



# Deux problèmes de décompte diophantien

Thomas Ange

## ► To cite this version:

Thomas Ange. Deux problèmes de décompte diophantien. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Bordeaux, 2015. Français. NNT : 2015BORD0134 . tel-01232511

**HAL Id: tel-01232511**

**<https://theses.hal.science/tel-01232511>**

Submitted on 23 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
**DOCTEUR DE**  
**L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES PURES

Par Thomas ANGE

**DEUX PROBLÈMES DE DÉCOMPTE DIOPHANTIN**

Sous la direction de : Gaël RÉMOND

Soutenue le 28 septembre 2015

Membres du jury :

M. RÉMOND Gaël, Directeur de Recherche, C.N.R.S.,  
M. GAUDRON Éric, Professeur, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand,  
M. PHILIPPON Patrice, Directeur de Recherche, C.N.R.S.,  
M. AUTISSIER Pascal, Professeur, Université de Bordeaux  
Mme HERBLOT Mathilde, Maître de Conférences, Université Paris VII

directeur  
rapporteur  
rapporteur  
Président



# **Titre : Deux problèmes de décompte diophantien**

## **Résumé :**

Nous traitons ici de questions d'effectivité dans les problèmes de Mordell-Lang et de Schanuel où la notion de hauteur algébrique joue un rôle central.

Dans un premier temps nous revisitions la méthode de Vojta-Faltings dans un cadre général, en y incluant notamment un procédé de descente uniforme qui permet d'optimiser le nombre de recours au pesant mécanisme d'approximation diophantienne. Nous proposons ensuite une application de ce résultat au problème de Mordell-Lang plus Bogomolov dans le tore, qui consiste à décrire un sous-ensemble algébrique  $X$  comme réunion de translatés de sous-tores inclus dans  $X$  moyennant de se restreindre à un sous-groupe de rang fini épaissi. Nous nous appuyons en particulier sur un énoncé d'Amoroso et Viada concernant le problème de Bogomolov dans ce contexte et améliorons les bornes antérieures obtenues par Rémond.

Dans un second temps, nous établissons une version du théorème de Schanuel dans le cadre d'un espace adélique hermitien sur un corps de nombres. Nous donnons une estimation asymptotique du nombre de points projectifs de hauteur bornée pour une hauteur définie par une famille de normes sur les complétés en chaque place, vérifiant certaines conditions mais sans hypothèse de pureté dans le cas ultramétrique. Le terme reste obtenu est totalement explicite et linéaire en le régulateur du corps de nombres grâce au recours à une méthode introduite par Schmidt. Nous traitons également plusieurs applications de ce résultat, notamment aux problèmes de Dedekind-Weber et de Loher-Masser.

**Mots clés :** Hauteur, approximation diophantienne, inégalité de Vojta, problème de Mordell-Lang, théorème de Schanuel, espace adélique.

---

# **Title : Two Diophantine counting problems**

## **Abstract :**

We are dealing here with effectiveness matters about the Mordell-Lang and Schanuel problems where algebraic heights play a central role.

At the first time, we modify the Vojta-Faltings method in a general context by including some uniform descending process which has the advantage to optimize the number of iterations of the heavy Diophantine approximation mechanism. We then propose an application to the toric Mordell-Lang plus Bogomolov problem whose aim is to describe an algebraic subset  $X$  as the union of translates of closed, irreducible subgroups included in  $X$  when restricted to some enlarged, finite rank subgroup. In

particular we use a theorem of Amoroso and Viada about the Bogomolov problem in this context and we improve the previous bound given by Rémond.

At the second time, we prove a version of the theorem of Schanuel in the setting of a Hermitian adelic vector bundle over a number field. We give an asymptotic estimate for the number of projective points of bounded height for heights given by a family of norms over the completions at each place, satisfying several conditions but no purity hypothesis in the ultrametric case. The error term is totally explicit and linear with respect to the regulator of the number field through the use of Schmidt's method. We finally give some applications of our result in particular to the Dedekind-Weber and Loher-Masser problems.

**Keywords :** Height, Diophantine approximation, Vojta's inequality, Mordell-Lang problem, Schanuel's theorem, adelic vector bundle.

---

## Unité de recherche

**Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251**

Université de Bordeaux

351, cours de la Libération - F 33 405 TALENCE

*Ne qu'on porroit les estoiles nombrer,  
Quant on les voit luire plus clerement,  
Et les gouttes de pluie et de la mer,  
Et la greve seur quoy elle s'estent,  
Et compasser le tour dou firmament,  
Ne porroit on penser ne concevoir  
Le grant desir que j'ay de vous veoir.*

Guillaume de Machaut (1300–1377), Ballade n°33



# Table des matières

|          |                                                                     |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                                 | <b>7</b>  |
| 1.1      | Problème de Mordell-Lang . . . . .                                  | 7         |
| 1.2      | Versions quantitatives . . . . .                                    | 9         |
| 1.3      | L'inégalité de Vojta . . . . .                                      | 11        |
| 1.4      | Notations . . . . .                                                 | 13        |
| <b>2</b> | <b>Inégalité de Vojta</b>                                           | <b>17</b> |
| 2.1      | Diminution uniforme . . . . .                                       | 17        |
| 2.1.1    | Présentation de la méthode . . . . .                                | 17        |
| 2.1.2    | Description d'une manche . . . . .                                  | 20        |
| 2.1.3    | Équilibrage des systèmes de Vojta . . . . .                         | 22        |
| 2.1.4    | Énoncé principal . . . . .                                          | 23        |
| 2.2      | Diminution d'un facteur dans un produit . . . . .                   | 26        |
| 2.2.1    | Stratégie générale . . . . .                                        | 26        |
| 2.2.2    | Coordonnées adaptées et écriture des sections polynomiales          | 26        |
| 2.2.3    | Lemme de Siegel et section auxiliaire . . . . .                     | 28        |
| 2.2.4    | Indice d'une section et théorème du produit . . . . .               | 30        |
| 2.2.5    | Réduction du problème et estimations de dérivées . . . . .          | 32        |
| 2.2.6    | Minoration de l'indice de la section auxiliaire . . . . .           | 35        |
| 2.2.7    | Conclusion . . . . .                                                | 37        |
| <b>3</b> | <b>Décompte dans les tores</b>                                      | <b>39</b> |
| 3.1      | Application de l'inégalité de Vojta . . . . .                       | 40        |
| 3.1.1    | Choix des coefficients et premières estimations . . . . .           | 40        |
| 3.1.2    | Choix d'une famille de monômes . . . . .                            | 41        |
| 3.1.3    | Questions d'équilibre . . . . .                                     | 43        |
| 3.2      | Combinaison avec l'inégalité de Mumford . . . . .                   | 45        |
| 3.2.1    | Points de grande hauteur . . . . .                                  | 46        |
| 3.2.2    | Points de petite hauteur et conclusion . . . . .                    | 48        |
| 3.3      | Mordell-Lang plus Bogomolov . . . . .                               | 50        |
| <b>4</b> | <b>Le théorème de Schanuel dans les fibrés adéliques hermitiens</b> | <b>53</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                              | 53        |
| 4.1.1    | Contexte historique . . . . .                                       | 53        |

|       |                                                                                 |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1.2 | Énoncé du résultat principal . . . . .                                          | 55 |
| 4.1.3 | Applications . . . . .                                                          | 56 |
| 4.1.4 | Grandes lignes de la démonstration . . . . .                                    | 58 |
| 4.2   | Notations et rappels . . . . .                                                  | 60 |
| 4.3   | Notion de fibré adélique hermitien . . . . .                                    | 61 |
| 4.3.1 | Ultrarnormes et bases orthogonales . . . . .                                    | 61 |
| 4.3.2 | Valeurs impures d'une ultrarnorme . . . . .                                     | 63 |
| 4.3.3 | Fibrés adéliques hermitiens . . . . .                                           | 66 |
| 4.3.4 | Hauteur d'un fibré adélique hermitien pur . . . . .                             | 68 |
| 4.4   | Réseaux associés à un fibré . . . . .                                           | 69 |
| 4.4.1 | Filtrations et inversion de Möbius . . . . .                                    | 70 |
| 4.4.2 | Étude de la structure entière . . . . .                                         | 73 |
| 4.4.3 | Nombre de points d'un réseau dans un domaine à bord<br>lipschitzien . . . . .   | 76 |
| 4.5   | Construction et paramétrage du système $\Sigma$ . . . . .                       | 77 |
| 4.5.1 | Le cas d'une unique place archimédienne . . . . .                               | 78 |
| 4.5.2 | Méthode de partition de Schmidt . . . . .                                       | 80 |
| 4.5.3 | Conclusion de la preuve du théorème principal hors cas<br>particulier . . . . . | 86 |
| 4.5.4 | Conclusion de la preuve dans le cas particulier . . . . .                       | 89 |
| 4.6   | Applications . . . . .                                                          | 93 |
| 4.6.1 | Le problème de Dedekind-Weber . . . . .                                         | 93 |
| 4.6.2 | Le problème de Loher-Masser . . . . .                                           | 95 |

# Chapitre 1

## Introduction

Le présent mémoire peut être scindé en deux parties totalement indépendantes mais traitant l'une et l'autre de hauteurs algébriques et plus précisément de questions d'effectivité dans certains problèmes de décompte diophantien. Les chapitres 2 et 3 proposent une formulation générale de la méthode de Vojta ainsi que son application à des problèmes de type Mordell-Lang; le chapitre 4 établit quant à lui une version d'un théorème de Schanuel dans un espace adélique hermitien.

Signalons que le contenu du chapitre 4 a fait l'objet d'un article publié en 2014 [3] et qu'il possède déjà à ce titre sa propre cohérence interne. C'est pourquoi nous renvoyons directement à ce chapitre pour une présentation détaillée du sujet abordé et consacrons la présente introduction aux chapitres 2 et 3 uniquement.

### 1.1 Problème de Mordell-Lang

Commençons par situer le problème de façon très concrète. Posons  $U = \{\pm 2^k 3^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{Z}\}$  et cherchons l'ensemble des solutions  $(x, y) \in \Gamma = U^2$  de l'équation linéaire

$$x + y = 1.$$

Nous vérifions d'abord que l'équation  $3^\ell = 2^k \pm 1$  ne peut être satisfaite si  $k, \ell \in \mathbb{N}$  et  $\ell > 2$ . Si tel était le cas, comme  $2^k + (-1)^k$  n'est pas divisible par 3 nous aurions

$$3^\ell = 2^k - (-1)^k = 3(2^{k-1} - 2^{k-2} + \dots + (-1)^{k-1}) \in 3k(-1)^{k-1} + 9\mathbb{Z}.$$

Il vient  $k = 3k'$ ,  $k' \in \mathbb{N}$  et donc

$$3^\ell = 8^{k'} - (-1)^{k'} = 9(8^{k'-1} - 8^{k'-2} + \dots + (-1)^{k'-1}) \in 9k'(-1)^{k'-1} + 27\mathbb{Z}.$$

À nouveau  $k'$  est divisible par 3 et donc  $513 = 8^3 + 1$  divise  $3^\ell$  ce qui est impossible. Il s'ensuit que  $x$  et  $y$  sont de hauteur au plus 9 (la hauteur d'une fraction

irréductible  $p/q$  étant définie ici par  $\max(|p|, |q|)$  et en énumérant toutes les possibilités nous trouvons exactement 21 solutions :

$$(9, -8), (4, -3), (3, -2), (2, -1), (3/2, -1/2), (4/3, -1/3), (9/8, -1/8), \\ (8/9, 1/9), (3/4, 1/4), (2/3, 1/3), (1/2, 1/2)$$

et leurs symétriques. Observons cependant que le résultat est qualitativement différent lorsque le nombre de variables augmente puisque des solutions dites dégénérées du type  $2^k - 2^k + 1 = 1$  apparaissent en nombre infini.

Cet exemple est une illustration d'une vaste classe d'équations diophantiennes appelées équations aux  $S$ -unités. Soient  $K$  un corps de nombres,  $\mathcal{O}_K$  son anneau d'entiers et  $S$  un ensemble fini de places de  $K$  contenant les places archimédiennes. Les éléments de  $K^\times$  dont la valuation est nulle en tout idéal premier non nul de  $\mathcal{O}_K$  n'appartenant pas à  $S$  sont appelés  $S$ -unités et forment un sous-groupe  $\mathcal{O}_S^\times \subset K^\times$ . Dans l'exemple ci-dessus nous avons ainsi  $U = \mathcal{O}_S^\times$  avec  $K = \mathbb{Q}$  et  $S = \{\infty, 2, 3\}$ . Fixons  $g \geq 2$  un entier et  $a_1, \dots, a_g \in \mathbb{Q}$  des nombres algébriques non nuls. En posant  $\Gamma = (\mathcal{O}_S^\times)^g$  l'équation aux  $S$ -unités associée prend alors la forme générale suivante

$$a_1 x_1 + \dots + a_g x_g = 1, \quad x = (x_1, \dots, x_g) \in \Gamma.$$

Lorsque  $a_{i_1} x_{i_1} + \dots + a_{i_k} x_{i_k} \neq 0$  pour tous  $k \geq 1$  et  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq g$  la solution  $x$  de l'équation sera dite non dégénérée.

Dans la suite nous considérons plus largement la situation où  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $(\overline{\mathbb{Q}}^\times)^g$  de rang fini  $r = \dim \Gamma \otimes \mathbb{R}$  (rappelons que le rang de  $\mathcal{O}_S$  est égal à  $\text{Card}(S) - 1$  d'après le théorème de Dirichlet). Nous envisageons également des systèmes quelconques d'équations polynomiales en  $x$  à coefficients algébriques.

D'un point de vue géométrique, notre objet d'étude est ainsi l'intersection  $X(\mathbb{Q}) \cap \Gamma$  où  $X$  est un sous-ensemble fermé du tore  $\mathbb{G}_m^g$  pour la topologie de Zariski. En 1960, Lang [22] a établi un premier résultat qualitatif pour une courbe (irréductible)  $X$ , valable sur tout corps  $\mathbb{K}$  de caractéristique 0.

**Théorème 1.1.1.** *Soient  $X \hookrightarrow \mathbb{G}_m^g$  une courbe qui n'est pas la translatée d'un sous-tore de  $\mathbb{G}_m^g$  de dimension 1 et  $\Gamma \subset \mathbb{G}_m^g(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^\times)^g$  un sous-groupe de rang fini. Alors  $X(\mathbb{K}) \cap \Gamma$  est fini.*

Soulignons que ce résultat est analogue à la conjecture formulée par Mordell en 1922 et démontrée par Faltings [13] en 1983. Une seconde preuve de cette conjecture sur laquelle nous reviendrons plus en détail a été fournie par Vojta [37] en 1991, ce qui donne finalement lieu à trois approches du même problème très différentes les unes des autres. Voici l'énoncé de cette ex-conjecture de Mordell.

**Théorème 1.1.2.** *Soit  $X$  une courbe projective lisse de genre  $g \geq 2$  définie sur un corps de nombres  $K$ . Alors l'ensemble  $X(K)$  des points de  $X$  rationnels sur  $K$  est fini.*

Rappelons que le genre de  $X$  est défini par la relation

$$\dim(L(d[P])) = d + 1 - g$$

valable pour tout point algébrique  $P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$  et tout entier  $d \gg 1$  ( $d \geq 2g - 1$ ) et où  $L(d[P]) \subset \overline{\mathbb{Q}}(X)$  désigne l'espace des fonctions ayant au plus un pôle d'ordre  $d$  en  $P$ . Dans les conditions ci-dessus, en considérant la variété jacobienne  $A$  de  $X$  et en supposant  $X(K) \neq \emptyset$ , nous disposons d'une immersion fermée  $X \hookrightarrow A$  de  $X$  dans une variété abélienne de dimension  $g$ . Alors  $X$  n'est pas la translatée d'une sous-variété abélienne de dimension 1 (lesquelles sont des courbes elliptiques qui ont pour genre 1) et  $X(K) = X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$  où  $\Gamma = A(K)$  est un groupe de type fini d'après le théorème de Mordell-Weil.

Ceci a amené Lang à conjecturer le résultat suivant (voir [22]) qui généralise la conjecture de Mordell en dimension supérieure et qui englobe le cas torique et le cas abélien.

**Théorème 1.1.3.** *Soient  $A$  un tore ou une variété abélienne de dimension  $g$  sur un corps  $\mathbb{K}$  de caractéristique 0,  $X \hookrightarrow A$  un sous-schéma fermé de  $A$  et  $\Gamma \subset A(\mathbb{K})$  un sous-groupe de rang fini. Alors il existe une décomposition finie*

$$X(\mathbb{K}) \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^S t_{x_i}(B_i)(\mathbb{K}) \cap \Gamma$$

où  $t_{x_i}(B_i)$  désigne pour tout  $i$  le translaté d'un sous-schéma en groupes fermé irréductible  $B_i$  par un point  $x_i \in X(\mathbb{K})$  vérifiant  $t_{x_i}(B_i) \subset X$ .

Dans le cas  $A = \mathbb{G}_m^g$  cette conjecture a été prouvée par Laurent [23] en 1984. L'apparition de solutions dégénérées dans l'équation linéaire aux  $S$ -unités s'explique ici par la présence éventuelle de sous-tores de dimension non nulle dans la décomposition de  $X(\mathbb{K}) \cap \Gamma$ . En effet, toute solution non dégénérée  $x$  est une solution « exceptionnelle » au sens où  $t_x(B) \subset X \implies B = 0$  pour tout sous-tore  $B$ . Pour  $A$  une variété abélienne, Faltings a prouvé la conjecture d'abord sous une forme faible en 1991 [14] puis sous cette forme en 1994 [15] en s'appuyant sur la méthode de Vojta.

## 1.2 Versions quantitatives

Dans le contexte algébrique  $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{Q}}$ , l'approche quantitative idéale de ces problèmes consisterait à fournir des bornes de hauteur pour les éléments mis en évidence. Cependant les méthodes élaborées jusqu'à présent ne permettent pas d'y parvenir de façon un tant soit peu générale et de nombreuses questions restent ouvertes : citons pour exemple la conjecture abc qui concerne un contrôle de hauteurs pour des équations aux  $S$ -unités de la forme  $a + b = c$ .

Aussi nous intéresserons-nous seulement à des bornes sur les cardinaux : pour résumer il s'agit de majorer explicitement

- le nombre de solutions non dégénérées pour l'équation aux  $S$ -unités,

- le cardinal de  $X(K)$  pour la conjecture de Mordell (théorème 1.1.2)
- ou plus généralement le nombre de translatés nécessaires dans la décomposition de  $X(\mathbb{K}) \cap \Gamma$  pour la conjecture de Lang (théorème 1.1.3).

Dans le contexte de l'équation aux  $S$ -unités généralisée, Amoroso et Viada [2] ont établi la majoration suivante pour le nombre de solutions non dégénérées.

**Théorème 1.2.1.** *Soient  $a_1, \dots, a_g \in \mathbb{K}^\times$  où  $\mathbb{K}$  est un corps de caractéristique 0 et  $\Gamma \subset \mathbb{G}_m^g(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^\times)^g$  un sous-groupe de rang fini  $r$ . Alors l'équation*

$$a_1 x_1 + \dots + a_g x_g = 1$$

*possède au plus  $(8g)^{4g^4(g+r+1)}$  solutions  $x \in \Gamma$  non dégénérées.*

La démonstration reprend celle de Evertse, Schlickewei et Schmidt [12], basée sur le théorème du sous-espace et ainsi apparentée aux approches de Laurent et de Lang, tout en améliorant significativement la borne  $\exp((6g)^{3g}(r+1))$  qui avait été obtenue.

Notre résultat principal se fonde quant à lui sur la méthode de Vojta-Faltings et fournit une estimation analogue pour le nombre de translatés dans la version torique du problème de Mordell-Lang sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

**Théorème 1.2.2.** *Soient  $X \hookrightarrow A = \mathbb{G}_m^g$  un sous-schéma fermé de  $A$  de dimension  $m-1$  et  $\Gamma \subset A(\overline{\mathbb{Q}})$  un sous-groupe de rang fini  $r$ . Alors il existe une décomposition finie*

$$X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^S (x_i B_i)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$$

*avec  $x_i \in X(\overline{\mathbb{Q}})$  et  $B_i$  un sous-tore de  $A$  tel que  $x_i B_i \subset X$  pour tout  $i$  et avec*

$$S \leq (32g^3 d)^{g^3 m^{4m}(r+1)}$$

*où  $d$  désigne le degré de l'adhérence de  $X$  dans le plongement de Segre  $A \subset (\mathbb{P}^1)^g \hookrightarrow \mathbb{P}^{2^g-1}$ .*

Nous améliorons en particulier la borne antérieure  $S \leq d^{g^2 m^{3m^2}(r+1)}$  établie par Rémond [30] : notons en effet que le terme significatif  $m^{3m^2}$  dans l'exposant devient  $gm^{4m}$ . Le procédé que nous mettons en place ne se limite toutefois pas au cadre torique et nous envisageons des améliorations similaires prochainement pour les variétés abéliennes, voire semi-abéliennes. Ajoutons que la conjecture de Lang dans le cas semi-abélien a été prouvée par McQuillan mais qu'on ne dispose à ce jour d'aucune version quantitative explicite.

Dorénavant  $A = \mathbb{G}_m^g$  désigne un tore sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  et  $X \hookrightarrow A$  un sous-schéma fermé de dimension  $m-1 < g$ . Nous lui associons l'ouvert exceptionnel  $X^0$  obtenu en ôtant à  $X$  la réunion de tous les translatés inclus dans  $X$  de sous-tores non réduits à 0. Rappelons que la hauteur  $|\cdot|$  d'un point algébrique  $x = (x_1, \dots, x_g) \in A(\overline{\mathbb{Q}})$  peut être définie par

$$|x| = h(1 : x_1) + \dots + h(1 : x_g)$$

où  $h$  désigne la hauteur de Weil logarithmique et absolue. Dans ce contexte, le problème de Bogomolov consiste à contrôler la densité ou décrire l'adhérence de l'ensemble des solutions exceptionnelles  $x \in X^0(\overline{\mathbb{Q}})$  dont la hauteur est suffisamment petite. Ce sujet a notamment été traité par Amoroso et David [1], David et Philippon [11] ou plus récemment par Amoroso et Viada [2].

Citons ici un corollaire de leur énoncé principal [2, Théorème 1.2], énoncé duquel se déduit également le théorème 1.2.1 ci-dessus. Celui-ci s'appuie sur la notion de degré essentiel, plus souple et plus commode que celle de degré.

**Définition 1.2.1.** *Le degré essentiel de  $X$  est défini comme le plus petit entier  $\delta$  ( $1 \leq \delta \leq gd$ ) pour lequel il existe une famille d'hypersurfaces de degré au plus  $\delta$  dans  $\mathbb{A}^g$  dont l'intersection est l'adhérence de  $X$ .*

**Théorème 1.2.3.** *Posons  $\theta = \delta(200g^5 \log(g^2\delta))^{(m-1)g(g-1)}$ , alors*

$$\text{Card}\{x \in X^0(\overline{\mathbb{Q}}) \mid |x| \leq \theta^{-1}\} \leq \theta^g.$$

Poonen [27] a mis en évidence un rapprochement entre les problèmes de Mordell-Lang d'une part et de Bogomolov d'autre part. Plus précisément il a démontré que la conclusion du théorème 1.1.3 est toujours vraie si l'on remplace le groupe  $\Gamma$  par un « épaissement »  $\Gamma_\varepsilon$  défini par

$$\Gamma_\varepsilon = \{yz \in A(\overline{\mathbb{Q}}) \mid y \in \Gamma, z \in A(\overline{\mathbb{Q}}), |z| \leq \varepsilon\}$$

à condition que  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  pour un réel  $\varepsilon_0 > 0$  suffisamment petit. En posant  $\varepsilon = 0$  nous retrouvons bien sûr la conjecture de Lang tandis que le cas  $\Gamma = \{1\}$  correspond au problème de Bogomolov.

Nous démontrerons ici la version quantitative suivante de cet énoncé.

**Théorème 1.2.4.** *Si  $\varepsilon \leq \varepsilon_0 = 3^{-8g^5} \delta^{-3g^2}$  alors il existe une décomposition finie*

$$X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^S (x_i B_i)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$$

où  $S, x_i, B_i$  vérifient les mêmes conditions que dans le théorème 1.2.2.

Le théorème 1.2.2 est évidemment contenu dans le théorème 1.2.4 et c'est donc ce dernier que nous prouverons. Notons que même sans ce raffinement supplémentaire nous avons besoin de contrôler le nombre de petits points (voir la partie suivante) ce qui est possible grâce au théorème 1.2.3 en particulier. Pour le cas abélien en revanche, on ne dispose pas de bornes aussi bonnes que ces dernières.

## 1.3 L'inégalité de Vojta

Pour démontrer les résultats annoncés nous suivons la méthode introduite par Vojta dans sa preuve de la conjecture de Mordell puis remodelée par Faltings pour la conjecture de Lang. Nous nous référons également aux travaux de

Mumford [20], de Bombieri [4] et de Rémond [31] qui ont notamment permis de la rendre explicite. Cette méthode se déroule en quatre actes que nous décrivons ici brièvement :

1. Inégalité de Vojta : établir que les points de  $X^0(\overline{\mathbb{Q}})$  de grande hauteur vérifient une certaine inégalité de hauteurs ;
2. Inégalité de Mumford : établir que les points de  $X^0(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$  de grande hauteur sont espacés en hauteur ;
3. Problème de Bogomolov : évaluer le nombre de points de  $X^0(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$  de petite hauteur ;
4. Problème de Lang : en déduire une estimation du nombre de translatés dans la décomposition de  $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ .

En combinant les étapes 1, 2 et 3 nous pouvons majorer le cardinal de  $X^0(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$  en nous basant sur l'argument suivant : lorsque le nombre de points de cet ensemble de hauteur supérieure à un certain seuil est trop élevé, les inégalités de Vojta 1 et de Mumford 2 donnent lieu à une contradiction. L'étape 4 consiste à ramener par quotient le nombre de translatés d'un sous-schéma en groupes  $B$  fixé au cardinal d'un ensemble de la forme  $X^0(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ . Dans ce texte les étapes 2, 3 et 4 restent inchangées et les nouveautés apportées concernent essentiellement l'étape 1 à laquelle nous nous limitons à présent.

Depuis Faltings, l'inégalité de hauteurs en question s'obtient par un procédé d'approximation diophantienne où elle fait office de condition d'intégralité. Étant donné un entier  $m \geq \dim(X) + 1$ , il s'agit de construire une petite section sur le produit  $X^m$  en appliquant un lemme de Siegel puis d'estimer ses dérivées en un point  $x$ . Si l'inégalité de Vojta n'est pas vérifiée en  $x$  alors, en appliquant le théorème du produit introduit par Faltings et qui joue ici le rôle d'un lemme de zéros, nous nous assurons que cette section s'annule sur un sous-produit

$$Y = Y_1 \times \dots \times Y_m \hookrightarrow X^m$$

de codimension 1 contenant  $x$ . Nous appliquons ensuite le procédé à ce sous-produit et aboutissons par récurrence à un produit  $Y = \{x\}$  réduit à un point, ce qui entraîne une contradiction.

Il apparaît que l'ordre de grandeur de l'exposant dans la borne finale du nombre de translatés dépend de manière cruciale du nombre d'itérations nécessaires dans la récurrence, soit  $m \dim(X)$  dans l'approche classique. Ainsi dans la borne  $d^{g^2 m^{3m^2} (r+1)}$  de [30] le terme  $m^2$  qui apparaît au sommet de la tour d'exposants provient directement de ce nombre d'itérations.

La stratégie que nous mettons en place consiste donc à optimiser la récurrence de la façon suivante. Posons  $n = (m - 1)^2 + 1$  et fixons un point  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n(\overline{\mathbb{Q}})$ . Nous appliquons simultanément le procédé ci-dessus à tous les points

$$(x_{\phi(1)}, \dots, x_{\phi(m)}) \in X^m(\overline{\mathbb{Q}})$$

pour  $1 \leq \phi(1) < \dots < \phi(m) \leq n$ . Chaque choix d'indices fournit par conséquent un sous-produit  $Y_{\phi(1)} \times \dots \times Y_{\phi(m)}$  de  $X^m$  de codimension 1. Parmi tous les

facteurs obtenus, nous ne conservons qu'un sous-schéma strict  $Y_i \hookrightarrow X$  au plus par composante  $x_i$ . Nous pouvons alors former un produit d'au moins  $n' = n - m + 1$  schémas de dimension uniforme  $\dim(X) - 1$  et réitérer l'opération (pour peu que les conditions soient réunies) à partir de ce produit. À chaque nouvelle itération le nombre de points  $x_i$  considérés décroît de  $m - 1$  au plus et la contradiction peut donc s'obtenir au bout de  $\dim(X)$  itérations seulement.

Même s'il faut refaire tous les calculs puisque le choix des paramètres est différent, le reste de la méthode change peu en revanche. Nous nous plaçons en outre dans le même cadre général que Rémond [31] : celui-ci présente l'avantage de ne faire référence à aucun schéma en groupes en particulier. L'inégalité de Vojta s'y exprime à partir de faisceaux inversibles abstraits sur  $Y$  dont l'un provient d'un éclatement. Ici nous apportons également à la preuve quelques simplifications d'ordre purement formel : en effet nous évitons le recours à l'éclatement en définissant des sous-espaces de sections appropriés sur un ouvert de  $Y$ . Nous pouvons ainsi retraduire de façon très élémentaire la condition sur le nombre d'intersection qui prépare le lemme de Siegel (ici appelée condition « d'équilibre ») et exprimer toutes les hauteurs à partir de familles de sections polynomiales d'un seul faisceau de référence. Signalons enfin que nous définissons une inégalité de Vojta renversée par rapport à son sens habituel puisque cette forme s'adapte plus naturellement à notre contexte.

Dans le chapitre 2 nous énonçons et démontrons une inégalité de Vojta dans ce cadre abstrait (étape 1 ci-dessus). La partie 2.2 contient le procédé d'approximation diophantienne proprement dit. Elle établit la proposition 2.1.1 qui donne ensuite lieu au théorème principal 2.1.2 grâce au principe de récurrence que nous avons décrit. Dans le chapitre 3 nous appliquons l'inégalité au problème de Mordell-Lang plus Bogomolov dans le tore (étapes 2, 3 et 4 ci-dessus) en y incluant les bornes fournies par le théorème 1.2.3.

## 1.4 Notations

Étant donné un corps de nombres  $K$  et l'une de ses places notée  $v$ , nous leur associons une valeur absolue  $|\cdot|_v : K \rightarrow \mathbb{R}_+$  normalisée selon les critères suivants :

- Si  $v|\infty$  est une place archimédienne alors  $|2|_v = 2$  ;
- Si  $v|p$  est une place ultramétrique au-dessus du nombre premier  $p$  alors  $|p|_v = p^{-1}$ .

Nous étendons ces valeurs absolues à tout  $N+1$ -uplet  $x = (x_0, \dots, x_N) \in K^{N+1}$  par

$$|x|_v = \max\{|x_0|_v, \dots, |x_N|_v\}$$

et si  $x \neq 0$  nous définissons la hauteur de Weil (logarithmique et absolue) comme la somme

$$h(x) = h_N(x) = \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |x|_v \geq 0$$

où  $v$  parcourt l'ensemble des places de  $K$  et où  $[K_v : \mathbb{Q}_v]$  désigne le degré local de  $K$  en  $v$ .

Dans ces conventions, la hauteur de Weil  $h(x)$  ne dépend pas du choix du corps de nombres  $K$  contenant les coordonnées de  $x$  et définit ainsi une application  $h = h_N : \overline{\mathbb{Q}}^{N+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Elle ne dépend pas non plus du choix du représentant  $x$  de la droite  $\overline{\mathbb{Q}}^\times x$  en vertu de la formule du produit qui peut s'écrire

$$\forall x \in \overline{\mathbb{Q}}, x \neq 0, h_0(x) = 0$$

et la hauteur se factorise donc en une application  $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

En assimilant un polynôme à la famille de ses coefficients dans la base canonique, nous définissons les valeurs absolues  $|(P_k)_k|_v$  et hauteur de Weil  $h((P_k)_k)$  pour toute famille de polynômes à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$  non tous nuls. En notant  $t(P)$  le nombre de coefficients non nuls d'un tel polynôme  $P$  nous avons les majorations élémentaires

$$\begin{aligned} |P_1 P_2|_v &\leq |P_1|_v |P_2|_v \min(t(P_1), t(P_2))^{\epsilon_v} \text{ et} \\ |P_1 + P_2|_v &\leq 2^{\epsilon_v} \max(|P_1|_v, |P_2|_v) \end{aligned}$$

où  $\epsilon_v = 1$  si  $v$  est une place archimédienne, 0 sinon. En particulier nous avons (si toutes les hauteurs concernées sont définies)

$$\begin{aligned} h(P_1 P_2) &\leq h(P_1) + h(P_2) + \log \min(t(P_1), t(P_2)) \text{ et} \\ h(P_1 + P_2) &\leq h(P_1, P_2) + \log 2. \end{aligned}$$

En outre, si  $\partial_T$  désigne la dérivation par rapport à une indéterminée  $T$  alors

$$|\partial_T P|_v \leq |P|_v (\deg_T(P))^{\epsilon_v} \text{ et } h(\partial_T P) \leq h(P) + \log \deg_T(P).$$

Soient  $X = (X, \mathcal{O}_X)$  un schéma sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ . Pour tout point algébrique  $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$  nous notons  $\mathcal{L}(x)$  la  $\overline{\mathbb{Q}}$ -droite résiduelle  $\mathcal{L}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x$  où  $\mathfrak{m}_x$  désigne l'idéal maximal de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Si  $W = \{W_0, \dots, W_N\}$  est une famille de sections de  $\mathcal{L}$  qui engendrent  $\mathcal{L}$  sur un ouvert  $U \subset X$  alors nous définissons une hauteur

$$h(W(x)) = h_N(W_0(x), \dots, W_N(x))$$

pour tout point  $x \in U(\overline{\mathbb{Q}})$  où  $W_j(x)$  est l'image de  $W_j$  dans  $\mathcal{L}(x)$ ; autrement dit il s'agit de la hauteur de  $x$  à travers le morphisme  $U \rightarrow \mathbb{P}^N$  défini par les  $W_j$ . Cette hauteur est inchangée lorsque nous appliquons un morphisme injectif de faisceaux inversibles  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  que nous assimilerons toujours à une section globale  $J$  du faisceau  $\mathcal{L}^{\otimes -1} \otimes \mathcal{L}'$  (le morphisme étant alors défini par  $(J \otimes \cdot)$ ).

Dans ce contexte, si  $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_N)$  est un  $N+1$ -uplet d'entiers positifs alors  $W^\mu$  désignera le monôme

$$W^\mu = W_0^{\otimes \mu_0} \otimes \dots \otimes W_N^{\otimes \mu_N}$$

dans le faisceau  $\mathcal{L}^{\otimes |\mu|}$  avec  $|\mu| = \mu_0 + \dots + \mu_N$ , tandis que  $W^{\otimes \delta}$  pour  $\delta$  un entier positif désignera la famille

$$W^{\otimes \delta} = \{W_{j_1} \otimes \dots \otimes W_{j_\delta} \mid 0 \leq j_k \leq N\}$$

de sections de  $\mathcal{L}^{\otimes \delta}$ .

Supposons enfin que le morphisme introduit ci-dessus est une immersion fermée  $X = U \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ , auquel cas  $\mathcal{L}$  est très ample et  $W$  est appelé système de coordonnées homogènes. Alors nous pouvons associer à  $X$  un degré  $\deg(X)$  et une hauteur  $h(X)$  (voir [6] ou [26]). En particulier si  $X$  est intègre alors  $\deg(X)$  est égal au nombre d'intersection  $(\mathcal{L}^{\dim(X)} \cdot X)$  et nous avons  $h(W(x)) \leq h(X)$  dans le cas  $X = \{x\}$ .



## Chapitre 2

# Inégalité de Vojta

Dans ce chapitre nous établissons un résultat de décompte général pour des familles de points algébriques dans des schémas projectifs sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  soumises à certaines conditions, notamment des inégalités de hauteurs appelées inégalités de Vojta. Ces estimations seront ensuite appliquées au tore dans le chapitre 3 pour fournir une version quantitative du problème de Mordell-Lang.

Dans la partie 2.1 nous donnons essentiellement une série de définitions puis énonçons le résultat principal (théorème 2.1.2). La démonstration de celui-ci repose avant tout sur la proposition-clef 2.1.1 que nous prouverons dans la partie 2.2.

### 2.1 Diminution uniforme

#### 2.1.1 Présentation de la méthode

Soient  $n_0 \geq m_0 \geq 2$  deux entiers naturels et  $(X_i)_{1 \leq i \leq n_0}$  une famille de schémas intègres et projectifs sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  de même dimension  $m_0 - 1$ . Pour tout indice  $i$  nous munissons  $X_i$  d'un faisceau inversible très ample  $\mathcal{L}_i$  ainsi que d'un système de coordonnées homogènes

$$W_0^{(i)}, \dots, W_{N_i}^{(i)} \in \Gamma(X_i, \mathcal{L}_i)$$

réalisant  $X_i$  comme sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}^{N_i}$ . Nous associons également à  $X_i$  un couple  $(x_i, a_i)$  où  $x_i \in X_i(\overline{\mathbb{Q}})$  est un point algébrique et  $a_i$  un entier naturel. D'un point de vue qualitatif, nous supposons que les poids  $a_1 > \dots > a_{n_0} \geq 1$  sont suffisamment espacés et que les hauteurs pondérées

$$a_i h_{\mathcal{L}_i}(x_i) = h((W^{(i)})^{\otimes a_i}(x_i))$$

sont suffisamment grandes devant  $a_1 \max_i h(X_i)$ .

Raisonnant par l'absurde, nous nous intéressons ici à la construction (sous certaines hypothèses supplémentaires) de suites strictement décroissantes de

sous-schémas fermés intègres de la forme

$$X_i = X_i(1) \leftarrow X_i(2) \leftarrow \dots \leftarrow X_i(m_0) = \{x_i\}$$

de sorte que  $\dim(X_i(j)) = m_0 - j$ . Une telle suite sera dite complète. Si nous pouvons générer une suite complète tout en contrôlant suffisamment finement la hauteur des termes successifs, nous obtenons une majoration de  $h(X_i(m_0))$  qui se heurte à la minoration  $h(\{x_i\}) \geq h_{\mathcal{L}_i}(x_i)$  et donc à l'hypothèse sur la hauteur des  $x_i$ . La contradiction qui en découle amène alors au rejet de l'une des hypothèses et, par exemple, à un résultat du type  $n_0 < m_0$ .

La méthode de Vojta-Faltings est une mise en pratique de ce principe général qui repose essentiellement sur une inégalité de hauteurs de la forme

$$c_1 h(\pi_a(x)) \leq a_1 h_{\mathcal{L}_1}(x_1) + \dots + a_{n_0} h_{\mathcal{L}_{n_0}}(x_{n_0})$$

avec  $x = (x_1, \dots, x_{n_0})$ ,  $c_1 > 0$  suffisamment grand et  $\pi_a$  un certain morphisme associé aux poids  $a = (a_1, \dots, a_{n_0})$ , à valeur dans un espace projectif et défini sur un ouvert  $U$  du produit  $X_1 \times \dots \times X_{n_0}$ . Par exemple, lorsque les  $X_i$  sont en correspondance birationnelle avec un sous-schéma fermé  $X$  d'un tore  $A = \mathbb{G}_m^g$ , le morphisme  $\pi_a$  sera défini par des quotients

$$\pi_a(x) = (x_1^{a_1} x_2^{-a_2}, \dots, x_{n_0-1}^{a_{n_0-1}} x_{n_0}^{-a_{n_0}}) \in (\mathbb{P}^1)^{g(n_0-1)}.$$

L'inégalité s'interprète alors géométriquement comme un confinement des points  $x_i^{a_i}$  et notamment une proximité « angulaire » des points  $x_i$ . Nous pouvons en extraire une information utile sur les points de  $U$  lorsque  $\pi_{(1, \dots, 1)}$  est génériquement fini, ce qui est le cas dès que  $U$  est assez petit et  $n_0$  assez grand. Nous renvoyons aux applications du chapitre 3 pour de plus amples détails.

Dans ces conditions, il est possible d'appliquer le théorème du produit de Faltings à une petite section polynomiale multihomogène obtenue par un lemme de Siegel. Le théorème du produit fournit alors pour un certain indice  $r$  un premier sous-schéma fermé intègre  $X_r(2) \hookrightarrow X_r(1)$  de codimension 1, contrôlé et contenant  $x_r$ . Il suffit alors de remplacer  $X_r(1)$  par  $X_r(2)$  et de réitérer le processus autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir au moins une suite complète.

| $e$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1   | 3     | 3     | 3     | 3     |
| 2   | 3     | 3     | 2     | 3     |
| 3   | 2     | 3     | 2     | 3     |
| 4   | 1     | 3     | 2     | 3     |
| 5   | 1     | 3     | 2     | 2     |
| 6   | 1     | 3     | 1     | 2     |
| 7   | 1     | 3     | 1     | 1     |
| 8   | 0     | 3     | 1     | 1     |

Nous pouvons illustrer le résultat par un tableau comme ci-dessus où nous avons reporté la dimension possible  $m_0 - j_{e,i}$  du sous-schéma courant  $X_i(j_{e,i})$  à chaque

étape  $e$ . Ici  $n_0 = m_0 = 4$ , les indices  $r$  donnés par le théorème du produit sont successivement

$$r = 3, 1, 1, 4, 3, 4 \text{ et } 1$$

et les schémas  $X_1(\cdot)$  fournissent une suite complète puisque la colonne correspondante aboutit à 0.

D'un point de vue quantitatif toutefois, cette méthode a un coût relativement élevé qui se traduit concrètement par des exigences de valeurs de seuils d'autant plus élevées pour les couples  $(x_i, a_i)$ . Nous pouvons notamment caractériser ce coût par une croissance exponentielle du produit

$$\prod_{i=1}^{n_0} \deg_{\mathcal{L}_i}(X_i(j_{e,i}))$$

des degrés courants en fonction du nombre  $e$  d'étapes. En outre, la « sélection » des indices  $r$  étant en quelque sorte arbitraire, le nombre total d'étapes pour former une suite complète (7 dans l'exemple précédent) est imprévisible et doit être envisagé comme  $n_0(m_0 - 1)$  au pire. Nous avons supposé que la dimension des schémas initiaux était uniforme, ce qui n'est nullement indispensable puisque ici  $n_0 > \max_i \dim(X_i)$  suffit (en pratique cette condition est nécessaire pour assurer que  $U$  est non vide). En revanche, nous constatons que la situation uniforme est la moins avantageuse en ce qui concerne la majoration du nombre d'étapes.

Le principe de l'approche nouvelle que nous présentons ici consiste à optimiser cette majoration en uniformisant la chute de la dimension. Plus précisément nous choisissons de raisonner sur un nombre de schémas plus important et d'éliminer au fur et à mesure les schémas dont la dimension ne chute pas. La méthode se déroule en  $m_0 - 1$  grandes étapes que nous appelons journées comprenant chacune plusieurs petites étapes que nous appelons manches. Lors de la  $j$ -ème journée, nous formons des combinaisons de  $m = m_0 - j + 1$  schémas de dimension  $m - 1$  auxquelles nous appliquons une étape du raisonnement précédent. Le « vainqueur » de la manche accède directement à la journée suivante (il ne participe donc plus aux autres manches de la journée en cours) et la journée s'arrête dès qu'il ne reste plus assez de schémas pour organiser une manche.

Pour  $m_0 = 4$  et  $n_0 = 7$  nous obtenons par exemple le tableau des vainqueurs suivant

| $j$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1   | 3     | 3     | 3     | 3     | 3     | 3     | 3     |
| 2   | 2     | 2     |       | 2     |       | 2     |       |
| 3   | 1     |       |       | 1     |       |       |       |
| 4   |       |       |       | 0     |       |       |       |

où le passage de la ligne  $j$  à la ligne  $j + 1$  consiste en

$$n_0 - (m_0 - 1) - (m_0 - 2) - \dots - (m_0 - j)$$

applications du théorème du produit de Faltings suivies de  $m_0 - j$  éliminations. Les schémas  $X_4(\cdot)$  forment quant à eux une suite complète. Notons que les

dimensions du tableau obtenu ici ( $m_0$  lignes contre  $m_0^2$  colonnes environ) sont inversées par rapport à celles du tableau obtenu par la méthode classique ( $m_0^2$  lignes contre  $m_0$  colonnes environ). L'augmentation du nombre de points n'est toutefois qu'une perte très négligeable face au gain que représente la diminution du nombre d'étapes, comme nous allons le mettre en évidence.

### 2.1.2 Description d'une manche

Rappelons que nous avons fixé pour tout  $1 \leq i \leq n_0$  un schéma intègre et projectif  $X_i$  de dimension  $m_0 - 1$  muni d'un système de coordonnées homogènes  $W^{(i)}$ , d'un point  $x_i$  et d'un entier  $a_i$  soumis à des conditions que nous allons maintenant expliciter.

Soit  $2 \leq m \leq m_0$  un entier et considérons l'ensemble  $\Pi_m$  des « manches » à  $m$  facteurs, c'est-à-dire des couples  $(\phi, Y)$  où  $\phi$  est une application strictement croissante de  $\{1, \dots, m\}$  vers  $\{1, \dots, n_0\}$  et où

$$Y = Y_{\phi(1)} \times \dots \times Y_{\phi(m)}$$

est un produit de sous-schémas fermés intègres  $Y_{\phi(i)} \hookrightarrow X_{\phi(i)}$  de même dimension  $m - 1$  contenant le point rationnel  $x_Y = (x_{\phi(1)}, \dots, x_{\phi(m)})$ . Pour une telle manche  $(\phi, Y)$  notée simplement  $Y$  nous formons un faisceau inversible de référence

$$\mathcal{N}_Y = p_{\phi(1)}^* \mathcal{L}_{\phi(1)}^{\otimes a_{\phi(1)}} \otimes \dots \otimes p_{\phi(m)}^* \mathcal{L}_{\phi(m)}^{\otimes a_{\phi(m)}}$$

où  $p_{\phi(i)} : Y \rightarrow Y_{\phi(i)}$  désigne la projection naturelle et nous définissons la famille  $W_Y \subset \Gamma(Y, \mathcal{N}_Y)$  de tous les monômes de multidegré  $a_Y = (a_{\phi(1)}, \dots, a_{\phi(m)})$  en les coordonnées  $p_{\phi(i)}^* W_j^{(\phi(i))}$ . Rappelons que par construction le nombre d'intersection de  $\mathcal{N}_Y$  sur le produit  $Y$  de dimension  $u = m(m - 1)$  peut s'exprimer de la façon suivante

$$(\mathcal{N}_Y^u \cdot Y) = u! \prod_{i=1}^m \frac{a_{\phi(i)}^{m-1}}{(m-1)!} \deg_{\mathcal{L}_{\phi(i)}}(Y_{\phi(i)})$$

et que par définition  $\dim \Gamma(Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes \delta}) = (\mathcal{N}_Y^u \cdot Y)(\delta^u / u!) + o(\delta^u)$  lorsque le paramètre entier  $\delta$  tend vers l'infini.

Fixons à présent une manche  $Y = (\phi, Y) \in \Pi_m$  et, afin d'alléger les notations, supposons que  $\phi$  est l'identité. L'objet de ce paragraphe est la construction d'un sous-schéma fermé pour l'un des facteurs  $Y'_r \hookrightarrow Y_r$  contrôlé en termes de degré et hauteur. Nous introduisons pour cela trois paramètres entiers  $\gamma, M, \tau$  tous supérieurs ou égaux à 1 ainsi que deux réels  $\eta \geq 1$  et  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

Comme nous l'avons déjà mentionné, notre hypothèse principale appelée inégalité de Vojta consiste en une comparaison de certaines hauteurs ponctuelles pour le  $m$ -uplet  $x_Y$ , hauteurs que nous représentons ici par des familles de sections polynomiales du faisceau de référence. Plus exactement, elle met en jeu une sous-famille de monômes notée  $\Xi_Y \subset W_Y$  (qui sera pondérée par  $\gamma$ ) et une famille finie de cardinal  $M$  notée

$$Z_Y = Z_Y(\gamma) \subset \text{Vect}(W_Y^{\otimes \tau \gamma}) \subset \Gamma(Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes \tau \gamma})$$

formée de polynômes multihomogènes de multidegré  $\tau\gamma a_Y$  en les coordonnées  $p_i^* W_j^{(i)}$  et dont la famille de tous les coefficients vérifie

$$h(Z_Y) \leq \eta\gamma|a_Y|.$$

En outre, ces deux familles sont supposées engendrer les faisceaux respectifs  $\mathcal{N}_Y$  et  $\mathcal{N}_Y^{\otimes \tau\gamma}$  sur un ouvert  $U_Y \subset Y$  contenant  $x_Y$ .

**Définition 2.1.1.** *Le triplet  $(\gamma, \Xi_Y, Z_Y)$  ainsi formé sera appelé système de sections de Vojta sur la manche  $Y$  de paramètres  $M, \tau, \eta$ .*

Nous confrontons cette inégalité à une seconde hypothèse concernant certains espaces de sections associés à  $\Xi_Y$  et  $Z_Y$  que nous définissons maintenant. Pour tout entier  $\delta \geq 1$  nous posons

$$E_0 = E_0(\delta) = \bigcap_{\zeta \in Z_Y} (\cdot \otimes \zeta^{\otimes \delta})^{-1}(E_1) \subset \Gamma(U_Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes (1-\tau)\gamma\delta})$$

où  $E_1 = E_1(\delta) = \text{Vect}(\Xi_Y^{\otimes \gamma\delta})$  désigne le sous-espace vectoriel de  $\Gamma(Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes \gamma\delta})$  engendré par les monômes de degré  $\gamma\delta$  en les sections  $\xi \in \Xi_Y$ .

Nous notons respectivement  $d_i$  et  $h_i$  le degré et la hauteur du facteur  $Y_i$  relativement au système de coordonnées homogènes  $W^{(i)} \subset \Gamma(Y_i, \mathcal{L}_i)$  induit par l'immersion fermée  $Y_i \hookrightarrow X_i$ . Nous introduisons enfin les grandeurs de contrôle quantitatif suivantes

$$\begin{aligned} \Lambda_d &= 4(N+1)(2u^2)^u \gamma d^{m+1} \text{ et} \\ \Lambda_h &= (M' + 5)m \left( \max_{1 \leq i \leq m} (a_i(h_i + \eta)/a_1) + du \log \Lambda_d \right) \end{aligned}$$

où  $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$ ,  $d = \max\{d_1, \dots, d_m\}$  et

$$M' = \frac{M(1+\tau)}{2\varepsilon}.$$

**Proposition 2.1.1.** *Soient  $c'_2 = \Lambda_d^u$  et  $c'_3 = 4\gamma\Lambda_h$ . Alors sous les hypothèses suivantes :*

1. *L'inégalité de Vojta est vérifiée*

$$\gamma h(\Xi_Y(x_Y)) + h(W_Y(x_Y)) \leq h(Z_Y(\gamma)(x_Y)) ;$$

2. *Pour tout  $i < m$ ,  $a_i \geq a_{i+1}c'_2$  ;*

3. *Pour tout  $i \leq m$ ,  $a_i h_{\mathcal{L}_i}(x_i) \geq a_1 c'_3$  ;*

4. *Il existe un entier  $\delta_Y$  tel que pour tout multiple  $\delta$  de  $\delta_Y$*

$$\dim E_0(\delta) \geq \varepsilon \dim E_1(\delta) ;$$

*il existe un indice  $1 \leq r \leq m$  et un sous-schéma fermé intègre  $Y'_r \hookrightarrow Y_r$  contenant  $x_r$ , de dimension  $m-2$  et vérifiant*

$$\begin{aligned} \deg(Y'_r) &\leq d_r \Lambda_d^u \text{ et} \\ a_r(h(Y'_r) + \eta) &\leq a_1(m-1)d_r \Lambda_d^u \Lambda_h. \end{aligned}$$

Nous dirons que le couple  $(r, Y'_r)$  est le vainqueur de la manche  $Y$  pour le système  $(\gamma, \Xi_Y, Z_Y)$ . La démonstration de cette proposition assez technique sera reportée à la partie suivante. Admettons-la pour l'instant afin d'en venir le plus directement possible au théorème principal de ce chapitre.

### 2.1.3 Équilibrage des systèmes de Vojta

L'objet de ce paragraphe intermédiaire est la mise en lumière des relations quelque peu imbriquées entre  $\gamma$ ,  $\Xi_Y$ ,  $Z_Y$ ,  $\varepsilon$  et  $\tau$  à travers les espaces  $E_0$  et la définition de contraintes pratiques permettant d'itérer la proposition 2.1.1.

Fixons auparavant deux entiers  $\omega \geq -1$  et  $\theta \geq 1$ . Considérons à nouveau une manche  $(\phi, Y) \in \Pi_m$  (avec  $\phi$  l'identité), attribuons-lui une famille de monômes  $\Xi_Y \subset W_Y$  et observons l'inégalité triviale

$$\gamma h(\Xi_Y(x_Y)) + h(W_Y(x_Y)) \leq h(W_Y^{\otimes 2\gamma}(x_Y)).$$

Comme celle-ci n'apporte aucune information, nous ne pouvons envisager de lui appliquer la proposition. En effet il est aisé de constater que dans ce cas (et pour  $\delta$  suffisamment grand)

$$E_0(\delta) \subset \Gamma(Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes -\gamma\delta}) = 0$$

puisque  $W_Y$  engendre  $\mathcal{N}_Y$  sur  $Y$ . Nous tirons évidemment les mêmes conclusions pour tout système  $(\gamma, \Xi_Y, Z_Y)$  tel que  $\tau > 1$  et  $Z_Y$  engendre  $\mathcal{N}_Y^{\otimes \tau\gamma}$  sur  $Y$ . Ainsi les espaces  $E_0$  permettent d'exprimer la pertinence et de mesurer la quantité d'information d'une inégalité de Vojta. Celles-ci reposent entre autres sur certaines propriétés de nature globale de la famille  $Z_Y$  que nous allons maintenant quantifier.

**Définition 2.1.2.** *Nous dirons que le système de sections de Vojta  $(\gamma, \Xi_Y, Z_Y)$  de paramètres  $M, \tau, \eta$  est équilibré relativement à  $(\omega, \theta)$  si les deux conditions suivantes sont réunies :*

1. *Le poids  $\gamma$  vérifie  $1 \leq \gamma \leq \theta^u (d_1 \dots d_m)^{\omega+1}$  ;*
2. *Il existe un faisceau inversible  $\mathcal{G}$  et un morphisme injectif  $J_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{N}_Y^{\otimes \tau\gamma}$  de faisceaux sur  $Y$  tel que  $Z_Y \subset \Gamma(Y, \mathcal{G}) \otimes J_{\mathcal{G}}$  et tel que pour  $\delta_Y | \delta$*

$$\dim E'_0(\delta) \geq \left( \prod_{i=1}^m d_i^{-\omega} a_i^{m-1} \right) (\theta^{-1} \delta^u) + o(\delta^u)$$

où les espaces  $E'_0$  sont définis par

$$E'_0(\delta) = \bigcap_{\zeta \in \Gamma(Y, \mathcal{G})} (\cdot \otimes \zeta^{\otimes \delta})^{-1}(\text{Vect}(\Xi_Y^{\otimes \gamma\delta})).$$

Dans ces conditions, si nous notons  $\varepsilon^{-1} = 2\theta\gamma^u (d_1 \dots d_m)^{\omega+1}$  alors quitte à augmenter  $\delta_Y$  la minoration précédente entraîne

$$\dim E'_0(\delta) \geq (3/2)\varepsilon \left( \prod_{i=1}^m \frac{a_i^{m-1} d_i}{(m-1)!} \right) (\gamma\delta)^u \geq \varepsilon \dim \Gamma(Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes \gamma\delta}).$$

Nous vérifions alors que  $\dim E_0 \geq \varepsilon \dim E_1$ . En effet, si  $Z_Y$  engendre  $\mathcal{N}_Y^{\otimes \tau \gamma}$  sur un ouvert  $U_Y$  alors par construction la restriction de  $J_{\mathcal{G}}$  à  $U_Y$  est un isomorphisme et  $\mathcal{G}$  est engendré par ses sections globales sur  $U_Y$ . Nous avons donc clairement

$$E'_0(\delta) \subset E_0(\delta) \otimes J_{\mathcal{G}}^{\otimes \delta} \subset \Gamma(U_Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes \gamma \delta} \otimes \mathcal{G}^{\otimes -\delta})$$

et notre assertion en découle directement car  $\dim E_0(\delta) \otimes J_{\mathcal{G}}^{\otimes \delta} = \dim E_0(\delta)$  et  $E_1(\delta) \subset \Gamma(Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes \gamma \delta})$ .

### 2.1.4 Énoncé principal

Fixons des paramètres  $\omega, \theta, M, \tau, \eta$  et posons  $d_0 = \max_i \deg_{\mathcal{L}_i}(X_i)$ ,  $h_0 = \max_i h(X_i)$  et

$$\Lambda = (N+1)(2\theta u_0)^{u_0} d_0$$

où  $N = \max_i N_i$ ,  $u_0 = m_0(m_0 - 1)$ . Définissons également des exposants

$$\psi(j) = \prod_{m=m_0-j+2}^{m_0} ((\omega+2)m+1)(m(m-1)+1)$$

pour tout  $1 \leq j \leq m_0$  et notons  $\psi_0 = \psi(m_0)$ .

Nous considérons le sous-ensemble

$$\Pi(\omega, \theta) = \bigsqcup_{m=2}^{m_0} \Pi_m(d_0 \Lambda^{\psi(m_0-m+1)-1})$$

où  $\Pi_m(d)$  désigne l'ensemble des manches  $Y \in \Pi_m$  telles que  $\deg_{\mathcal{L}_{\phi(i)}}(Y_{\phi(i)}) \leq d$  pour tout  $i$ .

**Théorème 2.1.2. (inégalité de Vojta, version générale)** Soient  $c_1 = \Lambda^{\psi_0/3}$ ,  $c_2 = \Lambda^{\psi_0}$  et  $c_3 = (M\tau)^{m_0-1}(h_0 + \eta)\Lambda^{2\psi_0}$ . Alors sous les hypothèses suivantes :

1. Toute manche  $Y \in \Pi(\omega, \theta)$  est munie d'un système  $(\gamma, \Xi_Y, Z_Y)$  de sections de Vojta de paramètres  $M, \tau, \eta$  équilibré relativement à  $(\omega, \theta)$  (voir définitions 2.1.1 et 2.1.2) pour lequel l'inégalité de Vojta

$$c_1 h(\Xi_Y(x_Y)) + h(W_Y(x_Y)) \leq h(Z_Y(\gamma)(x_Y))$$

est vérifiée ;

2. Pour tout  $i < n_0$ ,  $a_i \geq a_{i+1}c_2$  ;
3. Pour tout  $i \leq n_0$ ,  $a_i h_{\mathcal{L}_i}(x_i) \geq a_1 c_3$  ;

nous avons la majoration suivante

$$n_0 \leq m_0(m_0 - 1)/2.$$

On pourra comparer ce résultat avec le théorème principal 1.2 de [31]. Hormis bien entendu le recours à plusieurs inégalités de Vojta, les différences portent essentiellement sur l'hypothèse concernant les nombres d'intersection (ici remplacée par les conditions d'équilibre) ainsi que celle sur la hauteur des points  $x_i$  (ici détériorée par la présence des poids  $a_i$ ). Mais l'aspect le plus important réside dans la valeur des seuils  $c_i$  à travers l'exposant  $\psi$  notamment, significativement meilleure dans notre cas.

Le théorème 2.1.2 découle directement d'une itération sur la proposition 2.1.1 que nous développons au sein du lemme suivant.

**Lemme 2.1.3.** *Sous les hypothèses du théorème 2.1.2, il existe pour tout entier  $1 \leq j \leq m_0$  un sous-ensemble d'indices  $I_j \subset \{1, \dots, n_0\}$  de cardinal au moins*

$$n_0 - (m_0 - 1) - (m_0 - 2) - \dots - (m_0 - (j - 1))$$

*et une famille  $(X_i(j))_{i \in I_j}$  de sous-schémas fermés intègres  $X_i(j) \hookrightarrow X_i$  contenant les points  $x_i$ , de même dimension  $m - 1 = m_0 - j$  et vérifiant*

$$\begin{aligned} \deg(X_i(j)) &\leq d_0 \Lambda^{\psi(j)-1} \text{ et} \\ a_i(h(X_i(j)) + \eta) &\leq a_1(M\tau)^{j-1}(h_0 + \eta)(\Lambda^{2\psi(j)}/2). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous raisonnons par récurrence sur  $j$ . Pour  $j = 1$  l'ensemble  $I_1 = \{1, \dots, n_0\}$  et les schémas  $X_i(1) = X_i$  conviennent puisque  $\psi(1) = 1$  et  $\Lambda \geq 2$ . Supposons maintenant que l'ensemble  $I_j$  et les schémas  $(X_i(j))_{i \in I_j}$  existent pour un  $1 \leq j \leq m_0 - 1$ . Si  $\text{Card}(I_j) < m = m_0 - j + 1$  alors

$$n_0 - jm_0 + j(j+1)/2 \leq \text{Card}(I_j) - m_0 + j \leq 0$$

et donc  $I_{j+1} = \emptyset$  convient.

Dans le cas contraire, soit  $\phi$  une application de  $\{1, \dots, m\}$  vers  $I_j$  (strictement croissante). Nous formons une manche

$$(\phi, Y) = (\phi, X_{\phi(1)}(j) \times \dots \times X_{\phi(m)}(j))$$

qui appartient à  $\Pi(\omega, \theta)$  et qui est donc munie d'un système de Vojta de paramètres  $M, \tau, \eta$  équilibré relativement à  $(\omega, \theta)$ . Ceci entraîne que le poids  $\gamma$  de ce système vérifie  $\gamma \leq \theta^u (d_0 \Lambda^{\psi(j)-1})^{(\omega+1)m}$  avec  $u = m(m-1)$  et que nous pouvons appliquer la proposition 2.1.1 pour un certain  $1 \leq \varepsilon^{-1} \leq 2\theta\gamma^u (d_0 \Lambda^{\psi(j)-1})^{(\omega+1)m}$  satisfaisant  $\dim E_0 \geq \varepsilon \dim E_1$  (voir fin de la sous-section 2.1.3 précédente). La quantité  $\Lambda_d$  utilisée est ici majorée par

$$\Lambda_d \leq 4(N+1)(2u^2\theta)^u (d_0 \Lambda^{\psi(j)-1})^{(\omega+1)m+m+1} \leq \Lambda^{\psi(j)((\omega+2)m+1)}$$

car  $4(N+1)(2u^2\theta)^u \leq (\Lambda/d_0)^2$ . Nous en déduisons  $\log \Lambda_d \leq 2m(\omega+2)\Lambda^{\psi(j)}$  donc

$$\begin{aligned} \Lambda_h &\leq \left( \frac{M(1+\tau)}{2\varepsilon} + 5 \right) m \times \\ &\quad \left( (M\tau)^{j-1}(h_0 + \eta)(\Lambda^{2\psi(j)}/2) + 2(d_0 \Lambda^{\psi(j)-1})um(\omega+2)\Lambda^{\psi(j)} \right) \end{aligned}$$

d'où en utilisant  $M, \tau, \eta \geq 1$  ainsi que  $2um \leq \Lambda/(2d_0)$

$$\Lambda_h \leq (M\tau)^j (h_0 + \eta)(\varepsilon^{-1} + 5)m_0(\omega + 2)\Lambda^{2\psi(j)}.$$

Enfin  $m_0(\omega + 2)(\varepsilon^{-1} + 5) \leq (\Lambda/d_0)^{(\omega+2)(u+1)}(d_0\Lambda^{\psi(j)-1})^{(\omega+1)m(u+1)}$  soit

$$\Lambda_h \leq (M\tau)^j (h_0 + \eta)\Lambda^{\psi(j)(2+(\omega+2)m(u+1))}.$$

Par conséquent  $\gamma \leq \Lambda_d \leq c_1$  et  $c'_2 = \Lambda_d^u \leq \Lambda^{\psi(j+1)} \leq c_2$  d'une part et

$$c'_3 = 4\gamma\Lambda_h \leq (M\tau)^j (h_0 + \eta)\Lambda^{\psi(j)(2+(\omega+2)m(u+1)+(\omega+2)m)} \leq c_3$$

d'autre part car  $\psi_0 \geq \psi(j+1) = \psi(j)((\omega+2)m+1)(u+1)$ . Notons pour terminer que pour tout  $i$

$$\frac{a_{\phi(i)}}{a_{\phi(i+1)}} \geq c_2^{\phi(i+1)-\phi(i)} \geq c'_2 \text{ et } a_{\phi(i)}h_{\mathcal{L}_{\phi(i)}}(x_{\phi(i)}) \geq a_1c_3 \geq a_{\phi(1)}c'_3.$$

Une fois ces vérifications effectuées, la proposition 2.1.1 fournit un vainqueur pour la manche considérée que nous notons  $(i, X_i(j+1))$  et qui satisfait toutes les conditions demandées. En effet nous avons pour les degrés

$$\deg_{\mathcal{L}_i}(X_i(j+1)) \leq d_0\Lambda^{\psi(j)-1}\Lambda_d^u \leq d_0\Lambda^{\psi(j+1)-1}$$

et comme  $(\omega+2)m(2u+1)+u+3 \leq 2((\omega+2)m+1)(u+1)$  nous avons également pour les hauteurs (avec  $2(m-1)d_0 \leq \Lambda$ )

$$\begin{aligned} a_i(h(X_i(j+1)) + \eta) &\leq a_1d_0\Lambda^{\psi(j)-1}(m-1)\Lambda_d^u\Lambda_h \\ &\leq a_1(M\tau)^j(h_0 + \eta)(\Lambda^{2\psi(j+1)}/2). \end{aligned}$$

Pour conclure, il est aisé de constater que le sous-ensemble  $I_{j+1} \subset I_j$  des indices des vainqueurs de toutes les manches disponibles est de cardinal au moins  $n_0 - jm_0 + j(j+1)/2$ . En effet  $I_{j+1}$  rencontre par définition tout sous-ensemble de  $I_j$  à  $m$  éléments ce qui implique  $\text{Card}(I_j \setminus I_{j+1}) < m$  et entraîne notre assertion car  $m = m_0 - j + 1$  et par récurrence

$$\begin{aligned} \text{Card}(I_{j+1}) &\geq \text{Card}(I_j) - m + 1 \geq n_0 - (j-1)m_0 + j(j-1)/2 - m_0 + j \\ &\geq n_0 - jm_0 + j(j+1)/2. \end{aligned}$$

□

Avant de clore cette partie il ne reste qu'à vérifier que le théorème 2.1.2 se déduit du lemme 2.1.3. Supposons que  $n_0 > m_0(m_0 - 1)/2$ , alors le cardinal de  $I_{m_0}$  est minoré par

$$n_0 - (m_0 - 1)m_0 + (m_0 - 1)m_0/2 > 0$$

et cet ensemble contient au moins un indice  $1 \leq i \leq n_0$ . Il vient alors  $X_i(m_0) = \{x_i\}$  et donc

$$a_i h_{\mathcal{L}_i}(x_i) \leq a_i(h(X_i(m_0)) + \eta) \leq a_1(M\tau)^{m_0-1}(h_0 + \eta)(\Lambda^{2\psi_0}/2) < a_1c_3$$

ce qui est absurde.

## 2.2 Diminution d'un facteur dans un produit

### 2.2.1 Stratégie générale

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration de la proposition 2.1.1 dont nous donnons ici un bref aperçu. Rappelons que nous travaillons dans le contexte d'une manche fixée  $(\phi, Y) \in \Pi_m$  (avec  $\phi$  l'identité) munie d'un système de sections de Vojta  $(\gamma, \Xi_Y, Z_Y)$  de paramètres  $M, \tau, \eta$  (voir définition 2.1.1), non nécessairement équilibré (les paramètres  $\gamma$  et  $\varepsilon$  restant ainsi indéterminés). Considérons une section non nulle  $s \in E_0(\delta)$  et notons

$$F_\zeta(\xi) = s \otimes \zeta^{\otimes \delta} \in E_1(\delta) \text{ pour } \zeta \in Z_Y.$$

Les sections  $F_\zeta(\xi)$  sont des polynômes homogènes de degré  $\gamma\delta$  en les sections  $\xi \in \Xi_Y$ . Nous pouvons alors écrire

$$h((s \otimes \zeta^{\otimes \delta})_\zeta(x_Y)) \leq h((F_\zeta)_\zeta) + \log \dim E_1 + \gamma\delta h(\Xi_Y(x_Y)).$$

Lorsque  $s(x_Y) \neq 0$ , la formule du produit implique que le membre de gauche de cette inégalité vaut  $\delta h(Z_Y(x_Y))$ . En combinant celle-ci avec l'inégalité de Vojta nous obtenons donc

$$\delta h(W_Y(x_Y)) \leq h((F_\zeta)_\zeta) + o(\delta).$$

Par conséquent, si la hauteur de la section  $s$  (c'est-à-dire celle des polynômes  $(F_\zeta)_\zeta$  qui la représentent) est suffisamment petite alors  $s$  s'annule en  $x_Y$ .

La stratégie que nous adoptons s'inscrit donc bien dans le cadre de l'approximation diophantienne ou encore celui des méthodes de preuves de transcendance. Une première étape consiste à mettre en évidence une section auxiliaire  $s \in E_0 \setminus \{0\}$  de hauteur contrôlée (voir paragraphe 2.2.3). Ensuite, par un raisonnement comme ci-dessus incluant la notion d'indice (définie au paragraphe 2.2.4) nous prouvons que cette section ainsi qu'un nombre suffisant de ses premières dérivées s'annulent en  $x_Y$  (voir paragraphe 2.2.6). Nous appliquons enfin le théorème du produit 2.2.6 pour achever la démonstration (paragraphe 2.2.7).

### 2.2.2 Coordonnées adaptées et écriture des sections polynomiales

Fixons un indice  $1 \leq i \leq m$ . L'objet de ce paragraphe préliminaire est le choix d'un plongement projectif convenable pour le facteur  $Y_i$ , obtenu en modifiant le système initial de coordonnées homogènes arbitraires  $W^{(i)}$  par une homographie contrôlée. Le procédé que nous employons (voir les paragraphes 2.1 et 2.2 de [31]) se ramène à une version raffinée de la normalisation de Noether. Il n'est fait ici référence à aucune autre donnée spécifique que le couple  $(x_i, a_i)$  sans hypothèse particulière. Rappelons que  $d_i$  et  $h_i$  désignent le degré et la hauteur du schéma  $Y_i$  dans les coordonnées  $W^{(i)}$ .

Quitte à permuter  $W^{(i)}$  nous supposons que  $W_0^{(i)}(x_i) \neq 0$  et nous identifions la droite  $\mathcal{L}_i(x_i)$  avec  $\overline{\mathbb{Q}}$  en posant  $W_0^{(i)}(x_i) = 1$ . Nous dirons qu'un second système  $V_0^{(i)}, \dots, V_{N_i}^{(i)} \in \Gamma(Y_i, \mathcal{L}_i)$  de coordonnées homogènes est adapté lorsque

1. la famille  $V_0^{(i)}, \dots, V_{m-1}^{(i)}$  engendre le faisceau inversible  $\mathcal{L}_i$  sur  $Y_i$ ,
2. le corps des fonctions  $F(Y_i)$  de  $Y_i$  est engendré par les  $m$  premières fonctions  $(V_j^{(i)}/V_0^{(i)})_{1 \leq j \leq m}$  en tant qu'extension du corps  $\overline{\mathbb{Q}}$  et
3.  $V_0^{(i)} = W_0^{(i)}$ .

La première hypothèse conduit à un morphisme  $\rho_i : Y_i \rightarrow \mathbb{P}^{m-1}$  fini et surjectif de degré  $d_i$  (rappelons que  $m-1 = \dim(Y_i)$ ). Il s'ensuit que les  $m-1$  premières fonctions  $(V_j^{(i)}/V_0^{(i)})_{1 \leq j \leq m-1}$  sont algébriquement indépendantes sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  et que l'extension intermédiaire

$$F(Y_i)/\overline{\mathbb{Q}}((V_j^{(i)}/V_0^{(i)})_{1 \leq j \leq m-1})$$

est finie de degré  $d_i$  et d'élément primitif  $V_m^{(i)}/V_0^{(i)}$ .

**Lemme 2.2.1.** *Il existe une matrice inversible  $M^{(i)}$  à coefficients entiers compris entre  $-\max(d_i/2, 1)$  et  $\max(d_i/2, 1)$  telle que les sections*

$$V_j^{(i)} = \sum_{k=0}^{N_i} M_{jk}^{(i)} W_k^{(i)} \in \Gamma(Y_i, \mathcal{L}_i) \quad (V_0^{(i)} = W_0^{(i)})$$

définissent un système de coordonnées adaptées. En outre, il existe pour tout  $j$  des relations (plus précisément des polynômes homogènes de degrés  $d_i$  unitaires en la dernière variable et égaux à une puissance d'un polynôme irréductible)

$$A_j^{(i)}(V_0^{(i)}, \dots, V_{m-1}^{(i)}, V_j^{(i)}) = B_j^{(i)}(V_0^{(i)}, \dots, V_{m-1}^{(i)}, W_j^{(i)}) = 0$$

dans  $\Gamma(Y_i, \mathcal{L}_i^{\otimes d_i})$ , la hauteur de la famille de tous les coefficients mis en jeu étant majorée par

$$h(A^{(i)}, B^{(i)}) \leq h_i + d_i m \log d_i (N_i + 1).$$

*Démonstration.* Nous renvoyons à [31, Proposition 2.2] et [31, Lemme 2.3] (la condition supplémentaire  $V_0^{(i)} = W_0^{(i)}$  peut facilement être ajoutée en remarquant que  $W_0^{(i)}$  ne s'annule pas globalement sur  $Y_i$ ).  $\square$

Les projections  $Y \rightarrow Y_i$  induisent des systèmes de sections sur  $Y$  notés également  $V^{(i)}$  et  $W^{(i)}$ . Pour tout entier naturel  $\delta$  notons  $\mathfrak{a}(\delta)$  la famille des monômes  $V^\mu$  de multidegré  $\delta a_Y$  en les coordonnées adaptées  $V_j^{(i)}$  vérifiant pour tout  $i$  les conditions suivantes

$$\mu_m^{(i)} < d_i \text{ et } \mu_{m+1}^{(i)} = \dots = \mu_{N_i}^{(i)} = 0.$$

Cette famille est alors clairement libre dans l'espace  $\Gamma(Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes \delta})$  d'après les considérations précédentes et possède en outre une propriété commode pour la réécriture des sections polynomiales en  $W$ .

**Lemme 2.2.2.** *Il existe un entier naturel  $r$ , une section polynomiale non nulle  $R_Y(V) \in \Gamma(Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes r})$  en les coordonnées adaptées  $V_j^{(i)}$ ,  $0 \leq j \leq m-1$  et un corps de nombres  $K_Y$  tels que pour tout entier naturel  $\delta$  et tout sur-corps de nombres  $K/K_Y$*

$$[\text{Vect}_K(W_Y^{\otimes \delta})] \otimes R_Y(V) \subset \text{Vect}_K(\mathfrak{a}(\delta + r)).$$

*De plus, si les  $P_\ell(W)$  sont une famille finie de polynômes multihomogènes de multidegré  $\delta a_Y$  et si les  $Q_\ell(V) = P_\ell(W) \otimes R_Y(V)$  désignent leurs images dans la base  $\mathfrak{a}(\delta + r)$  alors ces dernières sont contrôlées par*

$$h((Q_\ell)_\ell) \leq h((P_\ell)_\ell) + \delta \sum_i a_i (h_i + d_i m \log 2d_i (N_i + 1)) + o(\delta).$$

*Démonstration.* En écrivant le corps des fonctions  $F(Y)$  comme

$$F(Y) = \overline{\mathbb{Q}}((V_j^{(i)}/V_0^{(i)})_{i, 1 \leq j \leq m-1})[(V_m^{(i)}/V_0^{(i)})_i]$$

nous pouvons écrire chaque monôme  $(W/V_0)^\kappa$  avec  $0 \leq \kappa_j^{(i)} < d_i$  sous la forme  $S_\kappa(V)/R_Y(V)$  avec  $R_Y(V)$  tel que dans l'énoncé et  $S_\kappa(V) \in \text{Vect}(\mathfrak{a}(r))$ . Nous appliquons alors [31, Lemme 2.5] (avec  $B_j^{(i)}$  à la place de  $P_j^{(i)}$ ,  $n_i = N_i$  et  $u_i = m-1$ ) ce qui entraîne

$$P_\ell(W) \otimes R_Y(V) = \sum_{\kappa} Q_{\kappa, \ell}(V) S_\kappa(V)$$

et nous vérifions aisément toutes les assertions (tout corps contenant les coefficients des  $B_j^{(i)}$  et de  $R_Y$  convient pour  $K_Y$ ).  $\square$

### 2.2.3 Lemme de Siegel et section auxiliaire

À partir de maintenant, nous fixons une base  $\mathfrak{b}$  de l'espace  $E_1$  formée d'éléments de  $\Xi_Y^{\otimes \gamma \delta}$ . Alors  $s \mapsto [s \otimes \zeta^{\otimes \delta}]_{\zeta \in Z_Y}$  définit une injection de  $E_0$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}^q$  ( $q = M \dim E_1$ ) que nous pouvons voir comme une inclusion. Chaque élément de  $E_0 \setminus \{0\}$  hérite ainsi d'une hauteur et notre but dans ce paragraphe est d'en extraire un pour lequel nous sachions contrôler cette hauteur. Cette construction utilise un lemme de Siegel qui prend la forme suivante (voir [31, Lemme 2.6]).

**Lemme 2.2.3.** *Pour tout corps de nombres  $K$ , il existe un réel  $c(K) > 0$  tel que, pour toute matrice  $A$  de format  $p \times q$  avec  $p < q$  à coefficients dans  $K$ , il existe un vecteur non nul  $x \in K^q$  tel que  $Ax = 0$  et*

$$h(x) \leq \frac{p}{q-p} \left( \max_{1 \leq k \leq p} h(A_k) + \log q \right) + \frac{q}{q-p} c(K)$$

où  $A_1, \dots, A_p$  désignent les lignes de  $A$ .

Nous allons d'abord réaliser  $E_0$  comme le noyau d'une matrice. Définissons donc  $E_2 = E_2(\delta)$  comme le sous-espace vectoriel de  $\Gamma(Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes(1+\tau)\gamma\delta+r})$  engendré par la famille libre  $\mathfrak{a}((1+\tau)\gamma\delta+r)$  (voir la notation  $\mathfrak{a}$  introduite avant le lemme 2.2.2 ci-dessus). Nous disposons alors d'une suite exacte appelée complexe de Faltings

$$0 \longrightarrow E_0(\delta) \xrightarrow{\Phi} E_1(\delta)^M \xrightarrow{\Psi} E_2(\delta)^{M^2}$$

où les deux dernières flèches désignent les morphismes

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= [s \otimes \zeta^{\otimes \delta}]_{\zeta} \text{ et} \\ \Psi((s_{\zeta})_{\zeta}) &= [(s_{\zeta_1} \otimes \zeta_2^{\otimes \delta} - s_{\zeta_2} \otimes \zeta_1^{\otimes \delta}) \otimes R_Y(V)]_{\zeta_1, \zeta_2} \end{aligned}$$

(cf. [31, Proposition 4.2]).

**Proposition 2.2.4.** *Pour  $\delta$  assez grand, il existe une section auxiliaire non nulle  $s \in E_0(\delta)$  de hauteur majorée par*

$$h(s) \leq M\varepsilon^{-1}(1+\tau)\gamma\delta\Lambda'_h + o(\delta)$$

avec  $\Lambda'_h = \sum_i a_i(h_i + \eta + d_i m \log 2d_i(N_i + 1)) \leq a_1\Lambda_h/(M' + 5)$ .

*Démonstration.* Rappelons que les sections  $\zeta \in Z_Y$  sont des polynômes  $P_{\zeta}(W)$  multihomogènes de multidegré  $\tau\gamma a_Y$ . Considérons un monôme  $\xi^{\nu}$  appartenant à  $\mathfrak{b}$  et vu comme un élément d'un facteur de  $E_1(\delta)^M$ . En vertu du lemme 2.2.2, son image par  $\Psi$  est une famille de  $M^2$  éléments de  $E_2(\delta)$  qui sont soit nuls, soit de la forme

$$\pm W^{\mu} P_{\zeta}(W)^{\delta} R_Y(V) = \pm Q_{\mu, \zeta}(V)$$

où  $W^{\mu}$  est un monôme de multidegré  $\gamma\delta a_Y$ . De plus la hauteur de tous les coefficients mis en jeu par ces sections dans la base  $\mathfrak{a}$  est majorée par

$$h((P_{\zeta}^{\delta})_{\zeta}) + (1+\tau)\gamma\delta \sum_i a_i(h_i + d_i m \log 2d_i(N_i + 1)) + o(\delta)$$

donc par  $(1+\tau)\gamma\delta\Lambda'_h + o(\delta)$ . En outre, ces coefficients appartiennent au corps de nombres  $K$  engendré sur  $K_Y$  par les coefficients des  $P_{\zeta}$  donc indépendant de  $\delta$ .

Nous appliquons alors le lemme de Siegel 2.2.3 à la matrice  $A$  de  $\Psi$  ainsi mise en évidence en ne gardant que  $p = \text{rg}(\Psi) = q - \dim E_0$  lignes indépendantes et nous trouvons un élément  $s \in E_0 \setminus \{0\}$  de hauteur inférieure à

$$\frac{M \dim E_1}{\dim E_0} \left( \max_{1 \leq k \leq p} h(A_k) + \log(M \dim E_1) + c(K) \right).$$

Par hypothèse nous savons d'une part que  $\dim E_0 > 0$  et  $\dim E_1 / \dim E_0 \leq \varepsilon^{-1}$  pour  $\delta$  suffisamment grand. D'autre part, en utilisant les nombres d'intersection,

$$\dim E_1(\delta) \leq \dim \Gamma(Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes \gamma \delta}) = (\mathcal{N}_Y^{\cdot u} \cdot Y)(\gamma^u \delta^u / u!) + o(\delta^u)$$

ce qui implique  $\log(M \dim E_1) + c(K) = o(\delta)$ .  $\square$

### 2.2.4 Indice d'une section et théorème du produit

Revenons ici sur les morphismes  $\rho_i$  (finis surjectifs) définis dans la sous-section 2.2.2, posons

$$\rho_Y = \rho_1 \times \dots \times \rho_m : Y \rightarrow (\mathbb{P}^{m-1})^m$$

et considérons un point rationnel  $y \in Y(\overline{\mathbb{Q}})$ . Supposons que  $\rho_Y$  est étale en  $y$ , alors les faisceaux des différentielles aux points  $y$  et  $\rho_Y(y)$  se déduisent l'un de l'autre par extension des scalaires. Si de plus  $V_0^{(i)}(y) \neq 0$  pour tout  $i$  alors le  $\mathcal{O}_{Y,y}$ -module  $(\Omega_{Y/\overline{\mathbb{Q}}})_y$  admet pour base la famille des différentielles  $d(V_j^{(i)}/V_0^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq m-1$ .

Nous disposons ainsi des dérivations naturelles correspondantes notées  $\partial_j^{(i)} : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$  et, pour tout  $(m-1)$ -uplet d'entiers naturels  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m-1})$ , nous posons

$$\partial^{(i)}(\beta) = \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\beta_j!} (\partial_j^{(i)})^{\beta_j}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

**Définition 2.2.1.** Nous appelons *indice de l'opérateur*  $D = \prod_i \partial^{(i)}(\beta^{(i)})$  (relativement aux poids  $(b_1, \dots, b_m)$ ) la quantité

$$\sigma = \frac{|\beta^{(1)}|}{b_1} + \dots + \frac{|\beta^{(m)}|}{b_m}.$$

Nous dirons qu'une section  $s$  de  $\mathcal{N}_Y^{\otimes \delta}$ ,  $\delta \in \mathbb{Z}$  est d'indice  $\sigma$  en  $y$  si  $s$  est définie en  $y$ , s'il existe un opérateur  $D$  d'indice  $\sigma$  tel que

$$D(s/\Delta_Y(V)^\delta)(y) \neq 0$$

et si  $D'(s/\Delta_Y(V)^\delta)(y) = 0$  pour tout opérateur  $D'$  d'indice strictement inférieur à  $\sigma$ . Ici  $\Delta_Y \in W_Y$  désigne le monôme  $W_0^{a_Y} = V_0^{a_Y}$ .

Sur l'espace multiprojectif  $\rho_Y(Y)$ , l'indice d'une section de  $\mathcal{O}(\delta a_Y)$  peut être clairement défini de manière analogue en tout point où  $\Delta_Y(V)^\delta$  est inversible et les deux définitions coïncident à travers  $\rho_Y^*$ . Pour l'autre sens, le lemme ci-dessous établit un lien entre les indices de sections polynomiales à la source et au but de  $\rho_Y$  (cf. [31, Lemme 5.5]).

**Lemme 2.2.5.** Soit  $F(W) \in \text{Vect}(W_Y^{\otimes \delta})$  une section polynomiale d'indice  $\sigma$  en  $y$  (relativement aux poids  $\delta a_Y$ ). Alors il existe un polynôme  $G(V)$  multihomogène en les coordonnées adaptées  $V_j^{(i)}$ ,  $0 \leq j \leq m-1$ , d'indice au moins  $\sigma$  en  $\rho_Y(y)$  et de hauteur majorée par

$$h(G) \leq (d_1 \dots d_m)[h(F) + 2\delta \Lambda'_h] + o(\delta).$$

De plus, si  $\delta > r+d$  alors il existe un tel polynôme de multidegré  $2\delta(d_1 \dots d_m)a_Y$ .

*Démonstration.* En utilisant les matrices de passage  $M^{(i)}$  données par le lemme 2.2.1 nous voyons les  $V_j^{(i)}$  comme des formes linéaires à coefficients entiers en les  $W_j^{(i)}$  et nous posons

$$F_\kappa(W) = F(W) \otimes \prod_{i=1}^m (V_m^{(i)})^{\kappa_i} (V_0^{(i)})^{d_i - \kappa_i}$$

pour tout  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$  tel que  $0 \leq \kappa_i < d_i$ . Nous avons clairement

$$h((F_\kappa)_\kappa) \leq h(F) + \sum_i d_i \log d_i (N_i + 1) \leq h(F) + o(\delta).$$

En vertu du lemme 2.2.2, nous pouvons poser

$$F_\kappa(W) \otimes R_Y(V) = Q_\kappa(V) = \sum_{\kappa'} Q_{\kappa, \kappa'}(V) \prod_i (V_m^{(i)})^{\kappa'_i}$$

où les  $Q_{\kappa, \kappa'}$  ne dépendent pas des  $V_m^{(i)}$  et définir  $G(V)$  comme le déterminant de la matrice  $(Q_{\kappa, \kappa'})_{\kappa, \kappa'}$ . Nous vérifions alors que

$$h(G) \leq (d_1 \dots d_m) \left( h((Q_\kappa)_\kappa) + \delta \sum_i a_i \log(N_i + 1) \right) + o(\delta)$$

ce qui implique la majoration de l'énoncé. D'autre part, la fonction  $G(V/V_0)$  est par construction la norme de la fonction  $F(W/V_0) \otimes R_Y(V/V_0)$  dans l'extension

$$F(Y)/\overline{\mathbb{Q}}((V_j^{(i)}/V_0^{(i)})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m-1})$$

d'où la minoration de l'indice de  $G$ .  $\square$

Nous énonçons à présent une version du théorème du produit de Faltings, outil crucial dans la preuve de la proposition 2.1.1 et dans la méthode de Vojta en général, basé sur une estimation d'indice dans un espace multiprojectif. Rappelons que  $p_i : Y \rightarrow Y_i$  désigne la projection naturelle et  $u = m(m-1)$ .

**Théorème 2.2.6.** *Soient  $\Lambda'_d \geq (2u^2)^u$  un nombre réel et  $G(V)$  un polynôme multihomogène de multidegré  $(\delta'_1, \dots, \delta'_m)$  en les coordonnées  $V_j^{(i)}$ ,  $0 \leq j \leq m-1$ . Supposons que*

1.  $\Delta_Y(\rho_Y(y)) \neq 0$ ,
2.  $G(V)$  s'annule en  $\rho_Y(y)$  avec un indice supérieur à  $m\Lambda_d'^{-1}$  (relativement aux poids  $(\delta'_1, \dots, \delta'_m)$ ) et
3.  $\delta'_i/\delta'_{i+1} \geq \Lambda_d'^u$  pour tout  $i < m$ .

Alors il existe un indice  $r$  et un polynôme  $U$  homogène en  $V_0^{(r)}, \dots, V_{m-1}^{(r)}$ , non nul mais s'annulant en  $\rho_r(p_r(y))$ , tel que  $\deg(U) \leq \Lambda_d'^u$  et

$$\delta'_r h(U) \leq (m-1)\Lambda_d'^u (h(G) + |\delta'| (2u+1) \log \Lambda_d') + o(|\delta'|).$$

*Démonstration.* Cet énoncé résulte de [31, Théorème 5.6] avec  $\sigma_0 = m(\Lambda'_d)^{-1}$ ,  $x' = \rho_Y(y)$ ,  $\ell = r$  et  $u_i = m - 1$ . Pour l'estimation de hauteur nous majorons  $\sum_{i=1}^m \sqrt{u_i} + (1/2)(u - 1) \log |\delta'|$  par  $o(|\delta'|)$  et  $\sum_{i=1}^m \delta'_i(h(\mathbb{P}^{u_i}) + \log 2)$  par  $|\delta'|m \log m$  (voir [31, page 494]). Enfin  $\log \binom{\Lambda'_d{}^u + u_\ell}{u_\ell} \leq \Lambda'_d{}^u m \log 2$  d'où

$$\begin{aligned} \delta'_r h(U) &\leq \Lambda'_d{}^u ((m-1)h(G) + |\delta'|u \log m + \delta'_r m \log(2\Lambda'_d{}^u m)) + o(|\delta'|) \\ &\leq (m-1)\Lambda'_d{}^u (h(G) + |\delta'|(2u \log \Lambda'_d + \log(m^m(2m)^2))) + o(|\delta'|) \end{aligned}$$

et  $m^m(2m)^2 \leq (2u^2)^u \leq \Lambda'_d$ .  $\square$

### 2.2.5 Réduction du problème et estimations de dérivées

Les morphismes surjectifs  $\rho_i$  basés sur les premières coordonnées adaptées (voir sous-section 2.2.2) mettent en relation les schémas  $Y_i$  avec des espaces projectifs de même dimension, de sorte que la construction du sous-schéma  $Y'_r$  qui fait l'objet de la proposition 2.1.1 se ramène à la construction d'une hypersurface de  $\rho_r(Y_r)$ . D'un point de vue quantitatif, la proposition découle directement de l'énoncé suivant (qui remplace [31, Proposition 3.1]).

**Lemme 2.2.7.** *Il existe un indice  $r$  et un polynôme  $U$  homogène en les coordonnées  $V_0^{(r)}, \dots, V_{m-1}^{(r)}$ , non nul mais s'annulant en  $\rho_r(x_r)$ , tel que  $\deg(U) \leq \Lambda_d^u$  et*

$$a_r h(U) \leq (m-1)\Lambda_d^u ((M' + 1)\Lambda'_h + |a_Y|(2u + 1) \log \Lambda_d)$$

où  $\Lambda'_h$  est définie dans la proposition 2.2.4.

*Démonstration.* (de la proposition 2.1.1 à partir du lemme 2.2.7) Nous définissons  $Y'_r \hookrightarrow Y_r$  comme une composante irréductible contenant  $x_r$  de l'image réciproque par  $\rho_r$  du fermé défini par  $U(V^{(r)})$ . Montrons que le degré et la hauteur de  $Y'_r$  (pour le système  $W^{(r)}$ ) satisfont les conditions requises et posons pour cela  $U'(W^{(r)}) = U(M^{(r)}W^{(r)})$ .

Par le théorème de Bézout nous avons pour le degré

$$\deg(Y'_r) \leq \deg(U') \deg(Y_r) \leq \Lambda_d^u d_r.$$

D'après la démonstration de [31, Proposition 3.1], nous pouvons écrire une majoration analogue pour la hauteur (en faisant intervenir une hauteur modifiée pour  $U'$ ) et nous obtenons alors

$$a_r h(Y'_r) \leq \Lambda_d^u a_r h_r + a_r d_r (h(U') + \sqrt{N_r}).$$

Or nous avons clairement  $h(U') \leq h(U) + \Lambda_d^u \log m(N_r + 1) \max(d_r/2, 1)$  donc  $h(U') + \sqrt{N_r} \leq h(U) + \Lambda_d^u \log \Lambda_d$ . Finalement

$$a_r (h(Y'_r) + \eta) \leq d_r (m-1)\Lambda_d^u (a_r (h_r + \eta) + (M' + 1)\Lambda'_h + 4|a_Y|u \log \Lambda_d)$$

ce qui conclut la preuve puisque  $a_r (h_r + \eta) + 4|a_Y|u \log \Lambda_d \leq 4a_1 \Lambda_h / (M' + 5)$  de même que  $\Lambda'_h \leq a_1 \Lambda_h / (M' + 5)$ .  $\square$

Maintenant que l'énoncé se présente sous une forme plus simple, nous pouvons dresser la liste d'un certain nombre de situations « dégénérées » dans lesquelles la stratégie générale que nous avons décrite précédemment, notamment les manipulations d'indices de sections, est mise en échec. En revanche, comme nous allons le voir immédiatement, la construction d'un polynôme  $U$  satisfaisant le lemme 2.2.7 devient évidente dans ce cas (cf. [31, Corollaire 3.2]).

Nous allons d'abord établir que, pour tous polynômes  $P, Q$  homogènes de degrés respectifs  $p$  et  $q$  en  $m + 1$  indéterminées, la hauteur du résultant est majorée par

$$qh(P) + ph(Q) + 2pq \log m + \log((q + p)!).$$

Posons  $P = \sum_{k=0}^p P_k(V)T^k$  et  $Q = \sum_{\ell=0}^q Q_\ell(V)T^\ell$  de sorte que le résultant (en  $T$ ) est le déterminant de la matrice de Sylvester

$$\begin{pmatrix} P_p & 0 & \cdots & 0 & Q_q & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & Q_q \\ P_0 & & & P_p & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots & Q_0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_0 & 0 & 0 & Q_0 \end{pmatrix}$$

de format  $(q + p) \times (q + p)$ . Autrement dit celui-ci est une somme d'au plus  $(q + p)!$  produits de la forme  $\pm P_{k_1} \dots P_{k_q} Q_{\ell_1} \dots Q_{\ell_p}$ , la hauteur d'un tel produit est majorée par

$$qh(P) + ph(Q) + q \log \max_k t(P_k) + p \log \max_\ell t(Q_\ell)$$

et  $t(P_k) \leq \binom{p - k + m - 1}{m - 1}$  et  $t(Q_\ell) \leq \binom{q - \ell + m - 1}{m - 1}$  sont majorés respectivement par  $m^p$  et  $m^q$  (où  $t$  désigne le nombre de coefficients non nuls d'un polynôme, voir section 1.4). En outre si  $Q$  est la dérivée en  $T$  de  $P$  à l'ordre  $b$  alors  $h(Q) \leq h(P) + b \log p$  et la hauteur du résultant peut ainsi être majorée par

$$(2p - b)(h(P) + \log(2p - b)) + 2p(p - b) \log m + pb \log p.$$

**Lemme 2.2.8.** *Pour prouver le lemme 2.2.7 nous pouvons supposer que pour tout indice  $1 \leq i \leq m$  :*

1. *Le discriminant de  $A_m^{(i)}(V_0^{(i)}, \dots, V_{m-1}^{(i)}, \cdot)$  ne s'annule pas en  $x_i$  ;*
2. *Si  $0 \leq j \leq N_i$  est tel que  $W_j^{(i)} \neq 0$  dans  $\Gamma(Y_i, \mathcal{L}_i)$ , alors en notant  $b_{i,j}$  la puissance de l'unique facteur irréductible dans  $B_j^{(i)}(T_0, \dots, T_m)$ ,*

$$\frac{(W_j^{(i)})^{b_{i,j}}}{b_{i,j}!} \frac{\partial^{b_{i,j}} B_j^{(i)}}{\partial T_m^{b_{i,j}}} \left( 1, \frac{V_1^{(i)}}{V_0^{(i)}}, \dots, \frac{V_{m-1}^{(i)}}{V_0^{(i)}}, \frac{W_j^{(i)}}{V_0^{(i)}} \right) (x_i) \neq 0.$$

*Démonstration.* Notons  $U_1(V)$  le discriminant en  $T$  de  $A_m^{(i)}(V_0^{(i)}, \dots, V_{m-1}^{(i)}, T)$  et  $U_2(V)$  (respectivement  $U_3(V)$ ) le résultant en  $T$  de  $B_j^{(i)}(V_0^{(i)}, \dots, V_{m-1}^{(i)}, T)$  et de sa dérivée en  $T$  d'ordre  $b_{i,j}$  (respectivement le résultant de  $B_j^{(i)}$  et  $T$ , autrement dit son évaluation en  $T = 0$ ). Il s'agit de polynômes homogènes en les coordonnées  $V_j^{(i)}$ ,  $0 \leq j \leq m-1$  de degrés au plus  $d_i^2$  et vérifiant

$$h(U_1, U_2, U_3) \leq 4d_i \Lambda'_h.$$

En effet, nous appliquons les estimations ci-dessus pour obtenir

$$h(U_1, U_2) \leq 2d_i(h(A^{(i)}, B^{(i)}) + d_i \log(2md_i)) \leq 4d_i \Lambda'_h$$

tandis que nous avons clairement  $h(U_3) \leq h(B^{(i)}) \leq \Lambda'_h$ .

Constatons maintenant qu'aucun de ces trois polynômes ne s'annule globalement sur  $Y_i$  grâce aux considérations sur les plongements adaptés. Si tel était le cas, par indépendance algébrique des variables, les polynômes mis en jeu dans le résultant auraient un facteur irréductible commun. Comme les  $A_j^{(i)}$  et les  $B_j^{(i)}$  n'ont qu'un facteur irréductible, ceci contredirait le statut d'élément primitif de  $V_m^{(i)}/V_0^{(i)}$  (pour  $U_1$ ) ou la définition de  $b_{i,j}$  (pour  $U_2$ ) ou entraînerait enfin  $B_j^{(i)} = T_m^{d_i}$  et donc  $W_j^{(i)} = 0$  (pour  $U_3$ ).

En conclusion, dire que l'une des deux conditions de l'énoncé n'est pas vérifiée revient à dire que l'un des trois polynômes  $U_1(V)$ ,  $U_2(V)$  ou  $U_3(V)$  s'annule en  $x_i$  et le polynôme en question répond alors aux exigences du lemme 2.2.7.  $\square$

Nous nous plaçons dorénavant sous ces hypothèses et, pour un choix quelconque de racines  $b_{i,j}$ -èmes, nous notons  $e_i \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$  le produit

$$\prod_j \left[ \frac{(W_j^{(i)})^{b_{i,j}}}{b_{i,j}!} \frac{\partial^{b_{i,j}} B_j^{(i)}}{\partial T_m^{b_{i,j}}} \left( 1, \frac{V_1^{(i)}}{V_0^{(i)}}, \dots, \frac{V_{m-1}^{(i)}}{V_0^{(i)}}, \frac{W_j^{(i)}}{V_0^{(i)}} \right) (x_i) \right]^{-2/b_{i,j}}$$

où  $j$  parcourt les indices vérifiant  $W_j^{(i)} \neq 0$ . Nous considérons enfin un corps de nombres  $K_Y$  contenant  $e_i$  ainsi que les familles  $W^{(i)}(x_i)$ ,  $A_j^{(i)}$  et  $B_j^{(i)}$ . Nous avons alors un contrôle sur les dérivées des fonctions  $W_j^{(i)}/V_0^{(i)}$  au point  $x_i$  en chaque place  $v$  de  $K_Y$  (cf. [31, Lemme 5.2]).

**Proposition 2.2.9.** *Soient  $0 \leq j \leq N_i$  un entier,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m-1})$  un  $(m-1)$ -uplet d'entiers et  $v$  une place de  $K_Y$ . Alors*

$$|\partial^{(i)}(\beta)(W_j^{(i)}/V_0^{(i)})(x_i)|_v \leq |W_j^{(i)}(x_i)|_v (|e_i|_v C_{i,v})^{|\beta|}$$

avec  $C_{i,v} = [(d_i(N_i + 1))^{4d_i \epsilon_v} |A^{(i)}, B^{(i)}|_v |W^{(i)}(x_i)|_v^{d_i}]^{2(N_i + 1)}$  et  $\epsilon_v$  défini dans la section 1.4.

*Démonstration.* Nous pouvons supposer  $W_j^{(i)}(x_i) \neq 0$  puisque sinon, d'après les hypothèses du lemme précédent 2.2.8,  $W_j^{(i)}$  s'annule globalement sur  $Y_i$  et

la dérivée est nulle. Nous appliquons alors [31, Lemme 5.2] en remplaçant la quantité  $c_i^2$  de cet énoncé par  $e_i^{-1}$  et en utilisant la majoration

$$2f_2(m-1, d_i) \leq ((N_i+1)d_i)^{8(N_i+1)d_i}$$

comme indiqué page 489 du même article.  $\square$

En utilisant la formule de Leibniz, il est facile d'étendre ce résultat aux fonctions de la forme  $W^\mu/\Delta_Y(V)^\delta$  où  $W^\mu$  est un monôme de multidegré  $\delta a_Y$ .

**Corollaire 2.2.10.** *Pour tout monôme  $W^\mu \in W_Y^{\otimes \delta}$  et tout opérateur différentiel  $D = \prod_i \partial^{(i)}(\beta^{(i)})$*

$$|D(W^\mu/\Delta_Y(V)^\delta)(x_Y)|_v \leq |W^\mu(x_Y)|_v \prod_{i=1}^m 2^{(m-1)\delta a_i \epsilon_v} (|e_i|_v 2^{\epsilon_v} C_{i,v})^{|\beta^{(i)}|}.$$

*Démonstration.* Fixons pour tout  $1 \leq i \leq m$  et tout  $1 \leq p \leq \delta a_i$  une fonction  $q_{i,p}$  de la forme  $W_j^{(i)}/V_0^{(i)}$  de sorte que

$$W^\mu/\Delta_Y(V)^\delta = \prod_{i=1}^m \prod_{p=1}^{\delta a_i} q_{i,p}.$$

Nous pouvons alors écrire d'après la fomule de Leibniz

$$D(W^\mu/\Delta_Y(V)^\delta) = \prod_{i=1}^m \sum_{(\beta'_p)_p} \prod_{p=1}^{\delta a_i} \partial^{(i)}(\beta'_p)(q_{i,p})$$

où  $(\beta'_p)_p$  parcourt l'ensemble des familles de  $(m-1)$ -uplets d'entiers positifs satisfaisant la condition  $\sum_{p=1}^{\delta a_i} \beta'_p = \beta^{(i)}$ . Nous en déduisons que la valeur absolue de cette dérivée en la place  $v$  est inférieure à

$$\prod_{i=1}^m \left( \prod_{j=1}^{m-1} \binom{\beta_j^{(i)} + \delta a_i - 1}{\delta a_i - 1} \right)^{\epsilon_v} \left( \prod_{p=1}^{\delta a_i} |q_{i,p}(x_Y)|_v \right) (|e_i|_v C_{i,v})^{|\beta^{(i)}|}$$

puis majorons  $\binom{\beta_j^{(i)} + \delta a_i - 1}{\delta a_i - 1}$  par  $2^{\beta_j^{(i)} + \delta a_i}$ .  $\square$

### 2.2.6 Minoration de l'indice de la section auxiliaire

D'après la proposition 2.2.4, nous disposons donc d'une section  $s \in E_0 \setminus \{0\}$  de hauteur contrôlée. Définissons

$$F_\zeta(\xi) = s \otimes \zeta^{\otimes \delta} \in E_1, \quad \zeta \in Z_Y$$

les polynômes homogènes de degré  $\gamma\delta$  en les sections  $\xi \in \Xi_Y$  qui la représentent dans la base  $\mathfrak{b}$  fixée. Notons également  $\sigma$  l'indice de  $s$  au point  $x_Y$  et

$D = \prod_i \partial^{(i)}(\beta^{(i)})$  un opérateur différentiel d'indice  $\sigma$  associé à  $s$  (voir définition 2.2.1). Ici tous les indices seront exprimés relativement aux poids  $\gamma\delta a_Y$ ). La proposition suivante qui joue le rôle de [31, Proposition 5.3] permet de minorer  $\sigma$  en se basant sur les estimations du paragraphe précédent ainsi que sur l'inégalité de Vojta.

**Proposition 2.2.11.** *L'indice  $\sigma$  de  $s$  en  $x_Y$  est minoré par*

$$\sigma > (4\gamma d(N+1))^{-1}.$$

En outre, si  $\zeta \in Z_Y$  est tel que  $\zeta(x_Y) \neq 0$  alors  $F(W) = F_\zeta(\xi)$  est d'indice  $\sigma$  en  $x_Y$ .

*Démonstration.* Nous vérifions grâce à la formule de Leibniz que si  $\zeta(x_Y) \neq 0$  alors  $F_\zeta(\xi)$  est d'indice  $\sigma$  en  $x_Y$  et

$$D\left(\frac{s}{\Delta_Y(V)^{(1-\tau)\gamma\delta}}\right) \otimes \left(\frac{\zeta}{\Delta_Y(V)^{\tau\gamma}}\right)^{\otimes \delta}(x_Y) = D\left(\frac{F_\zeta(\xi)}{\Delta_Y(V)^{\gamma\delta}}\right)(x_Y) \neq 0.$$

Il vient alors par la formule du produit et par homogénéité

$$\delta h(Z_Y(x_Y)) = h[D(F_\zeta(\xi/\Delta_Y))_\zeta(x_Y)].$$

Supposons donc que  $K_Y$  contient les coefficients des polynômes  $F_\zeta$  dans la base  $\mathfrak{b}$  de  $E_1$  et considérons une place  $v$  de  $K_Y$ . Pour tout  $\zeta$  l'inégalité triangulaire entraîne

$$|D(F_\zeta(\xi/\Delta_Y))(x_Y)|_v \leq |F_\zeta|_v (\dim E_1)^{\epsilon_v} \max_{\xi^\nu \in \mathfrak{b}} |D(\xi^\nu/\Delta_Y(V)^{\gamma\delta})(x_Y)|_v.$$

En appliquant ensuite le corollaire 2.2.10 au monôme  $W^\mu = \xi^\nu$  nous obtenons pour tout  $\xi^\nu$

$$|D(\xi^\nu/\Delta_Y(V)^{\gamma\delta})(x_Y)|_v \leq |\xi^\nu(x_Y)|_v \prod_{i=1}^m 2^{(m-1)\gamma\delta a_i \epsilon_v} (|e_i|_v 2^{\epsilon_v} C_{i,v})^{|\beta^{(i)}|}$$

où  $C_{i,v}$  est défini à la proposition 2.2.9. Par conséquent, en sommant sur toutes les places  $v$  de  $K_Y$  puis en utilisant à nouveau la formule du produit pour les  $e_i$  ainsi que  $|\xi^\nu(x_Y)|_v \leq |\Xi_Y(x_Y)|_v^{\gamma\delta}$ , nous avons la majoration

$$\begin{aligned} \delta h(Z_Y(x_Y)) &\leq h((F_\zeta)_\zeta) + \log \dim E_1 + \gamma \delta h(\Xi_Y(x_Y)) \\ &+ \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \left( \prod_{i=1}^m 2^{((m-1)\gamma\delta a_i + |\beta^{(i)}|)\epsilon_v} C_{i,v}^{|\beta^{(i)}|} \right) \\ &\leq h((F_\zeta)_\zeta) + \log \dim E_1 + \gamma \delta h(\Xi_Y(x_Y)) \\ &+ \sum_{i=1}^m 2^{|\beta^{(i)}|} (N_i + 1) d_i h_{\mathcal{L}_i}(x_i) + ((m-1)\gamma\delta a_i + |\beta^{(i)}|) \log 2 \\ &+ \sum_{i=1}^m 2^{|\beta^{(i)}|} (N_i + 1) (h_i + 3d_i m \log d_i (N_i + 1)). \end{aligned}$$

En effet dans  $C_{i,v}$  les termes  $|W^{(i)}(x_i)|_v$  et  $|A^{(i)}, B^{(i)}|_v$  donnent lieu à  $h_{\mathcal{L}_i}(x_i)$  et  $h(A^{(i)}, B^{(i)})$  respectivement et pour finir nous utilisons le lemme 2.2.1 ainsi que  $4d_i + d_i m \leq 3d_i m$ .

Par l'absurde, supposons que  $\sigma \leq (4\gamma d(N+1))^{-1}$ . Alors  $|\beta^{(i)}| \leq \sigma \gamma \delta a_i \leq \delta a_i (4d(N+1))^{-1}$  et nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \delta h(Z_Y(x_Y)) &\leq h((F_\zeta)_\zeta) + \log \dim E_1 + \gamma \delta h(\Xi_Y(x_Y)) + (\delta/2)h(W_Y(x_Y)) \\ &\quad + \delta \sum_{i=1}^m a_i (h_i + (3/2)m \log 2d_i(N_i+1) + (m-1)\gamma \log 2). \end{aligned}$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Vojta sous la forme

$$h(W_Y(x_Y))/2 \leq h(Z_Y(x_Y)) - \gamma h(\Xi_Y(x_Y)) - h(W_Y(x_Y))/2$$

ainsi que la majoration de  $h((F_\zeta)_\zeta) = h(s)$  fournie par la proposition 2.2.4. Comme la seconde ligne de l'équation précédente est majorée strictement par  $(\gamma+1)\delta\Lambda'_h$  et  $M\varepsilon^{-1} \geq 1$  nous obtenons pour  $\delta$  assez grand

$$h(W_Y(x_Y))/2 < 2M\varepsilon^{-1}(1+\tau)\gamma\Lambda'_h = 4M'\gamma\Lambda'_h \leq 4\gamma a_1 \Lambda_h.$$

Ceci contredit donc le choix de  $c'_3$  puisque  $m \geq 2$  et

$$4m\gamma a_1 \Lambda_h = ma_1 c'_3 \leq \sum_{i=1} a_i h_{\mathcal{L}_i}(x_i) = h(W_Y(x_Y)) < 8\gamma a_1 \Lambda_h.$$

□

## 2.2.7 Conclusion

Pour prouver le lemme 2.2.7 sous les hypothèses du lemme 2.2.8, nous appliquons le lemme 2.2.5 à la section polynomiale  $F(W) = F_\zeta(\xi) \in \text{Vect}(W_Y^{\otimes \gamma \delta})$  fournie par les propositions 2.2.4 et 2.2.11 avec  $\delta$  suffisamment grand (et  $\delta$  remplacé par  $\gamma\delta$  dans le lemme 2.2.5). Nous obtenons une section polynomiale  $G(V)$  multihomogène de multidegré  $\delta' = 2\gamma\delta(d_1 \dots d_m)a_Y$  en les coordonnées  $V_j^{(i)}$ ,  $0 \leq j \leq m-1$  et dont l'indice en  $\rho_Y(x_Y)$  (relativement aux poids  $\gamma\delta a_Y$ ) est minoré par

$$\sigma > (4\gamma d(N+1))^{-1} \geq 2(d_1 \dots d_m)m\Lambda_d^{-1}.$$

Nous en déduisons que, pour  $\delta$  suffisamment grand, le nouvel indice (si nous passons aux poids  $\delta'$ ) est minoré par  $m\Lambda_d^{-1}$  et nous avons

$$\forall i < m, \quad \delta'_i/\delta'_{i+1} = a_i/a_{i+1} \geq c'_2 = \Lambda_d^u.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} h(G) &\leq (d_1 \dots d_m)(h(F) + 2\gamma\delta\Lambda'_h) + o(\delta) \quad \text{avec} \\ h(F) &\leq M\varepsilon^{-1}(1+\tau)\gamma\delta\Lambda'_h + o(\delta). \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi appliquer le théorème du produit 2.2.6 avec  $\Lambda'_d = \Lambda_d$  et le poids  $\delta'$  défini ci-dessus et construire un couple  $(r, U)$  tel que  $\deg(U) \leq \Lambda_d^u$  et

$$a_r h(U) \leq (m-1)\Lambda_d^u \left[ \frac{h(G)}{2\gamma\delta d_1 \dots d_m} + |a_Y|(2u+1) \log \Lambda_d \right] + o(1).$$

Or nous avons

$$\frac{h(G)}{2\gamma\delta d_1 \dots d_m} \leq \frac{1}{2\gamma\delta} (M\varepsilon^{-1}(1+\tau)\gamma\delta\Lambda'_h + 2\gamma\delta\Lambda'_h) + o(1) \leq (M'+1)\Lambda'_h + o(1).$$

Par conséquent, le lemme 2.2.7 et donc la proposition 2.1.1 sont totalement démontrés.

## Chapitre 3

# Décompte dans les tores

Dans ce chapitre nous démontrons notre théorème principal 1.2.4 concernant le problème de Mordell-Lang plus Bogomolov dans les tores. Rappelons que la méthode procède selon quatre grandes étapes que nous avons réparties de la façon suivante :

1. Inégalité de Vojta (partie 3.1) ;
2. Inégalité de Mumford (paragraphe 3.2.1) ;
3. Problème de Bogomolov (paragraphe 3.2.2) ;
4. Problème de Lang (partie 3.3).

Pour l'inégalité de Vojta nous appliquons bien sûr le théorème principal 2.1.2 du chapitre précédent. Hormis l'emploi du théorème 1.2.3 établi dans [2] pour le problème de Bogomolov, les parties 3.2 et 3.3 sont traitées comme dans [30]. Le chapitre s'achève avec le théorème 3.3.1 qui est identique à 1.2.4.

Nous considérerons ici le tore  $A = \mathbb{G}_m^g \subset (\mathbb{P}^1)^g$  de dimension  $g$ , défini comme l'ouvert maximal où les  $2g$  coordonnées notées  $T_{e,f}$ ,  $e \in \{0, 1\}$ ,  $1 \leq f \leq g$  sont inversibles. Il est muni d'une structure naturelle de schéma en groupes donnée par la multiplication coordonnée par coordonnée. En considérant les produits

$$W_j = \bigotimes_{f=1}^g (T_{1-e_f, f} \otimes T_{e'_f, f}), \quad j = (e_1, e'_1, \dots, e_g, e'_g) \in \{0, 1\}^{2g}$$

nous définissons un morphisme de Segre  $(\mathbb{P}^1)^g \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  avec  $N = 4^g - 1$  et donc un faisceau inversible très ample  $\mathcal{L}$  sur  $(\mathbb{P}^1)^g$ . En particulier, la frontière  $\partial A = (\mathbb{P}^1)^g \setminus A$  du tore  $A$  est formée des points de l'image de  $(\mathbb{P}^1)^g$  vérifiant l'équation linéaire  $W_{(0, \dots, 0)} = 0$ .

Notons également qu'il existe une norme  $|\cdot|$  sur l'espace vectoriel  $A(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  qui induit la hauteur  $h_{\mathcal{L}}(x) = h((W_j)_j(x))$  sur  $A(\overline{\mathbb{Q}})$ . Pour tous  $x, y \in A(\overline{\mathbb{Q}})$  qui ne sont pas de torsion nous définissons l'écart angulaire

$$\widehat{(x, y)} = |(x \otimes |x|^{-1}) - (y \otimes |y|^{-1})|$$

(voir [30]).

### 3.1 Application de l'inégalité de Vojta

Soient  $m_0 \geq 2$  un entier et  $X \hookrightarrow A$  un sous-schéma fermé intègre de dimension  $m_0 - 1$  et de degré  $d_0$  ( $X$  étant assimilé à son adhérence dans  $(\mathbb{P}^1)^g$  et le degré défini relativement à  $\mathcal{L}$ ). Nous lui associons un sous-schéma ouvert exceptionnel (voir [5, Théorème 3.3.9])

$$X^0 = X \setminus \bigcup_{\substack{\dim(B) > 0 \\ xB \subset X}} xB$$

obtenu en retranchant à  $X$  la réunion de tous les translatés  $xB$  de sous-tors (i.e. de sous-schémas en groupes irréductibles) de dimension non nulle et contenus dans  $X$  et supposons  $X^0$  non vide (en particulier  $m_0 - 1 < g$ )

Le propos de cette partie est de déduire du théorème 2.1.2 un résultat de décompte sur les points de  $X^0(\mathbb{Q})$  soumis à certaines contraintes géométriques. Nous posons  $u_0 = m_0(m_0 - 1)$  et affectons aux paramètres les valeurs suivantes

$$M = 4^{g m_0}, \tau = 1, \eta = 1, \omega = 0 \text{ et } \theta = 4u_0.$$

Rappelons également que les seuils sont définis par  $c_1 = \Lambda^{\psi_0/3}$ ,  $c_2 = \Lambda^{\psi_0}$  et  $c_3 = (M\tau)^{m_0-1}(h(X) + \eta)\Lambda^{2\psi_0}$  avec  $\Lambda = 4^g(2\theta u_0)^{u_0}d_0 \leq 16^{g^3}d_0$  et

$$\psi_0 = \prod_{m=2}^{m_0} ((\omega + 2)m + 1)(m(m - 1) + 1).$$

La proposition suivante améliore [30, Théorème 3.1] du point de vue des applications quantitatives qui s'ensuivent.

**Proposition 3.1.1. (*inégalité de Vojta, version torique*)** Soient des points rationnels  $x_1, \dots, x_{n_0} \in X^0(\mathbb{Q})$  distincts vérifiant pour tout  $i < n_0$

$$\widehat{(x_i, x_{i+1})} \leq (2u_0 c_1)^{-1}, |x_{i+1}| \geq c_2 |x_i| \text{ et } |x_1| \geq 2c_3.$$

Alors  $n_0 \leq u_0/2 = m_0(m_0 - 1)/2$ .

#### 3.1.1 Choix des coefficients et premières estimations

Pour prouver la proposition 3.1.1 nous supposons par l'absurde qu'une telle famille de cardinal  $n_0 = 1 + m_0(m_0 - 1)/2$  existe. Définissons alors  $a_{n_0} = 1$  puis  $a_i/a_{i+1}$  l'entier le plus proche de  $|x_{i+1}|/|x_i|$  pour tout  $i < n_0$  et vérifions que les hypothèses du théorème 2.1.2 sont satisfaites par les couples  $(x_i, a_i)$ . Nous avons bien en premier lieu  $a_i/a_{i+1} \geq c_2$  car  $c_2$  est entier et

$$a_{i+1}|x_{i+1}| \geq a_i|x_i| - a_{i+1}|x_i|/2 \geq (1 - (2c_2)^{-1})a_i|x_i|.$$

Ceci implique  $a_j|x_j| \geq (1 - (2c_2)^{-1})^{j-i}a_i|x_i|$  pour tout couple  $(i, j)$  tel que  $j > i$  et en particulier

$$a_j|x_j| \geq (1 - (2c_2)^{-1})^{n_0-1}a_1|x_1| \geq a_1c_3$$

en utilisant par exemple  $(1-p)^q \geq 1-pq$  pour  $0 \leq p \leq 1$  un réel et  $q \geq 0$  un entier naturel.

En outre, les normes des quotients successifs  $x_i^{a_i} x_{i+1}^{-a_{i+1}}$  exprimés dans le groupe  $A(\overline{\mathbb{Q}})$  vérifient

$$\begin{aligned} |x_i^{a_i} x_{i+1}^{-a_{i+1}}| &= |x_i \otimes a_i - x_{i+1} \otimes a_{i+1}| = a_{i+1} |x_i \otimes (a_i/a_{i+1}) - x_{i+1} \otimes 1| \\ &\leq a_{i+1} \left( \left| x_i \otimes \left( \frac{a_i}{a_{i+1}} - \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} \right) \right| + \left| x_i \otimes \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} - x_{i+1} \otimes 1 \right| \right) \\ &\leq a_{i+1} |x_i|/2 + a_{i+1} |x_{i+1}| \widehat{(x_i, x_{i+1})}. \end{aligned}$$

En utilisant la majoration de l'écart angulaire ainsi que  $|x_i| \leq |x_{i+1}|/c_2 \leq |x_{i+1}|/(u_0 c_1)$  nous en déduisons

$$|x_i^{a_i} x_{i+1}^{-a_{i+1}}| \leq (u_0 c_1)^{-1} a_{i+1} |x_{i+1}|.$$

Par extension nous mettons en évidence une inégalité de Vojta sous forme brute

$$c_1 \sum_{i=1}^{m-1} |x_{\phi(i)}^{a_{\phi(i)}} x_{\phi(i+1)}^{-a_{\phi(i+1)}}| \leq \sum_{i=1}^m a_{\phi(i)} |x_{\phi(i)}|$$

pour tout entier  $2 \leq m \leq m_0$  et toute application  $\phi$  strictement croissante de  $\{1, \dots, m\}$  dans  $\{1, \dots, n_0\}$ . En effet, par inégalité triangulaire nous avons d'abord

$$|x_{\phi(i)}^{a_{\phi(i)}} x_{\phi(i+1)}^{-a_{\phi(i+1)}}| \leq \sum_{j=\phi(i)}^{\phi(i+1)-1} |x_j^{a_j} x_{j+1}^{-a_{j+1}}| \leq (u_0 c_1)^{-1} \sum_{j=\phi(i)}^{\phi(i+1)-1} a_{j+1} |x_{j+1}|$$

pour tout  $i < m$ . Nous pouvons majorer  $\phi(i+1) - \phi(i)$  par  $n_0 - 1$  et  $a_{j+1} |x_{j+1}|$  par  $(1 - (2c_2)^{-1})^{-n_0} a_{\phi(i+1)} |x_{\phi(i+1)}|$ . En développant  $(1 + \frac{p}{1-p})^{n_0}$  par la formule du binôme avec  $p = (2c_2)^{-1} \leq 1/2$  cela implique

$$\begin{aligned} |x_{\phi(i)}^{a_{\phi(i)}} x_{\phi(i+1)}^{-a_{\phi(i+1)}}| &\leq (u_0 c_1)^{-1} (n_0 - 1) \left( 1 + \frac{n_0 2^{n_0}}{c_2} \right) a_{\phi(i+1)} |x_{\phi(i+1)}| \\ &\leq c_1^{-1} a_{\phi(i+1)} |x_{\phi(i+1)}| \end{aligned}$$

(car  $c_2 \geq u_0 2^{u_0}$  par exemple) et l'inégalité annoncée s'obtient alors par sommation.

### 3.1.2 Choix d'une famille de monômes

Nous cherchons maintenant à récrire cette inégalité brute afin de la relier à un certain système de sections  $(\gamma, \Xi_Y, Z_Y)$  (voir définition 2.1.1) pour une manche  $Y = (\phi, Y) \in \Pi_m$  donnée. Comme le choix de  $\phi$  n'a plus d'incidence dans la suite, nous traitons uniquement le cas où  $\phi$  est l'identité, les autres cas pouvant s'en déduire par simple changement de numérotation. Associons à

chaque facteur  $Y_i$  le sous-schéma ouvert exceptionnel  $Y_i^0 \subset Y_i$  tel qu'il a été défini pour  $X$  et formons le produit

$$U_Y = Y_1^0 \times \dots \times Y_m^0 \subset Y \cap A^m.$$

Par construction  $x_Y \in (Y \cap (X^0)^m)(\overline{\mathbb{Q}}) \subset U_Y(\overline{\mathbb{Q}})$ . Considérons ensuite le morphisme  $\pi_Y : U_Y \rightarrow A^{m-1}$  dont l'action sur les points rationnels est définie par la relation

$$\pi_Y(y_1, \dots, y_m) = (y_1^{a_1} y_2^{-a_2}, \dots, y_{m-1}^{a_{m-1}} y_m^{-a_m}).$$

Nous notons  $\overline{U_Y}$  l'adhérence du graphe de  $\pi_Y$  dans  $(\mathbb{P}^1)^{gm} \times (\mathbb{P}^1)^{g(m-1)}$  (munie de la structure de sous-schéma fermé intègre induite) et  $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_{m-1}$  les projections naturelles de  $\overline{U_Y}$  dans  $(\mathbb{P}^1)^g$ . Il est important de remarquer que le sous-schéma ouvert  $U_Y \subset Y$  s'identifie à un sous-schéma ouvert noté également  $U_Y \subset \overline{U_Y}$  à travers le morphisme  $(\text{id}, \pi_Y)$ . Nous disposons de deux faisceaux inversibles sur  $\overline{U_Y}$  notés

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Y &= p_1^* \mathcal{L}^{\otimes a_1} \otimes \dots \otimes p_m^* \mathcal{L}^{\otimes a_m} \text{ et} \\ \mathcal{M}_Y &= q_1^* \mathcal{L} \otimes \dots \otimes q_{m-1}^* \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Précisons que le premier faisceau coïncide bien avec le faisceau  $\mathcal{N}_Y$  déjà défini sur l'ouvert  $U_Y \subset Y$  et que l'inégalité brute mise en évidence plus haut peut aussi s'écrire

$$c_1 h_{\mathcal{M}_Y}(x_Y) \leq h_{\mathcal{N}_Y}(x_Y)$$

avec l'identification  $x_Y = (x_Y, \pi_Y(x_Y))$ .

Nous pouvons maintenant déduire du faisceau  $\mathcal{M}_Y$  une famille adéquate de monômes  $\Xi_Y$ . Observons d'abord que pour tout  $1 \leq i \leq m-1$  nous avons

$$(q_i^* T_{e,f})(x_Y) = (p_i^* T_{e,f}^{\otimes a_i} \otimes p_{i+1}^* T_{1-e,f}^{\otimes a_{i+1}})(x_Y)$$

pour une certaine identification (indépendante de  $e$  et  $f$ ) des deux droites sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  contenant ces éléments. Il s'agit là d'une simple retraduction de la définition de la loi de groupe sur  $A(\overline{\mathbb{Q}})$  (multiplication coordonnée par coordonnée). Il s'ensuit une identification analogue

$$\left( \bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^* \bigotimes_{f=1}^g T_{e_{i,f},f} \right) (x_Y) = \left( \bigotimes_{i=1}^m p_i^* W_{j_i}^{\otimes a_i} \right) (x_Y)$$

où les familles  $(e_{i,f})$  (étant convenu que  $e_{0,f} = e_{m,f} = 0$ ) et  $(j_i)$  sont liées par

$$j_i = (e_{i-1,1}, e_{i,1}, e_{i-1,2}, e_{i,2}, \dots, e_{i-1,g}, e_{i,g}).$$

Les sections qui apparaissent ici à droite décrivent ainsi un sous-ensemble  $\Xi_Y \subset W_Y$  des monômes de multidegré  $a_Y$  en les coordonnées  $W_j^{(i)} = p_i^* W_j$  lorsque  $(e_{i,f})$  parcourt  $\{0, 1\}^{g(m-1)}$ . Enfin par construction

$$c_1 h(\Xi_Y(x_Y)) + h(W_Y(x_Y)) \leq (3/2) h(W_Y(x_Y)).$$

### 3.1.3 Questions d'équilibre

Au vu de ce qui précède, considérons un entier  $\gamma \geq 2$  et posons

$$Z_Y(\gamma) = \{\zeta^{\otimes 2} \otimes W_{(0,\dots,0)}^{\otimes(\gamma-2)a_Y} \mid \zeta \in W_Y\} \subset \Gamma(Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes \gamma}).$$

Nous formons ainsi un système  $(\gamma, \Xi_Y, Z_Y)$  de paramètres  $M = 4^{g m_0}$  et  $\tau = \eta = 1$  (voir définition 2.1.1) et il ne nous reste plus qu'à établir qu'il est équilibré relativement à  $(\omega, \theta) = (0, 4u)$  avec  $u = m(m-1)$  pour un bon choix de  $\gamma$  (voir définition 2.1.2). Nous introduisons pour cela le faisceau  $\mathcal{G} = \mathcal{N}_Y^{\otimes 2}$  et l'injection  $J_{\mathcal{G}} = W_{(0,\dots,0)}^{(\gamma-2)a_Y}$  et nous leur associons des espaces

$$E'_0(\delta) = \bigcap_{\zeta \in \Gamma(Y, \mathcal{G})} (\cdot \otimes \zeta^{\otimes \delta})^{-1}(\text{Vect}(\Xi_Y^{\otimes \gamma \delta}))$$

comme décrit dans le paragraphe 2.1.3.

Dans un premier temps, nous réalisons l'espace  $E'_0$  comme un espace de sections globales sur la compactification  $\overline{U_Y}$  de  $U_Y$ . Notons que les identifications précédentes, valables en tout point  $y \in U_Y(\mathbb{Q})$ , découlent d'un isomorphisme naturel entre les faisceaux inversibles  $\mathcal{M}_Y$  et  $\mathcal{N}_Y^{\otimes 2}$  sur l'ouvert  $U_Y$  qui se prolonge en une injection  $J_{\mathcal{M}_Y} : \mathcal{M}_Y \hookrightarrow \mathcal{N}_Y^{\otimes 2}$  sur  $\overline{U_Y}$ . En effet, cette injection peut également se voir comme la section non nulle de  $\Gamma(\overline{U_Y}, \mathcal{N}_Y^{\otimes 2} \otimes \mathcal{M}_Y^{\otimes -1})$  obtenue en recollant toutes les sections

$$J_{\mathcal{M}_Y} = \left( \bigotimes_{i=1}^m p_i^* W_{f_i}^{\otimes a_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^{m-1} q_i^* \bigotimes_{f=1}^g T_{e_i, f, f}^{\otimes -1} \right)^{\otimes 2}.$$

Considérons maintenant le sous-espace  $E_1(2\delta) \subset \Gamma(U_Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes 2\gamma\delta})$  (pour  $\delta$  entier fixé) constitué des polynômes homogènes de degré  $2\gamma\delta$  en les sections  $\xi \in \Xi_Y$ . Il est clair que tout élément de  $E_1(2\delta)$  est image par  $J_{\mathcal{M}_Y}^{\otimes \gamma\delta}$  d'une section de  $\mathcal{M}_Y^{\otimes \gamma\delta}$  sur  $U_Y$  et que cette dernière peut se prolonger à  $\overline{U_Y}$  de sorte que

$$E_1(2\delta) \subset \Gamma(\overline{U_Y}, \mathcal{M}_Y^{\otimes \gamma\delta}) \otimes J_{\mathcal{M}_Y}^{\otimes \gamma\delta} \subset \Gamma(U_Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes 2\gamma\delta}).$$

Inversement, la première inclusion ci-dessus est une égalité si  $\delta$  est suffisamment grand puisque nous pouvons ramener  $E_1(2\delta)$  à l'image du morphisme

$$\Gamma((\mathbb{P}^1)^{g(2m-1)}, \mathcal{M}_Y^{\otimes \gamma\delta}) \longrightarrow \Gamma(\overline{U_Y}, \mathcal{M}_Y^{\otimes \gamma\delta})$$

donc au noyau d'un morphisme vers  $H^1((\mathbb{P}^1)^{g(2m-1)}, \mathcal{I} \otimes \mathcal{M}_Y^{\otimes \gamma\delta}) = 0$ , où  $\mathcal{I}$  désigne le faisceau d'idéaux associé à  $\overline{U_Y}$  dans  $(\mathbb{P}^1)^{g(2m-1)}$ . Nous en déduisons aisément l'égalité

$$E'_0(2\delta) = \Gamma(\overline{U_Y}, \mathcal{M}_Y^{\otimes \gamma\delta} \otimes \mathcal{N}_Y^{\otimes -4\delta}) \otimes J_{\mathcal{M}_Y}^{\otimes \gamma\delta}$$

en tant que sous-espaces de  $\Gamma(U_Y, \mathcal{N}_Y^{\otimes (2\gamma-4)\delta})$ . En effet  $\mathcal{G} = \mathcal{N}_Y^{\otimes 2}$  est engendré par les carrés des sections de  $W_Y$  simultanément sur  $\overline{U_Y}$  et sur  $Y$  et les deux

espaces ci-dessus s'écrivent ainsi

$$\left( \bigcap_{\zeta \in W_Y} (\cdot \otimes \zeta^{\otimes 4\delta})^{-1}(\Gamma(\overline{U_Y}, \mathcal{M}_Y^{\otimes \gamma\delta})) \right) \otimes J_{\mathcal{M}_Y}^{\otimes \gamma\delta}.$$

Considérons ensuite une section non nulle de  $\mathcal{N}_Y$  sur  $\overline{U_Y}$ . Nous formons ainsi une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_Y^{\otimes -1} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}/\mathcal{I}' \longrightarrow 0$$

où  $\mathcal{I}'$  désigne le faisceau d'idéaux image de l'injection  $\mathcal{N}_Y^{\otimes -1} \hookrightarrow \mathcal{O}$  et nous notons  $H \hookrightarrow \overline{U_Y}$  le sous-schéma fermé associé à  $\mathcal{I}'$ . Pour tout faisceau inversible  $\mathcal{Q}$  sur  $\overline{U_Y}$ , le foncteur  $\Gamma(\overline{U_Y}, \mathcal{Q} \otimes \cdot)$  est exact à gauche et nous obtenons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma(\overline{U_Y}, \mathcal{Q} \otimes \mathcal{N}_Y^{\otimes -1}) \longrightarrow \Gamma(\overline{U_Y}, \mathcal{Q}) \longrightarrow \Gamma(H, \mathcal{Q}).$$

Nous pouvons supposer que  $J_{\mathcal{M}_Y}$  induit encore une injection sur  $H$ . En effet, en appliquant cette suite à  $\mathcal{Q} = \mathcal{M}_Y^{\otimes -1} \otimes \mathcal{N}_Y^{\otimes 2}$  nous remarquons qu'il suffit pour cela que la section qui définit  $H$  s'annule en un point où  $J_{\mathcal{M}_Y}$  ne s'annule pas. Nous en déduisons également la relation suivante entre les dimensions mises en jeu

$$\dim \Gamma(\overline{U_Y}, \mathcal{Q} \otimes \mathcal{N}_Y^{\otimes -1}) \geq \dim \Gamma(\overline{U_Y}, \mathcal{Q}) - \dim \Gamma(H, \mathcal{Q})$$

qui après itération donne lieu à la minoration

$$\dim E'_0(2\delta) \geq \dim \Gamma(\overline{U_Y}, \mathcal{M}_Y^{\otimes \gamma\delta}) - \sum_{k=1}^{4\delta} \dim \Gamma(H, \mathcal{M}_Y^{\otimes \gamma\delta} \otimes \mathcal{N}_Y^{\otimes k-4\delta}).$$

En faisant usage de  $J_{\mathcal{M}_Y}^{\otimes \gamma\delta}$ , le  $k$ -ième terme de la somme peut être majoré par

$$\dim \Gamma(H, \mathcal{M}_Y^{\otimes \gamma\delta} \otimes \mathcal{N}_Y^{\otimes k-4\delta}) \leq \dim \Gamma(H, \mathcal{N}_Y^{\otimes k+2(\gamma-2)\delta}).$$

Pour conclure nous raisonnons à partir des nombres d'intersection. Nous savons d'une part que

$$(\mathcal{M}_Y^u \cdot \overline{U_Y}) \geq \prod_{i=1}^m a_i^{m-1}.$$

En effet, par un argument d'homogénéité (voir [38, Théorème 5.5]) nous pouvons nous ramener au cas  $a_1 = \dots = a_m = 1$  et il suffit alors de vérifier que le morphisme

$$\pi'_Y(y_1, \dots, y_m) = (y_1 y_2^{-1}, \dots, y_{m-1} y_m^{-1})$$

de  $Y \cap (A^m)$  vers  $A^{m-1}$  est génériquement fini. Or ceci découle de  $\dim(Y_i) < m$  et du fait que  $x_i \in Y_i^0(\overline{\mathbb{Q}})$  (voir [28, Lemme 2.1]). Plus précisément, nous pouvons construire par récurrence un  $m$ -uplet  $(y_1, \dots, y_m) \in (Y \cap (A^m))(\overline{\mathbb{Q}})$  vérifiant pour tout  $1 \leq i \leq m$

$$\dim(Y_1 y_1^{-1}) \cap \dots \cap (Y_i y_i^{-1}) \leq m - i.$$

Ceci est immédiat au rang  $i = 1$  et si  $y_1, \dots, y_i$  sont construits, notons  $C_1, \dots, C_i$  les composantes irréductibles de dimension maximale de  $(Y_1 y_1^{-1}) \cap \dots \cap (Y_i y_i^{-1}) \cap A$ . Si cette dimension est nulle alors  $y_{i+1}$  peut être choisi arbitrairement, sinon nous le choisissons dans

$$(Y_{i+1} \cap A)(\overline{\mathbb{Q}}) \setminus \bigcup_{j=1}^t \{y \mid y C_j \subset Y_{i+1}\}$$

(cet ensemble n'est pas vide car ceci entraînerait que l'un des  $C_j$  est dans le stabilisateur de  $Y_{i+1}$  et donc  $Y_{i+1}^0 = \emptyset$ ) de sorte qu'aucun des  $C_j$  n'est inclus dans  $Y_{i+1} y_{i+1}^{-1}$ . Nous obtenons finalement que la fibre de  $(y_1, \dots, y_m)$  par  $\pi'_Y$  est de dimension nulle d'où le résultat.

Nous avons d'autre part

$$(\mathcal{N}_Y^{u-1} \cdot H) = (\mathcal{N}_Y^u \cdot \overline{U_Y}) = u! \prod_{i=1}^m \frac{a_i^{m-1} d_i}{(m-1)!}$$

avec  $d_i = \deg_{\mathcal{L}_i}(Y_i)$  et par conséquent

$$\sum_{k=1}^{4\delta} \dim \Gamma(H, \mathcal{N}_Y^{\otimes k+2(\gamma-2)\delta}) \leq \left( \prod_{i=1}^m \frac{a_i^{m-1} d_i}{(m-1)!} \right) (4\delta u)(2\gamma\delta)^{u-1} + o(\delta^u).$$

Par différence, nous en déduisons que la dimension de  $E'_0(2\delta)$  est minorée par

$$\left( \prod_{i=1}^m a_i^{m-1} \right) (\gamma\delta)^u \left( \frac{1}{u!} - \frac{4u2^{u-1}(d_1 \dots d_m)}{\gamma(m-1)!^m} \right) + o(\delta^u).$$

Choisissons maintenant  $\gamma = 2(2u)^u(d_1 \dots d_m)$ , alors le terme principal est à son tour minoré par  $(\prod_i a_i^{m-1})(\gamma\delta)^u/(2u!)$  et nous avons également  $(\gamma/2)^u \geq 2u!$ . Nous avons donc bien établi la condition d'équilibre annoncée avec  $(\omega, \theta) = (0, 4u)$ .

Au vu de toutes ces vérifications, nous pouvons finalement appliquer le théorème principal du chapitre précédent 2.1.2 : celui-ci contredit le choix de  $n_0$  et prouve ainsi la proposition 3.1.1.

## 3.2 Combinaison avec l'inégalité de Mumford

Fixons ici un sous-groupe  $\Gamma$  de  $A(\overline{\mathbb{Q}})$  de rang fini  $r = \dim \Gamma \otimes \mathbb{R}$  ainsi qu'un entier  $\delta' \geq 1$ . Nous lui associons un seuil

$$q(\delta') = (20g^4)^{2(g(g-1))^2} (\delta')^{2g},$$

nous choisissons un nombre réel  $0 < \varepsilon \leq (2q(\delta'))^{-1}$  et définissons l'épaississement tubulaire de  $\Gamma$  de rayon  $\varepsilon$  comme

$$\Gamma_\varepsilon = \{yz \otimes 1 \mid y \in \Gamma, z \in A(\overline{\mathbb{Q}}), |z| \leq \varepsilon\} \subset A(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}.$$

Étant donné un système d'équations polynomiales de degré au plus  $\delta'$  en les coordonnées  $T_{e,0}$ , nous nous intéressons à une estimation du nombre de ses solutions exceptionnelles à valeurs dans l'épaississement  $\Gamma_\varepsilon$ . Nous considérons un sous-schéma fermé  $X' \hookrightarrow A \subset \mathbb{A}^g$  qui s'écrit comme une intersection d'hypersurfaces de degré au plus  $\delta'$  (voir définition 1.2.1). Dans ce cas nous avons d'après le théorème 1.2.3

$$\text{Card}\{x \in (X')^0(\overline{\mathbb{Q}}) \mid |xz^{-1}| \leq q(\delta')^{-1}\} \leq q(\delta')$$

pour tout élément  $z \in \Gamma$ . Le degré de  $X'$  (défini comme la somme des degrés de ses composantes irréductibles) ainsi que sa hauteur s'obtiennent en assimilant  $X'$  à son adhérence dans  $\mathbb{P}^N$ . La proposition ci-dessous est à comparer avec les bornes fournies par [30, Théorème 4.1].

**Proposition 3.2.1.** *Nous avons la majoration*

$$\text{Card}((X')^0(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon) \leq f(\dim(X') + 1, \deg(X'))$$

pour la fonction  $f$  définie de la façon suivante

$$f(m', d') = (q(\delta')(16^{g^3} d')^{\xi(m'+1)})^{r+1}$$

avec  $\xi(m') = \prod_{m=2}^{m'} (2m+1)(m(m-1)+1)$ .

Pour le démontrer, nous coupons l'ensemble en question par des sous-schémas fermés  $X$  de  $X'$  et raisonnons par récurrence sur la dimension de  $X$ . Étant donné  $X = C_1 \cup \dots \cup C_t \hookrightarrow X'$  avec  $C_i$  irréductible de degré  $d_i$ , le cardinal de  $S_\varepsilon = X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap (X')^0(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$  est majoré par

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t \text{Card}(C_i(\overline{\mathbb{Q}}) \cap (X')^0(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon) &\leq \sum_{i=1}^t f(\dim(C_i) + 1, d_i) \\ &\leq f(\dim(X) + 1, d_1 + \dots + d_t) \end{aligned}$$

dès que  $\text{Card}(C_i(\overline{\mathbb{Q}}) \cap (X')^0(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon) \leq f(\dim(C_i) + 1, d_i)$  pour tout  $i$ . Il nous suffit donc de prouver que  $\text{Card}(S_\varepsilon) \leq f(m_0, d_0)$  lorsque  $X \hookrightarrow X'$  est un sous-schéma fermé intègre de dimension  $m_0 - 1$  et de degré  $d_0$ . Ceci étant évident pour  $m_0 - 1 = 0$  vu que  $f(1, 1) \geq 1$ , nous pouvons supposer que cette majoration est valable en toute dimension strictement inférieure à  $m_0 - 1$  et pour des schémas  $X$  intègres ou non. Nous supposons également  $m_0 - 1 < g$  puisque  $S_\varepsilon$  est vide dans le cas contraire.

### 3.2.1 Points de grande hauteur

Nous reprenons maintenant les notations de la proposition 3.1.1 pour  $X$  de sorte que  $\xi(m_0) = \psi_0$  par exemple. Posons  $c_4 = 2(m_0 - 1)d_0^{m_0}$  et

$$f_1 = f(m_0 - 1, d_0^{m_0+1}).$$

Étant donné un élément  $y \in \Gamma$ , nous introduisons le seuil

$$c_{3,y} = 4^{g m_0(m_0-1)} (h(y^{-1}X) + 1) \Lambda^{2\psi_0}$$

et nous allons établir que le nombre de points de  $S_\varepsilon$  vérifiant la condition  $|xy^{-1}| > 2c_{3,y}$  n'excède pas  $(1 + 16u_0c_1)^r c_2 c_4 f_1 u_0 / 2$ . Ce résultat repose essentiellement sur la proposition 3.1.1 (inégalité de Vojta) appliquée au translaté  $y^{-1}X$ , où le contrôle de l'espacement des points est assuré par le résultat auxiliaire fondamental ci-dessous (inégalité de Mumford, cf. [30, Proposition 4.2]). Rappelons que le translaté  $y^{-1}X$  est intègre de même dimension et même degré que  $X$ .

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $S_1 = \{x_0, \dots, x_{f_1}\}$  une famille de  $f_1 + 1$  points distincts de  $y^{-1}S_\varepsilon$  telle que*

$$|x_{f_1}| \geq |x_{f_1-1}| \geq \dots \geq |x_0| > 2c_{3,y}$$

*et vérifiant  $\widehat{(x_i, x_0)} \leq c_1^{-1}$  pour tout  $i$ . Alors*

$$|x_{f_1}| > (1 + c_4^{-1})|x_0|.$$

*Démonstration.* Supposons que cette dernière inégalité n'est pas vérifiée de sorte que

$$\begin{aligned} |x_i x_0^{-1}| &= |x_i \otimes 1 - x_0 \otimes 1| = |x_i \otimes |x_0|^{-1} - x_0 \otimes |x_0|^{-1}| |x_0| \\ &\leq \left( |x_i \otimes |x_0|^{-1} - x_i \otimes |x_i|^{-1}| + \widehat{(x_i, x_0)} \right) |x_0| \\ &\leq \left( |x_i| |x_0|^{-1} - 1 + \widehat{(x_i, x_0)} \right) |x_0| \leq (c_4^{-1} + c_1^{-1}) |x_0| \end{aligned}$$

pour tout  $i$ . Si le fermé  $W$  défini par

$$W = \bigcap_{i=0}^{f_1} (x_i^{-1} x_0 y^{-1} X) = (x_0 y^{-1} X : S_1)$$

était de dimension nulle au voisinage de  $x_0$ , alors en écrivant  $W$  comme une certaine intersection d'hypersurfaces de degré  $d_0$  (voir [29, Proposition 3.4] et également [30, Proposition 4.2] pour une version torique) nous obtiendrions

$$|x_0| \leq d_0^{m_0-1} (h(y^{-1}X) + (m_0 - 1)d_0(c_1^{-1} + c_4^{-1})|x_0| + m_0 \log(4^g d_0))$$

et donc

$$|x_0| \leq (c_4^{-1} - c_1^{-1})^{-1} (h(y^{-1}X) + m_0 \log(4^g d_0)) \leq 2c_{3,y}.$$

Ceci étant absurde il vient (voir [29, Proposition 3.3])

$$S_1 \subset \bigcup_{j=1}^t \bigcap_{c \in C_j} (x_0 c^{-1} y^{-1} X) = \tilde{X} = \bigcup_{k=0}^{m_0-2} \tilde{X}_k \subsetneq y^{-1}X$$

où  $C_1, \dots, C_t$  désignent les composantes irréductibles de  $W$  contenant  $x_0$  et de dimension  $\dim_{x_0}(W) > 0$  et où  $\tilde{X}_k$  est équidimensionnel de dimension  $k$ . Remarquons que si  $\tilde{X} = y^{-1}X$  alors l'un des  $x_0^{-1}C_j$  est inclus dans le stabilisateur de  $y^{-1}X$  ce qui entraîne  $S_\varepsilon = \emptyset$ . Par ailleurs nous trouvons  $\deg(\tilde{X}_k) = \varepsilon_k d_0^{2m_0-1-k}$  avec  $\sum_k \varepsilon_k \leq 1$  et par conséquent, en appliquant l'hypothèse de récurrence à chaque  $y\tilde{X}_k \hookrightarrow X'$ ,

$$f_1 + 1 = \text{Card}(yS_1) \leq \sum_{k=0}^{m_0-2} f(k+1, \varepsilon_k d_0^{2m_0-1-k}) \leq f(m_0-1, d_0^{m_0+1}) = f_1$$

ce qui est absurde.  $\square$

Le corollaire suivant remplace [30, Corollaire 4.1] et concerne encore une fois chaque translaté.

**Corollaire 3.2.3.** *Notons  $c(y) > 0$  le plus petit nombre réel tel que*

$$\text{Card}\{x \in S_\varepsilon \mid |xy^{-1}| > 2c(y)\} \leq f'_1$$

*avec  $f'_1 = (1 + 16u_0c_1)^r c_2c_4f_1u_0/2$ . Alors  $c(y) \leq c_{3,y}$ .*

*Démonstration.* D'après [30, Lemme 2.1] et vu que  $\varepsilon \leq 1 \leq c_{3,y}/(8u_0c_1)$ , nous pouvons écrire l'ensemble  $\{x \in \Gamma_\varepsilon \mid |x| > 2c_{3,y}\}$  comme la réunion d'au plus  $(1 + 16u_0c_1)^r$  parties dans chacune desquelles deux points distincts  $x_i, x_j$  ont un écart angulaire

$$\widehat{(x_i, x_j)} \leq (2u_0c_1)^{-1}.$$

Supposons que l'intersection d'une de ces parties avec  $y^{-1}S_\varepsilon$  contient au moins  $1 + c_2c_4f_1u_0/2$  points distincts et numérotions-les  $x_0, x_1, \dots$  par ordre croissant de hauteur. En vertu de la proposition précédente 3.2.2 nous avons  $|x_{j+f_1}| \geq (1 + (c_4)^{-1})|x_j|$  pour tout  $j$  et en itérant  $c_2c_4$  fois cette inégalité nous obtenons

$$|x_{j+k}| \geq (1 + 1/c_4)^{c_2c_4} |x_j| \geq c_2 |x_j|$$

avec  $k = c_2c_4f_1$ . Par conséquent la famille  $x_0, x_k, x_{2k}, \dots, x_{ku_0/2}$  de cardinal  $1 + u_0/2$  contredit la proposition 3.1.1 appliquée dans  $y^{-1}X$  (remarquons que  $y^{-1}S_\varepsilon \subset (y^{-1}X)^0$ ). Ainsi chacune des  $(1 + 16u_0c_1)^r$  parties mises en évidence contient au plus  $c_2c_4f_1u_0/2$  points de  $y^{-1}S_\varepsilon$  et le résultat annoncé s'en déduit aisément.  $\square$

### 3.2.2 Points de petite hauteur et conclusion

Le but de ce paragraphe est de mettre en évidence un principe de « concentration » des points de petite hauteur au sens suivant : si le nombre de points de  $S_\varepsilon$  vérifiant la condition  $|x| \leq 2c_3$  est suffisamment grand, alors ces points sont contenus dans une boule dont le rayon peut être exprimé uniquement en fonction de la dimension et du degré de  $X$ . En particulier, pour  $\text{Card}(S_\varepsilon)$  suffisamment grand nous établirons qu'il existe un élément  $y \in \Gamma$  pour lequel

$$c(y) \leq c = 18gc_5 \log 2$$

avec  $c_5 = 4^{gm_0^2}(2d_0)(16^{g^3}d_0)^{2\psi_0}$ . Nous suivons ici [29] en nous basant sur la possibilité de contrôler la hauteur d'un translaté  $y^{-1}X$  par les hauteurs d'un nombre suffisamment grand de ses points grâce à l'hypothèse de récurrence.

**Lemme 3.2.4.** *Soit  $S_2 \subset S_\varepsilon$  un ensemble fini de cardinal strictement supérieur à*

$$f_2 = f(m_0 - 1, 4^g d_0^2).$$

*Alors la hauteur du translaté  $y^{-1}X$ ,  $y \in \Gamma$  est majorée par*

$$h(y^{-1}X) \leq (4^g + 1)^{m_0} d_0 \left( \max_{x \in S_2} |xy^{-1}| + 6g \log 2 \right).$$

*Démonstration.* Vérifions que toute hypersurface  $H$  de degré  $4^g d_0$  dans  $\mathbb{P}^N$  contenant  $y^{-1}S_2$  contient également  $y^{-1}X$ . En effet supposons que ce n'est pas le cas et posons  $\tilde{X} = y^{-1}X \cap H$ . Comme le degré de cette intersection est majoré par  $4^g d_0^2$ , nous aurions d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à  $y\tilde{X} \hookrightarrow X'$

$$f_2 < \text{Card}(S_2) \leq f(m_0 - 1, 4^g d_0^2) = f_2$$

ce qui est absurde. Par conséquent, nous pouvons appliquer [29, Lemme 3.1] ce qui fournit exactement la majoration annoncée.  $\square$

En combinant tous les résultats intermédiaires nous aboutissons ainsi à une estimation totale indépendante de la hauteur de  $X$ .

**Lemme 3.2.5.** *Le cardinal de  $S_\varepsilon = X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap (X')^0 \cap \Gamma_\varepsilon$  est majoré par*

$$\begin{aligned} \text{Card}(S_\varepsilon) &\leq f'_1 + \max((16c_5 + 3)^r f_2, (100gc_5)^r q(\delta')^{r+1}) \\ &\leq (16^{g^3} d_0)^{(2\psi_0+1)r+\psi_0+m_0} \max(f_1, f_2, q(\delta')^{r+1}). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous pouvons supposer que ce cardinal est strictement supérieur à  $f'_1 + (16c_5 + 3)^r f_2$  et nous allons vérifier que

$$c(y) \leq c = 18gc_5 \log 2$$

pour un certain  $y \in \Gamma$ . En effet, soit  $y_0 \in \Gamma$  quelconque. Si  $c(y_0) \leq 4c_5\varepsilon \leq c$  l'assertion est prouvée, supposons donc que  $c(y_0) > 4c_5\varepsilon$ . D'après [30, Lemme 2.1], la boule  $\{x \in \Gamma_\varepsilon \mid |xy_0^{-1}| \leq 2c(y_0)\}$  peut être recouverte par  $(16c_5 + 3)^r$  boules de rayon  $c(y_0)/2c_5$  centrées en des points de  $\Gamma$ . Par définition de  $c(y_0)$  il y a au plus  $f'_1$  points de  $S_\varepsilon$  à l'extérieur de la réunion de ces boules, donc par le principe des tiroirs l'une d'entre elles, de centre noté  $y_1$ , possède une intersection  $S_2$  avec  $S_\varepsilon$  de cardinal au moins  $f_2 + 1$ . Le lemme 3.2.4 fournit alors une majoration de  $h(y_1^{-1}X)$  que nous injectons dans le corollaire 3.2.3 pour obtenir

$$c(y_1) \leq c_{3,y_1} \leq c_5 \left( \max_{x \in S_2} |xy_1^{-1}| + 6g \log 2 \right) \leq c(y_0)/2 + c/3.$$

En itérant le procédé à partir de  $y_1$ , nous construisons une suite  $y_0, y_1, y_2, \dots$  d'éléments de  $\Gamma$  vérifiant  $c(y_i) \leq c(y_0)/2^i + 2c/3$  et il suffit de poser  $y = y_i$  pour un  $i$  assez grand afin de prouver notre assertion.

En utilisant  $\varepsilon \leq (2q(\delta'))^{-1}$  nous appliquons à nouveau [30, Lemme 2.1] pour recouvrir l'ensemble  $\{x \in \Gamma_\varepsilon \mid |xy^{-1}| \leq 2c\}$  par  $(8cq(\delta') + 3)^r$  boules de rayon  $q(\delta')^{-1}$  centrées en des points  $z \in \Gamma$ . Puisque le cardinal de l'intersection de chacune de ces boules avec  $S_\varepsilon \subset (X')^0(\mathbb{Q})$  est majoré par  $q(\delta')$  d'après le théorème d'Amoroso et Viada 1.2.3 il vient

$$\text{Card}(S_\varepsilon) \leq (8cq(\delta') + 3)^r q(\delta') + f'_2 \leq (100gc_5)^r q(\delta')^{r+1} + f'_2.$$

Enfin  $1 + 16u_0c_1 \leq 100gc_5 \leq (16^{g^3}d_0)^{2\psi_0+1}$  et  $c_2c_4u_0/2$  est majoré par  $\Lambda^{\psi_0+m_0} \leq (16^{g^3}d_0)^{\psi_0+m_0}$ .  $\square$

Pour conclure nous avons clairement

$$\max(f_1, f_2, q(\delta')^{r+1}) = f(m_0 - 1, 4^g d_0^{m_0+1}) \leq (q(\delta')(16^{g^3}d_0)^{(m_0+1)\psi_0})^{r+1}$$

et  $((m_0 + 1)\psi_0)(r + 1) + (2\psi_0 + 1)r + \psi_0 + m_0 \leq 2(m_0 + 1)\psi_0(r + 1)$  est majoré par  $\xi(m_0 + 1)(r + 1)$  ce qui achève la preuve de la proposition 3.2.1.

### 3.3 Mordell-Lang plus Bogomolov

Soient  $\Gamma$  un sous-groupe de  $A(\overline{\mathbb{Q}})$  de rang fini  $r$  et  $X' \hookrightarrow A$  un sous-schéma fermé de dimension  $m' - 1$  avec  $2 \leq m' \leq g$ . Notons  $d'$  son degré (celui de  $\overline{X'} \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  relatif au faisceau  $\mathcal{L}$ ) et  $\delta'$  son degré essentiel (celui de  $\overline{X'} \hookrightarrow \mathbb{A}^g$  relatif aux coordonnées  $T_{e,0}$ , voir définition 1.2.1). Ces deux grandeurs vérifient en particulier l'inégalité  $\delta' \leq 2gd'$  puisque  $\overline{X'} \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  s'écrit comme intersection d'hypersurfaces de degré  $d'$  en les  $W_j$ . Nous nous appuyons sur les majorations de cardinaux de solutions exceptionnelles établies dans la section précédente 3.2 pour prouver la version quantitative suivante du problème de Mordell-Lang plus Bogomolov.

**Théorème 3.3.1.** *Il existe une famille finie  $x_1, \dots, x_S \in X'(\overline{\mathbb{Q}})$  de points algébriques avec  $S \leq (16^{g^3}2^{g^2}d')^{g^3(m')^{4m'}(r+1)}$  et une famille  $B_1, \dots, B_S$  de sous-tors de  $A$  tels que  $x_i B_i \subset X'$  pour tout  $i$  et*

$$X'(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^S (x_i B_i)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$$

pour tout réel  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 = 3^{-8g^5}(\delta')^{-3g^2}$ .

Le théorème 1.2.2 se déduit directement du théorème 1.2.4 qui à son tour se déduit aisément du théorème 3.3.1 (le faisceau inversible très ample qui définit le degré étant ici élevé au carré, il suffit de remarquer que  $16^{g^3}2^{g^2}2^g \leq 32^{g^3}$ ).

*Démonstration.* Soit  $B \hookrightarrow A$  un sous-tore de dimension  $h \geq 1$  vu comme le noyau d'un morphisme

$$\phi = (T^{\mu_1}, \dots, T^{\mu_{g-h}}, 1, \dots, 1) : A = \mathbb{G}_m^g \rightarrow \mathbb{G}_m^{g-h} \times \{1\}^h$$

et considérons le fermé  $(X' : B) = \bigcap_{b \in B(\overline{\mathbb{Q}})} b^{-1}X'$ . Si  $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$  est un point rationnel avec  $X$  une composante irréductible de  $(X' : B)$ , alors  $B$  est maximal pour la propriété  $xB \subset X'$  si et seulement si  $B$  est la composante connexe de l'élément neutre dans le stabilisateur de  $X$ ; ceci revient encore à dire que  $\phi(x) \in \phi((X' : B))^0(\overline{\mathbb{Q}})$  (voir [29, Lemme 4.6]). Donc le nombre de translatés de  $B$  qui interviennent utilement dans la décomposition du théorème 3.3.1 peut être majoré par

$$\text{Card}(\phi((X' : B))^0(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \phi(\Gamma_\varepsilon)).$$

Par ailleurs, d'après [5, Théorème 3.3.9], le degré essentiel de  $B$  est inférieur à  $g\delta'$  ce qui permet de majorer le nombre de tels sous-tores par  $(4eg\delta')^{g^2}$ . En outre nous pouvons choisir dans le morphisme  $\phi$  ci-dessus (voir [5, Remarque 3.3.10])

$$|\mu_i| \leq g^{2g-1}(g\delta')^{(g-1)^2}$$

et majorer le degré essentiel de  $\phi((X' : B))$  par  $g^3(g\delta')^{g-h}\delta'$ . Il suffit en effet de définir  $\phi$  comme le morphisme  $\phi_A^{-1}$  du théorème de [5] suivi de la projection sur les  $g-h$  premiers facteurs, de sorte que  $\phi((X' : B))$  est l'intersection de  $\phi_A^{-1}((X' : B))$  avec les hyperplans  $T_{e,0} = 1$ ,  $e > g-h$ . Comme  $\deg((X' : B)) \leq (d')^{m'}$  ce choix entraîne également

$$\begin{aligned} \deg(\phi((X' : B))) &\leq \frac{\deg((X' : B))}{\deg(B)} (g!) \prod_{i=1}^{g-h} |\mu_i| \\ &\leq (d')^{m'} g^{2g^2} (g\delta')^{(g-h)(g-1)^2} \end{aligned}$$

et par ailleurs  $\phi(\Gamma_\varepsilon) \subset \phi(\Gamma)_{\varepsilon_B}$  avec

$$\varepsilon_B \leq \varepsilon(g-h) \max_i |\mu_i| \leq \varepsilon g^{2g} (g\delta')^{(g-1)^2}$$

d'après [30, Lemme 6.1].

Ainsi dès que  $\varepsilon^{-1} \geq 3^{8g^5} (\delta')^{3g^2}$  nous pouvons appliquer la proposition 3.2.1 (en notant que  $\phi(\Gamma)$  est de rang inférieur à  $r$ ) pour majorer le cardinal de  $\phi((X' : B))^0(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \phi(\Gamma_\varepsilon)$  par

$$\left( q(g^3(g\delta')^{g-h}\delta') (16g^3 g^{2g^2} (g\delta')^{(g-h)(g-1)^2} (d')^{m'})^{\xi(m'-h+1)} \right)^{r+1}.$$

En effet  $3^{8g^5} (\delta')^{3g^2} \geq 2g^{2g} (g\delta')^{(g-1)^2} q(g^3(g\delta')^{g-1}\delta') \geq 2q(\delta')$ . Comme  $\delta' \leq 2gd'$  et  $2g^2 + ((g-1)^3 + m')\xi(m') \leq g^3\xi(m')$ , le nombre de translatés de sous-tores de dimension supérieure à 1 qui interviennent dans la décomposition du théorème 3.3.1 est inférieur à

$$\begin{aligned} &(g-1)(8eg^2)^{g^2} \left( q(g^3(2g^2)^g) (16g^3 g^{2g^2} (2g^2)^{(g-1)^3})^{\xi(m')} (d')^{g^3\xi(m')} \right)^{r+1} \\ &\leq \left( (20g^4)^{2g^2(g-1)^2} (16g^3 (2g^2)^{(g-1)^3+2g^2})^{\xi(m')} (d')^{g^3\xi(m')} \right)^{r+1} \end{aligned}$$

$$\leq \left( 3^{8g^3(g-1)^2} (8gd')^{2(g+1)^3\xi(m')} \right)^{r+1}$$

car par exemple  $\xi(m') \geq 15$ . Nous y ajoutons  $(q(2gd')(16^{g^3}d')^{\xi(m'+1)})^{r+1}$  pour les translatés du sous-tore nul et comme  $\xi(m'+1) + 2g \leq 2(g+1)^3\xi(m')$  nous obtenons un total de

$$\left( 3^{8g^3(g-1)^2} (2g)^{2g} 2(16^{g^3}d')^{2(g+1)^3\xi(m')} \right)^{r+1} \leq (16^{g^3}2^{g^2}d')^{2(g+1)^3\xi(m')(r+1)}$$

car  $3^{8g^3(g-1)^2} (2g)^{2g} 2 \leq 3^{8g^5} \leq 2^{g^2(g+1)^3\xi(m')}$ . Enfin  $2(g+1)^3\xi(m') \leq g^3(m')^{4m'}$ .  
 $\square$

## Chapitre 4

# Le théorème de Schanuel dans les fibrés adéliques hermitiens

### 4.1 Introduction

Dans ce texte, nous démontrons une version du théorème de Schanuel dans le cadre général des fibrés adéliques hermitiens éventuellement impurs. Nous donnons en particulier une majoration explicite du terme d'erreur qui est linéaire en le régulateur du corps de base, en utilisant une méthode de partition introduite par Schmidt.

#### 4.1.1 Contexte historique

Soient  $K$  un corps de nombres de degré  $d$  et  $n \geq 2$  un entier. Nous définissons la *hauteur de Weil* (relative à  $K$ ) sur l'espace projectif  $\mathbb{P}(K^n)$  par

$$H_{\text{Weil}}(x_1 : \dots : x_n) = \prod_{v \in V(K)} \max_i |x_i|_v^{d_v}$$

où  $V(K)$  désigne l'ensemble des places de  $K$  et  $d_v$  est le degré local en la place  $v$ . Nos conventions quant aux valeurs absolues  $|\cdot|_v$  représentant les places de  $K$  seront résumées dans la partie 4.2.

Le théorème publié par Schanuel en 1979 [33] donne un équivalent du nombre de points de hauteur bornée dans  $\mathbb{P}(K^n)$  pour la hauteur de Weil ainsi qu'un ordre de grandeur du terme d'erreur. Si  $Z$  est un ensemble,  $H : Z \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application et  $B \in \mathbb{R}_+$  nous posons

$$N_{Z,H}(B) = \text{Card}\{X \in Z \mid H(X) \leq B\}.$$

L'énoncé est alors le suivant

$$N_{\mathbb{P}(K^n), H_{\text{Weil}}}(B) = C_{\text{Scha}}(n, K) B^n + \begin{cases} O(B \log B) & \text{si } n = 2, d = 1 \\ O(B^{n-1/d}) & \text{sinon} \end{cases}$$

où la constante de Schanuel  $C_{\text{Scha}}(n, K)$  fait intervenir les divers invariants du corps  $K$  :

$$C_{\text{Scha}}(n, K) = \frac{n^q (2^r (2\pi)^s)^n h R}{w |\Delta|^{n/2} \zeta_K(n)}.$$

Ici  $h$  désigne le nombre de classes d'idéaux,  $w$  le nombre de racines de l'unité,  $r$  et  $s$  respectivement le nombre de places réelles et complexes,  $q = r + s - 1$  le rang du groupe des unités,  $R$  le régulateur et  $\Delta$  le discriminant absolu de  $K$ . Enfin  $\zeta_K$  désigne la fonction zêta de  $K$  définie sur  $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 1\}$ .

Rappelons brièvement qu'un fibré (vectoriel) adélique au sens général est un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$  sur  $K$  muni d'une famille de normes  $(\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)}$  définies sur les complétés  $E_v = E \otimes_K K_v$  et vérifiant certaines conditions (voir définition 4.3.5). Nous construisons par produit des normes une hauteur  $H : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui satisfait la *propriété de Northcott*, autrement dit, telle que le cardinal  $N_{\mathbb{P}(E), H}(B)$  est fini pour tout  $B$ . Le problème de Schanuel consistant à trouver un équivalent du nombre de points de hauteur bornée s'étend alors naturellement à ce nouveau cadre. Une conséquence de notre résultat principal présenté dans le prochain paragraphe est la réponse à ce problème dans le cas où les normes aux places archimédiennes sont hermitiennes.

Thunder [35] a établi un premier résultat en 1993, initialement dans le cadre relatif des sous-fibrés du fibré adélique hermitien standard. Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $K^m$  de dimension  $n \geq 2$  et définissons

$$H(x_1 : \dots : x_m) = \prod_{v \mid \infty} \left( \sum_i |x_i|_v^2 \right)^{d_v/2} \prod_{v \nmid \infty} \max_i |x_i|_v^{d_v}$$

sur  $\mathbb{P}(K^m)$ . Nous notons  $H(E)$  la hauteur de  $E$  définie à partir de la structure de fibré adélique naturelle dont hérite le déterminant de  $E$  (voir le paragraphe 4.3.4). Alors

$$N_{\mathbb{P}(E), H}(B) = \frac{C(n, K)}{H(E)} B^n + \begin{cases} O(B \log B) & \text{si } n = 2, d = 1 \\ O(B^{n-1/d}) & \text{sinon} \end{cases}$$

où la constante  $C(n, K)$  fait intervenir le volume  $\omega_n = \pi^{n/2} / \Gamma(1 + n/2)$  de la boule unité euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^n$  :

$$C(n, K) = \frac{n^q \omega_n^r (2^n \omega_{2n})^s h R}{w |\Delta|^{n/2} \zeta_K(n)}.$$

Un résultat d'approximation publié par Thunder dans un article ultérieur [36, théorème 5] permet d'étendre cet énoncé aux fibrés adéliques hermitiens *purs*, c'est-à-dire tels que la norme  $\|\cdot\|_u$  est à valeurs dans  $|K_u|_u$  pour toute place ultramétrique  $u$ .

En 1999, Gasbarri [17] a redémontré un résultat équivalent dans le formalisme de la géométrie d'Arakelov. La dépendance en les normes dans le terme d'erreur a été précisée en 2008 par Christensen et Gubler [10] dans le cadre relatif de Thunder. Si nous notons  $\Lambda_1(E)$  la plus petite hauteur d'un élément

de  $\mathbb{P}(E)$  et si nous remplaçons  $B$  par  $B/\Lambda_1(E)$  dans le terme d'erreur, alors la constante implicite ne dépend que de  $n$  et  $K$ .

Le seul résultat publié concernant le cas impur est celui de Peyre [25] en 1995. Il donne un équivalent du nombre de points de hauteur bornée dans un cadre très général (variétés de Fano) qui comprend les fibrés adéliques quelconques, sans précision toutefois sur le terme d'erreur.

Citons enfin deux résultats récents qui traitent du problème de Schanuel dans divers cadres et qui ont des composantes communes avec notre problème. D'une part, les hauteurs de Frei et Widmer [16] construites à partir de systèmes adéliques lipschitziens englobent le cas des fibrés adéliques dont l'impureté est « algébrique » (autrement dit, tels que  $\|\cdot\|_u$  est à valeurs dans  $p^{\mathbb{Q}} \cup \{0\}$  pour toute place ultramétrique  $u|p$ ) mais le terme d'erreur n'est pas totalement explicite. D'autre part, le résultat de Rémond et Zehrt [32, théorème 1.1] concernant les corps non commutatifs permet d'écrire une estimation totalement explicite pour le fibré hermitien standard, mais où le terme d'erreur est exponentiel en le régulateur.

#### 4.1.2 Énoncé du résultat principal

Nous considérons ici un fibré adélique hermitien éventuellement impur  $E$  sur  $K$  de dimension  $n \geq 2$  et nous donnons ci-dessous un équivalent de  $N_{\mathbb{P}(E),H}(B)$  ainsi qu'une majoration totalement explicite du terme d'erreur.

Notons  $H(E)$  la hauteur d'un fibré adélique hermitien  $E$  et  $\Lambda_1(E)$  la plus petite hauteur d'un élément de  $\mathbb{P}(E)$ . Nous distinguons les places ultramétriques pures et impures, l'ensemble  $S$  de ces dernières étant fini par définition. Un procédé simple permet d'associer à  $\|\cdot\|_u$  pour  $u \in S$  une norme pure  $\|\cdot\|_u^{\text{pur}}$  et donc de définir un *fibré purifié*  $E_{\text{pur}}$  (voir le paragraphe 4.3.3). Pour  $u \in S$  nous posons

$$\kappa_u = \int_{\mathbb{P}(E_u)} \left( \frac{\|x\|_u^{\text{pur}}}{\|x\|_u} \right)^{nd_u} d\omega_u(K_u^\times x)$$

où  $\omega_u$  est la mesure de probabilité sur  $\mathbb{P}(E_u)$  associée à une mesure de Haar quelconque sur  $E_u$ . Nous posons enfin  $\kappa(E) = \prod_{u \in S} \kappa_u$  et  $\kappa'(E) = \prod_{u \in S} \mathfrak{N}(\mathfrak{p}_u)$  le produit des normes des idéaux premiers associés aux places impures.

**Théorème 4.1.1.** *Pour tout réel positif  $B$*

$$\begin{aligned} & \left| N_{\mathbb{P}(E),H}(B) - \frac{C(n,K)\kappa(E)}{H(E_{\text{pur}})} B^n \right| \\ & \leq \frac{(nd)^{10n^2d^2} hR \kappa'(E)^{3n}}{w} \left( \frac{B}{\Lambda_1(E_{\text{pur}})} \right)^{n-1/d} \rho(B) \end{aligned}$$

avec comme ci-dessus

$$C(n,K) = \frac{n^q \omega_n^r (2^n \omega_{2n})^s hR}{w |\Delta|^{n/2} \zeta_K(n)}$$

et  $\rho(B) = 1$  si  $n - 1/d > 1$  et

$$1 + \log \min \left( 1 + \frac{B}{\Lambda_1(E_{\text{pur}})}, \frac{2H(E_{\text{pur}})}{\Lambda_1(E_{\text{pur}})^2} \right) \text{ sinon.}$$

L'écriture sous forme d'intégrales du terme correctif  $\kappa(E)$  dû à l'impureté correspond à l'approche de Peyre (mesures de Tamagawa) et les contributions de chaque place impure sont clairement indépendantes dans le terme principal comme dans le terme reste. Ajoutons que ce dernier est linéaire en le régulateur et que, dans le cas particulier  $n - 1/d = 1$  ( $n = 2$  et  $d = 1$ ), il est en  $O(B)$  au lieu de  $O(B \log B)$ . Cette réduction spécifiquement liée au cadre hermitien s'accompagne néanmoins de l'apparition d'une dépendance en la hauteur du fibré que la méthode présentée ici ne semble pas en mesure d'éliminer.

Enfin le cas pur se traduit par  $E = E_{\text{pur}}$ ,  $S = \emptyset$  et  $\kappa(E) = \kappa'(E) = 1$ , ainsi notre résultat prolonge ceux de Thunder, Christensen et Gubler ainsi que Gasbarri.

### 4.1.3 Applications

Nous mettons ici en évidence plusieurs énoncés importants qui découlent directement de notre théorème principal ou qui seront prouvés au cours de la démonstration. Nous fixons un corps de nombres  $K$  de degré  $d$  et nous posons

$$C'(n, K) = \frac{n^q \omega_n^r (2^n \omega_{2n})^s R}{w |\Delta|^{n/2}}.$$

Le problème de Dedekind-Weber consiste à estimer le nombre d'idéaux entiers de norme  $\mathfrak{N}$  bornée dans une classe donnée  $Z$ . Nous commençons par donner l'encadrement explicite suivant qui améliore notamment le résultat de [21] (voir le paragraphe 4.6.1 pour la démonstration).

**Proposition 4.1.2.** *Soit  $Z_+$  l'ensemble des idéaux non nuls de  $\mathcal{O}_K$  appartenant à la classe  $Z$ . Alors pour tout  $B \geq 0$*

$$|N_{Z_+, \mathfrak{N}}(B) - C'(1, K)B| \leq \frac{3^{d^2} d^{5d^2} R}{w} B^{1-1/d}.$$

Nous en déduisons une majoration de la constante d'Euler du corps  $K$ , définie comme le terme constant dans le développement de la fonction  $\zeta_K(z)$  en son pôle  $z = 1$  d'ordre 1.

**Corollaire 4.1.3.** *Soit  $K$  un corps de nombres.*

(i) *Si  $\mathfrak{I}$  désigne l'ensemble des idéaux non nuls de  $\mathcal{O}_K$  alors pour tout  $B \geq 0$*

$$|N_{\mathfrak{I}, \mathfrak{N}}(B) - C'(1, K)hB| \leq \frac{3^{d^2} d^{5d^2} hR}{w} B^{1-1/d}.$$

(ii) *La constante d'Euler du corps  $K$  est majorée par*

$$|\gamma_K| \leq 3^{d^2+1} d^{5d^2+1} hR/w.$$

Nous écrivons ensuite une version totalement explicite du « Divisorensatz » qui constitue l'étape centrale de [10] (théorème 3.4). Cet énoncé répond à un problème de même nature que celui de Schanuel avec une condition plus précise (sur la hauteur infinie et sur chaque place ultramétrique au lieu de la hauteur globale uniquement). Nous considérons ici un sous-fibré du fibré adélique hermitien standard, mais notre énoncé est aussi valable pour tout fibré adélique hermitien pur, en remplaçant notamment  $I_x$  par l'idéal défini au paragraphe 4.4.1. Nous prouverons cette proposition dans le paragraphe 4.5.3.

**Proposition 4.1.4.** *Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $K^m$  de dimension  $n \geq 1$ . Pour tout idéal fractionnaire  $I$  et tout réel positif  $B$ , notons  $N(I, B)$  le nombre d'orbites de l'ensemble*

$$\{x \in E \setminus \{0\} \mid I_x \subset I \text{ et } H_\infty(x) \leq B\}$$

*sous l'action du groupe des unités  $\mathcal{O}_K^\times$ , où  $I_x$  est l'idéal fractionnaire de  $K$  engendré par les coordonnées de  $x$  et  $H_\infty(x)$  est la partie infinie de la hauteur hermitienne standard de  $x$ . Alors*

$$\left| N(I, B) - \frac{C'(n, K)B^n}{H(E)\mathfrak{N}(I)^n} \right| \leq \frac{(nd)^{9n^2d^2}R}{\mathfrak{N}(I)^{n-1/d}} \left( \frac{B}{\Lambda_1(E)} \right)^{n-1/d}.$$

Nous supposons maintenant  $n - 1/d > 1$  afin d'alléger les énoncés et nous nous intéressons à des résultats classiques pour lesquels il semble qu'aucune version explicite ne soit encore disponible. Le nombre de points de  $\mathbb{Z}^n$  à coordonnées premières entre elles contenus dans un ellipsoïde de  $\mathbb{R}^n$  centré à l'origine correspond à  $2N_{\mathbb{P}(E), H}$  pour une certaine structure de fibré adélique hermitien pur sur  $E = \mathbb{Q}^n$ .

**Proposition 4.1.5.** *Soient  $n \geq 3$  un entier,  $\|\cdot\|$  une norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\text{Prim}(\mathbb{Z}^n)$  l'ensemble des points du réseau  $\mathbb{Z}^n$  à coordonnées premières entre elles. Notons  $V$  la mesure de Lebesgue usuelle de la boule unité pour  $\|\cdot\|$  et  $\lambda_1$  le premier minimum de  $\mathbb{Z}^n$  pour  $\|\cdot\|$ . Alors pour tout  $B \geq 0$*

$$(i) \quad |N_{\text{Prim}(\mathbb{Z}^n), \|\cdot\|}(B) - VB^n/\zeta_{\mathbb{Q}}(n)| \leq n^{10n^2}(B/\lambda_1)^{n-1} \text{ et}$$

$$(ii) \quad |N_{\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \|\cdot\|}(B) - VB^n| \leq n^{3n^2}(B/\lambda_1)^{n-1}.$$

L'assertion (i) est une conséquence immédiate de notre théorème principal 4.1.1, nous renvoyons au paragraphe 4.3.4 pour la preuve de ce fait. Elle implique une version faible de l'assertion (ii) qui quant à elle découle directement d'un outil crucial pour la démonstration du théorème 4.1.1 (voir le théorème 4.4.5).

Nous terminons ce paragraphe en donnant une illustration de notre théorème principal dans une situation où l'impureté intervient. Il s'agit du problème de Lohrer et Masser [24] résolu par Frei et Widmer [16] pour lequel nous obtenons ici un terme d'erreur explicite dans un cas très particulier.

Soient  $\theta_1, \dots, \theta_n$  des nombres algébriques non nuls. Considérons les hauteurs de Weil  $H_{\text{Weil}}^L$  et hermitienne standard  $H^L$  (relatives à  $L$ ) sur  $\mathbb{P}(L^n)$  où  $L =$

$K(\theta_1, \dots, \theta_n)$ . Nous définissons une hauteur (relative à  $K$ )  $H_\theta : \mathbb{P}(K^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$  par

$$H_\theta(x_1 : \dots : x_n) = H^L(\theta_1 x_1 : \dots : \theta_n x_n)^{1/[L:K]}.$$

Nous supposons qu'il existe un entier  $\ell > 0$  tel que  $\alpha_i = \theta_i^\ell \in K$  pour tout  $i$ , nous choisissons  $\ell$  minimal et nous notons  $0 \leq a_{\mathfrak{p},i} < \ell$  le reste dans la division euclidienne par  $\ell$  de la valuation de  $\alpha_i$  en un idéal premier non nul  $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ .

**Corollaire 4.1.6.** *Dans ces conditions, il existe des constantes  $\kappa, \kappa' > 0$  qui dépendent uniquement de  $n, K, \ell$  et des  $a_{\mathfrak{p},i}$  telles que pour tout  $B \geq 0$  nous ayons*

$$\begin{aligned} & |N_{\mathbb{P}(K^n), H_\theta}(B) - C(n, K) \kappa B^n| \\ & \leq \frac{(nd)^{10n^2 d^2} hR(\kappa')^{3n}}{w} (H_{\text{Weil}}^L(\theta^{-1})^{1/[L:K]} B)^{n-1/d}. \end{aligned}$$

De manière explicite,  $\kappa'$  est le produit des normes des idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  tels que  $a_{\mathfrak{p},i} > 0$  pour un certain  $i$ .

Ajoutons que la constante  $\kappa$  qui sera explicitée lors de la preuve au paragraphe 4.6.2 vérifie  $(\kappa')^{-n(\ell-1)/\ell} \leq \kappa \leq (\kappa')^{n(\ell-1)/\ell}$ . Ce corollaire fournit ainsi un terme d'erreur explicite pour un cas particulier du théorème 4 de [16]. Notons que ce dernier, énoncé pour  $\theta_1 = \dots = \theta_n$  et pour la hauteur de Weil, s'étend sans difficulté à des hauteurs hermitiennes et s'affranchit bien sûr de l'hypothèse  $\theta_i^\ell \in K$ .

#### 4.1.4 Grandes lignes de la démonstration

Pour démontrer le théorème 4.1.1 nous suivons la stratégie de la preuve classique du théorème de Schanuel avec quelques raffinements. Nous donnons ici un aperçu de la preuve dans le cas plus simple d'une unique place impure  $u_0$ , la différence avec le cas général ne consistant qu'en quelques arguments combinatoires supplémentaires. Dans le paragraphe 4.3.2, nous nous appuyons sur l'existence de bases orthogonales pour vérifier que l'application

$$\nu(x) = \|x\|_{u_0} / \|x\|_{u_0}^{\text{pur}}$$

ne prend que certaines valeurs  $\nu_1 > \dots > \nu_t$  (avec  $t \leq n$ ) que nous appelons les *valeurs impures* de  $\|\cdot\|_{u_0}$ . Nous commençons par filtrer les éléments  $x$  de  $E \setminus \{0\}$  selon la valeur impure  $\nu(x)$  associée de façon à traiter séparément les différents niveaux d'impureté et ainsi ne plus nous soucier que de la norme purifiée.

Dans le paragraphe 4.4.1, nous écrivons alors la partie finie de la hauteur de  $x$  à partir de  $\nu(x)$  et de la norme de l'idéal fractionnaire  $I_x = \{\alpha \in K \mid \forall u \nmid \infty, |\alpha|_u \leq \|x\|_u^{\text{pur}}\}$ . Comme dans la preuve de Schanuel, nous filtrons ensuite les éléments  $x$  selon la classe de  $I_x$  et nous utilisons une formule d'inversion de Möbius pour ramener l'estimation de  $N_{\mathbb{P}(E), H}(B)$  à l'estimation du cardinal de l'intersection de certains réseaux avec une partie fixée  $\Sigma$  de  $F = E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  (identifié à  $\mathbb{R}^{nd}$ ). Plus précisément, nous fixons un système  $\Sigma$  de représentants

de l'ensemble  $\{y \in F \mid 0 < H_\infty(y) \leq 1\}$  sous l'action du groupe  $U$  engendré par un système fondamental d'unités de  $K$ . Alors  $N_{\mathbb{P}(E), H}(B)$  s'exprime à partir de la somme des quantités

$$\pm \text{Card} \left( \frac{\{x \in E \mid I_x \subset IJ \text{ et } \|x\|_{u_0} = \nu_j |I|_{u_0}\}}{(B\nu_j^{-d_{u_0}} \mathfrak{N}(I))^{1/d}} \cap \Sigma \right)$$

où  $I$  parcourt un système de représentants du groupe des classes d'idéaux,  $J$  parcourt les idéaux non nuls de  $\mathcal{O}_K$  et  $1 \leq j \leq t$ . Dans le paragraphe 4.4.2 nous vérifions que l'ensemble

$$\mathcal{E}_j = \{x \in E \mid I_x \subset IJ \text{ et } \|x\|_{u_0} \leq \nu_j |I|_{u_0}\}$$

est un réseau de  $F$  et nous calculons son covolume en fonction de  $H(E_{\text{pur}})$  en particulier. Nous obtenons ainsi une famille  $\mathcal{E}_1 \supset \dots \supset \mathcal{E}_{t+1}$  de réseaux emboîtés de  $F$  et le cardinal précédent est celui de l'intersection de  $\Sigma$  avec l'ensemble obtenu en appliquant une homothétie (qui dépend de  $j$ ) à la tranche  $\mathcal{E}_j \setminus \mathcal{E}_{j+1}$ . Par différence, nous nous ramenons donc à des estimations du cardinal de l'intersection d'un réseau  $\Lambda$  et d'une partie  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^{nd}$ . Dans le paragraphe 4.4.3, nous donnons un théorème général de décompte qui figure dans [32] permettant de majorer la différence entre  $\text{Card}(\Lambda \cap \Sigma)$  et son approximation  $\text{vol}(\Sigma)/\text{vol}(\Lambda)$ .

Dans la partie 4.5, nous construisons un système  $\Sigma$  convenable et nous vérifions les hypothèses du théorème de décompte. Nous devons vérifier en particulier que le bord de  $\Sigma$  peut être paramétré par  $P$  applications  $L$ -lipschitziennes. Or ces grandeurs dépendent ici du régulateur  $R$  au mieux de manière exponentielle, ce qui serait insuffisant pour le théorème 4.1.1. Nous utilisons donc une méthode de partition de Schmidt (voir [34]) généralisée en dimension quelconque par Widmer [41, partie 8]. L'idée consiste à partager  $\Sigma$  en un nombre  $M$  de parties de façon à ramener le problème à une partie  $\Sigma_0$  de  $\Sigma$  dont nous savons paramétrer le bord indépendamment de  $R$ , quitte à ce que la dépendance en  $R$  se reporte sur  $M$ . Nous pouvons faire en sorte que cette dernière dépendance soit linéaire en choisissant judicieusement le système fondamental d'unités engendrant  $U$  grâce au théorème de Mahler. Nous calculons un paramétrage explicite de  $\Sigma_0$  et son volume. La conclusion de la preuve s'obtient en appliquant le théorème de décompte à  $\Sigma_0$  et à des réseaux convenables dont nous minorons le premier minimum en fonction de  $\Lambda_1(E_{\text{pur}})$  en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique.

Nous traitons enfin le cas particulier  $n - 1/d = 1$  dans la partie 4.5.4. Ici l'inversion de Möbius donne lieu à une série non convergente pour les termes d'erreurs donnés par le théorème de décompte 4.4.5, nous remplaçons donc ces erreurs approchées par les erreurs exactes à partir d'un certain rang. Pour les premiers termes, nous remplaçons également le théorème de décompte par un résultat de Chaix [9] en dimension 2, ce qui nous permet d'obtenir un terme d'erreur en  $O(B)$  au lieu de  $O(B \log B)$ .

## 4.2 Notations et rappels

Dans ce texte,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 1 et  $K$  un corps de nombres de degré  $[K : \mathbb{Q}] = d$ .

L'ensemble des idéaux fractionnaires de  $K$  est muni d'une structure de groupe abélien. Son quotient par le sous-groupe des idéaux fractionnaires principaux, noté  $\text{Cl}(K)$ , est fini de cardinal noté  $h$ . Comme l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$  est un anneau de Dedekind de corps des fractions  $K$ , tout idéal fractionnaire  $I$  se décompose de manière unique sous forme d'un produit fini

$$I = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(I)}$$

où  $\mathfrak{p}$  parcourt les idéaux premiers non nuls de  $\mathcal{O}_K$  et  $v_{\mathfrak{p}}(I) \in \mathbb{Z}$  est la valuation de  $I$  en  $\mathfrak{p}$ . On note  $\mathfrak{N}(I) \in \mathbb{Q}^{\times}$  la norme de l'idéal fractionnaire  $I$  et, si  $z$  est un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à 1, on définit le nombre complexe  $\zeta_K(z) = \sum 1/\mathfrak{N}(I)^z$ , où la somme est effectuée sur les idéaux non nuls  $I$  de  $\mathcal{O}_K$ .

On appelle place de  $K$  une classe d'équivalence de valeurs absolues sur  $K$  (non triviales) relativement à la topologie définie par celles-ci. On note  $V(K)$ ,  $V_{\infty}(K)$  et  $V_f(K)$  respectivement les ensembles des places de  $K$ , des places archimédiennes et des places ultramétriques. Notre choix de normalisation pour les valeurs absolues standard  $|\cdot|_v$  représentant les places de  $K$  est résumé par les relations :

- si  $v$  est archimédienne alors  $|2|_v = 2$  ;
- si  $u$  est ultramétrique au-dessus du nombre premier  $p$  alors  $|p|_u = p^{-1}$ .

Pour toute place  $v$  de  $K$  on note  $(K_v, |\cdot|_v)$  un complété de  $(K, |\cdot|_v)$ . Le degré local en  $v$  est défini par  $d_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$ , où  $\mathbb{Q}_v = \mathbb{R}$  si  $v|\infty$  et  $\mathbb{Q}_p$  si  $v|p$ . Dans ces conditions la formule du produit s'écrit pour tout élément  $\alpha \in K^{\times}$  :

$$\prod_{v \in V(K)} |\alpha|_v^{d_v} = 1.$$

Si  $v$  est une place archimédienne alors il existe un plongement  $\sigma_v : K \hookrightarrow \mathbb{C}$  tel que

$$|\alpha|_v = |\sigma_v(\alpha)|$$

pour tout  $\alpha \in K$ . Le plongement  $\sigma_v$  s'identifie alors à l'injection dans le complété  $K_v$ . La place  $v$  est dite réelle lorsque  $\sigma_v(K) \subset \mathbb{R}$  (et  $K_v = \mathbb{R}$ ,  $d_v = 1$ ), complexe sinon (auquel cas  $K_v = \mathbb{C}$  et  $d_v = 2$ ). On note  $r$  et  $s$  respectivement le nombre de places réelles et complexes de  $K$  de sorte que  $d = r + 2s$  et on pose  $\Delta$  le discriminant absolu de  $K$ , égal au carré du déterminant de la matrice  $(\sigma(\alpha_i))_{\sigma, i}$  où  $\sigma$  parcourt les plongements de  $K$  dans  $\mathbb{C}$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base quelconque de  $\mathcal{O}_K$ .

Soient  $\mathfrak{p}$  un idéal premier non nul de  $\mathcal{O}_K$  et  $p$  le nombre premier tel que  $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ . On définit le degré d'inertie  $f(\mathfrak{p}|p) = [\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$  et l'indice de

ramification  $e(\mathfrak{p}|p) = v_{\mathfrak{p}}(p\mathcal{O}_K)$ . Les places ultramétriques de  $K$  sont en correspondance bijective avec les idéaux premiers non nuls de  $\mathcal{O}_K$ . La valeur absolue définie pour tout  $\alpha \in K$  par

$$|\alpha|_u = p^{-v_{\mathfrak{p}}(\alpha\mathcal{O}_K)/e(\mathfrak{p}|p)}$$

est la valeur absolue standard représentant la place  $u$  associée à  $\mathfrak{p}$ . Pour tout idéal fractionnaire  $I$  on pose également  $|I|_u = p^{-v_{\mathfrak{p}}(I)/e(\mathfrak{p}|p)}$  de sorte que  $\mathfrak{N}(I) = \prod_{u \in V_f(K)} |I|_u^{-d_u}$ . De plus, comme

$$\{|\alpha|_u \mid \alpha \in K_u^\times\} = \{|\alpha|_u \mid \alpha \in K^\times\} = p^{\mathbb{Z}/e(\mathfrak{p}|p)},$$

la valuation  $-\log |\cdot|_u$  sur  $K_u$  est discrète et son anneau de valuation  $\mathcal{O}_u = \{\alpha \in K_u \mid |\alpha|_u \leq 1\}$  est principal. On appelle uniformisante tout élément  $\pi \in \mathcal{O}_u$  tel que  $|\pi|_u = p^{-1/e(\mathfrak{p}|p)}$ . Alors les idéaux non nuls de  $\mathcal{O}_u$  sont précisément les  $\pi^k \mathcal{O}_u$  où  $k \in \mathbb{N}$ . En particulier l'anneau  $\mathcal{O}_u$  est local d'idéal maximal  $\pi \mathcal{O}_u$  et le corps résiduel  $\mathcal{O}_u/\pi \mathcal{O}_u$  est fini de cardinal  $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ . Le corps  $K_u$  est donc un corps local et  $\mathcal{O}_u$  est une partie compacte de  $(K_u, |\cdot|_u)$ .

On note enfin  $\ell : \mathcal{O}_K^\times \rightarrow \mathbb{R}^{V_\infty(K)}$  le morphisme de groupes défini par  $\ell(\alpha) = (d_v \log |\alpha|_v)_{v \in V_\infty(K)}$  pour toute unité  $\alpha \in \mathcal{O}_K^\times$ . Son noyau est le groupe des racines de l'unité de  $K$  fini de cardinal noté  $w$  et son image est un réseau  $\Lambda$  de l'hyperplan  $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^{V_\infty(K)} \mid \sum_v x_v = 0\}$  de dimension  $q = r + s - 1$ . En particulier

$$\mathcal{O}_K^\times \simeq \mathbb{Z}^q \times \mathbb{Z}/w\mathbb{Z}.$$

On appelle système fondamental d'unités toute famille  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$  d'éléments de  $\mathcal{O}_K^\times$  telle que les  $\eta_i = \ell(\varepsilon_i)$  forment une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Lambda$ . Le covolume de  $\Lambda$  pour la structure euclidienne canonique est  $\sqrt{q+1}R$  par définition du régulateur  $R$  de  $K$  (voir [41, partie 6]).

Sauf mention du contraire, les espaces  $\mathbb{R}^m$  et en particulier  $\mathbb{R}^{V_\infty(K)}$  sont munis de la norme euclidienne canonique  $\|(x_1, \dots, x_m)\|_{\text{eucl}} = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$  et on pose  $\omega_m = \pi^{m/2}/\Gamma(1+m/2)$  le volume de la boule unité.

## 4.3 Notion de fibré adélique hermitien

### 4.3.1 Ultranormes et bases orthogonales

Considérons une place ultramétrique  $u$  de  $K$  et un espace vectoriel  $E_u$  de dimension finie  $n$  sur  $K_u$ . Nous notons  $p, e$  et  $f$  respectivement le nombre premier, l'indice de ramification et le degré d'inertie associés à  $u$ . Nous pouvons étendre formellement la notion de norme à un tel espace.

**Définition 4.3.1.** Une application  $\|\cdot\|_u : E_u \rightarrow \mathbb{R}_+$  est appelée ultranorme si elle vérifie pour tous  $x, y \in E_u$  et  $\alpha \in K_u$

- (i)  $\|x\|_u = 0 \iff x = 0$  (définition),
- (ii)  $\|\alpha x\|_u = |\alpha|_u \|x\|_u$  (homogénéité),

(iii)  $\|x + y\|_u \leq \max(\|x\|_u, \|y\|_u)$  (inégalité ultramétrique).

On dit qu'une ultranorme  $\|\cdot\|_u$  est pure si pour tout  $x \in E_u$  il existe  $\alpha \in K_u$  tel que  $\|x\|_u = |\alpha|_u$ , autrement dit si

$$\{\|x\|_u \mid x \in E_u \setminus \{0\}\} \subset p^{\mathbb{Z}/e}.$$

Un exemple fondamental d'ultranorme pure est la norme du maximum associée à une base de  $E_u$  : si nous fixons une  $K_u$ -base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E_u$ , nous lui associons la norme définie par

$$\left\| \sum_i x_i e_i \right\|_{\max} = \max_i |x_i|_u.$$

En revanche, l'application  $x \mapsto \sqrt{p}|x|_p$  sur  $\mathbb{Q}_p$  est un exemple simple d'ultranorme impure.

De manière classique, nous associons à une ultranorme donnée une distance et une topologie sur  $E_u$ . Par Weil [40, II.1 proposition 1], on sait que la topologie ainsi définie ne dépend pas de l'ultranorme choisie et coïncide avec la topologie produit obtenue en identifiant  $E_u$  et  $K_u^n$  au moyen d'une base quelconque. Nous munirons donc  $E_u$  de cette topologie naturelle. Par l'inégalité ultramétrique, les ultranormes sont continues pour la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}$ .

Le théorème d'équivalence des normes, bien connu en théorie des espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie, se prolonge dans le cas où le corps de base est le complété d'un corps de nombres.

**Lemme 4.3.1.** *Les parties compactes de  $E_u$  sont les parties fermées bornées et  $E_u$  est complet (pour une ultranorme quelconque). De plus, si  $\|\cdot\|_u$  et  $\|\cdot\|'_u$  sont deux ultranormes sur  $E_u$  alors il existe un réel  $C_u > 0$  tel que pour tout  $x \in E_u$*

$$\|x\|'_u \leq C_u \|x\|_u.$$

*Démonstration.* La proposition de Weil citée ci-dessus affirme en particulier que les parties de la forme  $\{x \in E_u \mid \|x\|_u \leq r\}$  avec  $r > 0$  sont compactes, donc les parties fermées bornées sont compactes. La complétude s'obtient aisément en écrivant que toute suite de Cauchy est bornée donc admet une valeur d'adhérence. Il suffit enfin de définir  $C_u$  comme le maximum de l'application continue  $x \mapsto \|x\|'_u / \|x\|_u$  sur le compact  $C = \{x \in E_u \mid \|x\|_u \in [p^{-1/e}, 1]\}$  et de remarquer que pour tout  $x \in E_u \setminus \{0\}$  il existe  $\alpha \in K_u$  tel que  $\alpha x \in C$ .  $\square$

Nous vérifions maintenant que les ultranormes pures sont en fait exactement les normes du maximum associées aux bases de  $E_u$ . Plus généralement, étant donné une ultranorme  $\|\cdot\|_u$  sur  $E_u$ , nous allons voir qu'il existe des bases dites orthogonales dans lesquelles elle admet une expression simple.

**Définition 4.3.2.** *Une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E_u$  est dite  $\|\cdot\|_u$ -orthogonale si pour tous  $x_1, \dots, x_n \in K_u$  on a*

$$\left\| \sum_i x_i e_i \right\|_u = \max_i |x_i|_u \|e_i\|_u.$$

*Elle est dite  $\|\cdot\|_u$ -orthonormée si de plus  $\|e_i\|_u = 1$  pour tout  $i$ .*

Un résultat important (voir Weil [40, II.1 proposition 3]) assure l'existence de bases orthogonales pour une ultranorme. A partir d'une base orthogonale, il est simple de se ramener à une base orthogonale dont les éléments ont des normes dans l'intervalle  $]p^{-1/e}, 1]$  (ou à une base orthonormée dans le cas pur) en divisant chaque élément par un élément de  $K_u^\times$  bien choisi.

**Proposition 4.3.2.** *Il existe une  $K_u$ -base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E_u$  qui est  $\|\cdot\|_u$ -orthogonale et qui vérifie de plus  $\|e_i\|_u \in ]p^{-1/e}, 1]$  pour tout  $i$ . La base obtenue est orthonormée lorsque l'ultranorme est pure.*

Ainsi une ultranorme sur  $E_u$  est pure si et seulement si elle admet une base orthonormée. Nous pouvons enfin caractériser algébriquement les bases orthonormées dans le cas pur grâce au sous- $\mathcal{O}_u$ -module de  $E_u$  qu'elles engendrent.

**Proposition 4.3.3.** *Supposons  $\|\cdot\|_u$  pure. L'ensemble  $M = \{x \in E_u \mid \|x\|_u \leq 1\}$  est un sous- $\mathcal{O}_u$ -module de  $E_u$  qui est libre de rang  $n$  et dont les bases sont les  $K_u$ -bases  $\|\cdot\|_u$ -orthonormées de  $E_u$ . En particulier, toute base de  $E_u$  dont la matrice de passage dans une base orthonormée est dans  $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_u)$  est elle-même orthonormée.*

*Démonstration.* L'ensemble  $M$  est bien un  $\mathcal{O}_u$ -module en vertu de l'inégalité ultramétrique. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une  $K_u$ -base  $\|\cdot\|_u$ -orthonormée de  $E_u$ . Elle est  $\mathcal{O}_u$ -libre, contenue dans  $M$  et si  $x = \sum_i x_i e_i \in M$  avec  $x_i \in K_u$  alors pour tout  $i$  on a  $|x_i|_u \leq \|x\|_u \leq 1$  donc  $x_i \in \mathcal{O}_u$ . Elle constitue donc bien une  $\mathcal{O}_u$ -base de  $M$ .

Soit ensuite  $(e'_1, \dots, e'_n)$  une  $\mathcal{O}_u$ -base de  $M$ . Posons  $e'_i = \sum_j C_{ij} e_j$  avec  $C \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_u)$ , alors  $\|e'_i\|_u = \max_j |C_{ij}|_u \leq 1$ . Si  $\|e'_i\|_u < 1$  alors par pureté  $\|e'_i\|_u \leq |\pi|_u$  où  $\pi \in \mathcal{O}_u$  est une uniformisante, donc  $\pi^{-1}e'_i \in M$ . Ceci est absurde, donc  $\|e'_i\|_u = 1$ . Soit maintenant  $x = \sum_i x'_i e'_i = \sum_j x_j e_j \in E_u$  alors

$$\max_j |x_j|_u = \|x\|_u \leq \max_i |x'_i|_u \leq \max_{i,j} |(C^{-1})_{ji}|_u |x_j|_u \leq \max_j |x_j|_u,$$

donc  $(e'_1, \dots, e'_n)$  est orthonormée.  $\square$

### 4.3.2 Valeurs impures d'une ultranorme

Nous nous plaçons dans la situation du paragraphe précédent 4.3.1 et considérons une ultranorme  $\|\cdot\|_u$  sur  $E_u$  non nécessairement pure. La vérification du fait suivant est immédiate.

**Définition 4.3.3.** *L'application*

$$\|x\|_u^{\mathrm{pur}} = \exp \left( \frac{\log p}{e} \left\lceil \frac{e \log \|x\|_u}{\log p} \right\rceil \right)$$

*est une ultranorme pure sur  $E_u$  que nous appellerons purifiée de  $\|\cdot\|_u$  et qui vérifie l'encadrement  $\|x\|_u \leq \|x\|_u^{\mathrm{pur}} < p^{1/e} \|x\|_u$  pour tout  $x \neq 0$ .*

Nous utilisons les bases orthogonales fournies par la proposition 4.3.2 pour définir les valeurs impures de  $\|\cdot\|_u$  et quantifier ainsi son « niveau d'impureté ». Fixons une  $K_u$ -base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E_u$  qui est  $\|\cdot\|_u$ -orthogonale et telle que  $\|e_i\|_u \in ]p^{-1/e}, 1]$  pour tout  $i$ . On définit la famille de nombres réels positifs  $1 \geq \nu_1 > \dots > \nu_t > \nu_{t+1} = p^{-1/e}$  telle que

$$\{\|e_1\|_u, \dots, \|e_n\|_u\} = \{\nu_1, \dots, \nu_t\}$$

et on pose  $k_j = \text{Card}\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \|e_i\|_u = \nu_j\}$  pour tout  $j$ . On définit enfin les  $\mathcal{O}_u$ -modules

$$M_j = \{x \in E_u \mid \|x\|_u \leq \nu_j\}.$$

**Proposition 4.3.4.** *Sous ces hypothèses on a les égalités*

$$\begin{aligned} \{\nu_1, \dots, \nu_t\} &= \{\|x\|_u \mid x \in E_u\} \cap ]p^{-1/e}, 1] \text{ et} \\ p^{k_j f} &= \text{Card}(M_j/M_{j+1}). \end{aligned}$$

En particulier les  $\nu_j$  et les  $k_j$  ne dépendent pas du choix de  $(e_1, \dots, e_n)$ .

*Démonstration.* Dans la première égalité à prouver l'inclusion  $\subset$  est claire. Réciproquement, soit  $x \in E_u$  tel que  $\|x\|_u \in ]p^{-1/e}, 1]$ . Posons  $x = \sum_i x_i e_i$  avec  $x_i \in K_u$  de sorte que  $\|x\|_u = \max_i |x_i|_u \|e_i\|_u$ . Fixons un indice  $i$  où ce maximum est atteint. Alors

$$p^{-1/e} \leq \frac{p^{-1/e}}{\|e_i\|_u} < |x_i|_u \leq \frac{1}{\|e_i\|_u} < p^{1/e},$$

ce qui implique  $|x_i|_u = 1$  et finalement  $\|x\|_u = \|e_i\|_u$ .

Montrons maintenant l'assertion sur les modules  $M_j$ . Quitte à réorganiser les éléments de la base on peut supposer que  $1 \geq \|e_1\|_u \geq \dots \geq \|e_n\|_u > p^{-1/e}$ . On pose  $i_j = k_1 + \dots + k_j$  pour tout  $j$  ainsi que  $i_0 = 0$ . Fixons un indice  $j$  et montrons que  $M_j$  est un  $\mathcal{O}_u$ -module libre de base  $(\pi e_1, \dots, \pi e_{i_{j-1}}, e_{i_{j-1}+1}, \dots, e_n)$  avec  $\pi \in \mathcal{O}_u$  une uniformisante. On constate que ces éléments sont bien dans  $M_j$ . Réciproquement, soit  $x \in M_j$  et posons  $x = \sum_i x_i e_i$  avec  $x_i \in K_u$ . Alors  $|x_i|_u \leq \nu_j / \|e_i\|_u < p^{1/e}$  pour tout  $i$  et en particulier

$$|x_i|_u \begin{cases} < 1 & \text{si } i \leq i_{j-1}, \\ \leq 1 & \text{si } i > i_{j-1}. \end{cases}$$

Ainsi  $x_i \in \mathcal{O}_u$  pour  $i > i_{j-1}$  et  $x_i = \pi x'_i$  avec  $x'_i \in \mathcal{O}_u$  sinon. Par conséquent, le cardinal du quotient  $M_j/M_{j+1}$  vaut bien  $p^{k_j f}$  puisque

$$M_j/M_{j+1} \simeq \prod_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} \mathcal{O}_u/\pi \mathcal{O}_u = (\mathcal{O}_u/\pi \mathcal{O}_u)^{k_j}.$$

□

**Définition 4.3.4.** Nous dirons que les  $\nu_j$  sont les valeurs impures de  $\|\cdot\|_u$  de multiplicités  $k_j$ . On pose  $i_j = k_1 + \dots + k_j$  ( $i_0 = 0$ ) et

$$\kappa_u = \frac{1}{p^{nf} - 1} \sum_{j=1}^t \frac{p^{(n-i_{j-1})f} - p^{(n-i_j)f}}{\nu_j^{nd_u}}.$$

Remarquons que l'encadrement  $p^{-1/e} < \nu_j \leq 1$  entraîne  $\kappa_u \in [1, p^{nf}]$  et que  $\|\cdot\|_u$  est pure si et seulement si elle ne possède qu'une seule valeur impure  $\nu_1 = 1$  de multiplicité  $n$ , autrement dit si et seulement si  $\kappa_u = 1$ .

Le calcul de  $\kappa_u$  suppose la connaissance des valeurs impures et donc d'une base orthogonale. Nous donnons maintenant une expression intrinsèque de  $\kappa_u$  sous la forme d'une intégrale et faisons ainsi le lien avec la quantité  $\kappa(E)$  définie dans l'introduction.

On considère la mesure de Haar vol sur le groupe topologique localement compact  $E_u$  normalisée par la relation  $\text{vol}\{x \in E_u \mid \|x\|_u \leq 1\} = 1$ . En particulier, si  $\phi \in \text{GL}(E_u)$  alors

$$\text{vol}(\phi(A)) = |\det(\phi)|_u^{d_u} \text{vol}(A)$$

pour tout borélien  $A \subset E_u$ . On définit une mesure borélienne de probabilité  $\omega_u$  sur  $\mathbb{P}(E_u)$  par  $\omega_u(A) = \text{vol}\{x \in \varpi^{-1}(A) \mid \|x\|_u \leq 1\}$  où  $\varpi : E_u \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E_u)$  est la projection canonique.

**Proposition 4.3.5.** On a la formule

$$\kappa_u = \int_{\mathbb{P}(E_u)} g(X) d\omega_u(X)$$

avec  $g(\varpi(x)) = (\|x\|_u^{\text{pur}} / \|x\|_u)^{nd_u}$ .

*Démonstration.* Nous vérifions dans un premier temps que

$$g(\mathbb{P}(E_u)) = \{\nu_1^{-nd_u}, \dots, \nu_t^{-nd_u}\}.$$

En effet si  $x \in E_u \setminus \{0\}$  alors il existe  $\alpha \in K^\times$  tel que  $\|x\|_u^{\text{pur}} = |\alpha|_u$ , puis  $\|x/\alpha\|_u = \|x\|_u / \|x\|_u^{\text{pur}} \in ]p^{-1/e}, 1]$ . La proposition 4.3.4 assure alors que le quotient  $\|x\|_u / \|x\|_u^{\text{pur}}$  est égal à  $\nu_j$  pour un certain  $j$  et on en déduit aisément le résultat annoncé. En outre,  $g$  est continue puisque les normes sont continues et donc

$$F_j = \varpi^{-1}(g^{-1}(\{\nu_j^{-nd_u}\})) = \{x \in E_u \setminus \{0\} \mid \|x\|_u = \nu_j \|x\|_u^{\text{pur}}\}$$

est un fermé de  $E_u \setminus \{0\}$  pour tout  $j$ . Ainsi l'intégrale est bien définie et

$$\int_{\mathbb{P}(E_u)} g(X) d\omega_u(X) = \sum_{j=1}^t \nu_j^{-nd_u} \text{vol}\{x \in F_j \mid \|x\|_u \leq 1\}.$$

Fixons un indice  $j$  et une uniformisante  $\pi \in \mathcal{O}_u$ , alors

$$\{x \in F_j \mid \|x\|_u \leq 1\} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in E_u \mid \|x\|_u = \nu_j p^{-k/e}\} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \pi^k M_j \setminus \pi^k M_{j+1}.$$

Or  $\text{vol}(M_1) = 1$  par définition et  $M_j$  est la réunion disjointe de  $p^{kjf}$  translatés de  $M_{j+1}$  par la proposition 4.3.4. Donc par récurrence  $\text{vol}(M_j) = p^{-i_{j-1}f}$  et ainsi

$$\text{vol}\{x \in F_j \mid \|x\|_u \leq 1\} = \sum_{k=0}^{\infty} |\pi^{kn}|_u^{d_u} (p^{-i_{j-1}f} - p^{-i_j f}) = \frac{p^{-i_{j-1}f} - p^{-i_j f}}{1 - p^{-nf}}.$$

□

### 4.3.3 Fibrés adéliques hermitiens

La structure de fibré adélique hermitien est un cadre souple qui permet d'envisager une large famille de hauteurs sur l'espace projectif associé à un espace vectoriel abstrait  $E$  de dimension finie sur  $K$ . Ces hauteurs sont formées par produit à partir d'une famille de normes  $(\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)}$  définies sur les espaces  $E_v = E \otimes_K K_v$ . Nous renvoyons aux articles de Gaudron [18, partie 3] et [19, paragraphe 2.1] pour de plus amples détails (à la différence près qu'ici nous n'utilisons pas les corps  $\mathbb{C}_v$ ).

**Définition 4.3.5.** *Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Pour chaque place  $v \in V(K)$ , on munit le  $K_v$ -espace vectoriel  $E_v = E \otimes_K K_v$  d'une norme notée  $\|\cdot\|_v$ . On suppose que la famille de normes  $(\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)}$  vérifie les hypothèses suivantes :*

- (i) *si  $v$  est archimédienne réelle alors  $\|\cdot\|_v$  est euclidienne ;*
- (ii) *si  $w$  est archimédienne complexe alors  $\|\cdot\|_w$  est hermitienne ;*
- (iii) *si  $u$  est ultramétrique alors  $\|\cdot\|_u$  est une ultranorme ;*
- (iv) *il existe un ensemble fini  $S$  de places ultramétriques et une  $K$ -base  $(b_1, \dots, b_n)$  de  $E$  qui est  $\|\cdot\|_u$ -orthonormée pour tout  $u \in V_f(K) \setminus S$ .*

*On dit alors que  $(E, (\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)})$  (ou simplement  $E$ ) est un fibré adélique hermitien de dimension  $n$  sur  $K$ .*

Plus généralement, la définition d'un fibré (vectoriel) adélique s'obtient en omettant les axiomes (i) et (ii). Les fibrés purs [19] constituent un cas particulier plus simple mais également très riche de la notion de fibré adélique hermitien. En outre, la donnée d'un fibré adélique hermitien pur correspond exactement à la donnée d'un fibré vectoriel hermitien sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$  au sens de la géométrie d'Arakelov.

**Définition 4.3.6.** *On dit que  $E$  est pur lorsque  $\|\cdot\|_u$  est pure pour toute place ultramétrique  $u$  ou, de manière équivalente, lorsque pour tout  $u \in V_f(K)$  et tout  $x \in E$  il existe  $\alpha \in K$  tel que  $\|x\|_u = |\alpha|_u$ .*

L'espace  $E = K^n$  muni de la famille de normes  $(\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)}$  définies pour toute place  $v$  et tout  $x \in K_v^n$  par

$$\|x\|_v = \begin{cases} (|x_1|_v^2 + \dots + |x_n|_v^2)^{1/2} & \text{si } v|\infty, \\ \max\{|x_1|_v, \dots, |x_n|_v\} & \text{si } v \nmid \infty \end{cases}$$

est un exemple de fibré adélique hermitien pur que nous appelons *fibré standard* de dimension  $n$  sur  $K$ .

Dans toute la suite,  $(E, (\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)})$  désignera un fibré adélique hermitien de dimension  $n$  sur  $K$ . Le produit scalaire euclidien ou hermitien associé à  $\|\cdot\|_v$  pour  $v$  archimédienne sera noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ .

En remplaçant les normes aux places ultramétriques par les normes purifiées (voir définition 4.3.3) et en posant  $\|\cdot\|_v^{\text{pur}} = \|\cdot\|_v$  pour toute place archimédienne  $v$ , nous munissons  $E$  d'une seconde structure de fibré adélique hermitien (pur) que nous appellerons *fibré purifié* de  $E$  et désignerons par  $E_{\text{pur}} = (E, (\|\cdot\|_v^{\text{pur}})_{v \in V(K)})$ .

Notons que l'ensemble  $E$  s'identifie naturellement à une partie de  $E_v$  au moyen de l'application injective  $x \mapsto x \otimes 1$ . En outre, l'image d'une  $K$ -base de  $E$  est une  $K_v$ -base de  $E_v$  et  $E$  est une partie dense de  $(E_v, \|\cdot\|_v)$ .

Fixons un ensemble  $S$  et une  $K$ -base  $(b_1, \dots, b_n)$  de  $E$  satisfaisant l'assertion (iv) de la définition 4.3.5. Une remarque importante est que cette propriété s'étend immédiatement à toute base. Plus précisément, pour toute  $K$ -base  $(b'_1, \dots, b'_n)$  de  $E$  il existe un ensemble fini  $S'$  de places ultramétriques tel que  $(b'_1, \dots, b'_n)$  est  $\|\cdot\|_u$ -orthonormée pour tout  $u \in V_f(K) \setminus S'$ . En effet, si on pose  $b'_i = \sum_j C_{ij} b_j$  alors la proposition 4.3.3 assure que l'ensemble suivant convient :

$$S' = S \cup \bigcup_{i,j} \{u \in V_f(K) \mid |C_{ij}|_u > 1 \text{ ou } |(C^{-1})_{ij}|_u > 1\}.$$

**Définition 4.3.7.** Pour tout  $x \in E$  on pose

$$H_\infty(x) = \prod_{v|\infty} \|x\|_v^{d_v}, \quad H_f(x) = \prod_{v \nmid \infty} \|x\|_v^{d_v} \text{ et}$$

$$H(x) = H_\infty(x)H_f(x) = \prod_{v \in V(K)} \|x\|_v^{d_v}.$$

L'application  $H$  se factorise en une application  $H : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

Notons que ces produits sont des produits finis. En effet, si nous écrivons  $x = \sum_i x_i b_i$ , alors l'ensemble des places  $v$  pour lesquelles  $\|x\|_v \notin \{0, 1\}$  est inclus dans l'ensemble fini

$$V_\infty(K) \cup S \cup \bigcup_i \{u \in V_f(K) \mid |x_i|_u \notin \{0, 1\}\}.$$

La dernière assertion dans la définition découle de la formule du produit.

Nous vérifions maintenant que l'application hauteur sur  $\mathbb{P}(E)$  vérifie la propriété de Northcott. Une fois ce résultat établi, nous noterons  $\Lambda_1(E) > 0$  la plus petite hauteur d'un élément de  $\mathbb{P}(E)$ .

**Proposition 4.3.6.** *Pour tout réel positif  $B$  on a*

$$N_{\mathbb{P}(E), H}(B) = \text{Card}\{X \in \mathbb{P}(E) \mid H(X) \leq B\} < \infty.$$

*Démonstration.* Il suffit de minorer la hauteur d'un élément  $x \in E$  en fonction de la hauteur de Weil de ses coordonnées dans une base. Vérifions donc qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x = \sum_i x_i b_i \in E$  on ait

$$H(x) \geq C \prod_{v \in V(K)} \max_i |x_i|_v^{d_v}.$$

En vertu du lemme 4.3.1, pour toute place  $v$  il existe  $C_v > 0$  tel que pour tout  $x$  on ait  $\|x\|_v \geq C_v \max_i |x_i|_v$ . De plus on peut choisir  $C_u = 1$  pour tout  $u \in V_f(K) \setminus S$ . La constante  $C = \prod_v C_v^{d_v} > 0$  convient donc.  $\square$

Nous noterons  $H_\infty^{\text{pur}} = H_\infty$ ,  $H_f^{\text{pur}}$  et  $H^{\text{pur}}$  les hauteurs (partielles ou globale) associées au fibré  $E_{\text{pur}}$ . En particulier  $H \leq H^{\text{pur}} \leq \kappa'(E)H$  car  $1 \leq (\|\cdot\|_u^{\text{pur}} / \|\cdot\|_u)^{d_u} < p_u^{d_u/e_u} = p_u^{f_u}$  et  $\kappa'(E) = \prod_{u \in S} p_u^{f_u}$ , ce qui entraîne enfin  $\Lambda_1(E) \leq \Lambda_1(E_{\text{pur}}) \leq \kappa'(E)\Lambda_1(E)$ .

#### 4.3.4 Hauteur d'un fibré adélique hermitien pur

Si  $E$  est muni d'une structure de fibré adélique hermitien, nous pouvons munir son déterminant  $\det(E)$  d'une structure de fibré adélique hermitien sur  $K$  de dimension 1 (voir [18, partie 3.3]). Dans ce texte nous utiliserons cette construction pour les fibrés purifiés uniquement, donc nous nous plaçons ici dans le cas pur. Notons que pour toute place  $v$  il existe un isomorphisme naturel entre  $\det(E_v)$  et  $\det(E)_v$  par lequel nous identifions ces deux espaces.

**Proposition 4.3.7.** *Si  $E$  est pur, il existe une unique structure de fibré adélique hermitien notée  $(\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)}$  sur  $\det(E)$  telle que pour toute place  $v$  et toute  $K_v$ -base  $\| \cdot \|_v$ -orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E_v$  on ait*

$$\|e_1 \wedge \dots \wedge e_n\|_v = 1.$$

*Démonstration.* Fixons une place  $v$  et considérons deux  $K_v$ -bases  $\| \cdot \|_v$ -orthonormées  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(e'_1, \dots, e'_n)$  de  $E_v$ . Alors la matrice de passage  $C \in \text{GL}_n(K_v)$  définie par  $e'_i = \sum_j C_{ij} e_j$  vérifie  $|\det(C)|_v = 1$ . En effet, dans le cas  $v$  archimédienne la matrice  $C$  est unitaire et dans le cas  $v$  ultramétrique on applique la proposition 4.3.3. Comme

$$(e'_1 \wedge \dots \wedge e'_n) = (\det(C))(e_1 \wedge \dots \wedge e_n),$$

la norme sur  $\det(E)_v$  définie par  $\|e_1 \wedge \dots \wedge e_n\|_v = 1$  vérifie la propriété demandée.

Cette propriété définit bien une unique famille de normes sur les  $\det(E)_v$  puisque ces espaces vectoriels sont de dimension 1. Par le même argument, le couple  $(\det(E), (\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)})$  vérifie clairement les axiomes de fibré adélique hermitien sur  $K$ . Notons en effet que si  $S$  et  $(b_1, \dots, b_n)$  sont tels que dans

l'assertion (iv) de la définition 4.3.5, alors la  $K$ -base  $b_1 \wedge \dots \wedge b_n$  de  $\det(E)$  est  $\|\cdot\|_u$ -orthonormée pour tout  $u \in V_f(K) \setminus S$  puisque  $\|b_1 \wedge \dots \wedge b_n\|_u = 1$ .  $\square$

En raison de la dimension 1, l'application hauteur associée à cette structure se réduit à la donnée d'un seul nombre que nous appelons la hauteur du fibré  $E$ .

**Définition 4.3.8.** *La hauteur du fibré adélique hermitien pur  $E$  notée  $H(E)$  est la hauteur de l'unique élément de  $\mathbb{P}(\det(E))$ .*

Soit  $(b_1, \dots, b_n)$  une  $K$ -base de  $E$  et, pour toute place  $v$ , soit  $C_v$  la matrice de cette base dans une  $K_v$ -base  $\|\cdot\|_v$ -orthonormée de  $E_v$ . Alors

$$H(E) = \prod_{v \in V(K)} \|b_1 \wedge \dots \wedge b_n\|_v^{d_v} = \prod_{v \in V(K)} |\det C_v|_v^{d_v}.$$

En particulier la hauteur du fibré standard est 1. Nous sommes maintenant en mesure de montrer que la première assertion de la proposition 4.1.5 (concernant le nombre de points primitifs de  $\mathbb{Z}^n$  contenus dans un ellipsoïde) se déduit du théorème principal 4.1.1. La démonstration de la proposition sera complétée au paragraphe 4.4.3.

*Démonstration.* (de la proposition 4.1.5, (i)) Munissons  $E = \mathbb{Q}^n$  d'une structure de fibré adélique hermitien pur en posant  $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|$  et

$$\|x\|_p = \max\{|x_1|_p, \dots, |x_n|_p\}$$

pour tout nombre premier  $p$ . Notons que toute droite vectorielle de  $E$  contient exactement deux points de  $\text{Prim}(\mathbb{Z}^n)$  et que pour un tel point  $x$  nous avons  $H(x) = \|x\|$ . En particulier  $\Lambda_1(E)$  est le premier minimum de  $\mathbb{Z}^n$  pour  $\|\cdot\|$ . Par ailleurs, il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  qui est orthonormée pour  $\|\cdot\|$  et orthogonale pour le produit scalaire canonique. La formule ci-dessus appliquée à la base canonique entraîne

$$H(E) = \frac{1}{\|e_1\|_{\text{eucl}} \dots \|e_n\|_{\text{eucl}}} = \frac{\omega_n}{V}.$$

Comme  $C(n, \mathbb{Q}) = \omega_n/2\zeta_{\mathbb{Q}}(n)$ , le théorème 4.1.1 donne l'assertion (i).  $\square$

## 4.4 Réseaux associés à un fibré

Soit  $(E, (\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)})$  un fibré adélique hermitien de dimension  $n$  sur  $K$ . Dans toute la suite, on désignera par  $F$  le produit tensoriel  $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ . C'est un  $K$ -espace vectoriel et un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $nd$  naturellement isomorphe à  $\prod_{v| \infty} E_v$  (pour ces deux structures simultanément). En particulier,  $F$  est muni d'un produit scalaire euclidien naturel défini par

$$\langle x, y \rangle_F = \sum_{v \text{ réelle}} \langle x_v, y_v \rangle_v + \sum_{w \text{ complexe}} 2\text{Re} \langle x_w, y_w \rangle_w$$

et de la norme  $\|\cdot\|_F$  induite, ainsi que de la mesure de Lebesgue vol associée. Nous l'identifierons à  $\mathbb{R}^{nd}$  grâce à un isomorphisme isométrique pour la norme euclidienne canonique. On identifie  $E$  à une partie de  $F$  grâce au plongement diagonal. Enfin on prolonge l'application  $H_\infty$  de  $E$  à  $F$  en posant  $H_\infty(y) = \prod_{v|\infty} \|y_v\|_v^{d_v}$  pour tout  $y = (y_v)_{v|\infty} \in F$ .

#### 4.4.1 Filtrations et inversion de Möbius

Dans toute la suite, nous fixons un système  $T$  d'idéaux fractionnaires représentant le groupe des classes d'idéaux  $\text{Cl}(K)$ . Par définition,  $T$  est fini de cardinal  $h$ . Nous notons  $U$  le sous-groupe de  $\mathcal{O}_K^\times$  engendré par un système d'unités fondamentales  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$  vérifiant la condition du lemme ci-dessous lorsque  $q > 0$  et nous posons simplement  $U = \{1\}$  dans le cas  $q = 0$ .

**Lemme 4.4.1.** *Il existe un système fondamental d'unités  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$  tel que*

$$M = M_1 \dots M_q \leq 2^d d^{4d} R$$

où  $M_i = \lfloor \|\eta_i\|_{\text{eucl}} \rfloor + 1$  et  $\eta_i = \ell(\varepsilon_i) = (d_v \log |\varepsilon_i|_v)_{v|\infty}$ .

*Démonstration.* Le théorème de Mahler (voir Cassels [7, V.4 lemme 8]) assure que nous pouvons choisir notre système fondamental d'unités de sorte que  $\|\eta_i\|_{\text{eucl}} \leq \max(1, i/2) \lambda_i$  pour tout  $i$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  sont les minima successifs du réseau  $\ell(\mathcal{O}_K^\times)$ . Définissons la hauteur logarithmique absolue d'un élément  $\alpha \in K$  par

$$h(\alpha) = \sum_{v \in V(K)} \frac{d_v}{d} \log \max(1, |\alpha|_v) = \frac{\log H_{\text{Weil}}(1 : \alpha)}{d}.$$

Pour toute unité  $\varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times$  qui n'est pas une racine de l'unité, on a

$$\begin{aligned} dh(\varepsilon) &= \sum_{v|\infty} d_v \log \max(1, |\varepsilon|_v) = \frac{1}{2} \sum_{v|\infty} d_v (\log \max(1, |\varepsilon|_v^2) - \log |\varepsilon|_v) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v|\infty} d_v \log \max(|\varepsilon|_v^{-1}, |\varepsilon|_v) = \frac{1}{2} \sum_{v|\infty} d_v |\log |\varepsilon|_v| \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{d} \|\ell(\varepsilon)\|_{\text{eucl}}. \end{aligned}$$

La majoration de la dernière ligne provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ensuite, on applique une version du théorème de Dobrowolski établie par Voutier [39, corollaire 2] pour obtenir

$$\|\ell(\varepsilon)\|_{\text{eucl}} \geq 2\sqrt{d}h(\varepsilon) \geq \frac{4}{\sqrt{d}(\log(3d))^3}.$$

Ceci implique  $M_i \leq (\sqrt{d}(\log(3d))^3/4 + 1)\|\eta_i\|_{\text{eucl}} \leq 4d^2\|\eta_i\|_{\text{eucl}}$ . Ainsi par le second théorème de Minkowski (rappelons que  $\text{vol}(\ell(\mathcal{O}_K^\times)) = \sqrt{q+1}R$ )

$$M \leq (4d^2)^q (q!) 2^{1-q} \sqrt{q}^q \sqrt{q+1} R \leq 2^d d^{4d} R.$$

□

Nous considérons l'ensemble fini  $S$  (éventuellement vide) des places ultramétriques dont la norme associée est impure. Nous notons  $\mathfrak{p}_u$ ,  $p_u$ ,  $e_u$  et  $f_u$  respectivement l'idéal premier, le nombre premier, l'indice de ramification et le degré d'inertie associés à une place ultramétrique  $u$ . Nous notons  $1 \geq \nu_1^u > \dots > \nu_{t_u}^u > p_u^{-1/e_u}$  les valeurs impures de  $\|\cdot\|_u$  et  $k_1^u, \dots, k_{t_u}^u$  leurs multiplicités et nous posons  $i_j^u = k_1^u + \dots + k_j^u$ . Afin d'alléger les notations, nous identifierons  $S = \{u_1, \dots, u_l\}$  à l'ensemble  $\{1, \dots, l\}$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$  on définit

$$I_x = \{\alpha \in K \mid \forall u \in V_f(K), \quad |\alpha|_u \leq \|x\|_u^{\text{pur}}\}.$$

On vérifie alors que  $I_x$  est un idéal fractionnaire. En effet, il existe pour toute place ultramétrique  $u$  un élément  $\beta_u \in K$  tel que  $\|x\|_u^{\text{pur}} = |\beta_u|_u$ . On peut choisir  $\beta_u = 1$  pour tout  $u$  hormis un nombre fini. On a alors  $I_x = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\beta_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_K)}$  et en particulier

$$H_f^{\text{pur}}(x) = \prod_{u \nmid \infty} (\|x\|_u^{\text{pur}})^{d_u} = \mathfrak{N}(I_x)^{-1}.$$

Pour tout multiindice  $j = (j_1, \dots, j_l) \in \{1, \dots, t_1\} \times \dots \times \{1, \dots, t_l\}$  nous considérons

$$E_j = \{x \in E \setminus \{0\} \mid \forall u \in S, \quad \|x\|_u = \nu_{j_u}^u \|x\|_u^{\text{pur}}\}.$$

Ces ensembles forment une partition de  $E \setminus \{0\}$  et chacune de ces parties est stable par l'action de  $K^\times$ . De plus, la hauteur d'un élément  $x \in E_j$  peut s'écrire

$$H(x) = H_\infty(x) \chi_j^{-1} \mathfrak{N}(I_x)^{-1}$$

avec  $\chi_j = \prod_{u \in S} (\nu_{j_u}^u)^{-d_u}$ . Par conséquent, pour tout réel  $B > 0$ , le nombre  $N_{\mathbb{P}(E), H}(B)$  de points de  $\mathbb{P}(E)$  de hauteur inférieure à  $B$  peut s'écrire comme la somme sur  $j$  des quantités

$$N_{E_j/K^\times, H}(B) = \text{Card}(\{x \in E_j \mid 0 < H_\infty(x) \leq B \chi_j \mathfrak{N}(I_x)\} / K^\times).$$

Fixons un multiindice  $j$  et posons  $A = \{x \in E_j \mid 0 < H_\infty(x) \leq B \chi_j \mathfrak{N}(I_x)\}$ . Alors toute orbite de  $A$  sous l'action de  $K^\times$  rencontre un et un seul des ensembles

$$A_I = \{x \in E_j \mid I_x = I, \quad 0 < H_\infty(x) \leq B \chi_j \mathfrak{N}(I)\}$$

où  $I$  est un élément du système de représentants  $T$  de  $\text{Cl}(K)$ . En effet, pour tout  $x \in A$ , il existe un unique  $I \in T$  tel qu'il existe un  $\alpha \in K^\times$  avec  $\alpha I_x = I_{\alpha x} = I$ . De plus, si  $x \in A_I$  alors  $\mathcal{O}_K^\times x = (K^\times x) \cap A_I$ , donc les  $\mathcal{O}_K^\times$ -orbites de  $A_I$  sont en bijection avec les  $K^\times$ -orbites de  $A$  qui rencontrent  $A_I$ . Enfin, chaque  $\mathcal{O}_K^\times$ -orbite de  $A_I$  se subdivise en un nombre  $w$  de  $U$ -orbites. Par conséquent

$$N_{E_j/K^\times, H}(B) = \frac{1}{w} \sum_{I \in T} \text{Card}(A_I/U).$$

Nous appliquons maintenant la formule d'inversion de Möbius. Fixons un élément  $I$  de  $T$  et posons pour  $J$  idéal non nul de  $\mathcal{O}_K$

$$\begin{aligned} f(J) &= \text{Card}\{x \in E_J \mid I_x = IJ, (*)\}/U \text{ et} \\ g(J) &= \text{Card}\{x \in E_J \mid I_x \subset IJ, (*)\}/U, \end{aligned}$$

où  $(*)$  désigne la condition

$$(\forall u \in S, \|x\|_u^{\text{pur}} = |I|_u) \text{ et } 0 < H_\infty(x) \leq B\chi_J \mathfrak{N}(I)$$

de sorte que  $\text{Card}(A_I/U) = f(\mathcal{O}_K)$  (la condition  $\|x\|_u^{\text{pur}} = |I|_u$  étant une conséquence directe de la condition  $I_x = I$ ) et  $g(J) = \sum_{J' \subset J} f(J')$ . Remarquons que si  $x \in E_J$  vérifie  $I_x \subset IJ$  et  $0 < H_\infty(x) \leq B\chi_J \mathfrak{N}(I)$  alors

$$0 < H(x) = \frac{H_\infty(x)}{\chi_J \mathfrak{N}(I_x)} \leq \frac{B\mathfrak{N}(I)}{\mathfrak{N}(IJ)} = \frac{B}{\mathfrak{N}(J)}.$$

En particulier  $f(J) < \infty$  par le théorème de Northcott, car l'ensemble dont on dénombre les  $U$ -orbites est inclus dans un nombre fini de  $K^\times$ -orbites et que chacune d'entre elles correspond à  $w$   $U$ -orbites. Ce calcul montre également que si  $\mathfrak{N}(J) > B/\Lambda_1(E)$  alors  $f(J) = g(J) = 0$ . Par conséquent  $g(J) < \infty$  et par inversion

$$\text{Card}(A_I/U) = f(\mathcal{O}_K) = \sum_{0 \neq J \subset \mathcal{O}_K} \mu(J)g(J),$$

avec  $\mu(J) = (-1)^k$  si  $J$  est le produit de  $k$  idéaux premiers distincts et 0 sinon. Notons que si l'un des idéaux premiers associés aux places de  $S$  divise  $J$ , alors les conditions  $\|x\|_u^{\text{pur}} = |I|_u$  et  $I_x \subset IJ$  sont incompatibles et donc  $g(J) = 0$ . Nous supposons donc désormais que  $\mathfrak{p}_u \nmid J$  pour tout  $u \in S$ .

Considérons enfin un système  $\Sigma$  de représentants de l'ensemble  $A_0 = \{y \in F \mid 0 < H_\infty(y) \leq 1\}$  sous l'action de  $U$  (qui provient de la structure de  $K$ -espace vectoriel sur  $F$ ) et posons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(I, J, \hat{j}) &= \{x \in E \mid \forall u \in V_f(K), \|x\|_u \leq |IJ|_u \text{ si } u \notin S, \\ &\leq \nu_{j_u}^u |I|_u \text{ sinon}\} \end{aligned}$$

pour  $\hat{j} \in \{1, \dots, t_1 + 1\} \times \dots \times \{1, \dots, t_l + 1\}$ . Nous voyons  $\mathcal{E}(I, J, \hat{j})$  comme une partie de  $F$ . Si  $S'$  est une partie de  $S$  nous notons  $j + S'$  le multiindice  $\hat{j}$  défini par  $\hat{j}_u = j_u + 1$  si  $u \in S'$  et  $\hat{j}_u = j_u$  sinon. Avec ces conventions nous obtenons

$$g(J) = \text{Card} \left( \left( (B\chi_J \mathfrak{N}(I))^{-1/d} \left( \mathcal{E}(I, J, j) \setminus \bigcup_{u \in S} \mathcal{E}(I, J, j + \{u\}) \right) \right) \cap \Sigma \right)$$

et nous vérifions alors en appliquant le principe d'inclusion-exclusion

$$g(J) = \sum_{S' \subset S} (-1)^{\text{Card}(S')} \text{Card} \left( \frac{\mathcal{E}(I, J, j + S')}{(B\chi_J \mathfrak{N}(I))^{1/d}} \cap \Sigma \right).$$

Par conséquent la quantité  $N_{\mathbb{P}(E),H}(B)$  peut s'écrire

$$\frac{1}{w} \sum_j \sum_{I \in T} \sum_J \sum_{S' \subset S} \mu(J) (-1)^{\text{Card}(S')} \text{Card} \left( \frac{\mathcal{E}(I, J, j + S')}{(B\chi_j \mathfrak{N}(I))^{1/d}} \cap \Sigma \right).$$

Dans le prochain paragraphe 4.4.2, nous montrons que  $\mathcal{E}(I, J, \widehat{j})$  est un réseau de  $F$  et calculons son covolume. Nous approcherons le cardinal de l'intersection d'un réseau  $\Lambda$  avec la partie  $\Sigma$  par le quotient  $\text{vol}(\Sigma)/\text{vol}(\Lambda)$ . Nous donnons un résultat général permettant d'estimer l'erreur commise au paragraphe 4.4.3. Dans la partie 4.5, nous construisons enfin un système  $\Sigma$  convenable avant de conclure la preuve du théorème aux paragraphes 4.5.3 et 4.5.4.

#### 4.4.2 Étude de la structure entière

Dans ce paragraphe, on fixe une famille  $(\mu_u)_{u \in V_f(K)}$  de réels strictement positifs tels que  $\mu_u = 1$  pour toute place ultramétrique sauf un ensemble fini. On définit l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{x \in E \mid \forall u \in V_f(K), \quad \|x\|_u \leq \mu_u\}.$$

Il s'agit clairement d'un sous- $\mathcal{O}_K$ -module de  $E$ . De plus, si  $x \in E \setminus \{0\}$  et  $u \nmid \infty$ , alors il existe un entier  $m_u \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que  $\|m_u x\|_u \leq \mu_u$ . En considérant le produit des  $m_u$  où  $u$  parcourt l'ensemble fini des places ultramétriques  $u$  pour lesquelles  $\|x\|_u \neq 1$  ou  $\mu_u \neq 1$ , on en déduit que pour tout  $x \in E$  il existe  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que  $mx \in \mathcal{E}$ . Nous pouvons donc considérer une  $K$ -base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $E$  contenue dans  $\mathcal{E}$ . Nous posons

$$\mathcal{F} = \mathcal{O}_K f_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_K f_n \subset \mathcal{E}.$$

**Lemme 4.4.2.** *Les sous-groupes  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont des réseaux de  $F$ . De plus le covolume de  $\mathcal{F}$  est*

$$\text{vol}(\mathcal{F}) = |\Delta|^{n/2} H_\infty(f_1 \wedge \dots \wedge f_n).$$

*Démonstration.* Vérifions que  $\mathcal{E}$  est discret. Si  $x \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$  alors par inégalité arithmético-géométrique

$$\Lambda_1(E)^{2/d} \leq H(x)^{2/d} \leq \mu^{2/d} \prod_{v|\infty} \|x\|_v^{2d_v/d} \leq \mu^{2/d} \sum_{v|\infty} \frac{d_v}{d} \|x\|_v^2 = \frac{\mu^{2/d}}{d} \|x\|_F^2$$

où on a posé  $\mu = \prod_{u \nmid \infty} \mu_u^{d_u}$ . Donc 0 est un point isolé de  $\mathcal{E}$  et on en déduit que tout singleton est ouvert dans  $\mathcal{E}$ . Fixons  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{O}_K$ , alors  $B = (\alpha_i f_j)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n}$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathcal{F}$ . En particulier  $\mathcal{F}$  est de rang maximal  $nd$  dans  $F$ . De  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  on déduit que  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont des réseaux.

Notons  $v_1, \dots, v_r$  les places réelles et  $w_1, \dots, w_s$  les places complexes de  $K$ . À réorganisation près des éléments, la matrice de la famille  $B$  dans la  $\mathbb{R}$ -base de  $F$

$$B' = ((f_k \otimes 1)_{v=v_1, \dots, v_r}, (f_k \otimes 1, f_k \otimes i)_{w=w_1, \dots, w_s})_{1 \leq k \leq n}$$

est diagonale par blocs, constituée de  $n$  blocs identiques de taille  $d \times d$  :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{v_1}(\alpha_1) & \cdots & \cdots & \sigma_{v_1}(\alpha_d) \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{v_r}(\alpha_1) & \cdots & \cdots & \sigma_{v_r}(\alpha_d) \\ \operatorname{Re} \sigma_{w_1}(\alpha_1) & \cdots & \cdots & \operatorname{Re} \sigma_{w_1}(\alpha_d) \\ \operatorname{Im} \sigma_{w_1}(\alpha_1) & \cdots & \cdots & \operatorname{Im} \sigma_{w_1}(\alpha_d) \\ \vdots & & & \vdots \\ \operatorname{Re} \sigma_{w_s}(\alpha_1) & \cdots & \cdots & \operatorname{Re} \sigma_{w_s}(\alpha_d) \\ \operatorname{Im} \sigma_{w_s}(\alpha_1) & \cdots & \cdots & \operatorname{Im} \sigma_{w_s}(\alpha_d) \end{pmatrix}.$$

On effectue sur chaque couple de lignes correspondant à une place complexe  $w$  les opérations suivantes dans l'ordre :

$$L_1 \leftarrow L_1 + iL_2 ; L_2 \leftarrow L_1 - 2iL_2$$

pour se ramener à  $L_1 = (\sigma_w(\alpha_i))_i$  et  $L_2 = (\bar{\sigma}_w(\alpha_i))_i$ . Ainsi le déterminant de ce bloc vaut en valeur absolue  $2^{-s}|\Delta|^{1/2}$  et donc

$$|\det_{B'}(B)| = 2^{-ns}|\Delta|^{n/2}.$$

Pour toute place archimédienne  $v$ , considérons maintenant une  $K_v$ -base  $\|\cdot\|_v$ -orthonormée  $(e_1^v, \dots, e_n^v)$  de  $E \otimes_K K_v$  et posons  $C^v \in \operatorname{GL}_n(K_v)$  telle que, pour tout  $i$ ,  $f_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}^v e_j^v$ . Alors la  $\mathbb{R}$ -base de  $F$

$$B'' = ((e_k^v)_{1 \leq k \leq n, v=v_1, \dots, v_r}, (e_k^w/\sqrt{2}, ie_k^w/\sqrt{2})_{1 \leq k \leq n, w=w_1, \dots, w_s})$$

est orthonormée et, à réorganisation près des éléments, la matrice de  $B'$  dans  $B''$  est diagonale par blocs : plus précisément, chaque place réelle  $v$  donne lieu à un bloc  $C^v$ , et chaque place complexe  $w$  à un bloc

$$\sqrt{2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} C^w & -\operatorname{Im} C^w \\ \operatorname{Im} C^w & \operatorname{Re} C^w \end{pmatrix}.$$

On effectue les opérations suivantes sur la matrice précédente :

$$L_1 \leftarrow L_1 + iL_2 ; C_2 \leftarrow C_2 - iC_1$$

de manière à se ramener à une matrice triangulaire inférieure par blocs dont les blocs diagonaux sont  $\sqrt{2}C^w$  et  $\sqrt{2}(\bar{C}^w)$ . Ainsi

$$|\det_{B''}(B')| = 2^{ns} \prod_{v|\infty} |\det(C^v)|^{d_v} = 2^{ns} H_\infty(f_1 \wedge \dots \wedge f_n).$$

Pour conclure,

$$\operatorname{vol}(\mathcal{F}) = |\det_{B''}(B)| = |\Delta|^{n/2} H_\infty(f_1 \wedge \dots \wedge f_n).$$

□

Pour calculer l'indice  $[\mathcal{E} : \mathcal{F}]$ , nous allons « agrandir » les modules  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  en des modules sur des anneaux principaux de façon à disposer du théorème de la base adaptée. Si  $u \nmid \infty$  on note  $\mathcal{E}_u$  et  $\mathcal{F}_u$  respectivement les sous- $\mathcal{O}_u$ -modules de  $E_u$  engendrés par  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ . En particulier

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{O}_u f_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_u f_n \subset \mathcal{E}_u \subset M_u$$

où  $M_u$  est le  $\mathcal{O}_u$ -module  $\{x \in E_u \mid \|x\|_u \leq \mu_u\}$ . Si  $(f_1, \dots, f_n)$  est  $\|\cdot\|_u$ -orthonormée et si  $\mu_u = 1$  alors on a  $\mathcal{F}_u = \mathcal{E}_u = M_u$  par la proposition 4.3.3. Nous notons  $S'$  l'ensemble fini des places ultramétriques  $u$  telles que  $\mathcal{F}_u \neq M_u$ . Le lemme ci-dessous correspond essentiellement à [10, proposition 2.7] mais la preuve en est légèrement différente.

**Lemme 4.4.3.** *On a  $\mathcal{E}_u = M_u = \{x \in E_u \mid \|x\|_u \leq \mu_u\}$  pour toute place ultramétrique  $u$  et*

$$[\mathcal{E} : \mathcal{F}] = \prod_{u \nmid \infty} [\mathcal{E}_u : \mathcal{F}_u].$$

*Démonstration.* On définit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \prod_{u \nmid \infty} \mathcal{E}_u / \mathcal{F}_u$  comme l'application  $\mathcal{O}_K$ -linéaire composée du plongement diagonal dans  $\prod_{u \nmid \infty} \mathcal{E}_u$  puis de la projection canonique terme à terme dans le quotient. Les quotients non nuls dans ce produit correspondent à des places de  $S'$  (en nombre fini). Le noyau de  $f$  est  $\mathcal{F}$  car pour tout  $x = \sum_i \alpha_i f_i \in \mathcal{E}$  avec  $\alpha_i \in K$

$$x \in \bigcap_{u \nmid \infty} \mathcal{F}_u \iff (\forall u \nmid \infty, \forall i, \alpha_i \in \mathcal{O}_u) \iff (\forall i, \alpha_i \in \mathcal{O}_K) \iff x \in \mathcal{F}.$$

Montrons que  $f$  est surjective. Pour tout  $u \in V_f(K)$ , soit  $y_u \in \mathcal{E}_u$ . Il s'agit de prouver qu'il existe  $x \in \mathcal{E}$  tel que, pour tout  $u$ ,  $x - y_u \in \mathcal{F}_u$ . Posons  $y_u = \sum_{i=1}^n \alpha_i^u f_i$  avec  $\alpha_i^u \in K_u$ . On forme un adèle  $a_i$  en posant

$$(a_i)_u = \alpha_i^u \text{ si } u \in S', 0 \text{ sinon.}$$

Par le théorème d'approximation forte (voir Cassels et Fröhlich [8, II.15]), pour tout  $i$  il existe  $\beta_i \in K$  tel que pour tout  $u \nmid \infty$

$$|\beta_i - (a_i)_u|_u \leq 1.$$

Choisissons  $x = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \in E$ . Les majorations ci-dessus disent exactement que, pour tout  $i$ ,  $\beta_i - \alpha_i^u \in \mathcal{O}_u$  si  $u \in S'$  et  $\beta_i \in \mathcal{O}_u$  sinon. Ainsi on a bien  $x - y_u \in \mathcal{F}_u$  pour tout  $u$ . En particulier  $x - y_u \in \mathcal{E}_u$  et donc  $x \in \mathcal{E}_u$  car  $y_u \in \mathcal{E}_u$ . Ceci étant vrai pour tout  $u$ , on obtient que  $x \in \mathcal{E}$  par simple définition de  $\mathcal{E}$ .

La démonstration ci-dessus est également valable lorsque l'on remplace  $\mathcal{E}_u$  par le module  $M_u$  qui le contient. On en déduit que ces deux modules sont égaux pour tout  $u$  ce qui termine la preuve. □

Ces deux lemmes s'appliquent à l'ensemble  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(I, J, \mathcal{J})$  défini dans le paragraphe précédent que l'on obtient en posant  $\mu_u = |IJ|_u$  si  $u \notin S$  et  $\nu_{\mathcal{J}_u}^u |I|_u$  sinon.

Il s'agit donc bien d'un réseau de  $F$  et nous pouvons connaître son covolume en calculant les indices  $[\mathcal{E}_u : \mathcal{F}_u]$  pour toute place ultramétrique  $u$ . Rappelons que les indices  $i_j$  sont introduits dans la définition 4.3.4.

**Théorème 4.4.4.** *L'ensemble  $\mathcal{E}(I, J, \hat{J})$  est un réseau de  $F$  dont le covolume vaut*

$$\text{vol}(\mathcal{E}(I, J, \hat{J})) = |\Delta|^{n/2} H(E_{\text{pur}}) \mathfrak{N}(IJ)^n \prod_{u \in S} p_u^{i_u^{f_u} - 1}.$$

*Démonstration.* Fixons une place ultramétrique  $u$  et une  $K_u$ -base  $\|\cdot\|_u$ -orthogonale  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E_u$  telle que  $1 \geq \|e_1\|_u \geq \dots \geq \|e_n\|_u > p_u^{-1/e_u}$ . Soient  $\beta \in K_u$  tel que  $|\beta|_u = |IJ|_u$  et  $\nu = \nu_{\hat{J}_u}^u$ . En particulier si  $u \notin S$  alors la base est orthonormée et  $\nu = 1$ .

En reprenant les idées de la démonstration de la proposition 4.3.4, on constate que le  $\mathcal{O}_u$ -module

$$\mathcal{E}_u = \{x \in E_u \mid \|x\|_u \leq \nu |\beta|_u\}$$

est libre de base  $(\beta \pi e_1, \dots, \beta \pi e_{i_{\hat{J}_u}^u}, \beta e_{i_{\hat{J}_u}^u+1}, \dots, \beta e_n)$ , où  $\pi \in \mathcal{O}_u$  est une uniformisante. Par le théorème de la base adaptée, il existe une  $\mathcal{O}_u$ -base  $(b_1, \dots, b_n)$  de  $\mathcal{E}_u$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathcal{O}_u$  tels que  $(\gamma_1 b_1, \dots, \gamma_n b_n)$  est une  $\mathcal{O}_u$ -base de  $\mathcal{F}_u$ . Vu que  $(f_1, \dots, f_n)$  est aussi une  $\mathcal{O}_u$ -base de  $\mathcal{F}_u$  par définition (voir paragraphe 4.4.2), il vient

$$\begin{aligned} (\|f_1 \wedge \dots \wedge f_n\|_u^{\text{pur}})^{d_u} &= |\det_{(e_1, \dots, e_n)}(f_1, \dots, f_n)|_u^{d_u} \\ &= \left( \prod_{i=1}^n |\gamma_i|_u^{d_u} \right) |\pi|_u^{i_{\hat{J}_u}^u - 1} |\beta|_u^{n d_u} \\ &= [\mathcal{E}_u : \mathcal{F}_u]^{-1} p_u^{-i_{\hat{J}_u}^u - 1} |IJ|_u^{n d_u}. \end{aligned}$$

Le résultat découle de ce calcul et des lemmes 4.4.2 et 4.4.3.  $\square$

#### 4.4.3 Nombre de points d'un réseau dans un domaine à bord lipschitzien

Comme nous l'avons montré, un théorème suffisamment efficace permettant d'estimer le cardinal de l'intersection d'un réseau et d'une partie de  $F$  fournira une estimation de  $N_{\mathbb{P}(E), H}(B)$ . Nous utilisons un théorème de décompte établi dans [32] et basé essentiellement sur l'hypothèse que le bord de cette partie peut être décrit par des applications lipschitziennes (voir également [41, partie 5]). Rappelons que les espaces  $\mathbb{R}^m$  sont munis de la norme euclidienne canonique notée  $\|\cdot\|_{\text{eucl}}$  et les parties de  $\mathbb{R}^m$  sont munies de la distance induite, de sorte que les applications  $L$ -lipschitziennes sont définies par la condition  $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{\text{eucl}} \leq L \|x - y\|_{\text{eucl}}$ .

**Définition 4.4.1.** *Soient  $m, P \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $L \geq 0$ . On note  $\text{Lip}_m(P, L)$  l'ensemble des parties  $A$  de  $\mathbb{R}^m$  telles qu'il existe des parties  $A_1, \dots, A_P$  de  $[0, 1]^{m-1}$  et des applications  $L$ -lipschitziennes  $\Phi_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}^m$  telles que  $A \subset \bigcup_i \Phi_i(A_i)$ .*

Notons que si  $A \in \text{Lip}_m(P, L)$  alors  $A$  est mesurable (pour la tribu de Lebesgue) et de mesure nulle. En effet, considérons une application  $L$ -lipschitzienne  $\Phi : A' \rightarrow \mathbb{R}^m$  où  $A' \subset [0, 1]^{m-1}$ . Pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , montrons que  $\Phi(A')$  est contenue dans la réunion d'au plus  $k^{m-1}$  boules de rayon  $L\sqrt{m-1}/k$ . On découpe le cube  $[0, 1]^{m-1}$  en  $k^{m-1}$  cubes identiques de côté  $1/k$  et on choisit pour chaque cube  $C$  tel que  $C \cap A' \neq \emptyset$  un élément  $x_C \in C \cap A'$ . Si  $x \in A'$  il existe un  $x_C$  tel que  $\|x - x_C\|_{\text{eucl}} \leq \sqrt{m-1}/k$ , d'où

$$\|\Phi(x) - \Phi(x_C)\|_{\text{eucl}} \leq L\sqrt{m-1}/k.$$

La famille des boules de centres  $\Phi(x_C)$  convient donc. Le volume total de cette réunion est majoré par  $(2L\sqrt{m-1})^m/k$  qui tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini. Ce que nous avons annoncé en découle. Par ailleurs, on en déduit que toute partie  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^m$  telle que la frontière  $\partial\Sigma = \bar{\Sigma} \setminus \overset{\circ}{\Sigma}$  appartient à  $\text{Lip}_m(P, L)$  est mesurable.

**Théorème 4.4.5.** *Soient  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbb{R}^m$  de premier minimum  $\lambda_1$  et  $\Sigma$  une partie de  $\mathbb{R}^m$ . On suppose que*

- (i)  $\partial\Sigma \in \text{Lip}_m(P, L)$ ,
- (ii)  $\Sigma \subset \{y \in \mathbb{R}^m \mid 0 < \|y\|_{\text{eucl}} \leq L\}$ ,
- (iii)  $\lambda_1/\text{vol}(\Lambda)^{1/m} \in [1/c, c]$  où  $c \geq 1$ .

*Alors  $\Sigma$  est mesurable et*

$$\left| \text{Card}(\Lambda \cap \Sigma) - \frac{\text{vol}(\Sigma)}{\text{vol}(\Lambda)} \right| \leq \frac{Pm^{2m^2}(cL)^{m-1}}{\text{vol}(\Lambda)^{1-1/m}}.$$

*Démonstration.* Il s'agit précisément du corollaire 7.1 de [32]. □

Revenons maintenant sur la seconde assertion de la proposition 4.1.5 qui correspond à la situation où  $\Lambda = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$  et  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x\| \leq B\}$  est un ellipsoïde privé de son centre.

*Démonstration.* (de la proposition 4.1.5, (ii)) Munissons  $\mathbb{R}^n$  de la structure euclidienne définie par  $\|\cdot\|$ . Alors  $\Lambda$  devient un réseau de covolume  $\text{vol}(\Lambda) = \omega_n/V$  et les constantes  $P = 2$  et  $L = 2\pi nB$  (voir lemme 4.5.1 ci-dessous) ainsi que  $c = n\text{vol}(\Lambda)^{1/n}/\lambda_1 \geq 1$  (en vertu du premier théorème de Minkowski) conviennent. Puisque  $N_{\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \|\cdot\|}(B) = \text{Card}(\Lambda \cap \Sigma)$ ,  $\text{vol}(\Sigma) = \omega_n B^n$  et  $n \geq 3$  (ce qui entraîne  $(2\pi/n)^{n-1} \leq 5$ ) il vient par le théorème 4.4.5

$$\begin{aligned} |N_{\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \|\cdot\|}(B) - VB^n| &\leq 2^n \pi^{n-1} n^{2n^2+2(n-1)} (B/\lambda_1)^{n-1} \\ &\leq n^{3n^2} (B/\lambda_1)^{n-1}. \end{aligned}$$

□

## 4.5 Construction et paramétrage du système $\Sigma$

On considère un fibré adélique hermitien  $(E, (\|\cdot\|_v)_{v \in V(K)})$  sur  $K$  de dimension  $n \geq 1$ , non nécessairement pur. On munit le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $F =$

$E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \prod_{v|\infty} E_v$  du produit scalaire défini au début de la partie 4.4. Les espaces de la forme  $\mathbb{R}^m$  et en particulier  $\mathbb{R}^{V_{\infty}(K)}$  sont munis de la norme euclidienne canonique notée  $\|\cdot\|_{\text{eucl}}$ .

Le but de cette partie est de construire un système de représentants de l'ensemble  $A_0 = \{y \in F \mid 0 < H_{\infty}(y) \leq 1\}$  sous l'action du groupe  $U$  engendré par un système fondamental d'unités. Nous sommes amenés à distinguer deux cas selon que le rang  $q$  du groupe  $\mathcal{O}_K^{\times}$  est nul ou non.

#### 4.5.1 Le cas d'une unique place archimédienne

Supposons donc  $q = 0$ . Comme  $r + s = q + 1$ , ceci revient à dire qu'il n'y a qu'une seule place archimédienne  $v$  et en particulier  $F = E_v$ . Le but de ce paragraphe est d'étudier l'ensemble

$$\Sigma = A_0 = \{y \in F \mid 0 < H_{\infty}(y) \leq 1\} = \{x \in E_v \mid 0 < \|x\|_v \leq 1\}$$

et de trouver des constantes  $P$  et  $L$  pour lesquelles les conditions (i) et (ii) du théorème 4.4.5 sont vérifiées. Dans l'espace réel  $(F, \|\cdot\|_F)$ , l'ensemble  $\Sigma$  s'identifie à la boule fermée de centre 0 et de rayon  $d_v^{1/2}$  privée de 0. Nous constatons facilement dans le cas  $n = 1$  que les constantes  $P = 2^{r+1}$  et  $L = 3\pi$  conviennent.

Supposons désormais  $n \geq 2$ . Pour paramétrer le bord de  $\Sigma$  qui n'est autre que la réunion d'un singleton et d'une sphère euclidienne ou hermitienne de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ , nous introduisons les coordonnées sphériques généralisées. Considérons l'application  $\psi$  de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{n-1}$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  définie par

$$\psi(t, \theta) = \left( t \cos \theta_{i-1} \prod_{j=i}^{n-1} \sin \theta_j \right)_{i=1, \dots, n}$$

où  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$  et  $\theta_0 = 0$ . On pose ensuite

$$\widehat{\psi}(\theta) = \psi(1, 2\pi\theta_1, \pi\theta_2, \dots, \pi\theta_{n-1}).$$

**Lemme 4.5.1.** *L'application  $\psi$  a pour jacobien*

$$J\psi(t, \theta) = (-t)^{n-1} \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-1}.$$

*De plus,  $\widehat{\psi}([0, 1]^{n-1})$  est la sphère unité euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  et  $\widehat{\psi}$  est injective sur  $]0, 1[^{n-1}$ . Enfin  $\widehat{\psi}$  est  $2\pi n$ -lipschitzienne.*

*Démonstration.* Définissons provisoirement des applications auxiliaires  $\phi_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $k \geq 1$  par récurrence en posant  $\phi_1(t) = t$  et  $\phi_{k+1}(t, \theta, \theta_k) = (\phi_k(t, \theta) \sin \theta_k, t \cos \theta_k)$  avec  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{k-1})$ . Ainsi  $\psi = \phi_n$  et le jacobien  $J\phi_{k+1}$  de  $\phi_{k+1}$  s'écrit

$$\begin{vmatrix} \partial\phi_{k,1}/\partial t \sin \theta_k & \partial\phi_{k,1}/\partial \theta_1 \sin \theta_k & \dots & \partial\phi_{k,1}/\partial \theta_{k-1} \sin \theta_k & \phi_{k,1} \cos \theta_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial\phi_{k,k}/\partial t \sin \theta_k & \partial\phi_{k,k}/\partial \theta_1 \sin \theta_k & \dots & \partial\phi_{k,k}/\partial \theta_{k-1} \sin \theta_k & \phi_{k,k} \cos \theta_k \\ \cos \theta_k & 0 & \dots & 0 & -t \sin \theta_k \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne et au moyen de la relation  $\phi_k(t, \theta) = t \partial \phi_k / \partial t(t, \theta)$ , il vient

$$J\phi_{k+1}(t, \theta, \theta_k) = -t \sin^{k-1} \theta_k J\phi_k(t, \theta)$$

et la formule pour le jacobien en découle sachant que  $J\phi_1(t) = 1$ .

Il est clair que  $\theta_1 \mapsto \phi_2(1, \theta_1)$  est une bijection de  $[0, 2\pi[$  dans le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ . On raisonne alors par récurrence. Soit  $x$  un point de la sphère unité euclidienne de  $\mathbb{R}^{k+1}$ , alors  $x_{k+1} \in [-1, 1]$  donc il s'écrit de manière unique  $x_{k+1} = \cos \theta_k$  avec  $\theta_k \in [0, \pi]$ . On a alors  $x_1^2 + \dots + x_k^2 = \sin^2 \theta_k$  donc  $(x_1, \dots, x_k)$  s'écrit  $\phi_{k-1}(1, \theta) \sin \theta_k$ . L'application  $\hat{\psi}$  sur  $[0, 1]^{n-1}$  décrit donc bien la sphère unité euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ .

Notons maintenant  $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_n)$ . Si  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}^{n-1}$  alors

$$\begin{aligned} |\hat{\psi}_i(\theta) - \hat{\psi}_i(\theta')| &\leq 2\pi(|\theta_{i-1} - \theta'_{i-1}| + \dots + |\theta_n - \theta'_n|) \\ &\leq 2\pi\sqrt{n-1}\|\theta - \theta'\|_{\text{eucl}}, \end{aligned}$$

donc  $\|\hat{\psi}(\theta) - \hat{\psi}(\theta')\|_{\text{eucl}} \leq 2\pi n \|\theta - \theta'\|_{\text{eucl}}$ .  $\square$

Nous appliquons ce résultat pour paramétrer le bord de  $\Sigma$ , en distinguant les cas d'une place archimédienne réelle ou complexe. Soit  $(e_1^v, \dots, e_n^v)$  une  $K_v$ -base  $\|\cdot\|_v$ -orthonormée de  $E_v$ . Si  $v$  est réelle, on pose

$$\Psi^v(\theta) = \sum_{k=1}^n \psi_k(1, \theta) e_k^v$$

et si  $v$  est complexe, on la note  $w$  et on pose

$$\Psi^w(\theta, \xi) = \sum_{k=1}^n \psi_k(1, \theta) \exp(i\xi_k) e_k^w$$

pour  $\theta \in \mathbb{R}^{n-1}$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . On pose également

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^v(\theta) &= \Psi^v(2\pi\theta_1, \pi\theta_2, \dots, \pi\theta_{n-1}) \text{ et} \\ \hat{\Psi}^w(\theta, \xi) &= \Psi^w(\pi\theta/2, 2\pi\xi). \end{aligned}$$

**Proposition 4.5.2.** *Les conditions (i) et (ii) du théorème de décompte 4.4.5 sont vérifiées pour  $\Sigma$  et les constantes  $P = 2$  et  $L = 4\pi n$ .*

*Démonstration.* Si  $v$  est réelle alors  $d = 1$  et  $\partial\Sigma = \{0\} \cup \hat{\Psi}^v([0, 1]^{n-1})$  où  $\hat{\Psi}^v$  est  $2\pi n$ -lipschitzienne pour la norme  $\|\cdot\|_F = \|\cdot\|_v$  sur  $F = E_v$ . Si  $v = w$  est complexe alors  $d = 2$  et de même  $\partial\Sigma = \{0\} \cup \hat{\Psi}^w([0, 1]^{2n-1})$ . En effet, la sphère hermitienne canonique de  $\mathbb{C}^n$  est décrite comme l'ensemble des points  $(\exp(i\xi_1)x_1, \dots, \exp(i\xi_n)x_n)$  où  $\xi_k$  varie dans  $[0, 2\pi]$  et où  $x$  parcourt la portion de sphère  $\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ , cette portion de sphère étant elle-même égale à  $\psi(\{1\} \times [0, \pi/2]^{n-1})$ . De plus, comme

$$|\psi_k(1, \theta) \exp(i\xi_k) - \psi_k(1, \theta') \exp(i\xi'_k)| \leq \sqrt{n}(\|\theta - \theta'\|_{\text{eucl}} + \|\xi - \xi'\|_{\text{eucl}}),$$

on obtient en utilisant la majoration  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  (rappelons que notre convention est  $\|\cdot\|_F^2 = 2\|\cdot\|_w^2$ )

$$\begin{aligned} \|\widehat{\Psi}^w(\theta, \xi) - \widehat{\Psi}^w(\theta', \xi')\|_F^2 &\leq 2 \sum_k 4\pi^2 n (\|\theta - \theta'\|_{\text{eucl}} + \|\xi - \xi'\|_{\text{eucl}})^2 \\ &\leq 16\pi^2 n^2 \|(\theta, \xi) - (\theta', \xi')\|_{\text{eucl}}^2. \end{aligned}$$

Autrement dit  $\widehat{\Psi}^w$  est  $4\pi n$ -lipschitzienne. L'assertion (ii) est claire.  $\square$

Nous terminons l'étude du cas  $q = 0$  en donnant le volume de  $\Sigma$ . Hormis en le singleton  $\{0\}$ , l'ensemble  $\Sigma$  coïncide avec la boule fermée pour la norme  $\|\cdot\|_F$  de centre 0 de rayon 1 dans le cas réel et de rayon  $\sqrt{2}$  dans le cas complexe. On obtient ainsi le résultat suivant :

**Proposition 4.5.3.** *Le volume de  $\Sigma$  vaut  $\text{vol}(\Sigma) = \omega_n^r (2^n \omega_{2n})^s$ , où  $\omega_n = \pi^{n/2} / \Gamma(1 + n/2)$  est le volume de la boule euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^n$ .*

#### 4.5.2 Méthode de partition de Schmidt

Supposons désormais  $q > 0$ . Nous considérons le système d'unités fondamentales  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$  de  $K$  fourni par le lemme 4.4.1 et  $U$  le groupe engendré. Nous notons  $\eta_i = \ell(\varepsilon_i) = (d_v \log |\varepsilon_i|_v)_{v|\infty}$ . Ces éléments forment une  $\mathbb{R}$ -base de l'hyperplan  $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^{V_\infty(K)} \mid \sum_v x_v = 0\}$  de  $\mathbb{R}^{V_\infty(K)}$ . Nous munissons  $H_0$  de la norme induite par la norme euclidienne canonique  $\|\cdot\|_{\text{eucl}}$ . Remarquons que pour toute unité  $\varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times$  la formule du produit donne  $\prod_{v|\infty} |\varepsilon|_v^{d_v} = 1$ .

Notre premier objectif est de construire un ensemble  $\Sigma \subset F$  qui soit un système de représentants de l'ensemble  $A_0 = \{y \in F \mid 0 < H_\infty(y) \leq 1\}$  sous l'action de  $U$ . La suite demande un travail supplémentaire par rapport au cas précédent. En effet, nous voulons obtenir un terme d'erreur qui soit linéaire en le régulateur, mais pour cela il ne sera pas suffisant d'appliquer le théorème 4.4.5 directement à la partie  $\Sigma$ . Notre stratégie est de considérer une partition de  $\Sigma$  en  $M$  parties selon la méthode de Schmidt telle que décrite par Widmer [41, partie 8]. Cette partition notée provisoirement  $(\Sigma_k)_{k=0, \dots, M-1}$  vérifiera les propriétés suivantes :

- (i) pour tout  $k$  il existe un automorphisme  $\tau_k$  de  $F$  de déterminant 1 tel que  $\tau_k(\Sigma_k) = \Sigma_0$  ;
- (ii) il existe des constantes  $P$  et  $L$  ne dépendant que de  $d$  et  $n$  telles que  $\partial \Sigma_0 \in \text{Lip}_{nd}(P, L)$  et  $\Sigma_0 \subset \{y \in F \mid 0 < \|y\|_F \leq L\}$  ;
- (iii) le nombre de parties  $M$  est majoré par le produit du régulateur  $R$  par une constante qui ne dépend que de  $d$ .

On pose  $D = \{z \in F \mid \forall v \in V_\infty(K), \|z_v\|_v = 1\}$ . Si  $x \in \mathbb{R}^{V_\infty(K)}$  et  $y \in F$  on notera  $xy = (x_v y_v)_{v|\infty} \in F$ . Enfin, on définit une application  $\delta : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^q \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{V_\infty(K)}$  par

$$\delta(t, \rho_1, \dots, \rho_q) = (t |\varepsilon_1|_v^{\rho_1} \dots |\varepsilon_q|_v^{\rho_q})_{v|\infty}.$$

**Proposition 4.5.4.** *L'ensemble  $\Sigma$  défini par*

$$\Sigma = \{\delta(t, \rho)z \mid (t, \rho) \in ]0, 1]^{q+1}, z \in D\}$$

*constitue un système de représentants de l'ensemble  $A_0 = \{y \in F \mid 0 < H_\infty(y) \leq 1\}$  sous l'action de  $U$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'un élément  $y$  de  $A_0$  s'écrive de deux manières  $y = u\delta(t, \rho)z = u'\delta(t', \rho')z'$  avec  $u, u' \in U$ ,  $(t, \rho), (t', \rho') \in ]0, 1]^{q+1}$  et  $z, z' \in D$ . Alors on a  $H_\infty(y) = t^d = t'^d$  donc  $t = t'$ . Posons  $u = \varepsilon_1^{k_1} \dots \varepsilon_q^{k_q}$  et  $u' = \varepsilon_1^{k'_1} \dots \varepsilon_q^{k'_q}$  avec  $k_i, k'_i \in \mathbb{Z}$ . En considérant les  $d_v \log \|y_v\|_v$  et en utilisant  $\|z_v\|_v = 1$  on obtient

$$(k_1 + \rho_1)\eta_1 + \dots + (k_q + \rho_q)\eta_q = (k'_1 + \rho'_1)\eta_1 + \dots + (k'_q + \rho'_q)\eta_q,$$

donc  $k_i + \rho_i = k'_i + \rho'_i$  pour tout  $i$ . Comme  $k_i, k'_i$  sont des entiers et  $\rho_i, \rho'_i \in ]0, 1]$  on en déduit  $k = k'$ ,  $u = u'$  et  $\rho = \rho'$ . Enfin en revenant aux  $y_v$  on obtient  $z = z'$ .

Montrons maintenant qu'une telle écriture existe. Soit  $y \in A_0$  et posons  $t = H_\infty(y)^{1/d}$ . On forme le vecteur  $x = (d_v \log(\|y_v\|_v/t))_{v|\infty} \in H_0$  et on écrit  $x = (k_1 + \rho_1)\eta_1 + \dots + (k_q + \rho_q)\eta_q$  avec  $k_i \in \mathbb{Z}$  et  $\rho_i \in ]0, 1]$ . Posons enfin  $u = \varepsilon_1^{k_1} \dots \varepsilon_q^{k_q}$  et

$$z_v = \left( \frac{|\varepsilon_1|_v}{\varepsilon_1} \right)^{k_1} \dots \left( \frac{|\varepsilon_q|_v}{\varepsilon_q} \right)^{k_q} \frac{y_v}{\|y_v\|_v} \in E_v$$

pour toute place archimédienne  $v$ . Alors  $z = (z_v)_{v|\infty} \in D$  et pour tout  $v$

$$(u\delta(t, \rho)z)_v = t|\varepsilon_1|_v^{k_1+\rho_1} \dots |\varepsilon_q|_v^{k_q+\rho_q} \frac{y_v}{\|y_v\|_v} = y_v.$$

□

Nous introduisons maintenant la partition de Schmidt de  $\Sigma$ . Nous posons  $M_i = \lfloor \|\eta_i\|_{\text{euc1}} \rfloor + 1$  et pour tout multiindice  $k \in \prod_{i=1}^q \{0, \dots, M_i - 1\}$

$$\Sigma_k = \left\{ \delta(t, \rho)z \mid (t, \rho) \in ]0, 1] \times \prod_{i=1}^q ]k_i/M_i, (k_i + 1)/M_i], z \in D \right\}.$$

Les  $\Sigma_k$  forment une partition de  $\Sigma$  en  $M = M_1 \dots M_q$  parties. Le lemme 4.4.1 assure que  $M \leq 2^d d^{4d} R$ . L'application  $\tau_k : F \rightarrow F$  définie par

$$\tau_k(y) = (|\varepsilon_1|_v^{-k_1/M_1} \dots |\varepsilon_q|_v^{-k_q/M_q} y_v)_{v|\infty}$$

est un automorphisme de  $F$  de déterminant  $\prod_{i=1}^q \prod_{v|\infty} |\varepsilon_i|_v^{-k_i d_v / M_i} = 1$  par la formule du produit et vérifie clairement  $\tau_k(\Sigma_k) = \Sigma_0$ . Les conditions (i) et (iii) sont donc vérifiées.

Nous définissons ensuite l'application  $\delta_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{V_\infty(K)}$  sur le modèle de  $\delta$  et qui nous permettra de paramétrer spécifiquement  $\Sigma_0$  :

$$\delta_0(t, \rho) = (t|\varepsilon_1|_v^{\rho_1/M_1} \dots |\varepsilon_q|_v^{\rho_q/M_q})_{v|\infty}.$$

Ainsi  $\Sigma_0 = \{\delta_0(t, \rho)z \mid (t, \rho) \in ]0, 1]^{q+1}, z \in D\}$ .

**Lemme 4.5.5.** *L'application  $\delta_0$  induit un difféomorphisme de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^q$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^{V_\infty(K)}$ . Son jacobien vaut*

$$J\delta_0(t, \rho) = \pm 2^{-s} dRM^{-1} t^q \prod_{v|\infty} |\varepsilon_1|_v^{\rho_1/M_1} \dots |\varepsilon_q|_v^{\rho_q/M_q}.$$

Enfin, l'application  $\delta_0$  restreinte à  $[0, 1]^{q+1}$  est  $(q+1)e^q$ -lipschitzienne.

*Démonstration.* Soit  $x \in (\mathbb{R}_+^*)^{V_\infty(K)}$ . Alors  $x = \delta_0(t, \rho)$  si et seulement si  $t^d = \prod_v x_v^{d_v}$  et  $d_v \log(x_v/t) = \rho_1 \eta_1^v/M_1 + \dots + \rho_q \eta_q^v/M_q$  pour toute place archimédienne  $v$ . Ceci fournit la bijectivité de  $\delta_0$  car  $\sum_v d_v \log(x_v/t) = 0$ . De plus  $\delta_0$  est clairement un homéomorphisme. Calculons les dérivées partielles des  $\delta_0^v$  :

$$\begin{aligned} \partial \delta_0^v / \partial t(t, \rho) &= |\varepsilon_1|_v^{\rho_1/M_1} \dots |\varepsilon_q|_v^{\rho_q/M_q}, \\ \partial \delta_0^v / \partial \rho_i(t, \rho) &= t M_i^{-1} (\log |\varepsilon_i|_v) |\varepsilon_1|_v^{\rho_1/M_1} \dots |\varepsilon_q|_v^{\rho_q/M_q}. \end{aligned}$$

Ainsi le jacobien  $J\delta_0(t, \rho)$  vaut

$$M^{-1} t^q \prod_{v|\infty} (|\varepsilon_1|_v^{\rho_1/M_1} \dots |\varepsilon_q|_v^{\rho_q/M_q}) \begin{vmatrix} 1 & \log |\varepsilon_1|_{v_1} & \dots & \log |\varepsilon_q|_{v_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \log |\varepsilon_1|_{v_{q+1}} & \dots & \log |\varepsilon_q|_{v_{q+1}} \end{vmatrix}$$

où  $v_1, \dots, v_{q+1}$  sont les places archimédiennes de  $K$ . En multipliant chaque ligne du déterminant par  $d_v$  on vérifie que celui-ci est égal à  $\pm 2^{-s} dR$ .

Soit  $(t, \rho) \in [0, 1]^{q+1}$ . Comme pour toute place  $v$  et tout  $1 \leq i \leq q$  on a  $|\log |\varepsilon_i|_v| \leq \|\eta_i\|_{\text{eucl}} \leq M_i$ , il vient

$$|\varepsilon_1|_v^{\rho_1/M_1} \dots |\varepsilon_q|_v^{\rho_q/M_q} \leq e^q.$$

En particulier les coefficients de la matrice jacobienne de  $\delta_0$  en  $(t, \rho)$  sont de valeur absolue inférieure à  $e^q$ . Sa norme d'opérateur relativement aux normes euclidiennes est donc inférieure à  $(q+1)e^q$ . On conclut grâce au théorème des accroissements finis.  $\square$

Pour terminer le paramétrage de  $\Sigma_0$  nous devons paramétrer l'ensemble  $D$ . Pour ce faire nous fixons pour toute place archimédienne  $v$  une  $K_v$ -base ortho-normée  $(e_1^v, \dots, e_n^v)$  de  $E_v$  et, comme précédemment, nous examinons à part les cas  $n = 1$  et  $n \geq 2$ .

Dans le cas  $n \geq 2$ , nous réutilisons les coordonnées sphériques généralisées. Nous posons

$$\Psi^v(t, \theta^v) = \sum_{j=1}^n \psi_j(t, \theta^v) e_j^v$$

si  $v$  est une place réelle et

$$\Psi^w(t, \theta^w, \xi^w) = \sum_{j=1}^n \psi_j(t, \theta^w) \exp(i\xi_j^w) e_j^w$$

si  $w$  est une place complexe, avec  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\theta^v, \theta^w \in \mathbb{R}^{n-1}$  et  $\xi^w \in \mathbb{R}^n$ . On définit enfin

$$\Psi(x, \theta, \xi) = (\Psi^v(x_v, \theta^v, \xi^v))_{v|\infty}.$$

On note  $\mu(\theta, \xi)$  l'application qui agit coordonnée par coordonnée, change  $\theta_1^v$  en  $2\pi\theta_1^v$  et  $\theta_i^v$  en  $\pi\theta_i^v$  pour  $i > 1$  et  $v$  réelle et change  $\theta_i^w$  en  $\pi\theta_i^w/2$  et  $\xi_i^w$  en  $2\pi\xi_i^w$  pour  $w$  complexe. L'application  $\mu$  est de jacobien constant égal à  $2^{r+s}\pi^{nd-r-s}$  et  $2\pi$ -lipschitzienne. On pose  $\widehat{\Psi}(\theta, \xi) = \Psi(1, \mu(\theta, \xi))$ .

**Lemme 4.5.6.** *Le jacobien de  $\Psi$  (dans une  $\mathbb{R}$ -base orthonormée de  $F$ ) vaut*

$$\begin{aligned} J\Psi(x, \theta, \xi) &= \pm 2^{ns} \prod_{v|\infty} x_v^{nd_v-1} \prod_{v \text{ réelle}} \prod_{i=2}^{n-1} \sin^{i-1} \theta_i^v \\ &\times \prod_{w \text{ complexe}} \prod_{i=1}^{n-1} \cos \theta_i^w \sin^{2i-1} \theta_i^w. \end{aligned}$$

De plus,  $\widehat{\Psi}([0, 1]^{nd-q-1}) = D$  et  $\widehat{\Psi}$  est injective sur  $]0, 1[^{nd-q-1}$ . Enfin  $\widehat{\Psi}$  est  $4\pi n$ -lipschitzienne.

*Démonstration.* Le jacobien de  $\Psi$  est le produit des jacobiens des  $\Psi^v$  aux points  $(x_v, \theta^v, \xi^v)$  pour  $v|\infty$ . Si  $v$  est réelle on a  $J\Psi^v(t, \theta^v) = J\psi(t, \theta^v)$ . Fixons une place complexe  $w$ . Alors  $\Psi^w$  est la composée de l'application  $(t, \theta^w, \xi^w) \mapsto (\psi(t, \theta^w), \xi^w)$  et d'une application  $(y, \xi^w) \mapsto (\Psi_1(y_1, \xi_1^w), \dots, \Psi_n(y_n, \xi_n^w))$  où

$$\Psi_i(y_i, \xi_i^w) = \sqrt{2}(y_i \cos \xi_i^w, y_i \sin \xi_i^w).$$

Le jacobien de  $\Psi_i$  vaut  $2y_i$ , par conséquent

$$J\Psi^w(t, \theta^w, \xi^w) = 2^n \psi_1(t, \theta^w) \dots \psi_n(t, \theta^w) J\psi(t, \theta^w)$$

ce qui donne la formule ci-dessus grâce au lemme 4.5.1. La deuxième assertion se déduit des arguments utilisés dans la preuve de la proposition 4.5.2. De même,

$$\begin{aligned} \|\widehat{\Psi}(\theta, \xi) - \widehat{\Psi}(\theta', \xi')\|_F^2 &= \sum_{v|\infty} d_v \|\widehat{\Psi}^v(\theta^v, \xi^v) - \widehat{\Psi}^v(\theta'^v, \xi'^v)\|_v^2 \\ &\leq \sum_{v \text{ réelle}} 4\pi^2 n^2 \|\theta^v - \theta'^v\|_{\text{eucl}}^2 \\ &\quad + \sum_{w \text{ complexe}} 16\pi^2 n^2 \|(\theta^w, \xi^w) - (\theta'^w, \xi'^w)\|_{\text{eucl}}^2 \\ &\leq 16\pi^2 n^2 \|(\theta, \xi) - (\theta', \xi')\|_{\text{eucl}}^2. \end{aligned}$$

□

Les estimations attendues s'obtiennent en combinant les lemmes 4.5.5 et 4.5.6.

**Proposition 4.5.7.** *Dans le cas  $n \geq 2$ , les conditions (i) et (ii) du théorème de décompte 4.4.5 sont vérifiées pour  $\Sigma_0$  et les constantes  $P = 2(q+1)$  et  $L = 6\pi n d^{3/2} e^q$ .*

*Démonstration.* L'application  $\Phi(t, \rho, z) = \delta_0(t, \rho)z$  de  $[0, 1]^{q+1} \times D$  dans  $F$  est continue et sa restriction à  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^q \times D$  est un homéomorphisme sur son image  $F \setminus \{0\}$ . On en déduit que le compact  $\Phi([0, 1]^{q+1} \times D)$  contient  $\Sigma_0$  donc son adhérence et que l'ouvert  $\Phi(]0, 1]^{q+1} \times D)$  est contenu dans  $\Sigma_0$  donc dans son intérieur. Ainsi

$$\partial\Sigma_0 \subset \Phi([0, 1]^{q+1} \times D) \setminus \Phi(]0, 1]^{q+1} \times D) = \Phi(\partial([0, 1]^{q+1} \times D)).$$

Le bord de l'hypercube  $[0, 1]^{q+1}$  est constitué de  $P = 2(q+1)$  faces, chacune étant isométrique à  $[0, 1]^q$ . Soient  $\phi_1, \dots, \phi_P : [0, 1]^q \rightarrow \partial([0, 1]^{q+1})$  de telles isométries et posons pour  $1 \leq i \leq P$

$$\widehat{\Phi}_i(x, \theta, \xi) = \delta_0(\phi_i(x))\widehat{\Psi}(\theta, \xi).$$

Alors  $\partial\Sigma_0 \subset \bigcup_{i=1}^P \widehat{\Phi}_i([0, 1]^{nd-1})$ . De plus

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\Phi}_i(x, \theta, \xi) - \widehat{\Phi}_i(x', \theta', \xi')\|_F^2 \\ &= \sum_{v|\infty} d_v \|\delta_0^v(\phi_i(x))\widehat{\Psi}^v(\theta^v, \xi^v) - \delta_0^v(\phi_i(x'))\widehat{\Psi}^v(\theta'^v, \xi'^v)\|_v^2 \\ &\leq \sum_{v|\infty} d_v ((q+1)e^q \|x - x'\|_{\text{eucl}} + e^q \|\widehat{\Psi}^v(\theta^v, \xi^v) - \widehat{\Psi}^v(\theta'^v, \xi'^v)\|_v)^2 \end{aligned}$$

car  $\widehat{\Psi}(\theta, \xi) \in D$ ,  $\phi_i$  est une isométrie et  $0 \leq \delta_0^v \leq e^q$  (le facteur  $(q+1)e^q$  provient du lemme 4.5.5). Nous poursuivons la majoration en utilisant la relation  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , le lemme 4.5.6 et en effectuant la somme sur  $v$  :

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\Phi}_i(x, \theta, \xi) - \widehat{\Phi}_i(x', \theta', \xi')\|_F^2 \\ &\leq 2e^{2q}(d(q+1)^2 \|x - x'\|_{\text{eucl}}^2 + 16\pi^2 n^2 \|(\theta, \xi) - (\theta', \xi')\|_{\text{eucl}}^2) \\ &\leq 32\pi^2 n^2 d^3 e^{2q} \|(x, \theta, \xi) - (x', \theta', \xi')\|_{\text{eucl}}^2. \end{aligned}$$

Donc  $\partial\Sigma_0 \in \text{Lip}_{nd}(P, L)$  avec  $L = 6\pi n d^{3/2} e^q$ . Enfin si  $y = \delta_0(t, \rho)z \in \Sigma_0$  avec  $(t, \rho) \in ]0, 1]^{q+1}$  et  $z \in D$  alors

$$0 < \|y\|_F^2 = \sum_v d_v \delta_0^v(t, \rho)^2 \leq d e^{2q} \leq L^2.$$

□

Enfin, nous calculons le volume de  $\Sigma$  grâce aux divers paramétrages que nous avons présenté et en particulier leurs jacobiens. Remarquons au préalable que le lemme 4.5.1 donne le résultat suivant sur le lien entre le volume de la boule unité euclidienne et des intégrales de Wallis :

$$\omega_n = \int_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]^{n-2}} |J\psi| dt d\theta = \frac{2\pi^{n-1}}{n} \prod_{i=2}^{n-1} \int_0^1 \sin^{i-1}(\pi\theta_i) d\theta_i.$$

**Proposition 4.5.8.** *L'ensemble  $\Sigma$  défini dans la proposition 4.5.4 a pour volume*

$$\text{vol}(\Sigma) = n^q \omega_n^r (2^n \omega_{2n})^s R.$$

*Démonstration.* L'ensemble  $\Sigma$  est bien mesurable car union des images de  $\Sigma_0$  par les automorphismes  $\tau_k^{-1}$  et on a  $\text{vol}(\Sigma) = M \text{vol}(\Sigma_0)$ . De plus, l'ensemble  $\Phi([0, 1]^{q+1} \times [0, 1]^{nd-q-1})$  où  $\Phi(t, \rho, \theta, \xi) = \Psi(\delta_0(t, \rho), \mu(\theta, \xi))$  est inclus dans  $\Sigma_0$ , d'après la définition de  $\delta_0$  et le lemme 4.5.6, et de même mesure car leur différence est incluse dans le bord de  $\Sigma_0$ . Donc

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Sigma_0) &= \int_{[0, 1]^{nd}} |J\Phi| dt d\rho d\theta d\xi \\ &= \int_{[0, 1]^{nd}} |J\Psi(\delta_0(t, \rho), \mu(\theta, \xi))| |J\delta_0(t, \rho)| |J\mu| dt d\rho d\theta d\xi. \end{aligned}$$

En utilisant les lemmes 4.5.5 et 4.5.6 et en séparant les variables, cette intégrale est le produit d'une constante  $2^{ns} 2^r \pi^{nd-r-s} dRM^{-1}$ , d'une intégrale sur  $(t, \rho)$  :

$$\int_{[0, 1]^{q+1}} t^q \prod_{v|\infty} t^{nd_v-1} (|\varepsilon_1|^{\rho_1/M_1} \dots |\varepsilon_q|^{\rho_q/M_q})^{nd_v} dt d\rho = \int_0^1 t^{nd-1} dt = \frac{1}{nd}$$

et d'un produit d'intégrales de type Wallis :

$$\prod_{v \text{ réelle}} \prod_{i=2}^{n-1} \int_0^1 \sin^{i-1}(\pi\theta) d\theta \prod_{w \text{ complexe}} \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^1 \cos(\pi\theta/2) \sin^{2i-1}(\pi\theta/2) d\theta.$$

Le produit sur les places réelles vaut  $(n\omega_n/2\pi^{n-1})^r$  d'après la remarque ci-dessus et le produit sur les places complexes s'obtient par le changement de variable  $\sigma = \sin(\pi\theta/2)$  :

$$\int_0^1 \cos(\pi\theta/2) \sin^{2i-1}(\pi\theta/2) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sigma^{2i-1} d\sigma = \frac{1}{i\pi}.$$

Ce dernier vaut donc  $1/((n-1)!\pi^{n-1})^s = n^s \omega_{2n}^s / \pi^{2ns-s}$ . Le résultat annoncé découle simplement de ces divers calculs.  $\square$

Pour conclure, nous revenons au cas particulier  $n = 1$ . Posons pour toutes familles de réels  $x = (x_v)_{v|\infty} \in \mathbb{R}^{V_\infty(K)}$ ,  $\xi = (\xi^w) \in \mathbb{R}^s$  et toute famille de signes  $\theta = (\theta^v) \in \{-1, +1\}^r$

$$\begin{cases} \Psi^v(x_v, \theta^v) &= x_v \theta^v e_1^v & \text{si } v \text{ réelle,} \\ \Psi^w(x_w, \xi^w) &= x_w \exp(i\xi^w) e_1^w & \text{si } w \text{ complexe.} \end{cases}$$

Nous définissons également

$$\begin{aligned} \Psi(x, \theta, \xi) &= (\Psi^v(x_v, \theta^v, \xi^v))_{v|\infty} \in F \text{ et} \\ \hat{\Psi}(\theta, \xi) &= \Psi(1, \theta, 2\pi\xi). \end{aligned}$$

**Proposition 4.5.9.** *Dans le cas  $n = 1$ , les conditions (i) et (ii) du théorème de décompte 4.4.5 sont vérifiées pour  $\Sigma_0$  et les constantes  $P = 2(q+1)2^r$  et  $L = 3\pi d^{3/2}e^q$ . En outre,*

$$\text{vol}(\Sigma) = \omega_1^r (2\omega_2)^s R = 2^r (2\pi)^s R.$$

*Démonstration.* Notons que  $\widehat{\Psi}$  décrit  $D$  lorsque  $(\theta, \xi)$  varie dans  $\{-1, 1\}^r \times [0, 1]^s$ . Pour chacune des  $2(q+1)$  faces de l'hypercube  $[0, 1]^{q+1}$ , fixons une isométrie de  $[0, 1]^q$  sur cette face. Pour une telle isométrie  $\phi$  et un  $\theta \in \{-1, 1\}^r$  posons

$$\widehat{\Phi}_{\phi, \theta}(x, \xi) = \delta_0(\phi(x)) \widehat{\Psi}(\theta, \xi),$$

de sorte que  $\partial\Sigma_0$  est inclus dans la réunion des  $\widehat{\Phi}_{\phi, \theta}([0, 1]^{d-1})$ . Or

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\Phi}_{\phi, \theta}(x, \xi) - \widehat{\Phi}_{\phi, \theta}(x', \xi')\|_F^2 \\ & \leq \sum_v d_v e^{2q} ((q+1)^2 \|x - x'\|_{\text{eucl}}^2 + \|\widehat{\Psi}^v(\theta^v, \xi^v) - \widehat{\Psi}^v(\theta'^v, \xi'^v)\|_v^2) \\ & \leq 2e^{2q} \left( d(q+1)^2 \|x - x'\|_{\text{eucl}}^2 + \sum_w 2(2\pi\sqrt{2})^2 |\xi^w - \xi'^w|^2 \right) \\ & \leq 8\pi^2 d^3 e^{2q} \|(x, \xi) - (x', \xi')\|_{\text{eucl}}^2. \end{aligned}$$

La première assertion en découle aisément. Pour conclure, le jacobien de  $\Psi$  vaut en valeur absolue  $|J\Psi(x, \theta, \xi)| = 2^s \prod_w x_w$  (le signe  $\theta$  est fixé et le produit est effectué sur les places complexes uniquement) et nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Sigma_0) &= \sum_{\theta \in \{-1, 1\}^r} \int_{[0, 1]^d} |J\Psi(\delta_0(t, \rho), \theta, 2\pi\xi)| |J\delta_0(t, \rho)| (2\pi)^s dt d\rho d\xi \\ &= 2^r d R M^{-1} (2\pi)^s \int_{t=0}^1 t^{d-1} dt = M^{-1} 2^r (2\pi)^s R \end{aligned}$$

d'où la seconde assertion.  $\square$

En guise de synthèse, le volume du système  $\Sigma$  que nous avons construit admet l'expression suivante, valable dans tous les cas ( $n \geq 1$ ,  $q \geq 0$ )

$$\text{vol}(\Sigma) = n^q \omega_n^r (2^n \omega_{2n})^s R.$$

En revanche, les expressions des constantes  $P$  et  $L$  pour  $\Sigma_0$  qui interviennent dans le théorème 4.4.5 diffèrent légèrement selon que  $n = 1$  ( $P = 2(q+1)2^r$ ,  $L = 3\pi d^{3/2}e^q$ ) ou que  $n \geq 2$  ( $P = 2(q+1)$ ,  $L = 6\pi n d^{3/2}e^q$ ).

### 4.5.3 Conclusion de la preuve du théorème principal hors cas particulier

Nous reprenons les notations du paragraphe 4.4.1. En vertu de la proposition 4.5.4, nous avons établi que pour tout  $B \in \mathbb{R}_+$  la quantité  $N_{\mathbb{P}(E), H}(B)$  vaut

$$\frac{1}{w} \sum_j \sum_{I \in T} \sum_J \sum_{S' \subset S} \mu(J) (-1)^{\text{Card}(S')} \text{Card} \left( \frac{\mathcal{E}(I, J, j + S')}{(B \chi_j \mathfrak{N}(I))^{1/d}} \cap \Sigma \right)$$

où  $j$  parcourt  $\{1, \dots, t_1\} \times \dots \times \{1, \dots, t_l\}$ ,  $J$  parcourt les idéaux de  $\mathcal{O}_K$  qui ne sont divisibles par aucun des  $\mathfrak{p}_u$  pour  $u \in S$  et les  $\mathcal{E}(I, J, j + S')$  sont des réseaux de  $F$  dont le covolume est donné par le théorème 4.4.4. Nous posons  $\kappa'(E) = \prod_{u \in S} p_u^{f_u}$ .

**Lemme 4.5.10.** *La constante*

$$c = n\sqrt{d} \frac{|\Delta|^{1/2d} H(E_{\text{pur}})^{1/nd}}{\Lambda_1(E_{\text{pur}})^{1/d}} \kappa'(E)^{1/d} \geq 1$$

*vérifie la condition (iii) du théorème de décompte 4.4.5*

$$\lambda_1(\tau_k(\Lambda)) / \text{vol}(\tau_k(\Lambda))^{1/nd} \in [1/c, c]$$

*pour tout réseau  $\Lambda$  de la forme  $\mathcal{E}(I, J, \hat{J})$  et tout automorphisme  $\tau_k$  associé à la partition de Schmidt de  $\Sigma$ . Cette condition est encore vérifiée en remplaçant  $\tau_k(\Lambda)$  par son image par une homothétie de  $F$ .*

*Démonstration.* Posons  $x_v = |\varepsilon_1|_v^{-k_1/M_1} \dots |\varepsilon_q|_v^{-k_q/M_q}$  pour un multiindice fixé  $k$  et pour toute place archimédienne  $v$  de sorte que  $\tau_k(y) = xy$  et  $\prod_{v|\infty} x_v^{d_v} = 1$ . Si  $y \in \mathcal{E}(I, J, j + A)$  est non nul alors on a par inégalité arithmético-géométrique

$$\|\tau_k(y)\|_F^2 = \sum_{v|\infty} d_v \|x_v y_v\|_v^2 \geq d \left( \prod_{v|\infty} \|y_v\|_v^{2d_v} \right)^{1/d} = d H_\infty(y)^{2/d}.$$

Or on a  $\|y\|_u^{\text{pur}} \leq |IJ|_u$  pour toute place ultramétrique  $u$  donc

$$\|\tau_k(y)\|_F^2 \geq d(H^{\text{pur}}(y) \mathfrak{N}(IJ))^{2/d} \geq d\Lambda_1(E_{\text{pur}})^{2/d} \mathfrak{N}(IJ)^{2/d}.$$

À partir du théorème 4.4.4 et du fait que  $\tau_k$  est de déterminant 1, on obtient l'encadrement suivant,

$$\frac{\sqrt{d}\Lambda_1(E_{\text{pur}})^{1/d}}{|\Delta|^{1/2d} H(E_{\text{pur}})^{1/nd}} \kappa'(E)^{-1/d} \leq \frac{\lambda_1(\tau_k(\mathcal{E}(I, J, \hat{J})))}{\text{vol}(\tau_k(\mathcal{E}(I, J, \hat{J})))^{1/nd}} \leq \sqrt{nd}.$$

La majoration est une conséquence directe du premier théorème de Minkowski. En divisant le membre de gauche par le membre de droite  $\sqrt{nd}$ , l'encadrement est préservé et le nouveau membre de gauche est inférieur à 1. La constante  $c$  s'obtient alors par quotient et la dernière assertion est claire par homogénéité.  $\square$

Lorsque  $q > 0$ , nous effectuons la partition de Schmidt de  $\Sigma$  en  $M$  parties et nous appliquons le théorème de décompte 4.4.5 à partir de la proposition 4.5.7 et du lemme précédent 4.5.10. Pour les réseaux  $\Lambda$  considérés, on a

$$\left| \text{Card}(\Lambda \cap \Sigma) - \frac{\text{vol}(\Sigma)}{\text{vol}(\Lambda)} \right| \leq \sum_k \left| \text{Card}(\tau_k(\Lambda) \cap \Sigma_0) - \frac{\text{vol}(\Sigma_0)}{\text{vol}(\tau_k(\Lambda))} \right|$$

et par conséquent, d'après le lemme 4.4.1,

$$\left| \text{Card}(\Lambda \cap \Sigma) - \frac{\text{vol}(\Sigma)}{\text{vol}(\Lambda)} \right| \leq \frac{2^d d^{4d} R P(nd)^{2n^2 d^2} (cL)^{nd-1}}{\text{vol}(\Lambda)^{1-1/nd}}$$

avec  $P = 2(q+1)$  et  $L = 6\pi n d^{3/2} e^q$ . Remarquons que cette estimation est également valable dans le cas  $q = 0$  d'après la proposition 4.5.2 (on applique le lemme 4.5.10 avec  $k = 0$ , soit  $\tau_k = \text{id}_F$ ). Nous réunissons donc désormais les deux cas et nous posons

$$\begin{aligned} C'' &= \frac{2^d d^{4d} P(nd)^{2n^2 d^2} (cL)^{nd-1} \Lambda_1(E_{\text{pur}})^{n-1/d}}{(|\Delta|^{n/2} H(E_{\text{pur}}))^{1-1/nd}} \\ &\leq 2^d d^{4d} 2d(nd)^{2n^2 d^2} (6\pi n^2 d^2 e^d)^{nd-1} \kappa'(E)^n. \end{aligned}$$

On majore  $2^d d^{4d}$  par  $(nd)^{n^2 d^2}$  et  $2d(6\pi n^2 d^2 e^d)^{nd-1}$  par  $(5^n n^2 d^2 3^d)^{nd}$  puis par  $(nd)^{6n^2 d^2}$ . Par conséquent  $C'' \leq (nd)^{9n^2 d^2} \kappa'(E)^n$ .

Fixons deux multiindices  $j$  et  $\hat{j}$ . On obtient en majorant  $\chi_j$  par  $\kappa'(E)$

$$\begin{aligned} &\left| \text{Card} \left( \frac{\mathcal{E}(I, J, \hat{j})}{(B\chi_j \mathfrak{N}(I))^{1/d}} \cap \Sigma \right) - \frac{\text{vol}(\Sigma) B^n}{|\Delta|^{n/2} H(E_{\text{pur}}) \mathfrak{N}(J)^n} \chi_j^n \prod_{u \in S} p_u^{-i_{\hat{j}u-1}^u f_u} \right| \\ &\leq \frac{(nd)^{9n^2 d^2} R}{\mathfrak{N}(J)^{n-1/d}} \left( \frac{B}{\Lambda_1(E_{\text{pur}})} \right)^{n-1/d} \kappa'(E)^{2n}. \end{aligned}$$

À partir de cette estimation et de la factorisation

$$\begin{aligned} &\sum_{S' \subset S} (-1)^{\text{Card}(S')} \left( \prod_{u \in S'} p_u^{-i_{j_u}^u f_u} \right) \left( \prod_{u \notin S'} p_u^{-i_{j_u-1}^u f_u} \right) \\ &= \prod_{u \in S} (p_u^{-i_{j_u-1}^u f_u} - p_u^{-i_{j_u}^u f_u}) \end{aligned}$$

nous utilisons la formule donnée par le principe d'inclusion-exclusion pour estimer  $g(J)$

$$\begin{aligned} &\left| g(J) - \frac{\text{vol}(\Sigma) B^n}{|\Delta|^{n/2} H(E_{\text{pur}}) \mathfrak{N}(J)^n} \chi_j^n \prod_{u \in S} (p_u^{-i_{j_u-1}^u f_u} - p_u^{-i_{j_u}^u f_u}) \right| \\ &\leq \frac{(nd)^{9n^2 d^2} R}{\mathfrak{N}(J)^{n-1/d}} \left( \frac{B}{\Lambda_1(E_{\text{pur}})} \right)^{n-1/d} 2^l \kappa'(E)^{2n}. \end{aligned}$$

Dans le cas pur, cette estimation correspond au « Divisorensatz » et la proposition 4.1.4 découle directement de celle-ci avec  $J = \mathcal{O}_K$  et  $B$  remplacé par  $B/\mathfrak{N}(I)$ .

Nous effectuons ensuite la somme de ces inégalités sur  $I \in T$  et sur les idéaux  $J$  qui ne sont divisibles par aucun des idéaux premiers associés aux places de  $S$ .

Nous utilisons une formule d'inversion de Möbius généralisée : si  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_l$  sont des idéaux premiers de  $\mathcal{O}_K$  non nuls et distincts alors

$$\sum_{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_l \nmid J} \frac{\mu(J)}{\mathfrak{N}(J)^n} = \frac{1}{\zeta_K(n)} \prod_{i=1}^l \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i)^n}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i)^n - 1}.$$

Pour la fin de cette preuve, nous supposons  $n - 1/d > 1$  et assurons ainsi que la série des termes d'erreur est convergente. On majore  $\zeta_K(n - 1/d)$  par  $(nd)^{n^2 d^2}$  en utilisant  $\zeta_K(s) \leq (s/(s-1))^d$ . On divise ensuite par  $w$  et on utilise la proposition 4.5.8 pour faire apparaître la constante  $C(n, K)$  définie dans l'introduction. Il vient

$$\begin{aligned} & \left| N_{E_j/K^\times, H}(B) - \frac{C(n, K)B^n}{H(E_{\text{pur}})} \chi_j^n \prod_{u \in S} \frac{p_u^{(n-i_{ju}^u)f_u} - p_u^{(n-i_{ju}^u)f_u}}{p_u^{nf_u} - 1} \right| \\ & \leq \frac{h(nd)^{10n^2 d^2} R}{w} \left( \frac{B}{\Lambda_1(E_{\text{pur}})} \right)^{n-1/d} 2^l \kappa'(E)^{2n}. \end{aligned}$$

Nous terminons par la somme sur les multiindices  $j$  en remarquant à nouveau une factorisation

$$\sum_j \chi_j^n \prod_{u \in S} \frac{p_u^{(n-i_{ju}^u)f_u} - p_u^{(n-i_{ju}^u)f_u}}{p_u^{nf_u} - 1} = \kappa(E).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \left| N_{\mathbb{P}(E), H}(B) - \frac{C(n, K)B^n}{H(E_{\text{pur}})} \kappa(E) \right| \\ & \leq \frac{h(nd)^{10n^2 d^2} R}{w} \left( \frac{B}{\Lambda_1(E_{\text{pur}})} \right)^{n-1/d} \kappa'(E)^{2n} \prod_{u \in S} 2t_u. \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à majorer  $\prod_{u \in S} 2t_u$  par  $\kappa'(E)^n$ .

#### 4.5.4 Conclusion de la preuve dans le cas particulier

Dans ce paragraphe,  $E$  désigne un fibré adélique hermitien de dimension 2 sur  $\mathbb{Q}$ . Nous fixons une  $\mathbb{Z}$ -base de

$$\mathcal{E} = \{x \in E \mid \forall u \neq \infty, \|x\|_u^{\text{pur}} \leq 1\}$$

et nous identifions  $E$  à  $\mathbb{Q}^2$  au moyen de celle-ci. Ainsi  $\mathcal{E} = \mathbb{Z}^2$  et la hauteur purifiée d'un point  $(x, y) \in \mathcal{E}$  à coordonnées entières premières entre elles est égale à  $\|x, y\|_\infty$ . En particulier, le covolume et les minima successifs du réseau  $\mathcal{E}$  pour la structure euclidienne définie par  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $F = E_\infty = \mathbb{R}^2$  s'identifient respectivement aux grandeurs  $H(E_{\text{pur}})$  et  $\Lambda_i = \Lambda_i(E_{\text{pur}})$ ,  $i = 1, 2$ . Par définition

$\Lambda_2$  désigne le plus petit nombre réel positif pour lequel  $E_{\text{pur}}$  admet une  $\mathbb{Q}$ -base formée de vecteurs de hauteur (purifiée) inférieure à  $\Lambda_2$ .

Dans un premier temps, nous supposons que toute place impure  $u \in S$  de  $E$  possède deux valeurs impures  $\nu_1^u > \nu_2^u$  distinctes et de multiplicités 1. Puisque l'anneau des entiers du corps de base est principal, l'expression de  $N_{\mathbb{P}(E), H}(B)$  mise en évidence dans la partie 4.4.1 peut être retrouvée par des moyens élémentaires que nous préférons rappeler ici. Pour tout  $j \in \{1, 2\}^S$  nous posons comme précédemment

$$E_j = \{(x, y) \in E \setminus \{0\} \mid \forall u \in S, \|x, y\|_u = \nu_{j_u}^u \|x, y\|_u^{\text{pur}}\}$$

ainsi que  $\chi_j = \prod_{u \in S} (\nu_{j_u}^u)^{-1}$ . Alors toute  $\mathbb{Q}^\times$ -orbite de  $E_j$  contient exactement deux couples  $(x, y)$  d'entiers premiers entre eux. Comme la base canonique est orthonormée pour toutes les normes ultramétriques purifiées, la norme de ces points en la place impure  $u$  vaut  $\nu_{j_u}^u$  et leur hauteur s'écrit

$$H(x, y) = \chi_j^{-1} H^{\text{pur}}(x, y) = \chi_j^{-1} \|x, y\|_\infty.$$

Nous sommes donc ramenés au décompte des points à coordonnées entières premières entre elles dans  $E_j$  de norme euclidienne inférieure à  $B\chi_j$ . Par inversion de Möbius nous obtenons

$$N_{\mathbb{P}(E), H}(B) = \frac{1}{2} \sum_j \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) g(k)$$

où  $g(k)$  désigne le cardinal de l'ensemble

$$\{(x, y) \in (k\mathbb{Z})^2 \mid \forall u \in S, \|x, y\|_u = \nu_{j_u}^u, 0 < \|x, y\|_\infty \leq B\chi_j\}.$$

Remarquons que  $g(k)$  est nul lorsque  $k$  est divisible par l'un des nombres premiers de  $S$ . Fixons un entier non nul  $k$  premier à  $S$  et posons pour tout  $\widehat{j} \in \{1, 2, 3\}^S$

$$\mathcal{E}(k, \widehat{j}) = \{(x, y) \in (k\mathbb{Z})^2 \mid \forall u \in S, \|x, y\|_u \leq \nu_{\widehat{j}_u}^u\}$$

où  $\nu_3^u$  désigne l'inverse du nombre premier associé à  $u$ . Nous voyons  $\mathcal{E}(k, \widehat{j})$  comme un réseau de  $F = \mathbb{R}^2$  muni de la norme euclidienne  $\|\cdot\|_\infty$ . Par le théorème 4.4.4 son covolume vaut

$$\text{vol}(\mathcal{E}(k, \widehat{j})) = H(E_{\text{pur}}) k^2 \prod_{p \in S} p^{\widehat{j}_p - 1}.$$

En notant  $\Sigma$  le disque unité fermé de  $F$  privé de l'origine, nous avons comme précédemment par le principe d'inclusion-exclusion

$$g(k) = \sum_{S' \subset S} (-1)^{\text{Card } S'} \text{Card} \left( \frac{\mathcal{E}(k, j + S')}{B\chi_j} \cap \Sigma \right).$$

Pour estimer ces cardinaux, nous comparerons les résultats fournis par le théorème de décompte 4.4.5 et par un théorème spécifique au cadre euclidien et à la dimension 2 dû à Chaix [9]. Plus précisément, nous utiliserons l'énoncé ci-dessous qui découle directement de ce dernier.

**Proposition 4.5.11.** *Soient  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbb{R}^2$  muni de sa structure euclidienne canonique,  $\lambda_1$  son premier minimum et  $\bar{\Sigma}$  le disque unité fermé. Alors*

$$|\text{Card}(\Lambda \cap \bar{\Sigma}) - \pi/\text{vol}(\Lambda)| \leq 16400 \times 8\text{vol}(\Lambda)^{2/3}/\lambda_1^2.$$

*Démonstration.* Tout d'abord, nous construisons une seconde structure euclidienne où le réseau  $\Lambda$  est engendré par une base orthonormée  $(f_1, f_2)$ . Nous choisissons donc une  $\mathbb{Z}$ -base  $(f_1, f_2)$  de  $\Lambda$  qui atteint les minima du réseau (pour la structure canonique)  $\|f_i\| = \lambda_i$  pour  $i = 1, 2$ . Posons ensuite

$$d = \det_{\text{can}}(f_1, f_2) = \pm \text{vol}(\Lambda)$$

et notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  défini par  $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{i,j}$ . Nous posons enfin

$$n_1 = \langle (1, 0), (1, 0) \rangle, \quad n_2 = \langle (0, 1), (0, 1) \rangle \text{ et } s = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle.$$

Si  $\phi \in \mathbb{R}$  est tel que  $\cos 2\phi = (n_1 - n_2)/\alpha$  et  $\sin 2\phi = 2s/\alpha$  avec

$$\alpha = ((n_1 - n_2)^2 + 4s^2)^{1/2} = ((n_1 + n_2)^2 - 4/d^2)^{1/2},$$

alors on vérifie que la famille  $(e_1, e_2) = ((\cos \phi, \sin \phi), (-\sin \phi, \cos \phi))$  est simultanément orthonormée pour la structure euclidienne canonique et orthogonale pour la structure euclidienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Autrement dit  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$  et, pour cette seconde structure, le disque  $\bar{\Sigma}$  devient une ellipse pleine dont les demi-axes  $a \geq b$  sont donnés par les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$ .

Pour appliquer la méthode de [9], il faut maintenant majorer le rayon de courbure maximal  $R = a^2/b$  en un point de l'ellipse. Or nous avons

$$\langle e_1, e_1 \rangle = (n_1 + n_2 + \alpha)/2 = a^2 \text{ et}$$

$$\langle e_2, e_2 \rangle = (n_1 + n_2 - \alpha)/2 = b^2.$$

Le produit de ces deux quantités vaut  $1/d^2$  et on obtient donc la majoration suivante

$$R = a^2/b = |d|a^3 \leq |d|(n_1 + n_2)^{3/2}.$$

Enfin nous appliquons la relation  $n_1 + n_2 = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)/d^2$  puis le second théorème de Minkowski  $\lambda_1 \lambda_2 \leq 2|d|$  pour obtenir la majoration

$$R \leq \frac{|d|2^{3/2}\lambda_2^3}{|d|^3} \leq \frac{2^{3/2}(2|d|)^3}{\lambda_1^3|d|^2} = \frac{16\sqrt{2}|d|}{\lambda_1^3}.$$

Le théorème de [9] fournit alors la borne  $16400R^{2/3}$  comme annoncé.  $\square$

Pour  $i$  un entier positif posons  $k_i = \lfloor (B\chi_j/\Lambda_1)(\Lambda_1/\Lambda_2)^{2i} \rfloor$ . Lorsque l'entier  $k$  premier à  $S$  vérifie  $k > k_0$ , nous avons clairement  $g(k) = 0$  et donc

$$\left| g(k) - \frac{\pi B^2 \chi_j^2}{k^2 H(E_{\text{pur}})} \prod_{p \in S} (p^{1-j_p} - p^{-j_p}) \right| \leq \frac{\pi \kappa'(E) B^2 \chi_j^2}{H(E_{\text{pur}}) k^2}.$$

Lorsque  $k \leq k_0$ , nous appliquons le théorème de décompte 4.4.5 avec  $m = P = 2$ ,  $L = 2\pi$  et  $c = 2\kappa'(E)H(E_{\text{pur}})^{1/2}/\Lambda_1$  et la proposition précédente 4.5.11 (on ajoute 1 à 16400 afin d'exclure le centre de l'ellipsoïde). Nous obtenons alors les deux majorations suivantes pour la valeur absolue ci-dessus

$$2^{11}\pi\kappa'(E)^2 \frac{B\chi_j}{k\Lambda_1} \quad \text{et} \quad 16401 \frac{8\kappa'(E)^{7/3}H(E_{\text{pur}})^{2/3}}{\Lambda_1^{4/3}} \left( \frac{B\chi_j}{k\Lambda_1} \right)^{2/3}.$$

En utilisant des comparaisons série-intégrale nous pouvons écrire lorsque  $k_0, k_1 > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k_0} k^{-1} &\leq 1 + \log \frac{B\chi_j}{\Lambda_1}, \\ \sum_{k=1}^{k_1} k^{-2/3} &\leq 3 \left( \frac{B\chi_j}{\Lambda_1} \right)^{1/3} \left( \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \right)^{2/3}, \\ \sum_{k=k_1+1}^{k_0} k^{-1} &\leq 2 \log \frac{2\Lambda_2}{\Lambda_1}, \\ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} k^{-2} &\leq \frac{2\Lambda_1}{B\chi_j}. \end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant par  $\mu(k)$ , en effectuant la somme sur les entiers  $k > 0$  premiers à  $S$  et en utilisant les estimations appropriées sur chacun des intervalles nous obtenons pour un multiindice  $j$  fixé les deux majorations suivantes

$$\begin{aligned} &\left| N_{E_j/\mathbb{Q}^\times, H}(B) - \frac{\pi B^2 \chi_j^2}{2H(E_{\text{pur}})\zeta_{\mathbb{Q}}(2)} \prod_{p \in S} \frac{p^{3-j_p} - p^{2-j_p}}{p^2 - 1} \right| \\ &\leq 2\pi\kappa'(E) \left( \frac{B\chi_j}{\Lambda_1} \right) + \left( \frac{B\chi_j}{2\Lambda_1} \right) \left\{ \begin{array}{l} 2^{11}\pi\kappa'(E)^2(1 + \log(B\chi_j/\Lambda_1)) \text{ ou} \\ 16773 \times 24\kappa'(E)^3(1 + \log(\Lambda_2/\Lambda_1)). \end{array} \right. \end{aligned}$$

Remarquons que ces deux estimations sont encore valables si  $k_1 = 0 < k_0$  puisque le premier majorant a été obtenu à partir de  $k_0$  seulement et que le second majorant est supérieur au premier sachant que  $B\chi_j/\Lambda_1 < (\Lambda_2/\Lambda_1)^2$ . En outre, nous avons utilisé

$$16401 \times 24 + 2^{12}\pi \log(2\Lambda_2/\Lambda_1) \leq 16773 \times 24(1 + \log(\Lambda_2/\Lambda_1))$$

ainsi que les théorèmes de Minkowski et l'inégalité de Hadamard qui peuvent être résumés par

$$\Lambda_1^2 \leq \Lambda_1 \Lambda_2 \leq 2H(E_{\text{pur}}) \leq 2\Lambda_1 \Lambda_2.$$

Comme  $\chi_j \leq \kappa'(E)$  et  $2\pi \leq 12$  nous avons donc

$$\left| N_{E_j/\mathbb{Q}^\times, H}(B) - \frac{\pi B^2 \chi_j^2}{2H(E_{\text{pur}})\zeta_{\mathbb{Q}}(2)} \prod_{p \in S} \frac{p^{3-j_p} - p^{2-j_p}}{p^2 - 1} \right| \leq 16774 \times 12\kappa'(E)^4 \left( \frac{B}{\Lambda_1} \right) \left( 1 + \log \min \left( 1 + \frac{B}{\Lambda_1}, \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \right) \right).$$

Cette estimation reste valable lorsque  $k_0 = 0$  puisque  $N_{E_j/\mathbb{Q}^\times, H}(B) = 0$  dans ce cas et la valeur absolue est majorée par  $\pi\kappa'(E)B/\Lambda_1$ . La sommation sur les multiindices  $j$  donne l'estimation finale

$$\left| N_{\mathbb{P}(E), H}(B) - \frac{\pi\kappa(E)B^2}{2H(E_{\text{pur}})\zeta_{\mathbb{Q}}(2)} \right| \leq 201300\kappa'(E)^5 \left( \frac{B}{\Lambda_1} \right) \left( 1 + \log \min \left( 1 + \frac{B}{\Lambda_1}, \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \right) \right).$$

Soit maintenant un fibré adélique  $E$  de dimension 2 sur  $\mathbb{Q}$  et  $S$  (respectivement  $S'$ ) l'ensemble des places impures  $u$  ayant deux valeurs impures distinctes de multiplicité 1 (respectivement une unique valeur impure  $\nu^u$  de multiplicité 2). On se ramène au cas traité ci-dessus en considérant le fibré

$$(E', \|\cdot\|'_v, H') = (E, \chi_v \|\cdot\|_v, \chi H)$$

où  $\chi_u = (\nu^u)^{-1}$  si  $u \in S'$  et 1 sinon et  $\chi = \prod_{u \in S'} (\nu^u)^{-1}$ . Notons que ces deux fibrés ont même purifié, en outre  $\kappa(E') = \chi^{-2}\kappa(E)$  et pour tout  $B$  on obtient

$$N_{\mathbb{P}(E'), H'}(B) = N_{\mathbb{P}(E), H}(\chi^{-1}B).$$

On en déduit que l'estimation établie ci-dessus reste valable dans le cas général puisque  $\chi^{-2}\kappa'(E)^5 \leq \kappa'(E')^5$  et ceci achève la démonstration du théorème principal 4.1.1.

## 4.6 Applications

### 4.6.1 Le problème de Dedekind-Weber

Nous prouvons ici la proposition 4.1.2 et son corollaire 4.1.3. Soient  $K$  un corps de nombres de degré  $d$  et  $I$  un idéal fractionnaire fixé de  $K$ . Notre but est d'estimer le nombre  $N_{[I]_+, \mathfrak{N}}(B)$  d'idéaux non nuls  $J$  entiers (inclus dans  $\mathcal{O}_K$ ) appartenant à la classe  $[I]$  de  $I$  et dont la norme est majorée par  $B$ . Nous en déduirons une estimation semblable pour le nombre  $N_{\mathfrak{I}, \mathfrak{N}}(B)$  d'idéaux entiers non nuls de norme inférieure à  $B$  puis une majoration de la constante d'Euler  $\gamma_K$  du corps  $K$ .

Nous définissons une structure de fibré adélique hermitien pur sur l'espace  $E = K$  par

$$\|x\|_v = \begin{cases} |x|_v & \text{si } v|\infty, \\ |x|_v|I|_v & \text{si } v \nmid \infty. \end{cases}$$

Il vient facilement en premier lieu  $H(E) = \Lambda_1(E) = 1/\mathfrak{N}(I)$ . Nous constatons ensuite que l'ensemble des idéaux  $J$  qui nous intéresse ici est en bijection avec les  $\mathcal{O}_K^\times$ -orbites de l'ensemble

$$\{x \in K \mid x \in I^{-1} \text{ et } 0 < H_\infty(x) \leq B/\mathfrak{N}(I)\}.$$

En effet, la bijection en question provient de l'application qui à un tel élément  $x$  associe l'idéal  $J = xI$ . En particulier, comme  $x \in I^{-1}$  équivaut à  $I_x = xI \subset \mathcal{O}_K$  nous avons

$$N_{[I]_+, \mathfrak{N}}(B\mathfrak{N}(I)) = g(\mathcal{O}_K)/w$$

où  $g$  est la fonction définie au paragraphe 4.4.1 obtenue en considérant la classe neutre dans  $\text{Cl}(K)$  (de sorte que l'idéal noté  $I$  dans cette formule doit être remplacé par  $\mathcal{O}_K$ ; en outre  $S$  est vide,  $E_j = E = K$  et  $\chi_j = 1$ ).

Ainsi, en posant  $\mathcal{E} = \{x \in K \mid \forall u \nmid \infty, \|x\|_u \leq 1\} = I^{-1}$  il vient

$$N_{[I]_+, \mathfrak{N}}(B\mathfrak{N}(I)) = w^{-1} \text{Card}(B^{-1/d} \mathcal{E} \cap \Sigma).$$

Nous estimons ce cardinal en appliquant le théorème de décompte 4.4.5 après avoir partitionné  $\Sigma$  selon la méthode de Schmidt lorsque  $q > 0$ . Notons que le lemme 4.5.10 est toujours valable et que le covolume du réseau  $\mathcal{E} \subset F$  vaut  $|\Delta|^{1/2} H(E)$ . Par conséquent, nous obtenons

$$\left| N_{[I]_+, \mathfrak{N}}(B\mathfrak{N}(I)) - \frac{2^r (2\pi)^s R}{w |\Delta|^{1/2}} B\mathfrak{N}(I) \right| \leq \frac{C'' R}{w} (B\mathfrak{N}(I))^{1-1/d}$$

avec  $C'' = 2^d d^{4d} d^{2d^2} d^{2d-2} 3^{(d-1)^2} 2d2^d 10^{d-1}$ . Si  $d > 1$  on majore  $2.40^d/10$  par  $3^{2d-1}$  et  $d^{6d-1}$  par  $d^{3d^2}$ , ce qui donne  $C'' \leq 3^{d^2} d^{5d^2}$ . Cette estimation reste valable pour  $K = \mathbb{Q}$  vu que l'erreur est inférieure à 1. Comme  $N_{\mathfrak{I}, \mathfrak{N}}(B)$  est la somme des  $N_{[I]_+, \mathfrak{N}}(B)$  où  $I$  parcourt un système de représentants des classes d'idéaux, il vient enfin

$$|N_{\mathfrak{I}, \mathfrak{N}}(B) - C'(1, K)hB| \leq \frac{3^{d^2} d^{5d^2} hR}{w} B^{1-1/d}$$

avec  $C'(1, K) = 2^r (2\pi)^s R/w |\Delta|^{1/2}$ .

Suivant la méthode de [21] et posant  $e(t) = N_{\mathfrak{I}, \mathfrak{N}}(t) - C'(1, K)ht$ , nous écrivons

$$\zeta_K(s) = s \int_{t=1}^{\infty} \frac{N_{\mathfrak{I}, \mathfrak{N}}(t)}{t^{s+1}} dt = \frac{C'(1, K)h}{s-1} + C'(1, K)h + s \int_{t=1}^{\infty} \frac{e(t)}{t^{s+1}} dt.$$

Il vient par convergence dominée que

$$\gamma_K = \lim_{s \rightarrow 1} \left( \zeta_K(s) - \frac{C'(1, K)h}{s-1} \right) = C'(1, K)h + \int_{t=1}^{\infty} \frac{e(t)}{t^2} dt$$

et donc  $|\gamma_K| \leq (3^d + d3^{d^2} d^{5d^2})hR/w \leq 3^{d^2+1} d^{5d^2+1} hR/w$ .

### 4.6.2 Le problème de Lohé-Masser

Pour terminer nous prouvons le corollaire 4.1.6. Avec les notations introduites au paragraphe 4.1.3, nous définissons une structure de fibré adélique hermitien sur  $E = K^n$  par

$$\|x\|_v = \begin{cases} (|\alpha_1|_v^{2/\ell} |x_1|_v^2 + \dots + |\alpha_n|_v^{2/\ell} |x_n|_v^2)^{1/2} & \text{si } v|\infty, \\ \max(|\alpha_1|_v^{1/\ell} |x_1|_v, \dots, |\alpha_n|_v^{1/\ell} |x_n|_v) & \text{si } v \nmid \infty \end{cases}$$

de sorte que la hauteur associée est  $H_\theta$ . L'ensemble  $S$  des places impures de ce fibré correspond à l'ensemble des idéaux  $\mathfrak{p}$  telles que  $a_{\mathfrak{p},i} > 0$  pour un certain indice  $i$ , d'où  $\kappa' = \kappa'(E)$ .

Si pour tout entier  $0 \leq a < \ell$  nous posons

$$k_a^u = \text{Card}\{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_{\mathfrak{p},i} = a\},$$

alors  $k_a^u$  est la multiplicité de la valeur impure  $\nu_a^u = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-a/\ell d_u}$  en la place  $u$  (lorsque  $k_a^u > 0$ ). On a en particulier (voir définition 4.3.4)

$$\kappa_u(E_u) = \sum_{a=0}^{\ell-1} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{na/\ell} \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{n-i_{a-1}^u} - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{n-i_a^u}}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^n - 1} \in [1, \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{n(\ell-1)/\ell}]$$

avec  $i_a^u = k_0^u + \dots + k_a^u$  ( $i_{-1}^u = 0$ ) puis  $\kappa(E) = \prod_{u \in S} \kappa_u(E_u)$ .

Comme la base canonique de  $E$  est orthogonale pour toute place, la hauteur du fibré purifié s'obtient facilement

$$H(E_{\text{pur}}) = \prod_{u \in S} \prod_{a=0}^{\ell-1} (\nu_a^u)^{-k_a^u d_u} \in [1, (\kappa')^{n(\ell-1)/\ell}].$$

Par ailleurs, pour tout point  $x \in E \setminus \{0\}$  nous avons une minoration de la hauteur de  $x$  (pour la structure de fibré non purifié) en fonction des hauteurs de Weil (relatives à  $K$ ) de  $\alpha^{-1} = (\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1})$  et de  $x$

$$H(x) \geq H_{\text{Weil}}^K(x) H_{\text{Weil}}^K(\alpha^{-1})^{-1/\ell}$$

et nous en déduisons

$$\Lambda_1(E_{\text{pur}}) \geq \Lambda_1(E) \geq H_{\text{Weil}}^K(\alpha^{-1})^{-1/\ell}.$$

Par conséquent, le théorème principal 4.1.1 donne l'estimation

$$\begin{aligned} & \left| N_{\mathbb{P}(E), H}(B) - \frac{C(n, K) \kappa(E)}{H(E_{\text{pur}})} B^n \right| \\ & \leq \frac{(nd)^{10n^2 d^2} hR}{w} \kappa'(E)^{3n} (H_{\text{Weil}}^K(\alpha^{-1})^{1/\ell} B)^{n-1/d} \end{aligned}$$

avec  $H_{\text{Weil}}^K(\alpha^{-1}) = H_{\text{Weil}}^L(\theta^{-1})^{\ell/[L:K]}$ . Le résultat annoncé s'en déduit en posant

$$\kappa = \kappa(E)/H(E_{\text{pur}}) \in [(\kappa')^{-n(\ell-1)/\ell}, (\kappa')^{n(\ell-1)/\ell}].$$



# Bibliographie

- [1] Amoroso F., David S. : Points de petite hauteur sur une sous-variété d'un tore. *Compos. Math.* **142**, 551–562 (2006)
- [2] Amoroso F., Viada E. : Small points on subvarieties of a torus. *Duke Mathematical Journal* **150**, 407–442 (2009)
- [3] Ange T. : Le théorème de Schanuel dans les fibrés adéliques hermitiens. *Manuscripta Math.* **144**, 565–608 (2014)
- [4] Bombieri E. : The Mordell conjecture revisited. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **17**, 615–640 (1990)
- [5] Bombieri E., Gubler W. : *Heights in diophantine geometry*. Cambridge University Press (2006)
- [6] Bost J.-B., Gillet H., Soulé C. : Heights of projective varieties and positive Green forms. *Journal of the American Mathematical Society* **7**, 903–1027 (1994)
- [7] Cassels J. W. S. : *An introduction to the geometry of numbers*. Springer-Verlag (1971)
- [8] Cassels J. W. S., Fröhlich A. : *Algebraic number theory*. Academic Press (1986)
- [9] Chaix H. : Démonstration élémentaire d'un théorème de Van der Corput. *C. R. Ac. Sc. Paris* **275 A**, 883–885 (1972)
- [10] Christensen C., Gubler W. : Der relative Satz von Schanuel. *Manuscripta Math.* **126**, 505–525 (2008)
- [11] David S., Philippon P. : Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **28**, 489–543 (1999)
- [12] Evertse J. H., Schlickewei H. P., Schmidt W. M. : Linear equations in variables which lie in a multiplicative group. *Annals of Mathematics* **155**, 807–836 (2002)
- [13] Faltings G. : Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.* **73**, 349–366 (1983)
- [14] Faltings G. : Diophantine approximation on abelian varieties. *Annals of Mathematics* **133**, 549–576 (1991)
- [15] Faltings G. : The general case of S. Lang conjecture. Barsotti's Symposium in Algebraic geometry, Acad. Press, 175–182 (1994)

- [16] Frei C., Widmer M. : Schanuel's theorem for heights defined via extension fields. arXiv : 1208.4786
- [17] Gasbarri C. : On the number of points of bounded height on arithmetic projective spaces. *Manuscripta Math.* **98**, 453–475 (1999)
- [18] Gaudron É. : Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.* **119**, 21–95 (2008)
- [19] Gaudron É. : Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés. *Manuscripta Math.* **130**, 159–182 (2009)
- [20] Mumford D. : A remark on Mordell's conjecture. *Amer. J. Math.* **87**, 1007–1016 (1965)
- [21] Murty R., Van Order J. : Counting integral ideals in a number field. *Expo. Math.* **25**, 53–56 (2007)
- [22] Lang S. : Integral points on curves. *Publications mathématiques de l'I.H.E.S.* **6**, 27–43 (1960)
- [23] Laurent M. : Équations diophantiennes exponentielles. *Invent. Math.* **78**, 299–327 (1984)
- [24] Lohrer T., Masser D. W. : Uniformly counting points of bounded height. *Acta Arith.* **111**, 277–297 (2004)
- [25] Peyre E. : Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. J.* **79**, 101–218 (1995)
- [26] Philippon P. : Sur des hauteurs alternatives III. *J. Math. Pures Appl.* **74**, 345–365 (1995)
- [27] Poonen B. : Mordell-Lang plus Bogomolov. *Invent. Math.* **137**, 413–425 (1999)
- [28] Rémond G. : Inégalité de Vojta en dimension supérieure. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **29**, 101–151 (2000)
- [29] Rémond G. : Décompte dans une conjecture de Lang. *Invent. Math.* **142**, 513–545 (2000)
- [30] Rémond G. : Sur les sous-variétés des tores. *Compositio Mathematica* **134**, 337–366 (2002)
- [31] Rémond G. : Inégalité de Vojta généralisée. *Bull. Soc. Math. France* **133**, 459–495 (2005)
- [32] Rémond G., Zehrt-Liebendörfer C. : Le théorème de Schanuel pour un corps non commutatif. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.* **130**, 221–282 (2013)
- [33] Schanuel S. H. : Heights in number fields. *Bull. Soc. Math. Fr.* **107**, 433–449 (1979)
- [34] Schmidt W. M. : Northcott's theorem on height II. The quadratic case. *Acta Arithm.* **70**, 343–375 (1995)
- [35] Thunder J. L. : The number of solutions of bounded height to a system of linear equations. *J. Number Theory.* **43**, 228–250 (1993)

- [36] Thunder J. L. : An adelic Minkowski-Hlawka theorem and an application to Siegel's lemma. *J. reine angew. Math.* **475**, 167–185 (1996)
- [37] Vojta P. : Siegel's theorem in the compact case. *Annals of Mathematics* **133**, 509–548 (1991)
- [38] Vojta P. : Integral points on subvarieties of semi-abelian varieties, I. *Invent. Math.* **126**, 133–181 (1996)
- [39] Voutier P. : An effective lower bound for the height of algebraic numbers. *Acta Arithm.* **74**, 81–95 (1996)
- [40] Weil A. : *Basic number theory*. Springer-Verlag (1974)
- [41] Widmer M. : Counting primitive points of bounded height. *Trans. Amer. Math. Soc.* **362**, 4793–4829 (2010)