



THÈSE EN COTUTELLE
présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR

de
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

et de
L'UNIVERSITÉ D'ANTANANARIVO

École Doctorale de Mathématiques et Informatique de Bordeaux
École Doctorale de Mathématiques et Applications d'Antananarivo

Spécialité : Mathématiques Pures

par

Fanilo Rajaofetra RANDRIAMAHALEO

**OPÉRATEURS DE TOEPLITZ SUR L'ESPACE DE BERGMAN HARMONIQUE
ET
OPÉRATEURS DE TOEPLITZ TRONQUÉS DE RANG FINI**

Soutenu le 20 juillet 2015

Après avis de :

M. PARTINGTON Jonathan R. - University of Leeds - United Kingdom
M. TIMOTIN Dan G. - Institute of Mathematics of the Romanian Academy

Membre de jury :

M. MBEKHTA Mostafa	Université Lille1	Président
M. TIMOTIN Dan G.	Institute of Mathematics of the Romanian Academy	Rapporteur
M. PAOLI Jean-Martin	Université de Corse	Examineur
Mme PETKOVA Violeta	Université de Lorraine	Examineur
Mme STROUSE Elizabeth	Université de Bordeaux	Directrice de thèse
M. RAJOELINA Michel	Université d'Antananarivo	Co-directeur de thèse

REMERCIEMENTS

Avant toute chose, j'aimerais exprimer ma profonde gratitude envers Dieu pour son Amour et son soutien tout au long de mes études. Sans Lui, l'élaboration de cette thèse aura été impossible. J'adresse également mes profonds remerciements à mes directeurs de thèse Elizabeth STROUSE et Michel RAJOELINA de m'avoir permis à réaliser cette thèse. Je les remercie pour leurs encadrements, gentillesse, patience et surtout pour leurs nombreuses lectures et relectures de mes travaux; je sais qu'ils furent attentifs et bienveillants malgré leurs activités débordantes au sein de l'université.

Je remercie Jonathan PARTINGTON et Dan TIMOTIN qui ont eu la patience de lire et relire ma thèse en vue d'en faire le rapport. Je suis ravi qu'ils font partie du jury.

Ma gratitude va également à Mostafa MBEKHTA qui s'est rendu disponible pour assister à ma soutenance et pour présider le jury.

Je tiens également à remercier chaleureusement Violeta PETKOVA et Jean-Martin PAOLI d'avoir eu la gentillesse de faire un déplacement afin de participer au jury.

J'adresse également mes remerciements à Mohamed ZARRABI et Karim KELLAY pour leur hospitalité et précieux conseils pendant mes séjours à Bordeaux.

Merci à mes amis Fatima KORRICHI, Lova ZAKARIASY et Issam LOUHICHI pour notre fructueuse collaboration.

Je profite de cette page pour remercier tendrement ma femme et toute ma famille qui m'ont accompagnées moralement tout au long de ces quatre années. Que cette thèse puisse les honorer.

J'aimerais exprimer mes sincères reconnaissances à tous les membres de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, tous les membres de l'administration de l'Université de Bordeaux, le Département de Mathématiques et Informatique d'Antananarivo ainsi que tous les membres de l'administration de l'Université d'Antananarivo pour leur hospitalité durant la préparation de cette thèse.

Pour finir, j'adresse mes vifs remerciements à l'Agence Universitaire de la Francophonie via le projet Horizons Francophones Sciences Fondamentales et informatique 2012-2014 et le Gouvernement français via le projet Bourse du Gouvernement français 2015 d'avoir financé ma thèse.

Je dédie spécialement cette thèse :

- à mon fils bienaimé "RANDRIAMAHALEO Faneva Andrianina" pour lui rendre hommage et pour lui témoigner toute mon affection,



Cu vivras pour toujours dans le coeur de Dada sy Neny mon fil

- à ma femme "RAJEMIARISON Eva Robiarinosy" en guise de reconnaissance.

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	i
Introduction	1
1 Espace de Hardy et espaces modèles	4
1.1 Généralités sur l'espace de Hardy	4
1.2 Théorème de factorisation	7
1.3 Sous-espace invariant et espace modèle	9
1.4 Espace modèle de dimension finie	15
2 Espace de Bergman harmonique	17
2.1 Espace de Bergman	17
2.2 Généralités sur l'espace de Bergman harmonique	19
2.3 Propriétés de densité	20
2.4 Noyau reproduisant	23
3 Opérateurs de Toeplitz dans l'espace de Hardy	25
3.1 Matrices et opérateurs de Laurent	25
3.2 Généralités sur les opérateurs de Toeplitz	28
3.3 Produit d'opérateurs de Toeplitz dans l'espace de Hardy	34
4 Opérateurs de Toeplitz dans l'espace de Bergman harmonique	39
4.1 Généralité sur les opérateurs de Toeplitz harmoniques	39
4.2 Produit d'opérateurs de Toeplitz	41
5 Opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène	44
5.1 Transformation et coefficients de Mellin	44

5.2	Produit et commutativité des opérateurs de Toeplitz à symbole radial	46
5.3	Produit d'opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène	48
5.4	Commutativité des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes	57
6	Opérateurs de Toeplitz tronqués	70
6.1	Généralités sur les opérateurs de Toeplitz tronqués	70
6.2	Algèbre d'opérateurs de Toeplitz tronqués	76
6.3	Etude de quelques cas en dimension finie	80
	Bibliographie	91

INTRODUCTION

On note par \mathbb{D} le disque unité et \mathbb{T} le cercle unité du plan complexe. Soient dA la mesure de Lebesgue normalisée sur \mathbb{D} et dm la mesure de Lebesgue normalisée sur \mathbb{T} . L'espace de Hardy usuel H^2 est l'ensemble des fonctions analytiques dans \mathbb{D} dont la série des coefficients de Taylor à l'origine est de carré sommable. L'espace H^2 peut être identifié avec le sous espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T}, dm)$ formé par les fonctions dont les coefficients de Fourier d'indice strictement négatif sont nuls. Soit P la projection orthogonale de L^2 sur H^2 . La projection P peut être exprimée explicitement par la formule :

$$P[f](z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}z} dm(\zeta) \text{ pour } z \in \mathbb{D}. \quad (0.0.1)$$

En utilisant la formule (0.0.1), on peut prolonger la projection P en un opérateur continu de L^1 sur $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, l'ensemble des fonctions analytiques dans \mathbb{D} muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et L^1 est muni de la topologie faible.

Rappelons que d'après le théorème de Beurling, tout sous espace de H^2 qui est invariant par l'adjoint de l'opérateur de déplacement à droite (ou opérateur shift) est de la forme :

$$K_u^2 := H^2 \ominus uH^2 \text{ où } u \in H^2 \text{ est une fonction intérieure non constante.}$$

Le sous espace K_u^2 ainsi défini est appelé espace modèle correspondant à la fonction intérieure u et on note par P_u la projection orthogonale de L^2 sur K_u^2 . Les projections P et P_u sont liées par la relation $P_u = P - M_u P M_{\bar{u}}$ où M_u et $M_{\bar{u}}$ désignent respectivement la multiplication par u et \bar{u} . Chaque espace modèle est équipé d'un opérateur de conjugaison C défini par $C[f](\zeta) = u(\zeta)\bar{\zeta}\overline{f(\zeta)}$, pour tout $f \in K_u^2$ et $\zeta \in \mathbb{T}$.

Dans ce travail, nous nous intéressons aussi à d'autres espaces de Hilbert : l'espace de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ et l'espace de Bergman harmonique $L_h^2(\mathbb{D})$. Les espaces de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ et $L_h^2(\mathbb{D})$ sont des sous espaces fermés de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ formés respectivement par des fonctions analytiques et harmoniques dans le disque unité et on note par P et Q les projections orthogonales respectives de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ sur $L_a^2(\mathbb{D})$ et sur $L_h^2(\mathbb{D})$.

Pour toute fonction $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}, dm)$, l'opérateur de Toeplitz classique de symbole φ sur H^2 , noté T_φ , est la compression sur H^2 de l'opérateur de multiplication par φ , noté M_φ c'est-à-dire

$$T_\varphi = P M_\varphi \text{ où } P \text{ est la projection orthogonale de } L^2(\mathbb{T}, dm) \text{ sur } H^2.$$

Il est bien connu que T_φ est borné si et seulement si le symbole φ est une fonction bornée et en générale, l'étude des propriétés de T_φ est étroitement liée à celle de son symbole φ . Beaucoup de travail a été fait sur les opérateurs de Toeplitz classiques et des résultats significatifs à propos de ces derniers ont été obtenus, voir entre autre [14, 25, 51].

Récemment, Sarason a étudié ([57]) la compression de l'opérateur de Toeplitz sur l'espace modèle. Cet opérateur est appelé opérateur de Toeplitz tronqué. Etant données une fonction intérieure non constante u et une fonction $\varphi \in L^2$, l'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole φ , noté A_φ est défini sur le sous-espace dense K_u^∞ de K_u^2 par $A_\varphi = P_u M_\varphi$.

Les opérateurs de Toeplitz tronqués représentent une généralisation des matrices de Toeplitz classiques.

Bien que certains cas particuliers de ces opérateurs sont apparus bien avant dans la littérature, la théorie générale a été formellement introduite par Sarason ([57]) en 2007. A partir de ce moment, la théorie des opérateurs de Toeplitz tronquées devient un domaine de recherche intéressant ; voir par exemple les articles [10, 11, 17, 20, 33] et [62].

L'étude des opérateurs de Toeplitz dans les espaces de Bergman a commencé dans les années 80 et des résultats sur la caractérisation des opérateurs bornés, des opérateurs compacts, de la classe de Schatten ainsi que le produits des opérateurs ont été obtenus ([23, 37, 6, 16, 61, 9]).

Les problèmes que nous allons résoudre dans cette thèse concernent la stabilité de la multiplication de deux opérateurs de Toeplitz et la commutativité du produit dans l'espace de Bergman harmonique ainsi que les opérateurs de Toeplitz tronqués de rang fini.

Pour les opérateurs de Toeplitz définis dans l'espace de Hardy H^2 , ces problèmes sont complètement résolus par Brown et Halmos dans [14]. Ils ont montré que le produit de deux opérateurs de Toeplitz reste un opérateur de Toeplitz si et seulement si l'un des symboles est analytique ou anti-analytique. Concernant la commutativité du produit, ils ont montré que deux opérateurs de Toeplitz commutent si et seulement si ou bien les symboles sont tous les deux analytiques ou bien tous les deux anti-analytiques ou bien l'un des symboles est fonction affine de l'autre.

Dans le cadre des opérateurs de Toeplitz définis dans les espaces de Bergman, la situation est compliquée et intéressante. Les réponses aux questions sus-mentionnées ne sont que des résultats partiels. Ahern et Čučković [4] sont parmi les premiers à avoir étudié la stabilité du produit d'opérateurs de Toeplitz dans l'espace de Bergman analytique. Ils ont montré qu'il est possible d'avoir un résultat analogue à celui de Brown et Halmos [14] si les symboles vérifient des conditions particulières. Dans [1] Ahern a donné une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de

deux opérateurs de Toeplitz de symboles harmoniques bornés reste un opérateur de Toeplitz. En 2006, Louhichi, Strouse et Zakariasy [48] ont étudié les problèmes avec des opérateurs de Toeplitz dont les symboles appartiennent à une classe particulière de fonctions. Ce sont les fonctions *quasihomogènes*. Avec cette classe de symbole, ils ont trouvé des conditions nécessaires et suffisantes sur la stabilité du produit d'opérateurs de Toeplitz définis dans l'espace de Bergman analytique.

Concernant les opérateurs de Toeplitz tronqués, les problèmes s'avèrent difficiles à résoudre. En 2010, Sedlock [58] a étudié les problèmes en montrant que le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si les deux opérateurs appartiennent à une classe particulière appelée *opérateur de Toeplitz tronqué de type α* où $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dans la première partie de la thèse, nous étudions le problème de la commutativité et du produit d'opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogènes définis dans l'espace de Bergman harmonique. Un résultat différent de ce qu'on a trouvé dans l'espace de Bergman analytique a été obtenu. En fait, il a été montré dans [48] que les opérateurs de Toeplitz à symbole analytique (respectivement anti-analytique) ne commute qu'avec les opérateurs de Toeplitz à symbole analytique (respectivement anti-analytique) tandis que dans l'espace de Bergman harmonique, la situation est différente. Dans la deuxième partie de la thèse, nous décrivons en terme de matrice les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α dans le cas où l'espace modèle est de dimension finie.

La thèse est organisée de la manière suivante.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de l'espace de Hardy du cercle unité, $H^2(\mathbb{T})$ et les sous espaces invariants par l'adjoint de l'opérateur de multiplication par z (où z désigne l'application coordonnée définie par $\omega \in \mathbb{D} \mapsto \omega \in \mathbb{C}$), connus sous le nom d'espaces modèles. Nous y rappelons les résultats fondamentaux, en particulier le lien avec les fonctions analytiques dans disque unité \mathbb{D} .

Dans le Chapitre 2, nous rappelons la définition de l'espace de Bergman harmonique ainsi que ses propriétés élémentaires qui nous sont utiles dans l'étude des opérateurs de Toeplitz.

Dans les chapitres 3 et 4, nous parlons des opérateurs de Toeplitz définis respectivement dans l'espace de Hardy et l'espace de Bergman harmonique. Ces deux chapitres nous permettent de présenter brièvement quelques points communs et différences entre les opérateurs de Toeplitz définis sur les deux espaces.

Les deux derniers chapitres de la thèse contiennent les résultats de nos recherches. Nous répondons d'une part, aux problèmes concernant le produit et la commutativité pour les opérateurs de Toeplitz à symboles quasihomogènes sur l'espace de Bergman harmonique et d'autre part, en s'inspirant du résultat [20], nous décrivons la matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type α dans le cas de la dimension finie.

ESPACE DE HARDY ET ESPACES MODÈLES

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats classiques sur les espaces de Hardy. Nous rappelons aussi des propriétés des éléments de ces espaces et utilisons ces propriétés pour caractériser les sous-espaces invariants par l'opérateur de multiplication par l'application coordonnée $z : \zeta \in \mathbb{T} \mapsto \zeta \in \mathbb{C}$ c'est-à-dire l'opérateur shift.

Les résultats dans ce chapitre et ses preuves sont tirés de [27], [41], [42] et [55] et d'autres références.

1.1 Généralités sur l'espace de Hardy

Dans ce paragraphe, on définit l'espace de Hardy H^2 de deux manières différentes et on montrera que ces deux définitions sont équivalentes à un isomorphisme près.

On note par \mathbb{D} le disque unité $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}$ du plan complexe, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité $\{\zeta \in \mathbb{C} \text{ tel que } |\zeta| = 1\}$, par $dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité et par $L^2(\mathbb{T}) := L^2(\mathbb{T}, dm)$ l'espace de Lebesgue usuel.

Définition 1.1.1. Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique sur \mathbb{D} . On définit les quantités :

$$M_2(r, f) = \left[\int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.1}$$

et

$$M_\infty(r, f) = \sup \left\{ |f(r\zeta)|, \zeta \in \mathbb{T} \right\}, 0 \leq r < 1. \tag{1.1.2}$$

Il est clair d'après le principe de maximum que la fonction définie dans la relation (1.1.2) est une fonction croissante de r . Dans [39] G. H. Hardy a prouvé le même résultat pour les $p \in (0, \infty)$ ainsi la fonction définie dans la relation (1.1.1) est aussi une fonction croissante de r .

Cela nous mène à définir l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ du disque.

Définition 1.1.2. On appelle espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ du disque, l'espace des fonctions analytiques dans \mathbb{D} telles que :

$$\|f\|_{H^2} := \lim_{r \rightarrow 1^-} M_2(r, f) = \sup_{0 \leq r < 1} M_2(r, f) < \infty$$

De même, on définit l'espace H^∞ comme étant l'espace des fonctions analytiques bornées sur \mathbb{D} telles que

$$\|f\|_\infty := \sup_{0 \leq r < 1} M_\infty(r, f) < \infty$$

Il est bien connu (voir [27, 43, 55]) d'après les travaux de Fatou et de Riesz que pour $f \in H^2(\mathbb{D})$, la limite radiale f^* définie par :

$$f^*(\zeta) := \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r\zeta) \quad (1.1.3)$$

existe presque partout sur \mathbb{T} et $f^* \in L^2(\mathbb{T})$. De plus, on a :

$$\|f\|_{H^2} = \left[\int_{\mathbb{T}} |f^*(\zeta)|^2 dm(\zeta) \right]^{\frac{1}{2}}$$

L'application $f \in H^2(\mathbb{D}) \mapsto f^* \in L^2$ est une isométrie entre $H^2(\mathbb{D})$ et le sous-espace fermé de L^2 , noté $H^2(\mathbb{T})$, défini par $H^2(\mathbb{T}) := \{f \in L^2 \text{ telle que } \widehat{f}(n) = 0 \text{ pour } n < 0\}$. Ainsi, H^2 est un sous-espace fermé de L^2 et notons P la projection orthogonale de L^2 sur H^2 .

Puisque H^2 est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert L^2 , il est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire induit par celui de L^2 défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} dm(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

pour $f, g \in H^2$ avec $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. L'espace de Hardy H^2 est un espace de Hilbert dont la famille $\mathcal{B} = \{\zeta^n; n \in \mathbb{N}\}$ en est une base hilbertienne.

Remarquons que si $f \in H^2$ est telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

(1). pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \int_{\mathbb{T}} f^*(\zeta) \bar{\zeta}^n dm(\zeta)$,

(2). $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ d'après l'identité de Parseval,

(3). la limite radiale f^* de f admet comme série de Fourier $f^* \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$.

Définition 1.1.3. Soit X un ensemble arbitraire non vide et $M(X)$ un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes sur X . On dit que M est un espace de **Hilbert à noyau reproduisant** si pour tout $x \in X$, la fonction d'évaluation $L_x : f \in M(X) \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, la continuité de la forme linéaire L_x ($x \in X$) entraîne qu'il existe un unique élément $k_x \in M(X)$ tel que $L_x(f) = \langle f, k_x \rangle$. La fonction k_x est appelée le noyau reproduisant au point x .

Pour $\lambda \in \mathbb{D}$ et toute $f \in H^2$, on a l'inégalité :

$$|f(\lambda)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |\lambda|^n \leq \left[\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|\lambda|^2}} \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.} \quad (1.1.4)$$

L'inégalité (1.1.4) montre que pour $\lambda \in \mathbb{D}$ fixé, la fonction d'évaluation $f \mapsto f(\lambda)$ est une forme linéaire continue sur H^2 et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe dans H^2 une unique fonction, notée k_λ telle que :

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle. \quad (1.1.5)$$

La fonction k_λ ainsi définie est appelée le *noyau de Cauchy* ou le *noyau de Cauchy-Szegö*.

Le noyau de Cauchy est un noyau reproduisant pour l'espace de Hilbert H^2 et on peut vérifier par un calcul élémentaire que k_λ est donnée explicitement par la formule :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\bar{\lambda}z} \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}. \quad (1.1.6)$$

Remarquons qu'en utilisant la formule (1.1.6), la relation (1.1.5) n'est autre que la formule intégrale de Cauchy de la fonction $f \in H^2$, c'est-à-dire :

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\zeta)}{1-z\bar{\zeta}} dm(\zeta) \text{ pour toute fonction } f \in H^2 \text{ et } z \in \mathbb{D}.$$

(Rappelons que pour chaque fonction f dans H^2 , la limite radiale f^* définie dans la relation (1.1.3) de f existe presque partout et est un élément de L^2 , ce qui nous assure que l'intégrale ci-dessus est bien définie).

De même, la projection orthogonale P de L^2 sur H^2 peut être exprimée en terme de noyau de Cauchy, autrement dit, on a :

$$P[f](z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1-z\bar{\zeta}} dm(\zeta), \text{ pour } f \in L^2.$$

Remarquons aussi que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a :

$$f^{(n)}(\lambda) = \langle f, k_\lambda^{(n)} \rangle$$

où

$$k_\lambda^{(n)}(z) = \frac{n! z^n}{(1-\bar{\lambda}z)^{n+1}} \text{ est la dérivée } n\text{-ème de } k_\lambda \text{ par rapport à } \bar{\lambda}.$$

Proposition 1.1.4. *La famille $\{ k_\lambda ; \lambda \in \mathbb{D} \}$ est linéairement indépendant.*

Preuve. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n points distincts de \mathbb{D} tels que $\sum_{j=1}^n a_j k_{\lambda_j} = 0$. Montrons que $a_j = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Pour tout $f \in H^2$ on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{j=1}^n a_j k_{\lambda_j}, f \right\rangle \\ &= \langle a_1 k_{\lambda_1}, f \rangle + \langle a_2 k_{\lambda_2}, f \rangle + \dots + \langle a_n k_{\lambda_n}, f \rangle \\ &= a_1 \langle k_{\lambda_1}, f \rangle + a_2 \langle k_{\lambda_2}, f \rangle + \dots + a_n \langle k_{\lambda_n}, f \rangle \\ &= \overline{a_1} f(\lambda_1) + \overline{a_2} f(\lambda_2) + \dots + \overline{a_n} f(\lambda_n). \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Maintenant il suffit de trouver un polynôme f tel que $f(\lambda_j) = a_j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Le théorème d'interpolation de Lagrange assure l'existence d'un tel polynôme et la relation (1.1.7) devient

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2 = 0.$$

Donc $a_j = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. □

1.2 Théorème de factorisation

Dans cette section, nous rappelons brièvement les résultats essentiels de la factorisation des éléments de H^2 .

Définition 1.2.1. Soit $(\alpha_n)_n$ une suite d'éléments de \mathbb{D} telle que $\alpha_n \neq 0$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty. \quad (1.2.1)$$

Alors pour tout $k \geq 0$, la produit infini

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z} \quad (1.2.2)$$

converge uniformément sur les compacts de \mathbb{D} et définit une fonction holomorphe sur \mathbb{D} . De plus elle appartient à l'espace H^∞ et ses seuls zéros sont les points α_n et éventuellement 0 si $k > 0$.

La fonction définie par la relation (1.2.2) est une fonction intérieure (c.f. Définition 1.2.3) appelée *le produit de Blaschke* construit sur la suite $(\alpha_n)_n$.

La première forme de la factorisation des éléments de H^2 est décrite par le théorème suivant :

Théorème 1.2.2 (F. Riesz, [27]). Soient $f \in H^2$ non identiquement nulle et $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ la suite des zéros de f dans le disque comptés avec leur ordre de multiplicité. Alors la suite $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ vérifie la condition de Blaschke :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty$$

et il existe une fonction $g \in H^2$ qui ne s'annule pas sur \mathbb{D} telle que $f = Bg$ où B est le produit de Blaschke construit avec les zéros de f .

Le Théorème 1.2.2 nous montre déjà que toute fonction f dans H^2 peut se factoriser sous la forme $f = Bg$ mais il existe une factorisation plus subtile que nous allons décrire brièvement ici.

Définition 1.2.3. Une *fonction intérieure* est une fonction $u \in H^2$ telle que $|u^*(\zeta)| = 1$ presque partout sur \mathbb{T} (avec la notation $u^*(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} u(r\zeta)$).

Soient u et v deux fonctions intérieures non constantes. On dit que :

- (1). u divise v et on écrit $u|v$ si et seulement si $\frac{v}{u} \in H^\infty$,
- (2). u et v sont *premiers entre eux* si les seules fonctions intérieures qui divisent à la fois u et v sont les fonctions constantes de module 1.

Définition 1.2.4. Soit μ une mesure positive, finie sur \mathbb{T} et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. On définit la fonction S_μ sur \mathbb{D} par :

$$S_\mu(z) := \exp \left\{ - \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right\}. \quad (1.2.3)$$

La fonction S_μ définie dans la relation (1.2.3) est une fonction intérieure appelée *fonction intérieure singulière*.

On peut montrer ([34]) que le produit de Blaschke converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} ne contenant pas les points $1/\bar{\alpha}_n$ et les points d'accumulation de l'ensemble $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Les points $1/\bar{\alpha}_n$ sont les pôles du produit de Blaschke et

$$B\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{B(z)} \text{ pour tout } z \notin B^{-1}(\{0\}).$$

Dans la définition de la fonction intérieure singulière S_μ , la positivité de la mesure singulière μ est importante car sinon, la fonction S_μ peut ne pas appartenir à H^2 .

La fonction intérieure singulière S_μ est analytique dans le complémentaire du support de la mesure singulière μ . Et comme pour le produit de Blaschke, la fonction S_μ vérifie aussi :

$$S_\mu\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{S_\mu(z)} \text{ pour } |z| > 1.$$

Le théorème suivant décrit complètement les fonctions intérieures dans H^2 .

Théorème 1.2.5 ([55]). Soient $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| = 1$, B un produit de Blaschke et μ une mesure positive et finie sur \mathbb{T} , singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors la fonction u définie par :

$$u(z) = cB(z) \exp \left\{ - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right\}, \quad (z \in \mathbb{D})$$

est une fonction intérieure et toute fonction intérieure peut s'obtenir de cette façon.

Définition 1.2.6. Soit $u = cBS_\mu$ une fonction intérieure où B est un produit de Blaschke dont la suite des zéros est $\Lambda = (\alpha_n)_n$ et S_μ une fonction intérieure singulière. On définit le spectre de u , noté $\sigma(u)$, par $\sigma(u) = \overline{\Lambda} \cup \text{supp}(\mu)$. En fait, il est montré dans [34] que

$$\sigma(u) = \left\{ \lambda \in \overline{\mathbb{D}} : \liminf_{z \rightarrow \lambda} |u(z)| = 0 \right\}.$$

Définition 1.2.7. Soit φ une fonction mesurable positive telle que $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$. La fonction analytique définie par :

$$F(z) = c \exp \left\{ \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \varphi(\zeta) dm(\zeta) \right\}, \quad (z \in \mathbb{D})$$

est appelée *fonction extérieure*. Dans cette définition, c désigne une constante de module 1.

Remarquons que si F est une fonction extérieure associée à une fonction φ comme dans la Définition 1.2.7, on a :

- (1). $\log |F|$ est l'intégrale de Poisson de $\log \varphi$.
- (2). $\lim_{r \rightarrow 1^-} |F(r\zeta)| = \varphi(\zeta)$ m -presque partout sur \mathbb{T} .
- (3). $F \in H^2$ si et seulement si $\varphi \in L^2$. Dans ce cas, $\|F\|_{H^2} = \|\varphi\|_{L^2}$.

Notons aussi que si $f \in H^2$ est non identiquement nulle, la limite radiale f^* de f vérifie $f^* \in L^2$ et $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Ainsi, en prenant $\varphi = |f^*|$ dans la Définition 1.2.7, la fonction définie par :

$$F(z) = \exp \left\{ \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log |f^*(\zeta)| dm(\zeta) \right\}, \quad (z \in \mathbb{D})$$

est une fonction extérieure appelée *le facteur extérieur* de f .

On peut énoncer le théorème de factorisation suivant :

Théorème 1.2.8. *Toute fonction f non identiquement nulle dans H^2 admet, à une constante près, une unique factorisation de la forme*

$$f = BSF \tag{1.2.4}$$

où B est un produit de Blaschke, S est une fonction intérieure singulière et F est une fonction extérieure dans H^2 . Et réciproquement, tout produit de la forme (1.2.4) est un élément de H^2 .

Le produit BS du théorème est appelé le facteur intérieur de f et la fonction F est le facteur extérieur.

1.3 Sous-espace invariant et espace modèle

Dans cette section, nous allons étudier les sous-espaces fermés de H^2 qui sont invariants par l'opérateur de déplacement S (*Shift operator* en anglais) et son adjoint S^* (*Backward shift* en anglais).

L'opérateur de déplacement $S : H^2 \rightarrow H^2$ est défini explicitement par :

$$S[f](z) = zf(z), \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Remarquons que l'opérateur U défini par $U : (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$ est une isométrie et est unitaire ([50]), ce qui nous permet de regarder S en termes de coefficients de Taylor comme un opérateur sur $\ell^2(\mathbb{N})$. Autrement dit, on a :

$$S(a_0, a_1, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots) \text{ avec } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

L'adjoint $S^* : H^2 \rightarrow H^2$ de S est donné par :

$$S^*[f](z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

ou, en termes de série de Taylor,

$$S^*(a_0, a_1, \dots) = (a_1, a_2, \dots)$$

On dit qu'un sous-espace M de H^2 est *invariant par S* si $SM \subseteq M$.

Si u est une fonction intérieure dans H^2 , l'application $f \mapsto uf$ est une isométrie sur H^2 . Ainsi, uH^2 est un sous-espace fermé de H^2 . De plus, si u est une fonction intérieure non constante, uH^2 est un sous-espace fermé non trivial qui est invariant par l'opérateur shift S . En fait, un lien important entre la théorie des fonctions et la théorie des opérateurs a été introduit par A. Beurling en 1949 dans [13] quand il a caractérisé les sous-espaces fermés invariants de S . Nous rappelons ici le théorème de Beurling.

Théorème 1.3.1 (A. Beurling). *Un sous-espace fermé non trivial M de H^2 est invariant par le shift S si et seulement si M est de la forme :*

$$uH^2 := \{uh : h \in H^2\}$$

où u est une fonction intérieure non constante. De plus, si u et v sont des fonctions intérieures telles que $uH^2 = vH^2$, il existe une constante c telle que $u = cv$.

Preuve. Il est clair que si u est une fonction intérieure, uH^2 est un sous-espace fermé de H^2 car l'application $f \mapsto uf$ est une isométrie. De plus, pour $f \in H^2$ on a $z.(uf) = u.(zf)$ donc uH^2 est invariant par S .

Réciproquement, soit M un sous-espace fermé non nul de H^2 et invariant par S . Montrons qu'il existe une fonction intérieure non-constante u telle que $M = uH^2$.

- Montrons d'abord que $SM \subsetneq M$.

Supposons que $SM = M$. Soit $f \in M$ donc il existe $g \in M$ telle que $f = zg$. Par le même procédé avec g , il existe $g_1 \in M$ telle que $g = zg_1$ c'est-à-dire $f = z^2g_1$. En continuant l'opération pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $g_k \in M$ telle que $f = z^k g_k$. Donc f admet un zéro d'ordre k , pour tout $k \in \mathbb{N}$, en $z = 0$ ce qui implique que les coefficients de Fourier de f sont nuls donc $f \equiv 0$ sur \mathbb{D} . Autrement dit, $M = \{0\}$.

- Soit maintenant $v \in M \ominus SM$ telle que $\|v\|_{H^2} = 1$ et $v \perp zM$ (v existe car SM est fermé). Montrons que v est intérieure et que $vH^2 \subseteq M$. Nous avons $v \perp z^n M$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ car $SM \subset M$ c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{T}} |v^*(\zeta)|^2 \bar{\zeta}^n dm(\zeta) = 0 \text{ pour } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.3.1)$$

Mais on a toujours le même résultat en passant au conjugué c'est-à-dire on remplace $-n$ par n dans la relation (1.3.1). Il s'ensuit que les coefficients de Fourier d'indice non nul de la fonction $|v^*|^2 \in L^1(\mathbb{T})$ sont nuls et le coefficient de Fourier d'indice nul vaut 1. On en déduit que $|v^*|^2 = 1$ presque partout sur \mathbb{T} . D'autre part, v qui est égale l'intégrale de Poisson de v^* , est un élément de H^2 et $|v| \leq 1$. Ainsi v est une fonction intérieure. Comme $v \in M$ et $SM \subset M$, on a $z^n v \in M$ pour tout $n \geq 0$. Par linéarité $pv \in M$ pour tout polynôme p . Or les polynômes sont denses dans H^2 , donc pour $f \in H^2$ et $\varepsilon > 0$ donnés, il existe un polynôme p tel que $\|f - p\|_{H^2} \leq \varepsilon$. Donc,

$$\|vf - vp\|_{H^2} \leq \left\{ \sup_{\mathbb{T}} |v|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|f - p\|_{H^2} \leq \varepsilon \text{ (car } \|v\|_{H^2} \leq 1)$$

Donc $vf \in M$ car M est fermé. D'où $vH^2 \subset M$.

- Montrons maintenant que $vH^2 = M$.

Puisque vH^2 est fermé, il suffit de montrer que si $g \in M$ et $g \perp vH^2$, $g = 0$.

Si $g \perp vH^2$, on a $g \perp vz^n$ pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$ c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{T}} g^*(\zeta) \overline{v^*(\zeta)} \bar{\zeta}^n dm(\zeta) = 0 \text{ pour tout } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.2)$$

Si $g \in M$, on a $z^n g \in zM$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ donc $z^n g \perp v$ ou encore :

$$\int_{\mathbb{T}} g^*(\zeta) \overline{v^*(\zeta)} \bar{\zeta}^n dm(\zeta) = 0 \text{ pour tout } n = -1, -2, -3, \dots \quad (1.3.3)$$

Les relations (1.3.2) et (1.3.3) montrent que tous les coefficients de Fourier de la fonction $g^* \overline{v^*}$ sont nuls et donc cette fonction est nulle presque partout sur \mathbb{T} . Et comme $|v^*| = 1$ presque partout, $g^* = 0$ presque partout sur \mathbb{T} c'est-à-dire $g = 0$.

□

Nous allons maintenant considérer les sous-espaces fermés de H^2 qui sont invariants par le backward shift S^* (l'adjoint de S). Ces sous-espaces sont connus sous le nom d'*espaces modèles*. Les résultats énoncés ici ainsi que leurs démonstrations viennent de [19], [50], [51], [53], [18] et [54].

Définition 1.3.2. Soit u une fonction intérieure. On appelle *espace modèle correspondant à u* , le sous-espace de H^2 défini par :

$$K_u^2 := (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2. \quad (1.3.4)$$

La relation (1.3.4) ne donne pas de description explicite des éléments de l'espace modèle mais le théorème de Douglas, Shapiro et Shields [26] suivant nous décrit complètement K_u^2 en utilisant la limite radiale de ses éléments.

Théorème 1.3.3 (Douglas-Shapiro-Shields). *Pour chaque fonction intérieure u , l'espace modèle K_u^2 correspondant est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ telles que $f = u\bar{z}g$ presque partout sur \mathbb{T} où $g \in H^2$. Autrement dit, on a :*

$$K_u^2 = H^2(\mathbb{T}) \cap \overline{uzH^2(\mathbb{T})} \text{ avec } z: \zeta \in \mathbb{T} \mapsto \bar{\zeta} \in \mathbb{T}. \quad (1.3.5)$$

Preuve. Si $f \in H^2(\mathbb{T}) \cap \overline{uzH^2(\mathbb{T})}$, il existe $h \in H^2$ telle que $f = u\bar{z}h$ presque partout sur \mathbb{T} . Et pour tout $g \in H^2$, on a :

$$\langle f, ug \rangle = \langle u\bar{z}h, ug \rangle = \langle \bar{z}h, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} \overline{\zeta g(\zeta)} h(\zeta) dm(\zeta) = 0 \text{ d'après le théorème de Cauchy.}$$

C'est-à-dire $f \in (uH^2)^\perp = K_u^2$.

Réciproquement, si $f \in K_u^2$, on a $\langle f, uz^n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire $(\widehat{uf})(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\bar{u}zf \in \overline{H^2}$ ou encore $f \in \overline{uzH^2}$. \square

Le théorème de Beurling donne une caractérisation complète des sous-espaces de H^2 qui sont invariants par le shift S . Ce sont les sous espaces de la forme uH^2 où u est une fonction intérieure non constante. D'autre part, si u et v sont deux fonctions intérieures non constantes, on a $vH^2 \subset uH^2$ si et seulement si $u|v$ et en passant aux sous espaces orthogonaux, on a $K_u^2 \subset K_v^2$ si et seulement si $u|v$.

Remarque 1.3.4. La multiplication par une fonction intérieure est une isométrie sur H^2 .

La remarque précédente est utilisée dans la démonstration du résultat de Ahern et Clark ([2]) suivant :

Proposition 1.3.5. *Si u_1 et u_2 sont des fonctions intérieures non constantes et $u = u_1 u_2$ alors*

$$K_u^2 = K_{u_1}^2 \oplus u_1 K_{u_2}^2 \quad (1.3.6)$$

Preuve. Puisque la multiplication par une fonction intérieure est une isométrie, $u_2 H^2$ est un sous-espace fermé de H^2 et donc on peut écrire :

$$H^2 = u_2 H^2 \oplus (u_2 H^2)^\perp.$$

La multiplication par u_1 est aussi une isométrie et on a :

$$u_1 H^2 = u_1 u_2 H^2 \oplus u_1 (u_2 H^2)^\perp$$

c'est-à-dire

$$H^2 = u_1 H^2 \oplus (u_1 H^2)^\perp = u_1 u_2 H^2 \oplus u_1 (u_2 H^2)^\perp \oplus (u_1 H^2)^\perp.$$

Ainsi,

$$(u_1 u_2 H^2)^\perp = u_1 (u_2 H^2)^\perp \oplus (u_1 H^2)^\perp \text{ c'est-à-dire } K_u^2 = K_{u_1}^2 \oplus u_1 K_{u_2}^2$$

□

La proposition 1.3.5 précédente peut être généralisée comme l'énonce la proposition suivante :

Proposition 1.3.6. *Si $(u_j)_{j \geq 1}$ est une suite finie ou dénombrable de fonctions intérieures telle que le produit $u = \prod_{j \geq 1} u_j$ converge, on a*

$$K_u^2 = K_{u_1}^2 \oplus \bigoplus_{j \geq 2} \left(\prod_{n=1}^{j-1} u_n \right) K_{u_j}^2.$$

Soit P_u la projection orthogonale de L^2 sur K_u^2 . Alors les projections P de L^2 sur H^2 et P_u sont liées par la relation : $P_u = P - M_u P M_{\bar{u}}$ où M_u et $M_{\bar{u}}$ désignent respectivement les opérateurs de multiplication par u et par \bar{u} .

Les compressions à K_u^2 de l'opérateur shift S et de son adjoint S^* sont données respectivement par $S_u = P_u S|_{K_u^2}$ et $S_u^* = P_u S^*|_{K_u^2}$ et elles jouent un rôle analogue à celui du shift et de son adjoint dans K_u^2 .

En tant que sous-espace fermé de l'espace de Hilbert à noyau reproduisant H^2 pour chaque fonction intérieure u non constante, l'espace modèle K_u^2 possède un noyau reproduisant. Le noyau reproduisant de l'espace modèle K_u^2 au point $\lambda \in \mathbb{D}$ est donné explicitement par la formule :

$$k_\lambda^u(z) = P_u k_\lambda(z) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z)}{1 - \bar{\lambda}z} \quad (z \in \mathbb{D}), \quad (1.3.7)$$

où k_λ est le noyau de Cauchy de H^2 donné dans la relation (1.1.6).

En effet, si $f = uh \in uH^2$, on a

$$f(\lambda) = u(\lambda)h(\lambda) = u(\lambda)\langle h, k_\lambda \rangle = u(\lambda)\langle \bar{u}f, k_\lambda \rangle = \langle \bar{u}f, \overline{u(\lambda)}k_\lambda \rangle = \langle f, \overline{u(\lambda)}uk_\lambda \rangle.$$

Il s'ensuit que le noyau reproduisant de uH^2 au point $\lambda \in \mathbb{D}$ est $\overline{u(\lambda)}uk_\lambda$.

Si $f \in K_u^2$, on a $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle = \langle f, k_\lambda \rangle - u(\lambda)\langle f, uk_\lambda \rangle = \langle f, (1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \rangle$.

D'autre part, la fonction $(1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \in K_u^2$ car

$$\langle uh, (1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \rangle = u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle uh, uk_\lambda \rangle = u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle h, k_\lambda \rangle = 0$$

pour tout $h \in H^2$. Ainsi, pour tout $f \in K_u^2$ et $\lambda \in \mathbb{D}$, on a :

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda^u \rangle \text{ où } k_\lambda^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z)}{1 - \overline{\lambda}z}.$$

C'est-à-dire que la fonction k_λ^u reproduit la valeur de f au point $\lambda \in \mathbb{D}$.

Soit K_u^∞ le sous espace de K_u^2 défini par $K_u^\infty := K_u^2 \cap H^\infty$. Puisque les fonctions k_λ^u ($\lambda \in \mathbb{D}$) appartiennent à K_u^∞ et $\text{span}\{k_\lambda^u : \lambda \in \mathbb{D}\}$ est dense dans K_u^2 , K_u^∞ est dense dans K_u^2 .

Il est aussi montré dans [3] qu'on peut avoir un noyau reproduisant en un point $\eta \in \mathbb{T}$ si la fonction intérieure u admet une *Dérivée Angulaire au sens de Carathéodory* (ADC) en η . On dit que la fonction u admet une ADC en un point $\eta \in \mathbb{T}$ si u admet une limite non-tangentielle de module 1 notée $u(\eta)$ en η et u' admet une limite non-tangentielle $u'(\eta)$ en η . Les détails sur les ADCs peuvent être consultés dans [56]. Ahern et Clark ont montré dans [3] que les éléments de K_u^2 admettent une limite non-tangentielle en un point $\eta \in \mathbb{T}$ si et seulement si u admet une ADC en η .

En revenant au noyau reproduisant, il est montré dans [56] que si u admet une ADC en $\eta \in \mathbb{T}$, la fonction définie par :

$$k_\eta^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\eta)}u(z)}{1 - \overline{\eta}z}, \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (1.3.8)$$

appartient à K_u^2 et vérifie $f(\eta) = \langle f, k_\eta^u \rangle$ c'est-à-dire k_η^u est le noyau reproduisant au point η .

Définition 1.3.7. Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une application antilinéaire $C : H \rightarrow H$ est un opérateur de conjugaison si elle vérifie $C^2 = \text{Id}$ et $\langle Cx, Cy \rangle = \langle y, x \rangle$.

L'opérateur C définie par :

$$C[f](\zeta) = u(\zeta)\overline{\zeta f(\zeta)}, \text{ pour } \zeta \in \mathbb{T} \quad (1.3.9)$$

est une conjugaison sur $L^2(\mathbb{T})$ et sa restriction à K_u^2 est une bijection de K_u^2 sur lui-même. Les détails sur cet opérateur peuvent être trouvés dans [30, 29, 31]. On note $\widetilde{f}(\zeta) = C[f](\zeta)$ ($\zeta \in \mathbb{T}$).

On peut vérifier par un simple calcul que pour chaque $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ et $z \in \mathbb{T}$, on a

$$\widetilde{k}_\lambda^u(z) = \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda} \text{ et } \widetilde{k}_0^u = S^*u.$$

Et si u admet une ADC en un point $\eta \in \mathbb{T}$, $\widetilde{k}_\eta^u(z) = \frac{u(z) - u(\eta)}{z - \eta}$.

Le résultat suivant donne la relation entre S_u , S_u^* et le noyaux reproduisant.

Lemme 1.3.8 ([56]). (1). Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, on a :

$$S_u^* k_\lambda^u = \bar{\lambda} k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)} \widetilde{k}_0^u \quad \text{et} \quad S_u \widetilde{k}_\lambda^u = \lambda \widetilde{k}_\lambda^u - u(\lambda) k_0^u \quad (1.3.10)$$

(2). Pour tout $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, on a :

$$S_u k_\lambda^u = \frac{1}{\lambda} k_\lambda^u - \frac{1}{\lambda} k_0^u \quad \text{et} \quad S_u^* \widetilde{k}_\lambda^u = \frac{1}{\lambda} \widetilde{k}_\lambda^u - \frac{1}{\lambda} \widetilde{k}_0^u \quad (1.3.11)$$

Si de plus u admet une ADC au point $\eta \in \mathbb{T}$, les relations (1.3.10) et (1.3.11) sont vraies si on remplace λ par η .

1.4 Espace modèle de dimension finie

Les seuls exemples simples d'espaces modèles dont on peut décrire explicitement les éléments sont ceux qui correspondent aux produits de Blaschke d'ordre fini. La proposition suivante nous donne la forme générale de K_u^2 dans le cas où u est un produit de Blaschke d'ordre fini.

Proposition 1.4.1. *si u est un produit de Blaschke avec les zéros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ comptés avec leur ordre de multiplicité alors*

$$K_u^2 = \left\{ \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}}{(1 - \bar{\lambda}_1 z)(1 - \bar{\lambda}_2 z) \dots (1 - \bar{\lambda}_n z)} : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \right\} \quad (1.4.1)$$

En particulier, $K_{z^n}^2$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Preuve. Nous donnons la démonstration dans le cas où les zéros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ du produit de Blaschke sont simples et deux à deux distincts.

Puisque $\langle uh, k_{\lambda_j} \rangle = u(\lambda_j)h(\lambda_j) = 0$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ et tout $h \in H^2$, on a

$$\text{span} \{k_{\lambda_j}, j = 1, 2, \dots, n\} \subseteq K_u^2$$

Si $f \perp k_{\lambda_j}$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $u|f$ et donc $f \in uH^2$. Ainsi,

$$\text{span} \{k_{\lambda_j}, j = 1, 2, \dots, n\}^\perp \subseteq uH^2$$

Ainsi, $K_u^2 = \text{span} \{k_{\lambda_j}, j = 1, 2, \dots, n\}$.

Notons que toute combinaison linéaire des k_{λ_j} , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ peut être exprimée comme dans (1.4.1). Et réciproquement, toute expression du type (1.4.1) peut être décomposée comme combinaison linéaire des k_{λ_j} pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. \square

Si λ est un zéro d'ordre m de u , il faut introduire les fonctions $k'_\lambda, k''_\lambda, \dots, k_\lambda^{(m-1)}$ à la place de k_λ dans la démonstration précédente et on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.4.2. *Si u est un produit de Blaschke d'ordre n avec des zéros deux à deux distincts $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ d'ordre de multiplicité respectif m_1, m_2, \dots, m_n ,*

$$K_u^2 = \text{span} \left\{ \frac{d^{l_j-1} k_{\lambda_j}}{d \bar{\lambda}_j^{l_j-1}} : 1 \leq j \leq n \text{ et } 1 \leq l_j \leq m_j \right\}. \quad (1.4.2)$$

En contraste avec l'espace de Hardy, l'espace modèle n'admet pas à priori de base orthonormée mais la proposition 1.4.1 nous montre que si la fonction u est un produit de Blaschke d'ordre n avec des zéros simples $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts, la famille $\{k_{\lambda_j}, : 1 \leq j \leq n\}$ est une base non orthogonale de K_u^2 . En 1925, Takenaka a donné une base orthonormée de K_u^2 dans le cas où u est un produit de Blaschke d'ordre fini en utilisant la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt au système $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, \dots, k_{\lambda_n}\}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, on note par b_λ le facteur de Blaschke défini sur \mathbb{D} par :

$$b_\lambda(z) = \frac{z - \lambda}{1 - \bar{\lambda}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Soit u est un produit de Blaschke dont les zéros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont simples et deux à deux distincts. Remarquons que :

$$\langle b_{\lambda_1} k_{\lambda_2}, k_{\lambda_1} \rangle = b_{\lambda_1}(\lambda_1) k_{\lambda_2}(\lambda_1) = 0$$

de même,

$$\langle b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} k_{\lambda_3}, k_{\lambda_1} \rangle = \langle b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} k_{\lambda_3}, k_{\lambda_2} \rangle = 0.$$

En continuant le processus, on obtient la famille $\{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ définie par :

$$e_1(z) := \frac{\sqrt{1 - |\lambda_1|}}{1 - \bar{\lambda}_1 z} \quad \text{et} \quad e_k(z) := \left(\prod_{j=1}^{k-1} b_{\lambda_j} \right) \frac{\sqrt{1 - |\lambda_k|}}{1 - \bar{\lambda}_k z}$$

Takenaka a montré ([63]) que la famille $\{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ ainsi définie est une base orthonormée de l'espace modèle K_u^2 . La généralisation de cette méthode dans le cadre d'un produit de Blaschke infini est détaillée dans [50] et on obtient la *base de Takenaka-Malmquist-Walsh*.

ESPACE DE BERGMAN HARMONIQUE

Dans ce chapitre, nous rappelons les outils nécessaires dans l'étude des opérateurs de Toeplitz définis dans les espaces de Bergman harmoniques. Les résultats énoncés dans ce chapitre sont tirés de [6], [7], [28], [40] et [60].

Dans la première section, nous rappelons les résultats concernant les espaces de Bergman et à partir de la deuxième section nous présentons les extensions de ces résultats à l'espace de Bergman harmonique.

On note par $dA(z) = \frac{1}{\pi} r dr d\theta$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque unité \mathbb{D} du plan complexe et on écrit simplement L^2 l'espace de Lebesgue usuel $L^2(\mathbb{D}, dA)$ muni du produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} dA(z), \text{ pour tous } f, g \in L^2.$$

2.1 Espace de Bergman

Nous rappelons dans cette section quelques propriétés élémentaires de l'espace de Bergman. La plupart des résultats énoncés ici sont tirés de [6, 28, 40].

Soit $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions analytiques dans \mathbb{D} . On appelle espace de Bergman du disque \mathbb{D} et on note par L_a^2 le sous espace de L^2 défini par

$$L_a^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) ; \|f\|_{L_a^2}^2 := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) < \infty \right\}$$

Les éléments de L_a^2 vérifient l'estimation suivante

Proposition 2.1.1. *Si $f \in L_a^2$, alors pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a l'inégalité :*

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|} \|f\|_{L_a^2}. \tag{2.1.1}$$

Preuve. C'est un cas particulier de la démonstration du Lemme 2.2.1. □

En utilisant l'estimation (2.1.1) de la Proposition 2.1.1, on a les résultats suivants :

Théorème 2.1.2. *L'espace de Bergman L_a^2 est un espace complet.*

Preuve. Puisque $L_a^2 \subseteq L^2$ et L^2 complet, il suffit de montrer que L_a^2 est fermé. Pour cela, soient $(f_n)_n \subseteq L_a^2$ et $f \in L^2$ tels que $(f_n)_n$ converge vers f pour la norme de L^2 . Montrons que $f \in L_a^2$. Comme $(f_n)_n$ converge vers f dans L^2 , elle y est de Cauchy donc elle admet une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge simplement presque partout vers f sur \mathbb{D} . De plus, la relation (2.1.1) entraîne que la suite $(f_n)_n$ est uniformément de Cauchy sur tout compact de \mathbb{D} . Ainsi, $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{D} vers une fonction g .

Pour chaque n , f_n est analytique donc, g est aussi analytique car limite uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions analytiques (Théorème de Weirstrass). Par suite $f \equiv g$ presque partout sur \mathbb{D} et comme g est continue, $f = g$ sur \mathbb{D} donc $f \in L_a^2$. \square

Dans la démonstration ci-dessus, on a montré que L_a^2 est un sous espace fermé de l'espace de Hilbert L^2 donc L_a^2 muni du produit scalaire induit par celui de L^2 est aussi un espace de Hilbert et la famille $\{\sqrt{n+1}z^n : n \in \mathbb{N}\}$ en est une base hilbertienne (voir par exemple [28] pour la démonstration).

Théorème 2.1.3. *L'espace de Bergman L_a^2 est un espace à noyaux reproduisant.*

Preuve. Pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, la fonction d'évaluation $\Phi_z : f \in L_a^2 \mapsto \Phi_z(f) = f(z) \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire et l'inégalité (2.1.1) montre qu'elle est continue. Donc d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique fonction $K_z \in L_a^2$ telle que $\Phi_z(f) = f(z) = \langle f, K_z \rangle$. \square

La fonction K_z définie dans la démonstration ci-dessus est appelée le **noyau de Bergman au point z** de L_a^2 .

Proposition 2.1.4. *Le noyau reproduisant vérifie les propriétés suivantes :*

- (1). $K_z(\zeta) = \overline{K_\zeta(z)}$ pour tous $z, \zeta \in \mathbb{D}$,
- (2). $K_z(z) = \|K_z\|_{L_a^2}^2$.

Pour chaque $z \in \mathbb{D}$, le noyau reproduisant K_z au point z est donné explicitement par la formule

$$K_z(\zeta) = \frac{1}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} \quad (\zeta \in \mathbb{D})$$

Soit P la projection orthogonale de L^2 sur L_a^2 . En utilisant le noyau reproduisant, la projection P peut être représentée sous la forme intégrale :

$$P[f](z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1 - z\bar{\zeta})^2} dA(\zeta) \quad \text{pour tout } f \in L_a^2.$$

De même, chaque fonction $f \in L^2_a$ peut être représentée sous la forme intégrale :

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1 - z\bar{\zeta})^2} dA(\zeta) \text{ pour tout } f \in L^2.$$

2.2 Généralités sur l'espace de Bergman harmonique

Soit $\mathfrak{h}(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions harmoniques sur le disque unité \mathbb{D} . L'espace de Bergman harmonique, noté $L^2_{\mathfrak{h}}$ est défini comme étant l'espace des fonctions harmoniques sur le disque \mathbb{D} et de carré-intégrables par rapport à la mesure dA . Autrement dit,

$$L^2_{\mathfrak{h}} = L^2_{\mathfrak{h}}(\mathbb{D}, dA) := \left\{ f \in \mathfrak{h}(\mathbb{D}) ; \|f\|_{L^2_{\mathfrak{h}}}^2 := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) < \infty \right\}.$$

Le résultat suivant nous assure d'une part que l'espace de Bergman harmonique est un espace de Banach et nous montre d'autre part que cet espace admet des noyaux reproduisant.

Lemme 2.2.1. *Si $f \in L^2$ est une fonction harmonique sur \mathbb{D} , pour tout $z \in \mathbb{D}$ il existe une constante positive C telle que*

$$|f(z)| \leq C \left[\int_{\mathbb{D}} |f(\omega)|^2 dA(\omega) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.1)$$

Preuve. Soient $z \in \mathbb{D}$ et $r(z) = \frac{1}{2}d(z, \partial\mathbb{D})$. Considérons le disque $D_r = \{\omega \in \mathbb{D} ; |z - \omega| < r(z)\}$. Puisque f est harmonique sur \mathbb{D} et $\overline{D_r} \subset \mathbb{D}$, elle vérifie la formule de la moyenne sur D_r , c'est-à-dire

$$f(z) = \frac{1}{r^2} \int_{D_r} f(\omega) dA(\omega)$$

donc,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{r^2} \int_{D_r} |f(\omega)| dA(\omega) \quad (2.2.2)$$

La fonction $\varphi : t \mapsto t^2$ est croissante convexe donc on peut appliquer l'inégalité de Jensen à la relation (2.2.2) avec la mesure $d\mu(\omega) = \frac{1}{r^2} dA(\omega)$, qui est une mesure de probabilité, et on a :

$$\varphi(|f(z)|) \leq \varphi\left(\frac{1}{r^2} \int_{D_r} |f(\omega)| dA(\omega)\right) \leq \frac{1}{r^2} \int_{D_r} \varphi(|f(\omega)|) dA(\omega)$$

Donc,

$$|f(z)|^2 \leq \frac{1}{r^2} \int_{D_r} |f(\omega)|^2 dA(\omega) \leq \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{D}} |f(\omega)|^2 dA(\omega)$$

D'où

$$|f(z)| \leq C \left[\int_{\mathbb{D}} |f(\omega)|^2 dA(\omega) \right]^{\frac{1}{2}}$$

□

Après avoir établi cette estimation, donnons-en quelques conséquences.

Une des conséquences immédiates du Lemme 2.2.1 est que la convergence dans $L^2_{\mathfrak{h}}$ entraîne la convergence uniforme sur tout sous-ensemble compact de \mathbb{D} .

Lemme 2.2.2. Soient $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{h}}$. Alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{D} vers une fonction f harmonique sur \mathbb{D} .

Preuve. Soit K un compact de \mathbb{D} . Alors Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $z \in K$, $\delta(z) = d(z, \partial\mathbb{D}) \geq C$. D'après le Lemme 2.2.1, on a

$$|(f_m - f_p)(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\delta(z)}} \|f_m - f_p\|_{L^2_{\mathbb{h}}} \text{ pour tout } z \in K.$$

Donc $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy uniforme sur le compact K et d'après le Théorème de Harnack, elle converge uniformément sur tout compact de \mathbb{D} vers une fonction f harmonique sur \mathbb{D} . \square

Les deux résultats nous permettent de montrer que $L^2_{\mathbb{h}}$ est un espace de Banach.

Théorème 2.2.3. L'espace de Bergman harmonique $L^2_{\mathbb{h}}$ est complet.

Preuve. Puisque L^2 est un espace de Hilbert, il suffit de montrer que $L^2_{\mathbb{h}}$ est un sous-espace fermé. Soient $(f_n)_n$ une suite dans $L^2_{\mathbb{h}}$ et f un élément de L^2 telle que $(f_n)_n$ converge vers f dans L^2 . Puisque $(f_n)_n$ converge vers f dans L^2 , elle y est de Cauchy et elle admet une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge simplement presque partout vers f sur \mathbb{D} .

De plus, d'après le Lemme 2.2.2, la suite $(f_{n_k})_k$ est uniformément de Cauchy sur tout compact de \mathbb{D} . Ainsi, $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{D} vers une fonction g continue sur \mathbb{D} . Pour chaque n , f_n est harmonique donc, g est aussi harmonique comme étant une limite uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions harmoniques (d'après le Théorème de Harnack). Et $f = g$ presque partout sur \mathbb{D} . Donc on peut prendre $g = f$ et $g \in L^2_{\mathbb{h}}$. \square

D'après Théorème 2.2.3, $L^2_{\mathbb{h}}$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert L^2 et notons par Q la projection orthogonale de L^2 sur $L^2_{\mathbb{h}}$ appelée *la projection de Bergman harmonique*. Remarquons que $L^2_{\mathbb{h}}$ muni du produit scalaire induit de celui de L^2 est aussi un espace de Hilbert séparable. Ainsi, si $(\psi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, avec Λ dénombrable, est une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{h}}$, pour $f \in L^2_{\mathbb{h}}$, on a la représentation en série de Fourier :

$$f = \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha \psi_\alpha \text{ avec } c_\alpha = \langle f, \psi_\alpha \rangle \text{ et la convergence étant dans } L^2_{\mathbb{h}},$$

et l'identité de Parseval :

$$\|f\|_{L^2_{\mathbb{h}}}^2 = \sum_{\alpha \in \Lambda} |\langle f, \psi_\alpha \rangle|^2.$$

2.3 Propriétés de densité

Dans cette section, nous allons voir quelques propriétés de densité dans $L^2_{\mathbb{h}}$.

Définition 2.3.1. Soit f une fonction définie sur \mathbb{D} . Pour $0 < r < 1$, on définit la fonction f_r sur $r^{-1}\mathbb{D} = \{r^{-1}z : z \in \mathbb{D}\}$ par : $f_r(z) = f(rz)$. La fonction f_r ainsi définie est appelée *la dilatation de f* .

On peut vérifier par des calculs simples que $\Delta(f_r) = r^2\Delta(f)_r$. Il s'ensuit que si f est une fonction harmonique, f_r est harmonique.

Les lemmes suivants sont nécessaires pour démontrer le théorème principal de cette section.

Lemme 2.3.2. Si $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{D})$ et $0 < r < 1$ où $\mathcal{C}_c(\mathbb{D})$ désigne l'espace des fonctions continues à support compact dans \mathbb{D} , $\|u - u_r\|_2 \rightarrow 0$, ($r \rightarrow 1^-$).

Preuve. Puisque $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{D})$, u est uniformément continue sur \mathbb{D} .

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $z, z' \in \mathbb{D}$ et $|z - z'| \leq \delta$, on a $|u(z) - u(z')| \leq \varepsilon$.

Posons $z' = rz$, on a $|z - z'| = (1 - r)|z| \leq \delta$. Donc si $0 < 1 - r < \delta$, on a :

$$|u_r(z) - u(z)| = |u(rz) - u(z)| \leq \varepsilon.$$

D'où

$$\|u - u_r\|_2^2 = \int_{\mathbb{D}} |u(z) - u_r(z)|^2 dA(z) = \int_{\mathbb{D}} \varepsilon^2 dA(z) = \varepsilon^2$$

c'est-à-dire $\|u - u_r\|_2 \rightarrow 0$, ($r \rightarrow 1^-$). □

Lemme 2.3.3. Si $u \in L^2(\mathbb{D})$ et $0 < r < 1$ alors $\|u - u_r\|_2 \rightarrow 0$, ($r \rightarrow 1^-$), où u_r est définie de la même manière que dans le Lemme 2.3.2.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathcal{C}_c(\mathbb{D})$ est dense dans $L^2(\mathbb{D})$, il existe $v \in \mathcal{C}_c(\mathbb{D})$ telle que $\|u - v\|_2 \leq \varepsilon$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|u - u_r\|_2 &= \|u - v + v - v_r + v_r - u_r\|_2 \leq \|u - v\|_2 + \|v - v_r\|_2 + \|u_r - v_r\|_2 \\ &\leq \|v - v_r\|_2 + \|u - v\|_2 + C\|u - v\|_2 \\ &\leq \|v - v_r\|_2 + \varepsilon(1 + C) \end{aligned}$$

Ainsi, $\limsup_{r \rightarrow 1^-} \|u - u_r\|_2 \leq \varepsilon(1 + C)$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $\|u - u_r\|_2 \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 1^-$) □

Théorème 2.3.4. Les polynômes harmoniques sont denses dans $L^2_{\mathbb{H}}$.

Preuve. Soient $f \in L^2_{\mathbb{H}}$. Pour chaque $0 \leq r < 1$, la dilatation f_r de f est harmonique et est continue dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. D'après le Lemme 2.3.3, $\|f - f_r\|_2 \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 1^-$) donc f est approchable dans $L^2_{\mathbb{H}}$ par des fonctions harmoniques dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Et chaque f_r est approchable par des polynômes harmoniques dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Donc chaque f_r est approchable par des polynômes harmoniques dans $L^2(\mathbb{D})$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $r_1 \in]0, 1[$ tel que pour $r \geq r_1$, $\|f - f_r\|_2 \leq \varepsilon$. Pour $r = r_1$, il existe un polynôme harmonique p_{r_1} tel que $\|f_{r_1} - p_{r_1}\|_2 \leq \varepsilon$. Donc, $\|f - p_{r_1}\|_2 \leq \|f - p_{r_1}\|_2 + \|f_{r_1} - p_{r_1}\|_2 \leq 2\varepsilon$. □

Corollaire 2.3.5. *La famille*

$$\mathcal{B}_h = \left\{ \psi_n : \psi_n(z) = \sqrt{n+1} z^n, n \geq 0 \text{ et } z \in \mathbb{D} \right\} \cup \left\{ \bar{\psi}_n : \bar{\psi}_n(z) = \sqrt{n+1} \bar{z}^n, n > 0 \text{ et } z \in \mathbb{D} \right\}$$

est une base hilbertienne de L_h^2 .

Preuve. Notons que pour $m, n \in \mathbb{N}$, la fonction définie par :

$$p = \sum_{j=0}^n c_j \psi_j + \sum_{j=-m}^{-1} c_j \bar{\psi}_j \text{ avec } c_j = \begin{cases} \langle f, \psi_j \rangle & \text{si } j \geq 0 \\ \langle f, \bar{\psi}_j \rangle & \text{si } j < 0 \end{cases}$$

est un polynôme harmonique et d'après le Théorème 2.3.4, $\overline{\text{span}}\left\{ \psi_n, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \bar{\psi}_n, n \in \mathbb{N} \right\} = L_h^2$.

Il reste à montrer que la famille est orthonormée. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. On a deux cas :

- Si $m, n > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \int_{\mathbb{D}} \sqrt{|n|+1} \sqrt{|m|+1} z^n \bar{z}^m dA(z) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{|n|+1} \sqrt{|m|+1} r^{m+n+1} e^{i(n-m)\theta} dr d\theta = \delta_{mn} \end{aligned}$$

- Si $m, n < 0$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \int_{\mathbb{D}} \sqrt{|n|+1} \sqrt{|m|+1} z^n \bar{z}^m dA(z) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{|n|+1} \sqrt{|m|+1} r^{m+n+1} e^{i(n-m)\theta} dr d\theta = 0 \end{aligned}$$

□

Puisque \mathcal{B}_h est une base hilbertienne de L_h^2 ,

- (1). pour $f \in L_h^2$, on a la représentation en série de Fourier :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \psi_n \text{ avec } c_n = \begin{cases} \langle f, \psi_n \rangle & \text{si } n \geq 0 \\ \langle f, \bar{\psi}_n \rangle & \text{si } n < 0 \end{cases} \text{ et la convergence étant dans } L_h^2. \quad (2.3.1)$$

Et d'après le Lemme 2.2.2, la suite $(S_n(f))_n$ des sommes partielles de la série converge uniformément vers f sur tout sous-ensemble compact de \mathbb{D} .

- (2). toute fonction $f \in L_h^2$ vérifie l'identité de Parseval : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \|f\|_{L_h^2}^2$.

2.4 Noyau reproduisant

Pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, la fonction d'évaluation Φ_z définie sur $L^2_{\mathfrak{h}}$ par $\Phi_z(f) = f(z)$ est linéaire et le Lemme 2.2.1 nous assure qu'elle est continue. Et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément R_z de $L^2_{\mathfrak{h}}$ tel que $\Phi_z(f) = \langle f, R_z \rangle$ pour tout $f \in L^2_{\mathfrak{h}}$. La fonction R_z ainsi définie est appelée *le noyau de Bergman harmonique*. Autrement dit, pour toute fonction $f \in L^2_{\mathfrak{h}}$, on a la représentation intégrale suivante :

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\omega) \overline{R_z(\omega)} dA(\omega). \quad (2.4.1)$$

Ainsi, si $f \in L^2$, la projection orthogonale $Q[f] \in L^2_{\mathfrak{h}}$ et on a :

$$Q[f](z) = \int_{\mathbb{D}} f(\omega) \overline{R_z(\omega)} dA(\omega), \quad (z \in \mathbb{D}). \quad (2.4.2)$$

Autrement dit, on peut écrire la projection orthogonale de L^2 sur $L^2_{\mathfrak{h}}$ sous forme intégrale.

En prenant R_z à la place de f dans la relation (2.3.1), on a :

$$c_n = \langle R_z, \psi_n \rangle = \overline{\psi_n(z)} \quad \text{et} \quad d_n = \langle R_z, \overline{\psi_n} \rangle = \overline{\langle \overline{\psi_n}, R_z \rangle} = \overline{\psi_n(z)}.$$

c'est-à-dire ,

$$R_z(\omega) = \sum_{n \geq 0} \psi_n(\omega) \overline{\psi_n(z)} + \sum_{n > 0} \overline{\psi_n(z)} \overline{\psi_n(\omega)} \quad \text{pour tous } z, \omega \in \mathbb{D}. \quad (2.4.3)$$

En développant la relation (2.4.3), on a :

$$R_z(\omega) = \sum_{n \geq 0} (n+1) \overline{z}^n \omega^n + \sum_{n > 1} (n+1) z^n \overline{\omega}^n.$$

C'est-à-dire

$$R_z(\omega) = \sum_{n \geq 0} (n+1) \overline{z}^n \omega^n + \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n \overline{\omega}^n - 1 = \sum_{n \geq 0} (n+1) \overline{z}^n \omega^n + \overline{\sum_{n \geq 0} (n+1) \overline{z}^n \omega^n} - 1.$$

Puisque $\omega, z \in \mathbb{D}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \omega^n \overline{z}^n = \frac{1}{(1 - \overline{z}\omega)^2}.$$

Ainsi, pour tous $z, \omega \in \mathbb{D}$, le noyau de Bergman de $L^2_{\mathfrak{h}}$ est donné explicitement par la formule :

$$R_z(\omega) = \frac{1}{(1 - \overline{\omega}z)^2} + \frac{1}{(1 - \overline{z}\omega)^2} - 1. \quad (2.4.4)$$

Il n'est pas difficile de montrer que L^2_a est un sous espace propre et fermé $L^2_{\mathfrak{h}}$ et que $zL^2_a \perp \overline{L^2_a}$ où $zL^2_a = \{zf : f \in L^2_a\}$ et $\overline{L^2_a} = \{\overline{f} : f \in L^2_a\}$. D'autre part, toute fonction $f \in L^2_{\mathfrak{h}}$ se décompose sous la forme :

$$f = P[f] - P[f](0) + (I - P)[f] + P[f](0) \quad \text{avec} \quad P[f] - P[f](0) \in zL^2_a \quad \text{et} \quad (I - P)[f] + P[f](0) \in \overline{L^2_a}.$$

Autrement dit, on a montré le résultat suivant :

Lemme 2.4.1. *L'espace de Bergman harmonique $L^2_{\mathfrak{h}}$ peut s'écrire*

$$L^2_{\mathfrak{h}} = zL^2_a \oplus \overline{L^2_a} \quad (2.4.5)$$

et la projection Q se décompose sous la forme :

$$Q(f) = P[f] + \overline{P[f]} - P[f](0) \quad (2.4.6)$$

où P désigne la projection de Bergman de L^2 sur L^2_a .

En utilisant la décomposition du lemme 2.4.1, on retrouve la formule (2.4.4) du noyau de Bergman de $L^2_{\mathfrak{h}}$ c'est-à-dire

$$R_z(\omega) = K_z(\omega) + \overline{K_z(\omega)} - 1 \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Les propriétés du noyau de Bergman dans $L^2_{\mathfrak{h}}$ suivantes sont immédiates d'après la relation (2.4.4) :

Lemme 2.4.2. *Pour tous $z, \omega \in \mathbb{D}$, on a :*

- (1). $R_z(\omega) = 2 \operatorname{Re}[K_z(\omega)] - 1$ où K_z est le noyau de Bergman de L^2_a , ainsi, R_z est à valeurs réelles,
- (2). R_z est symétrique c'est-à-dire $R_z(\omega) = R_{\omega}(z)$,
- (3). $\|R_z\|^2 = \langle R_z, R_z \rangle = R_z(z)$.

OPÉRATEURS DE TOEPLITZ DANS L'ESPACE DE HARDY

Les opérateurs de Toeplitz sont les plus étudiés et les mieux connus dans la théorie des opérateurs sur l'espace de Hardy H^2 . Les opérateurs shift et backward shift en sont des exemples simples. Généralement, les opérateurs de Toeplitz sont ceux dont les coefficients de la matrice relativement à la base standard de H^2 sont constants le long de chaque diagonale. Voir entre autre [8, 35, 36, 38] pour les détails sur le sujet.

3.1 Matrices et opérateurs de Laurent

La théorie des opérateurs de Toeplitz est étroitement liée avec celle des opérateurs de multiplication (qui sont aussi appelés opérateurs de Laurent) sur $L^2(\mathbb{T}, dm)$. En effet, un opérateur de Toeplitz n'est autre que la compression d'un opérateur de Laurent sur l'espace de Hardy H^2 . Nous allons donc commencer par voir brièvement la définition et quelques propriétés de l'opérateur de multiplication sur $L^2(\mathbb{T}, dm)$.

Définition 3.1.1. Pour $\varphi \in L^\infty$, l'opérateur de multiplication par φ , notée M_φ , sur $L^2(\mathbb{T})$ est l'opérateur défini par $M_\varphi(f) = \varphi f$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$. La fonction φ est appelée le symbole de l'opérateur.

Remarquons que dans la définition ci-dessus, on a pris un symbole dans L^∞ ce qui nous assure que M_φ a bien un sens mais nous pouvons aussi définir densément l'opérateur de multiplication M_φ où $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$. En effet, notons $D(M_\varphi)$ le sous ensemble de $L^2(\mathbb{T})$ défini par $D(M_\varphi) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \varphi f \in L^2(\mathbb{T})\}$. Il est montré (voir par exemple [55]) que $D(M_\varphi)$ contient l'ensemble des fonctions continues à support compact sur \mathbb{T} qui est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ donc $D(M_\varphi)$ est lui aussi dense dans $L^2(\mathbb{T})$ et l'opérateur de multiplication M_φ est défini sur $D(M_\varphi)$ par :

$$\begin{array}{rcl} M_\varphi : & D(M_\varphi) \subseteq L^2(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{T}) \\ & f & \longmapsto & M_\varphi(f) = \varphi f \end{array}$$

Proposition 3.1.2. *Si $\varphi \in L^\infty$, M_φ est continu et $\|M_\varphi\|_2 = \|\varphi\|_\infty$.*

Preuve. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\|f\|_2 = 1$. Nous avons :

$$\|M_\varphi(f)\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |\varphi(\zeta) f(\zeta)|^2 dm(\zeta) \leq \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|_2^2 \text{ car } |\varphi(\zeta)| \leq \|\varphi\|_\infty \text{ presque partout.}$$

Donc M_φ est continu et $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

Réciproquement, soit $m_0 = \|\varphi\|_\infty$. Si $m_0 = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons maintenant que $m_0 \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soient $E_n = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\varphi(\zeta)| > m_0 - \frac{1}{n}\}$ et χ_n sa fonction caractéristique. Il est clair que $m(E_n) > 0$ (m étant la mesure de Lebesgue normalisée sur \mathbb{T}) et pour n assez grand tel que $m_0 - \frac{1}{n} > 0$,

$$\begin{aligned} \|M_\varphi(\chi_n)\|_2^2 &= \int_{E_n} |\varphi(\zeta)|^2 dm(\zeta) \\ &\geq \int_{E_n} \left(m_0 - \frac{1}{n}\right)^2 dm(\zeta) \\ &= \left(m_0 - \frac{1}{n}\right)^2 m(E_n) \end{aligned}$$

On a $\|\chi_n\|_2^2 = m(E_n)$. En posant $f_n = \frac{\chi_n}{\|\chi_n\|_2}$, on a $\|M_\varphi(f_n)\|_2 \geq m_0 - \frac{1}{n}$ pour n assez grand et il s'ensuit que

$$\|M_\varphi\| \geq m_0 - \frac{1}{n} \text{ pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

Et donc, $\|M_\varphi\| \geq m_0 = \|\varphi\|_\infty$. □

Remarque 3.1.3. On peut définir d'une manière analogue l'opérateur de multiplication par φ dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$ et M_φ est continu si et seulement si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$.

Le théorème suivant donne la première caractérisation de l'opérateur de multiplication.

Théorème 3.1.4 ([14], p. 109). *Un opérateur continu sur $L^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de multiplication si et seulement s'il commute avec l'opérateur shift bilatère (qui est un opérateur de multiplication par l'application coordonnée $z : \zeta \in \mathbb{T} \mapsto \zeta \in \mathbb{C}$).*

Preuve. Supposons que $A = M_\varphi$ avec $\varphi \in L^\infty$. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a :

$$M_\varphi M_z(f) = \varphi z f = z \varphi f = M_z M_\varphi f.$$

Réciproquement, supposons que $AM_z = M_z A$. Montrons que $A = M_\varphi$ avec $\varphi \in L^\infty$. Soit $\varphi = A\mathbb{1}$ où $\mathbb{1}$ est la fonction constante valant 1 sur \mathbb{T} . Il est clair que $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$. Montrons que $\varphi \in L^\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit E_n le sous ensemble de \mathbb{T} défini par $E_n = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\varphi(\zeta)| > n\}$. Montrons que $m(E_n) = 0$ pour n assez grand. Soit χ_n la fonction caractéristique de E_n . On a :

$$\|A\chi_n\|_2^2 = \|\varphi\chi_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |\varphi(\zeta)|^2 |\chi_n(\zeta)|^2 dm(\zeta) = \int_{E_n} |\varphi(\zeta)|^2 dm(\zeta) \geq n^2 m(E_n).$$

Comme

$$\|\chi_n\|_2^2 = \int_{E_n} dm(\zeta) = m(E_n),$$

on a

$$\|A\chi_n\|_2^2 \geq n^2 \|\chi_n\|_2^2.$$

Ainsi,

$$\left\| A \frac{\chi_n}{\|\chi_n\|_2} \right\|_2^2 \geq \|A\|_2^2 \geq n^2 \text{ si } \|\chi_n\|_2^2 \neq 0.$$

Mais A est continu donc il existe M tel que $\|A\|_2 \leq M$. Ainsi pour $n > M$, $\|\chi_n\|_2 = 0$ donc $\|\varphi\|_\infty \leq M$ et $\varphi \in L^\infty$.

Montrons maintenant que $A = M_\varphi$. Puisque A commute avec M_z , on a :

$$A\zeta^n = AM_z^n \mathbb{1} = M_z^n A\mathbb{1} = \zeta^n A\mathbb{1} = \zeta^n \varphi = \varphi \zeta^n \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Comme M_z est inversible, on a $AM_z^{-1} = M_z^{-1}A$, $A\zeta^n = \varphi\zeta^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et par linéarité, $Ap = \varphi p$ pour tout polynôme trigonométrique p . Et puisque les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^2(\mathbb{T})$, il s'ensuit que $Af = \varphi f$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ainsi, $A = M_\varphi$. \square

Nous allons maintenant caractériser les opérateurs de multiplication à l'aide de leur matrice relativement à la base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$. Notons que la famille $\mathcal{A} = \{\zeta^n : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$. Nous commençons par la définition de la matrice de Laurent.

Définition 3.1.5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. Une matrice de Laurent est une matrice bilatéralement infinie A de la forme :

$$A := \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \cdots \\ \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ \cdots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ \cdots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

c'est-à-dire que les coefficients d'une même diagonale sont égaux.

La Définition 3.1.5 ci-dessus découle du fait que pour toute fonction $\varphi \in L^\infty$, la matrice de l'opérateur de multiplication M_φ relativement à la base \mathcal{A} est de la forme (3.1.1). En effet, soit $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ la matrice de M_φ relativement à la base \mathcal{A} de $L^2(\mathbb{T})$. Alors chaque a_{ij} est donné par :

$$a_{ij} = \langle M_\varphi \zeta^j, \zeta^i \rangle = \int_{\mathbb{T}} \varphi(\zeta) \zeta^j \bar{\zeta}^i dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(\zeta) \zeta^{j-i} dm(\zeta) = \widehat{\varphi}(i-j)$$

Donc $a_{ij} = a_{i+k, j+k}$ c'est-à-dire que les coefficients d'une même diagonale sont égaux.

Le théorème suivant caractérise les opérateurs de multiplication par leur matrice.

Théorème 3.1.6. *Un opérateur continu sur $L^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de multiplication si et seulement si sa matrice relativement à la base orthonormée \mathcal{A} de $L^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Laurent.*

Preuve. Si A est un opérateur de multiplication, sa matrice relativement à \mathcal{A} est une matrice de Laurent d'après le commentaire suivant la Définition 3.1.1.

Réciproquement, supposons que A est un opérateur continu sur $L^2(\mathbb{T})$ tel que sa matrice relativement à la base \mathcal{A} de $L^2(\mathbb{T})$ soit une matrice de Laurent c'est-à-dire que $\langle A\zeta^j, \zeta^i \rangle = \langle A\zeta^{j+1}, \zeta^{i+1} \rangle$. Montrons que A est un opérateur de multiplication. Pour cela, il suffit de montrer que A commute avec le shift bilatère M_z d'après le Théorème 3.1.4. Soient $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nous avons :

$$\langle AM_z\zeta^j, \zeta^i \rangle = \langle A\zeta^{j+1}, \zeta^i \rangle = \langle A\zeta^j, \zeta^{i-1} \rangle = \langle A\zeta^j, M_z^*\zeta^i \rangle = \langle M_z A\zeta^j, \zeta^i \rangle.$$

Donc, $AM_z = M_z A$ et on conclut avec le Théorème 3.1.4. \square

3.2 Généralités sur les opérateurs de Toeplitz

Dans cette section nous étudions les propriétés de base de l'opérateur de Toeplitz.

Définition 3.2.1. Une matrice de Toeplitz est une matrice unilatéralement infinie $(a_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}}$ telle que $a_{ij} = a_{i-j}$. Autrement dit, une matrice de Toeplitz est une matrice de la forme :

$$A := \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

Notons que $(a_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}}$ est une matrice de Toeplitz si et seulement si les a_{ij} vérifient $a_{i+k, j+k} = a_{ij}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Définition 3.2.2. Soit M_φ un opérateur de multiplication qui est continu sur $L^2(\mathbb{T})$. On appelle opérateur de Toeplitz de symbole φ et on note par T_φ , l'opérateur défini sur $H^2(\mathbb{T})$ par :

$$\begin{aligned} T_\varphi: H^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow H^2(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto T_\varphi(f) = P M_\varphi f = P(\varphi f) \end{aligned}$$

Les propriétés élémentaires de l'opérateur de Toeplitz suivantes sont immédiates.

Proposition 3.2.3. Soient φ et ψ deux fonctions bornées sur \mathbb{T} . Alors,

- (1). Pour tous nombres complexes α et β , on a $T_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$,
- (2). L'opérateur identité I de $H^2(\mathbb{T})$ est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi = \mathbb{1}$ où $\mathbb{1}$ est la fonction constante qui vaut 1 pour tout $z \in \mathbb{T}$.

Proposition 3.2.4. L'application qui à toute fonction bornée φ associe l'opérateur de Toeplitz T_φ est injective. Autrement dit, si $T_\varphi = 0$, $\varphi = 0$.

Preuve. Si $T_\varphi = 0$, $T_\varphi(\zeta^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où ζ^n désigne le n -ème élément de la base orthonormée de H^2 . Soit maintenant $\varphi \sim \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \zeta^j$ le développement en série de Fourier de φ où $a_j = \langle \varphi, \zeta^j \rangle$.

Alors le développement en série de Fourier de $\varphi \zeta^n$ est $\varphi \zeta^n \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \zeta^{k+n}$ pour tout entier positif n avec $k = j - n$. Ainsi, $T_\varphi(\zeta^n) = P(\varphi \zeta^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ veut dire $a_k = 0$ pour $k + n \geq 0$ c'est-à-dire encore $a_k = 0$ pour tous les $k \geq -n$ donc $a_k = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}$ donc $\varphi = 0$. \square

Définition 3.2.5. Soit H un espace de Hilbert, K un sous espace fermé de H , P la projection orthogonale de H sur K , S un opérateur de H dans H et T un opérateur de K dans K . On dit que S est une dilatation de T ou bien T est une compression de S si $Tf = PSf$ pour tout $f \in K$.

En prenant, $H = L^2(\mathbb{T})$, $K = H^2(\mathbb{T})$, $S = M_\varphi$, l'opérateur de multiplication par φ , $T = T_\varphi$, l'opérateur de Toeplitz de symbole φ et P la projection de Riesz dans la Définition 3.2.5 précédente, on a le lien entre l'opérateur de Toeplitz et l'opérateur de multiplication M_φ suivante :

Proposition 3.2.6. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ telle que M_φ soit continu. Alors

- (1). L'opérateur de Toeplitz T_φ est une compression de l'opérateur de multiplication M_φ ,
- (2). Pour tous $f, g \in H^2(\mathbb{T})$, on a : $\langle M_\varphi f, g \rangle = \langle T_\varphi f, g \rangle$,
- (3). T_φ est positif si et seulement si M_φ est positif.

Preuve. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ telle que M_φ soit continu.

- (1). n'est autre que la définition de l'opérateur de Toeplitz
- (2). Puisque $f, g \in H^2(\mathbb{T})$ et $P^* = P$, on a :

$$\langle M_\varphi f, g \rangle = \langle M_\varphi f, P g \rangle = \langle P M_\varphi f, g \rangle = \langle T_\varphi f, g \rangle$$

- (3). Puisque $\langle M_\varphi f, f \rangle = \langle T_\varphi f, f \rangle$ pour tout $f \in H^2(\mathbb{T})$,

$$\langle T_\varphi f, f \rangle \geq 0 \text{ pour tout } f \in H^2(\mathbb{T}) \text{ si et seulement si } \langle M_\varphi f, f \rangle \geq 0 \text{ pour tout } f \in H^2(\mathbb{T}).$$

Ainsi, il suffit de montrer que M_φ est positif. Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, M_z^n est unitaire. Donc, pour tout $f \in H^2(\mathbb{T})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\langle M_\varphi f, f \rangle \geq 0 \text{ (} f \in H^2(\mathbb{T}) \text{)} \text{ si et seulement si } \langle M_z^n M_\varphi f, M_z^n f \rangle \geq 0 \text{ (} f \in H^2(\mathbb{T}) \text{)}.$$

Et puisque M_φ commute avec M_z ,

$$\langle M_\varphi f, f \rangle \geq 0 \quad (f \in H^2(\mathbb{T})) \text{ si et seulement si } \langle M_\varphi M_z^n f, M_z^n f \rangle \geq 0 \quad (f \in H^2(\mathbb{T})).$$

En particulier, pour $f = \mathbb{1}$, la fonction constante qui vaut 1 pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\langle M_\varphi \zeta^n, \zeta^n \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Et comme $\text{span} \{ \zeta^n : n \in \mathbb{Z} \}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$, $\langle M_\varphi f, f \rangle \geq 0$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ ce qui équivaut à dire M_φ est positif. □

Proposition 3.2.7. *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Nous avons*

- (1). *L'adjoint T_φ^* d'un opérateur de Toeplitz T_φ est un opérateur de Toeplitz de symbole $\bar{\varphi}$ c'est-à-dire $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$,*
- (2). *T_φ est hermitien si et seulement si φ est réel,*
- (3). *La matrice d'un opérateur de Toeplitz relativement à la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Toeplitz.*

Preuve. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors

- (1). D'après 2. de la Proposition 3.2.6, pour tous $f, g \in H^2(\mathbb{T})$, on a :

$$\langle f, T_\varphi g \rangle = \langle f, M_\varphi g \rangle.$$

Et comme $M_\varphi^* = M_{\bar{\varphi}}$, on a :

$$\langle f, T_\varphi g \rangle = \langle M_{\bar{\varphi}} f, g \rangle.$$

Ainsi,

$$\langle f, T_\varphi g \rangle = \langle M_{\bar{\varphi}} f, g \rangle = \langle T_{\bar{\varphi}} f, g \rangle.$$

Donc $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$.

- (2). T_φ hermitien veut dire $T_\varphi^* = T_\varphi$ c'est-à-dire $T_{\bar{\varphi}} = T_\varphi$. Donc T_φ est hermitien si et seulement si $\varphi = \bar{\varphi}$ c'est-à-dire φ est réelle.
- (3). Soit $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ la matrice de l'opérateur de Toeplitz relativement à la base orthonormée $\{ \zeta^n : n \in \mathbb{N} \}$ de $H^2(\mathbb{T})$. Alors pour tout entier positif k , on a :

$$a_{i+k, j+k} = \langle T_\varphi \zeta^{j+k}, \zeta^{i+k} \rangle = \langle \varphi \zeta^{j+k}, \zeta^{i+k} \rangle = \langle \varphi \zeta^j, \zeta^i \rangle = a_{ij}.$$

Donc $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ est une matrice de Toeplitz. □

Dans [51], Nikol'skiï définit les opérateurs de Toeplitz comme étant les opérateurs continus sur $H^2(\mathbb{T})$ dont la matrice relativement à la base orthonormée est une matrice de Toeplitz. Le théorème suivant montre que si la matrice d'un opérateur continu sur $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Toeplitz, cet opérateur est nécessairement un opérateur de Toeplitz.

Théorème 3.2.8 ([14]). *Si T est un opérateur continu sur $H^2(\mathbb{T})$ dont la matrice relativement à la base orthonormée $\{\zeta^n : n \in \mathbb{N}\}$ est une matrice de Toeplitz, T est un opérateur de Toeplitz.*

Preuve. Soit T un opérateur continu sur $H^2(\mathbb{T})$ tel que sa matrice relativement à la base usuelle $\{\zeta^n : n \in \mathbb{N}\}$ est une matrice de Toeplitz c'est-à-dire $\langle T\zeta^{j+1}, \zeta^{i+1} \rangle = \langle T\zeta^j, \zeta^i \rangle$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère sur $L^2(\mathbb{T})$ l'opérateur T_n défini par $T_n = M_z^{*n} T P M_z^n$.

Puisque $\|M_z^*\| = \|M_z\| = \|P\| = 1$, on a $\|T_n\| = \|T\|$. Ainsi, T_n est un opérateur continu sur $L^2(\mathbb{T})$.

Pour tout couple d'entiers $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$\langle T_n \zeta^j, \zeta^i \rangle = \langle M_z^{*n} T P M_z^n \zeta^j, \zeta^i \rangle = \langle T P M_z^n \zeta^j, M_z^n \zeta^i \rangle = \langle T P \zeta^{j+n}, \zeta^{i+n} \rangle = \langle T \zeta^{j+n}, \zeta^{i+n} \rangle = \langle T \zeta^j, \zeta^i \rangle.$$

Pour $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on peut toujours trouver un entier positif N tel que si $n \geq N$, $i+n$ et $j+n$ sont tous les deux positifs donc,

$$\langle T_n \zeta^j, \zeta^i \rangle = \langle T P \zeta^{j+n}, \zeta^{i+n} \rangle = \langle T \zeta^{j+n}, \zeta^{i+n} \rangle.$$

Puisque la matrice de T est une matrice de Toeplitz relativement à la base $\{\zeta^n : n \in \mathbb{N}\}$, la quantité $\langle T \zeta^{j+n}, \zeta^{i+n} \rangle$ ne dépend pas de n . Ainsi, pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la suite $(\langle T_n \zeta^j, \zeta^i \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang donc convergente. Et par linéarité, la suite $(\langle T_n p, q \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente pour tout couple de polynômes trigonométriques (p, q) . Comme les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^2(\mathbb{T})$, la suite $(\langle T_n f, g \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Ainsi, la suite $(T_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{T})$. On peut donc définir sur $L^2(\mathbb{T})$ un opérateur T_0 comme suit :

$$\begin{aligned} T_0 &: L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto T_0 f \end{aligned}$$

où $T_0 f$ étant la limite faible de la suite $(T_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $L^2(\mathbb{T})$.

De plus, $\|T_0 f\| \leq \liminf_n \|T_n f\|$ et comme $\liminf_n \|T_n f\| \leq \|T\| \|f\|$ (car $\|T_n\| \leq \|T\|$), T_0 est continu.

Et pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle T_0 \zeta^j, \zeta^i \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n \zeta^j, \zeta^i \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M_z^{*n} T P M_z^n \zeta^j, \zeta^i \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M_z^{*n+1} T P M_z^{n+1} \zeta^j, \zeta^i \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M_z^{*n} T P M_z^n \zeta^{j+1}, \zeta^{i+1} \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n \zeta^{j+1}, \zeta^{i+1} \rangle = \langle T_0 \zeta^{j+1}, \zeta^{i+1} \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de T_0 relativement à la base $\{\zeta^n : n \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Laurent et le Théorème 3.1.6 entraîne que T_0 est un opérateur de multiplication.

Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle P T_0 \zeta^j, \zeta^i \rangle &= \langle T_0 \zeta^j, \zeta^i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M_z^{*n} T P M_z^n \zeta^j, \zeta^i \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T P M_z^n \zeta^j, M_z^n \zeta^i \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T P \zeta^{j+n}, \zeta^{i+n} \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T \zeta^{j+n}, \zeta^{i+n} \rangle = \langle T \zeta^j, \zeta^i \rangle. \end{aligned}$$

Puisque $\{\zeta^n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base de $H^2(\mathbb{T})$, on a $P T_0 f = T f$ pour tout $f \in H^2(\mathbb{T})$ c'est-à-dire que T est la compression de l'opérateur de multiplication T_0 donc T est un opérateur de Toeplitz. \square

Notons que si $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ est la matrice d'un opérateur de Toeplitz par rapport à la base orthonormée usuelle de $H^2(\mathbb{T})$, pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$a_{ij} = \langle T_\varphi \zeta^j, \zeta^i \rangle = \langle \varphi \zeta^j, \zeta^i \rangle = \langle \varphi, \zeta^{i-j} \rangle = \widehat{\varphi}(i-j). \quad (3.2.2)$$

La relation (3.2.2) nous permet de récupérer le symbole φ à partir des coefficients de la matrice.

En effet, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \widehat{\varphi}(i) &= \langle T_\varphi \mathbb{1}, \zeta^i \rangle = a_{i0} \\ \widehat{\varphi}(-j) &= \langle T_\varphi \zeta^j, \mathbb{1} \rangle = a_{0j} \end{cases}$$

c'est-à-dire que les coefficients de Fourier d'indice positif de la fonction φ sont les éléments de la 0-ème colonne de la matrice et ceux d'indice négatif sont les éléments de la 0-ème ligne. L'unicité de la fonction φ est assurée par l'unicité des coefficients de Fourier.

Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs de Toeplitz à l'aide de l'opérateur shift.

Théorème 3.2.9 ([14] - p. 95). *Un opérateur T continu sur $H^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $M_z^* T M_z = T$.*

Preuve. D'après le Théorème 3.2.8, T est un opérateur de Toeplitz si et seulement si pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle T \zeta^{j+1}, \zeta^{i+1} \rangle = \langle T \zeta^j, \zeta^i \rangle.$$

Mais

$$\zeta^{j+1} = P(\zeta \zeta^j) = P(M_z \zeta^j) = T_z(\zeta^j).$$

D'où,

$$\langle T \zeta^{j+1}, \zeta^{i+1} \rangle = \langle T M_z \zeta^j, M_z \zeta^i \rangle = \langle M_z^* T M_z \zeta^j, \zeta^i \rangle.$$

Comme le sous espace engendré par les $\{\zeta^n : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $H^2(\mathbb{T})$, T est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $M_z^* T M_z = T$ sur $H^2(\mathbb{T})$. \square

Théorème 3.2.10. T_φ est un opérateur compact si et seulement si $\varphi = 0$.

Preuve. Il est clair que si $\varphi \equiv 0$, T_φ est l'opérateur nul, donc compact.

Réciproquement, supposons que T_φ est un opérateur compact. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n + k \geq 0$, on a :

$$\langle T_\varphi \zeta^n, \zeta^{n+k} \rangle = \langle \varphi \zeta^n, \zeta^{n+k} \rangle = \langle \varphi, \zeta^k \rangle = \widehat{\varphi}(k).$$

Puisque la suite $(\zeta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 et T_φ est compact, la suite $(T_\varphi \zeta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme de $H^2(\mathbb{T})$ (voir la proposition 3.3 de [22]). Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_\varepsilon$, $\|T_\varphi \zeta^n\|_2 \leq \varepsilon$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq \sup\{N_\varepsilon, -k\}$, on a :

$$|\widehat{\varphi}(k)| = \left| \langle \varphi, \zeta^k \rangle \right| = \left| \langle T_\varphi \zeta^n, \zeta^{n+k} \rangle \right| \leq \|T_\varphi \zeta^n\| \leq \varepsilon.$$

Donc, $\widehat{\varphi}(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\varepsilon > 0$ et donc $\varphi = 0$. \square

Nous allons maintenant voir quelques exemples particuliers d'opérateurs de Toeplitz.

Définition 3.2.11. On dit qu'un opérateur de Toeplitz T_φ est *analytique* (respectivement *anti-analytique*) si φ est analytique bornée (respectivement anti-analytique bornée) dans \mathbb{D} .

L'opérateur shift M_z et son adjoint $M_{\bar{z}}$ sont des opérateurs de Toeplitz de symbole respectifs $z : \zeta \mapsto \zeta$ et $\bar{z} : \zeta \mapsto \bar{\zeta}$. Ils sont respectivement des opérateurs de Toeplitz analytique et anti-analytique. Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs de Toeplitz analytiques en terme de l'opérateur shift.

Théorème 3.2.12. Soit T_φ un opérateur de Toeplitz continu sur $H^2(\mathbb{T})$. T_φ est analytique (respectivement anti-analytiques) si et seulement s'il commute avec M_z (respectivement avec $M_{\bar{z}}$).

Preuve. Soit T_φ est analytique c'est-à-dire φ est une fonction analytique bornée dans \mathbb{D} , pour toute fonction $f \in H^2(\mathbb{T})$, on a :

$$T_\varphi M_z(f) = T_\varphi P(zf) = P(\varphi zf) = \varphi zf = z\varphi f = M_z T_\varphi f.$$

Donc, $T_\varphi M_z = M_z T_\varphi$ sur $H^2(\mathbb{T})$.

Réciproquement, supposons que T_φ est un opérateur de Toeplitz qui commute avec M_z . Alors pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\widehat{\varphi}(-n) = \langle \varphi, \bar{\zeta}^n \rangle = \langle \varphi \zeta^n, \mathbb{1} \rangle = \langle T_\varphi \zeta^n, \mathbb{1} \rangle.$$

C'est-à-dire

$$\widehat{\varphi}(-n) = \langle T_\varphi \zeta^n, \mathbb{1} \rangle = \langle T_\varphi T_z^n \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = \langle T_z^n T_\varphi \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle = \langle T_\varphi \mathbb{1}, T_z^{*n} \mathbb{1} \rangle.$$

Mais

$$T_z^{*n} \mathbb{1} = T_{\bar{z}}^n \mathbb{1} = P(\bar{\zeta}^n) = 0 \text{ car pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } \langle \bar{\zeta}, \zeta^n \rangle = 0.$$

Ainsi, les coefficients de Fourier d'indice négatif de la fonction φ sont nuls c'est-à-dire φ est une fonction analytique.

Si φ est anti-analytique, $\bar{\varphi}$ est analytique. Et comme $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$, ce qui précède donne $T_\varphi^* M_z = M_z T_\varphi^*$. Par passage à l'adjoint, on obtient $M_z^* T_\varphi = T_\varphi M_z^*$. \square

En terme de matrice, on peut vérifier par de simples calculs que la matrice d'un opérateur de Toeplitz analytique (respectivement anti-analytique) relativement à la base orthonormée $\{\zeta^n : n \in \mathbb{N}\}$ de $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice triangulaire inférieure (respectivement triangulaire supérieure).

3.3 Produit d'opérateurs de Toeplitz dans l'espace de Hardy

Dans cette section, nous étudions le produit de deux opérateurs de Toeplitz. Bien que la somme de deux opérateurs de Toeplitz soit toujours un opérateur de Toeplitz, le résultat n'est pas vrai pour le produit. Le problème sur le produit d'opérateurs de Toeplitz a été étudié par A. Brown et P. R. Halmos dans [14].

Notons que si $\psi \in H^\infty(\mathbb{T})$, l'opérateur de Toeplitz T_ψ n'est autre que l'opérateur de multiplication par ψ sur $H^2(\mathbb{T})$. Par suite, si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ et $\psi \in H^\infty(\mathbb{T})$, pour toute fonction $f \in H^2(\mathbb{T})$, on a :

$$T_\varphi T_\psi(f) = T_\varphi(\psi f) = P(\varphi \psi f) = T_{\varphi \psi} f.$$

Donc le produit $T_\varphi T_\psi$ est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi \psi$.

De même, si φ est anti-analytique et $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, pour toute fonction $f \in H^2(\mathbb{T})$, on a :

$$\left(T_\varphi T_\psi\right)^*(f) = T_{\bar{\psi}} T_{\bar{\varphi}}(f) = T_{\bar{\varphi} \bar{\psi}}(f) = \left(T_{\varphi \psi}\right)^*(f).$$

Donc, $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi \psi}$.

Définition 3.3.1. Soit H un espace de Hilbert et $x, y \in H$. On définit sur H l'opérateur $x \otimes y$ par :

$$(x \otimes y)(z) = \langle z, y \rangle x. \quad (3.3.1)$$

On a les propriétés suivantes :

Lemme 3.3.2. Soient $x, y, z, t \in H \setminus \{0\}$ et A un opérateur continu sur H . Alors :

$$(1). \quad \|x \otimes y\| \leq \|x\| \|y\|,$$

- (2). $A(x \otimes y) = A(x) \otimes y$ et $(x \otimes y)A = x \otimes A^*(y)$,
- (3). $(x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y) = (x_1 + x_2) \otimes y$,
- (4). $(x \otimes y)(s \otimes t) = \langle s, y \rangle x \otimes t$
- (5). $x \otimes y = s \otimes t$ si et seulement si il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $x = \alpha s$ et $y = \bar{\alpha} t$.

Le lemme suivant sera utile dans les démonstrations des autres résultats.

Lemme 3.3.3. Soient T_φ et T_ψ des opérateurs de Toeplitz continus et M_z l'opérateur shift. Alors

$$M_z^* T_\varphi T_\psi M_z - T_\varphi T_\psi = P(\bar{\zeta}\varphi) \otimes P(\bar{\zeta}\bar{\psi}) \quad (3.3.2)$$

où P désigne la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $H^2(\mathbb{T})$ et $P(\bar{\zeta}\varphi) \otimes P(\bar{\zeta}\bar{\psi})$ est défini par (3.3.1).

Preuve. Notons que $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ est la projection orthogonale de $H^2(\mathbb{T})$ sur les fonctions constantes et que $I = M_z M_z^* + \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} M_z^* T_\varphi T_\psi M_z &= M_z^* T_\varphi (M_z M_z^* + \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) T_\psi M_z \\ &= M_z^* T_\varphi M_z M_z^* T_\psi M_z + M_z^* T_\varphi (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) T_\psi M_z \\ &= T_\varphi T_\psi + M_z^* T_\varphi (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) T_\psi M_z, \text{ (d'après le Théorème 3.2.9)} \\ &= T_\varphi T_\psi + M_z^* T_\varphi (\mathbb{1}) \otimes M_z^* T_\psi (\mathbb{1}). \end{aligned}$$

Et comme

$$M_z^* T_\varphi (\mathbb{1}) = (T_{\bar{\varphi}} T_z)^* (\mathbb{1}) = (T_{z\bar{\varphi}})^* (\mathbb{1}) = T_{z\bar{\varphi}} (\mathbb{1}) = P(\bar{\zeta}\varphi)$$

et

$$M_z^* T_{\bar{\psi}} (\mathbb{1}) = (T_\psi T_z)^* (\mathbb{1}) = (T_{z\psi})^* (\mathbb{1}) = T_{z\bar{\psi}} (\mathbb{1}) = P(\bar{\zeta}\bar{\psi}),$$

on a le résultat. □

Théorème 3.3.4 (Brown-Halmos). Pour $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si ou bien φ est anti-analytique, ou bien ψ est analytique. Dans les deux cas, on a $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$.

Preuve. D'après les remarques précédant la Définition 3.3.1, si ψ est analytique, $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$.

Si T_φ est anti-analytique, $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$ est analytique. Ainsi, $(T_\varphi T_\psi)^* = T_\psi^* T_\varphi^* = T_{\bar{\psi}} T_{\bar{\varphi}} = T_{\bar{\psi}\bar{\varphi}}$. Par suite, $T_\varphi T_\psi = (T_{\bar{\psi}\bar{\varphi}})^* = T_{\varphi\psi}$.

Réciproquement, supposons que $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz. D'après le Lemme 3.3.3,

$$M_\zeta^* T_\varphi T_\psi M_\zeta - T_\varphi T_\psi = P(\bar{\zeta}\varphi) \otimes P(\bar{\zeta}\bar{\psi}).$$

Et comme $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz, le Théorème 3.2.9 entraîne que $M_\zeta^* T_\varphi T_\psi M_\zeta = T_\varphi T_\psi$. Il s'ensuit que $P(\bar{\zeta}\varphi) \otimes P(\bar{\zeta}\bar{\psi}) = 0$ c'est-à-dire ou bien $P(\bar{\zeta}\varphi) = 0$ ou bien $P(\bar{\zeta}\bar{\psi}) = 0$.

- Supposons $P(\bar{\zeta}\varphi) = 0$. Notons $\varphi \sim \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(j)\zeta^j$ la série de Fourier de φ . On a $\bar{\zeta}\varphi = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(j+1)\zeta^j$. Donc, $P(\bar{\zeta}\varphi) = 0$ veut dire $\widehat{\varphi}(j+1) = 0$ pour tout $j+1 \geq 0$ c'est-à-dire $\widehat{\varphi}(j) = 0$ pour tout $j > 0$ donc φ est anti-analytique.
- Si $P(\bar{\zeta}\bar{\psi}) = 0$, pour la même raison que ci-dessus, les coefficients de Fourier d'indice positif de $\bar{\psi}$ sont nuls c'est-à-dire $\bar{\psi}$ est anti-analytique. Donc, T_ψ est analytique. \square

Nous allons maintenant voir quelques conséquences de ce théorème.

Corollaire 3.3.5. *Le produit de deux opérateurs de Toeplitz est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.*

Preuve. Supposons que $T_\varphi T_\psi = 0$. Puisque 0 est un opérateur de Toeplitz, le Théorème 3.3.4 implique que T_φ est analytique ou T_ψ est anti-analytique et que $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi} = 0$. Ainsi, $\varphi\psi = 0$.

- Si φ est analytique et $T_\varphi \neq 0$, le théorème de F. et M. Riesz entraîne que le sous ensemble $\{\zeta \in \mathbb{T} : \varphi(\zeta) = 0\}$ de \mathbb{T} est de mesure nulle. Ainsi, $\psi = 0$ et donc $T_\psi = 0$.
- D'une manière similaire, si $T_{\bar{\psi}}$ est analytique et $T_{\bar{\psi}} \neq 0$, le théorème de F. et M. Riesz entraîne que le sous ensemble $\{\zeta \in \mathbb{T} : \bar{\psi}(\zeta) = 0\}$ de \mathbb{T} est de mesure nulle. Ainsi, $\varphi = 0$ et donc $T_\varphi = 0$. \square

Corollaire 3.3.6. *Si T_φ est un opérateur de Toeplitz inversible, T_φ^{-1} est un opérateur de Toeplitz si et seulement si ou bien φ est analytique ou bien φ est anti-analytique.*

Preuve. Supposons que T_φ est inversible.

- Si φ est analytique, T_φ commute avec M_ζ . On a :

$$M_\zeta T_\varphi = T_\varphi M_\zeta \text{ c'est-à-dire } T_\varphi^{-1} M_\zeta T_\varphi = M_\zeta \text{ c'est-à-dire encore } T_\varphi^{-1} M_\zeta = M_\zeta T_\varphi^{-1}.$$

Et d'après le Théorème 3.2.12, T_φ^{-1} est un opérateur de Toeplitz analytique.

- Si φ est anti-analytique, on fait le même raisonnement en utilisant le fait que T_φ commute avec M_ζ^* . Et dans ce cas, T_φ^{-1} est un opérateur de Toeplitz anti-analytique.

Réciproquement, supposons que T_φ^{-1} est un opérateur de Toeplitz et notons $T_\varphi^{-1} = T_\psi$. On a :

$$T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi = I$$

Puisque $T_\varphi T_\psi = I$, le Théorème 3.3.4 entraîne que ou bien ψ est analytique ou bien $\bar{\varphi}$ est analytique.

De même, puisque $T_\psi T_\varphi = I$, ou bien φ est analytique ou bien $\bar{\psi}$ est analytique.

- Si φ est analytique, il n'y a rien à démontrer.

- Si $\bar{\varphi}$ n'est pas analytique, nécessairement ψ est analytique et non constante, ce qui implique que $\bar{\psi}$ n'est pas analytique donc φ est analytique.

□

Corollaire 3.3.7. *Les seuls opérateurs de Toeplitz idempotents sont 0 et I.*

Preuve. $T_\varphi^2 = T_\varphi$ si et seulement si $T_\varphi(T_\varphi - I) = 0$. Et comme $T_\varphi - I$ est un opérateur de Toeplitz, le Corollaire 3.3.5 entraîne que $T_\varphi = 0$ ou $T_\varphi - I = 0$ c'est-à-dire $T_\varphi = 0$ ou $T_\varphi = I$. □

On utilise la même technique de démonstration que le Théorème 3.3.4 pour la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz. Notons que dans ce théorème, si T_φ et T_ψ sont tous les deux analytiques ou tous les deux anti-analytiques, $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi} = T_\psi T_\varphi$. Le théorème suivant résume les résultats sur la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz dans $H^2(\mathbb{T})$.

Théorème 3.3.8. *Soient $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vraie :*

- (1). φ et ψ sont toutes les deux analytiques,
- (2). φ et ψ sont toutes les deux anti-analytiques,
- (3). il existe deux constantes a et b , non tous nuls tels que $a\varphi + b\psi$ est une fonction constante.

Preuve. Il est clair que si l'une des trois conditions est vraie, on a $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$.

Réciproquement, supposons que $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$. Le Lemme 3.3.2 entraîne que :

$$M_\zeta^* T_\varphi T_\psi M_\zeta - T_\varphi T_\psi = P(\bar{\zeta}\varphi) \otimes P(\bar{\zeta}\bar{\psi})$$

et

$$M_\zeta^* T_\psi T_\varphi M_\zeta - T_\psi T_\varphi = P(\bar{\zeta}\psi) \otimes P(\bar{\zeta}\bar{\varphi}).$$

Ainsi,

$$P(\bar{\zeta}\varphi) \otimes P(\bar{\zeta}\bar{\psi}) = P(\bar{\zeta}\psi) \otimes P(\bar{\zeta}\bar{\varphi}). \quad (3.3.3)$$

On a deux cas à considérer : ou bien l'un des quatre vecteurs $P(\bar{\zeta}\varphi)$, $P(\bar{\zeta}\bar{\psi})$, $P(\bar{\zeta}\psi)$ et $P(\bar{\zeta}\bar{\varphi})$ est égal à zéro ; ou bien aucun d'entre eux n'est nul.

- (1). Supposons qu'il y a un vecteur qui est égal à zéro. Alors il y a quatre possibilités.

- (a). Si $P(\bar{\zeta}\varphi) = 0$, ou bien $P(\bar{\zeta}\psi) = 0$ ou bien $P(\bar{\zeta}\bar{\varphi}) = 0$.

- Si $P(\bar{\zeta}\varphi) = P(\bar{\zeta}\psi) = 0$, les coefficients de Fourier d'indice positif de φ et de ψ sont tous nuls. Ainsi, T_φ et T_ψ sont tous les deux anti-analytiques c'est-à-dire on a la condition 2..
- Si $P(\bar{\zeta}\varphi) = P(\bar{\zeta}\bar{\varphi}) = 0$, φ est constante et on a la condition 3. avec $a = 1$ et $b = 0$

(b). Si $P(\bar{\zeta}\bar{\psi}) = 0$, ou bien $P(\bar{\zeta}\psi) = 0$ ou bien $P(\bar{\zeta}\bar{\varphi}) = 0$.

- Si $P(\bar{\zeta}\bar{\psi}) = P(\bar{\zeta}\psi) = 0$, ψ est constante et on a la condition 3. avec $a = 0$ et $b = 1$.
- Si $P(\bar{\zeta}\bar{\psi}) = P(\bar{\zeta}\bar{\varphi}) = 0$, les coefficients de Fourier d'indice négatif de φ et de ψ sont tous nuls. Ainsi, T_φ et T_ψ sont tous les deux analytique et on a la condition 1..

(2). Supposons qu'aucun des quatre vecteurs n'est nul.

Puisque $P(\bar{\zeta}\varphi) \otimes P(\bar{\zeta}\bar{\psi}) = P(\bar{\zeta}\psi) \otimes P(\bar{\zeta}\bar{\varphi})$, il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que :

$$P(\bar{\zeta}\varphi) = \alpha P(\bar{\zeta}\psi) \text{ et } P(\bar{\zeta}\bar{\varphi}) = \bar{\alpha} P(\bar{\zeta}\bar{\psi}).$$

Ce qui entraîne que :

$$P(\bar{\zeta}(\varphi - \alpha\psi)) = 0 \text{ et } P(\bar{\zeta}(\bar{\varphi} - \bar{\alpha}\bar{\psi})) = 0.$$

Ainsi, $\varphi - \alpha\psi$ est une fonction constante c'est-à-dire la condition 3. □

OPÉRATEURS DE TOEPLITZ DANS L'ESPACE DE BERGMAN HARMONIQUE

Dans ce chapitre, nous donnons les propriétés générales des opérateurs de Toeplitz définis dans l'espace de Bergman harmonique ainsi que des résultats récents concernant le produit de ces opérateurs.

La décomposition de l'espace de Bergman harmonique donnée par la relation (2.4.5) et la décomposition de la projection Q donnée dans (2.4.6) nous montrent que la théorie des opérateurs de Toeplitz définis dans l'espace de Bergman harmonique est intimement liée avec la théorie des opérateurs de Toeplitz définis dans l'espace de Bergman analytique. Ainsi, dans ce chapitre, nous notons par T_φ^a l'opérateur de Toeplitz de symbole φ défini sur L_a^2 et T_φ^h l'opérateur de Toeplitz de symbole φ défini sur L_b^2 .

4.1 Généralité sur les opérateurs de Toeplitz harmoniques

Dans cette section, nous rappelons la définition et quelques propriétés générales de l'opérateur de Toeplitz .

Définition 4.1.1. Pour $\varphi \in L^\infty$, l'opérateur de Toeplitz de symbole φ sur L_b^2 , noté T_φ^h , est défini sur L_b^2 par $T_\varphi^h(f) = Q(\varphi f)$ où Q désigne la projection orthogonale de L^2 sur L_b^2 .

Le fait que $\varphi \in L^\infty$ nous assure que $\varphi f \in L^2$ et T_φ^h est continue et les propriétés de l'opérateur de Toeplitz suivantes sont immédiates comme dans le cadre des l'espace de Hardy H^2 et l'espace de Bergman L_a^2 .

Proposition 4.1.2. Soient a, b des constantes et $\varphi, \psi \in L^\infty$. Alors nous avons :

- (1). $T_{\mathbb{1}}^h = I$ où $\mathbb{1}$ désigne la fonction constante qui vaut 1 pour tout $z \in \mathbb{D}$ et I est l'opérateur Identité,
- (2). $T_{a\varphi+b\psi}^h = aT_\varphi^h + bT_\psi^h$,
- (3). $(T_\varphi^h)^* = T_{\bar{\varphi}}^h$ où $(T_\varphi^h)^*$ désigne l'opérateur adjoint de T_φ^h .

La représentation intégrale donnée par la relation (2.4.2) montre que le domaine de définition de la projection Q de L^2 sur $L^2_{\mathbb{D}}$ peut être étendu à L^1 . On peut consulter le chapitre 8 de [7] pour les détails à ce sujet. Soit maintenant $\varphi \in L^1$ et considérons l'opérateur intégrale \widetilde{T}_φ^h défini par :

$$\widetilde{T}_\varphi^h(p)(z) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(\omega) p(\omega) \overline{R_z(\omega)} dA(\omega), \text{ où } p \text{ est un polynôme harmonique et } z \in \mathbb{D}. \quad (4.1.1)$$

Puisque le domaine de définition de Q peut être étendu à L^1 , pour tout polynôme harmonique p et toute $\varphi \in L^1$, $\widetilde{T}_\varphi^h(p) = Q(\varphi p)$ est bien défini. Comme les polynômes harmoniques sont denses dans $L^2_{\mathbb{D}}$, si \widetilde{T}_φ^h est continue, on peut étendre son domaine de définition à $L^2_{\mathbb{D}}$. Bien que l'opérateur défini dans (4.1.1) a un sens, il n'est pas continu en général. Dans [37], Guo et Zheng ont étudié en détail la continuité et la compacité des opérateurs de Toeplitz à symbole dans L^1 définis sur l'espace de Bergman harmonique. D'une manière générale, si le symbole φ est une fonction intégrable sur \mathbb{D} et s'il existe $r \in [0, 1[$ telle que φ soit bornée sur la couronne $\{z \in \mathbb{D} : r < |z| < 1\}$ alors l'opérateur défini par (4.1.1) est continu sur $L^2_{\mathbb{D}}$. En effet, le symbole φ peut s'écrire comme somme d'une fonction bornée et d'une fonction intégrable à support compact :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

où $\varphi_1 = \varphi \cdot \chi_{\{z \in \mathbb{D} : 0 \leq |z| \leq r\}}$, $\varphi_2 = \varphi \cdot \chi_{\{z \in \mathbb{D} : r < |z| < 1\}}$ et χ_E désigne la fonction caractéristique de l'ensemble E et T_{φ_1} est continu car à symbole borné et T_{φ_2} est continu car le symbole est à support compact. Donc on peut étendre la définition de l'opérateur de Toeplitz à beaucoup de fonction intégrable sur \mathbb{D} . Dans [48], Louhichi, Strouse et Zakariasy ont introduit la notion de **T-fonction** pour l'espace de Bergman usuel. Cette définition se généralise sans problème pour l'espace de Bergman harmonique.

Définition 4.1.3. Soit $\varphi \in L^1$.

- (1). On dit que $\varphi \in L^1$ est une **T-fonction** si l'opérateur \widetilde{T}_φ^h défini dans la relation (4.1.1) peut être prolongé en un opérateur borné sur $L^2_{\mathbb{D}}$.
- (2). Si φ est une T-fonction, on note par T_φ^h le prolongement par continuité de \widetilde{T}_φ^h sur $L^2_{\mathbb{D}}$ et on définit l'opérateur de Toeplitz de symbole φ sur $L^2_{\mathbb{D}}$ par :

$$T_\varphi^h(f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(\omega) f(\omega) \overline{R_z(\omega)} dA(\omega).$$

- (3). S'il existe $r \in (0, 1)$ tel que φ soit bornée sur la couronne $\{z \in \mathbb{D} : r < |z| < 1\}$, on dit que φ est *presque bornée*.

Généralement, l'ensemble des T-fonctions est un sous-ensemble propre de L^1 qui contient les fonctions bornées et les fonctions presque bornées.

On constate que si φ est une T-fonction, les propriétés énoncés dans la Proposition 4.1.2 sont vérifiées.

4.2 Produit d'opérateurs de Toeplitz

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité de la multiplication de deux opérateurs de Toeplitz. Plus précisément nous allons étudier la question suivante :

Question. *Etant données deux T-fonctions φ et ψ , existe-t-il une fonction χ telle que $T_\varphi T_\psi = T_\chi$?*

En 1964, Brown et Halmos [14] ont complètement répondu à cette question dans le cadre des opérateurs de Toeplitz définis dans l'espace de Hardy. Dans [14], ils ont montré que $T_\varphi T_\psi = T_\chi$ si et seulement si

- (1). φ et ψ sont toutes les deux analytiques, ou bien
- (2). φ et ψ sont toutes les deux anti-analytiques, ou bien
- (3). l'une d'elles est une fonction linéaire de l'autre.

Dans ce cas on a $\chi = \varphi\psi$ (Théorème 3.3.4).

Dans le cadre des espaces de Bergman, la situation est beaucoup plus compliquée. Il n'y a pas de caractérisation complète du produit de deux opérateurs de Toeplitz avec des symboles quelconques mais en se restreignant à des symboles appartenant à des classes particulières de fonction, on peut avoir des résultats significatifs.

Pour les opérateurs de Toeplitz définis sur l'espace de Bergman analytique, Ahern et Čučković ont étudié et ont montré dans [5] que si φ et ψ sont deux fonctions harmoniques bornées, ϑ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que $z \mapsto (1 - |z|^2)^2 \Delta \vartheta$ (où $\Delta \vartheta$ désigne le Laplacien de ϑ) est une fonction bornée sur \mathbb{D} et si $T_\varphi T_\psi = T_\vartheta$ alors l'une des deux conditions suivantes est vraie :

- (1). φ est anti-analytique ou bien
- (2). ψ est analytique.

Et dans les deux cas, on aura $\vartheta = \varphi\psi$.

En 2005, Louhichi, Strouse et Zakariasy ont étudié le produit de deux opérateurs de Toeplitz à symbole *quasihomogène* (Définition 5.3.1) dans [48]. Dans leur travaux, ils ont montré que dans l'espace de Bergman analytique, il existe des T-fonctions φ et ψ telles que le produit $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz mais ni φ est anti-analytique ni ψ est analytique.

Dans la suite, nous allons étudier le produit de deux opérateurs de Toeplitz dans l'espace de Bergman harmonique. Nous nous intéressons aux opérateurs de Toeplitz à symbole analytique. Le lemme suivant, démontré d'une autre manière dans [16], nous sera utile pour la démonstration du théorème principal.

Lemme 4.2.1. *Soit $f \in L_a^2$ telle que $f(0) = 0$. Alors nous avons pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$:*

$$(1). P(\bar{w}f)(z) = \frac{1}{z}f(z) - \frac{1}{z^2} \int_0^z f(\zeta) d\zeta,$$

$$(2). P(\omega \bar{f})(z) = \frac{1}{2} \overline{f'(0)} \text{ et}$$

$$(3). P(\bar{\omega} f)(0) = \frac{1}{2} f'(0).$$

où P désigne la projection orthogonale de L^2 sur L_a^2 et w est l'application coordonnée $w : z \in \mathbb{C} \mapsto z$.

Preuve. Soit $f \in L_a^2$ donnée par sa série de Taylor $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. On a pour chaque z fixé dans \mathbb{D} :

$$\begin{aligned} P(\bar{\omega} f)(z) &= \sum_{n \geq 0} a_n P(\bar{z} z^n) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{n}{n+1} z^{n-1} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 1} a_n z^n + \frac{1}{z^2} \sum_{n \geq 1} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{z} f(z) - \frac{1}{z^2} \int_0^z f(\zeta) d\zeta, \text{ pour } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Et la fonction $z \mapsto \frac{1}{z} f(z) - \frac{1}{z^2} \int_0^z f(\zeta) d\zeta$ admet un prolongement holomorphe sur \mathbb{D} car $f(0) = 0$ d'où 1. Puisque $P(z \bar{z}^k) = 0$ si $k > 1$, nous avons :

$$P(\omega \bar{f})(z) = \sum_{n \geq 0} \bar{a}_n P(z \bar{z}^n) = \frac{1}{2} \bar{a}_1 = \frac{1}{2} \overline{f'(0)}.$$

□

Théorème 4.2.2 ([16]). Soient φ et ψ deux T -fonctions qui sont toutes les deux analytiques ou toutes les deux anti-analytiques. Alors il existe une T -fonction χ telle que $T_\varphi^h T_\psi^h = T_\chi^h$ si et seulement si φ ou ψ est une fonction constante.

Preuve. Il est clair que si φ ou ψ est constante alors le produit $T_\varphi^h T_\psi^h$ est un opérateur de Toeplitz. Réciproquement, supposons que φ et ψ sont toutes les analytiques et χ est une T -fonction telle que $T_\varphi^h T_\psi^h = T_\chi^h$. En utilisant la décomposition de la relation (2.4.6), nous avons pour tout $f \in L_a^2$:

$$T_\chi^h(f) = Q(\chi f) = P(\chi f) + \overline{P(\bar{\chi} \bar{f})} - P(\chi f)(0)$$

où P désigne la projection de Bergman de L^2 sur L_a^2 . Et

$$T_\varphi^h T_\psi^h(f) = T_\varphi^a T_\psi^a(f) = T_{\varphi\psi}^a(f).$$

Ainsi,

$$\chi = \varphi\psi. \tag{4.2.1}$$

D'autre part, nous avons :

$$T_\chi^h(\bar{z}) = Q(\chi \bar{z}) = P(\chi \bar{z}) + \overline{P(\bar{\chi} z)} - P(\chi \bar{z})(0), \tag{4.2.2}$$

Et utilisant (2). et (3). du Lemme 4.2.1, nous avons :

$$T_\varphi^h T_\psi^h(\bar{z}) = T_\varphi^h(P(\psi \bar{z}) + \overline{P(\bar{\psi} z)} - P(\psi \bar{z})(0)) = Q(\varphi P(\psi \bar{z})) = \varphi P(\psi \bar{z}). \tag{4.2.3}$$

En identifiant (4.2.2) et (4.2.3) et en utilisant (4.2.1), nous avons :

$$P(\varphi\psi\bar{z}) = \varphi P(\psi\bar{z}).$$

Et d'après 1. du Lemme 4.2.1, nous avons :

$$\begin{aligned} P(\varphi\psi\bar{\omega})(z) &= \frac{1}{z}\varphi(z)\psi(z) - \frac{1}{z^2}\int_0^z \varphi(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta \\ (\varphi P(\psi\bar{\omega}))(z) &= \frac{1}{z}\varphi(z)\psi(z) - \frac{1}{z^2}\varphi(z)\int_0^z \psi(\zeta)d\zeta. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\int_0^z \varphi(\zeta)\psi(\zeta)d\zeta = \varphi(z)\int_0^z \psi(\zeta)d\zeta, \text{ pour } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}. \quad (4.2.4)$$

Et dérivant (4.2.4), nous avons pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$,

$$\varphi'(z)\int_0^z \psi(\zeta)d\zeta = 0. \quad (4.2.5)$$

La relation (4.2.5) veut dire que pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, soit $\varphi'(z) = 0$ c'est-à-dire φ est constante, soit $\int_0^z \psi(\zeta)d\zeta = 0$ c'est-à-dire $\psi = 0$. Ainsi, $T_\varphi^h T_\psi^h = T_\chi^h$ entraîne que φ ou ψ est une fonction constante.

Le cas φ et ψ sont toutes les deux anti-analytiques, il suffit de considérer l'opérateur adjoint dans la démonstration ci-dessus. \square

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 4.2.3. *Soient φ et ψ deux T -fonction vérifiant les hypothèses du Théorème 4.2.2. Alors $T_\varphi^h T_\psi^h = 0$ entraîne $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.*

En 2008, Ding a donné un autre résultat sur le produit de deux opérateurs de Toeplitz à symboles analytiques.

Théorème 4.2.4 (X. Ding, [23]). *Soient $\varphi, \psi \in L_a^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1). $T_\varphi^h T_\psi^h = T_\psi^h T_\varphi^h$,
- (2). $T_{\varphi\bar{\psi}}^h = T_{\bar{\psi}}^h T_\varphi^h$

OPÉRATEURS DE TOEPLITZ À SYMBOLE QUASIHOMOGÈNE

Dans ce chapitre, nous développons les résultats de [47] sur le produit et la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz dont les symboles appartiennent à une classe particulière de fonction. On appelle ces fonction des **fonctions quasihomogènes**. L'outil de base pour l'étude des opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène est la transformation de Mellin. Nous rappelons ici quelques propriétés élémentaires de cette transformation mais les détails peuvent être trouvés dans [64].

5.1 Transformation et coefficients de Mellin

Dans cette section, nous rappelons les propriétés essentielles de notre outil clé pour aboutir aux résultats principaux.

Définition 5.1.1. Soit φ une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ par rapport à la mesure $r dr$. La transformée de Mellin d'indice z de φ est notée par $\widehat{\varphi}(z)$ et est défini par :

$$\widehat{\varphi}(z) = \int_0^{\infty} \varphi(r) r^{z-1} dr$$

Dans notre cas, nous utilisons des fonctions de $L^1([0, 1[, r dr)$, considérées comme nulles p.p. sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Pour chaque $\varphi \in L^1([0, 1[, r dr)$, la fonction $z \mapsto \widehat{\varphi}(z)$ est bornée sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2\}$ et analytique sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 2\}$.

Les propriétés de la transformation de Mellin sont réunies dans la proposition suivante. Elle découle immédiatement de la définition.

Proposition 5.1.2. Soit $\varphi \in L^1([0, 1[, r dr)$. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 2$, on a :

- (1). $(r^\alpha \widehat{\varphi})(z) = \widehat{\varphi}(z + \alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et r^α est la fonction définie par $r \mapsto r^\alpha$,

(2). $(\widehat{r\varphi})'(z) = -z\widehat{\varphi}(z)$ si φ est dérivable presque partout sur $]0, 1[$.

Nous rappelons un théorème dont on déduit que la transformation de Mellin est injective. La démonstration du théorème est dans [52].

Théorème 5.1.3. Soit φ une fonction analytique bornée sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Si φ s'annule aux points z_1, z_2, \dots deux à deux distincts vérifiant :

(1). $\inf\{|z_n|\} > 0$ et

(2). $\sum_{n \geq 1} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right) = +\infty$,

alors φ est identiquement nulle sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Corollaire 5.1.4. Soit $\varphi \in L^1(]0, 1[, r dr)$ et supposons qu'il existe $n_0, p \in \mathbb{N}$ tels que $\widehat{\varphi}(n_0 + pk) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors $\widehat{\varphi}(z) = 0$ pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 2\}$ et donc $\varphi \equiv 0$.

Corollaire 5.1.5. Soit $(n_k)_{k \geq 0}$ une suite d'entiers positifs vérifiant :

$$n_k \geq 2 \text{ pour tout } k \geq 0 \text{ et } \sum_{k \geq 0} \frac{1}{n_k} = +\infty.$$

Si $\varphi \in L^1(]0, 1[, r dr)$ vérifie $\widehat{\varphi}(n_k) = 0$ pour tout $k \geq 0$, $\varphi \equiv 0$.

Preuve. Si $\widehat{\varphi}(n_k) = \int_0^1 \varphi(r) r^{n_k-1} r dr = 0$ pour tout $k \geq 0$, le Théorème 5.1.3 entraîne $\widehat{\varphi}(z) = 0$ pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 2\}$ et donc $\varphi \equiv 0$. \square

Dans notre étude des propriétés algébriques des opérateurs de Toeplitz, nous avons besoin de la convolution de Mellin.

Définition 5.1.6. Soient $\varphi, \psi \in L^1(]0, 1[, r dr)$. On définit la convolution de Mellin de φ et ψ par :

$$(\varphi * \psi)(r) = \int_r^1 \varphi\left(\frac{r}{s}\right) \psi(s) \frac{ds}{s}, \quad r \in]0, 1[.$$

Les propriétés suivantes découlent directement de la définition du produit de convolution.

Proposition 5.1.7. Soient $\varphi, \psi \in L^1(]0, 1[, r dr)$ et notons $\|\cdot\|_1$ la norme sur $L^1(]0, 1[, r dr)$. Alors

(1). $\varphi * \psi \in L^1(]0, 1[, r dr)$ et $\|\varphi * \psi\|_1 \leq \|\varphi\|_1 \|\psi\|_1$,

(2). la transformation de Mellin transforme le produit de convolution en un produit usuel, c'est-à-dire

$$(\widehat{\varphi * \psi})(z) = \widehat{\varphi}(z) \widehat{\psi}(z). \quad (5.1.1)$$

Le lemme suivant est un outil essentiel pour les démonstrations des différents résultats de ce chapitre.

Lemme 5.1.8 ([46]). Soient F et G deux fonctions analytiques, bornées et non identiquement nulles sur l'ensemble $\Pi_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 2\}$. S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$F(z)G(z+p) = F(z+p)G(z) \text{ pour } z \in \Pi_2, \quad (5.1.2)$$

il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $F = cG$.

Preuve. En remplaçant z dans (5.1.2) par $z_k = z + kp$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, on obtient la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} F(z)G(z+p) &= F(z+p)G(z) \\ F(z+p)G(z+2p) &= F(z+2p)G(z+p) \\ &\vdots = \vdots \\ F(z+(n-1)p)G(z+np) &= F(z+np)G(z+(n-1)p) \end{aligned}$$

En multipliant membre à membre cette suite d'égalités, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} F(z+kp) \prod_{k=1}^n G(z+kp) = \prod_{k=1}^n F(z+kp) \prod_{k=0}^{n-1} G(z+kp),$$

c'est-à-dire

$$F(z)G(z+np) = F(z+np)G(z) \quad (5.1.3)$$

D'autre part, puisque G est non identiquement nulle, il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\omega) > 2$ et $G(\omega) \neq 0$. Soit $Z(G) = \{k \in \mathbb{N} : G(\omega + kp) = 0\}$. Si $\sum_{k \in Z} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\omega + kp}\right) = \infty$, le Théorème 5.1.3 implique $G \equiv 0$ ce qui contredit l'hypothèse sur G . Ainsi, $\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus Z(G)} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\omega + kp}\right) = \infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus Z(G)$ et la relation (5.1.3) donne :

$$\frac{F(\omega + kp)}{G(\omega + kp)} = \frac{F(\omega)}{G(\omega)}$$

Soit $c = \frac{F(\omega)}{G(\omega)}$. On a $(F - cG)(\omega + kp) = 0$. Et en appliquant de nouveau le Théorème 5.1.3 à la fonction $z \mapsto F(z) - cG(z)$, on obtient $F - cG = 0$ donc $F = cG$ \square

5.2 Produit et commutativité des opérateurs de Toeplitz à symbole radial

Définition 5.2.1. Une fonction $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **radiale** si elle ne dépend que du module de z . Plus précisément, on dit que φ est radiale s'il existe une fonction $\tilde{\varphi} : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\varphi(z) = \varphi(re^{i\theta}) = \tilde{\varphi}(r) \text{ pour tout } z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Dans la suite, nous identifions la fonction radiale φ avec $\tilde{\varphi}$.

Définition 5.2.2. Soit φ une fonction définie et intégrable sur \mathbb{D} . On appelle radialisation de φ et on note par $\text{Rad}(\varphi)$ la fonction définie sur \mathbb{D} par :

$$\text{Rad}(\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(ze^{i\theta}) d\theta, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

En utilisant l'invariance par rotation de la mesure $d\theta$, on peut montrer que $\text{Rad}(\varphi) \in L^1$ et que $\varphi \in L^1$ est radiale si et seulement si $\varphi = \text{Rad}(\varphi)$.

Le lemme suivant, démontré dans [24], nous sera utile pour la suite.

Lemme 5.2.3. Soit φ une T -fonction radiale bornée. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$T_\varphi^h(z^k) = 2(k+1)\widehat{\varphi}(2k+2)z^k \quad \text{et} \quad T_\varphi^h(\bar{z}^k) = 2(k+1)\widehat{\varphi}(2k+2)\bar{z}^k.$$

Ceci montre que z^k et \bar{z}^k sont des vecteurs propres de T_φ^h .

Les propositions suivantes montrent que les opérateurs de Toeplitz à symbole radiale définis sur l'espace de Bergman harmonique partagent les mêmes propriétés que ceux définis dans l'espace de Bergman analytique. Les démonstrations des deux propositions sont identiques à celles données dans [48].

Proposition 5.2.4. Soient φ_1 et φ_2 deux T -fonctions radiales. S'il existe une T -fonction ψ telle que $T_{\varphi_1}^h T_{\varphi_2}^h = T_\psi^h$, ψ est radiale.

Proposition 5.2.5. Soient φ_1 et φ_2 deux T -fonctions radiales. Alors le produit $T_{\varphi_1}^h T_{\varphi_2}^h$ est un opérateur de Toeplitz T_ψ^h si et seulement si ψ est solution de l'équation :

$$\mathbb{1} * \psi = \varphi_1 * \varphi_2. \quad (5.2.1)$$

Corollaire 5.2.6. Si φ et ψ sont deux T -fonctions radiales, on a $T_\varphi^h T_\psi^h = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.

Preuve. Il est clair que si $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$, le produit $T_\varphi^h T_\psi^h = 0$. Réciproquement, si $T_\varphi^h T_\psi^h = 0$,

$$\begin{cases} (T_\varphi^h T_\psi^h)(z^k) = 0 \\ (T_\varphi^h T_\psi^h)(\bar{z}^k) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}$$

et le Lemme 5.2.3 entraîne $\widehat{\varphi}(2k+2)\widehat{\psi}(2k+2) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire il existe deux sous-ensembles E_1 et E_2 de \mathbb{N} définis respectivement par $E_1 = \{k \in \mathbb{N} : \widehat{\varphi}(2k+2) = 0\}$ et $E_2 = \{k \in \mathbb{N} : \widehat{\psi}(2k+2) = 0\}$, vérifiant $E_1 \cup E_2 = \mathbb{N}$. Notons que l'une des deux séries $\sum_{k \in E_1} \frac{1}{2k}$ et $\sum_{k \in E_2} \frac{1}{2k}$ doit être divergente car sinon, $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2k}$ est convergente ce qui n'est pas vraie. Si $\sum_{k \in E_1} \frac{1}{2k}$ est convergente, le Corollaire 5.1.5 entraîne $\varphi = 0$ et si $\sum_{k \in E_2} \frac{1}{2k}$ est convergente, le Corollaire 5.1.5 entraîne $\psi = 0$. \square

5.3 Produit d'opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène

Dans la section 5.2, nous avons vu que les opérateurs de Toeplitz à symbole radiale définis sur l'espace de Bergman harmonique ont des propriétés identiques à celles des opérateurs de Toeplitz à symbole radiale définis dans l'espace de Bergman analytique. Dans cette section, nous allons montrer que ce n'est plus le cas avec les opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène.

Soit $\mathcal{R} := L^2([0, 1[, r dr)$ et rappelons qu'à chaque $\varphi \in \mathcal{R}$, on peut lui associer une fonction radiale que nous notons par abus de notation φ dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$. Puisque d'une part les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$ et d'autre part, $(e^{ip_1\theta} \mathcal{R}) \perp (e^{ip_2\theta} \mathcal{R})$ si $p_1 \neq p_2$, nous avons la décomposition :

$$L^2(\mathbb{D}, dA) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} e^{ip\theta} \mathcal{R}, \quad (5.3.1)$$

c'est-à-dire que toute fonction $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ se décompose sous la forme :

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\theta} \varphi_k(r) \quad \text{où } z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \text{ et } \varphi_k \in \mathcal{R}. \quad (5.3.2)$$

De plus si $f \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ se décompose comme dans (5.3.2), nous avons, pour tout $r \in [0, 1[$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$|\varphi_k(r)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta \right| \leq \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Donc les fonctions φ_p sont bornées sur \mathbb{D} .

Bien que la décomposition décrite par la relation (5.3.2) n'existe pas pour les fonctions dans $L^1(\mathbb{D}, dA)$, nous considérons dans la suite des T-fonctions dans $L^1(\mathbb{D}, dA)$ qui sont de la forme $e^{ip\theta} \varphi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et φ fonction radiale. Les opérateurs associés aux symboles de ces formes sont appelés les **opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène de degré p** .

Définition 5.3.1. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Une fonction f définie sur \mathbb{D} est dite **quasihomogène de degré p** s'il existe une fonction radiale φ telle que pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on peut écrire $f(re^{i\theta}) = e^{ip\theta} \varphi(r)$. Si de plus f est une T-fonction, l'opérateur de Toeplitz T_f^h associé est dit *opérateur de Toeplitz quasihomogène de degré p* .

Les formules données dans le lemme suivant nous seront utiles pour la suite. Elles donnent les images de z^k et de \bar{z}^k , pour $k \in \mathbb{N}$, par un opérateur de Toeplitz quasihomogène.

Lemme 5.3.2 ([24]). Soit $p \in \mathbb{Z}$ et φ une fonction radiale bornée. Alors pour chaque $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$T_{e^{ip\theta} \varphi}^h(z^k) = \begin{cases} 2(k+p+1) \widehat{\varphi}(2k+p+2) z^{k+p} & \text{si } k \geq -p \\ 2(-k-p+1) \widehat{\varphi}(-p+2) \bar{z}^{-k-p} & \text{si } k < -p \end{cases}$$

et

$$T_{e^{ip\theta} \varphi}^h(\bar{z}^k) = \begin{cases} 2(k-p+1) \widehat{\varphi}(2k-p+2) \bar{z}^{k-p} & \text{si } k \geq p \\ 2(p-k+1) \widehat{\varphi}(p+2) z^{p-k} & \text{si } k < p \end{cases}$$

Preuve. Rappelons que d'après la relation (2.4.6) on a :

$$T_{e^{ip\theta}\varphi}^h(f) = P(e^{ip\theta}\varphi f)(z) + \overline{P(e^{-ip\theta}\overline{\varphi f})(z)} - P(e^{ip\theta}\varphi f)(0). \quad (5.3.3)$$

Donc pour établir le lemme, on pose $f = \omega^k$ et on calcule les trois quantités ci-dessus.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} P(e^{ip\theta}\varphi\omega^k)(z) &= \int_{\mathbb{D}} \varphi(\zeta) e^{ip\theta} \zeta^k \overline{K_z(\zeta)} dA(\zeta) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varphi(r) r^k e^{i(p+k)\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n e^{-in\theta} z^n r dr d\theta \\ &= \int_0^1 \varphi(r) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^{2\pi} e^{i(p+k-n)\theta} d\theta z^n r^{k+n} r dr \\ &= \begin{cases} 2(k+p+1)\widehat{\varphi}(2k+p+2)z^{k+p} & \text{si } k+p-n=0 \\ 0 & \text{si } k+p-n \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Mais on ne peut pas avoir $p+k-n=0$ que dans le cas où $p+k \geq 0$ c'est-à-dire $k \geq -p$ (car sinon on a toujours $p+k-n \neq 0$). Donc la relation (5.3.4) donne

$$P(e^{ip\theta}\varphi\omega^k)(z) = \begin{cases} 2(p+k+1)\widehat{\varphi}(2k+p+1)z^{k+p} & \text{si } k \geq -p \\ 0 & \text{si } k < -p. \end{cases}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} P(e^{-ip\theta}\overline{\varphi}\overline{\omega^k})(z) &= \int_{\mathbb{D}} \overline{\varphi(\zeta)} e^{-ip\theta} \overline{\zeta^k} \overline{K_z(\zeta)} dA(\zeta) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varphi(r) r^k e^{-i(p+k)\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n e^{-in\theta} z^n r dr d\theta \\ &= \int_0^1 \varphi(r) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^{2\pi} e^{-i(p+k+n)\theta} d\theta z^n r^{k+n} r dr \\ &= \begin{cases} 2(-k-p+1)\widehat{\varphi}(-p+2)z^{-k-p} & \text{si } k+p+n=0 \\ 0 & \text{si } k+p+n \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

et $p+k+n=0$ si et seulement si $p+k < 0$ c'est-à-dire $k < -p$. Donc la relation (5.3.5) donne

$$P(e^{-ip\theta}\overline{\varphi}\overline{\omega^k})(z) = \begin{cases} 2(-k-p+1)\widehat{\varphi}(-p+2)z^{-k-p} & \text{si } k < -p \\ 0 & \text{si } k \geq -p. \end{cases}$$

En appliquant la relation (5.3.3), on a

$$\begin{aligned} T_{e^{ip\theta}\varphi}(z^k) &= P(e^{ip\theta}\varphi z^k) + \overline{P(e^{-ip\theta}\overline{\varphi}\overline{z^k})} - P(e^{ip\theta}\varphi z^k)(0) \\ &= \begin{cases} 2(k+p+1)\widehat{\varphi}(2k+p+2)z^{p+k} & \text{si } k \geq -p \\ 2(-k-p+1)\widehat{\varphi}(-p+2)\overline{z}^{-k-p} & \text{si } k < -p \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
P(e^{ip\theta} \varphi \bar{\omega}^k)(z) &= \int_{\mathbb{D}} \varphi(\zeta) e^{ip\theta} \bar{\zeta}^k \overline{K_z(\zeta)} dA(\zeta) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varphi(r) r^k e^{i(p-k)\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n e^{-in\theta} z^n r dr d\theta \\
&= \int_0^1 \varphi(r) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^{2\pi} e^{i(p-k-n)\theta} d\theta z^n r^{k+n} r dr \\
&= \begin{cases} 2(-k+p+1) \widehat{\varphi}(p+2) z^{k+p} & \text{si } p-k-n=0 \\ 0 & \text{si } p-k-n \neq 0. \end{cases} \quad (5.3.6)
\end{aligned}$$

Comme $p-k-n=0$ si et seulement si $p-k \geq 0$ c'est-à-dire $p \geq k$, la relation (5.3.6) donne

$$P(e^{ip\theta} \varphi \bar{\omega}^k)(z) = \begin{cases} 2(p-k+1) \widehat{\varphi}(p+2) z^{k+p} & \text{si } k \geq p \\ 0 & \text{si } p < k \end{cases}$$

Et

$$\begin{aligned}
P(e^{-ip\theta} \overline{\varphi} \omega^k)(z) &= \int_{\mathbb{D}} \overline{\varphi(\zeta)} e^{-ip\theta} \zeta^k \overline{K_z(\zeta)} dA(\zeta) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \overline{\varphi(r)} r^k e^{i(k-p)\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n e^{-in\theta} z^n r dr d\theta \\
&= \int_0^1 \overline{\varphi(r)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^{2\pi} e^{i(k-p-n)\theta} d\theta z^n r^{k+n} r dr \\
&= \begin{cases} 2(k-p+1) \widehat{\overline{\varphi}}(2k-p+2) z^{k-p} & \text{si } k-p-n=0 \\ 0 & \text{si } k-p-n \neq 0. \end{cases} \quad (5.3.7)
\end{aligned}$$

Comme $k-p-n=0$ si et seulement si $k-p \geq 0$ c'est-à-dire $k \geq p$, la relation (5.3.7) donne

$$P(e^{-ip\theta} \overline{\varphi} \omega^k)(z) = \begin{cases} 2(k-p+1) \widehat{\overline{\varphi}}(2k-p+2) z^{k-p} & \text{si } k \geq p \\ 0 & \text{si } p < k \end{cases}$$

En appliquant la relation (5.3.3), on a

$$\begin{aligned}
T_{e^{ip\theta} \varphi}(\bar{z}^k) &= P(e^{ip\theta} \varphi \bar{z}^k) + \overline{P(e^{-ip\theta} \overline{\varphi} z^k)} - P(e^{ip\theta} \varphi \bar{z}^k)(0) \\
&= \begin{cases} 2(k-p+1) \widehat{\varphi}(2k-p+2) \bar{z}^{k-p} & \text{si } k \geq p \\ 2(p-k+1) \widehat{\varphi}(p+2) z^{p-k} & \text{si } k < p \end{cases}
\end{aligned}$$

Notons que l'interversion du signe Σ et f ne pose aucun problème car les intégrales sont finies et la série est normalement convergente. \square

Le lemme 5.3.2 ci-dessus nous montre que pour $p, k \in \mathbb{Z}$, l'image de $r^{|k|} e^{ik\theta}$ par un opérateur de Toeplitz quasihomogène de degré p est $\lambda_{p,k} r^{|p+k|} e^{i(p+k)\theta}$ pour un certain $\lambda_{p,k} \in \mathbb{C}$.

Lemme 5.3.3. Soit f une fonction bornée sur \mathbb{D} . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que $T_f^h(z^k) = \lambda_k z^k$,
- (2). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que $T_f^h(\bar{z}^k) = \lambda_k \bar{z}^k$

Preuve. Supposons que 1. soit vraie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\langle T_f^h(\bar{z}^k), \bar{z}^n \rangle = \langle f z^n, z^k \rangle = \langle \lambda_n z^n, z^k \rangle = \delta_{n,k} \lambda_k \langle z^k, z^n \rangle = \delta_{n,k} \langle \lambda_k \bar{z}^k, \bar{z}^n \rangle$$

où $\delta_{n,k}$ désigne le symbole de Kronecker. Et par un calcul similaire, nous avons :

$$\langle T_f^h(\bar{z}^k), z^n \rangle = \delta_{n,k} \langle \lambda_k \bar{z}^k, z^n \rangle$$

Puisque la famille $\mathcal{B}_h = \left\{ \psi_n(z) = \sqrt{n+1} z^n ; n \geq 0 \text{ et } z \in \mathbb{D} \right\} \cup \left\{ \bar{\psi}_n(z) = \sqrt{n+1} \bar{z}^n ; n > 0 \text{ et } z \in \mathbb{D} \right\}$ est une base orthonormale de L_h^2 , nous avons :

$$T_f^h(\bar{z}^k) = \lambda_k \bar{z}^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

La réciproque se démontre de la même manière. □

La proposition suivante donne une caractérisation complète des opérateurs de Toeplitz quasihomogène de degré p .

Proposition 5.3.4. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et f une fonction bornée sur \mathbb{D} . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1). Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante $\lambda_k \in \mathbb{C}$ telle que $T_f^h(r^k e^{ik\theta}) = \lambda_k r^{|p+k|} e^{i(p+k)\theta}$.
- (2). f est quasihomogène de degré p .

Preuve. Si f est quasihomogène de degré p , on a (1). est une conséquence du Lemme 5.3.2.

Réciproquement, supposons que (1). est vraie et soit $k \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$T_{\bar{f}}^h(\bar{\omega}^k)(z) = Q(\bar{f} \bar{\omega}^k)(z) = \langle \bar{f} \bar{\omega}^k, K_z + \bar{K}_z - 1 \rangle = \overline{\langle f \omega^k, K_z + \bar{K}_z - 1 \rangle} = \overline{T_f^h(\omega^k)(z)} = \bar{\lambda}_k r^{|p+k|} e^{-i(p+k)\theta}$$

Ainsi, pour $p \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} T_{\bar{z}^p f}^h(z^k) &= \langle \bar{\omega}^p f \omega^k, K_z + \bar{K}_z - 1 \rangle \\ &= \langle f \omega^k, \omega^p K_z \rangle + \langle \bar{\omega}^p, \bar{f} \bar{\omega}^k (\bar{K}_z - 1) \rangle \\ &= \langle f \omega^k, \omega^p \sum_{j \geq 0} (j+1) \bar{z}^j \omega^j \rangle + \langle \bar{\omega}^p, \bar{f} \bar{\omega}^k \sum_{j \geq 1} (j+1) z^j \bar{\omega}^j \rangle \\ &= \sum_{j \geq 0} (j+1) \bar{z}^j \langle f \omega^k, \omega^{p+j} \rangle + \sum_{j \geq 1} (j+1) z^j \langle \bar{\omega}^p, \bar{f} \bar{\omega}^{k+j} \rangle \\ &= \sum_{j \geq 0} (j+1) \bar{z}^j \langle T_f^h(\omega^k), \omega^{p+j} \rangle + \sum_{j \geq 1} (j+1) \bar{z}^j \langle \bar{\omega}^p, T_{\bar{f}}^h(\bar{\omega}^{k+j}) \rangle \\ &= \sum_{j \geq 0} (j+1) \bar{z}^j \langle \lambda_k \omega^{k+p}, \omega^{p+j} \rangle + \sum_{j \geq 1} (j+1) \bar{z}^j \langle \bar{\omega}^p, \bar{\lambda}_{k+j} \bar{\omega}^{k+j+p} \rangle \\ &= \frac{\lambda_k (k+1)}{p+k+1} z^k. \end{aligned}$$

et pour $p < 0$, nous avons :

$$T_{z^{-p}f}^h(z^k) = \langle f\omega^{k-p}, K_z + \overline{K_z} - 1 \rangle = \langle T_f^h(\omega^{k-p}), K_z + \overline{K_z} - 1 \rangle = \langle \lambda_{k-p}\omega^k, K_z + \overline{K_z} - 1 \rangle = \lambda_{k-p}z^k.$$

Et en définissant φ sur \mathbb{D} par $\varphi(re^{i\theta}) = r^{|p|}e^{-ip\theta} f(re^{i\theta})$, ($z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$), nous avons

$$T_\varphi^h(z^k) = \beta_k z^k \text{ pour un certain } \beta_k \in \mathbb{C}. \quad (5.3.8)$$

Montrons maintenant que φ est une fonction radiale, ce qui montrera que f est quasihomogène de degré p . Pour cela, il suffit de montrer que $\text{Rad}(\varphi) = \varphi$.

En calculant les intégrales et en changeant l'ordre d'intégration, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle T_{\text{Rad}(\varphi)}^h z^k, z^n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \varphi(e^{it}\omega) \omega^k \overline{\omega}^n dA(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt \right) \int_{\mathbb{D}} \varphi(\omega) \omega^k \overline{\omega}^n dA(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt \right) \langle T_\varphi^h z^k, z^n \rangle \\ &= \begin{cases} \langle T_\varphi^h z^k, z^n \rangle & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\langle T_{\text{Rad}(\varphi)}^h z^k, \overline{z}^n \rangle = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{i(k+n)t} dt \right) \langle T_\varphi^h z^k, z^n \rangle = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, par (5.3.8), nous avons

$$\langle T_{\text{Rad}(\varphi)}^h z^k, z^n \rangle = \langle T_\varphi^h z^k, z^n \rangle \text{ et } \langle T_{\text{Rad}(\varphi)}^h z^k, \overline{z}^n \rangle = \langle T_\varphi^h z^k, \overline{z}^n \rangle$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc,

$$T_{\text{Rad}(\varphi)}^h z^k = T_\varphi^h z^k. \quad (5.3.9)$$

De plus, par la relation (5.3.8) et le Lemme 5.3.3, nous avons :

$$T_{\text{Rad}(\varphi)}^h \overline{z}^k = \beta_k \overline{z}^k, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Et donc, par un raisonnement similaire, nous avons :

$$T_{\text{Rad}(\varphi)}^h \overline{z}^k = T_\varphi^h \overline{z}^k. \quad (5.3.10)$$

Par les relations (5.3.9) et (5.3.10), nous déduisons que $T_{\text{Rad}(\varphi)}^h = T_\varphi^h$ ce qui entraîne que $\text{Rad}(\varphi) = \varphi$. Donc φ est une fonction radiale et f est quasihomogène de degré p . \square

La proposition suivante donne le premier résultat sur le produit de deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes sur l'espace de Bergman harmonique.

Proposition 5.3.5 (Dong - Zhou, [24]). *Soient f et g deux fonctions quasihomogènes de degré respectifs p et s , et bornées sur \mathbb{D} . S'il existe une fonction h bornée sur \mathbb{D} telle que $T_f^h T_g^h = T_h^h$, h est une fonction quasihomogène de degré $p + s$.*

Preuve. Puisque g est une fonction quasihomogène de degré s , la Proposition 5.3.4 entraîne pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$T_g^h(r^k e^{ik\theta}) = \lambda_s r^{|s+k|} e^{i(s+k)\theta}, \text{ pour un certain } \lambda_s \in \mathbb{C}.$$

De même, puisque f est quasihomogène de degré p , nous avons,

$$T_f^h T_g^h(r^k e^{ik\theta}) = \lambda_s T_f^h(r^{|s+k|} e^{i(s+k)\theta}) = \lambda_s \lambda_p r^{|p+|s+k||} e^{i(p+s+k)\theta}$$

où λ_s et λ_p sont des constantes. Il s'ensuit que si $T_f^h T_g^h = T_h^h$, h est une fonction quasihomogène de degré $p + s$ d'après la Proposition 5.3.4. \square

Nous avons la caractérisation des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes idempotents suivante :

Corollaire 5.3.6. *Si f est une fonction quasihomogène de degré p non nul tel que $(T_f^h)^2 = T_f^h$, f est identiquement nulle.*

Preuve. Puisque f est quasihomogène de degré p , la Proposition 5.3.4 entraîne que $2p = p$ c'est-à-dire que $p = 0$. \square

Nous allons maintenant donner une application concret de produit d'opérateurs de Toeplitz quasihomogènes.

Proposition 5.3.7. *Soient $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p, s \in \mathbb{Z}$. Alors $T_{e^{ip\theta} r^m}^h T_{e^{is\theta} r^n}^h$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $p = s = 0$. Dans ce cas, nous avons :*

$$T_{e^{ip\theta} r^m}^h T_{e^{is\theta} r^n}^h = \begin{cases} \frac{m}{m-n} T_{r^m}^h - \frac{n}{m-n} T_{r^n}^h & \text{si } m \neq n \\ T_{r^{m(1+m \log r)}}^h & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Preuve. En effet, si $T_{e^{ip\theta} r^m}^h T_{e^{is\theta} r^n}^h$ est un opérateur de Toeplitz, la Proposition 5.3.5 entraîne qu'il existe une fonction radiale φ telle que $T_{e^{ip\theta} r^m}^h T_{e^{is\theta} r^n}^h = T_{e^{i(p+s)\theta} \varphi}^h$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k + s$ et $k + p + s$ sont positifs ou nuls, l'égalité :

$$T_{e^{ip\theta} r^m}^h T_{e^{is\theta} r^n}^h(z^k) = T_{e^{i(p+s)\theta} \varphi}^h(z^k)$$

et le Lemme 5.3.2 donnent :

$$\widehat{(r^m)}(2k + 2s + p + 2) \widehat{(r^n)}(2k + s + 2) = \frac{1}{2k + 2s + 2} \widehat{\varphi}(2k + p + s + 2). \quad (5.3.11)$$

Soit $\ell = \min \{0, p, s, p + s\}$. Par (5.3.11) et (5.1.1), nous avons :

$$\left((r^{m+p+s-\ell}) * (r^{n-\ell}) \right)^\wedge (2k + s + \ell + 2) = \left((r^{s-\ell} * r^{p-\ell} \varphi) \right)^\wedge (2k + s + \ell + 2).$$

Considérons maintenant la fonction F définie par :

$$F(z) = \left((r^{m+p+s-\ell}) * (r^{n-\ell}) \right)^\wedge (z) - \left((r^{s-\ell} * r^{p-\ell} \varphi) \right)^\wedge (z).$$

Il est clair que F est analytique et bornée sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ d'après la propriété de la transformée de Mellin. De plus, la suite $(z_k)_k$ des zéros de F définie par $z_k = 2k + s + \ell + 2$ vérifie les conditions du Théorème 5.1.3. Ainsi, $F \equiv 0$. Par conséquent,

$$(r^{m+p+s-\ell}) * (r^{n-\ell}) = r^{s-\ell} * r^{p-\ell} \chi. \quad (5.3.12)$$

Mais la relation (5.3.12) équivaut à :

$$r^{m+p} \int_r^1 t^{n-m-p-s-1} dt = \int_r^1 \varphi(t) t^{p-s-1} dt. \quad (5.3.13)$$

En dérivant la relation (5.3.13) par rapport à r , nous avons :

$$\varphi_1(r) = \begin{cases} \frac{m+p}{m+p-n+s} r^{m+s} - \frac{n-s}{m+p-n+s} r^{n-p} & \text{si } m+p-n+s \neq 0 \\ r^{m+s} (1 + (m+p) \log r) & \text{si } m+p-n+s = 0. \end{cases} \quad (5.3.14)$$

En faisant le même raisonnement avec l'égalité

$$T_{e^{ip\theta} r^m}^h T_{e^{is\theta} r^n}^h (\bar{z}^k) = T_{e^{i(p+s)\theta} \chi}^h (\bar{z}^k),$$

nous avons :

$$(r^{m-\ell}) * (r^{n+p+s-\ell}) = r^{p-\ell} * r^{s-\ell} \chi. \quad (5.3.15)$$

Ce qui donne

$$\varphi_2(r) = \begin{cases} \frac{m-p}{m-p-n-s} r^{m-s} - \frac{n+s}{m-p-n-s} r^{n+p} & \text{si } m-p-n-s \neq 0 \\ r^{m-s} (1 + (m-p) \log r) & \text{si } m-p-n-s = 0. \end{cases} \quad (5.3.16)$$

Mais d'après l'hypothèse, il faut que les deux fonctions définies dans (5.3.14) et (5.3.16) soient identiques c'est-à-dire $\varphi_1(r) = \varphi_2(r)$. Pour cela, nous avons deux cas :

1^{er} cas : $m + p - n + s = 0$ alors $\varphi_1(r) = \varphi_2(r)$ si et seulement si

$$\begin{cases} m + s = m - s \\ m + p = m - p \end{cases} \quad \text{et } m - p - n - s = 0.$$

ce qui donne $m = n$ et $p = s = 0$. Donc $\varphi(r) = r^m (1 + m \log r)$

2^e cas Pour $m + p - n + s \neq 0$, $\varphi_1(r) = \varphi_2(r)$ si

$$\begin{cases} m + s = m - s \\ n + p = n - p \end{cases} \quad \text{et } m - p - n - s \neq 0 \quad (5.3.17)$$

ou

$$\begin{cases} m + s = n + p \\ n - p = m - s \end{cases} \quad \text{et } m - p - n - s \neq 0 \quad (5.3.18)$$

La relation (5.3.17) avec l'hypothèse $m + p - n + s \neq 0$ donne $m \neq n$ et $p = s = 0$.

La relation (5.3.18) équivaut à :

$$\begin{cases} m + s = n + p \\ n - p = m - s \end{cases} \quad \text{et } m - p - n - s \neq 0$$

c'est-à-dire $p - s = s - p$ et $m - p - n - s \neq 0$. Mais $p - s = s - p$ si et seulement si $p - s = 0$ c'est-à-dire $p = s$. Donc (5.3.18) donne $m = n$ et $p = s$.

Par hypothèse, $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc on a encore deux possibilités ou bien $m = n$ et $p = s \neq 0$ ou bien $m = n$ et $p = s = 0$.

- Si $m = n$ et $p = s = 0$, on a une contradiction avec l'hypothèse $m + p - n + s \neq 0$.
- Si $m = n$ et $p = s \neq 0$ et sans rien perdre de généralité, supposons de plus que $p, s > 0$ car dans le cas contraire on considère l'adjoint. Par la relation (5.3.14), nous avons :

$$\varphi(r) = \frac{m+p}{2p} r^{m+p} - \frac{m-p}{2p} r^{m-p}$$

et par l'égalité

$$T_{e^{ip\theta} r^m}^h T_{e^{ip\theta} r^m}^h(\bar{z}^p) = T_{e^{2ip\theta} \chi}^h(\bar{z}^p),$$

nous avons :

$$\frac{4(p+1)}{(m+p+2)^2} = \frac{(m+p)(p+1)}{p(m+3p+2)} - \frac{(m-p)(p+1)}{p(m+p+2)}.$$

Ainsi, $p(p+m) = 0$. Ce qui contredit le fait que $p > 0$ et $m > 0$.

Donc les seules possibilités sont :

- $m = n$ et $p = s = 0$ si $m - p - n - s = 0$ et dans ce cas $\varphi(r) = r^m(1 + m \log r)$
- $m \neq n$ et $p = s = 0$ si $m - p - n - s \neq 0$ et dans ce cas $\varphi(r) = \frac{m}{m-n} r^m - \frac{n}{m-n} r^n$.

□

Un résultat analogue de la Proposition 5.3.7 est obtenu par Louhichi, Strouse et Zakariasy dans le cadre de l'espace de Bergman analytique ([48]).

Le théorème suivant montre que le produit d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène et d'un opérateur de Toeplitz radial ne peut être un opérateur de Toeplitz que dans le cas trivial.

Théorème 5.3.8. Soit p un entier non nul et φ une fonction radiale bornée. S'il existe une fonction radiale ψ telle que $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_\psi^h$ est un opérateur de Toeplitz, ψ doit être constante.

Preuve. Supposons d'abord que $p > 0$. D'après la Proposition 5.3.5, si le produit $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_\psi^h$ est un opérateur de Toeplitz, il doit être de la forme :

$$T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_\psi^h = T_{e^{ip\theta}\chi}^h, \quad \text{où } \chi \text{ est une fonction radiale.} \quad (5.3.19)$$

Et par le Lemme 5.3.2, nous avons :

$$T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_\psi^h(z^k) = 2(k+1)\widehat{\psi}(2k+2)2(k+p+1)\widehat{\varphi}(2k+p+2)z^{k+p} \quad \text{si } k \geq 0$$

et

$$T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_\psi^h(\bar{z}^k) = \begin{cases} 2(k+1)\widehat{\psi}(2k+2)2(k-p+1)\widehat{\varphi}(2k-p+2)\bar{z}^{k-p} & \text{si } k \geq p \\ 2(k+1)\widehat{\psi}(2k+2)2(p-k+1)\widehat{\varphi}(p+2)z^{p-k} & \text{si } 0 \leq k \leq p. \end{cases}$$

De même, nous avons :

$$T_{e^{ip\theta}\chi}^h(z^k) = 2(k+p+1)\widehat{\chi}(2k+p+2)z^{k+p} \quad \text{si } k \geq 0$$

et

$$T_{e^{ip\theta}\chi}^h(\bar{z}^k) = \begin{cases} 2(k-p+1)\widehat{\chi}(2k-p+2)\bar{z}^{k-p} & \text{si } k \geq p \\ 2(p-k+1)\widehat{\chi}(p+2)z^{p-k} & \text{si } 0 \leq k < p. \end{cases}$$

En combinant (5.3.19) avec la série d'égalités ci-dessus, nous avons :

$$2(k+1)\widehat{\psi}(2k+2)\widehat{\varphi}(2k+p+2) = \widehat{\chi}(2k+p+2) \quad \text{si } k \geq 0 \quad (5.3.20)$$

$$2(k+1)\widehat{\psi}(2k+2)\widehat{\varphi}(2k-p+2) = \widehat{\chi}(2k-p+2) \quad \text{si } k \geq p \quad (5.3.21)$$

En remplaçant k par $k+p$ dans (5.3.21), nous avons :

$$2(k+p+1)\widehat{\psi}(2k+2p+2)\widehat{\varphi}(2k+p+2) = \widehat{\chi}(2k+p+2) \quad \text{si } k \geq 0. \quad (5.3.22)$$

En combinant (5.3.20) et (5.3.22), nous avons :

$$[2(k+1)\widehat{\psi}(2k+2) - 2(k+p+1)\widehat{\psi}(2k+2p+2)]\widehat{\varphi}(2k+p+2) = 0 \quad \text{pour } k \geq 0. \quad (5.3.23)$$

Notons E le sous-ensemble de \mathbb{N} défini par $E = \{k \in \mathbb{N} : \varphi(2k+p+2) = 0\}$. Puisque $\varphi \neq 0$ par hypothèse, le Théorème 5.1.3 entraîne $\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus E} \frac{1}{2k+p+2} = \infty$. De plus, pour $k \in \mathbb{N} \setminus E$, nous avons :

$$2(k+1)\widehat{\psi}(2k+2) = 2(k+p+1)\widehat{\psi}(2k+2p+2). \quad (5.3.24)$$

Soit $\mathbb{1}$ la fonction constante qui vaut 1 pour tout $t \in]0, 1[$. Puisque $\widehat{\mathbb{1}}(z) = \frac{1}{z}$, l'égalité (5.3.24) équivaut à

$$\widehat{\mathbb{1}}(2k+2p+2)\widehat{\psi}(2k+2) = \widehat{\mathbb{1}}(2k+2)\widehat{\psi}(2k+2p+2) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \setminus E. \quad (5.3.25)$$

En appliquant le Corollaire 5.1.4 à la fonction $z \mapsto \widehat{\mathbb{1}}(z+2p)\widehat{\psi}(z) - \widehat{\mathbb{1}}(z)\widehat{\psi}(z+2p)$, on obtient :

$$\widehat{\mathbb{1}}(z+2p)\widehat{\psi}(z) = \widehat{\mathbb{1}}(z)\widehat{\psi}(z+2p).$$

En prenant $F(z) = \widehat{\mathbb{1}}(z)$ et $G(z) = \widehat{\psi}(z)$, les fonctions F et G vérifient l'hypothèse du Lemme 5.1.8. Donc il existe une constante c telle que $G = cF$ c'est-à-dire $\psi = c\mathbb{1}$. En faisant le même raisonnement, on montre que le résultat est encore vrai pour le cas $p < 0$. \square

5.4 Commutativité des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes

Après avoir étudié le produit de deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes, nous allons maintenant considérer leur commutativité.

On a vu dans la section 5.2 la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz à symbole radiale c'est-à-dire les opérateurs de Toeplitz quasihomogènes de degré nul et dans la suite on étudiera le cas où $p \neq 0$ ou $s \neq 0$. Pour cela, on fixe $p \neq 0$ et $\varphi \neq 0$ une T-fonction radiale et on considère

$$\mathcal{Q}_p(s) := \left\{ \psi : \psi \text{ est une T-fonction radiale telle que } T_{e^{ip\theta}\psi}^h T_{e^{is\theta}\psi}^h = T_{e^{is\theta}\psi}^h T_{e^{ip\theta}\psi}^h \right\}$$

et on verra que si $s = 0$ (Théorème 5.4.1), $\mathcal{Q}_p(s) = \mathbb{C}\mathbb{1}$ et si $ps > 0$ ou $ps < 0$ (Théorème 5.4.5 et Théorème 5.4.9), ou $\mathcal{Q}_p(s) = \emptyset$ ou il existe une T-fonction radiale ψ_0 telle que $\mathcal{Q}_p(s) = \mathbb{C}\psi_0$.

Il a été montré dans [49] que dans l'espace de Bergman analytique, un opérateur de Toeplitz quasihomogène de degré non nul ne commute avec les opérateurs de Toeplitz à symbole radiale que dans le cas trivial. Le théorème suivant montre que ce résultat reste vrai dans l'espace de Bergman harmonique.

Théorème 5.4.1 ([49]). *Soient p un entier non nul, φ et ψ deux T-fonctions radiales. Si $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h$ commute avec T_{ψ}^h , ou bien ψ est constante ou bien φ est nulle.*

Preuve. Supposons que $p > 0$. Si $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{\psi}^h = T_{\psi}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h$,

$$2(k+p+1)\widehat{\varphi}(2k+p+2)\widehat{\psi}(2k+2p+2) = 2(k+1)\widehat{\varphi}(2k+p+2)\widehat{\psi}(2k+2) \text{ pour } k \geq 0. \quad (5.4.1)$$

Soient E le sous-ensemble de \mathbb{N} défini par $E = \{k \in \mathbb{N} : \widehat{\varphi}(2k+p+2) = 0\}$. On a deux éventualités :

- (1). Si $\sum_{k \in E} \frac{1}{2k+p+2} = \infty$, le Théorème 5.1.3 entraîne $\varphi \equiv 0$.

(2). Si $\sum_{k \in E} \frac{1}{2k+p+2} < \infty$, $\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus E} \frac{1}{2k+p+2} = \infty$ et pour $k \in \mathbb{N} \setminus E$, la relation (5.4.1) devient :

$$(2k+2p+2)\widehat{\psi}(2k+2p+2) = (2k+2)\widehat{\psi}(2k+2)$$

c'est-à-dire

$$\widehat{\mathbb{1}}(2k+2)\widehat{\psi}(2k+2p+2) = \widehat{\mathbb{1}}(2k+2p+2)\widehat{\psi}(2k+2) \quad (5.4.2)$$

On applique le Corollaire 5.1.4 à la fonction $z \mapsto \widehat{\mathbb{1}}(z)\widehat{\psi}(z+2p) - \widehat{\mathbb{1}}(z+2p)\widehat{\psi}(z)$ et on obtient

$$\widehat{\mathbb{1}}(z)\widehat{\psi}(z+2p) = \widehat{\mathbb{1}}(z+2p)\widehat{\psi}(z)$$

Maintenant si on pose $F(z) = \widehat{\mathbb{1}}(z)$ et $G(z) = \widehat{\psi}(z)$, la relation (5.4.2) montre que les fonctions F et G vérifient l'hypothèse du Lemme 5.1.8. Ainsi, il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $\psi = c\mathbb{1}$.

Pour le cas $p < 0$, il suffit de considérer les opérateurs adjoints. □

Lemme 5.4.2. Soient ψ une fonction radiale bornée et f une fonction bornée qui se décompose sous la forme (5.3.2) c'est-à-dire

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\theta} \varphi_n(r) \quad \text{où } z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \text{ et } \varphi_n \in \mathcal{R}.$$

Alors T_f^h commute avec T_ψ^h si et seulement si T_ψ^h commute avec chaque $T_{e^{ip\theta}\varphi_n}^h$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Preuve. Puisque f est bornée, il en est de même pour chaque φ_n pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Et pour chaque $k > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} T_f^h T_\psi^h(z^k) &= (2k+2)\widehat{\psi}(2k+2) \sum_{n \in \mathbb{Z}} T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h(z^k) \\ &= (2k+2)\widehat{\psi}(2k+2) \left(\sum_{n < -k} T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h(z^k) + \sum_{n \geq -k} T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h(z^k) \right) \\ &= (2k+2)\widehat{\psi}(2k+2) \sum_{n < -k} 2(-k-n+1)\widehat{\varphi}_n(-n+2)\bar{z}^{-k-n} \\ &\quad + (2k+2)\widehat{\psi}(2k+2) \sum_{n \geq -k} 2(k+n+1)\widehat{\varphi}_n(2k+n+2)z^{k+n}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout couple d'entiers positif (ℓ, k) , nous avons :

$$\langle T_f^h T_\psi^h z^k, z^\ell \rangle = 2(2k+2)\widehat{\psi}(2k+2)\widehat{\varphi}_{\ell-k}(\ell+k+2)$$

et

$$\langle T_f^h T_\psi^h z^k, \bar{z}^\ell \rangle = 2(2k+2)\widehat{\psi}(2k+2)\widehat{\varphi}_{-\ell-k}(\ell+k+2)$$

On obtient un résultat similaire si on applique $T_f^h T_\psi^h z^k$ pour tout $k > 0$.

D'autre part, si on pose

$$\zeta_k(z) = \begin{cases} z^k & \text{si } k \geq 0 \\ \bar{z}^{|k|} & \text{si } k < 0 \end{cases}, \text{ alors}$$

$$\langle T_f^h T_\psi^h \zeta^k, \zeta^\ell \rangle = 2(2k+2)\widehat{\psi}(2k+2)C_{\ell,k}$$

où $C_{\ell,k}$ désigne l'un des coefficients de Mellin $\widehat{\varphi}_{\ell-k}(\ell+k+2)$, $\widehat{\varphi}_{-\ell-k}(\ell+k+2)$, $\widehat{\varphi}_{k-\ell}(\ell+k+2)$ et $\widehat{\varphi}_{\ell+k}(\ell+k+2)$.

En faisant le même calcul, nous avons :

$$\langle T_f^h T_\psi^h \zeta^k, \zeta^\ell \rangle = 2(2\ell+2)\widehat{\psi}(2\ell+2)C_{\ell,k}, \text{ pour tout } \ell, k \in \mathbb{Z}.$$

Maintenant, si $T_f^h T_\psi^h = T_\psi^h T_f^h$, nous avons pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ et $\ell, k > 0$,

$$\begin{aligned} \langle T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h T_\psi^h \zeta_k, \zeta_\ell \rangle &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq k+n \\ 2(2k+2)\widehat{\psi}(2k+2)\widehat{\varphi}_{\ell-k}(\ell+k+2) & \text{si } \ell = k+n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq k+n \\ \langle T_f^h T_\psi^h z^k, z^\ell \rangle & \text{si } \ell = k+n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq k+n \\ \langle T_\psi^h T_f^h z^k, z^\ell \rangle & \text{si } \ell = k+n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq k+n \\ 2(2\ell+2)\widehat{\psi}(2\ell+2)\widehat{\varphi}_{\ell-k}(\ell+k+2) & \text{si } \ell = k+n \end{cases} \\ &= \langle T_\psi^h T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h z^k, z^\ell \rangle. \end{aligned}$$

En faisant un calcul similaire, on montre que pour tous $\ell, k \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$\langle T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h T_\psi^h z^k, z^\ell \rangle = \langle T_\psi^h T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h z^k, z^\ell \rangle.$$

Il s'ensuit que pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, $T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h T_\psi^h = T_\psi^h T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h$.

Réciproquement, si $T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h T_\psi^h = T_\psi^h T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h$ alors pour tous $\ell, k \in \mathbb{Z}$, il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\langle T_f^h T_\psi^h \zeta_k, \zeta_\ell \rangle = \langle T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h T_\psi^h \zeta_k, \zeta_\ell \rangle = \langle T_\psi^h T_{e^{in\theta}\varphi_n}^h \zeta_k, \zeta_\ell \rangle = \langle T_\psi^h T_f^h \zeta_k, \zeta_\ell \rangle \quad (5.4.3)$$

Ainsi, $T_f^h T_\psi^h = T_\psi^h T_f^h$. □

La proposition suivante montre que les opérateurs de Toeplitz à symbole radiale ne commutent qu'avec les opérateurs de Toeplitz à symbole radiale.

Proposition 5.4.3. *Soit φ une fonction radiale bornée non identiquement nulle et f une fonction bornée qui se décompose sous la forme (5.3.2). Si T_φ^h commute avec T_f^h , f doit être une fonction radiale.*

Preuve. Puisque T_f^h commute avec T_φ^h , le Lemme 5.4.2 entraîne que T_φ^h commute avec $T_{e^{in\theta}\varphi_n}$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$. Et en utilisant le Théorème 5.4.1, on conclut que $\varphi_n = 0$ pour tout $n \neq 0$ et donc $f = \varphi_0$. □

Nous rappelons la série d'égalités suivantes qui sont obtenues par des calculs directs en utilisant le Lemme 5.3.2.

Lemme 5.4.4. *Soient p, s deux entiers positifs tels que $p < s$, φ et ψ deux fonctions radiales bornées vérifiant*

$$T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{is\theta}\psi}^h = T_{e^{is\theta}\psi}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h, \quad (5.4.4)$$

alors

- Pour tout $k \geq 0$, en appliquant (5.4.4) à z^k , on a :

$$(k+p+1)\widehat{\varphi}(2k+p+2)\widehat{\psi}(2k+2p+s+2) = (k+s+1)\widehat{\psi}(2k+s+2)\widehat{\varphi}(2k+2s+p+2). \quad (5.4.5)$$

En appliquant (5.4.4) à \bar{z}^k , on a :

- Pour tout $0 \leq k < p$,

$$(s-k+1)\widehat{\varphi}(2s-2k+p+2)\widehat{\psi}(s+2) = (p-k+1)\widehat{\psi}(2p-2k+s+2)\widehat{\varphi}(p+2). \quad (5.4.6)$$

- Pour tout $p \leq k < s$,

$$(k-s+1)\widehat{\varphi}(p+2)\widehat{\psi}(2k-s+2) = (k-p+1)\widehat{\psi}(s+2)\widehat{\varphi}(2k-p+2). \quad (5.4.7)$$

- Pour tout $s \leq k < p+s$,

$$(k-s+1)\widehat{\varphi}(p+s)\widehat{\psi}(2k-s+2) = (k-p+1)\widehat{\psi}(s+2)\widehat{\varphi}(2k-p+2). \quad (5.4.8)$$

- Pour $p+s \leq k$,

$$(k-s+1)\widehat{\varphi}(2k-2s-p+1)\widehat{\psi}(2k-s+2) = (k-p+1)\widehat{\psi}(2k-2p-s+2)\widehat{\varphi}(2k-p+2). \quad (5.4.9)$$

Le théorème suivant montre que pour p et s deux entiers positifs fixés, l'opérateur de Toeplitz quasihomogène de degré s qui commute avec un autre de degré p est unique à une multiplication par une constante près.

Théorème 5.4.5 ([47]). *Soient p, s deux entiers positifs et φ une fonction radiale bornée et non identiquement nulle. S'il existe une fonction radiale bornée ψ telle que $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{is\theta}\psi}^h = T_{e^{is\theta}\psi}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h$, ψ est unique à une multiplication par une constante près.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux fonctions radiales bornées ψ_1 et ψ_2 telles que $T_{e^{is\theta}\psi_1}^h$ et $T_{e^{is\theta}\psi_2}^h$ commutent avec $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h$. Alors la relation (5.4.5) implique que pour tout $k \geq 0$, nous avons :

$$(k+p+1)\widehat{\varphi}(2k+p+2)\widehat{\psi}_1(2k+2p+s+2) = (k+s+1)\widehat{\varphi}(2k+2s+p+2)\widehat{\psi}_1(2k+s+2)$$

et

$$(k+p+1)\widehat{\varphi}(2k+p+2)\widehat{\psi}_2(2k+2p+s+2) = (k+s+1)\widehat{\varphi}(2k+2s+p+2)\widehat{\psi}_2(2k+s+2)$$

Soit $E = \{k \in \mathbb{N} : \widehat{\varphi}(2k+p+2) = 0\}$. Puisque $\varphi \neq 0$, on a $\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus E} \frac{1}{2k+p+2} = \infty$. Mais pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus E$, nous avons :

$$\widehat{\psi}_1(2k+2p+s+2)\widehat{\psi}_2(2k+s+2) = \widehat{\psi}_2(2k+2p+s+2)\widehat{\psi}_1(2k+s+2) \quad (5.4.10)$$

Considérons maintenant la fonction H définie par :

$$H(z) = \widehat{r^s \psi_1}(z+2p)\widehat{r^s \psi_2}(z) - \widehat{r^s \psi_1}(z+2p)\widehat{r^s \psi_1}(z) \text{ pour } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

La suite $(z_k)_k$ des zéros de H , définie par $z_k = 2k + s + 2$ vérifie les hypothèses du Théorème 5.1.3 donc $H = 0$ et donc

$$\widehat{r^s \psi_1}(z+2p)\widehat{r^s \psi_2}(z) = \widehat{r^s \psi_1}(z+2p)\widehat{r^s \psi_1}(z).$$

En prenant $F(z) = \widehat{r^s \psi_1}(z)$ et $G(z) = \widehat{r^s \psi_2}(z)$ dans le Lemme 5.1.8, il existe une constante c telle que $\psi_1 = c\psi_2$. \square

On a le corollaire suivant qui montre que deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes de même degré ne commutent que dans le cas trivial.

Corollaire 5.4.6. *Soient φ et ψ deux fonctions radiales bornées et p un entier positif. Si $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h$ commute avec $T_{e^{ip\theta}\psi}^h$, il existe une constante c telle que $\varphi = c\psi$.*

La proposition suivante nous donne un application concrète du Théorème 5.4.5.

Proposition 5.4.7. *Soient p, s deux entiers positifs tels que $p \leq s$ et $-1 < \alpha$ un nombre réel. S'il existe une T -fonction radiale ψ telle que $T_{e^{is\theta}\psi}^h$ commute avec $T_{e^{ip\theta}\psi}^h$, on a soit $\psi = 0$, soit $s = p$ et il existe une constante c telle que $\psi = cr^\alpha$.*

Preuve. Nous distinguons les cas $\widehat{\psi}(s+2) = 0$ et $\widehat{\psi}(s+2) \neq 0$.

(1). Supposons que $\widehat{\psi}(s+2) \neq 0$ et notons φ la fonction définie sur $]0, 1[$ par $\varphi(r) = r^\alpha$. Puisque $\widehat{\varphi}(n) = \frac{1}{n+\alpha}$ ($n \in \mathbb{N}$) et $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{is\theta}\psi}^h = T_{e^{is\theta}\psi}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h$, la relation (5.4.9) donne l'équation :

$$\frac{k-p+1}{2k-p+2+\alpha} = \frac{s-k+1}{2s-2k+p+2+\alpha}, \text{ pour } p \leq k \leq s. \quad (5.4.11)$$

L'équation (5.4.11) équivaut à

$$(k-p+1)(2s-2k+p+2+\alpha) = (s-k+1)(2k-p+2+\alpha)$$

c'est-à-dire

$$2ks-2ps+2s-p^2+3kp-\alpha p-p-2k^2+\alpha k+\alpha+2 = 2ks-ps+\alpha s+2s+kp-p-2k^2-\alpha k+\alpha+2.$$

Ce qui donne

$$(p + \alpha)(2k - (p + s)) = 0.$$

Par hypothèse, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\alpha > -1$ est un réel, on ne peut pas avoir $p + \alpha = 0$. Donc l'unique possibilité est $(2k - (p + s)) = 0$. Mais l'égalité (5.4.11) doit être vraie pour $k = p, p + 1, \dots, s$ donc $k = p = s$ et en appliquant le Théorème 5.4.6, nous avons $\psi = cr^\alpha$.

(2). Supposons que $\widehat{\psi}(s + 2) = 0$. La relation (5.4.6) donne :

$$\widehat{\psi}(2p - 2k + s + 2) = 0, \text{ pour } 0 \leq k \leq p. \quad (5.4.12)$$

En particulier, on a $\widehat{\psi}(2(1) + s + 2) = 0$. Alors par (5.4.12), $\widehat{\psi}(2(1 + mp) + s + 2) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et d'après le Corollaire 5.1.4, $\widehat{\psi}(z) = 0$ pour $z \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 2\}$ et donc $\psi = 0$. □

Dans ce qui précède, nous avons étudié la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes dont les degrés sont de même signe. Nous allons maintenant étudier la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz dont les degrés sont de signe opposé.

Nous avons besoin du lemme suivant dans la démonstration des résultats qui suivront. Il découle du Lemme 5.3.2

Lemme 5.4.8. *Soient p, s deux entiers positifs tels que $p < s$ et φ, ψ deux T -fonctions radiales.*

Si

$$T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{-is\theta}\psi}^h = T_{e^{-is\theta}\psi}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h, \quad (5.4.13)$$

nous avons les égalités suivantes :

En appliquant (5.4.13) à z^k , on a

- pour $k \leq s - p$,

$$(k + p + 1)\widehat{\varphi}(2k + p + 2) = (s - k + 1)\widehat{\varphi}(2s - 2k - p + 2) \text{ si } p \leq s, \quad (5.4.14)$$

- pour $s - p \leq k < s$,

$$(k + p + 1)\widehat{\varphi}(2k + p + 2)\widehat{\psi}(2k + 2p - s + 2) = (s - k + 1)\widehat{\varphi}(p + 2)\widehat{\psi}(s + 2), \quad (5.4.15)$$

- pour $s \leq k$,

$$(k + p + 1)\widehat{\varphi}(2k + p + 2)\widehat{\psi}(2k + 2p - s + 2) = (k - s + 1)\widehat{\varphi}(2k - 2s + p + 2)\widehat{\psi}(2k - s + 2), \quad (5.4.16)$$

En appliquant (5.4.13) à \bar{z}^k , on a :

- pour $0 \leq k < p$,

$$(k + s + 1)\widehat{\varphi}(2k + 2s - p + 2)\widehat{\psi}(2k + s + 2) = (p - k + 1)\widehat{\varphi}(p + 2)\widehat{\psi}(s + 2), \quad (5.4.17)$$

- pour $p \leq k$,

$$(k-p+1)\widehat{\varphi}(2k-p+2)\widehat{\psi}(2k-2p+s+2) = (k+s+1)\widehat{\varphi}(2k+2s-p+2)\widehat{\psi}(2k+s+2). \quad (5.4.18)$$

Nous commençons par l'unicité du commutant.

Théorème 5.4.9 ([47]). *Soient p, s deux entiers positifs et ψ une T -fonction radiale non constante. S'il existe une T -fonction radiale non constante φ telle que $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{-is\theta}\psi}^h = T_{e^{-is\theta}\psi}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h$, φ est unique à une multiplication par une constante près.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux fonctions radiales non constantes φ_1 et φ_2 telles que $T_{e^{ip\theta}\varphi_1}^h$ et $T_{e^{ip\theta}\varphi_2}^h$ commutent avec $T_{e^{-is\theta}\psi}^h$. Alors par (5.4.16), nous avons pour tout $k \geq s$:

$$(k+p+1)\widehat{\varphi}_1(2k+p+2)\widehat{\psi}(2k+2p-s+2) = (k-s+1)\widehat{\varphi}_1(2k-2s+p+2)\widehat{\psi}(2k-s+2) \quad (5.4.19)$$

et

$$(k+p+1)\widehat{\varphi}_2(2k+p+2)\widehat{\psi}(2k+2p-s+2) = (k-s+1)\widehat{\varphi}_2(2k-2s+p+2)\widehat{\psi}(2k-s+2) \quad (5.4.20)$$

De (5.4.19) et (5.4.20), nous avons :

$$\widehat{\varphi}_1(2k+p+2)\widehat{\varphi}_2(2k-2s+p+2) = \widehat{\varphi}_1(2k-2s+p+2)\widehat{\varphi}_2(2k+p+2)$$

pour tout $k \in E = \left\{ s \leq k : \widehat{\psi}(2k+2p-s+2)\widehat{\psi}(2k-s+2) \neq 0 \right\}$. Et puisque ψ est non identiquement nulle, $\sum_{k \in E} \frac{1}{k} = \infty$.

D'autre part, la fonction $z \mapsto \widehat{\varphi}_1(z+2s)\widehat{\varphi}_2(z) - \widehat{\varphi}_1(z)\widehat{\varphi}_2(z+2s)$ est analytique et bornée sur $\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0 \right\}$ et s'annule au point $z_k = 2k - 2s + p + 2$ pour tout $k \geq s$. Donc la suite $(z_k)_{k \geq s}$ vérifie les hypothèses du Théorème 5.1.3 et la fonction ainsi définie est identiquement nulle et nous avons l'égalité

$$\widehat{\varphi}_1(z+2s)\widehat{\varphi}_2(z) = \widehat{\varphi}_1(z)\widehat{\varphi}_2(z+2s) \quad \text{pour } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Et en appliquant le Lemme 5.1.8 aux fonctions $F(z) = \widehat{\varphi}_1(z)$ et $G(z) = \widehat{\varphi}_2(z)$, il existe une constante c telle que $\varphi_1 = c\varphi_2$. \square

Il est montré dans [49] que deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes dont les degrés sont de signe opposé ne commutent pas dans l'espace de Bergman analytique. Dans le théorème suivant, nous montrons que ce n'est plus le cas dans l'espace de Bergman harmonique.

Théorème 5.4.10 ([47]). *Soit p un entier positif et φ, ψ deux T -fonctions radiales non identiquement nulles. Si $T_{e^{-ip\theta}\psi}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h = T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{-ip\theta}\psi}^h$, on a $p = 1$ et φ et ψ vérifient l'équation de convolution de Mellin :*

$$(\varphi * \psi)(r) = c \left(\frac{1}{r} - r \right), \quad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

Preuve. Si $T_{e^{-ip\theta}\psi}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h = T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{-ip\theta}\psi}^h$, on obtient en prenant $p = s$ dans le Lemme 5.4.8,

$$(k+p+1)\widehat{\psi}(2k+p+2)\widehat{\varphi}(2k+p+2) = (p-k+1)\widehat{\varphi}(p+2)\widehat{\psi}(p+2) \text{ si } 0 \leq k < p \quad (5.4.21)$$

et

$$(k-p+1)\widehat{\psi}(2k-p+2)\widehat{\varphi}(2k-p+2) = (k+p+1)\widehat{\varphi}(2k+p+2)\widehat{\psi}(2k+p+2) \text{ si } p \leq k. \quad (5.4.22)$$

Considérons la fonction H définie sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ par

$$H(z) = z\widehat{\varphi}(z+p)\widehat{\psi}(z+p) - (z+4p)\widehat{\varphi}(z+3p)\widehat{\psi}(z+3p).$$

La suite $(z_k)_k$ des zéros de H , définie par $z_k = 2k - 2p + 2$ vérifie les hypothèses du Théorème 5.1.3 donc $H = 0$ et donc

$$z\widehat{\varphi}(z+p)\widehat{\psi}(z+p) = (z+4p)\widehat{\varphi}(z+3p)\widehat{\psi}(z+3p). \quad (5.4.23)$$

En utilisant la propriété multiplicative de la convolution de Mellin, (5.4.23) peut s'écrire

$$z(\widehat{r^p\varphi * r^p\psi})(z) = (z+4p)(\widehat{r^p\varphi * r^p\psi})(z+2p)$$

c'est-à-dire

$$\frac{(\widehat{r^p\varphi * r^p\psi})(z+2p)}{(\widehat{r^p\varphi * r^p\psi})(z)} = \frac{z}{z+4p}. \quad (5.4.24)$$

Mais on peut écrire

$$\frac{z}{z+4p} = \frac{\Lambda(z+2p)}{\Lambda(z)} \text{ où } \Lambda(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{z}{2p}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2p}+2\right)} \text{ et } \Gamma \text{ désigne la fonction Gamma.}$$

En utilisant la propriété $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on a :

$$\Lambda(z) = \frac{4p^2}{z(z+2p)} = 2p \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2p} \right] = 2p \left[(\widehat{\mathbb{1} - r^{2p}})(z) \right].$$

Donc l'équation (5.4.24) équivaut à :

$$\frac{(\widehat{r^p\varphi * r^p\psi})(z+2p)}{(\widehat{r^p\varphi * r^p\psi})(z)} = \frac{(\widehat{\mathbb{1} - r^{2p}})(z+2p)}{(\widehat{\mathbb{1} - r^{2p}})(z)}$$

c'est-à-dire

$$(\widehat{r^p\varphi * r^p\psi})(z+2p)(\widehat{\mathbb{1} - r^{2p}})(z) = (\widehat{r^p\varphi * r^p\psi})(z)(\widehat{\mathbb{1} - r^{2p}})(z+2p)$$

En appliquant le Lemme 5.1.8 aux fonctions $F(z) = (\widehat{r^p\varphi * r^p\psi})(z)$ et $G(z) = (\widehat{\mathbb{1} - r^{2p}})(z)$, il existe une constante c telle que

$$(\widehat{r^p\varphi * r^p\psi})(z) = c(\widehat{\mathbb{1} - r^{2p}})(z) \text{ pour } \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (5.4.25)$$

Mais

$$(\widehat{r^p \varphi * r^p \psi})(z) = \widehat{r^p \varphi}(z) \widehat{r^p \psi}(z) = \widehat{\varphi}(z+p) \widehat{\psi}(z+p) = r^p \widehat{(\varphi * \psi)}(z).$$

Donc

$$\widehat{r^p(\varphi * \psi)}(z) = (\varphi * \psi)(z+p) = c \widehat{(\mathbb{1} - r^{2p})}(z)$$

c'est-à-dire encore, en faisant le changement de variable $\zeta = z+p$

$$\widehat{(\varphi * \psi)}(\zeta) = c \widehat{(\mathbb{1} - r^{2p})}(\zeta - p) = c \widehat{(r^{-p} - r^p)}(\zeta)$$

Par l'injectivité de la transformation de Mellin, on a

$$(\varphi * \psi)(r) = c \left(\frac{1}{r^p} - r^p \right)$$

c'est-à-dire

$$(\varphi * \psi)(r) = c \left(\frac{1}{r^p} - r^p \right).$$

Et pour que $\varphi * \psi \in L^1([0, 1], r dr)$, il faut et il suffit que $p = 1$. Et dans ce cas, (5.4.21) est vérifiée. \square

Nous allons appliquer le Théorème 5.4.10 dans un cas particulier

Application 5.4.11. Soit $m \geq -1$ un entier. Si $T_{e^{-i\theta} r^m}^h$ commute avec $T_{e^{i\theta} \varphi}^h$, φ est donnée par :

$$\varphi(r) = c \left(\frac{m+1}{r} - (m-1)r \right).$$

Preuve. D'après le Théorème 5.4.10, $T_{e^{i\theta} \varphi}^h$ commute avec $T_{e^{i\theta} \psi}^h$, $\varphi * \psi$ vérifie

$$(\varphi * \psi)(r) = c \left(\frac{1}{r} - r \right), \quad \text{où } c \text{ est une constante.} \quad (5.4.26)$$

En prenant $\psi(r) = r^m$ dans (5.4.26), on a :

$$(\varphi * r^m)(v) = \int_v^1 \varphi\left(\frac{v}{t}\right) t^m \frac{dt}{t} = \int_v^1 \varphi\left(\frac{v}{t}\right) t^{m-1} dt.$$

En faisant le changement de variable $u = \frac{v}{t}$, on a :

$$\begin{aligned} (\varphi * r^m)(v) &= \int_v^1 \varphi\left(\frac{v}{t}\right) t^{m-1} dt \\ &= \int_v^1 \varphi(u) \frac{v^{m-1}}{u^{m-1}} \frac{v du}{u^2} \\ &= v^m \int_v^1 \varphi(u) \frac{1}{u^{m+1}} du \end{aligned}$$

L'égalité (5.4.26) devient :

$$v^m \int_v^1 \varphi(u) \frac{1}{u^{m+1}} du = c \left(\frac{1}{v} - v \right)$$

c'est-à-dire

$$\int_v^1 \varphi(u) \frac{1}{u^{m+1}} du = c \left(\frac{1}{v^{m+1}} - \frac{1}{v^{m-1}} \right) \quad (5.4.27)$$

En dérivant les deux membres de (5.4.27), on obtient :

$$\varphi(v) \frac{1}{v^{m+1}} = -c \left(\frac{m+1}{v^{m+2}} - \frac{m-1}{v^m} \right) \text{ c'est-à-dire } \varphi(v) = -c \left(\frac{m+1}{v} - \frac{m-1}{v} \right)$$

□

Remarquons que si on prend $m = 1$ dans l'Application ci-dessus, on obtient un résultat différent de ce qu'on a trouvé dans l'espace de Bergman analytique. En effet, il a été montré dans L_a^2 , qu'un opérateur de Toeplitz anti-analytique (respectivement analytique) ne commute qu'avec un autre opérateur de Toeplitz anti-analytique (respectivement analytique) tandis que dans L_b^2 , $T_{\frac{h}{z}}$ commute avec $T_{\frac{1}{z}}$. Evidemment, la T-fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'est pas bornée mais elle est presque bornée.

Le théorème suivant est un cas particuliers du Théorème 5.4.10.

Théorème 5.4.12 ([47]). *Soient p, s, m et n des entiers positifs tels que $0 < s \leq p$ et $n = 2(2m+1)s$. S'il existe une T-fonction radiale non identiquement nulle φ telle que $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{-is\theta}r^n}^h = T_{e^{-is\theta}r^n}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h$ alors $p = s = 1$ et il existe $c_0, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ tels que $\varphi(r) = \sum_{j=0}^m c_j r^{2j-1}$.*

Preuve. Si $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{-is\theta}r^m}^h = T_{e^{-is\theta}r^m}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h$,

$$T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{-is\theta}r^m}^h(z^k) = T_{e^{-is\theta}r^m}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h(z^k) \text{ pour tout } k \geq 0 \quad (5.4.28)$$

et

$$T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{-is\theta}r^m}^h(\bar{z}^k) = T_{e^{-is\theta}r^m}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h(\bar{z}^k) \text{ pour tout } k \geq 0 \quad (5.4.29)$$

Par le Lemme 5.3.2 et la relation (5.4.28), on obtient :

- pour $s \leq k$,

$$\frac{2k-2s+2}{2k-s+n+2} \widehat{\varphi}(2k-2s+p+2) = \frac{2k+2p+2}{2k+2p-s+n+2} \widehat{\varphi}(2k+p+2), \quad (5.4.30)$$

- pour $k < s$,

$$\frac{2s-2k+2}{s+n+2} \widehat{\varphi}(p+2) = \frac{2k+2p+2}{2k+2p-s+n+2} \widehat{\varphi}(2k+p+2). \quad (5.4.31)$$

Et la relation (5.4.29) implique

- pour $p \leq k$,

$$\frac{2k+2s+2}{2k+s+n+2} \widehat{\varphi}(2k+2s-p+2) = \frac{2k-2p+2}{2k-2p+s+n+2} \widehat{\varphi}(2k-p+2), \quad (5.4.32)$$

- pour $p - s \leq k < p$,

$$\frac{2k+2s+2}{2k+s+n+2} \widehat{\varphi}(2k+2s-p+2) = \frac{2p-2k+2}{2k-2p+s+n+2} \widehat{\varphi}(p+2), \quad (5.4.33)$$

- pour $0 \leq k < p - s$,

$$\frac{2k+2s+2}{2k+s+n+2} = \frac{2p-2k+2}{2p-2k-s+n+2}. \quad (5.4.34)$$

Remarquons que (5.4.30) peut être obtenue de (5.4.32) en remplaçant k par $k + p - s$. Donc, nous utilisons la relation (5.4.32) pour déterminer la fonction φ .

Soit Λ la fonction définie sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ par :

$$\Lambda(z) = \frac{z+2p+2s}{z+2p+s+n} \widehat{\varphi}(z+p+2s) - \frac{z}{z+s+n} \widehat{\varphi}(z+p).$$

La fonction Λ est analytique et bornée sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ et s'annule au point $z_k = 2k - 2p + 2$ pour tout $k \geq p$. De plus, la suite $(z_k)_k$ des zéros de Λ vérifie les hypothèses du Théorème 5.1.3. Il s'ensuit que $\Lambda = 0$. Donc,

$$\frac{z+2p+2s}{z+2p+s+n} \widehat{\varphi}(z+p+2s) = \frac{z}{z+s+n} \widehat{\varphi}(z+p),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\widehat{r^p \varphi}(z+2s)}{\widehat{r^p \varphi}(z)} = \frac{z(z+2p+s+n)}{(z+s+n)(z+2p+2s)} \text{ pour } \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (5.4.35)$$

Puisque $n = (2m+1)s$, en utilisant l'égalité $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ on peut écrire

$$\frac{z(z+2p+s+n)}{(z+s+n)(z+2p+2s)} = \frac{\Lambda(z+2s)}{\Lambda(z)} \text{ pour } \operatorname{Re}(z) > 0, \text{ où } \Lambda(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{z}{2s}\right)\Gamma\left(\frac{z}{2s} + \frac{p}{s} + m + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2s} + m + 1\right)\Gamma\left(\frac{z}{2s} + \frac{p}{s} + 1\right)}.$$

Donc l'égalité (5.4.35) équivaut à

$$\frac{\widehat{r^p \varphi}(z+2s)}{\widehat{r^p \varphi}(z)} = \frac{\Lambda(z+2s)}{\Lambda(z)} \text{ pour } \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (5.4.36)$$

En appliquant le Lemme 5.1.8 aux fonctions $F(z) = \widehat{r^p \varphi}(z+2s)$ et $G(z) = \Lambda(z)$, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\widehat{r^p \varphi}(z) = \widehat{\varphi}(z+p) = c\Lambda(z) \text{ pour } \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (5.4.37)$$

Il nous reste à montrer que $\Lambda(z)$ est le transformé de Mellin d'une fonction radiale bornée.

Puisque $\Gamma(z+n) = (z+n)(z+n-1)(z+n-2) \cdots z\Gamma(z)$, on obtient après simplification :

$$\Lambda(z) = \frac{\left(\frac{z}{2s} + \frac{p}{s} + m - 1\right)\left(\frac{z}{2s} + \frac{p}{s} + m - 2\right) \cdots \left(\frac{z}{2s} + \frac{p}{s} + 1\right)}{\left(\frac{z}{2s} + m\right)\left(\frac{z}{2s} + m - 1\right) \cdots \frac{z}{2s}} = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{z+2js} = \sum_{j=0}^m a_j \widehat{r^{2js}}(z).$$

En faisant le changement de variable $\zeta = z + p$ dans (5.4.37), on a

$$\widehat{\varphi}(\zeta) = c\Lambda(\zeta - p) = c \sum_{j=0}^m a_j \widehat{r^{2js}}(\zeta - p) = \sum_{j=0}^m a_j \widehat{r^{2js-p}}(\zeta)$$

En utilisant l'injectivité de la transformation de Mellin, on a

$$\varphi(r) = \sum_{j=0}^m c_j r^{2js-p}.$$

En regardant le premier terme $c_0 r^{-p}$ dans l'expression de $\varphi(r)$, on voit bien que φ est une T-fonction dans $L^1(\mathbb{D}, dA)$ si et seulement si $p = 1$. Par hypothèse $0 < s \leq p$, donc $p = s = 1$. Remarquons que pour $p = s = 1$, (5.4.34) est bien vérifiée et la fonction φ définie par $\varphi(r) = \sum_{j=0}^m a_j r^{2j-1}$ satisfait aux relations relations (5.4.31) et (5.4.36). \square

Théorème 5.4.13 ([47]). *Soient p, s, m et n des entiers positifs tels que $0 < p < s$ et $n = (2m + 1)s$. Supposons qu'il existe une T-fonction radiale φ telle que $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{-is\theta}r^n}^h = T_{e^{-is\theta}r^n}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h$. Alors $p = 1$ et*

- $\varphi(r) = \sum_{j=0}^m c_j r^{2j-1}$ si $s \leq m + 1$,
- $\varphi \equiv 0$ si $s > m + 1$.

Preuve. Si $T_{e^{ip\theta}\varphi}^h T_{e^{-is\theta}r^n}^h = T_{e^{-is\theta}r^n}^h T_{e^{ip\theta}\varphi}^h$, en faisant le même raisonnement que dans la démonstration du Théorème 5.4.12, on montre que $p = 1$ et que $\varphi(r) = \sum_{j=0}^m c_j r^{2j-1}$. De plus, le Lemme 5.4.8 implique

$$(k+2)\widehat{\varphi}(2k+3) = (s-k+1)\widehat{\varphi}(2s-2k+1) \text{ pour tout } 0 \leq k \leq s-1,$$

ce qui équivaut à

$$(k+2) \sum_{j=0}^m \frac{c_j}{2k+2js+2} = (s-k+1) \sum_{j=0}^m \frac{c_j}{2s-2k+2js} \text{ pour tout } 0 \leq k \leq s-1. \quad (5.4.38)$$

L'égalité (5.4.38) peut être écrite sous forme d'un système linéaire homogène :

$$A \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.39)$$

où $A = (a_{kj})_{0 \leq k \leq s-1, 0 \leq j \leq m}$ est la matrice de taille $s \times (m+1)$ dont les a_{kj} sont donnés par :

$$a_{kj} = \frac{k+2}{2k+2js+2} - \frac{s-k+1}{2s-2k+2js} = -\frac{(s-2k-1)(js-1)}{2(js+k+1)(js+s-k)}.$$

Remarquons que les s lignes de la matrice A sont linéairement indépendantes. Il s'ensuit que

- si $s \leq m+1$, c'est-à-dire il y a moins d'équations que d'inconnues dans (5.4.39), le système admet une solution non triviale c'est-à-dire que les c_j sont non tous nuls.
- si $m+1 < s$, c'est-à-dire il y a plus d'équations que d'inconnues dans le système, $c_j = 0$ pour tout $0 \leq j \leq m$. Ainsi $\varphi \equiv 0$.

□

OPÉRATEURS DE TOEPLITZ TRONQUÉS

Dans ce chapitre, on étudiera les propriétés élémentaires des opérateurs de Toeplitz tronqués, les résultats récents concernant ces opérateurs et quelques exemples concrets.

Les opérateurs de Toeplitz tronqués sont des compressions des opérateurs de multiplication sur l'espace modèle. Ils représentent une généralisation de grande envergure des matrices de Toeplitz classiques. Les opérateurs de Toeplitz tronqués ont été formellement introduits par Sarason dans [57], bien que certains cas particuliers sont apparus bien avant dans la littérature, notamment en tant qu'opérateurs modèles pour les contractions avec indices de défaut égaux à 1.

Tout au long du chapitre, u désignera une fonction intérieure non constante, K_u^2 l'espace modèle correspondant et P_u est la projection orthogonale de L^2 sur K_u^2 .

6.1 Généralités sur les opérateurs de Toeplitz tronqués

Dans cette section on étudiera les propriétés algébriques des opérateurs de Toeplitz tronqués. Rappelons (voir le paragraphe 1.3) que les noyaux reproduisant sont des fonctions bornées et que le sous espace K_u^∞ est dense dans K_u^2

Définition 6.1.1. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ et on considère l'application définie sur K_u^∞ par :

$$\begin{aligned} K_u^\infty &\longrightarrow K_u^\infty \\ f &\longmapsto P_u(\varphi f) \end{aligned}$$

Si cette application peut être prolongée en une application continue sur K_u^2 , on note A_φ ce prolongement et on l'appelle *opérateur de Toeplitz tronqué de symbole φ* . L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués définis sur K_u^2 est noté par \mathcal{T}_u .

Il a été montré dans [57] que \mathcal{T}_u est un sous espace fermé de $\mathcal{L}(K_u^2)$ pour la "topologie faible des opérateurs" c'est-à-dire si $(A_n)_n$ est une suite dans \mathcal{T}_u et $A \in \mathcal{L}(K_u^2)$ telle que $\lim_n \langle A_n f, g \rangle = \langle A f, g \rangle$ pour tous $f, g \in K_u^2$ alors $A \in \mathcal{T}_u$.

Les opérateurs $S_u = P_u S_{|K_u^2}$ et $S_u^* = P_u S_{|K_u^2}^*$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif z et \bar{z} . Ces deux opérateurs jouent des rôles cruciaux dans la théorie des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Les opérateurs de Toeplitz tronqués vérifient les propriétés immédiates suivantes.

Proposition 6.1.2. *Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{T})$ telles que $A_\varphi, A_\psi \in \mathcal{T}_u$. Alors*

- (1). *Pour tous nombres complexes a et b , $A_{a\varphi+b\psi} = aA_\varphi + bA_\psi$,*
- (2). *$A_\varphi^* = A_{\bar{\varphi}}$ où A_φ^* désigne l'opérateur adjoint de A_φ .*

Rappelons que les opérateurs de Toeplitz définis dans l'espace de Hardy sont continus si et seulement si $\varphi \in L^\infty$ et $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Ce qui n'est pas le cas pour les opérateurs de Toeplitz tronqués, on a :

$$0 \leq \|A_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty \text{ pour tout } \varphi \in L^\infty$$

et il y beaucoup de cas où l'inégalité est stricte. En fait, la majoration de la norme d'un opérateur de Toeplitz tronqué est un problème difficile. Garcia et Ross ont étudié ce problème dans [32].

Un opérateur A défini sur K_u^2 est dit C -symétrique, où C est l'opérateur de conjugaison défini par $C[f](\zeta) = u(\zeta)\overline{\zeta f(\zeta)}$ ($\zeta \in \mathbb{T}$) dans la relation (1.3.9), s'il vérifie $A^* = CAC$. Le résultat suivant montre que les opérateurs de Toeplitz tronqués sont C -symétriques.

Lemme 6.1.3 (Garcia-Putinar, [30]). *Les éléments de \mathcal{T}_u sont C -symétriques.*

Preuve. Soit $\varphi \in L^2$ telle que $A_\varphi \in \mathcal{T}_u$. Pour tout $f \in K_u^\infty$ et $g \in K_u^2$, on a

$$\begin{aligned} \langle CA_\varphi C f, g \rangle &= \langle C g, A_\varphi C f \rangle = \int_{\mathbb{T}} u(\zeta)\overline{\zeta} g(\zeta) \cdot \overline{\varphi(\zeta)} u(\zeta)\zeta f(\zeta) dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(\zeta)} f(\zeta) g(\zeta) dm(\zeta) = \langle A_{\bar{\varphi}} f, g \rangle = \langle A_\varphi^* f, g \rangle \end{aligned}$$

Puisque K_u^∞ est dense dans K_u^2 , on a le résultat. □

La réciproque de ce résultat est fautive en général. En effet, Sarason a montré dans [57] que si $\dim K_u^2 > 2$, il y a des opérateurs de rang 1 sur K_u^2 qui sont C -symétriques mais qui ne sont pas des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Lemme 6.1.4. *Si $\varphi \in K_u^2$, A_φ commute avec S_u et $A_{\bar{\varphi}}$ commute avec S_u^* .*

Preuve. Remarquons que l'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ est la compression sur K_u^2 de l'opérateur de Toeplitz usuel T_φ . On a deux cas à considérer :

- Si T_φ est continue sur H^2 , d'après le Théorème 3.2.12, T_φ commute avec S car $\varphi \in K_u^2 \subseteq H^2$, donc A_φ commute avec S_u . Et en passant aux opérateurs adjoints, on vérifie de la même manière que $A_{\bar{\varphi}}$ commute avec S_u^* .
- Si T_φ n'est pas continue sur H^2 , on peut avoir la commutativité sur les noyaux reproduisants qui sont denses dans H^2 .

□

On a aussi le résultat suivant :

Lemme 6.1.5 ([57]). $I - S_u S_u^* = k_0^u \otimes k_0^u$ et $I - S_u^* S_u = \widetilde{k}_0^u \otimes \widetilde{k}_0^u$.

Remarque 6.1.6. Le Lemme 6.1.5 ci-dessus dit aussi que la projection orthogonale P_0 de K_u^2 sur $(k_0^u)^\perp$ est égale à $P_0 = I - c(k_0^u \otimes k_0^u)$ où $c = \frac{1}{\|k_0^u\|^2}$ est obtenue en calculant $P_0 k_0^u$.

Dans le Théorème 3.2.9, Brown et Halmos ont montré qu'un opérateur T continu sur H^2 est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $T = STS^*$. Dans [57], Sarason a donné un résultat analogue pour les opérateurs de Toeplitz tronqués.

Théorème 6.1.7 (Sarason, Théorème 4.1, [57]). *Un opérateur A continu sur K_u^2 appartient à \mathcal{T}_u si, et seulement si, il existe $\varphi, \psi \in K_u^2$ telles que :*

$$A - S_u A S_u^* = \varphi \otimes k_0^u + k_0^u \otimes \psi. \quad (6.1.1)$$

Dans ce cas, $A = A_{\varphi + \bar{\psi}}$.

Remarque 6.1.8. En appliquant l'opérateur de conjugaison C à la relation (6.1.1), on a la caractérisation équivalente : un opérateur A continu sur K_u^2 est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'il existe deux fonctions $\varphi, \psi \in K_u^2$ telles que

$$A - S_u^* A S_u = \psi \otimes \widetilde{k}_0^u + \widetilde{k}_0^u \otimes \varphi$$

et dans ce cas, $A = A_{\varphi + \bar{\psi}}$.

Définition 6.1.9. Etant donné un opérateur A continu sur K_u^2 , on note par Q_A la forme quadratique qui lui est associée, définie sur K_u^2 par :

$$Q_A(f) = \langle Af, f \rangle, \quad f \in K_u^2.$$

On dit que A est shift invariant si $Q_A(f) = Q_A(Sf)$ quand f et Sf appartiennent tous les deux à K_u^2 .

Il vient de l'identité de polarisation que si A est shift invariant, on a $\langle Af, g \rangle = \langle ASf, Sg \rangle$ quand f, Sf, g et Sg sont tous dans K_u^2 .

Puisque $I - S_u^* S_u = \widetilde{k}_0^u \otimes \widetilde{k}_0^u$ (Lemme 6.1.5) et $\|f\| = \|S_u f\| = \|P_u S f\|$ si et seulement si $f \perp \widetilde{k}_0^u$, on a $Sf \in K_u^2$ si et seulement si $f \perp \widetilde{k}_0^u$ pour tout $f \in K_u^2$.

Le théorème suivant est dans un certain sens une conséquence du Théorème 6.1.7. Il donne une autre caractérisation des opérateurs de Toeplitz tronqués en terme de shift invariance.

Théorème 6.1.10 (Sarason). *Un opérateur continu sur K_u^2 est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'il est shift invariant.*

Preuve. Soit A un opérateur continu sur K_u^2 . Supposons que $A \in \mathcal{T}_u$ et montrons que A est shift invariant. D'après le Théorème 6.1.7, il existe deux fonctions $\varphi, \psi \in K_u^2$ telles que $A = A_{\varphi + \overline{\psi}}$. Pour montrer que A est shift invariant, il suffit de vérifier que $Q_A(f) = Q_A(Sf)$ pour tout $f \in (\widetilde{k}_0^u)^\perp \cap K_u^\infty$. En effet, puisque $\widetilde{k}_0^u \in K_u^\infty$ et K_u^∞ est dense dans K_u^2 , $(\widetilde{k}_0^u)^\perp \cap K_u^\infty$ est dense dans $(\widetilde{k}_0^u)^\perp$. Soit maintenant, $f \in (\widetilde{k}_0^u)^\perp$. Puisque S_u commute avec A_φ et A_ψ et $f \in (\widetilde{k}_0^u)^\perp$, on a $S_u^* S_u f = f$ et

$$\begin{aligned} Q_A(Sf) &= \langle A_{\varphi + \overline{\psi}} S_u f, S_u f \rangle \\ &= \langle A_\varphi S_u f + A_{\overline{\psi}} S_u f, S_u f \rangle \\ &= \langle A_\varphi S_u f, S_u f \rangle + \langle A_{\overline{\psi}} S_u f, S_u f \rangle \\ &= \langle A_\varphi S_u f, S_u f \rangle + \langle S_u f, A_\psi S_u f \rangle \\ &= \langle S_u A_\varphi f, S_u f \rangle + \langle S_u f, S_u A_\psi f \rangle \\ &= \langle A_\varphi f, f \rangle + \langle f, A_\psi f \rangle. \end{aligned}$$

Donc, $Q_A(Sf) = \langle A_\varphi f, f \rangle + \langle A_{\overline{\psi}} f, f \rangle = \langle A_{\varphi + \overline{\psi}} f, f \rangle = Q_A(f)$.

Réciproquement, supposons que A est shift invariant et soit $B = A - S_u^* A S_u$.

Pour tout $f \in (\widetilde{k}_0^u)^\perp \cap K_u^\infty$, on a :

$$Q_B(f) = \langle Af - S_u^* A S_u f, f \rangle = \langle Af, f \rangle - \langle S_u^* A S_u f, f \rangle = \langle Af, f \rangle - \langle A S_u f, S_u f \rangle = 0$$

car A est shift invariant. Et d'après l'identité de polarisation, on a :

$$\langle Bf, g \rangle = \langle Af - S_u^* A S_u f, g \rangle = \langle Af, g \rangle - \langle A S_u f, S_u g \rangle, \text{ pour tous } f, g \in (\widetilde{k}_0^u)^\perp \cap K_u^\infty.$$

Donc la restriction de B à $(\widetilde{k}_0^u)^\perp$ est égale à zéro.

D'après la Remarque 6.1.6, la projection orthogonale P_0 de K_u^2 sur $(\widetilde{k}_0^u)^\perp$ est donnée par :

$$P_0 = I - c(\widetilde{k}_0^u \otimes \widetilde{k}_0^u) \text{ où } c = \frac{1}{\|\widetilde{k}_0^u\|_2^2}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
0 &= P_0 B P_0 \\
&= \left(I - c(\widetilde{k}_0^u \otimes \widetilde{k}_0^u) \right) B \left(I - c(\widetilde{k}_0^u \otimes \widetilde{k}_0^u) \right) \\
&= \left(B - c(\widetilde{k}_0^u \otimes B^*(\widetilde{k}_0^u)) \right) \left(I - c(\widetilde{k}_0^u \otimes \widetilde{k}_0^u) \right).
\end{aligned}$$

D'après le (2). du Lemme 3.3.2, on a

$$\begin{aligned}
0 &= B - c\left(B(\widetilde{k}_0^u) \otimes \widetilde{k}_0^u\right) - c\left(\widetilde{k}_0^u \otimes B^*(\widetilde{k}_0^u)\right) + c^2 \left[\left(\left(\widetilde{k}_0^u \otimes B^*(\widetilde{k}_0^u) \right) (\widetilde{k}_0^u) \right) \otimes \widetilde{k}_0^u \right] \\
&= B - c\left(B(\widetilde{k}_0^u) \otimes \widetilde{k}_0^u\right) - c\left(\widetilde{k}_0^u \otimes B^*(\widetilde{k}_0^u)\right) + c^2 \langle \widetilde{k}_0^u, B^*(\widetilde{k}_0^u) \rangle \widetilde{k}_0^u \otimes \widetilde{k}_0^u.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
B &= c\left(B(\widetilde{k}_0^u) \otimes \widetilde{k}_0^u\right) + c\left(\widetilde{k}_0^u \otimes B^*(\widetilde{k}_0^u)\right) - c^2 \langle \widetilde{k}_0^u, B^*(\widetilde{k}_0^u) \rangle \widetilde{k}_0^u \otimes \widetilde{k}_0^u \\
&= \left[cB(\widetilde{k}_0^u) - c^2 \langle B(\widetilde{k}_0^u), \widetilde{k}_0^u \rangle \widetilde{k}_0^u \right] \otimes \widetilde{k}_0^u + \widetilde{k}_0^u \otimes \left(cB^*(\widetilde{k}_0^u) \right) \quad (\text{d'après (3). du Lemme 3.3.2}).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$A - S_u^* A S_u = \psi \otimes \widetilde{k}_0^u + \widetilde{k}_0^u \otimes \varphi \quad \text{avec } \psi = cB(\widetilde{k}_0^u) - c^2 \langle B(\widetilde{k}_0^u), \widetilde{k}_0^u \rangle \widetilde{k}_0^u \quad \text{et } \varphi = cB^*(\widetilde{k}_0^u).$$

Et d'après la Remarque 6.1.8, A est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi + \overline{\psi}$. \square

En contraste avec l'opérateur de Toeplitz défini sur l'espace de Hardy, le symbole d'un opérateur de Toeplitz tronqué n'est pas unique. On peut voir par exemple que A_u , l'opérateur sur K_u^2 de symbole u , est nul même si $u \neq 0$. On a le théorème suivant qui est démontré dans [57] :

Théorème 6.1.11 (Sarason). *Soit $\Phi \in L^2$. Alors $A_\Phi = 0$ si et seulement si $\Phi \in uH^2 + \overline{uH^2}$.*

Preuve. Supposons que $\Phi \in uH^2 + \overline{uH^2}$ c'est-à-dire $\Phi = \varphi + \overline{\psi}$ avec $\varphi, \psi \in H^2$. Pour $f \in K_u^\infty$, on a $\Phi f = \varphi f + \overline{\psi} f$ et $P_u(\Phi f) = P_u(\varphi f) + P_u(\overline{\psi} f) = 0$ car $uK_u^\infty \subset H^\infty$ et $\overline{uK_u^\infty} \subset \overline{uH^\infty}$. Donc $A_\Phi = 0$ sur K_u^∞ et comme K_u^∞ est dense dans K_u^2 , $A_\Phi = 0$ sur K_u^2 .

Réciproquement, supposons que $A_\Phi = 0$ et notons $\Phi = \varphi + \overline{\psi}$ avec $\varphi, \psi \in H^2$. Montrons que $\varphi \in uH^2$ et $\psi \in \overline{uH^2}$. $A_\Phi = 0$ équivaut à $A_\varphi = -A_{\overline{\psi}}$. D'après le Lemme 6.1.4, $A_{\overline{\psi}}$ et A_φ commutent respectivement avec S_u^* et S_u . Ainsi,

$$A_\varphi(I - S_u S_u^*) = (I - S_u S_u^*) A_\varphi. \quad (6.1.2)$$

En utilisant le Lemme 6.1.5 et en appliquant la relation (6.1.2) à k_0^u , on a

$$\langle k_0^u, k_0^u \rangle A_\varphi k_0^u = \langle A_\varphi k_0^u, k_0^u \rangle k_0^u$$

c'est-à-dire $A_\varphi k_0^u = ck_0^u$ où c est constante complexe non nulle. Il s'ensuit que

$$0 = (A_\varphi - cI)k_0^u = P_u \left[(\varphi - c)(1 - \overline{u(0)u}) \right] = P_u(\varphi - c)$$

c'est-à-dire $\varphi - c \in uH^2$ et $A_\varphi = cI$. Comme $A_\varphi = -A_{\overline{\psi}}$, $A_{\overline{\psi}} = -cI$. En faisant le même raisonnement, on a $\psi + \overline{c} \in uH^2$ c'est-à-dire $\overline{\psi} + c \in \overline{uH^2}$. Donc $\Phi = (\varphi - c) + (\overline{\psi} + c) \in uH^2 + \overline{uH^2}$. \square

On a la proposition suivante :

Proposition 6.1.12. *Soient $\varphi, \psi \in K_u^2$. Alors $A_{\varphi+\overline{\psi}} = 0$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = ck_0^u$ et $\psi = -\overline{c}k_0^u$.*

Preuve. Si $\varphi = ck_0^u$ et $\psi = -\overline{c}k_0^u$ avec $c \in \mathbb{C}$, on a

$$\varphi + \overline{\psi} = c(k_0^u - \overline{k_0^u}) = c(1 + \overline{u(0)u} - 1 + u(0)\overline{u}) = c(\overline{u(0)u} - u(0)\overline{u})$$

Donc $A_{\varphi+\overline{\psi}} = A_{c(\overline{u(0)u} - u(0)\overline{u})} = c_1 A_u + c_2 A_{\overline{u}} = 0$ car $A_u = 0$.

Réciproquement, si $A_{\varphi+\overline{\psi}} = 0$, d'après la relation (6.1.1), on a

$$A_{\varphi+\overline{\psi}} - S_u A_{\varphi+\overline{\psi}} S_u^* = 0 = \varphi \otimes k_0^u + k_0^u \otimes \psi.$$

C'est-à-dire

$$\varphi \otimes k_0^u = k_0^u \otimes \psi$$

Et par le (4). du Lemme 3.3.2, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = ck_0^u$ et $\psi = -\overline{c}k_0^u$. \square

Comme corollaire de la proposition précédente, on

Corollaire 6.1.13. $I = A_{\mathbb{1}} = A_{k_0^u} = A_{\overline{k_0^u}}$.

Le Théorème 6.1.11 dit qu'il y a une infinité de symboles qui représentent un même opérateur de Toeplitz tronqué. Autrement dit, $A_\varphi = A_\psi$ si et seulement si $\varphi - \psi \in uH^2 + \overline{uH^2}$ et on a le corollaire suivant :

Corollaire 6.1.14. *Si $A = A_{\varphi+\overline{\psi}} \in \mathcal{T}_u$ avec $\varphi, \psi \in K_u^2$, pour tout $c \in \mathbb{C}$ on a $A = A_{(\varphi+ck_0^u) + (\overline{\psi}-c\overline{k_0^u})}$.*

D'après le Théorème 3.2.10, le seul opérateur de Toeplitz compact sur l'espace de Hardy est l'opérateur nul, ce qui n'est pas le cas pour les opérateurs de Toeplitz tronqués. En effet, Sarason a donné plusieurs exemples opérateurs de Toeplitz tronqués de rang fini (donc compact). Nous rappelons ici ses résultats.

Le premier théorème décrit les opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1.

Théorème 6.1.15 (Théorème 5.1, [57]). (1). *Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, les opérateurs $k_\lambda^u \otimes \widehat{k}_\lambda^u$ et $\widehat{k}_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif $\frac{\overline{u}}{\overline{z}-\lambda}$ et $\frac{u}{z-\lambda}$.*

- (2). Si $\zeta \in \mathbb{T}$ et u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en ζ , l'opérateur $k_\zeta^u \otimes k_\zeta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $k_\zeta^u + \overline{k_\zeta^u} + 1$.
- (3). Les seuls opérateurs de Toeplitz tronqués non nul de rang 1 sont des multiples des opérateurs dans (1) et (2).

Pour $n \in \mathbb{N}$, Sarason a donné ([57], Théorème 6.1 et Théorème 6.2) des exemples d'opérateurs de Toeplitz tronqué de rang n puis Bessonov a généralisé les résultats ([12]).

Théorème 6.1.16. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{D}$. Alors les opérateurs définis par :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{d^j \widetilde{k}_\lambda^u}{d\lambda^j} \otimes \frac{d^{n-j-1} k_\lambda^u}{d\bar{\lambda}^{n-j-1}} \right) \quad (6.1.3)$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{d^j k_\lambda^u}{d\bar{\lambda}^j} \otimes \frac{d^{n-j-1} \widetilde{k}_\lambda^u}{d\lambda^{n-j-1}} \right) \quad (6.1.4)$$

sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif $\Phi = \frac{(n-1)!u}{(z-\lambda)^n}$ et $\Psi = \frac{(n-1)!\bar{u}}{(\bar{z}-\bar{\lambda})^n}$.

Et tout opérateur de Toeplitz tronqué de rang n est une combinaison linéaire finie des opérateurs définis dans (6.1.3) et (6.1.4).

Si $\zeta \in \mathbb{T}$ et u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en ζ , l'opérateur défini par :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{d^j \widetilde{k}_\zeta^u}{d\zeta^j} \otimes \frac{d^{n-j-1} k_\zeta^u}{d\bar{\zeta}^{n-j-1}} \right) \quad (6.1.5)$$

et son adjoint sont des opérateurs de Toeplitz tronqués.

6.2 Algèbre d'opérateurs de Toeplitz tronqués

Rappelons que \mathcal{T}_u est un sous espace fermé de $\mathcal{L}(K_u^2)$ pour la "topologie faible des opérateurs". Bien que \mathcal{T}_u ne soit pas une algèbre, il contient des sous-ensembles qui sont des algèbres. En voulant étudier la stabilité de la multiplication et la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz tronqués, Sedlock a introduit dans [58, 59] une nouvelle classe d'opérateurs, connue sous le nom d'opérateurs de Toeplitz tronqués de type α où $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}}$. On rappelle ici des propriétés élémentaires et des résultats significatifs concernant cette algèbre.

Définition 6.2.1. Soient $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ et $A_\Phi \in \mathcal{T}_u$. On dit que A_Φ est **de type α** s'il existe $\varphi \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que le symbole Φ peut s'écrire sous la forme $\Phi = \varphi + \alpha \overline{S_u \varphi} + c \cdot \mathbb{1}$. Dans le cas où $\alpha = 0$, on dit qu'on a un opérateur du **type analytique** et on dit que A_Φ est du **type anti-analytique** ou du **type ∞** si son adjoint $A_{\overline{\Phi}}$ est du type analytique.

On note par \mathcal{T}_u^α l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α .

Notons que si A_Φ est de type α ($\alpha \in \mathbb{D}$), on peut aussi trouver $\varphi_0 \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que $\varphi_0(0) = 0$ et $A_\Phi = A_{\varphi_0 + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}_0} + c k_0^u}$. En effet, supposons que $A_\Phi = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}} + \gamma k_0^u}$ avec $\varphi \in K_u^2$ et $\gamma \in \mathbb{C}$. Soit φ_0 la fonction définie par :

$$\varphi_0 = \varphi - \gamma_1 k_0^u \quad \text{où} \quad \gamma_1 = \frac{\varphi(0)}{\|k_0^u\|^2}.$$

On a :

$$S_u \tilde{\varphi} = S_u \tilde{\varphi}_0 + \bar{\gamma}_1 S_u \tilde{k}_0^u = S_u \tilde{\varphi}_0 - \bar{\gamma}_1 u(0) k_0^u \quad \text{car} \quad S_u \tilde{k}_0^u = -u(0) k_0^u \quad \text{d'après le Lemme 1.3.8.}$$

Ainsi,

$$\varphi + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}} + \gamma k_0^u = \varphi_0 + \gamma_1 k_0^u + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}_0} - \alpha \gamma_1 \overline{u(0) k_0^u} + \gamma k_0^u$$

et

$$A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}} + \gamma k_0^u} = A_{\varphi_0 + \gamma_1 k_0^u + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}_0} - \alpha \gamma_1 \overline{u(0) k_0^u} + \gamma k_0^u} = A_{\varphi_0 + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}_0} + (\gamma_1 + \gamma) k_0^u} - \alpha \gamma_1 \overline{u(0)} A_{k_0^u}.$$

Puisque $I = A_{\mathbb{1}} = A_{k_0^u} = A_{\overline{k_0^u}}$, on a

$$A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}} + \gamma k_0^u} = A_{\varphi_0 + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}_0} + (\gamma_1 + \gamma) k_0^u} - \alpha \gamma_1 \overline{u(0)} A_{k_0^u} = A_{\varphi_0 + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}_0} + [\gamma_1 + \gamma_1 (1 - \alpha \overline{u(0)})] k_0^u}.$$

En prenant $c = \gamma + \gamma_1 (1 - \alpha \overline{u(0)})$, on a $A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}} + \gamma k_0^u} = A_{\varphi_0 + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}_0} + c k_0^u}$.

En utilisant la convention $1/\infty = 0$ et $1/0 = \infty$, on a le résultat suivant

Proposition 6.2.2. *Si $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ et $A_\Phi \in \mathcal{T}_u^\alpha$, $A_\Phi^* \in \mathcal{T}_u^{1/\alpha}$.*

Preuve. Si $\alpha = 0$, $A_\Phi \in \mathcal{T}_u^0$ veut dire il existe $\varphi \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que $\Phi = \varphi + c$. En passant à l'adjoint, $A_\Phi^* = A_{\overline{\varphi} + \bar{c}}$ et on conclut avec la convention.

Soit maintenant $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ et $A_\Phi \in \mathcal{T}_u^\alpha$. D'après la remarque ci-dessus, il existe $\varphi \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que $A_\Phi = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}} + c k_0^u}$. Puisque $S_u C = C S_u^*$ et $\varphi(0) = 0$, on a $S_u \widetilde{S_u \tilde{\varphi}} = \varphi$. Soit $\psi = \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}}$. On a

$$\frac{1}{\alpha} \psi = S_u \tilde{\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha} \tilde{\psi} = \widetilde{S_u \tilde{\varphi}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varphi = \frac{1}{\alpha} S_u \tilde{\psi}.$$

Ainsi,

$$A_\Phi^* = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}} + c k_0^u}^* = A_{\psi + \frac{1}{\alpha} \overline{S_u \tilde{\psi}} + \bar{c} k_0^u}$$

□

La proposition suivante caractérise les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α .

Proposition 6.2.3 (Sedlock, [59]). *Soient $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ et $A := A_{\varphi + \bar{\psi}} \in \mathcal{T}_u$ où $\varphi, \psi \in K_u^2$. Alors A est de type α si et seulement si $\alpha \overline{S_u \tilde{\varphi}} - \psi \in \mathbb{C} k_0^u$.*

Preuve. Supposons que A est de type α . Par définition, il existe $\chi \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que :

$$A_{\varphi+\bar{\psi}} = A_{\chi+\alpha\overline{S_u\tilde{\chi}}+ck_0^u} \text{ c'est-à-dire } A_{\varphi-\chi+ck_0^u+\bar{\psi}-\alpha\overline{S_u\tilde{\chi}}} = 0.$$

Et d'après la Proposition 6.1.12, on a :

$$\varphi - \chi = \gamma_1 k_0^u \quad (6.2.1)$$

et

$$\psi - \bar{\alpha}S_u\tilde{\chi} = \gamma_2 k_0^u \quad (6.2.2)$$

D'après le Lemme 1.3.8, la relation (6.2.1) équivaut à $S_u\tilde{\varphi} - S_u\tilde{\chi} = \gamma_3 k_0^u$. Ainsi,

$$\bar{\alpha}S_u\tilde{\varphi} = \bar{\alpha}S_u\tilde{\chi} + \bar{\alpha}\gamma_3 k_0^u. \quad (6.2.3)$$

D'autre part, la relation (6.2.2) donne :

$$-\psi = \gamma_2 k_0^u - \bar{\alpha}S_u\tilde{\chi} \quad (6.2.4)$$

Les relations (6.2.3) et (6.2.4) donnent $\bar{\alpha}S_u\tilde{\varphi} - \psi = \gamma k_0^u$ avec $\gamma = \bar{\alpha}\gamma_3 + \gamma_2 \in \mathbb{C}$.

Réciproquement, si $\bar{\alpha}S_u\tilde{\varphi} - \psi = \gamma k_0^u$, $A_{\varphi+\bar{\psi}} = A_{\varphi+\alpha\overline{S_u\tilde{\varphi}}-\gamma\overline{k_0^u}}$ et comme $A_{k_0^u} = A_{\overline{k_0^u}} = A_{\mathbb{1}}$, $A_{\varphi+\bar{\psi}}$ est de type α . \square

Bien qu'il y a une infinité de classes d'opérateurs de Toeplitz tronqués de type α , on peut se réduire à l'étude de deux classes : \mathcal{T}_u^α pour $\alpha \in \mathbb{T}$ et \mathcal{S}_u^α pour $\alpha \in \mathbb{D}$, car dans le cas où $|\alpha| > 1$, il suffit de prendre l'adjoint.

Sedlock a caractérisé les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α à l'aide de l'opérateur *shift modifié*.

Définition 6.2.4. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ tel que $1 - \alpha\overline{u(0)} \neq 0$. L'opérateur shift modifié noté S_u^α est défini par :

$$S_u^\alpha = S_u + \frac{\alpha}{1 - \alpha\overline{u(0)}} k_0^u \otimes \widetilde{k_0^u}. \quad (6.2.5)$$

L'opérateur S_u^α est une généralisation du shift. Pour $\alpha \in \mathbb{D}$, cet opérateur est défini et étudié par Sarason dans [57].

Dans le cas $|\alpha| = 1$, S_u^α est un opérateur unitaire appelé *opérateur unitaire de Clark*. Ces opérateurs ont été étudiés en détail par D. N. Clark dans [21].

Il a été montré par Sedlock ([58]) que pour chaque $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, S_u^α est un opérateur de Toeplitz tronqué de type α . De plus, on a :

$$S_u^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha\overline{u(0)}} A_{S_u k_0^u + \alpha\overline{k_0^u}}.$$

Le théorème suivant, démontré par Sedlock dans [58], caractérise les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α en terme de S_u^α .

Théorème 6.2.5 (Sedlock). Soient $A \in \mathcal{T}_u$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors A est de type α si et seulement si $AS_u^\alpha = S_u^\alpha A$.

Les résultats suivants montrent que la seule classe d'opérateurs de Toeplitz tronqués qui est stable par la multiplication est la classe d'opérateurs de Toeplitz tronqués de type α . Le théorème suivant donne la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du produit de deux opérateurs.

Théorème 6.2.6 (Sedlock, [59]). Soient $A_\varphi, A_\psi \in \mathcal{T}_u$. Alors le produit $A_\varphi A_\psi \in \mathcal{T}_u$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vraie :

- (1). A_φ ou A_ψ est un multiple de l'identité ou bien
- (2). il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que A_φ et A_ψ sont tous les deux de type α .

On a le corollaire suivant, concernant l'inverse de l'opérateur.

Corollaire 6.2.7. Soit $A_\varphi \in \mathcal{T}_u$ tel que A_φ est inversible. Alors A_φ^{-1} est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si A_φ est de type α .

Preuve. Si A_φ^{-1} est un opérateur de Toeplitz tronqué, d'après le Théorème 6.2.6 il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que A_φ et A_φ^{-1} sont tous les deux de type α .

Réciproquement, si A_φ est de type α , on a $A_\varphi S_u^\alpha = S_u^\alpha A_\varphi$ d'après le Théorème 6.2.5. Ainsi,

$$A_\varphi^{-1} S_u^\alpha = A_\varphi^{-1} S_u^\alpha A_\varphi A_\varphi^{-1} = A_\varphi^{-1} A_\varphi S_u^\alpha A_\varphi^{-1} = S_u^\alpha A_\varphi^{-1}$$

c'est-à-dire A_φ^{-1} est de type α . □

Récemment, Chalendar et Timotin ont continué l'étude des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α ([15]). Il ont obtenu des résultats sur la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz tronqués.

Théorème 6.2.8 (Chalendar - Timotin, [15]). Soient $A_\varphi, A_\psi \in \mathcal{T}_u$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1). $A_\varphi A_\psi = A_\psi A_\varphi$,
- (2). $A_\varphi A_\psi - A_\psi A_\varphi \in \mathcal{T}_u$,
- (3). l'une des deux conditions suivantes est vraie :
 - (a). I, A_φ et A_ψ sont linéairement dépendants,
 - (b). il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que A_φ et A_ψ sont tous les deux de type α .

Les théorèmes précédents montrent d'une part que pour chaque $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, la classe \mathcal{T}_u^α est une algèbre contenue dans \mathcal{T}_u et d'autre part que les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α donnent beaucoup de résultats significatifs sur l'étude des opérateurs de Toeplitz tronqués pourtant on n'a pas de formule explicite pour déterminer la valeurs exacte de α dans le cas général. Le théorème suivant donne la valeur de α pour les opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1.

Lemme 6.2.9 (Sedlock [59]). Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$, „

- (1). Si $\lambda \in \mathbb{D}$, l'opérateur $\widetilde{k}_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué du type $\alpha = u(\lambda)$ et son symbole est la fonction $\Phi = \widetilde{k}_\lambda^u + u(\lambda) \overline{S_u k_\lambda^u}$
- (2). Si $\eta \in \mathbb{T}$ et u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en η , $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué du type $u(\eta)$ et son symbole est la fonction $\Phi = k_\eta^u + u(\eta) \overline{S_u k_\eta^u}$.

Théorème 6.2.10 ([44]). Tout opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1 est de type α et α est de la forme $\alpha = u(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{T}_u$ tel que A soit de rang 1. D'après le Théorème 6.1.15,

- (1). ou bien, A est multiple de l'un des opérateurs $\widetilde{k}_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ et $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k}_\lambda^u$ avec $\lambda \in \mathbb{D}$,
- (2). ou bien A est multiple de $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ avec $\eta \in \mathbb{T}$ et u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point η

Et on conclut avec le Lemme 6.2.9 □

6.3 Etude de quelques cas en dimension finie

Dans cette section, on étudiera le cas où la fonction intérieure u est un produit de Blaschke d'ordre fini. Rappelons, voir section 1.4, que si u est un produit de Blaschke d'ordre n fini, K_u^2 est de dimension n .

Cas de la fonction intérieure u définie par $u(z) = z^n$

On sait que la famille $\mathcal{A} = \{z^k : 0 \leq k \leq n-1\}$ est une base orthogonale de K_u^2 . Soit $A_\varphi \in \mathcal{T}_u$ et notons $(a_{jk})_{0 \leq j, k \leq n-1}$ la matrice de A_φ relativement à la base \mathcal{A} . Par définition,

$$a_{jk} = \langle A_\varphi z^j, z^k \rangle = \langle P_u(\varphi z^j), z^k \rangle = \langle \varphi z^j, z^k \rangle = \langle \varphi, z^{k-j} \rangle = \widehat{\varphi}(k-j).$$

Donc la matrice de A_φ est la matrice de Toeplitz usuelle formée par les coefficients de Fourier $\widehat{\varphi}(-n+1), \widehat{\varphi}(-n+2), \dots, \widehat{\varphi}(n-2), \widehat{\varphi}(n-1)$ où $\widehat{\varphi}(0)$ est le coefficient sur la diagonale principale, $\widehat{\varphi}(1)$ est le coefficient sur la diagonale en dessous de la diagonale principale, $\widehat{\varphi}(-1)$ est le coefficient sur la diagonale au dessus de la diagonale principale et ainsi de suite.

Le théorème suivant donne une démonstration matricielle du Théorème 6.2.6 pour le cas spécial $u(z) = z^n$.

Théorème 6.3.1 ([44]). Soient A et B deux matrices de Toeplitz. Le produit $A \times B$ est une matrice de Toeplitz si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (1). A et B sont toutes les deux triangulaires inférieures.

(2). A ou B est un multiple de l'identité.

(3). Il existe un $\beta \in \mathbb{C}$ tel que A et B sont de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \beta a_{n-1} & \cdots & \beta a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & \beta a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & \beta b_{n-1} & \cdots & \beta b_1 \\ b_1 & b_0 & \cdots & \beta b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

Preuve. Notons :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = (a_{i-j})_{1 \leq i, j \leq n}, B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = (b_{i-j})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ et } A \times B = C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Par définition,

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} b_{kj}$$

C est une matrice de Toeplitz si et seulement si

$$c_{ij} = c_{i-j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-j} \quad (6.3.1)$$

Nous distinguons deux cas pour la relation (6.3.1).

(1). Pour $i = j$. On a :

$$c_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-i} \text{ pour } i = 0, \dots, n-1.$$

c'est-à-dire

$$c_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-i} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k+1} b_{k-i-1} \text{ pour } i = 0, \dots, n-2. \quad (6.3.2)$$

De la relation (6.3.2), on a la série d'égalité :

$$a_{i-n+1} b_{n-i-1} = a_{i+1} b_{-i-1} \quad (6.3.3)$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{-n+1} b_{n-1} = a_1 b_{-1} \\ a_{-n+2} b_{n-2} = a_2 b_{-2} \\ \vdots \\ a_{-1} b_1 = a_{n-1} b_{-n+1} \end{array} \right. \quad (6.3.4)$$

(a). Si $\beta = 0$, $b_{-1} = b_{-2} = \dots = b_{-n+1} = 0$ et en revenant dans (6.3.7), on a :

(i). $a_{-n+i} = 0$ pour tous les $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ou

(ii). $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 0$

En résumé, si $\beta = 0$, A et B sont toutes les deux triangulaires inférieures ou B est multiple de l'identité.

(b). Si $\beta \neq 0$, on a :

$$b_{-1} = \beta b_{n-s}, \dots, b_{-n+1} = \beta b_1$$

On a encore deux cas

(i). S'il existe un s tel que $b_{n-s} \neq 0$, en revenant au système (6.3.7), on a :

$$a_i b_{-s} = a_{-n+i} b_{n-s}$$

c'est-à-dire

$$\beta a_i b_{n-s} = a_{-n+i} b_{n-s}$$

c'est-à-dire

$$a_{-n+i} = \beta a_i$$

Donc A et B sont de la même forme que la condition 3. du théorème.

(ii). Si $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 0$, B est un multiple de l'identité.

□

Le théorème suivant décrit la \mathbf{C}^* -algèbre engendrée par l'opérateur shift S_u qui est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole la fonction $\varphi : z \in \mathbb{T} \mapsto z \in \mathbb{C}$.

Théorème 6.3.2 ([44]). $\mathbf{C}^*(S_u) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $\mathbf{C}^*(S_u)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désignent respectivement la \mathbf{C}^* -algèbre engendrée par S_u et l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{C} . De plus, si A désigne la matrice de S_u par rapport à la base orthogonale $\mathcal{A} = \{1, z, \dots, z^{n-1}\}$ de K_u^2 , on a :

$$e_{ij} = A^{*(n-1-i)} A^{n-1} A^{*j} \text{ pour } 0 \leq i, j \leq n-1$$

où (e_{ij}) désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A^* = \overline{A}^t$ l'adjoint de A en tant qu'opérateur.

Preuve. Soit $(f_k)_k$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Il suffit de remarquer que :

$$e_{ij}(f_k) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } k \neq j \\ f_i & \text{si } k = j \end{cases}$$

et

$$A^{*\ell}(f_k) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } k < \ell \\ f_{k-\ell} & \text{si } \ell \leq k \end{cases}$$

et

$$A^m(f_k) = \begin{cases} \bar{0} & \text{si } k \neq 0 \\ f_m & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

□

Le théorème 6.3.2 ci-dessus a pour corollaire le résultat suivant, qui montre qu'on peut avoir le même résultat si la fonction intérieure u est un produit de Blaschke d'ordre n avec un seul zéro répété n -fois.

Corollaire 6.3.3 ([44]). *Si $u(z) = \left(\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\right)^n$, $\mathbb{C}^*(S_u) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (avec les mêmes notations que le Théorème 6.3.2)*

Preuve. Remarquons que puisque $\lambda \in \mathbb{D}$, la fonction ϑ définie par

$$\vartheta(z) = \frac{u(z) - \lambda}{1 - \bar{\lambda}u(z)}$$

est une fonction intérieure et la transformation de Crofoot J définie par

$$J(f) = \frac{\sqrt{1-|\lambda|^2}}{1-\bar{\lambda}u} f$$

est une isométrie de K_u^2 sur K_ϑ^2 ([57], Théorème 13.1). De plus $J\mathcal{T}_uJ^* = \mathcal{T}_\vartheta$ ([57], Théorème 13.2).

Donc, $JS_uJ^* = S_\vartheta$ et $\mathbb{C}^*(S_u) = \mathbb{C}^*(S_\vartheta)$

□

Cas d'un produit de Blaschke d'ordre n avec des zéros deux à deux distincts

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer la matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type α dans le cas où la fonction intérieure u est de la forme :

$$u(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z-\lambda_j}{1-\bar{\lambda}_jz} \text{ avec } \prod_{j=1}^n \lambda_j \neq 0 \text{ et } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j. \quad (6.3.8)$$

Notons que dans le cas où u est de la forme (6.3.8), le noyau reproduisant k_λ^u et le noyau de Cauchy-Szegö k_λ coïncident aux points $\lambda_j \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ et la famille $\mathcal{A} = \{k_{\lambda_j}, j = 1, 2, \dots, n\}$ est une base non orthogonale de K_u^2 .

En 2008, Cima, Ross et Wogen ont donné [20] une caractérisation matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués en général dans le cas de la dimension finie. Nous rappelons ici leur résultat.

Théorème 6.3.4 (Cima-Ross-Wogen). *Soit u une fonction intérieure de la forme (6.3.8) et A une application linéaire sur K_u^2 . Si $M = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ désigne la matrice de A relativement à la base $\mathcal{A} = \{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, \dots, k_{\lambda_n}\}$ de K_u^2 , $A \in \mathcal{T}_u$ si et seulement si*

$$r_{ij} = \frac{\overline{u'(\lambda_i)}}{u'(\lambda_j)} \left[\frac{\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_i}{\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_i} r_{1i} + \frac{\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_i} r_{1j} \right] \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n \text{ et } i \neq j. \quad (6.3.9)$$

La relation (6.3.9) nous dit que la matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué est entièrement déterminée par la donnée des coefficients de la première ligne et de la diagonale. La relation (6.3.9) veut dire aussi

$$r_{i1} = \frac{\overline{u'(\lambda_1)}}{u'(\lambda_i)} r_{1i} \text{ et } r_{ji} = \frac{\overline{u'(\lambda_i)}}{u'(\lambda_j)} r_{ij} \text{ pour } i \neq j. \quad (6.3.10)$$

Soient $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ et $\Phi \in L^2$ telle que $A_\Phi \in \mathcal{T}_u^\alpha$ c'est-à-dire il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que $A_\Phi = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \varphi}}$. Puisque $\mathcal{A} = \{k_{\lambda_j}, j = 1, 2, \dots, n\}$ est une base (non orthogonale) de K_u^2 , il existe $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $\varphi = a_1 k_{\lambda_1} + a_2 k_{\lambda_2} + \dots + a_n k_{\lambda_n}$ et $\tilde{\varphi} = \bar{a}_1 \tilde{k}_{\lambda_1} + \bar{a}_2 \tilde{k}_{\lambda_2} + \dots + \bar{a}_n \tilde{k}_{\lambda_n}$. Comme $u(\lambda_j) = 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, le Lemme 1.3.8 entraîne :

$$S_u \tilde{\varphi} = \bar{a}_1 \lambda_1 \tilde{k}_{\lambda_1} + \bar{a}_2 \lambda_2 \tilde{k}_{\lambda_2} + \dots + \bar{a}_n \lambda_n \tilde{k}_{\lambda_n}. \quad (6.3.11)$$

Les lemmes suivants nous seront utiles dans le calcul des coefficients de la matrice.

Lemme 6.3.5. Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$(1). \langle \tilde{k}_{\lambda_i}, \tilde{k}_{\lambda_j} \rangle = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \lambda_i}.$$

$$(2). \langle \tilde{k}_{\lambda_i}, k_{\lambda_j} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ u'(\lambda_i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Preuve. Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$(1). \langle \tilde{k}_{\lambda_i}, \tilde{k}_{\lambda_j} \rangle = \langle C[k_{\lambda_i}], C[k_{\lambda_j}] \rangle = \langle k_{\lambda_j}, k_{\lambda_i} \rangle = k_{\lambda_j}(\lambda_i) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \lambda_i}.$$

(2). On a $\langle \tilde{k}_{\lambda_i}, k_{\lambda_j} \rangle = \tilde{k}_{\lambda_i}(\lambda_j)$ car k_{λ_j} est un noyau reproduisant et $\tilde{k}_{\lambda_i} \in K_u^2$.

$$\text{Mais, } \tilde{k}_{\lambda_i}(z) = \frac{u(z)}{z - \lambda_i} = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_i z} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^n b_{\lambda_p}(z) \text{ où } b_{\lambda}(z) = \frac{z - \lambda}{1 - \bar{\lambda} z}, \text{ pour } z \in \mathbb{D}.$$

Il s'ensuit que :

$$(a). \text{ Si } i \neq j, \tilde{k}_{\lambda_i}(\lambda_j) = \frac{u(\lambda_j)}{\lambda_j - \lambda_i} = 0$$

(b). Pour $i = j$. Remarquons que $u' = b'_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b_{\lambda_n} + \dots + b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} \cdots b'_{\lambda_n}$ et

$$u'(\lambda_s) = \frac{1}{1 - |\lambda_s|^2} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq s}}^n b_{\lambda_p}(\lambda_s)$$

$$\text{Ainsi } \tilde{k}_{\lambda_i}(\lambda_i) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_i \lambda_i} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^n b_{\lambda_p}(\lambda_i) = \frac{1}{1 - |\lambda_i|^2} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^n b_{\lambda_p}(\lambda_i) = u'(\lambda_i)$$

□

Lemme 6.3.6. Pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, les coefficients de la matrice de $A_{\overline{k_{\lambda_j}}}$ sont nuls sauf l'élément de la j -ème position de la diagonale. Précisément la matrice de $A_{\overline{k_{\lambda_j}}}$ est de la forme :

$$\text{diag}\left(0, \dots, 0, \overline{u'(\lambda_j)}, 0, \dots, 0\right)$$

Preuve. Notons ([57]) que $A_{\overline{k_{\lambda_j}}} = k_{\lambda_j} \otimes \tilde{k}_{\lambda_j}$ et pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$A_{\overline{k_{\lambda_j}}}(k_{\lambda_i}) = (k_{\lambda_j} \otimes \tilde{k}_{\lambda_j})(k_{\lambda_i}) = \delta_{ij} \overline{u'(\lambda_j)} k_{\lambda_j} \text{ d'après le Lemme 6.3.5.}$$

□

Proposition 6.3.7 ([44]). Si $\varphi \in K_u^2$, la matrice de $A_{\overline{S_u \varphi}}$ est de la forme

$$\text{diag}\left(a_1 \overline{\lambda_1} \overline{u'(\lambda_1)}, a_2 \overline{\lambda_2} \overline{u'(\lambda_2)}, \dots, a_n \overline{\lambda_n} \overline{u'(\lambda_n)}\right)$$

où a_1, \dots, a_n désignent les coordonnées de φ relativement à la base \mathcal{A} de K_u^2 .

Preuve. Soit $\varphi \in K_u^2$. Puisque la $\mathcal{A} = \{k_{\lambda_j}, j = 1, 2, \dots, n\}$ est une base de K_u^2 , il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\varphi = a_1 k_{\lambda_1} + a_2 k_{\lambda_2} + \dots + a_n k_{\lambda_n} \text{ et } \tilde{\varphi} = \overline{a_1} \tilde{k}_{\lambda_1} + \overline{a_2} \tilde{k}_{\lambda_2} + \dots + \overline{a_n} \tilde{k}_{\lambda_n}.$$

Ainsi,

$$S_u \tilde{\varphi} = \overline{a_1} S_u \tilde{k}_{\lambda_1} + \overline{a_2} S_u \tilde{k}_{\lambda_2} + \dots + \overline{a_n} S_u \tilde{k}_{\lambda_n} = \overline{a_1} \lambda_1 \tilde{k}_{\lambda_1} + \overline{a_2} \lambda_2 \tilde{k}_{\lambda_2} + \dots + \overline{a_n} \lambda_n \tilde{k}_{\lambda_n}$$

et

$$\overline{S_u \tilde{\varphi}} = a_1 \overline{\lambda_1} \overline{\tilde{k}_{\lambda_1}} + a_2 \overline{\lambda_2} \overline{\tilde{k}_{\lambda_2}} + \dots + a_n \overline{\lambda_n} \overline{\tilde{k}_{\lambda_n}}.$$

Puisque $A_{\overline{k_{\lambda_p}}} = k_{\lambda_p} \otimes \tilde{k}_{\lambda_p}$, on a :

$$A_{\overline{S_u \tilde{\varphi}}} = \sum_{p=1}^n a_p \overline{\lambda_p} A_{\overline{k_{\lambda_p}}} = \sum_{p=1}^n a_p \overline{\lambda_p} (k_{\lambda_p} \otimes \tilde{k}_{\lambda_p})$$

et pour $s \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$A_{\overline{S_u \tilde{\varphi}}}(k_{\lambda_s}) = \sum_{p=1}^n a_p \overline{\lambda_p} (k_{\lambda_p} \otimes \tilde{k}_{\lambda_p})(k_{\lambda_s}) = a_s \overline{\lambda_s} \overline{u'(\lambda_s)} k_{\lambda_s} \text{ d'après le Lemme 6.3.6.}$$

□

Proposition 6.3.8 ([44]). *Pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, notons $(t_{sp}(j))_{1 \leq s, p \leq n}$ la matrice de $A_{k_{\lambda_j}}$. Alors les $t_{sp}(j)$ sont donnés par :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} t_{jp}(j) = \frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_p} & \text{si } p \neq j \\ t_{sj}(j) = \frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_s} \frac{\overline{u'(\lambda_j)}}{u'(\lambda_s)} & \text{si } s \neq j \\ t_{ss}(j) = \frac{\bar{\lambda}_s}{\bar{\lambda}_s - \bar{\lambda}_j} & \text{si } s \neq j \\ t_{jj}(j) = 1 + \frac{\bar{\lambda}_j}{2} \frac{\overline{u''(\lambda_j)}}{u'(\lambda_j)} \\ t_{sp}(j) = 0 & \text{si } s \neq j, s \neq p, p \neq j \end{array} \right.$$

Preuve. Soit $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixé et $1 \leq p \leq n$. Par définition, $t_{sp}(j)$ est la s -ème coordonnée de $A_{k_{\lambda_j}}(k_{\lambda_p})$. On a deux cas à considérer.

- Pour $p \neq j$, on a :

$$A_{k_{\lambda_j}}(k_{\lambda_p}) = P_u(k_{\lambda_j} k_{\lambda_p}) = P_u\left(\frac{\bar{\lambda}_p}{\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_j} k_{\lambda_p} + \frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_p} k_{\lambda_j}\right) = \frac{\bar{\lambda}_p}{\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_j} k_{\lambda_p} + \frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_p} k_{\lambda_j}$$

- Pour $p = j$, $A_{k_{\lambda_j}}(k_{\lambda_j}) = P_u(k_{\lambda_j}^2) \in K_u^2$ et comme $\mathcal{A} = \{k_{\lambda_j}, j = 1, 2, \dots, n\}$ est une base de K_u^2 , il existe $c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj} \in \mathbb{C}$ tels que

$$P_u(k_{\lambda_j}^2) = c_{1j} k_{\lambda_1} + c_{2j} k_{\lambda_2} + \dots + c_{nj} k_{\lambda_n}. \quad (6.3.12)$$

Il faut maintenant calculer les c_{ij} dans (6.3.12). Pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ le Lemme 6.3.5 entraîne

$$\langle P_u(k_{\lambda_j}^2), \tilde{k}_{\lambda_i} \rangle = c_{ij} \overline{u'(\lambda_i)}. \quad (6.3.13)$$

Calculons maintenant l'intégrale à gauche de (6.3.13). On a :

$$\langle P_u(k_{\lambda_j}^2), \tilde{k}_{\lambda_i} \rangle = \langle k_{\lambda_j}^2, P_u(\tilde{k}_{\lambda_i}) \rangle = \langle k_{\lambda_j}^2, \tilde{k}_{\lambda_i} \rangle = \overline{\langle \tilde{k}_{\lambda_i}, k_{\lambda_j}^2 \rangle} = \overline{I_{ij}}$$

avec $I_{ij} = \int_{\mathbb{T}} \frac{u(\zeta)}{(\zeta - \lambda_i)} \frac{1}{(1 - \lambda_j \bar{\zeta})^2} dm(\zeta)$. En passant aux coordonnées polaires $\zeta = e^{i\theta}$, on a

$$dm(\zeta) = \frac{d\theta}{2\pi} \text{ et } d\zeta = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} d\theta = i\zeta dm(\zeta) \text{ c'est-à-dire } dm(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Ainsi,

$$I_{ij} = \int_{\mathbb{T}} \frac{u(\zeta)}{(\zeta - \lambda_i)} \frac{1}{(1 - \lambda_j \bar{\zeta})^2} dm(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta u(\zeta)}{(\zeta - \lambda_i)(\zeta - \lambda_j)^2} d\zeta \quad (6.3.14)$$

Pour calculer (6.3.14), on a deux cas :

- 1^{er} Cas : si $i \neq j$. Soit g la fonction définie par

$$g(z) = \frac{zu(z)}{(z - \lambda_i)(z - \lambda_j)}.$$

Pour $z \neq \lambda_i$ et $z \neq \lambda_j$, on a :

$$g(z) = \frac{z}{(1 - \bar{\lambda}_i z)(1 - \bar{\lambda}_j z)} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq i, j}}^n \frac{z - \lambda_s}{1 - \bar{\lambda}_s z}.$$

Donc la fonction g est holomorphe et donc g admet un prolongement analytique, noté \check{g} .

On a ainsi,

$$I_{ij} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\check{g}(\zeta)}{\zeta - \lambda_j} d\zeta = \check{g}(\lambda_j) \text{ d'après la formule de Cauchy.}$$

Mais,

$$\check{g}(\lambda_j) = \frac{\lambda_j}{(1 - |\lambda_j|^2)(1 - \bar{\lambda}_i \lambda_j)} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq i, j}}^n \frac{\lambda_j - \lambda_s}{1 - \bar{\lambda}_s \lambda_j} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} u'(\lambda_j).$$

Donc,

$$I_{ij} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} u'(\lambda_j).$$

- 2^e Cas : si $i = j$, on a

$$I_{jj} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta u(\zeta)}{(\zeta - \lambda_j)^3} d\zeta$$

Soit h la fonction définie par $h(z) = zu(z)$. La fonction h est holomorphe dans un voisinage de $\bar{\mathbb{D}}$ et d'après la formule de Cauchy pour les dérivées n -ème, on a

$$I_{jj} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta u(\zeta)}{(\zeta - \lambda_j)^3} d\zeta = \frac{h''(\lambda_j)}{2} = u'(\lambda_j) + \frac{\lambda_j}{2} u''(\lambda_j).$$

D'après la relation (6.3.13), on a :

$$c_{ij} = \frac{\bar{I}_{ij}}{u'(\lambda_i)}$$

Donc,

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_i} \frac{\overline{u'(\lambda_j)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} & \text{si } i \neq j \\ 1 + \frac{\bar{\lambda}_j}{2} \frac{\overline{u''(\lambda_j)}}{\overline{u'(\lambda_j)}} & \text{si } i = j \end{cases}$$

□

Théorème 6.3.9 ([44]). Soient $\alpha \in \mathbb{D}$ et $A_{\varphi+\alpha\overline{S_u\overline{\varphi}}} \in \mathcal{F}_u^\alpha$ avec $\varphi \in K_u^2$. Notons $(r_{sp})_{1 \leq s, p \leq n}$ la matrice de $A_{\varphi+\alpha\overline{S_u\overline{\varphi}}}$ relativement à la base $\mathcal{A} = \{k_{\lambda_j}, j = 1, 2, \dots, n\}$ de K_u^2 . Alors les r_{sp} sont donnés par :

$$r_{sp} = \begin{cases} \frac{1}{\overline{u'(\lambda_s)}} \left[a_s \frac{\overline{\lambda_s}}{\overline{\lambda_s - \lambda_p}} \overline{u'(\lambda_s)} + a_p \frac{\overline{\lambda_p}}{\overline{\lambda_p - \lambda_s}} \overline{u'(\lambda_p)} \right] & \text{si } s \neq p \\ a_s \left(1 + \frac{\overline{u''(\lambda_s)}}{\overline{u'(\lambda_s)}} \right) + \overline{\lambda_s} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n \frac{a_j}{\overline{\lambda_s - \lambda_j}} + \alpha a_s \overline{\lambda_s} \overline{u'(\lambda_s)} & \text{si } s = p \end{cases}$$

où les a_i désignent les coordonnées de φ relativement à la base $\mathcal{A} = \{k_{\lambda_j}, j = 1, 2, \dots, n\}$ de K_u^2 .

Preuve. Soient $\alpha \in \mathbb{D}$ et $A_{\varphi+\alpha\overline{S_u\overline{\varphi}}} \in \mathcal{F}_u^\alpha$ avec $\varphi \in K_u^2$. Alors il existe $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\varphi = a_1 k_{\lambda_1} + a_2 k_{\lambda_2} + \dots + a_n k_{\lambda_n} = \sum_{j=1}^n a_j k_{\lambda_j}$$

et

$$\overline{S_u\overline{\varphi}} = a_1 \overline{\lambda_1} \overline{\overline{k}_{\lambda_1}} + a_2 \overline{\lambda_2} \overline{\overline{k}_{\lambda_2}} + \dots + a_n \overline{\lambda_n} \overline{\overline{k}_{\lambda_n}} = \sum_{j=1}^n a_j \overline{\lambda_j} \overline{\overline{k}_{\lambda_j}}.$$

Ainsi,

$$A_{\varphi+\alpha\overline{S_u\overline{\varphi}}} = \sum_{j=1}^n a_j A_{k_{\lambda_j}} + \alpha \sum_{j=1}^n a_j \overline{\lambda_j} A_{\overline{\overline{k}_{\lambda_j}}} = \sum_{j=1}^n a_j (A_{k_{\lambda_j}} + \alpha \lambda_j A_{\overline{\overline{k}_{\lambda_j}}}).$$

En utilisant les Proposition 6.3.8 et 6.3.7, on a :

- pour $s \neq p$,

$$\begin{aligned} r_{sp} &= \sum_{j=1}^n t_{sp}(j) = a_1 t_{sp}(1) + a_2 t_{sp}(2) + \dots + a_n t_{sp}(n) \\ &= a_s t_{sp}(s) + a_p t_{sp}(p) \\ &= a_s \frac{\overline{\lambda_s}}{\overline{\lambda_s - \lambda_p}} + a_p \frac{\overline{\lambda_p}}{\overline{\lambda_p - \lambda_s}} \frac{\overline{u'(\lambda_p)}}{\overline{u'(\lambda_s)}} \\ &= \frac{1}{\overline{u'(\lambda_s)}} \left[a_s \frac{\overline{\lambda_s}}{\overline{\lambda_s - \lambda_p}} \overline{u'(\lambda_s)} + a_p \frac{\overline{\lambda_p}}{\overline{\lambda_p - \lambda_s}} \overline{u'(\lambda_p)} \right]. \end{aligned}$$

- pour $s = p$,

$$\begin{aligned} r_{ss} &= a_1 t_{ss}(1) + \dots + a_j t_{ss}(s) + \dots + a_n t_{ss}(n) + \alpha a_s \overline{\lambda_s} \overline{u'(\lambda_s)} \\ &= a_1 \frac{\overline{\lambda_s}}{\overline{\lambda_s - \lambda_1}} + \dots + a_s \left[1 + \frac{\overline{\lambda_s} \overline{u''(\lambda_s)}}{\overline{u'(\lambda_s)}} \right] + \dots + a_n \frac{\overline{\lambda_s}}{\overline{\lambda_s - \lambda_n}} + \alpha a_s \overline{\lambda_s} \overline{u'(\lambda_s)} \\ &= a_s \left[1 + \frac{\overline{\lambda_s} \overline{u''(\lambda_s)}}{\overline{u'(\lambda_s)}} \right] + \overline{\lambda_s} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n \frac{a_j}{\overline{\lambda_s - \lambda_j}} + \alpha a_s \overline{\lambda_s} \overline{u'(\lambda_s)} \end{aligned}$$

□

Le Théorème 6.3.9 donne une description complète de la matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type α dans le cas de la dimension finie pour un $\alpha \in \mathbb{C}$ donné. Pourtant, nous n'avons pas de critère permettant de conclure si un opérateur de Toeplitz tronqué donné est de type α ou non et dans le cas affirmatif, quelle est la formule explicite pour déterminer cet α . Plus précisément, la question suivante reste encore sans réponse :

Question. Soit $M = (r_{sp})_{0 \leq s, p \leq n}$ la matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué, c'est-à-dire les r_{sp} vérifient la relation (6.3.9). Quand est-ce que M est de type α et comment peut-on utiliser r_{sp} pour déterminer α ?

En 2014, B. Lanucha [45] a généralisé la relation (6.3.9) de [20] dans le cas d'un produit de Blaschke d'ordre infini avec des zéros deux à deux distincts et nous espérons trouver l'analogie du Théorème 6.3.9.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ahern, P.: *On the range of the Berezin transform*. J. Funct. Anal, 215 :206–216, 2004.
- [2] Ahern, P. et Clark, D.: *On functions orthogonal to invariant subspaces*. Acta Math., 124(1) :191–204, 1970.
- [3] Ahern, P. et Clark, D.: *Radial limits and invariant subspaces*. Amer. J. Math., 92 :332–342, 1970.
- [4] Ahern, P. et Čučković, Ž. : *Products of Toeplitz operators on the Bergman space*. Illinois J. Math., 1(45) :113–121, 2001.
- [5] Ahern, P. et Čučković, Ž.: *A theorem of Brown-Halmos type for Bergman space Toeplitz operators*. J. Funct. Anal, (187) :200–210, 2001.
- [6] Axler, S.: *Bergman spaces and their operators*. Dans *Surveys of some results in Operator Theory*, tome 1, pages 1–50. Springer-Verlag, 1988.
- [7] Axler, S., Bourdon, P. et Ramey, W.: *Harmonic Function Theory*. Springer-Verlag, second édition, 2000.
- [8] Axler, S., Chang, S. et Sarason, D.: *Products of Toeplitz operators*. Int. Equa.Op. Th., 1 :285–309, 1978.
- [9] Axler, S. et Zheng, D.: *Toeplitz algebras on the disk*. J. Funct. Anal., 243 :67–86, 2007.
- [10] Baranov, A., Bessonov, R. et Kapustin, V.: *Symbols of truncated Toeplitz operators*. J. Funct. Anal, (261) :3437–3456, 2011.
- [11] Baranov, A., Chalendar, I., Fricain, E., Mashreghi, J. et Timotin, D.: *Bounded symbols and reproducing kernel thesis for truncated Toeplitz operators*. J. Funct. Anal., (259) :2673–2701, 2010.
- [12] Bessonov, R.: *Truncated Toeplitz operators of finite rank*. Proc. Amer. Math. Soc., 142(4) :1301–1313, 2014.

-
- [13] Beurling, A.: *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*. Acta Math., 81(17) :239–255, 1948.
- [14] Brown, A. et Halmos, P.: *Algebraic properties of Toeplitz operators*. J. Reine Angew. Math., 123 :89–102, 1964.
- [15] Chalendar, I. et Timotin, D.: *Commutation relations for truncated Toeplitz Operators*. Operators And Matrices, 8(3) :877–888, 2014.
- [16] Choe, B. et Lee, Y.: *Commuting Toeplitz operators on the harmonic Bergman space*. Michigan Math. J., 46 :163–174, 1999.
- [17] Cima, J., Garcia, S., Ross, W. et Wogen, W.: *Truncated Toeplitz operators : spatial isomorphism, unitary equivalence, and similarity*. Indiana Univ. Math. J., (59) :595–620, 2010.
- [18] Cima, J., Matheson, A. et Ross, W.: *The Cauchy transform*. Mathematical Surveys and Monographs, vol 125. American Mathematical Society, 2006.
- [19] Cima, J. et Ross, W.: *The Backward Shift on the Hardy Space*. Mathematical surveys and monographes, vol 79. American Mathematical Society, 2000, ISBN 0-8218-2083-4.
- [20] Cima, J., Ross, W. et Wogen, W.: *Truncated Toeplitz operators on finite dimensional spaces*. Operators And Matrices, (2) :357–369, 2008.
- [21] Clark, D. N.: *One dimensional perturbations of restricted shifts*. J. Analyse Math., 25 :169–191, 1972.
- [22] Conway, J.: *A Course in Functional Analysis*. Springer, New York, second édition, 1997.
- [23] Ding, X.: *A question of Toeplitz operators on the harmonic Bergman space*. J. Math. Anal. Appl., 344 :367–372, 2008.
- [24] Dong, X. et Zhou, Z.: *Products of Toeplitz operators on the harmonic Bergman space*. Proc. Amer. Math. Soc., 138(5) :1765–1773, 2010.
- [25] Douglas, R.: *Banach algebra techniques in operator theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2^e édition, 1998.
- [26] Douglas, R., H. Shapiro et A. Shields: *Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operators*. Ann. Inst. Fourier, 20(1) :37–76, 1970.
- [27] Duren, P.: *Theory of H^p –spaces*. A series of Monographs and Textbooks. Academic Press, London, 1970.
- [28] Duren, P. et A. Schuster: *Bergman Spaces*. Mathematical surveys and monographes. American Mathematical Society, 2004.

- [29] Garcia, S.: *Conjugation, the backward shift and Toeplitz kernels*. J. Op. Th., 54(2) :239–250, 2005.
- [30] Garcia, S. et Putinar, M.: *Complex symmetric operators and applications*. Trans. Amer. Math. Soc., 358(3) :1285–1315, 2005.
- [31] Garcia, S. et Putinar, M.: *Complex symmetric operators and application II*. Trans. Amer. Math. Soc., 359(8) :3913–3931, 2007.
- [32] Garcia, S. et Ross, W.: *The norm of a truncated Toeplitz operator*. Centre de Recherches Mathématiques : Proc. and Lecture Notes, 51 :59–64, 2010.
- [33] Garcia, S., Ross, W. et Wogen, W.: *Spatial isomorphisms of algebras of truncated Toeplitz operators*. Indiana Univ. Math. J., (59) :1971–2000, 2010.
- [34] Garnett, J.: *Bounded Analytic Functions (Revised First Edition)*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2007.
- [35] Gu, C.: *Products of several Toeplitz operators*. J. Funct. Anal., 171 :483–587, 2000.
- [36] Guo, K.: *A problem on products of Toeplitz operators*. Proc. Amer. Math. Soc., 124(3) :869–871, 1996.
- [37] Guo, K. et Zheng, D.: *Toeplitz algebra and Hankel algebra on the harmonic Bergman space*. J. Math. Anal.Appl., 276 :213–230, 2002.
- [38] Halmos, P.: *A Hilbert space problem book*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, second édition, 1982.
- [39] Hardy, G.: *The mean value of the modulus of an analytic function*. Proc. London Math. Soc, 14 :269–277, 1914.
- [40] Hedenmalm, H., Korenblum, B. et Zhu, K.: *Theory of Bergman Spaces*, tome 54 de *Graduate Texts in Mathematics* 199. Springer-Verlag, 2000.
- [41] Heins, M.: *Complex Function Theory*. A series of Monographs and Textbooks. Academic Press, London, 1968.
- [42] Hoffman, K.: *Banach spaces of analytic function*. 1962.
- [43] Katznelson, Y.: *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge University Press, 3^e édition, 2004.
- [44] Korrichi, F. et Randriamahaleo, F.: *Matrix characterization of truncated Toeplitz operators of type α* . Preprint.

- [45] Lanucha, B.: *Matrix representations of truncated Toeplitz operators*. J. Math. Anal. Appl., 413 :430–437, 2014.
- [46] Louhichi, I.: *Powers and roots of Toeplitz operators*. Proc. Amer. Math. Soc., 135 :1465–1475, 2007.
- [47] Louhichi, I., Randriamahaleo, F. et Zakariasy, L.: *On the commutativity of a certain class of Toeplitz operators*. Concrete Operarators, 2 :1–7, 2014.
- [48] Louhichi, I., Strouse, E. et Zakariasy, L.: *Products of Toeplitz operators on the Bergman space*. Integral Equations Operator Theory, 54 :525–539, 2006.
- [49] Louhichi, I. et Zakariasy, L.: *On Toeplitz operators with quasihomogeneous symbols*. Arch. Math., 85, 2005.
- [50] Nikol'skiĭ, N.: *Treatise on the shift operator : spectral function theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, 1986, ISBN 9783540150213.
- [51] Nikol'skiĭ, N.: *Operators, functions, and systems : an easy reading, vol 1*. Mathematical surveys and monographs, vol 92. American Mathematical Society, 2002.
- [52] Remmert, R.: *Classical topics in complex functions theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1998.
- [53] Rosenblum, M. et Rovnyak, J.: *Hardy classes and operator theory*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985.
- [54] Ross, W. et Shapiro, H.: *Generalized analytic continuation*. University Lecture Series, vol. 25. American Mathematical Society, 2002.
- [55] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 3^e édition, 1987.
- [56] Sarason, D.: *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*. 1994.
- [57] Sarason, D.: *Algebraic properties of truncated Toeplitz operators*. Operators And Matrices, 1(4) :491–526, 2007.
- [58] Sedlock, N.: *Properties of truncated Toeplitz operators*. Thèse de doctorat, Washington University in St. Louis.
- [59] Sedlock, N.: *Algebras of truncated Toeplitz operators*. Operators And Matrices, 51(2) :309–326, 2011.
- [60] Stroethoff, K.: *Harmonic Bergman space*. MSRI Publication, 33 :51–64, 1980.
- [61] Stroethoff, K.: *Products of Hankel and Toeplitz Operators on the Bergman Space*. Journal of Functional Analysis, 169 :289–313, 1999.

- [62] Strouse, E., Timotin, D. et Zarrabi, M.: *Unitary equivalence to truncated Toeplitz operators*. Indiana Univ. Math. J, 61(2) :525–538, 2012.
- [63] Takenaka, S.: *On the orthonormal functions and a new formula of interpolation*. Jap. J. Math., 2 :129 – 145, 1925.
- [64] Čučković, Ž. et Rao, N.: *Mellin transform, monomial symbol and commuting Toeplitz operators*. J. Funct. Anal., 154(1) :195–214, 1998.

Résumé. Dans la première partie de la thèse, nous donnons les résultats classiques concernant l'espace de Hardy, les espaces modèles et les espaces de Bergman analytique et harmonique. Les notions de base telles que les projections et les noyaux reproduisant y sont introduites. Nous exposons ensuite nos résultats concernant d'une part, la stabilité du produit et la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes et d'autre part, la description matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués du type α dans le cas de la dimension finie.

Mot-clés. Espace de Bergman, Espace de Bergman harmonique, Espace modèle, Opérateurs de Toeplitz, Opérateurs de Toeplitz tronqués.

Abstract. In the first part of the thesis, we give some classical results concerning the Hardy space, models spaces and analytic and harmonic Bergman spaces. The basic concepts such as projections and reproducing kernels are introduced. We then describe our results on the the stability of the product and the commutativity of two quasihomogeneous Toeplitz operators on the harmonic Bergman space. Finally, we give the matrix description of truncated Toeplitz operators of type α in the finite dimensional case.

Keywords. Bergman space, harmonic Bergman space, Models spaces, Toeplitz operators, Truncated Toeplitz operators.