu'elle ne change que très peu, et il n'est donc pas nécessaire de continuer le calcul. En effet, le gain de précision par rapport au nombre d'itérations requises n'est pas forcément assez important pour justifier le prolongement du calcul.

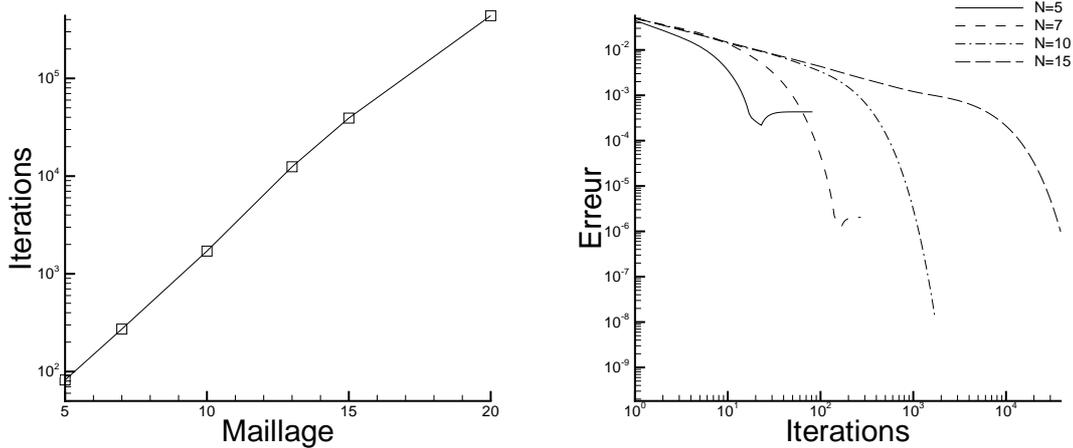
La figure 4.3(a) représente le nombre d'itérations nécessaires pour satisfaire $1 - \varepsilon_2$.

FIG. 4.3 – Tests sur ε_2

Cette courbe présente deux parties. La première, pour des ε_2 grands, au dessus de $5 \cdot 10^{-3}$, montre qu'il faut très peu d'itérations pour satisfaire le critère. Nous sommes en présence, à partir de cette valeur, d'un véritable décrochage dans la courbe, puisque lorsque $\varepsilon_2 = 7 \cdot 10^{-3}$, le nombre d'itérations grimpe à 36000, alors qu'il n'en fallait que 2000 pour $\varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-3}$. Cela implique donc que la vitesse de convergence reste presque constante. L'erreur diminue très vite dans un premier temps, puis garde un taux de décroissance quasi constant pendant un grand nombre d'itérations, puis re-diminue. L'évolution de l'erreur en fonction de ε_2 est donnée par la figure 4.3(b). Là aussi, la courbe présente un décrochage, qui montre que le franchissement du seuil précédemment établi dans la figure 4.3(a) améliore la précision d'une façon considérable. Le taux d'erreur qui est de 10^{-3} pour $\varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-3}$, passe à 10^{-6} pour $\varepsilon_2 = 7 \cdot 10^{-3}$. Dès que l'on franchit le seuil, la précision augmente beaucoup, mais cela se paye par un grand nombre d'itérations à effectuer. Nous arrivons donc ici à distinguer les deux parties de la courbe de convergence de ε_1 . Nous voyons la première partie à décroissance rapide, et le seuil à partir duquel la convergence devient exponentielle. Le meilleur réglage à faire pour ce critère d'arrêt est d'atteindre le seuil, mais sans le dépasser, puisque cela augmentera le temps de calcul d'une façon inconsiderée.

4.4.2 Influence du maillage

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence du nombre de point de maillage sur la précision. Dans les tests qui suivent, nous avons fixé $\varepsilon_1 = 10^{-10}$, et désactivé le deuxième test d'arrêt.



(a) Nombre d'itérations fonction de N (b) Evolution de l'erreur L_∞ sur T en fonction de N

FIG. 4.4 – Tests sur le nombre de points de maillage N

La première courbe 4.4(a) représente le nombre d'itérations nécessaires pour satisfaire le critère ε_1 fixé pour un maillage donné. L'évolution est linéaire dans un graphique semi-logarithmique, nous retrouvons donc le comportement exponentiel du nombre d'itérations nécessaires pour satisfaire le critère d'arrêt.

La deuxième courbe 4.4(b) représente l'évolution du taux d'erreur au cours du calcul pour différents maillages. Nous constatons que, comme vu auparavant, le nombre d'itérations pour la convergence dépend du maillage, mais, de plus, que la précision atteinte dépend également du maillage choisi. En effet, nous avons un comportement attendu : plus il y a de point de maillage, plus la précision qui peut être atteinte est grande, mais cela se paye par une augmentation exponentielle du nombre d'itérations à effectuer.

L'erreur de complétion pour les courbes pour $N = 5$ et $N = 7$ décroît jusqu'à un seuil (propre au maillage), puis remonte vers un palier. Ce phénomène de palier vient du manque de points de maillage pour décrire complètement la solution cherchée. Lorsqu'un problème direct est résolu dans les mêmes conditions, la courbe présente un palier à la précision maximale. Cela reflète la façon dont l'algorithme gère les erreurs

d'arrondis. Nous sommes ici dans le cas d'un problème inverse, instable par nature, et ce ressaut en est la caractéristique. La valeur de la remontée reste faible dans notre cas, mais elle peut croître relativement haut lorsqu'on effectue la complétion sur des maillages qui possèdent moins de points sur la frontière à reconstruire que dans l'autre direction. Ce phénomène n'apparaît pas dans les deux autres courbes ($N = 10$ et $N = 15$), car il n'y a pas eu suffisamment d'itérations pour atteindre la précision maximale possible pour ces maillages.

Il faut également remarquer que la vitesse de convergence initiale est commune pour les courbes.

4.4.3 Le premier cas : le cas complet

Nous avons qualifié le premier cas de complet en raison du nombre d'informations déterminées sur les frontières. En effet, nous connaissons les valeurs de la fonction à reconstruire (condition à la limite de type Dirichlet) et de sa dérivée normale (condition à la limite de type Neumann). La figure 4.5 synthétise la représentation de la géométrie du domaine et les conditions aux limites. Nous noterons D les conditions aux limites de type Dirichlet, et N celles de Neumann.

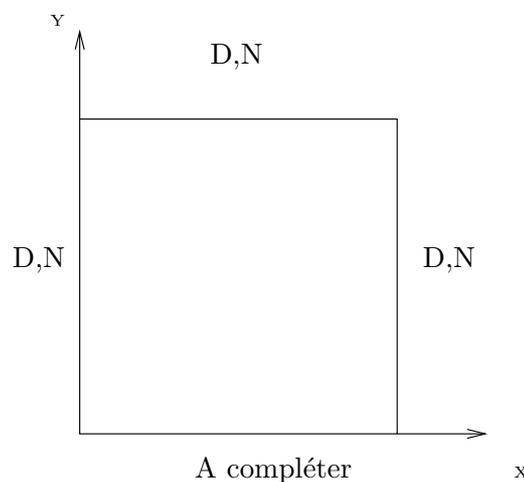


FIG. 4.5 – géométrie et C.L. du domaine à compléter

Pour reconstruire la fonction cherchée, nous avons utilisé dans ce cas l'algorithme de Kozlov, avec une légère modification. Les conditions aux limites sont en effet connues de manière totale sur les frontières (sauf, évidemment, sur la frontière à compléter). Pour profiter pleinement de toute l'information disponible, nous avons alterné le type de conditions aux limites lors de la résolution itérative : la figure 4.6

résume les types de conditions aux limites dans les deux sous itérations. 4.6(a) nous montre les conditions aux limites lors de l'itération $2k$ et 4.6(b) celle de l'itération $2k + 1$. Nous nous servons ainsi de toute l'information disponible pour la reconstruction.

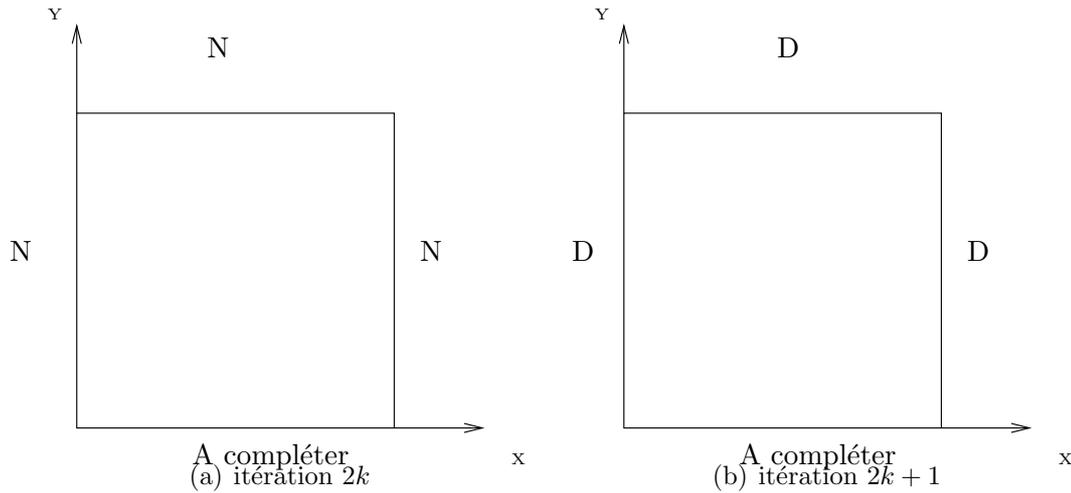


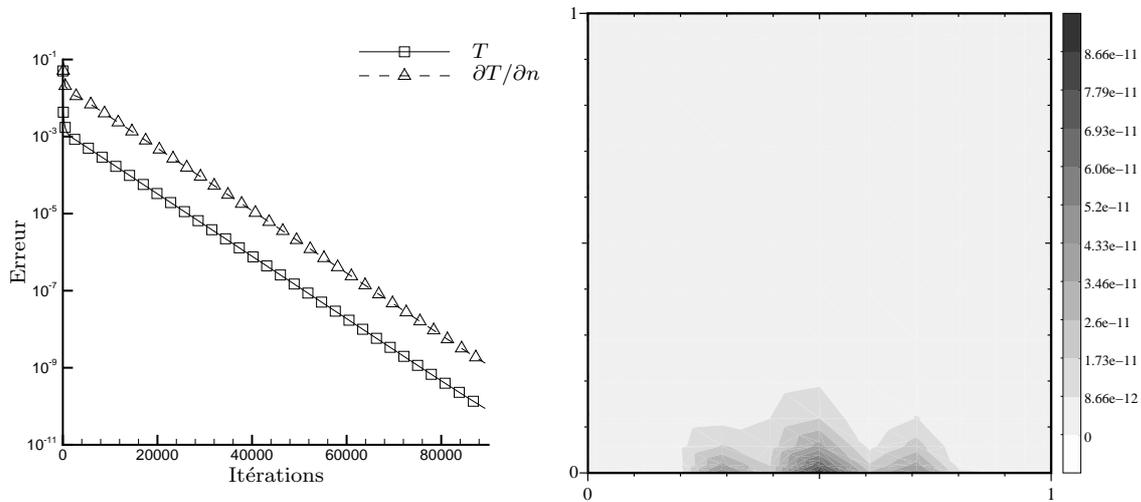
FIG. 4.6 – C.L. de l'itération $2k$ et $2k + 1$

Nous pouvons examiner les résultats du premier cas complet. Les résultats suivants ont été calculés avec $N = 15$ points et $\varepsilon_1 = 10^{-14}$, le deuxième critère d'arrêt étant inactif.

La figure 4.7(a) représente l'évolution de l'erreur commise sur T sur la frontière et l'erreur commise sur la reconstruction de sa dérivée normale. L'arrêt du système itératif s'est fait dès que le premier test a été satisfait, après plus de 84000 itérations. Nous pouvons remarquer que la convergence des erreurs de T et $\partial T/\partial n$ est exponentielle sur cette courbe à échelle semi-log, comme celle vue auparavant sur la figure 4.4(b). La répartition de l'erreur sur tout le domaine 2D (figure 4.7(b)) nous montre que dans le cas complet, toutes les erreurs faites sur la détermination du champ de température T se concentrent sur la frontière Γ_0 .

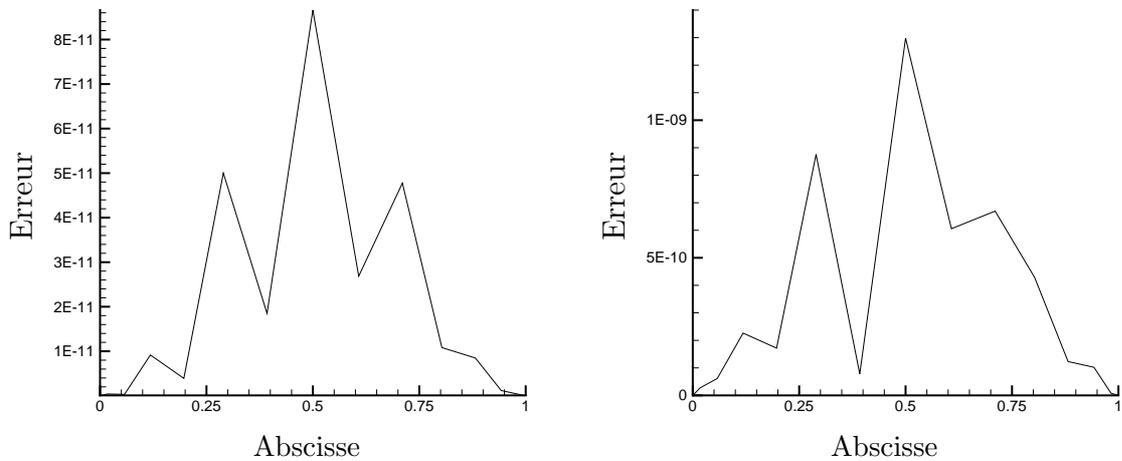
Nous avons représenté sur la figure 4.8(a) la répartition de l'erreur $|T - T_{exact}|$ sur la frontière à compléter Γ_0 . L'erreur maximale en valeur absolue est proche de $8 \cdot 10^{-11}$. Nous pouvons faire les mêmes remarques sur le comportement de l'erreur sur la dérivée normale sur la figure 4.8(b). Elle est au zéro machine sur les bords, et son maximum atteint $1,4 \cdot 10^{-9}$.

La méthode de calcul de la dérivée implique que la solution représentée est tou-

(a) Convergence de T et $\frac{\partial T}{\partial n}$

(b) Répartition de l'erreur 2D

FIG. 4.7 – Résultats du cas complet

(a) Erreur de reconstruction de T sur la frontière

(b) Erreur de reconstruction de la dérivée

FIG. 4.8 – Résultats du cas complet

jours moins régulière que la fonction initiale. Il en résulte que l'erreur commise sur la dérivée sera toujours environ dix fois plus importante que celle sur la valeur.

En conclusion, nous pouvons considérer que la complétion effectuée avec le cas complet est la plus précise, pour un nombre d'itérations donné.

Nous nous situons dans un cas favorable, où la mesure de la frontière à compléter est 3 fois inférieure à celle de la frontière connue. C'est en effet la meilleure complétion que nous pourrions faire pour ce cas test, avec ces paramètres de calcul. Puisque nous

avons pris en compte le maximum d'information du domaine, contrairement aux cas détaillés ci-après.

4.4.4 Deuxième cas : le cas Dirichlet

Le deuxième cas que nous étudierons est le cas Dirichlet. En effet, la connaissance des données aux frontières, qui ne sont pas en vis à vis avec la frontière à compléter, se limite à la valeur de la fonction à retrouver. Cela correspond à des conditions aux limites de type Dirichlet. La figure 4.9 nous résume la géométrie et les conditions aux limites sur le domaine.

Nous avons choisi $N = 15$ points de maillage dans chaque direction, et $\varepsilon_1 = 10^{-9}$ comme paramètres de calculs. Nous avons désactivé le critère d'arrêt d'évolution.

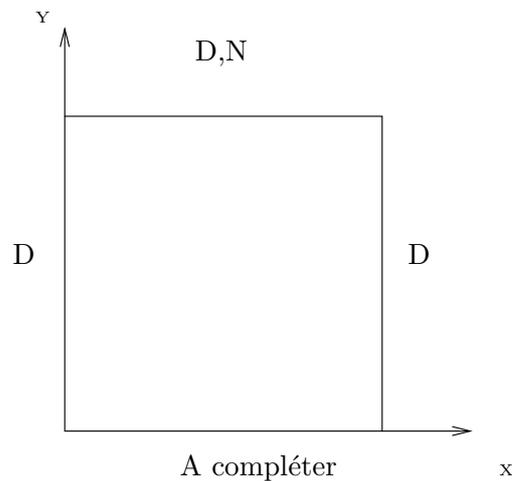


FIG. 4.9 – géométrie et C.L. du domaine à compléter

L'examen de la convergence de l'algorithme sur la figure 4.10(a), nous permet d'appréhender l'utilité du critère d'arrêt d'évolution ε_2 . Nous pouvons voir en effet que le processus itératif converge vraiment lentement. Il faut 10^6 itérations pour que le critère d'arrêt de précision ε_1 soit atteint. Il faut remarquer de plus que la précision de reconstruction ne varie quasiment pas à partir de la 250000^{ème} itération. Il n'est donc pas nécessaire de prolonger le calcul, à la vue du gain de précision qui est minime. C'est pourquoi nous avons défini le deuxième critère d'arrêt, qui mesure le taux de convergence, et qui aurait arrêté l'algorithme bien avant la millionième itération. Le comportement général de la courbe de convergence est similaire à celle du cas complet, mais la vitesse de convergence est bien plus faible. La vitesse de convergence est donc directement proportionnelle à la quantité d'informations connues.

Moins il y a d'informations, moins l'algorithme converge vite. La précision de la reconstruction, quant à elle n'est pas affectée. A convergence, nous atteignons le même taux d'erreur.

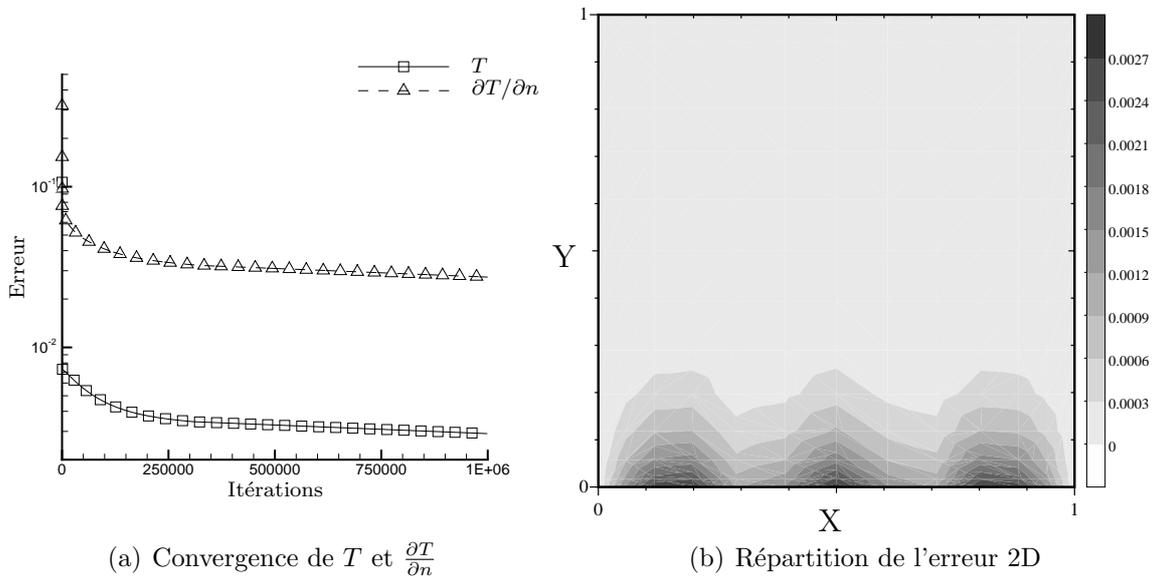


FIG. 4.10 – Résultats du cas Dirichlet

la figure 4.10(b) représente la localisation des erreurs sur tout le domaine de calcul. Là encore, nous constatons que les erreurs sont toutes concentrées vers la frontière à compléter. Il est à noter que l'erreur est de l'ordre de la précision machine sur les bords de la frontière à compléter. Nous avons en effet imposé des conditions aux limites de type Dirichlet sur les frontières adjacentes à Γ_0 .

Le comportement des erreurs sur la frontière Γ_0 (figure 4.11(a)) nous montre un maximum d'environ $3 \cdot 10^{-3}$, et la figure 4.11(b) permet d'estimer l'erreur maximale sur la dérivée qui est d'environ $3 \cdot 10^{-2}$. Comme précisé précédemment, l'erreur en 0 et 1 est nulle numériquement, du fait des conditions aux limites imposées sur les frontières droites et gauches du domaine.

La conclusion sur ce cas test est que la quantité d'information connue sur le domaine joue non pas sur la précision de la reconstruction, mais sur la vitesse de convergence pour arriver à la précision choisie. Cette dernière peut devenir très faible, et un grand nombre d'itérations ne change alors que très faiblement la solution. Le deuxième critère d'arrêt devient alors nécessaire, et intervient lorsque la vitesse de convergence est trop faible. En effet, prolonger le calcul peut s'avérer inutile puisque la convergence vers le zéro numérique peut demander un temps de calcul au delà du raisonnable. Sur le cas présenté, en prolongeant linéairement la courbe

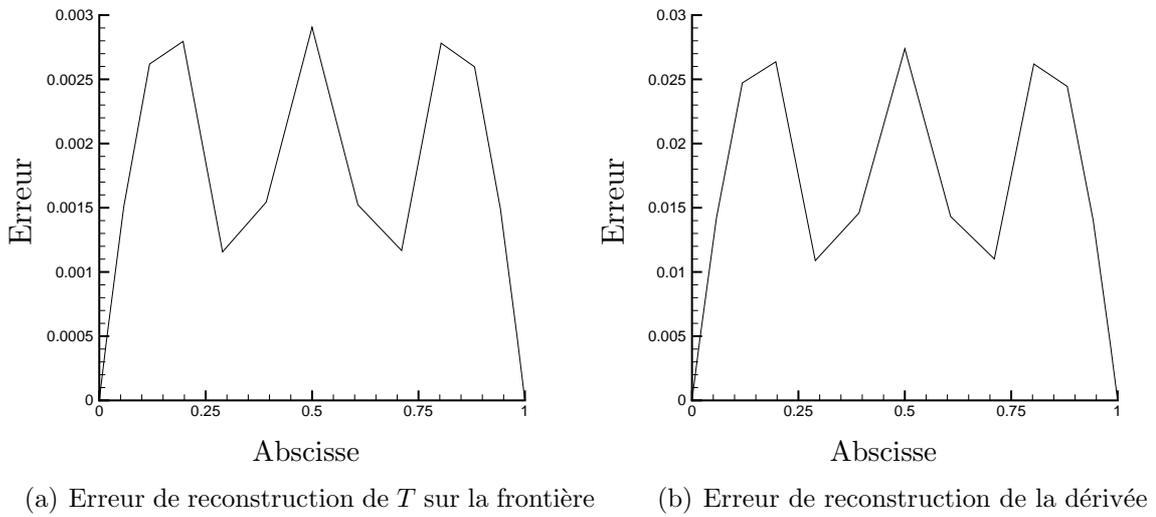


FIG. 4.11 – Résultats du cas Dirichlet

de convergence, le nombre d'itérations nécessaire atteint environ $4 \cdot 10^6$, pour une précision de 10^{-11} avec une pente mesurée de l'ordre de 10^{-9} .

4.4.5 Troisième cas : le cas Neumann

Cette configuration porte le nom de cas Neumann, car cette fois ci, la connaissance d'informations porte seulement sur la dérivée. Le domaine est les conditions aux limites sont résumés sur la figure 4.12. Nous avons choisi comme paramètres de calcul $N = 15$ points dans chacune des directions, $\varepsilon_1 = 10^{-10}$, et $\varepsilon_2 = 10^{-5}$.

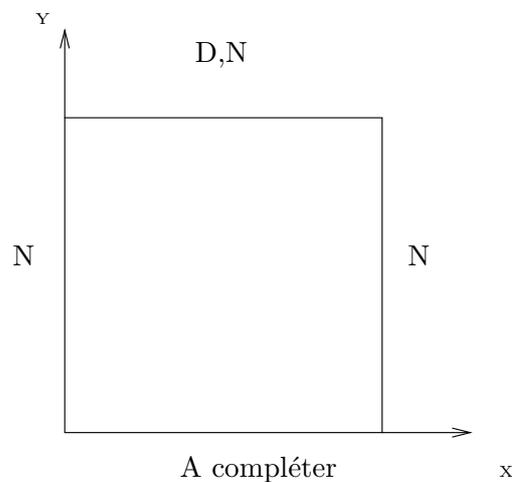


FIG. 4.12 – géométrie et C.L. du domaine à compléter

La courbe 4.13(a) représente la convergence de l'algorithme. Nous voyons que le critère d'arrêt d'évolution ε_2 arrête très vite le système itératif. La vitesse de convergence est très faible, après la décroissance initiale rapide, commune à tous les cas tests. L'arrêt s'est fait après seulement 17000 itérations.

L'erreur sur tout le domaine, illustrée sur la figure 4.13(b), nous apprend que les maxima d'erreurs sont situés sur les bords de la frontière à compléter, et différemment des cas précédents, aussi sur les frontières adjacentes à Γ_0 . Nous avons en effet imposé des conditions aux limites de type Neumann sur ces frontières, et il est donc normal d'avoir une erreur sur la valeur elle même de la fonction au coin.

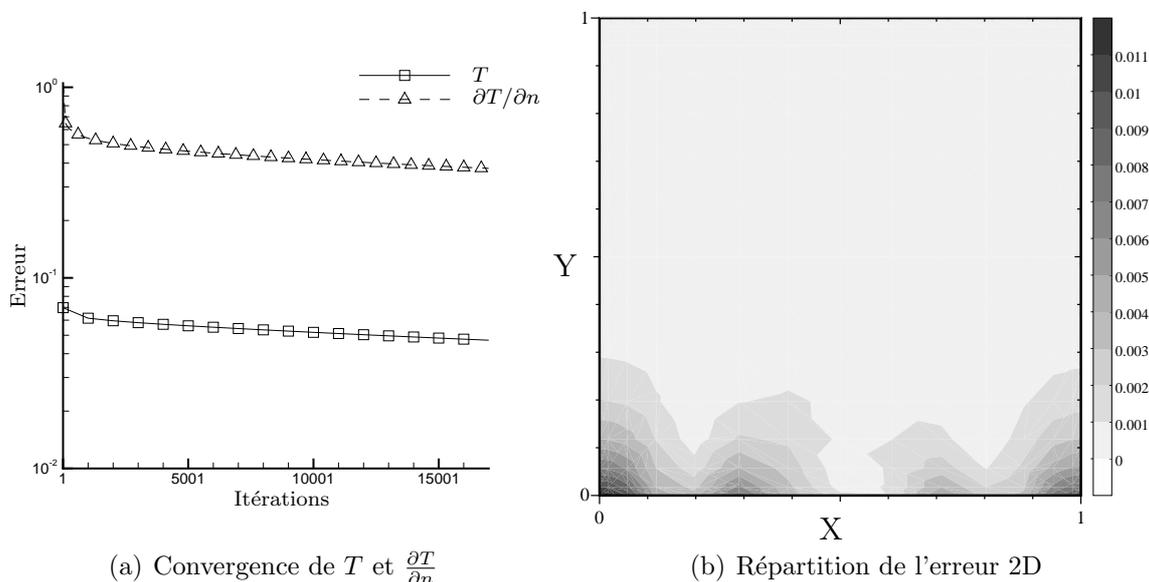


FIG. 4.13 – Résultats du cas Neumann

Nous précisons ce comportement dans le tracé de l'erreur sur la frontière (figure 4.14(a)) qui montre que le maximum d'erreur est atteint sur les frontières, de l'ordre de 0.012. De même, l'erreur sur la dérivée, vue en 4.14(b), présente des maxima sur les extrémités de la frontière à compléter. Ce comportement s'explique par le fait que nous imposons une dérivée normale sur les frontières adjacentes, et donc dans une direction perpendiculaire à celle où nous la calculons pour évaluer le taux d'erreur sur la frontière Γ_0 .

En conclusion de ce cas test, nous pouvons remarquer que la complétion converge bien vers la solution cherchée, mais que les informations à notre disposition ne permettent qu'une vitesse de convergence faible. Il n'est donc pas nécessaire de prolonger le calcul, et le deuxième critère d'arrêt agit dans ce sens. Le résultat est donc moins précis qu'avec seulement le premier critère d'arrêt, mais évite un temps

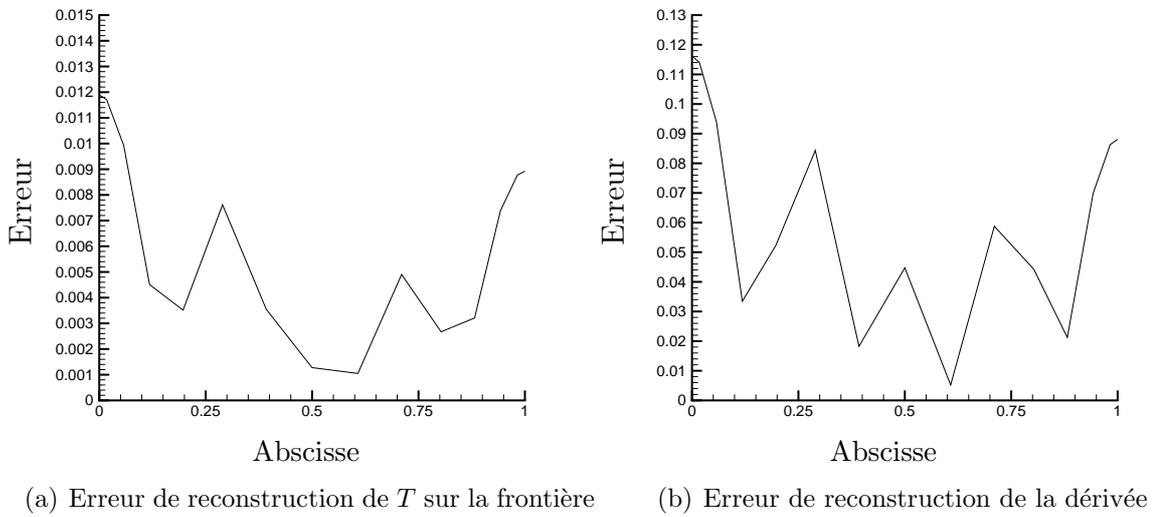


FIG. 4.14 – Résultats du cas Neumann

de calcul long.

4.4.6 Quatrième cas : le cas mixte

Dans ce cas étudié, nous avons choisi de mélanger les conditions aux limites de type Neumann et Dirichlet sur les frontières adjacentes à Γ_0 . La géométrie et les conditions aux limites sont résumés sur l'illustration 4.15. Nous avons utilisé pour l'algorithme les paramètres suivants : $N = 15$ points dans chacune des directions, $\varepsilon_1 = 10^{-10}$, et $\varepsilon_2 = 10^{-5}$.

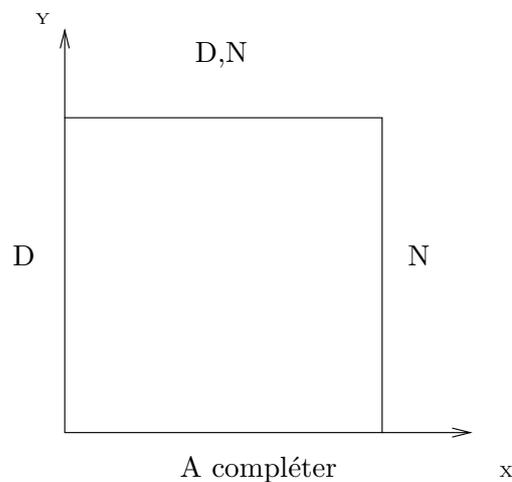


FIG. 4.15 – géométrie et C.L. du domaine à compléter

La figure 4.16(a) montre la convergence de l'algorithme. Il met un peu moins de 70000 itérations pour converger à l'aide du critère d'arrêt d'évolution.

La répartition de l'erreur sur le domaine (figure 4.16(b)) condense le cas Dirichlet et Neumann. En effet, l'erreur est de l'ordre de la précision machine sur le côté gauche, là où est imposé les conditions de type Dirichlet, alors que l'erreur du côté droit possède le même comportement que le cas test appelé Neumann.

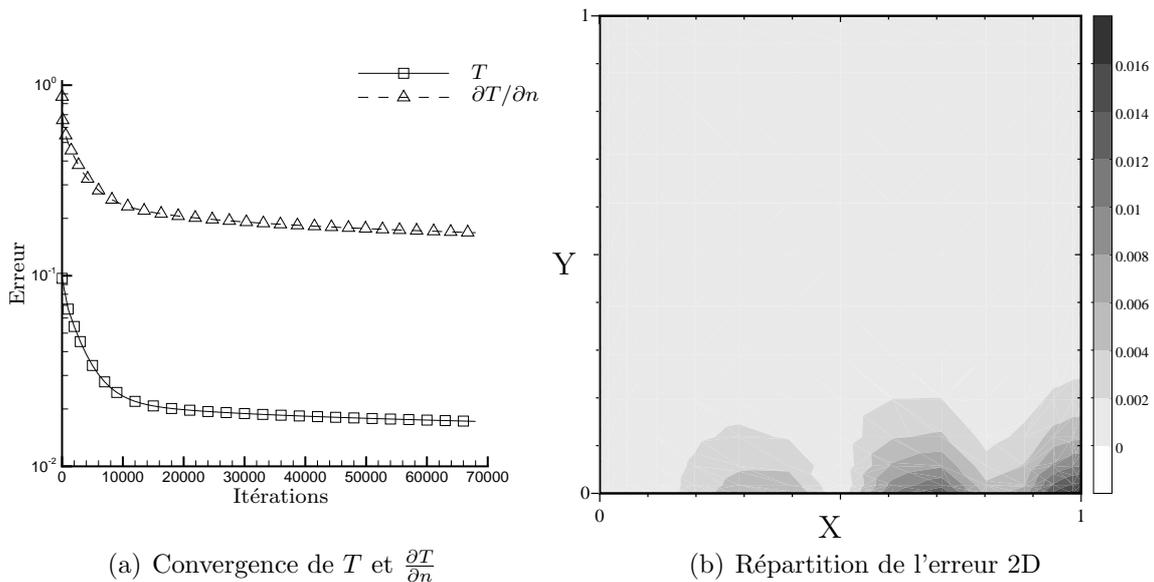


FIG. 4.16 – Résultats du cas Mixte

Les figures 4.17(a) et 4.17(b) nous illustrent respectivement les erreurs commises sur la valeur et sa dérivée normale sur la frontière Γ_0 . Leurs maxima sont, contrairement aux autres cas tests, sur l'extrémité en contact avec le côté où est imposé la condition à la limite de type Neumann. Il sont respectivement de $1,8 \cdot 10^{-2}$ et $1,8 \cdot 10^{-1}$.

Grâce à ce cas test, nous pouvons comparer les effets des différentes conditions aux limites, et constater que l'erreur de complétion est toujours maximale du côté où une condition à la limite de Neumann est imposée. Dans le cas Dirichlet, l'erreur sur la frontière est toujours maximale vers le centre.

En conclusion de ce cas test, nous pouvons dire que la condition à la limite de type Dirichlet déplace le maximum d'erreur vers l'intérieur de la frontière à compléter, alors que la présence de condition de Neumann amène le maximum d'erreur sur les bords des frontières.

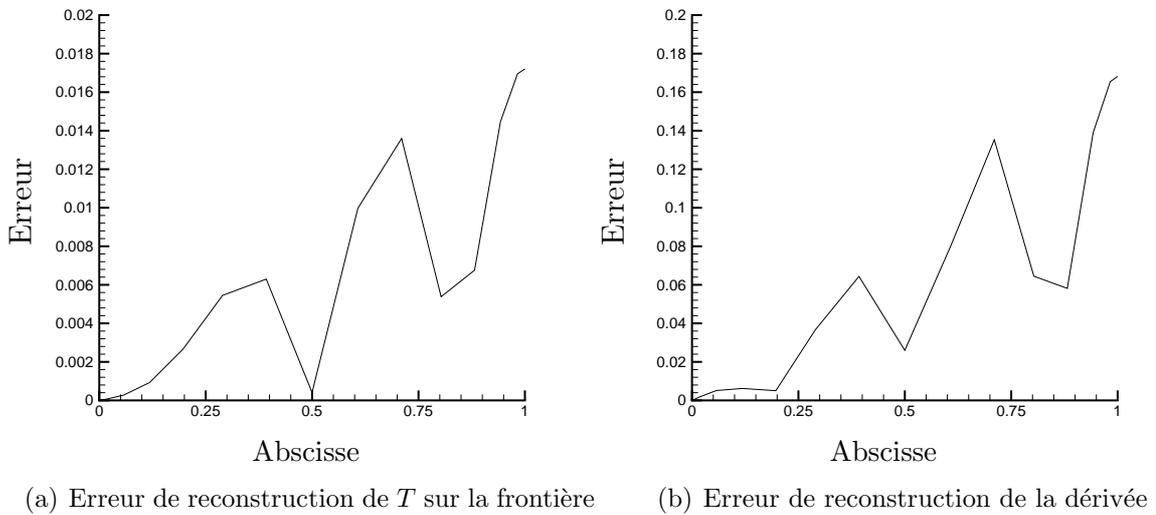


FIG. 4.17 – Résultats du cas Mixte

4.4.7 Cas où la frontière à compléter est plus grande

Nous prolongeons l'étude de l'algorithme de Kozlov en cherchant à compléter non plus un, mais deux côtés. L'information est connue sur les deux autres bords de manière complète.

Dans ce cas, la mesure de la frontière à compléter est égale à la mesure de la frontière connue.

Il existe deux cas de figure à traiter :

- Le cas où les frontières à compléter sont adjacentes. Nous nous ramenons dans ce cas au cas complet traité au début. En effet, cela revient à considérer que la taille de la frontière à compléter est plus grande, et que nous connaissons l'information de façon complète sur les bords en vis à vis. Les résultats seront donc comparables au cas complet.
- Le cas où les frontières à compléter sont disjointes. Les frontières inconnues sont en vis-à-vis, de même que celles où l'information est connue de façon complète.

Nous avons donc traité ici le cas disjoint. Le résumé de la géométrie est indiqué sur la figure 4.18. Les paramètres numériques utilisés sont les suivants : $N = 15$ points dans chacune des directions, $\varepsilon_1 = 10^{-10}$, et $\varepsilon_2 = 10^{-5}$.

Le graphe 4.19(a) illustre la convergence de l'algorithme en 69000 itérations. C'est encore une fois le deuxième critère d'arrêt qui a stoppé le système itératif. Il faut remarquer que la forme de convergence reste commune aux autres cas tests

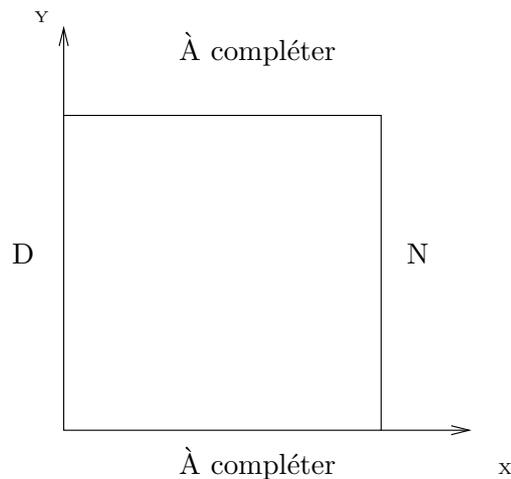


FIG. 4.18 – géométrie et C.L. du domaine à compléter

précédents, seule la vitesse de convergence change. L'erreur sur tout le domaine, représentée sur la figure 4.19(b) nous révèle une symétrie dans la forme de l'erreur. Il faut rappeler que nous complétons les frontières hautes et basses du domaine, et les erreurs sont concentrées près de ces frontières.

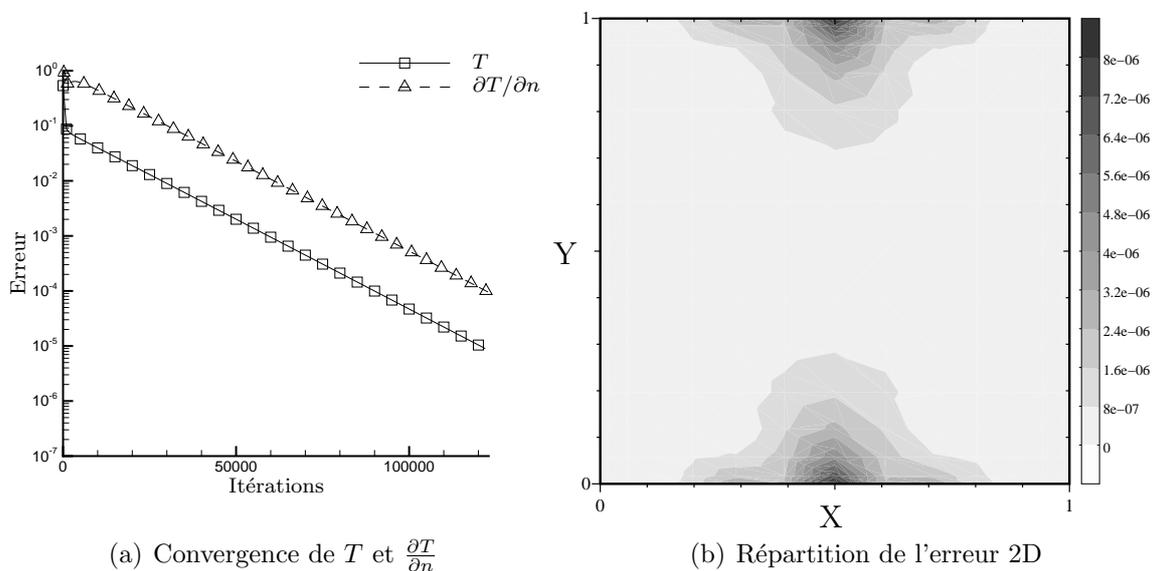


FIG. 4.19 – Résultats du cas Disjoint

Nous représentons sur la figure 4.20(a) l'erreur sur la frontière du bas. Du fait de l'application des conditions aux limites sur les frontières droite et gauche, l'erreur vaut le zéro numérique aux extrémités. le maximum en valeur absolue se situe au milieu, et atteint environ $9 \cdot 10^{-6}$. La répartition de l'erreur sur la frontière du haut

n'est pas représentée, car sa forme est similaire à celle décrit ci-dessus. Le même genre de remarque est à faire sur le taux d'erreur de la dérivée normale (figure 4.20(b)) sur la frontière du bas. L'erreur s'annule sur les extrémités de la frontière, et son maximum vaut 10^{-4} . Le comportement est similaire sur la frontière du haut par raison de symétrie.

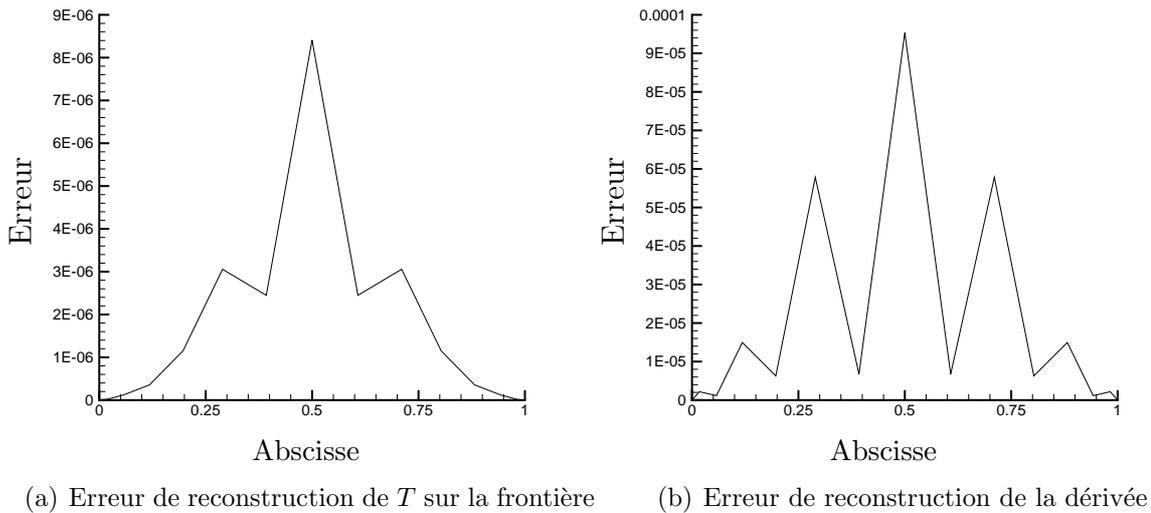


FIG. 4.20 – Résultats du cas Disjoint

La conclusion de ce cas test est que la réduction de la quantité d'information connue sur les frontières ne nuit pas à la complétion, puisque l'algorithme converge. Nous arrivons tout de même à une limite, dans la mesure où la quantité d'information à compléter est égale à la quantité d'informations connue. Lorsque cette limite est dépassée, la convergence n'est plus assurée.

La vitesse de convergence est évidemment plus faible que dans un cas où plus d'informations sont connues.

4.4.8 Conclusion

Nous venons de vérifier que la mise en place numérique de l'algorithme de Kozlov convergeait vers la solution cherchée. La quantité d'information disponible influence non pas la précision de la complétion, mais sur sa vitesse de convergence. Il est donc nécessaire de mettre en place un deuxième critère d'arrêt, qui arrête l'algorithme itératif dès que la vitesse de convergence diminue. En effet, lorsque la quantité d'information est limitée, le nombre d'itérations requis pour atteindre la précision maximale est suffisamment important pour ne pas pouvoir être calculé dans

un temps atteignable.

Nous avons constaté que nous atteignons une précision maximale de l'ordre de 10^{-11} . Des cas tests supplémentaires ont permis de vérifier que seul le rapport de la mesure de la frontière à compléter sur la mesure des frontières connues influe sur la convergence. Pour un rapport donné, la convergence est la plus rapide dans le cas où des conditions aux limites de Neumann et Dirichlet sont connues, et la moins rapide lorsque seules des conditions aux limites de Neumann sont imposées.

4.5 Cas supplémentaires

Nous avons utilisé pour la validation le cas test fourni par Jourmane et Nachaoui ([Jourmane & Nachaoui(1996)]). Pour comprendre et mieux appréhender le comportement de l'algorithme de complétion, nous avons prolongé ces cas tests par d'autres fonctions à retrouver. Nous avons choisi deux autres fonctions : une polynômiale, et une variante du cas test précédent, dont la principale différence réside dans un paramètre n qui va régler le nombre de périodes de la fonction dans le domaine d'étude.

Les fonctions suivantes sont :

$$T(x, y) = y^2 + xy - x^2 \quad (4.4)$$

$$T(x, y) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{2}y\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2}y\right) \quad (4.5)$$

4.5.1 Étude du cas polynômial

Nous avons vu précédemment que quel que soit la quantité d'information, l'algorithme converge vers la solution avec la même précision, et seul le nombre d'itérations change. C'est pourquoi nous présentons les résultats obtenus dans le cas où le maximum d'information est disponible, appelé cas complet, pour obtenir les résultats avec un minimum d'itérations. L'intérêt de choisir une fonction polynômiale réside dans la précision de la méthode. Nous allons pouvoir en effet reconstruire en atteignant le zéro numérique. Nous cherchons à reconstruire une fonction polynômiale de degré 2. Ainsi, seul 3 points sont nécessaires pour l'approcher exactement. Nous avons donc choisi comme paramètre de calcul $N = 3$ points de maillage dans chacune des directions, $\varepsilon_1 = 10^{-14}$ et $\varepsilon_2 = 10^{-4}$.

La figure 4.21(a) montre la convergence de l'algorithme en 25 itérations seulement. La figure 4.21(b) nous montre le répartition de l'erreur sur le domaine. Comme nous pouvions l'attendre, Elle se concentre sur la frontière, où elle est maximale. Il faut toutefois remarquer que l'erreur maximale atteinte est de l'ordre du zéro machine.

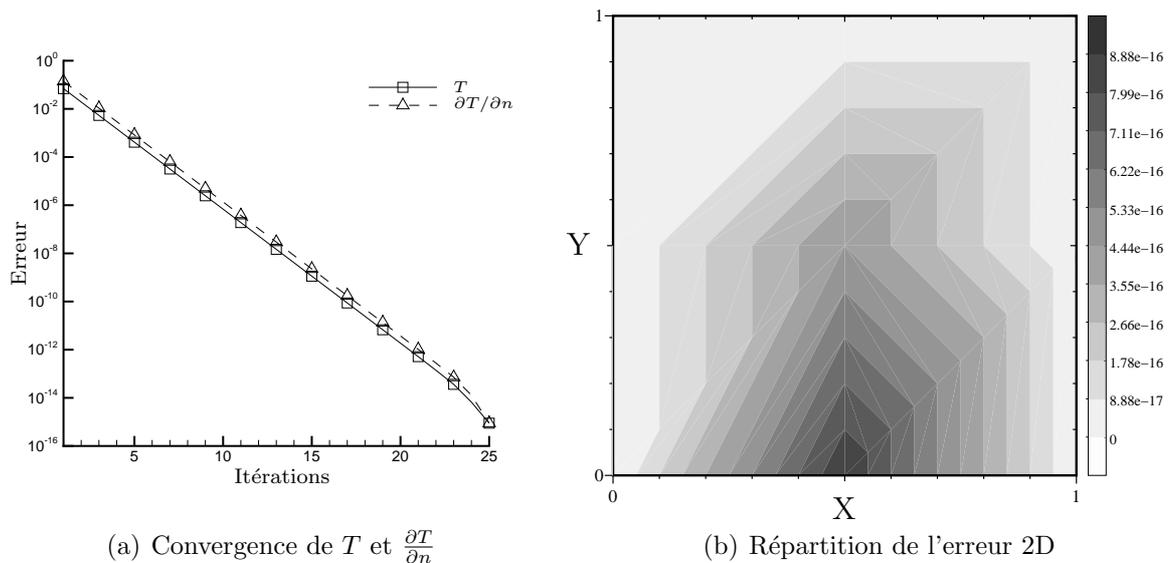
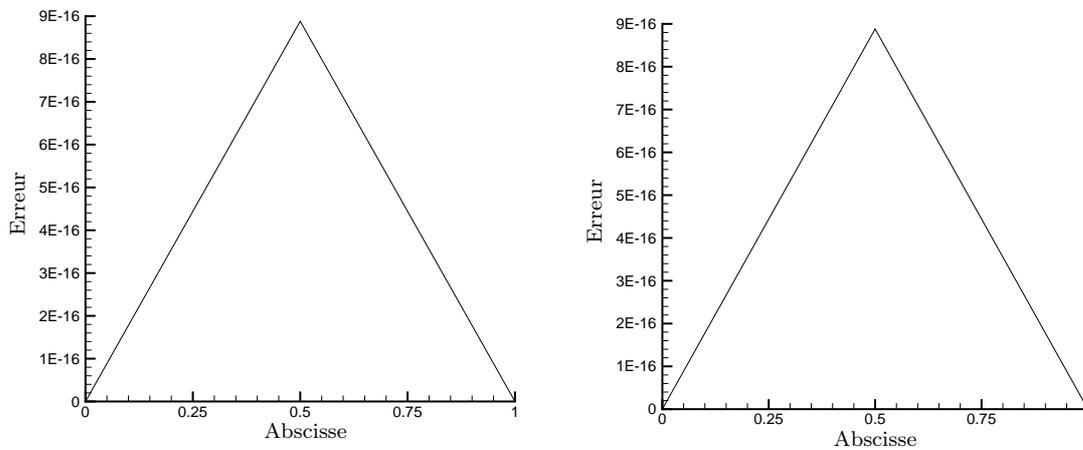


FIG. 4.21 – Résultats du cas Polynômial

La figure 4.22(a) représente l'erreur commise sur la reconstruction de la fonction à la frontière inconnue. Il y a seulement 3 points de collocation sur la frontière, dont 2 sur les extrémités, où nous avons vu que l'erreur est nulle numériquement à cause de la façon d'imposer les conditions aux limites. L'erreur maximale est donc sur le point du milieu de la frontière, et vaut environ 9.10^{-15} , le zéro numérique. La figure 4.22(b) représente quant à elle l'erreur commise sur la dérivée. La forme est identique à la courbe d'erreur sur T , et son maximum atteint 9.10^{-16} .

4.5.2 Etude de la fonction périodique

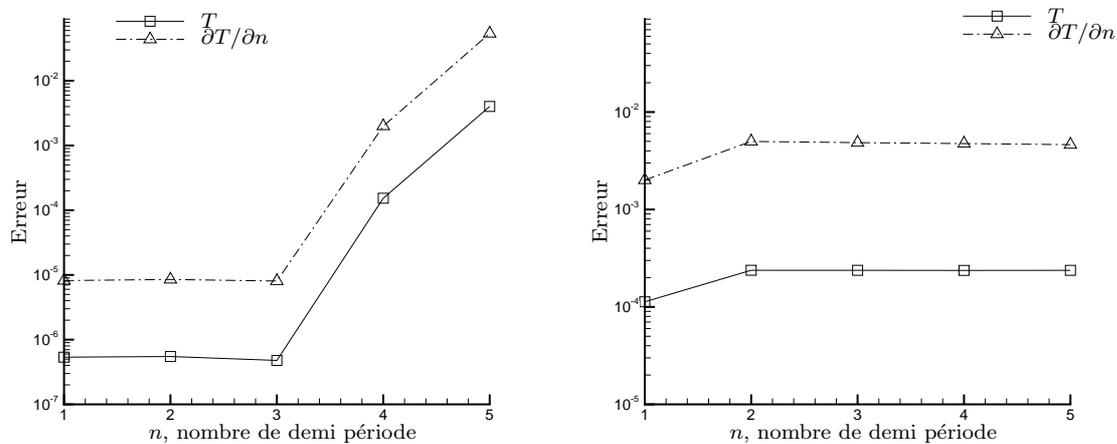
Nous avons choisi d'étudier la variante 4.5 du cas de validation. Nous l'avons rendu périodique à l'échelle du domaine de calcul afin de tester le comportement de l'algorithme de Koslov aux instabilités. En effet, la caractèrè mal posé du problème est accentué pour des fonctions qui oscillent sur le domaine d'étude, comme vu dans nos exemples (partie 4.2.1). Nous étudions donc l'effet du nombre de périodes dans le domaine.



(a) Erreur de reconstruction de T sur la frontière (b) Erreur de reconstruction de la dérivée

FIG. 4.22 – Résultats du cas Polynômial

Les calculs sont fait pour deux maillage différents, afin de pouvoir distinguer les effets de maillage des effets des oscillations.



(a) $N = 15$ points

(b) $N = 20$ points

FIG. 4.23 – Erreur à convergence en fonction du nombre de demi période

La figure 4.23(a) montre le taux d'erreur à convergence pour $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ en fonction de n , le nombre de demi périodes avec $N = 15$ points de maillage dans chacune des directions. Nous voyons qu'à partir de $n = 4$, le taux d'erreur augmente. Regardons à présent les résultats pour $N = 20$ points de maillage, $\varepsilon_1 = 10^{-9}$ pour limiter le temps de calcul (figure 4.23(b)). Les erreurs à convergence restent quasiment constante. L'effet précédent n'est donc qu'un effet de maillage, nous avons dépassé

la fréquence de coupure spatiale : la discrétisation n'arrive pas à capter suffisamment précisément la fonction. La deuxième figure confirme que les effets des instabilités ne se ressent pas sur la précision. Quel que soit le nombre de demi périodes dans le domaine, la précision reste la même.

Regardons à présent l'effet sur le nombre d'itérations sur la figure 4.24.

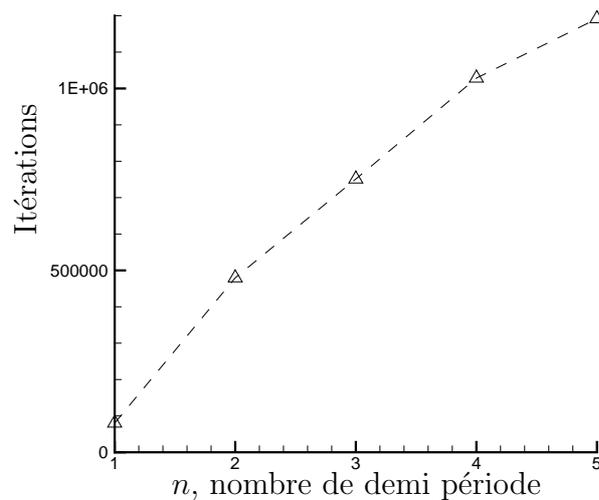


FIG. 4.24 – Effet des instabilités sur le nombre d'itérations, pour $N = 20$

Ce graphique représente le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre le critère d'arrêt ε_1 en fonction de n le nombre de demi période. La principale information que montre cette figure est l'effet des instabilités sur l'algorithme de Kozlov. Nous remarquons donc que plus le problème gagne en instabilité, plus il faut d'itérations pour atteindre le critère fixé.

La conclusion de ces différents tests est que l'algorithme de Kozlov réagit d'une façon peu courante aux instabilités, en conservant le même précision pour un critère d'arrêt donné, mais en augmentant de façon parfois importante le nombre d'itérations pour y parvenir. C'est le même comportement que face à une connaissance partielle des informations, comme montré dans le paragraphe sur les cas tests.

4.6 Accélération de la convergence

Kozlov [Kozlov *et al.*(1991)] a démontré que l'algorithme que nous étudions converge. En pratique, nous avons vu que cet algorithme convergeait vraiment lentement, et

il a été nécessaire de définir des critères d'arrêts pour calculer les résultats dans une durée raisonnable. Nous avons étudié différentes méthodes d'accélération de la convergence. La première que nous illustrons ici est la relaxation. Nous verrons ensuite une autre méthode que nous avons baptisé raffinement hiérarchique.

Afin de comparer les deux méthodes, nous avons présenté les résultats obtenus à partir du cas test de la fonction (4.3), et les mêmes paramètres de convergence.

4.6.1 Relaxation

La relaxation utilisée dans notre code de calcul s'effectue à chaque demi itération, c'est à dire entre l'itération $2k$ et $2k + 1$, lors du calcul des conditions aux limites de passage d'une demi itération à la suivante. Nous avons introduit un coefficient ω qui sert dans les relations suivantes, lors du calcul des conditions aux limites sur la frontière à compléter :

$$T_{2k} = \omega T_{2k-1} + (1 - \omega) T_{2k-2}$$

$$T_{2k+1} = \omega T_{2k} + (1 - \omega) T_{2k-1}$$

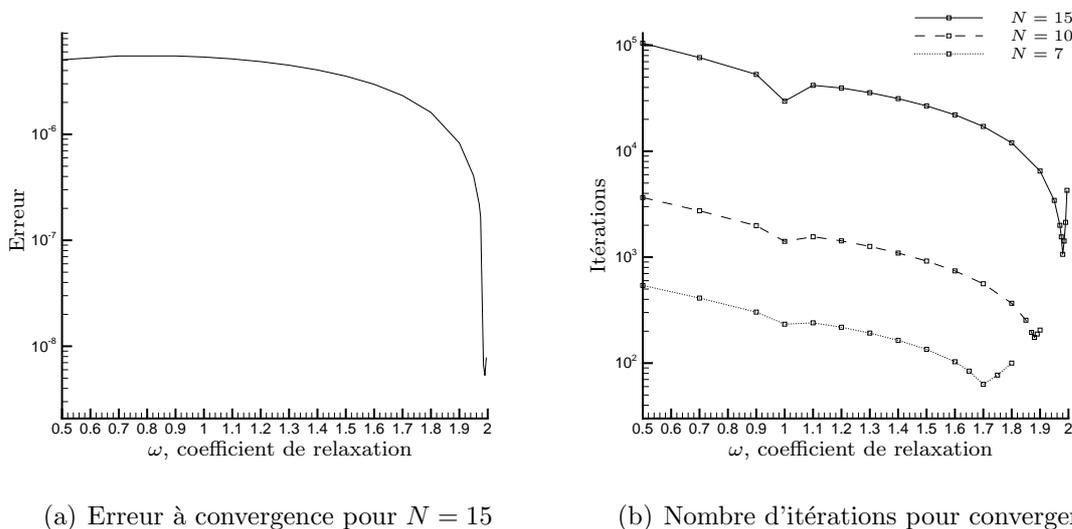


FIG. 4.25 – Résultats sur la relaxation

Nous avons étudié l'effet du coefficient de relaxation ω sur l'erreur en norme infinie, et sur le nombre d'itérations nécessaire à la convergence. Nous avons choisi trois maillages différents, $N = 7$, $N = 10$ et $N = 15$ points dans chacune des directions, et $\varepsilon_1 = 10^{-9}$. La figure 4.25(a) représente le taux d'erreur sur T une fois arrivé à convergence pour $N = 15$ points de maillage. Nous n'avons présenté

les résultats que pour un seul maillage, car la courbe d'évolution de l'erreur est similaire, quelque soit le nombre de points de maillage. Le graphe 4.25(b) montre l'effet du coefficient de relaxation sur le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence, pour trois maillages différents. Les courbes montrent qu'il existe un optimal, $\omega_{optimal}$ où le nombre d'itérations nécessaire pour converger est minimum. Cet optimal varie pour chaque maillage : $\omega_{optimal} = 1,985$ pour $N = 15$, $\omega_{optimal} = 1,85$ pour $N = 10$, et $\omega_{optimal} = 1,7$ pour $N = 7$. L'optimal semble se déplacer asymptotiquement vers la limite 2 lorsque le maillage se densifie. Le gain de précision et d'itération est important, puisque le gain sur l'erreur est de l'ordre de 3 décades pour $N = 15$ points, et de une à deux décades sur le nombre d'itérations pour atteindre la convergence (pour $N = 15$ points, il faut environ 1000 itérations pour arrêter l'algorithme). La proximité de la limite asymptotique peut s'expliquer par le fait que lors de la reconstruction, les erreurs commises sur la frontière se présentent sous forme d'oscillation, qui sont géographiquement au même endroit. Avoir un coefficient de relaxation proche de 2 signifie que la condition à la limite se calcule en prenant deux fois la dernière valeur, moins une fois la pénultième. Puisque la différence entre les deux solutions devient vite petite (de l'ordre de 10^{-5} , donné par ε_1), les erreurs commises sur les conditions aux limites sont du même ordre, et cela revient à diviser l'erreur relative par deux.

La relaxation permet donc d'améliorer grandement le temps de calcul et la précision à convergence. Le principal problème vient de la détermination *a priori* de ce coefficient qui varie de façon importante avec le maillage, cependant [Jourhmane & Nachaoui(1999)] ont trouvé comment le déterminer à chaque itération.

4.6.2 Raffinage hiérarchique

Afin d'optimiser le temps de calcul, nous avons utilisé une deuxième méthode, le raffinement hiérarchique. Les cas tests précédents ont montré que le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre les critères d'arrêt variaient en fonction du nombre de points de maillage. Plus le maillage est lâche, plus la convergence est rapide. Notons de même qu'une étape du calcul sur un maillage réduit prend moins de temps que le même effectué sur un maillage plus fin. Cependant, cette rapidité est contrebalancée par le fait que seule une solution à précision réduite est calculé sur un maillage avec peu de points de collocation : chaque maillage a une précision maximale.

L'idée de la méthode est donc de tout d'abord résoudre un problème de Cauchy sur un petit maillage. La solution obtenue est interpolée sur un maillage un peu

plus ténu, c'est à dire avec un peu plus de points dans chacune des directions. Un nouveau problème de Cauchy est résolu à partir de cette solution interpolée, qui sert de condition initiale au système itératif. Ce processus peut être recommencé autant de fois que voulu.

Le critère qui permet d'arrêter le système itératif et déclencher l'interpolation vers un maillage plus fin doit être basé sur la vitesse de convergence. C'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser le critère d'arrêt d'évolution, ε_2 . Lorsqu'il est atteint, le calcul itératif s'arrête, la solution est interpolée vers un maillage qui possède 1 point de collocation supplémentaire dans chaque direction, et le système itératif de Kozlov est relancé. Ce processus est répété jusqu'à atteindre la précision désirée, qui peut être la précision machine, comme nous le verrons.

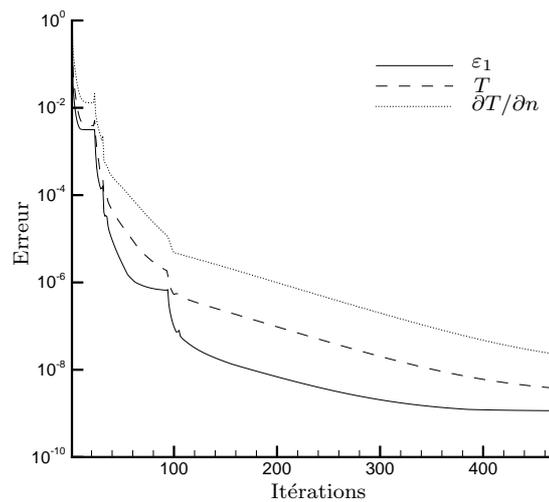


FIG. 4.26 – Raffinage Hiérarchique

La figure 4.26 représente l'évolution de ε_1 , T et $\frac{\partial T}{\partial n}$ en fonction des itérations. A des fins de comparaison, nous avons choisi les mêmes paramètres que dans l'étude de la relaxation, c'est à dire $\varepsilon_1 = 10^{-9}$, $\varepsilon_2 = 5.10^{-4}$, et N , le nombre de points dans chacune des directions, varie de 4 à 15. Pour atteindre ces paramètres de convergence, 469 itérations sont nécessaires, pour une précision de $4,2.10^{-9}$ sur T , et $3,03.10^{-8}$ sur la dérivée normale. Le nombre d'étape de raffinement se compte sur la courbe d'évolution de ε_1 . Nous avons autorisé jusqu'à 15 points de maillage, mais pour atteindre la précision recherchée, il n'y a eu besoin seulement que de 10 points.

4.6.3 Combinaison du raffinement hiérarchique et de la relaxation

Ayant étudié deux méthodes différentes d'accélération de la convergence, il nous reste à voir l'effet combiné du raffinement hiérarchique et de la relaxation sur la vitesse de convergence de l'algorithme.

Nous avons choisi de faire varier le nombre de point de maillage de $N = 4$ à $N = 15$ points dans chacune des directions. Le coefficient de relaxation optimal dans notre cas est $\omega = 1,7$. Pour finir, le critère d'arrêt d'évolution est fixé à $\varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4}$.

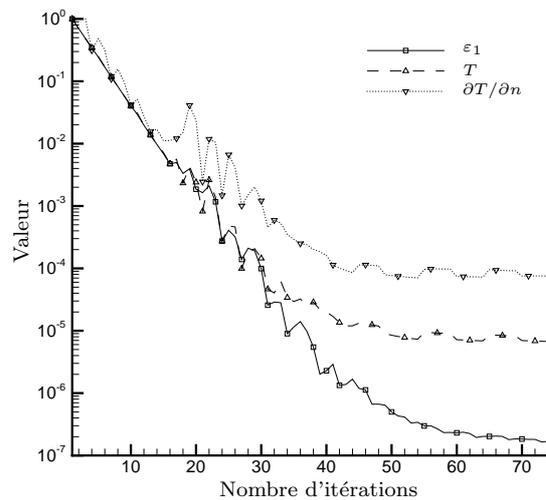


FIG. 4.27 – Raffinage Hiérarchique et Relaxation

Nous avons représenté sur la figure 4.27 l'évolution de ε_1 , T et $\frac{\partial T}{\partial n}$ en fonction du nombre d'itérations. L'algorithme converge à l'aide du deuxième critère d'arrêt en seulement 74 itérations avec les paramètres choisis. L'erreur commise sur la valeur de T sur la frontière est de l'ordre de 10^{-5} , et celle portant sur la dérivée normale atteint environ 10^{-4} . La combinaison des deux méthodes diminue vraiment le nombre d'itérations nécessaires pour converger à paramètres fixé, puisque il faut environ 6 fois moins d'itérations que dans la raffinement hiérarchique seul, et 13 fois moins que dans la cas de la relaxation seule pour 15 points de maillage.

4.6.4 Conclusion

L'algorithme de Koslov est un algorithme qui converge très lentement, comme nous l'avons vu. Nous venons d'étudier deux méthodes différentes d'accélération de la convergence, la relaxation et le raffinement hiérarchique, qui, combinés ensemble, rendent l'algorithme de complétion performant, et permettent de converger vers une grande précision en très peu d'itérations (et donc de temps de calcul). Le choix des paramètres de convergence restent un problème crucial, qui influent sur la précision de reconstruction et le temps pour arriver à convergence. L'introduction du paramètre d'évolution permet de déclencher le raffinement successif lorsque la solution ne change plus assez d'une itération sur l'autre. Le raffinement hiérarchique permet de rester le plus longtemps possible sur des maillages lâches, où le taux d'erreur décroît le plus vite, et la relaxation permet d'accélérer cette convergence sur un maillage fixe. L'alliance des deux permet donc la meilleure décroissance possible sur chaque maillage, en exploitant au maximum la rapidité de convergence sur des petits nombre de points. Ainsi, nous augmentons progressivement le nombre de point afin de garder une décroissance optimale du taux d'erreur..

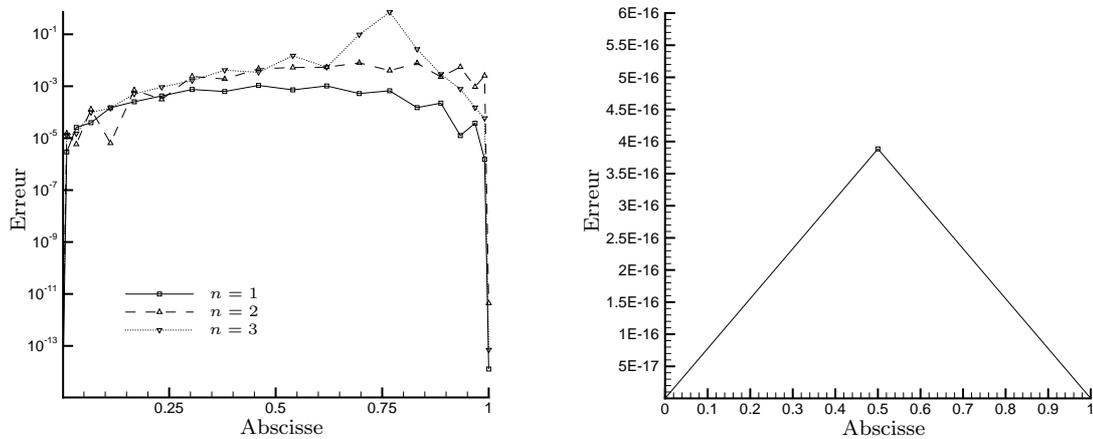
4.7 Coefficient d'échange, Résistance d'interface

La méthode mise en place permet, grâce à l'algorithme de Kozlov, de reconstruire les données manquantes sur la valeur et sa dérivée normale à la frontière. Connaissant ces deux valeurs, nous pouvons remonter à la résistance d'interface. La résistance d'interface R représente la gêne induite sur la conduction thermique à travers une interface, liée à un défaut (délamination, présence de matière parasite,...), et est définie comme le coefficient de proportionnalité entre le flux thermique $\frac{\partial T}{\partial n}$ (qui est continu) et le saut de la température à travers l'interface :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -R.T$$

Grâce à ce terme, nous pouvons quantifier les échanges du milieu avec l'extérieur. Cependant, la précision de la reconstruction des données à la frontière ne permettait pas jusqu'alors d'en calculer une valeur significative. La haute précision des méthodes spectrales employées améliore la qualité de la complétion, et quantifie ainsi avec précision ce terme d'échange.

Nous avons calculé ce coefficient dans le cas du test de la fonction périodique, et de la fonction polynômiale.



(a) Répartition de l'erreur de la résistivité de contact sur la frontière à compléter dans le cas de la fonction périodique

(b) Répartition de l'erreur de la résistivité de contact sur la frontière à compléter dans le cas de la fonction polynômiale

FIG. 4.28 – Évaluation de la résistivité de contact sur la frontière à compléter

Puisque nous avons effectué la complétion dans le cas complet, nous retrouvons la forme des résultats déjà obtenus : la solution est exacte numériquement sur les extrémités. nous avons choisi $N = 20$ points de maillage.

La figure (4.28(a)) représente les erreurs sur la frontière à compléter, pour la fonction périodique, avec n allant de 1 à 3. nous avons vu que plus le nombre de mode augmentait, plus la convergence était longue. L'arrêt de l'algorithme s'est fait grâce au critère d'arrêt d'évolution ε_2 . Ainsi à ε_2 constant, les erreurs sont plus grandes lorsque la convergence est plus longue. C'est pourquoi nous obtenons une hiérarchie dans les courbes, et les erreurs sur la frontière sont donc moins importantes pour $n = 1$ (l'erreur maximale est de l'ordre de 10^{-3}) que pour $n = 3$ (erreur maximale de l'ordre de 10^{-1}). Rappelons que la précision n'est fonction que du nombre d'itération, et une plus grande précision peut être atteinte pour un critère ε_2 plus petit. Nous arrivons donc à reconstruire ce coefficient avec précision, qui est le rapport de deux grandeurs entachées d'erreur.

Le graphe 4.28(b) est là pour rappeler que lorsque la solution est parfaitement décrite par la discrétisation, nous obtenons des erreurs proches du zéro machine.

Nous avons montré que nous pouvons reconstruire la résistance d'interface et ainsi détecter les défauts de contact sur un objet de façon indirecte, puisque les conditions aux limites sont reconstruites. Cette résistance d'interface est calculée de

façon aussi précise que voulue.

4.8 Cas d'une couronne

Nous avons étendu la méthode numérique que nous avons utilisé sur un carré à une couronne. Notre but est de reconstruire les conditions à la limite intérieure, comme montré sur le dessin (4.29(a)), connaissant toute l'information sur la frontière extérieure. Nous avons changé le type de discrétisation, avec des points de Gauss Lobatto dans la direction radiale, et de Radau dans la direction angulaire. La méthode numérique de résolution est détaillée dans le chapitre 3 et l'annexe A.1.3. Une telle discrétisation nous permet de garder le caractère tensoriel de l'opérateur Laplacien, et ainsi nous pouvons toujours résoudre la suite des problèmes directs par la méthode de diagonalisation successive.

La fonction test que nous cherchons à reconstruire sur la frontière est :

$$T(r, \theta) = \sin(r \sin \theta) e^{r \cos \theta} \quad (4.6)$$

Une représentation de la solution exacte est faite sur la figure 4.29(b).

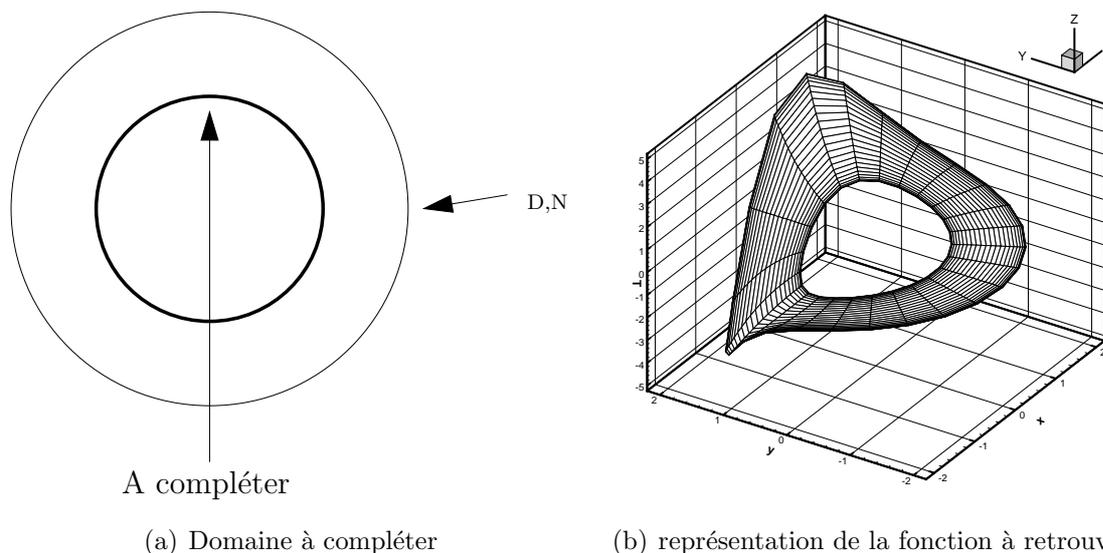
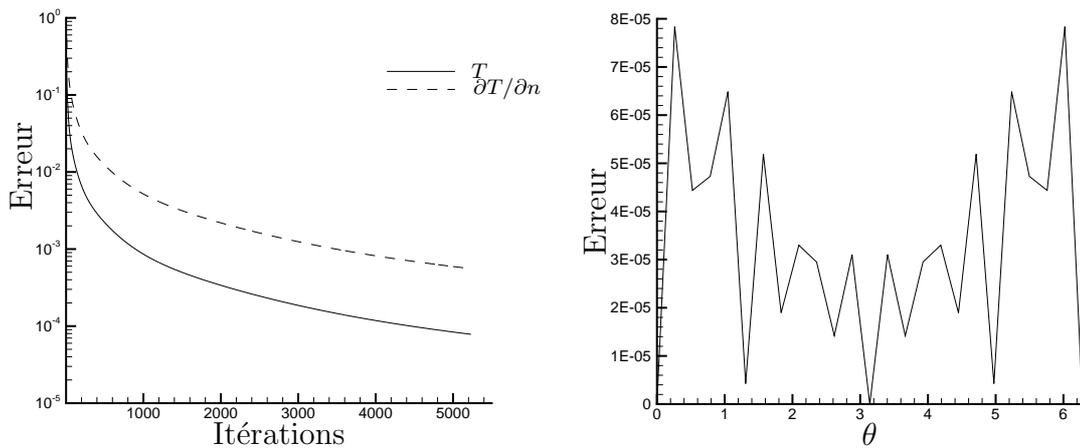


FIG. 4.29 – présentation du problème

Les calculs de complétion sont fait avec $N = 24$ points dans chacune des directions, $\varepsilon_1 = 10^{-10}$, et $\varepsilon_2 = 5.10^{-3}$. Le rayon intérieur est égal à 1, et celui extérieur est égal à 2.

La figure 4.30(a) représente l'évolution des erreurs sur la reconstruction la fonction et sur sa dérivée calculée à la frontière intérieure. L'algorithme est arrêté grâce au deuxième critère ε_2 . Le comportement de la convergence est similaire aux complétion étudiée sur le domaine carré. Il y a tout d'abord une décroissance rapide de l'erreur, puis le comportement exponentiel apparaît, représenté par une droite dans le graphe en semi-log. Le calcul s'est arrêté vers la 5200^{ème} itération.



(a) Erreur en fonction du nombre d'itérations (b) Erreur de reconstruction de T sur la frontière

FIG. 4.30 – Résultats sur la Couronne

La figure 4.30(b) représente la valeur absolue de l'erreur calculée sur la frontière, développée le long de θ . L'erreur maximale atteint la valeur de $8 \cdot 10^{-5}$. Il faut également noter que l'erreur passe par deux fois par le zéro numérique, à $\theta = 0$ et à $\theta = \pi$, lieu où $T(r, \theta)$ s'annule également. Nous pouvons remarquer de même que le plan ($\theta = 0, \theta = \pi$) est un axe de symétrie de la valeur absolue de l'erreur, et un axe d'antisymétrie pour la fonction à retrouver. Les mêmes remarques peuvent être faites pour la représentation de la dérivée (graphe 4.8). Le maximum atteint $5,6 \cdot 10^{-4}$, et la représentation de l'erreur possède le même axe de symétrie

Les figures 4.32 représente la répartition de l'erreur sur la surface de la couronne. Nous pouvons constater que l'erreur est localisée sur la frontière à compléter, et des oscillations sont présentes. Pour distinguer les effets du maillage du reste, nous avons calculé la complétion avec deux maillage différents : la figure 4.32(a) est calculée avec 24 points de maillage dans chacune des directions, et la figure 4.32(b) avec 64. Il est à remarquer qu'il y a toujours le même nombre d'oscillations, 7, quelque soit le maillage¹. Ces oscillations viennent donc d'une instabilité numérique de l'algorithme,

¹en réalité, quelque soit le maillage capable de capter 7 oscillations, c'est à dire un minimum de

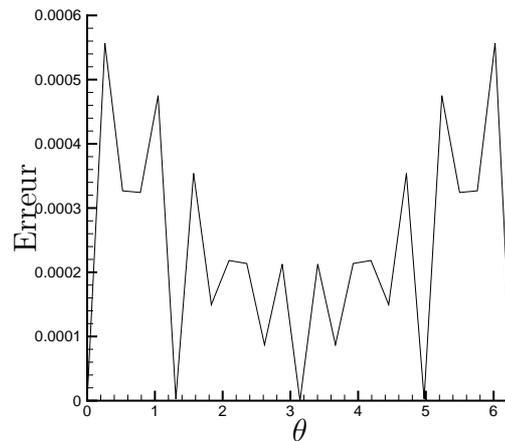
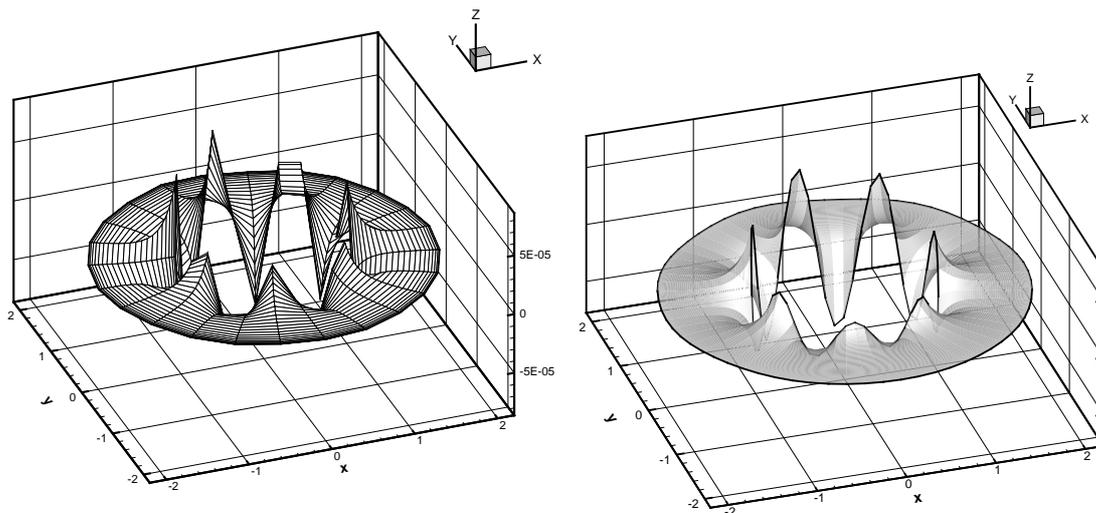


FIG. 4.31 – Erreur sur la reconstruction de la dérivée

et non du maillage lui même.



(a) Représentation de l'erreur pour $N = 24$ points (b) Représentation de l'erreur pour $N = 64$ points

FIG. 4.32 – Représentation 3D de l'erreur

Notons également que ces oscillations sont toujours situées au même endroit : quelque soit le maillage, elle sont géographiquement immobile.

En conclusion, nous avons donc montré que la reconstruction sur une couronne avec les méthodes numériques employé est possible, et donne des résultats satisfaisants. Nous arrivons à exploiter les méthodes spectrales afin de calculer les fonctions

14 points dans la direction θ , d'après le théorème de Shannon

inconnues avec une grande précision sur la couronne. La convergence est rapide, et la relaxation ainsi que le raffinement hiérarchique peuvent être mis en place afin d'accélérer le processus itératif. L'utilisation d'une discrétisation appropriée permet de garder le caractère tensoriel de l'opérateur, et ainsi utiliser une méthode directe de diagonalisation successive pour la résolution du laplacien. Les comportements de convergence restent les mêmes que dans le cas du carré. Cette configuration nous a permis d'étudier un cas intermédiaire, où la mesure de la frontière à compléter est deux fois inférieure à celle où les données sont accessibles. Cependant, la discrétisation utilisée, bâtie sur une formulation variationnelle du problème, ne nous permet pas simplement de varier de type de condition aux limites sur une même frontière.

4.9 Conclusion

L'algorithme de Koslov est un algorithme qui permet de retrouver les conditions aux limites d'un domaine connaissant des informations sur d'autres parties des frontières. Nous avons mis en place numériquement la complétion de données à l'aide de méthodes d'ordre élevées, aussi appelées méthodes spectrales. La validation s'est faite sur des cas tests sur un maillage carré, et nous avons pu ainsi appréhender le comportement de l'algorithme. Le processus itératif converge très lentement, et moins il y a d'informations disponibles, plus la convergence est lente. De même, l'augmentation du nombre de points de discrétisation réduit la vitesse. Des critères d'arrêt ont été définis qui permettent de raccourcir le temps de calcul en le stoppant dès que la vitesse de convergence devient faible.

Nous avons étudié ensuite deux méthodes d'accélération de la convergence. La première, classique, repose sur la relaxation entre chaque itération, ce qui permet d'augmenter la vitesse de convergence sur un maillage fixé. La caractéristique de cette méthode repose sur le fait que le coefficient optimal de relaxation dépend du maillage. Jourhmane et Nachaoui [Jourhmane & Nachaoui(1999)] ont calculé le coefficient de relaxation optimal qui change à chaque itération. La seconde vient du constat sur la vitesse de convergence qui est plus élevée sur des maillage ténu, mais qui offre une moindre précision du fait du peu de points de discrétisation. La solution est donc calculée jusqu'à la précision maximale sur des petits maillage, puis cette solution sert de condition initiale au système itératif écrit sur un maillage un peu plus dense. Ce processus est répété jusqu'à parvenir à la précision désirée, sur

un maillage contenant beaucoup de points. La convergence est ainsi bien plus rapide que si le calcul est effectué sur le "grand" maillage directement. Le meilleur taux de convergence est obtenu lorsque les deux méthodes sont composées.

Nous avons ensuite étendu l'étude à d'autres fonctions particulières, l'une contenant des oscillations afin de voir la réaction de l'algorithme aux perturbations, et l'autre polynômiale, à des fins pédagogiques. Nous avons pu constater que la réaction aux oscillations, de même que la réaction à une information moins complète, ralentissait la convergence. Les instabilités ne jouent pas sur la précision de reconstruction, mais sur la vitesse de convergence de l'algorithme pour arriver à la solution.

Les méthodes numériques employées permettent une grande précision dans la reconstruction, et nous avons pu ainsi calculer un coefficient d'échange sur la frontière à température inconnue, la résistivité de contact.

Pour finir, nous avons étendu la méthode numérique à un domaine annulaire, où, connaissant des informations sur l'extérieur de la couronne, la température et le flux de chaleur sont reconstruits sur la frontière intérieure.

Chapitre 5

Reconstruction de la conductivité

5.1 Problème physique

Nous nous intéressons maintenant à une classe de problèmes complémentaires de ceux étudiés au précédent chapitre et considérer des milieux hétérogènes sur lesquels la conductivité thermique est spatialement variable. De plus, contrairement au précédent chapitre, nous considérons maintenant un milieu tridimensionnel sur lequel la conductivité thermique est à reconstruire. Une des applications associée à cette problématique est la reconstruction de conductivité à partir de mesures effectuées par caméra infrarouge [Gaussorgue(1999)]. Dans cette perspective, il est souhaitable d'obtenir une méthode d'inversion rapide qui pourrait éventuellement servir pour un traitement en temps réel des images thermiques. Nous allons exposer dans ce chapitre le principe d'une telle méthode, en illustrant son cadre d'applications et ses limites sur des cas tests.

La première partie décrit une classe particulière de problèmes pour lesquels la méthode proposée pourra être appliquée. Il s'agit de milieux minces d'épaisseurs variables et de propriétés homogènes. Cette première partie montre à l'aide de développements asymptotiques comment et sous quelles hypothèses le problème tridimensionnel de la diffusion homogène de la chaleur peut être ramené à un problème bidimensionnel hétérogène.

Ce développement justifiera le fait que, dans la suite de notre exposé, nous choisirons l'équation de la chaleur bidimensionnelle hétérogène instationnaire pour appliquer la méthode de reconstruction :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = f. \quad (5.1)$$

Notre domaine d'étude sera une plaque plane de diffusivité thermique $a(x, y) =$

$\frac{\lambda}{\rho C_p}$. Nous ferons l'hypothèse que la densité ρ et la chaleur massique C_p sont constantes. Ainsi, la variation de diffusivité sera contenue uniquement dans les variations de conductivité $\lambda(x, y)$. Cette approximation est souvent utilisée dans les matériaux hétérogènes présentant des micro-fissures qui n'affectent que peu la densité du matériau ou la chaleur massique C_p [Bonnet *et al.*(1992a)], mais infléchissent plus significativement la conductivité locale λ . Dans ce cadre, et sans perte de généralité, nous pouvons écrire que le produit $\rho C_p = 1$, ce qui, puisqu'il ne représente qu'un coefficient multiplicateur de la conductivité λ , simplifiera les notations.

La suite du chapitre expose le principe de la méthode qui repose sur la réécriture de l'équation de la chaleur instationnaire en milieu hétérogène sur des lignes de flux d'un champ de température, lignes qui sont localement parallèles au gradient de température. Nous calculerons sur ces lignes un ensemble d'expressions semi-analytique permettant d'obtenir la conductivité en tout point de la ligne à partir de celle en un point arbitraire. A l'aide d'un deuxième champ de température, nous trouverons un deuxième ensemble de relations qui liera les lignes de flux entre elles. Nous aurons ainsi ramené la connaissance de la conductivité sur tout le domaine à sa détermination en un point. Nous détaillerons par la suite une méthode d'optimisation associée à une fonctionnelle quadratique pour nous permettre de déterminer complètement la conductivité sur tout le domaine.

Nous décrirons ensuite l'implémentation numérique de l'inversion, qui met en jeu deux systèmes de discrétisation différents. Le but de cette mise en œuvre sera de tester la méthode, et ses limitations. Nous mettrons en lumière ses forces et ses faiblesses, et nous discuterons ses conditions d'opérabilité sur différents cas tests.

5.2 Étude de l'existant

Bien que nous présentons dans ce document une méthode nouvelle d'inversion de la conductivité, il est tout de même nécessaire de remarquer les travaux sur lesquels s'appuie notre méthode, et de citer ceux qui ont choisis une autre voie dans la résolution de ce problème ouvert. Les bases mathématiques et leurs auteurs respectifs rendant possible la résolution des problèmes inverses seront exposés dans le paragraphe 5.5. Les premiers à s'intéresser aux problèmes inverses concernant l'équation de la chaleur sont [Cannon & DuChateau(1973b)], [Cannon & DuChateau(1973a)], [Cannon & DuChateau(1974)], [Cannon & DuChateau(1980)], [Cannon & DuChateau(1987)]. Les auteurs cherchent à reconstruire soit le coefficient de conductivité, soit le terme

source de l'équation de la chaleur, et proposent même un plan d'expérimentation. Les performances des ordinateurs pour trouver des solutions numériques n'étaient pas suffisante dans les années 80, et c'est pourquoi les principaux travaux numériques sur les problèmes inverses recommencent dans les années 90. Notons un article de conférence, [Bonnet *et al.*(1992a)], qui fait un point sur le contrôle non destructif. D'autres auteurs ont cherchés à identifier les propriétés thermiques des matériaux dans le cas de l'équation de la chaleur stationnaire, comme [Lesnic *et al.*(1995)], [Dorai & Tortorelli(1997)], [Hanke & Scherzer(1999)], [Park & Jung(2001)], [Fatullayev(2002)], [Tadi *et al.*(2002)], [Wang & Zheng(2002)] et [Fatullayev(2005)]. [Taler(1996)] explore les voies de détermination expérimentale de ces coefficients. Certains, tels que [Monde(2000)] et [Monde *et al.*(2003)] ont choisi la transformée de Laplace pour calculer l'inversion. Les solutions de l'équation de la chaleur stationnaire étant harmoniques, [Yildiz & Sever(1998)], [Kang & Seo(1996)] ont choisis d'utiliser la théorie du potentiel pour résoudre ces problèmes. Une des manières les plus courantes d'effectuer l'inversion numérique consiste à minimiser une différence quadratique entre, par exemple, une température calculée à partir de paramètres estimés itérativement et la température expérimentale mesurée. Cette minimisation au sens des moindres carrés peut s'effectuer par diverses méthodes numériques. Par exemple, nous pouvons calculer la matrice de sensibilité afin de converger vers la valeur cherchée des paramètres à l'aide d'un algorithme itératif. À chaque pas, la valeur des paramètres en chaque point est mise à jour en utilisant une matrice de dérivation, appelée matrice de sensibilité. Une telle approche a été mise en œuvre par [Bonnet *et al.*(1992b)], [Liu *et al.*(1995)], [Franckel(1996)] et [Sablani *et al.*(2005)]. [Battaglia *et al.*(2001)], [Chen *et al.*(2001a)] l'applique en utilisant de plus la transformée de Laplace dans la résolution. D'autres auteurs utilisent une méthode numérique d'éléments frontières. [Lesnic *et al.*(1996)], [Chantarisiwan(2001)] utilise cette méthode numérique pour reconstruire un champ de température et les flux aux frontières. [Shen(1999)] utilise une méthode de collocation avec un opérateur régularisant de Tikhonov pour résoudre un problème unidimensionnel. L'utilisation d'une méthode de gradient conjugué afin de retrouver la conductivité thermique hétérogène a été utilisée par [Huang & Chin(2000)], [Lin *et al.*(2003)]. [Monde & Mitsutake(2001)] utilisent une expression semi-analytique de la solution exacte pour estimer la diffusivité thermique. [Kim & Lee(2002)] cherche à retrouver les paramètres non pas en minimisant une erreur, mais en utilisant la méthode du maximum d'entropie, et un gradient conjugué. L'avantage de cette méthode est que l'algorithme cherche

une solution la plus naturelle, plutôt que la plus "lisse". Notons aussi la thèse de [Knudsen(2002)]. Quant à [Yeung & Lam(1996)], il résoud le problème d'inversion avec un algorithme d'inversion direct. Il faut aussi remarquer les travaux de [Lesnic(2002)] et [Kim *et al.*(2003)], qui cherchent à reconstruire à la fois la température, la conductivité et la chaleur massique qui dépendent toutes deux de la température. D'autres méthodes existent, par exemple, [Shenefelt *et al.*(2002)] décompose l'opérateur d'inversion en valeurs singulières et ne garde que les significatives, pour permettre de régulariser l'inversion et améliorer le taux d'erreur. Cette façon de faire est aussi utilisée par [Girault & Petit(2005)], qui compare l'inversion faite à l'aide d'un modèle réduit et celle calculée à partir du modèle complet. D'autres tels que [Behbahani-nia & Kowsary(2004)] utilisent une méthode séquentielle. Nous n'avons pas encore mentionné les méthodes statistiques pour effectuer l'inversion. En effet, [Wang & Zabaras(2004)] utilisent les méthodes MCMC (Monte-Carlo Markov Chain).

5.3 3D-2D pour un exemple donné

Dans cette partie, nous montrons comment la classe de problèmes bidimensionnels que nous allons traiter dans la suite peut être dérivée d'un problème tridimensionnel réaliste. Puisque l'objectif final est de reconstruire la conductivité sur une carte de température bidimensionnelle, nous allons voir comment nous pouvons définir une conductivité apparente en considérant un matériau dont les dimensions dans un plan Oxy sont très grandes vis à vis de l'épaisseur, dans la direction z . Nous présentons ici comment, et sous quelles hypothèses, le problème tridimensionnel se réduit à un problème bidimensionnel.

5.3.1 approche asymptotique pour les milieux minces

Soit un domaine parallélépipédique dans les direction x et y . La hauteur est variable dans la direction z . On suppose que la face à $z = 0$ est plane et qu'en revanche la frontière opposée du domaine est de hauteur variable.

Notons $z = \zeta(x, y)$ l'équation de la face "arrière". Soit $T(x, y, z, t)$ la température du matériau. L'évolution du champ de température est décrite par l'équation de la chaleur suivante :

$$a\Delta T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (5.2)$$

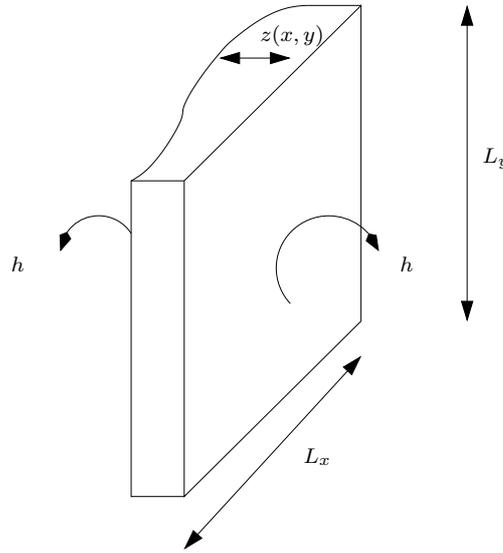


FIG. 5.1 – Géométrie du domaine 3D

où qui a représente la diffusivité thermique, $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$, est supposé uniforme dans cet exemple.

Examinons les adimensionnements que nous allons effectuer.

Soit T_0 la température extérieure dans laquelle baigne le matériau. Elle va nous servir de référence.

Soit $\varphi = \frac{T - T_0}{T_0}$ une température adimensionnelle, et τ_0 un temps de référence, réponse caractérisant le matériau.

Les dimensions dans les directions x et y sont notées L_x et L_y .

Le matériau est de petite épaisseur (dans la direction z), par rapport aux extensions des directions x et y .

Notons $\zeta_m = \max(\zeta(x, y))$, $\varepsilon = \zeta_m / \max(L_x, L_y) \ll 1$, et posons :

$$x = L_x X, \quad (5.3a)$$

$$y = L_y Y, \quad (5.3b)$$

$$z = \zeta_m Z. \quad (5.3c)$$

L'équation 5.2 devient en utilisant ces adimensionnements précédents :

$$\frac{a\tau_0}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + \frac{L^2}{h_m^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0. \quad (5.4)$$

Nous cherchons à étudier l'influence de l'épaisseur (dans la direction z). Il est donc nécessaire d'avoir $\frac{a\tau_0}{L^2} \sim \frac{\zeta_m^2}{L^2}$ pour pouvoir étudier le phénomène dans l'épaisseur.

Cela correspond à un temps caractéristique thermique relativement court, puisque $a\tau_0 \sim \zeta_m^2$. Les hypothèses précisent que le matériau est mince, et l'on s'attend ainsi à ce que la diffusion de la chaleur dans l'épaisseur soit rapide. Il en ressort que l'équation différentielle porte sur l'épaisseur Z et le temps τ .

A ces échelles de temps, la diffusion dans les directions x et y est ramenée à l'ordre $O(\varepsilon^2)$.

L'équation s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0. \quad (5.5)$$

Nous allons modéliser sous ces hypothèses le déroulement d'une expérience "modèle" envisageable. Cette expérience se déroule en deux étapes distinctes. Dans une première étape, le matériau est éclairé par une source de flux de chaleur pendant une durée fixée, t_0 . Cette première étape sera appelée par la suite étape d'excitation thermique. Dans une seconde étape, la source de flux est coupée, et la température du matériau relaxe dans l'épaisseur, en présence de fuites convectives. Cette seconde partie sera appelée étape de relaxation transversale du champ thermique.

Traduit en termes mathématiques, la première partie de l'expérience est associée à une température initiale T_0 , et un flux de chaleur f qui est appliqué sur la face $z = 0$ pendant une durée t_0 . Notons $F = \frac{f}{L_x L_y}$ le flux de chaleur par unité d'épaisseur. La solution de ce problème sera notée Θ_1 dans la suite.

La deuxième partie de l'expérience considère qu'au temps $\tau = t_0$, la source de flux est coupée, et la température relaxe dans l'épaisseur. La condition initiale est $\Theta_1(Z, \tau = t_0)$, prise à l'instant t_0 . Du début jusqu'à la fin du déroulement de l'expérience, les pertes de charges convectives sont prises en comptes (notées h dans la figure (5.1)), pour décrire l'évolution d'une température qui sera noté Θ_1 ou Θ_2 suivant l'étape considérée.

Pour la résolution de (5.5), nous pouvons chercher une solution en séparant les variables, c'est à dire en décomposant la fonction recherchée $\varphi(X, Y, Z, \tau)$ en deux fonctions indépendantes $\Psi(X, Y)$ et $\Theta(Z, \tau)$, qui ne dépendent respectivement que de l'espace, de l'épaisseur et du temps :

$$\varphi(X, Y, Z, \tau) = \Psi(X, Y)\Theta(Z, \tau). \quad (5.6)$$

Nous devons de plus appliquer l'adimensionnement (5.3) aux conditions aux limites.

Les conditions aux limites convectives s'écrivent ainsi :

- En $z = 0$, coexistent les pertes convectives et le flux de chaleur. Cela s'écrit donc :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_0) - F, \quad (5.7)$$

où h qui est le coefficient d'échange convectif et T_0 la température du milieu extérieur.

Cette condition à la limite s'écrit sous la forme adimensionnée :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Z} = Bi\Theta - \frac{F}{T_0}, \quad (5.8)$$

où $Bi = \frac{h\zeta_m}{\lambda}$ est le nombre de Biot, bâtit sur ζ_m la longueur de référence vue en (5.3). Il exprime la concurrence entre convection et conduction.

Pour écrire la solution, il est plus pratique de définir un nombre de Biot local, qui sera noté $Bi_l = Bi \frac{Z_m}{\zeta_m}$.

- La deuxième condition en $z = Z_m$ est identique, mais sans le flux imposé. Après adimensionnement, elle s'écrit sous la forme suivante :

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial Z} = Bi\Theta. \quad (5.9)$$

L'équation différentielle à résoudre pour la première partie s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = Bi\Theta - \frac{F}{T_0}, \quad Z = 0, \\ -\frac{\partial \Theta}{\partial Z} = Bi\Theta, \quad Z = Z_m, \\ \Theta = 0, \quad \tau = 0. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit comme l'addition de deux séries (voir [Carslaw & Jaeger(1997)]) :

$$\Theta_1(Z, \tau) = M + 2Bi_l \frac{F}{T_0 h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\beta_n^2 \frac{\lambda \tau}{4Z_m^2}\right)} + \frac{1}{2} \frac{F}{T_0 h} - \frac{F}{T_0 h} \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\alpha_n^2 \frac{\lambda \tau}{4Z_m^2}\right)}, \quad (5.11a)$$

$$A_n = \frac{\sin \left[\beta_n \left(2 \frac{Z}{Z_m} + 1 \right) \right]}{(4Bi_l^2 + 2Bi_l + \beta_n) \sin \beta_n}, \quad (5.11b)$$

$$B_n = \frac{\cos \left[\frac{\alpha_n}{2} \left(2 \frac{Z}{Z_m} + 1 \right) \right]}{(4Bi_l^2 + 2Bi_l + \alpha_n) \cos \alpha_n}, \quad (5.11c)$$

$$M = -\frac{2Bi_l F \left(2 \frac{Z}{Z_m} + 1 \right)}{T_0 h (1 + 2Bi_l)}, \quad (5.11d)$$

où α_n et β_n sont solutions des équations transcendentes :

$$\beta \cos \beta + 2Bi_l = 0, \quad (5.12)$$

$$\alpha \tan \alpha = 2Bi_l. \quad (5.13)$$

Cherchons à présent la solution à la deuxième partie de l'expérience modèle. Dans cette partie, nous étudions la relaxation de la température dans l'épaisseur. La deuxième partie de l'expérience commence à $\tau = t_0$ lorsque le flux de chaleur est arrêté. La condition initiale est ainsi $\Theta_2 = \Theta(Z, t_0)$. Les conditions aux limites modélisant la convection s'écrivent comme sur la face $Z = Z_m$ (équation 5.9) de la première partie, au signe prêt pour respecter les conventions sur l'orientation du flux de chaleur. La température relaxe alors vers la température extérieure.

Le matériau répond donc à ce deuxième système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial Z^2} - \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial Z} = Bi \Theta_2, \quad Z = 0, \\ -\frac{\partial \Theta_2}{\partial Z} = Bi \Theta_2, \quad Z = Z_m, \\ \Theta_2 = \Theta(Z, t_0), \quad \tau = t_0, \text{ et } \tau > t_0. \end{array} \right. \quad (5.14)$$

La solution du système (5.14) s'écrit encore une fois sous forme d'une série (voir [Carslaw & Jaeger(1997)]) :

$$\Theta_2(Z, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda \gamma_n^2 (\tau - t_0)} \int_{w=0}^{w=Z_m} D_n dw, \quad (5.15a)$$

$$C_n = \frac{\gamma_n \cos(\gamma_n Z) + Bi_l \sin(\gamma_n Z)}{(\gamma_n^2 + Bi_l^2) Z_m + 2Bi_l}, \quad (5.15b)$$

$$D_n = \Theta(w, t_0) [\gamma_n \cos(\gamma_n w) + Bi_l \sin(\gamma_n w)], \quad (5.15c)$$

et les modes γ_n sont solutions de :

$$\tan(\gamma Z_m) = \frac{2\gamma Bi_l}{\gamma^2 - Bi_l^2}, \gamma \neq 0. \quad (5.16)$$

On voit que par suite des pertes, la solution (5.16) tend vers la température nulle (qui est la température extérieure adimensionnée). Cette solution se décompose en différents modes.

Analysons le premier des modes γ_n . Considérons un matériau dont le nombre de Biot soit très petit. $Bi \rightarrow 0$, donc $\gamma_1 Bi_l \ll 1$, et par conséquent $\gamma_1^2 \sim \frac{2Bi}{Z_m}$. Nous pouvons associer un temps de relaxation à ce mode particulier : $\tau_1 = \frac{1}{\lambda \gamma_1^2} = \frac{Z_m^2}{4Bi^2 \lambda}$. Et calculons sa limite, $\lim_{Bi \rightarrow 0} \tau_1 \rightarrow \infty$. La solution (5.16) pour le premier mode devient presque stationnaire. Ceci nous rappelle directement la physique du problème : si Bi est petit, c'est à dire si les pertes par convection sont faibles (c'est une bonne approximation pour un matériau métallique dans de l'air), la température devient rapidement homogène dans l'épaisseur.

Regardons à présent les autres modes. Une première approximation en $O(Bi)$ de (5.16) conduit à une approximation des autres valeurs propres, qui nous donne $\gamma_n \sim \frac{\gamma_1 + n\pi}{Z_m}$. Regardons le temps associé au deuxième mode propre. $\tau_2 \sim \frac{Z_m^2}{4\pi^2 \lambda}$. En comparant les deux temps, $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\pi^2}{Bi^2}$, on remarque que lorsque $Bi \rightarrow 0$, les modes sont complètement découplés. Ainsi lorsqu'on regarde l'évolution de la température dans le temps, il ne reste que le premier mode qui devient dominant, comparé aux autres qui relaxent rapidement.

Plaçons nous dans le cas analysé précédemment où le premier des modes est découplé des suivants. Ceci revient à étudier la réponse après un intervalle de temps suffisamment long après t_0 pour que les modes $n > 1$ aient relaxé, mais suffisamment court pour que le premier mode n'en ai pas eu le temps : $\tau_2 \ll \tau \ll \tau_1$.

Avec ces hypothèses nous considérons maintenant le premier mode stationnaire. La solution (5.15) s'écrira alors :

$$\Theta_2(Z, \tau) = 2e^{-\lambda\gamma_1^2(\tau-t_0)} \frac{\gamma_1 \cos(\gamma_1 Z) + Bi_l \sin(\gamma_1 Z)}{(\gamma_1^2 + Bi_l^2) Z_m + 2Bi_l} E_1 \simeq \frac{2\gamma_1}{2Bi_l} E_1, \quad (5.17a)$$

$$E_1 = \int_{w=0}^{w=Z_m} D_1 dw = \gamma_1 \int_{w=0}^{w=Z_m} \Theta(w, t_0) \gamma_1 dw. \quad (5.17b)$$

Le résultat (5.17) nous montre donc que la solution écrite à l'ordre $O(1)$ du problème tridimensionnel relaxe vers une température non nulle uniforme verticalement, mais pas dans le plan (x, y) .

Relions maintenant cette température à l'épaisseur.

$$E_1 = \gamma_1 \left[N + \frac{1}{2} \frac{F}{T_0 h} Z_m + 2Bi_l \frac{F}{T_0 h} \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{-\left(\beta_n^2 \frac{\lambda t_0}{4Z_m^2}\right)} - \frac{F}{T_0 h} \sum_{n=1}^{\infty} H_n e^{-\left(\alpha_n^2 \frac{\lambda t_0}{4Z_m^2}\right)} \right] \quad (5.18a)$$

$$G_n = \left[\frac{-\frac{Z_m}{2\beta_n} \cos \left[\beta_n \left(2\frac{Z}{Z_m} + 1 \right) \right]}{(4Bi_l^2 + 2Bi_l + \beta_n) \sin(\beta_n)} \right]_0^{Z_m} = \frac{-Z_m (\cos(3\beta_n) - \cos \beta_n)}{2\beta_n (4Bi_l^2 + 2Bi_l + \beta_n) \sin(\beta_n)} \quad (5.18b)$$

$$H_n = \left[\frac{\frac{Z_m}{2\alpha_n} \sin \left[\frac{\alpha_n}{2} \left(2\frac{Z}{Z_m} + 1 \right) \right]}{(4Bi_l^2 + 2Bi_l + \alpha_n) \cos(\alpha_n)} \right]_0^{Z_m} = \frac{Z_m \left(\sin \left(\frac{3\alpha_n}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha_n}{2} \right) \right)}{2\alpha_n (4Bi_l^2 + 2Bi_l + \alpha_n) \cos(\alpha_n)} \quad (5.18c)$$

$$N = -\frac{4Bi_l \frac{F}{T_0 h} Z_m}{(1 + 2Bi_l)} \quad (5.18d)$$

On le voit, la dépendance de la température avec l'épaisseur n'est pas simple. Cependant, si t_0 est assez grand devant $\frac{4Z_m^2}{\alpha_0^2 \lambda}$, et $\frac{4Z_m^2}{\beta_0^2 \lambda}$, les temps caractéristiques les plus lents du champ Θ_1 dans l'étape d'excitation thermique, alors Θ_2 ne dépend plus de Z . Si nous rajoutons toutes les hypothèses précédemment faites sur l'encadrement du temps, nous arrivons alors à l'approximation de E_1 suivante :

$$E_1 \simeq \gamma_1 Z_m \left(-\frac{4Bi_l \frac{F}{T_0 h}}{(1 + 2Bi_l)} + \frac{1}{2} \frac{F}{T_0 h} \right). \quad (5.19)$$

L'expression de la température ainsi approximée prend la forme écrite :

$$\Theta_2 \simeq \frac{\gamma_1}{Bi_l} \gamma_1 \frac{F}{T_0 h} Z_m \left(-\frac{4Bi_l}{(1+2Bi_l)} + \frac{1}{2} \right) = \Theta'_2 Z_m. \quad (5.20)$$

Elle devient linéaire en Z_m , coordonnée locale de l'épaisseur du matériau. La température est donc constante dans l'épaisseur, et la valeur dépend linéairement de l'épaisseur locale.

La température étant constante dans l'épaisseur, les transferts de chaleur deviennent alors bidimensionnels. Il est donc possible d'écrire des lois de conservation pour la partie bidimensionnelle. La conservation du flux de chaleur dans le plan (x, y) devient:

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla \Psi(X, Y, \tau) \Theta_2) = \rho C \frac{\partial}{\partial t} (\Psi(X, Y, \tau) \Theta_2). \quad (5.21)$$

On voit alors que si l'on pose $T' = \frac{\Psi}{\Theta'_2 Z_m}$, on a :

$$\operatorname{div}(\lambda Z_m \nabla (T'(X, Y, \tau))) = \rho C Z_m \frac{\partial}{\partial t} T'(X, Y, \tau). \quad (5.22)$$

En conclusion, nous pouvons remarquer que ce résultat est obtenu, en négligeant les termes d'ordre $O(\varepsilon^2)$ dans l'équation originale. C'est en effet l'ordre des termes portant sur la dérivation en x et y . L'approximation bidimensionnelle ainsi faite n'est valable qu'entre deux temps caractéristiques τ_1 et τ_2 définis plus haut.

En vue d'une expérimentation, il serait nécessaire d'estimer la plage de temps, en fonction du nombre de Biot, où les approximations sont valables. Il est également nécessaire de remarquer que nous pouvons nous affranchir de la limite $t_0 \gg \frac{4Z_m^2}{\alpha_n^2 \lambda}$, mais la dépendance de la conductivité bidimensionnelle avec l'épaisseur locale Z_m n'est donc plus linéaire. Il nous faut alors tenir compte de la fonction complète, exprimée en (5.18).

Nous avons donc démontré que, dans le bon intervalle de temps caractéristique, une hétérogénéité du champ de température dans le plan $z = 0$ peut être interprétée comme induite par les variations d'un champ surfacique de conductivité thermique équivalent dépendant de l'épaisseur de l'échantillon. Le problème sur la température est donc ramené à une équation de conservation bidimensionnelle.

5.4 Utilisation de coordonnées Lagrangienne pour la reconstruction de conductivité hétérogène.

Nous présenterons dans cette partie une méthode de reconstruction de la conductivité qui utilise un système de coordonnées physiques, Lagrangien. Les méthodes habituelles se servent de la minimisation d'une fonctionnelle coût qui porte sur tout le champ de la conductivité. Lorsque nous regardons de façon discrète, cela revient à écrire une équation pour chaque nœud du maillage. La méthode de résolution doit alors retrouver par approches successives la valeur en chaque point du champ de conductivité. L'originalité de la méthode que nous allons exposer réside dans la résolution semi-analytique du champ de conductivité. L'équation qui nous sert de modèle est l'équation de diffusion hétérogène instationnaire bidimensionnelle (5.1). Cette équation est réécrite dans le système de coordonnées naturelles du problème. Ce système de coordonnées Lagrangiennes est particulier, par définition, à chaque champ étudié. Une telle réécriture a déjà été utilisée dans le cas stationnaire pour calculer des champs de perméabilité associés à des écoulements de fluides incompressibles en milieu poreux hétérogènes à deux dimensions ([Dagan(1989)], [Bear(1972)]). Dans le cas de fluides incompressibles, le système de coordonnées Lagrangiennes est composé de la fonction courant pour la première direction, et de la pression pour la deuxième direction. Nous allons généraliser cette méthode au cas instationnaire. Mathématiquement parlant, l'instationnarité du problème rend la divergence non nulle, et implique que les fonctions de courant ne sont pas uniques. La conséquence directe est que nous ne pouvons définir le système de coordonnées par la donnée de deux fonctions, décrivant les lignes de courant, et leur orthogonaux. Les coordonnées seront de ce fait calculées numériquement, à partir des champs de température mesurés.

5.4.1 Réécriture de l'équation de la chaleur, et passage au monodimensionnel.

Le domaine d'étude bidimensionnel sera appelé $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ dans lequel une diffusivité thermique $a(x, y) = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ est cherchée. Les données ainsi recueillies ou pouvant être calculées sont donc $T(x, y, t)$, $\partial T / \partial t$.

Nous partons donc de l'équation de la chaleur hétérogène instationnaire, en coordonnées cartésiennes (x, y) . f est le terme source qui est nul dans les cas physiques

étudiés, mais qui ne l'est pas dans certains cas test que nous développerons plus loin.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = f. \quad (5.23)$$

Comme exposé dans l'introduction, le champ de température est supposé connu en temps et en espace sur Ω .

Tout le principe de la méthode réside dans la réécriture de cette équation (5.23) sur un autre système de coordonnées. Pour cela, il faut d'abord développer le terme de la divergence :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \lambda \cdot \nabla T - \lambda \Delta T = f. \quad (5.24)$$

Dans cette équation, il faut maintenant considérer que l'inconnue est la conductivité, et que le champ de température, sa dérivée temporelle et le terme source sont des données du problème. Nous allons ensuite réécrire l'équation de transport de l'énergie dans les coordonnées lagrangiennes (χ, T) où χ est la coordonnée qui suit le gradient de température : $\vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} \chi = 0$. Baptisons "lignes de flux" les lignes le long desquelles la coordonnée χ est constante. Décomposons l'équation (5.24) sur $\vec{\nabla} T$: Réécrive le long d'une ligne de flux iso- χ elle devient :

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = -\frac{\Delta T}{\|\vec{\nabla} T\|} \lambda + \frac{1}{\|\vec{\nabla} T\|} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - f \right), \quad (5.25)$$

où θ est la coordonnée curviligne le long d'une ligne de flux.

A ce niveau, une hypothèse supplémentaire est nécessaire : la norme du gradient de température ne doit s'annuler nulle part dans le domaine Ω :

$$\|\vec{\nabla} T\| \neq 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (5.26)$$

C'est une hypothèse que l'on rencontre dans toutes classes de problèmes inverses, sous l'appellation plus générale de "champs identifiant", permettant l'identification du ou des paramètres recherchés. Par exemple un champ de température uniforme ne permet évidemment pas de déduire la conductivité, puisque, quelle qu'elle soit, elle n'a aucune influence sur la température.

Revenons à l'équation (5.25) : c'est une équation différentielle ordinaire du premier ordre en λ à coefficients non constants. Rappelons que les expressions de T , $\partial T/\partial t$ et ΔT sont connues, les champs $\partial T/\partial t$ et ΔT étant évalués numériquement. Cette équation peut donc être résolue, et ainsi sur chaque ligne de flux, la solution analytique, exprimée en fonction de la température, est de la forme :

$$\lambda(T) = \lambda_0 e^{(-\int_{T_0}^T M dT)} + \left(\int_{T_0}^T \frac{(\frac{\partial T}{\partial t} - f)}{\|\vec{\nabla} T\|} e^{(\int_{T_0}^{\eta} M dT)} d\eta \right) e^{(-\int_{T_0}^T M dT)}, \quad (5.27)$$

$$M = \frac{\Delta T}{\|\vec{\nabla} T\|}, \quad (5.28)$$

$$\lambda_0 = \lambda(T_0). \quad (5.29)$$

Chacune des lignes est indépendante, et nous avons fixé de façon arbitraire une origine. Ainsi T_0 est la température à l'origine d'une ligne de flux. Il faut voir le λ_0 comme une "condition initiale" sur la conductivité, c'est à dire la valeur de la conductivité à l'origine de la ligne T_0 . De l'expression analytique (5.27), (5.28), (5.29), il ressort que la conductivité λ sur toute une ligne de flux ne dépend que de la valeur λ_0 . En faisant coïncider l'origine T_0 de cette ligne avec une frontière du domaine Ω , nous remarquons que la détermination de la conductivité sur toute la ligne de flux est seulement fonction de la conductivité sur la frontière de ce domaine.

L'expression de la conductivité $\lambda(T)$ est affine, puisque les coefficients ne dépendent pas de la valeur de la conductivité.

5.4.2 Liaison entre deux lignes

Principe, utilisation d'un deuxième champ de température

A ce stade de résolution, nous avons ramené la connaissance de la conductivité sur tout le domaine Ω à la connaissance de la conductivité sur la frontière $\partial\Omega$. Grâce à une série de lignes de flux indépendantes, nous sommes capables de "propager" la conductivité des frontières du domaine vers son intérieur à l'aide d'une relation semi-analytique.

Il s'agit maintenant de trouver une relation entre chacune des lignes afin de réduire le nombre d'inconnues à déterminer lors du processus de reconstruction.

Nous allons pour cela utiliser un deuxième champ de température, dont le gradient moyen n'est pas colinéaire au gradient de température du premier champ utilisé pour tracer les lignes.

Le deuxième champ de température est "créé" à partir de conditions initiales différentes, par exemple, mais il répond aux mêmes contraintes physiques que le premier. C'est à dire que le champ de conductivité reste le même, seule la répartition de température est différente. Nous avons donc deux champs de température indépendants entre eux, que nous pouvons alors choisir non colinéaires, mais bâti sur la même

conductivité. Il contient tout les deux la même information cherchée, et c'est l'exploitation de ces deux champs qui va donner une relation entre les lignes de flux.

Le principe pour trouver la liaison entre les lignes de flux du premier champ est donc d'utiliser la même méthode que pour le premier. Nous allons donc tracer des lignes de flux ayant pour support le deuxième champ, et dont l'origine des lignes est identique à celles de la première répartition. Puisque les champs de température ne sont pas colinéaires en moyenne, il y aura forcément des intersections entre les lignes de flux des deux répartitions.

Il suffit donc d'appliquer la solution (5.27) de l'origine d'une ligne de flux du premier champ jusqu'au point d'intersection, et de faire la même chose avec une ligne de flux du deuxième champ de température, en partant de l'origine, qui est commune à une autre ligne de flux du premier champ, jusqu'au même point d'intersection.

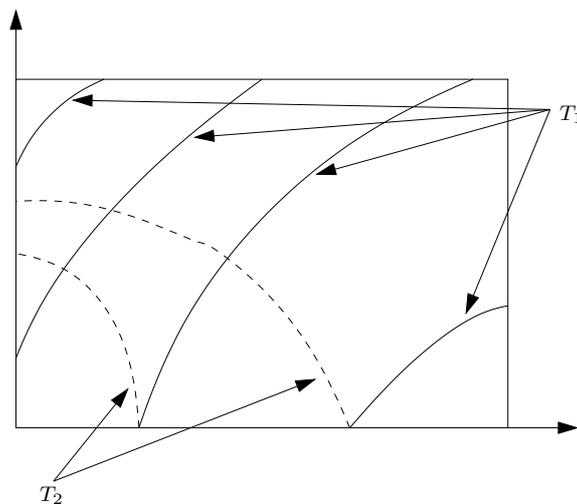


FIG. 5.2 – Exemple d'une intersection

La conductivité étant la même au point d'intersection, les deux expressions sont égales, et permettent de relier la valeur de la conductivité aux origines des deux lignes.

On note θ , la coordonnée métrique qui représente l'abscisse curviligne depuis l'origine d'une ligne.

En simplifiant les notations, nous pouvons écrire pour une répartition de température

T , sur la ligne L :

$$\lambda_L(\theta) = \lambda_0^L \cdot A_T^L(\theta) + B_T^L(\theta), \quad (5.30)$$

$$A_T^L(\theta) = e^{\left(-\int_0^\theta \frac{\Delta T(\theta')}{\|\nabla T(\theta')\|} d\theta'\right)}, \quad (5.31)$$

$$B_T^L(\theta) = \left(\int_0^\theta \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial t}(\eta) - f(\eta)\right)}{\|\nabla T(\eta)\|} e^{\left(\int_0^\eta \frac{\Delta T(\theta')}{\|\nabla T(\theta')\|} d\theta'\right)} d\eta \right) e^{\left(-\int_0^\theta \frac{\Delta T(\theta')}{\|\nabla T(\theta')\|} d\theta'\right)}, \quad (5.32)$$

où λ_0^L est la valeur de la conductivité à l'origine de la ligne L .

Si nous avons deux lignes L_1 et L_2 , qui se coupent au point $C_{L_1L_2}$, d'abscisses respectives sur L_1 et L_2 , θ_{L_1} et θ_{L_2} . Au point $C_{L_1L_2}$, les relations (5.30), (5.31), et (5.32) sont égales, puisque la conductivité est la même :

$$\lambda_{L_1}(\theta_{L_1}) = \lambda_{L_2}(\theta_{L_2}). \quad (5.33)$$

Considérons connue la conductivité $\lambda_0^{L_1}$. Les relations (5.30), (5.31), (5.32) et (5.33) conduisent à l'égalité suivante :

$$\lambda_0^{L_2} = \lambda_0^{L_1} P_{12} + D_{12}, \quad (5.34)$$

$$P_{12} = \frac{A_{T_2}^{L_1}(\theta_{L_1})}{A_{T_1}^{L_2}(\theta_{L_2})}, \quad (5.35)$$

$$D_{12} = \frac{B_{T_2}^{L_1}(\theta_{L_1}) - B_{T_1}^{L_2}(\theta_{L_2})}{A_{T_1}^{L_2}(\theta_{L_2})}, \quad (5.36)$$

où P signifie coefficient de passage, et D , coefficient de décalage des origines.

La relation (5.34) donne la valeur de la conductivité à l'origine de la ligne L_2 en fonction de la conductivité à l'origine de la ligne L_1 , connaissant deux champs de température indépendants T_1 et T_2 .

Restriction

Il existe une restriction à cette méthode, qui est basée sur la physique du problème : il peut arriver que certaines lignes d'une répartition de température ne croisent pas une ligne de l'autre répartition. Dans ce cas, il n'y a pas de moyen de relier ces lignes, et elles seront ignorées par la suite. Il peut donc exister des zones du domaine étudié où il sera impossible de retrouver la conductivité par cette méthode quasi-analytique.

5.4.3 Extension à l'ensemble des lignes, et réduction du nombre d'inconnues

Les relations vues en (5.34), (5.35), et (5.36) permettent de calculer les conductivités à l'origine des lignes de proche en proche.

Pour toutes les lignes de flux sur lesquelles une intersection existe, nous pouvons relier les conductivités λ à leurs frontières. Il ne reste au final qu'à déterminer la conductivité en un seul point. Ce point est à l'origine de la première ligne à partir de laquelle les intersections et les relations ont été calculées.

En conclusion, nous avons considérablement réduit par cette méthode le nombre d'inconnues à déterminer. Le problème initial consistait à calculer la conductivité sur tout le domaine d'étude. La relation (5.27) permet d'avoir la connaissance de celle-ci sur tout le domaine bidimensionnel Ω en fonction de la valeur sur les bords $\partial\Omega$. Ensuite, un deuxième champ de température permet de relier les valeurs cherchées aux frontières. Ainsi nous n'avons plus qu'à déterminer la conductivité thermique en un seul point, l'origine d'une ligne de flux. La détermination de la conductivité sur le domaine d'étude ne nécessite maintenant que la connaissance de la valeur de la conductivité en un seul point de la frontière.

5.4.4 Relation de récurrence

En utilisant les notations précédentes, il est possible d'écrire pour la ligne L_2 , associée au premier champ de température T_1 , la conductivité en fonction de $\lambda_0^{L_1}$, conductivité à l'origine de la ligne précédente :

$$\lambda_{L_2}(\theta) = (\lambda_0^{L_1} P_{12} + D_{12}) A_{T_1}^{L_2}(\theta) + B_{T_1}^{L_2}(\theta). \quad (5.37)$$

Le but ici est d'arriver à exprimer une relation correcte pour toute les lignes, et non pas seulement de proche en proche : c'est le terme général de la relation de récurrence que nous cherchons.

Pour y arriver, nous devons introduire des notions et notations supplémentaires.

La connexité

Il est nécessaire pour établir la relation de récurrence de connaître, ce que nous appelons, la connexité d'une ligne. Cette notion est similaire au "nombre d'Erdős"¹ de chaque ligne, ou à la matrice d'adjacence du graphe associé aux lignes.

¹le nombre d'Erdos est un nombre inventé par le mathématicien Paul Erdős. Il sert à caractériser les relations entre des personnes. Erdős a pour nombre d'Erdős 0. - Une personne ayant écrit un

Numérotions chacune des lignes ainsi :

- 0 est le numéro de la ligne "originelle", celle ou l'on doit connaître la conductivité à l'origine.
- 1 sera la connexité des lignes qui seront directement reliées à la ligne originelle.
- 2 sera la connexité des lignes qui seront reliées aux lignes portant le numéro 1.
- j sera donc le nombre de "sauts" à effectuer pour venir de la ligne originelle 0, c'est à dire le nombre d'étapes pour arriver à cette ligne.

Plusieurs lignes peuvent donc être équivalentes en terme de liaison, puisque plusieurs lignes peuvent porter le même numéro. Nous aurons ainsi pour la ligne originelle :

$$\lambda^0(\theta) = \lambda_0^0 A_{T_1}^0(\theta) + B_{T_1}^0(\theta),$$

qui permet de calculer la conductivité λ partout sur la ligne 0.

De même, nous écrirons pour la première liaison :

$$\lambda^1(x) = \lambda_0^1 A_{T_1}^1(\theta) + B_{T_1}^1(\theta).$$

Ce sera l'équation des lignes qui sont "à la distance" 1 de la ligne 0.

Le terme général

Avec les notions introduites précédemment, nous pouvons chercher l'expression du terme général. Pour la ligne i , nous aurons :

$$\lambda^i(\theta) = \lambda^i A_{T_1}^i(\theta) + B_{T_1}^i(\theta).$$

La liaison entre i et $i+1$ s'écrira, si les lignes se coupent en $C_{i,i+1}$, en notations simplifiées :

$$\begin{aligned} \lambda_0^{i+1} &= \lambda_0^i P_i + D_i, \\ P_i &= \frac{A_{T_2}^i}{A_{T_1}^{i+1}} \Bigg|_{C_{i,i+1}}, \\ D_i &= \frac{B_{T_2}^i - B_{T_1}^{i+1}}{A_{T_1}^{i+1}} \Bigg|_{C_{i,i+1}}. \end{aligned}$$

article avec Erdős a 1 comme nombre d'Erdős. - Une personne ayant écrit un article avec une personne ayant comme nombre d'Erdős 1 a pour nombre d'Erdős 2. On définit par récurrence la suite des nombre d'Erdős. Einstein a par exemple un nombre d'Erdős égal à 2.

Nous en déduisons donc :

$$\lambda^{i+1}(\theta) = \lambda_0^i P_i A^{i+1}(\theta) + D_i A^{i+1} + B^{i+1}(\theta),$$

avec les propriétés tirées de (5.30) qui sont : $A^j(0) = 1$, et $B^j(0) = 0, \forall j$.

En appliquant ces relations de récurrence en partant de la ligne 0, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda^1(\theta) &= \lambda_0^0 P_0 A^1(\theta) + D_0 A^1(\theta) + B^1(\theta), \\ \lambda^2(\theta) &= \lambda_0^0 P_0 P_1 A^2(\theta) + [D_0 P_0 + D_1] A^2(\theta) + B^2(\theta), \\ \lambda^3(\theta) &= \lambda_0^0 P_0 P_1 P_2 A^3(\theta) + \{[D_0 P_0 + D_1] P_1 + D_2\} A^3(\theta) + B^3(\theta). \end{aligned}$$

Nous obtenons le terme général de la suite, qui permet d'exprimer la conductivité sur n'importe quelle ligne, en fonction de la conductivité à l'origine λ_0^0 de la ligne 0 :

$$\lambda^j(\theta) = \lambda_0^0 \left(\prod_{i=1}^j P_{i-1} \right) A^j(\theta) + \left[D_{j-1} + \sum_{i=1}^{j-1} D_{i-1} \left(\prod_{k=i}^{j-1} P_k \right) \right] A^j(\theta) + B^j(\theta), \quad (5.38)$$

avec $j > 2$

ou bien en notations simplifiées

$$\lambda^j(\theta) = \lambda_0^0 P_0^{j-1} A^j(\theta) + (D_{j-1} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{j-1}) A^j(\theta) + B^j(\theta) \quad (5.39)$$

$$P_i^j = \prod_{k=i}^j P_k \quad (5.40)$$

$$\mathbf{P}^j \text{ vecteur de composantes } P_i^j \quad (5.41)$$

$$\mathbf{D} \text{ vecteur de composantes } D_i \quad (5.42)$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{j-1} = \sum_{i=1}^{j-1} D_{i-1} P_{i-1}^{j-1} \quad (5.43)$$

Linéarité

La relation précédente est le résultat de la composée de fonctions affines, et nous constatons qu'elle reste affine en λ_0^0 .

Complément sur le terme général de la relation de récurrence du calcul de la conductivité.

Nous avons vu que la conductivité écrite sur une ligne de flux pouvait se mettre sous la forme indiquée dans (5.38). La valeur ne dépend que des champs de température identifiants et de la valeur de la conductivité en un seul point, choisi sur la frontière du domaine.

Étudions plus en détail chacun des termes de cette relation. Nous voyons que la relation est affine, et qu'il y a le terme du "coefficient directeur" et le terme "d'ordonnée à l'origine".

Terme de transfert-Domaine d'influence

Commençons par regarder le terme en facteur de λ_0^0 , le "coefficient directeur" de la relation affine (5.39). Rappelons les expressions des différents termes :

$$P_0^j = \prod_{k=0}^j P_k \quad (5.44)$$

$$P_j = \frac{A_{T_2}^j}{A_{T_1}^{j+1}} \Big|_{C_{j,j+1}} \quad (5.45)$$

$$A_T^j(\theta) = e^{\left(-\int_0^\theta \frac{\Delta T(\alpha)}{\|\nabla T(\alpha)\|} d\alpha\right)} \quad (5.46)$$

La matrice de passage \mathbf{P} , qui est en fait diagonale, fait intervenir dans ces coefficients des termes qui sont les rapports de deux exponentielles positives. Il est donc toujours positif. Le scalaire P_0^j est lui même multiplié par une exponentielle décroissante dans le cas où l'intégrale du laplacien de T est positive². Ainsi, la conductivité d'un point donné du domaine se décompose en deux parties. Le premier terme de (5.39) fait intervenir le vecteur de passage \mathbf{P}_0 , qui propage l'influence de la conductivité à l'origine λ_0^0 . Nous avons vu que chaque composante P_0^{j-1} du vecteur \mathbf{P}_0 n'était constituée que d'exponentielle décroissante. L'équation de la chaleur étant un opérateur elliptique, nous savons que pour la résolution, chaque point du

²Nous n'avons pas trouvé d'arguments théorique nous permettant d'établir la positivité de l'intégrale intervenant dans le coefficient directeur A . Néanmoins, il nous semble qu'il en soit difficilement autrement, dans la mesure où l'influence de la conductivité en un point pourrait, dans le cas contraire, avoir une influence croissante à mesure que l'on s'éloigne de ce point, exponentiellement !

domaine influence tous les autres. Cependant la solution analytique montre l'expression du terme de transfert qui possède une "zone d'influence" d'un point donné sur un autre. Elle est associée à la longueur typique de décroissance des exponentielles des coefficients P_j . Ainsi nous pouvons en déduire que, comme prévu intuitivement, la valeur de la conductivité ne dépend quasiment pas de la valeur de la conductivité en un autre point assez éloigné du domaine d'étude. Pour prolonger ce constat, nous pouvons ajouter que l'erreur faite lors de la détermination numérique de la conductivité en un point de la frontière n'influe alors pas de façon significative sur la détermination de la conductivité assez loin du point d'origine.

Décalage des abscisses

Regardons maintenant le deuxième terme, que nous appellerons "l'ordonnée à l'origine" de la relation (5.39) :

$$(D_{j-1} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{j-1}) A^j(\theta) + B^j(\theta)$$

Avec les constatations précédentes, nous en déduisons que c'est un terme qui devient dominant par rapport à l'autre loin de l'origine des lignes du domaine. Ce terme est nul lorsqu'il est évalué à l'origine du système de lignes de flux. L'ordonnée se décompose elle-même en deux parties. Étudions son comportement sur le domaine, et particulièrement sa valeur aux origines de chacune des lignes de flux. Le second terme, $B^j(\theta)$ est propre à chaque ligne. Il est nul à l'origine de chaque ligne. Nous appellerons donc le premier terme de l'ordonnée à l'origine décalage des abscisses. Comme expliqué précédemment, chacune des lignes est indépendante, et l'origine des lignes a été choisie arbitrairement à l'intersection de la ligne et de la frontière du domaine. La relation complète nous permet de mettre en correspondance les lignes entre elles. Ce terme de décalage des abscisses permet de recaler les origines entre elles, c'est à dire de placer les origines relativement les unes par rapport aux autres, en décidant que l'origine de la première ligne de flux a comme abscisse 0. Il faut remarquer que ce décalage varie suivant la ligne considérée, mais aussi suivant la position sur la ligne, puisque ce terme est multiplié par A^j , terme décroissant qui est unitaire à l'origine de la ligne.

Le schéma de la figure (5.3) nous permet de visualiser la relation trouvée. La ligne la plus à droite est prise comme ligne de référence. Nous lui avons donc arbitrairement attribué l'origine du repère, c'est à dire 0. Sur cette ligne nous avons représenté une unité arbitraire, qui aura pour abscisse 1. Nous avons dessiné sur les autres lignes

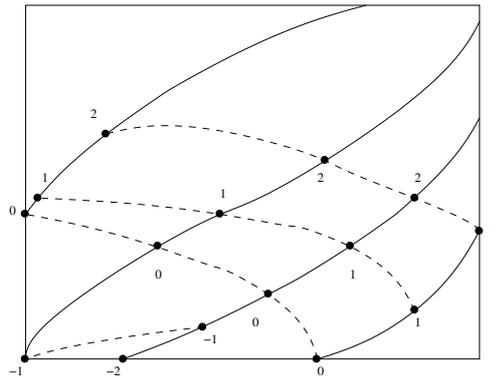


FIG. 5.3 – Exemple d’informations données par la matrice de transfert

les abscisses proportionnelles à celles prises sur la ligne originelle. Nous voyons donc que nous pouvons attribuer une abscisse à l’origine de toutes les lignes, en rapport avec la ligne originelle.

En conclusion, l’analyse de la relation complète (5.39) nous a permis d’explicitier la matrice de transfert de la conductivité sur le domaine. Cette relation indique comment faire correspondre les abscisses des lignes entre elles avec la deuxième partie de la relation, et indique aussi les proportions entre chacune des lignes, c’est à dire pour un élément arbitraire unitaire sur une ligne, le premier terme indique la distance proportionnelle à effectuer sur la ligne considérée pour avancer de la même unité.

5.5 Méthode d’optimisation pour retrouver le scalaire inconnu.

La méthode exposée précédemment nous a permis de ramener la connaissance de la conductivité sur tout le domaine à la connaissance de la conductivité en un seul point, un seul scalaire. A ce stade de l’inversion, il nous reste à déterminer cette inconnue. Comme nous n’avons pas d’autre relation à exploiter, une méthode d’optimisation est nécessaire.

Tout ce qui est développé dans la suite sont des outils classiques d’optimisation dont on pourra trouver de nombreux éléments dans les références suivantes : [Lions(1968)], [Lions & Magènes(1968)], [Lions(1970 - 1971)], [Hager & Pardalos(1998)].

5.5.1 Choix de la fonctionnelle

Optimiser un système, c'est retrouver, dans notre cas, la valeur d'un paramètre connaissant le modèle et le résultat. Nous connaissons la température, qui est la sortie du modèle. Pour retrouver le paramètre, nous allons faire des essais successifs et comparer le résultat trouvé avec ce que nous cherchons. Il faut donc commencer par définir une fonctionnelle, c'est à dire une fonction de fonction que nous cherchons à minimiser. Différents types de fonctionnelles existent, certaines contiennent des termes de régularisation, car l'inversion est un problème mal posé au sens de Hadamard. Nous avons fait le choix d'utiliser une des plus simples qui existe, car nous cherchons à retrouver un scalaire, et non un champ entier.

Soit T_m le champ de température mesuré, $U(\lambda)$ le champ de température calculé avec une répartition de conductivité λ donné. Lions [Lions(1968)] appelle ce champ "l'observation". Rappelons que $f = 0$ dans des cas réels et ne sert que dans certains cas tests.

$U(\lambda)$ répond à l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U(\lambda)}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla U(\lambda)) = f & \Omega \\ U(\lambda) = T_m & \partial\Omega \end{cases} \quad (5.47)$$

La fonctionnelle J que nous chercherons à minimiser est :

$$J(\lambda) = \int_{\Omega} \frac{(U(\lambda) - T_m)^2}{2} d\Omega \quad (5.48)$$

La fonctionnelle choisie est la différence quadratique de la solution à la solution exacte. Elle s'annule lorsque $U(\lambda) = T_m$, ce qui arrive lorsque λ est la solution cherchée.

5.5.2 Algorithme de minimisation

Pour trouver le zéro d'une fonction, différentes méthodes sont disponibles. Cependant notre méthode requiert seulement de retrouver un unique scalaire (la racine d'une fonction unidimensionnelle), et une méthode simple est suffisante. Nous avons choisi une méthode itérative de Newton.

Le but est d'approcher itérativement le zéro de la fonctionnelle par une suite $\lambda \leftarrow \lambda + \delta\lambda$, où les corrections $\delta\lambda$ sont solutions de :

$$0 = J(\lambda) + \delta\lambda \nabla J(\lambda). \quad (5.49)$$

Connaissant $J(\lambda)$ et $\nabla J(\lambda)$, la correction $\delta\lambda$ à faire sur la proposition λ est donc la suivante : $\delta\lambda = \frac{-J(\lambda)}{\nabla J(\lambda)}$.

Cette méthode de minimisation nécessite donc la connaissance du gradient de la fonctionnelle dans la direction λ .

5.5.3 Calcul du gradient de la fonctionnelle J .

Le processus d'optimisation que nous avons choisi nécessite le calcul du gradient de la fonctionnelle afin d'évaluer la correction à apporter sur la conductivité pour arriver jusqu'à convergence, c'est à dire la conductivité cherchée.

Voici la méthode pour calculer le gradient dans la direction λ .

La fonctionnelle est définie ainsi :

$$J(\lambda) = \int_{\Omega} \frac{(U(\lambda) - T_m)^2}{2} d\Omega. \quad (5.50)$$

Soit λ_d , un champ de conductivité donnée. Calculons la dérivée au sens de Fréchet de la fonctionnelle dans la direction λ :

$$\nabla J_{\lambda} = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{J(\lambda_d + k\lambda) - J(\lambda_d)}{k} \right], \quad (5.51)$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2k} \left[\int_{\Omega} (U(\lambda_d + k\lambda) - T_m)^2 d\Omega - \int_{\Omega} (U(\lambda_d) - T_m)^2 d\Omega \right]. \quad (5.52)$$

On développe ensuite les carrés après avoir regroupé :

$$\nabla J_{\lambda} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{U(\lambda_d + k\lambda) - U(\lambda_d)}{k} \right] [U(\lambda_d + k\lambda) + U(\lambda_d) - 2T_m] d\Omega. \quad (5.53)$$

Puis, posons :

$$V(\lambda_d) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{U(\lambda_d + k\lambda) - U(\lambda_d)}{k}. \quad (5.54)$$

Remarquons que $\lim_{k \rightarrow 0} [U(\lambda_d + k\lambda) + U(\lambda_d)] = 2U(\lambda_d)$.

Le gradient s'exprime alors de la façon suivante :

$$\nabla J_{\lambda} = \int [U(\lambda_d) - T_m] V(\lambda_d) \quad (5.55)$$

Il faut maintenant utiliser les équations d'état, c'est à dire les équations de comportement auxquelles répondent nos variables. Notons $U^{\lambda_d + k\lambda}$ la solution calculée avec un champ de conductivité $\lambda_d + k\lambda$, et U^{λ_d} avec λ_d , de sorte que :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot ((\lambda_d + k\lambda) \nabla U^{\lambda_d + k\lambda}) = F & \Omega \\ U^{\lambda_d + k\lambda} = g & \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.56)$$

et :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda_d \nabla U^{\lambda_d}) = F & \Omega \\ U^{\lambda_d} = g & \partial\Omega \end{cases} \quad (5.57)$$

Soustrayons maintenant (5.56) à (5.57). Nous obtenons alors, après division par k :

$$\frac{-\nabla \cdot ((\lambda_d + k\lambda) \nabla U^{\lambda_d + k\lambda}) + \nabla \cdot (\lambda_d \nabla U^{\lambda_d})}{k} = 0 \quad \Omega$$

$$\frac{U^{\lambda_d + k\lambda} - U^{\lambda_d}}{k} = 0 \quad \partial\Omega.$$

En développant la divergence :

$$\begin{aligned} & \frac{-\nabla \cdot ((\lambda_d + k\lambda) \nabla U^{\lambda_d + k\lambda}) + \nabla \cdot (\lambda_d \nabla U^{\lambda_d})}{k} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\nabla \cdot [\lambda_d (\nabla U^{\lambda_d + k\lambda} - \nabla U^{\lambda_d})] - \nabla \cdot [(k\lambda) \nabla U^{\lambda_d + k\lambda}]}{k} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\nabla \cdot [\lambda_d \nabla (U^{\lambda_d + k\lambda} - U^{\lambda_d})] - \nabla \cdot [(k\lambda) \nabla U^{\lambda_d + k\lambda}]}{k} = 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons la relation suivante :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot [\lambda_d \nabla V(\lambda_d)] - \nabla \cdot (\lambda \nabla U^{\lambda_d}) = 0 & \Omega \\ V(\lambda_d) = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Notons que $\nabla V(\lambda_d)$ est une fonction. C'est le gradient de $V(\lambda_d)$ calculé dans la direction λ . Au final nous obtenons l'équation de comportement de $V(\lambda_d)$ suivante :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot [\lambda_d \nabla V(\lambda_d)] = \nabla \cdot (\lambda \nabla U^{\lambda_d}) & \Omega \\ V(\lambda_d) = 0 & \partial\Omega \end{cases} \quad (5.58)$$

Il est nécessaire d'introduire maintenant les notions d'adjoint. Soit W la variable adjointe à la température.

On multiplie (5.58) par l'état adjoint W et on intègre sur tout le domaine.

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [\lambda_d \nabla V(\lambda_d)] \cdot W d\Omega = \int_{\Omega} [-\nabla \cdot (\lambda \nabla U^{\lambda_d})] \cdot W d\Omega \quad (5.59)$$

Effectuons l'évaluation de la première intégrale par partie :

$$-\int_{\Omega} \lambda_d \nabla V(\lambda_d) \nabla W d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda_d \nabla V(\lambda_d) W \cdot n = -\int_{\Omega} -\lambda \nabla U^{\lambda_d} \nabla W d\Omega + \int_{\partial\Omega} -\lambda W \nabla U^{\lambda_d} \cdot n$$

A ce stade, nous devons parler de quelques propriétés de l'état adjoint. W représente l'espace de contrôle, c'est à dire les lieux où nous cherchons à optimiser pour retrouver le champ de conductivité. Comme la conductivité est connue sur les frontières, l'espace de contrôle n'est que l'intérieur du domaine physique, sans les frontières. C'est pourquoi l'état adjoint W est nul sur la frontière. Nous en concluons donc que les intégrales sur le bord du domaine sont nulles.

Effectuons à nouveau une deuxième intégration par partie sur le membre de gauche du résultat précédent. Remarquons de même que l'intégrale sur le bord est nulle, de sorte que :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [\lambda_d \nabla W] V(\lambda_d) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \lambda_d \nabla W \cdot V(\lambda_d) \cdot n = - \int_{\Omega} -\lambda \nabla U^{\lambda_d} \nabla W d\Omega, \quad (5.60)$$

donne :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [\lambda_d \nabla W] V(\lambda_d) d\Omega = \int_{\Omega} \lambda \nabla U^{\lambda_d} \nabla W d\Omega. \quad (5.61)$$

Effectuons maintenant un petit rappel sur les opérateurs adjoints formels (au sens des distributions). Nous ne détaillerons pas les espaces de travail dans lesquels sont effectués les opérations. Il est juste nécessaire de savoir qu'ils sont normés, c'est à dire qu'ils sont équipés d'un produit scalaire.

Soit P un opérateur, et notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Soient u et v appartenant aux espaces adéquats. L'opérateur adjoint P^* de P est défini de la façon suivante :

$$\langle Pu, v \rangle = \langle u, P^*v \rangle \quad (5.62)$$

Ici, l'opérateur dont nous nous servons est le laplacien. Il a la particularité d'être autoadjoint, c'est à dire $P = P^*$. Définissons à présent notre équation adjointe. Comme vu dans [Lions & Magènes(1968)] et [Lions(1968)], il faut poser l'assertion suivante : notre opérateur adjoint est égal à la différence entre ce que Lions appelle l'observation U^{λ_d} et les données T_m . Nous aboutissons alors à :

$$-\nabla \cdot (\lambda_d \nabla W) = U^{\lambda_d} - T_m. \quad (5.63)$$

Au final, il faut identifier le gradient de la fonctionnelle dans la direction λ . L'écriture rigoureuse d'un tel gradient passe par un produit scalaire :

$$\langle \nabla J(\lambda_d), \lambda \rangle = \langle (\text{fonction}), \lambda \rangle = \int_{\Omega} (\text{fonction}) \cdot \lambda d\Omega \quad (5.64)$$

Ainsi, il faut, lors des calculs, trouver un produit scalaire d'une fonction avec la variable λ . La fonction trouvée sera donc le gradient de la fonctionnelle cherchée. La relation (5.61) nous permet de déduire que la fonction cherchée est $(\nabla U^{\lambda_d} \nabla W)$.

En combinant (5.61) et (5.63), nous déduisons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\nabla \cdot [\lambda_d \nabla W] V(\lambda_d) d\Omega &= \int_{\Omega} (U^{\lambda_d} - T_m) V(\lambda_d) d\Omega & \Omega \\ W = 0 & & \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5.65)$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (U^{\lambda_d} - T_m) V(\lambda_d) d\Omega &= \int_{\Omega} \lambda \nabla U^{\lambda_d} \nabla W d\Omega & \Omega \\ W = 0 & & \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Regroupons maintenant toutes les informations calculées précédemment. Commençons par écrire un développement à l'ordre 1 de la fonctionnelle, nous obtenons

$$\begin{aligned} J(\lambda_d + \delta\lambda) &= J(\lambda_d) + \nabla J_{\lambda_d}[\delta\lambda] \\ \nabla J_{\lambda_d}[\cdot] &= \int_{\Omega} [\nabla U^{\lambda_d} \nabla W][\cdot] d\Omega. \end{aligned} \quad (5.67)$$

La dernière relation donne alors l'expression finale recherchée :

$$\nabla J_{\lambda_d} = \int_{\Omega} \nabla U^{\lambda_d} \nabla W \delta\lambda d\Omega. \quad (5.68)$$

C'est ici que toute la méthode vue précédemment prend son ampleur : l'expression (5.68) nous permet de calculer le gradient de la fonctionnelle objective à partir des variations $\delta\lambda$ en chacun des points du domaine. Avec la relation (5.38), nous pouvons maintenant tenir compte du fait qu'avec la connaissance de la conductivité en un seul point de la frontière, nous connaissons la conductivité partout sur le domaine, connaissant les deux champs de température nécessaires : puisque $\lambda = A\lambda_0 + B$, nous pouvons établir l'égalité pour une variation de λ , et relier ainsi la variation $\delta\lambda_0$ d'un point de la frontière à la variation $\delta\lambda$ partout sur le domaine. Nous avons donc $\delta\lambda = A\delta\lambda_0$. Lorsque nous introduisons cette dernière relation dans l'expression du gradient (5.68), nous obtenons la relation finale qui sera implantée :

$$\nabla J_{\lambda_d} = \delta\lambda_0 \left[\int_{\Omega} A \nabla W \cdot \nabla U^{\lambda_d} d\Omega \right] \quad (5.69)$$

Remarquons que la matrice de transfert écrite d'une façon simplifiée A est calculée en fonction des paramètres des champs identifiants, et non des valeurs des conductivités à trouver.

Par la méthode exposée ci-dessus, nous pouvons trouver la valeur du pas dans l'algorithme de Newton vu (5.49), puisque nous avons découplé le calcul du gradient ∇J_{λ_d} du pas $\delta\lambda_0$ sur un point de la frontière.

5.6 Implémentation numérique.

Dans cette partie nous allons traiter des choix numériques effectués pour implémenter la méthode présentée ci-dessus. Dans l'implémentation numérique, coexistent deux types de maillage : Un maillage dit structuré, basé sur des points de collocation de Gauss-Lobatto-Legendre, et un maillage lagrangien, qui est d'abord calculé sur la première grille, et qui sert à appliquer la méthode d'inversion vue précédemment. Les méthodes numériques implémentées sont celles expliquées dans le chapitre 3 pour la partie spectrale, et ci-après pour les calculs sur le maillage lagrangien.

5.6.1 Calcul du maillage lagrangien

Pour pouvoir réaliser l'inversion de conductivité avec la méthode présentée, il est nécessaire de connaître le champ de température T , et sa dérivée temporelle $\frac{\partial T}{\partial t}$. Ces valeurs sont connues sur un maillage cartésien de Gauss-Lobatto (GL), qui sert de base à tous les calculs d'interpolation et de dérivation. La reconstruction de la conductivité nécessite la connaissance du champ de gradient de température, ∇T , et du champ du laplacien ΔT . Ces grandeurs sont évaluées de façon spectrale sur le maillage de GL grâce aux matrices de dérivations fortes, qui sont calculées lors de la construction du maillage. L'évaluation de ces champs sur le domaine bidimensionnel se fait par interpolation en utilisant des polynômes de Lagrange de degré 5, basé sur les points du maillage. Cela nous permet de garder une bonne précision pour les éléments constitutifs du maillage lagrangien.

- La première ligne est construite à partir d'un coin du domaine. Une ligne de flux est une ligne qui est colinéaire à ∇T en chaque point. Nous avons choisi un schéma de Runge et Kutta d'ordre 4 à pas constant. Nous venons donc de définir un premier paramètre ΔL de notre maillage. Il reste cependant un problème avec le dernier point, qui est sur une frontière. Il est évalué grâce à un schéma d'Euler d'ordre 1. En effet, lors de la construction de la ligne, nous n'avons aucune information *a priori* sur le lieu et la distance de la frontière avant de la traverser. C'est pourquoi le dernier point est construit par l'intersection de la droite colinéaire à ∇T (au pénultième point) et de la frontière.
- Il faut ensuite construire le point de départ de la deuxième ligne. Nous avons décidé de construire le maillage lagrangien en conservant le flux de chaleur bidimensionnel entre deux lignes consécutives. C'est le deuxième paramètre

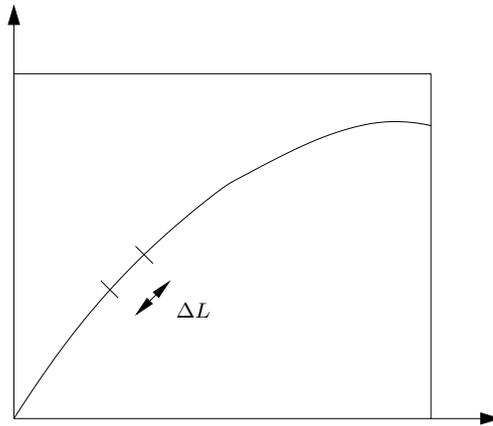


FIG. 5.4 – Calcul de la première ligne

du maillage, δ défini par :

$$\delta = \int \left(\frac{\partial T}{\partial t} - f \right) dl$$

Le chemin d'intégration est une ligne perpendiculaire en chaque point à ∇T , qui part de la ligne précédemment calculée jusqu'à un point de la frontière. Ainsi, le calcul du point de départ de la ligne suivante se fait par dichotomie pour trouver le point d'origine sur la ligne précédente. Cette opération est réalisée itérativement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de solutions trouvées. La méthode d'approximation de l'intégrale est celle du trapèze d'ordre 2. Une fois calculées, ces lignes sont triées pour que deux lignes voisines dans le stockage le soient aussi dans le domaine de calcul.

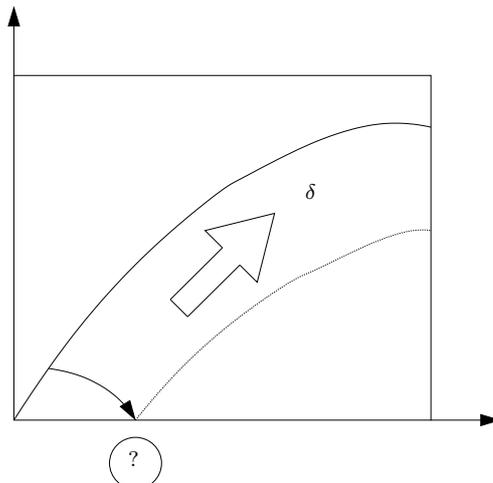


FIG. 5.5 – Calcul du point de départ de la deuxième ligne

- Il nous reste à calculer les isothermes. Le dernier paramètre du maillage est N_T , le nombre d'isothermes. En calculant les extrema de la température, nous

pouvons assigner à chaque isotherme une température. Sur chaque ligne, nous vérifions si l'isotherme est présente, et dans ce cas, nous calculons sa position par interpolation d'ordre 1 entre deux points consécutifs du maillage. Nous avons finalement obtenu le maillage lagrangien final.

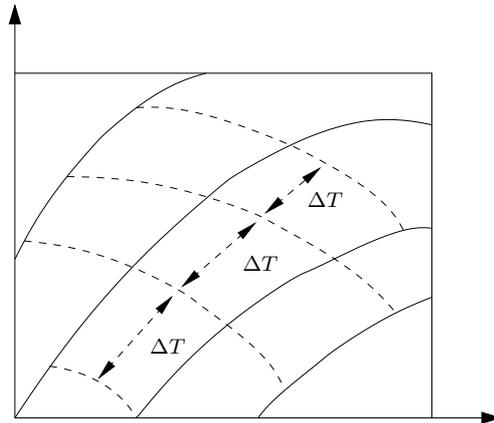


FIG. 5.6 – Calcul des isothermes

5.6.2 Les intersections

Le calcul des intersections nécessite un deuxième champ de température, et un réseau de lignes de flux bâti sur celui ci. De la même façon que pour le premier champ, ses valeurs sont connues sur le maillage de Gauss-Lobatto, et interpolées là où il est nécessaire de les connaître. Nous ne recalculons pas les points de départ de chacune des lignes de flux du deuxième champ, ce sont les mêmes que ceux du premier. De même, nous ne calculons pas les isothermes sur ces deuxièmes lignes : elles ne servent qu'à calculer les connexions, où sont évaluées les coefficients de la matrice de passage \mathbf{P} , et les composantes du vecteur de décalage \mathbf{D} .

Nous n'avons aucune information sur les intersections des lignes, il faut donc les calculer de manière itérative. Nous avons d'abord calculé la "zone d'influence" de chaque ligne, c'est à dire le rectangle dans lequel elle est inscrite. Lorsque deux lignes ont une partie de leur zone d'influence commune, elles peuvent se croiser. Les intersections sont donc calculées de manière itérative entre les deux lignes candidates, en se servant du maillage "fin", à pas réguliers en ΔL .

Pour trouver une intersection, entre chaque segment, l'équation de la droite passant par les deux points des segments est évaluée. L'intersection est alors calculée. Si

le point d'intersection est contenu dans le rectangle formé par les quatre points des deux segments, alors c'est l'intersection entre les segments cherchés. Nous parcourons donc chacune des lignes de cette façon, en ne considérant que les points inclus dans la zone d'influence.

Les intersections sont toujours calculées avec la ligne la plus proche qui la précède dans la classification des lignes, ceci afin de trouver un chemin continu jusqu'à la ligne originelle, celle numérotée 1. Si aucune intersection n'est trouvée avec la ligne précédente, nous cherchons, itérativement, avec les lignes de numéro inférieur. Si aucune intersection n'est trouvée, alors cette ligne ne sera pas prise en compte pour la suite des calculs. C'est pourquoi il arrive que la conductivité certaines parties du domaine étudié ne puisse être calculée.

Le calcul des intersections est la partie la plus longue dans l'exécution du programme d'inversion, mais il n'est fait qu'une seule fois.

5.6.3 Les intégrations sur les lignes

Une fois le maillage lagrangien construit, nous pouvons implémenter les formulations (5.38) pour reconstruire la conductivité thermique dans le domaine, connaissant la conductivité à l'origine, prise au premier point de la première ligne.

Les évaluations des intégrales ne se font pas sur les mêmes maillages. Le calcul des connexions entre les lignes se fait sur le maillage lagrangien fin, en ΔL . La première des deux raisons justifiant ce choix est que nous n'avons pas calculé d'isothermes sur le deuxième champ de température, car cette opération peut être coûteuse en temps de calcul. En effet, la distance physique parcourue sur les lignes de flux, pour calculer les connexions, peut être très courte. Cet intervalle ne contiendra donc au plus que quelques isothermes, à moins d'avoir un paramètre de maillage N_T très élevé, ce qui fait perdre tout l'intérêt de faire les calculs sur un maillage plus lâche, composé d'isothermes. La deuxième raison concerne la répartition des points du maillage fin, qui sont régulièrement espacés (sauf le dernier à l'intersection), et donc une formule d'intégration des trapèzes nous assure une méthode globalement d'ordre 2.

L'intégration numérique sur les lignes de flux pour propager la conductivité sur chacune des lignes se fait sur le maillage lagrangien, qui est défini par l'intersection des lignes de flux et des isothermes. Nous avons mis en place une méthode d'ordre 1 des trapèzes (puisque les points sont irrégulièrement espacés) et une méthode d'ordre 2 afin de comparer les résultats.

5.6.4 L'interpolation inverse

Une fois les intégrales calculées, nous avons construit les matrices de l'application qui, à partir d'une valeur de la conductivité à l'origine de la première ligne, donne le champ de conductivité sur tout les points du maillage Lagrangien. Cependant, nous avons besoin de connaître le champ de conductivité sur le maillage cartésien, aux points de Gauss-Lobatto. C'est en effet sur ce maillage que la résolution de l'optimisation va être effectuée. Il a donc été nécessaire de développer une méthode d'interpolation dite "inverse", qui nous amène du maillage lagrangien au maillage cartésien. Un problème supplémentaire apparaît car il peut arriver, comme nous l'avons vu précédemment, que certaines parties du domaine soient ignorées par l'inversion sur le maillage lagrangien. Il n'y a donc pas de conductivité à interpoler dans ces zones. La physique impose une répartition de ligne de flux, et certaines lignes ne peuvent pas être connectées grâce au deuxième champ. L'interpolation inverse devra donc éventuellement extrapoler le champ sur certains points du maillage cartésien.

Nous avons choisi une approche polynômiale afin de réaliser cette interpolation inverse. Les intersections entre les lignes de flux et les lignes représentant les abscisses et les ordonnées du maillage cartésien sont déterminées, et la conductivité en ces points est calculée (et non interpolée avec les points de la ligne) grâce à l'évaluation des intégrales.

Chaque point du maillage cartésien est à l'intersection d'une abscisse et d'une ordonnée. Un polynôme d'interpolation, de degré maximum 3 et minimum 1, est calculé avec ses plus proches voisins en distance pour chaque axe d'abscisse et d'ordonnée. Chacun des polynômes interpolation est évalué au point du maillage cartésien, et leur demi-somme est effectuée. Dans le cas où il n'y a pas assez d'intersections de lignes avec un axe donné, seule l'autre direction est prise en compte.

Nous avons volontairement limité le degré polynômial à 3 pour éviter les oscillations dues à des polynômes de degré élevé, qui éloignent très vite de la valeur cherchée, particulièrement dans le cas d'extrapolation.

Là encore ce calcul n'est à faire qu'une seule fois, puisque nous traitons la matrice de transfert qui fait correspondre à la valeur de la conductivité en un point le champ entier.

5.6.5 L'optimisation

L'implémentation numérique de la méthode d'optimisation est effectuée sur le maillage cartésien. La fonctionnelle que nous cherchons à minimiser doit, par définition,

être nulle au point optimal, mais son gradient l'est aussi. Il faut donc un traitement spécial lorsque le gradient devient petit numériquement, et du même ordre que la fonctionnelle. Nous utiliserons à cette fin une méthode de Newton-Picard, qui "gèle" la valeur du gradient lorsque celui-ci devient petit, et nous ne tiendrons compte uniquement de son signe. Nous observons que la méthode de Newton converge quadratiquement, alors que celle de Newton picard devient superlinéaire, et donc plus lente.

Le calcul du gradient de la fonctionnelle passe par la résolution de deux systèmes (voir 5.63 et 5.57), pour trouver l'état adjoint, et le champ de température que donne la conductivité devinée à une itération donnée. Nous avons utilisé un gradient conjugué préconditionné par la diagonalisation successive, décrit dans le chapitre 3. L'intégration finale (5.69) est évaluée, par une quadrature de gauss, de même que les gradients sont calculés avec les matrices de dérivation forte, propres aux méthodes spectrales.

5.7 Validations et Résultats

Dans cette partie, nous allons exposer les résultats obtenus lors de la mise en œuvre numérique. Afin de valider notre approche, nous avons utilisé des cas tests, dont nous connaissons tous les paramètres, afin de séparer les effets du maillage des effets de reconstruction. Nous avons arbitrairement choisi la taille de notre domaine égale à $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Pour tester le maillage, nous utilisons deux champs de température. Le premier est représenté par des cercles centrés en $(-1, -1)$:

$$T(x, y) = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + t \quad (5.70)$$

La température varie quadratiquement, et les isothermes sont donc des cercles centrés en $(-1, -1)$.

Le deuxième champ de température test est elliptique :

$$T(x, y) = \frac{(x + 1)^2}{4} + (y + 1)^2 + t \quad (5.71)$$

Les isothermes, dans ce cas, sont des ellipses, centrées en $(-1, -1)$, mais de foyers variables, qui sont, pour une température T donnée, en $(-1 + T\sqrt{3}, -1)$ et $(-1 - T\sqrt{3}, -1)$.

Le deuxième champ de température test qui va nous servir à calculer les liaisons entre les lignes de maillage Lagrangien, est un champ circulaire, centré en

$(2\pi + 1, -1)$:

$$T(x, y) = (x - (2\pi + 1))^2 + (y + 1)^2 + t \quad (5.72)$$

Nous avons choisi deux conductivités différentes, indépendamment des champs de température :

$$\lambda(x, y) = 1 + x + y, \quad (5.73)$$

et :

$$\lambda(x, y) = 1 + x^2 + y^2. \quad (5.74)$$

Le deuxième membre est calculé afin de satisfaire l'équation de la chaleur stationnaire dans chacun des quatre cas ainsi formés.

5.7.1 Validation des lignes de flux

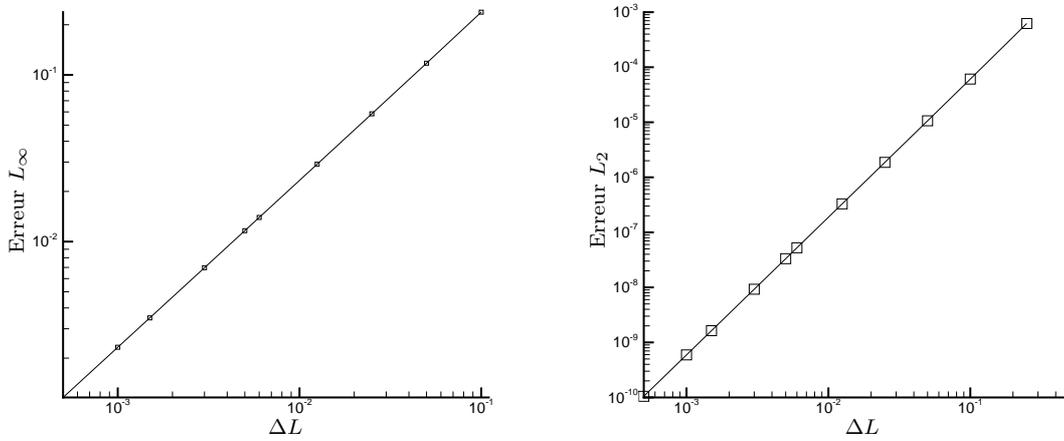
Avant tout calcul, il est nécessaire de vérifier la validité des lignes de flux calculées numériquement. Pour ce faire, nous avons comparé les valeurs numériques avec les expressions analytiques représentant les familles de lignes de flux dans le cas du maillage courbe, bâti avec (5.71) :

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = cst \left(\sqrt{2y + 2}\right)$$

Il est ainsi possible de déterminer une erreur en norme L_∞ et en norme L_2 . Dans le cas où le champ de température est circulaire (5.70), l'ensemble des lignes de flux est un faisceau de droites, centré en $(-1, -1)$. Nous avons, dans les courbes suivantes, étudié la validation des lignes de flux dans le cas où elles sont courbes.

La figure 5.7(a) représente l'erreur commise en norme L_∞ sur les points des lignes de flux, en fonction du paramètre de discrétisation ΔL . Une régression linéaire nous indique que c'est une droite de pente (1,99), et de coefficient de corrélation proche de 1 à 10^{-6} près. Nous avons donc un schéma global d'ordre 2. La méthode employée est d'ordre 4, mais cette erreur est augmentée par la manière de calculer le dernier point de chacune des lignes, ce qui fait donc une diminution de l'ordre global de la méthode. Cependant, lorsque nous regardons l'erreur en norme L_2 (figure 5.7(b)), qui représente une erreur moyenne sur l'ensemble des points, nous constatons que sa valeur est vraiment faible, dans une gamme d'ordre de 10^{-10} jusqu'à 10^{-2} dans le pire des cas présenté. L'évolution de l'erreur en norme L_2 est une droite de pente 2,50.

La figure 5.8 montre la relation entre le nombre de lignes de flux et le paramètre de maillage δ . Plus δ est petit, plus important est le nombre de lignes, devenant asymptotiquement infini.



(a) Représentation de l'erreur en norme infinie dans la construction du maillage courbe
 (b) Représentation de l'erreur en norme L_2 dans la construction du maillage courbe

FIG. 5.7 – Erreur dans la construction des lignes de flux

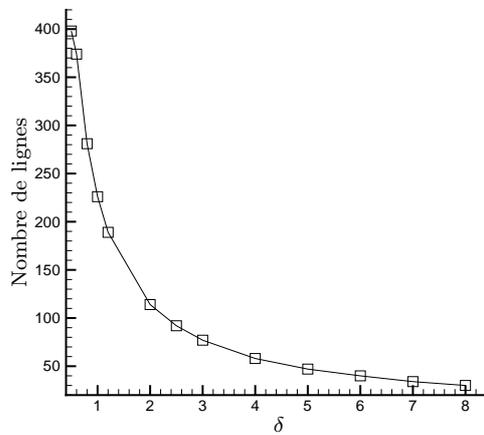


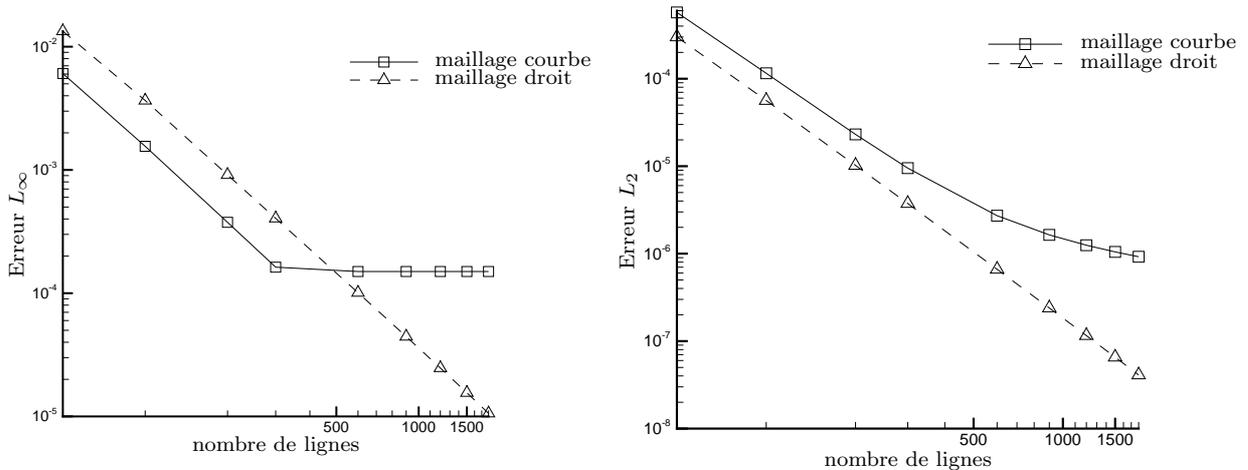
FIG. 5.8 – Nombre de lignes dans le maillage

5.7.2 Validation des intégrations

Il est maintenant nécessaire de vérifier la validité de la relation semi-analytique établie, et de l'intégration numérique le long du maillage Lagrangien. Nous avons donc fixé la valeur exacte de la conductivité à l'origine de chaque ligne, et intégré numériquement la relation en chaque point du maillage, pour la comparer à la valeur

exacte, dans chacun des quatre cas tests dégagés, avec un maillage composé de droites ou de courbes, et une conductivité linéaire ou pas.

Dans les figures 5.9, les résultats concernent la reconstruction de la conductivité linéaire décrite en (5.73). La figure 5.9(a) représente la norme infinie de l'erreur, et la figure 5.9(b), l'erreur en norme L_2 , en fonction du nombre d'isothermes, pour un maillage droit et courbe. Nous avons choisi $\Delta L = 2,5 \cdot 10^{-3}$.



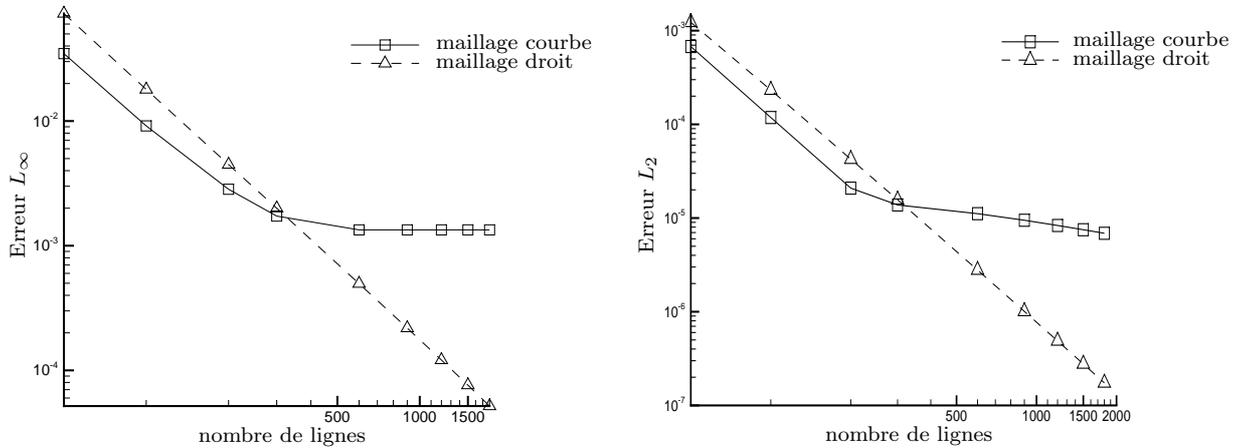
(a) Représentation de l'erreur en norme infinie dans l'intégration

(b) Représentation de l'erreur en norme L_2 dans l'intégration

FIG. 5.9 – Erreur effectuée lors des intégrations dans le cas de la conductivité linéaire

Dans les courbes 5.9(a), l'erreur L_∞ est à décroissance linéaire en fonction du nombre d'isothermes, et un seuil apparaît dans le cas du maillage courbe. L'existence de ce seuil est dû au fait que la précision maximale dans l'interpolation de la fonction à intégrer numériquement est atteinte, pour le ΔL fixé lors de ces tests. Avant d'atteindre le seuil, les droites sont parallèles et de pente $(-1,9992)$, et de coefficient de corrélation proche de 1 à 10^{-6} près. Nous avons donc un schéma d'ordre 2. Le seuil est proche de $2 \cdot 10^{-4}$. Les courbes de l'erreur L_2 (figure 5.9(b)) ont le même comportement. La droite de régression dans le cas du maillage droit donne un coefficient directeur de 2,47.

Nous avons effectués les mêmes tests pour une conductivité non linéaire (5.74), en gardant le même paramètre ΔL , sur un maillage composé de droites ou de courbes. La figure 5.10(a) représente la variation de l'erreur L_∞ en fonction du nombre d'isothermes. Dans le cas du maillage droit, la décroissance est linéaire, de coefficient 2,47. Comme dans le cas linéaire, nous observons l'apparition d'un seuil dans l'intégration



(a) Représentation de l'erreur en norme infinie dans l'intégration

(b) Représentation de l'erreur en norme L_2 dans l'intégration

FIG. 5.10 – Erreur effectuée lors des intégrations dans le cas de la conductivité non linéaire

sur un maillage courbe. Ce seuil a une valeur plus élevée, de l'ordre de $2 \cdot 10^{-3}$. Le comportement linéaire se retrouve dans l'erreur L_2 (figure 5.10(b)).

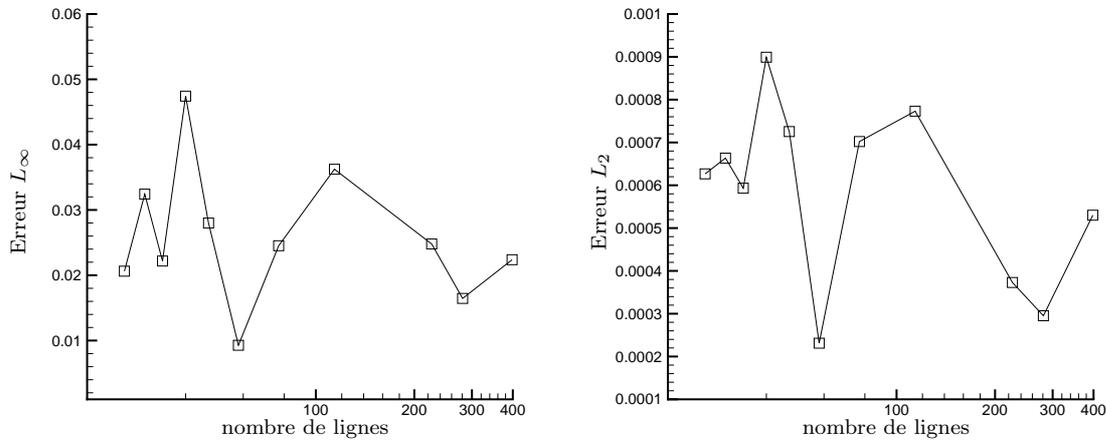
5.7.3 Validation de l'interpolation inverse

Le module suivant à valider de notre approche est ce que nous avons appelé l'interpolation inverse, c'est à dire le retour de la conductivité calculée sur le maillage Lagrangien sur le maillage cartésien de Gauss Lobatto, par interpolation. Afin de tester la validité de notre méthode nous avons cherché à interpoler une fonction non polynômiale, connue de façon exacte sur les points du maillage Lagrangien, sur les points du maillage de Gauss Lobatto. Nous pouvons ainsi quantifier l'erreur d'interpolation.

La fonction test d'interpolation est la suivante :

$$f_{test} = \cos\left(\frac{x}{4}\right) + \cos\left(\frac{y}{4}\right)$$

Les erreurs d'interpolation sont représentées en fonction du nombre de lignes du maillage Lagrangien, qui représente indirectement le paramètre de maillage δ . Nous avons représenté la norme L_∞ de l'erreur dans la figure 5.11(a) et la norme L_2 dans la figure 5.11(b). Le maillage cartésien sur lequel la fonction est interpolée possède $N = 20$ points de maillage dans chacune des directions.



(a) Représentation de l'erreur en norme infinie dans l'interpolation inverse (b) Représentation de l'erreur en norme L_2 dans l'interpolation inverse

FIG. 5.11 – Erreur effectuée lors de l'interpolation inverse

Nous observons que les courbes oscillent, et qu'un nombre élevé de lignes n'améliore pas forcément la précision de l'interpolation. Il faut néanmoins remarquer que les oscillations sont bornées, et qu'il n'y a pas de valeur qui devienne démesurément grande. Ces effets d'interpolation sont directement dûs au fait que certaines parties du domaine ne sont pas encadrées par les lignes de flux, et une partie des valeurs de la conductivité doit être extrapolée. Ces parties du domaine jamais atteintes par le maillage Lagrangien dépendent directement de la forme du champ de température. Outre les bords du domaine, cela concerne aussi dans certains cas les lignes de flux avec lesquelles il n'y a pas d'intersection lors des calcul de connexions avec le deuxième champ de température. Un autre cas de figure existe lors d'une répartition particulière des lignes de flux : certaines ordonnées ou abscisses du maillage de Gauss-Lobatto ne possèdent pas d'intersection avec les lignes du maillage Lagrangien. L'interpolation sur un point de cette ligne ne peut donc se faire, dans notre méthode, que dans une direction, et non comme la demi somme des deux. Si, de plus, les points qui servent à l'interpolation sont éloignés physiquement, alors l'interpolation devient moins bonne.

Le dessin 5.12 schématise le maillage réel 5.13, et dépeint deux cas de figures où l'interpolation inverse nécessite une adaptation :

- Lorsqu'une ligne du maillage de Gauss-Lobatto n'a aucune intersection avec une ligne dans une direction. L'interpolation sur les points qui composent cette ligne ne peut donc se faire que dans la direction horizontale.

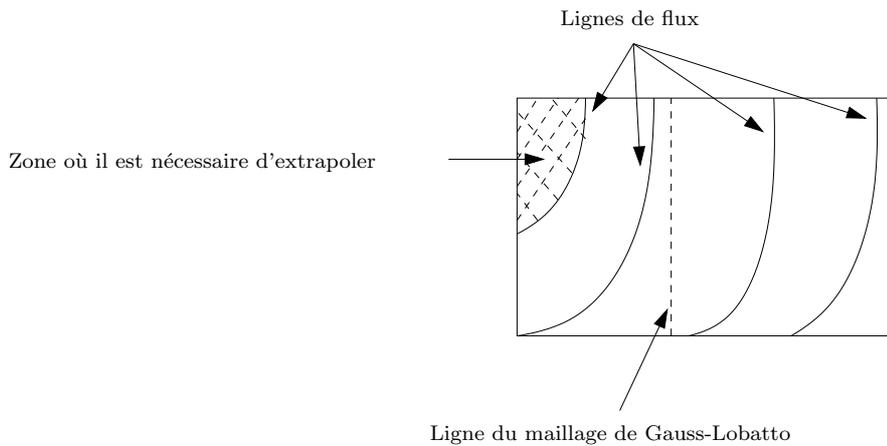


FIG. 5.12 – Exemple de cas générateur d’erreur dans l’interpolation inverse

- Certaines parties du domaine décrit par le maillage de Gauss-Lobatto ne sont pas atteintes par les lignes de flux. Dans la zone hachurée, il faut donc extrapoler, ce qui dégrade la qualité de l’erreur globale.

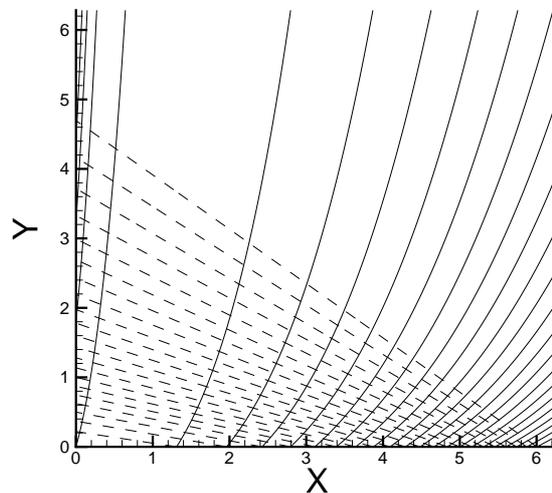


FIG. 5.13 – Exemple des deux ensembles de lignes de flux générant des erreurs dans l’interpolation inverse

L’interpolation de données réparties aléatoirement sur un domaine reste un sujet ouvert, et nous avons choisi de traiter ce problème complexe d’une façon simple. L’approche que nous avons exposé, a été choisi afin de valider la méthode de reconstruction. En effet, l’implémentation robuste de la méthode d’inversion proposée

n'est pas le sujet de notre propos et cette étape n'est qu'un point technique dans l'algorithme. La méthode d'interpolation retenue offre une précision inférieure à 10^{-2} , et un taux d'erreur borné. De plus l'interpolation n'est faite qu'une fois, et les erreurs sont toujours les mêmes puisque les coefficients utilisés sont stockés. Il s'agira donc de trouver le minimum d'un champ contenant toujours les même erreurs. Cela ne doit donc pas modifier le minimum recherché. Pour finir, Bruaset et Nielsen [Bruaset & Nielsen(1996)] ont montré dans un problème similaire qu'une perturbation de la conductivité locale n'entraînait qu'une perturbation bornée du champ de température.

5.7.4 Validation du solveur stationnaire

Pour calculer le gradient de la fonctionnelle, il nous faut calculer le problème direct et le problème adjoint, à chaque itération d'optimisation. Regardons à présent le comportement du solveur de l'équation stationnaire :

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = f, \quad (5.75)$$

en utilisant le cas test suivant :

$$T = \cos(x + y) \quad (5.76)$$

$$\lambda = 2 + \sin x \sin y \quad (5.77)$$

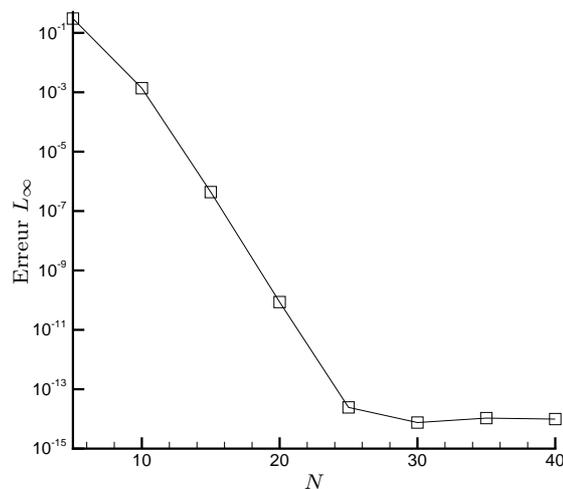


FIG. 5.14 – Erreur L_∞ de T fonction de N , nombre de point du maillage

Nous avons muni le solveur de conditions aux limites de type Dirichlet. La figure 5.14 illustre l'erreur L_∞ sur la détermination de T en fonction de N , nombre de points dans chacune des directions du maillage de Gauss-Lobatto. L'échelle est semi-logarithmique. La courbe est divisée en deux parties : La première partie nous montre la convergence exponentielle vers la solution exacte, comportement typique des méthodes spectrales. La deuxième partie, est un seuil, et représente l'erreur de consistance du schéma.

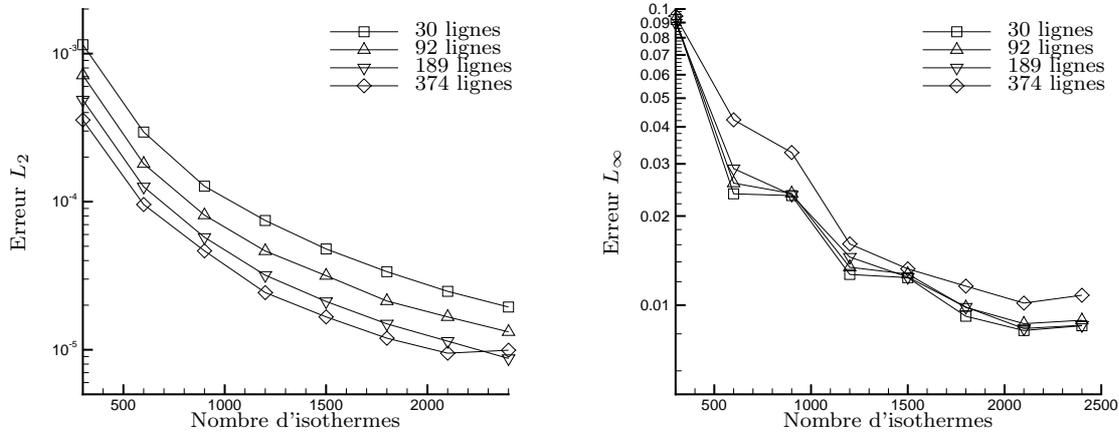
5.7.5 Validation des liaisons entre les lignes, et reconstruction globale

Nous avons étudié précédemment les contributions individuelles de chaque élément constitutif de l'algorithme. Nous allons maintenant tester l'ensemble, mis bout à bout. Nous testerons ainsi les limitations de l'implémentation numérique de la méthode proposée. Afin de pouvoir valider la méthode avant l'optimisation, la valeur exacte de la conductivité est imposée à l'origine de la première ligne. Sur les graphes exposés, nous avons fait varier deux paramètres de maillage : le nombre de lignes et le nombre d'isothermes. Nous avons choisi de représenter le cas où la conductivité inconnue est non linéaire (eq. 5.74), et le maillage courbe (en utilisant le champ de température (eq. 5.71)). Le paramètre ΔL est fixé à $2,5 \cdot 10^{-3}$, et nous utilisons $N = 20$ points de discrétisation dans chacune des directions sur le maillage de Gauss-Lobatto.

Les premières figures représentent l'erreur L_2 (5.15(a)) et l'erreur L_∞ (5.15(b)) de la conductivité calculée sur le maillage Lagrangien.

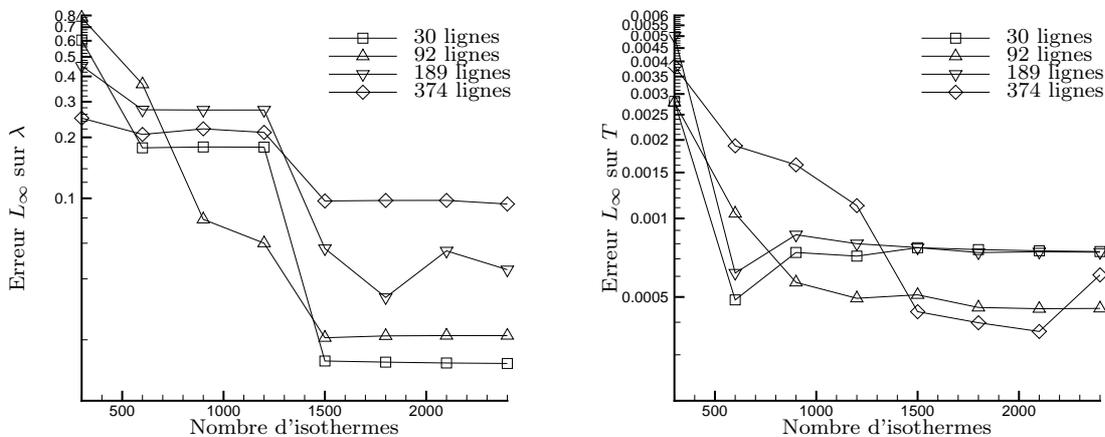
Il apparaît une hiérarchie dans les courbes, et les résultats sont moins précis lorsqu'il y a moins de lignes. Ce phénomène s'explique par le fait que plus il y a de lignes de flux sur le domaine, moins le chemin d'intégration de chaque liaison est grand, et ainsi, les liaisons sont calculées plus précisément. Les courbes suivent le même profil en gardant un décalage relatif constant. Le graphe des erreurs L_∞ montre moins de différence entre les différents type de maillage, puisque les erreurs dues à l'intégration sont plus importantes que celles dues aux liaisons. Elles ne sont donc dépendantes que de la répartition des isothermes.

La figure 5.16(a) représente les erreurs L_∞ de la conductivité ramenées sur le maillage cartésien de Gauss-Lobatto, en fonction des mêmes paramètres que précédemment. Les erreurs sont toutes dans la même gamme de valeurs, et décroissent avec le nombre d'isothermes, jusqu'à atteindre un seuil. Aux vues des valeurs de l'erreur, entre 10^{-2} et 10^{-1} , nous constatons que cette interpolation est la partie qui



(a) Représentation de l'erreur en norme L_2 de la conductivité dans le maillage Lagrangien (b) Représentation de l'erreur en norme L_∞ de la conductivité dans le maillage Lagrangien

FIG. 5.15 – Erreur effectuée lors de la reconstruction complète



(a) Représentation de l'erreur en norme L_∞ de la conductivité sur le maillage de Gauss-Lobatto dans la reconstruction globale (b) Représentation de l'erreur en norme L_∞ de la température sur le maillage de Gauss-Lobatto dans la reconstruction globale

FIG. 5.16 – Erreur effectuée lors de la reconstruction complète

pénalise le plus la précision globale. Seule la répartition des lignes sur le domaine influe sur l'erreur maximale, et cette erreur est localisée géographiquement au même endroit quelque soit le maillage. Il faut remarquer également que l'ordre des courbes est inversé, c'est à dire que le maillage avec le plus de lignes est le moins précis,

en terme d'erreur L_∞ . La cause de cette inversion repose sur des erreurs localement élevées, créées lors de l'extrapolation sur une partie du domaine de calcul. L'erreur moyenne, quant à elle, s'améliore tout de même avec l'augmentation du nombre de lignes.

Le graphe 5.16(b) montre les erreurs L_∞ commises sur la température calculée à l'aide du champ de conductivité précédemment interpolé sur le maillage de Gauss-Lobatto. Elles varient entre $5 \cdot 10^{-4}$ et 10^{-3} pour un maillage contenant plus de 1500 isothermes. Là aussi, un effet de seuil apparaît. Les valeurs de température calculées avec le solveur nous donne une image de l'erreur effectuée sur l'interpolation de la conductivité. Ce graphe nous permet de montrer que le calcul direct, effectué avec les valeurs interpolées de la conductivité, reprend la logique habituelle : plus il y a de lignes, plus petite sera l'erreur

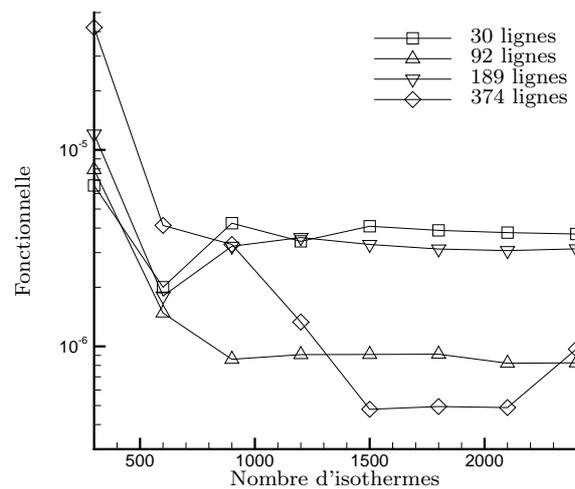


FIG. 5.17 – Valeur de la fonctionnelle

Il reste maintenant à étudier la fonctionnelle. Nous avons représenté sur la figure 5.17 sa valeur en fonction du nombre d'isothermes et du nombre de lignes. A partir de 1500 isothermes, un seuil apparaît, quel que soit le nombre de lignes de flux utilisé. La valeur de la fonctionnelle, avec 1500 isothermes ou plus, varie entre $5 \cdot 10^{-6}$ et 10^{-6} , avec un passage à $4 \cdot 10^{-7}$ dans le cas où il y a 374 lignes de flux. Le comportement irrégulier de la convergence de la fonctionnelle est ici encore liée à l'extrapolation en quelques points particuliers du domaine.

A partir de la conductivité exacte imposée à l'origine de la première ligne de flux, nous sommes capable de reconstruire la température à 10^{-3} près d'erreur absolue. Cette précision est la meilleure que nous puissions atteindre. Nous voyons qu'avoir

un grand nombre de lignes de flux pour mailler n'améliore que très peu la précision sur les exemples choisis, et une centaine de lignes et 1500 isothermes suffisent pour atteindre la précision maximale. Cela est dû à l'interpolation inverse qui domine les erreurs commises relativement aux autres éléments de l'algorithme. La fonctionnelle descend alors jusqu'à 10^{-6} environ.

5.7.6 Effet des perturbations

Pour compléter cette étude des limites de l'implémentation, il est nécessaire d'étudier l'effet des perturbations du champ de température sur l'appréciation des valeurs calculés. Par exemple, nous évaluons le gradient de température en dérivant de façon spectrale le champ de température.

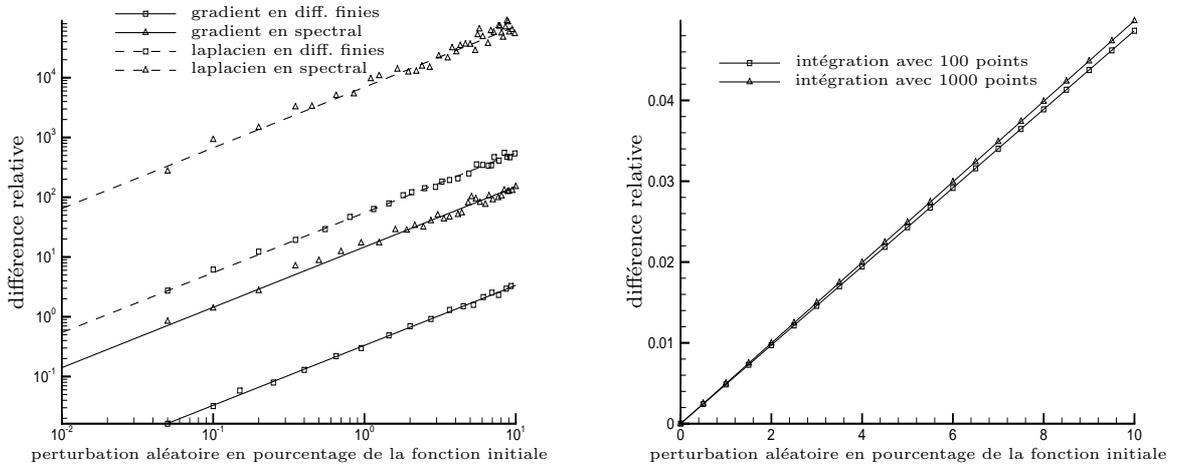
Nous avons donc choisi pour tester la robustesse de perturber une fonction f_{exact} en utilisant une variable aléatoire de densité uniforme Λ , sur l'intervalle $[-1, 1]$. Nous pondérons cette valeur par un paramètre α qui va représenter le pourcentage maximum relatif de la variation de f . Ainsi la fonction sur laquelle nous allons faire nos tests s'écrit :

$$f = (1 + \alpha\Lambda) f_{exact} \quad (5.78)$$

Nous allons dériver et intégrer numériquement sur cette fonction test, et comparer ces résultats avec ceux obtenus dans le cas d'une intégration et d'une dérivation par différence finie.

La figure 5.18(a) représente les différences relatives de dérivation, en fonction de l'intensité d'une perturbation aléatoire, représentée en pourcentage de la fonction exacte, sur un maillage de Gauss-Lobatto à 33 points de maillage dans chacune des directions. Nous avons appelé différence relative, la différence entre le résultat trouvé numériquement par la méthode considérée et le résultat obtenu pour la fonction perturbée, normée par le premier résultat. Sur ce premier graphe nous avons représenté les différences maximales lors de l'évaluation du gradient, et du laplacien par une méthode de différences finies (DF), et par la méthode de dérivation forte spectrale. Les différences entre les méthodes numériques sont marquantes. Le taux d'erreur relatif est environ multiplié par 10 dans le cas du gradient, et une perturbation de 0,1% amène une erreur relative de l'ordre de 1 pour la méthode spectrale, alors qu'elle est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-2}$ dans le cas des différences finies. Lorsque la perturbation atteint 1%, l'erreur spectrale atteint les 1000%.

De même dans l'évaluation du laplacien, l'erreur relative commise pour un bruit de 0,1% est de l'ordre de 10 pour les DF, et culmine à 1000 dans le cas spectral.



(a) Comparaison relative sur la dérivation première (b) Comparaison relative d'une intégration par et seconde par une méthode de différences finies et trapèzes sur un intervalle fixé d'une fonction spectrale en présence de perturbations aléatoires turbée aléatoirement

FIG. 5.18 – Erreurs relatives sur les opérations de dérivation et d'intégrations en présence de perturbations aléatoires

Ces résultats sur les perturbations pour les méthodes spectrales s'expliquent par le fait que même si ces méthodes sont extrêmement précises, elles ne sont seulement capables de décrire des fonctions continues, et la dérivation est une opération numérique qui tient compte de la fonction sur tout le domaine de discrétisation. Les perturbations aléatoires introduites agissent comme des discontinuités dans la description de la fonction, et l'opération de dérivation numérique diverge fortement du résultat escompté. Nous en concluons que les méthodes numériques choisies pour discrétiser ce problème ne sont pas adaptées pour analyser des problèmes perturbés.

Le graphe 5.18(b) représente les différences relatives sur le résultat d'intégration en utilisant une méthode des trapèzes à 100 points et 1000 points sur un intervalle fixé, en fonction du pourcentage de perturbation de l'intégrande. Les résultats dans ce cas sont plus encourageants puisque les erreurs sont quasiment identiques, et sont de l'ordre de 10^{-2} .

Pour toutes les raisons exposées ci-dessus, nous n'avons pas pu rendre significatif les tests aux perturbations. En effet, toutes nos discrétisations sur le maillage de Gauss-Lobatto servent à calculer les gradients et laplaciens, qui sont par la suite interpolés aux points demandés

5.7.7 Sensibilité de la fonctionnelle

Il nous reste maintenant à examiner l'effet d'une variation de la valeur de la conductivité à l'origine du maillage Lagrangien sur la valeur de la fonctionnelle à minimiser. Cela va représenter la sensibilité de notre méthode pour retrouver le minimum qui conduit à la valeur de la conductivité.

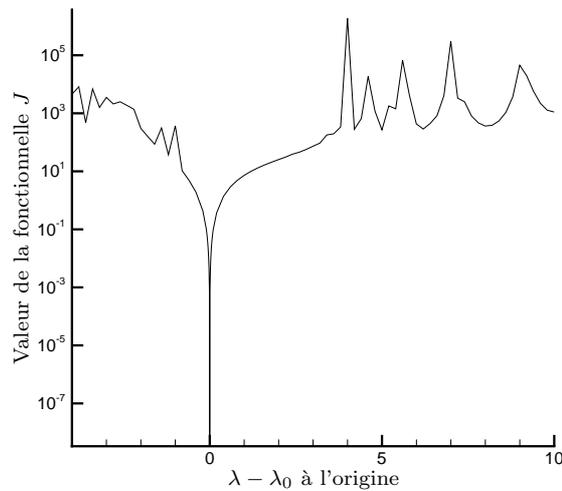


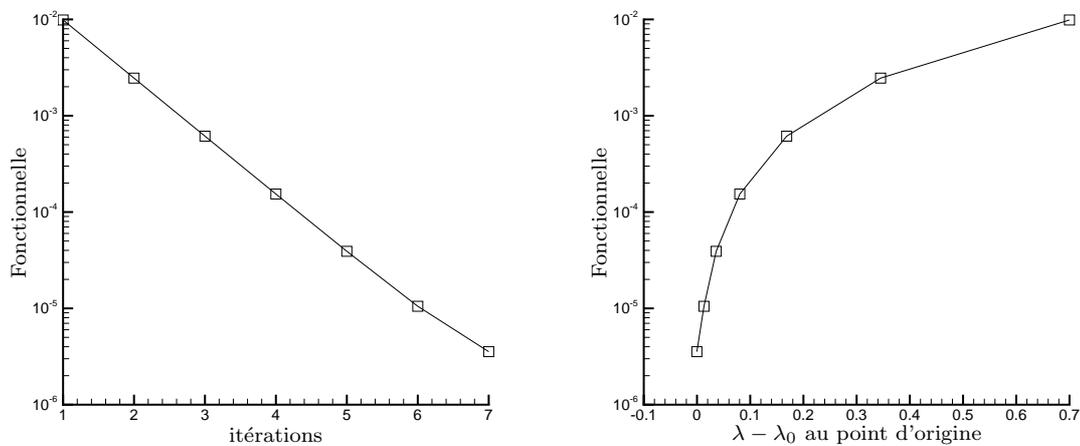
FIG. 5.19 – Valeur de la fonctionnelle en fonction de $\lambda - \lambda_0$

La dernière figure (5.19) représente la valeur de la fonctionnelle à minimiser en fonction de $(\lambda - \lambda_0)$ pour une conductivité linéaire (5.73), sur un maillage courbe (5.71). Nous avons choisi $N = 20$ points de maillage dans chacune des directions pour le maillage de Gauss lobatto, $\Delta L = 2,5 \cdot 10^{-3}$ et 1500 isothermes.

La fonctionnelle possède, comme attendu habituellement, de nombreux maxima et minima locaux, cependant la solution cherchée de notre problème correspond au minimum global. L'algorithme utilisé ne permet que de trouver un minimum, sans savoir s'il est local ou global. Ainsi la reconstruction devra se faire en partant de plusieurs conditions initiales pour s'assurer que la solution trouvée est bien celle cherchée. Il faut constater sur la figure qu'une variation de 1 autour de la solution exacte, ce qui représente environ 20% dans notre cas, nous assure de retrouver le bon minimum. Évidemment cette analyse est propre à chaque champ de conductivité cherché, associée aux champs de température nécessaire pour la reconstruction.

5.7.8 Convergence de l'algorithme.

Nous allons finir notre analyse sur les cas tests par l'étude de la convergence de la minimisation. Nous avons choisi à cet effet de l'illustrer en cherchant à reconstruire une conductivité non linéaire (5.74) sur un maillage Lagrangien courbe, bâti sur (5.71) avec $\Delta L = 2,5 \cdot 10^{-3}$ et 1500 isothermes, et δ qui donne 24 lignes de flux. Nous utilisons $N = 20$ points de discrétisation dans chacune des directions sur le maillage de Gauss-Lobatto.



(a) Évolution de la fonctionnelle au cours des itérations d'optimisation (b) Valeur de la fonctionnelle en fonction de l'erreur commise à l'origine du maillage Lagrangien

FIG. 5.20 – Comportement de la fonctionnelle lors de l'optimisation

Le graphe 5.20(a) représente l'évolution de la fonctionnelle J au cours des itérations d'optimisation. Le critère ε est fixé à $5 \cdot 10^{-6}$. Nous constatons que la convergence vers la solution est exponentielle, et le minimum atteint vaut $3,5 \cdot 10^{-6}$. Sept itérations ont été nécessaires pour atteindre ε . La figure 5.20(b) représente la valeur de la fonctionnelle en fonction de l'erreur à l'origine des lignes de flux, au cours des itérations.

5.7.9 Problèmes d'identifiabilité

Il est à noter qu'une restriction dans l'emploi de la méthode de reconstruction apparaît. Tous les champs de température ne permettent pas de reconstruire n'importe quelle conductivité. Il nous faut donc définir l'identifiabilité d'un champ, c'est à dire savoir si les informations que ce champ possède sont suffisantes pour permettre de trouver l'information recherchée. Par exemple, un gradient de température parallèle à une fissure droite ne sera que très peu perturbé par cette fissure, et ainsi retrouver

les caractéristiques de celle-ci s'avérera impossible. Alors que si ce même gradient est perpendiculaire à la fissure, le champ de température sera perturbé, et reconstruire la fissure deviendra possible.

Dans notre cas, revenons à l'équation de départ (5.24) :

$$\vec{\nabla}\lambda \cdot \vec{\nabla}T + \lambda\Delta T = f.$$

Examinons un cas où le produit scalaire devient petit, alors que ni $\vec{\nabla}\lambda$, ni $\vec{\nabla}T$ ne s'annule. La solution devient alors sensible aux erreurs infinitésimales. Regardons, par exemple, lorsque le produit scalaire est petit à l'ordre ε ($\varepsilon \ll 1$). Écrivons l'équation homogène décomposée sur les lignes de flux, et résolvons là :

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = -\lambda \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta T}{\|\vec{\nabla}T\|},$$

dont la solution est :

$$\begin{aligned} \ln \lambda &= -\frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\Delta T}{\|\vec{\nabla}T\|}, \\ \lambda &= e^{\frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\Delta T}{\|\vec{\nabla}T\|}}. \end{aligned}$$

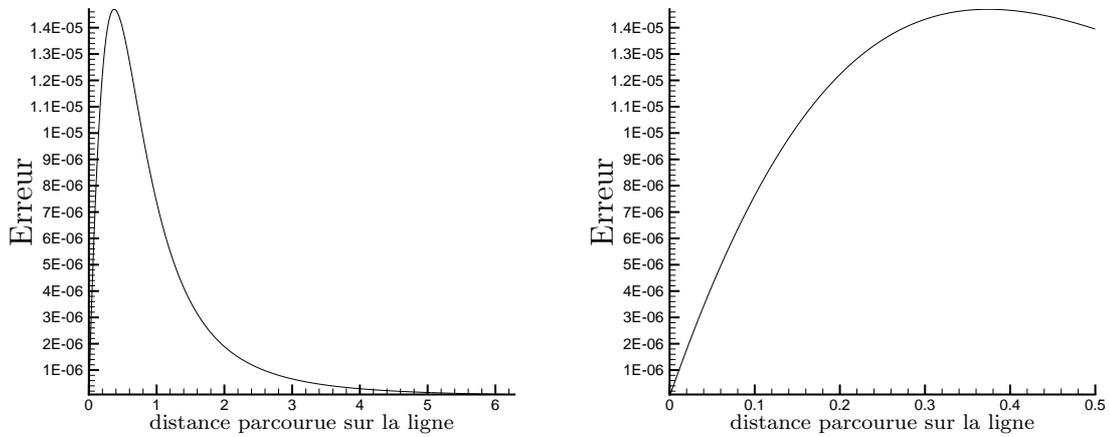
Nous voyons que quelle que soit la valeur du rapport $\frac{\Delta T}{\|\vec{\nabla}T\|}$, le résultat est multiplié par un facteur $e^{\frac{1}{\varepsilon}}$, qui est très grand. Ainsi, les moindres erreurs commises sur l'évaluation de l'intégrale, se répercutent dramatiquement sur le résultat.

Nous illustrons ceci avec le comportement de l'erreur sur la diagonale du maillage droit généré avec (5.70), pour retrouver une conductivité non-linéaire polynômiale (5.74). Calculons le produit scalaire :

$$\vec{\nabla}\lambda \cdot \vec{\nabla}T = 2x(2x+1) + 2y(2y+1).$$

Ce produit scalaire tend vers 0 comme $r \equiv \sqrt{(x^2 + y^2)}$ lorsque r tend vers 0. Bien que dans ce cas la reconstruction fonctionne, étudions plus particulièrement la variation de l'erreur près de $(0,0)$. Nous avons choisi $\Delta L = 2,5 \cdot 10^{-3}$, et 2500 isothermes pour éviter les erreurs dues à un trop grand pas d'intégration. Nous avons de même fixé la solution exacte à l'origine de cette ligne.

La figure 5.21(a) représente la variation de l'erreur le long de la ligne de flux, et la figure 5.21(b) montre un agrandissement de la zone proche de 0. Il faut remarquer que l'erreur reste faible, mais seule sa variation nous intéresse. L'erreur croît rapidement dans la zone proche de zéro avec un maximum vers 0,4. Elle décroît ensuite vers 10^{-7} au fur et à mesure de l'éloignement de l'origine. Nous avons choisi de montrer



(a) Tracé de l'erreur de reconstruction sur la ligne (b) Agrandissement de l'erreur de reconstruction qui part de $(0, 0)$

FIG. 5.21 – Problèmes d'identificabilité

un cas qui reste favorable, dont l'erreur maximale reste limitée. Cependant, nous avons pu construire des exemples analytiques où le produit scalaire tend vers 0 en " r^4 ", et qui donnent une erreur maximale de l'ordre de 10^{13} , à une même distance de l'origine que notre cas étudié ici. La valeur de ce maximum d'erreur empêche toute détermination de la conductivité dans ce cas.

Dans un cas expérimental, il serait donc nécessaire d'effectuer plusieurs reconstructions à partir de données différentes. Si plusieurs calculs donnent le même résultat, alors la solution obtenue sera recevable. Sinon, un des champs de données se trouve être non identifiant, et une inversion supplémentaire devient obligatoire. Deux résultats identiques suffiront pour déterminer la solution cherchée.

5.7.10 Tests sur des exemples physiques

Nous avons jusqu'alors cherché à reconstruire des conductivités simples sur des champs de température simple, à des fins de validation. Cette analyse nous a permis de mieux appréhender le comportement global de notre méthode. Nous cherchons donc maintenant à reconstruire des conductivités plus complexes, non polynômiales, sur des champs de température générés numériquement à partir de l'idéalisation d'une expérience modèle. Nous avons laissé relaxer numériquement, à l'aide de notre algorithme de résolution de l'équation de la chaleur instationnaire (muni de conditions aux limites de flux nuls), deux champs de température, pris initialement or-

thogonaux en moyenne (ceci afin d'assurer la possibilité d'obtenir des liaisons entre les lignes de flux).

La relaxation de champs de température ne nous assure pas que nous ne violons pas localement une des hypothèses initiales de notre méthode d'inversion, à savoir $\|\nabla T\| \neq 0$. Pour éviter ce problème éventuel, nous travaillons sur un sous domaine du champ calculé, et sur lequel nous effectuerons la reconstruction. Il suffit donc de choisir une zone qui correspond aux caractéristiques cherchées. L'inversion ne pourra donc, dans la pratique, qu'être effectuée sur une partie du domaine. Il est donc par ailleurs inutile de chercher des champs respectant nos hypothèses sur tout le domaine Ω , champs qui sont difficiles à générer tant expérimentalement que numériquement.

Le domaine de calcul sera toujours, arbitrairement dans notre cas, le carré $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Les conductivités que nous cherchons à reconstruire sont les suivantes :

$$\lambda = 2 + \sigma \sin\left(\frac{x+y}{8}\right), \quad (5.79)$$

et,

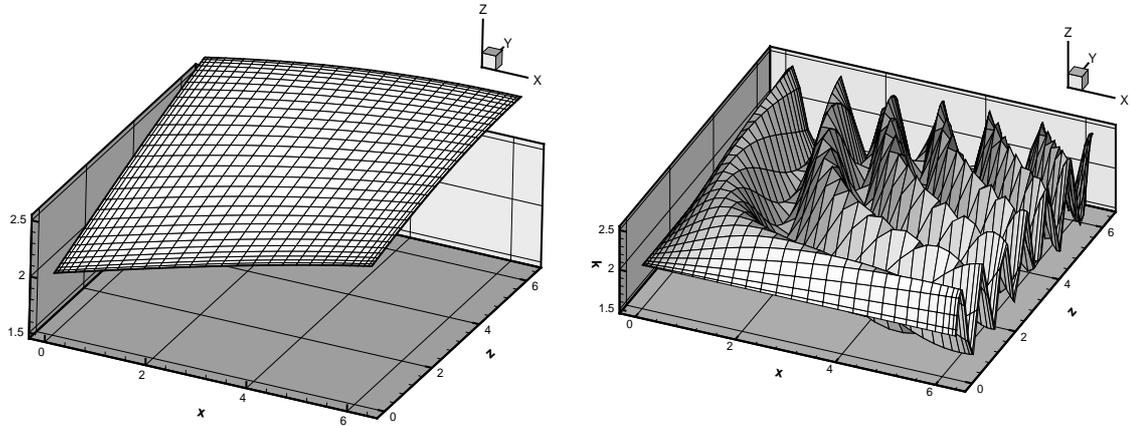
$$\lambda = 2 + \sigma \sin(xy), \quad (5.80)$$

où σ est un paramètre que nous allons varier entre 0 et 1

Le premier champ de conductivité (5.79) a été choisi pour sa faible variation sur le domaine, tout en restant non polynômial. Le second (5.80) est choisi afin de montrer comment va réagir l'algorithme lorsqu'il cherche à reconstruire une fonction fortement variable, toujours non polynômiale.

Dans les exemples que nous traitons, nous avons choisi $N = 30$ points de maillage dans chacune des directions pour la discrétisation de Gauss-Lobatto, pour être sûr que la conductivité cherchée est bien représentée numériquement. Les champs de températures calculés ont été discrétisés suffisamment finement pour que les champs de conductivité (5.79) et (5.80) soient bien représentés. Ceci a été testé en calculant analytiquement le second membre f associé à l'équation stationnaire $(-\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = f)$, et en le comparant avec le champ de température numérique. L'erreur obtenue pour la discrétisation choisie de $N = 30$ points de maillage pour la discrétisation de Gauss-Lobatto est de l'ordre de la précision machine 10^{-14} , pour toutes les valeurs de σ .

A titre d'illustration, la figure 5.22(a) représente le champ de conductivité (5.79) sur le maillage original de Gauss-Lobatto. De même avec la figure 5.22(b) qui représente la conductivité (5.80). La zone de calcul sur laquelle l'inversion sera effectuée est extraite de ces champs.



(a) Représentation de la conductivité (5.79) à reconstruire sur le maillage originel pour $\sigma = 1$ (b) Représentation de la conductivité (5.80) à reconstruire sur le maillage originel pour $\sigma = 0,5$

FIG. 5.22 – Représentation des la conductivité à reconstruire

Le critère d'arrêt ε stoppe les itérations dès que la fonctionnelle $J \leq \varepsilon$.

Reconstruction de la première conductivité

Nous allons détailler dans cette partie les résultats obtenus lors de la reconstruction de la conductivité (5.79).

Nous représentons dans la figure 5.23 les courbes de niveaux du premier champ de température généré numériquement, sur lequel nous allons effectuer la reconstruction. La zone sur laquelle le calcul sera effectivement fait est représentée par le carré, et est redimensionné sur $[0, 2\pi]^2$ sur l'illustration du graphe de droite.

La figure 5.24 représente le résultat de la relaxation d'une deuxième condition initiale, dont le gradient est orthogonal en moyenne au gradient du premier champ (figure 5.23). Il est évident que la zone d'où est extraite le domaine de calcul est située physiquement au même endroit que celle du premier champ.

Les figures suivantes représentent l'évolution des grandeurs lors des itérations de minimisation jusqu'à convergence vers la solution cherchée.

Les calculs sont effectués pour 3 valeurs différentes du paramètre σ : $\sigma = 0,1$; $\sigma = 0,5$; $\sigma = 1$. Nous avons choisi les paramètres suivants : $\Delta L = 10^{-3}$, 1500 isothermes, et $\delta = 1$, ce qui donne seulement 15 lignes de flux pour $\sigma = 0,1$, 16 lignes de flux pour $\sigma = 0,5$, et $\sigma = 1$. La condition initiale sur λ_0^0 représente une

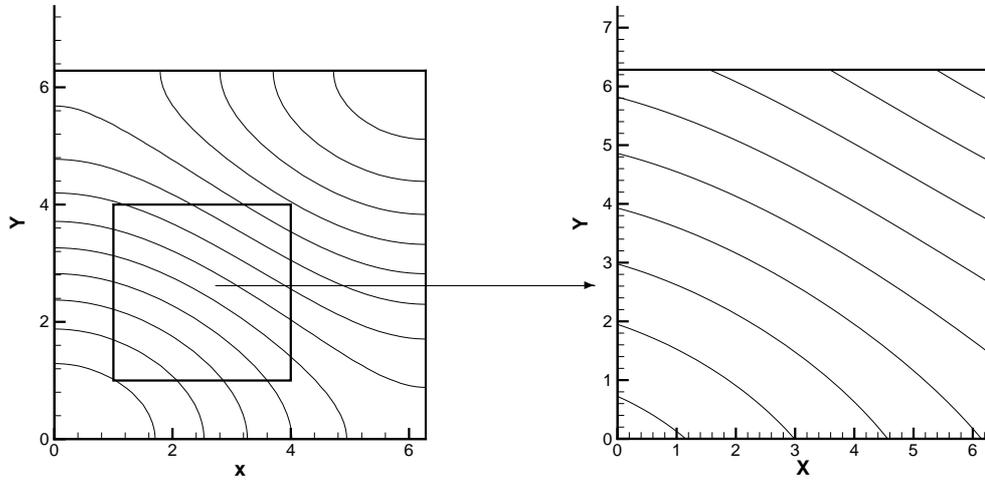


FIG. 5.23 – Premier champ de température sur lequel la reconstruction sera effectuée

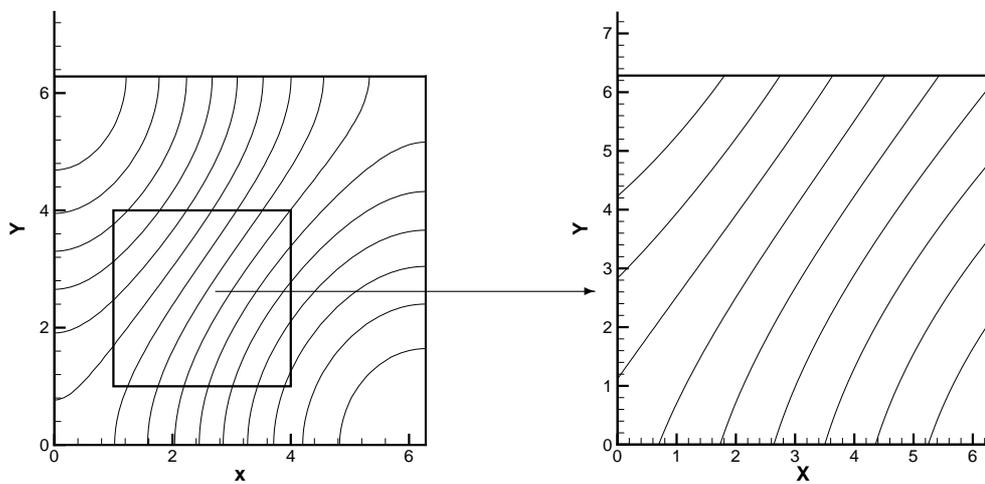
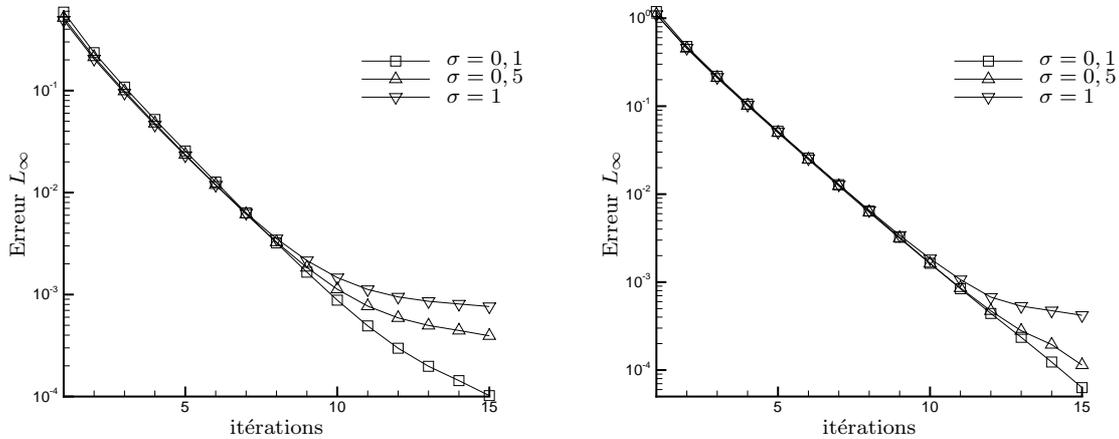


FIG. 5.24 – Second champ de température qui permettra de calculer les liaisons

erreur d'environ 35% sur sa valeur exacte.

L'algorithme a convergé en 15 itérations avec un critère d'arrêt sur la valeur de la fonctionnelle $\varepsilon = 2.10^{-11}$ pour $\sigma = 0, 1$ jusqu'à $\varepsilon = 5.10^{-11}$ pour $\sigma = 1$.

La figure 5.25(a) représente l'évolution de l'erreur L_∞ relative sur la conductivité, sur le maillage Lagrangien, au cours des itérations. Les échelles sont semi



(a) Erreur L_∞ sur la reconstruction de λ dans les coordonnées Lagrangiennes (b) Erreur L_∞ sur la reconstruction de λ dans les coordonnées cartésiennes de Gauss-Lobatto

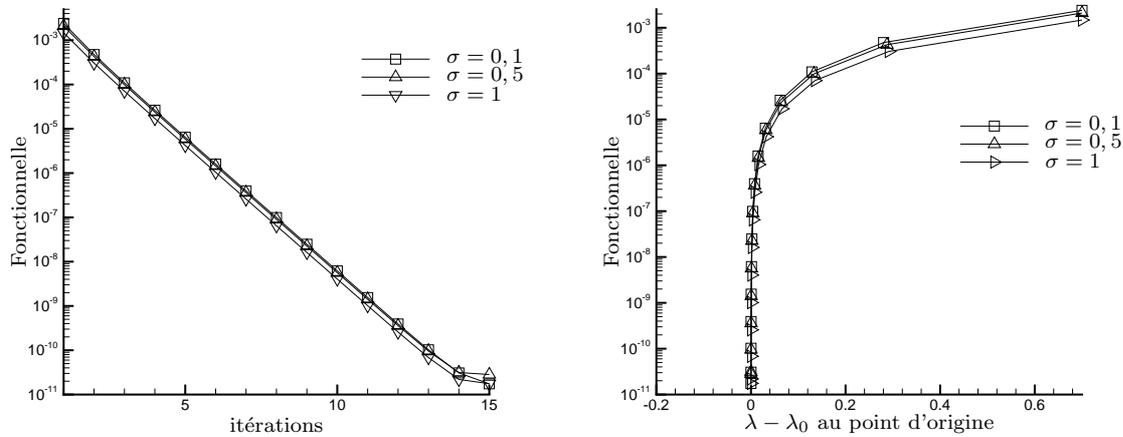
FIG. 5.25 – Erreurs L_∞ de la reconstruction de la conductivité sur les deux types de maillage

logarithmique, ce qui représente pour les premières itérations un taux de convergence exponentiellement décroissant. L'erreur L_∞ sur le maillage Lagrangien varie entre 10^{-4} pour $\sigma = 0,1$ à 10^{-3} pour $\sigma = 1$.

La figure 5.25(b) nous montre l'erreur L_∞ sur le maillage de Gauss-Lobatto. La fonction à reconstruire variant peu, la précision de l'interpolation inverse est bonne et l'erreur maximale reste du même ordre que celle effectuée sur le maillage Lagrangien.

Le graphe 5.26(a) représente l'évolution de la valeur de la fonctionnelle au cours des itérations. La décroissance est exponentielle, et la valeur finale de la fonctionnelle à convergence vaut environ $3 \cdot 10^{-11}$. Nous arrivons à une telle précision à cause de la variation de la conductivité à reconstruire, qui est faible sur le domaine. Nous avons illustré sur la figure 5.26(b) la valeur de la fonctionnelle en fonction de l'erreur sur la valeur λ_0^0 à l'origine de la première ligne du maillage Lagrangien.

Pour conclure sur ce cas, la reconstruction de cette fonction s'effectue sans problème, et permet d'atteindre une bonne précision, entre 10^{-3} et 10^{-4} . Il ne faut que très peu de lignes de maillage dans ce cas, et le passage du maillage Lagrangien vers celui de Gauss Lobatto s'effectuant sans problème, la fonctionnelle prend des valeurs extrêmement faibles près de la solution exacte, de l'ordre de 10^{-11} . Ces



(a) Évolution de la fonctionnelle au cours des itérations d'optimisation (b) Valeur de la fonctionnelle en fonction de l'erreur commise à l'origine du maillage Lagrangien

FIG. 5.26 – Comportement de la fonctionnelle lors de l'optimisation

faibles valeurs assurent une bonne convergence de l'algorithme qui retrouvera facilement le minimum de cette fonctionnelle. La faible quantité de lignes de flux servant à la reconstruction permet une convergence précise avec un temps de calcul vraiment réduit.

Reconstruction de la deuxième conductivité

Nous allons détailler dans cette partie les résultats obtenus lors de la reconstruction de la conductivité (5.80). La conductivité cherchée varie fortement dans le domaine de calcul, et ce cas va nous permettre d'étudier le fonctionnement de l'algorithme dans un cas moins favorable *a priori* que précédemment.

Examinons tout d'abord les champs de température qui serviront à l'inversion. Nous représentons sur la figure 5.27 les courbes de niveaux du premier champ de température généré numériquement, et sur lequel nous allons effectuer la reconstruction. La zone sur laquelle le calcul sera effectivement fait est représentée par le carré, et est remise aux bonnes dimensions sur l'illustration de graphe de droite.

La figure 5.28 représente le résultat de la relaxation d'une deuxième condition initiale.

Les figures suivantes représentent l'évolution des grandeurs au cours des itérations.

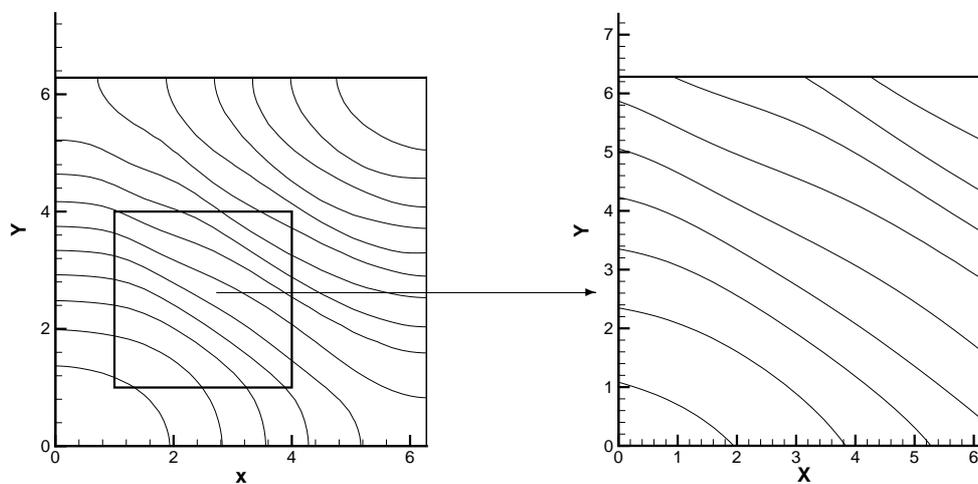


FIG. 5.27 – Premier champ de température sur lequel la reconstruction sera effectuée

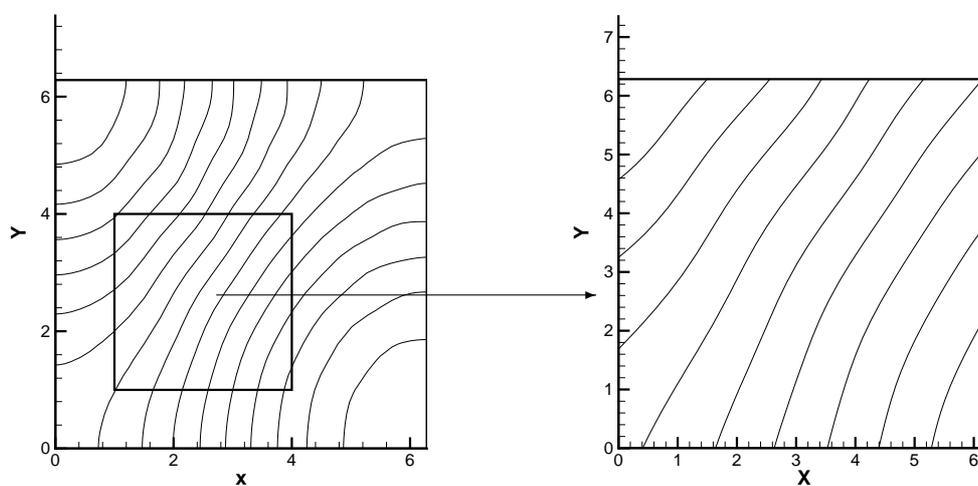


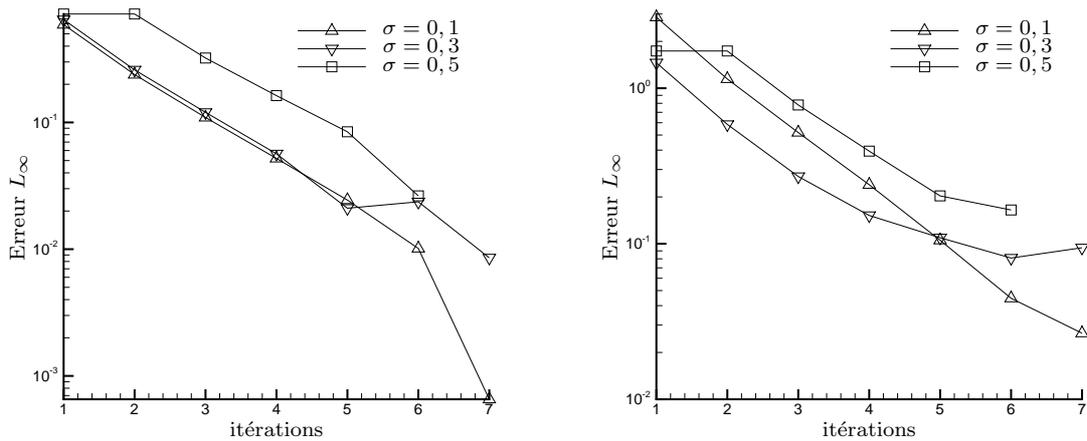
FIG. 5.28 – Second champ de température qui permettra de calculer les liaisons

Les calculs sont effectués pour trois valeurs différentes du paramètre σ : $\sigma = 0,1$; $\sigma = 0,3$; $\sigma = 0,5$. Nous avons fait des essais avec $\sigma = 0,7$ et $\sigma = 1$, mais l'algorithme n'a pas convergé pour ces valeurs.

Nous avons choisi les paramètres suivants : $\Delta L = 10^{-3}$, 1500 isothermes, et $\delta = 1$, ce qui donne 151 lignes de flux pour $\sigma = 0,1$, 148 lignes pour $\sigma = 0,3$ et 143 lignes

pour $\sigma = 0,5$. La condition initiale sur λ_0^0 représente ici aussi une erreur d'environ 35% sur sa valeur exacte.

L'algorithme a convergé cette fois-ci en 6 ou 7 itérations, suivant le cas, avec un critère d'arrêt sur la valeur de la fonctionnelle valant $\varepsilon = 9.10^{-7}$ pour $\sigma = 0,1$ jusqu'à $\varepsilon = 6.10^{-5}$ pour $\sigma = 0,5$.

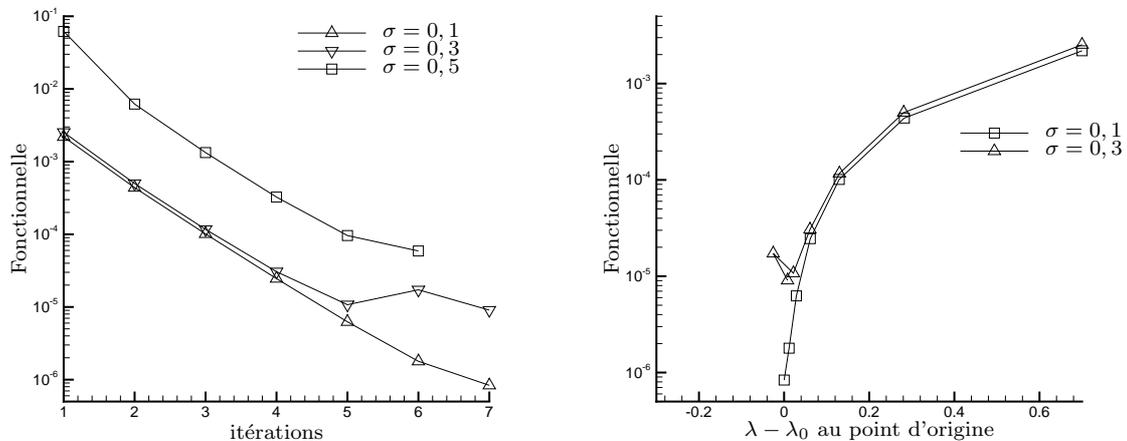


(a) Erreur L_∞ sur la reconstruction de λ dans les coordonnées Lagrangiennes (b) Erreur L_∞ sur la reconstruction de λ dans les coordonnées cartésiennes de Gauss-Lobatto

FIG. 5.29 – Erreurs L_∞ de la reconstruction de la conductivité sur les deux types de maillage

La figure 5.29(a) représente l'évolution de l'erreur L_∞ relative commise sur la conductivité du maillage Lagrangien. Nous constatons que l'algorithme a convergé en 6 itérations pour $\sigma = 0,5$, et 7 pour les autres cas. Le taux de décroissance est plus erratique que précédemment, mais nous retrouvons le comportement exponentiel de la convergence sur les erreurs. Le minimum atteint est de l'ordre de 10^{-3} pour le meilleur des cas $\sigma = 0,1$, et monte jusqu'à 10^{-2} environ pour $\sigma = 0,5$. Cette même erreur, tracée sur le maillage cartésien, nous montre les difficultés de l'interpolation inverse à reconstruire la conductivité à partir du maillage Lagrangien. C'est pourquoi les erreurs sur le maillage de Gauss-Lobatto (figure 5.29(b)) sont bien plus importantes, de l'ordre de 10^{-1} pour $\sigma = 0,3$ et $\sigma = 0,5$, et de l'ordre de 2.10^{-2} pour $\sigma = 0,1$.

Le graphe 5.30(a) représente la fonctionnelle au cours des itérations. La valeur de la fonctionnelle à la convergence s'échelonne entre $8,3.10^{-7}$ pour $\sigma = 0,1$, et monte



(a) Évolution de la fonctionnelle au cours des itérations d'optimisation (b) Valeur de la fonctionnelle en fonction de l'erreur commise à l'origine du maillage Lagrangien

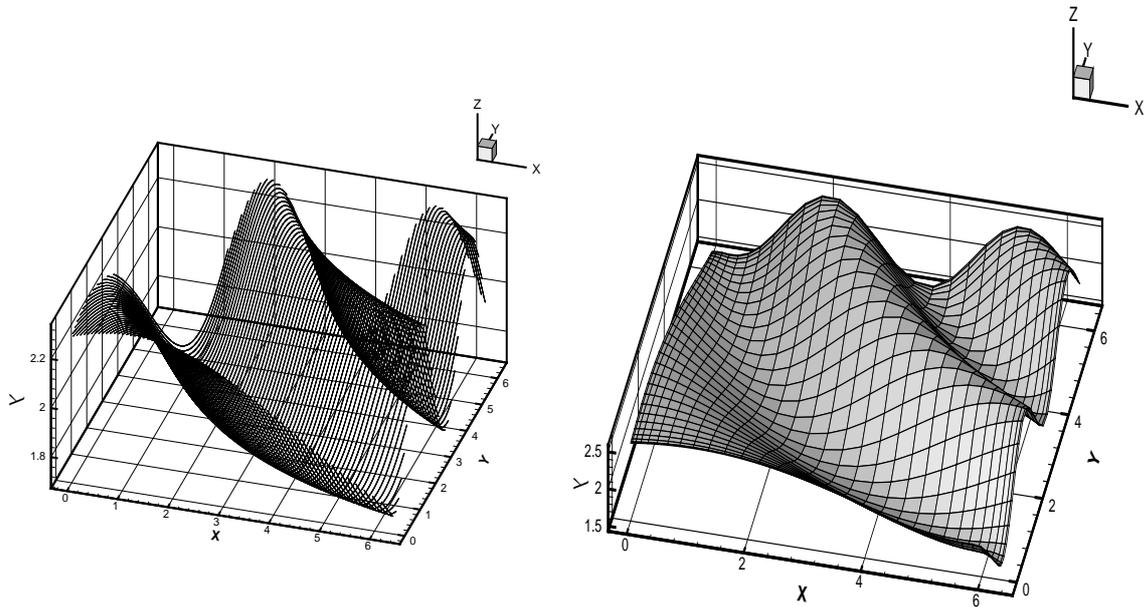
FIG. 5.30 – Comportement de la fonctionnelle lors de l'optimisation

à $9 \cdot 10^{-6}$ pour $\sigma = 0,3$ et $6 \cdot 10^{-5}$ pour $\sigma = 0,5$. La décroissance reste exponentielle dans les premières itérations. La courbe représentant la convergence pour $\sigma = 0,5$ est décalée d'environ une décade vers le haut par rapport aux autres courbes. Nous avons ici les prémices des difficultés de convergence qui apparaissent pour des valeurs supérieures de σ . En effet la fonctionnelle garde une valeur relativement basse à convergence pour les paramètres étudiés, mais "la vallée" est beaucoup moins profonde pour les valeurs de σ supérieures, où l'algorithme ne converge pas. En effet, cette interpolation est sensible aux variations spatiales du champ de conductivité. Comme nous avons gardé une interpolation d'ordre 3, il y a une valeur critique de σ à partir de laquelle la précision de l'interpolation est limitative sur la convergence, parce qu'elle contrôle le minimum de la fonctionnelle coût.

La figure 5.30(b) représente le cheminement de l'algorithme vers la convergence suivant nos critères choisis.

Les figures suivantes nous montrent les différentes grandeurs calculées sur les maillage, à convergence. L'illustration 5.31(a) représente la conductivité calculée sur le maillage Lagrangien pour $\sigma = 0,3$, de même que la figure 5.31(b) la représente sur le maillage de Gauss Lobatto.

Mais plus intéressants sont les graphiques représentant les erreurs relatives sur le domaine pour $\sigma = 0,3$. Le graphique 5.32(a) représente l'erreur locale relative sur



(a) Représentation de la conductivité reconstruite sur le maillage Lagrangien

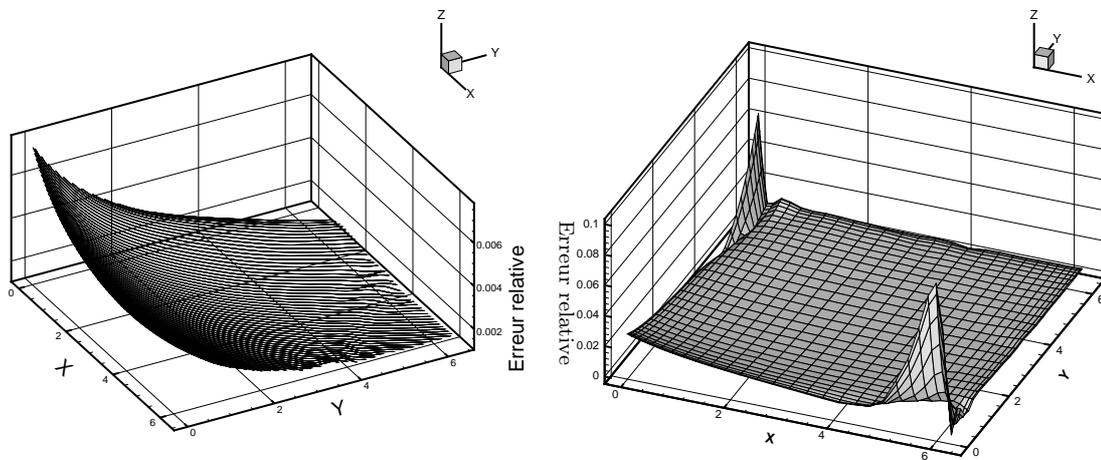
(b) Représentation de la conductivité reconstruite sur le maillage cartésien de Gauss-Lobatto

FIG. 5.31 – Représentation de la conductivité reconstruite pour $\sigma = 0,3$

le maillage Lagrangien. Nous constatons que le maximum d'erreur est situé près de l'origine $(0,0)$ du domaine de calcul. C'est en effet dans cette zone que le nombre de liaisons, calculé à l'aide du deuxième maillage est le plus important, et propageant ainsi l'erreur commise sur la valeur à l'origine de la première ligne, située pour notre cas dans la région proche de $(2\pi, 0)$. L'erreur maximale reste proche de 0,5%.

La figure 5.32(b) illustre l'erreur relative commise lors de l'interpolation inverse sur le domaine. Les erreurs sont globalement du même ordre que sur le maillage Lagrangien, excepté en deux zones. La première, située près de $(0, 2\pi)$ correspond à une zone qui n'est pas atteinte par le maillage Lagrangien, et donc ces erreurs sont dûes à l'extrapolation. L'autre zone où l'erreur est importante correspond à l'origine des lignes de flux. La détermination de la valeur à l'origine par minimisation reste entachée d'erreur, et se répercute à l'interpolation. Nous avons ici une représentation du caractère régularisant de notre méthode, liée à la zone d'influence de chaque point. La conductivité est calculée à partir de l'origine, et sa zone d'influence décroît à mesure de l'éloignement physique de ce point, de même que l'erreur.

En conclusion, nous avons essayé de reconstruire une conductivité qui varie for-



(a) Représentation de l'erreur relative de la conductivité reconstruite sur le maillage Lagrangien

(b) Représentation de l'erreur relative de la conductivité reconstruite sur le maillage cartésien de Gauss-Lobatto

FIG. 5.32 – Représentation des erreurs de reconstruction de la conductivité pour la conductivité donnée en (5.80) et $\sigma = 0,3$

tement dans le domaine d'étude. L'algorithme nécessite bien entendu plus de lignes, et donc de temps de calcul pour capter ces variations. Ces temps de calculs restent extrêmement modestes (dans tous les cas présentés au cours de ce travail, le temps de calcul a toujours été inférieur à une minute avec un processeur à 1,6 GHz) La partie la plus longue du calcul numérique est le calcul du maillage Lagrangien, l'inversion par la minimisation de la fonctionnelle étant plus rapide d'un ordre de grandeur. L'interpolation inverse grève la précision et empêche notre méthode de converger pour certains paramètres. Cependant, nous arrivons à capter les variations importante de conductivité, et nous arrivons à la reconstruire avec précision.

5.8 Conclusion

Nous avons développé et implémenté une méthode de reconstruction de la conductivité en milieux hétérogènes, utilisant des coordonnées Lagrangiennes.

Nous avons tout d'abord exhibé un exemple physique, associé au problème traité, concernant les milieux minces d'épaisseur variable, motivé par l'application à la cartographie thermique infrarouge. L'analyse asymptotique de cet exemple a permis

d'établir sous quelles conditions le problème tridimensionnel réel peut être décrit à l'aide d'un problème bidimensionnel approché. Cette classe de problème associée à un milieu de conductivité thermique hétérogène a ensuite fait l'objet d'une étude spécifique pour développer une nouvelle méthode d'inversion, cerner les limites de cette méthode, et valider son application sur des cas tests.

A cet effet, nous avons commencé par présenter un développement asymptotique qui modélise certaines configurations de milieux minces d'épaisseurs variables. Cette approche permet de remonter à la variation d'épaisseur par le calcul de la conductivité apparente bidimensionnelle. C'est dans cet esprit que nous avons développé la méthode de reconstruction de conductivité bidimensionnelle.

La méthode de reconstruction de la conductivité hétérogène consiste à décomposer l'équation de la chaleur sur des lignes de flux, qui sont localement parallèles au gradient d'un champ de température. L'équation devient ainsi unidimensionnelle et peut être résolue semi-analytiquement. Afin de lier ces lignes entre elles, une deuxième relation est nécessaire, et c'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser un deuxième champ de température, dont le gradient est en moyenne non-parallèle à celui du premier champ. Sur celui-ci, un deuxième réseau de lignes est calculé, et sert à trouver les relations liant les lignes de flux du premier et du deuxième champ, en calculant leurs intersections. Nous avons ainsi réduit le nombre d'inconnues à déterminer en couplant les lignes, et, par conséquent, la connaissance de la conductivité en un seul point, l'origine du maillage lagrangien, permet la détermination de la conductivité sur le domaine entier sur ce système de coordonnées, composé des lignes de flux et d'isothermes. Nous avons montré qu'une telle inversion n'est possible qu'à deux conditions sur les champs de température, que nous avons appelé conditions d'identifiabilité. La première condition est que le gradient du champ thermique ne s'annule pas à l'intérieur du domaine. La seconde condition, plus restrictive, est que le produit scalaire entre le gradient thermique et le gradient de conductivité thermique (*a priori* inconnu) ne soit pas trop petit. Cette dernière condition implique que le champ de température ne peut être défini comme identifiant qu'*a posteriori*, lorsque la conductivité a pu être trouvée. La détermination du champ de conductivité s'effectue par une méthode classique d'optimisation d'une fonctionnelle coût quadratique, à l'aide du problème adjoint.

La mise en place numérique a été effectuée sur deux systèmes différents de coordonnées : un système cartésien, que nous avons choisi de discrétiser à l'aide de points de Gauss-Lobatto, et sur lequel sont connus les grandeurs nécessaires à l'inversion,

et un système Lagrangien, qui est calculé à partir du premier. Des méthodes spectrales, d'ordre élevé, sont utilisées par les solveurs sur le maillage de Gauss-Lobatto. La résolution sur le maillage Lagrangien utilise, quant à elle, des méthodes plus classiques pour l'intégration. La conductivité est calculée sur le maillage Lagrangien, puis ramenée par "interpolation inverse" sur le maillage de Gauss-Lobatto, afin d'utiliser la méthode d'optimisation. Ce choix d'implémentation a montré que l'interpolation inverse (et parfois extrapolation) sont les étapes limitatives dans la précision des résultats obtenus. Pour finir, la méthode d'optimisation est écrite sur le maillage cartésien, et retrouve la valeur de la conductivité à l'origine des lignes de flux. L'avantage de cette méthode réside dans le fait que les calculs de maillage, de relations, et d'interpolation ne sont effectués qu'une seule fois, en tant que pré-traitement. Les itérations de l'optimisation sont donc très rapide, et ne nécessitent que la résolution des problèmes direct et adjoint.

Des cas tests ont permis d'évaluer la précision de la méthode de reconstruction, suivant les différents paramètres, et nous avons illustré la méthode par la reconstruction de deux champs de conductivité paramétrés. Les grandeurs permettant la reconstruction ont été générées numériquement en "mimant" la réalisation d'une expérience physique, qui laisserait relaxer deux conditions initiales différentes sur un domaine mince. Ces tests nous ont indiqué la sensibilité de l'erreur numérique et de la convergence aux erreurs d'interpolation, et de plus, l'inadéquation de la méthode spectrale à traiter des champs bruités.

Nous avons pu ainsi déterminer les forces et les faiblesses de notre implantation numérique et montrer la validité de notre approche qui se justifie par un temps de calcul réduit pour une bonne évaluation de la conductivité sur le domaine bidimensionnel.

Chapitre 6

Conclusion générale et Perspectives

Cette thèse présente l'étude de deux problèmes inverses, issus du contrôle non destructif.

Nous avons tout d'abord étudié un algorithme de complétion de données sur l'équation de la chaleur stationnaire, inventé par Kozlov au début des années 90. La reconstruction de la condition à la limite inconnue s'effectue avec la résolution d'une suite de deux sous-problèmes directs, qui échangent des informations par une alternance de conditions aux limites. Cet algorithme est discrétisé à l'aide d'une méthode numérique d'ordre élevé, qui offre une très grande précision de résolution avec un nombre réduit de points de discrétisation. Les sous-problèmes directs sont résolus à l'aide d'une méthode directe, la diagonalisation successive. La validation de l'implémentation et des différents critères d'arrêt a été réalisée par une série de cas test sur un domaine bidimensionnel carré. Une étude du comportement de l'algorithme, face à différents types de conditions aux limites, et face à la variation de la quantité d'informations disponibles, a montré que sa convergence est très lente. Il possède cependant une caractéristique remarquable : quelle que soit sa vitesse de convergence, conditionnée par la quantité d'informations disponibles, il convergera toujours vers la solution avec la même précision. Seul le nombre d'itérations changera (et donc le temps de calcul qui peut devenir vraiment grand).

Par conséquent, nous avons étudié des techniques d'accélération de la convergence, en utilisant une relaxation, et en développant la méthode du raffinement hiérarchique. La combinaison des deux offre une réduction non négligeable de temps de calcul. Par la suite nous avons étudié la détermination d'un coefficient d'interface, la résistance

de contact sur la frontière à compléter, qui est calculée à partir des valeurs reconstruites. Ce coefficient, lié au champ et à sa dérivée, est très sensible aux erreurs de reconstruction. L'utilisation des méthodes spectrales permet néanmoins de l'évaluer avec une précision satisfaisante.

Pour finir, nous avons implanté cet algorithme dans un domaine annulaire, où nous cherchions à reconstruire les conditions aux limites à l'intérieur, connaissant les informations de température et de flux de chaleur sur la frontière extérieure.

La deuxième partie de ce document présente une méthode originale de reconstruction de la conductivité dans un milieu hétérogène bidimensionnel à l'aide de coordonnées Lagrangiennes. Nous avons commencé par illustrer comment, à l'aide d'un développement asymptotique pour un milieu mince tridimensionnel, une variation d'épaisseur se traduisait par une variation de conductivité apparente sur le milieu équivalent bidimensionnel. Le principe de résolution est basé sur la décomposition de l'équation de la chaleur hétérogène bidimensionnelle sur ce que nous avons appelé lignes de flux, qui sont des lignes localement colinéaires au gradient de température. En rajoutant les isothermes, nous obtenons un maillage tenant compte des caractéristiques physiques du champ étudié. Sur ce système de coordonnées, la conductivité est résolue semi-analytiquement. Chacune des lignes étant indépendantes, un deuxième champ de température est nécessaire afin de pouvoir lier les lignes entre elles. Nous avons ainsi ramené la connaissance de la conductivité sur tout le domaine à la détermination de la conductivité en un seul point. La détermination de cette valeur est faite à l'aide des techniques d'optimisation d'une fonctionnelle coût quadratique.

Des cas tests ont permis par la suite de valider le principe de la méthode proposée et son implémentation numérique. Nous avons alors simulé une expérience modèle, et retrouvé la conductivité cherchée.

Disposant d'un outil de calcul fonctionnel, l'étape suivante serait la mise en œuvre pratique de la méthode de reconstruction proposée. L'étude de la conduction thermique dans une plaque mince présentant des hétérogénéités d'épaisseur ou de conductivité semble particulièrement adaptée. En effet, l'utilisation des techniques récentes de visualisation infrarouge permet d'obtenir des cartes de températures précises, présentant une bonne définition spatio-temporelle. Dans le cadre d'expériences modèles, l'emploi de plaques d'hétérogénéité contrôlée permettrait d'appliquer la méthode de reconstruction dans des cas réalistes. Cette application présente toutefois quelques obstacles techniques qu'il conviendrait de lever. En effet, les tests

numériques ont indiqué une sensibilité de l'erreur et de la convergence à l'étape d'interpolation et d'extrapolation. Par ailleurs, l'inadéquation de la méthode spectrale utilisée à traiter des champs thermiques bruités est un élément supplémentaire pour suggérer une autre discrétisation numérique. Un maillage éléments finis serait un bon candidat pour une mise en œuvre plus robuste et plus optimale de la méthode proposée à des problèmes bruités.

Bibliographie

- [Andersson *et al.*(1998)] ANDERSSON, L., ELFVING, T. & GOLUB, G. 1998 Solution of biharmonic equations with applications to radar imaging. *J. Comput. Appl. Math.* **94**, 153–180.
- [Bastay(1995)] BASTAY, G. 1995 Iterative methods for ill-posed boundary value problems. PhD thesis, Linkoping University.
- [Battaglia *et al.*(2001)] BATTAGLIA, J.-L., COIS, O., PUIGSEGUR, L. & OUSTALOU, A. 2001 Solving an inverse heat conduction problem using a non integer identified model. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **44**, 2671–2680.
- [Bear(1972)] BEAR, J. 1972 *Dynamics of fluids in Porous Media*. Dover Publications Inc., 31 East 2nd street, Mineola, NY 11501 : American Elsevier Publishing Company.
- [Behbahani-nia & Kowsary(2004)] BEHBAHANI-NIA, A. & KOWSARY, F. 2004 A dual reciprocity be-based sequential function specification solution method for inverse heat conduction problems. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **47**, 1247–1255.
- [Ben Abda *et al.*(1999)] BEN ABDA, A., BEN AMEUR, H. & JAOUA, M. 1999 Identification of 2d cracks by elastic boundary measurements. *Inverse Problems* **15**, 67–77.
- [Ben Abda *et al.*(1997)] BEN ABDA, A., CHAABANE, S., EL DABAGHI, F. & JAOUA, M. 1997 On a linear geometrical inverse problem of sigorini type : identifiability and stability. *Tech. Rep.*. INRIA.
- [Bernardi & Maday(1992)] BERNARDI, C. & MADAY, M. 1992 *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques..* Kluwer dordrecht.
- [Berntsson & Eldén(2001)] BERNTSSON, F. & ELDÉN, L. 2001 Numerical solution of a cauchy problem for the laplace equation. *Inverse Problems* **17**, 839–853.
- [Bonnet *et al.*(1992a)] BONNET, M., BUI, H., MAIGRE, H. & PLANCHARD, J. 1992a Identification of heat conduction coefficient : Application to nondes-

- tructive testing. In *Inverse Problems in Engineering Mechanics, IUTAM symposium Tokyo* (ed. Springer-Verlag), pp. 475–487.
- [Bonnet *et al.*(1992b)] BONNET, M., BUI, H., MAIGRE, H. & PLANCHARD, J. 1992b Indentification of heat conduction coefficient : Application to non destructive testing. In *Inverse Problems in Engineering Mechanics, IUTAM Symposium, Tokyo*.
- [Bonnet(2000)] BONNET, M. 2000 Cours du d.e.a. "dynamique des structures et couplages" sur les méthodes inverses.
- [Bruaset & Nielsen(1996)] BRUASET, A. & NIELSEN, B. 1996 On the stability of pressure and velocity computations for heterogeneous reservoirs. *S.I.A.M* **56** (4), 994–1007.
- [Cannon & DuChateau(1973a)] CANNON, J. & DUCHATEAU, P. 1973a Determination of unknown physical properties in heat conduction problems. *Int. J. Engng Science* **11** (7), 783–794.
- [Cannon & DuChateau(1973b)] CANNON, J. & DUCHATEAU, P. 1973b Determining unknown coefficient in a non linear heat conduction problem. *S.I.A.M.* **24** (3), 298–314.
- [Cannon & DuChateau(1974)] CANNON, J. & DUCHATEAU, P. 1974 Determination of the conductivity of an isotropic medium. *J. Math. Anal. Appl.* **48** (3), 699–707.
- [Cannon & DuChateau(1980)] CANNON, J. & DUCHATEAU, P. 1980 An inverse problem for an unknown source in a heat equation. *J. Math. Anal. Appl.* **75** (2), 465–485.
- [Cannon & DuChateau(1987)] CANNON, J. & DUCHATEAU, P. 1987 Design of an experiment for the determination of an unknown coefficient in a nonlinear conduction-diffusion equation. *Int. J. Engng Science* **25** (8), 1067–1078.
- [Canuto *et al.*(1987)] CANUTO, C., HUSSAINI, M., QUARTERONI, A. & ZANG, T. 1987 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*.. Springer Verlag.
- [Carslaw & Jaeger(1997)] CARSLAW, H. & JAEGER, J. 1997 *Conduction of Heat in Solids*. Oxford Science Publication.
- [Chantarisiwan(2001)] CHANTARISIWAN, S. 2001 An algorithm for solving multidimensional inverse heat conduction problem. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **44**, 3823–3832.

- [Chavent & Kunisch(2000)] CHAVENT, G. & KUNISCH, K. 2000 The output least square identifiability of the diffusion coefficient from an h^1 observation in a 2d elliptic equation. *Tech. Rep.*. INRIA.
- [Chen *et al.*(2001a)] CHEN, H.-T., LIN, S.-Y. & FANG, L.-C. 2001a Estimation of surface temperature in two-dimensional inverse heat conduction problems. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **44**, 1455–1463.
- [Chen *et al.*(2001b)] CHEN, J., HON, Y., WEI, T. & YAMAMOTO, M. 2001b Numerical computation of a cauchy problem for laplace's equation. *Z. angew. Math. Mech.* **81**, 665–674.
- [Chen *et al.*(2000)] CHEN, J., HON, Y. & YAMAMOTO, M. 2000 A conditional stability estimate for an inverse neumann boundary problem. In *FDIM*.
- [Dagan(1989)] DAGAN, G. 1989 *Flow and Transport in Porous Formations*. Springer-Verlag.
- [Denisov(1999)] DENISOV, A. 1999 *Element of the theory of inverse problem*, chap. 3 Linear inverse problems for the partial differential equation, pp. 106–119. unavailable.
- [Deville *et al.*(2002)] DEVILLE, M., FISCHER, P. & MUND, E. 2002 *High order methods for incompressible fluid flow*. Cambridge university press.
- [Dorai & Tortorelli(1997)] DORAI, G. & TORTORELLI, D. 1997 Transient inverse heat conduction problem solutions via newton's method. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **40** (17), 4115–4127.
- [Elayyan & Isakov(1997)] ELAYYAN, A. & ISAKOV, V. 1997 On inverse diffusion problem. *SIAM J. Appl. Math* **57** (6), 1737–1748.
- [Elden *et al.*(2000)] ELDEN, L., BERNTSSON, F. & NEUBAUER, A. 2000 Regularization of inverse problems. *SIAM J. Sci. Comput.* **21**, 2187–2205.
- [Eldén(1987)] ELDÉN, L. 1987 Approximations for a cauchy problem for the heat equation. *Inverse Problems* **3**, 263–273.
- [Engl & Kugler(2004)] ENGL, H. & KUGLER, P. 2004 Nonlinear inverse problems : Theoretical aspect and some industrial applications. *Tech. Rep.*. IPAM.
- [Fatullayev(2002)] FATULLAYEV, A. 2002 Numerical procedure for the determination of an unknown coefficients in parabolic equations. *Computer Physics Communications* **144**, 29–33.

- [Fatullayev(2005)] FATULLAYEV, A. 2005 Numerical procedure for the simultaneous determination of unknown coefficients in a parabolic equation. *Appl. Math. Comput.* **162**, 1367–1375.
- [Fernández-Berdaguer(1998)] FERNÁNDEZ-BERDAGUER, E. 1998 Parameter estimation in acoustic media using the adjoint method. *SIAM J. Control Optim.* **36** (4), 1315–1330.
- [Franckel(1996)] FRANCKEL, J. 1996 Residual-minimization least-square method for inverse heat conduction. *Computers Math. Applic.* **32** (4), 117–130.
- [Fridman(1956)] FRIDMAN, V. 1956 Method of successive approximation for a fredholm integral equation of the first kind (en russe). *Uspeki Math. Nauk.* **11**, 233–234.
- [Funaro(1992)] FUNARO, D. 1992 *Polynomial Approximation of Differential Equations*. Springer-Verlag.
- [Gaussorgue(1999)] GAUSSORGUE, G. 1999 *Thermographie infrarouge*. Tec & Doc.
- [Girault & Petit(2005)] GIRAULT, M. & PETIT, D. 2005 Identification methods in nonlinear heat conduction. part ii : inverse problem using reduced model. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **48**, 119–133.
- [Giudici(1991)] GIUDICI, M. 1991 Identifiability of distributed physical parameters in diffusive-like system. *Inverse Problems* **7**, 231–245.
- [Gottlieb & Orszag(1977)] GOTTLIEB, D. & ORSZAG, S. 1977 *Numerical analysis of spectral methods : theory and applications*. SIAM.
- [Groetsch(1984)] GROETSCH, C. 1984 *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*. Pitman Publishing, Boston.
- [Hadamard(1902)] HADAMARD, J. 1902 Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin* **13**, 49–52.
- [Hadamard(1932)] HADAMARD, J. 1932 *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaire hyperbolique*. Hermann & Cie, Paris.
- [Hadamard(1964)] HADAMARD, J. 1964 *La théorie des équations aux dérivées partielles*, gauthier-villars editeurs, paris edn. Editions Scientifiques, Pekin.
- [Hager & Pardalos(1998)] HAGER, W. & PARDALOS, P. 1998 *Optimal Control : Theory, Algorithms and Applications*. Kluwer Academic Publishers.
- [Hanke & Scherzer(1999)] HANKE, M. & SCHERZER, O. 1999 Error analysis of an equation error method for the identification of the diffusion coefficient in

- a quas-linear parabolic differential equation. *SIAM J. Appl. Math* **59**, 1012–1027.
- [Hayashi *et al.*(2002)] HAYASHI, K., OHURA, Y. & ONISHI, K. 2002 Direct method of solution for general boundary value problem of the laplace equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **26** (9), 763–771.
- [Hestenes & Stiefel(1952)] HESTENES, M. & STIEFEL, E. 1952 Method of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Research Nat. Bur. Standards* **49**, 409–436.
- [Hon & Wei(2001)] HON, Y. & WEI, T. 2001 Backus-glibert algorithm for the cauchy problem of the laplace equation. *Inverse Problems* **17**, 261–271.
- [Hon & Wu(2000)] HON, Y. & WU, Z. 2000 A numerical computation for inverse boundary determination problem. *Engng. Anal. Bound. Elem.* **24**, 599–606.
- [Huang & Chin(2000)] HUANG, C.-H. & CHIN, S.-C. 2000 A two-dimensional inverse problem in imaging the thermal conductivity of a non-homogeneous medium. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **43**, 4061–4071.
- [Johansson(2004)] JOHANSSON, T. 2004 An iterative procedure for solving a cauchy problem for second order elliptic equations. *Math. Nachr.* **272**, 46–54.
- [Jourhmane & Nachaoui(1996)] JOURHMANE, M. & NACHAOUI, A. 1996 A relaxation algorithm for solving a cauchy problem. In *Proc. of the 2nd Internat. Conf. on Inverse Problems in Engineering* (ed. E. F. Editor), , vol. 1, pp. 151–158.
- [Jourhmane & Nachaoui(1999)] JOURHMANE, M. & NACHAOUI, A. 1999 An alternating method for an inverse cauchy problem. *Numerical Algorithm* **21**, 247–260.
- [Jourhmane & Nachaoui(2002)] JOURHMANE, M. & NACHAOUI, A. 2002 Convergence of an alternating method to solve the cauchy problem for poisson’s equation. *Applicable Analysis* **81**, 1065–1083.
- [Kang & J.K.Seo(2001)] KANG, H. & J.K.SEO 2001 A note on uniqueness and stability for the inverse conductivity problem with one measurement. *J. Korean Math. Soc.* **38**, 781–791.
- [Kang & Seo(1996)] KANG, H. & SEO, J. 1996 The layer potential technique for the inverse conductivity problem. *Inverse Problems* **12**, 267–278.
- [Keller(1976)] KELLER, J. 1976 Inverse problems. *Amer. Math. Monthly* **83**, 107–118.

- [Kim *et al.*(2003)] KIM, S., KIM, M. & KIM, K. 2003 Non-iterative estimation of temperature-dependent thermal conductivity without internal measurements. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **46**, 1801–1810.
- [Kim & Lee(2002)] KIM, S. & LEE, W. 2002 Solution of inverse heat conduction problems using maximum entropy method. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **45**, 381–391.
- [Knudsen(2002)] KNUDSEN, K. 2002 On the inverse conductivity problem. PhD thesis, Aalborg University.
- [Kozlov & Samsonov(2003)] KOZLOV, K. & SAMSONOV, A. 2003 New data processing technique based on the optimal control technique. *Technical Physics* **48** (11), 1364–1371.
- [Kozlov *et al.*(1990)] KOZLOV, V., MAZ´YA, V. & FOMIN, A. 1990 An "alternating" iteration procedure for solving the cauchy problem for the laplace and the anisotropic elasticity system. *Tech. Rep.*. LiTH-MAT-R-90-31, Dept. of Math., Linkoping university.
- [Kozlov *et al.*(1991)] KOZLOV, V., MAZ´YA, V. & FOMIN, A. 1991 An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* **31** (1), 64–74.
- [Kozlov & Maz´ya(1989)] KOZLOV, V. & MAZ´YA, V. 1989 On iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations. *Algebra Analiz* **1**, 144–170, engl. Transl : Leningrad Math. J. vol 1 (1990), 1207–1228.
- [Kugler(2003)] KUGLER, P. 2003 Identification of a temperature dependent heat conductivity from single boundary measurements. *SIAM J. Numer. Anal.* **41** (4), 1543–1563.
- [Landweber(1951)] LANDWEBER, L. 1951 An iteration formula for fredholm integral equations of the first kind. *Amer. J. Math.* **73**, 615–624.
- [Lattes & Lions(1969)] LATTES, R. & LIONS, J. 1969 *The Method of Quasireversibility, Application to Partial Differential Equations*. American Elsevier Co., New York.
- [Lesnic *et al.*(1995)] LESNIC, D., ELLIOT, L. & INGHAM, D. 1995 A note on the determination of the thermal properties of a material in a transient nonlinear heat conduction problem. *Int. Comm. Heat Mass Transfer* **22** (4), 475–482.

- [Lesnic *et al.*(1996)] LESNIC, D., ELLIOT, L. & INGHAM, D. 1996 Application of the boundary element method to inverse heat conduction problems. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **39** (7), 1503–1517.
- [Lesnic *et al.*(1997)] LESNIC, D., ELLIOT, L. & INGHAM, D. 1997 An iterative boundary element method for solving numerically the cauchy problem for the laplace equation. *Engineering Analysis with boundary elements* **20** (2), 123–133.
- [Lesnic(2002)] LESNIC, D. 2002 The determination of the thermal properties of a heat conductor in a non linear heat conduction problem. *Z. angew. Math. Phys.* **53**, 175–196.
- [Le Meur *et al.*(2002)] LE MEUR, G., BOUROUGA, B. & JARNY, Y. 2002 Inverse analysis of heat flow at a solid-solid electro-thermal contact. In *4th International Conference of Inverse Problems in Engineering*. Rio de Janeiro, Brazil.
- [Lin *et al.*(2003)] LIN, S.-M., CHEN, C.-K. & YANG, Y.-T. 2003 A modified sequential approach for solving inverse heat conduction problems. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **47**, 2669–2680.
- [Lions & Magènes(1968)] LIONS, J. & MAGÈNES, E. 1968 *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, , vol. 1. Dunod.
- [Lions(1968)] LIONS, J. 1968 *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod.
- [Lions(1970 - 1971)] LIONS, J. 1970 - 1971 *Cours d'analyse Numérique*, chap. IX and X. École Polytechnique.
- [Liu *et al.*(1995)] LIU, J., GUERRIER, B. & BENARD, C. 1995 A sensitivity decomposition for the regularized solution of inverse heat conduction problem by wavelets. *Inverse Problems* **11**, 1177–1187.
- [Lynch *et al.*(1964)] LYNCH, R., RICE, J. & THOMAS, D. 1964 Direct solution of partial difference equations by tensor product methods. *Numer. Math.* **6**, 185–199.
- [Marin *et al.*(2001)] MARIN, L., ELLIOTT, L., INGHAM, D. B. & LESNIC, D. 2001 Boundary element method for the cauchy problem in linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **25** (9), 783–793.
- [Marin & andD. Lesnic(2002)] MARIN, L. & ANDD. LESNIC, D. H. 2002 Conjugate gradient-boundary element method for the cauchy problem in elasticity. *Q J Mechanics Appl Math* **55** (2), 227–247.

- [Mera *et al.*(2000)] MERA, N., ELLIOTT, L., INGHAM, D. & LESNIC, D. 2000 The boundary element solution of the cauchy steady heat conduction problem in an anisotropic medium. *INT. J. Numer. Meth. Engng.* **49**, 481–499.
- [Monde *et al.*(2003)] MONDE, M., ARIMA, H., LIU, W., MITUTAKE, Y. & HAMDAD, J. 2003 An analytical solution for two-dimensional inverse heat conduction problems using laplace transform. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **46**, 2135–2148.
- [Monde & Mitsutake(2001)] MONDE, M. & MITSUTAKE, Y. 2001 A new estimation method of thermal diffusivity using analytical inverse solution for one-dimensional heat conduction. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **44**, 3169–3177.
- [Monde(2000)] MONDE, M. 2000 Analytical method in inverse heat transfert problem using laplace transform technique. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **43**, 3965–3975.
- [Nanda & Das(1996)] NANDA, A. & DAS, P. 1996 Determination of the source term in the heat conduction equation. *Inverse Problems* **12**, 325–339.
- [Nashed(1974)] NASHED, Z. 1974 *Constructive and computational methods for differential and integral equations*, chap. Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations. A.Dold and B.Eckmann, Springer–Verlag.
- [Park & Jung(2001)] PARK, H. & JUNG, W. 2001 Recursive solution of an inverse heat transfert problem in rapid thermal processing systems. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **44**, 2053–2065.
- [Patera(1984)] PATERA, A. 1984 A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.* **54**, 468–488.
- [Rondi(2000)] RONDI, L. 2000 Uniqueness and stability for the determination of boundary defects by electrostatic measurements. In *Proc. Royal Soc. Edinb. Sec. A*, , vol. 130, pp. 1119–1151.
- [Sablani *et al.*(2005)] SABLANI, S., KACIMOV, A., PERRET, J., MUJUMDAR, A. & CAMPO, A. 2005 Non-iterative estimation of heat transfert coefficient using artificial neural network odels. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **48**, 665–679.
- [Seidman & Eldeén(1990)] SEIDMAN, T. & ELDEÉN, L. 1990 An 'optimal filtering' method for the sideways heat equation. *Inverse Problems* **6**, 681–696.
- [Shenefelt *et al.*(2002)] SHENEFELT, J., LUCK, R., TAYLOR, R. & BERRY, J. 2002 Solution to inverse heat conduction problems employing singular value

- decomposition and model-reduction. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **45**, 67–74.
- [Shen(1999)] SHEN, S.-Y. 1999 A numerical study of inverse heat conduction problems. *Comput. Math. with Applications* **38**, 173–188.
- [Tadi *et al.*(2002)] TADI, M., KLIBANOV, M. V. & CAI, W. 2002 An inversion method for parabolic equations based on quasireversibility. *Computers & Mathematics with Applications* **43** (8-9), 927–941.
- [Taler(1996)] TALER, J. 1996 Theory of transient experimental techniques for surface heat transfert. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **39** (17), 3733–3748.
- [Tarantola(1987)] TARANTOLA, A. 1987 *Inverse problem theory*. Elsevier.
- [Tikhonov & Arsenin(1977)] TIKHONOV, A. & ARSEININ, V. 1977 *Solutions to ill posed problems*. New York : Winston Wiley.
- [Titarenko & Yagola(2002)] TITARENKO, V. & YAGOLA, A. 2002 Cauchy problems for laplace equation on compact sets. *Inverse Problems in Engng*, **3** (2), 235–254.
- [Wang & Zabaras(2004)] WANG, J. & ZABARAS, N. 2004 A bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **47**, 3927–3941.
- [Wang & Zheng(2002)] WANG, P. & ZHENG, K. 2002 Determination of an unknown coefficient in a nonlinear heat equation. *J. Math. Anal. Appl.* **271**, 525–533.
- [Wei *et al.*(2003)] WEI, T., HON, Y. & CHENG, J. 2003 Computation for multi-dimensional cauchy problem. *SIAM J. Control Optim.* **42** (2), 381–396.
- [Yeung & Lam(1996)] YEUNG, W. & LAM, T. 1996 Second-order finite difference approximation for inverse determination of thermal conductivity. *Int. J. Heat and Mass Transfert* **39** (17), 3685–3693.
- [Yildiz & Sever(1998)] YILDIZ, B. & SEVER, A. 1998 On the inverse conductivity problem. *Appl. Math. Comput.* **94**, 91–96.

Annexe A

Numérique

A.1 Approximations et polynômes

A.1.1 Polynômes de Legendre

Ils sont solution du problème de Sturm-Liouville singulier suivant :

$$-((1-x^2)L_n'(x))' = n(n+1)L_n(x) \quad \text{avec } L_n(-1) = (-1)^n \text{ et } L_n(1) = 1$$

En pratique, leur calcul se fait par récurrence, avec $L_0(x) = 1$ et $L_1(x) = x$:

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xL_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x)$$

La famille de polynôme de Legendre constitue une base orthogonale de L^2 et permet d'exprimer une fonction $u \in L^2$ comme

$$u = \sum_{i \geq 0} \bar{u}_i L_i$$

La propriété intéressante des polynômes de Legendre est que les coefficients \bar{u}_n tendent exponentiellement vers 0 lorsque n tend vers l'infinie. C'est la convergence spectrale. Cette propriété est analogue à celle des développements asymptotiques pour lesquels les premiers termes contiennent le maximum d'information.

La troncature de cette série, $\sum_{i=0}^n \bar{u}_i L_i$, donne une approximation polynômiale de u . C'est aussi la projection de u sur \mathbb{P}_n relativement au produit scalaire de L^2 .

A.1.2 Quadrature de Gauss-Lobatto

Elle permet le calcul d'une intégrale à partir de l'ensemble des points $\{\xi_i, i \in [0, n]\}$ de Gauss-Lobatto-Legendre solutions de

$$(1 - \xi^2) L'_n(\xi) = 0 \quad \xi \in [-1, 1]$$

Ainsi, pour tout polynômes p de degrés $2n - 1$, il existe une ensemble de poids $\{\rho_i, i \in [0, n]\}$, de telle sorte que

$$\int_{-1}^1 p(t) dt = \sum_{i=0}^n p(\xi_i) \rho_i$$

Pour des polynômes de degrés supérieur à $2n - 1$, l'erreur de quadrature est proportionnelle au coefficient du terme à la puissance $2n$.

Les poids sont donnés par la relation

$$\rho_i = \frac{2}{n(n+1)} \frac{1}{L_n^2(\xi_i)}$$

A.1.3 Quadrature de Gauss-Radau

Elle permet le calcul d'une intégrale à partir de l'ensemble des points $\{\xi_i, i \in [0, n - 1]\}$ de Gauss-Radau-Legendre :

$$\xi_i = -\cos\left(\frac{2i}{2n+1}\pi\right) \quad \xi \in [-1, 1[$$

Ainsi, pour tout polynômes p de degrés $2n - 2$, il existe une ensemble de poids $\{\rho_i, i \in [0, n - 1]\}$, de telle sorte que

$$\int_{-1}^1 p(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} p(\xi_i) \rho_i$$

Pour des polynômes de degrés supérieur à $2n - 2$, l'erreur de quadrature est proportionnelle au coefficient du terme à la puissance $2n$.

Les poids sont donnés par la relation

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{(\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+1)(n-1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}, & i = 0 \\ \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!} \left[L_n^{(\alpha)}(\xi_i) \frac{d}{dx} L_{n-1}^{(\alpha)}(\xi_i) \right], & 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}, \alpha = -\frac{1}{2}$$

A.1.4 Polynômes de Lagrange

C'est une famille $\{h_i, i \in [0, n]\}$ de polynômes d'interpolation définis par rapport aux points de Gauss-Lobatto-Legendre, tels que $h_i(\xi_j) = \delta_{ij}$, δ_{ij} étant le symbole de Kronecker. L'approximation d'une fonction u sous forme d'interpolation s'écrit $\sum_{i=0}^n u(\xi_i) h_i$. Cette approximation, ou projection relative au produit scalaire discret définie par la formule de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre, jouit des mêmes propriétés que celle basée sur les polynômes de Legendre : elle converge spectrelement. En pratique, la mise en œuvre est plus facile avec les polynômes de Lagrange qu'avec ceux de Legendre et elle donne accès directement aux valeurs discrètes de la solution, c'est pourquoi la méthode spectrale décrite dans cette thèse est basée sur ces polynômes.

A.2 Produit tensoriel

Soient A et B deux matrices de dimension respectives $m \times n$ et $k \times l$, alors le produit tensoriel $A \otimes B$ est une matrice C de dimension $mk \times nl$. Elle est telle que $C_{ij} = A_{pq}B_{rs}$ avec $i = r + (p - 1)k$ et $j = s + (q - 1)l$ et peut être mise sous forme de matrice par blocs

$$C = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{pmatrix}$$

Les propriétés élémentaires du produits tensoriel sont :

+ désigne l'addition de matrice, et AB désigne la multiplication de la matrice A par la matrice B .

$$(A + C) \otimes B = A \otimes B + C \otimes B \quad (\text{A.1})$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \quad (\text{A.2})$$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \quad (\text{A.3})$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad (\text{A.4})$$

D'autre part, le produit de trois matrices peut s'écrire comme $ABC = (C \otimes A)\mathbf{b}$, où \mathbf{b} représente la matrice B mise sous forme de vecteur. L'interprétation de ces

propriétés est qu'une matrice décrivant un opérateur qui peut se mettre sous forme tensorielle agit indépendamment sur chacune des directions de l'espace. On peut alors traiter chaque direction de manière séparée, en "fixant" les autres.

A.3 Traitement des conditions limites de type Dirichlet

La prise en compte des conditions limites de type Dirichlet se fait en pratique en modifiant certaines lignes et colonnes de chaque opérateur associé à une direction de l'espace. Lorsqu'une frontière ayant une condition limite de type Dirichlet est présente dans cette direction et dont les points ont pour indice k , la modification consiste à remplacer les $k^{\text{ème}}$ lignes et colonnes par des zéros sauf le terme diagonal qui vaut 1. Par exemple, pour une condition limite Dirichlet sur la frontière est (direction x , indice $k = N$), et sur la frontière sud (direction y , indice $k = 1$), les matrices agissant sur la direction x (à droite des produits tensoriels \otimes) verront leur $N^{\text{ème}}$ ligne et colonne annulée et le terme (N, N) égale à 1 alors que les matrices agissant sur la direction y (à gauche des produits tensoriels \otimes) verront leur 1^{ère} ligne et colonne annulée et le terme $(1, 1)$ égale à 1. Les opérateurs du second membre sont modifiés de manière à rendre compte de la condition limite correspondante avec des 0.

Ainsi pour un système du type $AXB = C$, la modification donne (\star représente un terme quelconque non modifié) :

$$A_D = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \star & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \cdots & \star \end{pmatrix} \quad C_D = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A.4 Méthode itérative du gradient conjugué préconditionné

La méthode classique que nous allons exposer permet d'inverser de manière itérative une matrice symétrique définie positive. Dans le cas d'un gradient conjugué, l'obtention de la solution peut être interprétée comme une minimisation d'une fonctionnelle. Contrairement aux méthodes directes, la solution calculée n'est qu'une

approximation, puisque déterminée avec un critère de convergence fixé. Cependant, l'efficacité de l'algorithme du gradient conjugué est fortement lié au conditionnement¹ de la matrice A . Cela incite à modifier le système à résoudre, et le remplacer par un système équivalent, dont le conditionnement est plus favorable. Cela s'appelle préconditionner le système.

Si nous appelons M une matrice symétrique définie positive, approchant A , on peut, par exemple, résoudre un des problèmes suivants :

$$M^{-1}A\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{A.5})$$

ou

$$AM^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{u} \quad (\text{A.6})$$

Malheureusement dans ce cas, $M^{-1}A$ et AM^{-1} ne sont plus symétriques. Nous pouvons préserver cette symétrie, par exemple, si M est disponible sous forme factorisée $M = LL^*$. Alors nous séparons la matrice de préconditionnement et nous résolvons

$$L^{-1}AL^{*-1}\mathbf{u} = L^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{x} = L^{*-1}\mathbf{u} \quad (\text{A.7})$$

qui est un système symétrique. Cela n'est cependant pas nécessaire, car $M^{-1}A$ est auto adjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ associé à la matrice M . En effet,

$$\langle M^{-1}A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M = \langle \mathbf{x}, M^{-1}A\mathbf{y} \rangle_M \quad (\text{A.8})$$

Il suffit donc de résoudre A.5 avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ dans l'algorithme du gradient conjugué. Une itération k de l'algorithme devient, avec $z_k = M^{-1}r_k$

$$\alpha_k = \frac{\langle \mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k \rangle_M}{\langle M^{-1}A\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k \rangle_M} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k A\mathbf{p}_k \quad (\text{A.11})$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\langle \mathbf{z}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1} \rangle_M}{\langle \mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k \rangle_M} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{p}_k \quad (\text{A.13})$$

¹le conditionnement d'une matrice A est défini par $\kappa(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$. Son influence se mesure sur la qualité de la solution d'un système perturbé, de telle sorte que l'erreur relative sur la solution est majorée par le nombre de conditionnement.

Il n'est pas nécessaire de calculer les produits scalaires P car

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{z}_k, \mathbf{z}_k \rangle_M &= \langle \mathbf{z}_k, \mathbf{r}_k \rangle \\ \langle M^{-1}A\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k \rangle_M &= \langle A\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k \rangle\end{aligned}$$

Si nous injectons ces relations, nous obtenons l'algorithme du gradient conjugué préconditionné. Son avantage est que sa vitesse de convergence dépend maintenant du conditionnement de la matrice $M^{-1}A$.

Sa mise en œuvre nécessite un vecteur intermédiaire supplémentaire et une résolution du système : $\mathbf{z}_k = M^{-1}\mathbf{r}_k$. Il faut choisir M de telle façon à ce que ce surcoût ne soit pas trop important. Pour que le gain soit intéressant, nous devons choisir M tel que $M^{-1}A$ soit le plus proche possible de l'identité.

En pré-requis, il faut une initialisation x_0 (généralement, $x_0 = 0$) et une matrice de préconditionnement M .

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{z}_0 = M^{-1}\mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{z}_0$$

terme général d'une itération :

$$\alpha_k = \frac{\langle \mathbf{z}_k, \mathbf{r}_k \rangle}{\langle \mathbf{p}_k, A\mathbf{p}_k \rangle}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k A\mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{z}_k = M^{-1}\mathbf{r}_k$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\langle \mathbf{z}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1} \rangle}{\langle \mathbf{z}_k, \mathbf{r}_k \rangle}$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \beta_{k+1}\mathbf{p}_k$$

Il existe de nombreuses façons de choisir M , par exemple une factorisation LU incomplète, ou une Cholesky, ou la matrice issue de la discrétisation de l'opérateur en éléments ou différences finis. Nous avons choisi comme préconditionneur la solution du laplacien, calculée par diagonalisation successive. En effet, l'avantage d'une telle méthode repose sur le fait que si le système initial est tensoriel, le gradient conjugué converge en une seule itération.

Annexe B

Compléments sur le problème de Cauchy

B.1 Formulation mathématique du problème de Cauchy

Nous étudierons la complétion de donnée sur le modèle de l'équation de la chaleur stationnaire, c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0. & \Omega \\ u(0, y) = u(a, y) = 0. & 0 \leq y \leq b \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq a \\ \partial_y u(x, 0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq a \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

Ce système est appelé problème de Cauchy. Le but du problème de Cauchy est de déterminer $u(x, d) = h(x)$, $0 \leq x \leq a$, $d \in]0, b]$. Le problème dans le rectangle $[0, a] \times [0, d]$ est résolu par séparation de variables, c'est à dire que la fonction à trouver $u(x, y)$ dépend de deux fonctions indépendantes : $u(x, y) = A(x) B(y)$.

Appliquons cette décomposition dans le laplacien.

$$A''(x) B(y) + A(x) B''(y) = 0.$$

ce qui donne :

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = \frac{B''(y)}{B(y)} = K, K = \text{cste} \quad (\text{B.2})$$

Il y a donc deux problèmes indépendants qu'il faut résoudre séparément. Résolvons pour commencer :

$$A(x) : A'' - KA = 0.$$

Deux cas s'offre à nous :

– Si $K > 0$

$$A = a_1 e^{\sqrt{K}x} + a_2 e^{-\sqrt{K}x}$$

Et les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = a$ nous donne une solution pour A identiquement nulle, ce qui est impossible.

– et donc $K < 0$, par conséquent, les conditions aux limites nous donne la solution suivante :

$$A(x) = a_2 \sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right) \quad (\text{B.3})$$

De l'équation B.2, connaissant le signe de la constante, nous pouvons résoudre B .

$$B'' + KB = 0.$$

Nous écrivons la solution comme une combinaison linéaire de fonction hyperbolique, de telle sorte que

$$B = B_1 ch(\omega y) + B_2 sh(\omega y).$$

$$\omega = \frac{n\Pi}{a}$$

Lorsque nous regroupons les termes, la solution s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right) \left[D_{n1} ch\left(\frac{n\Pi}{a}y\right) + D_{n2} sh\left(\frac{n\Pi}{a}y\right) \right] \quad (\text{B.4})$$

La condition à la limite à gauche s'écrit

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{n1} \sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right) = \varphi(x)$$

ce qui nous permet de déterminer D_{n1} :

$$D_{n1} = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(\xi) \sin\left(\frac{n\Pi}{a}\xi\right) d\xi$$

La condition à la limite à droite, nous amène à

$$u(x, d) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right) \left[D_{n1} ch\left(\frac{n\Pi}{a}d\right) + D_{n2} sh\left(\frac{n\Pi}{a}d\right) \right] = h(x)$$

Isolons D_{n2} de l'expression précédente afin de l'évaluer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_{n2} sh\left(\frac{n\Pi}{a}d\right) \sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right) = h(x) - \sum_{n=1}^{\infty} D_{n1} ch\left(\frac{n\Pi}{a}d\right) \sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right)$$

Cette décomposition nous amène à

$$D_{n2} sh\left(\frac{n\Pi}{a}d\right) = \frac{2}{a} \int_0^a \left(h(\xi) - D_{n1} ch\left(\frac{n\Pi}{a}d\right) \sin\left(\frac{n\Pi}{a}\xi\right) \right) \sin\left(\frac{n\Pi}{a}\xi\right) d\xi$$

Sachant que

$$\frac{2}{a} \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\Pi}{a}\xi\right) d\xi = \frac{2}{a} \int_0^a \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{n\Pi}{a}\xi\right) \right] d\xi = 1$$

La solution finale dépendant des conditions aux limites φ et ψ s'écrit donc

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\varphi} \frac{2}{a} \frac{sh\left(\frac{n\Pi}{a}(d-y)\right)}{sh\left(\frac{n\Pi}{a}d\right)} \sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} P_h \frac{2}{a} \frac{sh\left(\frac{n\Pi}{a}y\right)}{sh\left(\frac{n\Pi}{a}d\right)} \sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right) \tag{B.5a}$$

$$I_{\varphi} = \int_0^a \varphi(\xi) \sin\left(\frac{n\Pi}{a}\xi\right) d\xi \tag{B.5b}$$

$$P_h = \int_0^a h(\xi) \sin\left(\frac{n\Pi}{a}\xi\right) d\xi \tag{B.5c}$$

B.2 Détermination de la condition à la limite inconnue $h(x)$

Il nous reste à retrouver la condition à la limite inconnue. Pour ce faire, dérivons la solution obtenue, et relierons la à notre connaissance sur la dérivée sur le bord en vis à vis.

$$\partial_y u(x, 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} I_{\varphi} \frac{2\Pi n}{a^2} \coth\left(\frac{n\Pi}{a}d\right) \sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} P_h \frac{2\Pi n}{a^2} \frac{\sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right)}{sh\left(\frac{n\Pi}{a}d\right)}$$

$$\partial_y u(x, 0) = \psi(x)$$

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont connues, et le problème inverse est donc de déterminer $h(x)$, inclus dans P_h , tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_h \frac{2\Pi n}{a^2} \frac{\sin\left(\frac{n\Pi x}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\Pi d}{a}\right)} = \psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} I_\varphi \frac{2\Pi n}{a^2} \coth\left(\frac{n\Pi d}{a}\right) \sin\left(\frac{n\Pi x}{a}\right)$$

En reformulant l'égalité précédente, nous pouvons écrire finalement

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^a h(\xi) \sin\left(\frac{n\Pi}{a}\xi\right) d\xi \frac{\sin\left(\frac{n\Pi x}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\Pi d}{a}\right)}$$

$$g(x) = \frac{a^2}{2\Pi} \psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} I_\varphi n \coth\left(\frac{n\Pi d}{a}\right) \sin\left(\frac{n\Pi x}{a}\right)$$

Étudions maintenant la fonction $g(x)$ du côté gauche. Si elle converge uniformément, \int et \sum peuvent être inversés :

$$g(x) = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{n\Pi}{a}\xi\right) \frac{\sin\left(\frac{n\Pi x}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\Pi d}{a}\right)} h(\xi) d\xi$$

Cette fonction peut se mettre sous la forme

$$g(x) = \int_0^a G(\xi, x) h(\xi) d\xi$$

$$G(\xi, x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{n\Pi}{a}\xi\right) \frac{\sin\left(\frac{n\Pi x}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\Pi d}{a}\right)} \text{ est le noyau}$$

Nous avons écrit un opérateur à noyau $G(\xi, x)$. L'unicité dans la détermination de $h(x)$ vient du fait que les $\sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right)$ forment une base dans $L_2[0, a]$. Une étude sommaire du noyau $G(\xi, x)$ va nous donner les propriétés suivantes :

$$\left| \sin\left(\frac{n\Pi}{a}x\right) \right| \leq 1 \text{ et } \left| \sin\left(\frac{n\Pi}{a}\xi\right) \right| \leq 1, \forall x, \forall \xi$$

$$\text{donc } |G(\xi, x)| \leq \frac{2n}{e^n - e^{-n}}, \text{ et } e^n - e^{-n} \sim_{n \rightarrow \infty} e^n$$

B.3 Remarque sur les opérateurs à noyaux et les problèmes inverses.151

Nous déduisons de ces inégalités que $|G(\xi, x)| \leq 2ne^{-n}$ converge absolument et donc uniformément.

Le même raisonnement peut être fait pour $\partial_\xi G(\xi, x)$ et $\partial_x G(\xi, x)$

$G(\xi, x)$ est donc continûment différentiable puisqu'il converge uniformément et que les dérivées par rapport à chacune des variables convergent uniformément. C'est ainsi un opérateur intégral qui agit de $L_2[0, a]$ dans $L_2[0, a]$.

B.3 Remarque sur les opérateurs à noyaux et les problèmes inverses.

Nous allons présenter quelques résultats sur les opérateur à noyaux. Notons B un opérateur inversible d'un espace de Hilbert vers un espace de Hilbert. Soit y donné. Si l'inverse de B n'est pas borné, alors le problème qui est de trouver x tel que

$$Bx = y \tag{B.6}$$

est mal posé.

La théorie des opérateurs compacts linéaires sur un espace de Hilbert de dimension infinie nous indique que ces opérateurs n'ont pas d'inverses bornés. Fredholm, dans ses travaux sur les intégrales de première espèce, a montré que le problème, qui est de trouver f pour un h donné dans la relation

$$\int_{\Omega} G(x, y) f(x) dx = h(y)$$

Ω domaine borné de R^n
 $G \in L^2(\Omega \times \Omega)$

est un opérateur compact du type B.6. ([Groetsch(1984)]) Ici, G est appelé noyau.

La base de la théorie des problèmes mal posés a été formalisée par Tikonov dans les années soixante [Tikhonov & Arsenin(1977)], puis John, Lavrente'v et Ivanov ont fait des contributions importantes sur le sujet.

Une des manières de résoudre un problème mal posé de la forme B.6 est d'user de méthodes dites de régularisation. Par exemple, nous pouvons modifier le problème initial en ajoutant un terme qui fait que l'opérateur résultant possède un inverse borné. Ensuite, au sens d'une norme, il faut faire tendre le terme supplémentaire vers 0. Ce terme supplémentaire est fabriqué de telle sorte que lorsqu'il tend vers 0, la solution tend vers la solution du problème initial. Cette méthode est appelée régularisation de Tikonov [Tikhonov & Arsenin(1977)]. Cette méthode est un

exemple de méthode directe. De telles méthodes basées sur l'ajout d'un terme sont appelées méthode de quasi réversibilité. ([Lattes & Lions(1969)]).

une autre façon de résoudre les problèmes mal posés est d'utiliser une méthode itérative, par exemple celle de Landweber ([Landweber(1951)]) et Fridman [Fridman(1956)], ou bien un gradient conjugué par Hestenes et Stiefel [Hestenes & Stiefel(1952)].

il existe des difficultés inhérentes dans l'utilisation des méthodes de quasi réversibilité : le terme supplémentaire n'est pas toujours unique, et le problème résultant peut ne pas être standard, ce qui implique le développement d'outils numériques non standards pour traiter le problème perturbé. Cette observation a mené Maz'ya et Kozlov à étudier les méthodes itératives pour les problèmes mal posé basé sur des équations différentielles partielles, voir [Kozlov & Maz'ya(1989)] et [Kozlov *et al.*(1990)]. Dans ces méthodes, Ils essayent de préserver la structure originelle de l'équation. Puis Bastay [Bastay(1995)] a utilisé ces idées pour des problèmes de valeur aux frontières pour l'équation d'onde et de la chaleur. Il a aussi montré quelques résultats de convergence optimale pour ces méthodes.

B.4 Condition de stabilité et majoration des erreurs pour le problème de Cauchy

Étudions maintenant une estimation de la condition de stabilité pour le problème de complétion appliqué à l'équation de Laplace.

Soit $u(x, y)$, $u_{xx}(x, y)$, $u_{xy}(x, y)$, $u_{yy}(x, y)$ continues dans le rectangle $[0, a] \times [0, b]$, et $u(x, y)$ non identiquement nulle, qui satisfait l'équation de Laplace (4.1) et les conditions (4.2)

Effectuons l'étude de stabilité selon Hadamard. Rappelons que une solution $u(x)$ est stable au sens de Hadamard si

$$\begin{cases} u \text{ existe} \\ u \text{ est unique} \\ |x - x_0| < \varepsilon \rightarrow |u - u_0| < \varepsilon \text{ avec } u_0 = u(x_0) \end{cases}$$

Si la troisième proposition n'est pas vrai, alors c'est que le problème est mal posé, au sens de Hadamard.

Soit la fonction

$$p(y) = \int_0^a (u(x, y))^2 dx$$

dérivons la :

$$p'(y) = 2 \int_0^a u_y u dx,$$

$$p''(y) = 2 \int_0^a u_{yy} u dx + 2 \int_0^a (u_y)^2 dx.$$

Manipulons l'expression dans la dérivée seconde : $\int_0^a u_{yy} u dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^a u_{yy} u dx &= - \int_0^a u_{xx} u dx, \text{ car } u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ &= [u_x u]_0^a + \int_0^a (u_x)^2 dx \\ &= \int_0^a (u_x)^2 dx. \end{aligned}$$

Il reste à transformer le résultat du dernier calcul en dérivant $\int_0^a (u_x)^2 dx$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a (u_x)^2 dx &= 2 \int_0^a u_x u_{xy} dx \\ &= 2 [u_x u_y]_0^a - 2 \int_0^a u_{xx} u_y dx \\ &= 2 \int_0^a u_{yy} u_y dx \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^a (u_y)^2 dx. \end{aligned}$$

Intégrons :

$$\begin{aligned} \int_0^a (u_x(x, y))^2 dx - \int_0^a (u_x(x, 0))^2 dx &= \int_0^a (u_y(x, y))^2 dx - \int_0^a (u_y(x, 0))^2 dx, \\ \int_0^a (u_x(x, y))^2 dx &= \int_0^a (u_y(x, y))^2 dx + \int_0^a [(u_x(x, 0))^2 - (u_y(x, 0))^2] dx. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$p''(y) = 2 \int_0^a (u_x)^2 dx + 2 \int_0^a (u_y)^2 dx.$$

$$p''(y) = 4 \int_0^a (u_y)^2 dx + 2 \int_0^a [(u_x(x, 0))^2 - (u_y(x, 0))^2] dx.$$

$p''(y)$ s'écrit finalement sous la forme suivante

$$p''(y) = 4 \int_0^a (u_y)^2 dx + 4q \tag{B.7}$$

$$q = \frac{1}{2} \int_0^a [(u_x(x, 0))^2 - (u_y(x, 0))^2] dx.$$

Après ces transformations, il nous faut étudier le signe de la dérivée seconde afin d'avoir la connaissance du comportement de p . Pour ce faire, il nous faut introduire une fonction $k(y)$. Soit la fonction

$$k(y) = \ln(p(y) + |q|)$$

et calculons ses dérivées première et seconde :

$$k'(y) = \frac{p'(y)}{p(y) + |q|}$$

$$k''(y) = \frac{p''(y)(p(y) + |q|) - (p'(y))^2}{(p(y) + |q|)^2}$$

Lorsque nous remplaçons par les expressions déjà calculée avant de p' et p'' , nous obtenons :

$$k''(y) = \frac{1}{(p(y) + |q|)^2} \left[\left(4 \int_0^a (u_y)^2 dx + 4q \right) \left(\int_0^a u^2 dx + |q| \right) - \left(2 \int_0^a u_y u dx \right)^2 \right]$$

$$k''(y) = \frac{1}{(p(y) + |q|)^2} [Y + Z]$$

$$Y = 4 \int_0^a (u_y)^2 dx + 4q \int_0^a u^2 dx + 4|q| \int_0^a (u_y)^2 dx$$

$$Z = 4q \int_0^a u^2 dx + 4q|q| - 4 \left(\int_0^a u_y u dx \right)^2$$

Nous cherchons maintenant à minorer $k''(y)$. Par hypothèse, $u(x, y)$ n'est pas identiquement nul, et par conséquent $\int_0^a u dx$ non plus. Au final, $p(y)$ et q ne sont pas identiquement nuls.

L'inégalité de Cauchy-Swartz nous dit que : $4 \left(\int_0^a u_y u dx \right)^2 \leq 4 \int_0^a (u_y)^2 dx \cdot \int_0^a u^2 dx$

Lorsque nous nous servons de la relation, nous obtenons alors

$$k''(y) \geq \frac{1}{(p(y) + |q|)^2} \left[4|q| \int_0^a (u_y)^2 dx + 4q \int_0^a u^2 dx + 4q|q| \right]$$

$$\text{or } \int_0^a (u_y)^2 dx \geq 0$$

donc

$$k''(y) \geq \frac{1}{(p(y) + |q|)^2} \left[4q \int_0^a u^2 dx + 4q|q| \right]$$

$$= \frac{4}{(p(y) + |q|)^2} (qp(y) + q|q|)$$

$$= \frac{4|q|}{p(y) + |q|}$$

car $p(y) > 0$ et $|q| > 0$.

En utilisant l'inégalité évidente $\frac{|q|}{p(y) + |q|} \leq 1$, nous pouvons minorer la dernière expression

$$\frac{4q}{p(y) + |q|} \geq -\frac{4|q|}{|p(y) + |q||} \geq -4$$

en conclusion

$$k''(y) \geq \frac{4(qp(y) + q|q|)}{(p(y) + |q|)^2} \geq -4. \quad (\text{B.8})$$

Nous avons donc réussi à minorer la fonction introduite, et il nous reste à relier cette inégalité à la fonction originellement étudiée, p . Il faut, pour y arriver, introduire une autre fonction,

$$w(y) = k(y) + 2y(y - b)$$

Lorsque nous dérivons deux fois cette nouvelle fonction, nous avons

$$w''(y) = k''(y) + 4,$$

$$\text{alors } w''(y) \geq 0, \text{ pour } y \in [0, b].$$

La fonction w est donc convexe, et possède donc cette propriété suivante de toute fonction convexe

$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall y \in [0, b], \alpha = \frac{y}{b}, w(y) \leq \alpha w(b) + (1 - \alpha) w(0)$$

Lorsque nous l'appliquons à notre problème, nous obtenons

$$w(y) \leq \frac{b-y}{b} w(0) + \frac{y}{b} w(b).$$

Replaçons finalement dans l'expression initiale

$$\ln(p(y) + |q|) \leq \frac{b-y}{b} \ln(p(0) + |q|) + \frac{y}{b} \ln(p(b) + |q|) - 2y(y - b).$$

et revenons à p :

$$p(y) \leq (p(0) + |q|)^{\frac{b-y}{b}} \cdot (p(b) + |q|)^{\frac{y}{b}} \cdot e^{2y(b-y)} - |q|. \quad (\text{B.9})$$

Étudions maintenant la condition de stabilité pour le problème. Il nous faut pour cela considérer $u_1(x, y)$ et $u_2(x, y)$ deux solutions.

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), u_{1y}(x, 0) = \psi_1(x), 0 \leq x \leq a,$$

$$u_2(x, 0) = \varphi_2(x), u_{2y}(x, 0) = \psi_2(x), 0 \leq x \leq a,$$

Utilisons également l'hypothèse que les solutions appartiennent à l'ensemble L_2 :

$$\int_0^a (u_1(x, b))^2 dx \leq C^2$$

$$\int_0^a (u_2(x, b))^2 dx \leq C^2$$

Si $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$, alors $\|u(x, y)\|_{L_2}^2 \leq 4C^2$.

Insérons ce résultat dans l'inégalité précédente, et nous obtenons :

$$\|u_1(x, y) - u_2(x, y)\|_{L_2}^2 \leq (\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|^2 + |q|) \frac{b-y}{b} \cdot (4C^2 + |q|) \frac{y}{b} \cdot e^{2y(b-y)} - |q|$$

$$q = \frac{1}{2} \int_0^a [(\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x))^2 - (\psi_1(x) - \psi_2(x))^2] dx$$

$$\text{et } |q| \leq \frac{1}{2} \|\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi_1(x) - \psi_2(x)\|^2$$