HAL
open science

Étude de l'ensemble de rotation local

Jonathan Conejeros

To cite this version:

Jonathan Conejeros. Étude de l'ensemble de rotation local. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066226 . tel-01233134

HAL Id: tel-01233134

https://theses.hal.science/tel-01233134v1

Submitted on 24 Nov 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et
Marie Curie

Institut de Mathématiques
de
Jussieu-Paris Rive Gauche

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Jonathan Conejeros

Étude de l'ensemble de rotation local

---

dirigée par Frédéric Le Roux et Sylvain Crovisier

Soutenue le 12 octobre 2015 devant le jury composé de :

M. François Béguin	Université Paris 13	rapporteur
M. Marc Bonino	Université Paris 13	examinateur
M. Sylvain Crovisier	Université Paris-Sud 11	co-directeur
M. Patrice Le Calvez	Université Pierre et Marie Curie	examinateur
M. Frédéric Le Roux	Université Pierre et Marie Curie	directeur
Mme. Sylvie Ruette	Université Paris-Sud 11	examinateur

Rapporteur absent lors de la soutenance :

M. Tobias Oertel-Jäger Friedrich Schiller University Jena

Institut de Mathématiques
de Jussieu-Paris Rive Gauche
4, place Jussieu
75252 Paris cedex 05

École Doctorale de Sciences
Mathématiques de Paris
Centre
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

Table des matières

1 Introduction **6**

1.1 La notion d'ensemble de rotation 6

1.1.1 L'ensemble de rotation local autour d'une sous-variété de codimension 2 7

1.1.2 L'ensemble de rotation local autour d'un point fixe est toujours un intervalle 8

1.2 Énoncés précis des résultats obtenus dans cette thèse 10

1.2.1 L'ensemble de rotation local autour d'une sous-variété de codimension 2 10

1.2.2 L'ensemble de rotation local autour d'un point fixe est toujours un intervalle 13

2 L'ensemble de rotation autour d'une sous-variété de codimension 2 **16**

2.1 Préliminaires 16

2.1.1 Le cercle, le plan centré 16

2.1.2 Sous-variété de codimension 2 16

2.1.3 Les espaces produits 17

2.1.4 Homéomorphismes locaux 17

2.1.5 L'ensemble des mesures de probabilité 18

2.2 L'ensemble de rotation local autour de N 19

2.2.1 Définition 19

2.2.2 Propriétés 20

2.3 Les ensembles de rotation locaux des homéomorphismes locaux fibrés 25

2.3.1 Ensemble de rotation local autour de N au-dessus d'une orbite 25

2.3.2 Ensemble de rotation local autour de N au-dessus d'une mesure 25

2.3.3 Propriétés 27

2.4 L'ensemble de rotation des homéomorphismes fibrés de $N \times \mathbb{T}^1$ 33

2.4.1 Homéomorphismes fibrés de $N \times \mathbb{T}^1$ 34

2.4.2 Définitions des ensembles de rotation fibrés 34

2.4.3 Comparaison entre les différentes définitions 40

2.5 Éclatement et ensemble de rotation 41

2.5.1 Éclatement d'un voisinage de N le long de N 42

2.5.2 Applications éclatables 42

2.5.3 Démonstration du théorème 1 45
2.5.4 Conséquences du théorème 1 : théorème 1∗ 47
2.6 L'invariant de Ruelle du tore ou du disque vu comme ensemble de rotation local 50
2.6.1 Le groupe des difféomorphismes 50
2.6.2 Le carré d'un difféomorphisme 50
2.6.3 Définition de l'invariant de Ruelle du tore $\mathbb{T}^2$ 51
2.6.4 L'invariant de Ruelle du tore vu comme ensemble de rotation local 52

3 The Local Rotation Set Is an Interval 55
3.1 Preliminary results 55
3.1.1 Foliations 55
3.1.2 Isotopies 56
3.1.3 The existence of a transverse foliation 56
3.1.4 Dynamics of the transverse foliation with two singularities 57
3.2 Local Case 59
3.2.1 Definitions 59
3.2.2 Main result: Proof of Theorem A 61
3.2.3 Proof of Proposition 3.2.3 63
3.3 Case of the Open Annulus 67
3.3.1 Definitions 67
3.3.2 Main result: Proof of Theorem B 69
3.3.3 Proof of Theorem B* 79
3.4 Proof of Theorem D 79
3.5 Dynamics in the Closed Annulus: Theorem C 80
3.5.1 Reduction of Theorem C 80
3.5.2 Stable branches and unstable branches 82
3.5.3 Consequence of Hypothesis (H_3) 85
3.5.4 Proof of Proposition 3.5.1 88
3.5.5 End of the proof of Theorem C* 91

Résumé 93

Abstract 94

Bibliographie 95

Chapitre 1

Introduction

Dans cette thèse nous nous intéressons à la dynamique locale autour d'une sous-variété compacte invariante et à la théorie du nombre de rotation.

1.1 La notion d'ensemble de rotation

La notion de *nombre de rotation* a été introduite par Henri Poincaré pour l'étude des homéomorphismes du cercle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ préservant l'orientation (et celle des champs de vecteurs sur le tore), voir [Poi85]. Soit f un homéomorphisme préservant l'orientation du cercle et $\widetilde{f}$ un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ qui relève f. On définit le *nombre de rotation de* $\widetilde{f}$ comme limite de la suite suivante (cette limite ne dépend pas du choix de $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$),

$$\rho(\widetilde{f}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\widetilde{f}^n(\widetilde{x}) - \widetilde{x}}{n}.$$

Ce nombre est un *invariant de conjugaison topologique* : deux éléments conjugués dans le groupe des homéomorphismes du cercle qui préservent l'orientation, ont le même nombre de rotation (quitte à bien choisir les relevés).

La notion de nombre de rotation d'Henri Poincaré peut être généralisée en dimension supérieure de différentes manières. De plus le nombre de rotation n'est pas unique en général. On va donc obtenir différents *ensembles de rotation*, qu'il faudra comparer. Dans le cas du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, la notion d'ensemble de rotation a été introduite par M. Misiurewicz et K. Ziemian (voir [MZ89]). Pour un homéomorphisme du tore f isotope à l'identité, l'ensemble de rotation $\rho(\widetilde{f})$ associé à un relevé $\widetilde{f}$ de f est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Plusieurs travaux décrivent la relation entre l'ensemble de rotation et la dynamique de f. Par exemple si $(p_1/q, p_2/q)$ est un point rationnel dans l'intérieur de $\rho(\widetilde{f})$, alors il existe un point périodique de période q (voir [Fra88]). Si $\rho(\widetilde{f})$ est d'intérieur non-vide, alors l'entropie topologique de f est strictement positive (voir [LM91]). Plus récemment, à l'aide des feuilletages transverses à la dynamique introduits par P. Le Calvez, une description plus précise de la dynamique de certains homéomorphismes du tore a été donnée (voir par exemple [Dav13] et [LT15]).

Dans le cadre local, qui nous intéresse ici, nous allons essayer de répondre aux questions générales suivantes : étant donné un homéomorphisme F d'une variété M qui préserve une sous-variété compacte N de codimension 2, quelle est la dynamique des orbites de F au voisinage de N ? Peut-on définir une notion de nombre de rotation pour ces orbites ? Existe-il une relation entre l'ensemble de rotation et la dynamique de l'homéomorphisme F ? Lorsque N est un point fixe, autrement dit lorsque F est un homéomorphisme de surface au voisinage d'un point fixe, ce problème a été considéré par Frédéric Le Roux.

Nous allons diviser cette thèse en deux chapitres intitulés "l'ensemble de rotation local autour d'une sous-variété de codimension 2" et "l'ensemble de rotation local autour d'un point fixe est toujours un intervalle".

1.1.1 L'ensemble de rotation local autour d'une sous-variété de codimension 2

Soit $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ l'ensemble des homéomorphismes du plan $\mathbb{R}^2$ isotopes a l'identité qui fixent l'origine $0 \in \mathbb{R}^2$. On dira qu'un élément f de $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ est une *rotation non linéaire* s'il est différentiable en 0, et si sa différentielle en 0 est une rotation d'angle $\alpha(f)$. V. A. Naĭshul′ (voir [Naĭ82]) a montré que l'angle est un invariant de conjugaison topologique.

Théorème 1.1 (V. A. Naĭshul′, [Naĭ82]). *Soient f et g deux rotations non linéaires. Supposons qu'il existe h dans* $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ *tel que $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Si f préserve l'aire ou est holomorphe, alors $\alpha(f) = \alpha(g)$.*

Ce résultat de Naĭshul′, a été généralisé dans plusieurs directions. Toujours sur le plan, J.-M. Gambaudo et E. Pécou dans [GP95] ont donné une preuve simple du résultat de Naĭshul′, puis avec P. Le Calvez dans [GLP96] en ont donné une généralisation aux *homéomorphismes éclatables* (par exemple pour les difféomorphismes en 0), c'est-à-dire aux homéomorphismes du plan qui induisent des homéomorphismes du circle $\mathbb{T}^1$, vu comme bord du plan troué. Ainsi, pour un homéomorphisme éclatable, on peut lui associer le nombre de rotation de l'homéomorphisme induit sur $\mathbb{T}^1$, qu'on appelle le *nombre de rotation en 0*. J.-M. Gambaudo, P. Le Calvez et E. Pécou ont montré que si 0 n'est ni « attractif » ni « répulsif » , alors le nombre de rotation en 0 est un invariant de conjugaison orientée topologique. Plus récemment, F. Le Roux dans [LeR13] a donné une définition générale d'*un ensemble de rotation local autour de* 0 pour n'importe quel homéomorphisme dans $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$, et à l'aide de cet ensemble, a retrouvé le résultat de J.-M. Gambaudo, P. Le Calvez et E. Pécou.

En dimension supérieure, J.-M. Gambaudo et E. Pécou dans [GP95] ont étudié des difféomorphismes de $\mathbb{R}^{n+2}$ qui possèdent un tore $\mathbb{T}^n$ de dimension n invariant. Ils ont supposé aussi que la dynamique sur le tore $\mathbb{T}^n$ est topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle. Ils ont défini un nombre de rotation qui décrit avec quelles vitesses les points tournent dans le fibré normal du tore, et ont démontré que ce nombre est un invariant de conjugaison

topologique. D'autre part, dans [Pon12] M. Ponce a considéré les applications holomorphes $F : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{D} \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{C}$ fixant $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ fibrées au-dessus d'une rotation irrationnelle du cercle $\mathbb{T}^1$. Il a aussi défini un nombre de rotation fibré et a démontré qu'il est invariant par conjugaison topologique fibrée.

Dans la première partie du deuxième chapitre de cette thèse, nous proposons d'introduire une notion d'ensemble de rotation local des homéomorphismes d'une variété M qui préservent une sous-variété N de classe C^1 compacte de codimension 2 dont le fibré normal dans M est trivial. A l'aide de cet ensemble, nous déduirons un résultat qui généralise les travaux en dimension supérieure cités plus haut.

D'autre part, dans [Rue85] D. Ruelle a considéré des difféomorphismes d'une surface dont le fibre tangent est trivial (par exemple le tore $\mathbb{T}^2$) qui préservent une mesure borélienne de probabilité. Il leur a associé un nombre réel qui a été appelé *invariant de Ruelle*, qui mesure la vitesse asymptotique de rotation de la différentielle du difféomorphisme. Dans [GG97], J.-M. Gambaudo et E. Ghys ont montré que l'invariant de Ruelle est en fait un invariant de conjugaison topologique.

Les constructions de cette thèse nous permettront de voir cet invariant comme un ensemble de rotation local au-dessus d'une mesure. A l'aide de l'invariance par conjugaison orientée de cet ensemble de rotation local, nous allons retrouver, à la fin du deuxième chapitre, le résultat de J.-M. Gambaudo et E. Ghys.

1.1.2 L'ensemble de rotation local autour d'un point fixe est toujours un intervalle

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse au cas où N est un point, c'est-à-dire aux homéomorphismes du plan isotopes à l'identité qui fixent 0.

L'ensemble de rotation local autour d'un point fixe

Depuis les travaux autour du résultat de Naĭshul′ cités plus haut, P. Le Calvez (voir [LeC03]) puis P. Le Calvez et J.-C. Yoccoz (voir [LY97]) ont défini des *nombres de rotation* pour certains homéomorphismes dans $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ (à savoir respectivement lorsque 0 est un point « indifférent non dégénéré » et un « point-selle »). Toutes ces situations fournissent des exemples où l'ensemble de rotation local est un singleton, d'après la définition générale donnée par F. Le Roux dans [LeR13]. Mais ce n'est pas le cas en général. Un exemple simple est la famille des *rotations fibrées*. A une fonction continue $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ on associe la rotation fibrée définie en coordonnées polaires, par :

$$f_\alpha : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \alpha(r))$$

Dans ce cas, l'ensemble de rotation local autour de 0, qui mesure la vitesse de rotation asymptotique des orbites voisines de 0, correspond aux valeurs

d'adhérence de la fonction α en 0. On obtient ainsi n'importe quel intervalle fermé de $[-\infty, +\infty]$, comme ensemble de rotation local d'une rotation fibrée. Nous allons montrer que les ensembles de rotation locaux sont toujours des intervalles.

Théorème A. *L'ensemble de rotation local autour d'un point fixe est toujours un intervalle.*

L'ensemble de rotation dans l'anneau ouvert

La notion d'*ensemble de rotation dans l'anneau ouvert* $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$ a été introduite (dans le cas conservatif) par J. Franks (voir [Fra96] et aussi [LeR13]). P. Le Calvez, a donné aussi la définition *d'ensemble de rotation des points récurrents* (voir [LeC01]). Ces deux ensembles coïncident si le dernier est non-vide et l'homéomorphisme satisfait la *propriété d'intersection* (voir [Wan14]). Le deuxième résultat est l'analogue au théorème A pour l'ensemble de rotation dans l'anneau ouvert.

Théorème B. *L'ensemble de rotation dans l'anneau ouvert est toujours un intervalle.*

L'ensemble de rotation dans l'anneau compact et dans le tore

Dans le cas de l'anneau compact, $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{T}^1 \times [0,1]$, on peut démontrer facilement l'analogue des théorèmes A et B. Soit f un homéomorphisme de l'anneau compact isotope à l'identité et $\widetilde{f}$ un revelé de f à $\mathbb{R} \times [0,1]$. Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on définit

$$\rho_n := \left\{ \frac{p_1(\widetilde{f}^n(\widetilde{z})) - p_1(\widetilde{z})}{n} : \widetilde{z} \in \mathbb{R} \times [0,1] \right\},$$

où $p_1 : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est la projection sur la première coordonnée. L'ensemble de rotation (dans l'anneau compact) de l'homéomorphisme $\widetilde{f}$ est alors

$$\rho(\widetilde{f}) := \bigcap_{m \geq 1} \mathrm{Adhe} \left(\bigcup_{n \geq m} \rho_n \right).$$

Comme $\overline{\mathbb{A}}$ est connexe, chacun des ensembles ρ_n est un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}$, c'est donc un intervalle. D'autre part, lorsque n' est un multiple de n, l'ensemble $\rho_{n'}$ est constitué de moyennes d'éléments de l'intervalle ρ_n, on en déduit que les intervalles ρ_n sont deux à deux d'intersection non-vide, et leur réunion est donc un intervalle. Ainsi $\rho(\widetilde{f})$ est une intersection décroissante d'intervalles, c'est donc un intervalle.

Dans le cas du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, M. Misiurewicz et K. Ziemian ont démontré que l'ensemble de rotation (dans le tore) est un sous-ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^2$ (voir [MZ89]). Cependant, on ne sait pas quels ensembles compacts et convexes de $\mathbb{R}^2$ sont réalisés comme ensembles de rotation

d'homéomorphismes du tore $\mathbb{T}^2$. Dans [Kwa91], J. Kwapisz a montré que tout polygone convexe dans $\mathbb{R}^2$ à sommet dans $\mathbb{Q}^2$ est toujours réalisé comme ensemble de rotation d'un homéomorphisme du tore $\mathbb{T}^2$. Dans [FM90] J. Franks et M. Misiurewicz ont conjecturé qu'un segment L ne peut pas être réalisé comme un ensemble de rotation d'un homéomorphisme du tore dans les cas suivants : (i) L a une pente irrationnelle et possède un point rationnel dans son intérieur, (ii) L a une pente rationnelle et ne contient pas de point rationnel, et (iii) L a une pente irrationnelle et ne contient pas de point rationnel. Récemment, P. Le Calvez et F. Tal ont démontré le cas (i) (voir [LT15]) et A. Avila a annoncé un contre-exemple pour le cas (iii).

Dans le contexte de cette thèse le problème est plus difficile que pour l'anneau compact. En effet si l'on généralise directement la définition d'ensemble de rotation donnée ci-dessus, on perd l'invariance par conjugaison topologique. Pour résoudre ce problème, il faut "sélectionner des orbites" en évitant celles dont les extrémités sont trop proches de l'origine. Ceci rend la définition un peu plus compliquée, et l'argument simple dans l'anneau compact échoue pour montrer la connexité de l'ensemble de rotation local.

1.2 Énoncés précis des résultats obtenus dans cette thèse

1.2.1 L'ensemble de rotation local autour d'une sous-variété de codimension 2

Considérons un homéomorphisme F d'une variété M qui préserve une sous-variété compacte N de codimension 2. On veut définir une notion d'ensemble de rotation local autour de N. Pour cela, nous ferons les hypothèses suivantes.

(H_1) Le fibré normal de N dans M est trivial.

Choisissons une trivialisation qui identifie le fibré normal avec $N \times \mathbb{R}^2$ et qui identifie N avec $N \times \{0\} \subset N \times \mathbb{R}^2$. On obtient une identification d'un voisinage tubulaire de N dans M avec un voisinage de $N \times \{0\}$ dans $N \times \mathbb{R}^2$. Dans la suite on s'intéressera à des homéomorphismes locaux au voisinage de N. Grâce à cette identification, on peut donc remplacer la variété M par $N \times \mathbb{R}^2$. On ne distinguera plus les variétés N et $N \times \{0\}$. On notera $P_2 : N \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur la deuxième coordonnée.

(H_2) On suppose qu'il existe une homotopie $I = (H_t)_{t\in[0,1]}$ entre P_2 et $P_2 \circ F$.

Autrement dit, il existe un chemin continu $t \mapsto H_t$ de $[0,1]$ dans l'ensemble des applications continues H définies sur un voisinage $\mathcal{U}$ de N et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $t \in [0,1]$, on a $H_t^{-1}(0) = N$ (muni de la topologie uniforme), qui joint $H_0 = P_2$ et $H_1 = P_2 \circ F$.

L'ensemble de rotation local autour d'une sous-variété de codimension 2

Soit $\pi : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ le revêtement universel de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donné par $(\theta, r) \mapsto re^{2i\pi\theta}$. Pour $\xi \in \mathcal{U} \setminus N$ et un entier $n \geq 1$ tels que $F^i(\xi)$ est bien défini pour $0 \leq i \leq n$, soit $\widetilde{\gamma_\xi^n} : [0, n] \to \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ un relevé du chemin défini par :

$$\gamma_\xi^n(t) = H_{t-i}(F^i(\xi)) \text{ lorsque } 0 \leq i < n \text{ et } i \leq t \leq i+1.$$

On définit

$$\rho_n(\xi) := \frac{1}{n}\left(p_1\left(\widetilde{\gamma_\xi^n}(n)\right) - p_1\left(\widetilde{\gamma_\xi^n}(0)\right)\right),$$

où $p_1 : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est la projection sur la première coordonnée.

Si l'on fixe deux voisinages $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ de N dans $\mathcal{U}$, on définit

$$\rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I) := \bigcap_{m \geq 1} \text{Adhe}\left(\bigcup_{n \geq m} \{\rho_n(\xi) : \xi \notin \mathcal{W},\ F^n(\xi) \notin \mathcal{W} \text{ et } \xi, \cdots, F^n(\xi) \in \mathcal{V}\}\right),$$

où l'adhérence est prise dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On définit enfin l'ensemble de rotation local autour de N de l'homotopie I par :

$$\rho_{\text{loc}}(I) := \bigcap_{\mathcal{V}} \text{Adhe}\left(\bigcup_{\mathcal{W} \subset \mathcal{V}} \rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I)\right).$$

Eclatement

Pour comprendre la dynamique locale autour de N, on peut parfois "éclater N". Précisons ceci. Soient N et N' deux variétés compactes et $\mathcal{U}$ un voisinage de $N \times \{0\} \subset N \times \mathbb{R}^2$. Notons $\phi_0 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{T}^1 \times (0, +\infty)$ les coordonnées polaires usuelles et soit $\Phi_0 : N \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to N \times \mathbb{T}^1 \times (0, +\infty)$ l'application définie par $\Phi_0 = id_N \times \phi_0$. On définit de façon analogue $\Phi_0' = id_{N'} \times \phi_0$. On dira qu'une application $H : \mathcal{U} \to N' \times \mathbb{R}^2$ telle que $H^{-1}(N') = N$ est *éclatable* si l'application $\Phi_0' \circ H \circ \Phi_0^{-1}$ s'étend continûment en une application $\bar{H}$ définie sur un voisinage $\overline{\mathcal{U}}$ de $N \times \mathbb{T}^1 \times \{0\}$ dans $N \times \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$. On dira que l'homotopie $I = (H_t)_{t \in [0,1]}$ est éclatable si pour tout $t \in [0, 1]$ l'application H_t est éclatable et l'application $t \mapsto \bar{H}_t$ est continue. Ainsi, pour un homéomorphisme local autour de N qui est éclatable, on obtient une dynamique sur $N \times \mathbb{T}^1$ qui est fibrée.

Ensemble de rotation des homéomorphismes fibrés de $N \times \mathbb{T}^1$

Soit $\bar{F}$ un homéomorphisme fibré défini globalement sur $N \times \mathbb{T}^1$, c'est-à-dire que $\bar{F}$ s'écrit sous la forme $\overline{F}(x, u) = (f(x), h_x(u))$ sur $N \times \mathbb{T}^1$. Supposons qu'il existe une homotopie $\bar{I} = (\overline{H}_t)_{t \in [0,1]}$ entre l'application $\overline{H}_0 : N \to \text{Homeo}\left(\mathbb{T}^1\right)$ constante et égale à l'identité de $\mathbb{T}^1$ et l'application $\overline{H}_1 : N \to \text{Homeo}\left(\mathbb{T}^1\right)$ définie par $H_1(x) = h_x$.

Soit $\pi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ le revêtement universel de $\mathbb{T}^1$ donné par $\theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$. Pour $\xi = (x, u)$ dans $N \times \mathbb{T}^1$ et un entier $n \geq 1$, on définit la trajectoire $\gamma_\xi^n : [0, n] \to \mathbb{T}^1$ jusqu'au temps n pour l'homotopie $\bar{I}$ par :

$$\gamma_\xi^n(t) = H_{t-i}(f^i(x))(h_{x,i}(u)) \text{ lorsque } 0 \leq i < n \text{ et } i \leq t \leq i+1,$$

où $h_{x,i} = h_{f^{i-1}(x)} \circ \cdots \circ h_x$ est un homéomorphisme du cercle isotope à l'identité.

On considère un relevé de la trajectoire γ_ξ^n et on définit

$$\rho_n^f(\xi) := \frac{1}{n}\left(\widetilde{\gamma_\xi^n}(n) - \widetilde{\gamma_\xi^n}(0)\right).$$

On définit l'ensemble de rotation fibré de l'homotopie $\bar{I}$,

$$\rho_{\text{fib}}(\bar{I}) := \bigcap_{m \geq 1} \text{Adhe}\left(\bigcup_{n \geq m} \left\{\rho_n^f(\bar{\xi}) : \bar{\xi} \in N \times \mathbb{T}^1\right\}\right).$$

Ainsi, pour une homotopie éclatable I, on peut comparer l'ensemble de rotation local autour de N de I et l'ensemble de rotation fibré de l'homotopie $\bar{I}$ induite sur $N \times \mathbb{T}^1$. Nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 1. *Soit F un homéomorphisme local préservant N et vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2) et I une homotopie entre P_2 et $P_2 \circ F$. Supposons que l'homotopie I est éclatable et soit $\bar{I}$ l'homotopie induite sur $N \times \mathbb{T}^1$. Alors*

$$\rho_{\text{loc}}(I) \subset \rho_{\text{fib}}(\bar{I}).$$

L'inclusion donnée par le théorème précédent est stricte en général (par exemple $\rho_{\text{loc}}(I)$ peut être vide), mais on trouve l'égalité dans le cas particulier où $\rho_{\text{loc}}(I)$ est non-vide (c'est le cas si F est conservatif) et $\rho_{\text{fib}}(\bar{I})$ est un singleton (c'est le cas si $F|_N$ est uniquement ergodique). On déduit ainsi le corollaire suivant, c'est une généralisation des résultats obtenus dans [GP95] et [Pon12]. Ce théorème donne aussi un invariant topologique pour les homéomorphismes éclatables.

Théorème 1*. *Soient F et I comme dans le théorème précédent. Si $F|_N$ est uniquement ergodique et $\rho_{\text{loc}}(I)$ est non-vide, alors*

$$\rho_{\text{loc}}(I) = \rho_{\text{fib}}(\bar{I}).$$

L'invariant de Ruelle

On considère des difféomorphismes f isotopes à l'identité du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ qui préservent une mesure borélienne de probabilité μ. Dans [Rue85] D. Ruelle leur a associé un nombre réel, qui a été appelé *invariant de Ruelle*, comme suit. Soit $(f_t)_{t\in[0,1]}$ une isotopie entre l'identité et $f_1 = f$ parmi les difféomorphismes de $\mathbb{T}^2$, alors $(Df_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie entre l'identité et Df. Pour $x \in \mathbb{T}^2$, $u \in \mathbb{T}^1$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ considérons un relevé $\tilde{v}(f, x, u) : [0, n] \to \mathbb{R}$ du chemin défini comme :

$$v(f,x,u)(t) := \frac{Df_{t-i}(f^i(x))(u)}{\|Df_{t-i}(f^i(x))(u)\|} \quad \text{lorsque } 0 \leq i < n \text{ et } i \leq t \leq i+1.$$

On définit

$$\Delta_n(f,x,u) := \frac{1}{n}\left(\tilde{v}(f,x,u)(n) - \tilde{v}(f,x,u)(0)\right).$$

Dans [Rue85] D. Ruelle a montré que pour μ-presque tout point $x \in \mathbb{T}^2$ et tout $u \in \mathbb{T}^1$ la suite $(\frac{\Delta_n(f,x,u)}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge quand n tend vers $\pm\infty$ vers une limite $\Delta_f(x)$ qui ne dépend pas de u. De plus la fonction $\Delta_f(x) : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ est intégrable par rapport à μ. On définit *l'invariant de Ruelle associé à f et μ* par :

$$\mathcal{R}_\mu(f) = \int_{\mathbb{T}^2} \Delta_f \, d\mu.$$

On ne connait pas beaucoup de propriétés de ce nombre, ni ses relations avec d'autres invariant dynamiques. Cependant J.-M. Gambaudo et E. Ghys ont montré que ce nombre est un invariant de conjugaison orientée topologique (voir [GG97]). A la fin du chapitre 2, nous allons retrouver ce résultat. On note $\mathrm{Diff}^1_0(\mathbb{T}^2)$ (resp. $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$) le groupe des difféomorphismes de classe C^1 (resp. des homéomorphismes) du tore isotopes à l'identité.

Théorème 2 (J.-M. Gambaudo et E. Ghys, [GG97]). *Soient f and f' deux éléments de $\mathrm{Diff}_0(\mathbb{T}^2)$ qui préservent respectivement les mesures de probabilité sans atome μ et μ' sur $\mathbb{T}^2$. Soit ϕ un homéomorphisme dans $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ tel que $f' \circ \phi = \phi \circ f$ et $\phi_*(\mu) = \mu'$. Alors les invariants de Ruelle $\mathcal{R}_{\mu_1}(f_1)$ et $\mathcal{R}_{\mu_2}(f_2)$ sont égaux.*

1.2.2 L'ensemble de rotation local autour d'un point fixe est toujours un intervalle

Nous allons donner les définitions précises et les stratégies pour la démonstration du théorème A (celles-ci peuvent s'adapter pour démontrer le théorème B). Soit f un homéomorphisme du plan, isotope à l'identité, fixant 0 et $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ une isotopie de l'identité à f. Soit $\pi : \mathbb{R} \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ le revêtement universel de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\widetilde{I} = (\widetilde{f}_t)_{t\in[0,1]}$ le relevé de l'isotopie I tel que $\widetilde{f}_0$ soit l'identité. On définit $\widetilde{f} = \widetilde{f}_1$. Pour $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et un entier $n \geq 1$, on définit la variation moyenne $\rho_n(z)$ de la coordonnée polaire le long de la trajectoire du point z sous l'isotpie I entre les temps 0 et n, c'est-à-dire

$$\rho_n(z) := \frac{1}{n}\left(p_1(\widetilde{f}^n(\widetilde{z})) - p_1(\widetilde{z})\right),$$

où $p_1 : \mathbb{R} \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ est la projection sur la première coordonnée et $\widetilde{z}$ est un point de $\pi^{-1}(z)$.

Pour un ensemble compact K dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on définit l'ensemble de rotation relativement à K,

$$\rho_K(I) := \bigcap_{m\geq 1} \mathrm{Adhe}\left(\bigcup_{n\geq m} \{\rho_n(z) : z \in K,\ f^n(z) \in K\}\right).$$

où l'adhérence est prise dans $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Fixons deux voisinages V et W de 0 avec $W \subset V$, on définit

$$\rho_{V,W}(I) := \bigcap_{m\geq 1} \text{Adhe}\left(\bigcup_{n\geq m} \{\rho_n(z) : z \notin W, f^n(z) \notin W, \text{ et } z, \cdots, f^n(z) \in V\}\right).$$

L'ensemble de rotation local (autour de 0) de l'isotopie I est

$$\rho_{\text{loc}}(I) := \bigcap_{V} \text{Adhe}\left(\bigcup_{W\subset V} \rho_{V,W}(I)\right).$$

En utilisant les propriétés usuelles de l'ensemble de rotation local, on peut réduire la démonstration du théorème 1.1.2 à celle du théorème suivant.

Théorème A*. *Soit I une isotopie dans* $\text{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ *de l'identité à un homéomorphisme f. Supposons que l'ensemble de rotation local, $\rho_{\text{loc}}(I)$, contient des nombres strictement positifs et strictement négatifs. Alors 0 appartient à $\rho_{\text{loc}}(I)$. Plus précisément, pour tout voisinage V de 0, il existe un ensemble K compact et invariant par f contenu dans $V \setminus \{0\}$ tel que 0 appartient à $\rho_K(I)$.*

Ce résultat était déjà connu pour les homéomorphismes qui vérifient la propriété d'intersection locale : toute courbe de Jordan entourant 0 et contenue dans un petit voisinage de 0 privé 0 rencontre son image par f. Plus précisément, F. Le Roux a montré sous cette hypothèse que V contient un point fixe contractile $z \neq 0$, c'est-à-dire un point z fixe de f dont la trajectoire $t \mapsto f_t(z)$ sous l'isotopie I est un lacet contractile dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dans ce cas, on peut prendre $K = \{z\}$.

Lorsque f n'a pas de points fixes contractiles arbitrairement proches de 0, on peut appliquer le théorème feuilleté équivariant dû à P. Le Calvez (voir [LeC05]), et on obtient un feuilletage orienté $\mathcal{F}$ défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qui est positivement transverse à l'isotopie I. Soit γ une feuille fermée de $\mathcal{F}$. Alors γ est une courbe de Jordan, elle est essentielle, i.e. non-contractile dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et elle est libre par f, i.e. $f(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$. Le fait que $\rho_{\text{loc}}(I)$ contient des nombres strictement positifs et strictement négatifs, se traduit par le fait qu'aucune feuille de $\mathcal{F}$ n'est issue de 0, ni aboutit à 0. Puisque la transversalité de $\mathcal{F}$ et I est une propriété ouverte, on peut modifier le feuilletage $\mathcal{F}$ pour obtenir la situation suivante.
Dans tout voisinage de 0, il existe trois feuilles fermées γ_0, γ_1 et γ_2 de $\mathcal{F}$ telles que :

(i) la courbe γ_1 sépare γ_0 de γ_2.
(ii) L'ensemble des points dont l'orbite reste entre γ_0 et γ_1 est non-vide et son ensemble de rotation est contenu dans $(0, +\infty)$.
(iii) L'ensemble des points dont l'orbite reste entre γ_1 et γ_2 est non-vide et son ensemble de rotation est contenu dans $(-\infty, 0)$.

Ainsi, le théorème A$*$ est une conséquence du théorème suivant qui est un des principaux et nouveaux résultats de cette thèse.

Pour un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on note $\Theta(E)$ l'ensemble maximal invariant (par f) de E, c'est-à-dire l'ensemble des points de E dont tous les itérés par f restent dans E. On remarque que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est homéomorphe à l'anneau ouvert $\mathbb{A}$, et donc que toutes les définitions précédentes sont valables dans $\mathbb{A}$.

Théorème C. *Soit I une isotopie dans* $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{A})$ *entre l'identité et un homéomorphisme f. Supposons qu'il existe trois courbes de Jordan γ_0, γ_1 et γ_2 qui sont disjointes, essentielles et libres par f dans l'anneau $\mathbb{A}$, telles que γ_1 sépare γ_0 et γ_2. Pour $i \in \{0,1\}$ soit $\Theta(A_i)$ l'ensemble maximal invariant de A_i l'anneau fermé délimité par γ_i et γ_{i+1}. Supposons que :*

(i) les ensembles $\Theta(A_0)$ et $\Theta(A_1)$ sont non-vides ; et

(ii) l'ensemble de rotation $\rho_{\Theta(A_0)}(I)$ est contenu dans $(0,+\infty)$ et $\rho_{\Theta(A_1)}(I)$ est contenu dans $(-\infty,0)$.

Soit $\Theta(A)$ l'ensemble maximal invariant de l'ensemble $A = A_0 \cup A_1$. Alors 0 appartient à $\rho_{\Theta(A)}(I)$.

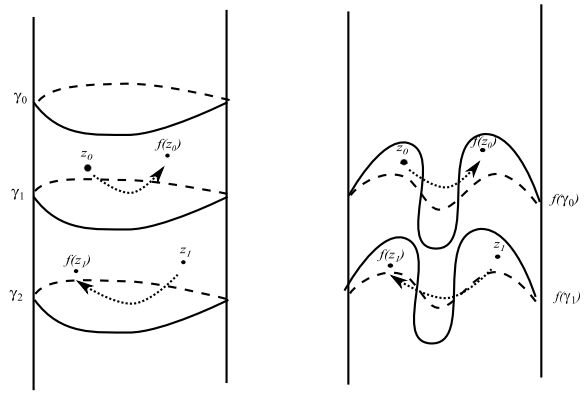

FIGURE 1.1 – Théorème C

Une autre conséquence du théorème C est la suivante.

Théorème D. *Soit I une isotopie dans* $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{A})$ *entre l'identité et un homéomorphisme f. Supposons qu'il existe deux courbes de Jordan γ^+ et γ^- qui sont disjointes, essentielles et libres par f. Soit $\Theta(A)$ l'ensemble maximal invariant de A l'anneau fermé délimité par γ^- et γ^+. Alors $\rho_{\Theta(A)}(I)$ est un intervalle.*

Chapitre 2

L'ensemble de rotation autour d'une sous-variété de codimension 2

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème suivant : étant donné un homéomorphisme F d'une variété M qui préserve une sous-variété compacte et connexe N de codimension 2, quelle est la dynamique des orbites de F au voisinage de N ? Peut-on définir une notion de nombre de rotation pour cettes orbites ? Nous allons voir qu'on peut généraliser la définition donnée par Frédéric Le Roux dans le cas où l'homéomorphisme F préserve une sous-variété compacte et connexe N de codimension 2 dont le fibré normal est trivial.

2.1 Préliminaires

2.1.1 Le cercle, le plan centré

On considère le cercle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et le plan $\mathbb{R}^2$ munis de leur topologie et orientation usuelles. On notera 0 le point $(0,0)$ du plan, $\pi : \mathbb{R} \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\pi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ les respectifs revêtements universels donnés par

$$\pi : (u,r) \mapsto (r\cos(2\pi u), r\sin 2\pi u) \quad \text{et} \quad \pi_0 : u \mapsto u + \mathbb{Z}.$$

On considère enfin $p_1 : \mathbb{R} \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, la projection sur la première coordonnée

$$p_1 : (u,r) \mapsto u.$$

2.1.2 Sous-variété de codimension 2

On considère une sous-variété différentiable de classe C^1 compacte et connexe de dimension réelle n, notée N, dans une variété M de dimension réelle $n+2$ et on fait l'hypothèse suivante.

(H_1) Le fibré normal de N dans M est trivial.

Choisissons une trivialisation qui identifie le fibré normal avec $N \times \mathbb{R}^2$ et qui identifie N avec $N \times \{0\} \subset N \times \mathbb{R}^2$. On obtient une identification d'un voisinage tubulaire de N dans M avec un voisinage de $N \times \{0\}$ dans $N \times \mathbb{R}^2$. Dans la suite on s'intéressera à des homéomorphismes locaux au voisinage de N. Grâce à cette identification, on peut donc remplacer la variété M par $N \times \mathbb{R}^2$.

2.1.3 Les espaces produits

On considère les espaces topologiques produits $N \times \mathbb{R}^2$ et $N \times \mathbb{T}^1$. On note $\Pi : N \times \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to N \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ et $\Pi_0 : N \times \mathbb{R} \to N \times \mathbb{T}^1$ les revêtements donnés par

$$\Pi = id_N \times \pi \quad \text{et} \quad \Pi_0 = id_N \times \pi_0.$$

Si $X = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{T}^1$, on notera les projections

$$P_N : N \times X \to N, (x, z) \mapsto x \text{ et } P_2 : N \times X \to X, (x, z) \mapsto z.$$

On ne distinguera plus les variétés N et $N \times \{0\} \subset N \times \mathbb{R}^2$ et $N \times \mathbb{T}^1$ et $N \times \mathbb{T}^1 \times \{0\} \subset N \times \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$.

2.1.4 Homéomorphismes locaux

On notera $\mathrm{Homeo}\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ l'ensemble des homéomorphimes locaux qui préservent N, c'est-à-dire des applications $F : \mathcal{U} \to N \times \mathbb{R}^2$ définies sur un voisinage $\mathcal{U}$ de N qui sont des homéomorphismes entre $\mathcal{U}$ et leurs images, telles que $F(N) = N$. La définition du nombre (ou de l'ensemble) de rotation nécessite de travailler avec des homéomorphismes vérifiant une condition homotopique. On distinguera donc deux sous-ensembles de $\mathrm{Homeo}\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$.

L'ensemble $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$

On notera $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ l'ensemble des homéomorphismes F dans $\mathrm{Homeo}\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ vérifiant la condition suivante :

(H_2) L'application P_2 est homotope à $P_2 \circ F$ parmi les applications continues H définies sur un voisinage $\mathcal{U}$ de N et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ telles que $H^{-1}(0) = N$.

Plus précisément, F appartient à $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$, s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $N = N \times \{0\}$ dans $N \times \{R^2\}$ et un chemin continu $t \mapsto H_t$ tel que $H_0 = P_2$, $H_1 = P_2 \circ F$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $H_t : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ est une application continue telle que $H_t^{-1}(0) = N$.

On peut alors définir l'homotopie inverse $I^{-1} := (H_{1-t} \circ F^{-1})_{t \in [0,1]}$ entre P_2 et $P_2 \circ F^{-1}$. Soient F et F' deux homéomorphismes dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ et $I = (H_t)_{t \in [0,1]}$ et $I' = (H'_t)_{t \in [0,1]}$ deux homotopies entre P_2 et $P_2 \circ F$ et entre P_2 et $P_2 \circ F'$ respectivement. Alors $I * I' = (G_t)_{t \in [0,1]}$ désignera l'homotopie définie par

$$G_t = \begin{cases} H_{2t}, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ H'_{2t-1} \circ F, & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

En particulier pour tout entier $q \geq 1$, on note I^q l'homotopie $I * \cdots * I$ (q fois) et pour $q \leq -1$, on note I^q l'homotopie $I^{-1} * \cdots * I^{-1}$ ($-q$ fois)

L'ensemble $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$

Maintenant on va considérer une classe plus restreinte d'homéomorphismes dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$. On notera $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ l'ensemble des homéomorphismes appartenant à $\mathrm{Homeo}\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ qui sont isotopes à l'identité dans $\mathrm{Homeo}\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$, c'est-à-dire les homéomorphismes F pour lesquels il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de N et une famille $(F_t)_{t\in[0,1]}$ d'homéomorphismes dans $\mathrm{Homeo}\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ définis sur $\mathcal{U}$ tels que F_0 est l'identité, $F_1 = F$ et l'application $(\xi, t) \mapsto F_t(\xi)$ est continue sur $\mathcal{U} \times [0,1]$. Remarquons que si F est dans $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$, alors F est dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$. En effet, si $(F_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie entre l'identité et F, alors en posant pour tout $t \in [0,1]$, $H_t = P_2 \circ F_t$ l'homotopie $I = (H_t)_{t\in[0,1]}$ convient.

L'exemple suivant montre que l'inclusion "$\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ est contenu dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$" est stricte en général.

Exemple 2.1. Soit $f : N \to N$ un homéomorphisme de N qui renverse l'orientation. Alors l'homéomorphisme défini par $F(x,z) = (f(x), z)$ appartient à $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$, mais pas à $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$.

2.1.5 L'ensemble des mesures de probabilité

Soit X un espace métrique compact. On notera $C^0(X)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de X à valeurs réels muni avec la norme de sup. On notera $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité définies sur X. D'après le théorème de représentation de Riesz, on peut identifier $\mathcal{M}(X)$ avec l'espace dual de $C^0(X)$ muni de la topologie faible *. Autrement dit, une suite de mesures $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la mesure μ, si et seulement si pour toute fonction ϕ dans $C^0(X)$ on a

$$\int_X \phi \, d\mu_n \to \int_X \phi \, d\mu \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

La proposition suivante est bien connue (voir [Ma83]).

Proposition 2.1. *$\mathcal{M}(X)$ est un espace métrisable compact.*

Si X est un espace métrique compact, alors il existe un sous-ensemble dénombrable $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $C^0(X)$ qui est dense dans la boule unité. La métrique

$$d(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int_X \phi_i \, d\mu - \int_X \phi_i \, d\nu \right|$$

induit la topologie faible* sur $\mathcal{M}(X)$.

Pour une mesure μ dans $\mathcal{M}(X)$ et un borélien A de X, avec $\mu(A) \neq 0$, on notera $\mu|_A$ la mesure de probabililté définie pour tout borélien B, comme

$\mu|_A(B) = \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}$. Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Pour une fonction continue $T : X \to Y$, on notera $T_* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ l'application induite par T sur les espaces de mesure définie par $T_*\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$, où B est un borélien dans Y. On a le lemme suivant.

Lemme 2.2. *L'application T_* est continue et affine.*

En particulier, si $X = Y$ et si T est une fonction continue de X dans lui-même, on notera enfin $\mathcal{M}_T(X)$ l'ensemble des mesures μ dans $\mathcal{M}(X)$ qui sont invariantes par T, c'est-à-dire qui vérifient $T_*\mu = \mu$.

2.2 L'ensemble de rotation local autour de N

Dans cette section, on considère F dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ et une homotopie $I = (H_t)_{t\in[0,1]}$ entre P_2 et $P_2 \circ F$ définie sur un voisinage $\mathcal{U}$ de N. On définit l'ensemble de rotation local autour de N pour l'homotopie I et on montre les propriétés attendues.

2.2.1 Définition

Soit F un homéomorphisme dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ et considérons une homotopie $I = (H_t)_{t\in[0,1]}$ entre P_2 et $P_2 \circ F$ définie sur un voisinage $\mathcal{U}$ de N. Pour ξ dans $\mathcal{U} \setminus N$ et n dans $\mathbb{N}$ tels que $F^i(\xi)$ est bien défini pour $0 \le i \le n$, on définit la *trajectoire jusqu'au temps n du point ξ* pour l'homotopie I par le chemin, $\gamma_\xi^n : [0, n] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\gamma_\xi^n(t) = H_{t-i}(F^i(\xi)) \text{ lorsque } 0 \le i < n \text{ et } i \le t \le i + 1.$$

On considère la variation moyenne, notée $\rho_n(\xi)$, de l'angle de la trajectoire γ_ξ^n. Pour cela, on considère un relevé de la trajectoire γ_ξ^n, c'est-à-dire un chemin continu $\widetilde{\gamma_\xi^n} : [0, n] \to \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ tel que $\pi \circ \widetilde{\gamma_\xi^n} = \gamma_\xi^n$ sur $[0, n]$. On définit

$$\rho_n(\xi) := \frac{1}{n}\left(p_1\left(\widetilde{\gamma_\xi^n}(n)\right) - p_1\left(\widetilde{\gamma_\xi^n}(0)\right)\right).$$

Remarque 2.2. La quantité $\rho_n(\xi)$ ne dépend pas du relevé de la trajectoire γ_ξ^n.

La démonstration du lemme suivant est laissée au lecteur.

Lemme 2.3. *Pour tout $\xi \in \mathcal{U}$ et tous entiers $n, m \ge 1$, on a :*
(i) $(n + m)\rho_{n+m}(\xi) = n\rho_n(\xi) + m\rho_m(F^n(\xi))$.
(ii) $\rho_{nm}(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \rho_m(F^{im}(\xi))$.

Si on fixe deux voisinages $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ de N dans $\mathcal{U}$, et $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble des points pertinents

$$E_I(\mathcal{V}, \mathcal{W}, n) := \{\xi : \xi \notin \mathcal{W},\ F^n(\xi) \notin \mathcal{W} \text{ et } F^i(\xi) \in \mathcal{V} \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, n\}\}.$$

On définit ensuite *l'ensemble de rotation local autour de N relativement à $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$*,

$$\rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I) := \bigcap_{m\ge1} \mathrm{Adhe}\left(\bigcup_{n\ge m} \{\rho_n(\xi) : \xi \in E_I(\mathcal{V}, \mathcal{W}, n)\}\right),$$

où l'adhérence est prise dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Autrement dit, $\rho \in \rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I)$ s'il existe une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et de points $\xi_k \in E_I(\mathcal{V}, \mathcal{W}, n_k)$ tels que la suite $(\rho_{n_k}(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\overline{\mathbb{R}}$) vers ρ, quand k tend vers $+\infty$. On définit ensuite *l'ensemble de rotation local autour de N relativement à $\mathcal{V}$*,

$$\rho_{\mathcal{V}}(I) := \mathrm{Adhe}\left(\bigcup_{\mathcal{W}\subset\mathcal{V}} \rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I)\right).$$

Définition 2.4. *L'ensemble de rotation local autour de N de l'homotopie I est*

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) := \bigcap_{\mathcal{V}} \rho_{\mathcal{V}}(I).$$

2.2.2 Propriétés

Dans ce paragraphe nous allons montrer les propriétés élémentaires de l'ensemble de rotation local autour de N.

a) Dépendance de l'homotopie

Soit F un homéomorphisme dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ et soient I et I' deux homotopies entre P_2 et $P_2 \circ F$. Pour $\xi \in \mathcal{U} \setminus N$ les trajectoires jusqu'au temps 1 du point ξ (respectivement à chacune des homotopies) ont les mêmes extrémités, donc les variations moyennes $\rho_1(\xi)$ et $\rho'_1(\xi)$ diffèrent d'un entier p independant de ξ par connexité de la sous-variété N. Par conséquent pour tout entier n dans $\mathbb{N}$ on a

$$\rho_n(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \rho_1(F^i(\xi)) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left[\rho'_1(F^i(\xi)) + p\right] = \rho'_n(\xi) + p.$$

On en déduit, la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Soit F un homéomorphisme dans* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$. *Soient I et I' deux homotopies entre P_2 et $P_2 \circ F$. Si I et I' sont homotopes, alors*

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) = \rho_{\mathrm{loc}}(I').$$

Par suite, pour I et I' quelconques, il existe un entier p tel que

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) = \rho_{\mathrm{loc}}(I') + p.$$

b) Ensemble de rotation local autour de N des itérés de I

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante. Cela donne la formule reliant l'ensemble de rotation local autour de N de l'homotopie I et celui de ses itérés I^q ($q \in \mathbb{Z}$). On rappelle que pour X sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$, on note qX l'ensemble $\{qx : x \in X\}$.

Proposition 2.6. *Soit F un homéomorphisme dans* $\mathrm{Homeo}_*\big(N \times \mathbb{R}^2; N\big)$ *et* $I = (H_t)_{t\in[0,1]}$ *une homotopie entre P_2 et $P_2 \circ F$. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ on a* $\rho_{\mathrm{loc}}(I^q) = q\,\rho_{\mathrm{loc}}(I)$.

Fixons d'abord un entier $q \geq 1$. On notera ρ'_1 la variation moyenne associée à l'homotopie I^q. Pour $\xi \in \mathcal{U} \setminus N$, la trajectoire jusqu'au temps q du point ξ pour I coïncide avec la trajectoire jusqu'au temps 1 de ξ pour I^q, on a donc $q\rho_q(\xi) = \rho'_1(\xi)$. Ainsi pour tout entier $n \geq 1$, on obtient

$$q\rho_{nq}(\xi) = \rho'_n(\xi). \tag{2.1}$$

On déduit la proposition 2.6 (dans le cas où $q \geq 1$) de la définition de l'ensemble de rotation local et du lemme suivant.

Lemme 2.7. *Pour tout $\mathcal{V}'$ voisinage de N, il existe $\mathcal{V}$ voisinage de N avec $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'$, tel que pour tout $\mathcal{W}$ voisinage de N contenu dans $\mathcal{V}$ il existe $\mathcal{W}'$ voisinage de N avec $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$ tel que*

$$q\rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I) \subset \rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}'}(I^q) \subset q\rho_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(I).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{V}$ voisinage de N tel que $\bigcup_{0\leq i\leq q} F^i(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}'$. Soit $\mathcal{W}$ voisinage de N contenu dans $\mathcal{V}$. Montrons d'abord la première inclusion. Soit $\rho \in \rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I)$. Alors il existe une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et de points $\xi_k \in E_I(\mathcal{V}, \mathcal{W}, n_k)$ tels que la suite $(\rho_{n_k}(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ. D'après la division euclidienne, il existe $a_k \in \mathbb{N}$ et $r_k \in \{0, \cdots, q-1\}$ tels que $n_k = a_k q + r_k$. Maintenant, pour $\mathcal{W}' = \bigcap_{0\leq i\leq q} F^{-i}(\mathcal{W})$, on a

$$E_I(\mathcal{V}, \mathcal{W}, n_k) \subset E_{I^q}(\mathcal{V}, \mathcal{W}', a_k),$$

et d'après le lemme 2.3 et la relation (2.1), on a

$$a_k\rho'_{a_k}(\xi_k) = a_k q\rho_{a_k q}(\xi_k) = n_k\rho_{n_k}(\xi_k) - r_k\rho_{r_k}(F^{a_k q}(\xi_k)).$$

On en déduit alors,

$$\left|\rho'_{a_k}(\xi_k) - \frac{n_k}{a_k}\rho_{n_k}(\xi_k)\right| < \frac{q}{a_k}\max_{1\leq i<q}\sup_{\xi}\{|\rho_i(\xi)| : \xi \in \mathrm{Adhe}(\mathcal{V} \setminus \mathcal{W}')\}.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient que la suite $(\rho'_{a_k}(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $q\rho$. Ceci implique que $q\rho \in \rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}'}(I^q)$.

Montrons maintenant la deuxième inclusion. Soit $\rho \in \rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}'}(I^q)$. Alors il existe une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et de points $\xi_k \in E_{I^q}(\mathcal{V}, \mathcal{W}', n_k)$ tels que la suite $(\rho'_{n_k}(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ. Du choix de $\mathcal{V}$, on en déduit

$$E_{I^q}(\mathcal{V}, \mathcal{W}', n_k) \subset E_I(\mathcal{V}', \mathcal{W}', qn_k),$$

et d'après la relation (2.1)

$$\rho'_{n_k}(\xi_k) = q\rho_{n_k q}(\xi_k).$$

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient que la suite $(\rho_{n_k q}(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ/q. Ceci implique que $\rho \in q\rho_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(I)$. Ceci finit la démonstration du lemme. ■

Considérons maintenant le cas $q = -1$. On notera ρ_1' la variation moyenne associée à l'homotopie I^{-1}. Pour $\xi \in \mathcal{U} \setminus N$, la trajectoire jusqu'au temps 1 du point ξ pour I coïncide avec la trajectoire inverse jusqu'au temps 1 du point $F(\xi)$ pour I^{-1}, on a donc $-\rho_1(\xi) = \rho_1'(F(\xi))$. Ainsi pour tout entier $n \geq 1$, on obtient

$$-\rho_n(\xi) = \rho_n'(F^n(\xi)). \tag{2.2}$$

On déduit la proposition 2.6 (dans le cas où $q = -1$) de la définition de l'ensemble de rotation local et du lemme suivant.

Lemme 2.8. *Soient $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ deux voisinages de N avec $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Alors*

$$-\rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I) = \rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I^{-1}).$$

Démonstration. Remarquons que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a

$$F^n(E_I(\mathcal{V}, \mathcal{W}, n)) = E_{I^{-1}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}, n).$$

La démonstration est similaire à celle du lemme 2.7. ■

Finalement, remarquons que pour un entier $q \leq -1$, la proposition 2.6 se déduit des cas précédents. Ceci complète la démonstration de la proposition 2.6.

c) Invariance par conjugaison locale

Dans ce paragraphe on va supposer de plus que F appartient à l'ensemble $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$. Nous allons montrer la proposition suivante, qui dit que l'ensemble de rotation local autour de N est invariant par conjugaison locale dans le groupe $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$.

Proposition 2.9. *Soit F un homéomorphisme dans $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$. Supposons que $(F_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie entre l'identité et F. Si Φ est un homéomorphismes dans $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ et si l'on note $I = (P_2 \circ F_t)_{t\in[0,1]}$ et $I' = (P_2 \circ \Phi \circ F_t \circ \Phi^{-1})_{t\in[0,1]}$, alors $\rho_{\mathrm{loc}}(I) = \rho_{\mathrm{loc}}(I')$.*

Dans ce cadre, pour ξ dans $\mathcal{U} \setminus N$ et n dans $\mathbb{N}$ tels que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $F^i(\xi)$ est bien défini, on peut "calculer" la variation moyenne du point ξ pour I (et aussi I') comme suit : considérons le chemin $\delta_\xi^n : [0, n] \to N \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ défini par :

$$\delta_\xi^n(t) = F_{t-i}(F^i(\xi)) \text{ lorsque } 0 \leq i < n \text{ et } i \leq t \leq i+1.$$

Notons qu'on a $P_2 \circ \delta_\xi^n = \gamma_\xi^n$ sur $[0, n]$. Considérons $\widetilde{\gamma_\xi^n} : [0, n] \to \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ un relevé du chemin γ_ξ^n et choisissons donc $\widetilde{\delta_\xi^n} : [0, n] \to N \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ et $\widetilde{P_2} : N \times \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ relevés de δ_ξ^n et P_2 respectivement, tels que $\widetilde{P_2} \circ \widetilde{\delta_\xi^n} = \widetilde{\gamma_\xi^n}$ sur $[0, n]$. En considérant $p_1' : N \times \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $p_1' = p_1 \circ \widetilde{P_2}$ la projection sur la deuxième coordonnée, on obtient $p_1 \circ \widetilde{\gamma_\xi^n} = p_1' \circ \widetilde{\delta_\xi^n}$ sur $[0, n]$. Ainsi

$$\rho_n(\xi) := \frac{1}{n}\left(p_1'\left(\widetilde{\delta_\xi^n}(n)\right) - p_1'\left(\widetilde{\delta_\xi^n}(0)\right)\right).$$

Avec la définition de l'ensemble de rotation local autour de N, le résultat s'obtient à partir du lemme suivant.

Lemme 2.10. *Soit Φ un homéomorphisme dans* $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$. *Soient $\mathcal{W}, \mathcal{V}$ deux voisinages de N avec $\mathcal{W}$ inclus dans $\mathcal{V}$. Alors*

$$\rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I) = \rho_{\Phi(\mathcal{V}),\Phi(\mathcal{W})}(I').$$

Démonstration. Remarquons que pour n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\Phi\left(E_I(\mathcal{V}, \mathcal{W}, n)\right) = E_{I'}(\Phi(\mathcal{V}), \Phi(\mathcal{W}), n).$$

Soit ξ dans $\mathcal{U} \setminus N$ et n dans $\mathbb{N}$, on notera δ'^n_ξ la trajectoire jusqu'au temps n du point ξ et $\rho'_n(\xi)$ la variation moyenne associées à I'. Notons qu'on a $\delta'^n_{\Phi(\xi)} = \Phi \circ \delta^n_\xi$ sur $[0, n]$. Choisissons $\widetilde{\delta'^n_{\Phi(\xi)}} : [0, n] \to N \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, $\widetilde{\delta^n_\xi} : [0, n] \to N \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ et $\widetilde{\Phi} : N \times \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to N \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ relevés de $\delta'^n_{\Phi(\xi)}$, δ^n_ξ et Φ respectivement tels que $\widetilde{\delta'^n_{\Phi(\xi)}} = \widetilde{\Phi} \circ \widetilde{\delta^n_\xi}$ sur $[0, n]$. Ainsi,

$$\rho'_n(\Phi(\xi)) - \rho_n(\xi) = \frac{1}{n}\left[\left(p'_1 \circ \widetilde{\Phi} - p'_1\right)\left(\widetilde{\delta^n_\xi}(n)\right) - \left(p'_1 \circ \widetilde{\Phi} - p'_1\right)\left(\widetilde{\delta^n_\xi}(0)\right)\right].$$

Pour conclure, il nous suffit de montrer que la quantité à droite de l'égalité précédente est bornée sur "un relevé" de $\mathrm{Adhe}\,\mathcal{V} \setminus \mathcal{W}$, i.e. $\Pi^{-1}(\mathrm{Adhe}\,\mathcal{V} \setminus \mathcal{W})$. Le lemme suivant permet donc de conclure la démonstration. ■

Lemme 2.11. *Soit Φ un homéomorphisme dans* $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ *et $\widetilde{\Phi}$ un relevé de Φ à $N \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ il existe une constante $\alpha = \alpha(K)$ telle que*

$$\left|p'_1 \circ \widetilde{\Phi} - p'_1\right| < \alpha \text{ sur } N \times \pi^{-1}(K).$$

Démonstration. Comme $\tilde{\Phi}$ est un relevé de l'homéomorphisme Φ qui appartient à $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ l'application $p'_1 \circ \widetilde{\Phi} - p'_1$ définie sur $N \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est périodique de période 1 dans la deuxième coordonnée. Il existe donc une fonction continue L de $N \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ dans $\mathbb{R}$, telle que $L \circ \Pi = p'_1 \circ \widetilde{\Phi} - p'_1$, et qui est bornée sur l'ensemble compact $N \times K$ de $N \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Ceci entraine le lemme. ■

d) Sous une hypothèse de préservation d'une mesure $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ est non-vide

Dans ce paragraphe, en suivant [GP95] (voi aussi [GG97]), on montre que sous une hypothèse de préservation locale d'une mesure l'ensemble de rotation local autour de N est toujours non-vide. En dimension 2, F. Le Roux a montré que l'ensemble de rotation local est vide si et seulement si l'homéomorphisme est localmente conjugué à une contraction, à une dilation ou à une application holomorphe dont 0 est un point fixe parabolique (voir [LeR13]). En dimension supérieure, on ne sait pas caractériser complètement les cas où l'ensemble de rotation local est vide.

Définition 2.12. *On dira qu'un homéomorphisme F dans* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ *est localement conservatif, s'il existe une mesure borélienne de probabilité ν supportée sur un voisinage de N qui satisfait :*

1. *ν est localement F-invariante, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}_0$ de N tel que $F_*(\nu|_{F^{-1}(\mathcal{U}_0)}) = \nu|_{\mathcal{U}_0}$;*
2. *$\nu(N) = 0$;*
3. *$\nu(\mathcal{V}) > 0$ pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de N.*

Proposition 2.13. *Soit F un homéomorphisme dans* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ *qui est localement conservatif et I une homotopie entre P_2 et $P_2 \circ F$. Alors l'ensemble de rotation local autour de N de l'homotopie I est toujours non-vide.*

Démonstration. D'après la définition de l'ensemble de rotation local, il suffit de montrer que pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de N, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de N contenu dans $\mathcal{V}$ tel que $\rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I)$ est non-vide. Ceci est une conséquence de la proposition suivante. ■

Proposition 2.14. *Soit F un homéomorphisme dans* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ *qui est localement conservatif. Alors pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de N, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de N contenu dans $\mathcal{V}$, et pour tout entier k dans $\mathbb{N}$ il existe un entier $l > k$ tel que $E(\mathcal{V}, \mathcal{W}, l)$ est non-vide.*

Démonstration. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de N et choisissons $\mathcal{W}'$ un voisinage de N tel que $F^{-1}(\mathcal{W}') \cup \mathcal{W}' \cup F(\mathcal{W}') \subset \mathcal{V}$. Supposons que la paire $(\mathcal{V}, \mathcal{W}')$ ne satisfait pas la proposition, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k_0 > 0$ tel que $E(\mathcal{V}, \mathcal{W}', n) = \emptyset$ pour tout entier $n > k_0$. Nous allons alors trouver $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ tel que $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ satisfait la proposition. Posons $\mathcal{W}''$ un voisinage de N tel que, pour tout $0 \leq i \leq k_0$, $F^i(\mathcal{W}'') \subset \mathcal{W}'$. On a le résultat suivant.

Lemme 2.15. *Soient $W^s(\mathcal{W}') := \bigcap_{n \geq 0} F^{-n}(\mathcal{W}')$ et $W^u(\mathcal{W}') := \bigcap_{n \leq 0} F^{-n}(\mathcal{W}')$. Alors,*

$$\bigcap_{i=0}^{k_0} F^i(\mathcal{W}'') \subset W^s(\mathcal{W}') \cup W^u(\mathcal{W}'). \tag{2.3}$$

Démonstration. Si ce n'est pas le cas, il existe $\xi \in \mathcal{W}''$ tel que $F^i(\xi) \in \mathcal{W}''$ pour tout $0 \leq i \leq k_0$ et $\xi \notin W^s(\mathcal{W}') \cup W^u(\mathcal{W}')$. Considérons $n_1 \leq 0$ le plus grand entier tel que $F^{n_1}(\xi) \notin \mathcal{W}'$ et $n_2 \geq 0$ le plus petit entier tel que $F^{n_2}(\xi) \notin \mathcal{W}'$. Notons que d'après le choix de n_1, n_2 et $\mathcal{W}'$, on a que $n_2 - n_1 > k_0$ et $F^i(\xi) \in \mathcal{V}$ pour tout $n_1 \leq i \leq n_2$. Ceci est une contradiction avec $E(\mathcal{V}, \mathcal{W}', n) = \emptyset$ pour tout entier $n > k_0$. Ceci montre le lemme. ■

Comme la mesure ν est positive sur tout voisinage de N, d'après (2.3) on peut supposer $\nu(W^s(\mathcal{W}')) > 0$ (l'autre cas $\nu(W^u(\mathcal{W}')) > 0$ est similaire). Comme $\nu(N) = 0$ il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de N assez petit contenu dans $\mathcal{V}$, avec $\nu(W^s(\mathcal{W}') \setminus \mathcal{W}) > 0$. Par le théorème de récurrence de Poincaré, il existe $\xi \in W^s(\mathcal{W}') \setminus \mathcal{W}$ et une suite d'entiers $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini tels que $F^{n_j}(\xi) \in W^s(\mathcal{W}') \setminus \mathcal{W}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Puisque $\xi \in W^s(\mathcal{W}')$, pour tout entier $i \in \mathbb{N}$ on a $F^i(\xi) \in \mathcal{W}' \subset \mathcal{V}$. On conclut donc que pour tout j dans $\mathbb{N}$,

$\xi \in E(\mathcal{W}', \mathcal{W}, n_j) \subset E(\mathcal{V}, \mathcal{W}, n_j)$. Comme la suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini, ceci entraîne la proposition. ■

2.3 Les ensembles de rotation locaux des homéomorphismes locaux fibrés

Dans cette section, on considère des homéomorphismes locaux F dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ et qui sont fibrés au voisinage de N, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $F((x,z)) = (f(x), h_x(z))$ avec $(x,z) \in N \times \mathbb{R}^2$ au voisinage de N. Soit I une homotopie entre P_2 et $P_2 \circ F$. Dans ce cadre, nous allons définir des sous-ensembles de l'ensemble de rotation local autour de N, $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$, en se restreignant à la dynamique au-dessus de certaines orbites de f.

2.3.1 Ensemble de rotation local autour de N au-dessus d'une orbite

Soit x_0 dans N quelconque et fixons W, V deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^2$ avec W contenu dans V. Pour n dans $\mathbb{N}$, on définit l'ensemble des points pertinents pour x_0 par :

$$E_I(V,W,n)(x_0) := \{\xi = (x,z) \in E_I(N\times V, N\times W, n) \text{ tels que } x_0 \in \{x, \cdots, f^{n-1}(x)\}\}.$$

On définit ensuite *l'ensemble de rotation local autour de N au-dessus de l'orbite de x_0 relativement à V et W* par :

$$\rho_{V,W}(I, x_0) := \bigcap_{m\geq 1} \mathrm{Adhe}\left(\bigcup_{n\geq m} \{\rho_n(\xi) : \xi \in E(V,W,n)(x_0)\}\right),$$

où l'adhérence est prise dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Autrement dit, $\rho \in \rho_{V,W}(I, x_0)$ s'il existe une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et de points ξ_k dans $E(V,W,n_k)(x_0)$ tels que la suite $(\rho_{n_k}(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\overline{\mathbb{R}}$) vers ρ, quand k tend vers $+\infty$.

Définition 2.16. *L'ensemble de rotation local autour de N au-dessus de l'orbite de x_0 de l'homotopie I est :*

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I, x_0) := \bigcap_{V} \mathrm{Adhe}\left(\bigcup_{W\subset V} \rho_{V,W}(I, x_0)\right).$$

Remarque 2.3. Pour tout x_0 dans N, il est évident que $\rho_{\mathrm{loc}}(I, x_0)$ est inclus dans $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$.

2.3.2 Ensemble de rotation local autour de N au-dessus d'une mesure

Commençons par introduire des notions que nous permettront de distinguer des points de N.

Points typiques, points récurrents

Soit f un homéomorphisme de N et μ une mesure de probabilité invariante par f. On dira qu'un point x dans N est typique pour μ si les suites $(\mu_{n,x})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_{-n,x})_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\mu_{n,x} := \frac{1}{n}(\delta_x + \cdots + \delta_{f^{n-1}(x)}) \text{ et } \mu_{-n,x} := \frac{1}{n}(\delta_{f^{-1}}(x) + \cdots + \delta_{f^{-n}(x)}),$$

où δ_y est la mesure de Dirac en y, convergent dans la topologie faible * vers μ quand n tend vers $+\infty$. D'autre part, on dira qu'un point $x \in N$ est récurrent par f s'il existe une sous-suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x quand k tend vers $+\infty$.

On notera $\mathrm{Typ}(\mu)$ l'ensemble des points typiques pour μ et $\mathrm{Rec}(f)$ l'ensemble des points récurrents par f. On rappelle le résultat suivant (voir [Ma83]).

Proposition 2.17. *Soit f un homéomorphisme de N et μ une mesure ergodique dans $\mathcal{M}_f(N)$. Alors $\mu(\mathrm{Typ}(\mu)) = 1$ et $\mu(\mathrm{Rec}(f)) = 1$. En particulier l'ensemble des points typiques et récurrents est non-vide.*

On peut maintenant donner la définition. Fixons une mesure μ_0 dans $\mathcal{M}_f(N)$. On définit l'ensemble de rotation local autour de N au-dessus de la mesure μ_0 de la façon suivante. D'abord fixons un nombre réel $\epsilon > 0$ et W, V deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^2$ avec W contenu dans V. On définit l'ensemble des points pertinents pour la mesure μ_0 par :

$$E_I(V, W, n, \epsilon)(\mu_0) := \{\xi = (x, z) \in E_I(N\times V, N\times W, n) \text{ tels que } d(\mu_{n,x}, \mu_0) < \epsilon\}.$$

On définit ensuite *l'ensemble de rotation local autour de N au-dessus de la mesure μ_0 relativement à ϵ, V et W*,

$$\rho_{V,W,\epsilon}(I, \mu_0) := \bigcap_{m\geq 1} \mathrm{Adhe}\left(\bigcup_{n\geq m} \{\rho_n(\xi) : \xi \in E_I(V, W, n, \epsilon)(\mu_0)\}\right),$$

où l'adhérence est prise dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Autrement dit, $\rho \in \rho_{V,W,\epsilon}(I, \mu_0)$ s'il existe une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et de points $\xi_k \in E_I(V, W, n_k, \epsilon)(\mu_0)$ tels que la suite $(\rho_{n_k}(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\overline{\mathbb{R}}$) vers ρ, quand k tend vers $+\infty$.

Remarque 2.4. Si $0 < \epsilon' < \epsilon$, alors $\rho_{V,W,\epsilon'}(I, \mu_0) \subset \rho_{V,W,\epsilon}(I, \mu_0)$.

On définit *l'ensemble de rotation local autour de N au-dessus de la mesure μ_0 relativement à ϵ et V* par :

$$\rho_{V,\epsilon}(I, \mu_0) := \bigcup_{W\subset V} \rho_{V,W,\epsilon}(I, \mu_0).$$

L'ensemble de rotation local autour de N au-dessus de la mesure μ_0 et relativement à ϵ est

$$\rho_\epsilon(I,\mu_0) := \bigcap_V \mathrm{Adhe}(\rho_{V,\epsilon}(I,\mu_0)).$$

Définition 2.18. *L'ensemble de rotation local autour de N au-dessus de la mesure μ_0 de l'homotopie I est*

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I,\mu_0) := \bigcap_{\epsilon>0} \rho_\epsilon(I,\mu_0).$$

2.3.3 Propriétés

Dans ce paragraphe, nous allons montrer les propriétés élémentaires des ensembles de rotation locaux définis au paragraphe précédent.

a) Comparaison entre l'ensemble de rotation local au-dessus d'une orbite et de celui au-dessus d'une mesure

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante.

Proposition 2.19. *Soit μ une mesure dans $\mathcal{M}_f(N)$. Supposons que x dans N est un point typique pour μ. Alors*

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I,x) \subset \rho_{\mathrm{loc}}(I,\mu).$$

On déduit le résultat des définitions et du lemme suivant.

Lemme 2.20. *Soient V, W deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^2$ avec W inclus dans V. Alors pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, on a*

$$\rho_{V,W}(I,x) \subset \rho_{V,W,\epsilon}(I,\mu).$$

Démonstration. Soit $\rho \in \rho_{V,W}(I,x)$. Alors il existe une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et de points $(x_k,z_k) \in E(N\times V, N\times W, n_k)$ tels que $x \in \{x_k,\cdots,f^{n_k-1}(x_k)\}$ et tels que la suite $(\rho_{n_k}((x_k,z_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\overline{\mathbb{R}}$) vers ρ, quand k tend vers $+\infty$. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, posons $i_k \in \{0,\cdots,n_k-1\}$ tel que $f^{i_k}(x_k) = x$ et $l_k = n_k - i_k$. Notons que pour k dans $\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\mu_k := \mu_{n_k,x_k} &= \frac{1}{n_k}(\delta_{x_k} + \cdots + \delta_{f^{i_k}(x_k)} + \cdots + \delta_{f^{n_k-1}(x_k)})\ ;\\ &= \frac{i_k}{n_k}\mu_{-i_k,x} + \frac{l_k}{n_k}\mu_{l_k,x}.\end{aligned}$$

Notons que si la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers μ, quand k tend vers $+\infty$, alors étant donné $\epsilon > 0$ on obtient que $d(\mu_{n_k,x_k},\mu) < \epsilon$ pour tout k assez grand. Donc ρ appartiendra à $\rho_{V,W,\epsilon}(I,\mu)$. Pour montrer que la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers μ, on en choisit n'importe quelle valeur d'adhérence μ' : alors il existe une sous-suite $\left(\mu_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge vers μ'. On doit montrer que $\mu = \mu'$. On peut supposer, en considérant de nouveau une sous-suite, que :

(i) les suites $\left(i_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ et $\left(l_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ sont croissantes et

(ii) en posant $a_{k(m)} = \frac{i_{k(m)}}{n_{k(m)}}$, la suite $\left(a_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $t \in [0,1]$.

Il y a deux cas possibles.

Cas 1 : L'une des suites $\left(i_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ ou $\left(l_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée. Supposons que c'est le cas de $\left(l_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ (l'autre cas est similaire). En conséquence la suite $\left(i_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand m tend vers $+\infty$ et $t = 1$. Comme x est un point typique pour μ on conclut dans ce cas que la suite $\left(\mu_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers μ quand m tend vers $+\infty$.

Cas 2 : Les deux suites $\left(i_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ et $\left(l_{k(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ convergent vers $+\infty$. Comme x est un point typique pour μ, en faisant tendre m vers $+\infty$, la suite

$$\mu_{k(m)} = a_{k(m)}\mu_{-i_k,x} + (1 - a_{k(m)})\mu_{l_k,x},$$

converge vers $t\mu + (1-t)\mu = \mu$, quand k tend vers $+\infty$.
Par l'unicité de la limite, on conclut que $\mu' = \mu$ et la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend donc vers μ quand k tend vers $+\infty$. Ceci montre le lemme. ■

b) Invariance par conjugaison locale de l'ensemble de rotation local au-dessus d'une mesure

Dans ce paragraphe on va supposer de plus que F appartient à l'ensemble $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$. Nous allons montrer la proposition suivante, qui dit que l'ensemble de rotation local autour de N au-dessus d'une mesure est invariant par conjugaison locale fibrée dans le groupe $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$.

Proposition 2.21. *Soient F et Φ deux homéomorphismes fibrés dans $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$. Supposons que $(F_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie entre l'identité et F. Notons $I = (P_2 \circ F_t)_{t\in[0,1]}$ et $I' = (P_2 \circ \Phi \circ F_t \circ \Phi^{-1})_{t\in[0,1]}$. Soit μ une mesure de probabilité dans $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$. Si l'on note $F' = \Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$, alors $(\Phi|_N)_*\mu$ est dans $\mathcal{M}_{F'|_N}(N)$ et on a $\rho_{\mathrm{loc}}(I,\mu) = \rho_{\mathrm{loc}}(I', (\Phi|_N)_*\mu)$.*

Avec la définition de l'ensemble de rotation local autour de N au-dessus d'une mesure, la proposition s'obtient à partir du lemme suivant.

Lemme 2.22. *Soit Φ un homéomorphisme fibré dans $\mathrm{Homeo}_0\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$. Soient $V \subset V' \subset V''$ des voisinages de 0 tels que*

$$\Phi(N \times V) \subset N \times V' \subset \Phi(N \times V'').$$

Pour tout W voisinage de 0 contenu dans V il existe $W'' \subset W' \subset W$ des voisinages de 0 tels que pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ il existe $0 < \epsilon'' < \epsilon' < \epsilon$ tels que

$$\rho_{V,W,\epsilon''}(I,\mu) \subset \rho_{V',W'\epsilon'}(I', (\Phi|_N)_*\mu) \subset \rho_{V'',W'',\epsilon}(I,\mu).$$

Démonstration. Considérons $W'' \subset W' \subset W$ des voisinages de 0 tels que

$$\Phi(N \times W'') \subset N \times W' \subset \Phi(N \times W).$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a

$$\Phi\left(E_I(N\times V, N\times W, n)\right) = E_{I'}(\Phi(N\times V), \Phi(N\times W), n) \subset E_{I'}(N\times V', N\times W', n).$$

En remplaçant Φ par Φ^{-1} et I par I' dans l'inclusion précédente, on en déduit

$$\Phi^{-1}\left(E_{I'}(N\times V', N\times W', n)\right) \subset E_I(N\times V'', N\times W'', n).$$

D'autre part pour tout $\epsilon > 0$, tout x dans N et tout n dans $\mathbb{N}$, d'après la continuité de l'application $(\Phi|_N)_*$ et de son inverse, il existe $0 < \epsilon'' < \epsilon' < \epsilon$ tels que

$$d(\mu^{F'}_{n,x}, (\Phi|_N)_*\mu) < \epsilon' \Rightarrow d(\mu^{F}_{n,\Phi^{-1}(x)}, \mu) < \epsilon,$$

et

$$d(\mu^{F}_{n,x}, \mu) < \epsilon'' \Rightarrow d(\mu^{F'}_{n,\Phi(x)}, (\Phi|_N)_*\mu) < \epsilon'.$$

Ainsi,

$$\Phi\left(E_I(V, W, n, \epsilon'')(\mu)\right) \subset E_{I'}(V', W', n, \epsilon')((\Phi|_N)_*\mu) \subset \Phi\left(E_I(V'', W'', n, \epsilon)(\mu)\right).$$

La démonstration suit comme celle du lemme 2.10. ■

c) L'ensemble de rotation local autour de N est non-vide

Dans ce paragraphe on va montrer que l'ensemble de rotation local autour de N est toujours non-vide, sous une hypothèse de "conservation de mesure".

Définition 2.23. *Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur N. On dira qu'un homéomorphisme fibré F dans* $\mathrm{Homeo}_*\left(N\times\mathbb{R}^2; N\right)$ *est* fibre-conservatif au-dessus de μ, *si μ est invariante par $F|_N$, et s'il existe un ensemble mesurable et invariant $X \subset N$ avec $\mu(X) = 1$ et une famille de mesures boréliennes de probabilité $\{\mu_x : x \in X\}$ sur chaque fibre $\{x\}\times\mathbb{R}^2$ qui satisfait :*

1. *La famille $\{\mu_x\}_{x\in X}$ est localement F-invariante : il existe un voisinage U_0 de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in X$, $F_*(\mu_x|_{F^{-1}(\{F(x)\}\times U_0)}) = \mu_{F(x)}|_{\{F(x)\}\times U_0}$;*
2. *pour tout $x \in X$, $\mu_x((x,0)) = 0$;*
3. *pour tout $x \in X$, $\mu_x(\{x\}\times U) > 0$ pour tout voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^2$;*
4. *l'application $x \mapsto \mu_x$ est continue.*

Proposition 2.24. *Soit μ une mesure de probabilité sur N et F un homéomorphisme fibré dans* $\mathrm{Homeo}_*\left(N\times\mathbb{R}^2; N\right)$ *qui est fibre-conservatif au-dessus de μ. Soit I une homotopie entre P_2 et $P_2\circ F$. Supposons que x est un point dans $X \cap \mathrm{Rec}(F|_N) \cap \mathrm{Typ}(\mu)$. Alors l'ensemble de rotation local autour de N au-dessus de l'orbite de x, $\rho_{\mathrm{loc}}(I, x)$, est non-vide.*

On rappelle que si μ est de plus ergodique, alors l'ensemble $X\cap\mathrm{Rec}(F|_N)\cap\mathrm{Typ}(\mu)$ est toujours non-vide. Cette proposition est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 2.25. *Soit μ une mesure de probabilité sur N et F un homéomorphisme fibré dans* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ *qui est fibre-conservatif au-dessus de μ. Alors pour tout point x dans* $\mathrm{Rec}(F|_N) \cap \mathrm{Typ}(\mu) \cap X$ *et tout voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^2$, il existe W un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$ contenu dans V, tel que pour tout entier $k > 0$ il existe un entier $l > k$ tel que $E(V, W, l)(x)$ est non-vide.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{Rec}(F|_N) \cap \mathrm{Typ}(\mu) \cap X$ et V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$. Choisissons W' un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$ contenu dans V. Supposons que le triplet (x, V, W') ne satisfait pas la proposition. Comme dans la démonstration de la proposition du cas conservatif (proposition 2.14), il existe W'' un voisinage de 0 tel que pour $W^s(x, W') = \{(x, z) : F^n(x, z) \in N \times W' n \geq 0\}$ et $W^u(x, W') = \{(x, z) : F^{-n}(x, z) \in N \times W' n \geq 0\}$, on a

$$\{x\} \times W'' \subset W^s(x, W') \cup W^u(x, W'). \tag{2.4}$$

Comme la mesure μ_x est positive sur tout voisinage de 0, d'après (2.4) on peut supposer $\mu_x(W^s(x, W')) > 0$ (l'autre cas $\mu_x(W^u(x, W')) > 0$ est similaire). Comme $\mu_x((x, 0)) = 0$ il existe W voisinage de 0 assez petit contenu dans V qui satisfait $\mu_x(W^s(x, W'))/4 > \mu_x(\{x\} \times W)$. Grâce à la continuité de la fonction $x \mapsto \mu_x$ dans x, pour tout y assez proche de x, et tout borélien A proche de 0, on a

$$|\mu_x(\{x\} \times A) - \mu_y(\{y\} \times A)| < \mu_x(W^s(x, W'))/2. \tag{2.5}$$

Etant donné un nombre entier k dans $\mathbb{N}$, puisque le point x est récurrent par F il existe un nombre entier $l > k$ tel que $F^l(x)$ est assez proche de x. Pour voir que le voisinage W' convient il suffit de montrer que la μ_x-mesure de l'ensemble des points $z \in W^s(x, W') \setminus W$ tels que $F^l(x, z) \notin N \times W$ est strictement positive. Si ce n'est pas le cas, pour μ_x-presque tout point $z \in W^s(x, W') \setminus (\{x\} \times W)$, on a

$$F^l(x, z) \in \{F^l(x)\} \times W.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mu_{F^l(x)}(F^l(W^s(x, W') \setminus (\{x\} \times W))) =& \mu_x(W^s(x, W') \setminus (\{x\} \times W)) \\ \leq& \mu_{F^l(x)}((\{F^l(x)\} \times W)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

En utilisant (2.5) et (2.6), on en déduit

$$\begin{aligned} \mu_x(W^s(x, W')) - \mu_x(\{x\} \times W) \leq& \mu_{F^l(x)}(\{F^l(x)\} \times W) \\ <& \mu_x(\{x\} \times W) + \mu_x(W^s(x, W'))/2 \end{aligned}$$

et donc,

$$\mu_x(W^s(x, W'))/2 \leq 2\mu_x(\{x\} \times W).$$

Cette dernière inégalité contredit le choix de W, ceci entraîne la proposition. ■

c) Homéomorphismes locaux fibre-conservatifs

Dans ce paragraphe on suppose de plus que F est fibre-conservatif au-dessus de toute mesure invariante par $F|_N$. On va montrer qu'on obtient l'ensemble de rotation local autour de N en réunissant les ensembles de rotation locaux autour de N au-dessus de toutes les mesures dans $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$.

Définition 2.26. *On dira qu'un homéomorphisme fibré F dans* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ *est* fibre-conservatif *s'il est fibre-conservatif au-dessus de toute mesure dans $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$.*

Notons que par exemple un homéomorphisme fibré dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ s'écrivant sous la forme $F(x,z) = (f(x), h_x(z))$ tel que tous les homéomorphismes h_x, $x \in N$ préservent la même mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\mu(0) = 0$ et $\mu(U) > 0$ pour tout voisinage U de 0 est un homéomorphisme fibre-conservatif. On a le résultat suivant.

Théorème 2.27. *Soit F un homéomorphisme fibré dans* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ *et I une homotopie entre P_2 et $P_2 \circ F$. Supposons que F est fibre-conservatif. Alors*

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_{\mathrm{loc}}(I, \mu).$$

Nous montrerons d'abord les lemmes qui seront utilisés dans la démonstration du théorème. Dans la suite pour un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^2$, nous noterons $\mathcal{V}$ le voisinage $V \times N$ de N.

Lemme 2.28. *Soient W, V deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^2$ avec W contenu dans V. Alors pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ on a*

$$\rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I) \subset \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_{V,W,\epsilon}(I, \mu).$$

Démonstration. Soit $\rho \in \rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I)$. Alors il existe une suite croissante d'entiers positifs $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et de points $(x_k, z_k) \in E(\mathcal{V}, \mathcal{W}, n_k)$ tels que la suite $(\rho_{n_k}((x_k, z_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers ρ quand k tend vers $+\infty$. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, considérons

$$\mu_k := \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \delta_{F|_N^i(x_k)} = \mu_{n_k, x_k}.$$

Comme l'espace $\mathcal{M}(N)$ est compact, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une mesure μ. De plus μ appartient à $\mathcal{M}_f(N)$. Soit $\epsilon > 0$ donné. Alors il existe $k_0 = k_0(\epsilon)$ dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geq k_0$ on a, $d(\mu_k, \mu) < \epsilon$. On conclut que ρ appartient à $\rho_{V,W,\epsilon}(I, \mu)$. ■

La proposition suivante est le résultat-clé de la démonstration.

Proposition 2.29. *Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$ qui converge vers μ quand n tend vers $+\infty$. Pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ il existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout voisinage V de 0, et tout entier $n \geq n_0$ on a*

$$\rho_{V,\epsilon}(I, \mu_n) \subset \rho_{V,2\epsilon}(I, \mu).$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel. Comme la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on a $d(\mu_n, \mu) < \epsilon$. Fixons un entier $n \geq n_0$ et soit $\rho \in \rho_{V,\epsilon}(I, \mu_n)$. Il existe donc $W \subset V$ un voisinage de 0 et $\rho \in \rho_{V,W,\epsilon}(I, \mu_n)$. Il existe une suite croissante d'entiers positifs $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et de points $(x_k, z_k) \in E(V, W, n_k, \epsilon)(\mu_n)$ tels que la suite $(\rho_{n_k}(x_k, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers ρ quand k tend vers $+\infty$. Ainsi $d(\mu_{n_k,x_k}, \mu_n) < \epsilon$ et $d(\mu_{n_k,x_k}, \mu) < 2\epsilon$. Par conséquent $\rho \in \rho_{V,W,2\epsilon}(I, \mu)$. Ceci montre que $\rho \in \rho_{V,2\epsilon}(I, \mu)$, ce qu'on voulait montrer. ■

Comme corollaire, on obtient les lemmes suivants.

Lemme 2.30. *Soient W, V deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^2$ avec W contenu dans V. Alors pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ on a*

$$\mathrm{Adhe}\left(\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_{V,\epsilon}(I, \mu)\right) \subset \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \mathrm{Adhe}\left(\rho_{V,2\epsilon}(I, \mu)\right).$$

Démonstration. Soit ρ dans $\mathrm{Adhe}\left(\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_{V,\epsilon}(I, \mu)\right)$. Alors il existe une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ un nombre réel ρ_n appartenant à $\rho_{V,\epsilon}(I, \mu_n)$ tel que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ρ quand n tend vers $+\infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ qui appartient à $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$. Pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, d'après la proposition 2.29, et pour tout entier n assez grand on a $\rho_n \in \rho_{V,2\epsilon}(I, \mu)$. On conclut que $\rho \in \mathrm{Adhe}\left(\rho_{V,2\epsilon}(I, \mu)\right)$. ■

Lemme 2.31. *Pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ on a*

$$\bigcap_{V} \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \mathrm{Adhe}\left(\rho_{V,\epsilon}(I, \mu)\right) \subset \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_{2\epsilon}(I, \mu).$$

Démonstration. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^2$. Considérons

$$\rho \in \bigcap_{V} \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \mathrm{Adhe}\left(\rho_{V,\epsilon}(I, \mu)\right).$$

Alors pour chaque n dans $\mathbb{N}$, il existe une mesure μ_n dans $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$ telle que $\rho \in \mathrm{Adhe}\left(\rho_{V_n,\epsilon}(I, \mu_n)\right)$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ. De plus μ est dans $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$ et d'après la proposition 2.29, pour tout nombre entier n assez grand on a $\rho \in \mathrm{Adhe}\left(\rho_{V_n,2\epsilon}(I, \mu)\right)$. Ainsi ρ appartient à $\rho_{2\epsilon}(I, \mu)$, ce qu'on voulait montrer. ■

Lemme 2.32. *On a*

$$\bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_\epsilon(I, \mu) \subset \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \bigcap_{\epsilon>0} \rho_{2\epsilon}(I, \mu) = \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_{\mathrm{loc}}(I, \mu).$$

Démonstration. Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante tendant vers 0. Considérons

$$\rho \in \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_\epsilon(I,\mu).$$

Alors pour chaque n dans $\mathbb{N}$, il existe une mesure μ_n telle que $\rho \in \rho_{\epsilon_n}(I,\mu_n)$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ. De plus μ est dans $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$ et d'après la proposition 2.29, pour tout $\epsilon > 0$ fixé on a $\rho \in \rho_{2\epsilon}(I,\mu)$. Ainsi ρ appartient à $\rho_{\mathrm{loc}}(I,\mu)$, ce qu'on voulait montrer. ■

Démonstration du théorème 2.27. Rappelons que pour toute mesure μ appartenant à $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$, $\rho_{\mathrm{loc}}(I,\mu)$ est contenu dans $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$. On en déduit l'une des inclusions. Montrons maintenant l'autre inclusion. Soient $W \subset V$ deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^2$ et $\epsilon > 0$ un nombre réel. D'après le lemme 2.28, on a

$$\rho_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(I) \subset \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_{V,W,\epsilon}(I,\mu),$$

et donc

$$\mathrm{Adhe}\,(\rho_{\mathcal{V}}(I)) \subset \mathrm{Adhe}\left(\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_{V,\epsilon}(I,\mu)\right).$$

D'après le lemme 2.30, on obtient

$$\mathrm{Adhe}\,(\rho_{\mathcal{V}}(I)) \subset \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \mathrm{Adhe}\,(\rho_{V,2\epsilon}(I,\mu)).$$

D'après le lemme 2.31, on obtient

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) \subset \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_{4\epsilon}(I,\mu).$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, d'après le lemme 2.32, on obtient la second inclusion

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) \subset \bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_{\mathrm{loc}}(I,\mu).$$

■

2.4 L'ensemble de rotation des homéomorphismes fibrés de $N \times \mathbb{T}^1$

Soit N une variété connexe et compacte. Jusqu'ici on a considéré des homéomorphismes locaux au voisinage de $N \times \{0\}$ dans $N \times \mathbb{R}^2$ qui fixent $N \times \{0\}$. Parfois pour comprendre la dynamique locale de certains d'eux, les *homéomorphismes éclatables* (la définition précise sera donnée dans la section suivante), on peut "éclater N", ce qui induit un homéomorphisme fibré de $N \times \mathbb{T}^1$, où $N \times \mathbb{T}^1$ est vu comme le bord de $N \times \mathbb{R}^2$ privé de $N \times \{0\}$.

2.4.1 Homéomorphismes fibrés de $N \times \mathbb{T}^1$

Dans cette section, on étudie les homéomorphismes fibrés définis globalement sur $N \times \mathbb{T}^1$. Dans [Her83] M.-R. Herman a introduit, sous certaines hypothèses, le *nombre de rotation fibré* pour tels homéomorphismes. Nous allons plutôt introduire différents *ensembles de rotation fibrés* pour des homéomorphismes fibrés de $N \times \mathbb{T}^1$ qui vérifient une condition d'homotopie.

L'ensemble $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{T}^1\right)$

On notera $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{T}^1\right)$ l'ensemble des homéomorphismes F de $N \times \mathbb{T}^1$ vérifiant :

(1) F est *fibré*, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme $F(x,u) = (f(x), h_x(u))$, où f est un homéomorphisme de N et $x \mapsto h_x$ est une application continue de N dans $\mathrm{Homeo}\left(\mathbb{T}^1\right)$.

(2) L'application $H_0 : N \to \mathrm{Homeo}\left(\mathbb{T}^1\right)$ constante et égale à l'identite de $\mathbb{T}^1$ est homotope à l'application $H_1 : N \to \mathrm{Homeo}\left(\mathbb{T}^1\right)$ définie par $H_1(x) = h_x$.

Remarquons que dans ce cas pour tout $x \in N$ l'homéomorphisme h_x appartient à $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{T}^1\right)$, c'est-à-dire qu'il est isotope à l'identité.

2.4.2 Définitions des ensembles de rotation fibrés

Soit F un homéomorphisme dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{T}^1\right)$: il s'écrit donc sous la forme $F(x,u) = (f(x), h_x(u))$ et on peut considérer une homotopie $I = (H_t)_{t\in[0,1]}$ entre les applications H_0 et H_1 définies précédemment. Pour $\xi = (x,u)$ dans $N \times \mathbb{T}^1$ et n dans $\mathbb{N}$, on définit la trajectoire $\gamma_\xi^n : [0,n] \to \mathbb{T}^1$ jusqu'au temps n pour l'homotopie I par :

$$\gamma_\xi^n(t) = H_{t-i}(f^i(x))(h_{x,i}(u)) \text{ lorsque } 0 \leq i < n \text{ et } i \leq t \leq i+1,$$

où $h_{x,i} = h_{f^{i-1}(x)} \circ \cdots \circ h_x$ est dans $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{T}^1\right)$.

Soit $\pi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ le revêtement universel du cercle $\mathbb{T}^1$. On considère un relevé de la trajectoire γ_ξ^n, c'est-à-dire un chemin continu $\widetilde{\gamma_\xi^n} : [0,n] \to \mathbb{R}$ tel que $\pi_0 \circ \widetilde{\gamma_\xi^n} = \gamma_\xi^n$ sur $[0,n]$. On définit

$$\rho_n^f(\xi) := \frac{1}{n}\left(\widetilde{\gamma_\xi^n}(n) - \widetilde{\gamma_\xi^n}(0)\right).$$

Dans ce cadre, on va définir trois ensembles de rotation fibrés pour l'homotopie I.

Première définition

Pour ξ dans $N \times \mathbb{T}^1$, notons $\mathrm{rot}_{\mathrm{pts}}(\xi)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\rho_n^f(\xi))_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.33. *L'ensembre de rotation fibré (première définition) de l'homotopie I est :*

$$\rho_{\text{pts}}(I) = \bigcup_{\xi \in N \times \mathbb{T}^1} \text{rot}_{\text{pts}}(\xi).$$

Autrement dit, $\rho \in \rho_{\text{pts}}(I)$ s'il existe une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et un point ξ dans $N \times \mathbb{T}^1$ tel que la suite $(\rho_{n_k}(\xi))_{k\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) vers ρ, lorsque k tend vers $+\infty$.

Proposition 2.34. *Soient u et u' dans $\mathbb{T}^1$. Alors pour tout x dans N et tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\left|\rho_n^f(x,u) - \rho_n^f(x,u')\right| \leq \frac{1}{n}.$$

En particulier, on a $\text{rot}_{\text{pts}}(x,u) = \text{rot}_{\text{pts}}(x,u')$. Autrement dit $\text{rot}_{\text{N}}(x) := \text{rot}_{\text{pts}}(x,u)$ est indépendant de u dans $\mathbb{T}^1$.

Démonstration. On considère un relevé $\widetilde{F} : N \times \mathbb{R} \to N \times \mathbb{R}$ de F. Pour n dans $\mathbb{N}$, on a $\widetilde{F}^n(x,\widetilde{u}) = (f^n(x), \widetilde{h_{x,n}}(\tilde{u}))$, où $\widetilde{h_{x,n}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un relevé de l'homéomorphisme $h_{x,n} = h_{f^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ h_x$ qui appartient à $\text{Homeo}_0\left(\mathbb{T}^1\right)$. L'application $\widetilde{u} \mapsto \widetilde{h_{x,n}}(\widetilde{u})$ est donc croissante et vérifie $\widetilde{h_{x,n}}(\widetilde{u}+1) = \widetilde{h_{x,n}}(\widetilde{u})+1$. Par conséquent l'application $\varphi : \widetilde{u} \mapsto \widetilde{h_{x,n}}(\widetilde{u}) - \widetilde{u}$ est périodique de période 1 et pour $\widetilde{u}$ un relevé de u et $\widetilde{u}'$ relevé de u' tel que $\widetilde{u} \leq \widetilde{u}' < \widetilde{u} + 1$, on a

$$\widetilde{u} + \varphi(\widetilde{u}) \leq \widetilde{u}' + \varphi(\widetilde{u}') \leq \widetilde{u} + 1 + \varphi(\widetilde{u}).$$

On en déduit

$$-1 \leq \widetilde{u} - \widetilde{u}' \leq \varphi(\widetilde{u}') - \varphi(\widetilde{u}) \leq \widetilde{u} + 1 - \varphi(\widetilde{u}') \leq 1.$$

On conclut donc

$$\left|\rho_n^f(x,u) - \rho_n^f(x,u')\right| = \frac{1}{n}\left|\varphi(\widetilde{u}) - \varphi(\widetilde{u}')\right| \leq \frac{1}{n}.$$

■

Exemple 2.5. L'exemple suivant montre que l'ensemble de rotation fibré (première définition) n'est pas connexe en général. Considérons un homéomorphisme $F : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ définit comme suit :

1. Considérons un *homéomorphisme nord-sud* f dans $\text{Homeo}\left(\mathbb{T}^1\right)$, c'est-à-dire satisfaisant les propriétés suivantes :
   (a) f possède deux points fixes x_N et x_S ;
   (b) Pour tout x dans $\mathbb{T}^1$ distinct de x_N et x_S, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = x_S \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f^{-n}(x) = x_N.$$
2. Considérons une application continue $\alpha : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ homotope à l'identité de $\mathbb{T}^1$ et telle que son relevé $\widetilde{\alpha} : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ vérifie $\widetilde{\alpha}(x_N) \neq \widetilde{\alpha}(x_S)$.
3. Définissons $F(x,u) = (f(x), u + \alpha(u))$.

Si I est l'homotopie naturelle entre H_0 et H_1, alors $\rho_{\text{pts}}(I) = \{\widetilde{\alpha}(N), \widetilde{\alpha}(S)\}$ qui n'est pas connexe.

Deuxième définition

Maintenant pour n dans $\mathbb{N}$, on notera $D_n := \{\rho_n^f(\xi) : \xi \in N \times \mathbb{T}^1\}$.

Définition 2.35. *L'ensemble de rotation fibré (deuxième définition) de l'homotopie I est*

$$\rho_{\text{fib}}(I) := \bigcap_{m\geq 1} \text{Adhe} \bigcup_{n\geq m} D_n.$$

Autrement dit, $\rho \in \rho_{\text{fib}}(I)$ s'il existe une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ et des points ξ_k dans $N \times \mathbb{T}^1$ tels que la suite $(\rho_{n_k}^f(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ, lorsque k tend vers l'infini.

Remarque 2.6. D'après les définitions ci-dessus, on obtient que $\rho_{\text{pts}}(I)$ est inclus dans $\rho_{\text{fib}}(I)$. De plus, en considérant l'exemple 2.5 et la proposition suivante, on montre que cette inclusion est stricte en général.

La proposition suivante énonce l'une des propriétés importantes de "l'ensemble de rotation fibré".

Proposition 2.36. *L'ensemble $\rho_{\text{fib}}(I)$ est une partie compacte et connexe de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour tout n dans $\mathbb{N}$ fixé, la fonction $\rho_n^f : N \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ est continue. Comme N est une variété compacte et connexe, on conclut que l'ensemble D_n est une partie compacte et connexe (et donc convexe) de $\mathbb{R}$.

On va montrer d'abord que $\rho_{fib}(I)$ est compact. Comme par définition, l'ensemble $\rho_{fib}(I)$ est fermé, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $D_n \subset D_1$. En effet, pour X sous-ensemble de $\mathbb{R}$, notons $\text{Conv}\,(X)$ l'enveloppe convexe de X. Comme pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'ensemble D_n est convexe, on a $\text{Conv}\,(D_n) = D_n$. Soit (x, u) dans $N \times \mathbb{T}^1$ et $n \geq 1$ un entier, on a

$$\rho_n^f(x, u) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \rho_1^f(F^i(x, u)) \in \text{Conv}\,(D_1) = D_1.$$

On conclut que D_n est contenu dans D_1.

Maintenant, on va montrer que $\rho_{\text{fib}}(I)$ est connexe. Par définiton de l'ensemble $\rho_{\text{fib}}(I)$, puisque l'adhérence d'un ensemble connexe et l'intersection décroissante d'ensembles connexes sont connexes, il suffit de montrer que pour tout m dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $\cup_{n\geq m} D_n$ est connexe. Pour le montrer, on va utiliser le lemme topologique suivant.

Lemme 2.37. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles connexes avec intersection deux à deux non-vide. Alors l'union $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est connexe.*

Soit (x, u) dans $N \times \mathbb{T}^1$ et $n, n' \geq m$ des entiers. Alors on a

$$\rho_{n\cdot n'}^f(x, u) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \rho_{n'}^f(F^{i\cdot n}(x, u)) \in \text{Conv}\,(D_{n'}) = D_{n'}.$$

On conclut que $D_{nn'} \subset D_{n'}$ et de la même manière $D_{nn'} \subset D_n$. Ainsi $D_{nn'} \subset D_n \cap D_{n'}$, et donc pour tous $n, n' \geq m$, D_n et $D_{n'}$ s'intersectent. D'après le lemme précédent $\cup_{n\geq m} D_n$ est connexe, ce qui implique la connexité de $\rho_{\text{fib}}(I)$. ■

Troisième définition

Nous allons commencer par la proposition suivante. Cela nous permettra de définir la notion de *relevé d'une mesure dans* $\mathcal{M}_f(N)$. On rappelle que $p_N : N \times \mathbb{T}^1 \to N$ note la projection sur la première coordonnée.

Proposition 2.38. *Soit μ une mesure dans $\mathcal{M}_f(N)$. Alors il existe une mesure de probabilité ν dans $\mathcal{M}_F(N \times \mathbb{T}^1)$ telle que $(p_N)_*(\nu) = \mu$. De plus, il y a des mesures de probabilité ν_x sur les fibres $\{x\} \times \mathbb{T}^1$ telles que pour toute fonction $\phi \in C^0(N \times \mathbb{T}^1)$, on a*

$$\int_{N\times\mathbb{T}^1} \phi \, d\nu = \int_N \int_{\{x\}\times\mathbb{T}^1} \phi \, d\nu_x \, d\mu.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{M}_\mu(N \times \mathbb{T}^1)$ l'ensemble des mesures de probabilité ν sur $N \times \mathbb{T}^1$ telles que $(p_N)_*(\nu) = \mu$. Alors $\mathcal{M}_\mu(N \times \mathbb{T}^1)$ est une partie non-vide, convexe et fermée (et donc compacte) de $\mathcal{M}(N \times \mathbb{T}^1)$. Comme F est fibré, on peut bien définir l'application $T : \mathcal{M}_\mu(N \times \mathbb{T}^1) \to \mathcal{M}_\mu(N \times \mathbb{T}^1)$ par $T(\nu) = F_*(\nu)$. Fixons ν_0 dans $\mathcal{M}_\mu(N \times \mathbb{T}^1)$ et pour chaque entier $n \geq 1$, considérons

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} F_*^i(\nu_0).$$

Notons que la suite $(\nu_n)_{n\geq 1}$ reste dans $\mathcal{M}_\mu(N\times\mathbb{T}^1)$, et d'après la compacité de l'espace $\mathcal{M}(N \times \mathbb{T}^1)$, on peut prendre une valeur d'adhérence ν de cette suite. De plus la mesure ν vérifie $(p_N)_*\nu = \mu$ et $F_*\nu = \nu$. Ceci montre l'existence de la mesure ν. La deuxième partie de la proposition suit du théorème de désintegration de Rokhlin (voir [Ma83]). ■

Définition 2.39. *Soit μ une mesure dans $\mathcal{M}_f(N)$. On dira qu'une mesure ν dans $\mathcal{M}_F(N \times \mathbb{T}^1)$ est un* relevé de μ *si elle satisfait la proposition 2.38.*

On a les résultats suivants.

Lemme 2.40. *Soit μ une mesure ergodique dans $\mathcal{M}_f(N)$. Alors il existe un relevé de μ qui est ergodique.*

Démonstration. Supposons que μ est une mesure ergodique dans $\mathcal{M}_f(N)$. Alors il existe X sous-ensemble mesurable de N avec $\mu(X) = 1$ tel que pour tout x dans X, la suite $(\mu_{n,x})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ, quand n tend vers l'infini. Pour $x \in X$ et $u \in \mathbb{T}^1$ posons

$$\nu_{n,(x,u)} := \frac{1}{n} \left(\delta_{(x,u)} + \cdots + \delta_{F^{n-1}((x,u))} \right),$$

qui se projette par $(p_N)_*$ sur $\mu_{n,x}$. A cause de la compacité de l'espace des mesures $\mathcal{M}(N \times \mathbb{T}^1)$, on peut prendre une limite de la suite $(\nu_{n,(x,u)})_{n\in\mathbb{N}}$. De plus cette limite, que l'on note ν, appartient à $\mathcal{M}_F(N \times \mathbb{T}^1)$. Puisque l'application $(p_N)_*$ est continue, on peut passer à la limite et on obtient $(P_N)_*\nu = \mu$. Pour trouver un relevé ergodique de μ, on utilisera le théorème de décomposition ergodique (voir [Ma83]).

Théorème 2.41 (Théorème de décomposition ergodique). *Pour ν-presque tout point (x,u) dans $N\times\mathbb{T}^1$, la suite $(\nu_{n,(x,u)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une mesure ergodique $\nu_{(x,u)}$. De plus pour toute fonction $\phi\in C^0(N\times\mathbb{T}^1)$, on a*

$$\int_{N\times\mathbb{T}^1}\phi\,d\nu=\int_{N\times\mathbb{T}^1}\left(\int_{N\times\mathbb{T}^1}\phi\,d\nu_{(x,u)}\right)d\nu(x,u).$$

Comme $(p_N)_*\nu=\mu$, $\nu(X\times\mathbb{T}^1)=1$ et d'après le théorème de décomposition ergodique, il existe $Z\subset X\times\mathbb{T}^1$ tel que pour tout $(x,u)\in Z$ la suite $(\nu_{n,(x,u)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une mesure ergodique $\nu_{(x,u)}$. De plus, comme $(p_N)_*(\nu_{n,(x,u)})=\mu_{n,x}$, en faisant tendre n vers l'infini, on a $(p_N)_*(\nu_{(x,u)})=\mu$. Ceci montre le lemme. ■

Lemme 2.42. *Soient ν,ν' deux relevés de μ. Alors*

$$\int_{N\times\mathbb{T}^1}\rho_1^f\,d\nu=\int_{N\times\mathbb{T}^1}\rho_1^f\,d\nu'.$$

Démonstration. A cause de la proposition 2.34 nous avons sur chaque fibre

$$\left|\int_{\{x\}\times\mathbb{T}^1}\rho_1^f(x,u)\,d\nu_x-\int_{\{x\}\times\mathbb{T}^1}\rho_1^f(x,u)\,d\nu'_x\right|\leq\max_{u\in\mathbb{T}^1}\rho_1^f(x,u)-\min_{u\in\mathbb{T}^1}\rho_1^f(x,u)\leq 1.$$

En intégrant sur la variété N, on a

$$\left|\int_{N\times\mathbb{T}^1}\rho_1^f\,d\nu-\int_{N\times\mathbb{T}^1}\rho_1^f\,d\nu'\right|\leq 1. \tag{2.7}$$

D'autre part, pour q dans $\mathbb{N}$ considérons l'homotopie $I'=I^q$ et la fonction associée ρ'_1. En appliquant (2.7) à l'homotopie I', puisque $\rho_1^{'f}=\sum_{i=0}^{q-1}\rho_1^f\circ F^i$ et les mesures ν et ν' sont F-invariantes, on a

$$q\left|\int_{N\times\mathbb{T}^1}\rho_1^f\,d\nu-\int_{N\times\mathbb{T}^1}\rho_1^f\,d\nu'\right|=\left|\int_{N\times\mathbb{T}^1}\rho_1^{'f}\,d\nu-\int_{N\times\mathbb{T}^1}\rho_1^{'f}\,d\nu'\right|\leq 1.$$

Ainsi en divisant par q et en faisant tendre q vers $+\infty$, on conclut

$$\int_{N\times\mathbb{T}^1}\rho_1^f\,d\nu=\int_{N\times\mathbb{T}^1}\rho_1^f\,d\nu'.$$

■

On peut maintenant donner la troisième définition de l'ensemble de rotation fibré. Soit μ une mesure dans $\mathcal{M}_f(N)$. D'après le lemme 2.42, le nombre

$$\mathrm{rot}_{\mathrm{mes}}(\mu)=\int_{N\times\mathbb{T}^1}\rho_1^f\,d\nu$$

ne dépend pas du choix du relevé ν de μ.

Définition 2.43. *L'ensemble de rotation fibré (troisième définition) de l'homotopie I est :*

$$\rho_{\text{mes}}(I) := \{\text{rot}_{\text{mes}}(\mu) : \mu \textit{ appartient à } \mathcal{M}_f(N)\}.$$

On peut distinguer, un sous-ensemble de $\rho_{\text{mes}}(I)$ en considérant seulement les mesures ergodiques dans $\mathcal{M}_f(N)$, c'est-à-dire

$$\rho_{\text{erg}}(I) := \{\text{rot}_{\text{mes}}(\mu) : \mu \text{ mesure ergodique dans } \mathcal{M}_f(N)\}.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 2.44. *L'ensemble $\rho_{\text{mes}}(I)$ est une partie compacte et connexe de $\mathbb{R}$. De plus, on a*

$$\rho_{\text{mes}}(I) = \text{Conv}\left(\rho_{\text{erg}}(I)\right).$$

Démonstration. Comme la variété N est compacte, l'espace $\mathcal{M}_f(N)$ est compact et convexe. Pour montrer la première partie de l'énoncé, il nous suffit donc de montrer que l'application $\text{rot}_{\text{mes}} : \mathcal{M}_f(N) \to \mathbb{R}$ est continue et affine. Montrons d'abord la continuité de rot_{mes}. Fixons μ dans $\mathcal{M}_f(N)$. Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers μ. Nous allons montrer que toute sous-suite de $(\text{rot}_{\text{mes}}(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge vers $\text{rot}_{\text{mes}}(\mu)$. Ceci entraine la convergence de la suite $(\text{rot}_{\text{mes}}(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vers μ. Soit $(\mu'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons un relevé ν'_n de μ'_n. Comme l'espace $\mathcal{M}_F(N \times \mathbb{T}^1)$ est compact, il existe une sous-suite $\left(\nu'_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\nu'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une mesure, qu'on note ν'. Notons que par continuité de $(p_N)_*$, ν' est un relevé de μ. De plus

$$\text{rot}_{\text{mes}}(\mu'_{n_k}) = \int_{N\times\mathbb{T}^1} \rho_1^f \, d\nu'_{n_k} \to \int_{N\times\mathbb{T}^1} \rho_1^f \, d\nu' = \text{rot}_{\text{mes}}(\mu).$$

Ainsi la suite $(\text{rot}_{\text{mes}}(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\text{rot}_{\text{mes}}(\mu)$. Ceci montre la continuité de l'application rot_{mes}.

D'autre part l'application rot_{mes} est affine, puisque $(p_N)_*$ est affine. En effet, soient $t, t' \in \mathbb{R}$ et $\mu, \mu' \in \mathcal{M}_f(N)$. Comme $(p_N)_*$ est affine, si ν et ν' dans $\mathcal{M}_F(N \times \mathbb{T}^1)$ sont des relevés de μ et μ' respectivement, alors $t\nu + t'\nu'$ est un relevé de $t\mu + t'\mu'$.

Montrons maintenant l'égalité $\rho_{\text{mes}}(I) = \text{Conv}\left(\rho_{\text{erg}}(I)\right)$. Notons d'abord que les définitions et la première partie de la démonstration entrainent $\text{Conv}\left(\rho_{\text{erg}}(I)\right) \subset \rho_{\text{mes}}(I)$. L'autre inclusion suit du théorème de décomposition ergodique (théorème 2.41). En effet, celui-ci nous dit que pour un relevé ν de μ, et ν-presque tout point $(x, u) \in N \times \mathbb{T}^1$, la mesure $\nu_{(x,u)}$ est ergodique et

$$\int_{N\times\mathbb{T}^1} \rho_1^f \, d\nu = \int_{N\times\mathbb{T}^1} \left(\int_{N\times\mathbb{T}^1} \rho_1^f \, d\nu_{(x,u)} \right) d\nu.$$

Ainsi,

$$\inf \rho_{\text{erg}}(I) \leq \text{rot}_{\text{mes}}(\mu) \leq \sup \rho_{\text{erg}}(I).$$

Ceci montre que $\rho_{\text{mes}}(I) \subset \text{Conv}\left(\rho_{\text{erg}}(I)\right)$, ce qu'on voulait montrer. Ceci conclut la démonstration. ■

2.4.3 Comparaison entre les différentes définitions

Dans ce paragraphe on montre les relations entre les trois définitions d'ensembles de rotation fibrés données au paragraphe précédent.

Théorème 2.45. *On a*

$$\rho_{\text{erg}}(I) \subset \rho_{\text{pts}}(I) \subset \rho_{\text{fib}}(I) = \rho_{\text{mes}}(I) = \text{Conv}\left(\rho_{\text{erg}}(I)\right).$$

On sait déjà que l'inclusion $\rho_{\text{pts}}(I) \subset \rho_{\text{fib}}(I)$ est stricte en général (remarque 2.6) et que $\rho_{\text{mes}}(I) = \text{Conv}\left(\rho_{\text{erg}}(I)\right)$ (proposition 2.44). Pour compléter la démonstration, il suffit de montrer l'inclusion $\rho_{\text{erg}}(I) \subset \rho_{\text{pts}}(I)$ et l'égalité $\rho_{\text{fib}}(I) = \rho_{\text{mes}}(I)$. On remarque qu'on sait pas s'il existe des exemples où l'inclusion $\rho_{\text{erg}}(I) \subset \rho_{\text{pts}}(I)$ est stricte.

Proposition 2.46. *Soit μ une mesure ergodique dans $\mathcal{M}_f(N)$. Alors pour μ-presque tout point x dans N et tout u dans $\mathbb{T}^1$, on a*

$$\text{rot}_{\text{mes}}(\mu) = \text{rot}_{\text{pts}}(x, u).$$

En particulier

$$\rho_{\text{erg}}(I) \subset \rho_{\text{pts}}(I).$$

Démonstration. On rappelle que d'après le lemme 2.40, on peut choisir un relevé ν de μ qui est une mesure ergodique dans $\mathcal{M}_F(N \times \mathbb{T}^1)$. Comme la fonction $\rho_1^f : N \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ est continue, d'après le théorème ergodique de Birkhoff, pour ν-presque tout point (x, u) dans $N \times \mathbb{T}^1$, on a

$$\rho_n^f(x, u) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \rho_1^f(F^i(x, u)) \longrightarrow \int_{N \times \mathbb{T}^1} \rho_1^f \, d\nu = \rho(\mu) \text{ quand } n \to +\infty.$$

On conclut, puisque $\text{rot}_{\text{pts}}(x, u)$ est indépendant de u dans $\mathbb{T}^1$ (proposition 2.34). ■

La proposition précédente nous aidera à montrer l'une des inclusions de l'égalité des ensembles $\rho_{\text{fib}}(I)$ et $\rho_{\text{mes}}(I)$.

Corollaire 2.47. *On a*

$$\rho_{\text{mes}}(I) \subset \rho_{\text{fib}}(I).$$

Démonstration. D'après la proposition 2.44 et la proposition précédente on obtient $\rho_{\text{mes}}(I) = \text{Conv}\left(\rho_{\text{erg}}(I)\right) \subset \text{Conv}\left(\rho_{\text{pts}}(I)\right)$. Comme $\rho_{\text{pts}}(I) \subset \rho_{\text{fib}}(I)$ (remarque 2.6) et comme l'ensemble $\rho_{\text{fib}}(I)$ est convexe (proposition 2.36), on conclut

$$\rho_{\text{mes}}(I) = \text{Conv}\left(\rho_{\text{erg}}(I)\right) \subset \text{Conv}\left(\rho_{\text{pts}}(I)\right) \subset \text{Conv}\left(\rho_{\text{fib}}(I)\right) = \rho_{\text{fib}}(I).$$

■

Montrons maintenant la dernière inclusion.

Proposition 2.48. *On a*

$$\rho_{\text{fib}}(I) \subset \rho_{\text{mes}}(I).$$

Démonstration. Soit $\rho \in \rho_{\text{fib}}(I)$. Il existe alors une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini et des points $\xi_k = (x_k, u_k) \in N \times \mathbb{T}^1$ tels que

$$\rho^f_{n_k}(\xi_k) \to \rho \text{ quand } k \to +\infty.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons μ_k la mesure de probabilité sur N définie par

$$\mu_k := \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \delta_{f^i(x_k)}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers μ, c'est une mesure de probabilité invariante par f. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons

$$\nu_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \delta_{F^i(\xi_k)}.$$

On note ν une valeur d'adhérence pour la topologie faible de la suite $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$. C'est une mesure de probabilité invariante par F qui est un relevé de μ satisfaisant

$$\rho^f_{n_k}(\xi_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \rho^f_1(F^i(\xi_k)) = \int_{N\times\mathbb{T}^1} \rho^f_1 \, d\nu_k \to \rho(\mu) \text{ quand } k \to +\infty.$$

Ceci montre que ρ appartient à $\rho_{\text{mes}}(I)$. ■

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 2.49. *On a*

$$\rho_{\text{fib}}(I) = \rho_{\text{mes}}(I).$$

En particulier si f est uniquement ergodique, alors $\rho_{\text{fib}}(I)$ est un singleton.

2.5 Éclatement et ensemble de rotation

Dans cette section on considère des homéomorphismes dans $\text{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ qui sont éclatables, c'est-à-dire qui "induisent" des homéomorphismes de $\text{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{T}^1\right)$, où $N \times \mathbb{T}^1$ est vu comme le bord de $(N \times \mathbb{R}^2) \setminus N$. Ainsi, dans ce cadre, on peut comparer l'ensemble de rotation local autour de N et l'ensemble de rotation fibré induit. On va s'intéresser au problème suivant : quand est-ce que ces deux ensembles de rotation coïncident ?

2.5.1 Éclatement d'un voisinage de N le long de N

Considérons le difféomorphisme Φ_0 de $N \times \mathbb{T}^1 \times (0, +\infty)$ et à valeurs dans $(N \times \mathbb{R}^2) \setminus N$ défini par $(x, u, r) \mapsto (x, ru)$, où $\mathbb{T}^1$ est vu comme l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$. L'extension de Φ_0, notée encore Φ_0 est une application de classe C^1 de $N \times \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$ dans $N \times \mathbb{R}^2$.

Définition 2.50. *Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de N. L'éclatement de $\mathcal{U}$ le long de N est la paire $\left(\Phi_0^{-1}(\mathcal{U}); \Phi_0|_{\Phi_0^{-1}(\mathcal{U})}\right)$.*

2.5.2 Applications éclatables

Dans ce paragraphe, on donne la définition précise d'une application éclatable et on montre qu'un difféomorphisme local de classe C^1 est éclatable. On considère N et N' deux variétés différentiables de classe C^1 compactes de dimensions n et n' respectivement. On notera Φ_0 et Φ_0' les applications d'éclatement associées à N et N' respectivement.

Définition 2.51. *Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de N dans $N \times \mathbb{R}^2$. On dira qu'une application continue $H : \mathcal{U} \to N' \times \mathbb{R}^2$ telle que $H^{-1}(N') = N$ est* éclatable *s'il existe une application continue $\overline{H} : \Phi_0^{-1}(\mathcal{U}) \to N' \times \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$ telle que $\Phi_0' \circ H = \overline{H} \circ \Phi_0$ sur $\mathcal{U}$.*

Remarque 2.7.
1. Par continuité l'application $\overline{H}$ (si elle existe) est unique.
2. Être éclatable n'est pas préservé par conjugaison topologique.

Nous allons donner deux exemples d'homéomorphismes éclatables lorsque N est un singleton (c'est-à-dire dans le cadre des homéomorphismes locaux au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$).

Exemple 2.8. L'exemple le plus classique est le cas d'un homéomorphisme H de $\mathbb{R}^2$ fixant 0 qui est différentiable en 0 et dont la différentielle en 0 est inversible. L'homéomorphisme induit $\overline{H}$ correspond à l'action de la différentielle de H en 0 sur l'ensemble des demi-droites issues du point 0. L'application Φ_0 correspond au changement de coordonnées polaires.

Exemple 2.9. Un autre exemple est le suivant. Supposons qu'un homéomorphisme H de $\mathbb{R}^2$ laisse invariant une partie compacte connexe K de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas réduite à un point et telle que $\mathbb{R}^2 \setminus K$ soit connexe. On obtient un homéomorphisme, noté encore H, de $\mathbb{R}^2$ fixant 0 en écrasant K en un point. Il est éclatable en 0 dans le système de coordonnées donné par la théorie des bouts premiers de Caratheodory (voir [Car13]). Ceci implique qu'un conjugué de H est éclatable en 0 dans les coordonnées polaires usuelles (au sens de la définition 2.51).

Dans la suite, on va généraliser, l'exemple 2.8 ci-dessus. Pour toute application continue $H : \mathcal{U} \to N' \times \mathbb{R}^2$ et tout x dans N on note $H_{2,x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $z \mapsto P_2 \circ H(x, z)$.

Théorème 2.52. *Soit $H : \mathcal{U} \to N' \times \mathbb{R}^2$ une application C^1 définie sur un voisinage $\mathcal{U}$ de N dans $N' \times \mathbb{R}^2$ telle que $H^{-1}(N') = N$. Supposons que pour tout $x \in N$ la différentielle $DH_{2,x}$ est inversible. Alors H est éclatable.*

La démonstration est locale on peut donc remplacer N (resp. N') par $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^{n'}$). Soit $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 telle que $H^{-1}(\mathbb{R}^{n'}) = \mathbb{R}^n$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la différentielle $DH_{2,x}$ est inversible. On peut donc définir l'application

$$\overline{H} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$$

par la formule suivante :

$$\overline{H}(x, u, r) := \begin{cases} \left(P_{\mathbb{R}^{n'}} \circ H(x, ru), \frac{P_2 \circ H(x,ru)}{\|P_2 \circ H(x,ru)\|}, \|P_2 \circ H(x, ru)\|\right) & \text{si } r \neq 0 \ ; \\ \left(P_{\mathbb{R}^{n'}} \circ H(x, 0), \frac{DH_{2,x}(0)(u)}{\|DH_{2,x}(0)(u)\|}, 0\right) & \text{si } r = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

où $P_{\mathbb{R}^{n'}}$ et P_2 sont les projections sur la première et deuxième coordonnée respectivement. Le théorème suit alors du lemme suivant.

Lemme 2.53. *L'application $\overline{H}$ est continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que $\overline{H} = \Phi_0' \circ H \circ \Phi_0^{-1}$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1 \times (0, +\infty)$. Ceci montre que l'application $\overline{H}$ est bien continue en tout point (x, u, r) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$ avec $r \neq 0$. Il suffit donc de montrer que $\overline{H}$ est continue en chaque point (x_0, u_0) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1$. De plus comme $N \times \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$ est muni de la topologie produit, il nous suffit de montrer la continuité de $p_i' \circ \overline{H}$, où $i \in \{1, 2, 3\}$ et p_i' est la projection sur la i-ième coordonnée. La continuité de $p_1' \circ \overline{H}$ et de $p_3' \circ \overline{H}$ suivent de la continuité de H, de la fonction norme et l'hypothèse $H^{-1}(N') = N$.

Montrons maintenant la continuité de $p_2' \circ \overline{H}$ en un point (x_0, u_0) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1$. Comme H est de classe C^1, on peut développer H comme

$$H(x + h) = H(x) + DH(x)(h) + \epsilon(x, h) \|h\|, \tag{2.9}$$

où l'application $x \mapsto DH(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ et l'application $h \mapsto \epsilon(x, h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0. De plus $\epsilon(x, h)$ tend vers 0 quand (x, h) tend vers $(x_0, 0)$. Précisons ceci. De l'inégalité des acroissements finis, on a

$$\|H(x + h) - H(x) - DH(x)(h)\| \leq \sup_{\xi \in [x, x+h]} \|DH(\xi) - DH(x)\| \cdot \|h\|,$$

Comme H est de classe C^1 sur un voisinage de $\mathbb{R}^n$, on a bien

$$\|\epsilon(x, h)\| \leq \sup_{\xi \in [x, x+h]} \|DH(\xi) - DH(x)\| \to 0, \text{ lorsque } (x, h) \to (x_0, 0).$$

D'après la relation (2.9), avec $(x, h) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ et $h = ru$ avec $u \in \mathbb{T}^1$ et $r \in (0, +\infty)$ assez petit, on en déduit que :

$$\frac{H_2(x, ru)}{\|H_2(x, ru)\|} = \frac{DH_{2,x}(0)(u) + \epsilon_2(x, ru)}{\|DH_{2,x}(0)(u) + \epsilon_2(x, ru)\|} \to \frac{DH_{2,x_0}(0)(u_0)}{\|DH_{2,x_0}(0)(u_0)\|} \ ;$$

quand (x, u, r) tend vers $(x_0, u_0, 0)$. Ceci conclut la preuve du lemme.

■

On a les conséquences suivantes.

Corollaire 2.54. *Soit F un élément de* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$. *Supposons que F est un difféomorphisme de classe C^1 sur un voisinage de N. Alors les applications F et $H = P_2 \circ F$ sont éclatables.*

On notera $\mathrm{Diff}^1_*(N \times \mathbb{R}^2; N)$ l'ensemble des éléments de $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ qui sont des difféomorphismes de classe C^1 sur un voisinage de N.

Corollaire 2.55. *L'application de* $\mathrm{Diff}^1_*(N \times \mathbb{R}^2; N)$ *dans* $\mathrm{Homeo}(N \times \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty); N \times \mathbb{T}^1)$ *définie par*

$$F \mapsto \overline{F}$$

est continue.

Démonstration. La preuve suit directement de la formule (2.8) de $\overline{F}$. ■

L'exemple suivant nous montre qu'il ne suffit pas d'être différentiable en chaque point de N avec différentielle continue le long de N pour être éclatable.

Proposition 2.56. *Il existe un homéomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2$ différentiable en chaque point de $\mathbb{T}^1$ avec différentielle continue le long de $\mathbb{T}^1$, mais qui il n'est pas éclatable.*

L'idée de la construction est de "faire éclater" une rotation à l'origine. Fixons d'abord α dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et trois nombres réels $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Considérons un difféomorphisme de classe C^1, ψ de $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ qui vérifie :

(i) $\psi(z) = z$ si $\|z\| \leq r_1$ ou $\|z\| \geq r_3$ et

(ii) $\psi(z) = R_\alpha(z)$ si $\|z\| = r_2$.

Ensuite définissons $\psi_0 = id$ et $\psi_t(z) = t\psi\left(\frac{1}{t}z\right)$ pour $t \in (0, 1]$. On obtient ainsi une isotopie entre l'identité et ψ. Finalement, en considérant le lacet $h : \mathbb{T}^1 \to \mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ définit comme

$$x \mapsto h_x = \begin{cases} \psi_{4x^2}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2; \\ \psi_{4(x-1)^2}, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

définissons $F \in \mathrm{Homeo}\left(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{T}^1\right)$ par :

$$F(x, z) := (x, h_x(z)).$$

Lemme 2.57. *L'homéomorphisme F défini au-dessus est différentiable en chaque point de $N = \mathbb{T}^1$ et $DF(x) = id$ pour tout $x \in N$, en particulier la différentielle $x \mapsto DF(x)$ dépend continûment de $x \in N$, mais F n'est pas éclatable.*

Démonstration. Remarquons d'abord que puisque F est l'identité au voisinage de tout $x \in \mathbb{T}^1$, x différent de 0, F est différentiable en chaque point x, x différent de 0, de $\mathbb{T}^1$ et $DF(x) = id$. Montrons maintenant que F est différentiable en $(0, 0)$ et que $DF(0, 0) = id$. Prenons (x, z) proche de $(0, 0)$ avec $x > 0$ (remarquons que par construction il nous suffit de montrer la "différentiabilité par

la droite"). Comme l'homéomorphisme ψ_{4x^2} est l'identité en dehors du disque centré en 0 et de rayon $4x^2r_3$, on en déduit

$$\|\psi_{4x^2}(z) - z\| = \left\|4x^2\psi\left(\frac{z}{4x^2}\right) - z\right\| \leq 8x^2r_3.$$

Ainsi,

$$\frac{\|F(x,z) - (x,z)\|}{\|(x,z)\|} = \frac{\|(0, \psi_{4x^2}(z) - z)\|}{\|(x,z)\|} \leq \frac{8x^2r_3}{x}$$

qui tend vers 0 lorsque (x,z) tend vers $(0,0)$.

Montrons maintenant que F n'est pas éclatable. Fixons $u \in \mathbb{T}^1$, considérons deux cas :
Cas 1. Soit x proche de 0 et soit $r \in (0,+\infty)$ tel que $r \leq 2xr_1$. Alors

$$\Phi_0^{-1} \circ F(x, ru) = (x, u, r).$$

Cas 2. Soit x proche de 0 et soit $r \in (0,+\infty)$ tel que $r = 2xr_2$. Alors

$$\Phi_0^{-1} \circ F(x, ru) = (x, u + \alpha, r).$$

Donc, en faisant tendre (x,u,r) vers $(0,u)$, on trouve deux limites différentes en $(0,u)$. On conclut que F ne peut pas être éclatable. ■

2.5.3 Démonstration du théorème 1

Soit F un élément de $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ et $I = (H_t)_{t\in[0,1]}$ une homotopie entre P_2 et $P_2 \circ F$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, H_t est une application continue définie sur un voisinage $\mathcal{U}$ de N et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ telle que $H_t^{-1}(0) = N$.

Définition 2.58. *On dira que l'homotopie $I = (H_t)_{t\in[0,1]}$ est* éclatable *si pour tout $t \in [0,1]$ l'application H_t est éclatable et l'application $t \mapsto \overline{H_t}$ est continue.*

Ainsi, en supposant que l'homotopie I est éclatable, on obtient une homotopie $\bar{I} = (\overline{H_t})_{t\in[0,1]}$ entre l'application $\overline{H_0} : \mathbb{T}^1 \to \mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{T}^1\right)$ constante égale à l'identité de $\mathbb{T}^1$ et l'application $\overline{H_1} : \mathbb{T}^1 \to \mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{T}^1\right)$ définie par $\overline{H_1}(x)(u) = \overline{P_2 \circ F}(x,u)$. Autrement dit comme F est dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ son éclaté $\overline{F}$ est dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{T}^1\right)$. En considérant les applications $\overline{H_t} : \Phi_0^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}^2$, pour tout entier $n \geq 1$, on définit la variation moyenne $\overline{\rho}_n(x,u,r)$ d'un point (x,u,r) dans $\Phi_0^{-1}(\mathcal{U})$. Comme cette fonction est continue et coincïde avec $\rho_n(x,ru)$ si $r \neq 0$ et avec le nombre de rotation fibré de $\overline{F}$, $\rho_n^f(x,u)$ si $r = 0$, on obtient le résultat suivant. Par la suite, pour $\xi = (x,z) \in N \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, on notera $\widehat{\xi}$ la projection sur $N \times \mathbb{T}^1$ du point $\Phi_0^{-1}(\xi)$, c'est-à-dire $\widehat{\xi} = \left(x, \frac{z}{\|z\|}, 0\right) \in N \times \mathbb{T}^1$.

Lemme 2.59. *Soit $q \geq 1$ un nombre entier et $\epsilon > 0$ un nombre réel. Alors il existe $\mathcal{V}_{\epsilon,q}$ un voisinage de N tel que pour tout $\xi \in \mathcal{V}_{\epsilon,q}$, on a*

$$\left|\rho_q(\xi) - \rho_q^f(\widehat{\xi})\right| < \epsilon.$$

Démonstration. On notera d la distance produit sur $N \times \mathbb{T}^1 \times [0, +\infty)$ et $B_d(\cdot, \cdot)$ les boules associées. Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel. Comme l'application $\rho_q^f : N \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $N \times \mathbb{T}^1$, il existe un nombre réel $\delta > 0$, tel que pour tous $\overline{\xi}, \overline{\xi}' \in N \times \mathbb{T}^1$ avec $d(\overline{\xi}, \overline{\xi}') < \delta$, on a

$$\left|\rho_q^f(\overline{\xi}) - \rho_q^f(\overline{\xi}')\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'autre part, comme $N \times \mathbb{T}^1 \subset \Phi_0^{-1}(\mathcal{U})$ est compact, il existe un nombre fini d'éléments $\overline{\xi}_1, \cdots, \overline{\xi}_n$ de $N \times \mathbb{T}^1$ et des voisinages $\mathcal{V}_{\overline{\xi}_i}$ de $\overline{\xi}_i$ avec $\mathcal{V}_{\overline{\xi}_i} \subset B_d(\overline{\xi}_i, \delta)$, tels que pour tout $\xi \in \Phi_0(\mathcal{V}_{\overline{\xi}_i})$, on a

$$\left|\rho_q(\xi) - \rho_q^f(\overline{\xi}_i)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En conséquence, si $\xi \in \mathcal{V}_{\epsilon,q} = \Phi_0(\bigcup_{i=0}^n \mathcal{V}_{\overline{\xi}_i})$ et si $\widehat{\xi}$ est la projection sur $N \times \mathbb{T}^1$ du point $\Phi_0^{-1}(\xi)$, alors

$$\left|\rho_q(\xi) - \rho_q^f(\widehat{\xi})\right| < \epsilon.$$

Ceci montre le lemme. ■

Etendons maintenant la relation donnée par le lemme 2.59 pour n'importe quel entier $n \geq 1$. Soit $n \geq 1$ un entier, grâce à la division euclidienne, on écrit $n = a_n q + r_n$ avec $a_n \in \mathbb{N}$ et $r_n \in \{0, \cdots, q-1\}$. Pour $\xi \in \mathcal{U} \setminus N$ tel que $F^{iq}(\xi) \in \mathcal{V}_{\epsilon,q}$ pour $i \in \{0, \cdots, a_n\}$, d'après le lemme 2.3 on a :

$$\rho_n(\xi) = \frac{qa_n}{n} \frac{1}{a_n} \sum_{i=0}^{a_n-1} \rho_q(F^{iq}(\xi)) + \frac{r_n}{n} \rho_{r_n}(F^{a_n q}(\xi)),$$

et alors,

$$\begin{aligned}
&\left|\rho_n(\xi) - \frac{qa_n}{n} \frac{1}{a_n} \sum_{i=0}^{a_n-1} \rho_q^f(\widehat{F^{iq}(\xi)})\right| \leq \\
&\leq \left|\frac{q}{n} \sum_{i=0}^{a_n-1} \rho_q(F^{iq}(\xi)) - \frac{q}{n} \sum_{i=0}^{a_n-1} \rho_q^f(\widehat{F^{iq}(\xi)})\right| + \frac{r_n}{n} \left|\rho_{r_n}(F^{a_n q}(\xi))\right|.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant

$$M_q = \sup_{1 \leq i < q} \max\left\{\left|\rho_i(\xi)\right|, \left|\rho_i^f(\overline{\xi})\right| : \xi \in \mathrm{Adhe}(\mathcal{V}_{\epsilon,q}),\, \overline{\xi} \in N \times \mathbb{T}^1\right\},$$

on obtient

$$\left|\rho_n(\xi) - \frac{qa_n}{n} \frac{1}{a_n} \sum_{i=0}^{a_n-1} \rho_q^f(\widehat{F^{iq}(\xi)})\right| \leq \frac{qa_n}{n}\epsilon + \frac{q}{n} M_q. \tag{2.10}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit le théorème suivant.

Théorème 2.60 (Théorème 1). *Soit F un élément de* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ *et $I = (H_t)_{t\in[0,1]}$ une homotopie entre P_2 et $P_2 \circ F$. Supposons que l'homotopie I est éclatable et soit $\overline{I}$ l'homotopie induite. Alors*

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) \subset \rho_{\mathrm{fib}}(\overline{I}).$$

Démonstration. Soit $\rho \in \rho_{\mathrm{loc}}(I)$. Fixons un entier $q \geq 1$, et montrons que ρ appartient à D_q où

$$D_q = \{\rho_q^f(\overline{\xi}) : \overline{\xi} \in N \times \mathbb{T}^1\}.$$

Etant donné un nombre réel $\epsilon > 0$, considérons le voisinage $\mathcal{V}_{\epsilon,q}$ donné par le lemme 2.59. Comme $\rho \in \rho_{\mathcal{V}_{\epsilon,q}}(I)$, il existe $\mathcal{W}$ voisinage de N inclus dans $\mathcal{V}_{\epsilon,q}$ et ρ_ϵ dans $\rho_{\mathcal{V}_{\epsilon,q},\mathcal{W}}(I)$ tel que $|\rho_\epsilon - \rho| < \epsilon$. Ainsi, il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini et de points ξ_k dans $E(\mathcal{V}_{\epsilon,q}, \mathcal{W}, n_k)$ tels que

$$\rho_{n_k}(\xi_k) \to \rho_\epsilon \quad \text{quand } k \to +\infty.$$

Écrivons $n_k = a_k q + r_k$ avec $a_k \in \mathbb{N}$ et $r_k \in \{0, \cdots, q-1\}$. En utilisant la relation (2.10), on obtient

$$\left|\rho_{n_k}(\xi_k) - \frac{qa_k}{n_k}\frac{1}{a_{n_k}}\sum_{i=0}^{a_k-1}\rho_q^f(\widehat{F^{iq}(\xi_k)})\right| \leq \frac{qa_k}{n_k}\epsilon + \frac{q}{n_k}M_q.$$

Remarquons que la suite $(\frac{qa_k}{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1, quand k tend vers $+\infty$ et que pour tout entier k,

$$\frac{1}{a_k}\sum_{i=0}^{a_k-1}\rho_q^f(\widehat{F^{iq}(\xi_k)}) \in D_q.$$

Ainsi, en faisant tendre k vers l'infini, on trouve un nombre réel ρ_ϵ^f dans D_q tel que $\left|\rho_\epsilon - \rho_\epsilon^f\right| < \epsilon$. En faisant donc tendre ϵ vers 0, on conclut que ρ appartient à D_q. On vient de montrer que pour tout entier $q \geq 1$, on a $\rho_{\mathrm{loc}}(I) \subset D_q$. Comme

$$\rho_{\mathrm{fib}}(\overline{I}) = \bigcap_{m\geq 1}\mathrm{Adhe}\left(\bigcup_{n\geq m} D_n\right),$$

on déduit le théorème.

■

2.5.4 Conséquences du théorème 1 : théorème 1∗

Voici des conséquences du théorème 1.

a) Lorsque N est un singleton

Lorsque N est un singleton, $\bar{F}$ est un homéomorphisme préservant l'orientation du cercle et donc $\rho^f(\bar{I})$ est un singleton (le nombre de rotation défini par H. Poincaré (voir [Poi85]). Dans ce cadre, à l'aide du théorème 2.60, on retrouve le théorème de V. A. Naĭshul′ (voir [Naĭ82]). Pour une généralisation dûe à J.M. Gambaudo, P. Le Calvez et E. Pécou de ce théorème voir [GLP96] et aussi [LeR13].

Théorème 2.61. *Soit h un élément éclatable de* $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ *et I une homotopie de l'identité à h. Supposons que l'homotopie I est éclatable et soit $\overline{I}$ l'homotopie induite. Si $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ est non-vide, alors*

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) = \rho_{\mathrm{fib}}(\overline{I}).$$

b) Lorsque $F|_N$ est uniquement ergodique

Supposons à présent que F est un homéomorphisme dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ tel que $F|_N$ est uniquement ergodique. Soit I une homotopie entre P_2 et $P_2 \circ F$. Supposons que l'homotopie I est éclatable et soit $\overline{I}$ l'homotopie induite. D'après le corollaire 2.49, $\rho_{\mathrm{fib}}(\overline{I})$ est un singleton, et si $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ est non-vide, d'après le théorème 2.60 $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ est aussi un singleton. On rappelle que si F est conservatif, alors l'ensemble de rotation local, $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$, est non-vide. On retrouve ainsi le résultat de J.-M. Gambaudo et E. Pécou (voir [GP95]).

Théorème 2.62 (Théorème 1∗)**.** *Soit F un élément de* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ *et I une homotopie entre P_2 et $P_2 \circ F$. Supposons que l'homotopie I est éclatable et soit $\overline{I}$ l'homotopie induite. Si $F|_N$ est uniquement ergodique et $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ est non-vide, alors*

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) = \rho_{\mathrm{fib}}(\bar{I}).$$

En particulier le nombre $\rho_{\mathrm{fib}}(\bar{I})$ est invariant par conjugaison topologique orientée.

c) L'ensemble de rotation local au-dessus d'une mesure

Supposons que F est un homéomorphisme dans $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ qui est fibré sur un voisinage $\mathcal{U}$ de N, c'est-à-dire que F s'écrit sous la forme $F(x,z) = (f(x), h_x(z))$ sur $\mathcal{U}$. Soit μ une mesure de probabilité sur N qui est invariante par $F|_N$. On rappelle que si F est fibre-conservatif au-dessus de μ, alors l'ensemble de rotation local au-dessus de μ, $\rho_{\mathrm{loc}}(I,\mu)$, qui désigne l'ensemble de rotation local des points pertinents (x,z) tels que la suite dont le terme général est la mesure supportée sur l'orbite des itérés de x converge vers μ est non-vide (proposition 2.24). On a le résultat suivant. Rappelons que $\mathrm{rot}_{\mathrm{mes}}(\mu)$ désigne le nombre de rotation moyen dans $N \times \mathbb{T}^1$.

Théorème 2.63. *Soit F un homéomorphisme dans* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ *qui est fibré et soit I une homotopie entre P_2 et $P_2 \circ F$. Supposons que l'homotopie I est éclatable. Soit μ une mesure dans $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$. Supposons que $\rho_{\mathrm{loc}}(I,\mu)$ est non-vide. Alors*

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I,\mu) = \{\mathrm{rot}_{\mathrm{mes}}(\mu)\}.$$

Soit $\overline{F} : N \times \mathbb{T}^1 \to N \times \mathbb{T}^1$ l'homéomorphisme induit par F. Dans ce cadre, comme pour tout ξ dans un voisinage de N, $\widehat{\xi}$ désigne la projection sur $N \times \mathbb{T}^1$ du point $\Phi_0^{-1}(\xi)$, on a $P_N(\widehat{F(\xi)}) = P_N(\overline{F}(\widehat{\xi}))$, à l'aide de la proposition 2.34, on peut améliorer l'inégalité (2.10). En effet, fixons un nombre entier $q \geq 1$ et

un nombre réel $\epsilon > 0$. Posons $\mathcal{V}_{\epsilon,q}$ le voisinage donné par le lemme 2.59. Pour tout $\xi \in \mathcal{V}_{\epsilon,q}$ tel que $F^{iq}(\xi) \in \mathcal{V}_{\epsilon,q}$ pour $i \in \mathbb{N}$, d'après la proposition 2.34 on a

$$\left|\rho_q^f(\widehat{F^{iq}(\xi)}) - \rho_q^f(\overline{F}^{iq}(\widehat{\xi}))\right| \leq \frac{1}{q}. \tag{2.11}$$

D'après les relations (2.10) et (2.11), pour tout nombre entier $n \geq 1$ qui s'écrit sous la forme $n = a_n q + r_n$ avec $a_n \in \mathbb{N}$ et $r_n \in \{0, \cdots, q-1\}$, on en déduit

$$\left|\rho_n(\xi) - \rho_n^f(\widehat{\xi})\right| \leq q\frac{a_n}{n}\epsilon + \frac{a_n}{n} + \frac{2q}{n}M_q, \tag{2.12}$$

où $M_q = \sup_{1\leq i<q} \max\left\{|\rho_i(\xi)|, \left|\rho_i^f(\overline{\xi})\right| : \xi \in \mathrm{Adhe}(\mathcal{V}_{\epsilon,q}), \overline{\xi} \in N \times \mathbb{T}^1\right\}$.

Démonstration du théorème 2.63. Soit ρ appartenant à

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I,\mu) := \bigcap_{\epsilon>0}\bigcap_{V} \mathrm{Adhe}\left(\bigcup_{W\subset V} \rho_{V,W,\epsilon}(I,\mu)\right).$$

Soient $\epsilon > 0$ un nombre réel et $q \geq 1$ un nombre entier. Posons $\mathcal{V}_{\epsilon,q} = N \times V_{\epsilon,q}$ le voisinage donné par le lemme 2.59. Comme ρ appartient à

$$\mathrm{Adhe}(\cup_{W\subset V_{\epsilon,q}} \rho_{V_{\epsilon,q},W,\epsilon}(I,\mu)),$$

il existe W voisinage de 0 inclus dans $V_{\epsilon,q}$ et ρ' dans $\rho_{V_{\epsilon,q},W,\epsilon}(I,\mu)$ tel que ρ' est assez proche de ρ quand ϵ tend vers 0. Ainsi il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini lorsque k tend vers $+\infty$, et des points $\xi_k = (x_k, z_k) \in E(V_{\epsilon,q}, W, \epsilon)(\mu)$ tels que $d(\mu_{n_k,x_k}, \mu) < \epsilon_n$ et tels que la suite $(\rho_{n_k}(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers ρ' lorsque k tend vers $+\infty$.

En écrivant $n_k = a_k q + r_k$ avec $a_k \in \mathbb{N}$ et $r_k \in \{0, \cdots, q-1\}$, d'après la relation (2.12), on obtient

$$\left|\rho_{n_k}(\xi_k) - \rho_{n_k}^f(\widehat{\xi_k})\right| \leq q\frac{a_k}{n_k}\epsilon + \frac{a_k}{n_k} + \frac{2q}{n_k}M_q.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, quitte à extraire uns sous-suite μ_{n_k,x_k} tend vers μ_ϵ, et ceci implique que $\rho_{n_k}^f(\widehat{\xi_k})$ tend vers $\mathrm{rot}_{\mathrm{mes}}(\mu_\epsilon)$ donc

$$\left|\rho' - \mathrm{rot}_{\mathrm{mes}}(\mu_\epsilon)\right| \leq \frac{1}{q}.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, ρ' tend vers ρ et la mesure μ_ϵ tend vers μ et ceci implique que $\mathrm{rot}_{\mathrm{mes}}(\mu_\epsilon)$ tend vers $\mathrm{rot}_{\mathrm{mes}}(\mu)$. En faisant donc tendre q vers l'infini, on conclut que $\rho = \mathrm{rot}_{\mathrm{mes}}(\mu)$. Ce qu'on voulait montrer. ■

d) Homéomorphismes fibre-conservatifs

Supposons maintenant que F est de plus fibre-conservatif, c'est-à-dire que F est fibre-conservatif au-dessus de toute mesure de probailité invariante par $F|_N$. Dans ce cadre nous allons montrer que l'ensemble de rotation local autour de N est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.64. *Soit F un homéomorphisme fibré dans* $\mathrm{Homeo}_*\left(N \times \mathbb{R}^2; N\right)$ *qui est fibre-conservatif. Soit I une homotopie entre P_2 et $P_2 \circ F$. Supposons que l'homotopie I est éclatable et soit $\overline{I}$ l'homotopie induite. Alors*

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) = \rho_{\mathrm{mes}}(\overline{I}) = \rho_{\mathrm{fib}}(\overline{I}).$$

En particulier $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit μ une mesure dans $\mathcal{M}_{F|_N}(N)$. Comme F est fibre-conservatif au-dessus de μ, d'après la proposition 2.24 $\rho_{\mathrm{loc}}(I, \mu)$ est non-vide et on peut donc appliquer le théorème 2.63. Celui-ci nous dit donc que $\rho_{\mathrm{loc}}(I, \mu) = \mathrm{rot}_{\mathrm{mes}}(\mu)$. D'après le théorème 2.27, on en déduit

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{F|_N}(N)} \rho_{\mathrm{loc}}(I, \mu) = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{F|_N}(N)} \mathrm{rot}_{\mathrm{mes}}(\mu) = \rho_{\mathrm{mes}}(\overline{I}).$$

D'autre part, d'après le théorème 2.45 et la proposition 2.36, on sait respectivement que $\rho_{\mathrm{mes}}(\overline{I}) = \rho_{\mathrm{fib}}(\overline{I})$ et que $\rho_{\mathrm{fib}}(\overline{I})$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Ceci montre le théorème. ■

2.6 L'invariant de Ruelle du tore ou du disque vu comme ensemble de rotation local

Soit S une surface compacte dont le fibré tangent est trivial. Dans cette section, on considère des difféomorphismes f isotopes à l'identité de S qui préservent une mesure de probabilité μ. Dans l'article [Rue85] D. Ruelle leur a associé un nombre réel, qui a été appelé *invariant de Ruelle* par rapport à μ, qui mesure la "vitesse asymptotique de rotation" de la différentielle de f par rapport à μ. On va s'intéresser au problème suivant : existe-t-il un difféomorphisme local fibré dans $\mathrm{Homeo}_0\left(S \times \mathbb{R}^2; S\right)$ tel que son ensemble de rotation local autour de S au-dessus de la mesure μ coïncide avec l'invariant de Ruelle de f par rapport à μ ?

2.6.1 Le groupe des difféomorphismes

On considère une surface compacte sans bord S et r dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On notera $\mathrm{Diff}^r(S)$ le groupe des difféomorphismes de S dans lui-même de classe C^r. On notera aussi, $\mathrm{Diff}^r_0(S)$ le sous-groupe du groupe $\mathrm{Diff}^r(S)$ de ceux qui sont isotopes à l'identité de S parmi les difféomorphismes dans $\mathrm{Diff}^r(S)$. Soit f un difféomorphisme dans $\mathrm{Diff}^r_0(S)$. On considère une isotopie $(f_t)_{t \in [0,1]}$ de l'identité à $f_1 = f$ à travers $\mathrm{Diff}^r(S)$. On peut étendre cette isotopie à tous les itérés de f en posant, pour tout nombre réel t, $f_t = f_{t-[t]} \circ f^{[t]}$, où $[t]$ désigne la partie entière de $t \in \mathbb{R}$.

2.6.2 Le carré d'un difféomorphisme

On considère une surface compacte sans bord S. Un difféomorphisme $f : S \to S$ induit naturellement un difféomorphisme de $S \times S$ dans lui-même,

appelé le carré de f, défini par : $(x,y) \mapsto (f(x), f(y))$. On définit la diagonale de $S \times S$ par :

$$\mathrm{diag}(S \times S) := \{(x,x) : x \in S\} \subset S \times S.$$

On remarque que la diagonale de $S \times S$ est une sous-variété compacte de $S \times S$ de codimention 2, difféomorphe à S.

De plus, dans le cas du tore $\mathbb{T}^2$ qui est identifié à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, la diagonale de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ a un fibré normal trivial. Une trivialisation naturelle du voisinage tubulaire est :

$$\psi : (x,y) \mapsto (x, \tilde{y} - \tilde{x}) \ ;$$

où $\tilde{x}$ est un relevé de x et $\tilde{y}$ est le relevé de y, le plus proche de $\tilde{x}$, ceci a un sens car la paire (x,y) est proche de la diagonale.

Ainsi, en utilisant la trivialisation du voisinage tubulaire de la diagonale de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$, le carré de $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, induit un difféomorphisme local F dans $\mathrm{Homeo}\left(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{T}^2\right)$ défini par :

$$F : (x,z) \mapsto (f(x), \tilde{f}(\tilde{x} + z) - \tilde{f}(\tilde{x})),$$

où $\tilde{x}$ est un relevé de x et $\tilde{f}$ est un relevé de f. De plus, ce difféomorphisme est fibré et ne dépend pas du choix des relevés $\widetilde{f}$ et $\widetilde{x}$.

2.6.3 Définition de l'invariant de Ruelle du tore $\mathbb{T}^2$

Soit f un difféomorphisme dans $\mathrm{Diff}_0^1\left(\mathbb{T}^2\right)$ préservant une mesure de probabilité μ. Par la suite, on considère la trivialisation du fibré tangent naturel du tore, c'est-à-dire ce induit par la structure affine du tore. En utilisant cette trivialisation du fibré tangent du tore $\mathbb{T}^2$, la différentielle, Df, de f induit une application fibrée de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1$. De plus, si $(f_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie entre l'identité et $f_1 = f$ parmi $\mathrm{Diff}^1\left(\mathbb{T}^2\right)$, alors $(Df_t)_{t\in[0,1]}$ est une isotopie entre l'identité et Df. Soient $x \in \mathbb{T}^2$, u un vectuer, et considérons le chemin $v(f,x,u) : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ défini par :

$$v(f,x,u)(t) := \frac{Df_t(x)(u)}{\|Df_t(x)(u)\|}.$$

Choisissons un relevé $\tilde{v}(f,x,u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du chemin $v(f,x,u)$. Pour chaque entier $n \geq 1$, définissons

$$\Delta_n(f,x,u) := \frac{1}{n}\left(\tilde{v}(f,x,u)(n) - \tilde{v}(f,x,u)(0)\right).$$

Remarque 2.10. Cette quantité ne dépend pas du choix du relevé.

Remarquons la proposition suivante (voir proposition 2.34).

Proposition 2.65. *Soient u et u' dans $\mathbb{T}^1$. Alors pour tout x dans $\mathbb{T}^2$ et tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\left|\Delta_n(f,x,u) - \Delta_n(f,x,u')\right| \leq \frac{1}{n}.$$

On définit l'invariant de Ruelle de f par rapport à la mesure μ, par

$$\mathcal{R}_\mu(f) = \int_{\mathbb{T}^2\times\mathbb{T}^1} \Delta_1(f,x,u)\, d\nu,$$

où ν est un relevé de μ (voir définition 2.39).

Remarque 2.11. On montre que $\mathcal{R}_\mu(f)$ ne dépend pas du relevé ν (voir lemme 2.42) ni du choix de u.

2.6.4 L'invariant de Ruelle du tore vu comme ensemble de rotation local

Maintenant soit f dans $\mathrm{Diff}^1_0\left(\mathbb{T}^2\right)$ et soit $(f_t)_{t\in[0,1]}$ une isotopie entre l'identité et $f_1 = f$ parmi $\mathrm{Diff}^1\left(\mathbb{T}^2\right)$. Choisissons $(\widetilde{f}_t)_{t\in[0,1]}$ un relevé de l'isotopie $(f_t)_{t\in[0,1]}$ tel que $\widetilde{f}_0$ est l'identité et posons $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}$. Ainsi les carrés de f_t, $t\in[0,1]$, c'est-à-dire les applications définies par :

$$F_t(x,z) = (f_t(x), \widetilde{f}_t(\tilde{x}+z) - \widetilde{f}_t(\tilde{x}))$$

induisent une isotopie, $I = (F_t)_{t\in[0,1]}$ entre l'identité et le carré de f parmi les difféomorphismes locaux dans $\mathrm{Homeo}\left(\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}^2;\mathbb{T}^2\right)$. D'après les corollaires 2.54 et 2.55 l'isotopie I est éclatable et on notera $\overline{I} = (\overline{F_t})_{t\in[0,1]}$ l'isotopie induite où , $\bar{F}_t$ est le difféomorphisme de $\mathbb{T}^2\times\mathbb{T}^1$ défini par

$$\overline{F_t}(x,u) = \left(f_t(x), \frac{D\widetilde{f}_t(\tilde{x})(u)}{\left\|D\widetilde{f}_t(\tilde{x})(u)\right\|}\right).$$

Donc, pour tout x dans $\mathbb{T}^2$ et u dans $\mathbb{T}^1$, on a

$$\Delta_1(f,x,u) = \rho_1^f(x,u).$$

On en déduit le lemme suivant qui identifie l'invariant de Ruelle avec le nombre de rotation fibré de la mesure μ.

Proposition 2.66. *Si f est un élément de $\mathrm{Diff}^1_0\left(\mathbb{T}^2\right)$, alors son carré F induit un élément de $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}^2;\mathbb{T}^2\right)$ qui possède une isotopie éclatable. De plus, pour toute mesure de probabilité μ invariante par f, on a*

$$\mathcal{R}_\mu(f) = \mathrm{rot}_{\mathrm{mes}}(\mu).$$

Supposons maintenant que f dans $\mathrm{Diff}^1_0\left(\mathbb{T}^2\right)$ préserve une mesure de probabilité sans atome μ sur $\mathbb{T}^2$. Le lemme suivant nous permettra de bien définir l'ensemble de rotation autour de $\mathbb{T}^2$ au-dessus de la mesure de μ du carré de f.

Lemme 2.67. *Soit f dans $\mathrm{Diff}^1_0\left(\mathbb{T}^2\right)$ préservant une mesure de probabilité sans atome μ sur $\mathbb{T}^2$. Alors le carré de f est fibre-conservatif au-dessus de la mesure μ.*

Démonstration. Posons $X = \mathrm{supp}(\mu)$. Ainsi, pour tout x dans X, et U voisinage de x, on a $\mu(U) > 0$. Soit $x \in X$ et B un borélien dans $\mathbb{R}^2$ proche de 0, posons

$$\mu_x(B) := \mu(\pi(B) + x),$$

où $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ est l'application quotient. Pour conclure, il nous suffit de vérifier que la famille de mesures $\{\mu_x : x \in X\}$ satisfait à toutes les propriétés de la définition 2.23.

1. La famille est F-invariante. Soit $x \in X$ et soit B un borélien dans $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} F_*(\mu_x)(B) &= \mu_x(\tilde{f}^{-1}(B + \tilde{f}(\tilde{x})) - \tilde{x}) \ ; \\ &= \mu(f^{-1}(\pi(B) + f(x))) \ ; \\ &= \mu(\pi(B) + f(x)) \ ; \\ &= \mu_{f(x)}(B). \end{aligned}$$

2. Puisque la mesure μ n'a pas d'atomes, on obtient que $\mu_x((x, 0)) = 0$.
3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge vers x. Pour B borélien de $\mathbb{R}^2$ et $\epsilon > 0$ on notera $V_\epsilon(\pi(B))$ le ϵ-voisinage de $\pi(B)$, c'est-à-dire l'ensemble des points qui sont à distance inférieure à ϵ d'un élément de $\pi(B)$. Notons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, l'ensemble $\pi(B) + x_n$ est contenu dans $V_\epsilon(\pi(B) + x)$. Utilisant la régularité de la mesure borélienne μ, on a

$$\mu(\pi(B) + x_n) \leq V_\epsilon(\mu(\pi(B) + x)) \leq \mu(\pi(B) + x) + \epsilon.$$

En appliquant cette inégalité au complémentaire de $\pi(B)$, on obtient

$$1-\mu(\pi(B)+x_n) = \mu(\pi(B)^c+x_n)) \leq \mu(\pi(B)^c+x)+\epsilon = 1-\mu(\pi(B)+x)+\epsilon.$$

Ainsi pour tout n assez grand, on a

$$|\mu(\pi(B) + x_n) - \mu(\pi(B) + x)| < \epsilon.$$

On conclut donc que pour tout borélien B dans $\mathbb{R}^2$ la suite $(\mu_{x_n}(B))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\mu_x(B)$. Ceci implique la continuité de la fonction $x \mapsto \mu_x$.

Ceci montre le lemme. ■

D'après la proposition 2.66 qui dit que l'invariant de Ruelle par rapport une mesure coïncide avec l'ensemble de rotation fibré de cette mesure et le théorème 2.63 et la proposition 2.24 qui disent que dans le cas fibre-conservatif et éclatable l'ensemble de rotation local au-dessus d'une mesure coincide avec le nombre de rotation de cette mesure, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.68. *Soit f dans $\mathrm{Diff}^1_0(\mathbb{T}^2)$ préservant une mesure de probabilité sans atome μ sur $\mathbb{T}^2$. Alors*

$$\{\mathcal{R}_\mu(f)\} = \rho_{\mathrm{loc}}(I, \mu).$$

Utilisant l'invariance par conjugaison topologique fibrée de l'ensemble de rotation local au-dessus d'une mesure (2.21), on en déduit le résultat de J.-M. Gambaudo et E. Ghys (voir [GG97]). Celui-ci nous dit que l'invariant de Ruelle est un invariant de conjugaison topologique.

Proposition 2.69 (J.-M. Gambaudo et E. Ghys, [GG97])**.** *Soient f et f' deux éléments de* $\mathrm{Diff}_0^1\left(\mathbb{T}^2\right)$ *qui préservent respectivement les mesures de probabilité sans atome μ et μ' sur $\mathbb{T}^2$. Soit ϕ un homéomorphisme dans* $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ *tel que $f' = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ et $\phi_*(\mu) = \mu'$. Alors*

$$\mathcal{R}_\mu(f) = \mathcal{R}_{\mu'}(f').$$

Démonstration. Soient F, F' et Φ les carrés respectivement de f, f' et ϕ. L'égalité $f' = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$, implique que $F' = \Phi \circ F \circ \Phi^{-1}$. D'après la proposition 2.68 on a $\{\mathcal{R}_\mu(f)\} = \rho_{\mathrm{loc}}(I, \mu)$ et aussi $\{\mathcal{R}_{\mu'}(f')\} = \rho_{\mathrm{loc}}(I', \mu')$ et d'après la proposition 2.21 on a $\rho_{\mathrm{loc}}(I', \mu') = \rho_{\mathrm{loc}}(I, \mu)$. On obtient donc

$$\{\mathcal{R}_\mu(f)\} = \rho_{\mathrm{loc}}(I, \mu) = \rho_{\mathrm{loc}}(I', \mu') = \{\mathcal{R}_{\mu'}(f')\}.$$

Ceci montre la proposition.

■

Chapter 3

The Local Rotation Set Is an Interval

In this chapter we will show Theorems A, B and D assuming Theorem C, which will be show at the end of the chapter. We recall Theorem A (Theorem B is the analogous to Theorem B in the case of the open annulus).

Theorem A. *Let I be an isotopy in* $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ *starting from the identity. Then the local rotation set of I, $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$, is an interval. More precisely: every rational number $\frac{p}{q}$ belonging to the interior of the convex hull of $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ is included in the rotation set of a compact invariant set K arbitrarily close to* 0.

3.1 Preliminary results

In this section, we will recall some definitions and results that we will use in the rest of the chapter, in particular the generalization of Brouwer's Translation Theorem due to P. Le Calvez.

3.1.1 Foliations

Let M be an oriented surface. By an oriented foliation with singularities $\mathcal{F}$ on M we mean a closed set $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, called the set of singularities of $\mathcal{F}$, together with an oriented topological foliation $\mathcal{F}'$ on $M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, i.e. $\mathcal{F}'$ is a partition of $M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ into connected oriented 1-manifold (circles or lines) called *leaf of* $\mathcal{F}$, such that for every z in $M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ there exists a neighborhood U of z, called *trivializing neighborhood* and an oriented preserving homeomorphism ψ, called *trivialization chart at* z mapping U to an open set U' of $\mathbb{R}^2$ such that ψ maps the foliation induced by $\mathcal{F}$ in U to the oriented foliation by vertical lines oriented upwards. By a theorem of Whitney (see [Whi33] and [Whi41]), all foliations with singularities $\mathcal{F}$ can be embedded in a flow, i.e. $\mathcal{F}$ is the set of (oriented) orbits of some *topological flow* $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ (where the set of singularities of $\mathcal{F}$ coincides with the set of fixed points of ϕ). Therefore, we can define the α-limit and ω-limit sets of each leaf of $\mathcal{F}$ as follows: If l is a leaf

of $\mathcal{F}$ and z is a point of l, then

$$\omega(l) := \bigcap_{t\in[0,+\infty)} \mathrm{Cl}\{\phi(z,t') : t' \geq t\} \quad \text{and} \quad \alpha(l) := \bigcap_{t\in(-\infty,0]} \mathrm{Cl}\{\phi(z,t') : t' \leq t\}.$$

Let $\mathcal{F}$ be an oriented foliation with singularities on M. We say that an arc γ in $M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ is *positively transverse* to $\mathcal{F}$ if for every $t_0 \in [0,1]$, and ψ trivialization chart at $\gamma(t_0)$ the application $t \mapsto p_1(\psi(\gamma(t)))$ is increasing in a neighborhood of t_0, where p_1 denotes the projection onto the first coordinate.

3.1.2 Isotopies

An isotopy $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ on M is a family $(f_t)_{t\in[0,1]}$ of homeomorphisms of M such that the map $(z,t) \mapsto f_t(z)$ is continuous on $M \times [0,1]$. This implies that the map $(z,t) \mapsto f_t^{-1}(z)$ is continuons, and then we can define the inverse isotopy $I^{-1} = (f_t^{-1})_{t\in[0,1]}$. Two isotopies $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ and $I' = (f'_t)_{t\in[0,1]}$ are said to be homotopic if there exists a family $(f_{t,s})_{(t,s)\in[0,1]^2}$ of homeomorphisms of M satisfying

- $f_{t,0} = f_t$ for every $t \in [0,1]$;
- $f_{t,1} = f'_t$ for every $t \in [0,1]$; and
- the map $(z,t,s) \mapsto f_{t,s}(z)$ is continuous on $M \times [0,1]^2$.

Let $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ and $I' = (f'_t)_{t\in[0,1]}$ be two isotopies on M. Then $I * I' = (g_t)_{t\in[0,1]}$ denotes the isotopy defined as

$$g_t = \begin{cases} f_{2t}, & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f'_{2t-1} \circ f_1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

In particular if q is an integer, we define I^q as the isotopy $I * \cdots * I$ (q times) if $q \geq 1$ and as $I^{-1} * \cdots * I^{-1}$ ($-q$ times) if $q \leq -1$. Let M be an oriented surface, and let $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ be an isotopy from $f_0 = Id_M$ to a homeomorphism $f_1 = f$. Let $\pi : \widetilde{M} \to M$ be the universal covering of M, and let $\widetilde{I} = (\widetilde{f}_t)_{t\in[0,1]}$ be the lift of the isotopy I such that $\widetilde{f}_0 = Id_{\widetilde{M}}$. The homeomorphism $\widetilde{f} = \widetilde{f}_1$ is called the lift of f associated to I. Let $z \in M$, we call *trajectory of z along I* the arc $t \mapsto f_t(z)$. A fixed point of $f = f_1$ is said to be contractible for I if its trajectory under I is a loop homotopic to a constant loop in M. This definition depends only on the lift $\widetilde{f}$ associated to I. In fact, it is easy to see that the set of contractible fixed points of I coincides with the image of the set of fixed points of $\widetilde{f}$ under π.

3.1.3 The existence of a transverse foliation

Let $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ be an isotopy from the identity to a homeomorphism $f_1 = f$. We say that an oriented topological foliation $\mathcal{F}$ on M is *transverse to I*, if for every $z \in M$, there exists an arc which is homotopic to the trajectory of z along I and is positively transverse to $\mathcal{F}$. We know that "$\mathcal{F}$ is transverse to I" persists on small perturbations of $\mathcal{F}$ (see Lemma 3.1.3 from [LeR13]). More precisely, let $\mathcal{F}$ be an oriented topological foliation on M. Let $\psi : [0,1]^2 \to M$ be a "compact chart", that is an injective map, which maps each vertical line

oriented upwards in $[0,1]^2$ to a leaf of $\mathcal{F}$. For every real number $\epsilon > 0$, we write $\mathcal{O}(\psi, \epsilon)$ the set of foliations $\mathcal{F}'$ which admit a compact chart ψ' satisfying

$$\sup_{t \in [0,1]^2} d_M(\psi(t), \psi'(t)) < \epsilon,$$

where d_M is a metric on M which induces the topology of M. A family of compact charts $(\psi_\alpha)_\alpha$ is said to be locally finite in M if every point $x \in M$ belongs only a finite number of $\psi_\alpha([0,1]^2)$ (more details can be found in [LeR13]).

Proposition 3.1.1 (F. Le Roux, Lemma 3.1.3 [LeR13]). *Let I be an isotopy on M. Let $\mathcal{F}$ be an oriented topological foliation on M transverse to I. Suppose that there exist a family $(\psi_\alpha)_\alpha$ of compact charts of $\mathcal{F}$ which is locally finite in M, and a positive real sequence $(\epsilon_\alpha)_\alpha$. Then every oriented foliation $\mathcal{F}'$ on M belonging to the Whitney' open set*

$$\mathcal{O}((\psi_\alpha), (\epsilon_\alpha)) = \bigcap_\alpha \mathcal{O}(\psi_\alpha, \epsilon_\alpha)$$

is positively transverse to I too.

The following theorem due to P. Le Calvez is a generalization of Brouwer's Translation Theorem.

Theorem 3.1.2 (P. Le Calvez, Theorem 1.3 [LeC05]). *Let I be an isotopy on M from the identity to a homeomorphism f. If I does not have any contractible fixed point, then there exists an oriented foliation $\mathcal{F}$ which is transverse to I.*

Remark 1. By a remark due to P. Le Calvez (see [LeC05]), the oriented foliation $\mathcal{F}$ is transverse to the isotopy I if and only if in the universal covering, each leaf $\widetilde{l}$ of the lift $\widetilde{\mathcal{F}}$ of the foliation $\mathcal{F}$ is an oriented *Brouwer's line* for $\widetilde{f}$ the lift of f associated to I. More precisely, by Schoenflïes' Theorem, there exists an orientation preserving homeomorphism h of $\mathbb{R}^2$ such that $h \circ \widetilde{l}(t) = (0, t)$, for every $t \in \mathbb{R}$. Then we write $R(\widetilde{l}) = h^{-1}((0, +\infty) \times \mathbb{R})$ and $L(\widetilde{l}) = h^{-1}((-\infty, 0) \times \mathbb{R})$. We say that $\widetilde{l}$ is an oriented Brouwer's line for $\widetilde{f}$ if $\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{l}) \subset L(\widetilde{l})$ and $\widetilde{f}(\widetilde{l}) \subset R(\widetilde{l})$.

Since the set of contractible fixed points is in usually non-empty, one needs some additional modifications before using the previous theorem. In the local case, we can use a result of F. Le Roux.

Theorem 3.1.3 (F. Le Roux, Appendix A [LeR13]). *Let I be an isotopy in* $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ *from the identity to a homeomorphism f. Suppose that I does not have any contractible fixed point on a neighborhood U of* 0. *Then there exists a homeomorphism $\bar{f}$ of the plan which coincides with f in a neighborhood $U' \subset U$ of* 0, *and which does not have any contractible fixed point in* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

3.1.4 Dynamics of the transverse foliation with two singularities

In this subsection, we consider the open annulus $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$. We denote by N (resp. S) the upper (resp. lower) end of $\mathbb{A}$ and by $\hat{\mathbb{A}}$ the end compactification of $\mathbb{A}$ which is a topological space homeomorphic to the two-dimensional

sphere. Suppose that the isotopy $I' = (f'_t)_{t\in[0,1]}$ from the identity to f has no contractible fixed points. Thus, we can apply Theorem 3.1.2, and we obtain an oriented topological foliation $\mathcal{F}'$ on $\mathbb{A}$ which is transverse to I'. Then one can extend I' to an isotopy $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ on $\hat{\mathbb{A}}$ that fixes the ends of $\mathbb{A}$, that is $f_t(N) = N$ and $f_t(S) = S$ for every $t \in [0,1]$. Similarly, the foliation $\mathcal{F}'$ can be extended to an oriented topological foliation with singularities $\mathcal{F}$ on $\hat{\mathbb{A}}$ where the singularities are the ends of $\mathbb{A}$. In this case P. Le Calvez proved that $\mathcal{F}$ is also locally transverse to I at each end of $\mathbb{A}$ (see [LeC08]), that is, for every neighborhood $\hat{U}$ of an end $\hat{z}_0$ of $\mathbb{A}$ there exists a neighborhood $\hat{V}$ contained in $\hat{U}$ such that for every $z \in \hat{V} \setminus \{\hat{z}_0\}$ there is an arc contained in $\hat{U}$ which is positively transverse to $\mathcal{F}$ and homotopic in $\hat{U}$ to the trajectory of z along I.

Proposition 3.1.4 (P. Le Calvez, Proposition 3.4 [LeC08]). *The oriented foliation $\mathcal{F}$ is locally transverse to I at each end of $\mathbb{A}$.*

On the other hand, we can apply the theorem of Poincaré-Bendixson to $\mathcal{F}$ seen as a flow (see [dMP82]).

Theorem 3.1.5 (Poincaré-Bendixson' Theorem). *Let $\mathcal{F}$ be an oriented foliation on $\hat{\mathbb{A}}$ whose singularities are the ends of $\mathbb{A}$. For every leaf l of $\mathcal{F}$ one of the following possibilities holds:*

(i) the ω-limit set of l is a closed leaf of $\mathcal{F}$,

(ii) the ω-limit set of l is reduced to an end of $\mathbb{A}$, or

(iii) the ω-limit set of l is constituted of ends of $\mathbb{A}$ and leaves l' joining two ends (eventually the same) of $\mathbb{A}$.

One has the same possibilities for the α-limit set of l. Moreover for every non-closed leaf either

(iv) the sets $\omega(l)$ and $\alpha(l)$ are reduced to the same end of $\mathbb{A}$, or

(v) the sets $\omega(l)$ and $\alpha(l)$ are disjoints.

We recall the following fact (see for example section 3.2 of [Hae62]).

(1) The union of the closed leaves of $\mathcal{F}$ is closed.

By Poincaré-Bendixson Theorem and the transversality of $\mathcal{F}$ and I, we have the following properties:

(2) every closed leaf γ separates N and S, i.e. N and S belong to distinct connected components of $\hat{\mathbb{A}} \setminus \gamma$, and

(3) every closed leaf γ is f-free, i.e. $f(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$.

Moreover we have the following result due to F. Le Roux (see [LeR00] and [LeR04]),

(4) either the foliation $\mathcal{F}$ has recurrence, that is there is a leaf l of $\mathcal{F}$ such that $\alpha(l) \cup \omega(l)$ is not contained in $\{N, S\}$, or there is a leaf l of $\mathcal{F}$ which joins N and S, i.e. either $\alpha(l) = N$ and $\omega(l) = S$ or $\alpha(l) = S$ and $\omega(l) = N$.

We deduce the following properties in a neighborhood of an end $\hat{z}_0$ of $\mathbb{A}$. We say that $\hat{z}_0$ is accumulated by closed leaves of $\mathcal{F}$, if every neighborhood of $\hat{z}_0$ contains a closed leaf of $\mathcal{F}$.

Non-accumulated case: Suppose that $\hat{z}_0$ is not accumulated by closed leaves of $\mathcal{F}$. Then there exists a leaf l of $\mathcal{F}$ such that either $\alpha(l) = \hat{z}_0$ or $\omega(l) = \hat{z}_0$.

Proof. Firstly, suppose that $\mathcal{F}$ has closed leaves. Let $z \in \mathbb{A}$ closed enough to $\hat{z}_0$ and let l_z be the leaf of $\mathcal{F}$ containing z. Items (iv) and (v) from Theorem 3.1.5, imply that $\alpha(l_z)$ or $\omega(l_z)$ contains $\hat{z}_0$. Thus l_z or the leaf l given by item (iii) from Theorem 3.1.5 has its ω-limit set or α-limit set reduced to $\hat{z}_0$.
Next, suppose that $\mathcal{F}$ has recurrence, but not closed leaves. Let l be a leaf of $\mathcal{F}$ such that $\alpha(l) \cup \omega(l)$ is not contained in $\{N, S\}$. Hence by Theorem 3.1.5 either $\alpha(l)$ or $\omega(l)$ contains $\hat{z}_0$. One concludes, as in the first part.
Finally, if $\mathcal{F}$ does not have recurrence, then by Property (4) there exists a leaf of $\mathcal{F}$ whose α-limit set or ω-limit set is reduced to $\hat{z}_0$. This completes the proof. ■

Accumulated case: Suppose that the end $\hat{z}_0$ is accumulated by closed leaves of $\mathcal{F}$. Using a chart centered at $\hat{z}_0$ we can suppose that $\mathcal{F}$ is a foliation on a neighborhood of $0 \in \mathbb{R}^2$. Let us fix a closed leaf γ of $\mathcal{F}$ and put $\hat{U}$ the closure of the connected component of complement of γ containing 0. Let $\mathcal{C}$ be the union of all closed leaves of $\mathcal{F}$ contained in $\hat{U}$. This is a closed set of $\hat{U} \setminus \{0\}$. The closed leaves are totally ordered by the relation of inclusion of the connected component of their complements containing 0. By Schoenflies' Theorem, we can construct a homeomorphism of the plane, which maps each closed leaf of $\mathcal{F}$ to a Euclidean circle centered at 0. Let A be a connected component of the complement (in $\hat{U}$) of $\mathcal{C} \cup \{0\}$. The set A is delimited by two closed leaves $\partial^+ A$ and $\partial^- A$, and for every leaf l of $\mathcal{F}$ included in A we have either $\alpha(l) = \partial^+ A$ and $\omega(l) = \partial^- A$ or $\alpha(l) = \partial^- A$ and $\omega(l) = \partial^+ A$. Moreover all these leaves have the same α-limit and ω-limit sets. Hence, the foliation on the closure of A is homeomorphic to a Reeb component or a spiral on $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$.

3.2 Local Case

In this section we will introduce the definition of the local rotation set and we will show Theorem A assuming Theorem C.

3.2.1 Definitions

The centered plane

We denote by $\mathbb{R}^2$ the plane endowed with its usual topology and orientation. We denote by 0 the point $(0, 0)$ of the plane $\mathbb{R}^2$. Let γ be a non-contractible Jordan curve in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. We call interior of γ (resp. exterior of γ) the connected component of $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ which contains (resp. does not contain) 0.

The set $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$

We say that a homeomorphism f of the plane *fixes* 0, if $f(0) = 0$. We denote by $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ the set of all homeomorphisms of the plane isotopic to the identity and which fix 0. We recall that the fundamental group of $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ is isomorphic to $\mathbb{Z}$ (see [Ham74]). More precisely, consider

$J = (R_t)_{t\in[0,1]}$ the isotopy defined by:

$$R_t(x,y) := (x\cos(2\pi t) + y\sin(2\pi t), -x\sin(2\pi t) + y\cos(2\pi t)).$$

If $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ and $I' = (f'_t)_{t\in[0,1]}$ are two isotopies in $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ both from the identity to the same homeomorphism $f_1 = f'_1$, then there exists a unique integer $q \in \mathbb{Z}$ such that I' is homotopic (with fixed endpoints) to $J^q * I$.

The local rotation set

In this paragraph, we consider a homeomorphism f in $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$. Let $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ be an isotopy in $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ from the identity to f. We will give the definition of the *local rotation set of I* due to F. Le Roux (see [LeR13]). Let $\pi : \mathbb{R}\times(0,+\infty) \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ be the universal covering of $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ and let $\widetilde{I} = (\widetilde{f}_t)_{t\in[0,1]}$ be the lift of the isotopy I to the universal covering of $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ such that $\widetilde{f}_0 = Id$, one defines $\widetilde{f} := \widetilde{f}_1$. Given $z \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, and an integer $n \geq 1$ we consider $\rho_n(z)$ the *average change of angular coordinate along the trajectory of z for the isotopy I*, i.e.

$$\rho_n(z) := \frac{1}{n}(p_1(\widetilde{f}^n(\widetilde{z})) - p_1(\widetilde{z})),$$

where $p_1 : \mathbb{R}\times(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ is the projection on the first coordinate and $\widetilde{z}$ is a point in $\pi^{-1}(z)$. Given two neighborhoods V and W of 0 with $W \subset V$, we define the *local rotation set of I relative to V and W* by

$$\rho_{V,W}(I) := \bigcap_{m\geq 1} \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{n\geq m}\{\rho_n(z) : z \notin W,\ f^n(z) \notin W,\ \text{and } z,\cdots,f^n(z) \in V\}\right),$$

where the closure is taken in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$. Next we define the *local rotation set of I relative to V* by

$$\rho_V(I) := \mathrm{Cl}\left(\bigcup_W \rho_{V,W}(I)\right)$$

where W is a neighborhood of 0 included in V. Finally we define the local rotation set of the isotopy I by

$$\rho_{\mathrm{loc}}(I) := \bigcap_V \rho_V(I).$$

where V is a neighborhood of 0

Remark 2. If we try to generalize the notion of rotation set of the closed annulus to the local case, we will define

$$\bigcap_V \bigcap_{m\geq 1} \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{n\geq m}\{\rho_n(z) : f^i(z) \in V \text{ for all } i \in \{0,\cdots,n\}\}\right).$$

However, in this setting the invariance by conjugation fails, for example the two contraction mapping $z \mapsto \frac{1}{2}z$ and $z \mapsto \frac{i}{2}z$ are conjugate but they will to have $\{0\}$ and $\{\frac{1}{4}\}$ by local rotation set respectively.

Remark 3. The local rotation set $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ only depends on the choice of the homotopy class of I, i.e. if I_1 and I_2 are two isotopies from the identity to the same homeomorphism which are homotopic, then $\rho_{\mathrm{loc}}(I_1) = \rho_{\mathrm{loc}}(I_2)$.

The local rotation set verifies the following properties.

Proposition 3.2.1. *Let I be an isotopy in* $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ *from the identity to f. For every integer p let $J^p = (R_{pt})_{t\in[0,1]}$. Then*

1. *The local rotation set of I is invariant by oriented topological conjugacy.*
2. *For every $p, q \in \mathbb{Z}$, we have $\rho_{\mathrm{loc}}(J^p * I^q) = q\,\rho_{\mathrm{loc}}(I) + p$.*

Remark 4. One can define the following stronger and stronger notions:

(1) Every neighborhood of 0 contains a contractible fixed point $z \neq 0$ of I.

(2) Every neighborhood of 0 contains a compact and f-invariant set K not containing 0 such that 0 belongs to $\rho_K(I)$.

(3) Every neighborhood V of 0 contains a compact (non-invariant) set K such that $\rho_K(I) \subset \rho_V(I)$ and 0 belongs to $\rho_K(I)$.

Note that (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3), and (3) implies that 0 belongs to $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$.

3.2.2 Main result: Proof of Theorem A

The purpose of this paragraph is to deduce Theorem A from Theorem C. Let I be an isotopy in $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ from the identity to a homeomorphism f. Since the local rotation set $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ is closed and $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, in order to prove Theorem A it is sufficient to show that every irreducible rational number $\frac{p}{q}$ which belongs to the interior of the convex hull of $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ belongs to the local rotation set. Moreover, by considering $J^p * I^q$ instead of I, we may assume that $p = 0$ and $q = 1$. This follows from the formula relating the local rotation sets of I and $J^p * I^q$ (Proposition 3.2.1). Thus, we reduced the proof of Theorem A to proving the following theorem.

Theorem A*. *Let I be an isotopy in* $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ *from the identity to a homeomorphism f. Suppose that the local rotation set $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ contains both positive and negative real numbers. Then 0 belongs to $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$. More precisely, for every V neighborhood of 0, there exists an f-invariant and compact set K in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ contained in V, such that 0 belongs to $\rho_K(I)$.*

Remark 5. Theorem A* implies that Property (2) of Remark 4 holds.

Example. There is a homeomorphism f of $\mathbb{R}^2$ which satisfies Property (2) but not Property (1) of Remark 4. To construct f, we start with a "twice" Reeb's homeomorphism f_1' defined on the compact annulus $D_0 = \{z \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|z\| \leq 3\}$ in $\mathbb{R}^2$ satisfying:

(i) f_1' fixes the circles c_i, where $i \in \{1, 2, 3\}$ and $c_i = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| = i\} \subset D_0$.

(ii) $f_1'|_{c_1}$ and $f_1'|_{c_3}$ act as a rotation R_β with angle $\beta > 0$ and $f_1'|_{c_2}$ acts as a rotation R_α with angle $\alpha < 0$.

(iii) f_1' does not have fixed points in D_0.

Let $I' = (f'_t)_{t\in[0,1]}$ be the natural isotopy on D_0 from the identity of D_0 to f'_1. We define $f_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ by

$$f_t(z) = \begin{cases} \frac{f'_t(3^n z)}{3^n}, & \text{if } \frac{1}{3^n} \leq \|z\| \leq \frac{1}{3^{n-1}}, n \in \mathbb{Z} \\ f_t(0) = 0 \end{cases}$$

Let $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$ be the isotopy from the identity to $f = f_1$. For every integer $n \in \mathbb{N}$, let us put $D_n = \frac{1}{3^n} D_0$. Then 0 belongs to $\rho_{D_n}(I)$ but f does not have any fixed point $z \neq 0$.

For the proof of Theorem A* one introduces the following property.

Definition 3.2.2. *We say that a homeomorphism f in* $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ *satisfies the local intersection property if there exists a neighborhood V of* 0*, such that every Jordan curve γ contained in V and non-contractible in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ meets its image under f, i.e. $f(\gamma) \cap \gamma \neq \emptyset$.*

Frédéric Le Roux proved Theorem A* (see [LeR13]) in the case when the homeomorphism f satisfies the local intersection property. He proved something better: in this case the local rotation set "detects" some fixed points, that is Property (1) of Remark 4 holds. This follows from the following proposition which will be proved in the next subsection.

Proposition 3.2.3. *Let I be an isotopy in* $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2; 0\right)$ *from the identity to a homeomorphism f. Suppose that the local rotation set, $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$, contains both positive and negative real numbers. Then one of the following cases holds:*

Case (a) Every neighborhood of 0 *contains a contractible fixed point $z \neq 0$.*

Case (b) The homeomorphism f does not satisfy the local intersection property, and every neighborhood of 0 *contains three pairwise disjoint, f-free Jordan curves γ_0, γ_1 and γ_2 which are non-contractible in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ with γ_{i+1} included in the interior of γ_i for $i \in \{0, 1\}$ and such that the closed annulus A_i delimited by γ_i and γ_{i+1} satisfies:*

(i) the maximal f-invariant set $\Theta(A_i)$ of A_i is non-empty, and

(ii) the set $\rho_{\Theta(A_0)}(I)$ is contained in one of the sets $(0, +\infty)$ or $(-\infty, 0)$ and the set $\rho_{\Theta(A_1)}(I)$ is contained in the other one.

We recall that this proposition is an adaptation of the following result for homeomorphisms of the closed annulus $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$. This result was proved by P. Le Calvez for diffeomorphisms in [LeC91], but by Theorem 3.1.2 it is also valid for homeomorphisms.

Theorem 3.2.4 (P. Le Calvez [LeC91], [LeC05])**.** *Let $f : \mathbb{T}^1 \times [0, 1] \to \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ be a homeomorphism isotopic to the identity with a lift $\widetilde{f} : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R} \times [0, 1]$ that has no fixed points and whose rotation set contains both negative and positive real numbers. Then there exists a finite non-empty family $\{\gamma_i\}$ of essential, pairwise disjoint and f-free Jordan curves such that the maximal invariant sets of the closed annulus delimited by two consecutive curves has rotation set contained either in $(0, +\infty)$ or in $(-\infty, 0)$.*

Now we show that Proposition 3.2.3 and Theorem C imply Theorem A*.

End of the proof of Theorem A (assuming Theorem C).* Let I be an isotopy in $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ from the identity to a homeomorphism f. Suppose that the local rotation set $\rho_{\mathrm{loc}}(I)$ contains both positive and negative real numbers. One considers the different cases of Proposition 3.2.3. In the case (a), we are done. On the other hand, if case (b) of Proposition 3.2.3 holds, we can apply Theorem C, which says that 0 belongs to $\rho_{\Theta(A)}(I)$ where $\Theta(A)$ is the maximal invariant set of $A = A_0 \cup A_1$. This completes the proof of Theorem A*. ■

3.2.3 Proof of Proposition 3.2.3

Let I, f satisfy the hypotheses of the proposition. We prove Proposition 3.2.3 assuming that case (a) does not hold, i.e. there is a neighborhood of 0 that does not contain any contractible fixed point. By Theorem 3.1.3, changing f in the complement of a Jordan domain containing 0, we may suppose that f does not have any contractible fixed point in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Thus, we can apply Theorem 3.1.2 and we obtain an oriented foliation $\mathcal{F}$ defined in $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ which by Proposition 3.1.4 is locally transverse to I at 0. The foliation $\mathcal{F}$ can be extended to an oriented topological foliation with singularities on the end compactification of $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ where the singularities are the ends of $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

Lemma 3.2.5. *In this case, the closed leaves of $\mathcal{F}$ accumulate at* 0.

Proof. Otherwise, from at the end of § 3.1.4 there exists a leaf l of $\mathcal{F}$ whose ω-limit or α-limit set is reduced to $\{0\}$. The following lemma implies that either $\rho_{\mathrm{loc}}(I) \subset [0,+\infty]$ or $\rho_{\mathrm{loc}}(I) \subset [-\infty,0]$. This contradicts our hypotheses. ■

Lemma 3.2.6. *Let I be an isotopy in* $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ *and let $\mathcal{F}$ be a foliation positively transverse to I. Suppose that $\mathcal{F}$ admits a leaf l such that either $\omega(l) = \{0\}$ or $\alpha(l) = \{0\}$. Then either $\rho_{\mathrm{loc}}(I) \subset [0,+\infty]$ or $\rho_{\mathrm{loc}}(I) \subset [-\infty,0]$.*

Proof. Without loss of generality, we may suppose that $\alpha(l) = \{0\}$. In addition, conjugating f by Φ (given by Schoenflies' Theorem), we may suppose that the negative half-leaf l^- containing one point of l is contained in the positive x-axis. Let U be a Euclidean circle centered at 0 whose boundary meets l^-. By Proposition 3.1.4, $\mathcal{F}$ is locally transverse to I at 0. Let V be a neighborhood of 0 contained in U given by the local transversality of $\mathcal{F}$ to I at 0: the trajectory of each $z \in V$ along I is homotopic, with fixed endpoints, to an arc α_z which is positively transverse to $\mathcal{F}$ and is included in U. In particular, the arcs α_z can cross l^- only downwards. More precisely, let $\widetilde{f}$ be the lift of f associated to I, and let $\widetilde{\mathcal{F}}$ be the lift of $\mathcal{F}$. Let $\widetilde{U}$ and $\widetilde{V}$ be lifts of the sets $U \setminus \{0\}$ and $V \setminus \{0\}$ respectively. Let $\widetilde{l^-}$ be the lift of l^- contained in the line $\{0\} \times (0,+\infty)$. Let $z \in V \setminus \{0\}$ and let $n \in \mathbb{N}$ such that $\{z, \cdots, f^{n-1}(z)\} \subset V$. Let $\widetilde{z}$ be the lift of z such that $0 < p_1(\widetilde{z}) \leq 1$ and $\alpha_{\widetilde{z}}$ the lift of the arc α_z from $\widetilde{z}$. Since the arc $\alpha_{\widetilde{f}^{n-1}(\widetilde{z})} * \cdots * \alpha_{\widetilde{z}}$ is positively transverse to $\widetilde{\mathcal{F}}$ and does not meet the boundary of $\widetilde{U}$, we obtain that $p_1(\widetilde{f}^n(\widetilde{z})) > 0$ and thus

$$\rho_n(z) = \frac{1}{n}(p_1(\widetilde{f}^n(\widetilde{z})) - p_1(\widetilde{z})) \geq -\frac{1}{n}.$$

This implies the inclusion $\rho_V(I) \subset [0, +\infty]$, and so $\rho_{\text{loc}}(I) \subset [0, +\infty]$. This completes the proof. ■

In the sequel, we suppose that the closed leaves of $\mathcal{F}$ accumulate at 0 and that all closed leaves of $\mathcal{F}$ are Euclidean circles centered at 0 (see the description at the end of § 3.1.4). We remark that $\mathcal{F}$ cannot coincide with the oriented foliation in Euclidean circles centered at 0 on a neighborhood of 0. Otherwise, f is conjugated to a homothety.

We will consider the set $\mathcal{A}$ of all closed annuli A whose boundary components are closed leaves of $\mathcal{F}$, and which do not contain any closed leaf of $\mathcal{F}$ in their interiors. By Poincaré-Bendixson Theorem (Theorem 3.1.5) the foliation on A is a Reeb component or a spiral.

For every annulus $A \in \mathcal{A}$, we write $\partial^+ A$ and $\partial^- A$ its two boundary components with $\partial^- A$ included in the interior of $\partial^+ A$.

Definition 3.2.7. *We say that the foliation $\mathcal{F}$ goes from $\partial^+ A$ to $\partial^- A$ (resp. from $\partial^- A$ to $\partial^+ A$) on the annulus $A \in \mathcal{A}$, if all the leaves of $\mathcal{F}$ in the interior of A have $\partial^+(A)$ (resp. $\partial^- A$) as their α-limit set and $\partial^-(A)$ (resp. $\partial^+ A$) as their ω-limit set.*

We have the following lemma.

Lemma 3.2.8 (P. Le Calvez, [LeC91])**.** *Suppose that the foliation $\mathcal{F}$ goes from $\partial^- A$ to $\partial^+ A$ on the annulus $A \in \mathcal{A}$. Let $\Theta(A)$ the maximal invariant set of A. Then the set $\rho_{\Theta(A)}(I)$ (eventually empty) is contained in $(0, +\infty)$.*

Proof. Since each boundary component of the annulus A is f-free, we deduce that $\Theta(A)$ is included in the interior of A. For $z \in \Theta(A)$ by transversality of $\mathcal{F}$ and I there exists an arc α_z joining z and $f(z)$, homotopic (with fixed endpoints) to the trajectory of z along the isotopy I, and which is transverse to the foliation $\mathcal{F}$. Moreover from the facts that z and $f(z)$ are both in the interior of A, we deduce that α_z is also included in the interior of A. We can find an annulus A' whose boundary components are Jordan curves not contractible in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ such that the set $\Theta(A) = f(\Theta(A))$ is included in A'. Considering a change of coordinates, we can assume that the boundary components of A' are Euclidian circles centered at 0, and that the foliation induced by $\mathcal{F}$ on A' coincides with the radial foliation with the leaves toward 0. By transversality, for every $z \in \Theta(A)$ and every integer $n \geq 1$, we have that $\rho_n(z)$ is positive. Since $\Theta(A)$ is a compact set, we deduce that $\rho_{\Theta(A)}(I)$ is included in $(0, +\infty)$. This completes the proof. ■

In the sequel, $\mathcal{A}'$ denotes the subset of $\mathcal{A}$ consisting of the annuli $A \in \mathcal{A}$ whose maximal invariant set is non-empty. From the above proposition, we can consider the following definition.

Definition 3.2.9. *We say that $A \in \mathcal{A}$ is a positive annulus if $\rho_{\Theta(A)}(I) \subset (0, +\infty)$. We define a negative annulus similarly.*

Lemma 3.2.10. *Under the hypotheses of Proposition 3.2.3, we have*

(i) the set $\mathcal{A}'$ is locally finite in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, i.e. every compact set in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ can meet only a finite number of elements of $\mathcal{A}'$; and
(ii) both positive and negative annuli accumulate at 0.

Proof. Proof of item (i). Let $\mathcal{A}''$ be the subset of $\mathcal{A}$ constituted of the annuli $A \in \mathcal{A}$ that meet its image under f i.e. $f(A) \cap A \neq \emptyset$. Remark that $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$, and so it suffices to prove that the set $\mathcal{A}''$ is locally finite in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. This will be a consequence of the following lemma.

Lemma 3.2.11. *Let γ^+ and γ^- be two closed leaves of $\mathcal{F}$ with γ^- contained in the interior of γ^+. Let A_{γ^+,γ^-} be the closed annulus delimited by γ^+ and γ^-. Then there is a finite number of elements of $\mathcal{A}''$ metting A_{γ^+,γ^-}.*

Proof. We know that the space of closed leaves of $\mathcal{F}$ included in A_{γ^+,γ^-} is compact and that every closed leaf of $\mathcal{F}$ does not meet its image under f (Properties (1) and (4) of §3.1.4). Hence, we can consider the real number $\epsilon > 0$ defined as:

$$\epsilon := \min_{\gamma} \operatorname{dist}(\gamma, f(\gamma)),$$

where γ is a closed leaf of $\mathcal{F}$ contained in A_{γ^+,γ^-} and for C, D two subsets of $\mathbb{R}^2$, $\operatorname{dist}(C, D) := \inf_{c \in C, d \in D} \|c - d\|$ and $\|\cdot\|$ is the Euclidean distance in $\mathbb{R}^2$. Let us prove that all $A \in \mathcal{A}''$ satisfies $\operatorname{dist}(\partial^+ A, \partial^- A) \geq \epsilon$. Indeed, if $f(A) \cap A \neq \emptyset$, then either $f(\partial^+ A) \cap A \neq \emptyset$ or $f(\partial^- A) \cap A \neq \emptyset$. Suppose that the first case holds (the proof is similar in the second case). Let $z \in \partial^+ A$ such that $f(z) \in A$. Hence, there exist real numbers $t^- \leq 1 \leq t^+$ such that $z^- = t^- f(z) \in \partial^- A$ and $z^+ = t^+ f(z) \in \partial^+ A$. Using the fact that $\partial^- A$ and $\partial^+ A$ are Euclidean circles centered at 0, we deduce that

$$\epsilon \leq \operatorname{dist}(f(\partial^+ A), \partial^+ A) \leq \left\| f(z) - z^+ \right\| \leq \left\| z^- - z^+ \right\| = \operatorname{dist}(\partial^- A, \partial^+ A).$$

Since the annulus A_{γ^+,γ^-} can be covered by a finite number of annuli A satisfying $\operatorname{dist}(\partial^+ A, \partial^- A) \geq \epsilon$ the proof follows. ■

This completes the proof of item (i).

Proof of item (ii). Suppose by contradiction that there exists a neighborhood of 0 which does not contain any positive annulus (the other case is proved in a similar way). There are two cases.

Case 1: There exists a neighborhood of 0 which does not contain any annulus A on which the foliation $\mathcal{F}$ goes from $\partial^- A$ to $\partial^+ A$. We can find a small perturbation $\mathcal{F}'$ of $\mathcal{F}$ which "breaks" all closed leaves of $\mathcal{F}$ close to 0. From Proposition 3.1.1 the foliation $\mathcal{F}'$ is also transverse to I and all leaves of $\mathcal{F}'$ are spirals whose ω-limit set is $\{0\}$. Hence by Lemma 3.2.6, the local rotation set $\rho_{\text{loc}}(I)$ is contained in $[-\infty, 0]$, contradicting our hypotheses.

Case 2: In the other case, every annulus A close enough to 0 on which $\mathcal{F}$ goes from $\partial^- A$ to $\partial^+ A$ have maximal invariant set empty (we are assuming this). We will construct an intermediary foliation $\mathcal{F}_\infty$ which is transverse to the isotopy I and such that there is a neighborhood of 0 which does

not contain any annulus A on which the foliation $\mathcal{F}_\infty$ goes from $\partial^- A$ to $\partial^+ A$. Then we can conclude as in the Case 1. The construction has three steps.

1st step: We can replace $\mathcal{F}$ on each annulus $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}''$ (annulus which that does not meet its image under f), by the foliation in Euclidean circles centered at 0. We remark that this foliation is also transverse to I.

2nd step: Recall that by hypothesis every annulus A (included in a small neighborhood of 0) on which the foliation $\mathcal{F}$ goes from $\partial^- A$ to $\partial^+ A$ has maximal invariant set empty. We will use the following lemma. We include a sketch of its proof.

Lemma 3.2.12 (F. Le Roux, [LeR13]). *Suppose that the maximal invariant set of the annulus $A \in \mathcal{A}$ is empty. Then there exists an annulus $\hat{A}$ containing A whose boundary is the union of $\partial^+ A$ and $f^n(\partial^- A)$ for some integer n, and a foliation $\hat{\mathcal{F}}$ whose leaves $\hat{\gamma}$ in $\hat{A}$ are closed and such that $f(\hat{\gamma})$ is situated on the right of the oriented leaf $\hat{\gamma}$.*

Sketch of the proof. For two disjoint Jordan curves α and β, we write $\alpha < \beta$ if β is contained in the interior of α. Since the invariant set of A is empty, we can suppose that there exists an integer n such that $\partial^- A < f^n(\partial^+ A)$. Since the closed leaves $\partial^+ A$ and $\partial^- A$ are f-free, they project to two simple curves on the quotient torus

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(A_{\partial^+ A, f(\partial^+ A)}) \right) / f,$$

were $A_{\partial^+ A, f(\partial^+ A)}$ is the annulus delimited by the curves $\partial^+ A$ and $f(\partial^+ A)$. These are homotopic curves, so we can find a family of curves $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ lifting this isotopy. For every $t \in [0,1]$ choose a curve β_t such that

$$\alpha_t < \beta_t < f(\alpha_t).$$

In particular for every $t \in [0,1]$ the annulus delimited by the curves α_t and β_t is f-free. By compactness we can find real numbers $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ such that for every $i \in \{0, \cdots, m-1\}$, we have that

$$\alpha_{t_{i+1}} < \beta_{t_i} < f(\alpha_{t_{i+1}}),$$

and in particular the annulus delimited by the curves β_{t_i} and $f(\alpha_{t_{i+1}})$ is f-free. For $i \in 0, \cdots, m$ we write $\gamma_i = f^i(\alpha_{t_i})$ and $\delta_i = f^i(\beta_{t_i})$. We have

$$\partial^+ A = \gamma_{t_0} < \delta_{t_0} < \cdots < \delta_{t_{m-1}} < \gamma_{t_m} = h^n(\partial^- A).$$

Moreover every two consecutive curves of this sequence delimit a f-free annulus. Since above, we can replace on each of theses annuli by the foliation in closed leaves. These foliations can be pasted for to obtain a foliation $\hat{\mathcal{F}}$ whose leaves in the annulus $\hat{A}$ are closed. This completes the proof. ■

By the previous lemma, we obtain a foliation in closed leaves on the annulus $\hat{A}$ delimited by $\partial^+ A$ and $f^n(\partial^- A)$, this foliation can be pasted with the foliation $\mathcal{F}$ on the exterior of $\partial^+ A$, and with the foliation $(f^n)_*\mathcal{F}$ in the interior of $f^n(\partial^- A)$ by to obtain a new foliation $\mathcal{F}_{A,n}$ which is transverse to the isotopy I.

3rd step: The intermediary foliation $\mathcal{F}_\infty$ is constructed as the limit of a sequence of foliations $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ which is a stationary sequence on every compact set of $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. By the first step and the fact that $\mathcal{A}'$ is locally finite, the set of annuli A on which $\mathcal{F}$ goes from $\partial^- A$ to $\partial^+ A$ accumulate only at 0 and is a countable set. Let $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denote the ordered family of all such annuli, i.e. for every integer $n \geq 1$, the annulus A_{n-1} is contained in the unbounded connected component of $\mathbb{R}^2 \setminus A_n$. By hypothesis the maximal invariant set of A_0 is empty, so by the second step we obtain a foliation $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{A_0,m_0}$ which coincides with the foliation in closed leaves on $\hat{A}_0$ (annulus delimited by $\partial^+ A_0$ and $f^{m_0}(\partial^- A_0)$ for some integer m_0), with $\mathcal{F}$ on the exterior of $\partial^+ A_0$, and with the foliation $(f^{m_0})_*\mathcal{F}$ in the interior of $f^{m_0}(\partial^- A)$. In a similar way, we obtain a foliation $\mathcal{F}_1 := (\mathcal{F}_0)_{f^{m_0}(A_1),m_1}$. Iterating this process, we can construct the sequence $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Let $\mathcal{F}_\infty$ be the limit of the sequence $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Since, by construction each leaf l_∞ of $\mathcal{F}_\infty$ is an iterate of one leaf of l of either $\mathcal{F}$ or the foliation $\hat{\mathcal{F}}$ provided by the previous lemma, i.e. $l_\infty = f^n(l)$, the remark following Theorem 3.1.2 implies that the limit foliation obtained $\mathcal{F}_\infty$ also is transverse to I. As $\mathcal{F}_\infty$ is as Case 1, we complete the proof of item (ii). ■

End of the proof of Proposition 3.2.3: If the case (a) does not hold, then items (i) and (ii) of Lemma 3.2.10 hold. Let V be a neighborhood of 0. Since both negative and positive annuli accumulate 0 and the collection of them is locally finite, there are a negative annulus A^- and a positive annulus A^+ included in V such that the annulus A (eventually an empty set) "between" A^+ and A^- has maximal invariant set empty. We can suppose that A^- is included in the closure of the interior of $\partial^- A^+$. Thus $\gamma_0 = \partial^+ A^+$, $\gamma_1 = \partial^+ A^-$ and $\gamma_2 = \partial^- A^-$ satisfy the case (b) of the proposition, because $\rho_{A\cup A^-}(I) = \rho_{A^-}(I)$. This completes the proof. ■

3.3 Case of the Open Annulus

In this section we will introduce the definition of the rotation set in the open annulus and we will show Theorem B assuming Theorem C.

3.3.1 Definitions

The open annulus

We will denote by $\mathbb{T}^1$ the unit circle of the plane and by $\mathbb{A} := \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ the open annulus. We endow the annulus $\mathbb{A}$ with its usual topology and orientation. We denote by N (respectively S) the upper (respectively lower) end of $\mathbb{A}$ and by $\hat{\mathbb{A}}$ the end compactification of $\mathbb{A}$ which is a topological space homeomorphic to the two-dimensional sphere. A Jordan curve γ in $\mathbb{A}$ is called *essential* if its complement has two unbounded connected components. We denote by U_γ^N

the upper one and by U_γ^S the lower one. We denote $\hat{U}_\gamma^N = U_\gamma^N \cup \{N\}$ and $\hat{U}_\gamma^S = U_\gamma^S \cup \{S\}$.

The set $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{A})$

We denote by $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{A})$ the set of all homeomorphisms of the open annulus $\mathbb{A}$ which are isotopic to the identity. We recall that every homeomorphism f in $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{A})$ can be extended to a homeomorphism $\hat{f}$ of the end compactification of $\mathbb{A}$ and this homeomorphism fixes both ends of $\mathbb{A}$.

The rotation set of the annulus

In this paragraph, we consider a homeomorphism f in $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{A})$. Let I be an isotopy in $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{A})$ from the identity to f. We will give the definition of the rotation set of I due to J. Franks (see [Fra96]).

If $z \in \mathbb{A}$, we consider $\rho_n(z)$ the *average change of angular coordinate along the trajectory of z for the isotopy I*. Next for a compact set K in $\mathbb{A}$, we define

$$\rho_K(I) := \bigcap_{m\geq 1} \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{n\geq m} \{\rho_n(z) : z \in K,\ f^n(z) \in K\}\right).$$

where the closure is taken in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Finally we define the *rotation set of the isotopy I* by

$$\rho_{\mathrm{ann}}(I) := \mathrm{Cl}\left(\bigcup_K \rho_K(I)\right)$$

where K is a compact set in $\mathbb{A}$.

Remark 6. The rotation set $\rho_{\mathrm{ann}}(I)$ only depends on the choice of the homotopy class of I.

As above the rotation set verifies the following properties.

Proposition 3.3.1. *Let I be an isotopy in* $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{A})$ *from the identity to f. For every integer p let $J^p = (R_{pt})_{t\in[0,1]}$. Then*

1. *The rotation set of I is invariant by oriented topological conjugation.*
2. *For every $p, q \in \mathbb{Z}$, we have $\rho_{\mathrm{ann}}(J^p * I^q) = q\,\rho_{\mathrm{ann}}(I) + p$.*

Other rotation sets in the open annulus

In this paragraph, we introduce other rotation sets in $\mathbb{A}$ such as the *measured rotation set* of an f-invariant compact subset of $\mathbb{A}$ and also *the local rotation set relative to a neighborhood* at each end of $\mathbb{A}$.

Given a compact and f-invariant set K in $\mathbb{A}$, we will denote by $\mathcal{M}_f(K)$ the set of all f-invariant Borel probability measures whose support is contained in

K. This is a compact and convex set in the weak topology. If $\mu \in \mathcal{M}_f(K)$, we define its *rotation number* as:

$$\rho(\mu) := \int_K \rho_1 \, d\mu.$$

Then, we define the measured rotation set of K as:

$$\rho_{mes}(K, I) := \{\rho(\mu) : \mu \in \mathcal{M}_f(K)\}.$$

This set is always a compact interval. More precisely, we have the following result.

Lemma 3.3.2. *Let K be a compact and f-invariant set in $\mathbb{A}$. Then*
(1) The set $\rho_K(I)$ is a compact set in $\mathbb{R}$. If K is a connected set, then $\rho_K(I)$ is a compact interval.
(2) The set $\rho_{mes}(K, I)$ coincides with the convex hull of $\rho_K(I)$.

Proof. The proof of item (1) is as in the proof of Proposition 2.36. The proof of item (2) is as in the proof of Theorem 2.45. ■

On the other hand, let $\hat{z}_0$ be an end of $\mathbb{A}$ and let $\hat{V}$ be a neighborhood of $\hat{z}_0$. We consider an oriented preserving homeomorphism ψ mapping $\hat{V}$ to a neighborhood of $0 \in \mathbb{R}^2$ such that $\psi(\hat{z}_0) = 0$. We write

$$\rho_{\hat{V}}(I) := (-1)^{i(\hat{z}_0)} \rho_{\psi(\hat{V})}(\psi I \psi^{-1}),$$

where $i(S) = +1$, $i(N) = -1$ and $\rho_{\psi(\hat{V})}(\psi I \psi^{-1})$ is the local rotation set relative to $\psi(\hat{V})$ defined in § 3.2.1.

Remark 7. By Proposition 3.2.1, this definition does not depend on the choice of the homeomorphism ψ.

3.3.2 Main result: Proof of Theorem B

The purpose of this subsection is to prove Theorem B assuming Theorem C.

As we have seen in § 3.2.2 in order to proof Theorem B, it suffices to prove the following theorem.

Theorem B*. *Let I be an isotopy in* $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{A})$ *from the identity to a homeomorphism f. Suppose that the rotation set $\rho_{\mathrm{ann}}(I)$ contains both positive and negative real numbers. Then there exists a compact (a priori non-invariant) set K in $\mathbb{A}$, such that* 0 *belongs to $\rho_K(I)$.*

The following example satisfies Property (3) but not Property (2) from the analogous Remark 4 for the open annulus. This proves that Theorem B^* is sharp, i.e. the compact set K such that 0 belongs to $\rho_K(I)$ can be non-invariant.

Example. There are a homeomorphism f of $\mathbb{A}$ and an isotopy I from the identity to f satisfying the following conditions:

(i) There is no f-invariant compact set in $\mathbb{A}$, such that 0 belongs to $\rho_K(I)$ and

(ii) $\rho_{\text{ann}}(I) = [-1, 1]$.

Let us fix two real numbers $0 < R^- < R^+$. To construct f, we start with a homeomorphism f_1' defined on $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, the one-point compactification of $\mathbb{R}^2$, satisfying:

(i) f_1' acts as a rotation R_{+1} (resp. R_{-1}) on the disk $\{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| \leq R^-\}$ (resp. $\{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| \geq R^+\}$).

(ii) f_1' is a Reeb's homeomorphism on $\{z \in \mathbb{R}^2 : R^- \leq \|z\| \leq R^+\}$

Let us define the following equivalence relation on $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

$$z = (x, y) \sim \begin{cases} 0 & \text{if } \|z\| \leq R^- \text{ and } y \leq 0; \\ (0, y) & \text{if } \|z\| \leq R^- \text{ and } y \geq 0. \end{cases}$$

$$z = (x, y) \sim \begin{cases} \infty & \text{if } \|z\| \geq R^+ \text{ and } y \leq 0; \\ (0, y) & \text{if } \|z\| \leq R^+ \text{ and } y \geq 0. \end{cases}$$

Let $\hat{\mathbb{A}}' = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}/\sim$ be the quotient space of $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. By $z \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, we write $[z]$ the class of equivalence of z. Now, it is easy to check that $\hat{\mathbb{A}}' \setminus \{[0], [\infty]\}$ is homeomorphic to the open annulus $\mathbb{A}$ et that f_1' induces a homeomorphism f on $\mathbb{A}'$. Moreover f is isotopic to the identity of $\mathbb{A}'$, there exists an isotopy I on the annulus $\mathbb{A}'$ from the identity to f such that $\rho_{\text{ann}}(I) = [-1, 1]$.

Classification

The proof of Theorem B* consider several cases described by the following proposition.

Proposition 3.3.3. *Let I be an isotopy in* $\text{Homeo}_0(\mathbb{A})$ *from the identity to a homeomorphism f. Suppose that the rotation set $\rho_{\text{ann}}(I)$ contains both positive and negative real numbers. Then one of the following cases holds:*

Case (a) There exists an invariant and compact set K in $\mathbb{A}$ such that 0 *belongs to $\rho_K(I)$.*

Case (b) The homeomorphism f satisfies the local intersection property at least at one of the ends of $\mathbb{A}$, there exists an essential f-free Jordan curve γ in $\mathbb{A}$, such that the local rotation set of I at N relative to $\hat{U}_\gamma^N$, $\rho_{\hat{U}_\gamma^N}(I)$, is contained in one of the sets $[0, +\infty]$ or $[-\infty, 0]$ and the local rotation set at S relative to $\hat{U}_\gamma^S$, $\rho_{\hat{U}_\gamma^S}(I)$, is contained in the other one.

Case (c) The homeomorphism f satisfies the local intersection property at both ends of $\mathbb{A}$, there exist two f-free essential Jordan curves γ_N and γ_S with $\gamma_N \subset U_{\gamma_S}^N$ such that the closed annulus A delimited by γ_N and γ_S satisfies:

(i) the maximal f-invariant set of A is not empty, and

(ii) the sets $\rho_{\hat{U}_{\gamma_N}^N}(I)$ and $\rho_{\hat{U}_{\gamma_S}^S}(I)$ are contained in one of the sets $[0, +\infty]$ or $[-\infty, 0]$ and the set $\rho_A(I)$ is contained in the interior of the other one.

We prove this proposition assuming that case (a) does not hold. Then, we may assume that I has no contractible fixed points. We apply Theorem 3.1.2, and we obtain an oriented foliation on the annulus $\mathbb{A}$ which is transverse to I. We can see $\mathcal{F}$ as a foliation with singularities on $\hat{\mathbb{A}}$, the end compactification of $\mathbb{A}$, whose singularities are the ends of $\mathbb{A}$.

Lemma 3.3.4. *In this situation, there exists an oriented foliation $\mathcal{F}'$ arbitrarily close to $\mathcal{F}$ (in Whitney's topology) which has a closed leaf.*

Proof. We claim that $\mathcal{F}$ would have recurrence (see Property (4) of § 3.1.4). Otherwise, by Property (4) of § 3.1.4, there exists a leaf of $\mathcal{F}$ joining the two ends of $\mathbb{A}$, this implies that either $\rho_{\text{ann}}(I) \subset [-\infty, 0]$ or $\rho_{\text{ann}}(I) \subset [0, +\infty]$. This contradicts our hypotheses. Hence, changing the orientation of $\mathcal{F}$ by its inverse if necessary, we may suppose that there is a leaf l of $\mathcal{F}$ whose ω-limit set contains a point $z \in \mathbb{A}$. Let l_z be the leaf of $\mathcal{F}$ containing z. Note that the ω-limit and α-limit sets of l_z are reduced to S or N. Without loss of generality, we may assume that this end is S. Let U be a trivializing neighborhood of z. Let $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of points in $l \cap U$ such that for every integer $n \geq 1$, the point z_{n+1} belongs to $l^+_{z_n}$, the positive half-leaf containing z_n, and converges to z. For every integer $n \geq 1$, let l_n be the connected component of $l \cap U$ containing z_n. Then the sequence $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges, in Hausdorff's topology, to the connected component of the leaf $l_z \cap U$ containing z. Let a_n and b_n be the first and last point in l_n respectively. Now, we perturb $\mathcal{F}$ enough as Figure 3.1 This completes the proof of lemma.

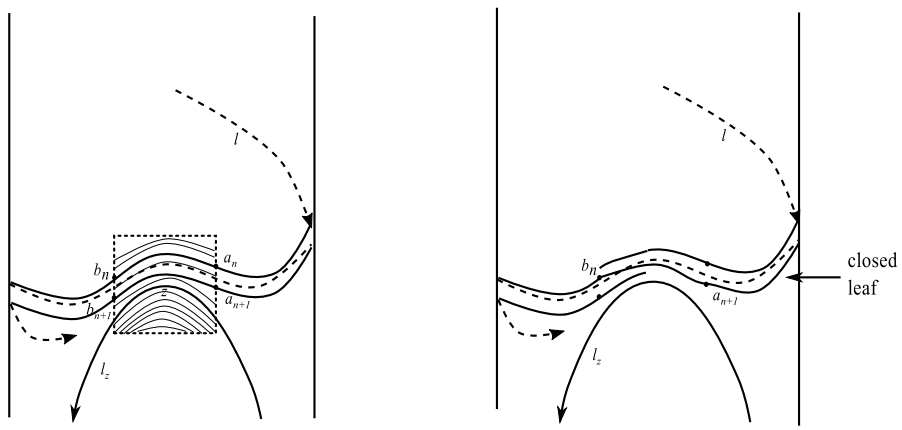

Figure 3.1: Left: foliation $\mathcal{F}$ Right: foliation $\mathcal{F}'$

■

From Proposition 3.1.1, the foliation $\mathcal{F}'$ is also transverse to I. Let us assume from now on that $\mathcal{F}$ has closed leaves. Moreover, $\mathcal{F}$ cannot have only closed leaves. Otherwise f is conjugated to a homothety.

Lemma 3.3.5. *Under the hypotheses of Proposition 3.3.3, assume furthermore that Case (a) does not hold. Then the closed leaves of $\mathcal{F}$ do not accumulate at least at one of the two ends of $\mathbb{A}$.*

Since the closed leaves of $\mathcal{F}$ are f-free essential curves (Properties (2) and (3) from § 3.1.4), this lemma will follow from Theorem C. As in § 3.2.3, we consider the set $\mathcal{A}$ of all closed annuli A whose boundary components are closed leaves of $\mathcal{F}$, and which do not contain any closed leaf of $\mathcal{F}$ in their interior, and $\mathcal{A}'$ the subset of $\mathcal{A}$ consisting of the annuli A whose maximal invariant set is not empty. We say that $A \in \mathcal{A}'$ is a positive (resp. negative) annulus if $\rho_{\Theta(A)}(I) \subset (0, +\infty)$ (resp. $\rho_{\Theta(A)}(I) \subset (-\infty, 0)$).

Proof of Lemma 3.3.5. By contradiction, we suppose that the closed leaves of $\mathcal{F}$ accumulate both ends of $\mathbb{A}$. We claim that there are two closed leaves γ^+ and γ^- of $\mathcal{F}$ close enough to the end N and S respectively, such that the closed annulus A_{γ^+,γ^-} delimited by γ^+ and γ^- contains a positive and a negative annulus. By contradiction, suppose that all annuli of $\mathcal{A}'$ are positive (or negative). Then in a similar way as in Lemma 3.2.10 (applied at both ends of $\mathbb{A}$) we can find an oriented foliation $\mathcal{F}_\infty$ which is transverse to I, and contains a leaf joining the two ends of $\mathbb{A}$. This contradicts the fact that the rotation set $\rho_{\text{ann}}(I)$ contains both positive and negative real numbers. In a similar way as in end of the proof of Proposition 3.2.3 we conclude (assuming Theorem C) that 0 belongs to $\rho_{\Theta(A_{\gamma^+,\gamma^-})}(I)$, where $\Theta(A_{\gamma^+,\gamma^-})$ is the maximal invariant set of the closed annulus delimited by γ^+ and γ^-. This contradicts the fact that case (a) of Proposition 3.3.3 does not hold. This completes the proof. ■

By previous lemma we know that the closed leaf of $\mathcal{F}$ do not accumulate at least at one of the ends of $\mathbb{A}$. We can assume from now on, without loss of generality, that this end is S. Let γ_S be "the last" closed leaf of $\mathcal{F}$, that is γ_S is a closed leaf of $\mathcal{F}$ such that $U^S_{\gamma_S}$ does not contain any closed leaf of $\mathcal{F}$. We have the following result.

Lemma 3.3.6. *There exists an oriented foliation $\mathcal{F}'$ arbitrarily close to $\mathcal{F}$ (in Whitney's topology) which coincides with $\mathcal{F}$ in $\mathrm{Cl}(\hat{U}^N_{\gamma_S})$ and admits a leaf either whose ω-limit set is reduced to S and α-limit set is γ_S or whose α-limit set is reduced to S and ω-limit set is γ_S.*

Proof. Let z be an element in γ_S and let Σ be an arc positively transverse containing z in its interior. Since γ_S is a closed leaf of $\mathcal{F}$ and there is no closed leaf in $U^S_{\gamma_S}$, there is a leaf l of $\mathcal{F}$ which meets $\Sigma \cap U^S_{\gamma_S}$ at less two times. From Theorem 3.1.5, we deduce that either $\alpha(l)$ or $\omega(l)$ is γ_S. Without loss of generality, suppose that we are in the first case. Since there are not closed leaves of $\mathcal{F}$ in $U^S_{\gamma_S}$, we have two possibilities (items (ii) or (iii) of Theorem 3.1.5): the set $\omega(l)$ is reduced to S, or there is a leaf l_S of $\mathcal{F}$ from S to S contained in $\omega(l)$. In the first case, the foliation $\mathcal{F}$ satisfies the conclusion of the lemma. In the second case, let z' be an element in l_S and let U' be a trivializing neighborhood of z'. Let $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of points in $l \cap U'$ such that for every integer $n \geq 1$, the point z'_{n+1} belongs to $l^+_{z'_n}$ and converges

to z'. For every integer $n \geq 1$, let l_n be the connected component of $l \cap U'$ containing z'_n. Then the sequence $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges, in Hausdorff's topology, to the connected component $l'_{z'}$ of the leaf $l_{z'} \cap U'$ containing z'. Let a_n and b' be the first point in l_n and the last point in $l'_{z'}$ respectively. Now, we perturb $\mathcal{F}$ enough as Figure 3.2 to obtain the expected foliation. This completes the proof of lemma.

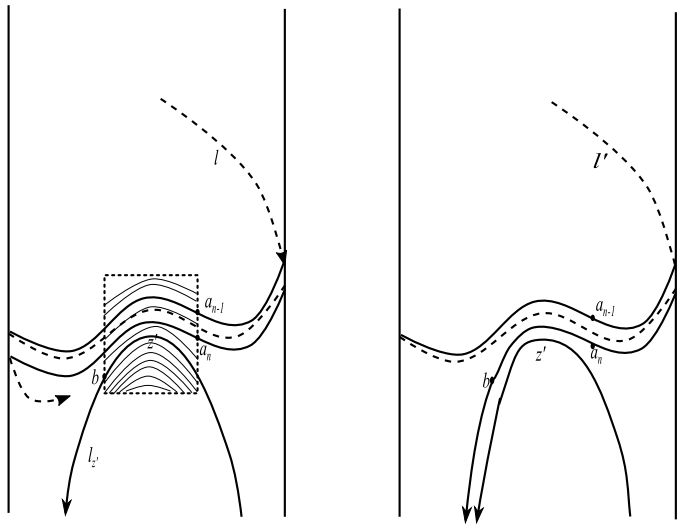

Figure 3.2: Left: foliation $\mathcal{F}$ Right: foliation $\mathcal{F}'$

■

Using analogous reasoning as in Lemma 3.2.6, we obtain the following result.

Lemma 3.3.7. *The set* $\rho_{\hat{U}^S_{\gamma_S}}(I)$ *is contained either in* $[0, +\infty]$ *or in* $[-\infty, 0]$.

End of the proof of Proposition 3.3.3: We have two cases.
Case 1: The closed leaves of $\mathcal{F}$ do not accumulate at N either. As above, we consider "the first" and "the last" closed leaves of $\mathcal{F}$, denoted γ_N and γ_S respectively, i.e. $\gamma_N \subset U^N_{\gamma_S}$ and there are not closed leaves of $\mathcal{F}$ outside of the closed annulus delimited by γ_N and γ_S. From Lemma 3.3.6 (applied to both N and S), we can assume that the foliation $\mathcal{F}$ admits a leaf l_N whose ω-limit set is reduced to N and α-limit set is γ_N or whose α-limit set is reduced to N and ω-limit set is γ_N and another leaf l_S whose ω-limit set is reduced to S and α-limit set is γ_S or whose α-limit set is reduced to S and ω-limit set is γ_S. To fix idea assume that l_S satisfies $\omega(l_S) = S$ and $\alpha(l_S) = \gamma_S$. We have two subcases.

Subcase 1.1: The leaf l_N satisfies $\alpha(l_N) = N$ and $\omega(l_N) = \gamma_N$. Let $\Theta(A_{\gamma_N,\gamma_S})$ be the maximal invariant set of A_{γ_N,γ_S} the closed annulus delimited by γ_N and γ_S. We will prove the following assertions.

(1) The set $\mathcal{A}'$ is non-empty,

(2) $\mathcal{F}$ goes from $\partial^- A$ to $\partial^+ A$ on all annuli $A \in \mathcal{A}'$, and

(3) f satisfies the local intersection property at least at one end of $\mathbb{A}$.

Let us prove (1). Note that if $\mathcal{A}'$ is empty, then as in the proof of item (ii) of Lemma 3.2.10, there exist an annulus $\hat{A}_{\gamma_N,\gamma_S}$ containing A_{γ_N,γ_S} whose boundary components are the union of γ_N and $f^n(\gamma_S)$, and a foliation $\mathcal{F}'$ whose leaves in $\hat{A}_{\gamma_N,\gamma_S}$ are closed leaves. This foliation can be pasted with $\mathcal{F}$ on $U^N_{\gamma_N}$, and with $(f^n)_*\mathcal{F}$ on $U^S_{f^n(\gamma_S)}$ by to obtain a new foliation $\mathcal{F}_{A_{\gamma_N,\gamma_S},n}$ which is transverse to the isotopy I. Hence, we can find a small perturbation of $\mathcal{F}_{A_{\gamma_N,\gamma_S},n}$ which is also transverse to I and contains a leaf that joins the two ends of $\mathbb{A}$. This implies that $\rho_{\text{ann}}(I) \subset [-\infty, 0]$. This contradicts our hypotheses, completing the proof of (1).

Let us prove (2). If $\mathcal{F}$ goes from $\partial^+ A$ to $\partial^- A$ on all annuli of $A \in \mathcal{A}'$, as in the proof of Lemma 3.2.10, we can perturb $\mathcal{F}$ by obtain a foliation which admits a leaf joining the two ends of $\mathbb{A}$. This implies that $\rho_{\text{ann}}(I) \subset [-\infty, 0]$, contradicting our hypotheses. On the hand hand, if there exists both an annulus A^+ on which $\mathcal{F}$ goes from $\partial^- A^+$ to $\partial^+ A^+$ and another A^- on which $\mathcal{F}$ goes from $\partial^+ A^-$ to $\partial^- A^-$, Theorem C implies that 0 belongs to $\rho_{\Theta(A_{\gamma_N,\gamma_S})}(I)$. This is a contradiction, because we are assuming that Case (a) does not hold. This completes the proof of (2).

Let us prove (3). Under our suppositions of the leaves l_N and l_S and above assertion (2), we have that $\rho_{\hat{U}^S_{\gamma_S}}(I) \cup \rho_{\hat{U}^N_{\gamma_N}}(I) \subset [-\infty, 0]$ and $\rho_{\Theta(A_{\gamma_N,\gamma_S})}(I) \subset (0, +\infty)$. Assertion (3) will is a consequence of the following claim.

Claim. *Under our hypotheses. Suppose that f does not satisfies the local intersection property at S. Then f restricted to $\hat{U}^S_{\gamma_S}$ is a homothety. In particular $\rho_{\hat{U}^S_{\gamma_N}}(I)$ is included in $[0, +\infty]$.*

Proof of the claim. Let $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of essential f-free curves such that

(i) for every integer $n \in \mathbb{N}$, we have $\gamma_{n+1} \subset U^S_{\gamma_n} \subset U^S_{\gamma_S}$, and

(ii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U^S_{\gamma_n} = \emptyset$.

For each integer n, we write $\Theta(A_n)$ the maximal invariant set of A_n the closed annulus delimited by γ_S and γ_n. Firstly suppose that there exists a positive integer n_0 such that $\Theta(A_{n_0})$ is not empty. Then $\rho_{\Theta(A_{n_0})}(I) \subset (-\infty, 0)$ and we know that $\rho_{\Theta(A_{\gamma_N,\gamma_S})}(I) \subset (0, +\infty)$. Hence Theorem C implies that 0 belongs to the rotation set relative to the maximal invariant set of the closed annulus delimited by γ_N and γ_{n_0}. This contradicts again the fact that Case (a) does not hold. Now suppose that for every integer n, $\Theta(A_n)$ is empty. Considering f instead of f^{-1}, we can assume that γ_S satisfies $f(\gamma_S) \subset U^S_{\gamma_S}$. Hence for each integer n, there is an integer $k(n)$ such that $f^{k(n)}(\gamma_S) \subset U^S_{\gamma_n}$. Therefore

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(U^S_{\gamma_S}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U^S_{\gamma_n} = \emptyset.$$

This proves that f is a homothety, completing the proof of the claim. ■

Let us continue proving assertion (3). Suppose by contradiction that f does not satisfy the local intersection property at none end of $\mathbb{A}$. Then, the previous claim (applied to both end of $\mathbb{A}$) implies that $\rho_{\text{ann}}(I)$ is contained in $[0, \infty]$. This contradicts our hypotheses, completing the proof of assertion (3).

To complete the proof of Proposition 3.3.3 in the case of Subcase 1.1, note that if f satisfies the local intersection property at the other end of $\mathbb{A}$ then Case (c) holds. Otherwise, by the previous claim Case (b) holds, completing the proof.

Subcase 1.2: The leaf l_N satisfies $\alpha(l_N) = \gamma_N$ and $\omega(l_N) = N$. Let $\Theta(A_{\gamma_N,\gamma_S})$ be the maximal invariant set of A_{γ_N,γ_S} the closed annulus delimited by γ_N and γ_S. Then, one and only one of the following conditions holds.

(1) $\Theta(A_{\gamma_N,\gamma_S})$ is a non-empty set. Then the set $\mathcal{A}'$ is non-empty, and we can prove as in the proof of the previous subcase that $\mathcal{F}$ goes either from $\partial^- A$ to $\partial^+ A$ or from $\partial^+ A$ to $\partial^- A$ on all annuli $A \in \mathcal{A}'$.

(2) $\Theta(A_{\gamma_N,\gamma_S})$ is empty.

In both case, as in the proof of Lemma 3.2.10, we can find a perturbation $\mathcal{F}'$ of $\mathcal{F}$ which "breaks" all closed leaves of $\mathcal{F}$ but either γ_N or γ_S. The foliation $\mathcal{F}'$ has an unique closed leaf γ. From Lemma 3.3.7 we know that $\rho_{\hat{U}^N_\gamma}(I)$ is contained in $[0, +\infty]$ and that $\rho_{\hat{U}^S_\gamma}(I)$ is contained in $[-\infty, 0]$. Let us prove by contradiction that f satisfies the local intersection property at least at one end of $\mathbb{A}$. Otherwise, since $\rho_{\text{ann}}(I)$ contains both positive and negative real numbers, we can find two f-free essential Jordan curves γ^+ and γ^- close enough to the end N and S respectively, such that the maximal invariant set $\Theta(A_{\gamma^+,\gamma})$ (resp. $\Theta(A_{\gamma,\gamma^-})$) of the annulus delimited by γ^+ and γ (resp. γ and γ^-) is not empty. Moreover $\rho_{\Theta(A_{\gamma_+,\gamma})}(I)$ is contained in $[0, +\infty]$ and $\rho_{\Theta(A_{\gamma,\gamma_-})}(I)$ is contained in $[-\infty, 0]$. Therefore Theorem C implies that 0 belongs to $\rho_{\Theta(A_{\gamma^+,\gamma^-})}(I)$. This contradicts that Case (a) does not hold. This proves that Case (b) holds, completing the proof.

This completes the proof of Proposition 3.3.3 in Case 1.

Case 2: The closed leaves of $\mathcal{F}$ accumulate at N. As above, we consider "the last" closed leaf of $\mathcal{F}$ near to S, denoted γ_S. As above from Lemma 3.3.6 we can assume that there is a leaf l_S that satisfy $\omega(l_S) = S$ and $\alpha(l_S) = \gamma_S$. Since $\rho_{\text{ann}}(I)$ contains both negative and positive real numbers the following assertions hold (the proofs are similar as in Case 1).

(1) The set $\mathcal{A}'$ is non-empty,

(2) $\mathcal{F}$ goes from $\partial^- A$ to $\partial^+ A$ on all annuli $A \in \mathcal{A}'$, and

(3) f satisfies the local intersection property at S.

Here again we can find a perturbation $\mathcal{F}'$ of $\mathcal{F}$ which has an unique closed leaf γ. From Lemma 3.3.7 we know that $\rho_{\hat{U}^N_\gamma}(I)$ is contained in $[0, +\infty]$ and that $\rho_{\hat{U}^S_\gamma}(I)$ is contained in $[-\infty, 0]$. This proves that Case (b) holds. This completes the proof of Proposition 3.3.3 in Case 2. ■

Proposition 3.3.3 is now proved.

An intermediate result

The purpose of this paragraph is to prove the following proposition and its corollary.

Proposition 3.3.8. *Let I, f be as in Theorem B*. Assume furthermore that*
- (A_1) *the homeomorphism f satisfies the local intersection property at S,*
- (A_2) *there exists a Jordan domain $\hat{V}$ containing S (in $\hat{\mathbb{A}}$) such that $\hat{f}(\mathrm{Cl}(\hat{V})) \subset \hat{V}$, and*
- (A_3) *the set $\rho_{\hat{V}}(I)$ is included in $[0, +\infty]$.*

Then one of the following assertions holds.
- *(1) there exists a compact set K in $\mathbb{A}$ such that 0 belongs to $\rho_K(I)$, or*
- *(2) there exists a compact set K in $\mathbb{A}$ contained in $\mathbb{A} \setminus \hat{V}$ such that the set $\rho_K(I)$ intersects $[0, +\infty]$.*

Remark 8. We can replace (A_2) by the hypothesis $\mathrm{Cl}(\hat{V}) \subset \hat{f}(\hat{V})$ by changing the isotopy I by I^{-1}. We can replace (A_3) by the hypothesis $\rho_{\hat{V}}(I) \subset [-\infty, 0]$ by conjugating I by the orientation reversing homeomorphism $(u, r) \mapsto (-u, r)$ of the annulus $\mathbb{A}$.

Let us put $\Theta^+(\hat{V})$ (resp. $\Theta^-(\hat{V}^c)$) the forward (resp. backward) $\hat{f}$-invariant set of $\hat{V}$ (resp. $\hat{V}^c$), i.e.:

$$\Theta^+(\hat{V}) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}^n(\hat{V}) \quad \text{and} \quad \Theta^-(\hat{V}^c) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}^{-n}(\hat{V}^c).$$

Using hypothesis (A_2), one proves that the set $\Theta^+(\hat{V})$ (resp. $\Theta^-(\hat{V}^c)$) is a continuum, its complement is a connected set of $\hat{\mathbb{A}}$ and contains S (resp. N). Moreover they satisfy the following properties.

Lemma 3.3.9. *Under the hypotheses of Proposition 3.3.8, we have*
- *(a) the set $\Theta^+(\hat{V})$ is not reduced to S, and*
- *(b) the set $\Theta^-(\hat{V}^c)$ is not reduced to N.*

Proof. Let us prove (a). Since f satisfies the local intersection property at S, there is an open neighborhood $\hat{U}$ of S which does not contain any f-free essential Jordan curve. Hence for every integer $n \geq 0$, the curve $\hat{f}^n(\partial \hat{V})$ is not contained in $\hat{U}$, because it is a free essential Jordan curve by Hypothesis (A_2). Hence and Hypothesis (A_2), $(\hat{f}^n(\mathrm{Cl}(\hat{V}) \setminus \hat{U}))_{n \in \mathbb{N}}$ is a decreasing sequence of compact sets in $\mathbb{A}$, and so

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}^n(\mathrm{Cl}(\hat{V}) \setminus \hat{U}) \subset \Theta^+(\hat{V}).$$

This proves item (a).

Now let us prove (b). Suppose by contradiction that $\Theta^-(\hat{V}^c) = \{N\}$. So, by Hypothesis (A_2), for every compact set K in $\mathbb{A}$, there exists an integer

$n_K = n \geq 0$ such that K is included in $\hat{f}^{-n}(\hat{V})$. Hence and by Hypotheses (A_2) and (A_3), we have

$$\rho_K(I) \subset \rho_{\hat{f}^{-n}(\hat{V})}(I) = \rho_{\hat{V}}(I) \subset [0, +\infty].$$

This contradicts the fact that $\rho_{\text{ann}}(I)$ contains some negative real number. This proves item (b). ■

Recall that $\pi : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{A}$ is the universal covering of $\mathbb{A}$, and $p_1 : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{R}$ the projection onto the first coordinate.

Proof of Proposition 3.3.8: Let us consider $V := \hat{V} \cap \mathbb{A}$. Let Γ, $\widetilde{V}$, $\Theta^+(\widetilde{V})$ and $\Theta^-(\widetilde{V}^c)$ be lifts of $\text{Fr}(V)$, V, $\Theta^+(\hat{V}) \setminus \{S\}$ and $\Theta^-(\hat{V}^c) \setminus \{N\}$ respectively.

Let X be the connected component of the set $\widetilde{\mathbb{A}} \setminus (\Theta^+(\widetilde{V}) \cup \Theta^-(\widetilde{V}^c))$ which contains Γ. The set X is open, connected and $\widetilde{f}$-invariant, i.e. $\widetilde{f}(X) = X$, where $\widetilde{f}$ is the lift of f associated to I. Let $\alpha : [0,1] \to \widetilde{\mathbb{A}}$ be a simple arc satisfying:

(i) the endpoints $\alpha(0)$ and $\alpha(1)$ lie in $\Theta^+(\widetilde{V})$ and $\Theta^-(\widetilde{V}^c)$ respectively.

(ii) If $\dot{\alpha}$ denotes the interior of α, i.e. $\dot{\alpha}$ is the image of $(0,1)$ under α, then the set $\dot{\alpha}$ is included in X.

(iii) The intersection $\alpha \cap \Gamma$ is a singleton.

The arc α separates X, because $\pi(X)$ is an open annulus and α joins its two ends (see the paragraph that follows the definitions of $\Theta^+(\hat{V})$ and $\Theta^-(\hat{V}^c)$). Let us denote $R_X(\alpha)$ (resp. $L_X(\alpha)$) the connected component of $X \setminus \alpha$ on the right (resp. left) of α (considering the standard orientation). Since $\dot{\alpha}$ is contained in X, and X is $\widetilde{f}$-invariant, one deduces that for every integer $n \geq 0$, the set $\widetilde{f}^n(\dot{\alpha})$ is included in X, and so we have three possibilities:

- $\widetilde{f}^n(\dot{\alpha}) \cap \alpha \neq \emptyset$;
- $\widetilde{f}^n(\dot{\alpha}) \subset L_X(\alpha)$; or
- $\widetilde{f}^n(\dot{\alpha}) \subset R_X(\alpha)$.

To conclude the proof it suffices consider the following three cases.

Case 1: Suppose that there exists a sequence of integers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ which converges to $+\infty$ such that for all $k \in \mathbb{N}$ we have $\widetilde{f}^{n_k}(\dot{\alpha}) \cap \alpha \neq \emptyset$. Then 0 belongs to $\rho_{\pi(\alpha)}(I)$. This proves that Assertion (1) of Proposition 3.3.8 holds.

Case 2: Suppose that there exists a sequence of integers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ which converges to $+\infty$ such that for all $k \in \mathbb{N}$ we have $\widetilde{f}^{n_k}(\dot{\alpha}) \subset L_X(\alpha)$. Let Γ^r be the connected component of $\Gamma \setminus \alpha$ contained in $R_X(\alpha)$. From the facts that $\widetilde{f}^{n_k}(\alpha \cap \Gamma) \in L_X(\alpha)$, $\widetilde{f}^{n_k}(\Gamma^r)$ is a connected set in X which is unbounded to the right and contained in $\widetilde{V}$ (by Hypothesis (A_2)), we deduce that

$$\widetilde{f}^{n_k}(\Gamma^r) \cap \alpha \cap \widetilde{V} \neq \emptyset.$$

Therefore, there exist a real constant $M > 0$ independent of k and a sequence of points $(\widetilde{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, where $\widetilde{z}_k \in \Gamma^r$ for all $k \in \mathbb{N}$ such that

$$p_1(\widetilde{f}^{n_k}(\widetilde{z}_k)) < p_1(\widetilde{z}_k) + M.$$

Hence, if ρ is a limit point of the sequence $(\rho_{n_k}(\widetilde{z}_k))_{k\in\mathbb{N}}$, where

$$\rho_{n_k}(\widetilde{z}_k) := \frac{1}{n_k}(p_1(\widetilde{f}^{n_k}(\widetilde{z}_k)) - p_1(\widetilde{z}_k)),$$

then $\rho \leq 0$. This implies that $\rho = 0$, because $\rho_{\hat{V}}(I) \subset [0, +\infty]$. Thus 0 belongs to $\rho_K(I)$ where $K = \mathrm{Fr}(V) \cup (\pi(\alpha) \cap V)$. This proves that Assertion (1) of Proposition 3.3.8 holds.

Case 3: Suppose that there exists a sequence of integers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ which converges to $+\infty$ such that for all $k \in \mathbb{N}$ we have $\widetilde{f}^{n_k}(\dot{\alpha}) \subset R_X(\alpha)$. Let Γ^r be the connected component of $\Gamma \setminus \alpha$ contained in $R_X(\alpha)$. Since for all $k \in \mathbb{N}$, the arc $\widetilde{f}^{n_k}(\alpha)$ meets $\Theta^+(\widetilde{V})$ and $\Theta^-(\widetilde{V}^c)$, we deduce that

$$\widetilde{f}^{n_k}(\dot{\alpha} \cap \widetilde{V}^c) \cap \Gamma^r \neq \emptyset.$$

Therefore, there exist a real constant $M > 0$ independent of k and a sequence of points $(\widetilde{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, where $\widetilde{z}_k \in \alpha \cap \widetilde{V}^c$ such that

$$p_1(\widetilde{z}_k) < p_1(\widetilde{f}^{n_k}(\widetilde{z}_k)) + M.$$

If ρ is a limit point of the sequence $(\rho_{n_k}(\widetilde{z}_k))_{k\in\mathbb{N}}$, where

$$\rho_{n_k}(\widetilde{z}_k) := \frac{1}{n_k}(p_1(\widetilde{f}^{n_k}(\widetilde{z}_k)) - p_1(\widetilde{z}_k)),$$

then $\rho \geq 0$. Hence, if K is the compact set $\mathrm{Fr}(V) \cup (\pi(\alpha) \cap V^c)$ of $\mathbb{A}$, then $\rho_K(I)$ contains positive real numbers. This proves that Assertion (2) of Proposition 3.3.8 holds. This completes the proof of Proposition 3.3.8. ■

As a consequence we have the following corollary.

Corollary 3.3.10. *Let $I = (f_t)_{t\in[0,1]}$, f be as in Theorem B*. Assume furthermore that*

- (A_1') *The homeomorphism f satisfies the local intersection property at S.*
- (A_2') *There exist two f-free essential Jordan curves γ_N and γ_S with $\gamma_N \subset U^N_{\gamma_S}$ such that the closed annulus A delimited by γ_N and γ_S has maximal invariant set $\Theta(A)$ non-empty.*
- (A_3') *the set $\rho_{\hat{U}^S_{\gamma_S}}(I)$ is included in $[0, +\infty]$ and $\rho_A(I)$ is contained in $[-\infty, 0]$.*

Then there exists a compact set K in $\mathbb{A}$ such that 0 belongs to $\rho_K(I)$.

Proof. Changing I by I^{-1} and conjugating I by the orientation reversing homeomorphism $(u, r) \mapsto (-u, r)$ of the annulus $\mathbb{A}$, we may suppose that γ_N is attracting, i.e. $f(\gamma_N) \subset U^S_{\gamma_N}$ and that hypothesis (A_3') holds. Let us put $A_0 = \mathrm{Cl}(U^S_{\gamma_N})$ and for every integer $n \geq 1$ we define $A_n = f^{-n}(U^S_{\gamma_N})$. Note that $\mathbb{A}' = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ is an open annulus and $f(\mathbb{A}') = \mathbb{A}'$. Let us put $f' = f|_{\mathbb{A}'}$. We note that f' is isotopic to the identity of $\mathbb{A}'$, and since $f' = f|_{\mathbb{A}'}$ there is an isotopy I' on the annulus $\mathbb{A}'$ from the identity of $\mathbb{A}'$ to the homeomorphism f' such that for every compact set K contained in $\mathbb{A}'$, we have $\rho_K(I) = \rho_K(I')$. By Proposition 3.3.8, applied to I' and f' on $\mathbb{A}'$, we know that

(1) there exists a compact set K' in $\mathbb{A}'$ such that 0 belongs to $\rho_K(I')$, or
(2) there exists a compact set K' in $\mathbb{A}'$ contained in $\mathbb{A}' \setminus U^S_{\gamma_S}$ such that the set $\rho_{K'}(I')$ intersects $[0, +\infty]$.

If assertion (1) holds we are done. Suppose now that assertion (2) holds. Since K' is a compact set contained in $\mathbb{A}' \setminus U^S_{\gamma_S}$, there exists an integer positive n such that K' is included in $A \cup \cdots \cup f'^{-n}(A)$. Hence $\rho_{K'}(I')$ is included in the union of $\rho_{f'^{-i}(A)}(I')$. Since for every i, $\rho_{f'^{-i}(A)}(I') = \rho_A(I')$ and $\rho_A(I) = \rho_A(I')$, we deduce that $\rho_A(I)$ intersects $[0, +\infty]$. Moreover, by hypothesis, we know that $\rho_A(I)$ is included in $[-\infty, 0]$. Therefore, 0 belongs to $\rho_A(I)$. This completes the proof. ■

3.3.3 Proof of Theorem B*

In this subsection we finish the proof of Theorem B*, using Theorem C. Let I an isotopy in $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{A})$ from the identity to a homeomorphism f. Suppose that $\rho_{\mathrm{ann}}(I)$ contains both positive and negative real numbers. One considers the different cases of Proposition 3.3.3. In case (a) we are done.
Suppose now that case (b) of Proposition 3.3.3 holds. Let g be the orientation reversing homeomorphism of $\mathbb{A}$ defined by $(u, r) \mapsto (-u, r)$. Considering I^{-1} instead of I, or conjugating I by g or considering $gI^{-1}g^{-1}$ instead of I, we can assume that hypotheses (A_1)-(A_3) of Proposition 3.3.8 hold. Thus, one of the following assertions holds.

(1) There exists a compact set K of $\mathbb{A}$ such that 0 belongs to $\rho_K(I)$, or
(2) there exists a compact set K contained in $\mathrm{Cl}(U^N_\gamma)$ of $\mathbb{A}$ such that the rotation set $\rho_K(I)$ intersects $[0, +\infty]$.

If assertion (1) holds we are done. Suppose now that assertion (2) holds. Since $K \subset \mathrm{Cl}(U^N_\gamma)$ and $\hat{f}(\mathrm{Cl}(U^S_\gamma)) \subset U^S_\gamma$, we deduce that $\rho_K(I) \subset \rho_{\hat{U}^N_\gamma}(I) \subset [-\infty, 0]$, this last inclusion holds because case (b) of Proposition 3.3.3 and hypothesis (A_3) of Proposition 3.3.8 hold. Therefore 0 belongs to $\rho_K(I)$. This completes the proof when the case (b) of Proposition 3.3.3 holds.
At last suppose that Case (c) of Proposition 3.3.3 holds. Now, by Corollary 3.3.10, there exists a compact set K of $\mathbb{A}$ such that 0 belongs to $\rho_K(I)$. This completes the proof of Theorem B*.

3.4 Proof of Theorem D

The purpose of this section is to prove Theorem D assuming Theorem C. Let I, f, γ^+ and γ^- be as in the hypotheses of the theorem. Without loss of generality, we suppose that γ^- is contained in $U^S_{\gamma^+}$. Let $\Theta(A)$ be the maximal invariant set of the annulus A delimited by γ^+ and γ^-. As we have seen in § 3.2.2, we can suppose that $\rho_{\Theta(A)}(I)$ contains both positive and negative real numbers. We want to prove that 0 belongs to $\rho_{\Theta(A)}(I)$.

An f-free essential Jordan curve γ in $\mathbb{A}$ will be said to be attracting if $f(\gamma) \subset U^S_\gamma$ and repulsing if $f^{-1}(\gamma) \subset U^S_\gamma$.

Lemma 3.4.1. *Let γ and γ' be two disjoint f-free essential curves in $\mathbb{A}$. Suppose that γ is attracting and γ' is repulsing. Then the maximal invariant set of the closed annulus delimited by γ and γ' is a connected set.*

Proof. We remark that, in this case, the maximal invariant set is an intersection of a decreasing sequence of compact annuli. ■

We remark that Lemma 3.3.2 implies Theorem D when $\Theta(A)$ is a connected set. By the previous lemma and considering I^{-1} instead of I (if necessary), we can assume that both γ^+ and γ^- are attracting Jordan curves. Hence the sets

$$\Theta^+(\hat{U}^S_{\gamma^-}) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \hat{f}^n(\hat{U}^S_{\gamma^-}) \quad \text{and} \quad \Theta^-(\hat{U}^N_{\gamma^+}) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \hat{f}^{-n}(\hat{U}^N_{\gamma^+})$$

are continuum, their complements are connected set of $\hat{\mathbb{A}}$ and contain S and N respectively. Let us write $\mathbb{A}'$ the set $\hat{\mathbb{A}} \setminus (\Theta^+(\hat{U}^S_{\gamma^-}) \cup \Theta^-(\hat{U}^N_{\gamma^+}))$. Then $\mathbb{A}'$ is homeomorphic to an open annulus and $f(\mathbb{A}') = \mathbb{A}'$. Let us write $f' = f|_{\mathbb{A}'}$. We note that f' is isotopic to the identity of $\mathbb{A}'$, and since $f' = f|_{\mathbb{A}'}$ there is an isotopy I' on the annulus $\mathbb{A}'$ from the identity of $\mathbb{A}'$ to the homeomorphism f' such that for every compact set K contained in $\mathbb{A}'$, we have $\rho_K(I) = \rho_K(I')$. Since $f' = f|_{\mathbb{A}'}$ does not satisfy the local intersection property at neither N' nor S', where N' and S' are the ends of $\mathbb{A}'$, by Proposition 3.3.3 there exists an f'-invariant and compact set K in $\mathbb{A}'$ such that 0 belongs to $\rho_K(I')$. Since K is an invariant set in $\mathbb{A}'$ under f', we deduce that K is included in $\Theta(A)$. Therefore,

$$0 \in \rho_K(I') \subset \rho_{\Theta(A)}(I') = \rho_{\Theta(A)}(I).$$

This proves Theorem D.

3.5 Dynamics in the Closed Annulus: Theorem C

The purpose of this section is to prove Theorem C. Let I, f, γ_0, γ_1 and γ_2 be as in the hypotheses of the theorem. Without loss of generality, for $i \in \{0,1\}$ we suppose that γ_{i+1} is contained in $U^S_{\gamma_i}$. Let $\Theta(A_i)$ be the maximal invariant set of the closed annulus A_i delimited by γ_i and γ_{i+1}. Let $\Theta(A)$ be the maximal invariant set of the annulus $A = A_0 \cup A_1$. We want to prove that 0 belongs to $\rho_{\Theta(A)}(I)$.

3.5.1 Reduction of Theorem C

We recall that Lemma 3.3.2 implies Theorem C when $\Theta(A)$ is a connected set. Thus, from now on we assume that $\Theta(A)$ is a disconnected set. This implies that the f-free essential Jordan curves γ_0, γ_1 and γ_2 are either all attracting or all repulsing. Indeed, changing I into I^{-1}, we can suppose that γ_0 is attracting. If γ_2 is repulsing, then by Lemma 3.4.1 $\Theta(A)$ is a connected set. If γ_1 is repulsing and γ_2 attracting, then by Lemma 3.4.1 both $\Theta(A_0)$ and $\Theta(A_1)$ are connected sets which separate the annulus. In this case, $\Theta(A)$ is the union of $\Theta(A_0)$, of $\Theta(A_1)$ and of the bounded connected component of the complement of $\Theta(A_0) \cup \Theta(A_1)$ and so $\Theta(A)$ is a connected set. Therefore,

changing I into I^{-1} and conjugating it by a change of coordinates (given by Schoenflies' Theorem), we can assume that γ_0, γ_1 and γ_2 are attracting Euclidean circles.

We will work in $\widetilde{\mathbb{A}} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ the universal covering of $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ where $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. We recall that $\pi : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{A}$ is the canonical projection of $\widetilde{\mathbb{A}}$ onto $\mathbb{A}$ and that $p_1 : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{R}$ is the projection onto the first coordinate. Let $\widetilde{f}$ be the lift of f associated to I, that is, if $\widetilde{I} = (\widetilde{f}_t)_{t\in[0,1]}$ is the unique lift of I such that $\widetilde{f}_0$ is the identity of $\widetilde{\mathbb{A}}$, then $\widetilde{f} := \widetilde{f}_1$. Recall that $\widetilde{f} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ is a homeomorphism which is isotopic to the identity (this is equivalent to require that $\widetilde{f}$ is orientation preserving) and which commutes with the translation $T : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ defined by $T(x, y) = (x + 1, y)$. For $j \in \{0, 1, 2\}$ we define $\Gamma_j := \pi^{-1}(\gamma_j)$ and let $\Theta(\widetilde{A}) := \pi^{-1}(\Theta(A))$. If γ is an essential Jordan curve in $\mathbb{A}$, and $\Gamma = \pi^{-1}(\gamma)$, we will write U^+_Γ (resp. U^-_Γ) the upper (resp. lower) unbounded connected component of the complement of Γ. From now on, we will write $\rho(\widetilde{f})$ instead of $\rho_{\mathrm{ann}}(I)$.

Since $\rho(\widetilde{f}^q) = q\rho(\widetilde{f})$ for every $q \in \mathbb{Z}$, if $\Theta(\widetilde{A})$ is a disconnected and non-empty set, then considering an iterate of $\widetilde{f}$ instead of $\widetilde{f}$, we can assume the following hypotheses:

(H_1) The sets Γ_0, Γ_1 and Γ_2 are horizontal straight lines such that for $i \in \{0, 1\}$, $\Gamma_i \subset U^+_{\Gamma_{i+1}}$ and thus are attracting, that is $\widetilde{f}(\Gamma_j) \subset U^-_{\Gamma_j}$ for $j \in \{0, 1, 2\}$.

(H_2) For every integer $n \geq 1$, we have $\widetilde{f}^n(\Gamma_0) \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$.

For $i \in \{0, 1\}$, we define by $\Theta(\widetilde{A}_i)$ the maximal invariant set of $\widetilde{A}_i$ the topological closed band delimited by Γ_i and Γ_{i+1}.

(H_3) The sets $\Theta(\widetilde{A}_0)$ and $\Theta(\widetilde{A}_1)$ are non-empty and

$$\rho_{\Theta(\widetilde{A}_0)}(\widetilde{f}) \subset (0, +\infty) \quad \text{and} \quad \rho_{\Theta(\widetilde{A}_1)}(\widetilde{f}) \subset (-\infty, 0).$$

Thus, we have reduced Theorem C to the following theorem.

Theorem C*. *Let $\tilde{f} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ be a homeomorphism isotopic to the identity, commuting with the translation T, and satisfying hypotheses (H_1) to (H_3). Let $\Theta(\widetilde{A})$ be the invariant maximal set of $\widetilde{A} := \widetilde{A}_0 \cup \widetilde{A}_1$. Then*

$$0 \in \rho_{\Theta(\widetilde{A})}(\widetilde{f}).$$

Outline of the proof of Theorem C* In Subsection 3.5.2, using hypotheses (H_1) and (H_2), we begin by constructing unstable sets and stable sets of the band $\widetilde{A}_i$ delimited by Γ_i and Γ_{i+1}. Then we consider their connected components, called unstable branches and stable branches: these are connected and compact sets, contained in $\widetilde{A}_i$ and meeting Γ_{i+1} but not Γ_i and Γ_i but not Γ_{i+1} respectively. Let $\Lambda^-_0(x)$ denote the unstable branch of $x \in \Theta(\widetilde{A}_0)$ for the band $\widetilde{A}_0$ and let $\Lambda^+_1(y)$ denote the stable branch of $y \in \Theta(\widetilde{A}_1)$ for the band $\widetilde{A}_1$.

Next, in Subsection 3.5.3, we will study the sequence of iterates of $\Lambda^-_0(x)$. Using hypothesis (H_3) (and in particular that 0 does not belong to $\rho_{\Theta(\widetilde{A}_0)}(\widetilde{f})$), we will prove the following properties:

(1) For every compact set $\widetilde{K}$ included in $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{f}^n(\widetilde{K})$ is disjoint from $\widetilde{K}$ for every large enough integer n.

(2) The sequence $(\widetilde{f}^{-n}(\Lambda_0^-(x))_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly bounded to the right.

Finally, in Subsection 3.5.5, we will finish the proof of Theorem C^*. From the previous properties Theorem C* we will be a consequence of the following proposition.

Proposition 3.5.1. *For every $x \in \Theta(\widetilde{A}_0)$ there exists $y \in \Theta(\widetilde{A}_1)$ such that for every sufficiently large integer n, we have*

$$\widetilde{f}^n(\Lambda_0^-(x)) \cap \Lambda_1^+(y) \neq \emptyset.$$

Note that if $\widetilde{z} \in \widetilde{f}^n(\Lambda_0^-(x)) \cap \Lambda_1^+(y)$, then $z \in \Theta(\widetilde{A})$. By above Property (2) and its symmetric statements the positive and negative iterates of $\widetilde{z}$ go to the left. This proves that 0 belongs to $\rho_{\Theta(\widetilde{A})}(\widetilde{f})$, completing the proof of Theorem C^*.

3.5.2 Stable branches and unstable branches

In this subsection, we consider a homeomorphism $\widetilde{f} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ isotopic to the identity, commuting with the translation T and satisfying hypotheses (H_1) and (H_2). For $i \in \{0, 1\}$, we define by $\widetilde{A}_i$ the topological closed band delimited by Γ_i and Γ_{i+1}. Following an idea of Birkhoff, in this subsection we will construct *unstable branches* and *stable branches* of the band $\widetilde{A}_i$.

Stable sets and unstable sets

Let us begin with the definition of an *unstable set* (resp. *stable set*) of the band $\widetilde{A}_i$ for $\widetilde{f}$.

Definition 3.5.2. *We say that Λ_i^- is an unstable set of the band $\widetilde{A}_i$ for $\widetilde{f}$ if it satisfies the following properties:*

1. *the set Λ_i^- is a closed subset of $\widetilde{A}_i$;*
2. *we have $\Lambda_i^- \cap \Gamma_{i+1} \neq \emptyset$; and*
3. *the set Λ_i^- is negatively invariant under $\widetilde{f}$, i.e. $\widetilde{f}^{-1}(\Lambda_i^-) \subset \Lambda_i^-$.*

Similarly we say that Λ_i^+ is a stable set of the band $\widetilde{A_i}$ for $\widetilde{f}$ if it satisfies:

1. *the set Λ_i^+ is a closed subset of $\widetilde{A}_i$;*
2. *we have $\Lambda_i^+ \cap \Gamma_i \neq \emptyset$; and*
3. *the set Λ_i^+ is positively invariant under $\widetilde{f}$, i.e. $\widetilde{f}(\Lambda_i^+) \subset \Lambda_i^+$.*

We prove the following proposition.

Proposition 3.5.3. *Let $\widetilde{f} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ be a homeomorphism isotopic to the identity, commuting with the translation T and satisfying hypotheses (H_1) and (H_2). For $i \in \{0, 1\}$ and for every $n \in \mathbb{Z}$, we define*

$$\Lambda_{n,i}^- := \widetilde{f}^n(\mathrm{Cl}(U_{\Gamma_i}^-)) \cap \mathrm{Cl}(U_{\Gamma_{i+1}}^+) \quad \textit{and } \Lambda_{n,i}^+ := \mathrm{Cl}(U_{\Gamma_i}^-) \cap \widetilde{f}^{-n}(\mathrm{Cl}(U_{\Gamma_{i+1}}^+)).$$

The sets

$$\Lambda_i^- := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_{n,i}^- \quad \textit{and } \Lambda_i^+ := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_{n,i}^+,$$

are respectively an unstable set and a stable set of the band $\widetilde{A}_i$ *for* $\widetilde{f}$.

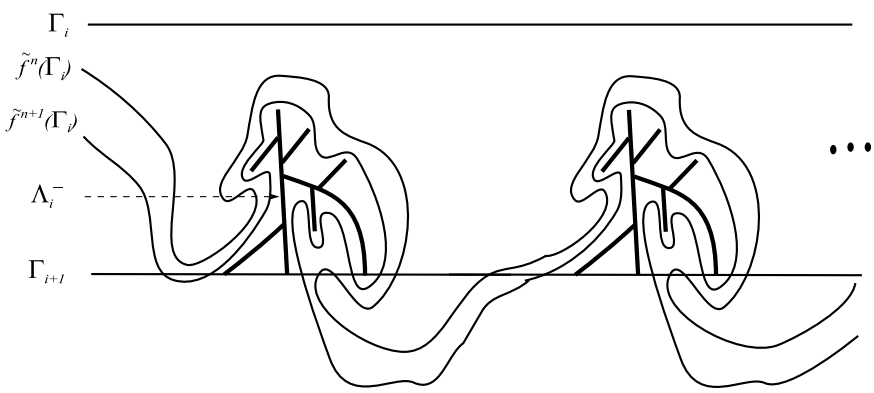

Figure 3.3: Unstable set

Remark 9. The set Λ_i^- consists of the points in $\widetilde{A}_i$ whose negative iterates under $\widetilde{f}$ remain in the band $\widetilde{A}_i$.

Proof of Proposition 3.5.3. We will prove that Λ_i^- is an unstable set of the band $\widetilde{A}_i$ for $\tilde{f}$ (one shows similarly that Λ_i^+ is a stable set of the band $\widetilde{A}_i$ for $\tilde{f}$). Item 1 of the above definition is a direct consequence of the definition of Λ_i^- and the fact that Γ_i is an attracting line. On the other hand, as the horizontal straight line Γ_{i+1} is attracting, we have that $\widetilde{f}^{-1}(\mathrm{Cl}(U^+_{\Gamma_{i+1}})) \subset \mathrm{Cl}(U^+_{\Gamma_{i+1}})$, and so

$$\widetilde{f}^{-1}(\Lambda_i^-) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{f}^{n-1}(\mathrm{Cl}(U^-_{\Gamma_i})) \cap \widetilde{f}^{-1}(\mathrm{Cl}(U^+_{\Gamma_{i+1}})) \subset \Lambda_i^-.$$

We have proved items 1 and 3 of the above definition. Next, let us prove item 2, that is we prove that $\Lambda_i^- \cap \Gamma_{i+1} \neq \emptyset$ by contradiction. Suppose that for every $\tilde{z} \in \Gamma_{i+1}$, we have $\widetilde{z} \notin \Lambda_i^-$. Then we can find the smallest integer $n_0 = n_0(\widetilde{z})$ such that $\widetilde{f}^{-n_0(\widetilde{z})}(\widetilde{z}) \in U^+_{\Gamma_i}$. Since $\widetilde{f}$ is continuous and commutes with the translation T, we have that $n_0(\widetilde{z}) \geq n_0(\widetilde{z}')$ for every $\widetilde{z}'$ close to $\widetilde{z}$ and that $n_0(\widetilde{z}) = n_0(T(\widetilde{z}))$. By compactness, we can define the integer

$$n_0 = \sup_{\widetilde{z}\in\Gamma_{i+1}} n_0(\widetilde{z}) = \sup\{n_0(\widetilde{z}) : \widetilde{z} \in \Gamma_{i+1} \text{ and } p_1(\widetilde{z}) \in [0,1]\}$$

which satisfies $\widetilde{f}^{-n_0}(\Gamma_{i+1}) \subset U^+_{\Gamma_i}$. This contradicts hypothesis (H_2), so item 2 is proved. ■

Stable branches and unstable branches

Now, we state and prove the properties verified by unstable branches (we have the "symmetric properties" for stable branches) that we will use in the next subsections.

Definition 3.5.4. *For $i \in \{0,1\}$, we call* unstable branch of the band $\widetilde{A}_i$ *any connected component of the unstable set, Λ_i^-. For $x \in \Lambda_i^-$, we denote $\Lambda_i^-(x)$, and we say that it is* the unstable branch of x*, the connected component of Λ_i^- containing x.*
The stable branches *of $\widetilde{A}_i$ and the sets $\Lambda_i^+(x)$ are defined similarly.*

We have the following properties.

Proposition 3.5.5. *Let $\widetilde{f} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ be a homeomorphism isotopic to the identity, commuting to the translation T and satisfying hypotheses (H_1) and (H_2). If $x \in \Lambda_i^-$, then*
(1) the set $\Lambda_i^-(x)$ is a compact subset of $\widetilde{A}_i$;
(2) we have $\Lambda_i^-(x) \cap \Gamma_{i+1} \neq \emptyset$;
(3) we have $\widetilde{f}^{-1}(\Lambda_i^-(x)) \subset \Lambda_i^-(\widetilde{f}^{-1}(x))$; and
(4) there exists a real number $M_i^- > 0$ (independent of x) such that

$$\operatorname{diam} p_1(\Lambda_i^-(x)) < M_i^-.$$

The proof of Proposition 3.5.5 will use following lemma.

Lemma 3.5.6. *For $x \in \Lambda_i^-$, we write $\Lambda_{n,i}^-(x)$ the connected component of $\Lambda_{n,i}^-$ containing x. Then*

$$\Lambda_i^-(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_{n,i}^-(x).$$

Proof of Lemma 3.5.6. First, for every n in $\mathbb{N}$, from Proposition 3.5.3 we deduce that $\Lambda_i^-(x) \subset \Lambda_{n,i}^-(x)$. This implies that $\Lambda_i^-(x) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_{n,i}^-(x)$. To prove the reverse inclusion we need the following claim.

Claim. *$(\Lambda_{n,i}^-(x))_{n\geq 1}$ is a decreasing sequence of compact and connected sets contained in Λ_i^-.*

Proof of the claim. By definition for every integer $n \geq 1$, the set $\Lambda_{n,i}^-(x)$ is connected, and since Γ_{i+1} is an attracting line, we deduce that $\Lambda_{n+1,i}^-(x) \subset \Lambda_{n,i}^-(x)$, i.e. the sequence is decreasing. Now, the compactness follows of the facts that $\widetilde{f}^n(\Gamma_0) \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ (hypothesis (H_2)) and that $\widetilde{f}$ commutes with T. This proves the claim. ■

From the claim the intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_{n,i}^-(x)$ is a compact, connected set contained in Λ_i^- which contains x. We conclude that $\cap_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_{n,i}^-(x) \subset \Lambda_i^-(x)$. This completes the proof of the lemma. ■

Proof of Proposition 3.5.5. Proof of item (1). We proved (see the claim above) that $\Lambda_{n,i}^-(x)$ is a compact set for every integer $n \geq 1$, so it provides the compactness of $\Lambda_i^-(x)$. Moreover by Proposition 3.5.3, $\Lambda_i^-(x)$ is contained in $\widetilde{A}_i$.

Proof of item (2). We know that $\left(\Lambda_{n,i}^-(x)\right)_{n\geq 1}$ is a decreasing sequence of compact and connected sets. Moreover for every integer $n \geq 1$, $\Lambda_{n,i}^-(x) \cap \Gamma_{i+1} \neq$

$\emptyset$. Therefore $\left(\Lambda^-_{n,i}(x)\cap\Gamma_{i+1}\right)_{n\geq 1}$ is a decreasing sequence of compact non-empty sets and so by Proposition 3.5.3, we have that

$$\Lambda^-_i(x)\cap\Gamma_{i+1}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Lambda^-_{n,i}(x)\cap\Gamma_{i+1}\neq\emptyset.$$

This proves item (2).

Proof of item (3). By Proposition 3.5.3, we have that $\widetilde{f}^{-1}(\Lambda^-_i)\subset\Lambda^-_i$. By connectedness, we deduce that $\widetilde{f}^{-1}(\Lambda^-_i(x))\subset\Lambda^-_i(\widetilde{f}^{-1}(x))$.

Proof of item (4). Let x be in Λ^-_i. Since by Lemma 3.5.6, we have that $\Lambda^-_i(x)$ is contained in $\Lambda^-_{1,i}(x)$, it suffices check the property for $\Lambda^-_{1,i}$. We will use the following result of Keréjártó (see [LY97]): let U_1 and U_2 be two Jordan domains in the two-sphere, that is, connected open sets whose boundary is homeomorphic to the circle. Then each connected component of $U_1\cap U_2$ is also a Jordan domain.

The Keréjártó's result, applied to $U_1=\widetilde{f}(U^-_{\Gamma_i})$ and $U_2=U^+_{\Gamma_{i+1}}$, say that the connected component of $\widetilde{f}(U^-_{\Gamma_i})\cap U^+_{\Gamma_{i+1}}$ containing x is a Jordan domain, we write X this set. Moreover by Hypothesis (H_2) and the fact that $\widetilde{f}$ commutes with T, X is bounded in $\widetilde{\mathbb{A}}$, i.e. its closure is compact. Hence, there exists an arc Γ'_i contained in Γ_i such that $\widetilde{f}(\Gamma'_i)$ is a connected component of $\mathrm{Fr}(X)\cap\widetilde{\Gamma}_i$ with $p_1(\widetilde{f}(\Gamma'_i))$ maximal with respect to the inclusion. Let Γ'_{i+1} be the closure of the bounded connected component of $\Gamma_{i+1}\setminus\widetilde{f}(\Gamma'_i)$. Let X be the domain delimited by the circle $\Gamma'_{i+1}\cup\widetilde{f}(\Gamma'_i)$. We have that

- $\Lambda_{1,i}(x)$ is contained in the closure of X;
- $\operatorname{diam}p_1(X)\leq\operatorname{diam}p_1(\widetilde{f}(\Gamma'_i))$.

Hence it rest to prove that there exists M^-_i (independent of Γ'_i) such that $\operatorname{diam}p_1(\widetilde{f}(\Gamma'_i))<M^-_i$. Let

$$M_0:=\sup_{\widetilde{z}\in\widetilde{A}_i}\left|p_1(\widetilde{f}(\widetilde{z}))-p_1(\widetilde{z})\right|.$$

Suppose that Γ'_i is the arc with ends $\widetilde{z}_0$ and $\widetilde{z}_1$, with $p_1(\widetilde{z}_0)<p_1(\widetilde{z}_1)$. By Hypothesis (H_2) and the fact that $\widetilde{f}$ commutes with T, we have that $p_1(\widetilde{z}_1)\leq p_1(\widetilde{z}_0)+1$. Therefore,

$$\operatorname{diam}p_1(\widetilde{f}(\Gamma'_i))\leq 2M_0+1.$$

This proves item (4). This completes the proof of the proposition. ■

3.5.3 Consequence of Hypothesis (H_3)

In this subsection, we consider a homeomorphism $\widetilde{f}:\widetilde{\mathbb{A}}\to\widetilde{\mathbb{A}}$ isotopic to the identity, commuting with the translation T and satisfying hypotheses (H_1)-(H_3). Using hypothesis (H_3) we will study the dynamics of unstable

branches (we have the symmetric properties for stable branches).

Let us begin by recalling that for $i \in \{0,1\}$, the inclusion $\Theta(\widetilde{A}_i) \subset \widetilde{A}_i$ implies that $\rho_{\Theta(\widetilde{A}_i)}(\widetilde{f}) \subset \rho_{\widetilde{A}_i}(\widetilde{f})$, but we cannot use hypothesis (H_3) to conclude that $\rho_{\widetilde{A}_0}(\widetilde{f}) \subset (0,+\infty)$ and $\rho_{\widetilde{A}_1}(\widetilde{f}) \subset (-\infty,0)$. However, using the fact that the straight lines Γ_i and Γ_{i+1} are attracting, we can prove that the above inclusions are true.

Proposition 3.5.7. *For $i \in \{0,1\}$, we have*

$$\rho_{\widetilde{A}_i}(\widetilde{f}) \subset \rho_{mes}(\Theta(\widetilde{A}_i), \widetilde{f}) = \mathrm{Conv}\left(\rho_{\Theta(\widetilde{A}_i)}(\widetilde{f})\right).$$

In particular $\rho_{\widetilde{A}_0}(\widetilde{f}) \subset (0,+\infty)$ and $\rho_{\widetilde{A}_1}(\widetilde{f}) \subset (-\infty,0)$.

Proof. Recall that we are using the notation $\rho_{\widetilde{A}_i}(\widetilde{f})$ instead of $\rho_{\pi(\widetilde{A}_i)}(I)$. Let ρ be an element in $\rho_{\widetilde{A}_i}(\widetilde{f})$. By definition and the fact that $\gamma_i = \pi(\Gamma_i)$ and $\gamma_{i+1} = \pi(\Gamma_{i+1})$ are f-free, there exist a sequence of points $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ and a sequence of integers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfying:

(i) for every $k \in \mathbb{N}$ and integer $j \in \{0,\cdots,n_k\}$ we have $f^j(z_k) \in A_i = \pi(\widetilde{A}_i)$;

(ii) the sequence $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converges to $+\infty$; and

(iii) the sequence $(\rho_{n_k}(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converges to ρ.

Let us consider the sequence of Borel probability measures $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$, where for every integer k, μ_k is defined as:

$$\mu_k := \frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1} \delta_{f^i(z_k)},$$

where δ_z $(z \in \mathbb{A})$ denotes the *Dirac's measure at z*. By item (i), these measures have their supports included in A_i, and so changing the sequence $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ by one of its subsequence, we may suppose that the sequence $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converges. Let μ be its limit. We know that the measure μ is invariant (under f), and so its support $\mathrm{supp}(\mu)$ is contained in the maximal f-invariant set of A_i, denoted by $\Theta(A_i)$. Moreover

$$\rho_{n_k}(z_k) = \int \rho_1 \, d\mu_k \to \int \rho_1 \, d\mu = \rho(\mu).$$

From item (iii) and the uniqueness of the limit, we deduce that ρ belongs to $\rho_{mes}(\Theta(\widetilde{A}_i), \widetilde{f})$. This proves that $\rho_{\widetilde{A}_i}(\widetilde{f}) \subset \rho_{mes}(\Theta(\widetilde{A}_i), \widetilde{f})$. On the other hand, by Lemma 3.3.2, we know that $\rho_{mes}(\Theta(\widetilde{A}_i), \widetilde{f}) = \mathrm{Conv}\left(\rho_{\Theta(\widetilde{A}_i)}(\widetilde{f})\right)$. Thus, using hypothesis (H_3) we have that $\rho_{\widetilde{A}_0}(\widetilde{f}) \subset (0,+\infty)$ and $\rho_{\widetilde{A}_1}(\widetilde{f}) \subset (-\infty,0)$, because $\rho_{\widetilde{A}_i}(\widetilde{f})$ is a compact set. This completes the proof of the proposition. ■

As an immediate consequence of the above proposition (and in particular using that 0 does not belong to $\rho_{\widetilde{A}_0}(\widetilde{f})$) we have the following lemma.

Lemma 3.5.8. *For every real number $M > 0$, there exists $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ such that for every compact set $\widetilde{K}$ included in $\widetilde{A}_0$, with* $\operatorname{diam} p_1(\widetilde{K}) \leq M$, *and for every integer n, $|n| \geq n_0$ we have*

$$\widetilde{f}^n(\widetilde{K}) \cap \widetilde{K} = \emptyset.$$

Proof. Suppose by contradiction that there are a real number $M_0 > 0$, and a sequence of integers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ which tends to $+\infty$ and points $\widetilde{z}_k \in \widetilde{A}_0$ such that $\widetilde{f}^{n_k}(\widetilde{z}_k) \in \widetilde{A}_0$, and

$$\left|p_1(\widetilde{f}^{n_k}(\widetilde{z}_k)) - p_1(\widetilde{z}_k)\right| \leq M_0.$$

Hence,

$$\left|\rho_{n_k}(\widetilde{z}_k, \widetilde{f})\right| := \frac{1}{n_k}\left|p_1(\widetilde{f}^{n_k}(\widetilde{z}_k)) - p_1(\widetilde{z}_k)\right| \leq \frac{M_0}{n_k}.$$

Letting k tends to infinity, one deduces that 0 belongs to $\rho_{\widetilde{A}_0}(\widetilde{f})$. This contradicts Proposition 3.5.7, completing the proof. ■

In the sequel, for every real number M, and $i \in \{0, 1\}$ we write

$$L_{\widetilde{A}_i}(M) := \{\widetilde{z} \in \widetilde{A}_i : p_1(\widetilde{z}) < M\} \quad \text{and} \quad R_{\widetilde{A}_i}(M) := \{\widetilde{z} \in \widetilde{A}_i : p_1(\widetilde{z}) > M\}.$$

Lemma 3.5.9. *Let $x \in \Theta(\widetilde{A}_0)$. For every real number M, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for every integer $n \geq n_0$ we have*

$$\widetilde{f}^{-n}(x) \subset L_{\widetilde{A}_0}(-M) \quad \textit{and} \quad \widetilde{f}^n(x) \subset R_{\widetilde{A}_0}(M).$$

Proof. In both cases the proof is analogous, so we only prove the first inclusion. Let

$$M_0 := \sup_{\widetilde{z}\in\widetilde{A}_0}\left|p_1(\widetilde{f}(\widetilde{z})) - p_1(\widetilde{z})\right|.$$

Let M be a positive real number such that $2M > M_0$ and $-M < p_1(x) < M$. Let us put $\widetilde{K} = \mathrm{Cl}(R_{\widetilde{A}_0}(-M)) \cap \mathrm{Cl}(L_{\widetilde{A}_0}(M))$. By Lemma 3.5.8, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for every integer $n \geq n_0$ we have $\widetilde{f}^{-n}(x) \notin \widetilde{K}$, i.e. $\widetilde{f}^{-n}(x) \in L_{\widetilde{A}_0}(-M) \cup R_{\widetilde{A}_0}(M)$. Suppose that there are two integers $n'' > n' \geq n_0$ such that $\widetilde{f}^{-n'}(x) \in L_{\widetilde{A}_0}(-M)$ and $\widetilde{f}^{-n''}(x) \in R_{\widetilde{A}_0}(M)$. The following claim contradicts the choice of n_0 (see Figure 3.4).

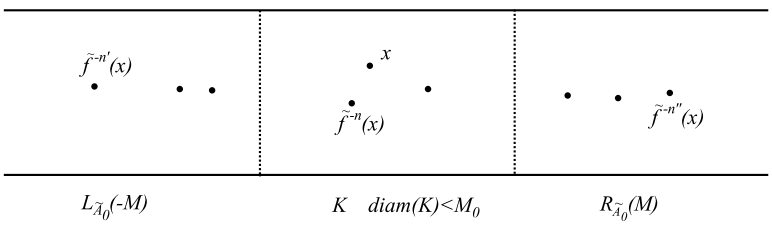

Figure 3.4: Orbit of x

Claim. *There is an integer $n'' > n > n' \geq n_0$ such that $\widetilde{f}^{-n}(x) \in \widetilde{K}$.*

Proof. Let

$$n-1 := \max\{m \in \{n', \cdots, n''\} : \widetilde{f}^{-m}(x) \in L_{\widetilde{A}_0}(-M)\}.$$

(From the choice of n' and n'' such integer exists). By definition of n, we have $p_1(\widetilde{f}^{-n+1}(x)) < -M \leq p_1(\widetilde{f}^{-n}(x))$, and so in order to prove the claim it suffices to check that $\widetilde{f}^{-n}(x) < M$. Recall that for every integer m, the point $\widetilde{f}^m(x)$ is in $\widetilde{A}_0$ and so

$$p_1(\widetilde{f}^{-n}(x)) = p_1(\widetilde{f}^{-n}(x)) - p_1(\widetilde{f}^{-n+1}(x)) + p_1(\widetilde{f}^{-n+1}(x)) \leq M_0 - M < M.$$

This proves the claim. ■

We conclude that the sequence $(f^{-n}(x))_{n\geq n_0}$ is contained either in $L_{\widetilde{A}_0}(-M)$ or in $R_{\widetilde{A}_0}(M)$. Since $\rho_{\Theta(\widetilde{A}_0)}(\widetilde{f}) \subset (0, +\infty)$, the second inclusion cannot possible, completing the proof of the lemma. ■

Lemma 3.5.10. *Let $x \in \Theta(\widetilde{A}_0)$. Then the sequence $\{\widetilde{f}^{-n}(\Lambda_0^-(x))\}_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly bounded to the right, that is, for every real number M, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for every integer $n \geq n_0$ we have*

$$\widetilde{f}^{-n}(\Lambda_0^-(x)) \subset L_{\widetilde{A}_0}(M).$$

Proof. Let $n \in \mathbb{N}$. Since $\widetilde{f}^{-n}(\Lambda_0^-(x)) \subset \Lambda_0^-(\widetilde{f}^{-n}(x))$ Proposition 3.5.5 provides us a real number M_0^- (independent of n) such that for every $\widetilde{z} \in \Lambda_0^-(x)$ we have

$$\left|p_1(\widetilde{f}^{-n}(\widetilde{z})) - p_1(\widetilde{f}^{-n}(x))\right| < M_0^-.$$

On the other hand, by Lemma 3.5.9, we have that $\lim_{n\to+\infty} p_1(\widetilde{f}^{-n}(x)) = -\infty$. This completes the proof of the lemma. ■

3.5.4 Proof of Proposition 3.5.1

In this section we prove Proposition 3.5.1 reformulated as follows.

Proposition 3.5.11 (Proposition 3.5.1)**.** *Let $\widetilde{f} : \widetilde{\mathbb{A}} \to \widetilde{\mathbb{A}}$ be a homeomorphism isotopic to the identity, commuting with the translation T, and satisfying hypotheses (H_1) to (H_3). For every $x \in \Theta(\widetilde{A}_0)$, there exist $y \in \Theta(\widetilde{A}_1)$ and a positive integer n_0 such that for every integer $n \geq n_0$, we have*

$$\widetilde{f}^n(\Lambda_0^-(x)) \cap \Lambda_1^+(y) \neq \emptyset.$$

We note that if $\widetilde{z} \in \widetilde{f}^n(\Lambda_0^-(x)) \cap \Lambda_1^+(y)$, then $z \in \Theta(\widetilde{A})$. By Lemma 3.5.10 and its symmetric result the sequence of positive and negative iterates of $\widetilde{z}$ go to the left. We prove in next subsection that this implies Theorem C*.

Proof of Proposition 3.5.11 Let $x \in \Theta(\widetilde{A}_0)$. Since $\Lambda_0^-(x)$ is a compact set, we can consider a real number M such that $\Lambda_0^-(x) \subset L_{\widetilde{A}_0}(M)$. Let M_1^+ be the positive real constant provided by Proposition 3.5.5, such that

$$\max_{y'\in\Theta(\widetilde{A}_1)} \operatorname{diam} p_1(\Lambda_1^+(y')) < M_1^+.$$

Let us fix $y \in \Theta(\widetilde{A}_1)$ such that $p_1(y) > M + M_1^+$. We recall that by the choice of y, one has that

$$\Lambda_0^-(x) \subset L_{\widetilde{A}_0}(M) \quad \text{and} \quad \Lambda_1^+(y) \subset R_{\widetilde{A}_1}(M). \tag{3.1}$$

Lemma 3.5.12. *For every integer $n \geq 0$, we have*

$$\widetilde{f}^n(\Gamma_1) \cap \Lambda_1^+(y) \neq \emptyset.$$

Proof. Suppose by contradiction that there exists a positive integer n' such that $\widetilde{f}^{n'}(\Gamma_1) \cap \Lambda_1^+(y) = \emptyset$. This implies that $\Lambda_1^+(y)$ is contained in one of the connected components of $\widetilde{\mathbb{A}} \setminus \widetilde{f}^{n'}(\Gamma_1)$. Since Γ_1 is an attracting line, i.e. $\widetilde{f}^{n'}(\Gamma_1) \subset U_{\Gamma_1}^-$, and since $\Lambda_1^+(y)$ meets Γ_1 (hypothesis (H_1) and Proposition 3.5.5), we conclude that $\Lambda_1^+(y) \subset U^+_{\widetilde{f}^{n'}(\Gamma_1)}$, and so $y \in U^+_{\widetilde{f}^{n'}(\Gamma_1)} = \widetilde{f}^{n'}(U_{\Gamma_1}^+)$. This contradicts the choice of y, because $y \in \Theta(\widetilde{A}_1) \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{f}^n(U_{\Gamma_1}^-)$. ■

From Proposition 3.5.5, we know that $\Lambda_1^+(y) \cap \Gamma_1$ is a non-empty set. Let us fix $\widetilde{z} \in \Lambda_1^+(y) \cap \Gamma_1$ and consider the vertical line segment $\alpha : [0,1] \to \widetilde{\mathbb{A}}$ satisfying:

- $\alpha(0) = \widetilde{z}$;
- $\alpha(1) \in \Gamma_0$; and
- $\alpha((0,1)) \subset \mathrm{Int}(\widetilde{A}_0)$.

Let $R_{\widetilde{A}_0}(\alpha)$ (resp. $L_{\widetilde{A}_0}(\alpha)$) be connected component of $\widetilde{A}_0 \setminus \alpha$ which is unbounded to the right (resp. to the left). Let $\widetilde{K} = \Lambda_0^-(x) \cup \alpha$. Since $\widetilde{K}$ is a compact subset of $\widetilde{A}_0$, by Lemma 3.5.8 there is a positive integer n_0 such that for every integer $n \geq n_0$, we have

$$\widetilde{f}^n(\Lambda_0^-(x)) \cap \alpha \subset \widetilde{f}^n(\widetilde{K}) \cap \widetilde{K} = \emptyset. \tag{3.2}$$

Moreover by Lemma 3.5.9, we can assume that n_0 is large enough such that for every integer $n \geq n_0$.

$$\widetilde{f}^n(x) \in R_{\widetilde{A}_0}(\alpha). \tag{3.3}$$

From now on, we fix such integer n_0. Let us consider $\Lambda_0^\pm(x) := \Lambda_0^-(x) \cup \Lambda_0^+(x)$. This is a connected and compact subset of $\widetilde{A}_0$ which separates the band $\widetilde{A}_0$ (i.e. it meets both Γ_0 and Γ_1). We can define its right $R_{\widetilde{A}_0}(\Lambda_0^\pm(x))$ that is the connected component of $\widetilde{A}_0 \setminus \Lambda_0^\pm(x)$ which is unbounded to the right.

Let us denote by

$$\Gamma_1^r := \mathrm{Cl}(R_{\widetilde{A}_0}(\Lambda_0^\pm(x)) \cap \Gamma_1) \quad \text{and} \quad \Gamma_1^l := \Gamma_1 \setminus \Gamma_1^r.$$

(See Figure 3.5). Note that

$$\Gamma_1^r \cap \Lambda_0^-(x) \subset R_{\widetilde{A}_0}(\Lambda_0^\pm(x)) \cap \Lambda_0^\pm(x) = \{z_0\}. \tag{3.4}$$

Proposition 3.5.11 we will be a consequence of the following lemma.

Lemma 3.5.13. *For every integer $n \geq n_0$, we have*

$$(\widetilde{f}^n(\Lambda_0^-(x)) \cup \widetilde{f}^n(\Gamma_1^l)) \cap \Lambda_1^+(y) \neq \emptyset.$$

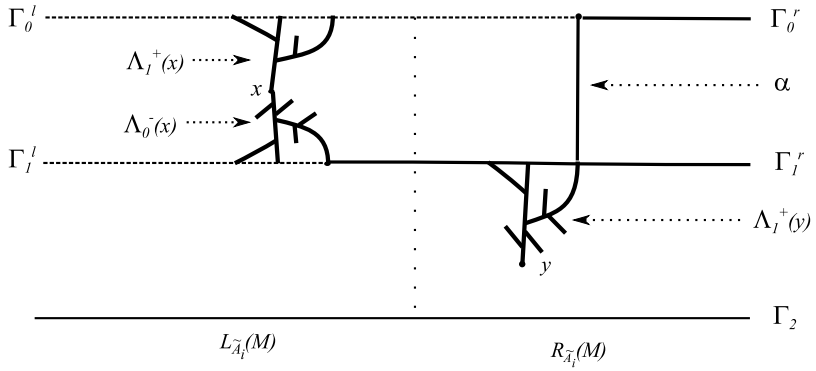

Figure 3.5: Proof Proposition 3.5.1

Proof. Fix an integer $n \geq n_0$. We have two cases. If $\widetilde{f}^n(\Gamma_1^r) \cap \Lambda_1^+(y) = \emptyset$, then by Lemma 3.5.12 and the fact that $\Gamma_1 = \Gamma_1^l \cup \Gamma_1^r$, we have that $\widetilde{f}^n(\Gamma_1^l) \cap \Lambda_1^+(y) \neq \emptyset$. This completes the proof in this case.

Now suppose that $\widetilde{f}^n(\Gamma_1^r) \cap \Lambda_1^+(y) \neq \emptyset$. Let $\Gamma_1^{r'}$ be a closed line contained in Γ_1^r, unbounded to the right such that if z_1 is its end point, then $\widetilde{f}^n(z_1) \in \Lambda_1^+(y)$ but

$$\widetilde{f}^n(\Gamma_1^{r'} \setminus z_1) \cap \Lambda_1^+(y) = \emptyset.$$

Let $\Gamma_0^l = \Gamma_0 \cap L_{\widetilde{A}_0}(\alpha)$ and $\Gamma_0^r = \Gamma_0 \setminus \Gamma_0^l$. Let

$$C_n := \Lambda_1^+(y) \cup \widetilde{f}^n(\Gamma_1^{r'}) \cup \alpha \cup \Gamma_0^r.$$

Remark that C_n is a connected set. Moreover we can assume that it does not meet $\widetilde{f}^n(\Lambda_0^-(x))$. Otherwise, $\widetilde{f}^n(\Lambda_0^-(x)) \cap \Lambda_1^+(y) \neq \emptyset$, because $\widetilde{f}^n(\Lambda_0^-(x))$ meets none of $\widetilde{f}^n(\Gamma_1^r)$, α and Γ_0 (relations (3.4) and (3.2), and remark 9 respectively), which finishes the proof in this case.
Since Γ_1 is an attracting line, i.e. $\widetilde{f}^n(\Gamma_1) \subset U_{\Gamma_1}^-$ and $\Lambda_1^+(y)$ is contained in $\widetilde{A}_1$, we have that

$$\mathrm{Int}(R_{\widetilde{A}_0}(\alpha)) \subset \mathrm{Int}(\widetilde{A}_0) \setminus \alpha \subset \widetilde{\mathbb{A}} \setminus C_n.$$

Let X_n be the connected component of $\widetilde{\mathbb{A}} \setminus C_n$ that contains $\mathrm{Int}(R_{\widetilde{A}_0}(\alpha))$. Remark that since C_n is a closed subset of $\widetilde{\mathbb{A}}$, X_n is an open set of $\widetilde{\mathbb{A}}$ and $\mathrm{Fr}(X_n)$ is contained in C_n. Hence X_n is bounded to the left, because $\Lambda_1^+(y) \cup \alpha$ and $\widetilde{f}^n(\Gamma_1^r)$ are bounded to the left. On the other hand, since by relation (3.3) $\widetilde{f}^n(x) \in R_{\widetilde{A}_0}(\alpha)$ and $\widetilde{f}^n(\Lambda_0^-(x))$ does not meet C_n, we have that $\widetilde{f}^n(\Lambda_0^-(x))$ is contained in X_n. Therefore the curve $\widetilde{f}^n(\Gamma_1^l)$ which is unbounded to the left must meet $\mathrm{Fr}(X_n)$. As $\mathrm{Fr}(X_n) \subset C_n$, it follows that

$$\widetilde{f}^n(\Gamma_1^l) \cap C_n \neq \emptyset.$$

Since Γ_1 is an attracting line and since $\Gamma_1^l \cap \Gamma_1^r = \emptyset$ and $\widetilde{f}$ is a homeomorphism, we have that $\widetilde{f}^n(\Gamma_1) \cap (\alpha \cup \Gamma_0) = \emptyset$ and $\widetilde{f}^n(\Gamma_1^l) \cap \widetilde{f}^n(\Gamma_1^r) = \emptyset$ respectively.

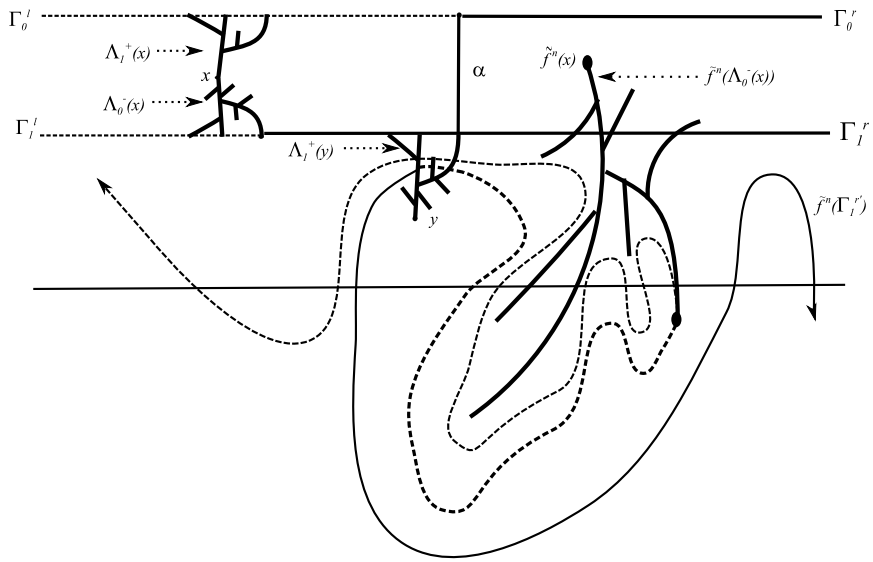

Figure 3.6: Proof Lemma 3.5.13

Therefore, we conclude that $\widetilde{f}^n(\Gamma_1^l) \cap \Lambda_1^+(y) \neq \emptyset$. This completes the proof of the lemma.

■

End of the proof of Proposition 3.5.11. Suppose by contradiction that there exists a sequence of integers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ which converges to $+\infty$ such that

$$\widetilde{f}^{n_k}(\Lambda_0^-(x)) \cap \Lambda_1^+(y) = \emptyset.$$

From Lemma 3.5.13 we obtain a sequence of points $(\widetilde{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ with $\widetilde{z}_k \in \Gamma_1^l$ and $\widetilde{f}^{n_k}(\widetilde{z}_k) \in \Lambda_1^+(y)$. Recall that by (3.1), we have that $\Gamma_1^l \subset L_{\widetilde{A}_0}(M)$ and $\Lambda_1^+(y) \subset R_{\widetilde{A}_1}(M)$. Hence $p_1(\widetilde{z}_k) < p_1(\widetilde{f}^{n_k}(\widetilde{z}_k))$. If ρ is a limit point of the sequence $(\rho_{n_k}(\widetilde{z}_k))_{k\in\mathbb{N}}$, where

$$\rho_{n_k}(\widetilde{z}_k) := \frac{1}{n_k}(p_1(\widetilde{f}^{n_k}(\widetilde{z}_k)) - p_1(\widetilde{z}_k)),$$

then $\rho \geq 0$. This implies that $0 \leq \rho \in \rho_{\widetilde{A}_1}(\widetilde{f})$, contradicting Proposition 3.5.7. This completes the proof of Proposition 3.5.11. ■

3.5.5 End of the proof of Theorem C*

Let $n_0 \in \mathbb{N}$ and let $\widetilde{z} \in \widetilde{f}^{n_0}(\Lambda_0^-(x)) \cap \Lambda_1^+(y)$ given by Proposition 3.5.11. From the definitions of $\Lambda_0^-(x)$ and $\Lambda_1^+(y)$ and the fact that Γ_0 and Γ_2 are $\widetilde{f}$-free, we deduce that $z \in \Theta(\widetilde{A})$. Moreover by Lemma 3.5.10 and its symmetric property for stable branches, we know that

$$\lim_{n\to+\infty} p_1(\widetilde{f}^{-n}(\widetilde{z})) = -\infty \quad \text{and} \quad \lim_{n\to+\infty} p_1(\widetilde{f}^{n}(\widetilde{z})) = -\infty. \tag{3.5}$$

Let us consider

$$M_0 := \sup_{\widetilde{z}'\in\widetilde{A}} \left| p_1(\widetilde{f}(\widetilde{z}')) - p_1(\widetilde{z}') \right|.$$

Let k be a positive integer and let us define $M := p_1(\widetilde{z}) - kM_0$. In a similar way as in the proof of the claim in Lemma 3.5.9, we prove that there are two positive integers n^+ and n^- such that

$$M - M_0 \leq p_1(\widetilde{f}^{-n^-}(\widetilde{z})) < M \text{ and } M - M_0 \leq p_1(\widetilde{f}^{n^+}(\widetilde{z})) < M.$$

Therefore by the choice of M and M_0, we deduce that

- $n^+ + n^- \geq 2k$, and
- $$\left| p_1(\widetilde{f}^{n^+}(\widetilde{z})) - p_1(\widetilde{f}^{-n^-}(\widetilde{z})) \right| \leq M_0.$$

Since k can be chosen arbitrarily large, this implies that 0 belongs to $\rho_{\Theta(\widetilde{A})}(\widetilde{f})$. This is what we needed to prove.

Résumé

Dans cette thèse nous nous intéressons à la dynamique locale autour d'une sous-variété compacte invariante et à la théorie du nombre de rotation.

Dans [Naĭ82] V. A. Naĭshul′ a montré que parmi les difféomorphismes du plan isotopes à l'identité qui fixent 0, qui préservent l'aire (ou analytiques) et dont la différentielle en 0 est une rotation, l'angle de cette rotation est un invariant de conjugaison topologique. Ce résultat de Naĭshul′, a été généralisé dans plusieurs directions (voir [GP95], [GLP96] et [Pon12]). Par exemple en dimension supérieure, dans [GP95] J.-M. Gambaudo et E. Pécou ont considéré des difféomorphismes de $\mathbb{R}^{n+2}$ qui possèdent un tore $\mathbb{T}^n$ de dimension n invariant dont la dynamique est topologiquement conjuguée à une rotation irrationnelle. Ils ont défini un nombre de rotation et ont démontré que ce nombre est invariant de conjugaison topologique (par exemple lorsque le difféomorphisme préserve un volume). Dans la première partie du deuxième chapitre de cette thèse, nous proposons d'introduire une notion d'ensemble de rotation local pour les homéomorphismes locaux qui préservent une sous-variété compacte de codimension 2 dont le fibré normal est trivial. A l'aide de cet ensemble, nous déduirons un résultat qui généralise les travaux en dimension supérieure cités plus haut.

Dans [Rue85] D. Ruelle a considéré des difféomorphismes d'une surface dont le fibré tangent est trivial qui préservent une mesure. Il leur a associé un nombre réel qui a été appelé *l'invariant de Ruelle.* Les constructions de cette thèse nous permettront de voir cet invariant comme un ensemble de rotation local au-dessus d'une mesure. A l'aide de l'invariance par conjugaison de cet ensemble de rotation, nous allons retrouver, à la fin du deuxième chapitre, le résultat démontré par J.-M. Gambaudo et E. Ghys dans [GG97] : l'invariant de Ruelle est en fait invariant de conjugaison topologique.

Soit $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ l'ensemble des homéomorphismes du plan $\mathbb{R}^2$ isotopes a l'identité qui fixent l'origine $0 \in \mathbb{R}^2$. Récemment dans [LeR13], F. Le Roux a donné une définition de *l'ensemble de rotation local autour de* 0 d'une isotopie dans $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ issue de l'identité, et il a posé la question suivante : cet ensemble est-il toujours un intervalle ? Dans le troisième chapitre de cette thèse, nous allons donner une réponse positive à cette question et aussi à la question analogue dans le cas de l'anneau ouvert.

Mots-clefs : Systèmes dynamiques, surface, homéomorphisme, ensemble de rotation, point fixe, dynamique locale.

Abstract

In this thesis we are interested in the local dynamics around of a compact invariant sub-manifold and in the rotation number theory.

In [Naĭ82] V.A Naĭshul′ proved that, among analytic or area preserving diffeomorphisms in the plane which are isotopic to the identity fix 0 and whose derivative at 0 is a rotation, the angle of this rotation is invariant by topological conjugation. This result of Naĭshul′ was generalized in many directions (see [GP95], [GLP96] and [Pon12]). For example in [GP95] J.-M. Gambaudo and E. Pécou considered diffeomorphisms in $\mathbb{R}^{n+2}$, which possess an invariant n-dimensional torus $\mathbb{T}^n$ whose dynamics restricted to the torus is topologically conjugate to an irrational rotation. They defined a rotation number, and proved that this number is invariant by topological conjugation among volume-preserving maps. In the first part of the second chapter of this thesis, we propose to introduce a notion of local rotation set for local homeomorphisms, which preserve a compact sub-manifold of codimension 2 whose normal bundle is trivial. Using this set, we will deduce a result which generalizes the above mentioned works.

In [Rue85] D. Ruelle considered measure preserving diffeomorphisms of a surface whose tangent bundle is trivial. He associated to them a real number called *the Ruelle invariant*. The constructions made in this thesis will permit us to see this number as a local rotation set over a measure. The invariance by topological conjugation of this set will us permit, at the end of the second chapter, to prove the following result due to J.-M- Gambaudo and E. Ghys: the Ruelle invariant is invariant by topological conjugacy.

Let $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ be the set of all homeomorphisms of the plane isotopic to the identity and which fix 0. Recently in [LeR13] F. Le Roux gave the definition of the *local rotation set around of 0* of a general isotopy I in $\mathrm{Homeo}_0\left(\mathbb{R}^2;0\right)$ from the identity to a homeomorphism f and he asked if this set is always an interval. In the third chapter of this thesis we give a positive answers to this question and to the analogous question in the case of the open annulus.

Keywords: Dynamical systems, surface, homeomorphism, rotation set, fixed point, local dynamics.

Bibliographie

[Car13] Carathéodory C. Über die Begrenzung einfach zusammenhangender Gebiete. Math. Ann 73, p. 323-370.

[Dav13] Dávalos, Pablo. On torus homeomorphisms whose rotation set is an interval. Math. Z., 275 (3-4) : 1005-1045, 2013.

[dMP82] de Melo, Welington and Palis, Jacob Jr. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Fra88] Franks, John. Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem. Ann. of Math. (2) **128** (1988), no. 1, 139–151.

[Fra96] Franks, John. Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero. New York J. Math. **2** (1996), 1–19.

[FM90] Franks, John and Misiurewicz, Michal. Rotation sets of toral flows. Pro. Am. Math. Soc. 109 (1990), no. 1, 243–249.

[GG97] Gambaudo, Jean-Marc and Ghys, Étienne. Enlacements asymptotiques. Topology **36** 15 (1997), no. 6, 1355–1379.

[GG04] Gambaudo, Jean-Marc and Ghys, Étienne. Commutators and diffeomorphisms of surfaces. Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004), no. 5, 1591–1617.

[GP95] Gambaudo, Jean-Marc and Pécou, Élisabeth. A topological invariant for volume preserving diffeomorphisms. Ergodic Theory Dinam. Systems **15** (1995), no. 3, 535–541.

[GLP96] Gambaudo, Jean-Marc ; Le Calvez, Patrice and Pécou, Élisabeth. Une généralisation d'un théorème de Naishul. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), no. 4, 397–402.

[Hae62] Haefliger, André. Variétés feuilletées. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Série 3 **16** (1962), no. 4, 367–397.

[Ham74] Hamströn, Mary-Elizabeth. Homotopy in homeomorphism spaces, TOP and PL. Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974),

[Her83] Herman, Michael-R. Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnol'd et de Moser sur le tore de dimension 2. Comment. Math. Helv. 58 (3), (1983) 453–502.

[Kwa91] Kwapisz, Jaroslaw. Every convex polygon with rational vertices is a rotation set. Ergodic Theory Dynam. Systems 12 (1992), no. 2, 333–339.

[LeC91] Le Calvez, Patrice. Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l'anneau et du tore. Astérisque No. 204 (1991).

[LeC01] Le Calvez, Patrice. Rotation numbers in the infinite annulus. Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), no. 11, 3221–3230.

[LeC03] Le Calvez, Patrice. Dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (4) 36 (2003), no. 1, 139–171.

[LeC05] Le Calvez, Patrice. Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 102 (2005), 1–98.

[LeC08] Le Calvez, Patrice. Pourquoi les points périodiques des homéomorphismes du plan tournent-ils autour de certains points fixes ? Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (4) 41 (2008), no. 1, 141–176.

[LT15] Le Calvez, Patrice and Tal, Fábio Armando. Forcing theory for transverse trajectories of surface homeomorphisms. (e-print arXiv :1503.09127).

[LY97] Le Calvez, Patrice and Yoccoz, Jean-Christophe. Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe. Ann. of Math. 146 (1997), no. 2, 241–293.

[LeR00] Le Roux, Frédéric. Migration des points errants d'un homéomorphisme de surface. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 330 (2000), no. 3, 225–230.

[LeR04] Le Roux, Frédéric. Homéomorphismes de surfaces : théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable. Astérisque No. 292 (2004).

[LeR13] Le Roux, Frédéric. L'ensemble de rotation autour d'un point fixe. Astérisque No. 350 (2013).

[LM91] Llibre, Jaume and MacKay, Robert S., Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity. Ergodic Theory Dynam. Systems 11 (1991), no. 1, 115–128.

[MZ89] Misiurewicz, Michal and Ziemian, Krystyna. Rotation sets for maps of tori. J. London Math. Soc. **40** (1989), no. 2, 490–506.

[Ma83] Mañé, Ricardo. Teoria ergódica Publicação : IMPA, 1983.

[Naĭ82] Naĭshul′, V. A. Topological invariants of analytic and area-preserving mappings and their application to analytic differential equations in $\mathbf{C}^2$ and $\mathbf{C}P^2$. Trudy Moskov. Mat. Obshch. vol. 44 (1982) pp. 235–245.

[Poi85] Poincaré, Henri. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, chapitre XV. J. de Math. Pures et Appl. Série IV (1885), no. 1, 167–244.

[Pon12] Ponce, Mario. Naishul's theorem for fibered holomorphic maps. Math. Z. 271 (2012), no. 3-4, 867–875.

[Rue85] Ruelle, David. Rotation numbers for diffeomorphisms and flows. Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique **42** (1985), no. 1, 109–115.

[Wan14] Wang, Jian. A generalization of the line translation theorem. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 366, (2014), no. 11, 5903–5923.

[Whi33] Whitney, Hassler. Regular families of curves. Ann. of Math. (2) **34** (1933), no. 2, 244–270.

[Whi41] Whitney, Hassler. On regular families of curves. Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 145–147.