



HAL
open science

Influence des effets de forme et de taille des cavités, et de l'anisotropie plastique sur la rupture ductile

Léo Morin

► **To cite this version:**

Léo Morin. Influence des effets de forme et de taille des cavités, et de l'anisotropie plastique sur la rupture ductile. Mécanique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066230 . tel-01233531

HAL Id: tel-01233531

<https://theses.hal.science/tel-01233531>

Submitted on 25 Nov 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale de Sciences mécaniques, acoustique, électronique et
robotique de Paris

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mécanique

présentée par

Léo MORIN

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Influence des effets de forme et de taille des cavités, et de l'anisotropie plastique sur la rupture ductile

dirigée par Djimédo KONDO et Jean-Baptiste LEBLOND

- tirage provisoire -

Soutenance prévue le 1er Juillet 2015 devant le jury composé de :

V. MONCHIET	Maitre de conférences HDR, MSME, Marne-la-Vallée	rapporteur
T. PARDOEN	Professeur, UCL, Louvain-la-Neuve	rapporteur
A.A. BENZERGA	Professor, Texas A&M, College Station	examineur
D. LEGUILLON	Directeur de recherche CNRS, IJLRDA, Paris	examineur
A. MOLINARI	Professeur, LEM3, Metz	examineur
P. SUQUET	Directeur de recherche CNRS, LMA, Marseille	examineur
D. KONDO	Professeur, IJLRDA, Paris	co-directeur de thèse
J.B. LEBLOND	Professeur, IJLRDA, Paris	co-directeur de thèse



Table des matières

Introduction générale	9
Partie I Modèles de croissance : étude de l'influence des effets de forme des cavités et de l'anisotropie plastique	15
Introduction : Etude bibliographique des modèles de croissance des cavités	17
1 Implémentation numérique et application d'un modèle de rupture ductile avec effets de forme des cavités	23
1.1 Introduction	23
1.2 Modèle complet de rupture ductile avec effets de forme des cavités	24
1.3 Implémentation numérique du modèle	26
1.3.1 Généralités	26
1.3.2 Equations du problème de projection locale	27
1.3.3 Algorithme de projection	28
1.3.4 Actualisation des paramètres internes	29
1.3.5 Mise en oeuvre pratique	30
1.4 Rupture ductile en cisaillement : comparaisons avec des calculs micromécaniques	30
1.4.1 Cavités initialement sphériques	30
1.4.2 Cavités initialement cylindriques à base circulaire	33
1.4.3 Cavités initialement cylindriques à base elliptique	34
1.4.4 Discussion	37
1.5 Rupture ductile en cisaillement : comparaisons avec des expériences sur des éprouvettes "butterfly"	39
1.5.1 Présentation des expériences de Dunand and Mohr (2011a,b)	39
1.5.2 Présentation des simulations numériques	41
1.5.3 Résultats	42
1.5.4 Discussion	50
1.6 Conclusion	50
2 Un critère de plasticité macroscopique pour les matériaux anisotropes contenant des vides ellipsoïdaux	53
2.1 Introduction	53
2.2 Limit analysis of an ellipsoidal cell containing a confocal ellipsoidal void	54
2.2.1 Limit-analysis procedure	54
2.2.2 Presentation of the cell	55
2.2.3 Hill (1948)'s anisotropic criterion	55
2.2.4 Choice of trial velocity fields	57
2.2.5 Expression of the overall plastic dissipation	57
2.3 Approximate macroscopic plastic dissipation and yield function	58
2.3.1 Simplification of the "crossed term" in the expression of $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$	59
2.3.2 Simplification of the spatial dependence of $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$	60

2.3.3	Approximate yield function	61
2.3.4	Comments	61
2.4	Determination of the linear form $\mathcal{L}(\Sigma)$	62
2.4.1	Preliminaries - definition of some parameters	62
2.4.2	Generalities on the expression of κ	63
2.4.3	Prolate spheroidal case	65
2.4.4	Oblate spheroidal case	65
2.4.5	General ellipsoidal case	66
2.4.6	Expression of the coefficient κ	68
2.4.7	Coefficients H_x, H_y, H_z	70
2.5	Determination of the quadratic form $\mathcal{Q}(\Sigma)$	70
2.6	Summary	71
2.6.1	Geometric parameters	71
2.6.2	Yield criterion	72
2.6.3	Linear form $\mathcal{L}(\Sigma)$	72
2.6.4	Quadratic form $\mathcal{Q}(\Sigma)$	72
2.7	Numerical assessment of the criterion	72
2.8	Conclusion	73
3	Etude numérique de milieux anisotropes contenant des vides ellipsoïdaux	75
3.1	Introduction	75
3.2	Etude des surfaces de charge macroscopiques	76
3.2.1	Généralités	76
3.2.2	Cavités ellipsoïdales générales	76
3.2.3	Fissures	77
3.2.4	Cavités cylindriques	79
3.2.5	Cavités sphéroïdales	80
3.2.6	Comparaison avec les critères existants	81
3.3	Loi d'écoulement macroscopique	82
3.4	Lois d'évolution de la longueur et de l'orientation des axes d'une cavité ellipsoïdale dans un milieu plastique anisotrope	83
3.4.1	Approche de Madou et al. (2013) dans le cas isotrope	83
3.4.2	Extension des lois isotropes au cas anisotrope	86
3.4.3	Comparaisons des lois théoriques avec des calculs numériques micromécaniques	86
3.4.4	Discussion	90
3.5	Conclusion	92
Partie II	Influence des effets de taille des cavités sur la rupture ductile	93
4	Etude numérique d'un modèle de croissance des cavités pour matériaux nanoporeux	95
4.1	Introduction	95
4.2	Numerical assessment of Dormieux and Kondo (2010)'s criterion	96
4.2.1	Dormieux and Kondo (2010)'s macroscopic criterion	96
4.2.2	Numerical limit-analysis	97
4.3	Formulation of the constitutive model	99
4.3.1	Macroscopic flow rule	99
4.3.2	Evolution of internal parameters	100
4.4	Numerical implementation	101
4.4.1	Generalities	101
4.4.2	Equations of the local projection problem	102
4.4.3	Algorithm of solution of the local projection problem	102

4.4.4	Update of internal parameters	105
4.5	Application to an axisymmetric proportional loading example	105
4.5.1	Description of the simulations	105
4.5.2	Numerical results	105
4.5.3	Discussion	106
4.6	Conclusion	108
5	Etude du couplage entre effets de forme et de taille des cavités	111
5.1	Introduction	111
5.2	Critère de Monchiet et al. (2014) couplant effets de forme et de taille des cavités	112
5.3	Dérivation d'un critère explicite pour vide nanométriques cylindriques	114
5.4	Etude numérique des surfaces de charge	116
5.4.1	Généralités	116
5.4.2	Cavités sphériques	116
5.4.3	Cavités sphéroïdales aplaties	118
5.4.4	Cavités sphéroïdales allongées	118
5.4.5	Cavités cylindriques	119
5.5	Conclusion	120
Partie III	Modèles de coalescence : étude de l'influence des effets de forme des cavités et de l'anisotropie plastique	121
	Introduction : étude bibliographique des modèles de coalescence des cavités	123
6	Etude théorique et numérique de la coalescence en couches	129
6.1	Introduction	129
6.2	Preliminaries	131
6.2.1	Limit-analysis procedure	131
6.2.2	Geometry	132
6.2.3	Boundary conditions	133
6.2.4	Admissible velocity fields to describe coalescence	134
6.3	Theoretical trial velocity fields	134
6.3.1	Discontinuous velocity field of Benzerga and Leblond	134
6.3.2	Generalized discontinuous velocity field	135
6.3.3	Continuous velocity fields	137
6.4	Determination of the effective yield criteria	138
6.4.1	Case of the generalized discontinuous velocity field	138
6.4.2	Case of the continuous velocity field	140
6.5	Numerical study of the onset of coalescence	141
6.5.1	Description of the simulations	141
6.5.2	Study of the entire yield locus ($D_{11} \neq 0$)	142
6.5.3	Study of coalescence ($D_{11} = 0$)	143
6.6	Discussion	144
6.7	Conclusion	147
7	Un critère unifié de croissance et coalescence des cavités	149
7.1	Introduction	149
7.2	Preliminaries	151
7.2.1	Geometry, material, admissibility conditions of velocity fields	151
7.2.2	Principles of the limit-analysis	152
7.3	Trial velocity fields	153
7.4	Macroscopic criterion	154

7.4.1	Plastic dissipation	154
7.4.2	Regular (curved) parts of the yield locus	155
7.4.3	Singular (straight) parts of the yield locus	156
7.4.4	Absence of corners on the yield locus	158
7.5	Assessment of the theoretical model	159
7.5.1	Principle of the simulations	159
7.5.2	Numerical results	160
7.5.3	Discussion	161
7.6	Conclusion	162
8	Influence de l'anisotropie plastique sur la coalescence en couches	163
8.1	Introduction	163
8.2	Préliminaires	164
8.2.1	Généralités	164
8.2.2	Champs de vitesse	166
8.3	Calcul de la dissipation plastique macroscopique	167
8.3.1	Généralités	167
8.3.2	Calcul de la dissipation plastique macroscopique	168
8.3.3	Calcul de la contrainte de coalescence	170
8.4	Validation numérique du critère proposé	170
8.4.1	Description des simulations	170
8.4.2	Résultats	171
8.5	Conclusion et perspectives	172
	Conclusion générale et perspectives	175
	Annexes	179
A	Annexes du Chapitre 2	181
A.1	Appendix : Ellipsoidal coordinates	181
A.2	Appendix : Elements on the matrix representations of Hill's tensor \mathbb{B}	182
A.3	Appendix : Definition of moderate anisotropy	182
A.4	Appendix : Leblond and Gologanu (2008)'s velocity fields	183
A.5	Appendix : Asymptotic study of the integrand in Π	184
A.5.1	Asymptotic study near infinity	184
A.5.2	Asymptotic study near the origin : generalities	184
A.5.3	Asymptotic study near the origin : generic ellipsoidal case ($a > b > c$)	185
A.5.4	Asymptotic study near the origin : spheroidal prolate case ($a > b = c$)	185
A.5.5	Asymptotic study near the origin : spheroidal oblate case ($a = b > c$)	186
A.5.6	Asymptotic study near the origin : spherical case ($a = b = c$)	186
A.6	Appendix : The nonlinear Willis bound for plastic porous solids	186
B	Annexes du Chapitre 3	189
B.1	Etude de la loi d'écoulement macroscopique	189
B.1.1	Cavités ellipsoïdales générales	189
B.1.2	Fissures	191
B.1.3	Cavités cylindriques	193
B.1.4	Cavités sphéroïdales	195
C	Annexe du Chapitre 6 : Numerical limit-analysis by the finite element method	197
D	Annexes du Chapitre 7	199

D.1	Volumetric and surfacic plastic dissipations	199
D.1.1	Porous zone	199
D.1.2	Sound zone	199
D.1.3	Interface	199
D.2	Parametric equations of the regular parts of the yield locus	200
D.3	Convexity of the macroscopic plastic dissipation	201
D.4	Asymptotes to the curves $\zeta = g(\xi)$ and $\zeta = -g(\xi)$	201
E	Etude numérique de critères de plasticité pour les matériaux anisotropes contenant des vides sphéroïdaux	203
E.1	Introduction	203
E.2	Finite element limit-analysis of Hill materials	205
E.2.1	Hill's criterion	205
E.2.2	Numerical implementation of the Hill criterion	205
E.2.3	Numerical limit-analysis : principles	207
E.2.4	Numerical limit-analysis : special case of a completely plastic structure	208
E.3	Numerical yield surfaces and directions of plastic flow of anisotropic plastic porous materials	209
E.3.1	Generalities	209
E.3.2	Material constants and quantities investigated	210
E.3.3	Spherical voids	211
E.3.4	Prolate voids	211
E.3.5	Oblate voids	212
E.3.6	Discussion	212
E.4	Conclusion	213
E.A	Appendix : Summary of closed-form expressions of the criteria assessed	217
E.A.1	Macroscopic criterion for spherical voids (Benzerga and Besson)	217
E.A.2	Macroscopic criterion for spheroidal voids (Monchiet et al.)	217
E.A.3	Macroscopic criterion for spheroidal voids (Keralavarma and Benzerga)	218
	Bibliographie	221

Introduction générale

Contexte industriel...

La rupture ductile est le mode dominant de ruine des alliages métalliques à température moyenne et élevée. Ce mode de rupture survient après de grandes déformations (ductile vient du latin *ductilis* qui signifie *qu'on peut tirer*), suite à l'apparition de fissures macroscopiques entraînant la déchirure des structures. Quelques exemples de structures rompues sont donnés Figure 1 : (a) le déchirement ductile d'un gazoduc sous pression suite à la propagation d'une fissure sur plus d'une dizaine de mètres (Mannucci and Demofonti, 2001) ; (b) la rupture en "tronc de cône" d'une éprouvette lisse en traction ; (c) la rupture d'une éprouvette de type CT dans le cadre du Sandia Fracture Challenge (Boyce et al., 2014). La rupture ductile peut être particulièrement néfaste et dangereuse dans les industries à risque, comme le nucléaire ou les transports, donc il est nécessaire de comprendre ce mode de rupture et de le modéliser avec pour objectif de pouvoir dimensionner au mieux les structures.



(a) Déchirement d'un gazoduc (Mannucci and Demofonti, 2001)



(b) Rupture en tronc de cône d'une éprouvette lisse



(c) Rupture d'une éprouvette CT (Boyce et al., 2014)

FIGURE 1: Exemples de structures ductiles rompues.

Contexte scientifique...

L'endommagement ductile survient en trois étapes (Garrison and Moody, 1987) : (i) des vides se forment au niveau d'inclusions ou de particules de seconde phase par décohérence de l'interface particule-matrice, ou par rupture de ces inclusions : c'est la phase de nucléation (voir Figure 2a) ; (ii) ces cavités grossissent et se déforment par écoulement plastique de la matrice environnante : c'est la

phase de croissance (voir Figure 2b); (iii) enfin, des cavités voisines se rapprochent et finissent par se rejoindre pour former une fissure macroscopique entraînant la ruine de la structure : c'est la phase de coalescence (voir Figure 2c). La mécanique de la rupture ductile est donc basée sur une *approche locale*, reposant sur une démarche *micromécanique* et un *passage micro-macro*. Si l'étape de nucléation se prête mal aux développements théoriques du fait de sa complexité, les étapes de croissance et de coalescence s'y prêtent bien. L'objectif est de définir le comportement macroscopique d'un matériau plastique contenant des vides et de décrire son adoucissement progressif sous l'effet de la croissance et de la déformation des cavités : la mécanique de la rupture ductile est donc avant tout un problème *comportemental*. Il convient ensuite d'implémenter les lois de comportement homogénéisées des matériaux poreux ductiles dans un code de calcul par éléments finis pour procéder à un calcul de structure.

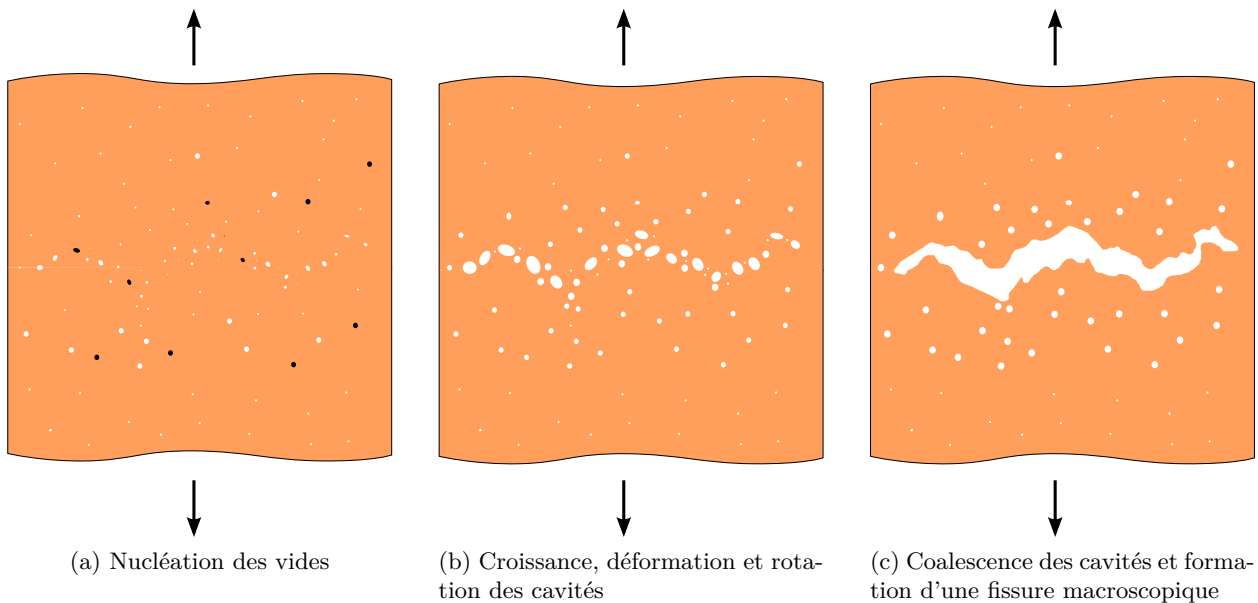


FIGURE 2: Mécanismes de la rupture ductile.

Les premiers travaux de modélisation de la rupture ductile sont dus à [McClintock \(1968\)](#) et [Rice and Tracey \(1969\)](#), qui ont étudié par analyse limite la croissance d'une cavité, respectivement cylindrique puis sphérique, dans un milieu rigide parfaitement plastique obéissant au critère de von Mises et soumis à un chargement uniforme à l'infini. Ces auteurs ont mis en évidence l'importance déterminante de la triaxialité (rapport entre la contrainte moyenne et la contrainte équivalente de von Mises) sur le taux de croissance des cavités. La limitation évidente de ces modèles réside dans la considération d'un milieu infini, ce qui implique la nullité de la porosité.

Il faudra ensuite attendre une dizaine d'années pour voir apparaître le premier modèle de rupture ductile, dû aux travaux pionniers de [Gurson \(1977\)](#), élève de Rice. En effectuant une analyse limite d'une sphère creuse (constituant ici un volume élémentaire représentatif d'un milieu poreux) soumise à des conditions de taux de déformation homogène sur le bord, [Gurson \(1977\)](#) a dérivé un modèle macroscopique du comportement d'un matériau poreux ductile dépendant de la porosité et composé de (i) un critère de plasticité macroscopique dépendant de la contrainte moyenne ; (ii) une loi d'écoulement plastique macroscopique obtenue par normalité, comportant un taux de déformation plastique à trace non-nulle et (iii) une loi d'évolution de la porosité déduite de la propriété d'incompressibilité de la matrice. Ce modèle a connu un vif succès en permettant de reproduire des expériences typiques de rupture ductile à triaxialité élevée. Le succès le plus célèbre consiste en la reproduction de la rupture en "tronc de cône" d'une éprouvette axisymétrique lisse chargée en traction (voir Figure 1b). L'éprouvette se strictionne, puis une fissure s'amorce au centre et se propage vers la surface libre. Au voisinage de la surface libre, la fissure dévie à 45° du plan horizontal, ce qui constitue un tronc de cône. Un calcul de structure par éléments finis en utilisant localement le modèle de [Gurson \(1977\)](#) a permis de reproduire

ces différentes étapes (Tvergaard and Needleman, 1984).

Le modèle de Gurson (1977) présente cependant un nombre important de limitations, en raison des hypothèses simplificatrices utilisées dans sa dérivation. La première, et probablement la plus importante, réside dans le choix de la géométrie sphérique des cavités. En effet les cavités sont très rarement sphériques et ressemblent plus à des ellipsoïdes. Pour prendre en compte la forme des cavités, Gologanu et al. (1993, 1994, 1997) ont étendu l'analyse de Gurson (1977) au cas d'un volume élémentaire représentatif de forme sphéroïdale contenant une cavité sphéroïdale confocale. Ce modèle a permis de reproduire des calculs micromécaniques à des triaxialités faibles (Pardoen and Hutchinson, 2000). Récemment, Madou and Leblond (2012a,b) ont étendu les modèles de Gurson (1977) et Gologanu et al. (1993, 1994, 1997) au cas des cavités ellipsoïdales générales.

Une autre limitation importante du modèle de Gurson (1977) est l'hypothèse d'isotropie de la matrice plastique. En pratique, de nombreux alliages métalliques présentent une anisotropie plastique apparaissant à la suite d'opérations de mise en forme (comme le laminage par exemple). La prise en compte de l'anisotropie plastique dans l'approche de Gurson (1977) a été initiée par Benzerga and Besson (2001) dans le cas des cavités sphériques puis étendue au cas des cavités sphéroïdales (Monchiet et al., 2008; Keralavarma and Benzerga, 2010).

Enfin, ces modèles ne sont pas adaptés pour décrire la phase de coalescence, en raison des conditions de taux de déformation homogène sur le bord empêchant la localisation de la déformation entre deux cavités voisines. Pour prendre en compte la coalescence dans l'approche de Gurson (1977), Tvergaard and Needleman (1984) ont proposé d'augmenter heuristiquement la porosité dès que celle-ci dépasse une valeur critique; c'est cette modélisation heuristique qui a notamment permis de bien reproduire la rupture en tronç de cône. Le premier modèle micromécanique de coalescence est dû à Thomason (1985), sous la forme d'un critère approché donnant la charge limite de coalescence. Couplé au modèle de croissance de Gologanu et al. (1993, 1994, 1997), ce modèle a permis de reproduire fidèlement des calculs micromécaniques (Pardoen and Hutchinson, 2000). Récemment, Benzerga and Leblond (2014) ont revisité l'analyse de Thomason (1985) à l'aide d'une analyse mathématique rigoureuse.

Challenges...

Si la mécanique de la rupture ductile a considérablement progressé depuis une quarantaine d'années, de nombreux challenges demeurent parmi lesquels on compte (de manière non exhaustive!) :

1. *La prédiction de la rupture ductile à très faible triaxialité.* De nombreux travaux numériques (Barsoum and Faleskog, 2007a; Tvergaard, 2009; Tvergaard and Nielsen, 2010; Barsoum and Faleskog, 2011; Scheyvaerts et al., 2011; Tvergaard, 2012; Nielsen et al., 2012) et expérimentaux (Barsoum and Faleskog, 2007b; Mohr et al., 2010; Dunand and Mohr, 2011a,b) ont mis en évidence des modes de rupture ductile à très faible triaxialité, en cisaillement pur par exemple. Si le modèle de Gurson (1977) a récemment été étendu de manière heuristique pour prendre en compte l'adoucissement lié au cisaillement (Nahshon and Hutchinson, 2008; Xue, 2008) (en modifiant l'équation d'évolution exacte de la porosité), la simulation précise de la rupture ductile en cisaillement avec un modèle prenant en compte les effets de forme reste un challenge.
2. *Le développement de modèles précis de coalescence.* La modélisation de la phase de coalescence en est encore à ses balbutiements, contrairement à celle de la phase de croissance. Le développement de modèles précis de coalescence, valables pour des géométries et des chargements généraux, est une étape nécessaire pour permettre de prédire la phase ultime de dégradation des matériaux ductiles. La question de la transition entre croissance et coalescence est également un point crucial pour bien comprendre les particularités de ces phases avec pour objectif final de pouvoir les unifier dans une même approche.
3. *La prise en compte de l'anisotropie plastique.* Les alliages métalliques présentent en général une anisotropie plus ou moins marquée qu'il est nécessaire de prendre en compte dans les modèles de rupture ductile. Les travaux sur l'anisotropie plastique initiés par Benzerga and Besson (2001) puis Monchiet et al. (2008); Keralavarma and Benzerga (2010) doivent être généralisés au cas de cavités ellipsoïdales générales et également étendus à la phase de coalescence.

-
4. *La validité des modèles actuels à faible échelle.* La présence d'effets de taille pour les vides micrométriques ou nanométriques rend les modèles classiques de rupture ductile inadaptés à ces échelles. Le développement de modèles adaptés prenant en compte les effets de taille est donc nécessaire pour décrire le comportement de matériaux nanoporeux.

Plan de la thèse...

Dans cette thèse, nous nous efforcerons de répondre à certaines des questions qui viennent d'être soulevées. Le manuscrit sera ainsi organisé de façon thématique, en trois parties consacrées (1) aux modèles de croissance, (2) aux effets de taille et (3) aux modèles de coalescence.

La **Partie I** est consacrée à l'étude de l'influence des effets de forme des cavités et de l'anisotropie plastique sur les modèles de *croissance* :

- Dans le **Chapitre 1**, nous implémentons numériquement dans un code de calcul par éléments finis le modèle de Madou-Leblond pour les cavités ellipsoïdales (Madou and Leblond, 2012a,b, 2013; Madou et al., 2013) pour ensuite l'appliquer à des problèmes de rupture ductile à faible triaxialité en présence de cisaillement. Les prédictions du modèle sont dans un premier temps comparées à des calculs micromécaniques en cisaillement. Elles sont ensuite comparées à des résultats expérimentaux pour une éprouvette butterfly. Ces comparaisons montrent l'importance de la prise en compte des effets de forme des cavités sur la rupture ductile à faible triaxialité.
- Le **Chapitre 2** est consacré au développement d'un critère général pour des matériaux ductiles incorporant à la fois les effets de forme des cavités et l'anisotropie plastique. Nous étendons ainsi les critères de Madou and Leblond (2012a,b) pour des cavités ellipsoïdales générales plongées dans une matrice isotrope au cas de l'anisotropie plastique, et de Monchiet et al. (2008); Keralavarma and Benzerga (2010) pour des cavités sphéroïdales plongées dans une matrice plastique anisotrope au cas de cavités ellipsoïdales générales.
- Le critère dérivé au Chapitre 2 est ensuite validé numériquement au **Chapitre 3** par des analyses limites numériques obtenues par la méthode des éléments finis. Les surfaces de charge et la loi d'écoulement sont ainsi validées pour une grande variété de cas géométriques. Les lois d'évolution des paramètres internes du modèle sont également étudiées numériquement.

La **Partie II**, plus exploratoire, est toujours consacrée aux modèles de croissance mais dans le cadre de matériaux *nanoporeux* :

- Dans le **Chapitre 4**, nous validons le critère récent de plasticité macroscopique de Dormieux and Kondo (2010) pour des cavités sphériques de taille nanométrique, par analyse limite numérique. Le modèle est ensuite implémenté puis appliqué à un problème axisymétrique. L'effet de taille des cavités a une grande influence sur le comportement mécanique en ralentissant la croissance de la porosité.
- Dans le **Chapitre 5**, nous étudions numériquement le couplage entre les effets de forme et de taille des cavités pour des vides sphéroïdaux de taille nanométrique. Ces résultats permettent de valider le critère de Monchiet and Kondo (2013) ainsi qu'un nouveau critère pour des vides cylindriques nanométriques.

Enfin, la **Partie III** est dédiée à l'étude de l'influence des effets de forme et de l'anisotropie plastique sur la phase de *coalescence* :

- Le **Chapitre 6** étend le critère récent de coalescence de Benzerga and Leblond (2014) en considérant deux nouveaux champs de vitesse. Des calculs numériques d'analyse limite permettent de valider les trois critères : chacun des deux nouveaux critères améliore celui de Benzerga and Leblond (2014), pour des paramètres géométriques différents.
- Dans le **Chapitre 7**, nous développons un critère homogénéisé qui unifie les phases de croissance et de coalescence. Les champs de vitesse considérés permettent de recouvrir les deux scénarios, à savoir la plasticité diffuse ou localisée dans les ligaments entre cavités. Le critère permet ainsi

-
- de décrire l'écoulement de métaux poreux à la fois aux porosités faibles et élevées.
- Enfin, nous proposons dans le **Chapitre 8** un critère de coalescence pour des matériaux anisotropes de Hill. Le critère est validé par des analyses limites numériques pour plusieurs types d'anisotropie.

PARTIE I

**Modèles de croissance : étude de l'influence
des effets de forme des cavités et de
l'anisotropie plastique**

Introduction : Etude bibliographique des modèles de croissance des cavités

Durant la phase de croissance, les cavités grossissent et se déforment par écoulement plastique de la matrice, sans interactions très notables entre elles contrairement à la phase de coalescence. Par conséquent, les porosités concernées sont faibles, et la plasticité est diffuse partout dans la matrice. Dans ce cadre, l'objectif des modèles de croissance est de pouvoir prédire, pour une microstructure donnée, quelle sera la relation entre les contraintes et les déformations à l'échelle macroscopique, et de faire évoluer cette microstructure. Ce sont donc des modèles micromécaniques qui doivent être composés (i) d'un critère de plasticité dépendant de variables microstructurales ; (ii) d'une loi d'écoulement plastique ; (iii) de lois d'évolution des variables microstructurales.

L'homogénéisation permet d'effectuer la transition entre l'échelle de la microstructure et l'échelle macroscopique. Dans ce contexte, deux cadres mathématiques distincts ont été développés afin de dériver les modèles de croissance :

- Le premier, prenant source dans les travaux pionniers de [Gurson \(1977\)](#), combine l'analyse limite et l'homogénéisation de Hill-Mandel. Les cellules considérées ont une forme extérieure adaptée à celle de la cavité considérée (par exemple une sphère contenant une sphère vide concentrique pour modéliser une cavité sphérique), et sont soumises à des conditions de taux de déformation homogène sur le bord (conditions de [Mandel \(1964\)](#); [Hill \(1967\)](#)). Cette modélisation permet, en première approximation, d'approcher un milieu poreux pour lequel la plasticité est diffuse. (La situation idéale serait de considérer un VER contenant une répartition aléatoire de cavités et soumis à des conditions périodiques ; en pratique, si l'on veut pouvoir dériver analytiquement un modèle, on doit se restreindre à une situation simplifiée). L'analyse limite permet ensuite de déterminer le comportement mécanique de la cellule. Ce cadre limite la classe de comportement au cas des matériaux rigides parfaitement plastiques, c'est à dire sans élasticité ni écrouissage¹, mais a l'avantage de permettre de réaliser efficacement la transition micro-macro ([Leblond, 2003](#); [Benzerga and Leblond, 2010](#)).
- Le second est issu des méthodes d'homogénéisation généralisant les bornes d'Hashin-Shtrikman aux composites non linéaires ([Talbot and Willis, 1985](#); [Ponte Castañeda, 1991](#); [Willis, 1991](#); [Michel and Suquet, 1992](#)). Basée sur l'utilisation de matériaux linéaires de comparaison, cette méthode dite "variationnelle" a permis de dériver des équations constitutives de matériaux poreux contenant une répartition aléatoire de cavités non-sphériques ([Ponte Castañeda and Zaidman, 1994](#); [Kailasam and Ponte Castañeda, 1998](#)). Les modèles obtenus, précis pour les chargements déviatoriques, sont malheureusement inadaptés à triaxialité élevée car ils surestiment très notablement les propriétés de résistance. La méthode variationnelle a ensuite été perfectionnée par [Ponte Castañeda \(2002\)](#) (méthode du "second ordre"), permettant d'améliorer les prédictions à triaxialité élevée grâce à un recalage approprié de certains paramètres ([Danas and Ponte Castañeda, 2009](#)). Encore plus récemment, une nouvelle méthode basée sur une procédure itérative ([Ponte Castañeda, 2012](#)) a permis d'améliorer les surfaces de charge associées à des cavités ellipsoïdales sans aucun recalage de paramètres ([Agoras and Ponte Castañeda, 2013, 2014](#)).

1. Négliger l'élasticité a peu d'importance car en pratique les déformations sont importantes et donc les déformations élastiques sont négligeables. Il est plus gênant de négliger l'écrouissage, mais en pratique on le prend en compte *a posteriori* de manière heuristique.

Dans cette thèse, nous utiliserons essentiellement la méthode d'analyse limite pour étudier les matériaux poreux ductiles. Nous utiliserons aussi cependant, de manière importante, certains résultats issus de l'homogénéisation non linéaire, dans des situations où l'analyse limite ne permet pas d'aboutir (au moins de manière analytique, avec un nombre limité de champs de vitesse tests).

Nous allons à présent détailler les principaux modèles de croissance des cavités issus de l'analyse limite ; les résultats issus de l'homogénéisation non linéaire que nous utiliserons dans cette thèse seront rappelés en temps utile.

Modèle de Gurson (1977)

Modèle primitif

Le modèle de rupture ductile le plus célèbre et le plus utilisé est le modèle de Gurson (1977), obtenu en combinant les théories d'analyse limite et d'homogénéisation. Pour dériver son fameux critère, Gurson (1977) a utilisé comme VER une sphère creuse de rayons intérieur a et extérieur b , soumise à des conditions de taux de déformation homogène sur son bord extérieur (Mandel, 1964; Hill, 1967). La matrice est supposée rigide parfaitement plastique et obéit au critère isotrope de von Mises. Le champ de vitesse microscopique (incompressible) $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ est composé d'un champ d'expansion isotrope $\mathbf{v}^A(\mathbf{x})$ et d'un champ linéaire $\mathbf{v}^B(\mathbf{x})$ correspondant à un taux de déformation déviatorique homogène :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^A(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^B(\mathbf{x}) \quad (1)$$

définis par

$$\mathbf{v}^A(\mathbf{x}) = \frac{b^3}{r^2} D_m \mathbf{e}_r \quad ; \quad \mathbf{v}^B(\mathbf{x}) = \mathbf{D}' \cdot \mathbf{x}. \quad (2)$$

Dans les expressions précédentes, $D_m = \text{tr}(\mathbf{D})/3$ est la partie moyenne du taux de déformation macroscopique et $\mathbf{D}' = \mathbf{D} - D_m \mathbf{I}$ sa partie déviatorique, \mathbf{I} étant le tenseur identité du second ordre. L'analyse limite approchée de Gurson (1977) permet d'aboutir au critère de plasticité macroscopique :

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{\Sigma_{\text{eq}}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0. \quad (3)$$

La présence de la contrainte moyenne Σ_m dans le critère le rend donc sensible à la pression ; ceci est dû à la présence d'une cavité.

Le critère de plasticité est ensuite complété par une loi d'écoulement macroscopique obtenue par normalité (cette propriété est conservée dans le passage micro-macro (Rice, 1971; Gurson, 1977))

$$\mathbf{D}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma}) \quad , \quad \dot{\lambda} \begin{cases} = 0 & \text{if } \Phi(\boldsymbol{\Sigma}) < 0 \\ \geq 0 & \text{if } \Phi(\boldsymbol{\Sigma}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

et par une équation d'évolution de la porosité résultant de l'incompressibilité approchée de la matrice :

$$\dot{f} = (1 - f) \text{tr } \mathbf{D}^P. \quad (5)$$

Prise en compte de l'écoulement

La prise en compte de l'écoulement quant à elle se fait de manière heuristique, en égalant la dissipation plastique du matériau hétérogène avec celle d'un matériau fictif homogène obéissant au critère de von Mises dont on fait évoluer la limite d'élasticité (Gurson, 1977). Ainsi, on remplace dans le critère σ_0 par $\bar{\sigma}$ défini par :

$$\bar{\sigma} = \sigma(\bar{\epsilon}) \quad (6)$$

où $\sigma(\epsilon)$ donne l'évolution de la limite d'élasticité en fonction de la déformation équivalente ϵ . L'évolution de $\bar{\epsilon}$, qui représente une "valeur moyenne" de la déformation équivalente dans le matériau hétérogène poreux, est gouvernée par l'équation suivante :

$$(1 - f)\bar{\sigma}\dot{\bar{\epsilon}} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}^p. \quad (7)$$

Cette équation heuristique proposée par Gurson, permet d'égaliser la dissipation plastique dans le matériau hétérogène à celle dans le matériau fictif homogène.

Modèle GTN

Le modèle de Gurson a ensuite été modifié de façon heuristique par [Tvergaard and Needleman \(1984\)](#) de façon à bien reproduire certaines expériences et calculs numériques : (i) la porosité f dans le critère de Gurson est remplacée par une porosité modifiée qf (avec $q > 1$) pour prendre en compte la forme extérieure du VER ; (ii) au delà d'une porosité critique f_c , la porosité est artificiellement augmentée pour modéliser de manière phénoménologique la coalescence.

Ce modèle, appelé GTN (Gurson-Tvergaard-Needleman), a permis notamment de reproduire des calculs micromécaniques pour des chargements axisymétriques à triaxialité fixée ([Koplik and Needleman, 1988](#)) et la fameuse expérience de rupture en tronc de cône ([Tvergaard and Needleman, 1984](#)).

Prise en compte du troisième invariant et enrichissement des champs de vitesse

Le critère dérivé par Gurson est limité par le calcul approximatif de la dissipation plastique macroscopique et également par le faible nombre de champs de vitesse considérés. Améliorer ces points doit conduire nécessairement à un meilleur critère de plasticité.

Dans ce contexte, [Cazacu et al. \(2013\)](#) ont dérivé la solution exacte du problème traité par Gurson (*i.e* avec les mêmes champs de vitesse), pour des chargements axisymétriques. Leur critère dépend du signe du troisième invariant des contraintes et améliore quelque peu le modèle de Gurson pour l'évolution de la porosité dans des problèmes à triaxialité fixée ([Alves et al., 2014](#)).

Récemment [Leblond and Morin \(2014\)](#) ont revisité l'analyse de Gurson pour des chargements 3D en étudiant les différents ordres de l'approximation faite sur la dissipation plastique macroscopique. L'effet de cette approximation est faible sur les surfaces de charge mais important sur le taux de croissance du vide.

Enfin, [Monchiet et al. \(2007, 2011\)](#) ont repris l'analyse de Gurson en considérant une famille élargie de champs de vitesse, basée sur les champs d'Eshelby, permettant ainsi d'améliorer la surface de charge à faible triaxialité.

Prise en compte des effets de forme des cavités

Le modèle de Gurson s'applique à des cavités qui restent sphériques, ce qui en pratique n'est pas réaliste car les vides se déforment et ressemblent plus à des ellipsoïdes qu'à des sphères. Des cavités possédant trois axes différents ont été observées expérimentalement (voir [Figure 3a](#)) en utilisant des techniques de microscopie électronique à balayage ([Benzerga et al., 2004b](#)), et numériquement (voir [Figure 3b](#)) lors du cisaillement de cavités initialement sphériques ([Nielsen et al., 2012](#)). La prise en compte des effets de forme est donc nécessaire pour mieux approcher la forme réelle des cavités.

Cavités sphéroïdales

[Gologanu et al. \(1993, 1994\)](#) ont étendu le critère de Gurson en prenant en compte des cavités sphéroïdales allongées (prolate) ou aplaties (oblate) (modèle GLD). La géométrie considérée est un

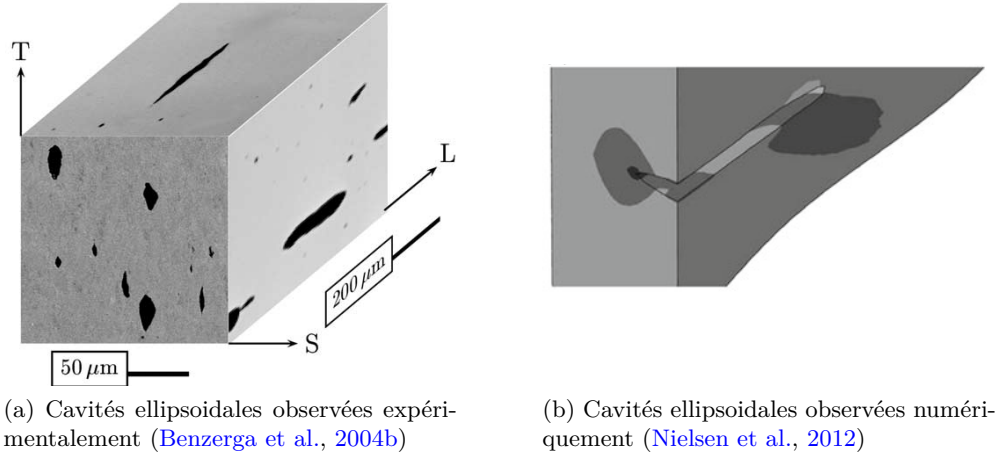


FIGURE 3: Mise en évidence de cavités non-sphériques.

sphéroïde d'axe de symétrie rotationnelle Oz , de demi-axes a_2 et b_2 , contenant un vide sphéroïdal confocal de demi-axes a_1 et b_1 . La porosité est donnée par $f = \frac{a_1 b_1^2}{a_2 b_2^2}$.

La difficulté majeure consiste à trouver des champs de vitesse incompressibles qui permettent de vérifier des conditions de taux de déformation homogène sur le bord. Le champ considéré par ces auteurs est composé d'un champ correspondant à un taux de déformation déviatorique uniforme (comme pour le modèle de Gurson), et d'un champ basé sur une combinaison de deux champs de Lee and Mear (1992), permettant de décrire l'expansion de la cavité. Le champ résultant a cette propriété caractéristique qu'il satisfait des conditions de taux de déformation homogène sur tous les sphéroïdes confocaux avec la cavité et le bord externe.

Le critère, obtenu pour des chargements axisymétriques, s'écrit

$$\Phi(\Sigma) = \frac{C}{\sigma_0^2} (\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx} + \eta \Sigma_h)^2 + 2(1+g)(f+g) \cosh\left(\kappa \frac{\Sigma_h}{\sigma_0}\right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \quad (8)$$

où C , η , Σ_h , g et κ dépendent de la géométrie considérée, et permettent de retrouver le critère de Gurson lorsque la cavité devient sphérique. Ce critère a ensuite été perfectionné en élargissant la famille de champs de vitesse (Gologanu et al., 1997) pour améliorer le cas oblate.

Garajeu (1995) a également traité le problème considéré par Gologanu et al. (1993, 1994), en utilisant une vitesse orthogonale aux sphéroïdes confocaux avec la cavité et le bord externe, pour la partie du champ décrivant l'expansion.

Récemment, Monchiet et al. (2014) ont proposé une alternative à l'approche initiée par Gologanu et al. (1993, 1994, 1997) en considérant des champs d'Eshelby. L'avantage de leur modèle est qu'il permet de prendre en compte des chargements non-axisymétriques et d'améliorer les prédictions du modèle GLD dans le cas des chargements déviatoriques.

Cavités ellipsoïdales générales

Madou and Leblond (2012a,b) ont récemment étendu le critère de Gologanu et al. (1993, 1994, 1997) au cas des cavités ellipsoïdales générales à partir d'une homogénéisation approchée d'une cellule ellipsoïdale contenant un vide ellipsoïdal confocal et soumise à des conditions de taux de déformation homogène sur le bord. Les auteurs ont utilisé les champs de vitesse découverts par Leblond and Gologanu (2008) satisfaisant des conditions de taux de déformation homogène sur tous les ellipsoïdes confocaux avec le vide et le bord extérieur. Comme précédemment, la matrice est supposée obéir au critère isotrope de von Mises. L'analyse limite approchée permet d'aboutir au critère suivant (Madou

and Leblond, 2012a) :

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}) \equiv \frac{\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma})}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(f+g) \cosh \left[\frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{\Sigma})}{\sigma_0} \right] - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \quad (9)$$

où g est la “seconde porosité”, $\mathcal{L}(\boldsymbol{\Sigma})$ une forme linéaire des composantes diagonales de $\boldsymbol{\Sigma}$ et $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma})$ une forme quadratique des composantes de $\boldsymbol{\Sigma}$. (Notons au passage l’analogie formelle avec le critère GLD). Le critère est ensuite amélioré suivant deux directions distinctes :

- Pour les chargements hydrostatiques, les champs de vitesse analytiques sont remplacés par le champ supposé exact, déterminé numériquement par la méthode des éléments finis. Des simulations ont été menées dans un nombre de cas significatifs, puis des formules analytiques heuristiques ont été proposées pour fitter les coefficients numériques. Cela a permis de déterminer les coefficients de la forme linéaire.
- Pour les chargements déviatoriques, l’analyse limite est abandonnée : les coefficients restants sont fixés de façon à faire coïncider le critère avec une borne pour composites non linéaires (Willis, 1977, 1991; Ponte Castañeda, 1991; Michel and Suquet, 1992), dont on sait que les prédictions à faible triaxialité sont très bonnes.

Le critère final permet de reproduire les surfaces de charge numériques dans de nombreux cas géométriques (Madou and Leblond, 2013) et a ensuite été complété par des équations d’évolution de la déformation et rotation d’une cavité ellipsoïdale (Madou et al., 2013) basées sur les travaux de Ponte Castañeda and Zaidman (1994); Kailasam and Ponte Castañeda (1998).

Prise en compte de l’anisotropie plastique

Les alliages métalliques sont rarement isotropes, notamment après leur mise en forme. En effet, les sollicitations mécaniques et thermiques induites par la mise en forme produisent une texture morphologique (allongement des grains selon certaines directions) ou cristallographique (orientation des grains selon certaines directions). Le cas le plus courant d’anisotropie morphologique est l’orthotropie. Dans ce cas, le matériau possède trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux dont les intersections correspondent aux axes d’anisotropie ; la limite d’élasticité du matériau est différente suivant ces trois axes. Hill (1948) a proposé une extension du critère de von Mises pour prendre en compte de manière phénoménologique cette orthotropie, sous la forme d’un critère quadratique. L’anisotropie cristallographique quant à elle peut être modélisée simplement par la plasticité monocristalline, en considérant par exemple la loi de Schmid.

Anisotropie plastique morphologique de Hill (1948)

Benzerga and Besson (2001) ont étendu le critère de Gurson (1977) en prenant en compte une matrice anisotrope obéissant au critère quadratique de Hill (1948). Les auteurs ont utilisé les champs isotropes de Gurson (1977) pour calculer la dissipation plastique macroscopique ; le critère qu’ils obtiennent s’écrit

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{\kappa \Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (10)$$

où Σ_{eq} est la contrainte macroscopique équivalente prise au sens de Hill et κ est un paramètre qui dépend des coefficients d’anisotropie.

Récemment, Monchiet et al. (2006, 2008) ont dérivé un critère prenant en compte à la fois les effets de forme des cavités, qui sont supposées sphéroïdales, et l’anisotropie plastique. Les auteurs ont utilisé les champs isotropes de Gologanu et al. (1993, 1994) et ont abouti au critère suivant :

$$\left(\frac{\tilde{\Sigma}_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2(1+g)(f+g) \cosh \left(\frac{\kappa \Sigma_p}{\sigma_0} \right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \quad (11)$$

où $\tilde{\Sigma}_{eq}$ et κ dépendent de l'anisotropie plastique.

Enfin [Keralavarma and Benzerga \(2008, 2010\)](#) ont traité le même problème que [Monchiet et al. \(2006, 2008\)](#), en considérant cette fois-ci les champs isotropes, plus riches, de [Gologanu et al. \(1997\)](#). Leur critère s'écrit :

$$\frac{3}{2}C \frac{\Sigma : \mathbb{P} : \Sigma}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(f+g) \cosh\left(\kappa \frac{\Sigma : \mathbf{X}}{\sigma_0}\right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \quad (12)$$

où \mathbb{P} , C , κ et \mathbf{X} dépendent de l'anisotropie et/ou de la géométrie.

Anisotropie plastique cristallographique

Très récemment, [Paux et al. \(2015\)](#) ont dérivé un critère pour un monocristal contenant un vide sphérique, en utilisant une version régularisée de la loi de Schmid. Leur analyse limite approchée permet d'aboutir au critère

$$\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^K (\boldsymbol{\mu}_k : \Sigma)^n\right)^{1/n}}{\tau_0}\right)^2 + 2f \cosh\left(\kappa' \frac{\Sigma_m}{\tau_0}\right) - 1 - f^2 = 0. \quad (13)$$

Le tenseur $\boldsymbol{\mu}_k$ permet d'identifier les plans de glissement dans la loi de Schmid et κ' dépend de l'anisotropie. (L'exposant n est relié à l'approximation géométrique de la surface de charge dans la version régularisée de la loi de Schmid). Ce critère a été confronté à des calculs par éléments finis ([Han et al., 2013](#)) dans le cas d'une microstructure FCC et est en très bon accord avec les résultats numériques.

Autres extensions

Le modèle de [Gurson \(1977\)](#) a été étendu à de nombreuses situations, parmi lesquelles on peut noter (de manière non exhaustive) :

- La prise en compte de matrices compressibles, obéissant au critère de Drucker-Prager ([Jeong and Pan, 1995](#); [Jeong, 2002](#); [Guo et al., 2008](#)) ou Mises-Schleicher ([Lee and Oung, 1999](#); [Shen et al., 2015](#));
- La prise en compte de matrices incompressibles exhibant une dissymétrie traction-compression ([Cazacu and Stewart, 2009](#));
- La prise en compte de plusieurs populations de cavités ([Vincent et al., 2009a,b, 2014a,b](#));
- La prise en compte des effets dynamiques ([Molinari and Mercier, 2001](#); [Sartori et al., 2015](#)).

Plan de la partie

- Le Chapitre 1 est consacré à l'implémentation numérique dans un code de calcul par éléments finis du modèle de Madou-Leblond pour cavités ellipsoïdales générales, avec pour objectif d'appliquer le modèle à des problèmes où le cisaillement est important.
- Le Chapitre 2 est dédié à l'extension des critères de [Madou and Leblond \(2012a,b\)](#); [Monchiet et al. \(2008\)](#); [Keralavarma and Benzerga \(2010\)](#) au cas des cavités ellipsoïdales générales plongées dans une matrice anisotrope de [Hill \(1948\)](#).
- Le Chapitre 3 est consacré à la validation du critère macroscopique développé au Chapitre 2, avec des calculs d'analyse limite numérique réalisés par la méthode des éléments finis. Les calculs numériques nous permettent ensuite d'étudier les lois d'évolution des paramètres internes du modèle (taux de déformation et de rotation de la cavité) avec pour objectif de formuler un modèle complet de rupture ductile pour matériaux anisotropes et cavités ellipsoïdales générales.

Implémentation numérique et application d'un modèle de rupture ductile avec effets de forme des cavités

Ce chapitre est consacré à l'implémentation numérique et à l'application d'un modèle récent de rupture ductile pour matériaux isotropes et cavités ellipsoïdales générales (Madou and Leblond, 2012a,b, 2013; Madou et al., 2013). Dans un premier temps, on formule un modèle constitutif de rupture ductile en complétant le critère de plasticité de Madou-Leblond. On propose ensuite un algorithme pour résoudre l'étape locale du problème élastoplastique, permettant de réduire le problème à la résolution de deux équations non-linéaires couplées portant sur deux inconnues. Cet algorithme, implémenté dans les codes de calcul SYSTUS[®] et ABAQUS[®], a permis d'appliquer le modèle : (i) la première application est dédiée à la comparaison des prédictions du modèle ML avec des calculs micromécaniques de Tvergaard et coll. en cisaillement, pour des cavités initialement sphériques et cylindriques ; (ii) la seconde application est consacrée à l'étude d'une structure soumise à du cisaillement ; les prédictions du modèle sont confrontées avec des résultats expérimentaux.

1.1 Introduction

Le modèle le plus célèbre de rupture ductile est le modèle de Gurson (1977), obtenu à partir de l'analyse limite d'une cellule sphérique contenant une cavité sphérique. Pour mieux rendre compte de la forme des cavités, Gologanu et al. (1993, 1994, 1997) ont étendu le modèle de Gurson (1977) au cas des vides sphéroïdaux. Très récemment, Madou and Leblond (2012a,b) ont étendu les critères précédents au cas des cavités ellipsoïdales générales. Leur critère de plasticité macroscopique a été ensuite validé en comparant les surfaces de charge théoriques à celles obtenues par des analyses limites numériques réalisées par la méthode des éléments finis (Madou and Leblond, 2013). Enfin, des équations d'évolution des vides (déformation et rotation) ont été formulées (Madou et al., 2013).

Les modèles de rupture ductile mentionnés précédemment doivent être validés avant de pouvoir envisager leur utilisation. Outre la validation séparée de chacun des constituants du modèle (surface de charge, loi d'écoulement et évolution des paramètres internes), la comparaison des prédictions des modèles avec des simulations micromécaniques sur des problèmes d'évolution est cruciale pour pouvoir évaluer les modèles. Le modèle de Gurson (1977) a notamment permis de reproduire les calculs micromécaniques de Koplik and Needleman (1988), pour des chargements axisymétriques à triaxialité élevée (les cavités restent alors sphériques). Le modèle GLD a permis quant à lui de reproduire des simulations similaires (Pardoan and Hutchinson, 2000) pour des triaxialités hautes mais également basses (pour lesquelles les cavités sont non-sphériques) ; dans le dernier cas, le modèle de Gurson (1977) ne permet malheureusement pas de reproduire les résultats numériques en raison des effets de forme importants.

Le modèle GLD est cependant inadapté dès que les chargements ne sont plus axisymétriques, lorsqu'il y a du cisaillement par exemple. D'importants efforts numériques (Barsoum and Faleskog, 2007a; Tvergaard, 2009; Tvergaard and Nielsen, 2010; Barsoum and Faleskog, 2011; Scheyvaerts et al., 2011; Tvergaard, 2012; Nielsen et al., 2012) et expérimentaux (Barsoum and Faleskog, 2007b; Mohr et al., 2010; Dunand and Mohr, 2011b,a) ont été récemment menés pour comprendre la rupture duc-

tile en cisaillement. Dans les simulations de [Nielsen et al. \(2012\)](#), des cavités initialement sphériques se déforment et tournent pour finalement devenir des ellipsoïdes ayant trois axes différents. On observe dans ces simulations un adoucissement du matériau même dans des cas où la porosité diminue ; dans le cas du cisaillement pur, la porosité tend vers zéro mais on observe néanmoins l'apparition de l'adoucissement. Il paraît clair dans ce cas que le modèle de [Gurson \(1977\)](#) ne pourra jamais prédire cet adoucissement puisque la porosité n'augmente pas. Des modifications heuristiques ([Nahshon and Hutchinson, 2008](#); [Xue, 2008](#)) ont été proposées pour prendre en compte l'endommagement en cisaillement dans le modèle de [Gurson \(1977\)](#), en ajoutant un terme empirique dans l'équation d'évolution (pourtant exacte!) de la porosité. Ces modifications ont permis de reproduire des simulations micromécaniques en cisaillement ([Tvergaard and Nielsen, 2010](#)), mais leur caractère phénoménologique limite l'applicabilité de ces approches.

Le but de ce chapitre est donc double : (i) valider le modèle de Madou-Leblond en comparant ses prédictions à des simulations micromécaniques ; (ii) étudier la rupture ductile en cisaillement en utilisant ce modèle. L'organisation du chapitre est la suivante :

- La section 1.2 est consacrée à la formulation du modèle complet de rupture ductile, basé sur la fonction de charge de [Madou and Leblond \(2012a,b\)](#) et les équations d'évolution des paramètres internes proposées par [Madou et al. \(2013\)](#).
- L'implémentation numérique du modèle est proposée en section 1.3, consistant à résoudre l'étape locale du problème élastoplastique.
- En section 1.4, les prédictions du modèle de Madou-Leblond sont comparées à des simulations numériques micromécaniques pour des chargements de cisaillement effectués par Tvergaard et coll.
- Enfin, la section 1.5 est consacrée à l'application du modèle de Madou-Leblond à une structure complexe sollicitée en cisaillement.

1.2 Modèle complet de rupture ductile avec effets de forme des cavités

On considère ici le modèle de Madou-Leblond ([Madou and Leblond, 2012a,b, 2013](#); [Madou et al., 2013](#)), que l'on notera dans la suite ML, qui s'applique à des cavités ellipsoïdales générales. Ce modèle de croissance, qui consiste en un critère de plasticité macroscopique, une loi d'écoulement plastique associée par normalité et des équations d'évolution des paramètres internes, va être complété dans cette section de façon à pouvoir comporter des éléments essentiels comme la coalescence et l'écrouissage. Le modèle complet de rupture ductile est donc composé des éléments suivants :

Critère de plasticité Le critère macroscopique a été obtenu par analyse limite d'une cellule ellipsoïdale arbitraire Ω contenant un vide ellipsoïdal ω de demi-axes $a > b > c$ orientés suivant les vecteurs unitaires \mathbf{e}_a , \mathbf{e}_b , \mathbf{e}_c . Définissons l'équation de la surface du vide

$$\mathcal{P}(u) \equiv \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_a)}{a^2} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_b)}{b^2} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_c)}{c^2} = 1. \quad (1.1)$$

La matrice $\mathbf{P} \equiv (P_{ij})$ de la forme quadratique \mathcal{P} est exprimée dans le repère fixe \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , donc sa diagonalisation donne les demi-axes et l'orientation du vide ; on utilisera donc cette matrice pour définir complètement la cavité ellipsoïdale. La porosité est notée $f = \frac{\omega}{\Omega}$.

Le critère de plasticité macroscopique s'écrit

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, f, \mathbf{P}, \bar{\sigma}) = \frac{\mathcal{Q}(\boldsymbol{\sigma})}{\bar{\sigma}^2} + 2q(1+g)(f+g)^* \cosh \left[\frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma})}{\bar{\sigma}} \right] - (1+g)^2 - q^2(f+g)^{*2} \leq 0. \quad (1.2)$$

Dans cette expression :

- g est la seconde porosité, définie par $g = \frac{\sqrt{a^2-c^2}(b^2-c^2)}{\Omega}$ où $\frac{4\pi}{3}\Omega$ est le volume de la cellule ;
- $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\sigma})$ est une forme quadratique des composantes de $\boldsymbol{\sigma}$;
- $\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma})$ est une forme linéaire des composantes diagonales de $\boldsymbol{\sigma}$;
- q est le coefficient de Tvergaard. Ce coefficient doit dépendre de la forme des cavités (Gologanu, 1997). Nous adoptons la forme heuristique suivante pour ce paramètre, basée sur l'étude de Gologanu (1997) :

$$\begin{cases} q_{prol} &= 1 + (q_1 - 1) \left[\frac{2a/c}{1 + (a/c)^2} \right]^{3/2} \\ q_{obl} &= 1 + (q_1 - 1) \left[\frac{2a/c}{1 + (a/c)^2} \right] \\ q &= (1 - k)q_{prol} + kq_{obl} \end{cases} \quad (1.3)$$

où $k = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$ est un paramètre sans dimension caractérisant la famille d'ellipsoïdes confocaux au vide considéré ;

- $(f + g)^*$ correspond à une modélisation heuristique de la coalescence, dans l'esprit des travaux de Tvergaard and Needleman (1984) :

$$(f + g)^* = \begin{cases} f + g & \text{si } f + g \leq (f + g)_c \\ (f + g)_c + \delta[(f + g) - (f + g)_c] & \text{si } f + g \geq (f + g)_c \end{cases} \quad (1.4)$$

où $(f + g)_c$ est une porosité équivalente critique et $\delta (> 1)$ est un paramètre qui permet de décrire l'accélération de la croissance de la porosité durant la phase de coalescence ;

- $\bar{\sigma}$ représente la limite d'élasticité dans la matrice hétérogène, dont l'évolution sera donnée plus bas.

Nous pouvons définir un paramètre d'endommagement d permettant de caractériser la ruine du matériau. Supposons que le matériau est entièrement détruit ; d'après le critère (1.2), on obtient :

$$2q(1 + g)(f + g)^* - (1 + g)^2 - q^2(f + g)^{*2} = -[1 + g - q(f + g)^*]^2 0. \quad (1.5)$$

On a donc $q(f + g)^* = 1 + g$. On peut donc définir un paramètre d'endommagement d par la formule :

$$d = \frac{q(f + g)^*}{1 + g}, \quad (1.6)$$

la valeur $d = 1$ correspondant bien à la ruine totale.

Enfin, nous écrivons par commodité les formes linéaire et quadratique sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma} \\ \mathcal{Q}(\boldsymbol{\sigma}) &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{Q} : \boldsymbol{\sigma} \end{cases} \quad (1.7)$$

où \mathbb{Q} est un tenseur du quatrième ordre et \mathbf{H} est un tenseur du second ordre.

Loi d'écoulement macroscopique La loi d'écoulement est préservée dans le passage micro-macro (Rice, 1971; Gurson, 1977) et s'écrit donc nécessairement sous la forme :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, f, \mathbf{P}, \bar{\sigma}) \quad , \quad \dot{\lambda} \begin{cases} = 0 & \text{si } \Phi(\boldsymbol{\sigma}, f, \mathbf{P}, \bar{\sigma}) < 0 \\ \geq 0 & \text{si } \Phi(\boldsymbol{\sigma}, f, \mathbf{P}, \bar{\sigma}) = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique. En utilisant le critère (1.2), la loi d'écoulement s'écrit donc :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \left[2 \frac{\mathbb{Q} : \boldsymbol{\sigma}}{\bar{\sigma}^2} + 2q(1 + g)(f + g)^* \frac{\mathbf{H}}{\bar{\sigma}} \sinh \left(\frac{\mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}}{\bar{\sigma}} \right) \right]. \quad (1.9)$$

Equations d'évolution des paramètres internes L'équation d'évolution de la porosité est classiquement déduite de l'incompressibilité de la matrice :

$$\dot{f} = (1 - f)\text{tr}(\mathbf{D}^p). \quad (1.10)$$

L'équation d'évolution de la forme quadratique \mathbf{P} est quant à elle donnée par [Madou et al. \(2013\)](#) :

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P} \cdot (\mathbf{D}^v + \mathbf{\Omega}^v) - (\mathbf{D}^v + \mathbf{\Omega}^v)^T \cdot \mathbf{P} \quad (1.11)$$

où \mathbf{D}^v et $\mathbf{\Omega}^v$ désignent les tenseurs de taux de déformation et de rotation du vide. Ils sont liés aux taux de déformation et de rotation totaux par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^v &= \mathbb{L} : \mathbf{D} \\ \mathbf{\Omega}^v &= \mathbb{\Omega} + \mathbb{R} : \mathbf{D} \end{cases} \quad (1.12)$$

où \mathbb{L} et \mathbb{R} sont des tenseurs de localisation du quatrième ordre ([Madou et al., 2013](#)).

Evolution de l'écrouissage Enfin l'évolution du paramètre d'écrouissage $\bar{\sigma}$ est donnée par

$$\dot{\bar{\sigma}} = \sigma(\bar{\epsilon}) \quad (1.13)$$

où $\sigma(\epsilon)$ donne l'évolution de la limite d'élasticité de la matrice en fonction de la déformation équivalente ϵ . L'évolution de $\bar{\epsilon}$, qui représente une "valeur moyenne" de la déformation équivalente dans le matériau hétérogène poreux, est gouvernée par l'équation suivante :

$$(1 - f)\bar{\sigma}\dot{\bar{\epsilon}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p. \quad (1.14)$$

Cette équation heuristique proposée par Gurson, permet d'égaliser la dissipation plastique dans le matériau hétérogène à celle dans le matériau fictif homogène.

Modélisation heuristique du contact Il peut être intéressant de modéliser le contact entre les faces d'une cavité ellipsoïdale, ou bien avec une inclusion contenue, lorsque cette cavité se referme. Nous adoptons une modélisation heuristique de ce phénomène complexe basée sur une augmentation fictive de la porosité lorsqu'un axe atteint une valeur limite. Supposons qu'au cours d'un calcul le demi-axe c par exemple devienne plus petit qu'une valeur c_{lim} , alors on impose :

$$\begin{aligned} c &= c_{\text{lim}} \\ f &= f \frac{c_{\text{lim}}}{c}. \end{aligned}$$

Cette modélisation est approchée du fait qu'on ne tient pas compte de l'effet du contact sur le critère et la loi d'écoulement.

1.3 Implémentation numérique du modèle

On se concentre dans cette section sur l'étape locale du problème élastoplastique, c'est-à-dire la projection du prédicteur élastique sur la surface de charge.

1.3.1 Généralités

[Halphen and Nguyen \(1975\)](#); [Son \(1977\)](#) ont défini, dans le cadre de la théorie linéarisée, la classe des "matériaux standards généralisés". Pour ces matériaux, les paramètres internes vérifient collectivement une loi de normalité étendue. Dans ces conditions, le problème de projection local a une solution unique, pourvu que les équations d'évolution des paramètres internes soient discrétisées en temps avec

un schéma implicite.

En s'inspirant de [Enakoutsu et al. \(2007\)](#), on peut montrer que le modèle ML définit un matériau standard généralisé, pourvu que : (i) le cadre considéré soit la théorie linéaire ; (ii) la porosité, l'orientation et la forme de la cavité soient constantes.

En pratique, ces restrictions ne sont pas réalistes pour des problèmes de rupture ductile qui impliquent des déformations importantes, une croissance de la porosité et des déformations des cavités. Cependant, en suivant encore [Enakoutsu et al. \(2007\)](#), on remarque que

- si, dans la loi d'hypoélasticité, les termes additionnels dus à la dérivé objective de $\boldsymbol{\sigma}$ sont discrétisés en temps avec un schéma explicite ;
- si, dans le critère et la loi d'écoulement, la porosité f et la forme quadratique \mathbf{P} considérées sont celles du temps précédent ;

alors les équations du problème local de projection sont exactement les mêmes que dans le cadre linéarisé avec la porosité f et la forme quadratique \mathbf{P} fixées : le modèle se comporte ainsi comme si le matériau était standard généralisé.

Par conséquent, l'existence et l'unicité de la solution du problème de projection local sont assurées, pourvu que (i) les évolutions de $\boldsymbol{\epsilon}^P$ et $\bar{\epsilon}$ soient discrétisées en temps avec un *schéma implicite* ; (ii) les termes additionnels dus à la dérivée objective de $\boldsymbol{\sigma}$ soient discrétisés en temps avec un *schéma explicite* ; (iii) les valeurs de la porosité f et de la forme quadratique \mathbf{P} utilisées dans le critère et la loi d'écoulement soient celles du *temps précédent*.

1.3.2 Equations du problème de projection locale

Pour des raisons de simplicité, l'algorithme de projection sera présenté dans le contexte de petites déformations ; son extension aux grandes déformations ne soulève cependant aucune difficulté.

Les équations constitutives du modèle, avant la discrétisation en temps, s'écrivent :

- *Décomposition de la déformation totale* : $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^P$
- *Loi d'élasticité* : $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}^e$
- *Critère de plasticité* : $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, f, \mathbf{P}, \bar{\sigma}) \leq 0$
- *Loi d'écoulement et condition de consistance* : $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, f, \mathbf{P}, \bar{\sigma})$, $\dot{\lambda} \geq 0$, $\dot{\lambda} \Phi(\boldsymbol{\sigma}, f, \mathbf{P}, \bar{\sigma}) = 0$
- *Loi d'écrouissage* : $\bar{\sigma} \equiv \sigma(\bar{\epsilon})$, $(1 - f)\bar{\sigma}\dot{\bar{\epsilon}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$

où $\boldsymbol{\epsilon}^e$ est le tenseur de déformation élastique, $\boldsymbol{\epsilon}^P$ le tenseur de déformation plastique et \mathbb{C} le tenseur d'élasticité.

Après la discrétisation en temps, le problème de projection locale consiste à trouver l'état mécanique $\mathcal{S}_{n+1} = \{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^P, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}\}$ au temps t_{n+1} résultant d'un incrément de déformation connu $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_n$ (résultant d'une itération élastoplastique globale) et connaissant l'état mécanique précédent $\mathcal{S}_n = \{\boldsymbol{\epsilon}_n, \boldsymbol{\epsilon}_n^P, \boldsymbol{\sigma}_n, \bar{\epsilon}_n\}$ au temps t_n .

Comme nous l'avons vu précédemment, le critère de plasticité et la loi d'écoulement sont discrétisés de manière implicite par rapport à $\boldsymbol{\epsilon}^P$ et $\bar{\epsilon}$, et de manière explicite par rapport à f et \mathbf{P} ; les équations

discrétisées du problème élasto-plastique s'écrivent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : (\Delta \boldsymbol{\epsilon}_n - \Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^p) = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - \mathbb{C} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^p \\ \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, f_n, \mathbf{P}_n, \bar{\sigma}_{n+1}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbb{Q}_n : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\bar{\sigma}_{n+1}^2} + 2q(1 + g_n)(f_n + g_n)^* \cosh\left(\frac{\mathbf{H}_n : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\bar{\sigma}_{n+1}}\right) \\ \quad - (1 + g_n)^2 - q^2(f_n + g_n)^{*2} \leq 0 \\ \Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^p = \Delta \lambda_n \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, f_n, \mathbf{P}_n, \bar{\sigma}_{n+1}) \\ \quad = \Delta \lambda_n \left[2 \frac{\mathbb{Q}_n : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\bar{\sigma}_{n+1}^2} + 2q(1 + g_n)(f_n + g_n)^* \frac{\mathbf{H}_n}{\bar{\sigma}_{n+1}} \sinh\left(\frac{\mathbf{H}_n : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\bar{\sigma}_{n+1}}\right) \right] \\ \bar{\sigma}_{n+1} = \sigma(\bar{\epsilon}_{n+1} + \Delta \bar{\epsilon}_n) \\ \Delta \lambda_n \geq 0 \\ \Delta \lambda_n \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, f_n, \mathbf{P}_n, \bar{\sigma}_{n+1}) = 0 \\ (1 - f) \bar{\sigma}_{n+1} \Delta \bar{\epsilon}_n = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^p \end{array} \right. \quad (1.15)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_n$ est le prédicteur élastique résultant de l'incrément de déformation $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_n$ considéré fictivement comme purement élastique.

1.3.3 Algorithme de projection

Le traitement de l'érouissage est réalisé par une méthode de point fixe : (i) on suppose que $\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_n$; (ii) on calcule ensuite $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p$, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\bar{\epsilon}_{n+1}$ avec cette valeur initiale de $\bar{\sigma}_{n+1}$; (iii) on déduit de l'équation (1.15)₈ une estimation raffinée de $\bar{\sigma}_{n+1}$; (iv) on poursuit la procédure jusqu'à ce que $\bar{\sigma}_{n+1}$ soit stationnaire. (En pratique, la méthode du point fixe converge rapidement car la variation de la limite d'élasticité d'un instant au suivant est faible).

Le problème se réduit donc à la détermination de $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p$, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, $\bar{\epsilon}_{n+1}$ pour une valeur fixe de $\bar{\sigma}_{n+1}$; de manière classique, la démarche de projection repose sur une prédiction élastique, suivie ou non d'une correction plastique.

Prédiction élastique Si $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, f_n, \mathbf{P}_n, \bar{\sigma}_{n+1}) \leq 0$ alors l'évolution est purement élastique. L'état mécanique final vaut donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_n^p \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Correction elastoplastique En revanche, si $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}}, f_n, \mathbf{P}_n, \bar{\sigma}_{n+1}) > 0$, la prédiction élastique n'est pas plastiquement admissible. Une correction plastique est donc à apporter, sachant que la contrainte finale $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ doit satisfaire le critère de plasticité; cela se traduit par la relation $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, f_n, \mathbf{P}_n, \bar{\sigma}_{n+1}) = 0$. La difficulté majeure est la détermination de l'incrément de multiplicateur plastique.

Réécrivons $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ en utilisant la loi d'écoulement :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - \Delta \lambda_n \mathbb{C} : \left[2 \frac{\mathbb{Q}_n : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\bar{\sigma}_{n+1}^2} + 2q(1 + g_n)(f_n + g_n)^* \frac{\mathbf{H}_n}{\bar{\sigma}_{n+1}} \sinh\left(\frac{\mathbf{H}_n : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\bar{\sigma}_{n+1}}\right) \right]. \quad (1.17)$$

Il vient donc :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left(\mathbb{I} + 2 \frac{\Delta\lambda_n}{\bar{\sigma}_{n+1}^2} \mathbb{C} : \mathbb{Q}_n \right)^{-1} \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - 2q(1+g_n)(f_n+g_n)^* \frac{\Delta\lambda_n}{\bar{\sigma}_{n+1}} \mathbb{C} : \mathbf{H}_n \sinh \left(\frac{\mathbf{H}_n : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\bar{\sigma}_{n+1}} \right) \right]. \quad (1.18)$$

Dans cette expression, on remarque que $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ dépend de lui-même à travers l'argument du sinus hyperbolique. Introduisons une nouvelle inconnue, scalaire, que l'on reliera à $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. Notons

$$\sigma_h = \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (1.19)$$

cette inconnue scalaire. L'idée est d'écrire le critère $\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, f_n, \mathbf{P}_n, \bar{\sigma}_{n+1}) = 0$ en utilisant cette nouvelle variable σ_h , ce qui nous fournira une équation qui dépendra de deux inconnues $\Delta\lambda_n$ et σ_h . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{I} + 2 \frac{\Delta\lambda_n}{\bar{\sigma}_{n+1}^2} \mathbb{C} : \mathbb{Q}_n \right)^{-1} : \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - 2q(1+g_n)(f_n+g_n)^* \frac{\Delta\lambda_n}{\bar{\sigma}_{n+1}} \mathbb{C} : \mathbf{H}_n \sinh \left(\frac{\sigma_h}{\bar{\sigma}_{n+1}} \right) \right] : \mathbb{Q}_n : \\ & \left(\mathbb{I} + 2 \frac{\Delta\lambda_n}{\bar{\sigma}_{n+1}^2} \mathbb{C} : \mathbb{Q}_n \right)^{-1} : \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - 2q(1+g_n)(f_n+g_n)^* \frac{\Delta\lambda_n}{\bar{\sigma}_{n+1}} \mathbb{C} : \mathbf{H}_n \sinh \left(\frac{\sigma_h}{\bar{\sigma}_{n+1}} \right) \right] \\ & + 2q(1+g_n)(f_n+g_n)^* \cosh \left(\frac{\sigma_h}{\bar{\sigma}_{n+1}} \right) - (1+g_n)^2 - q^2(f_n+g_n)^{*2} = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Cette équation scalaire dépend bien uniquement de $\Delta\lambda_n$ et σ_h . Nous la noterons $F(\Delta\lambda_n, \sigma_h) = 0$. Réécrivons maintenant la relation entre σ_h et $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$:

$$\sigma_h - \mathbf{H} : \left(\mathbb{I} + 2 \frac{\Delta\lambda_n}{\bar{\sigma}_{n+1}^2} \mathbb{C} : \mathbb{Q}_n \right)^{-1} : \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - 2q(1+g_n)(f_n+g_n)^* \frac{\Delta\lambda_n}{\bar{\sigma}_{n+1}} \mathbb{C} : \mathbf{H}_n \sinh \left(\frac{\sigma_h}{\bar{\sigma}_{n+1}} \right) \right] = 0, \quad (1.21)$$

ce qui constitue une deuxième équation scalaire portant sur les deux inconnues $\Delta\lambda_n$ et σ_h , et que nous noterons $G(\Delta\lambda_n, \sigma_h) = 0$.

Finalement, le problème de projection se réduit à la résolution de deux équations non linéaires portant sur les inconnues $\Delta\lambda_n$ et σ_h :

$$\begin{cases} F(\Delta\lambda_n, \sigma_h) = 0 \\ G(\Delta\lambda_n, \sigma_h) = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Ces équations peuvent être résolues en utilisant une méthode de Newton. Une fois $\Delta\lambda_n$ et σ_h connus, on détermine $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ par la relation

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left(\mathbb{I} + 2 \frac{\Delta\lambda_n}{\bar{\sigma}_{n+1}^2} \mathbb{C} : \mathbb{Q}_n \right)^{-1} : \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{elas}} - 2q(1+g_n)(f_n+g_n)^* \frac{\Delta\lambda_n}{\bar{\sigma}_{n+1}} \mathbb{C} : \mathbf{H}_n \sinh \left(\frac{\sigma_h}{\bar{\sigma}_{n+1}} \right) \right]. \quad (1.23)$$

L'incrément de déformation plastique est ensuite obtenu en utilisant l'équation (1.15)₄.

1.3.4 Actualisation des paramètres internes

Une fois que la convergence de l'étape globale est assurée, on peut actualiser les paramètres internes. L'incrément de porosité est donné par

$$\Delta f_n = (1 - f_n) \text{tr} \Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^p. \quad (1.24)$$

L'incrément de la forme quadratique $\Delta \mathbf{P}_n$ s'écrit

$$\Delta \mathbf{P}_n = -\mathbf{P}_n : (\Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^v + \Delta \boldsymbol{\omega}_n^v) - (\Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^v + \Delta \boldsymbol{\omega}_n^v)^T : \mathbf{P}_n \quad (1.25)$$

où $\Delta\epsilon_n^v$ et ω_n^v sont respectivement les incréments de déformation et de rotation du vide. Ces incréments sont reliés à l'incrément de déformation plastique $\Delta\epsilon_n^p$ et à l'incrément de rotation total $\Delta\omega_n$ par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta\epsilon_n^v &= \mathbb{L}_n : \Delta\epsilon_n^p \\ \Delta\omega_n^v &= \Delta\omega_n + \mathbb{R}_n : \Delta\epsilon_n^p. \end{cases} \quad (1.26)$$

Les paramètres internes finaux valent donc

$$\begin{cases} f_{n+1} &= f_n + \Delta f_n \\ \mathbf{P}_{n+1} &= \mathbf{P}_n + \Delta\mathbf{P}_n. \end{cases} \quad (1.27)$$

1.3.5 Mise en oeuvre pratique

Dans le cadre de cette thèse, le modèle a été implémenté dans le code de calcul commercial SYSTUS[®] développé par ESI Group (~ 2000 lignes de code).

Des programmes “open access” ont également été développés (en dehors du cadre de cette thèse), basés sur ceux développés pour SYSTUS[®]. Une routine UMAT a notamment été écrite, permettant d'utiliser le modèle dans le code de calcul ABAQUS[®]. Ces programmes seront prochainement rendus disponibles librement sur Internet.

1.4 Rupture ductile en cisaillement : comparaisons avec des calculs micromécaniques

Dans cette section, nous allons comparer les prédictions du modèle ML avec des calculs micromécaniques en cisaillement (Tvergaard, 2009; Tvergaard and Nielsen, 2010; Nielsen et al., 2012; Tvergaard, 2012, 2015). Dans ces simulations, on observe numériquement un adoucissement du matériau, même pour du cisaillement pur ; dans ce cas de figure, la cavité se referme et la porosité diminue pour tendre vers zéro. Il est clair que le modèle de Gurson (1977) ne pourra jamais prédire d'adoucissement si la porosité diminue, ce qui motive la prise en compte des effets de forme des cavités qui jouent un rôle important dans l'apparition de l'adoucissement.

Les prédictions du modèle ML sont obtenues en appliquant le modèle à une maille unique, pour les mêmes trajets de chargement que ceux considérés dans les simulations micromécaniques. Nous utilisons le code de calcul SYSTUS[®] pour calculer les prédictions du modèle.

1.4.1 Cavités initialement sphériques

Nous allons comparer les prédictions du modèle ML avec des résultats de simulations micromécaniques (Nielsen et al., 2012) pour des cavités initialement sphériques.

Descriptif des simulations Le VER considéré par Nielsen et al. (2012) est un parallélépipède de côtés $2A_0$, $2B_0$ et $2C_0$ contenant une cavité sphérique de rayon R_0 (voir Figure 1.1a). Le VER est en déformation plane dans la direction \mathbf{e}_3 , ce qui signifie que les deux bords à $x_3 = \pm C_0$ ont un déplacement suivant \mathbf{e}_3 nul. Les conditions aux limites sur les bords à $x_1 = \pm A_0$ sont périodiques. Enfin le bord à $x_2 = B_0$ reste plan et se déplace de U_1 et U_2 respectivement suivant \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 (voir Figure 1.1b), le bord à $x_2 = -B_0$ restant fixe. (Cela équivaut quasiment à des conditions périodiques si B_0 est suffisamment grand). Le rapport U_2/U_1 est ajusté de façon à imposer le rapport $\kappa = \Sigma_{22}/\Sigma_{12}$, caractérisant la part de cisaillement. Le contact entre les faces de la cavité a été pris en compte dans les simulations micromécaniques 3D par une méthode classique de pénalisation (Nielsen et al., 2012).

Le matériau obéit à une loi d'écroutissage du type $\sigma(\epsilon) = \sigma_0(1 + \frac{E\epsilon}{\sigma_0})^n$ et les valeurs considérées sont : module d'Young, $E = 200$ GPa; coefficient de Poisson, $\nu = 0.3$; limite d'élasticité, $\sigma_0 = 400$ MPa; exposant d'écroutissage $n = 0.2$; $B_0/A_0 = 4$; $C_0 = A_0$; $R_0/A_0 = [0.3; 0.5]$, correspondant à une porosité initiale $f_0 = [0.0032; 0.0165]$

On étudie l'évolution de la contrainte de cisaillement Σ_{12} , de la porosité, des axes et de l'inclinaison de la cavité (angle θ sur la Figure 1.1b) en fonction de l'angle de cisaillement Ψ défini par $\tan(\Psi) = U_1/(2B_0 + U_2)$, pour plusieurs valeurs du rapport κ .

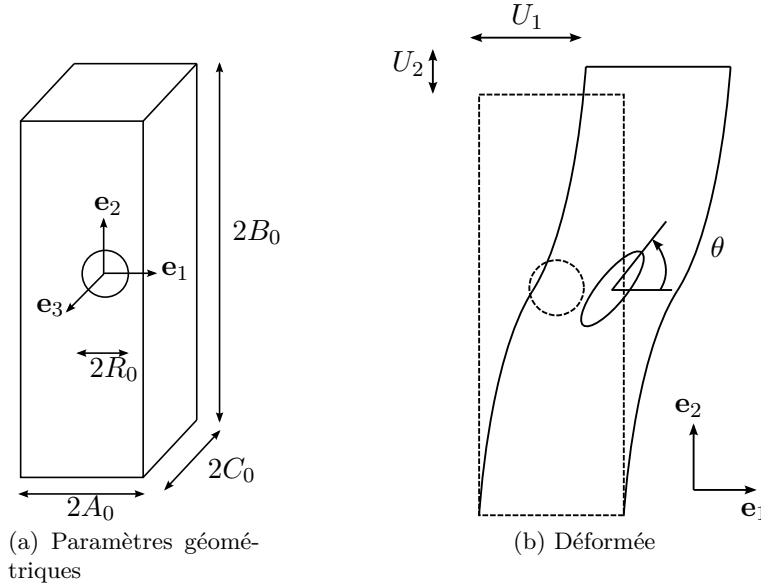


FIGURE 1.1: VER considéré par Nielsen et al. (2012)

Résultats pour une porosité initiale modérée Nous comparons Figures 1.2a-e les prédictions du modèle ML avec les calculs numériques de Nielsen et al. (2012), respectivement pour la contrainte de cisaillement, la porosité normalisée, l'orientation de la cavité et les axes normalisés, pour une porosité initiale $f_0 = 0.0165$.

La contrainte de cisaillement est très bien reproduite par le modèle; il faut cependant noter que ce très bon accord n'a été rendu possible qu'en calibrant les paramètres $(f + g)_c$ et δ intervenant dans la modélisation heuristique de la coalescence (voir Table 1.1). La porosité critique dépend quelque peu du chargement, en accord avec les observations de Koplik and Needleman (1988); Perrin (1992) dans le cas d'un chargement sans cisaillement. L'évolution de la porosité prédite par le modèle est en bon accord avec celle des résultats numériques; en particulier elle décroît lorsque κ diminue, c'est à dire lorsque le chargement tend à devenir un cisaillement pur. L'angle d'orientation de la cavité et les axes sont quant à eux qualitativement reproduits. On remarque notamment que les trois axes sont différents, ce qui souligne la nécessité de prendre en compte des cavités ellipsoïdales générales dans le modèle.

κ	1.5	1.25	1	0.75	0.5	0.25
$(f + g)_c$	0.032	0.035	0.039	0.043	0.047	0.051
δ	8	8	8	8	8	8

TABLE 1.1: Paramètres de coalescence pour une cavité initialement sphérique de porosité initiale $f_0 = 0.0165$.

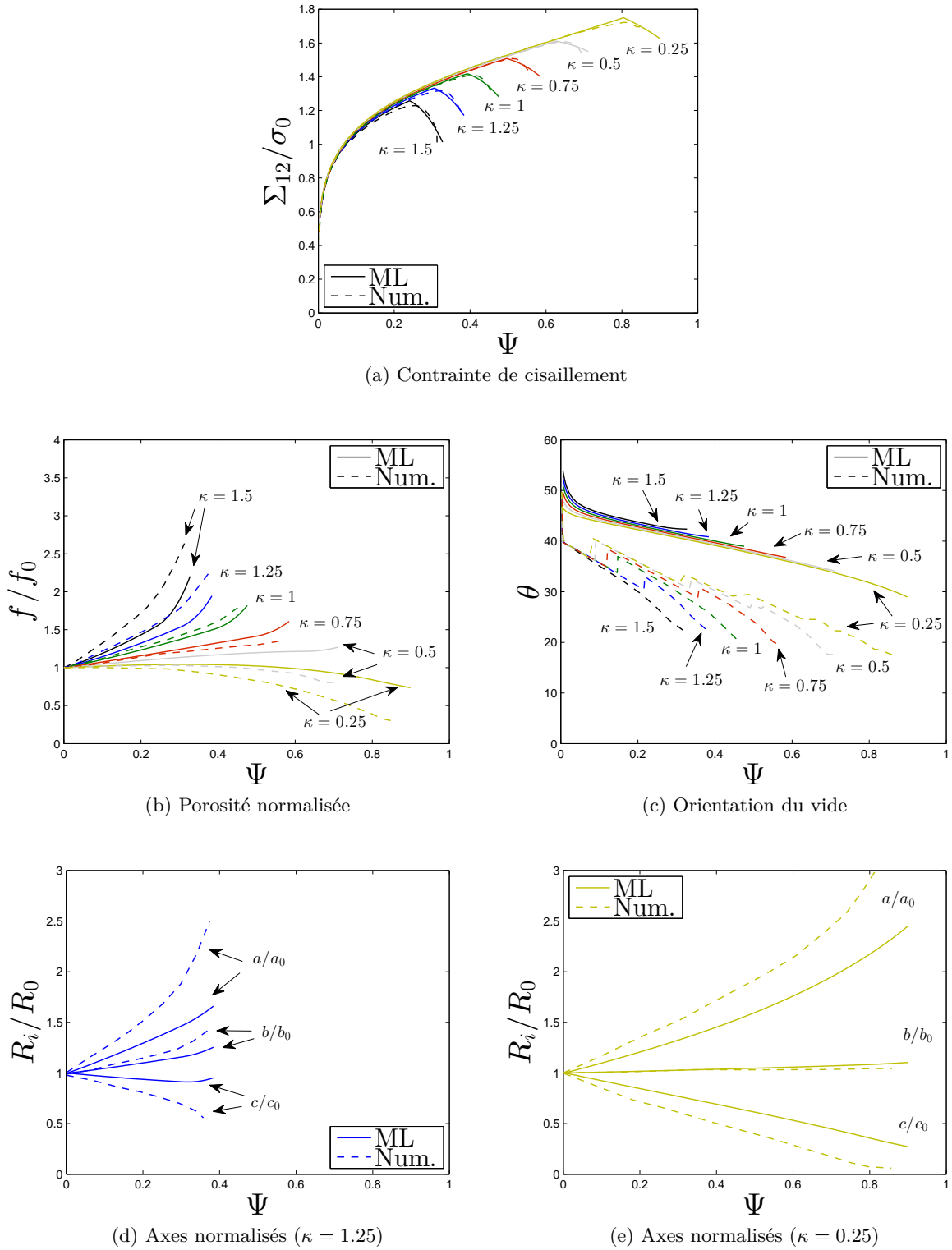


FIGURE 1.2: Evolutions de la contrainte de cisaillement, de la porosité, de l'orientation du vide et des axes normalisés en fonction de l'angle de cisaillement pour des cavités initialement sphériques. La porosité initiale vaut $f_0 = 0.0165$.

Résultats pour une porosité initiale faible Des résultats complémentaires concernant la porosité, l'angle d'orientation de la cavité et les axes sont représentés Figures 1.3a-d, pour une porosité initiale $f_0 = 0.0032$.

Les prédictions du modèle sont particulièrement bonnes dans ce cas, que ce soit pour l'évolution

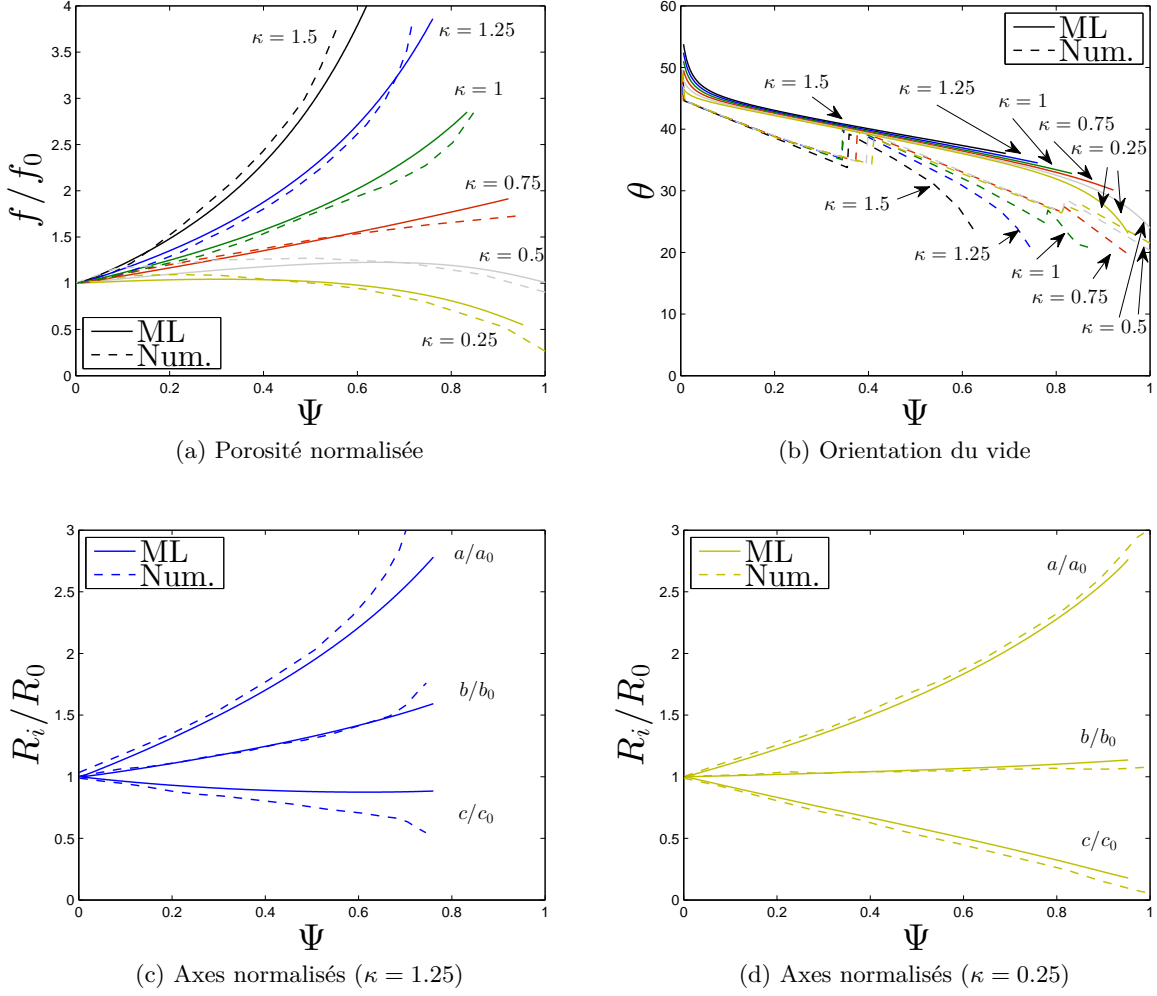


FIGURE 1.3: Evolutions de la porosité, de l'orientation du vide et des axes normalisés en fonction de l'angle de cisaillement pour des cavités initialement sphériques. La porosité initiale vaut $f_0 = 0.0032$.

de la porosité ou des axes. L'orientation du vide est moins bien reproduite, mais les tendances sont respectées.

1.4.2 Cavités initialement cylindriques à base circulaire

Nous allons comparer les prédictions du modèle ML avec des résultats de simulations micromécaniques (Nielsen et al., 2012) pour des cavités initialement cylindriques à base circulaire.

Descriptif des simulations Le VER considéré par Nielsen et al. (2012) est un parallélépipède de côtés $2A_0$, $2B_0$, $2C_0$ arbitraire, contenant une cavité cylindrique circulaire de rayon R_0 (voir Figure 1.4). Comme précédemment, les déplacements sont ajustés pour fixer le rapport $\kappa = \Sigma_{22}/\Sigma_{12}$.

Le contact entre les faces de la cavité a été pris en compte dans les simulations micromécaniques 2D de manière approximative en appliquant des forces à la surface du vide lorsque le rapport d'aspect moyen du vide atteint une valeur limite minimum (Tvergaard, 2012). Notons l la plus grande distance entre deux noeuds de la surface du vide et $w = V_v/l$ la largeur moyenne du vide, où V_v est son volume (par unité de longueur suivant la direction x_3). Lorsque le rapport d'aspect du vide w/l atteint une valeur limite minimum ρ , des forces sont appliquées à la surface du vide de façon à assurer l'inégalité

$$w/l \geq \rho. \quad (1.28)$$

Les prédictions obtenues en utilisant cette procédure de pseudo-contact ont été comparées avec celles obtenues en prenant en compte complètement le contact (Dahl et al., 2012) : un bon accord a été observé entre les deux approches, validant ainsi la procédure de pseudo-contact. Notons que les données relatives à la géométrie de la cavité (porosité, axes et orientation) n'ont plus vraiment de sens lorsque le pseudo-contact commence à cause de la relation (1.28) qui impose une valeur minimum pour le rapport d'aspect. Par conséquent, les courbes des paramètres géométriques (porosité, axes et orientation) seront arrêtées à l'apparition du pseudo-contact.

Le matériau obéit à une loi d'écroutissage du type $\sigma(\epsilon) = \sigma_0(1 + \frac{E\epsilon}{\sigma_0})^n$. Les valeurs considérées pour les paramètres sont : module d'Young, $E = 200$ GPa; coefficient de Poisson, $\nu = 0.3$; limite d'élasticité, $\sigma_0 = 400$ MPa; exposant d'écroutissage $n = 0.2$; $B_0/A_0 = 4$; $C_0 = A_0$; $R_0/A_0 = 0.29$, correspondant à une porosité initiale $f_0 = 0.0165$.

Comme précédemment, on étudie l'évolution de la contrainte de cisaillement Σ_{12} , de la porosité, des axes et de l'inclinaison de la cavité en fonction de l'angle de cisaillement Ψ , pour plusieurs valeurs du rapport κ .

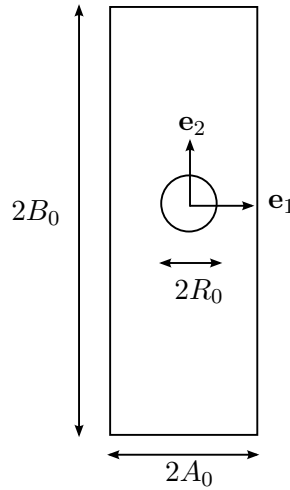


FIGURE 1.4: VER considéré par Nielsen et al. (2012)

Résultats pour une porosité initiale modérée Nous comparons figures 1.5a-e les prédictions du modèle ML avec les calculs numériques de Nielsen et al. (2012), respectivement pour la contrainte de cisaillement, la porosité normalisée, l'orientation de la cavité et les axes normalisés, pour une porosité initiale $f_0 = 0.0165$.

Comme précédemment, la contrainte de cisaillement est bien reproduite par le modèle. Ce très bon accord n'a été rendu possible ici encore qu'en calibrant les paramètres $(f + g)_c$ et δ intervenant dans la modélisation heuristique de la coalescence (voir Table 1.2) : la porosité critique dépend encore un peu du chargement. L'évolution de la porosité est moins bien reproduite dans ce cas mais la tendance globale est cependant bien respectée. Les axes quant à eux sont qualitativement bien reproduits. Enfin, une erreur un peu plus nette est observée pour l'orientation du vide, mais les résultats restent acceptables.

1.4.3 Cavités initialement cylindriques à base elliptique

Nous allons maintenant comparer les prédictions du modèle ML avec des résultats de simulations micromécaniques de Tvergaard (2015) pour des cavités initialement cylindriques à base elliptique. Ces simulations mettent en évidence un fort effet de la forme initiale du vide, qu'il est intéressant de reproduire.

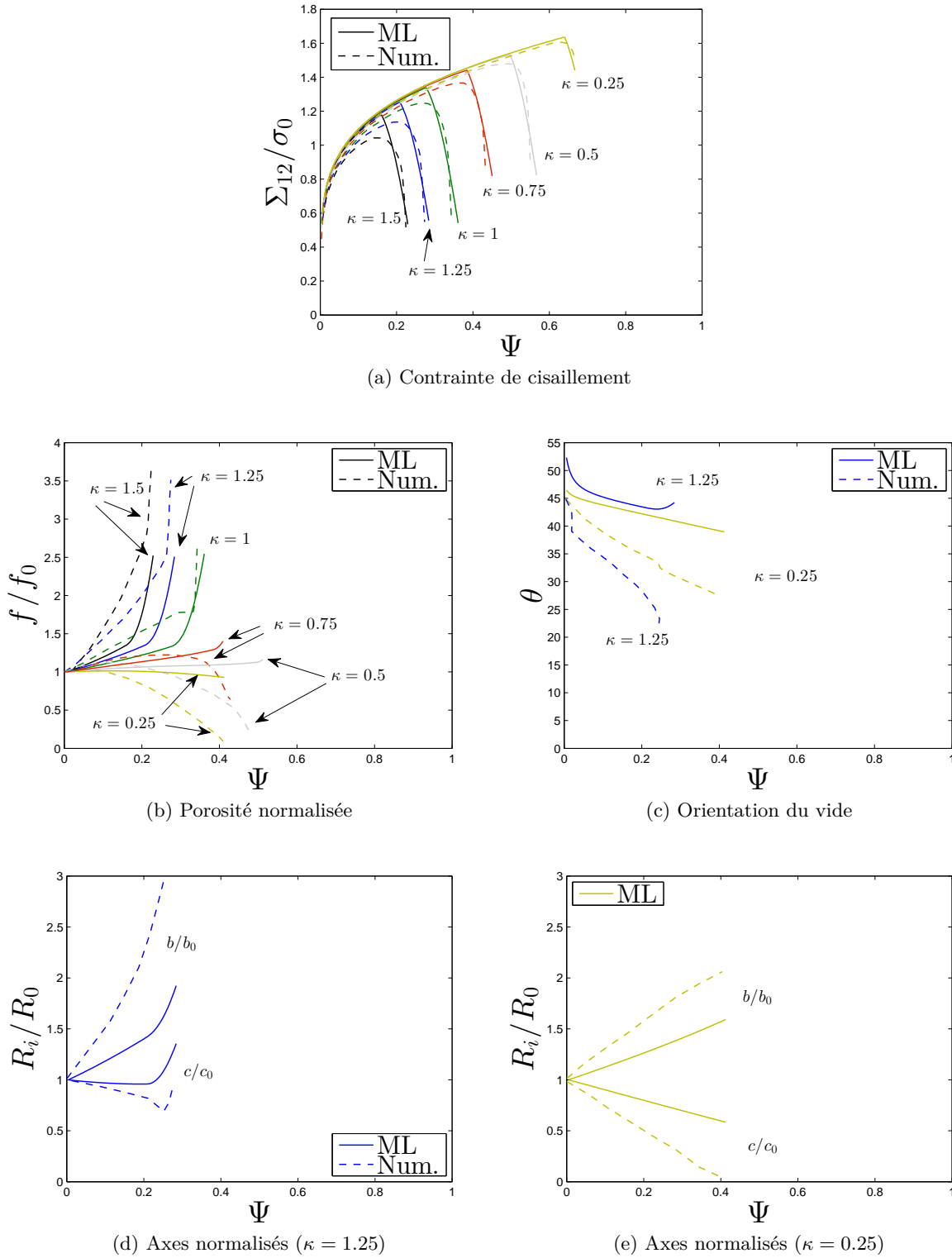


FIGURE 1.5: Evolutions de la contrainte de cisaillement, de la porosité, de l'orientation du vide et des axes normalisés en fonction de l'angle de cisaillement pour des cavités initialement cylindriques à base circulaire. La porosité initiale vaut $f_0 = 0.0165$.

Descriptif des simulations Le VER considéré par Tvergaard (2015) est un parallélépipède de côtés $2A_0$, $2B_0$, $2C_0$ arbitraire, contenant une cavité cylindrique elliptique de demi-axes R_1 et R_2 (voir Figure 1.6a). On note $\alpha = R_1/R_2$ le rapport de forme de la cavité. Les conditions aux limites sur les bords à $x_1 = \pm A_0$ et $x_2 = \pm B_0$ sont cette fois totalement périodiques (voir Figure 1.6b). Les déplacements U_1^{bot} , U_1^{top} et U_2 sont ajustés de façon à imposer $\Sigma_{11}/\Sigma_{12} = 0.1$ et $\Sigma_{22}/\Sigma_{11} = 3$,

κ	1.5	1.25	1	0.75	0.5	0.25
$(f + g)_c$	0.035	0.04	0.047	0.058	0.068	0.08
δ	15	15	15	15	15	15

TABLE 1.2: Paramètres de coalescence pour une cavité initialement cylindrique à base circulaire de porosité initiale $f_0 = 0.0165$.

soit $\kappa = \Sigma_{22}/\Sigma_{12} = 0.3$. Comme précédemment, le contact entre les faces de la cavité a été pris en compte dans les simulations micromécaniques 2D de manière approximative en appliquant des forces à la surface du vide lorsque le rapport d'aspect moyen du vide atteint une valeur limite minimum ; par conséquent, les courbes des paramètres géométriques (porosité, axes et orientation) seront arrêtées à l'apparition du pseudo-contact.

Le matériau suit la même loi d'érouissage que pour les cas précédents. Les valeurs considérées pour les paramètres sont : module d'Young, $E = 200$ GPa; coefficient de Poisson, $\nu = 0.3$; limite d'élasticité, $\sigma_0 = 400$ MPa; exposant d'érouissage $n = 0.1$; $B_0/A_0 = 2$; $\alpha = [0.25; 0.5; 1; 2; 4]$, correspondant à une porosité initiale $f_0 = 0.02452$ dans tous les cas.

On étudie l'évolution de la contrainte de cisaillement Σ_{12} , de la porosité, des axes et de l'inclinaison de la cavité en fonction de $F_{12} = U_1^{\text{top}}/(2B_0)$, pour plusieurs valeurs du rapport κ .

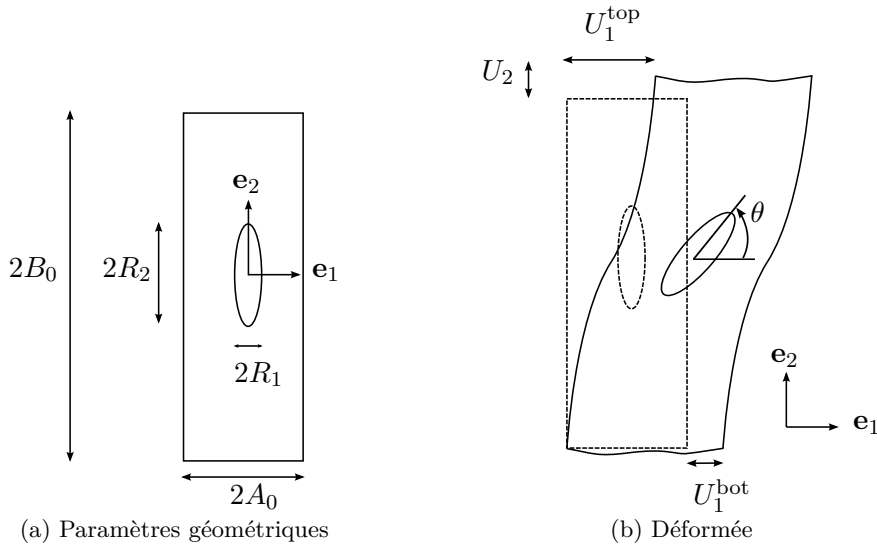


FIGURE 1.6: VER considéré par Tvergaard (2015)

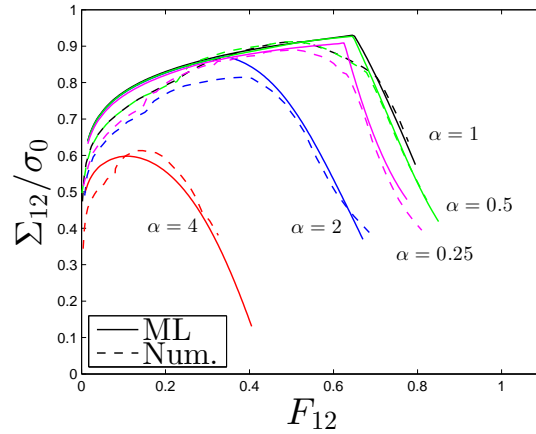
Résultats pour une porosité initiale modérée Nous comparons figures 1.7a-c et 1.8a-d les prédictions du modèle ML avec les calculs numériques de Tvergaard (2015), respectivement pour la contrainte de cisaillement, la porosité normalisée, l'orientation de la cavité et les axes normalisés, pour une porosité initiale $f_0 = 0.02452$.

La contrainte de cisaillement est encore une fois très bien reproduite par le modèle ML, y compris la forte influence du rapport de forme α de la cavité. Il faut noter que les paramètres de coalescence sont cette fois ci (légèrement) ajustés en fonction de la forme initiale (voir Table 1.3). Les évolutions des axes et de l'inclinaison de la cavité sont qualitativement bien reproduites par le modèle. L'évolution de la porosité quant à elle est moins bien reproduite; dans certains cas, les tendances ne sont même pas captées. Les variations de porosité restent cependant peu importantes. Il est fort probable que les

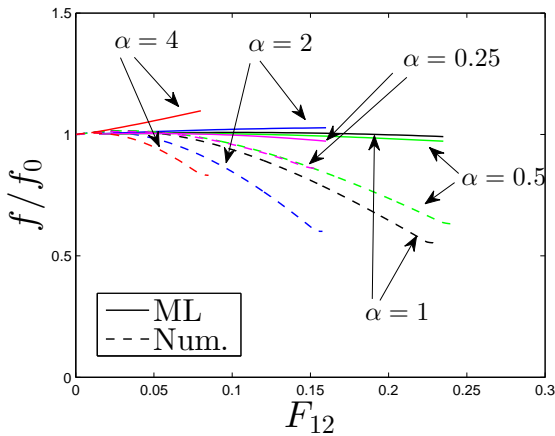
limites du modèle aient été atteintes : l'hypothèse de cavités ellipsoïdales faite dans le modèle n'est plus valide compte tenu de la forme complexe des cavités dans les simulations micromécaniques (voir la Figure 5b de Tvergaard (2015)). Enfin, il faut noter que nous avons adopté les valeurs $c_{lim}/c_0 = [0.8; 0.6]$ pour les cas $\alpha = [0.25; 0.5]$ pour empêcher la cavité de se refermer, en accord avec la procédure de pseudo-contact utilisée par Tvergaard (2015). Notre modélisation de la refermeture des cavités étant simpliste, elle introduit probablement des erreurs.

α	0.25	0.5	1	2	4
$(f + g)_c$	0.16	0.13	0.095	0.074	0.105
δ	15	15	15	9	8

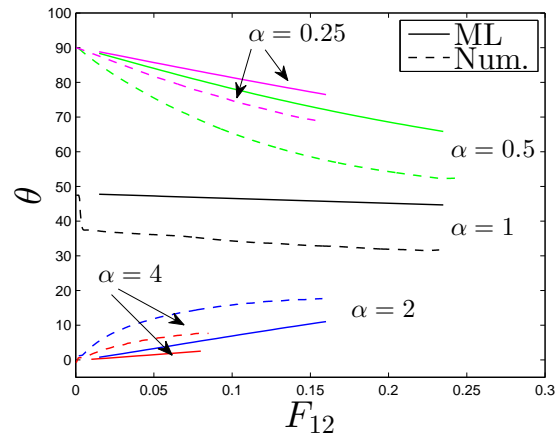
TABLE 1.3: Paramètres de coalescence pour une cavité initialement cylindrique à base elliptique de porosité initiale $f_0 = 0.02452$.



(a) Contrainte de cisaillement



(b) Porosité normalisée



(c) Orientation du vide

FIGURE 1.7: Evolutions de la contrainte de cisaillement, de la porosité et de l'orientation du vide pour des cavités initialement cylindriques à base elliptique. La porosité initiale vaut $f_0 = 0.02452$.

1.4.4 Discussion

Le modèle de Madou-Leblond (Madou and Leblond, 2012a,b, 2013; Madou et al., 2013) permet de reproduire les calculs micromécaniques avec cisaillement intense (Tvergaard, 2009; Tvergaard and

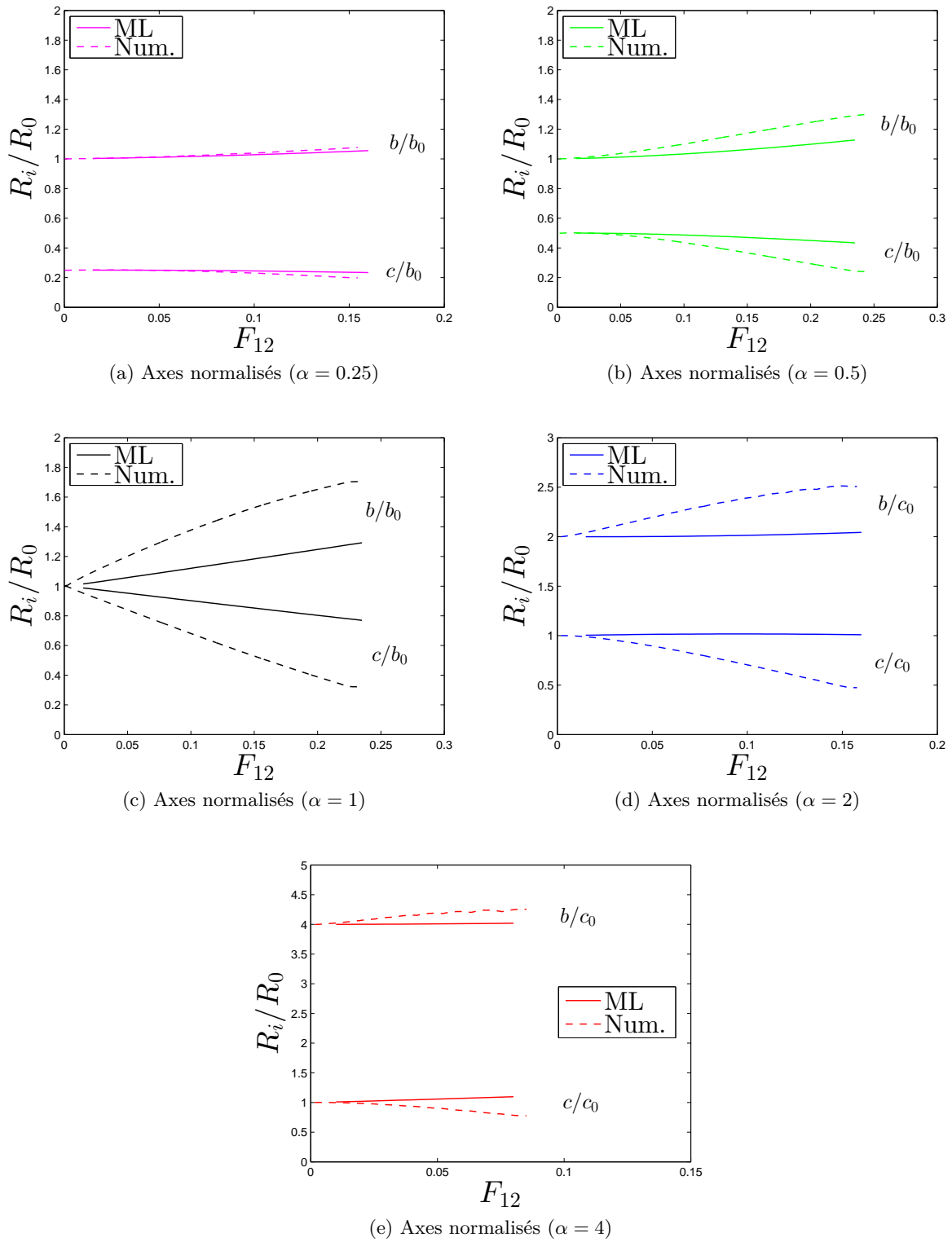


FIGURE 1.8: Evolutions des axes pour des cavités initialement cylindriques à base elliptique. La porosité initiale vaut $f_0 = 0.02452$.

Nielsen, 2010; Nielsen et al., 2012; Tvergaard, 2012, 2015). L'adoucissement de la contrainte est en particulier très bien reproduit par le modèle. Les évolutions de la porosité, des axes de la cavité ainsi que son orientation sont en général bien reproduites. L'effet important de la forme initiale du vide est bien capté.

Il faut noter que l'apparition de l'adoucissement est permis grâce à une modélisation heuristique de la coalescence (Tvergaard and Needleman, 1984) portant sur le paramètre $f + g$ lié à la porosité et à la forme des cavités ; cette modélisation a nécessité un recalage de la porosité critique $(f + g)_c$, dépendant quelque peu du chargement et de la forme initiale, en accord avec les observations de Koplik and Needleman (1988); Perrin (1992).

Ces résultats soulignent l'importance des effets de forme sur la prédiction de la rupture ductile en présence de cisaillement, là où le modèle de Gurson (1977) ne prédit pas d'adoucissement. Le modèle ML étant maintenant validé sur ces cas élémentaires, nous pouvons passer à l'étude de la rupture ductile en présence de cisaillement sur une structure complexe.

1.5 Rupture ductile en cisaillement : comparaisons avec des expériences sur des éprouvettes “butterfly”

Mohr et al. (2010); Dunand and Mohr (2011a,b) ont récemment développé une technique expérimentale pour étudier la rupture ductile de structures métalliques minces. Leur approche revisite celle de Mohr and Oswald (2007), basée sur le chargement bi-axial d'une éprouvette de type “butterfly”, en optimisant la forme de l'éprouvette (Dunand and Mohr, 2011b). Couplée avec un système de deux actionneurs (Mohr and Henn, 2007), cette technique permet de conduire des essais de rupture pour des trajets de chargement non-linéaires et non-monotones, pour des états de contrainte allant du cisaillement pur à la traction en déformation plane transverse (Dunand and Mohr, 2011a,b).

1.5.1 Présentation des expériences de Dunand and Mohr (2011a,b)

Les expériences bi-axiales sont conduites avec un système de deux actionneurs permettant d'appliquer une combinaison de chargements normal et transverse (voir Figure 1.9). Le rapport de la force verticale F_V et de la force horizontale F_H est caractérisé par l'angle de chargement bi-axial β :

$$\tan\beta = \frac{F_V}{F_H}, \quad (1.29)$$

où $\beta = 0^\circ$ correspond au cisaillement pur et $\beta = 90^\circ$ à la traction. Quatre différents chargements ont été considérés : $\beta = 0^\circ$ (cisaillement pur), $\beta = 25^\circ$ (cisaillement majoritaire), $\beta = 63^\circ$ (traction majoritaire) et $\beta = 90^\circ$ (traction). Les expériences ont été menées avec un contrôle en force pour assurer β constant. Pour les cas $\beta = 63^\circ$ et $\beta = 90^\circ$, le contrôle en force est cependant changé en contrôle en déplacement après le début de la striction : les déplacements imposés sont choisis de façon à assurer β quasiment constant.

L'éprouvette considérée dans les expériences bi-axiales est une éprouvette butterfly (voir Figure 1.10), dont la partie centrale évidée est délimitée par un épaulement de forme clothoïdale. L'éprouvette a été conçue de manière à concentrer la déformation dans la partie centrale pour que la fissure s'initie dans cette zone (Dunand and Mohr, 2011b).

Le matériau considéré est un acier à haute résistance TRIP780 (Transformation-Induced Plasticity). Cette famille d'aciers est connue pour sa remarquable combinaison de résistance et de ductilité. Cet acier possède une microstructure complexe multiphasée composée de ferrite, de bainite et de martensite. De plus il contient environ 6% d'austénite résiduelle. Le comportement plastique du matériau a été caractérisé par Mohr et al. (2010), qui ont proposé de le modéliser par un modèle orthotrope de plasticité. Pour des aciers de type TRIP600, Uthaisangskuk et al. (2009) ont déterminé expérimentalement par SEM et spectroscopie X-Ray une porosité initiale de 6.10^{-4} . De plus, l'austénite résiduelle se transforme en martensite après une certaine déformation, entraînant la nucléation de nouvelles cavités. Uthaisangskuk et al. (2009) ont déterminé que la porosité de la deuxième population de cavités est environ égale à 80% de l'austénite résiduelle (soit $\sim 5.10^{-2}$), après une déformation de 0.2. On peut supposer que ces données sont approximativement valables pour un acier TRIP780.

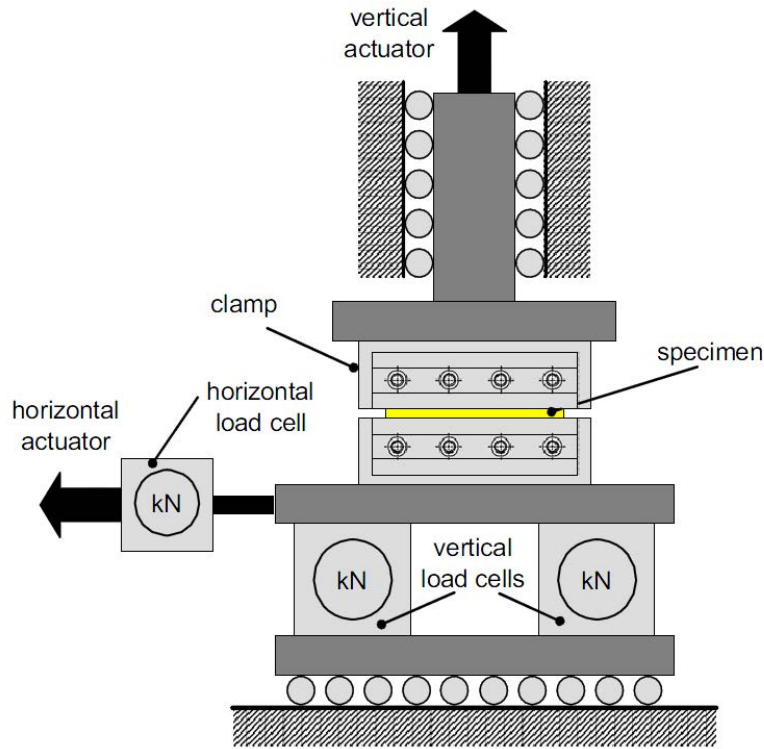


FIGURE 1.9: Schéma du système expérimental (Dunand and Mohr, 2011a,b).

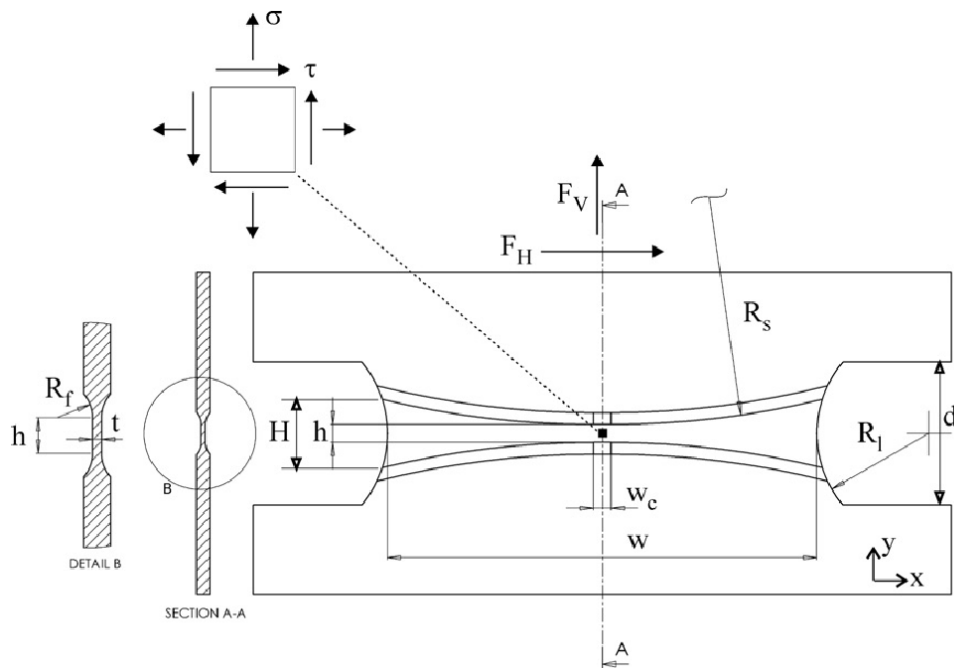


FIGURE 1.10: Schéma de l'éprouvette considérée (Dunand and Mohr, 2011a,b).

Pour chaque cas de chargement deux courbes force-déplacement sont mesurées : (i) la force horizontale en fonction du déplacement horizontal et (ii) la force verticale en fonction du déplacement vertical. Des photographies des spécimens fracturés ou quasi-fracturés sont également fournies permettant de localiser la fissure.

1.5.2 Présentation des simulations numériques

On considère donc une demi-éprouvette¹ soumise sur ses bords supérieur et inférieur à des déplacements uniformes, respectivement u_x et u_y (voir Figure 1.11) ; les déplacements sont imposés de façon à ajuster le rapport souhaité β . Le maillage de l'éprouvette butterfly, composé de 71986 éléments et 82479 noeuds, est partiellement représenté Figure 1.12. Ce maillage est particulièrement raffiné dans la zone d'intérêt, c'est à dire au centre de l'éprouvette. On utilise des éléments C3D8 sélectivement sous-intégrés (méthode dite \bar{B} (Hughes, 1980)) et C3D6 adaptés aux problèmes de plasticité incompressible ou quasi-incompressible.

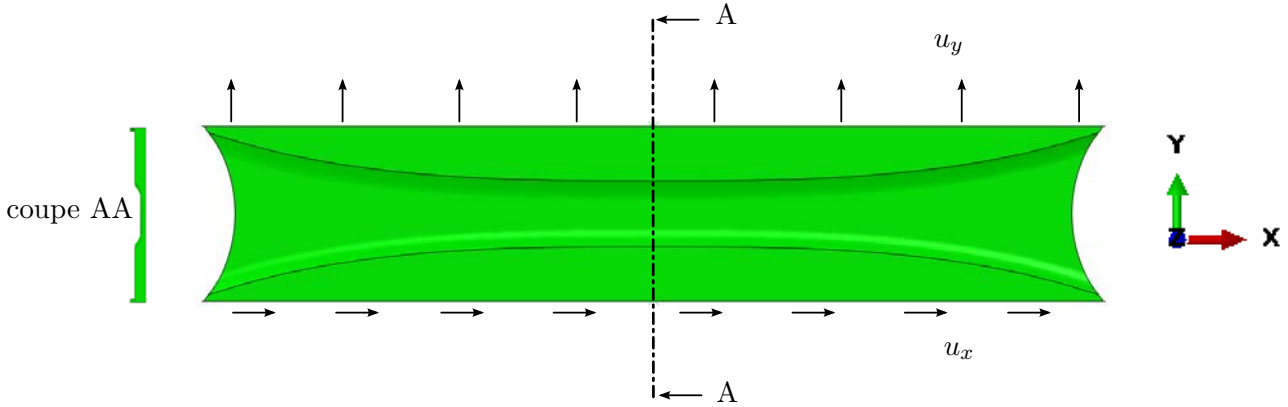


FIGURE 1.11: Eprouvette butterfly et conditions aux limites.

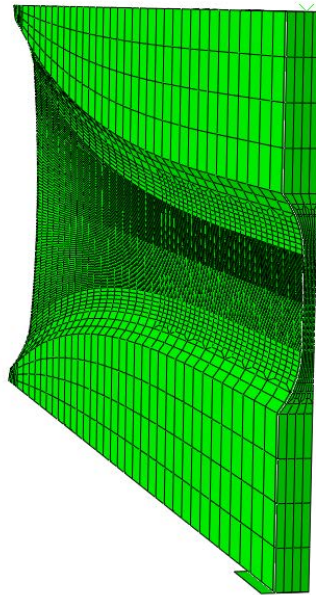


FIGURE 1.12: Maillage de l'éprouvette butterfly.

On utilise les valeurs fournies par [Dunand and Mohr \(2011b\)](#) pour les caractéristiques élastiques du matériau (voir Table 1.4). La loi d'écroutissement considérée dans le modèle a été calibrée par [Dunand and Mohr \(2011b\)](#), et est modélisée par une loi de Swift modifiée :

$$\sigma(\epsilon) = K(\epsilon + \epsilon_0)^n \quad (1.30)$$

où les valeurs numériques des paramètres K , ϵ_0 et n sont données dans la Table 1.4.

¹. Nous remercions vivement Dirk Mohr pour nous avoir fourni toute la mise en données (maillage et conditions aux limites) du problème numérique.

Le point délicat de notre étude concerne le choix des valeurs à prendre pour la porosité initiale f_0 et les paramètres de coalescence. D'après [Uthaisangsuk et al. \(2009\)](#), il y a deux populations de cavités, une initiale de porosité 6.10^{-4} et une apparaissant après une certaine déformation, de porosité 5.10^{-2} . Dans le modèle, nous ne prenons pas en compte la nucléation continue des cavités, si bien qu'il faut prendre une porosité initiale intermédiaire entre les deux valeurs précédentes; on choisit arbitrairement la porosité initiale $f_0 = 5.10^{-3}$ qui est raisonnable pour les alliages métalliques. La valeur prise pour la "porosité critique" vaut quant à elle 10^{-2} , permettant de reproduire au mieux les résultats expérimentaux. Enfin, nous adoptons les valeurs $\delta = [4; 4; 9; 9]$ correspondant aux cas $\beta = [90^\circ; 63^\circ; 25^\circ; 0^\circ]$ pour le paramètre caractérisant l'accélération de la croissance de la porosité; la valeur de ce paramètre est prise plus élevée en présence de cisaillement, en accord avec les résultats de la section 1.4. La Table 1.4 synthétise toutes les valeurs des paramètres du modèle considérées dans les calculs numériques.

E [MPa]	ν [-]	f_0 [-]	P_{ij} [-]	q [-]	$(f + g)_c$ [-]	δ [-]	K [MPa]	ϵ_0 [-]	n [-]
185 000	0.3	5.10^{-3}	δ_{ij}	1.5	10^{-2}	[4; 9]	1460	$1.63.10^{-3}$	0.204

TABLE 1.4: Valeurs des paramètres considérées pour le modèle de Madou-Leblond.

On s'intéresse à deux aspects :

1. L'évolution de la force horizontale F_H en fonction du déplacement horizontal u_x et de la force verticale F_V en fonction du déplacement vertical u_y .
2. Le lieu de l'amorçage de la fissure, à travers les répartitions de la déformation principale et du paramètre d'endommagement d .

1.5.3 Résultats

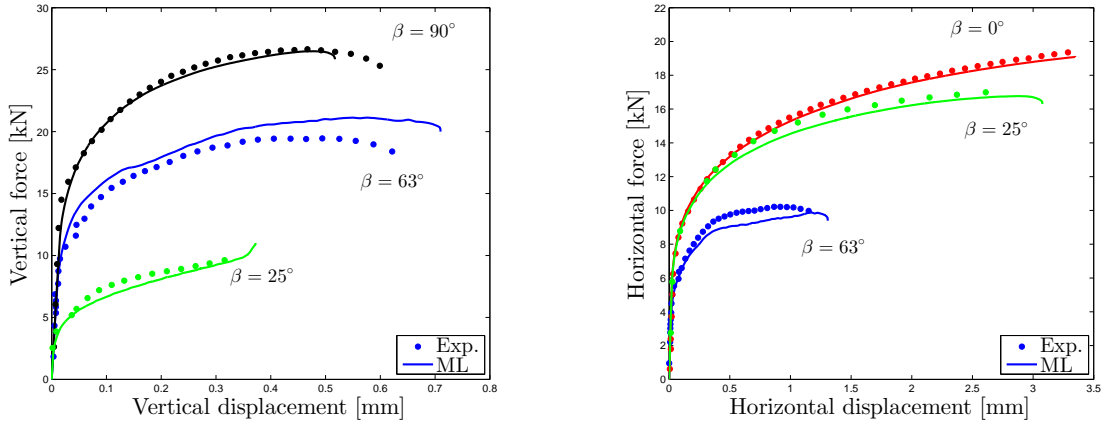
Les simulations numériques ont été effectuées avec le logiciel commercial ABAQUS[®]. Ces calculs ont nécessité entre 350 et 1250 pas de chargement, pour des durées allant de 10h à 40h (en parallélisant sur 4 processeurs).

Courbes force-déplacement Les courbes d'évolution des forces en fonction des déplacements sont représentées Figures 1.13a-b pour les quatre cas de chargement $\beta = [0^\circ; 25^\circ; 63^\circ; 90^\circ]$.

Dans l'ensemble, les résultats expérimentaux sont très bien reproduits par le modèle ML, pour toutes les valeurs de β . On remarque cependant quelques différences :

- Pour l'ensemble des cas considérés, les forces numériques ne coïncident pas parfaitement avec les forces expérimentales, même au tout début de la phase plastique. Cette différence s'explique par l'hypothèse d'isotropie utilisée dans le modèle ML. En effet, [Dunand and Mohr \(2011b\)](#) ont montré que le matériau TRIP780 était anisotrope et par conséquent le modèle ML ne peut pas parfaitement reproduire les courbes expérimentales (même lorsque l'endommagement est faible).
- La ruine finale dans les calculs numériques ne coïncide pas parfaitement avec celle observée expérimentalement. Cette différence est due à la modélisation heuristique de la coalescence. Nous aurions pu, comme dans la section 1.4, recalculer légèrement la porosité critique pour que les résultats numériques coïncident exactement avec les résultats expérimentaux; en raison du temps de calcul coûteux (~ 20 h par calcul), nous avons préféré opter pour une valeur constante du paramètre $(f + g)_c$.
- Notons également que la rupture finale est instable (aussi bien expérimentalement que numériquement), ce qui se traduit par un adoucissement extrême des contraintes (pente verticale de la courbe force-déplacement); nous reproduisons Figure 1.14a-f la phase finale des courbes numériques, mettant en évidence ce phénomène. Il est remarquable que les calculs numériques

reproduisent un tel comportement observé expérimentalement.



(a) Force verticale en fonction du déplacement vertical (b) Force horizontale en fonction du déplacement horizontal

FIGURE 1.13: Courbes force-déplacement.

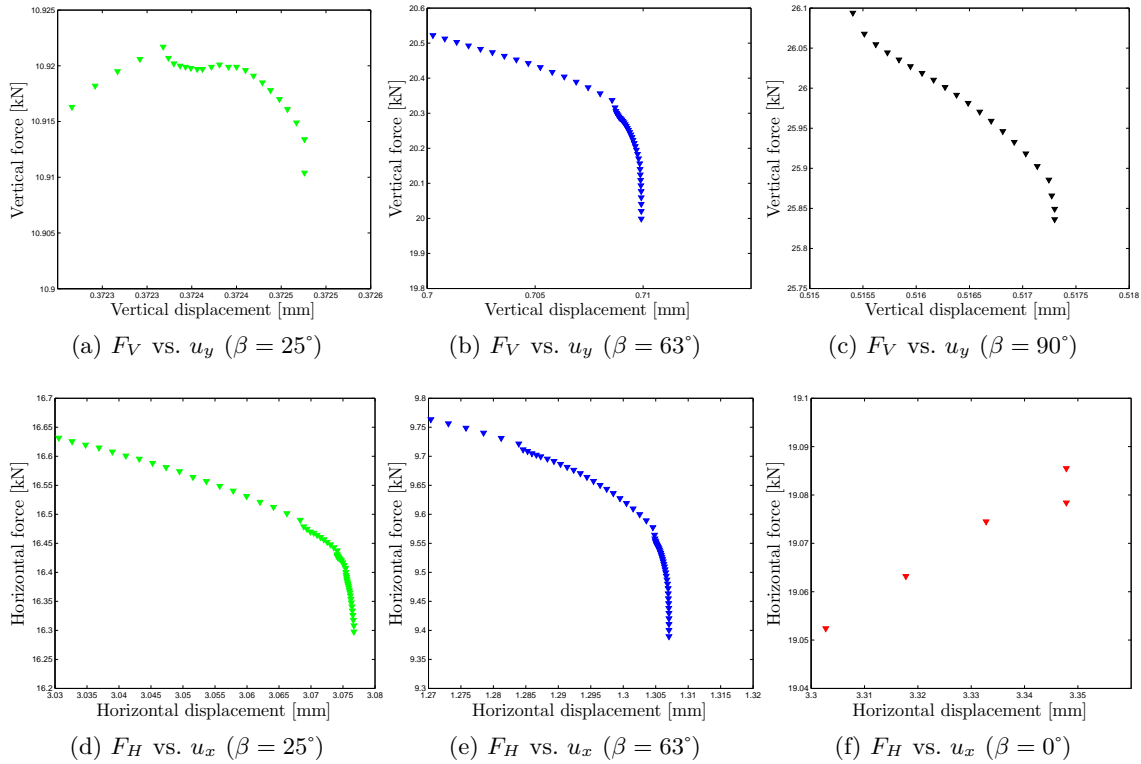


FIGURE 1.14: Courbes force-déplacement numériques (zoom sur la partie finale).

Lieu de la fissure Le lieu d'amorçage de la fissure est représenté Figures 1.15, 1.16, 1.17 et 1.18, respectivement pour $\beta = [90^\circ; 63^\circ; 25^\circ; 0^\circ]$. On représente notamment (a) une photographie de l'éprouvette quasi-rompue ou complètement rompue suivant les cas (d'après [Dunand and Mohr \(2011b\)](#)); (b) la répartition de la déformation principale maximale (à l'instant final de la simulation numérique); (c) la répartition du paramètre d'endommagement d au bord de l'éprouvette (à l'instant final de la simulation numérique); (d) la répartition du paramètre d'endommagement d au centre de l'éprouvette

(à l'instant final de la simulation numérique). On représente aussi la répartition de la déformation principale maximale et du paramètre d'endommagement ainsi que le maillage déformé dans le plan de coupe AA pour le cas $\beta = 63^\circ$, respectivement Figures 1.19a, 1.19b et 1.19c.

Le lieu d'amorçage de la fissure est dans l'ensemble très bien reproduit par le modèle ML. Quelques remarques peuvent être faites à ce stade :

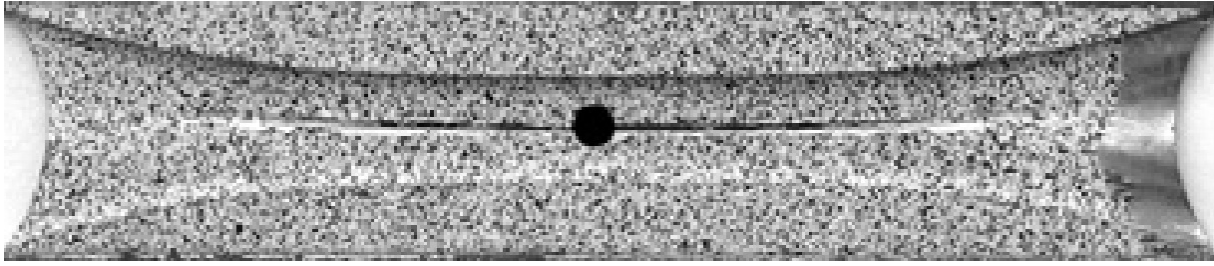
- Dans toutes ces simulations, l'augmentation de l'endommagement est initiée à l'intérieur de l'éprouvette avec des valeurs extrêmement élevées dans certains éléments allant presque jusqu'à 100% (voir Figure 1.19b). Cela suggère que la fissure est initiée à l'intérieur de l'éprouvette puis se propage ensuite vers le bord libre.
- Il n'est pas possible d'avoir une fissure complète comme dans les expériences (c'est à dire une zone importante avec $d = 1$) car le calcul devient instable et s'arrête. (Mais cette instabilité numérique correspond, rappelons-le, aux observations expérimentales). Cela est dû à l'adoucissement brutal des contraintes pour une augmentation du déplacement nulle (voir Figures 1.14a-f).
- La répartition de la déformation principale équivalente suggère que la localisation macroscopique, due à l'amincissement central de l'éprouvette, entraîne une augmentation importante de l'endommagement et permet ainsi l'apparition de la coalescence dès que le seuil $(f + g)_c$ est dépassé : en d'autres termes, la localisation macroscopique entraîne la localisation microscopique et donc la ruine du matériau. Ce phénomène reste à approfondir en utilisant un modèle micromécanique, plus raffiné, de coalescence.
- Dans les cas $\beta = [90^\circ; 63^\circ; 25^\circ]$, l'endroit où l'endommagement est maximal dans les simulations numériques coïncide presque parfaitement avec la position expérimentale de l'amorce de la fissure.
- Dans le cas $\beta = 0^\circ$, il n'y a pas de localisation nette de la déformation ni de l'endommagement : la fissure n'est donc pas très bien décrite. Il faut noter cependant que le calcul devient quand même instable et s'arrête, ce qui suggère que la ruine est bien atteinte. Comme cela a été expliqué précédemment, il faudrait poursuivre cette analyse en utilisant un modèle micromécanique de coalescence qui permettrait peut-être d'obtenir la localisation de l'endommagement.

Comparaison avec le critère de Gurson Une simulation dans le cas $\beta = 0^\circ$ a également été effectuée en utilisant le modèle de Gurson². La courbe force-déplacement horizontale et la distribution de l'endommagement (à l'instant correspondant à l'instant final dans la simulation avec le modèle ML) sont représentées Figures 1.20a et 1.20b : on constate qu'en utilisant le modèle de Gurson il n'y a pas d'adoucissement ni d'augmentation de l'endommagement. La prédiction de la rupture en cisaillement n'est donc pas possible en utilisant le modèle de Gurson³ car ce modèle ne prend pas en compte l'adoucissement dû aux effets de forme.

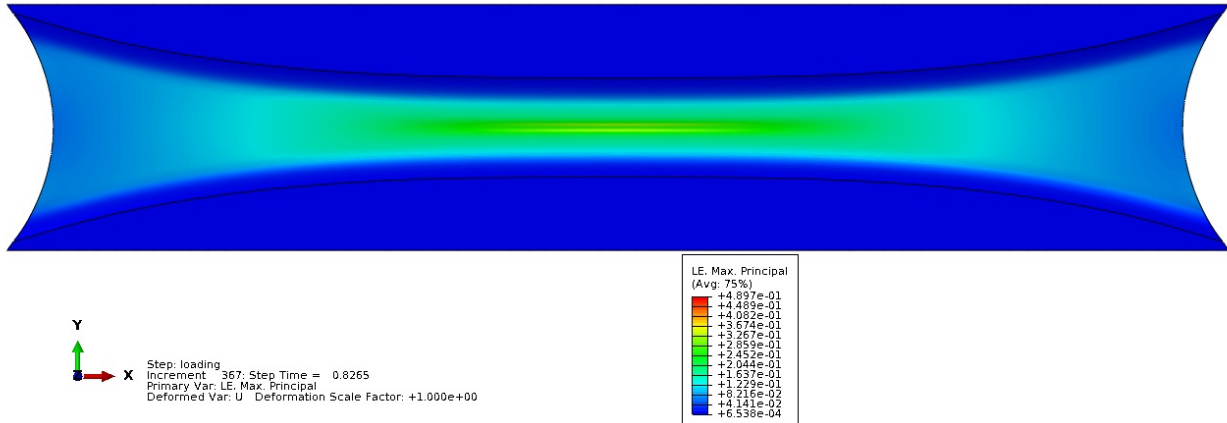
Il faut cependant noter qu'en utilisant la modification heuristique de l'évolution de la porosité de Nahshon and Hutchinson (2008), le modèle de Gurson avait permis de reproduire le cas $\beta = 0^\circ$ (voir la Figure 6b de Dumand and Mohr (2011a)).

2. Il faut noter que nous n'avons pas développé spécifiquement une routine pour le modèle de Gurson : nous avons simplement adapté la routine du modèle ML en commentant les parties relatives à l'actualisation des axes. Ainsi les cavités initialement sphériques le demeurent.

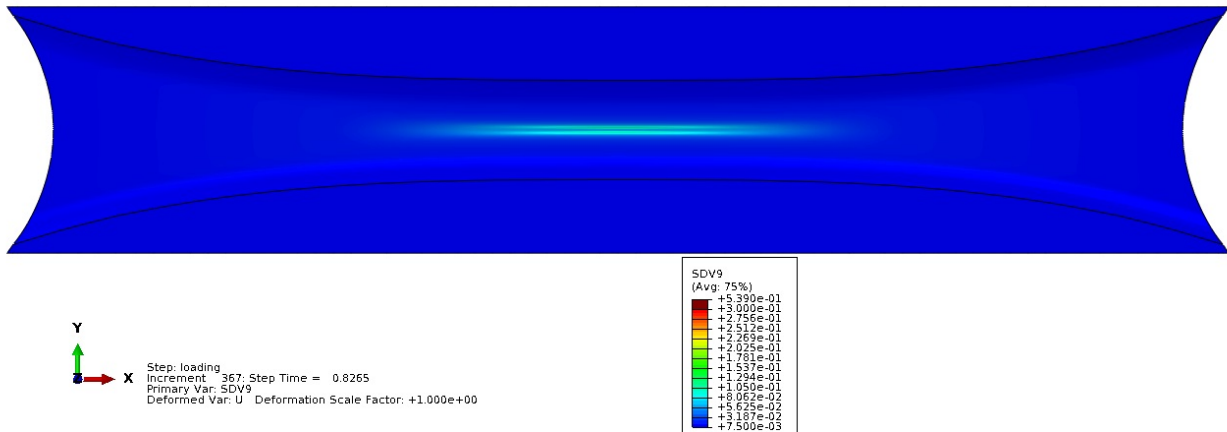
3. Notons cependant qu'en poursuivant la simulation avec le modèle de Gurson, la rupture pourrait survenir car le rapport β de l'expérience n'est plus assuré par les déplacements imposés ; une traction irréaliste apparaît et provoque une augmentation de la porosité.



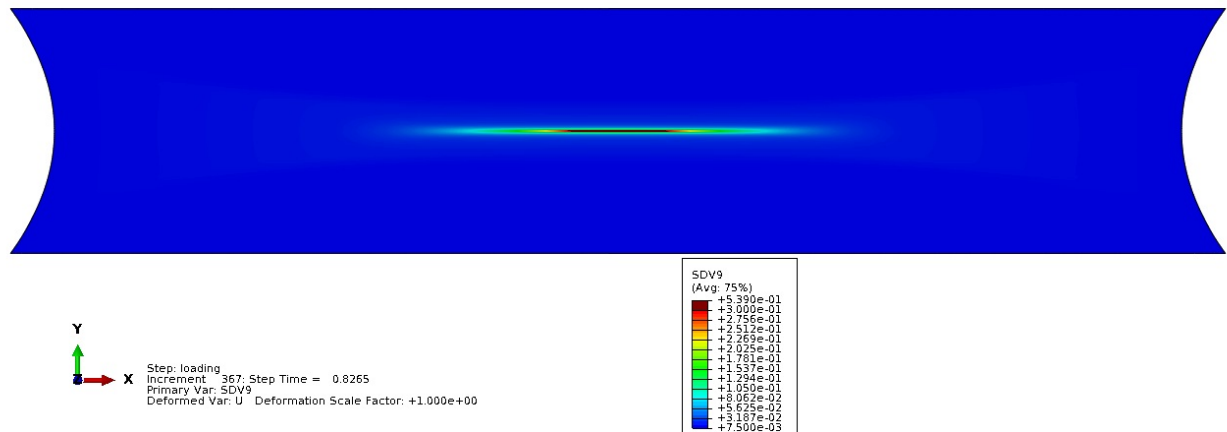
(a) Spécimen quasi-rompu (d'après [Dunand and Mohr \(2011b\)](#)). Le cercle noir correspond à l'amorce de la fissure.



(b) Répartition de la déformation principale maximale (au bord de l'éprouvette)



(c) Répartition du paramètre d'endommagement (au bord de l'éprouvette)



(d) Répartition du paramètre d'endommagement (au centre de l'éprouvette)

FIGURE 1.15: Lieu de la fissure pour le cas $\beta = 90^\circ$.

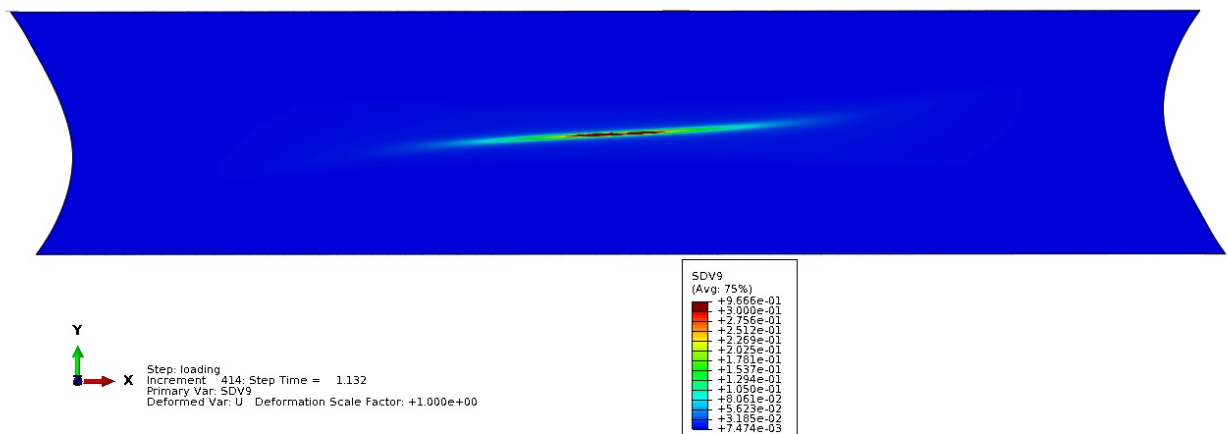
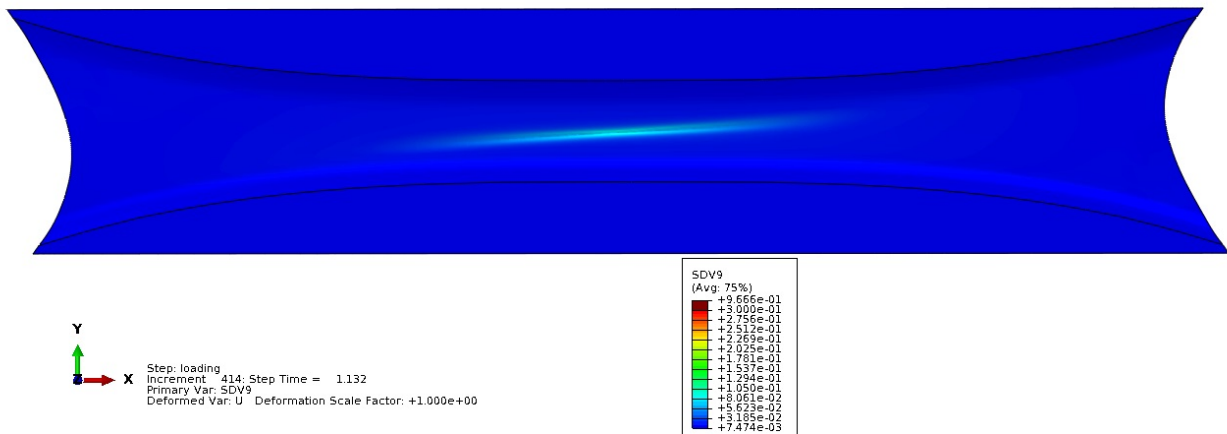
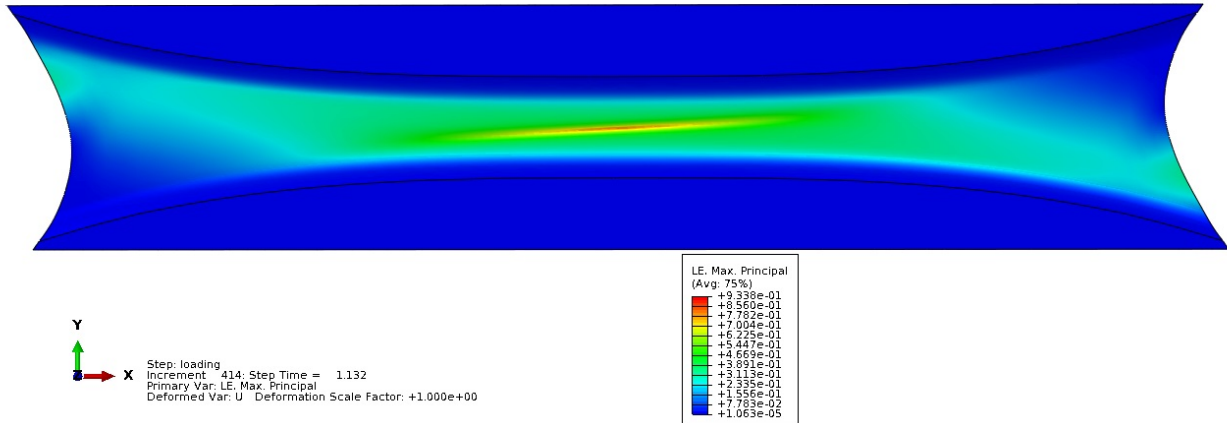
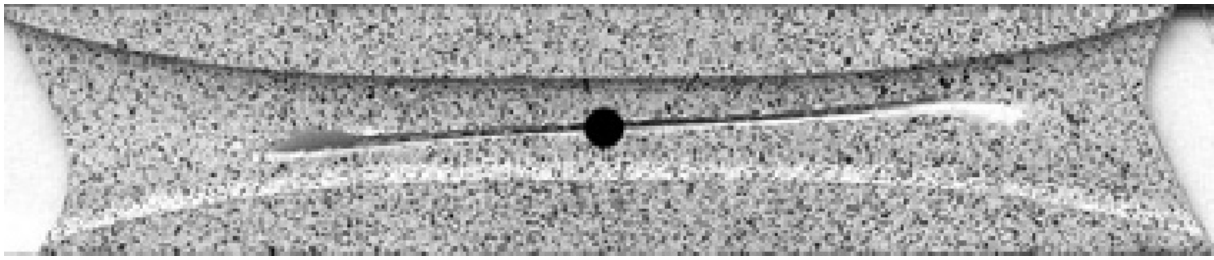
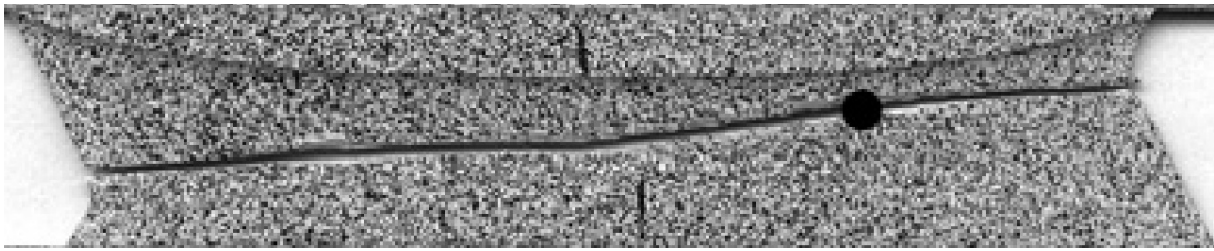
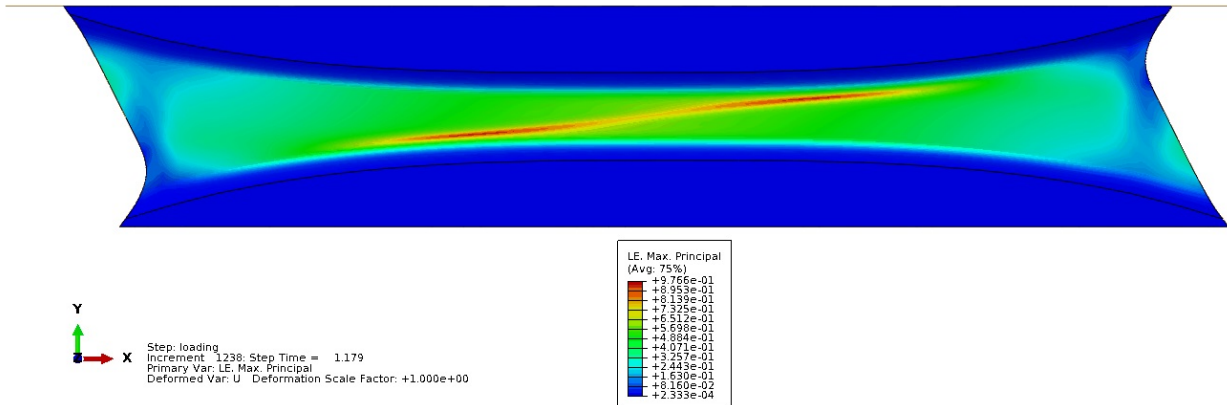


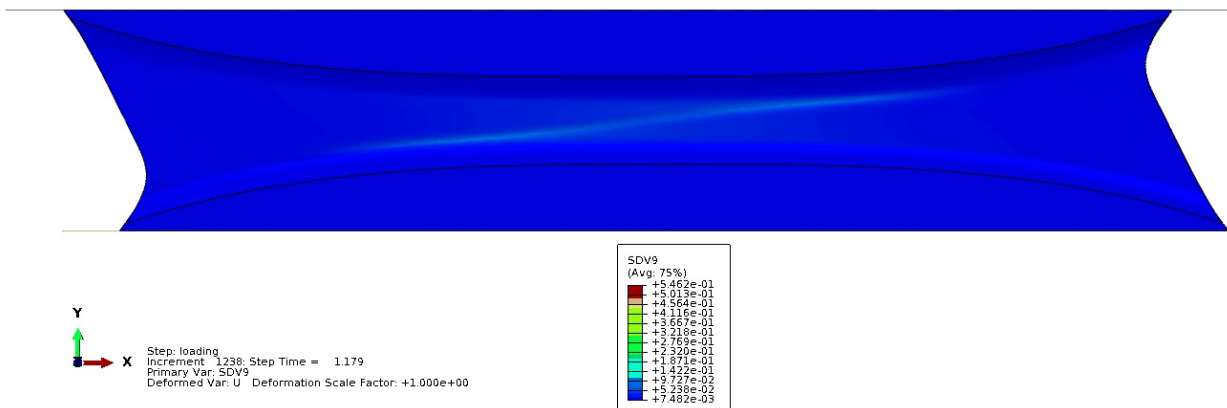
FIGURE 1.16: Lieu de la fissure pour le cas $\beta = 63^\circ$.



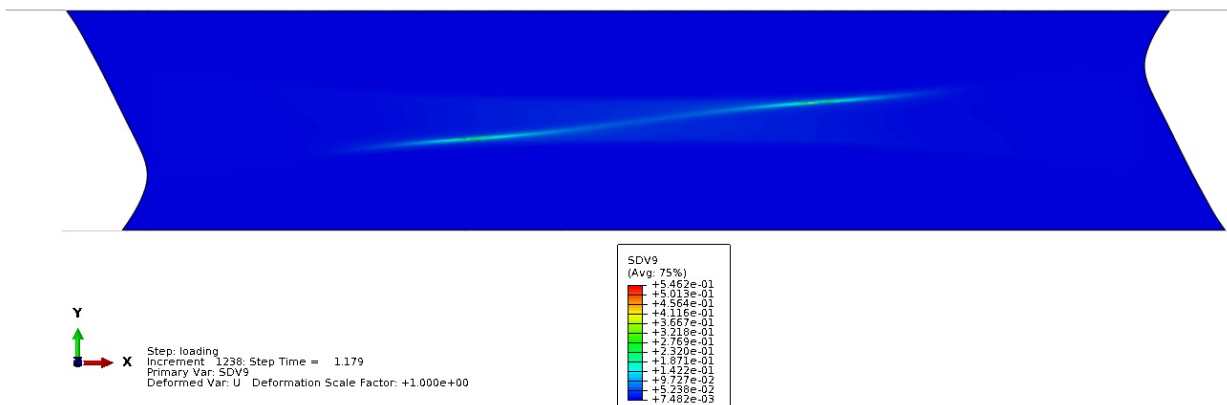
(a) Spécimen rompu (d'après Dunand and Mohr (2011b)). Le cercle noir correspond à l'amorce de la fissure.



(b) Répartition de la déformation principale maximale (au bord de l'éprouvette)

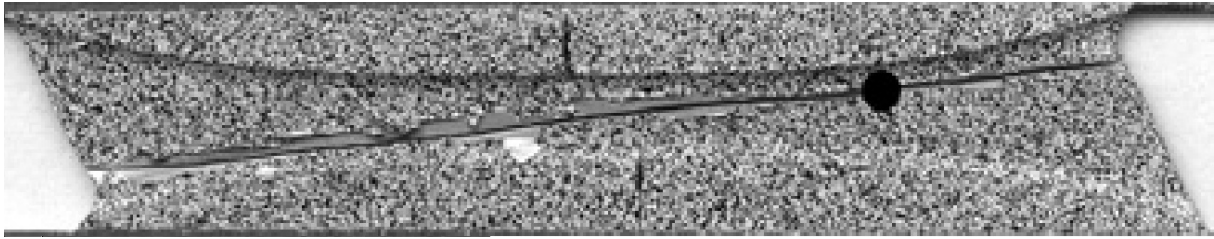


(c) Répartition du paramètre d'endommagement (au bord de l'éprouvette)

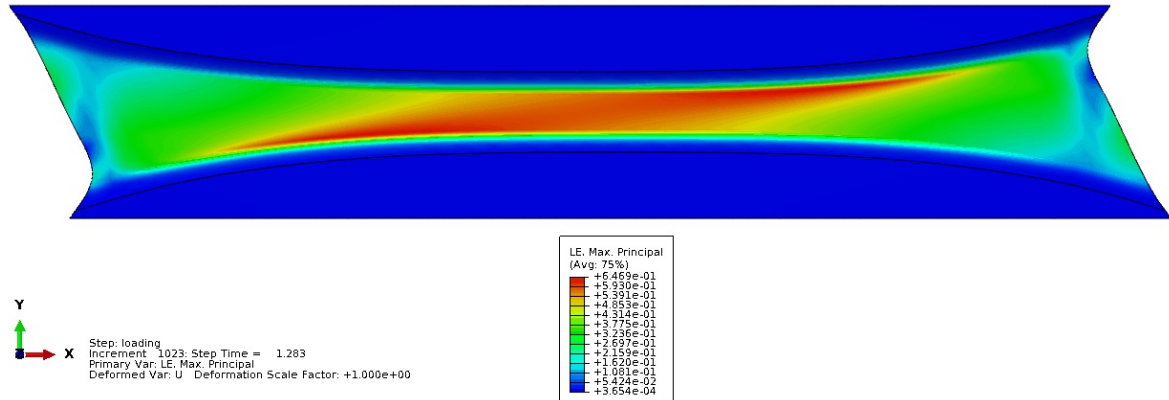


(d) Répartition du paramètre d'endommagement (au centre de l'éprouvette)

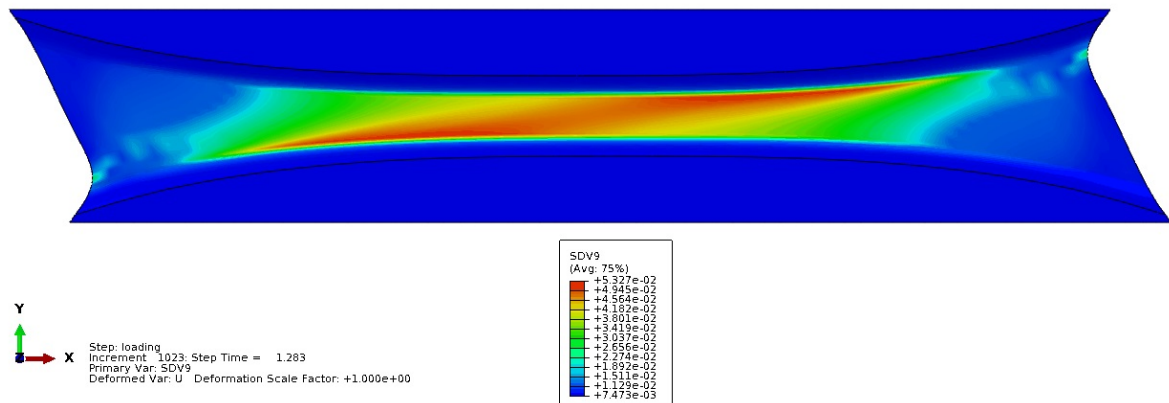
FIGURE 1.17: Lieu de la fissure pour le cas $\beta = 25^\circ$.



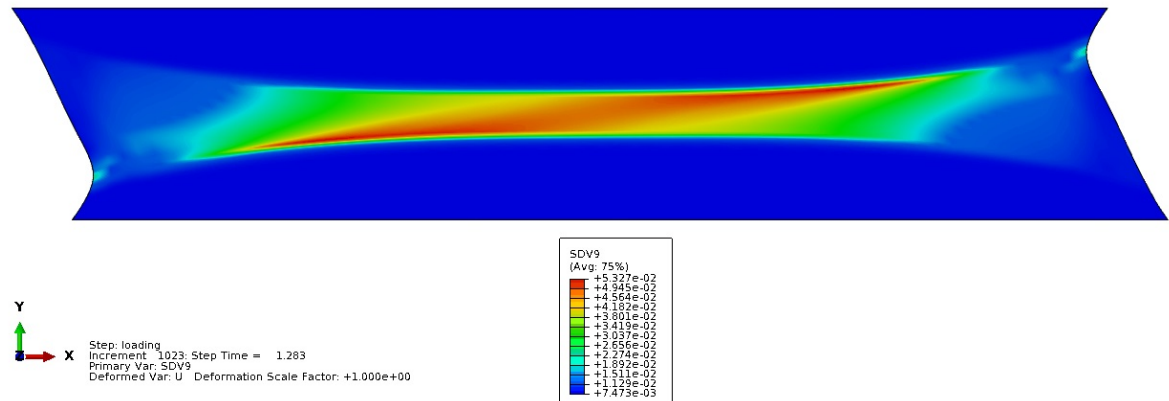
(a) Spécimen rompu (d'après [Dunand and Mohr \(2011b\)](#)). Le cercle noir correspond à l'amorce de la fissure.



(b) Répartition de la déformation principale maximale (au bord de l'éprouvette)



(c) Répartition du paramètre d'endommagement (au bord de l'éprouvette)



(d) Répartition du paramètre d'endommagement (au centre de l'éprouvette)

FIGURE 1.18: Lieu de la fissure pour le cas $\beta = 0^\circ$.

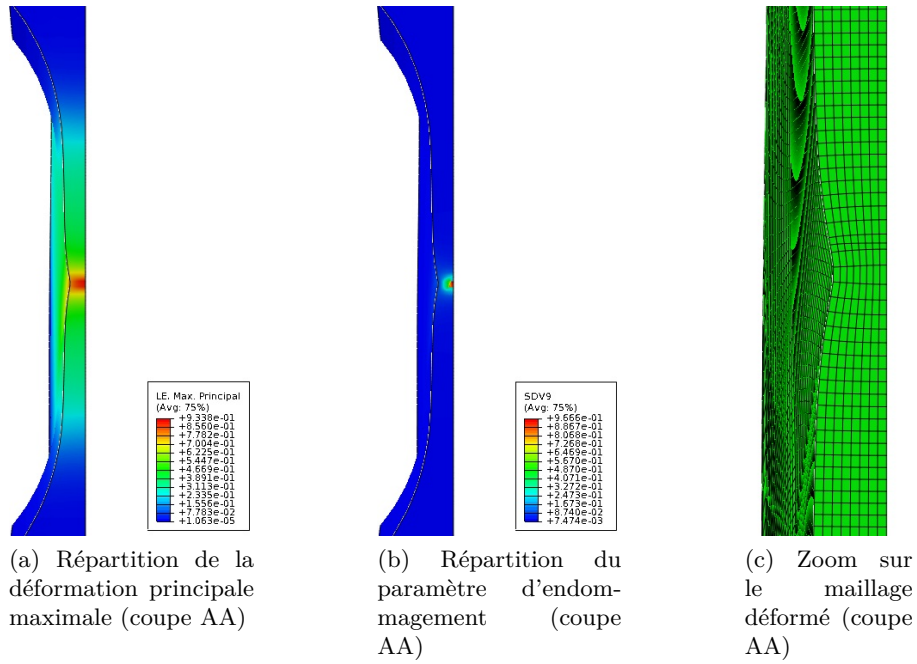
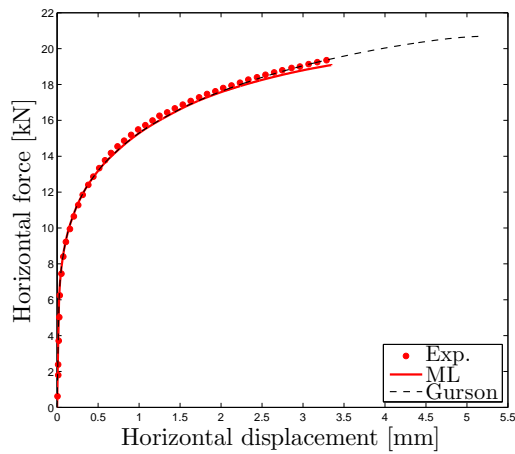
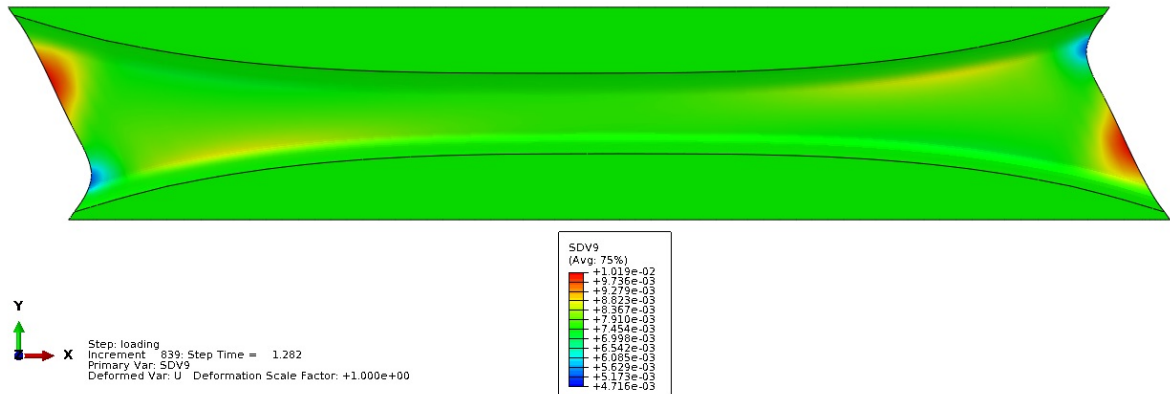


FIGURE 1.19: Résultats complémentaires pour le cas $\beta = 63^\circ$.



(a) Force horizontale en fonction du déplacement horizontal



(b) Répartition du paramètre d'endommagement (modèle de Gurson)

FIGURE 1.20: Résultats complémentaires pour le cas $\beta = 0^\circ$ en utilisant le modèle de Gurson.

1.5.4 Discussion

Le modèle de Madou-Leblond (Madou and Leblond, 2012a,b, 2013; Madou et al., 2013) permet de reproduire les expériences de rupture ductile en présence de cisaillement de Dunand and Mohr (2011a,b). Les courbes force-déplacement ainsi que le lieu de la fissure sont très bien reproduits par le modèle. Les résultats, en comparaison avec le critère de Gurson, montrent l'importance de la prise en compte des effets de forme des cavités qui jouent un rôle très important dans la dégradation du matériau.

Il faut noter que ce très bon accord a été rendu possible en fixant arbitrairement un nombre restreint de paramètres : la porosité initiale, la "porosité critique" de début de coalescence et le paramètre décrivant l'accélération de la croissance de la porosité.

Ces comparaisons ont également mis en évidence certaines limitations du modèle actuel. L'utilisation d'un modèle micromécanique de coalescence couplant traction et cisaillement permettrait très probablement d'améliorer la phase de localisation de la déformation et de dégradation du matériau. La prise en compte de l'anisotropie plastique dans le modèle ML permettrait également d'améliorer les prédictions du modèle.

1.6 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif l'implémentation numérique et l'application d'un modèle récent de rupture ductile pour les matériaux isotropes contenant des cavités ellipsoïdales générales (modèle de Madou-Leblond (Madou and Leblond, 2012a,b, 2013; Madou et al., 2013)).

Dans un premier temps, nous avons complété le modèle de Madou-Leblond afin d'y incorporer des éléments essentiels comme la coalescence et l'écroutissage.

Nous avons ensuite proposé un algorithme de projection locale de ce modèle, permettant de réduire l'étape locale à la résolution de deux équations non-linéaires couplées portant sur deux inconnues. L'algorithme a été implémenté numériquement dans les codes de calcul par éléments finis SYSTUS[®] et ABAQUS[®], permettant d'envisager des applications du modèle.

La première application du modèle a été dédiée à la comparaison des prédictions du modèle ML avec des calculs micromécaniques en cisaillement pour des cavités initialement sphériques et cylindriques (Nielsen et al., 2012; Tvergaard, 2015). Ces calculs numériques ont notamment révélé des modes de rupture ductile à très faible triaxialité, impossibles à reproduire avec le modèle de Gurson. Avec un recalage approprié des paramètres de coalescence, le modèle ML a permis de reproduire ces calculs aussi bien pour l'évolution des contraintes que des paramètres internes, mettant en évidence l'importance de la prise en compte des effets de forme des cavités.

La seconde application du modèle a été consacrée à l'étude d'une structure soumise à du cisaillement (Mohr et al., 2010; Dunand and Mohr, 2011a,b). Le modèle ML a permis de reproduire les courbes force-déplacement ainsi que le lieu d'amorçage de la fissure obtenus expérimentalement, pour divers cas de chargements allant de la traction au cisaillement. Dans ce dernier cas, le modèle de Gurson ne permet pas de décrire l'apparition de l'endommagement, mettant encore une fois en évidence le rôle fondamental des effets de forme des cavités dans la rupture ductile en cisaillement.

Le modèle ML a ainsi permis de reproduire l'adoucissement en cisaillement observé dans de nombreuses simulations numériques et expériences, sans avoir recours à la modification heuristique de Nahshon and Hutchinson (2008). Les effets de forme des cavités ont donc une importance capitale sur le développement de l'endommagement à faible triaxialité : dans certains cas la porosité diminue mais l'endommagement augmente ce qui suggère que c'est bien la forme des cavités qui est le paramètre influent dans ces problèmes.

Il faut cependant noter que le modèle de rupture ductile utilisé dans ce chapitre comporte une modélisation de la coalescence sommaire, basée sur l'approche de Tvergaard and Needleman (1984) : les paramètres intervenant dans cette modélisation ont été légèrement recalés pour bien reproduire les différents résultats.

Certains points restent donc à améliorer afin de simuler la rupture ductile en cisaillement plus précisément :

- L'utilisation d'un modèle micromécanique de coalescence est nécessaire pour bien reproduire la phase ultime de dégradation des matériaux ductiles. Des travaux récents ([Tekoglu et al., 2012](#); [Torki et al., 2015](#)) ont permis de prendre en compte le cisaillement dans les modèles de coalescence, mais le développement d'un modèle valable pour des cavités ellipsoïdales et des chargements généraux reste un challenge.
- La prise en compte de l'anisotropie plastique de la matrice dans l'approche de [Madou and Leblond \(2012a,b, 2013\)](#); [Madou et al. \(2013\)](#) est également nécessaire pour mieux modéliser les alliages métalliques, qui présentent en général une anisotropie plastique. L'extension du modèle de Madou-Leblond au cas de l'anisotropie plastique fera l'objet des chapitres 2 et 3.

Un critère de plasticité macroscopique pour les matériaux anisotropes contenant des vides ellipsoïdaux

Le but de ce chapitre est de développer un critère homogénéisé pour les matériaux poreux ductiles incorporant à la fois les effets de forme des cavités et d'anisotropie plastique de la matrice. Pour cela, nous étendons les critères récents de [Madou and Leblond \(2012a,b\)](#) pour des cavités ellipsoïdales générales plongées dans une matrice plastique isotrope, et [Monchiet et al. \(2008\)](#); [Keralavarma and Benzerga \(2010\)](#) pour des cavités sphéroïdales plongées dans une matrice plastique anisotrope, aux cavités ellipsoïdales générales plongées dans une matrice anisotrope. Nous effectuons une analyse limite d'une cellule ellipsoïdale constituée d'un matériau de Hill rigide parfaitement plastique, contenant une cavité ellipsoïdale confocale et soumise à un taux de déformation homogène sur son bord. Nous utilisons dans cette analyse les champs de vitesse incompressibles découverts par [Leblond and Gologanu \(2008\)](#), satisfaisant des conditions de taux de déformation homogène sur une famille arbitraire d'ellipsoïdes confocaux. Des approximations résultant d'études asymptotiques de la dissipation plastique microscopique près du vide et à l'infini conduisent à un critère analytique dont les coefficients ne sont pas entièrement déterminés à ce stade. La détermination complète de ces coefficients est réalisée en utilisant des simulations par éléments finis pour les chargements hydrostatiques, et en utilisant une borne rigoureuse de [Ponte Castañeda \(1991\)](#); [Willis \(1991\)](#); [Michel and Suquet \(1992\)](#) pour les composites non linéaires pour les chargements déviatoriques.

Ce chapitre est tiré d'un article soumis ([Morin et al., 2015d](#))

2.1 Introduction

The most famous model for porous ductile materials is that of [Gurson \(1977\)](#), which was obtained through limit-analysis of a spherical representative cell made of a rigid-ideal-plastic von Mises material, containing a concentric spherical void and subjected to conditions of homogeneous boundary strain rate ([Mandel, 1964](#); [Hill, 1967](#)). Due to its intrinsic limitations to spherical voids and plastically isotropic materials, several extensions of this model have been proposed.

Since voids are often non-spherical in real materials, void shape effects have been introduced by [Gologanu et al. \(1993, 1994, 1997\)](#) by considering spheroidal voids. These authors thus performed a limit-analysis of a spheroidal cell made of a von Mises material, containing a confocal spheroidal void and subjected to conditions of homogeneous boundary strain rate¹. A generalization of these studies has been recently proposed by [Madou and Leblond \(2012a,b\)](#) by considering arbitrary ellipsoidal cavities.

Another type of extensions considered plastically anisotropic matrices obeying [Hill \(1948\)](#)'s orthotropic criterion instead of von Mises's isotropic one. [Benzerga and Besson \(2001\)](#) first performed a limit-analysis of a spherical cell made of a Hill material and containing a spherical void, using [Gurson \(1977\)](#)'s velocity fields. Then [Monchiet et al. \(2006, 2008\)](#) and [Keralavarma and Benzerga \(2008, 2010\)](#) considered spheroidal voids embedded in a Hill matrix, using the velocity fields respectively considered by [Gologanu et al. \(1993, 1994\)](#) and [Gologanu et al. \(1997\)](#), which were discovered by [Lee](#)

1. [Garajeu \(1995\)](#) also derived a criterion for spheroidal voids using an orthogonal velocity to the confocal spheroids and recently, [Monchiet et al. \(2014\)](#) studied the same problem by means of Eshelby-like velocity fields.

and Mear (1992). All these studies devoted to plastically anisotropic matrices therefore used the same trial velocity fields as those previously considered for the isotropic case.

The aim of this paper is to define a Gurson-type criterion for plastically anisotropic solids obeying Hill (1948)'s criterion, and containing arbitrary ellipsoidal voids. This model will stand as an extension of both Madou and Leblond (2012a,b)'s criterion because the material will be considered to be anisotropic instead of isotropic, and Monchiet et al. (2008); Keralavarma and Benzerga (2010)'s criteria because the voids will be considered to be arbitrary ellipsoidal instead of spheroidal.

To this end, we shall perform a limit-analysis of some general ellipsoidal representative cell made of a rigid-ideal-plastic Hill material, containing a confocal ellipsoidal void and loaded through conditions of homogeneous boundary strain rate. This analysis will use the same trial velocity fields as in the previous work of Madou and Leblond (2012a,b), that is, those discovered by Leblond and Gologanu (2008) and satisfying conditions of this type on an arbitrary family of confocal ellipsoids.

The paper is organized as follows :

- Section 2.2 presents the limit-analysis based on Madou and Leblond (2012a,b)'s velocity fields. The output is a complex integral expression of the macroscopic plastic dissipation.
- In Section 2.3, approximations are then made on the macroscopic plastic dissipation, based on asymptotic studies of the microscopic dissipation near the void and at infinity. This leads to an approximate analytical yield function, the coefficients of which are not fully determined at this stage.
- Section 2.4 presents the explicit determination of the parameters appearing in one term of the yield function, based on finite element micromechanical simulations.
- The parameters of the remainder of the yield function are next determined in Section 2.5, using a bound for nonlinear composites derived by Ponte Castañeda (1991); Willis (1991); Michel and Suquet (1992).
- Section 2.6 provides a summary of all relevant equations for ease of reference.
- Finally Section 2.7 presents a brief assessment of the yield function through numerical finite element limit analysis.

2.2 Limit analysis of an ellipsoidal cell containing a confocal ellipsoidal void

2.2.1 Limit-analysis procedure

Limit-analysis combined with the Hill-Mandel (Mandel, 1964; Hill, 1967) homogenization theory is a convenient framework to derive constitutive equations for porous ductile solids. Indeed, it permits to effectively operate the scale transition by providing microstructural information in the macroscopic constitutive behavior.

Consider a representative volume element (RVE) in a porous ductile solid denoted Ω and containing a void denoted ω . The macroscopic yield locus of the porous material can be determined using the upper-bound theorem of limit-analysis (see e.g. Benzerga and Leblond (2010)). The fundamental inequality of this approach

$$\Sigma : \mathbf{D} \leq \Pi(\mathbf{D}) \tag{2.1}$$

leads to the parametric equation of the yield locus

$$\Sigma = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{D}) \tag{2.2}$$

where the macroscopic stress and strain rate tensors Σ and \mathbf{D} are defined as the volume averages of their microscopic counterparts σ and \mathbf{d} . The macroscopic plastic dissipation $\Pi(\mathbf{D})$ in equations (2.1) and (2.2) is defined by :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{D})} \langle \sup_{\sigma^* \in \mathcal{C}} \sigma^* : \mathbf{d} \rangle_{\Omega - \omega} \tag{2.3}$$

where \mathcal{C} is the microscopic convex domain of reversibility and the set $\mathcal{K}(\mathbf{D})$ consists of velocity fields \mathbf{v} kinematically admissible with \mathbf{D} and verifying the property of incompressibility.

2.2.2 Presentation of the cell

We consider an ellipsoidal cell containing a confocal ellipsoidal void and loaded arbitrarily through conditions of homogeneous boundary strain rate (Mandel, 1964; Hill, 1967). We briefly recall the notations used by Madou and Leblond (2012a) to describe such a cell.

The semi-axes of the inner ellipsoid (the boundary of the void), parallel to the unit vectors \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z , are denoted a, b, c ($a > b > c$) while those of the outer one (the boundary of the cell) are denoted A, B, C ($A > B > C$). These two ellipsoids are related through the confocality conditions $A^2 - a^2 = B^2 - b^2 = C^2 - c^2$. Their volumes are $\frac{4\pi}{3}\omega$ and $\frac{4\pi}{3}\Omega$ where

$$\omega \equiv abc \quad ; \quad \Omega \equiv ABC, \quad (2.4)$$

and the porosity is $f \equiv \frac{\omega}{\Omega}$.

Some elements pertaining to the ellipsoidal coordinated λ, μ, ν associated to the triplet (a, b, c) are provided in Appendix A.1. In particular, the coordinate λ (which plays the same role as r for spherical coordinates) takes the value $\lambda \equiv 0$ on the inner ellipsoid \mathcal{E}_0 and $\lambda \equiv \Lambda$ on the outer one \mathcal{E}_Λ . The semi-axes A, B, C of \mathcal{E}_Λ are related to those, a, b, c , of \mathcal{E}_0 plus the parameter Λ through the relations

$$A \equiv \sqrt{a^2 + \Lambda} \quad ; \quad B \equiv \sqrt{b^2 + \Lambda} \quad ; \quad C \equiv \sqrt{c^2 + \Lambda}. \quad (2.5)$$

It then follows from equations (2.4) and (2.5) that the parameter Λ is determined by the following third-degree polynomial equation :

$$(a^2 + \Lambda)(b^2 + \Lambda)(c^2 + \Lambda) - \frac{a^2 b^2 c^2}{f^2} = 0. \quad (2.6)$$

The completely flat ellipsoid confocal with \mathcal{E}_0 and \mathcal{E}_Λ will play an important role in the sequel. Its semi-axes $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ are given by

$$\bar{a} \equiv \sqrt{a^2 - c^2} \quad ; \quad \bar{b} \equiv \sqrt{b^2 - c^2} \quad ; \quad \bar{c} \equiv 0. \quad (2.7)$$

The family of confocal ellipsoids \mathcal{E}_λ may then be characterized by the single dimensionless parameter

$$k \equiv \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \quad (2.8)$$

or the related one

$$k' \equiv \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}. \quad (2.9)$$

Note that the ellipsoids \mathcal{E}_λ are prolate spheroids if $(k, k') = (0, 1)$, and oblate spheroids if $(k, k') = (1, 0)$.

2.2.3 Hill (1948)'s anisotropic criterion

We assume that the matrix is rigid-plastic and obeys Hill (1948)'s orthotropic yield criterion. The basis of orthotropy is denoted $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ and is *not* supposed to coincide with the principal basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ of the cavity.

Let us denote by $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ and $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^*$ the Voigt-type vector representations, generally used in finite element codes, of the local stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ in the bases $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ and $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$, respectively :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_4 \\ \tilde{\sigma}_5 \\ \tilde{\sigma}_6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} ; \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^* \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1^* \\ \tilde{\sigma}_2^* \\ \tilde{\sigma}_3^* \\ \tilde{\sigma}_4^* \\ \tilde{\sigma}_5^* \\ \tilde{\sigma}_6^* \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11}^* \\ \sigma_{22}^* \\ \sigma_{33}^* \\ \sigma_{12}^* \\ \sigma_{13}^* \\ \sigma_{23}^* \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Also, let $\tilde{\mathbf{d}}$ and $\tilde{\mathbf{d}}^*$ denote those of the local strain rate tensor \mathbf{d} in the same bases :

$$\tilde{\mathbf{d}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \\ \tilde{d}_3 \\ \tilde{d}_4 \\ \tilde{d}_5 \\ \tilde{d}_6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} d_{xx} \\ d_{yy} \\ d_{zz} \\ 2d_{xy} \\ 2d_{xz} \\ 2d_{yz} \end{pmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{d}}^* \equiv \begin{pmatrix} \tilde{d}_1^* \\ \tilde{d}_2^* \\ \tilde{d}_3^* \\ \tilde{d}_4^* \\ \tilde{d}_5^* \\ \tilde{d}_6^* \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} d_{11}^* \\ d_{22}^* \\ d_{33}^* \\ 2d_{12}^* \\ 2d_{13}^* \\ 2d_{23}^* \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Hill's criterion reads :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \sigma_{eq}^2 - \sigma_0^2 \leq 0 \quad , \quad \sigma_{eq}^2 \equiv \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{A} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.12)$$

where σ_{eq} is the Hill equivalent stress², σ_0 a scalar and \mathbb{A} an orthotropic fourth-order tensor satisfying both major and minor symmetries : $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}$ for $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Note that the choice of the scalar σ_0 and the tensor \mathbb{A} , for a given anisotropic material, involves some degree of arbitrariness since σ_0 can be multiplied by a positive scalar δ if the components of \mathbb{A} are simultaneously multiplied by δ^2 . Note also that the quantities $\sigma_0/\sqrt{A_{1111}}$, $\sigma_0/\sqrt{A_{2222}}$ and $\sigma_0/\sqrt{A_{3333}}$ represent the ‘‘yield stresses’’ in the directions x_1 , x_2 and x_3 respectively. Employing the Voigt notations just introduced, this criterion also takes the form :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\mathbb{A}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_0^2 = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \tilde{\mathbb{A}}^* \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^* - \sigma_0^2 \leq 0 \quad (2.13)$$

where the Voigt representation $\tilde{\mathbb{A}}^*$ of the tensor \mathbb{A} in the basis of orthotropy $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ is of the form :

$$\tilde{\mathbb{A}}^* \equiv \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}^* & \tilde{A}_{12}^* & \tilde{A}_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{12}^* & \tilde{A}_{22}^* & \tilde{A}_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{13}^* & \tilde{A}_{23}^* & \tilde{A}_{33}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{55}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{66}^* \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Note that invariance of the criterion upon addition of a hydrostatic stress implies that

$$\tilde{A}_{11}^* + \tilde{A}_{12}^* + \tilde{A}_{13}^* = \tilde{A}_{12}^* + \tilde{A}_{22}^* + \tilde{A}_{23}^* = \tilde{A}_{13}^* + \tilde{A}_{23}^* + \tilde{A}_{33}^* = 0. \quad (2.15)$$

2. Note that the coefficient 3/2 usually employed in the definition of the equivalent stress is implicitly added in the definition of the tensor \mathbb{A} , permitting to retrieve the applied stress under uniaxial loading in the isotropic case.

The equivalent strain rate d_{eq} associated to the criterion, defined in such a way that the plastic dissipation be equal to $\sigma_0 d_{eq}$, is given by :

$$d_{eq}^2 \equiv \mathbf{d} : \mathbb{B} : \mathbf{d} \equiv \tilde{\mathbf{d}} \cdot \tilde{\mathbb{B}} \cdot \tilde{\mathbf{d}} \equiv \tilde{\mathbf{d}}^* \cdot \tilde{\mathbb{B}}^* \cdot \tilde{\mathbf{d}}^* \quad (2.16)$$

where the tensors \mathbb{A} and \mathbb{B} are connected through the following relation :

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} = \mathbb{B} : \mathbb{A} = \mathbb{K} \quad ; \quad (2.17)$$

here $\mathbb{K} \equiv \mathbb{I} - \mathbb{J}$ where \mathbb{I} is the fourth-order symmetric identity tensor and $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. The relations between the components of the Voigt representations $\tilde{\mathbb{A}}^*$ and $\tilde{\mathbb{B}}^*$ of the tensors \mathbb{A} and \mathbb{B} in the orthotropy basis $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ resulting from there are given in Appendix A.2. Note in particular that $\tilde{\mathbb{B}}^*$ satisfies relations analogous to (2.15).

For this class of material, the macroscopic plastic dissipation (2.3) thus reads :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{D})} \langle \sigma_0 d_{eq} \rangle_{\Omega-\omega}. \quad (2.18)$$

In the sequel, the basis used for calculations will be the principal basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ of the ellipsoidal cavity. Therefore the Voigt representations of the tensors \mathbb{A} and \mathbb{B} used will be $\tilde{\mathbb{A}}$ and $\tilde{\mathbb{B}}$, which are easily obtained from $\tilde{\mathbb{A}}^*$ and $\tilde{\mathbb{B}}^*$ using a change of basis. Note that unlike the matrices $\tilde{\mathbb{A}}^*$ and $\tilde{\mathbb{B}}^*$, $\tilde{\mathbb{A}}$ and $\tilde{\mathbb{B}}$ are full (do not have any zero component) in general, but again satisfy relations analogous to (2.15). Also, note that in order to simplify the notations, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ will be replaced by $\boldsymbol{\sigma}$, $\tilde{\mathbf{d}}$ by \mathbf{d} , $\tilde{\mathbb{A}}$ by \mathbb{A} and $\tilde{\mathbb{B}}$ by \mathbb{B} , without generating any ambiguities.

2.2.4 Choice of trial velocity fields

The choice of velocity fields is a key point in limit-analysis and governs the quality of the approximate yield surface obtained. For spheroidal voids embedded in *anisotropic* matrices, Monchiet et al. (2008) and Keralavarma and Benzerga (2010) both chose velocity fields considered by Gologanu et al. (1993, 1994) and Gologanu et al. (1997) and discovered by Lee and Mear (1992), originally used for spheroidal voids in an *isotropic* matrix. It has recently been shown (Pastor et al., 2012; Morin et al., 2014) that the criteria obtained in this way are in very good agreement with the results of numerical limit-analyses based on the finite element method, in spite of the apparently crude choice of velocity fields. This can be explained by the variational characterization of the overall yield locus in terms of the overall plastic dissipation : provided that the anisotropy is moderate³, using a trial “isotropic” velocity field slightly differing from the exact “anisotropic” one must lead to a reasonable estimate of the minimum of the plastic dissipation, leading itself to a good estimate of the yield locus.

The trial velocity fields used in this paper will accordingly be those discovered by Leblond and Gologanu (2008), satisfying conditions of homogeneous boundary strain rate on an arbitrary family of confocal ellipsoids, and used by Madou and Leblond (2012a) for ellipsoidal cavities embedded in an *isotropic* matrix. These fields stand as extensions of those of Gologanu et al. (1993, 1994) from spheroidal to general ellipsoidal cavities. Their expression is recalled in Appendix A.4. They involve in particular a velocity field $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$, defined by equations (A.13) and (A.16), describing the response of the cell under hydrostatic loading.

2.2.5 Expression of the overall plastic dissipation

The cell is loaded through conditions of homogeneous boundary strain rate :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{r} \quad , \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{E}_\Lambda \quad (2.19)$$

where $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ denotes the local velocity and \mathbf{D} the overall strain rate tensor.

3. A definition of the moderate anisotropy is provided in Appendix A.3.

Leblond and Gologanu (2008)'s velocity fields are used in a limit-analysis of the domain considered, which provides an upper estimate $\Pi^+(\mathbf{D})$ of the overall plastic dissipation defined as

$$\Pi^+(\mathbf{D}) \equiv \frac{1}{\frac{4\pi}{3}\Omega} \int_{\lambda=0}^{\lambda=\Lambda} \int_{\mu=-b^2}^{\mu=-c^2} \int_{\nu=-a^2}^{\nu=-b^2} \left(\sum_{i=1}^8 \sigma_0 d_{eq}^{(i)}(\lambda, \mu, \nu) \right) d\Omega \quad (2.20)$$

where the definition of the ellipsoidal coordinates (λ, μ, ν) and the expression of the elementary volume $d\Omega$ are given in Appendix A.1. Also, the symbols $d_{eq}^{(i)}(\lambda, \mu, \nu)$ ($i = 1, \dots, 8$) here denote the values of the local Hill equivalent strain rate d_{eq} for the 8 points (x, y, z) of the cell corresponding to the triplet (λ, μ, ν) (see Appendix A.1).

Since it is not possible to provide an explicit analytical expression of this integral, we introduce approximations, following Madou and Leblond (2012a). To begin with, the expression of $\Pi^+(\mathbf{D})$ is rewritten by integrating over successive confocal ellipsoids \mathcal{E}_λ :

$$\Pi^+(\mathbf{D}) = \frac{\sigma_0}{\Omega} \int_{\lambda=0}^{\lambda=\Lambda} \langle d_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} d(v(\lambda)) \quad (2.21)$$

where the function v is defined by equation (A.3) of Appendix A.1, and

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} &\equiv \frac{1}{\frac{4\pi}{3}d(v(\lambda))} \int_{\mu=-b^2}^{\mu=-c^2} \int_{\nu=-a^2}^{\nu=-b^2} \left(\sum_{i=1}^8 f^{(i)}(\lambda, \mu, \nu) \right) d\Omega \\ &= -\frac{1}{\frac{4\pi}{3}v(\lambda)\frac{dv}{d\lambda}(\lambda)} \int_{\mu=-b^2}^{\mu=-c^2} \int_{\nu=-a^2}^{\nu=-b^2} \left(\sum_{i=1}^8 f^{(i)}(\lambda, \mu, \nu) \right) \frac{(\lambda - \mu)(\mu - \nu)(\nu - \lambda)}{8v(\mu)v(\nu)} d\mu d\nu \end{aligned} \quad (2.22)$$

denotes the average value of an arbitrary function f over the ellipsoidal surface \mathcal{E}_λ , with the weight $d(v(\lambda))$. Now, by Cauchy-Schwartz's inequality, $\langle d_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \leq \sqrt{\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}$, so that

$$\Pi^+(\mathbf{D}) \leq \Pi^{++}(\mathbf{D}) \equiv \frac{\sigma_0}{\Omega} \int_{\lambda=0}^{\lambda=\Lambda} \sqrt{\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}} d(v(\lambda)), \quad (2.23)$$

and the following approximation is introduced :

\mathcal{A}_1 : The quantity $\Pi^{++}(\mathbf{D})$ represents an acceptable approximation of $\Pi^+(\mathbf{D})$.

This approximation was found to lead to satisfactory results in the previous cases considered (Gurson, 1977; Gologanu et al., 1993, 1994, 1997; Madou and Leblond, 2012a,b; Benzerga and Besson, 2001; Monchiet et al., 2008; Keralavarma and Benzerga, 2010), so it may be hoped to again be acceptable in the more general case treated here.

Additional approximations discussed below will also be introduced to put the integral defined by equation (2.23) in a form liable to analytical calculation. Once this is done, the external estimate of the overall yield surface will be obtained from the parametric equation

$$\Sigma = \frac{\partial \Pi^{++}}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{D}). \quad (2.24)$$

2.3 Approximate macroscopic plastic dissipation and yield function

The aim of this section is to provide an approximate analytical expression of the overall plastic dissipation, leading to an approximate analytical yield function.

By equations (2.16) and (A.15) of Appendix (A.4), the Hill equivalent strain rate d_{eq} is given by

$$d_{eq}^2(\mathbf{r}) = \mathcal{A}^2 d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) + \Delta_{eq}^2 + 2\mathcal{A} \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) : \mathbb{B} : \Delta, \quad d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) : \mathbb{B} : \mathbf{d}^0(\mathbf{r}), \quad \Delta_{eq}^2 \equiv \Delta : \mathbb{B} : \Delta \quad (2.25)$$

so that

$$\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \mathcal{A}^2 \langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + \Delta_{eq}^2 + 2\mathcal{A} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} : \mathbb{B} : \mathbf{\Delta}. \quad (2.26)$$

This expression serves as a basis for asymptotic studies of the integrand in equation (2.23), both far from and close to the origin, presented in Appendix A.5. The results obtained in this Appendix will now be used to define suitable approximations leading to an analytical yield function.

2.3.1 Simplification of the “crossed term” in the expression of $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$

The first task is, following Madou and Leblond (2012a), to simplify the “crossed term” $2\mathcal{A} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} : \mathbb{B} : \mathbf{\Delta}$ in the expression (2.26) of $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$.

Since, as explained in Appendix A.5, the off-diagonal components of the tensor $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ are zero, this crossed-term may be rewritten

$$2\mathcal{A} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} : \mathbb{B} : \mathbf{\Delta} = 2\mathcal{A} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{\text{dg}} \cdot (\mathbb{B} : \mathbf{\Delta})^{\text{dg}} \quad (2.27)$$

where $\mathbf{T}^{\text{dg}} \in \mathbb{R}^3$ denotes the vector made from the diagonal components T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} of any symmetric second-rank tensor \mathbf{T} . We now introduce the plane $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ consisting of vectors the components of which have a zero sum. Both vectors $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{\text{dg}}$ and $(\mathbb{B} : \mathbf{\Delta})^{\text{dg}}$ are in \mathcal{P} since both tensors $\mathbf{d}^0(\mathbf{r})$ and $\mathbb{B} : \mathbf{\Delta}$ are traceless. We then introduce the orthonormal basis of \mathcal{P} consisting of the unit vector \mathbf{U} collinear to the vector of components L_x, L_y and L_z (as defined by equations (A.22) of Appendix A.5), and the unit vector \mathbf{V} perpendicular to \mathbf{U} in the plane \mathcal{P} . The vector $(\mathbb{B} : \mathbf{\Delta})^{\text{dg}}$ may be expressed in this basis :

$$(\mathbb{B} : \mathbf{\Delta})^{\text{dg}} \equiv \mathcal{B}\mathbf{U} + \mathcal{C}\mathbf{V} \quad , \quad \mathcal{B} \equiv (\mathbb{B} : \mathbf{\Delta})^{\text{dg}} \cdot \mathbf{U} \quad , \quad \mathcal{C} \equiv (\mathbb{B} : \mathbf{\Delta})^{\text{dg}} \cdot \mathbf{V}. \quad (2.28)$$

The expression (2.26) of $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ then becomes, by equation (2.27) :

$$\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \mathcal{A}^2 \langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + \Delta_{eq}^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{\text{dg}} \cdot \mathbf{U} + 2\mathcal{A}\mathcal{C} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{\text{dg}} \cdot \mathbf{V}. \quad (2.29)$$

We then introduce the following approximation :

\mathcal{A}_2 : The term $2\mathcal{A}\mathcal{C} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{\text{dg}} \cdot \mathbf{V}$ may be discarded in the expression (2.29) of $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$.

The justification of this approximation is as follows. The term $2\mathcal{A}\mathcal{C} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{\text{dg}} \cdot \mathbf{V}$ is actually negligible with respect to $\mathcal{A}^2 \langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ or Δ_{eq}^2 if, and only if, $[\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{\text{dg}} \cdot \mathbf{V}]^2 \ll \langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$. That this condition is actually satisfied now results from the asymptotic study presented in Appendix A.5 :

- For surfaces \mathcal{E}_λ of large dimensions, the left-hand side of the previous condition is $o(1/v^2)$ by equations (A.20)_{7–9}, whereas the right-hand side is $O(1/v^2)$ by equations (A.20)_{1–6}.
- For surfaces \mathcal{E}_λ close to the completely flat confocal ellipsoid, the vector $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{\text{dg}}$ goes to a limit collinear to the vector \mathbf{U} , by the very definition of this vector ; since \mathbf{U} and \mathbf{V} are orthogonal, the left-hand side of the previous condition goes to zero, while the right-hand side goes to some nonzero finite or infinite limit, depending on the case considered (see equations (A.22)₄, (A.26), (A.29), (A.30)₃ and (A.31)₂).
- The previous condition, being rigorously satisfied for both extreme positions of the surface \mathcal{E}_λ , should be approximately satisfied for all positions of this surface.

With approximation \mathcal{A}_2 , equation (2.29) becomes

$$\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \simeq \mathcal{A}^2 \langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + \Delta_{eq}^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B} \langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{\text{dg}} \cdot \mathbf{U}. \quad (2.30)$$

2.3.2 Simplification of the spatial dependence of $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$

Following again [Madou and Leblond \(2012a\)](#), we define the variable :

$$w \equiv \frac{1}{3v/2 + \chi/L} \quad (2.31)$$

where χ is a dimensionless constant of order unity and L the limit defined by equation (A.22)₄ of Appendix A.5. We then write the quantities $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ and $2\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{\text{dg}} \cdot \mathbf{U}$ in the following form, which defines the functions $F(w)$ and $G(w)$:

$$\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \equiv F^2(w)w^2 \quad ; \quad 2\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}^{\text{dg}} \cdot \mathbf{U} \equiv 2F(w)G(w)w^2. \quad (2.32)$$

With the notations just introduced, equation (2.30) becomes :

$$\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \simeq \mathcal{A}^2 F^2(w)w^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B}F(w)G(w)w^2 + \Delta_{eq}^2 \quad (2.33)$$

which can be rewritten as :

$$\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \simeq [\mathcal{A}F(w) + \mathcal{B}G(w)]^2 w^2 - \mathcal{B}^2 H^2(w) + \Delta_{eq}^2 \quad , \quad H^2(w) \equiv G^2(w)w^2. \quad (2.34)$$

We then introduce the following approximation :

\mathcal{A}_3 : The functions $F(w)$, $G(w)$, $H(w)$ in equation (2.34) may be replaced by suitable average values \bar{F} , \bar{G} , \bar{H} .

This hypothesis may be justified through a detailed study of the functions $F(w)$, $G(w)$, $H(w)$, showing that their variations are moderate. We shall consider here the sole case of the function $F(w)$ for compactness. (The functions $G(w)$ and $H(w)$ may be studied in the same way as in the case of an isotropic matrix, see [Madou and Leblond \(2012a\)](#)).

Near infinity ($v \rightarrow +\infty$), $w \sim \frac{2}{3v} \rightarrow 0$ by equation (2.31), so that equation (2.32)₁ becomes $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \frac{4F^2(0)}{9v^2}$. Comparison with equation (A.20) of Appendix A.5 then reveals that

$$F(0) = \sqrt{\frac{3}{10} (B_{11} + B_{22} + B_{33} + 2B_{44} + 2B_{55} + 2B_{66})}. \quad (2.35)$$

Near the origin ($v \rightarrow 0$), we need to distinguish between the different geometrical cases :

- In the generic ellipsoidal and oblate spheroidal cases, when v goes to zero, w goes to the limit L/χ so that $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ goes to the limit $F^2(L/\chi)\frac{L^2}{\chi^2}$, which must be equal to L^2 by equation (A.22)₄ of Appendix A.5 ; it follows that

$$F(L/\chi) = \chi. \quad (2.36)$$

- In the prolate spheroidal case, $L = +\infty$ so that equation (2.31) becomes $w = \frac{2}{3v}$ for all values of v . Therefore, when v goes to zero, w goes to $+\infty$ and $\langle d_{eq}^0{}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \frac{4F^2(+\infty)}{9v^2}$. Comparison with equation (A.29) of Appendix A.5 then shows that

$$F(+\infty) = \sqrt{\frac{9}{32} (-B_{11} + 2B_{22} + 2B_{33} + 4B_{66})}. \quad (2.37)$$

- In the spherical case, again, $w = \frac{2}{3v}$ since $L = +\infty$; equations (A.31)₂ of Appendix A.5 and (2.32)₁ then imply that $F(w)$ is rigorously constant for all values of w :

$$F(w) = \sqrt{\frac{3}{10} (B_{11} + B_{22} + B_{33} + 2B_{44} + 2B_{55} + 2B_{66})}. \quad (2.38)$$

It results from equations (2.35)-(2.38) that if the material anisotropy is moderate, and the constant χ chosen of order unity, the function $F(w)$ varies moderately and may thus safely be replaced by a constant.

With approximation \mathcal{A}_3 , the final expression of $\langle d_{eq}^2 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ reads :

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = (\mathcal{A}\bar{F} + \mathcal{B}\bar{G})^2 w^2 + Q^2 \quad (2.39)$$

where Q^2 is some quadratic form of the coefficients \mathcal{B} , \mathcal{C} and the components of the tensor $\mathbf{\Delta}$:

$$Q^2 \equiv \mathbf{X} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{X} \quad (2.40)$$

where \mathbf{X} is the vector of components $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \Delta_{xx}, \Delta_{yy}, \Delta_{zz}, \Delta_{xy}, \Delta_{xz}, \Delta_{yz}$ and \mathbb{C} some symmetric matrix.

2.3.3 Approximate yield function

The expression (2.23)₂ of $\Pi^{++}(\mathbf{D})$ may be rewritten, accounting for the fact that $dv = -\frac{2}{3} \frac{dw}{w^2}$:

$$\Pi^{++}(\mathbf{D}) \simeq \frac{2\sigma_0}{3\Omega} \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \sqrt{\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}} \frac{dw}{w^2}, \quad (2.41)$$

where

$$w_{\min} \equiv w(v(\lambda = \Lambda)) = \frac{1}{3\Omega/2 + \chi/L} \quad ; \quad w_{\max} \equiv w(v(\lambda = 0)) = \frac{1}{3\omega/2 + \chi/L}. \quad (2.42)$$

The derivation of the approximate yield function associated to the estimate $\Pi^{++}(\mathbf{D})$ of the overall plastic dissipation is then based on ‘‘Gurson’s lemma’’ (see Madou and Leblond (2012a)). After tedious but straightforward calculations, one gets the following Gurson-like approximation of the overall yield criterion :

$$\Phi(\mathbf{\Sigma}) \equiv \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{\Sigma})}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(f+g) \cosh \left[\frac{\mathcal{L}(\mathbf{\Sigma})}{\sigma_0} \right] - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0. \quad (2.43)$$

In this expression :

- The parameter g , which plays the role of a kind of ‘‘second porosity’’, is given by

$$g \equiv \frac{2\chi}{3\Omega L}. \quad (2.44)$$

- $\mathcal{L}(\mathbf{\Sigma})$ is a linear form of the diagonal components of $\mathbf{\Sigma}$ given by

$$\mathcal{L}(\mathbf{\Sigma}) \equiv \kappa \Sigma_h, \quad \kappa \equiv \frac{3}{2\bar{F}}, \quad \Sigma_h \equiv H_x \Sigma_{xx} + H_y \Sigma_{yy} + H_z \Sigma_{zz}, \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x \equiv \Omega D_{xx}^0(\Lambda) \\ H_y \equiv \Omega D_{yy}^0(\Lambda) \\ H_z \equiv \Omega D_{zz}^0(\Lambda). \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Note that by equation (A.14) of Appendix A.4, the coefficients H_x, H_y, H_z here satisfy the equation

$$H_x + H_y + H_z = 1. \quad (2.46)$$

- $\mathcal{Q}(\mathbf{\Sigma})$ is a quadratic form of the components of $\mathbf{\Sigma}$, which need not be completely specified here.

2.3.4 Comments

At this stage, we have derived a criterion for general ellipsoidal cavities embedded in a plastically anisotropic material obeying Hill (1948)’s criterion, based on the same velocity field as in the case of an isotropic matrix envisaged by Madou and Leblond (2012a). This criterion is formally very close to the isotropic one, but plastic anisotropy is nevertheless accounted for :

- the coefficient κ is connected to the average value of the function $F(w)$, which is itself connected to the average value $\langle d_{eq}^{0,2}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ and therefore to the tensor \mathbb{B} ;
- the quadratic form $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma})$ also contains information concerning anisotropy.

Note however that the coefficients H_x, H_y, H_z depend only on the velocity field $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$ and thus do *not* depend on the material anisotropy.

However, the use of [Leblond and Gologanu \(2008\)](#)'s velocity fields is bound to lead to the same inaccuracies as in the case of an isotropic matrix ([Madou and Leblond, 2012b](#)). More precisely :

- Such inaccuracies will occur in the specific case of very flat oblate spheroidal voids subjected to *hydrostatic* loadings, as shown in the works of [Gologanu \(1997\)](#) and [Gologanu et al. \(1997\)](#).
- It has also been remarked by [Gologanu \(1997\)](#) that for a penny-shaped crack subjected to a *deviatoric* loading, [Gologanu et al. \(1994\)](#)'s yield criterion, based on [Leblond and Gologanu \(2008\)](#)'s velocity fields (specialized to the spheroidal case), predicts no effect of the crack. This prediction is counterintuitive and in contradiction with a rigorous upper bound established by [Ponte Castañeda \(1991\)](#), [Willis \(1991\)](#) and [Michel and Suquet \(1992\)](#). It is due to the simplistic description of the response to such loadings in the form of a homogeneous shear strain rate field.

In order to overcome these two difficulties, distinct remedies will be adopted.

For hydrostatic loadings, the previous approximate limit-analysis will be improved by replacing [Leblond and Gologanu \(2008\)](#)'s trial velocity field $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$ by the supposedly exact field for an isotropic material, determined numerically by the finite element method. (The *isotropic* numerical velocity field must lead to a reasonable estimate of the yield locus even for (moderately) *anisotropic* materials, for the reasons explained in Subsection 2.2.4). One may note that the approximations expounded above will still apply because there are not tied to the specific form of [Leblond and Gologanu \(2008\)](#)'s field $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$ but only to some of its qualitative mathematical properties, such as existence and finiteness or infiniteness of some limits : it is consequently possible to replace it by some numerical field possessing the same basic properties. Computations will be performed in a number of representative cases, and heuristic analytical formulae representing the numerical results will be provided in order to cover all possible cases.

For deviatoric loadings, we shall adopt the same approach as in the work of [Madou and Leblond \(2012b\)](#) : instead of refining the limit-analysis like for hydrostatic loadings, we shall make direct use of [Ponte Castañeda \(1991\)](#)'s, [Willis \(1991\)](#)'s and [Michel and Suquet \(1992\)](#)'s general and rigorous bound for nonlinear composites, derived from the earlier work of [Willis \(1977\)](#) in the linear case and the concept of “linear comparison material”. Some coefficients of the yield function proposed will thus be simply fixed so as to match this bound, without any reference to any specific trial velocity field.

2.4 Determination of the linear form $\mathcal{L}(\boldsymbol{\Sigma})$

2.4.1 Preliminaries - definition of some parameters

We first ascribe a value to the dimensionless constant χ involved in the definition of the second porosity g . Just like [Madou and Leblond \(2012b\)](#), we adopt the value :

$$\chi \equiv \frac{3}{2} \bar{a} \bar{b}^2 L. \quad (2.47)$$

This definition ensures that for an *isotropic* material χ stays close to unity in all cases, see [Madou and Leblond \(2012a\)](#); this is expected to be also true for *anisotropic* materials, provided that the anisotropy remains moderate. This value of χ leads to the following expression of the second porosity (which stands as a natural extension to the “crack density parameter” introduced by [Budiansky and O'connell \(1976\)](#)) :

$$g \equiv \frac{\bar{a} \bar{b}^2}{\Omega}. \quad (2.48)$$

The variable w defined by equation (2.31) then takes the form

$$w \equiv \frac{2}{3(v + \bar{a}\bar{b}^2)}. \quad (2.49)$$

2.4.2 Generalities on the expression of κ

The coefficient κ appearing in the hyperbolic cosine of the approximate yield function (2.43) is connected to some “average value” \bar{F} of the function $F(w)$ “deriving” from Leblond and Gologanu (2008)’s velocity field $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$ through equation (2.32)₁. According to the definition (2.49) of w , the expression of $F(w)$ becomes :

$$F(w) \equiv \frac{3}{2}(v + \bar{a}\bar{b}^2) \sqrt{\langle d_{eq}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}} = \frac{3}{2} \frac{v + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega} \frac{\sqrt{\langle d_{eq}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}}{\text{tr } \mathbf{D}^0(\Lambda)} \quad (2.50)$$

where equation (A.14) of Appendix A.4 has been used ; this expression is independent of the “normalization factor” involved in the definition of $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$ because this velocity field appears through the ratio $\sqrt{\langle d_{eq}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}} / \text{tr } \mathbf{D}^0(\Lambda)$.

Finite element simulations are used instead of the analytic velocity field to obtain the *true* velocity field for an isotropic material and a hydrostatic loading. (The description of the numerical limit-analysis procedure can be found in Madou and Leblond (2012b)). Then the previous ratio is computed numerically through identification with the ratio $\langle \epsilon_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} / \text{tr } \mathbf{E}$ where $\epsilon_{eq}(\mathbf{r})$ and \mathbf{E} denote the final local equivalent strain and overall strain tensor. (The replacement of $\sqrt{\langle \epsilon_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}$ by $\langle \epsilon_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ here may seem to be an extra approximation, but in fact recovers the original expression of the overall plastic dissipation⁴, and thus *reduces* the error introduced by approximation \mathcal{A}_1).

The expression of the function $F(w)$ then becomes :

$$F(w) \equiv \frac{3}{2} \frac{v + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega} \frac{\langle \epsilon_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}}{\text{tr } \mathbf{E}}. \quad (2.51)$$

This expression of $F(w)$ depends on Hill’s coefficients of anisotropy since, by equation (8.9),

$$\langle \epsilon_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \left\langle \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) : \mathbb{B} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda}. \quad (2.52)$$

Since this expression depends in a complex way on the components of the Hill matrix \mathbb{B} , fully defining the function $F(w)$ numerically would require a very great number of finite element computations to cover a large range of materials. A more realistic approach consists in deriving an explicit expression of this function by linearising it with respect to the anisotropy coefficients. One may rewrite the expression of ϵ_{eq}^2 by splitting it into isotropic and anisotropic contributions :

$$\epsilon_{eq}^2 = \epsilon_{eq}^{iso\ 2} + \tilde{\epsilon}_{eq}^2, \quad \epsilon_{eq}^{iso\ 2} = \boldsymbol{\epsilon} : \mathbb{B}_{iso} : \boldsymbol{\epsilon}, \quad \tilde{\epsilon}_{eq}^2 = \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{b} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.53)$$

where \mathbb{B}_{iso} is given, in matrix form, by equation (A.6) of Appendix A.2, and \mathbf{b} is defined as :

$$\mathbf{b} = \mathbb{B} - \mathbb{B}_{iso}. \quad (2.54)$$

With these notations,

$$\epsilon_{eq}(\mathbf{r}) = \sqrt{\epsilon_{eq}^{iso\ 2}(\mathbf{r}) + \tilde{\epsilon}_{eq}^2(\mathbf{r})} = \epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r}) \sqrt{1 + \frac{\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) : \mathbf{b} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso\ 2}(\mathbf{r})}}. \quad (2.55)$$

We then introduce a final approximation :

4. To some extent only, since only hydrostatic loadings are envisaged here.

\mathcal{A}_4 : The equivalent strain $\epsilon_{eq}(\mathbf{r})$ may be replaced by the linearized approximation

$$\epsilon_{eq}(\mathbf{r}) \simeq \epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) : \mathbf{b} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})}. \quad (2.56)$$

Note that this expression depends linearly upon the coefficients of \mathbf{b} . The expression of the mean value of $\epsilon_{eq}(\mathbf{r})$ over the ellipsoid \mathcal{E}_λ then takes the form, by an equation similar to equation (A.19) of Appendix A.5 :

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{eq}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \langle \epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + \frac{1}{2} & \left[b_{11} \left\langle \frac{2\epsilon_1^2(\mathbf{r}) + \epsilon_2(\mathbf{r})\epsilon_3(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + b_{22} \left\langle \frac{2\epsilon_2^2(\mathbf{r}) + \epsilon_1(\mathbf{r})\epsilon_3(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \right. \\ & + b_{33} \left\langle \frac{2\epsilon_3^2(\mathbf{r}) + \epsilon_1(\mathbf{r})\epsilon_2(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + b_{44} \left\langle \frac{\epsilon_4^2(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ & \left. + b_{55} \left\langle \frac{\epsilon_5^2(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + b_{66} \left\langle \frac{\epsilon_6^2(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

so that, by equation (2.51),

$$F(w) = F_{iso}(w) + b_{11}F_1(w) + b_{22}F_2(w) + b_{33}F_3(w) + b_{44}F_4(w) + b_{55}F_5(w) + b_{66}F_6(w) \quad (2.58)$$

where

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{iso}(w) \equiv \frac{3}{2} \frac{v + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega \operatorname{tr} \mathbf{E}} \langle \epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ F_1(w) \equiv \frac{3}{4} \frac{v + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega \operatorname{tr} \mathbf{E}} \left\langle \frac{2\epsilon_1^2(\mathbf{r}) + \epsilon_2(\mathbf{r})\epsilon_3(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ F_2(w) \equiv \frac{3}{4} \frac{v + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega \operatorname{tr} \mathbf{E}} \left\langle \frac{2\epsilon_2^2(\mathbf{r}) + \epsilon_1(\mathbf{r})\epsilon_3(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ F_3(w) \equiv \frac{3}{4} \frac{v + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega \operatorname{tr} \mathbf{E}} \left\langle \frac{2\epsilon_3^2(\mathbf{r}) + \epsilon_1(\mathbf{r})\epsilon_2(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ F_4(w) \equiv \frac{3}{4} \frac{v + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega \operatorname{tr} \mathbf{E}} \left\langle \frac{\epsilon_4^2(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ F_5(w) \equiv \frac{3}{4} \frac{v + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega \operatorname{tr} \mathbf{E}} \left\langle \frac{\epsilon_5^2(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ F_6(w) \equiv \frac{3}{4} \frac{v + \bar{a}\bar{b}^2}{\Omega \operatorname{tr} \mathbf{E}} \left\langle \frac{\epsilon_6^2(\mathbf{r})}{\epsilon_{eq}^{iso}(\mathbf{r})} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \end{array} \right. \quad (2.59)$$

Just like in the isotropic case, the argument w of the functions F_i is of dimension $(\text{length})^{-3}$; in order to search approximate expressions of these functions, it is preferable to consider them as functions of some dimensionless variable. Following Madou and Leblond (2012b) we thus set :

$$F_i(w) \equiv \tilde{F}_i(\tilde{w}) \quad , \quad \tilde{w} \equiv \frac{3}{2} \frac{\bar{a}^3}{v + \bar{a}\bar{b}^2} = \frac{\bar{a}^3}{v + k^2\bar{a}^3}. \quad (2.60)$$

Also, the functions $F_i(w)$ will be plotted versus the eccentricity

$$\epsilon_{xz}(\lambda) \equiv \epsilon_{xz} \equiv \frac{\bar{a}}{\sqrt{a^2 + \lambda}} \quad (2.61)$$

of the ellipsoidal surface \mathcal{E}_λ in the Oxz plane, or some power of this parameter, rather than versus w or \tilde{w} ; this will be convenient since the extremal values of ϵ_{xz} (0 and 1) are finite and independent of k .

In a first approximation, the functions F_i depend on the sole geometric parameter k ; see [Madou and Leblond \(2012a\)](#). Numerical computations of these functions will be provided for various values of k in order to propose heuristic approximate expressions, so as to cover a large range of ellipsoidal geometries. The task will be made easier by the fact that the functions F_{iso} and F_i verify the following obvious relation :

$$F_{iso}(w) = \frac{8}{9}[F_1(w) + F_2(w) + F_3(w)] + \frac{2}{3}[F_4(w) + F_5(w) + F_6(w)]. \quad (2.62)$$

As a consequence, only five of these functions need be determined; the last one may be deduced from equation (2.62) and the expression of $F_{iso}(w)$ proposed by [Madou and Leblond \(2012a\)](#).

2.4.3 Prolate spheroidal case

Numerical values of the functions $F_i^{prol}(w)$ corresponding to the prolate case ($k = 0$) are represented in Fig. 2.1, for a cell with semi-axes in the proportions 5 : 1 : 1 and different porosities $f = 0.001, 0.005$ and 0.02 . The functions corresponding to the following approximate formulae are also plotted here :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{iso}^{prol}(w) = \tilde{F}_{iso}^{prol}(\tilde{w}) = 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{\tilde{w}}{\tilde{w} + 11/5} \\ F_1^{prol}(w) = \tilde{F}_1^{prol}(\tilde{w}) = \frac{9}{8}F_{iso}^{prol}(w) - F_2^{prol}(w) - F_3^{prol}(w) \\ \quad - \frac{3}{4}[F_4^{prol}(w) + F_5^{prol}(w) + F_6^{prol}(w)] \\ F_2^{prol}(w) = F_3^{prol}(w) = \tilde{F}_2^{prol}(\tilde{w}) = \frac{3}{20} - \left(\frac{3}{20} - \frac{3\sqrt{3}}{16}\right) \frac{\tilde{w}}{\tilde{w} + 3/2} \\ F_4^{prol}(w) = F_5^{prol}(w) = \tilde{F}_4^{prol}(\tilde{w}) = \frac{3}{10} - \frac{3}{10} \frac{\tilde{w}}{\tilde{w} + 11/5} \\ F_6^{prol}(w) = \tilde{F}_6^{prol}(\tilde{w}) = \frac{3}{10} - \left(\frac{3}{10} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \frac{\tilde{w}}{\tilde{w} + 3/2} \end{array} \right. \quad (2.63)$$

where the expression of $F_{iso}^{prol}(w)$ is taken from [Madou and Leblond \(2012b\)](#). Note that these expressions go to the right limits, deduced from the asymptotic studies presented in Appendix A.5, when the surface \mathcal{E}_λ becomes a large sphere ($\tilde{w} \rightarrow 0$) and a small cylinder ($\tilde{w} \rightarrow +\infty$).

It may be observed that equations (2.63) provide a good approximation of the numerical results, including their almost complete lack of dependence upon the porosity.

2.4.4 Oblate spheroidal case

Numerical values of the functions $F_i^{obl}(w)$ pertaining to the oblate case ($k = 1$) are represented in Fig. 2.2, for a cell with semi-axes in the proportions 5 : 5 : $\frac{1}{5}$ and different porosities $f = 0.001, 0.005$,

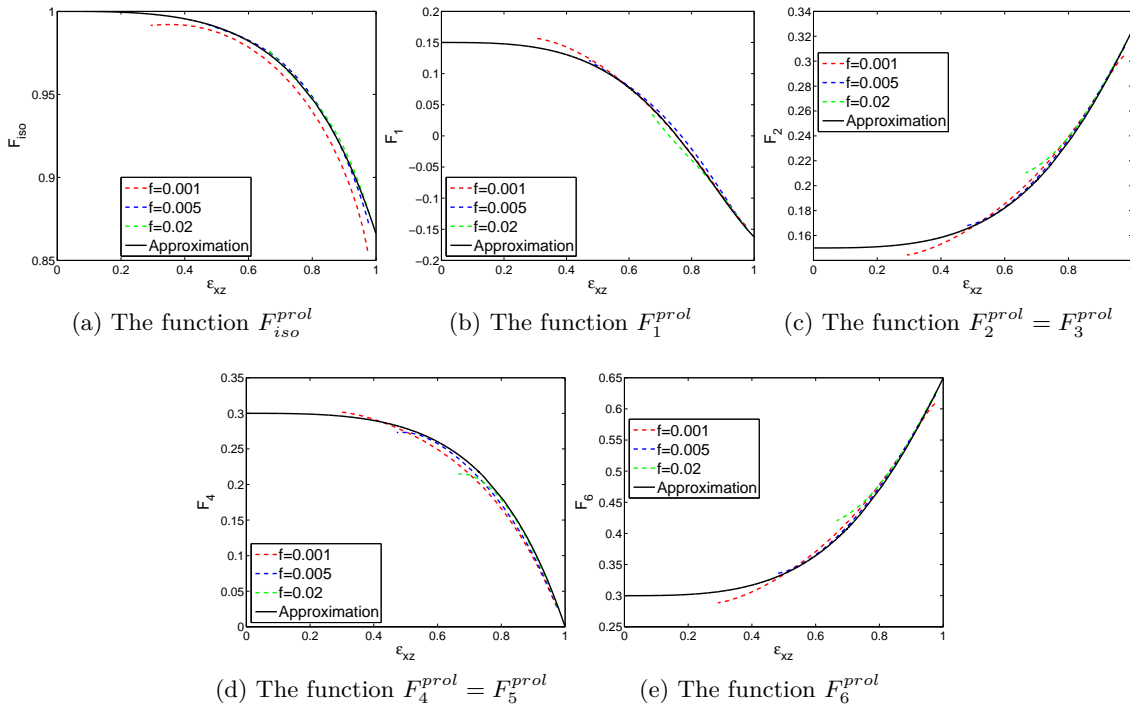


FIGURE 2.1: The functions $F_i^{prol}(w)$ for different porosities - Numerical results and approximate formulae.

0.02 and 0.05. The functions defined by the following approximate formulae are also plotted :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 F_{iso}^{obl}(w) = \tilde{F}_{iso}^{obl}(\tilde{w}) = 1 + \frac{13}{10}\tilde{w} - \frac{3}{2}\tilde{w}^5 \\
 F_1^{obl}(w) = F_2^{obl}(w) = \tilde{F}_1^{obl}(\tilde{w}) = \frac{9}{16}F_{iso}^{obl}(w) - \frac{1}{2}F_3^{obl}(w) \\
 \quad - \frac{3}{8}[F_4^{obl}(w) + F_5^{obl}(w) + F_6^{obl}(w)] \\
 F_3^{obl}(w) = \tilde{F}_3^{obl}(\tilde{w}) = \frac{3}{20} + \frac{3}{10}\tilde{w} + \frac{1}{4}\tilde{w}^2 + 6\tilde{w}^3 - \frac{25}{4}\tilde{w}^4 \\
 F_4^{obl}(w) = \tilde{F}_4^{obl}(\tilde{w}) = \frac{3}{10} + \frac{31}{20}\tilde{w} - \frac{69}{10}\tilde{w}^2 + \frac{83}{10}\tilde{w}^3 - \frac{31}{10}\tilde{w}^4 \\
 F_5^{obl}(w) = F_6^{obl}(w) = \tilde{F}_5^{obl}(\tilde{w}) = \frac{3}{10} + \frac{3}{5}\tilde{w} - \frac{13}{20}\tilde{w}^5
 \end{array} \right. \quad (2.64)$$

where the expression of $F_{iso}^{obl}(w)$ is taken from [Madou and Leblond \(2012b\)](#). Like before, the influence of the porosity upon the numerical results can be neglected even if it is more pronounced than in the prolate case, and the approximate formulae reproduce these results reasonably well. (The error made on the function $F_1^{obl} = F_2^{obl}$ may seem relatively large in [Figure 2.2b](#), but is in fact unimportant since this function is small anyway).

Note that some discrepancies are observed for the functions F_i^{obl} for high porosities ($f = 0.02$ and $f = 0.05$), emphasizing that the criterion is not suitable for such cases. This is not a problem since void growth models are not suitable anyway for ductile porous metals at high porosities since in practice void growth gives way to void coalescence.

2.4.5 General ellipsoidal case

We now consider the general ellipsoidal case, and more specifically voids having the same ratio ω/a^3 as in the previous oblate and prolate cases, but various values of k and f . Numerical results are

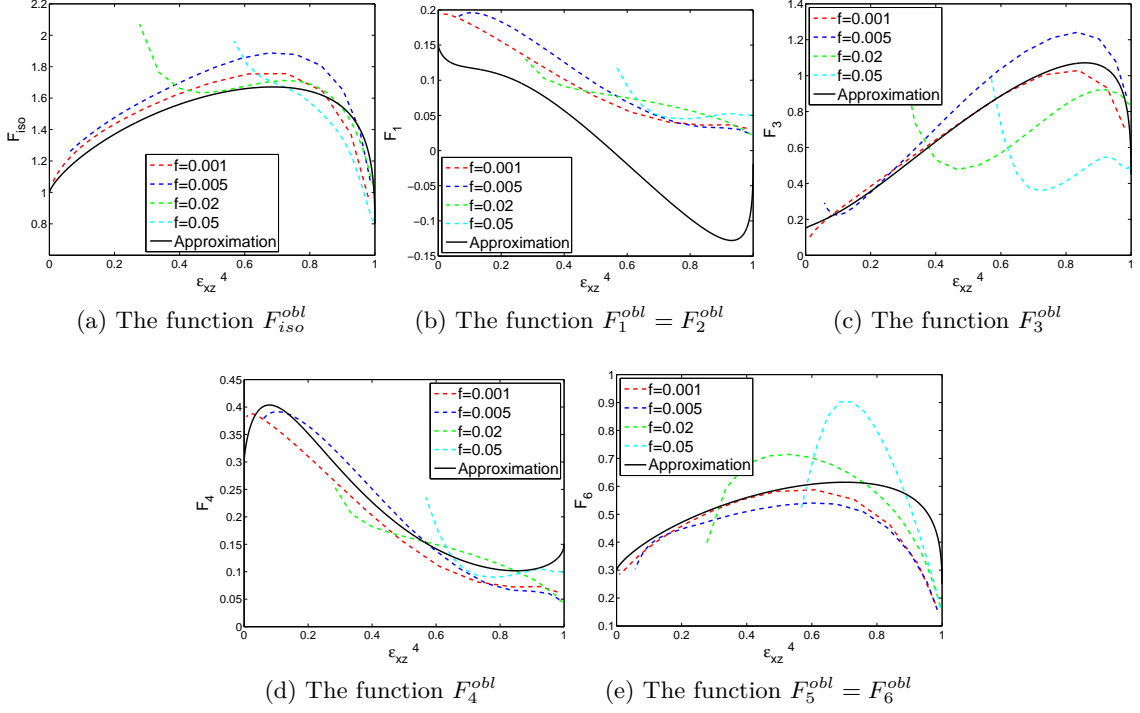


FIGURE 2.2: The functions $F_i^{obl}(w)$ for different porosities - Numerical results and approximate formulae

plotted in Fig. 2.3 for different values of k and a porosity $f = 0.005$, and in Fig. 2.4 for $k = 0.6$ and various porosities. The influence of the porosity may again be observed to be minor.

As shown by Madou and Leblond (2012b), a boundary layer exists in the graphs of the functions $F_1(w)$, $F_2(w)$, $F_3(w)$ and $F_6(w)$. This is due to the property :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\tilde{w} \rightarrow 1/k^2} \tilde{F}_i(k; \tilde{w}) \neq \lim_{\tilde{w} \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow 0} \tilde{F}_i(k; \tilde{w}) \quad (i = 1, 2, 3, 6) \quad (2.65)$$

As a consequence, it is not possible to provide approximate analytical formulae for the $F_i(w)$ in the form of simple interpolations between the prolate and oblate cases. More complex formulae are proposed and plotted in Fig. 2.5 and compared to the numerical results for $f = 0.005$:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{iso}(w) = \tilde{F}_{iso}(\tilde{w}) = (1-k)\tilde{F}_{iso}^{prol}(\tilde{w}) + k\tilde{F}_{iso}^{obl}(k^2\tilde{w}) + k^2(1-k)^2 \frac{3\tilde{w}}{8-5k^2\tilde{w}} \\ F_1(w) = \tilde{F}_1(\tilde{w}) = \frac{9}{8}F_{iso}(w) - F_2(w) - F_3(w) - \frac{3}{4}[F_4(w) + F_5(w) + F_6(w)] \\ F_2(w) = \tilde{F}_2(\tilde{w}) = (1-k)\tilde{F}_2^{prol}(\tilde{w}) + k\tilde{F}_2^{obl}(k^2\tilde{w}) + k^2(1-k)^2 \frac{3\tilde{w}}{11-5k^2\tilde{w}} \\ F_3(w) = \tilde{F}_3(\tilde{w}) = (1-k)\tilde{F}_3^{prol}(\tilde{w}) + k\tilde{F}_3^{obl}(k^2\tilde{w}) + k^2(1-k)^2 \frac{3\tilde{w}}{12-5k^2\tilde{w}} \\ F_4(w) = \tilde{F}_4(\tilde{w}) = (1-k)\tilde{F}_4^{prol}(\tilde{w}) + k\tilde{F}_4^{obl}(k^2\tilde{w}) \\ F_5(w) = \tilde{F}_5(\tilde{w}) = (1-k)\tilde{F}_5^{prol}(\tilde{w}) + k\tilde{F}_5^{obl}(k^2\tilde{w}) \\ F_6(w) = \tilde{F}_6(\tilde{w}) = (1-k)\tilde{F}_6^{prol}(\tilde{w}) + k\tilde{F}_6^{obl}(k^2\tilde{w}) + k^2(1-k) \frac{3\tilde{w}}{4-k^2\tilde{w}} \end{array} \right. \quad (2.66)$$

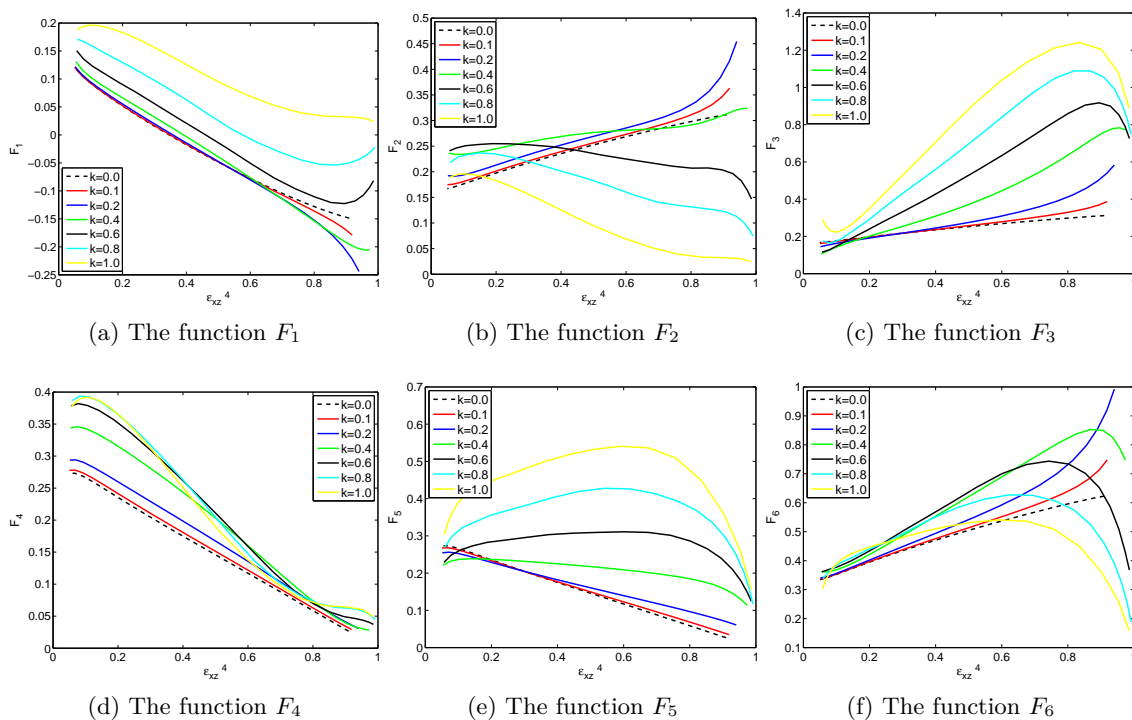


FIGURE 2.3: Numerical values of the functions F_i for different values of k and $f = 0.005$.

The homographic functions of \tilde{w} in the expressions of F_1, F_2, F_3, F_6 account for the boundary layer. The formulae proposed provide acceptable approximations of the numerical results, with an error comparable to that resulting from the neglect of the influence of the porosity ; see Fig. 2.4.

2.4.6 Expression of the coefficient κ

The coefficient κ is connected to some “average value” \bar{F} of the function $F(w)$, itself related to average values \bar{F}_i of the functions $F_i(w)$. The definition of these average values has been discussed by [Madou and Leblond \(2012b\)](#). Following their conclusion, we define them by the formula

$$\int_{\tilde{w}_{\min}}^{\tilde{w}_{\max}} \tilde{F}_i(\tilde{w}) \frac{d\tilde{w}}{\tilde{w}} = \int_{\tilde{w}_{\min}}^{\tilde{w}_{\max}} \bar{F}_i \frac{d\tilde{w}}{\tilde{w}} \quad \text{where} \quad \tilde{w}_{\min} = \frac{g}{k^2(1+g)}, \quad \tilde{w}_{\max} = \frac{g}{k^2(f+g)}, \quad (2.67)$$

or equivalently by

$$\bar{F}_i \equiv \frac{1}{\ln(\tilde{w}_{\max}/\tilde{w}_{\min})} \int_{\tilde{w}_{\min}}^{\tilde{w}_{\max}} \tilde{F}_i(\tilde{w}) \frac{d\tilde{w}}{\tilde{w}}. \quad (2.68)$$

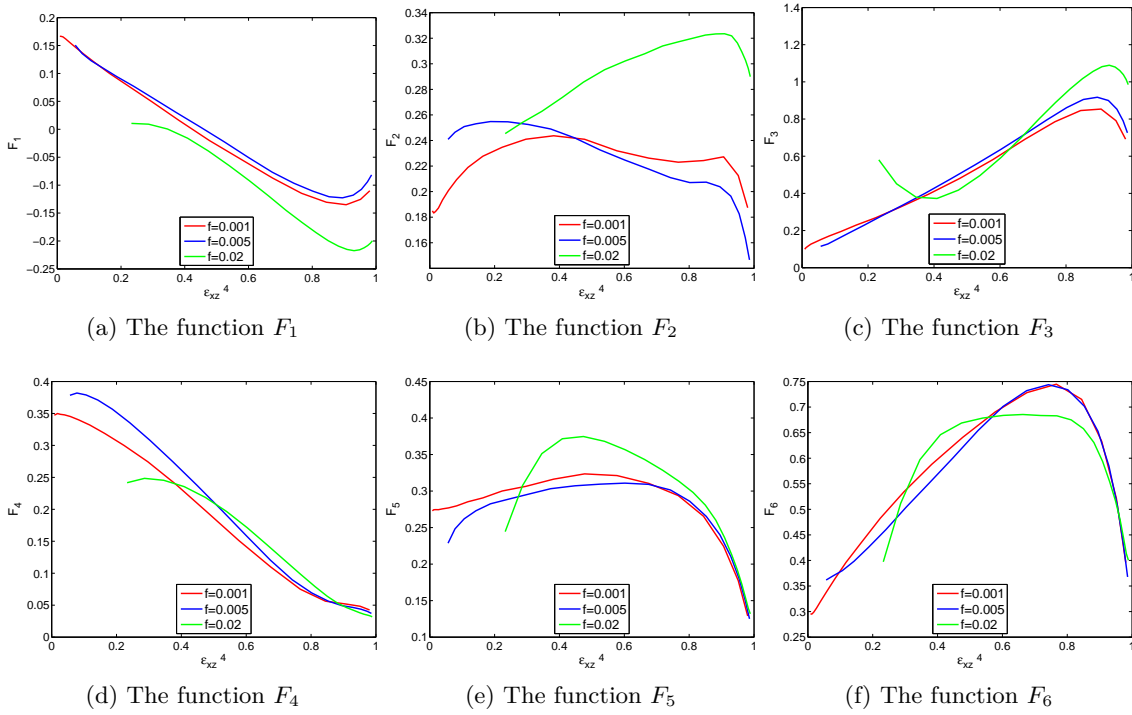


FIGURE 2.4: Numerical values of the functions F_i for $k = 0.6$ and various porosities.

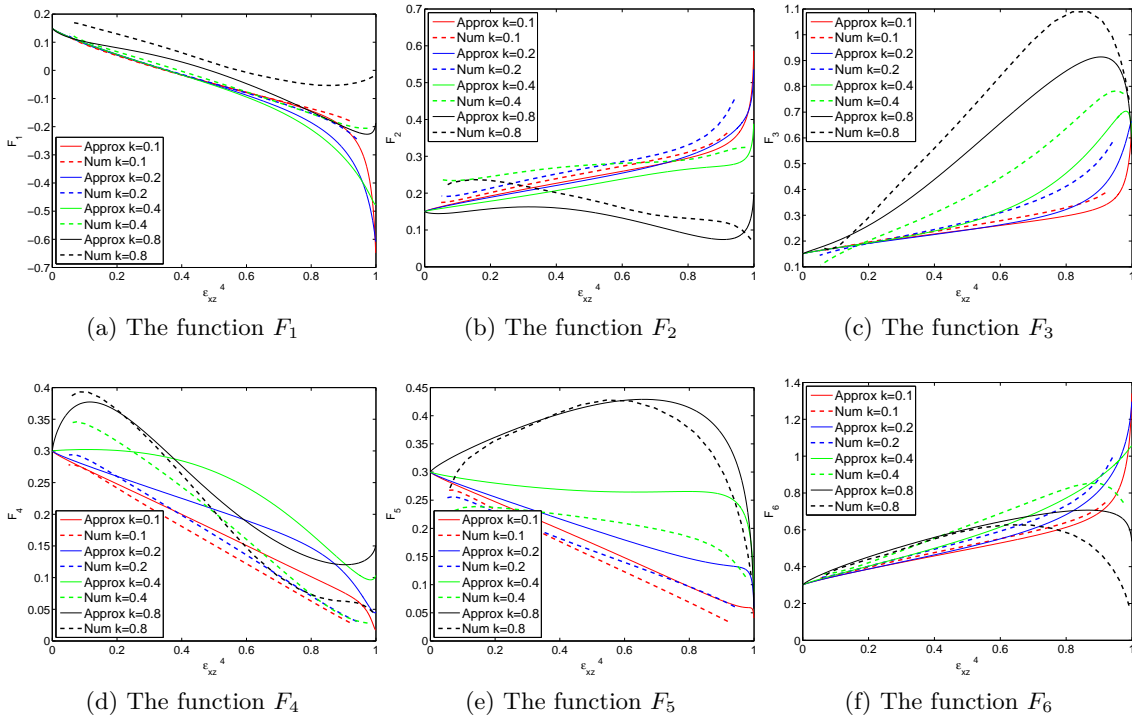


FIGURE 2.5: The functions F_i for $f = 0.005$ - Numerical results and approximate formulae.

Calculations of the various integrals yields :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \bar{F}_{iso} &= 1 + \frac{1}{\ln(g_f/g_1)} \left[(k-1) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \ln \left(\frac{11k^2 + 5g_f}{11k^2 + 5g_1} \right) + \frac{3}{5}(1-k)^2 \ln \left(\frac{8-5g_1}{8-5g_f} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{13}{10}k(g_f - g_1) - \frac{3}{10}k(g_f^5 - g_1^5) \right] \\
 \bar{F}_1 &= \frac{9}{8}\bar{F}_{iso} - \bar{F}_2 - \bar{F}_3 - \frac{3}{4}(\bar{F}_4 + \bar{F}_5 + \bar{F}_6) \\
 \bar{F}_2 &= \frac{3}{20} + \frac{1}{\ln(g_f/g_1)} \left[(k-1) \left(\frac{3}{20} - \frac{3\sqrt{3}}{16} \right) \ln \left(\frac{3k^2 + 2g_f}{3k^2 + 2g_1} \right) + \frac{3}{5}(1-k)^2 \ln \left(\frac{11-5g_1}{11-5g_f} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{9}{20}k(g_f - g_1) + \frac{197}{160}k(g_f^2 - g_1^2) - \frac{489}{240}k(g_f^3 - g_1^3) + \frac{343}{320}k(g_f^4 - g_1^4) - \frac{57}{800}k(g_f^5 - g_1^5) \right] \\
 \bar{F}_3 &= \frac{3}{20} + \frac{1}{\ln(g_f/g_1)} \left[(k-1) \left(\frac{3}{20} - \frac{3\sqrt{3}}{16} \right) \ln \left(\frac{3k^2 + 2g_f}{3k^2 + 2g_1} \right) + \frac{3}{5}(1-k)^2 \ln \left(\frac{12-5g_1}{12-5g_f} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{10}k(g_f - g_1) + \frac{1}{8}k(g_f^2 - g_1^2) + 2k(g_f^3 - g_1^3) - \frac{25}{16}k(g_f^4 - g_1^4) \right] \\
 \bar{F}_4 &= \frac{3}{10} + \frac{1}{\ln(g_f/g_1)} \left[\frac{3}{10}(k-1) \ln \left(\frac{11k^2 + 5g_f}{11k^2 + 5g_1} \right) + \frac{31}{20}k(g_f - g_1) - \frac{69}{20}k(g_f^2 - g_1^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{83}{30}k(g_f^3 - g_1^3) - \frac{31}{40}k(g_f^4 - g_1^4) \right] \\
 \bar{F}_5 &= \frac{3}{10} + \frac{1}{\ln(g_f/g_1)} \left[\frac{3}{10}(k-1) \ln \left(\frac{11k^2 + 5g_f}{11k^2 + 5g_1} \right) + \frac{3}{5}k(g_f - g_1) - \frac{13}{100}k(g_f^5 - g_1^5) \right] \\
 \bar{F}_6 &= \frac{3}{10} + \frac{1}{\ln(g_f/g_1)} \left[(k-1) \left(\frac{3}{10} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \ln \left(\frac{3k^2 + 2g_f}{3k^2 + 2g_1} \right) + 3(1-k) \ln \left(\frac{4-g_1}{4-g_f} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{5}k(g_f - g_1) - \frac{13}{100}k(g_f^5 - g_1^5) \right]
 \end{aligned} \right. \tag{2.69}$$

where

$$g_1 \equiv \frac{g}{1+g} \quad ; \quad g_f \equiv \frac{g}{f+g} . \tag{2.70}$$

The coefficient κ is then given by equation (2.45)₂ where, by equation (2.58),

$$\bar{F} = \bar{F}_{iso} + b_{11}\bar{F}_1 + b_{22}\bar{F}_2 + b_{33}\bar{F}_3 + b_{44}\bar{F}_4 + b_{55}\bar{F}_5 + b_{66}\bar{F}_6 . \tag{2.71}$$

2.4.7 Coefficients H_x, H_y, H_z

The coefficients H_x, H_y and H_z are defined through equation (2.45), in exactly the same way as in the isotropic case. [Madou and Leblond \(2012b\)](#)'s formulae for these coefficients will therefore be used, see Section 2.6 below.

2.5 Determination of the quadratic form $\mathcal{Q}(\Sigma)$

The determination of the quadratic form $\mathcal{Q}(\Sigma)$ will follow the same lines as in the isotropic case ([Madou and Leblond, 2012b](#)). Limit-analysis is dropped, and the quadratic form $\mathcal{Q}(\Sigma)$ is adjusted so

as to match some rigorous bound for nonlinear composites, specialized to the case of plastic porous materials.

The approximate yield criterion associated to this bound is written in the form :

$$\Phi^B(\boldsymbol{\Sigma}) \equiv \frac{\mathcal{Q}^B(\boldsymbol{\Sigma})}{\sigma_0^2} - (1-f)^2 = 0 \quad (2.72)$$

where $\Phi^B(\boldsymbol{\Sigma})$ is some quadratic form of $\boldsymbol{\Sigma}$.

Since classical quadratic bounds are known to provide accurate results for deviatoric loadings only, we shall enforce coincidence of the yield functions $\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$ and $\Phi^B(\boldsymbol{\Sigma})$ for low values of the stress Σ_h defined by equation (2.45)₃. Now up to second order in Σ_h/σ_0 ,

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\Sigma}) &= \frac{\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma})}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(f+g) \left(1 + \frac{\kappa^2 \Sigma_h^2}{2\sigma_0^2} \right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 + O \left[\left(\frac{\Sigma_h}{\sigma_0} \right)^4 \right] \\ &= \frac{1}{\sigma_0^2} \left[\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma}) + (1+g)(f+g)\kappa^2 \Sigma_h^2 \right] - (1-f)^2 + O \left[\left(\frac{\Sigma_h}{\sigma_0} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Coincidence of the right-hand sides of equations (2.72) and (2.73) requires that

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma}) \equiv \mathcal{Q}^B(\boldsymbol{\Sigma}) - (1+g)(f+g)\kappa^2 \Sigma_h^2. \quad (2.74)$$

This equation holds whatever the “reference bound” chosen. In practice, however, the choice is made of the so-called “nonlinear Willis” bound (Willis, 1977; Ponte Castañeda, 1991; Willis, 1991; Michel and Suquet, 1992), which, as explained in Madou and Leblond (2012b), represents a reasonable compromise between simplicity and realism. Elements on this bound are provided in Appendix A.6.

2.6 Summary

A summary of all equations defining the approximate criterion proposed is now provided.

The material is rigid-ideal-plastic and obeys an orthotropic yield criterion (see equations (2.12) and (2.16)), together with the associated flow rule. The void is ellipsoidal, with semi-axes a, b, c ($a > b > c$) parallel to the directions x, y, z ; the porosity is denoted f .

2.6.1 Geometric parameters

* Semi-axes of the outer ellipsoidal representative cell :

$$A = \sqrt{a^2 + \Lambda} \quad ; \quad B = \sqrt{b^2 + \Lambda} \quad ; \quad C = \sqrt{c^2 + \Lambda}$$

where Λ is the unique positive solution of the equation

$$(a^2 + \Lambda)(b^2 + \Lambda)(c^2 + \Lambda) - \frac{a^2 b^2 c^2}{f^2} = 0.$$

* Semi-axes and shape parameter of the completely flat confocal ellipsoid :

$$\bar{a} = \sqrt{a^2 - c^2} \quad ; \quad \bar{b} = \sqrt{b^2 - c^2} \quad ; \quad (\bar{c} = 0) \quad ; \quad k = \frac{\bar{b}}{\bar{a}}.$$

* Second porosity and related quantities :

$$g = \frac{\bar{a}\bar{b}^2}{ABC} \quad ; \quad g_1 = \frac{g}{1+g} \quad ; \quad g_f = \frac{g}{f+g}.$$

* Eccentricity of the outer ellipsoid in the xz -plane :

$$E_{xz} = \frac{\bar{a}}{A}.$$

2.6.2 Yield criterion

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma})}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(f+g) \cosh \left[\frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{\Sigma})}{\sigma_0} \right] - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0.$$

2.6.3 Linear form $\mathcal{L}(\boldsymbol{\Sigma})$

* Connection to other quantities :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Sigma}) = \kappa \Sigma_h, \quad \kappa \equiv \frac{3}{2\bar{F}}, \quad \Sigma_h \equiv H_x \Sigma_{xx} + H_y \Sigma_{yy} + H_z \Sigma_{zz}.$$

* Expression of \bar{F} :

$$\bar{F} = \bar{F}_{iso} + b_{11}\bar{F}_1 + b_{22}\bar{F}_2 + b_{33}\bar{F}_3 + b_{44}\bar{F}_4 + b_{55}\bar{F}_5 + b_{66}\bar{F}_6$$

where the b_{ij} are the anisotropy coefficients of the material in the principal basis of the void, defined by equation (2.54), and the mean values \bar{F}_{iso} and \bar{F}_i are given by equations (2.69).

* Expressions of H_x, H_y, H_z (taken from the work of Madou and Leblond (2012b)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = (1-k^2) H_x^{\text{prol}} + k^2 H_x^{\text{obl}}, \quad H_x^{\text{prol}} = 1 - 2H_y^{\text{prol}}, \quad H_x^{\text{obl}} = H_y^{\text{obl}} \\ H_y = (1-k) H_y^{\text{prol}} + k H_y^{\text{obl}} + \frac{1}{2}(1-k) \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \frac{E_{xz}^{3/2} (1 - \alpha - E_{xz})}{(1 - \alpha - E_{xz})^2 + \beta^2}, \\ \alpha = \frac{4k^2}{1 + 9k^2}, \quad \beta = \frac{3k^2}{1 + 30k^2} \\ H_z = 1 - H_x - H_y \end{array} \right.$$

where

$$H_y^{\text{prol}} = \frac{1}{3} \left(1 + E_{xz}^2 - \frac{E_{xz}^4}{2} \right); \quad H_y^{\text{obl}} = \frac{1}{3} \frac{2 - 7E_{xz}^2 + 5E_{xz}^4}{2 - 7E_{xz}^2 + 10E_{xz}^4}.$$

2.6.4 Quadratic form $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma})$

* Connection to Willis's quadratic form $\mathcal{Q}^W(\boldsymbol{\Sigma})$:

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{\Sigma}) \equiv \mathcal{Q}^W(\boldsymbol{\Sigma}) - (1+g)(f+g)\kappa^2 \Sigma_h^2.$$

* Expression of Willis's quadratic form $\mathcal{Q}^W(\boldsymbol{\Sigma})$: see Appendix A.6.

2.7 Numerical assessment of the criterion

The criterion has been numerically assessed using the finite element method (see Madou and Leblond (2012b); Morin et al. (2014) for a description of the method). We just show here results for a typical case, postponing a full exposition of the topic to some future paper.

The case investigated is that of an ellipsoidal cell containing a confocal ellipsoidal void, with semi-axes in the proportions 10 : 5 : 1 and a porosity $f = 0.01$. The principal axes of the cavity and those of material orthotropy are assumed to coincide. Table 3.1 provides the values of the components of the Hill tensor \mathbb{A} taken from Benzerga (2000), together with the ‘‘isotropic’’ values corresponding to a von Mises material for comparison. Axisymmetric loadings $\{\Sigma_1 = \Sigma_2 \neq \Sigma_3\}$, $\{\Sigma_1 = \Sigma_3 \neq \Sigma_2\}$ and $\{\Sigma_2 = \Sigma_3 \neq \Sigma_1\}$ ($\Sigma_4 = \Sigma_5 = \Sigma_6 = 0$) are considered.

TABLE 2.1: Values of Hill's anisotropy coefficients

Material	A_{11}	A_{22}	A_{33}	A_{12}	A_{13}	A_{23}	A_{44}	A_{55}	A_{66}
Isotropic	1	1	1	-0.5	-0.5	-0.5	3	3	3
Anisotropic	0.9855	0.87	0.921	-0.4673	-0.5182	-0.4028	3.288	10.8675	10.494

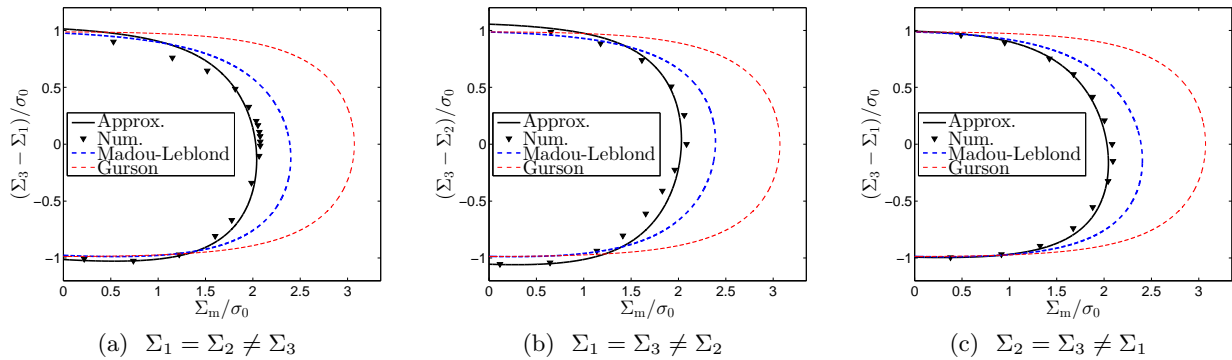


FIGURE 2.6: Yield loci for a void with semi-axes in the proportions 10 : 5 : 1 and a porosity $f = 0.01$ - Approximate criterion proposed (Approx.), numerical results (Num.), Madou and Leblond (2012a,b)’s criterion (Madou-Leblond) and Gurson (1977)’s criterion (Gurson).

Figure 2.6 compares the numerical results obtained by the finite element method (black triangles) to the approximate criterion summarized in Section 2.6 (black lines). Gurson (1977)’s criterion, for a spherical cell and an isotropic material, and Madou and Leblond (2012a,b)’s criterion for the ellipsoidal cell considered but an isotropic material, are also plotted (respectively in red dotted lines and blue dotted lines), in order to highlight the influence of void shape and plastic anisotropy.

The approximate criterion proposed successfully reproduces the numerical results. Comparisons with Gurson (1977)’s and Madou and Leblond (2012a,b)’s criteria evidence a complex coupling between void shape effects and plastic anisotropy, which is well captured by the criterion proposed.

Note that even though some fitting was involved in the derivation of the model, the comparisons in Fig. 2.6 represent a true assessment of the model; indeed, the fitting has been performed once and for all in order to obtain only the true velocity field for an *isotropic material* and a *hydrostatic loading*, so that the good agreement just evidenced for more general cases does not automatically follow.

It is also worth noting that the value of the parameter characterizing the magnitude of the anisotropy defined by equation (A.10) of Appendix A.3 is $\gamma = 0.4626$ for this material, which cannot be considered as moderate. The very good agreement observed between the criterion and the numerical results reveals that the criterion can also probably be suitable if the anisotropy is not really moderate.

2.8 Conclusion

The purpose of this work was to define a new macroscopic criterion for porous ductile metals, incorporating the effects of both void shape and material anisotropy, by considering general ellipsoidal voids embedded in a Hill matrix, thus extending previous works of Gurson (1977), Gologanu et al. (1993, 1994, 1997), Benzerga and Besson (2001), Monchiet et al. (2008), Keralavarma and Benzerga (2010) and Madou and Leblond (2012a,b).

An approximate criterion was obtained by performing a limit-analysis of some representative ellipsoidal cell made of a rigid-ideal-plastic Hill material and containing a confocal ellipsoidal void. Classical conditions of homogeneous boundary strain rate were considered. Possible approximations were deduced from asymptotic studies of the microscopic dissipation both close to and far from the voids’s boundary, and were shown to lead to an analytic yield criterion, the coefficients of which were not fully determined at this stage.

The coefficients pertaining to the influence of the hydrostatic part of the overall stress tensor were determined by using numerical finite-element-based limit-analysis; heuristic approximate formulae were proposed for these coefficients so as to match the numerical results.

In order to determine the remaining coefficients pertaining to the influence of the deviatoric part of the overall stress tensor, limit-analysis was dropped and the criterion proposed was simply required

to match, for low triaxialities, the so-called “Willis bound” applicable to nonlinear composites.

A brief assessment of the criterion derived has been provided for a general ellipsoidal cavity embedded in an anisotropic matrix, using again finite-element-based limit-analysis. The complex coupling between void shape effects and plastic anisotropy is well captured in the case considered by the approximate criterion proposed, which successfully reproduces the numerical results.

The definition of the proposed criterion is complete at this stage but other developments, left to a future paper, are still needed to qualify and complete the model :

1. A complete numerical assessment of the criterion in a number of representative cases will be required to validate it. In particular, the influence of the void shape (spheroids⁵, cracks, cylinders and general ellipsoids), porosity, plastic anisotropy and orientation of the voids will be studied in order to properly investigate the complex coupling between void shape and plastic anisotropy.
2. The next task will then be to define suitable evolution equations for the internal parameters characterizing the shape and orientation of the voids. The use of numerical simulations will be decisive to extend [Madou et al. \(2013\)](#)’s heuristic approach for isotropic materials to anisotropic ones.

5. Comparisons with existing criteria ([Monchiet et al., 2008](#); [Keralavarma and Benzerga, 2010](#)) will also permit to assess the proposed criterion.

Etude numérique de milieux anisotropes contenant des vides ellipsoïdaux : critère de plasticité macroscopique et équations d'évolution des paramètres internes

Ce chapitre a pour objectif l'étude numérique de matériaux poreux anisotropes contenant des cavités ellipsoïdales générales. Dans un premier temps, nous déterminons numériquement les surfaces de charge associées à ces matériaux en utilisant une technique d'analyse limite numérique des matériaux de Hill basée sur la méthode des éléments finis. Ces résultats permettent de valider le critère de plasticité macroscopique dérivé au chapitre 2. Les calculs numériques permettent aussi d'étudier la loi d'écoulement macroscopique associée au critère théorique. Enfin, nous étudions numériquement la déformation et la rotation d'une cavité ellipsoïdale dans un milieu anisotrope ; ces études numériques jouent un rôle déterminant dans l'extension des lois d'évolution de ces quantités dans le cas isotrope (Madou et al., 2013) au cas anisotrope.

3.1 Introduction

Au chapitre 2, nous avons dérivé un critère de plasticité macroscopique pour des matériaux anisotropes contenant des cavités ellipsoïdales générales, en étendant les critères de Madou and Leblond (2012a,b) pour des matériaux isotropes contenant des vides ellipsoïdaux, et de Monchiet et al. (2008); Keralavarma and Benzerga (2010) pour des matériaux anisotropes contenant des vides sphéroïdaux. Dans l'objectif de formuler un modèle complet de rupture ductile pour des matériaux anisotropes contenant des vides ellipsoïdaux, nous devons valider le critère dérivé précédemment et également le compléter. La première étape consiste à étudier numériquement le critère de plasticité macroscopique dans un certain nombre de cas géométriquement représentatifs, par analyse limite numérique (voir Morin et al. (2014) et l'annexe E) ; la validation des surfaces de charge ainsi que de la loi d'écoulement est en effet déterminante avant de pouvoir utiliser le critère. Enfin, nous étudions numériquement les lois d'évolution des paramètres internes du modèle, la longueur et l'orientation des axes des cavités. Les résultats numériques permettent d'étendre l'approche heuristique de Madou et al. (2013) développée dans le cas isotrope au cas anisotrope.

Le plan du chapitre est le suivant :

- Les surfaces de charge du critère dérivé au chapitre 3 sont validées numériquement dans la section 3.2 à l'aide d'analyses limites numériques réalisées par la méthode des éléments finis pour un grand nombre de cas géométriques.
- La loi d'écoulement macroscopique est ensuite étudiée dans la section 3.3.
- La section 3.4 est enfin consacrée à l'étude des lois d'évolution de la déformation et de la rotation d'une cavité ellipsoïdale dans un milieu plastique anisotrope.

3.2 Etude des surfaces de charge macroscopiques

3.2.1 Généralités

Dans un premier temps, nous souhaitons valider le critère de plasticité pour matériaux anisotropes et vides ellipsoïdaux obtenu dans le chapitre précédent. Les surfaces de charge numériques sont déterminées par une technique d'analyse limite numérique basée sur la méthode des éléments finis. Les détails de la méthode sont rappelés dans l'appendice E (voir également [Morin et al. \(2014\)](#)).

Huit cas géométriques ont été considérés pour valider le critère : des cavités ellipsoïdales générales avec des axes dans les proportions (10 : 5 : 1) et (10 : 2 : 1), des fissures elliptique (5 : 2 : 0.2) et circulaire (5 : 5 : 0.2), des cylindres elliptique (∞ : 5 : 1) et circulaire (∞ : 5 : 5), et des cavités sphéroïdales allongée (prolate) (5 : 1 : 1) et aplatie (oblate) (5 : 5 : 1). La porosité considérée pour toutes les cavités est $f = 0.01$ sauf pour les fissures où nous imposons une seconde porosité $g = 0.14$.

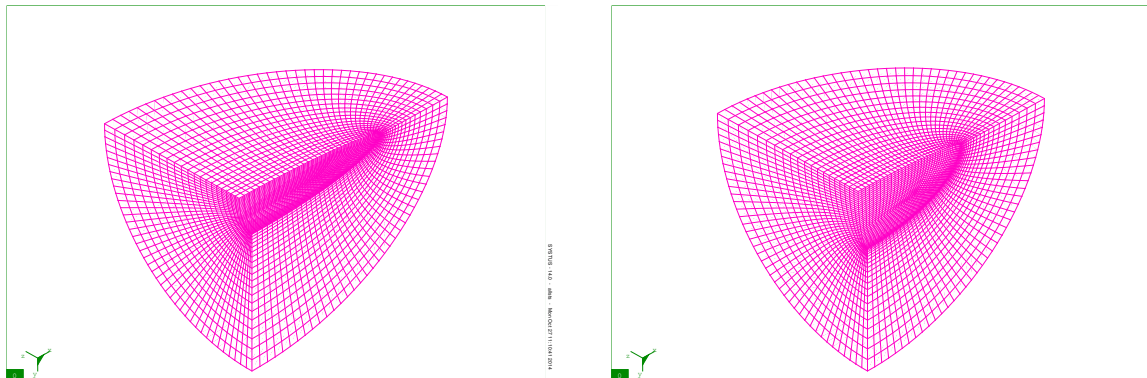
On suppose que la cellule ellipsoïdale contenant le vide ellipsoïdal confocal a ses axes principaux confondus avec les axes d'orthotropie du matériau. Le tableau 3.1 rappelle les coefficients d'anisotropie considérés, avec la notation de Voigt introduite dans le chapitre 2. Les surfaces de charge sont déterminées pour les chargements axisymétriques $\{\Sigma_1 = \Sigma_2 \neq \Sigma_3\}$, $\{\Sigma_1 = \Sigma_3 \neq \Sigma_2\}$ and $\{\Sigma_2 = \Sigma_3 \neq \Sigma_1\}$ et sans cisaillement macroscopique ($\Sigma_4 = \Sigma_5 = \Sigma_6 = 0$).

Matériau	A_{11}	A_{22}	A_{33}	A_{12}	A_{13}	A_{23}	A_{44}	A_{55}	A_{66}
Isotrope	1	1	1	-0.5	-0.5	-0.5	3	3	3
Anisotrope	0.9855	0.87	0.921	-0.4673	-0.5182	-0.4028	3.288	10.8675	10.494

TABLE 3.1: Valeur des coefficients de Hill considérés

3.2.2 Cavités ellipsoïdales générales

On considère des cavités ellipsoïdales générales avec des demi-axes dans les proportions (10 : 2 : 1) et (10 : 5 : 1), dont les maillages sont respectivement représentés Figures 3.1a et 3.1b.



(a) Demi-axes dans les proportions (10 : 2 : 1)

(b) Demi-axes dans les proportions (10 : 5 : 1)

FIGURE 3.1: Maillages utilisés pour les cavités ellipsoïdales générales

Les surfaces de charge numériques et théoriques pour la cavité avec des axes dans les proportions

(10 : 2 : 1) sont représentées Figures 3.2a, 3.2b et 3.2c respectivement pour les cas d'axisymétrie $\{\Sigma_1 = \Sigma_2 \neq \Sigma_3\}$, $\{\Sigma_1 = \Sigma_3 \neq \Sigma_2\}$ et $\{\Sigma_2 = \Sigma_3 \neq \Sigma_1\}$. Les critères isotropes de Madou and Leblond (2012a,b) pour le même type de cavités et de Gurson (1977) pour des cavités sphériques sont également représentés. Les mêmes quantités respectives sont représentées Figures 3.3a, 3.3b et 3.3c pour le cas d'axes (10 : 5 : 1).

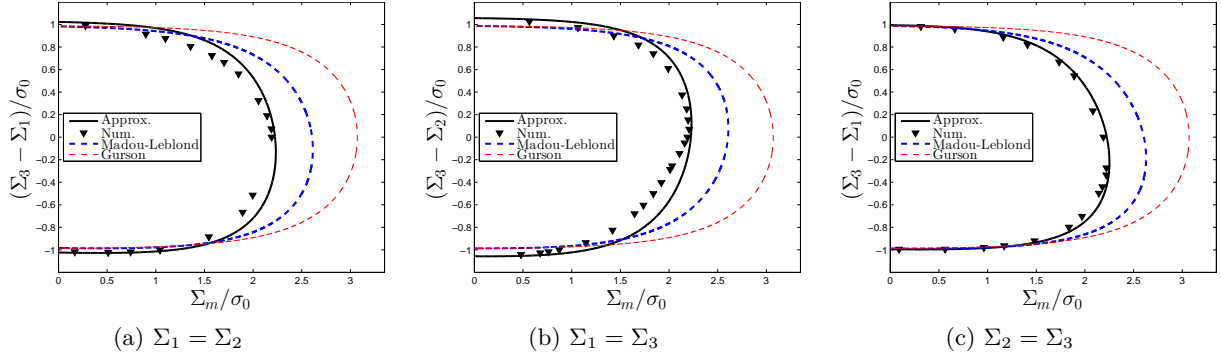


FIGURE 3.2: Surfaces de charge : cas d'axes (10 : 2 : 1)

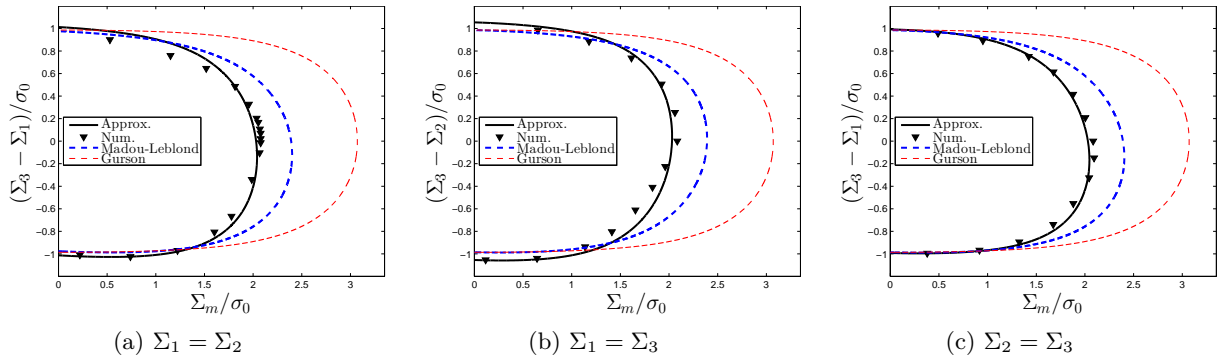


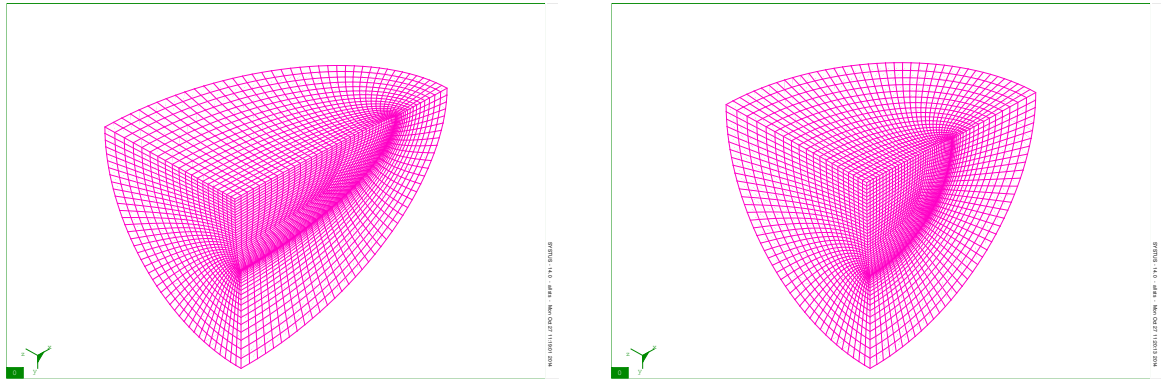
FIGURE 3.3: Surfaces de charge : cas d'axes (10 : 5 : 1)

Pour les deux cavités ellipsoïdales générales considérées, le critère théorique coïncide bien avec les calculs numériques. En particulier, les points hydrostatiques et déviatoriques sont bien reproduits par le modèle. La comparaison avec les critères isotropes de Madou and Leblond (2012a,b) pour les mêmes cavités ellipsoïdales et celui de Gurson (1977) pour des cavités sphériques révèle un couplage complexe entre les effets de forme et de l'anisotropie plastique sur le critère de plasticité.

On remarque que dans le cas des axes (10 : 5 : 1) le critère théorique est intérieur aux calculs numériques, principalement autour du point hydrostatique. En effet, le caractère extérieur de l'approche cinématique de l'analyse limite a été perdu du fait des approximations faites dans le Chapitre 2. Le critère analytique n'est donc pas une borne supérieure, mais uniquement une estimation de la charge limite.

3.2.3 Fissures

On s'intéresse maintenant aux fissures, qui sont des cas particuliers d'ellipsoïdes ayant un axe c très petit. On considère une fissure elliptique avec des axes dans les proportions (5 : 2 : 0.2) dont le maillage est représenté Figure 3.4a, et une fissure circulaire avec des axes dans les proportions (5 : 5 : 0.2) dont le maillage est représenté Figure 3.4b.



(a) Demi-axes dans les proportions (5 : 2 : 0.2) (b) Demi-axes dans les proportions (5 : 5 : 0.2)

FIGURE 3.4: Maillages utilisés pour les fissures

Les surfaces de charge numériques et théoriques pour la cavité avec des axes dans les proportions (5 : 2 : 0.2) sont représentées Figures 3.5a, 3.5b et 3.5c respectivement pour les cas d'axisymétrie $\{\Sigma_1 = \Sigma_2 \neq \Sigma_3\}$, $\{\Sigma_1 = \Sigma_3 \neq \Sigma_2\}$ et $\{\Sigma_2 = \Sigma_3 \neq \Sigma_1\}$. Les critères isotropes de Madou and Leblond (2012a,b) pour le même type de cavités et de Gurson (1977) pour des cavités sphériques sont également représentés. Les mêmes quantités respectives sont représentées Figures 3.6a, 3.6b et 3.6c pour le cas des axes (5 : 5 : 0.2).

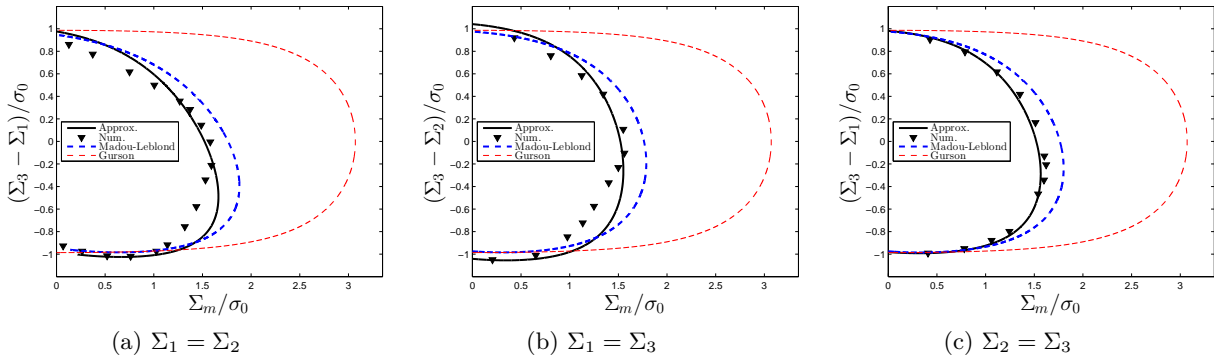


FIGURE 3.5: Surfaces de charge : cas d'axes (5 : 2 : 0.2)

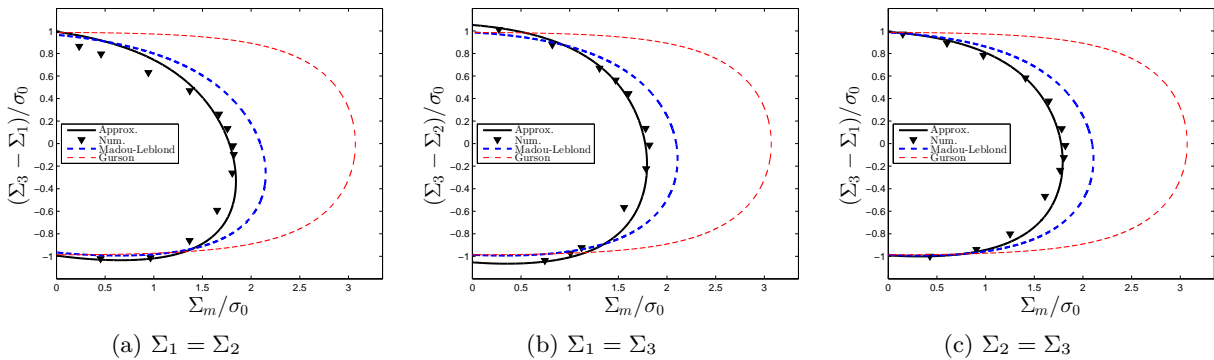


FIGURE 3.6: Surfaces de charge : cas d'axes (5 : 5 : 0.2)

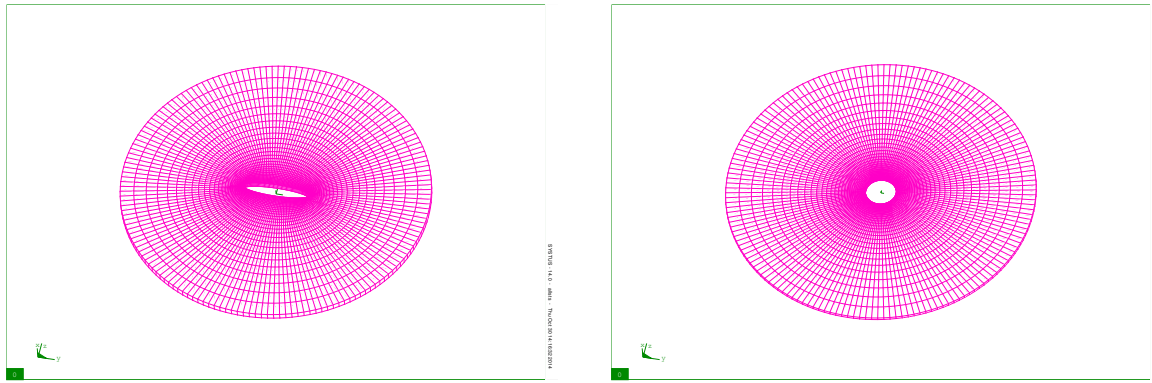
L'anisotropie est bien captée dans les deux cas de fissures considérés. Les points hydrostatiques et

déviatoriques sont très bien reproduits, ainsi que l'allure générale des surfaces de charges. Dans le cas de la fissure elliptique, on constate que le critère théorique surestime sensiblement le critère numérique pour les cas de chargements $\{\Sigma_1 = \Sigma_2 \neq \Sigma_3\}$ (voir Figure 3.5a) et $\{\Sigma_1 = \Sigma_3 \neq \Sigma_2\}$ (voir Figure 3.5b). Ce défaut du modèle avait déjà été observé dans le cas isotrope (voir la figure 4.4 de Madou (2012)).

On remarque également, comme dans le cas des cavités ellipsoïdales générales, que le critère théorique n'est pas une borne supérieure de la charge limite, mais uniquement une estimation.

3.2.4 Cavités cylindriques

On étudie le cas des cavités cylindriques à base elliptique avec des axes dans les proportions $(\infty : 5 : 1)$ (le maillage est représenté Figure 3.7a) et à base circulaire avec des axes dans les proportions $(\infty : 5 : 5)$ (le maillage est représenté Figure 3.7b).

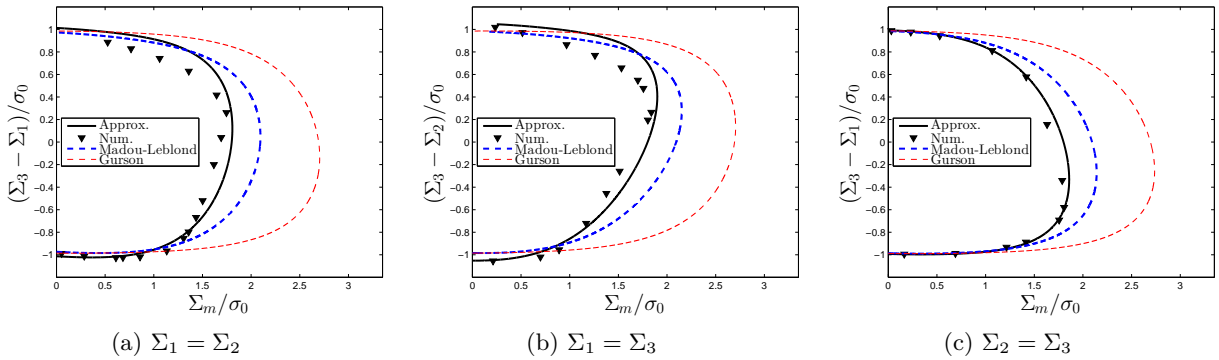


(a) Demi-axes dans les proportions $(\infty : 5 : 1)$

(b) Demi-axes dans les proportions $(\infty : 5 : 5)$

FIGURE 3.7: Maillages utilisés pour les cavités cylindriques (une seule tranche d'éléments dans la direction axiale).

Les surfaces de charge numériques et théoriques pour la cavité d'axes dans les proportions $(\infty : 5 : 1)$ sont représentées Figures 3.8a, 3.8b et 3.8c respectivement pour les cas d'axisymétrie $\{\Sigma_1 = \Sigma_2 \neq \Sigma_3\}$, $\{\Sigma_1 = \Sigma_3 \neq \Sigma_2\}$ et $\{\Sigma_2 = \Sigma_3 \neq \Sigma_1\}$. Le critère isotrope de Madou and Leblond (2012a,b) pour le même type de cavités et celui de Gurson (1977) pour des cavités cylindriques sont également représentés. Les mêmes quantités respectives sont représentées Figures 3.9a, 3.9b et 3.9c pour le cas d'axes $(\infty : 5 : 5)$.



(a) $\Sigma_1 = \Sigma_2$

(b) $\Sigma_1 = \Sigma_3$

(c) $\Sigma_2 = \Sigma_3$

FIGURE 3.8: Surfaces de charge : cas d'axes $(\infty : 5 : 1)$

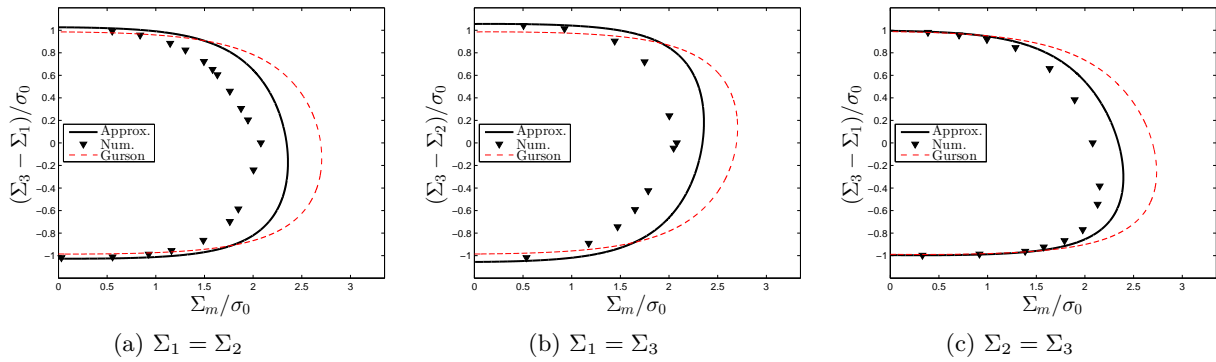


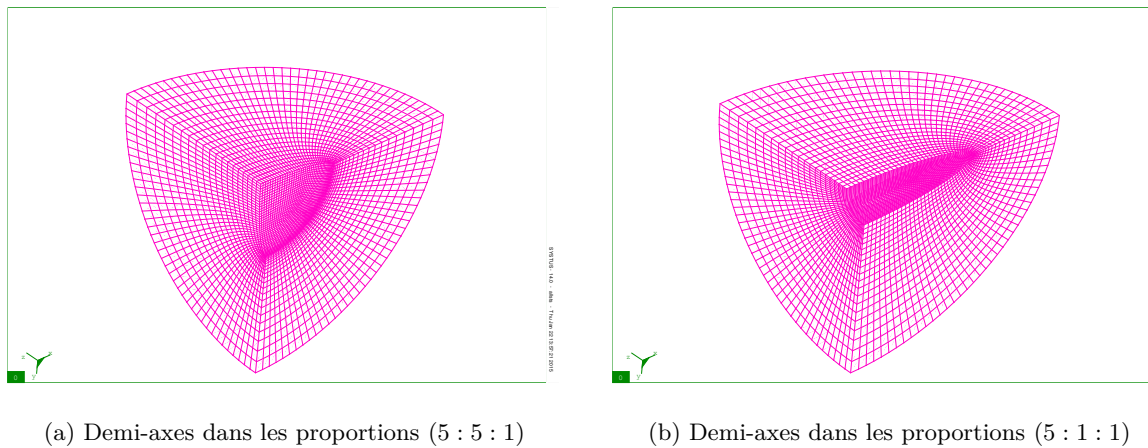
FIGURE 3.9: Surfaces de charge : cas d'axes ($\infty : 5 : 5$)

Pour le cylindre elliptique, le critère théorique coïncide plutôt bien avec les calculs numériques. La comparaison avec les critères isotropes montre l'influence de l'anisotropie sur la surface de charge. Certaines zones de cette surface sont approchées par excès, d'autres par défaut, montrant encore une fois que le statut de borne a été perdu.

Pour le cylindre circulaire, les résultats sont nettement moins bons, avec une estimation par excès assez importante de la surface de charge. Les résultats numériques font apparaître des coins (ce qui avait déjà été remarqué dans le cas isotrope (Madou, 2012)), qui ne peuvent pas être prédits par le modèle théorique. On note cependant que si le point hydrostatique n'est pas bien reproduit, le point déviatorique quant à lui est bien restitué.

3.2.5 Cavités sphéroïdales

On étudie enfin le cas des cavités sphéroïdales, oblate avec des axes dans les proportions ($5 : 5 : 1$) (voir Figure 3.10a) et prolatae avec des axes dans les proportions ($5 : 1 : 1$) (voir Figure 3.10b)



(a) Demi-axes dans les proportions ($5 : 5 : 1$)

(b) Demi-axes dans les proportions ($5 : 1 : 1$)

FIGURE 3.10: Maillages utilisés pour les cavités sphéroïdales (a) oblate et (b) prolatae.

Les surfaces de charge numériques et théoriques pour la cavité d'axes dans les proportions ($5 : 5 : 1$) sont représentées Figures 3.11a, 3.11b et 3.11c respectivement pour les cas d'axisymétrie $\{\Sigma_1 = \Sigma_2 \neq \Sigma_3\}$, $\{\Sigma_1 = \Sigma_3 \neq \Sigma_2\}$ et $\{\Sigma_2 = \Sigma_3 \neq \Sigma_1\}$. Le critère isotrope de Madou and Leblond (2012a,b) pour le même type de cavités et celui de Gurson (1977) pour des cavités sphériques sont également représentés. Les mêmes quantités respectives sont représentées Figures 3.12a, 3.12b et 3.12c pour le cas d'axes ($5 : 1 : 1$).

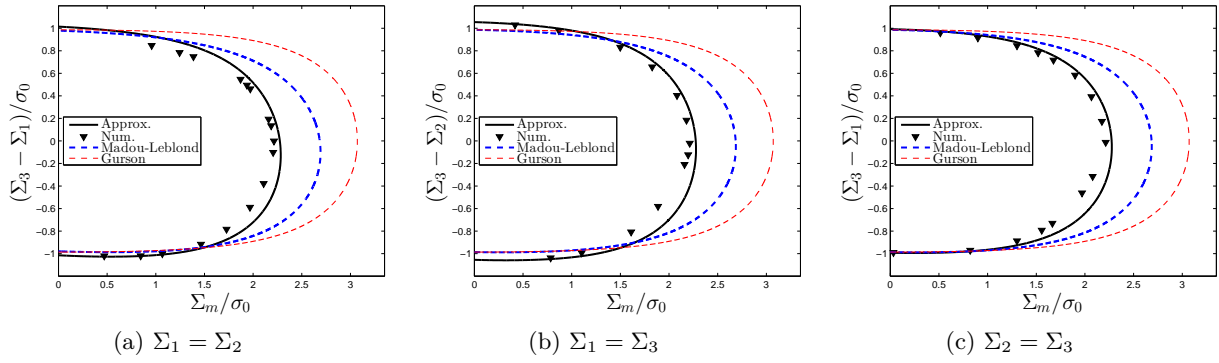


FIGURE 3.11: Surfaces de charge : cas d'axes (5 : 5 : 1)

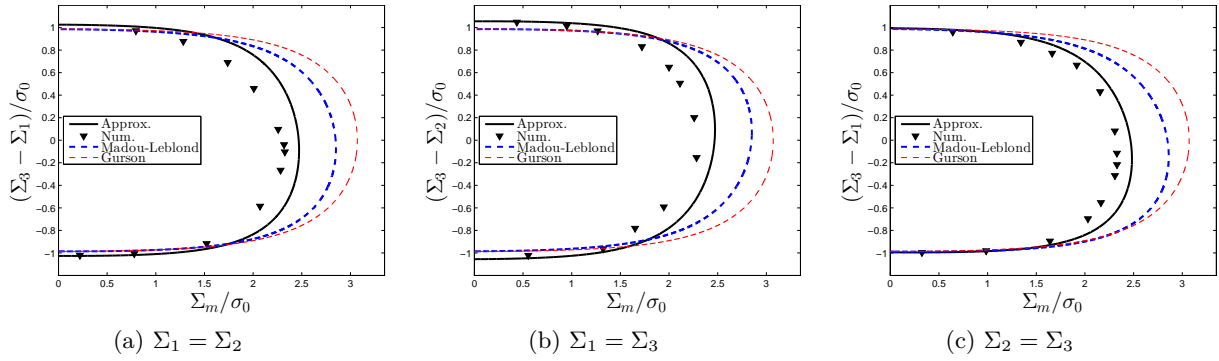


FIGURE 3.12: Surfaces de charge : cas d'axes (5 : 1 : 1)

Dans le cas de la cavité oblate avec les axes dans les proportions (5 : 5 : 1), le critère théorique coïncide très bien avec les points numériques. Pour le cas d'une cavité prolata d'axes dans les proportions (5 : 1 : 1), les résultats sont légèrement moins bons, comme ils avaient pu l'être dans le cas cylindrique à base circulaire. On observe notamment des coins sur la surface de charge dans le cas des chargements $\Sigma_1 = \Sigma_2$ et $\Sigma_1 = \Sigma_3$.

3.2.6 Comparaison avec les critères existants

On compare dans cette section le critère dérivé au chapitre 2 avec les critères existants de [Benzerga and Besson \(2001\)](#); [Monchiet et al. \(2008\)](#); [Keralavarma and Benzerga \(2010\)](#) pour des cavités sphéroïdales aplatie dans les proportions (5 : 5 : 1) (figure 3.13a), allongée dans les proportions (5 : 1 : 1) (figure 3.13b) et cylindrique dans les proportions (∞ : 5 : 5) (figure 3.13c).

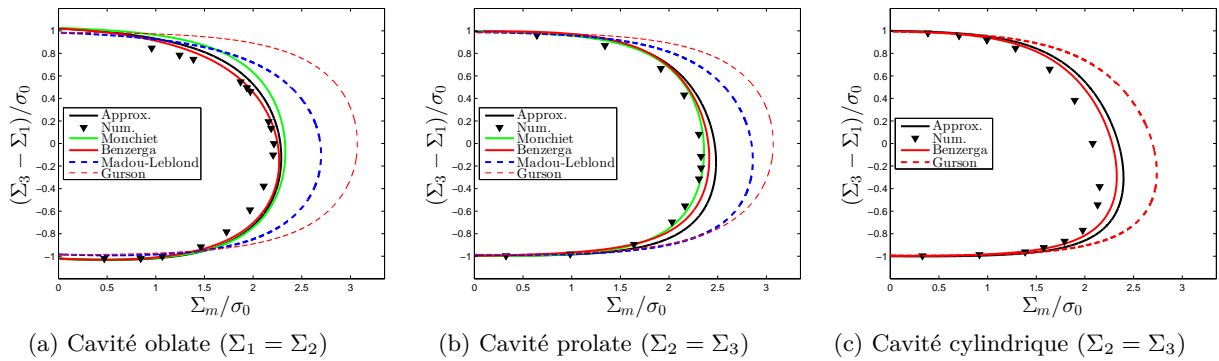


FIGURE 3.13: Surfaces de charge de cavités sphéroïdales ($f = 0.01$).

Dans l'ensemble, tous les critères anisotropes sont assez proches et captent bien l'anisotropie. On remarque que le critère dérivé dans cette thèse est toujours extérieur au critère de [Keralavarma and Benzerga \(2010\)](#) ; il est donc moins bon que le critère de [Keralavarma and Benzerga \(2010\)](#) car nous avons utilisé l'approche cinématique de l'analyse limite (la charge limite la plus basse constitue le meilleur résultat). Il permet d'améliorer le critère de [Monchiet et al. \(2008\)](#) uniquement dans le cas de cavités aplaties. L'écart observé est très probablement dû à l'approximation \mathcal{A}_4 du chapitre 2 qui dégrade la valeur du taux de déformation équivalent.

3.3 Loi d'écoulement macroscopique

Le but de cette section est d'étudier les directions d'écoulement macroscopique associées au critère. L'étude de loi d'écoulement est cruciale pour valider le critère de plasticité car ce sont les directions d'écoulement qui vont permettre au VER et aux paramètres internes d'évoluer.

Les déformations macroscopiques numériques E_{11}, E_{22}, E_{33} , résultant des conditions aux limites de taux de déformation homogène peuvent être identifiées aux composantes D_{11}, D_{22}, D_{33} du **vrai** taux de déformation macroscopique (d'après la correspondance entre les équations du problème d'analyse limite et celles résolues numériquement, voir la section E.2.3 de l'annexe E). Le tenseur taux de déformation **approché** associé au critère analytique est quant à lui obtenu grâce à la propriété de normalité qui est préservée durant la procédure d'homogénéisation ([Rice, 1971](#); [Gurson, 1977](#)) :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma}) \quad (3.1)$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique.

Nous allons en particulier étudier l'angle φ_{12} que le vecteur $D_{11}\mathbf{e}_1 + D_{22}\mathbf{e}_2$ fait avec le vecteur \mathbf{e}_1 (voir Figure 3.14a) en fonction de l'angle ψ (voir Figure 3.14b) mesurant la position du tenseur des contraintes sur la surface de charge ; cela revient à étudier le rapport D_{11}/D_{22} caractérisant la direction de l'écoulement macroscopique en fonction d'une mesure de la triaxialité. De même, nous étudierons les angles φ_{13} et φ_{23} définis similairement, toujours en fonction de l'angle ψ . En raison du nombre important de courbes à tracer, les résultats sont reportés en Annexe B.

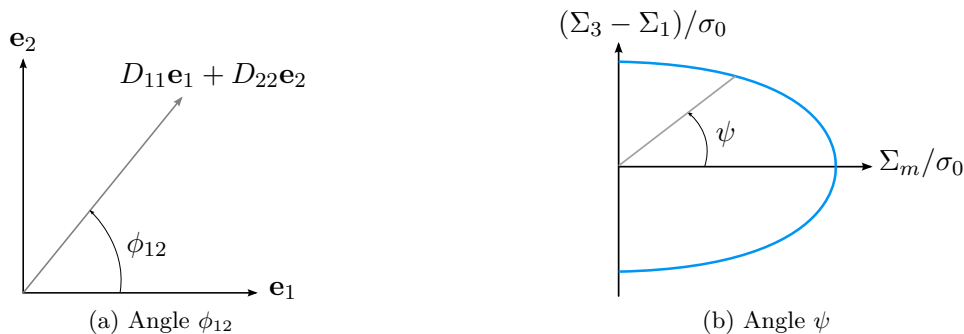


FIGURE 3.14: Définitions des angles ϕ_{12} et ψ

Les résultats sont dans l'ensemble très satisfaisants, sauf pour les fissures et les cylindres qui sont un peu moins bien reproduits. Les principales différences observées entre le modèle et les résultats numériques se trouvent autour du point hydrostatique avec des erreurs maximales de vingt degrés environ. Dans le cas des cylindres cela s'explique par la présence de coins sur les surfaces de charge autour du point hydrostatique.

3.4 Lois d'évolution de la longueur et de l'orientation des axes d'une cavité ellipsoïdale dans un milieu plastique anisotrope

Les demi-axes de la cavité ainsi que les vecteurs directeurs des axes sont des paramètres internes du critère proposé dans le chapitre 2. Il est crucial de connaître les lois d'évolution de ces paramètres afin de définir un modèle de rupture ductile complet. L'étude numérique des lois d'évolution de la longueur et de l'orientation des axes d'une cavité ellipsoïdale dans un milieu anisotrope est l'objectif de cette section.

3.4.1 Approche de Madou et al. (2013) dans le cas isotrope

Madou (2012); Madou et al. (2013) ont récemment proposé des lois d'évolution de la longueur et de l'orientation des axes d'un vide ellipsoïdal dans un milieu parfaitement plastique isotrope. Leur approche est basée sur une correction plastique phénoménologique des lois élastiques établies par Ponte Castañeda and Zaidman (1994); Kailasam and Ponte Castañeda (1998). (Une approche analytique par analyse limite n'aurait pas été pertinente en raison du trop faible nombre de champs de vitesse considérés. En effet, les tenseurs taux de déformation et de rotation du vide n'ont pas de caractérisation variationnelle contrairement à la surface de charge qui est issue d'une procédure de minimisation de la dissipation plastique; les approcher de manière satisfaisante requiert en conséquence un nombre de champs de vitesse tests beaucoup plus important).

3.4.1.1 Loi d'évolution de la longueur des axes

Généralités Le tenseur taux de déformation d'un vide ellipsoïdal dans un milieu élastique linéaire incompressible est donné par (Kailasam and Ponte Castañeda, 1998)

$$\mathbf{D}^v = \mathbb{L}_e : \mathbf{D} \quad (3.2)$$

où \mathbf{D}^v est le taux de déformation du vide, \mathbf{D} le taux de déformation macroscopique et \mathbb{L}_e un tenseur de localisation du quatrième ordre donné par

$$\mathbb{L}_e = [\mathbb{I} - (1 - f)\mathbb{S}]^{-1}, \quad (3.3)$$

où \mathbb{I} est le tenseur identité, f la porosité et \mathbb{S} le tenseur d'Eshelby associé à la cavité considérée.

L'approche de Madou (2012); Madou et al. (2013) consiste à adapter heuristiquement l'équation élastique au cas plastique; dans le cas plastique, l'équation (3.2) est remplacée par

$$\mathbf{D}^v = \mathbb{L} : \mathbf{D} \quad (3.4)$$

où le nouveau tenseur de localisation \mathbb{L} est obtenu à partir du tenseur élastique \mathbb{L}_e en multipliant certains de ses coefficients par des facteurs correctifs adaptés, déterminés numériquement.

Changement de variables Toutes les composantes de \mathbf{D}^v ne nécessitent pas forcément de correction. Par exemple, l'équation résultant de l'incompressibilité de la matrice

$$\mathbf{D}_m^v = \mathbf{D}_m / f \quad (3.5)$$

est exacte et n'a donc pas besoin d'être corrigée. Il est donc intéressant d'introduire le changement de variables suivant (Madou et al., 2013)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{D}_1 = D_m \\ \bar{D}_2 = D_{xx} - D_m \\ \bar{D}_3 = D_{yy} - D_{zz} \\ \bar{D}_4 = D_{xy} \\ \bar{D}_5 = D_{xz} \\ \bar{D}_6 = D_{yz} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{D}_1^v = D_m^v \\ \bar{D}_2^v = D_{xx}^v - D_m^v \\ \bar{D}_3^v = D_{yy}^v - D_{zz}^v \\ \bar{D}_4^v = D_{xy}^v \\ \bar{D}_5^v = D_{xz}^v \\ \bar{D}_6^v = D_{yz}^v \end{array} \right. \quad (3.6)$$

permettant de distinguer les composantes demandant une correction et les autres.

Les équations élastique (3.2) et plastique (3.4) s'écrivent en fonction des vecteurs à 6 composantes $\bar{\mathbf{D}}^v \equiv (D_\alpha^v)_{1 \leq \alpha \leq 6}$ et $\bar{\mathbf{D}} \equiv (D_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq 6}$:

$$\bar{\mathbf{D}}^v = \bar{\mathbb{L}}_e \cdot \bar{\mathbf{D}} \quad (\text{cas élastique}); \quad \bar{\mathbf{D}}^v = \bar{\mathbb{L}} \cdot \bar{\mathbf{D}} \quad (\text{cas plastique}) \quad (3.7)$$

où $\bar{\mathbb{L}}_e$ est une matrice 6×6 dont les composantes non nulles sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L}_{11}^e = 1/f \\ \bar{L}_{22}^e = L_{xxxx}^e - \frac{1}{2}(L_{xxyy}^e + L_{xxzz}^e) \\ \bar{L}_{23}^e = \frac{1}{2}(L_{xxyy}^e - L_{xxzz}^e) \\ \bar{L}_{31}^e = L_{yyyy}^e - L_{zzzz}^e - L_{yyzz}^e - L_{zzxx}^e - L_{zzyy}^e \\ \bar{L}_{32}^e = \frac{1}{2}(2L_{yyxx}^e - L_{yyyy}^e - L_{yyzz}^e - 2L_{zzxx}^e + L_{zzyy}^e + L_{zzzz}^e) \\ \bar{L}_{33}^e = \frac{1}{2}(L_{yyyy}^e - L_{yyzz}^e - L_{zzyy}^e + L_{zzzz}^e) \\ \bar{L}_{44}^e = 4L_{xyxy}^e; \quad \bar{L}_{55}^e = 4L_{xzxz}^e; \quad \bar{L}_{66}^e = 4L_{yzyz}^e. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Définition des facteurs correctifs Les composantes de la matrice $\bar{\mathbb{L}}$ sont heuristiquement supposées être reliées à celle de la matrice élastique $\bar{\mathbb{L}}^e$ à travers les relations

$$\bar{L}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} \bar{L}_{\alpha\beta}^e \quad \text{pas de sommation sur } \alpha \text{ et } \beta, \quad (3.9)$$

où les $h_{\alpha\beta}$ sont des facteurs correctifs permettant de prendre en compte les effets plastiques. On note $\mathbf{h} \equiv (h_\alpha^v)_{1 \leq \alpha \leq 6}$ la matrice 6×6 de ces facteurs. La détermination numérique complète de la matrice \mathbf{h} est impossible pour toutes les géométries et chargements envisageables. Dans le cas d'un vide ellipsoïdal général, une interpolation est donc adoptée (Madou et al., 2013), basée sur une combinaison linéaire de ses valeurs \mathbf{h}^{sph} , \mathbf{h}^{cyl} et \mathbf{h}^{sand} dans les cas particuliers de vides ayant la forme d'une sphère, d'un cylindre circulaire et d'une couche infinie plane (sandwich) :

$$\mathbf{h} = \lambda \mathbf{h}^{\text{sph}} + \mu \mathbf{h}^{\text{cyl}} + \nu \mathbf{h}^{\text{sand}} \quad (3.10)$$

où λ , μ et ν sont les coefficients d'interpolation, de somme unité, dépendant de la forme du vide. Les matrices \mathbf{h}^{sph} et \mathbf{h}^{cyl} correspondant aux cas sphérique et cylindrique sont ainsi déterminées numériquement¹. Dans le cas sandwich, il n'est pas nécessaire de déterminer numériquement la matrice \mathbf{h}^{sand} ; en effet, dans ce cas, la cinématique de la cellule est une combinaison indépendante de la loi

1. Des formules empiriques que nous ne détaillerons pas ici sont ensuite proposées pour fitter au mieux les coefficients numériques des matrices \mathbf{h}^{sph} et \mathbf{h}^{cyl} (Madou, 2012; Madou et al., 2013).

de comportement de mouvements de corps rigides et de déformations uniformes des couches planes entourant le vide, quel que soit le chargement ; cela implique que $h_{ij}^{\text{sand}} = 1$.

L'interpolation adoptée pour le cas général (3.10) est ensuite validée en déterminant numériquement le tenseur de taux de déformation du vide \mathbf{D}^v dans divers cas et en comparant à ce que donne l'interpolation ; les composantes du taux de déformation sont calculées numériquement par la définition "moyenne" suivante :

$$D_{ij}^v = \frac{1}{\text{vol}(\omega)} \int_{\partial\omega} \frac{1}{2} (v_i n_j + v_j n_i) dS \quad (3.11)$$

où $\text{vol}(\omega)$ est le volume de la cavité, $\partial\omega$ son bord, les n_i les composantes du vecteur unitaire normal à ce bord et les v_i celles du vecteur vitesse.

3.4.1.2 Loi d'évolution de l'orientation des axes

Généralités Le tenseur taux de rotation $\mathbf{\Omega}^v$ d'un vide ellipsoïdal dans un milieu élastique linéaire incompressible est donné par (Kailasam and Ponte Castañeda, 1998)

$$\mathbf{\Omega}^v = \mathbf{\Omega} + \mathbb{R}_e : \mathbf{D} \quad (3.12)$$

où $\mathbf{\Omega}$ est le taux de rotation macroscopique, \mathbf{D} le taux de déformation macroscopique et \mathbb{R}_e un tenseur de localisation du quatrième ordre donné par

$$\mathbb{R}_e = (1 - f)\mathbf{\Pi} : \mathbb{L}_e, \quad (3.13)$$

où $\mathbf{\Pi}$ est le second tenseur d'Eshelby, f la porosité et \mathbb{L}_e le tenseur de localisation donné par l'équation (3.3). Le tenseur \mathbb{R}_e ne possède que trois composantes indépendantes ($R_{e,xyxy}$, $R_{e,xzxx}$ et $R_{e,yzyz}$) en raison des symétries.

L'approche de Madou (2012); Madou et al. (2013) consiste à adapter heuristiquement l'équation élastique au cas plastique ; dans le cas plastique, l'équation (3.12) est remplacée par

$$\mathbf{\Omega}^v = \mathbf{\Omega} + \mathbb{R} : \mathbf{D} \quad (3.14)$$

où le nouveau tenseur de localisation \mathbb{R} est obtenu à partir du tenseur élastique \mathbb{R}_e en multipliant certains de ses coefficients par des facteurs correctifs adaptés, déterminés numériquement.

Définition des facteurs correctifs Les composantes non-nulles du tenseur \mathbb{R} sont donc heuristiquement supposées être reliées à celles du tenseur \mathbb{R}_e à travers les relations

$$R_{xyxy} \equiv k_{xy} R_{e,xyxy}; \quad R_{xzxz} \equiv k_{xz} R_{e,xzxz}; \quad R_{yzyz} \equiv k_{yz} R_{e,yzyz}, \quad (3.15)$$

où les coefficients k_{xy} , k_{xz} et k_{yz} sont des facteurs correctifs permettant de prendre en compte les effets plastiques. La détermination numérique complète des coefficients k_{ij} est impossible pour toutes les géométries et chargements envisageables. Dans le cas d'un vide ellipsoïdal, une interpolation est adoptée (Madou et al., 2013), basée sur une combinaison linéaire des valeurs k_{ij}^{sph} , k_{ij}^{cyl} et k_{ij}^{sand} dans les cas particuliers de vides ayant la forme d'une sphère, d'un cylindre circulaire et d'une couche infinie plane (sandwich) :

$$\begin{cases} k_{xy} &= \lambda k_{xy}^{\text{sph}} + \mu k_{xy}^{\text{cyl}} + \nu k_{xy}^{\text{sand}} \\ k_{xz} &= \lambda k_{xz}^{\text{sph}} + \mu k_{xz}^{\text{cyl}} + \nu k_{xz}^{\text{sand}} \\ k_{yz} &= \lambda k_{yz}^{\text{sph}} + \mu k_{yz}^{\text{cyl}} + \nu k_{yz}^{\text{sand}} \end{cases} \quad (3.16)$$

où λ , μ et ν sont les coefficients d'interpolation, de somme unité, dépendant de la forme du vide. En raison des symétries impliquant la nullité de certaines composantes des tenseurs \mathbb{R}_e et \mathbb{R} nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} k_{xy}^{\text{sph}} = k_{xz}^{\text{sph}} = k_{yz}^{\text{sph}} = 1 \\ k_{xy}^{\text{cyl}} = k_{xz}^{\text{cyl}} \\ k_{yz}^{\text{cyl}} = 1; \end{cases} \quad (3.17)$$

de plus dans le cas sandwich l'indépendance de la cinématique vis-à-vis de la loi de comportement implique que

$$k_{xy}^{\text{sand}} = k_{xz}^{\text{sand}} = k_{yz}^{\text{sand}} = 1. \quad (3.18)$$

Ainsi, seul le coefficient k_{xy}^{cyl} doit être déterminé numériquement.

Ensuite, comme dans le cas de l'évolution de la longueur des axes, les interpolations adoptées pour le cas général (3.16) sont validées en déterminant numériquement le tenseur de taux de rotation du vide $\mathbf{\Omega}^v$ dans divers cas et en comparant à ce que donne l'interpolation.

3.4.2 Extension des lois isotropes au cas anisotrope

L'approche proposée par Madou (2012); Madou et al. (2013) dans le cas isotrope est purement phénoménologique et a nécessité des centaines de calculs numériques par éléments finis pour déterminer les coefficients correctifs h_{ij} et k_{ij} pour une grande variété de cas géométriques. Pour étendre leur approche au cas anisotrope, il faudrait avoir recours à des calculs numériques encore plus nombreux, pour une grande variété de matériaux et de géométries, puis proposer des formules analytiques pour fitter les résultats numériques. Les formules devraient dépendre des coefficients d'anisotropie de Hill (1948) et de la géométrie. Cette tâche nous paraît irréalisable car (i) elle nécessiterait un nombre trop important de calculs numériques; (ii) il paraît difficile voire impossible de fitter correctement les formules avec autant de paramètres.

Par conséquent, les corrections des lois d'évolution que nous utiliserons pour décrire la déformation et la rotation d'un vide ellipsoïdal dans un milieu plastique *anisotrope* seront données simplement par les formules de Madou et al. (2013) obtenues dans le cas *isotrope*. Bien que l'anisotropie ait une influence sur la déformation et la rotation des cavités, on peut supposer qu'en première approximation le choix des corrections isotropes est pertinent, au moins dans le cas d'anisotropies modérées.

Il est important de noter que dans l'option retenue, l'anisotropie est quand même prise en compte, par l'intermédiaire du tenseur d'Eshelby \mathbb{S} qui correspond à une cavité ellipsoïdale plongée dans un milieu élastique *anisotrope*; seuls les facteurs correctifs h_{ij} et k_{ij} correspondent au cas *isotrope*.

3.4.3 Comparaisons des lois théoriques avec des calculs numériques micromécaniques

Le but de cette sous-section est de comparer les prédictions de la loi proposée pour l'évolution de la longueur des axes d'une cavité avec les résultats numériques pour le matériau anisotrope considéré précédemment. Précisons que ces résultats ne seront pas utilisés pour améliorer les corrections isotropes utilisées, mais sont uniquement fournis pour voir si ces corrections isotropes sont acceptables.

Notons également que nous n'étudierons pas la loi d'évolution de l'orientation des axes d'une cavité. Cette loi avait été moins étudiée que celle des longueurs des axes dans le cas isotrope, et les corrections proposées étaient moins précises que pour ces longueurs; on peut s'attendre à avoir des résultats similaires dans le cas anisotrope.

3.4.3.1 Cas sphérique

Dans le cas sphérique, un seul coefficient de la matrice \mathbf{h} doit être déterminé dans le cas isotrope (Madou et al., 2013). Ce coefficient est défini par

$$h^{\text{sph}} = \frac{3 + 2f}{5} \frac{\mathbf{D}'_{\text{dg}}}{\|\mathbf{D}'_{\text{dg}}\|} \cdot \frac{\mathbf{D}^{v'}_{\text{dg}}}{\|\mathbf{D}^{v'}_{\text{dg}}\|} \quad (3.19)$$

où $\mathbf{T}_{\text{dg}} \in \mathbb{R}^3$ désigne le vecteur composé des composantes diagonales T_{xx} , T_{yy} et T_{zz} d'un tenseur \mathbf{T} quelconque d'ordre deux donné (Madou et al., 2013). (Les tenseurs \mathbf{D}' et $\mathbf{D}^{v'}$ correspondent respectivement aux déviateurs des tenseurs \mathbf{D} et \mathbf{D}^v).

Le coefficient h^{sph} est donc lié à la projection du déviateur du taux de déformation du vide sur le déviateur du taux de déformation macroscopique. Il ne dit rien sur la composante de $\mathbf{D}^{v'}$ non colinéaire à \mathbf{D}' . (Ces tenseurs, colinéaires dans le cas élastique, n'ont cependant aucune raison de le rester dans le cas plastique). Dans le cas isotrope, l'erreur liée à la non-colinéarité a été étudiée numériquement (Madou, 2012; Madou et al., 2013) : elle est faible pour des triaxialités T ne dépassant pas 1.5. Dans la suite on considérera l'erreur liée à la non-colinéarité négligeable.

Nous comparons Figures 3.15a et 3.15b l'évolution du coefficient h^{sph} en fonction de la triaxialité T pour des porosités initiales $f = 0.01$ et $f = 0.001$, respectivement. Le chargement considéré dans les deux cas est $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

L'accord entre le modèle et les calculs numériques est particulièrement bon dans ce cas et permet ainsi de justifier l'utilisation de la correction isotrope dans le cas anisotrope.

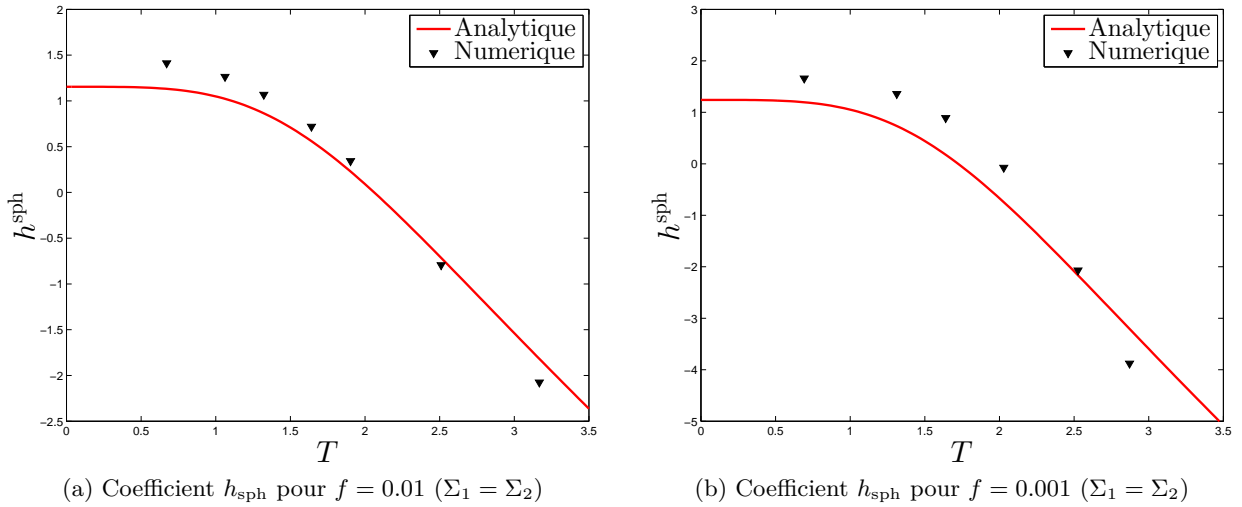


FIGURE 3.15: Etude de la déformation d'une cavité sphérique (à travers le coefficient h_{sph}) de porosité (a) $f = 0.01$ et (b) $f = 0.001$

3.4.3.2 Cas cylindrique

Dans le cas cylindrique, deux coefficients de la matrice \mathbf{h} doivent être déterminés. Nous allons ici nous intéresser au coefficient le plus important défini par :

$$h_{33}^{\text{cyl}} = \frac{1 + f}{2} \frac{D_{yy}^v - D_{zz}^v}{D_{yy} - D_{zz}}. \quad (3.20)$$

Ce coefficient est lié à la norme du déviateur du taux de déformation du vide.

Ce coefficient est tracé respectivement Figures 3.16a, 3.16b et 3.16c pour les chargements $\Sigma_1 = \Sigma_2$, $\Sigma_1 = \Sigma_3$ et $\Sigma_2 = \Sigma_3$, en fonction de la “triaxialité transverse” T_h définie par

$$T_h = \frac{\Sigma_2 + \Sigma_3}{2\Sigma_{\text{eq}}}. \quad (3.21)$$

Par rapport au cas sphérique, l'accord est nettement moins bon entre la formule théorique utilisant la correction isotrope et les résultats numériques.

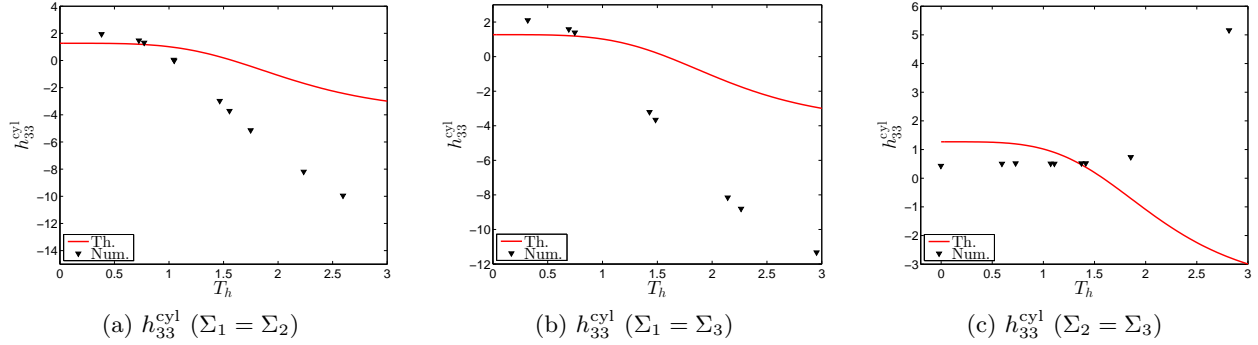


FIGURE 3.16: Etude de la déformation d’une cavité cylindrique circulaire de porosité $f = 0.01$.

3.4.3.3 Cas oblate

Le cas oblate correspond dans le modèle à un cas interpolé entre les cas sphérique et sandwich. Il n’est donc pas très pertinent ici d’étudier les différents coefficients de la matrice \mathbf{h} interpolée. Nous allons ainsi directement comparer les composantes de $\bar{\mathbf{D}}^v$ théoriques avec celles calculées numériquement.

Les rapports $\bar{D}_2^v/||\mathbf{D}||$ et $\bar{D}_3^v/||\mathbf{D}||$ théoriques et numériques sont tracés Figures 3.17a et 3.17b pour le chargement ($\Sigma_1 = \Sigma_3$) et Figures 3.17c et 3.17d pour le chargement ($\Sigma_2 = \Sigma_3$). On considère à chaque fois les deux cas d’axisymétrie, correspondant à deux valeurs de l’angle de Lode ϕ : lorsque la contrainte axiale est “majeure”, l’angle de Lode vaut $\phi = 0^\circ$ et lorsque la contrainte axiale est “mineure”, l’angle de Lode vaut $\phi = 60^\circ$.

L’accord entre le modèle et les résultats numériques est satisfaisant. Les tendances sont bien reproduites et les erreurs maximales observées sont de 20 % environ.

3.4.3.4 Cas prolate

Le cas prolate correspond dans le modèle à un cas interpolé entre les cas sphérique et cylindrique. De nouveau, il n’est pas très pertinent d’étudier les différents coefficients de la matrice \mathbf{h} interpolée, et nous allons plutôt directement comparer les composantes de $\bar{\mathbf{D}}^v$ théoriques avec celles calculées numériquement.

Les rapports $\bar{D}_2^v/||\mathbf{D}||$ et $\bar{D}_3^v/||\mathbf{D}||$ théoriques et numériques sont tracés Figures 3.18a et 3.18b pour le chargement ($\Sigma_1 = \Sigma_2$), Figures 3.18c et 3.18d pour le chargement ($\Sigma_1 = \Sigma_3$) et Figures 3.18d et 3.18e pour le chargement ($\Sigma_2 = \Sigma_3$). Comme précédemment, on considère dans chaque cas d’axisymétrie deux valeurs de l’angle de Lode ($\phi = 0^\circ$ et $\phi = 60^\circ$).

L’accord entre le modèle et les résultats numériques est correct. En particulier, le rapport $\bar{D}_2^v/||\mathbf{D}||$ est très bien reproduit avec une erreur maximale de 12 % environ. En revanche, le rapport $\bar{D}_3^v/||\mathbf{D}||$ est beaucoup moins bien reproduit, notamment lorsque la triaxialité est supérieure à 3. En pratique ce n’est pas très gênant car ce coefficient a peu d’importance à triaxialité élevée, le changement de volume de la cavité dominant son changement de forme.

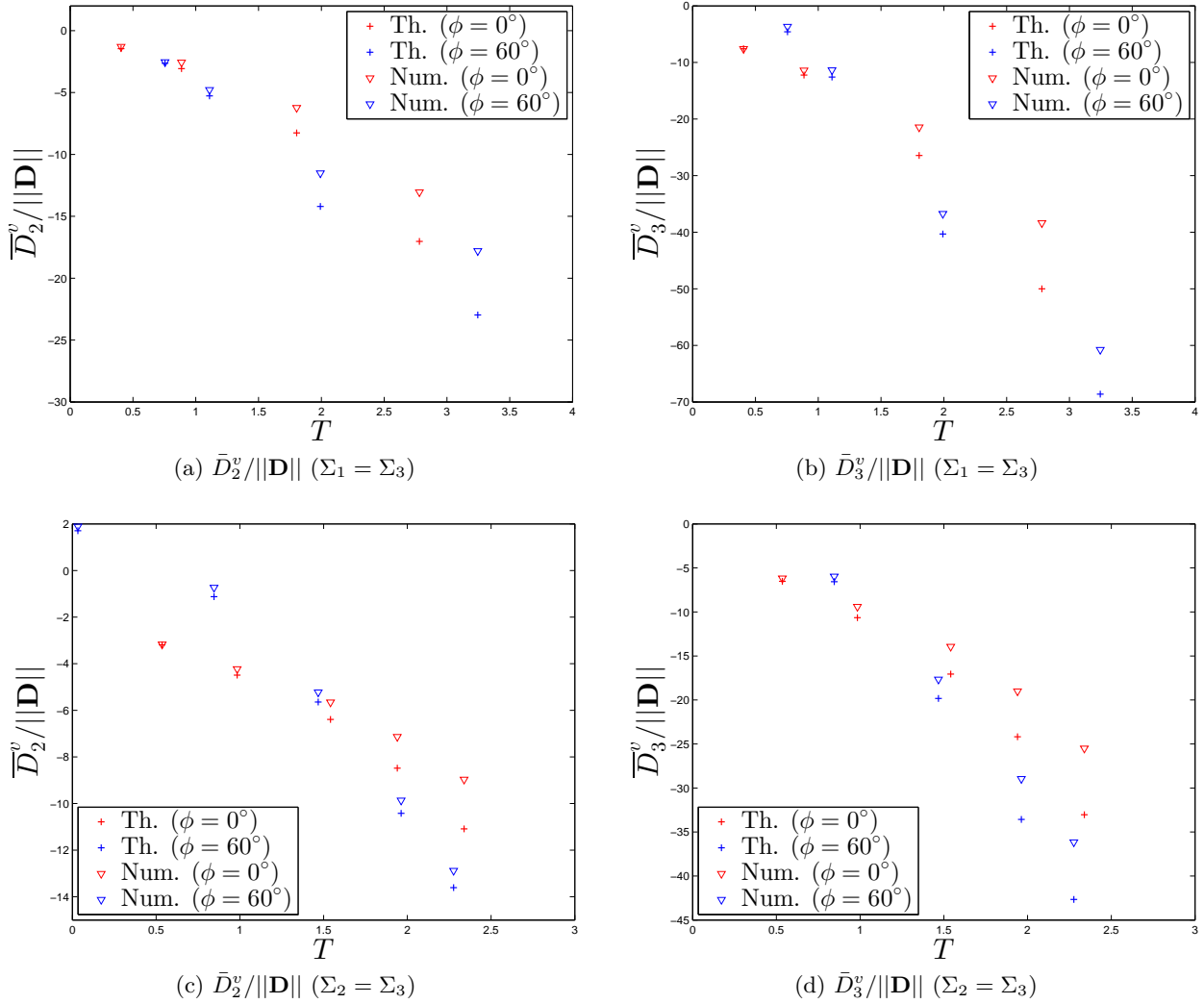


FIGURE 3.17: Etude de la déformation d'une cavité aplatie (oblate) d'axes dans les proportions (5 : 5 : 1) et de porosité $f = 0.01$.

3.4.3.5 Cas général

On s'intéresse enfin à une cavité ellipsoïdale générale d'axes dans les proportions (10 : 2 : 1). Ce cas général correspond dans le modèle à un cas interpolé entre les cas oblate et prolata. Comme précédemment, il n'est pas très pertinent d'étudier les différents coefficients de la matrice \mathbf{h} interpolée. Nous allons ainsi directement comparer les composantes de $\bar{\mathbf{D}}^v$ théoriques avec celles calculées numériquement.

Les rapports $\bar{D}_2^v / \|\mathbf{D}\|$ et $\bar{D}_3^v / \|\mathbf{D}\|$ théoriques et numériques sont tracés Figures 3.19a et 3.19b pour le chargement ($\Sigma_1 = \Sigma_2$), Figures 3.19c et 3.19d pour le chargement ($\Sigma_1 = \Sigma_3$) et Figures 3.19d et 3.19e pour le chargement ($\Sigma_2 = \Sigma_3$). Comme précédemment, on considère dans chaque cas d'axi-symétrie deux valeurs de l'angle de Lode ($\phi = 0^\circ$ et $\phi = 60^\circ$).

L'accord entre le modèle et les résultats numériques est satisfaisant. En particulier, le rapport $\bar{D}_2^v / \|\mathbf{D}\|$ est très bien reproduit avec une erreur maximale de moins de 10 % environ. Comme précédemment, le rapport $\bar{D}_3^v / \|\mathbf{D}\|$ est moins bien reproduit lorsque la triaxialité augmente.

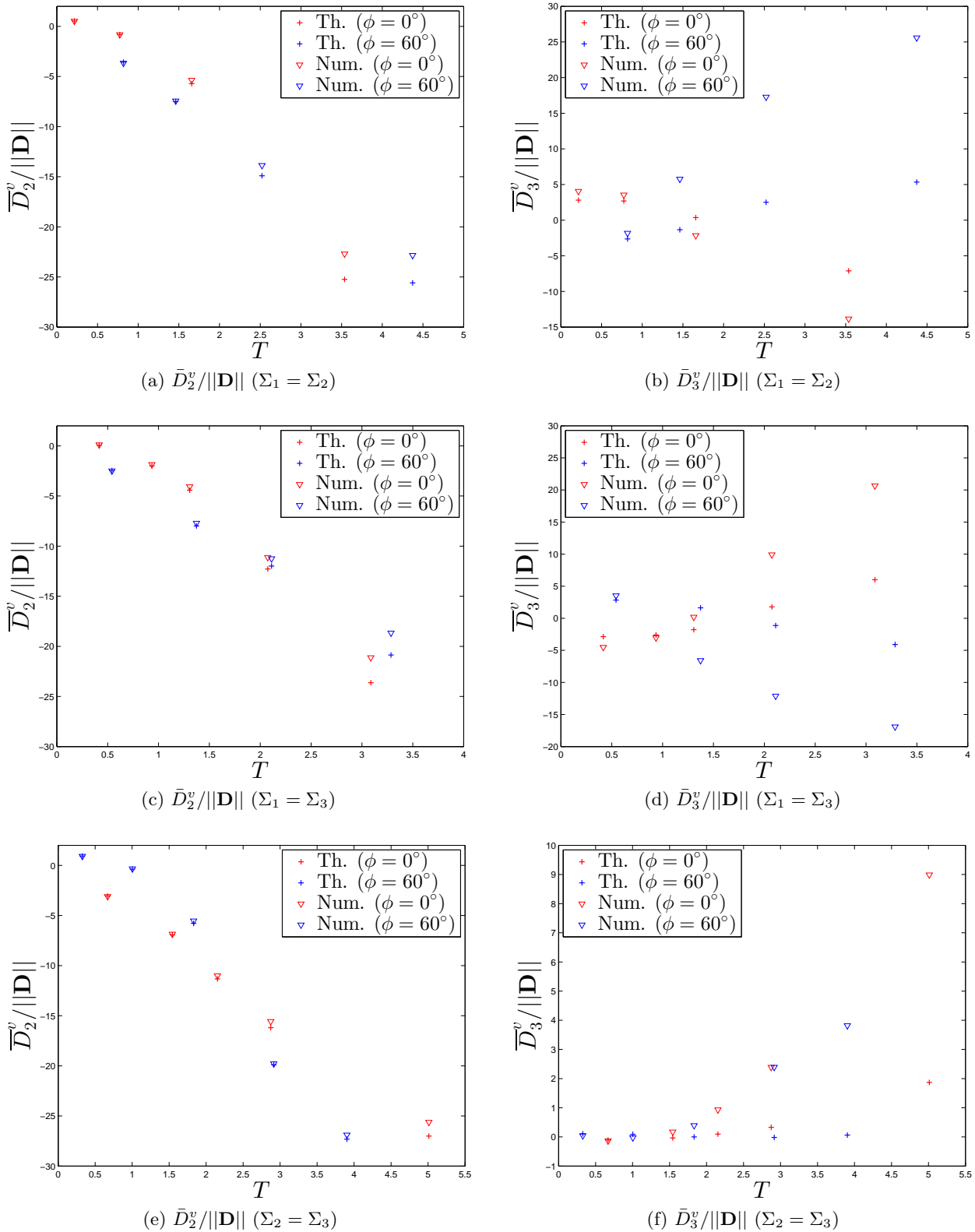


FIGURE 3.18: Etude de la déformation d'une cavité allongée (prolate) d'axes dans les proportions (5 : 1 : 1) et de porosité $f = 0.01$.

3.4.4 Discussion

Les comparaisons entre le modèle pour les lois d'évolution de la déformation d'une cavité ellipsoïdale et des calculs numériques dans le cas anisotrope sont globalement satisfaisantes. Les différences les plus

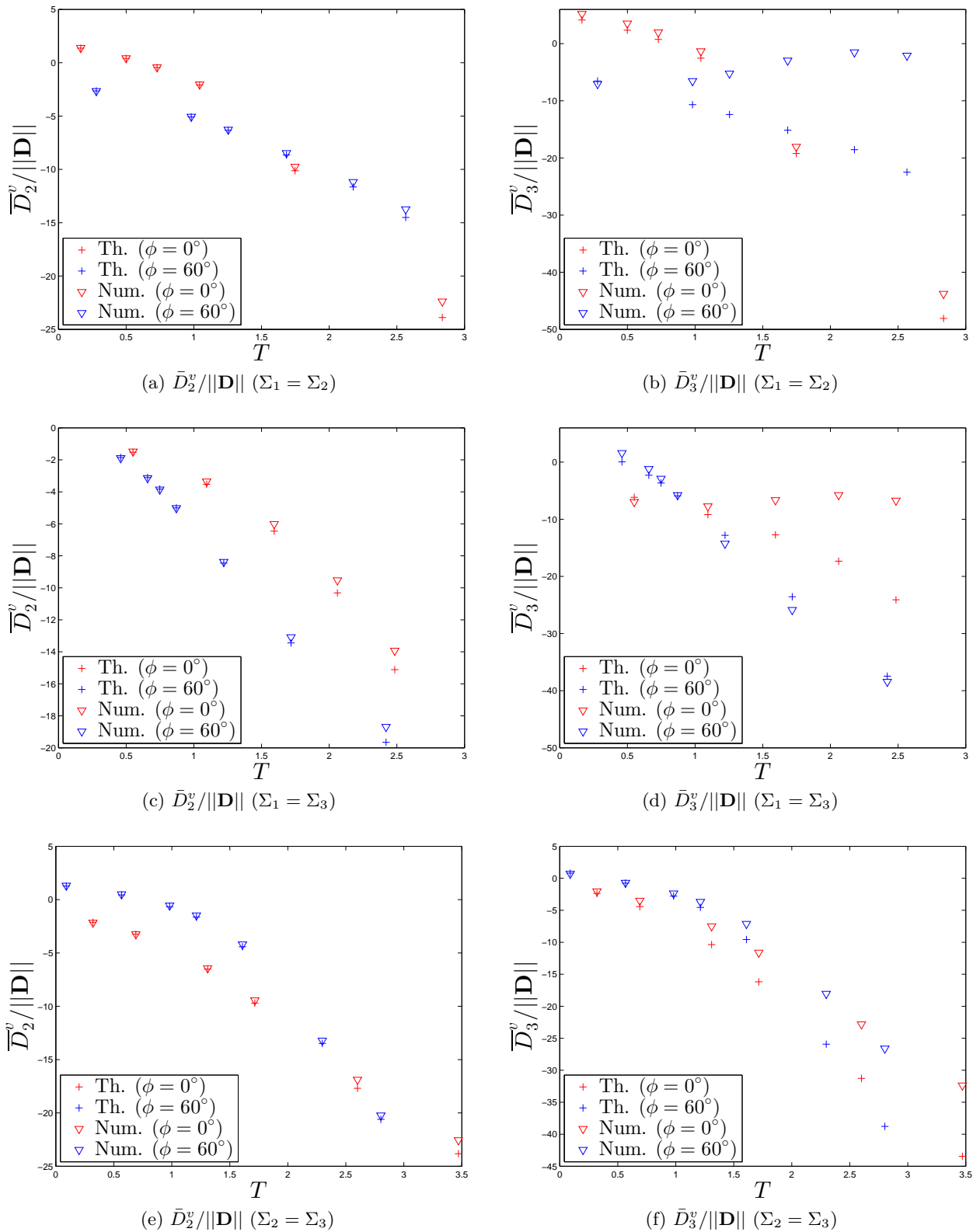


FIGURE 3.19: Etude de la déformation d'une cavité ellipsoïdale générale d'axes dans les proportions (10 : 2 : 1) et de porosité $f = 0.01$.

importantes sont observées à des triaxialités élevées, ce qui n'est pas très pénalisant car on s'attend dans ce cas là à avoir un effet important de grossissement des cavités plutôt que de déformation et de rotation. L'accord entre le modèle et les calculs numériques n'est pas parfait, mais semble être suffisant pour pouvoir envisager d'utiliser les corrections isotropes dans le contexte anisotrope pourvu

que l'anisotropie soit évidemment modérée, et que le tenseur d'Eshelby utilisé soit bien le tenseur correspondant au milieu anisotrope considéré.

3.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de qualifier et de compléter le critère de plasticité macroscopique pour des matériaux anisotropes contenant des vides ellipsoïdaux dérivé au chapitre 3, dans l'esprit des travaux de Madou (2012); Madou and Leblond (2013); Madou et al. (2013).

Dans un premier temps, nous avons étudié numériquement les surfaces de charge associées à des cavités ellipsoïdales dans une matrice anisotrope, par une méthode d'analyse limite numérique (voir Morin et al. (2014) et l'annexe E pour le détail de la méthode). Nous avons ainsi validé le critère pour un grand nombre de formes de cavités. Dans la plupart des cas, le modèle est en très bon accord avec les résultats numériques sauf parfois pour des géométries "extrêmes", comme des fissures ou des cylindres. Ces résultats numériques nous ont également permis d'étudier la loi d'écoulement macroscopique à travers certains rapports des déformations macroscopiques. Les résultats, légèrement moins bons que pour la surface de charge, restent néanmoins très satisfaisants.

La suite a été consacrée à l'étude de la déformation des cavités ellipsoïdales dans une matrice anisotrope, avec pour objectif de compléter le critère dérivé au chapitre 3 par des équations d'évolution de ses paramètres internes. Le développement d'un modèle théorique nous paraissant difficile voire impossible dans le cas anisotrope, nous avons décidé d'utiliser l'approche heuristique proposée par Madou et al. (2013) : (i) nous utilisons les lois élastiques pour la déformation et la rotation d'une cavité ellipsoïdale plongée dans un milieu élastique anisotrope (Kailasam and Ponte Castañeda, 1998); (ii) ces lois élastiques *anisotropes* sont ensuite adaptées au cas plastique en utilisant les facteurs correctifs obtenus pour le cas *isotrope* (Madou et al., 2013). Nous avons ensuite comparé les prédictions fournies par les formules analytiques avec des résultats numériques pour un matériau anisotrope, afin d'apprécier la pertinence des formules. Les résultats sont assez satisfaisants pour des triaxialités modérées et se dégradent pour des triaxialités élevées. Cela n'est probablement pas d'une grande importance, car en pratique pour les triaxialités élevées, le grossissement hydrostatique des cavités semble être leur mode de déformation majeur.

Complété par ces équations d'évolution des paramètres internes, le critère de plasticité dérivé au chapitre 2 constitue un modèle complet de rupture ductile pour les matériaux anisotropes contenant des vides ellipsoïdaux. Avant de pouvoir être utilisé, quelques points restent à préciser :

- Toute l'étude numérique de ce chapitre a été effectuée pour un seul matériau anisotrope. Des résultats supplémentaires pour d'autres matériaux seraient sans doute nécessaires pour bien qualifier le modèle.
- Récemment, Keralavarma et al. (2011) ont réalisé des calculs micromécaniques d'évolution sur des cellules cylindriques contenant des vides ellipsoïdaux et dont la matrice obéit à un critère anisotrope de Hill (1948). La comparaison entre les prédictions du modèle dérivé ici et ces résultats numériques serait une étape importante permettant de valider ensemble tous les éléments du modèle (critère, loi d'écoulement et évolution des paramètres internes).
- Enfin, la comparaison avec des expériences sur des éprouvettes entaillées d'alliages d'aluminium anisotropes (Benzerga et al., 2004b,a) permettrait également de valider le modèle.

PARTIE II

**Influence des effets de taille des cavités sur la
rupture ductile**

Etude numérique d'un modèle de croissance des cavités pour matériaux nanoporeux

Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement mécanique de matériaux ductile nanoporeux, en se basant sur des résultats théoriques récents obtenus par [Dormieux and Kondo \(2010\)](#). Dans un premier temps, nous validons le critère de plasticité macroscopique proposé par ces auteurs grâce à des analyses limites numériques réalisées à l'aide de la méthode des éléments finis. Cela a nécessité un traitement numérique particulier pour prendre en compte les effets d'interface à la frontière du vide. Ensuite, nous formulons un modèle complet de rupture ductile pour vides nanométriques, en dérivant les équations d'évolution des paramètres internes grâce à la propriété de normalité de la loi d'écoulement. En raison de la forme paramétrique de la surface de charge, une procédure spécifique est développée pour implémenter numériquement le modèle. Le problème de correction plastique du prédicteur élastique se réduit à la résolution de deux équations nonlinéaires couplées. Enfin, le modèle est appliqué à des chargements proportionnels, pour différents états de triaxialité. L'effet de taille a une influence importante sur le comportement mécanique et l'évolution de la porosité.

Ce chapitre est tiré d'un article publié ([Morin et al., 2015a](#)).

4.1 Introduction

Ductile fracture of metals occurs through growth and coalescence of voids. In order to describe the macroscopic behaviour of plastic porous materials, [Gurson \(1977\)](#) derived a model by combining homogenization and limit-analysis of a spherical (or cylindrical) cell made of a von Mises matrix containing a spherical (or cylindrical) void, and subjected to conditions of homogeneous boundary strain rate. [Gurson \(1977\)](#)'s model has been extended in several directions, including the consideration of void shape effects, by [Gologanu et al. \(1993, 1994, 1997\)](#); [Monchiet et al. \(2014\)](#) for spheroidal cavities, and more recently [Madou and Leblond \(2012a,b\)](#) for arbitrary ellipsoidal voids. Other extensions have been proposed in order to account for matrix plastic anisotropy, by [Benzerga and Besson \(2001\)](#) for spherical or cylindrical voids, and [Monchiet et al. \(2008\)](#); [Keralavarma and Benzerga \(2010\)](#) for spheroidal voids.

Despite their great interest in practical situations, none of the above models is suitable for the description of the growth of submicron voids. Indeed, it is well known that the plastic flow strength and the hardening of a solid depend on the gradient of the plastic strain; the effect is important for plastic deformations taking place at small scales, of the order of a micron or less, which is the case when submicron voids are present. To account for such effects, [Fleck and Hutchinson \(1993\)](#); [Fleck et al. \(1994\)](#); [Fleck and Hutchinson \(1997\)](#), developed a phenomenological model of plasticity known as strain gradient plasticity, whereby the material behavior depends on both the plastic strain and the plastic strain gradient. This model has permitted to evidence size effects in void growth, first for an isolated void ([Huang et al., 2000](#); [Fleck and Hutchinson, 2001](#)) and then for finite porosities ([Niordson, 2008](#)). In addition to these numerical works, [Monchiet and Bonnet \(2013\)](#) revisited [Gurson \(1977\)](#)'s homogenization of a hollow sphere, by considering a matrix obeying a strain gradient plasticity model; their yield criterion, obtained by introducing some approximations to calculate the macroscopic plastic dissipation, exhibited a void size dependency : when the void size decreases, the size of the yield locus

increases and the void growth rate decreases.

If size effects due to strain gradients are well understood for micron-sized voids, the physics of nano-sized voids, in contrast, is still in its infancy. Various atomistic simulations have evidenced a drastic increase of the strength of nanovoids (Traiviratana et al., 2008; Mi et al., 2011; Tang et al., 2014), due to the presence of surface effects at the interface between the bulk material and the empty void; these effects are commonly attributed to surface stresses and nucleation of dislocations. In order to account for them, Dormieux and Kondo (2010) extended Gurson (1977)'s model by representing the cavity surface through a stress interface model (Gurtin and Murdoch, 1975, 1978), that is by schematizing it as a thin layer obeying a plane stress von Mises (isotropic) criterion¹. This interface model consists in a simple heuristic continuum mechanics representation of crystalline plasticity that takes place at the nanoscale; even though this kind of criterion may be questionable at such a scale, it is acceptable as a first approximation and permits to perform analytically a limit-analysis of a hollow sphere including surface effects. The macroscopic yield criterion obtained by Dormieux and Kondo (2010) is expressed in terms of parametric equations of the macroscopic yield locus, and exhibits a void size dependency: again, the size of the yield locus increases when the pore size decreases.

The assessment of Dormieux and Kondo (2010)'s macroscopic yield criterion, and the numerical integration of the corresponding constitutive equations, which are needed for future applications of the model to the growth of nanosized voids, are the main objectives of this paper.

The paper is organized as follows:

- In Section 4.2, we numerically assess Dormieux and Kondo (2010)'s criterion by performing numerical limit-analyses of a hollow sphere with an interface model at the void's boundary, based on the standard finite element method including elasticity.
- The criterion is then completed in Section 4.3 by providing the flow rule and the evolution equations of the internal parameters.
- In Section 4.4, a numerical implementation of the complete model is proposed. The local algorithm of plastic correction of the elastic stress predictor is reduced to the resolution of two coupled nonlinear equations on two unknowns.
- Finally, section 4.5 provides a numerical application of the model, in the form of computation of the behavior of a homogeneous volume element subjected to some axisymmetric proportional loading at fixed stress triaxiality.

4.2 Numerical assessment of Dormieux and Kondo (2010)'s criterion

4.2.1 Dormieux and Kondo (2010)'s macroscopic criterion

We consider Dormieux and Kondo (2010)'s homogenized criterion for ductile nanoporous materials, which has been obtained from a limit-analysis of a single hollow sphere (see Figure 4.1).

The strength of the solid phase is described by a von Mises criterion:

$$\sigma_{\text{eq}}^2 = \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d \leq \sigma_0^2 \quad (4.1)$$

where σ_{eq} is the von Mises equivalent stress, $\boldsymbol{\sigma}_d$ the deviator of the stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ and σ_0 the yield stress in simple tension. The void size effect is introduced by accounting for the presence of an interface at the void's boundary. The strength of this interface is described by a 2D plane stress von Mises-type criterion:

$$\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_d^S : \boldsymbol{\sigma}_d^S \leq k_{\text{int}}^2 \quad (4.2)$$

where $\boldsymbol{\sigma}_d^S$ is the deviatoric part of the plane stress tensor $\boldsymbol{\sigma}^S$ and k_{int} represents the yield limit of the interface. (Note that the plane stress tensor $\boldsymbol{\sigma}^S$ is expressed in N/m, not in N/m²). The void size effect

1. Recently, Monchiet and Kondo (2013) extended Dormieux and Kondo (2010)'s work by considering Gologanu et al. (1993, 1994)'s criterion for spheroidal voids instead of that of Gurson (1977) for spherical ones.

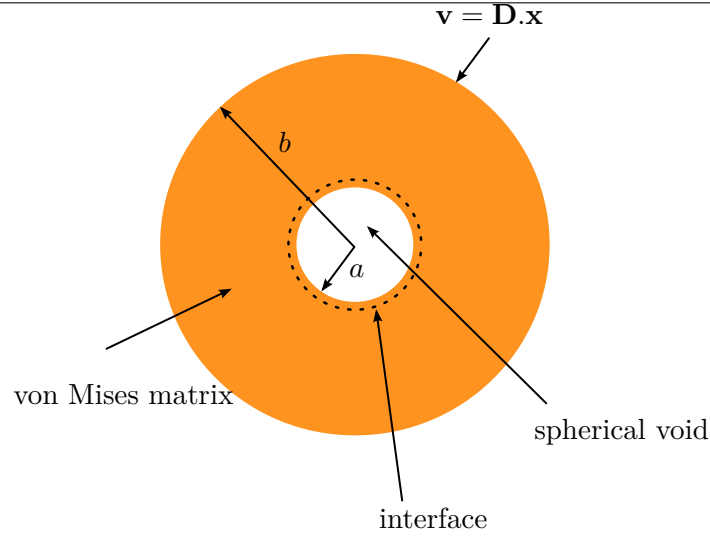


FIGURE 4.1: Representative Volume Element for the nanoporous material.

is thus characterized by a non-dimensional parameter Γ , depending on the void radius a , the interface strength k_{int} and the yield stress σ_0 , defined as :

$$\Gamma = \frac{k_{\text{int}}}{a\sigma_0}. \quad (4.3)$$

In the following, Γ will be referred to as the “interface non-dimensional parameter”.

Both the bulk material and the interface obey the plastic flow rule associated to the relevant yield criterion through normality.

The limit-analysis of the hollow sphere of internal radius a , external radius b , porosity $f = a^3/b^3$, taking account of a von Mises interface, leads to the following parametric equations of the macroscopic yield locus (Dormieux and Kondo, 2010) :

$$\begin{cases} \text{tr } \Sigma &= \sigma_0 \left[2 \left(\text{Argsinh}(\xi) - \text{Argsinh}(f\xi) \right) + \Gamma \frac{6\xi}{\sqrt{\xi^2 + 3/5}} \right] \\ \Sigma_{\text{eq}} &= \sigma_0 \left[\sqrt{1 + f^2\xi^2} - f\sqrt{1 + \xi^2} + \Gamma \frac{9f}{5\sqrt{\xi^2 + 3/5}} \right] \end{cases} \quad (4.4)$$

where Σ denotes the macroscopic stress tensor, Σ_{eq} the macroscopic von Mises equivalent stress, and the parameter $\xi = \frac{2}{f} \frac{D_m}{D_{\text{eq}}}$ is defined from the mean and equivalent deviatoric parts D_m , D_{eq} of the macroscopic strain rate \mathbf{D} .

4.2.2 Numerical limit-analysis

It has been shown by Madou and Leblond (2012b) that limit-analysis problems can be solved by the standard finite element method including elasticity, by using a large load increment without geometry update. Indeed, under such conditions the time-discretized equations of the finite element problem become equivalent to those of limit-analysis, provided that the local problem of “projection onto the yield locus” (plastic correction of the elastic stress predictor) is solved using an implicit algorithm.

We use the commercial finite element code SYSTUS[®] developed by ESI Group to perform the calculations. We consider a spherical cell Ω containing a concentric spherical void and subjected to conditions of homogeneous boundary strain (Mandel, 1964; Hill, 1967) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} \quad \text{on } \partial\Omega \quad (4.5)$$

where \mathbf{u} is the displacement, \mathbf{X} the initial position-vector, \mathbf{E} the overall strain tensor and $\partial\Omega$ the external boundary of the cell. The mesh, represented in Figure 4.2, consists of 26,481 nodes and 24,000 selectively subintegrated trilinear 8-node brick elements. The interface at the void's boundary is introduced using a 2D mesh consisting of 1,200 elements obeying a criterion of type (5.3).

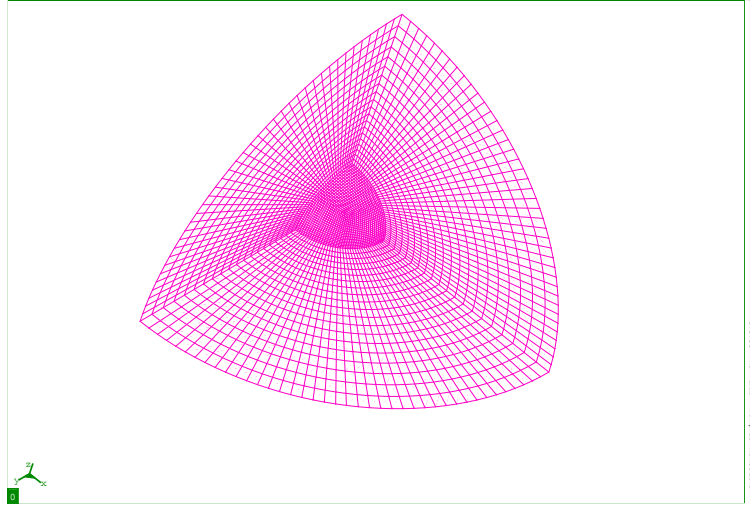


FIGURE 4.2: Spherical mesh used for the finite element simulations.

Higher level programmes have been developed to manage and exploit the calculations, and notably to compute the macroscopic stress tensor through the formula

$$\Sigma = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega-\omega} \sigma \, dV \quad (4.6)$$

where ω denotes the void and $\Omega - \omega$ the domain occupied by the solid matrix.

For the purpose of validation of the model, axisymmetric loadings are considered : $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} \neq 0$, $\Sigma_{33} \neq 0$, other $\Sigma_{ij} = 0$. A value $f = 0.01$ is adopted for the porosity, typical for ductile metals, once nucleation has taken place and before coalescence starts. In all the calculations, the values of the material constants are as follows : Young's modulus, $E = 200$ GPa; Poisson's ratio, $\nu = 0.499$ ²; yield stress in simple tension, $\sigma_0 = 400$ MPa; strength of the interface, $k_{\text{int}} = 1$ N/m. Note that the value considered for k_{int} is of the order of that calibrated by [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) from the atomistic simulations of [Mi et al. \(2011\)](#).

We investigate the yield locus for different values of the interface non-dimensional parameter $\Gamma = [0.25; 0.5; 1.25; 2.5]$, corresponding to values of the pore radius $a = [25; 10; 2; 1]$ nm. The theoretical and numerical yield loci are represented in Figure 4.3, in a plane $(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}, \frac{\Sigma_{11}-\Sigma_{33}}{\sigma_0})$, where $\Sigma_m = \frac{1}{3}(2\Sigma_{11} + \Sigma_{33})$ is the mean stress. [Gurson \(1977\)](#)'s yield locus, which corresponds to the case $\Gamma = 0$ in [Dormieux and Kondo \(2010\)](#)'s criterion, is also represented in order to highlight the effect of the void size.

The model predictions are in very good agreement with the numerical results in all the cases considered. In particular, the hydrostatic point is perfectly reproduced; this is not surprising since the trial velocity field used in the theoretical limit-analysis is exact in this case. However, a small discrepancy is observed for low stress triaxialities; in particular, for a purely deviatoric loading, a relative error of about 6 % is noted for $\Gamma = 2.5$.

2. This value ensuring elastic quasi-incompressibility facilitates convergence of the global elastoplastic iterations, without modifying the results; see [Madou and Leblond \(2012b\)](#).

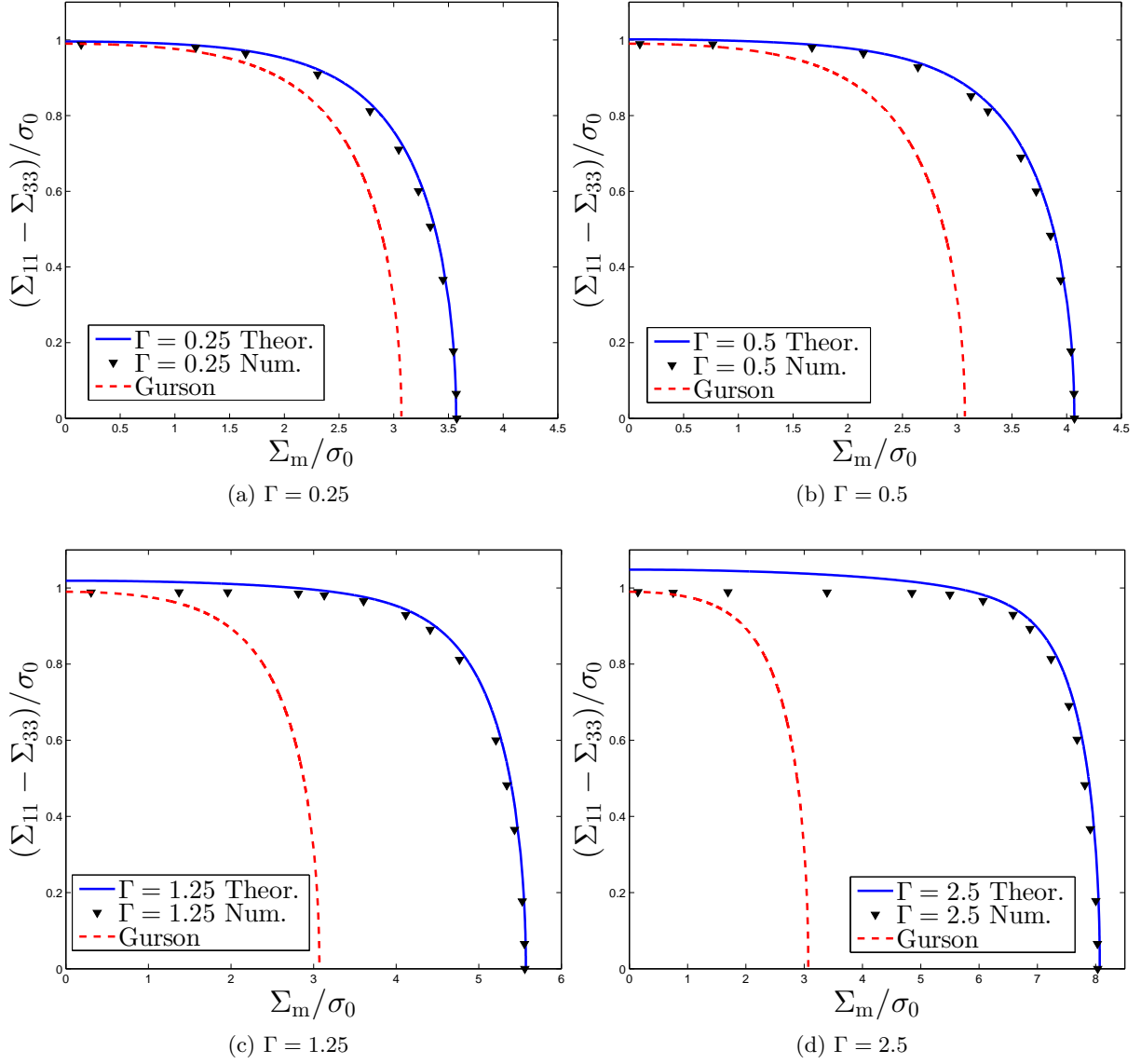


FIGURE 4.3: Yield loci for a porosity $f = 0.01$ and various pore sizes.

4.3 Formulation of the constitutive model

In order to complete the model, [Dormieux and Kondo \(2010\)](#)'s yield criterion must be supplemented with a plastic flow rule and some evolution equations for the internal parameters.

4.3.1 Macroscopic flow rule

Since the property of normality of the flow rule is preserved in the homogenization procedure (see [Rice \(1971\)](#) and [Gurson \(1977\)](#)), the macroscopic flow rule necessarily reads :

$$\mathbf{D}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma}) \quad , \quad \dot{\lambda} \begin{cases} = 0 & \text{if } \Phi(\boldsymbol{\Sigma}) < 0 \\ \geq 0 & \text{if } \Phi(\boldsymbol{\Sigma}) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

where \mathbf{D}^P denotes the plastic Eulerian strain rate, $\dot{\lambda}$ the plastic multiplier and $\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$ the macroscopic yield function.

Writing the flow rule (4.7) explicitly is more difficult than it may seem, since Dormieux and Kondo (2010)'s yield locus is defined by the parametric equations (4.4) and the corresponding yield function Φ has no explicit expression. To do so, write the criterion in the form :

$$\Phi[\Sigma_{\text{eq}}(\xi), \Sigma_{\text{m}}(\xi)] = 0 \quad , \quad \forall \xi. \quad (4.8)$$

Differentiation of this equation with respect to ξ yields

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_{\text{eq}}} \frac{d\Sigma_{\text{eq}}}{d\xi} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_{\text{m}}} \frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi} = 0 \quad , \quad \forall \xi. \quad (4.9)$$

This equation is illustrated in Figure 4.4; the vectors $\mathbf{A} = [\frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi}; \frac{d\Sigma_{\text{eq}}}{d\xi}]$ and $\mathbf{B} = [\frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_{\text{m}}}; \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_{\text{eq}}}]$ are respectively tangent and normal to the yield locus, and orthogonal.

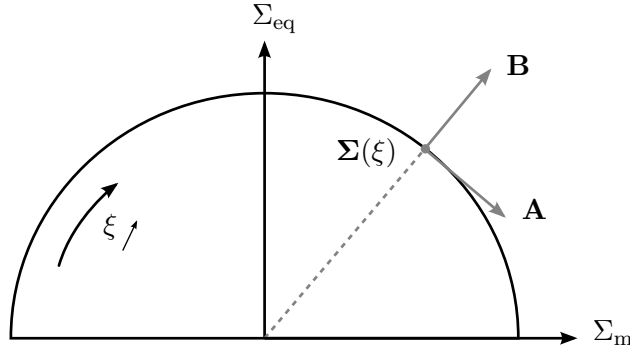


FIGURE 4.4: Tangent and normal vectors to a yield locus defined parametrically.

It follows that

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_{\text{m}}} = -C^2 \frac{d\Sigma_{\text{eq}}}{d\xi} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_{\text{eq}}} = C^2 \frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi} \end{cases} \quad (4.10)$$

where C is a real number depending on ξ . Separating the mean and deviatoric parts in $\frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma}$, one readily sees that :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma} = \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_{\text{m}}} \frac{\partial\Sigma_{\text{m}}}{\partial\Sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_{\text{eq}}} \frac{\partial\Sigma_{\text{eq}}}{\partial\Sigma} = -C^2 \frac{d\Sigma_{\text{eq}}}{d\xi} \frac{1}{3} \mathbf{I} + C^2 \frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi} \frac{3}{2} \frac{\Sigma_{\text{d}}}{\Sigma_{\text{eq}}} \quad (4.11)$$

where Σ_{d} is the deviatoric part of Σ . The flow rule then reads

$$\mathbf{D}^{\text{P}} = \dot{\lambda} \left(-\frac{d\Sigma_{\text{eq}}}{d\xi} \frac{1}{3} \mathbf{I} + \frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi} \frac{3}{2} \frac{\Sigma_{\text{d}}}{\Sigma_{\text{eq}}} \right) \quad (4.12)$$

where the factor C^2 has been incorporated into the plastic multiplier $\dot{\lambda}$.

4.3.2 Evolution of internal parameters

Evolution equations must be provided for the internal parameters of the model, namely the porosity f , the pore radius a and the yield limit.

Owing to the incompressibility of the matrix (the slight elastic compressibility being disregarded), the evolution of the porosity is classically given by :

$$\dot{f} = (1 - f) \text{tr } \mathbf{D}^{\text{P}}. \quad (4.13)$$

To derive the rate of the void size, note that the matrix incompressibility implies that $\dot{w} = \dot{\Omega}$. Consequently,

$$\dot{f} = \frac{d}{dt} \left(\frac{w}{\Omega} \right) = \frac{\dot{w}}{\Omega} - \frac{w}{\Omega^2} \dot{\Omega} = f(1-f) \frac{\dot{w}}{w} = 3f(1-f) \frac{\dot{a}}{a}.$$

The evolution law of the pore radius a therefore reads

$$\dot{a} = \frac{a}{3f(1-f)} \dot{f}. \quad (4.14)$$

Finally, the above evolution equations are supplemented with an isotropic hardening law. This is done by following [Gurson \(1977\)](#)'s classical heuristic approach. The constant yield limit σ_0 of [Dormieux and Kondo \(2010\)](#)'s criterion is thus replaced by some "average yield stress" $\bar{\sigma}$ given by :

$$\bar{\sigma} \equiv \sigma(\bar{\epsilon}) \quad (4.15)$$

where $\sigma(\epsilon)$ is a function providing the local yield limit as a function of the local cumulated plastic strain ϵ , and $\bar{\epsilon}$ represents some "average equivalent strain" in the heterogeneous, porous material. The evolution of $\bar{\epsilon}$ is governed by the following equation :

$$(1-f) \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} = \mathbf{\Sigma} : \mathbf{D}^p \quad (4.16)$$

which expresses the heuristic assumption that the plastic dissipation in the heterogeneous porous material is equal to that in a fictitious "equivalent" homogeneous material with equivalent strain $\bar{\epsilon}$ and yield stress $\bar{\sigma}$.

4.4 Numerical implementation

In the following, we concentrate on the local step of the elastoplastic solution, consisting in "projecting" the elastic stress predictor onto the yield locus, that is in applying the required plastic correction to it.

4.4.1 Generalities

[Halphen and Nguyen \(1975\)](#); [Son \(1977\)](#) have defined, in the framework of linearized theory, the class of "generalized standard" materials. Roughly speaking, these are materials for which the internal parameters collectively verify an "extended normality rule". For this class of materials, the local projection problem has a unique solution, provided that the evolution equations of the internal parameters are discretized in time with an implicit scheme.

Following the same lines as in ([Enakoutsa et al., 2007](#)), one may show that the model considered here defines a generalized standard material, provided that : (i) the framework considered is the linearized theory ; (ii) the pore radius and the porosity are not allowed to vary. (The internal parameters then reduce to \mathbf{E}^p and $\bar{\epsilon}$).

Unfortunately, these restrictions are not realistic for ductile fracture problems, since the strains involved are large and the growth of the porosity important. However, following again ([Enakoutsa et al., 2007](#)), one may note that

- if, in the hypoelasticity law, the additional terms due to the objective time-derivative of $\mathbf{\Sigma}$ are discretized in time with an explicit scheme ;
- if, in the criterion and the flow rule, the porosity and the pore radius considered are those at the previous time-step,

then the equations of the local problem of projection are exactly the same as in the linearized framework with fixed porosity and pore radius, implying that for this problem of projection, the model behaves *as if* the material were generalized standard.

Thus, the existence and uniqueness of the solution of the projection problem are ensured, provided that (i) the evolution equations of \mathbf{E}^p and $\bar{\epsilon}$ are discretized in time with an *implicit scheme*; (ii) the additional terms due to the objective time-derivative of Σ are discretized in time using an *explicit scheme*; (iii) the values of f and a used in the criterion and the flow rule are those at the *preceding time-step*.

4.4.2 Equations of the local projection problem

For simplicity reasons, the algorithm is presented only in the context of small strains; its extension to large strains does not raise any specific difficulties.

The constitutive equations of the model, prior to time-discretization, may be summarized as follows :

Decomposition of the total strain : $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$

Isotropic elasticity law : $\Sigma = (3\kappa\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K}) : \mathbf{E}^e$

Plasticity criterion : $\Phi(\Sigma, f, \Gamma, \bar{\sigma}) \leq 0$

Flow rule and consistency conditions : $\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}(\Sigma, f, \Gamma, \bar{\sigma})$, $\dot{\lambda} \geq 0$, $\dot{\lambda} \Phi(\Sigma, f, \Gamma, \bar{\sigma}) = 0$

Strain hardening law : $\bar{\sigma} \equiv \sigma(\bar{\epsilon})$, $(1 - f)\bar{\sigma}\dot{\bar{\epsilon}} = \Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p$

where \mathbf{E}^e is the elastic strain tensor, \mathbf{E}^p the plastic strain tensor, \mathbb{J} the spherical projection tensor, \mathbb{K} the deviatoric projection tensor, κ the elastic bulk modulus and μ the elastic shear modulus.

Subsequently to time-discretization, the local projection problem consists in finding the mechanical state $\mathcal{S}_{n+1} = \{\mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}^p, \Sigma_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}\}$ at time t_{n+1} resulting from a given, known strain increment $\Delta \mathbf{E}_n$ (resulting from a global elastoplastic iteration), knowing the previous mechanical state $\mathcal{S}_n = \{\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n^p, \Sigma_n, \bar{\epsilon}_n\}$ at time t_n .

Following the discussion in Subsection 4.4.1, the yield criterion and the flow rule are discretized using an implicit scheme with respect to \mathbf{E}^p and $\bar{\epsilon}$, but an explicit one with respect to f and Γ , so that the complete equations of the projection problem read :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Sigma_{n+1} & = \Sigma_{n+1}^{\text{elas}} - (3\kappa\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K}) : \Delta \mathbf{E}_n^p \\ \Phi(\Sigma_{n+1}, f_n, \Gamma_n, \bar{\sigma}_{n+1}) & \leq 0 \\ \Delta \mathbf{E}_n^p & = \Delta \lambda_n \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}(\Sigma_{n+1}, f_n, \Gamma_n, \bar{\sigma}_{n+1}) \\ \Delta \lambda_n & \geq 0 \\ \Delta \lambda_n \Phi(\Sigma_{n+1}, f_n, \Gamma_n, \bar{\sigma}_{n+1}) & = 0 \\ \bar{\sigma}_{n+1} & = \sigma(\bar{\epsilon}_n + \Delta \bar{\epsilon}_n) \\ (1 - f_n)\bar{\sigma}_{n+1}\Delta \bar{\epsilon}_n & = \Sigma_{n+1} : \Delta \mathbf{E}_n^p \end{array} \right. \quad (4.17)$$

where $\Sigma_{n+1}^{\text{elas}} = \Sigma_n + (3\kappa\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K}) : \Delta \mathbf{E}_n$ is the elastic predictor, that is the stress tensor at time t_{n+1} resulting from the strain increment $\Delta \mathbf{E}_n$ fictitiously considered as purely elastic.

4.4.3 Algorithm of solution of the local projection problem

The treatment of hardening is done using a “fixed point” method : (i) assume that $\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_n$; (ii) compute $\mathbf{E}_{n+1}^p, \Sigma_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}$ with this initial value of $\bar{\sigma}_{n+1}$; (iii) deduce from equation (4.17)₆ a refined estimate of $\bar{\sigma}_{n+1}$; (iv) follow up the procedure until $\bar{\sigma}_{n+1}$ reaches a stationary value. (In practice the “fixed point” method converges quickly since hardening effects are relatively small).

The problem is thus reduced to the sole determination of \mathbf{E}_{n+1}^p , Σ_{n+1} , $\bar{\epsilon}_{n+1}$ for a fixed value of $\bar{\sigma}_{n+1}$, which will now be discussed.

The parametric form (4.4) of the yield locus is a particular feature of the model which necessitates a specific numerical procedure. Two cases must be distinguished.

Elastic evolution Owing to the lack of explicit expression of the criterion, the condition $\Phi(\Sigma_{n+1}^{\text{elas}}, f_n, \Gamma_n, \bar{\sigma}_{n+1}) \leq 0$, indicating if the evolution is purely elastic, cannot be directly considered. However, the situation is clear when the elastic predictor $\Sigma_{n+1}^{\text{elas}}$ is represented in the plane $(\Sigma_m, \Sigma_{\text{eq}})$ (see Figure 4.5) : the elastic predictor is plastically admissible when it lies within the elastic domain (point $\Sigma_{n+1}^{\text{elas}(1)}$ in the graph) but not when it lies outside it (point $\Sigma_{n+1}^{\text{elas}(2)}$ in the graph). Consequently the condition $\Phi(\Sigma_{n+1}^{\text{elas}}, f_n, \Gamma_n, \bar{\sigma}_{n+1}) \leq 0$ may be studied in three steps :

- Compute the stress triaxiality of the elastic predictor : $T_{n+1}^{\text{elas}} = \Sigma_{n+1,m}^{\text{elas}} / \Sigma_{n+1,\text{eq}}^{\text{elas}}$.
- Find the stress $\Sigma(\xi_{n+1}, f_n, \Gamma_n, \bar{\sigma}_{n+1})$ on the yield surface having the same stress triaxiality as the elastic predictor. The triaxiality of this stress is given by :

$$T(\xi_{n+1}, f_n, \Gamma_n) = \frac{2(\text{Argsinh}(\xi_{n+1}) - \text{Argsinh}(f_n \xi_{n+1})) + \Gamma \frac{6\xi_{n+1}}{\sqrt{\xi_{n+1}^2 + 3/5}}}{3 \left(\sqrt{1 + f_n^2 \xi_{n+1}^2} - f_n \sqrt{1 + \xi_{n+1}^2} + \Gamma \frac{9f_n}{5\sqrt{\xi_{n+1}^2 + 3/5}} \right)}. \quad (4.18)$$

Therefore the parameter ξ_{n+1} obeys the nonlinear equation

$$G_1(\xi_{n+1}) = T(\xi_{n+1}, f_n, \Gamma_n) - T_{n+1}^{\text{elas}} = 0 \quad (4.19)$$

which may be solved for instance using a Newton method. Let ξ_{n+1}^{elas} denote the solution of this equation.

- The elastic predictor is plastically admissible if

$$\Sigma_{n+1,m}^{\text{elas}2} + \Sigma_{n+1,\text{eq}}^{\text{elas}2} \leq \Sigma_m^2(\xi_{n+1}^{\text{elas}}, f_n, \Gamma_n, \bar{\sigma}_{n+1}) + \Sigma_{\text{eq}}^2(\xi_{n+1}^{\text{elas}}, f_n, \Gamma_n, \bar{\sigma}_{n+1}) \quad (4.20)$$

and the final mechanical state is then given by

$$\begin{cases} \Sigma_{n+1} &= \Sigma_{n+1}^{\text{elas}} \\ \mathbf{E}_{n+1}^p &= \mathbf{E}_n^p. \end{cases} \quad (4.21)$$

However, if inequality (4.20) is not satisfied, the elastic predictor is not plastically admissible and a plastic correction is needed.

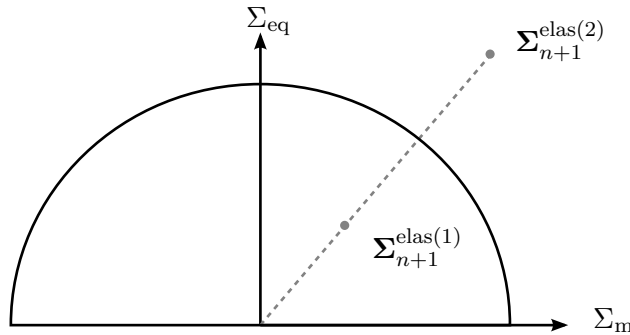


FIGURE 4.5: Plastically admissible and inadmissible stress predictors.

Elasto-plastic evolution Let us rewrite Σ_{n+1} , using equations (4.17)₁ and (4.12), in the form

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_{n+1}^{\text{elas}} + \Delta\lambda_n \left(\kappa \frac{d\Sigma_{\text{eq}}}{d\xi} \mathbf{I} - 3\mu \frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi} \frac{\Sigma_{n+1,\text{d}}}{\Sigma_{n+1,\text{eq}}} \right). \quad (4.22)$$

Separating the mean and deviatoric parts in this equation, one gets :

$$\begin{cases} \Sigma_{n+1,\text{m}} &= \Sigma_{n+1,\text{m}}^{\text{elas}} + \kappa \Delta\lambda_n \frac{d\Sigma_{\text{eq}}}{d\xi}(\xi_{n+1}) \\ \Sigma_{n+1,\text{d}} &= \Sigma_{n+1,\text{d}}^{\text{elas}} - 3\mu \Delta\lambda_n \frac{\Sigma_{n+1,\text{d}}}{\Sigma_{n+1,\text{eq}}} \frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi}(\xi_{n+1}). \end{cases} \quad (4.23)$$

Equation (4.23)₂ implies that $\left(1 + 3\mu \frac{\Delta\lambda_n}{\Sigma_{n+1,\text{eq}}} \frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi}(\xi_{n+1})\right) \Sigma_{n+1,\text{d}} = \Sigma_{n+1,\text{d}}^{\text{elas}}$. Taking the “von Mises norm” of both sides here, one gets $\Sigma_{n+1,\text{eq}} + 3\mu \Delta\lambda_n \frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi}(\xi_{n+1}) = \Sigma_{n+1,\text{eq}}^{\text{elas}}$, which implies that

$$\Sigma_{n+1,\text{eq}} = \Sigma_{n+1,\text{eq}}^{\text{elas}} - 3\mu \Delta\lambda_n \frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi}(\xi_{n+1}). \quad (4.24)$$

The final stress Σ_{n+1} must lie on the yield locus so that the mean and equivalent stresses must satisfy the conditions

$$\begin{cases} \Sigma_{n+1,\text{m}} &= \Sigma_{n+1,\text{m}}(\xi_{n+1}) \\ \Sigma_{n+1,\text{eq}} &= \Sigma_{n+1,\text{eq}}(\xi_{n+1}) \end{cases} \quad (4.25)$$

where the expressions of $\Sigma_{\text{m}}(\xi)$ and $\Sigma_{\text{eq}}(\xi)$ are given by equations (4.4). Thus equations (4.23)₁ and (4.24) may be rewritten in the form

$$\begin{cases} \Sigma_{n+1,\text{m}}(\xi_{n+1}) &= \Sigma_{n+1,\text{m}}^{\text{elas}} + \kappa \Delta\lambda_n \frac{d\Sigma_{\text{eq}}}{d\xi}(\xi_{n+1}) \\ \Sigma_{n+1,\text{eq}}(\xi_{n+1}) &= \Sigma_{n+1,\text{eq}}^{\text{elas}} - 3\mu \Delta\lambda_n \frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi}(\xi_{n+1}). \end{cases} \quad (4.26)$$

System (4.26) consists of two coupled nonlinear equations on the two unknowns ξ_{n+1} and $\Delta\lambda_n$.

Using the second one, one gets

$$\Delta\lambda_n = \frac{\Sigma_{n+1,\text{eq}}^{\text{elas}} - \Sigma_{n+1,\text{eq}}(\xi_{n+1})}{3\mu \frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi}(\xi_{n+1})}. \quad (4.27)$$

Inserting this result into the first one, one gets

$$G_2(\xi_{n+1}) = \Sigma_{n+1,\text{m}}(\xi_{n+1}) - \Sigma_{n+1,\text{m}}^{\text{elas}} - \frac{\kappa}{3\mu} \left[\Sigma_{n+1,\text{eq}}^{\text{elas}} - \Sigma_{n+1,\text{eq}}(\xi_{n+1}) \right] \frac{\frac{d\Sigma_{\text{eq}}}{d\xi}(\xi_{n+1})}{\frac{d\Sigma_{\text{m}}}{d\xi}(\xi_{n+1})} = 0 \quad (4.28)$$

which is a nonlinear equation on the sole unknown ξ_{n+1} , which may again be solved using a Newton method. Once ξ_{n+1} is known, $\Delta\lambda_n$ is deduced from equation (4.27), Σ_{n+1} from equations (4.23), and $\bar{\epsilon}_{n+1}$ from equation (4.17)₇.

4.4.4 Update of internal parameters

At the very end of the global elastoplastic iterations, once \mathbf{E}_{n+1}^p , Σ_{n+1} , $\bar{\epsilon}_{n+1}$ have reached their stationary values, the porosity and the pore radius are updated using an explicit scheme :

$$\begin{cases} f_{n+1} &= f_n + \Delta f_n \\ a_{n+1} &= a_n + \Delta a_n \end{cases} \quad (4.29)$$

where the increments of porosity and pore size Δf_n , Δa_n are given by

$$\begin{cases} \Delta f_n &= (1 - f_n) \text{tr} \Delta \mathbf{E}_n^p \\ \Delta a_n &= \frac{a_n \Delta f_n}{3f_n(1 - f_n)}. \end{cases} \quad (4.30)$$

The value of the interface non-dimensional parameter at time t_{n+1} then follows :

$$\Gamma_{n+1} = \frac{k_{\text{int}}}{a_{n+1} \bar{\sigma}_{n+1}}. \quad (4.31)$$

4.5 Application to an axisymmetric proportional loading example

4.5.1 Description of the simulations

We study the response of an elementary volume predicted by the complete model for an axisymmetric proportional loading with major axial stress, under conditions of fixed stress triaxiality $T = \Sigma_m / \Sigma_{eq}$. The non-zero components of the macroscopic stress tensor are :

$$\begin{cases} \Sigma_{11} &= \Sigma_{22} = \Sigma_m - \frac{1}{3} \Sigma_{eq} \\ \Sigma_{33} &= \Sigma_m + \frac{2}{3} \Sigma_{eq} \end{cases} \quad (4.32)$$

The matrix is supposed to obey the following power hardening law :

$$\sigma(\epsilon) = \sigma_0 \left(1 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^n \quad (4.33)$$

with $\epsilon_0 = \sigma_0 / E$, where E is Young's modulus, n the strain hardening exponent and ϵ the cumulated plastic strain. The values of the parameters considered are given in Table 4.1.

Note that the aim of the simulations being to follow the evolution of the stresses and internal parameters, these internal parameters are constantly updated, unlike in the numerical limit-analyses reported in Subsection 4.2.2 where they were fixed.

4.5.2 Numerical results

We report the evolution of the macroscopic equivalent stress, the porosity and the void size, for two initial porosities and various pore sizes and loading paths.

Case of a small initial porosity We first consider a small initial porosity $f_0 = 0.001$. The evolutions of the normalized equivalent stress, porosity and normalized pore radius are plotted in Figures 4.6a, 4.6c and 4.6e respectively for a stress triaxiality $T = 1$, and in Figures 4.6b, 4.6d and 4.6f for $T = 3$, versus the overall equivalent strain E_{eq} .

For the moderate triaxiality $T = 1$, a notable difference is observed between the prediction of Gurson's model and those of the model for nanoporous materials. The stress softening starting at $E_{eq} \sim 1$ for Gurson's model is not generally predicted by the model for nanoporous materials : indeed for

Quantity	Symbol	Value
Young modulus	E	200 GPa
Poisson's ratio	ν	0.3
Yield limit	σ_0	400 MPa
Strain hardening exponent	n	0.1
Initial porosity	f_0	[0.001; 0.01]
Interface strength	k_{int}	1 N/m
Initial pore radius	a_0	$[\infty; 5; 2; 1]$ nm
Initial non-dimensional interface parameter	Γ_0	[0; 0.5; 1.25; 2.5]
Triaxiality	T	[1; 3]

TABLE 4.1: Values of the parameters considered for the numerical simulations

$\Gamma = 0.5$, one observes a small softening starting at $E_{eq} \sim 1.8$, and for higher values of Γ , the response follows that of the sound material without any softening. This is due to the evolution of the porosity, which grows less quickly when the initial non-dimensional parameter Γ_0 increases, that is when the initial pore size decreases. Similarly, the evolution of the normalized pore size is less important when the initial pore radius decreases.

For a high triaxiality $T = 3$, we observe the same general trends for the porosity and the normalized pore radius; however in this case, an important stress softening is observed not only for Gurson's model but also for the void size dependent model. This softening effect is delayed when the initial pore radius decreases.

Case of a moderate initial porosity We now consider a moderate initial porosity $f_0 = 0.01$. The evolutions of the normalized equivalent stress, porosity and normalized pore radius are plotted in Figures 4.7a, 4.7c and 4.7e respectively for a stress triaxiality $T = 1$ and in Figures 4.6b, 4.7d and 4.7f for $T = 3$.

The same trends are observed in this case, including in particular a reduction of the stress softening when the initial pore size decreases. However, Figure 4.7a exhibits a peculiar feature for the highest value of the non-dimensional interface parameter, $\Gamma_0 = 2.5$: the equivalent stress is in this case greater at all times than the yield limit of the sound material. This of course arises from the additional strength due to the interface.

4.5.3 Discussion

The above numerical study of ductile nanoporous materials has exhibited some interesting features. The following comments are in order :

- The main effect is a reduction of the porosity growth when the non-dimensional interface parameter increases : for the same volume fraction, small voids are harder to open than big ones. A direct consequence is a delay of the stress softening when the pore size decreases.
- In the special case of initial high porosity and small pore radius, the nanoporous material exhibits some peculiar features : under such circumstances, the equivalent stress can be greater than the yield limit of the sound material, which means that the strength of the nanoporous material can be higher than that of the sound material (see Figure 4.7a). This unusual behaviour is a

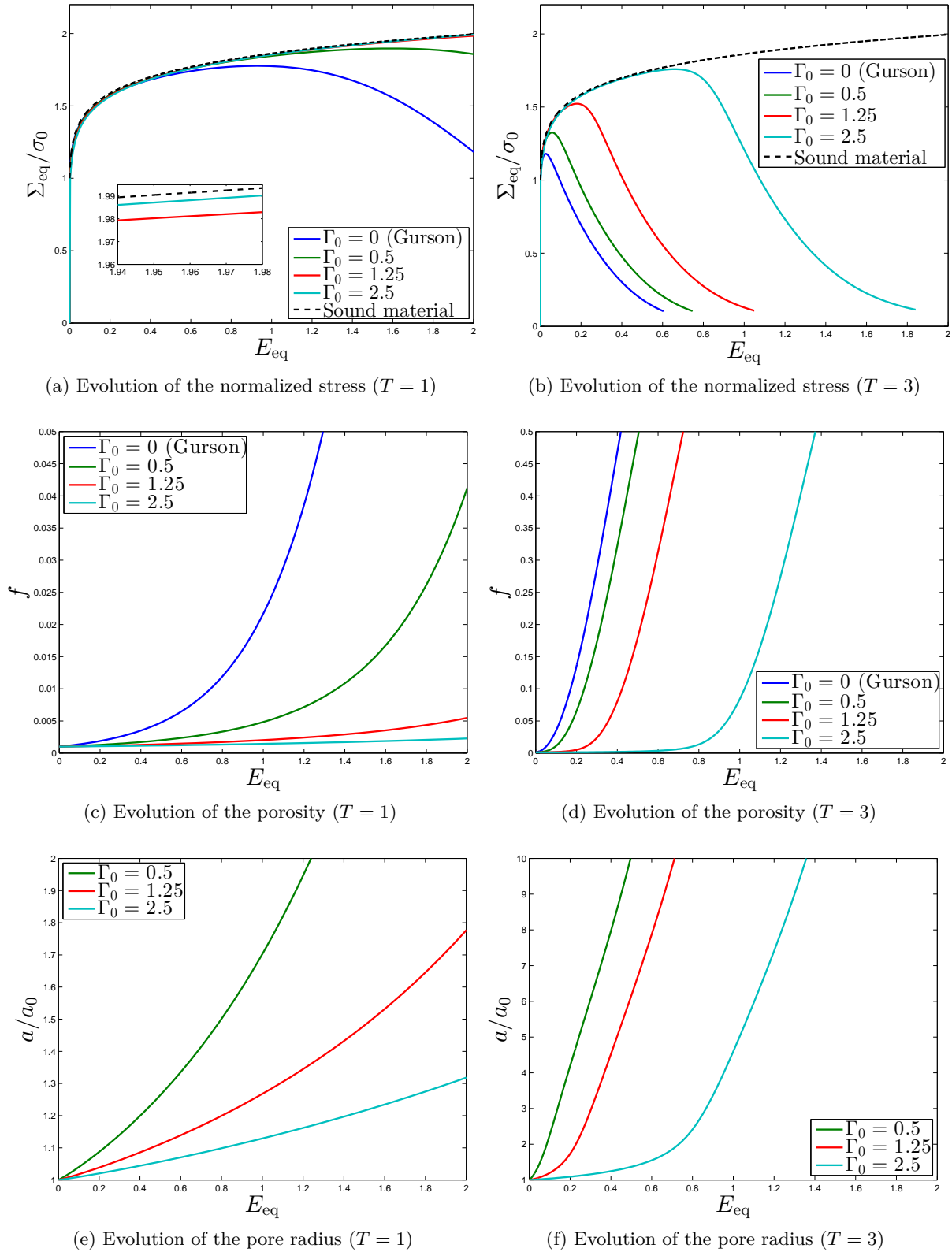


FIGURE 4.6: Predictions of the model for $f_0 = 0.001$

direct consequence of interface effects which, for high porosities, can overcome volumetric ones and strengthen the material.

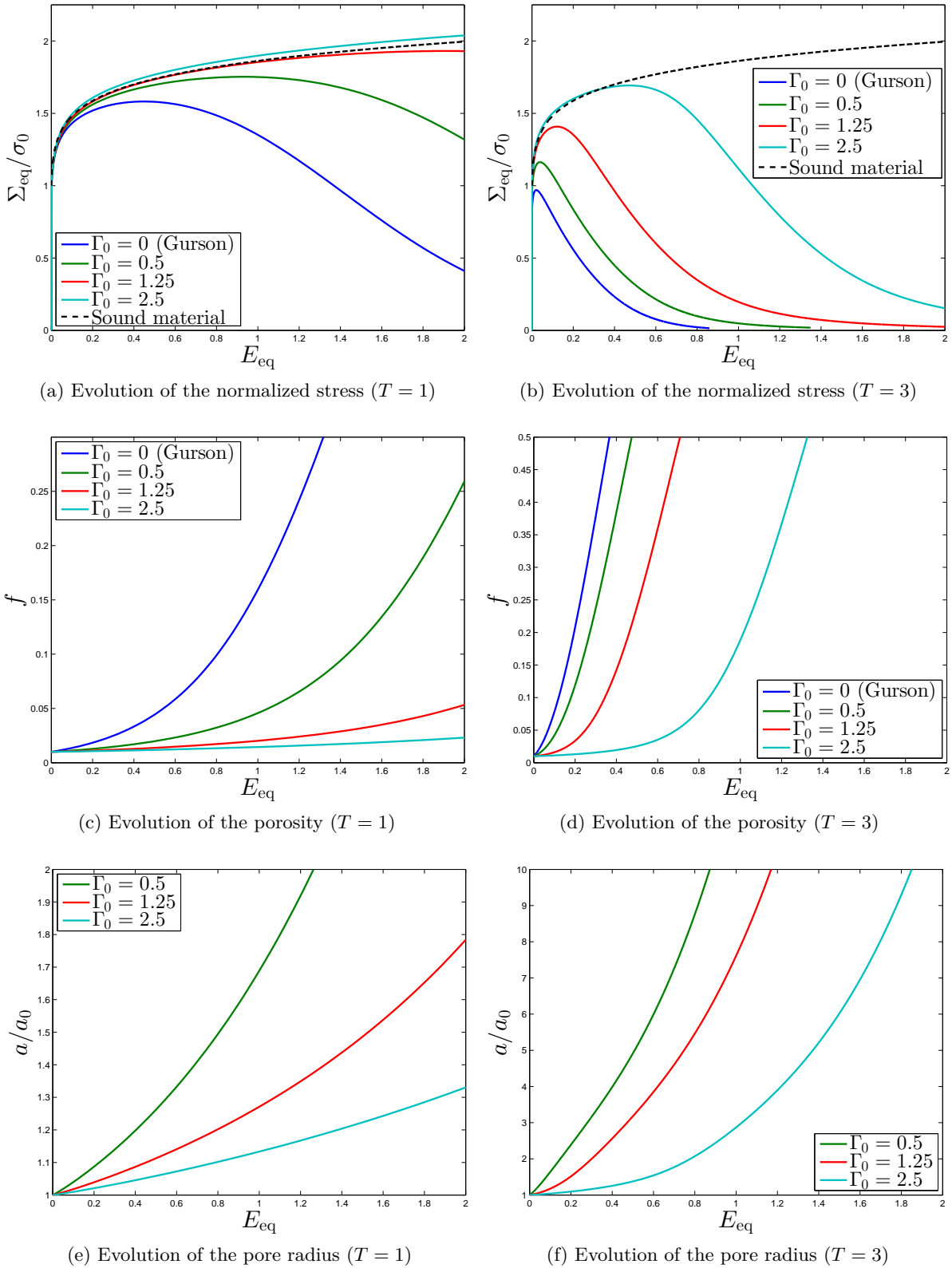


FIGURE 4.7: Predictions of the model for $f_0 = 0.01$

4.6 Conclusion

Using the recent macroscopic criterion derived by [Dormieux and Kondo \(2010\)](#) for plastic porous materials including void size effects, we investigated in this study the ductile behavior of nanoporous

materials.

In a first step, we performed numerical finite element limit-analyses of the nanoporous medium; interface effects were introduced by using 2D elements obeying a plane stress von Mises criterion to model the void's boundary. This allowed us to assess the macroscopic criterion considered. The numerical results were found to be in very good agreement with the analytical criterion, except near the deviatoric point where a small discrepancy was observed.

We then formulated a complete constitutive model for ductile nanoporous media by supplementing [Dormieux and Kondo \(2010\)](#)'s criterion with a plastic flow rule, some evolution equations for the porosity and the pore radius, and a hardening law.

Then a numerical implementation of the constitutive model based on the finite element method was proposed. Emphasis was put on the local step of the elastoplasticity problem. Care was taken to define the algorithm of solution in such a way that it be equivalent to that for a generalized standard material, thus ensuring the existence and uniqueness of the solution of the local problem of projection. This problem was shown to reduce to finding the solution of two nonlinear coupled equations.

The predictions of the model were finally investigated for axisymmetric loadings with major axial stress under conditions of fixed stress triaxiality. The main observation was a reduction of the increase of the porosity, enhanced by a decrease of the pore radius, and resulting in a delay of the occurrence of stress softening. In the particular case of high initial porosity and small pore size, the strength of the porous material may even be greater than that of the sound one.

The present numerical study has shown that the model proposed for ductile nanoporous solids incorporates a strong void size effect. However, some further developments are needed in the following directions :

- There is still a lack of data on the interface characteristics considered in the model. Atomistic simulations focusing on the entire yield locus of nanoporous materials are currently undertaken in order to calibrate k_{int} . However, experimental or numerical values of this coefficient would still be welcome.
- Since the model considered in this work has been derived for a spherical geometry, it is not suitable for low stress triaxiality states ($T < 1$) for which void shape effects are known to be important ([Gologanu et al., 1993, 1994, 1997](#)). A first step to extend the model to spheroidal voids has recently been made by [Monchiet and Kondo \(2013\)](#); this calls for an extension of the present study considering the combined effects of void shape and size. Moreover a theoretical model for materials containing general ellipsoidal nanocavities is yet to be derived.
- It would now be interesting to test the model on an actual structure/test specimen, in order to understand more deeply the behavior of ductile nanoporous materials. Note however that the model considered here won't prevent the mesh dependency. Indeed, even though the model exhibits a void size effect, it does not eliminate softening and thus will suffer from the same unlimited localization of strain and damage as [Gurson \(1977\)](#)'s model. To overcome this drawback, one could use for instance a nonlocal evolution equation for the porosity, as was done by [Leblond et al. \(1994a\)](#); [Enakoutsu et al. \(2007\)](#).

Etude du couplage entre effets de forme et de taille des cavités

Ce chapitre est consacré à l'étude de la résistance de matériaux nanoporeux contenant des vides sphéroïdaux. Récemment, [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) ont combiné les effets de forme et de taille des cavités en étendant le critère de [Dormieux and Kondo \(2010\)](#) aux vides sphéroïdaux. Après avoir rappelé leur critère, nous dérivons un critère pour des vides cylindriques ayant la vertu d'être complètement explicite. Des analyses limites numériques basées sur la méthode des éléments finis nous permettent d'évaluer les critères théoriques pour les matériaux nanoporeux contenant des cavités sphéroïdales.

5.1 Introduction

Le modèle le plus célèbre de rupture ductile ([Gurson, 1977](#)) a été obtenu par l'analyse limite d'une cellule sphérique contenant un vide sphérique. La prise en compte des effets de forme des cavités est cruciale dans la modélisation des problèmes de rupture ductile. En effet, il a été observé expérimentalement et numériquement que les cavités se déforment et tournent sous l'effet du chargement et ne restent donc généralement pas sphériques. Dans ce contexte, [Gologanu et al. \(1993, 1994, 1997\)](#) et également [Garajeu \(1995\)](#) ont étendu le modèle de [Gurson \(1977\)](#) au cas des vides sphéroïdaux. Le modèle GLD a permis de reproduire des calculs micromécaniques axisymétriques à triaxialité fixée, notamment pour des cas de faible triaxialité où les effets de forme sont importants ([Pardoan and Hutchinson, 2000](#)). Récemment, ([Madou and Leblond, 2012a,b, 2013](#); [Madou et al., 2013](#)) ont étendu les précédents critères au cas des cavités ellipsoïdales générales. Au chapitre 1, nous avons vu que leur modèle permettait de reproduire la plupart des simulations micromécaniques et notamment celles comportant un cisaillement.

Ces modèles, dont l'intérêt pratique a été démontré dans de nombreux travaux, ne permettent cependant pas de décrire la croissance de vides dont la taille est inférieure au micron. A cette échelle, des effets de taille des cavités peuvent notamment apparaître à cause des importants gradients de déformation. Dans ce contexte, des modèles phénoménologiques ont été développés pour modéliser la plasticité ([Fleck and Hutchinson, 1993](#); [Fleck et al., 1994](#); [Fleck and Hutchinson, 1997](#)), ce qui a permis de mettre en évidence des effets de taille pour des vides de taille micrométriques ([Huang et al., 2000](#); [Fleck and Hutchinson, 2001](#); [Niordson, 2008](#); [Monchiet and Bonnet, 2013](#)). Les derniers auteurs ont notamment proposé un critère de plasticité approché en étendant l'analyse de [Gurson \(1977\)](#) pour des cavités sphériques ou cylindriques au cas d'une matrice obéissant à un modèle du second gradient. Pour des tailles encore plus petites, des simulations atomistiques ont mis en évidence une importante augmentation de la résistance des matériaux nanoporeux ([Traiviratana et al., 2008](#); [Mi et al., 2011](#); [Tang et al., 2014](#)). Cette augmentation de résistance est attribuée à des effets de surface à l'interface entre le vide et la matrice, impliquant des contraintes de surface et des émissions de dislocations. Dans ce contexte, [Dormieux and Kondo \(2010\)](#) ont proposé d'étendre le critère de [Gurson \(1977\)](#) en considérant que l'interface entre la matrice et le vide obéit à un critère de plasticité, permettant de représenter de manière heuristique la plasticité cristalline à cette échelle. Leur modèle a été validé et appliqué au chapitre précédent. A haute triaxialité, les effets de taille ralentissent la croissance de la

cavité entraînant un ralentissement de l'adoucissement du matériau poreux.

Très récemment, [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) ont proposé une extension au critère de [Dormieux and Kondo \(2010\)](#) en considérant des cavités sphéroïdales, étendant également ainsi le critère de [Golganu et al. \(1993, 1994\)](#). Leur approche débouche sur un critère de plasticité macroscopique pour des matériaux nanoporeux contenant des cavités sphéroïdales. La prise en compte simultanée des effets de forme et de taille ouvre donc la voie à des études de la réponse de matériaux nanoporeux pour des chargements à faible triaxialité où ces effets sont importants. Une meilleure compréhension des propriétés mécaniques des matériaux nanoporeux est notamment d'un grand intérêt dans une optique de design de pièces mécaniques très résistantes.

Le but de ce chapitre est de qualifier le critère de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) grâce à des analyses limites numériques effectuées à l'aide de la méthode des éléments finis. L'organisation du chapitre est la suivante :

- Le critère de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) est tout d'abord brièvement rappelé dans la section 5.2.
- Nous dérivons ensuite dans la section 5.3 un critère explicite pour des vides nanométriques cylindriques.
- Enfin, les critères théoriques sont comparés dans la section 5.4 aux critères supposés exacts obtenus par analyse limite numérique, pour plusieurs cas géométriques et différentes tailles de pores.

5.2 Critère de [Monchiet et al. \(2014\)](#) couplant effets de forme et de taille des cavités

Généralités [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) ont étendu le critère de [Dormieux and Kondo \(2010\)](#) au cas des cavités sphéroïdales. Considérons une cellule sphéroïdale Ω contenant une cavité sphéroïdale confocale ω dont l'axe de symétrie est Ox_3 et soumise à des conditions de taux de déformation homogène sur le bord (voir Figure 5.1) :

$$\mathbf{v} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (5.1)$$

Pour prendre en compte les effets de taille, la surface entre la matrice et le vide notée S va être modélisée par un modèle d'interface.

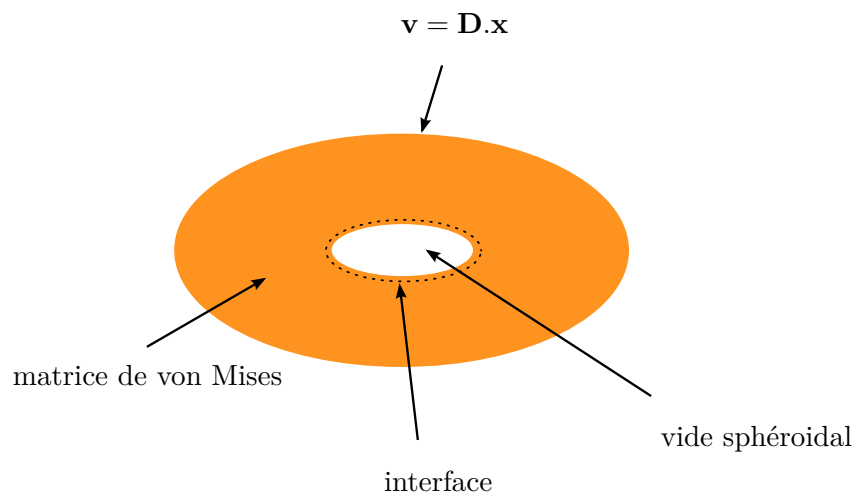


FIGURE 5.1: VER considéré par [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) pour des cavités sphéroïdales de taille nanométrique.

La résistance de la matrice $\Omega - \omega$ est décrite par un critère de von Mises :

$$\sigma_{\text{eq}}^2 = \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d \leq \sigma_0^2 \quad (5.2)$$

où σ_{eq} est la contrainte équivalente de von Mises, $\boldsymbol{\sigma}_d$ étant le déviateur du tenseur des contraintes et σ_0 la limite d'élasticité. La résistance de l'interface est décrite par un critère 2D en contraintes planes de type von Mises :

$$\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_d^S : \boldsymbol{\sigma}_d^S \leq k_{\text{int}}^2 \quad (5.3)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_d^S$ est la partie déviatorique du tenseur des contraintes planes et k_{int} représente la résistance de l'interface.

Dissipation plastique totale La dissipation plastique macroscopique $\Pi(\mathbf{D})$ est donnée par (Monchiet and Kondo, 2013) :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{D})} \left[\frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega - \omega} \sigma_0 d_{\text{eq}} dV + \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_S k_{\text{int}} d_{\text{eq}}^S dS \right] \quad (5.4)$$

où l'ensemble $\mathcal{K}(\mathbf{D})$ correspond aux champs de vitesse incompressibles \mathbf{v} cinématiquement admissibles avec \mathbf{D} . Dans l'équation (5.4), d_{eq} est le taux de déformation équivalent de von Mises, défini par

$$d_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{d} : \mathbf{d}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega - \omega. \quad (5.5)$$

La quantité d_{eq}^S dans l'équation (5.4) correspond au taux de déformation équivalent surfacique, défini par

$$d_{\text{eq}}^S = \sqrt{\frac{2}{3} (\mathbf{d}^S : \mathbf{d}^S + (\text{tr } \mathbf{d}^S)^2)} \quad \forall \mathbf{x} \in S \quad (5.6)$$

où

$$\mathbf{d}^S = \mathbf{P}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{n}). \quad (5.7)$$

Le tenseur $\mathbf{P}(\mathbf{n})$ intervenant dans l'équation (5.7) est un tenseur de projection sur l'interface, défini par

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}) = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (5.8)$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité du second ordre et \mathbf{n} un vecteur unitaire normal à l'interface.

Le critère de plasticité macroscopique est alors donné par l'équation classique

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{D}). \quad (5.9)$$

Critère de Monchiet and Kondo (2013) Les champs de vitesse considérés par Monchiet and Kondo (2013) sont ceux de Gologanu et al. (1993, 1994). La dissipation totale, dont l'expression a été obtenue après un certain nombre d'approximations, permet d'aboutir à la forme paramétrique de la surface de charge :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_m = \mathcal{G}_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \Sigma_q = \mathcal{G}_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \Sigma_s = \mathcal{G}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \Sigma_t = \mathcal{G}_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{array} \right. \quad (5.10)$$

où Σ_m , Σ_q , Σ_s et Σ_t dépendent des composantes du tenseur macroscopique des contraintes :

$$\begin{cases} \Sigma_m = \frac{1}{3}(\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33}) \\ \Sigma_q = \Sigma_{33} - \frac{1}{2}(\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) \\ \Sigma_s = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(\Sigma_{22} - \Sigma_{11})^2 + 4\Sigma_{12}^2} \\ \Sigma_t = \sqrt{3}\sqrt{\Sigma_{13}^2 + \Sigma_{23}^2}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Les paramètres sans dimension ξ_i , définis par $\xi_1 = D_q/D_m$, $\xi_2 = D_s/D_m$ et $\xi_3 = D_t/D_m$, dépendent des composantes du tenseur de taux de déformation macroscopique :

$$\begin{cases} D_q = \frac{2}{3}D_{33} - \frac{1}{3}(D_{11} + D_{22}) \\ D_s = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(D_{22} - D_{11})^2 + 4D_{12}^2} \\ D_t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{D_{13}^2 + D_{23}^2}. \end{cases} \quad (5.12)$$

Les fonctions \mathcal{G}_i , que l'on ne va pas détailler ici, dépendent de la porosité et de la forme de la cavité ([Monchiet and Kondo, 2013](#)).

Le critère de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) a l'avantage de prendre en compte les effets de forme des cavités comparé au modèle de [Dormieux and Kondo \(2010\)](#), au détriment d'une formulation plus complexe.

5.3 Dérivation d'un critère explicite pour vide nanométriques cylindriques

En raison du nombre important de paramètres et de fonctions à calculer pour déterminer la surface de charge, il est intéressant de dériver une solution explicite dans le cas des cavités cylindriques. Cette solution permettra notamment d'étudier la qualité des approximations utilisées par [Monchiet and Kondo \(2013\)](#).

On considère un cylindre creux de rayons intérieur a et extérieur b , de porosité $f = a^2/b^2$ (voir Figure 5.2). La base locale orthonormale associée aux coordonnées cylindriques r , θ , z est notée $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$, et celle associée aux coordonnées cartésiennes x_1 , x_2 , x_3 est notée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, avec $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$.

On considère dans la matrice le champ de vitesse cylindrique de [Gurson \(1977\)](#) :

$$\begin{cases} v_r(r) = \frac{3}{2}D_m \frac{b^2}{r} - \frac{D_{33}}{2}r \\ v_z(z) = D_{33}z. \end{cases} \quad (5.13)$$

Les taux de déformation équivalents volumique et surfacique valent :

$$\begin{cases} d_{\text{eq}} = \sqrt{D_{33}^2 + 3D_m^2 \frac{b^4}{r^4}} \\ d_{\text{eq}}^S = \sqrt{D_{33}^2 + 3D_m^2 \frac{b^4}{a^4}}. \end{cases} \quad (5.14)$$

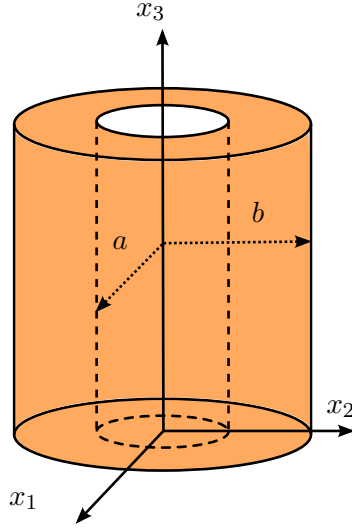


FIGURE 5.2: VER considéré pour une cavité cylindrique.

La dissipation plastique macroscopique totale (5.4) peut se décomposer en une partie volumique Π^{vol} et une partie surfacique Π^{surf} :

$$\begin{cases} \Pi^{\text{vol}} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega-\omega} \sigma_0 d_{\text{eq}} dV \\ \Pi^{\text{surf}} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_S k_{\text{int}} d_{\text{eq}}^S dS. \end{cases} \quad (5.15)$$

Dissipation surfacique. Le calcul de l'intégrale dans l'équation (5.15)₂ est immédiat :

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{surf}} &= k_{\text{int}} \frac{S}{\text{vol}(\Omega)} \sqrt{D_{33}^2 + 3D_m^2 \frac{b^4}{a^4}} \\ &= \frac{k_{\text{int}}}{a} 2f D_{33} \sqrt{1 + \frac{3D_m^2}{f^2 D_{33}^2}}. \end{aligned}$$

Introduisons le paramètre $\xi = \sqrt{3} \frac{D_m}{D_{33}}$. L'expression finale de la dissipation plastique surfacique s'écrit :

$$\Pi^{\text{surf}} = \frac{k_{\text{int}}}{a} 2f D_{33} \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{f^2}}. \quad (5.16)$$

Dissipation volumique L'expression de la dissipation plastique volumique est exactement celle de Gurson (1977) dans le cas cylindrique :

$$\Pi^{\text{vol}} = \sqrt{3} D_m \sigma_0 \left[\text{Argsinh}(x) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right]_{\xi}^{\xi/f}. \quad (5.17)$$

Expression du critère de plasticité Le critère de plasticité macroscopique est donné par les équations paramétriques

$$\begin{cases} \Sigma_{11} &= \frac{1}{3} \frac{\partial \Pi^{\text{tot}}}{\partial D_m} \\ \Sigma_{33} - \Sigma_{11} &= \frac{\partial \Pi^{\text{tot}}}{\partial D_{33}}, \end{cases} \quad (5.18)$$

où $\Pi^{\text{tot}} = \Pi^{\text{vol}} + \Pi^{\text{surf}}$. Le calcul de ces dérivées est immédiat et conduit aux équations paramétriques suivantes de la surface de charge

$$\begin{cases} \frac{\Sigma_{11}}{\sigma_0} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\text{Argsinh} \left(\sqrt{3} \frac{\xi}{f} \right) - \text{Argsinh} \left(\sqrt{3} \xi \right) \right] + \Gamma \frac{2\xi}{\sqrt{f^2 + 3\xi^2}} \\ \frac{\Sigma_{33} - \Sigma_{11}}{\sigma_0} &= \sqrt{1 + 3\xi^2} - \frac{1}{f} \sqrt{1 + 3 \frac{\xi^2}{f^2}} + \Gamma \frac{2f^2}{\sqrt{f^2 + 3\xi^2}}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Le paramètre sans dimension Γ est défini par la relation :

$$\Gamma = \frac{k_{\text{int}}}{a\sigma_0}. \quad (5.20)$$

5.4 Etude numérique des surfaces de charge

5.4.1 Généralités

On s'intéresse maintenant à l'étude numérique des surfaces de charge de matériaux contenant des vides sphéroïdaux de taille nanométrique. Les résultats numériques permettront de valider les critères théoriques de [Dormieux and Kondo \(2010\)](#), [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) et celui nouvellement dérivé dans la section 5.3. On considère une cellule sphéroïdale contenant un vide sphéroïdal soumise sur son bord à une déformation homogène ([Mandel, 1964](#); [Hill, 1967](#)) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (5.21)$$

où \mathbf{u} est le déplacement, \mathbf{X} le vecteur-position initial, \mathbf{E} le tenseur de déformation macroscopique et $\partial\Omega$ la frontière extérieure de la cellule Ω .

Les maillages utilisés sont représentés Figures 5.3a, 5.3b and 5.3c, respectivement pour une sphère, un sphéroïde aplati (oblate) et un sphéroïde allongé (prolate) : il y a 26,481 noeuds et 24,000 éléments (trilinéaires sélectivement sous-intégrés). L'interface à la frontière du vide est introduite en utilisant un maillage de peau 2D composé de 1200 éléments obéissant à un critère de type (5.3). Pour les cavités cylindriques, le maillage utilisé, représenté Figure 5.3d, est composé de 9,920 noeuds et 4,800 éléments. L'interface à la frontière du vide est introduite en utilisant un maillage de peau 2D composé de 160 éléments.

Les calculs ont été réalisés à l'aide du code de calcul SYSTUS[®] développé par ESI Group. Des chargements axisymétriques ($\Sigma_{11} = \Sigma_{22} \neq 0$, $\Sigma_{33} \neq 0$, autres $\Sigma_{ij} = 0$) ont été considérés dans toutes les simulations numériques (l'axe de symétrie des cellules est noté Ox_3). Les surfaces de charge sont représentées dans le plan $(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}, \frac{\Sigma_{33} - \Sigma_{11}}{\sigma_0})$, où $\Sigma_m = \frac{1}{3}(2\Sigma_{11} + \Sigma_{33})$ est la contrainte moyenne macroscopique.

Les surfaces de charge sont étudiées pour différentes valeurs du paramètre sans dimension $\Gamma = [0.25; 0.5; 1]$ et pour différentes formes de vides sphéroïdaux, dans le but de mettre en lumière le couplage complexe entre effets de forme et de taille. Une porosité $f = 0.01$ est considérée dans toutes les simulations.

5.4.2 Cavités sphériques

Nous nous intéressons tout d'abord au cas des vides sphériques, en complétant les résultats du Chapitre 4. Les surfaces de charge numériques sont représentées Figure 5.4 (triangles), avec le critère de [Dormieux and Kondo \(2010\)](#)'s (trait plein). Le critère de [Gurson \(1977\)](#), correspondant au cas $\Gamma = 0$, est également ajouté de façon à mettre en évidence l'influence de l'effet de taille.

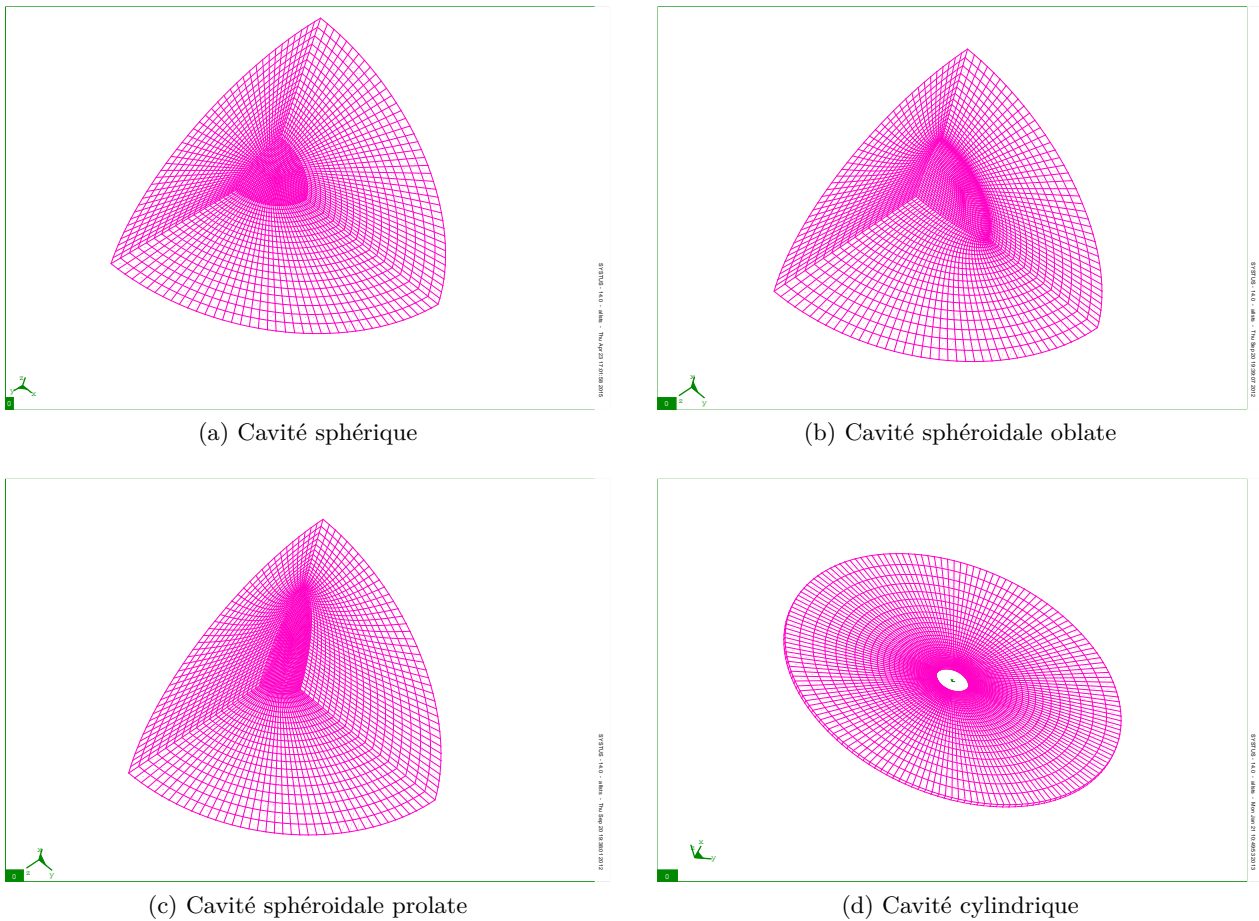


FIGURE 5.3: Maillages utilisés pour les simulations numériques

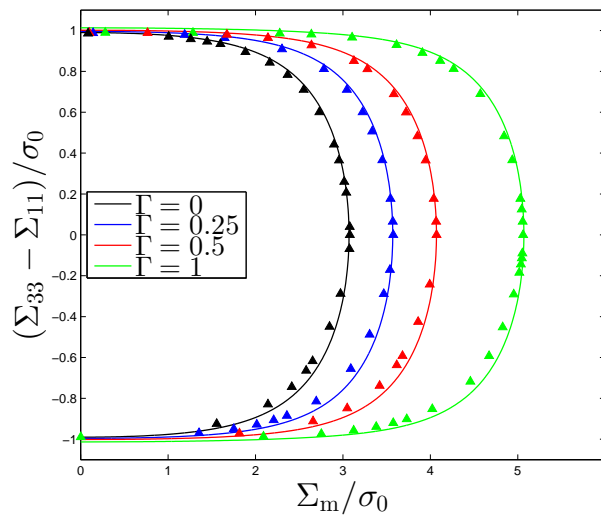


FIGURE 5.4: Surfaces de charge d'une cellule sphérique contenant une cavité sphérique pour une porosité $f = 0.01$ et plusieurs tailles de pores.

Dans tous les cas considérés, le critère théorique est en très bon accord avec les résultats numériques. En particulier, le point hydrostatique est parfaitement reproduit par le modèle. La comparaison avec le critère de [Gurson \(1977\)](#) met en évidence l'influence de l'effet de taille sur la surface de charge : le domaine de résistance augmente lorsque le paramètre Γ augmente, c'est à dire lorsque la taille de la cavité diminue.

5.4.3 Cavités sphéroïdales aplaties

On considère maintenant le cas des cavités sphéroïdales aplaties (oblate). Les résultats numériques sont tracés Figure 5.5a pour une cavité dont les axes sont dans les proportions (2 : 2 : 1) et Figure 5.5b pour des axes dans les proportions (5 : 5 : 1), avec le critère théorique (Monchiet and Kondo, 2013) correspondant. Le critère de Gologanu et al. (1994), correspondant au cas $\Gamma = 0$, est aussi tracé pour mettre en évidence les effets de taille sur les surfaces de charge.

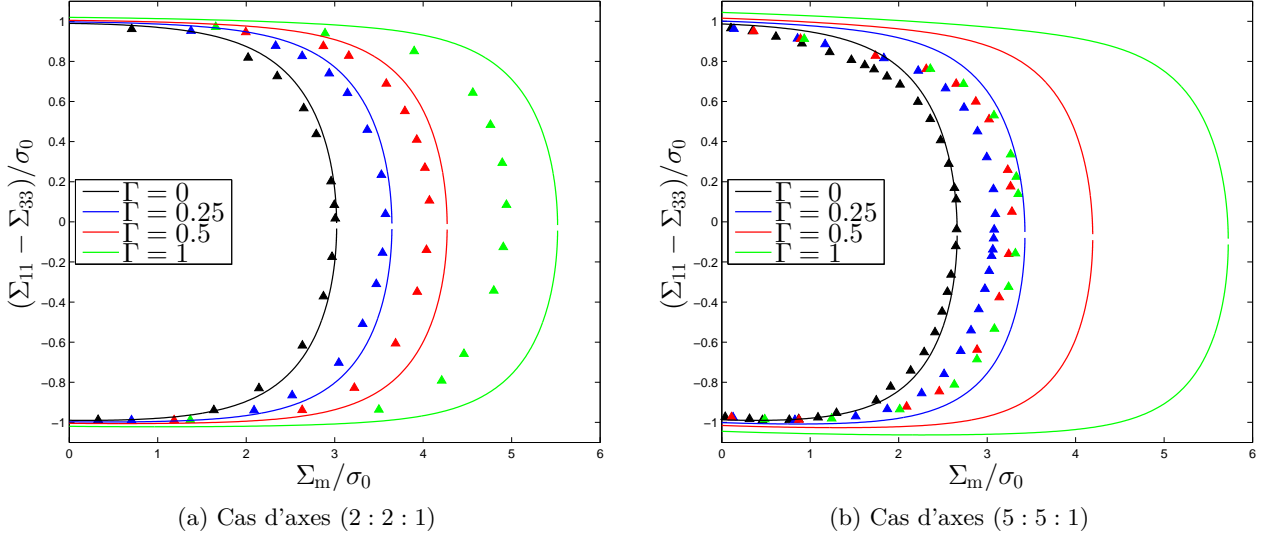


FIGURE 5.5: Surfaces de charge d'une cellule sphéroïdale oblate contenant une cavité oblate confocale pour une porosité $f = 0.01$ et plusieurs tailles de pores.

Dans le cas des axes (2 : 2 : 1), les résultats numériques sont assez proches du critère théorique de Monchiet and Kondo (2013). Les tendances sont en particulier bien captées par le modèle, avec une augmentation de la résistance lorsque le paramètre Γ augmente ; en revanche, le critère théorique surestime sensiblement les résultats numériques pour $\Gamma = 1$, avec une erreur relative maximale d'environ 10%.

Dans le cas des axes (5 : 5 : 1), correspondant à une cavité très aplatie, le critère de Monchiet and Kondo (2013) surestime considérablement le critère numérique, pour toutes les valeurs de Γ . La taille du domaine de réversibilité numérique semble "saturer" lorsque Γ augmente, tandis que celle du domaine théorique continue à augmenter. Pour ce cas géométrique, le critère de Monchiet and Kondo (2013) ne permet pas de reproduire de manière satisfaisante les résultats numériques. Cela s'explique par le fait que les champs de vitesse de Gologanu et al. (1994) (utilisés ici par Monchiet and Kondo (2013)) sont inadaptés dans le cas des cavités sphéroïdales très aplaties. Il a également été montré par Gologanu et al. (1997) que le champ de Gologanu et al. (1994) est en particulier assez éloigné du vrai champ de vitesse, à proximité de la cavité. Par conséquent, l'effet de taille introduit sur le bord de la cavité est considérablement amplifié par ce champ de vitesse, ayant pour conséquence une surestimation trop importante de la surface de charge.

5.4.4 Cavités sphéroïdales allongées

On considère maintenant le cas de cavités sphéroïdales allongées (prolate). Les résultats numériques sont tracés Figure 5.6a pour une cavité d'axes dans les proportions (1 : 1 : 2) et Figure 5.6b pour une cavité d'axes dans les proportions (1 : 1 : 5), et pour plusieurs valeurs du paramètre Γ . Les critères de Monchiet and Kondo (2013) et Gologanu et al. (1993) (correspondant au cas $\Gamma = 0$) sont également tracés.

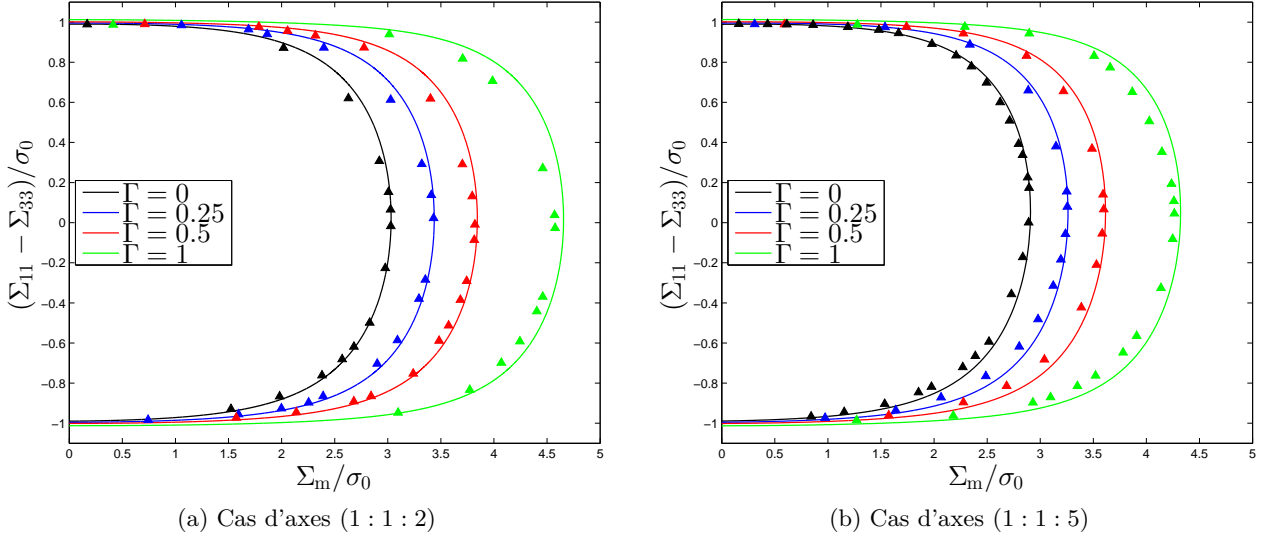


FIGURE 5.6: Surfaces de charge d'une cellule sphéroïdale prolate contenant une cavité prolate confocale pour une porosité $f = 0.01$ et plusieurs tailles de pores.

Le critère théorique de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) reproduit très bien les résultats numériques, dans les deux cas géométriques considérés. Le couplage entre effets de taille de forme est en particulier bien capté par le critère analytique.

5.4.5 Cavités cylindriques

On considère finalement le cas de cavités cylindriques. Les résultats numériques sont tracés Figure 5.7, avec le critère théorique de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) (Figure 5.7a) et le nouveau critère analytique dérivé dans la section 5.3 (Figure 5.7b). Sur les deux Figures, le critère de [Gurson \(1977\)](#) pour des cavités cylindriques est aussi tracé pour bien apprécier l'influence de l'effet de taille.

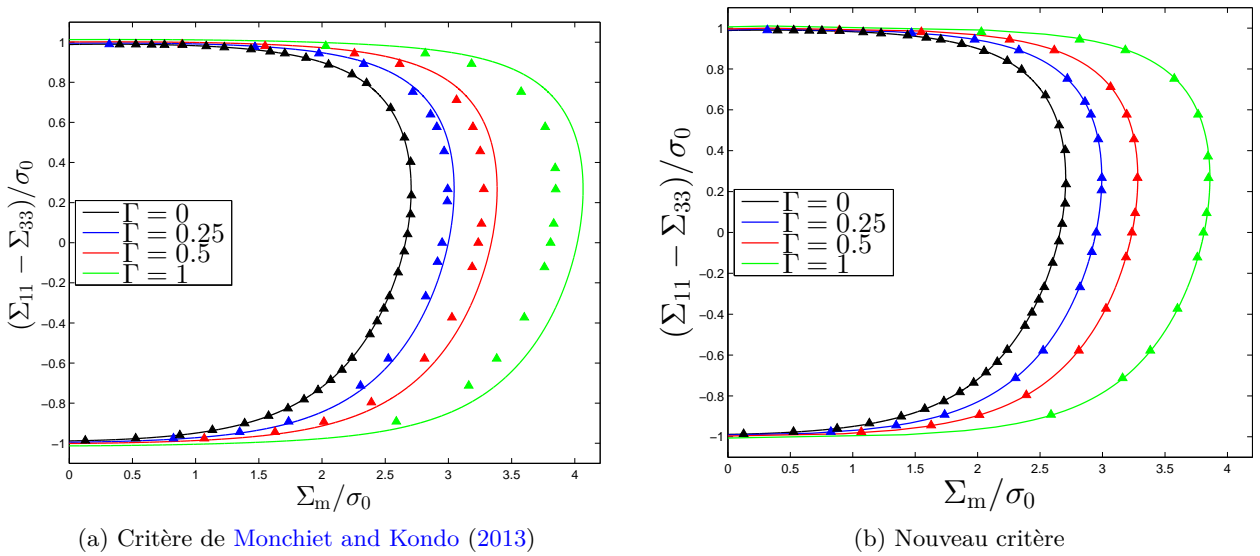


FIGURE 5.7: Surfaces de charge d'une cellule cylindrique contenant une cavité cylindrique pour une porosité $f = 0.01$ et plusieurs tailles de pores.

Le critère de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) est en bon accord avec les résultats numériques. Une

faible différence est observée lorsque Γ augmente, avec une erreur maximale relative d'environ 5% pour le point hydrostatique (pour $\Gamma = 1$).

Le nouveau critère améliore sensiblement le critère de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#), en reproduisant presque parfaitement les résultats numériques. On peut s'interroger sur le fait que le critère de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) ne réduit pas au critère dérivé dans la section 5.3 dans le cas cylindrique. La différence entre les deux critères s'explique par les approximations introduites par [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) pour calculer la dissipation plastique macroscopique dans le cas général, dégradant légèrement la solution dans le cas cylindrique.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement de matériaux poreux ductiles contenant des vides sphéroïdaux de taille nanométrique. Après avoir rappelé le modèle de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) pour des cavités nanosphéroïdales dérivé à partir des champs de vitesse de [Gologanu et al. \(1993, 1994\)](#), nous avons établi un critère explicite analytique pour des vides nanocylindriques. Les surfaces de charge des modèles théoriques ont ensuite été comparées aux surfaces de charge numériques obtenues à l'aide de la méthode des éléments finis, pour des cavités sphériques, sphéroïdales aplaties (oblate), allongées (prolate) et enfin cylindriques. Dans les simulations numériques, des mailles de peau 2D obéissant à un critère de von Mises en contraintes planes permettent de prendre en compte les effets d'interface entre le vide et la matrice. Pour le cas des sphères et des cavités allongées, le modèle de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) est en très bon accord avec les résultats numériques. Les résultats sont bien moins bons pour le cas des cavités aplaties, et se détériorent lorsque les cavités sont très aplaties. Enfin dans le cas cylindrique, le modèle de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) est en bon accord avec les résultats numériques. Le modèle analytique dérivé dans ce chapitre est presque confondu avec les résultats numériques. Les améliorations apportées par le nouveau critère sur celui de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) en soulignent le caractère approché.

Ce chapitre a ainsi permis d'améliorer notre compréhension des matériaux nanoporeux en étudiant le couplage entre les effets de forme et de taille des cavités pour de tels matériaux. Cette compréhension est cependant encore très partielle et nécessite de nombreux développements pour comprendre en profondeur les propriétés mécaniques des milieux nanoporeux. En particulier, il serait intéressant d'approfondir les points suivants :

- Il est nécessaire de calibrer la résistance d'interface k_{int} . L'étude des surfaces de charge de matériaux nanoporeux contenant des vides sphéroïdaux par des simulations atomistiques, actuellement menées dans le cadre de la thèse de Stella Brach à l'Institut Jean le Rond d'Alembert, devrait permettre de déterminer ce coefficient.
- Le modèle de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) surestime les propriétés mécaniques pour des cavités très aplaties. Il est nécessaire de raffiner l'analyse limite théorique pour bien reproduire ce cas.
- Il serait également intéressant d'étendre les calculs d'évolution de [Koplik and Needleman \(1988\)](#) en considérant un critère à l'interface entre le vide et la matrice. Ces calculs permettraient de valider l'implémentation du modèle de [Dormieux and Kondo \(2010\)](#) à haute triaxialité, et de celui de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) à basse triaxialité.
- L'extension des modèles de [Dormieux and Kondo \(2010\)](#); [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) au cas des cavités ellipsoïdales générales sera ensuite nécessaire pour bien comprendre le couplage entre effets de forme et de taille des cavités, notamment pour des problèmes où le cisaillement est important.

PARTIE III

**Modèles de coalescence : étude de l'influence
des effets de forme des cavités et de
l'anisotropie plastique**

Introduction : étude bibliographique des modèles de coalescence des cavités

Observations expérimentales

Les fissures macroscopiques entraînant la ruine des matériaux ductiles sont initiées puis propagées par la coalescence de cavités voisines. La phase de coalescence a été observée expérimentalement au moyen de nombreuses techniques, comme par exemple la microscopie électronique à balayage (Benzerga et al., 1999; Benzerga, 2000), la tomodensitométrie (Weck et al., 2008b,a) ou encore la laminographie par synchrotron (Shen et al., 2013). Plusieurs modes de coalescence ont ainsi été observés : (i) par striction interne (Figure 5.8a), (ii) par cisaillement (Figure 5.8b), et (iii) par colonnes (Figure 5.8c).

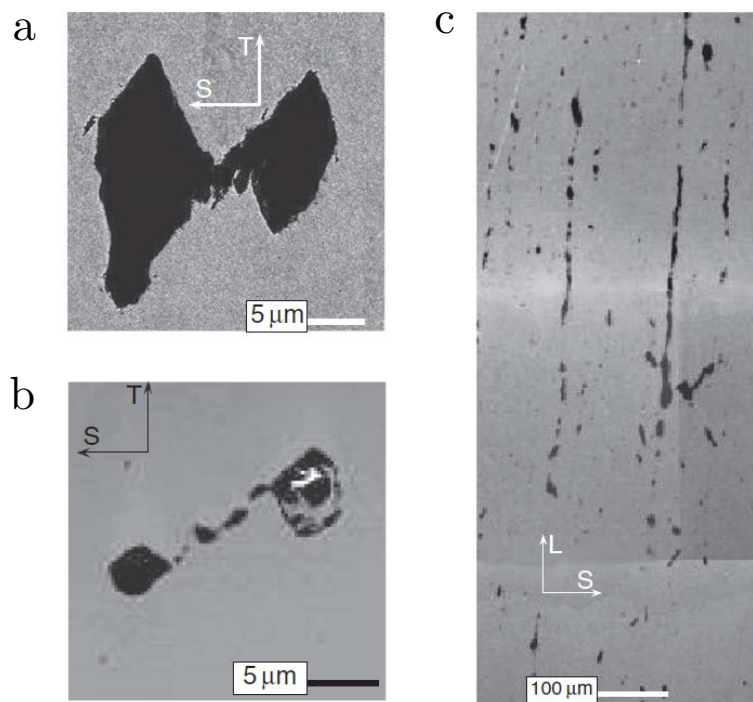


FIGURE 5.8: Modes de coalescence. (a) Coalescence par striction du ligament interne (autrement appelé coalescence en couches) (Benzerga et al., 1999). (b) Coalescence en cisaillement (Benzerga, 2000). (c) “Necklace” coalescence (autrement appelé coalescence en colonnes) (Benzerga, 2000). Dans les trois cas considérés, le chargement est vertical.

Lors de la coalescence par striction interne (ou coalescence en couches), les cavités se rejoignent dans un plan perpendiculaire à la direction principale du chargement : le ligament inter-cavités se contracte de manière similaire à la striction d’une barre en traction. (Ce mode de coalescence est le plus courant). Lors de la coalescence en cisaillement, les cavités se rejoignent dans des bandes de cisaillement à 45 degrés par rapport à la direction principale de chargement. Enfin, lors de la coalescence en colonnes, les cavités se rejoignent dans des bandes parallèles à la direction de chargement.

Observations numériques

La coalescence a également été observée dans de nombreuses simulations micromécaniques par éléments finis (Koplik and Needleman, 1988; Richelsen and Tvergaard, 1994; Pardoen and Hutchinson, 2000; Gao and Kim, 2006; Yerra et al., 2010; Tvergaard and Nielsen, 2010; Barsoum and Faleskog, 2011; Keralavarma et al., 2011; Nielsen et al., 2012; Srivastava and Needleman, 2013).

Les travaux pionniers de Koplik and Needleman (1988) ont notamment permis de mettre en évidence des aspects micromécaniques clés de la coalescence par striction interne. Ils ont considéré une cellule cylindrique contenant un vide sphérique et soumise à des conditions aux limites quasi-périodiques¹, pour divers trajets de chargement proportionnels. Nous reproduisons Figure 5.9 des résultats typiques associés à ces simulations, à savoir l'évolution de la contrainte équivalente, de la porosité, du rapport d'aspect du vide et de la déformation radiale (Benzerga and Leblond, 2010). La coalescence est caractérisée par une transition d'un état triaxial de déformation de la cellule à un état uniaxial (extension pure dans la direction axiale) (Figure 5.9d). Cette transition correspond à une localisation de la déformation plastique dans le ligament inter-cavités, impliquant la présence de régions élastiques au dessus et en dessous du vide, qui imposent la quasi-nullité des composantes horizontales du taux de déformation global. Cette localisation entraîne une striction rapide du ligament inter-cavités, ce qui explique la croissance très rapide de la porosité (Figure 5.9b) ayant pour conséquence directe un adoucissement brutal du matériau (Figure 5.9a).

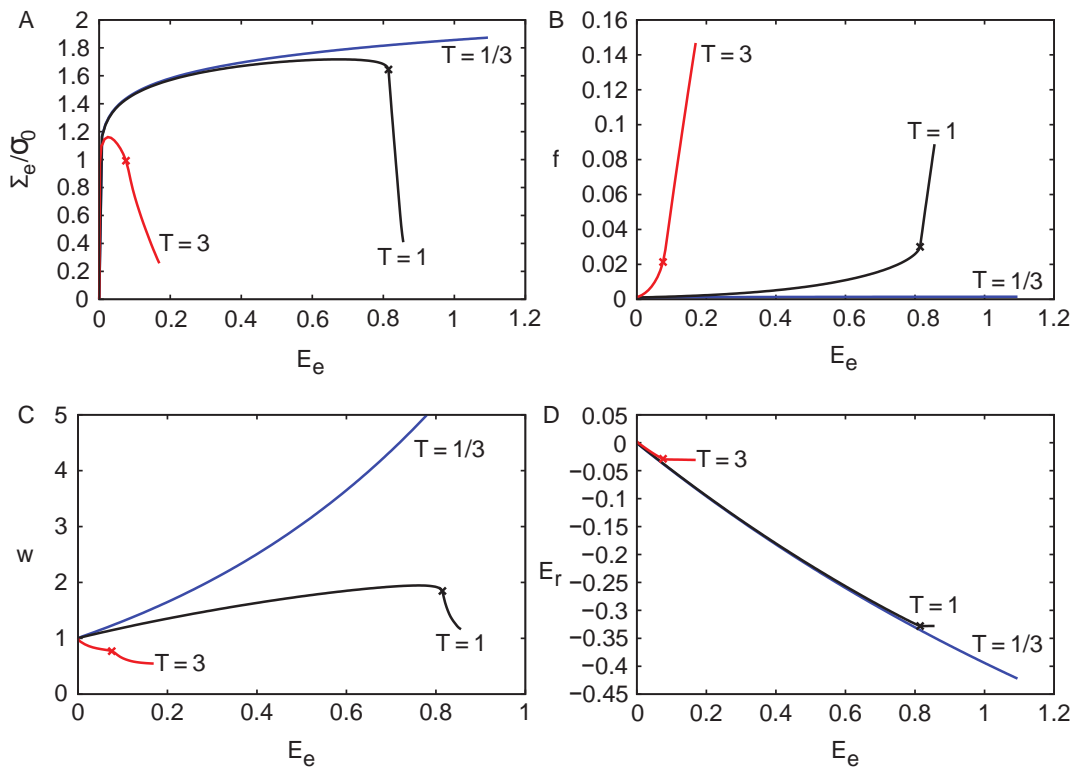


FIGURE 5.9: Résultats de simulations micromécaniques sur une cellule cylindrique contenant une cavité initialement sphérique, soumise à un chargement macroscopique axisymétrique à triaxialité fixée. (a) Evolution de la contrainte équivalente; (b) Evolution de la porosité; (c) Evolution du rapport d'aspect du vide; (d) Evolution de la déformation radiale. D'après Benzerga and Leblond (2010).

La particularité de la coalescence est donc la localisation de la déformation dans le ligament entre cavités voisines : la plasticité n'est plus diffuse comme elle l'était dans la phase de croissance. Les conditions aux limites de Hill-Mandel utilisées dans la dérivation des modèles de croissance interdisent ce phénomène et ne sont donc pas adaptées pour modéliser la phase de coalescence.

1. Cette modélisation constitue une approximation d'un VER périodique soumis à des conditions périodiques.

Historique de la modélisation de la coalescence

Les calculs de [Koplik and Needleman \(1988\)](#) suggèrent donc que la coalescence correspond à une concentration de la déformation plastique dans le ligament inter-cavités. Une idée naturelle pour décrire ce phénomène est de le considérer comme une instabilité et d'appliquer la théorie de la localisation de la déformation ([Rudnicki and Rice, 1975](#); [Perrin and Leblond, 1993](#)). Dans ce contexte, [Perrin \(1992\)](#) a proposé un critère de coalescence basé sur la condition de localisation de [Rudnicki and Rice \(1975\)](#) appliquée directement au modèle de Gurson à une échelle macroscopique suivant les calculs de [Yamamoto \(1978\)](#) : [Perrin \(1992\)](#) a constaté que cette approche surestimait considérablement la ductilité en comparaison avec les résultats de [Koplik and Needleman \(1988\)](#). Qualitativement, l'échec de cette première tentative s'explique par le fait que le modèle homogénéisé de Gurson s'applique à une échelle supérieure à l'espacement entre cavités voisines, alors que la coalescence correspond à une concentration de la déformation à une échelle inférieure. [Perrin \(1992\)](#) a donc repris son analyse en appliquant la condition de localisation à une échelle mésoscopique dans des "couches poreuses" schématisant les ligaments inter-cavités, aboutissant cette fois-ci à un critère de coalescence en accord avec les résultats de [Koplik and Needleman \(1988\)](#).

Une autre approche pour modéliser la coalescence a été initiée par [Thomason \(1985\)](#), sous l'angle de l'analyse limite. Dans cette approche, la localisation est implicitement prise en compte en utilisant des champs de vitesse appropriés dans la procédure d'analyse limite. [Thomason \(1985\)](#) a ainsi dérivé un critère de coalescence (que l'on détaillera ci-dessous), basé sur l'analyse limite d'une cellule prismatique contenant un vide prismatique soumise à des conditions aux limites permettant de localiser la déformation dans le ligament inter-cavités.

De son côté, [Gologanu \(1997\)](#) a montré que la condition de localisation employée par [Perrin \(1992\)](#) à l'échelle mésoscopique était en fait, sous réserve de négliger l'élasticité, fondamentalement équivalente à résoudre le problème des couches superposées par la méthode d'analyse limite. Cette équivalence tient à ce que la condition de localisation de [Perrin \(1992\)](#) revient à déterminer l'état de contraintes macroscopique autorisant une extension uniaxiale de la bande centrale poreuse, ce qui est précisément ce que fait aussi l'analyse limite quand on l'applique avec un champ de vitesse localisant le taux de déformation dans cette bande. Le modèle de Perrin pouvant ainsi être réinterprété comme résultant de l'analyse limite, la seule vraie différence avec le travail de Thomason réside dans l'approximation faite par Perrin, mais pas par Thomason, que le comportement de la couche poreuse peut être décrit par le modèle de Gurson, appliqué à l'échelle de cette couche.

Ces observations ont conduit [Gologanu \(1997\)](#) à étendre par analyse limite les modèles de coalescence de [Thomason \(1985\)](#) et [Perrin \(1992\)](#), en considérant une cellule cylindrique constituée de couches saines obéissant au critère de von Mises et d'une couche centrale poreuse obéissant maintenant au critère GLD prenant en compte les effets de forme (modèle Thomason-Perrin généralisé). Dans ce modèle, la surface de charge est supposée être celle du modèle GLD appliqué à la cellule élémentaire *complète* pendant la phase de croissance, et celle correspondant à la charge limite de coalescence, pendant la phase de coalescence. Le choix, pour une géométrie et un état de contraintes macroscopique donnés, entre ces deux surfaces s'effectue, dans l'esprit de l'analyse limite, en déterminant celle de ces deux surfaces qui fournit la charge limite la plus basse.

Comme l'a remarqué Suquet, le "modèle Thomason-Perrin généralisé" présente l'inconvénient de décrire les phases de croissance et de coalescence de manière séparée (la cellule considérée n'est même pas la même puisque celle employée dans le modèle GLD utilisé pour la phase de croissance n'est pas cylindrique mais sphéroïdale). Il est pourtant possible, suivant encore la remarque de Suquet, de les traiter de manière unifiée en résolvant complètement, analytiquement, le problème de plasticité pour le laminé von Mises/GLD/von Mises postulé par Gologanu. Dans le "modèle H" ainsi obtenu ([Gologanu, 1997](#)), deux régimes apparaissent selon que les trois couches sont plastiques (phase de crois-

sance), ou que seule la couche centrale poreuse l'est, les couches externes demeurant rigides (phase de coalescence). Ce modèle est éclairant en ce qu'il montre que la coalescence peut être interprétée non comme une instabilité, mais comme un simple changement de type de solution dans un problème rigide-plastique, résultant d'une modification de la répartition de la géométrie en zones rigides et plastiques.

Ce qu'il faut retenir, c'est que la coalescence n'est pas nécessairement le fruit d'une instabilité mais uniquement d'un mode de déformation particulier (extension uniaxiale) ; pour modéliser ce phénomène il faut se placer à une échelle assez petite pour bien décrire ce mode de déformation. En essence, la coalescence est un problème de plasticité classique (avec des zones plastiques et rigides), qu'il est donc possible de résoudre par la méthode de l'analyse limite à condition de négliger l'élasticité et l'écroutissage.

Modèle de Thomason (1985) et variantes

Revenons au modèle de Thomason (1985), qui joue au moins dans l'esprit un rôle fondamental dans la suite. Ce modèle est basé sur l'analyse limite d'une cellule prismatique contenant un vide prismatique. (Thomason a aussi considéré un vide cylindrique dans un VER cylindrique). Thomason (1985) a eu l'intuition que la coalescence survenait suite à la localisation de la déformation plastique dans le ligament entre cavités et a donc proposé des champs de vitesse permettant de décrire ce phénomène. Malheureusement, il n'est pas parvenu à calculer analytiquement la dissipation plastique macroscopique permettant d'aboutir au critère de coalescence. Il s'est contenté d'un calcul numérique de l'intégrale donnant cette dissipation et a ensuite proposé un critère empirique de façon à fitter ses résultats numériques. Son critère s'écrit :

$$\Phi = \frac{\Sigma_{33}}{\bar{\sigma}} - (1 - \chi^2) \left[0.1 \left(\frac{\chi^{-1} - 1}{W} \right)^2 + 1.2\sqrt{\chi^{-1}} \right] \quad (5.22)$$

où Σ_{33} correspond à la contrainte de coalescence supportée par le milieu poreux. (Le chargement principal est orienté suivant un axe \mathbf{e}_3). La valeur de cette contrainte dépend de l'espacement entre les cavités à travers le paramètre $\chi = R/L$ (où R est le rayon de la cavité cylindrique et L le rayon du bord extérieur de la cellule cylindrique) et de la forme de la cavité à travers le paramètre $W = h/R$ (où h est la demi-hauteur de la cavité cylindrique).

Benzerga (2002) a montré que le critère de Thomason (1985) n'était pas pertinent pour décrire la charge limite pour des cavités très aplaties (en comparant les prédictions du modèle avec des calculs micromécaniques numériques), et a proposé une amélioration heuristique :

$$\Phi = \frac{\Sigma_{33}}{\bar{\sigma}} - (1 - \chi^2) \left[0.1 \left(\frac{\chi^{-1} - 1}{W^2 + 0.1\chi^{-1} + 0.02\chi^{-2}} \right)^2 + 1.3\sqrt{\chi^{-1}} \right]. \quad (5.23)$$

Récemment, Tekoglu et al. (2012) ont étendu le critère de Thomason (1985) à des chargements de cisaillement. Leur critère s'écrit :

$$\left(\frac{\Sigma_{33}}{\Sigma_{33}^{\text{Th}}} \right)^2 + \frac{3(\Sigma_{13}^2 + \Sigma_{23}^2)}{(1 - \chi^2)^2 \bar{\sigma}^2} = 1, \quad (5.24)$$

où Σ_{33}^{Th} est la contrainte de coalescence de Thomason en traction.

Critère de Benzerga and Leblond (2014)

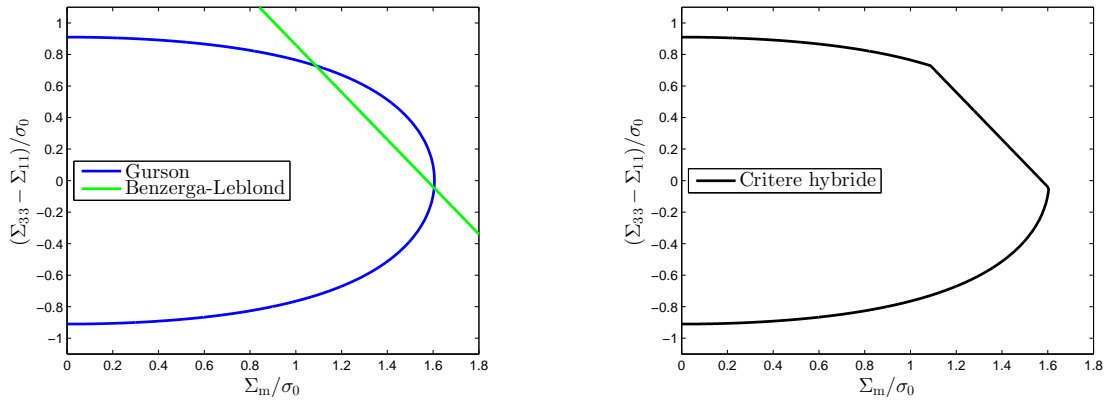
Très récemment, Benzerga and Leblond (2014) ont revisité l'analyse de Thomason (1985) et ont réussi à dériver un critère de coalescence entièrement analytique. Ils ont considéré une cellule cylindrique contenant un vide cylindrique et soumise à des conditions au bord compatibles avec la

cinématique de la coalescence, impliquant la présence de zones rigides au dessus et en dessous du vide. Leur critère s'écrit :

$$\Phi = \frac{\Sigma_{33}}{\bar{\sigma}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[2 - \sqrt{1 + 3\chi^4} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 3\chi^4}}{3\chi^2} + \frac{\chi^3 - 3\chi + 2}{3\chi W} \right].$$

Utilisation des critères de coalescence

Les critères de coalescence présentés précédemment s'utilisent conjointement avec les critères de croissance (Benzerga et al., 1999; Zhang et al., 2000; Pardoen and Hutchinson, 2000; Benzerga, 2002). La surface de charge finale d'un milieu poreux correspond ainsi à l'intersection entre celle correspondant à la croissance avec celle correspondant à la coalescence : on représente Figure 5.10a un critère de croissance (Gurson, 1977) pour une cavité sphérique de porosité $f = 0.01$ et un critère de coalescence² (Benzerga and Leblond, 2014) pour une cavité cylindrique de porosité $f = 0.01$. Le critère final, hybride, correspond donc à l'intersection entre les deux critères (Figure 5.10b), car on compare deux critères obtenus par la méthode cinématique de l'analyse limite : la charge limite la plus basse constitue le meilleur résultat.



(a) Critères de Gurson (1977) et de Benzerga and Leblond (2014) pour une porosité $f = 0.01$.

(b) Critère hybride résultant de l'intersection du Gurson (1977) avec celui de Benzerga and Leblond (2014).

FIGURE 5.10: Utilisation pratique d'un critère de coalescence avec un critère de croissance.

Cette approche, offrant une alternative séduisante à la modélisation heuristique de Tvergaard and Needleman (1984) de la coalescence, a permis de très bien reproduire des calculs micromécaniques (Pardoen and Hutchinson, 2000).

Challenges et plan de la partie

Le critère récent de Benzerga and Leblond (2014), en tant que premier critère analytique de coalescence, ouvre de nombreuses perspectives pour l'étude des milieux poreux à porosité élevée. En effet, le cadre mathématique rigoureux développé par Benzerga and Leblond (2014) ouvre la voie à une modélisation de la coalescence dans des situations plus complexes comme par exemple les matrices anisotropes ou compressibles, les chargements plus complexes avec du cisaillement ou encore les cavités non axisymétriques. L'étude de la transition entre croissance et coalescence est également un point intéressant que pourrait possiblement permettre de considérer le cadre mathématique de Benzerga

2. Notons que le critère de coalescence est une droite dans le plan $(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}; \frac{\Sigma_{33} - \Sigma_{11}}{\sigma_0})$ car le critère de coalescence s'écrit $\Sigma_{33} = \Sigma_{33}^{coal}$. En effet, les zones rigides impliquent que $D_{11} = 0$, ce qui implique que $\frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{11}} = 0$ à cause de la propriété de normalité.

and Leblond (2014).

Nous tâcherons dans cette partie de répondre à certains de ces points :

- Dans le chapitre 6, nous étudions numériquement et théoriquement le problème de coalescence par striction du ligament interne envisagé par [Benzerga and Leblond \(2014\)](#), en proposant deux nouveaux champs de vitesses. Les deux modèles théoriques développés améliorent le critère de [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) de façon différente, selon les paramètres géométriques.
- Nous développons ensuite dans le chapitre 7 un critère permettant d’unifier les phases de croissance et de coalescence dans l’esprit du “modèle H” de Gologanu, mais sans faire l’hypothèse que le comportement de la couche est décrit par un modèle homogénéisé. Le critère est ensuite comparé à des calculs numériques et à un critère hybride.
- Enfin nous étendons au chapitre 8 le critère de [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) au cas des matériaux anisotropes. Le critère obtenu est ensuite comparé à des calculs numériques d’analyse limite pour deux matériaux anisotropes.

Etude théorique et numérique de la coalescence en couches

Ce chapitre est consacré à l'étude théorique et numérique de la charge limite de coalescence en couches associée à des cellules cylindriques contenant des cavités cylindriques. Récemment, [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) ont dérivé un critère de coalescence en utilisant des champs de vitesse (discontinus) permettant de décrire la localisation de la déformation observée lors de la phase de coalescence impliquant la présence de zones rigides au dessus et en dessous de la cavité ([Koplik and Needleman, 1988](#)). Dans un premier temps, ce critère est amélioré en considérant deux nouvelles familles de champs de vitesse : dans la première, les champs discontinus de [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) sont généralisés, permettant de considérer la forme de l'interface rigide/plastique comme un paramètre ; dans la seconde, des champs de vitesse continus sont utilisés. Ensuite, des résultats supposés exacts pour le même problème sont proposés, grâce à des calculs numériques d'analyse limite obtenus par la méthode des éléments finis. Les prédictions des deux nouveaux modèles ainsi que celui de [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) sont évaluées grâce aux résultats numériques.

Ce chapitre est tiré d'un article publié ([Morin et al., 2015b](#)).

6.1 Introduction

The coalescence of voids by internal necking is a ubiquitous mode of material failure. It is observed on *post-mortem* sections of heavily deformed specimens (Fig. 6.1a), in real-time *in situ* experiments (Figs. 6.1b,c), and in micromechanical finite-element simulations (see notably [Koplik and Needleman \(1988\)](#); [Richelsen and Tvergaard \(1994\)](#); [Pardoen and Hutchinson \(2000\)](#); [Gao and Kim \(2006\)](#); [Srivastava and Needleman \(2013\)](#), among others) (Fig. 6.1d). In initially crack-free bodies, void coalescence is a precursor to crack initiation when strain localization in shear bands is prevented ([Benzerga et al., 2004a](#)). In the presence of initial cracks, void coalescence is the basic mechanism for crack growth when ductile fracture prevails ([Xia et al., 1995](#); [Shen et al., 2013](#)).

Figure 6.1a reveals the knife-edge material separation that is characteristic of coalescence by internal necking. It represents a typical situation after void linking has taken place, in contrast with Fig. 6.1d where void coalescence is only incipient but plastic flow has clearly localized within the intervoid ligament. The situation of Fig. 6.1d also corresponds to the flat voids or microcracks in Fig. 6.1c whereas a mix of void linkage and incipient coalescence is shown in Fig. 6.1b. This mechanism of internal necking occurs at low and moderate stress triaxiality (as corresponds to Fig. 6.1), including situations of combined tensile and shear loading ([Scheyvaerts et al., 2011](#); [Nielsen et al., 2012](#)). It also prevails in highly constrained fracture ahead of a blunted plane strain crack tip provided that the stress triaxiality is not so high as to promote cavitation instabilities ([Faleskog and Shih, 1997](#)).

Upon stressing, the voids in metallic alloys typically emanate from second-phases, weak interfaces, slip-band or twin intersections, then grow and rotate in proportions that depend on the stress state and the material ([Madou et al., 2013](#)). In certain materials, void growth is limited so that, after the nucleation condition is met, failure is determined by void coalescence ([Shen et al., 2013](#); [Kondori and Benzerga, 2014](#)). In most cases, termination to an otherwise nominally uniform void growth process is caused by strain localization in the intervoid ligament, often through internal necking. It is the

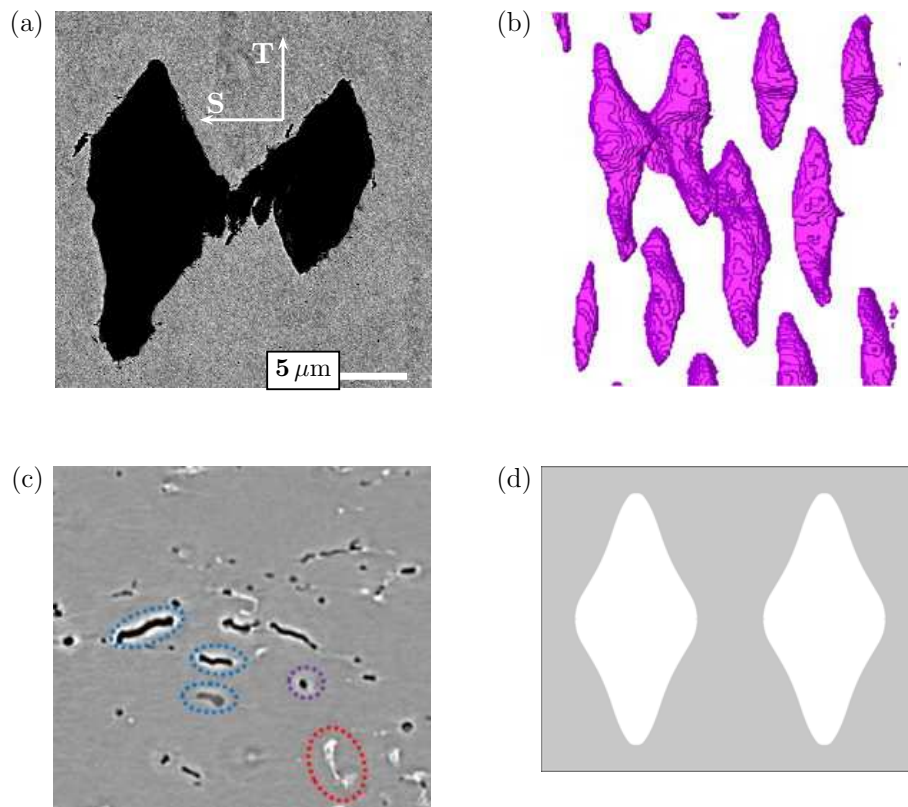


FIGURE 6.1: (a) SEM micrograph of void coalescence in a ferritic C–Mn steel [from (Benzerga et al., 1999)]. (b) Tomographic reconstruction of an array of (initially equiaxed) voids in the bulk of a copper tensile specimen [from (Weck et al., 2008b)]. (c) Synchrotron laminography image of flat voids in a state of incipient coalescence in a 6061 aluminum alloy sheet [from (Shen et al., 2013)]. (d) Deformed configuration after the onset of strain localization in the intervvoid ligament, as simulated using a finite-element cell model [based on (Keralavarma et al., 2011)].

modeling of this phenomenon that constitutes the central objective of this work.

Models for the growth of cavities in isotropic matrices have been developed with increasing degree of accuracy and sophistication (McClintock, 1968; Rice and Tracey, 1969; Gurson, 1977; Huang, 1991; Gologanu et al., 1993, 1994, 1997; Danas and Ponte Castañeda, 2009; Madou and Leblond, 2012a,b). By way of contrast, models for the coalescence of cavities remain scarce. Pineau and co-workers have used a criterion based on a critical void growth ratio and demonstrated its usefulness for modeling fracture in engineering alloys; see e.g. (Pineau, 2006). Application of the criterion requires isolated-void growth equations (McClintock, 1968; Rice and Tracey, 1969). Tvergaard and Needleman (1984) proposed a phenomenological model of void coalescence whereby the void volume fraction entering the Gurson criterion is replaced with an effective porosity that evolves at an accelerated rate past some threshold f_c . In this type of approach, experiments are used to provide calibration of fracture at the smallest scale of relevance (Hutchinson and Evans, 2000; Pineau, 2006). This approach is the most widely used in the literature. The idea would be quite appealing if f_c were a material parameter. Unfortunately the fact that a single f_c cannot be used to model crack-tip fracture and post-necking fracture in simple tension has been rather well documented (Benzerga et al., 1999; Pardoën and Hutchinson, 2000). Most importantly, the coalescence criterion used in the Gurson model heuristically extended by Tvergaard and Needleman (1984) lacks a physical basis.

Over the past decade or so, there have been several attempts at incorporating a physically-based void coalescence criterion into Gurson-like models (Benzerga et al., 1999; Zhang et al., 2000; Pardoën and Hutchinson, 2000; Benzerga et al., 2004a). These criteria are based on a limit-load model due to Thomason (1985) or elaborations thereof. However, while the physical basis of Thomason’s model appears to be sound his model rests on an empirical equation for internal necking and the lack of a

closed-form mathematical solution to the problem investigated has limited so far its applicability and improvement. Some heuristic improvements of Thomason’s model have been proposed by (Pardoen and Hutchinson, 2000) to account for strain-hardening effects and by Benzerga (2002) to account for a finite limit-load in the case of flat cavities. On the other hand, Gologanu et al. (2001) developed a fully analytical model of internal necking in which the overall kinematics is consistent with Thomason’s model and its variants but discrete voids are smeared out. Essentially the same idea of a two-step homogenization process was recently followed by Tekoglu et al. (2012) in an extension of the void coalescence criteria of Thomason (1985) and Benzerga (2002) to combined tension and shear loadings. In spite of all of the above efforts, the field of modeling void coalescence is still in its infancy. Only recently has a closed-form solution been developed (Benzerga and Leblond, 2014). These authors considered a finite-height cylindrical void embedded in a cylindrical cell subjected to velocity boundary-conditions of the non-uniform kind, i.e., differing from the Hill-Mandel type conditions commonly used in deriving homogenization-based void growth models. In doing so, Benzerga and Leblond (2014) used a set of kinematically admissible velocity fields that were the counterpart of Thomason’s for his square-prismatic geometry. These velocity fields were discontinuous within the elementary volume.

The objective of this work is two-fold. The first objective is to develop improved analytical models for the problem considered by Benzerga and Leblond (2014). Two theoretical estimates of the limit load required for internal necking are derived based on two new sets of velocity fields : in the first, a family of generalized discontinuous fields is developed which considers the shape of the plastic/rigid interface as a parameter ; in the second, continuous velocity fields are used. The second objective is to obtain supposedly exact results for the same problem using an efficient, finite-element based method of limit analysis (Madou and Leblond, 2012b). The predictions of both models as well as those of the model of Benzerga and Leblond (2014) are assessed against the numerical results.

6.2 Preliminaries

The pioneering work of Koplik and Needleman (1988) has revealed key micromechanical aspects of the phenomenon of coalescence by internal necking. Using finite-element analyses of a cylindrical cell containing a spherical void and subjected to various proportional loading paths, they observed an abrupt transition from a triaxial to a uniaxial straining mode of the cell. This transition corresponds to a localization of plastic flow in the horizontal invervoid ligament, involving the presence of regions of elastic unloading above and below the void. The same phenomenology has since been observed in a variety of other simulations (see Introduction and Fig. 6.1d). In developing micromechanical models that mimic such behavior, it is convenient to do so for a rigid–perfectly plastic solid. Under such circumstances, the theory of limit analysis (also known as upper-bound theory) is used so that the regions of elastic unloading are in fact modeled as rigid.

6.2.1 Limit-analysis procedure

Limit-analysis combined with the Hill-Mandel or periodic homogenization theories is a convenient framework to derive constitutive equations for ductile porous solids. It permits to effectively operate the scale transition by providing microstructural information in the macroscopic constitutive behavior.

Consider a representative volume element (RVE) in a porous ductile solid denoted Ω and containing a void denoted ω . The choice of the boundary conditions is crucial to derive the overall behavior of the RVE :

- Conditions of homogeneous boundary strain rate (Mandel, 1964; Hill, 1967) have been widely used to derive Gurson-type criteria. But while these boundary conditions are suitable for the void growth phase where plastic flow is diffuse, they cannot lead to localized plastic flow, as occurs during coalescence by internal necking.
- Periodic boundary conditions, typically employed in finite-element cell model studies permits strain localization, and are therefore pertinent for the study of coalescence.

The macroscopic yield locus of the porous material can be determined using the upper-bound theorem of limit-analysis (see e.g. [Benzerga and Leblond \(2010\)](#)). The fundamental inequality of this approach

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \leq \Pi(\mathbf{D}) \quad (6.1)$$

leads to the parametric equation of the yield locus (in the case of a regular yield function)

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{D}) \quad (6.2)$$

where the macroscopic stress and strain rate tensors $\boldsymbol{\Sigma}$ and \mathbf{D} are defined as the volume averages of their microscopic counterparts $\boldsymbol{\sigma}$ and \mathbf{d} . The macroscopic plastic dissipation $\Pi(\mathbf{D})$ in equations (7.4) and (6.2) is defined by :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{D})} \langle \sup_{\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathcal{C}} \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{d} \rangle_{\Omega} \quad (6.3)$$

where \mathcal{C} is the microscopic convex domain of reversibility and the set $\mathcal{K}(\mathbf{D})$ consists of velocity fields \mathbf{v} kinematically admissible with \mathbf{D} and verifying the property of incompressibility. Note that the velocity fields \mathbf{v} can be discontinuous across an interface S ; in this case the plastic dissipation given by equation (6.3) must be taken in the sense of distributions with a strain rate concentrated on a surface. This is equivalent to adding a surface term to the volume average given by

$$\frac{1}{\Omega} \int_S \sup_{\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathcal{C}} t_i^* \llbracket v_i \rrbracket dS \quad (6.4)$$

where $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket$ is the velocity jump across the interface S and \mathbf{t}^* the traction acting on it.

In practice, the minimization in equations (6.3) and (6.4) cannot be performed exactly; trial velocity fields are thus employed to provide an upper estimate of the macroscopic plastic dissipation and the limit load. The velocity field providing the lowest plastic dissipation necessarily gives the best estimate of the dissipation and thus the best estimate of the limit load.

6.2.2 Geometry

The RVE considered is that proposed by [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) following [Thomason \(1985\)](#), namely a cylindrical cell Ω containing a coaxial cylindrical void ω (Figure 7.1). The geometry is characterized by the *void aspect ratio* $W \equiv h/R$, the *ligament parameter* $\chi \equiv R/L$ and the *cell aspect ratio* $\lambda \equiv H/L$. The local orthonormal basis associated with the cylindrical coordinates r, θ, z is denoted $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ and that associated with the Cartesian coordinates x_1, x_2, x_3 is denoted $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, with $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$.

While the loadings considered are triaxial, coalescence is assumed to occur in the plane \mathbf{e}_1 – \mathbf{e}_2 , due to a major applied stress parallel to the axis \mathbf{e}_3 . As observed by [Koplik and Needleman \(1988\)](#), coalescence starts when the strain rate localizes in the horizontal ligament between neighbouring voids. The cell is consequently divided into two parts, the central one Ω_{lig} containing the plastic horizontal inter-void ligament and the void ω , and the rigid regions above and below the void denoted $\Omega - \Omega_{\text{lig}}$ (see Figure 6.2b). The interfaces between the two regions are denoted S_{bot} and S_{top} , and their union S_{int} .

Plastic flow in the inter-void ligament is assumed to obey von Mises' criterion :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{\text{eq}}^2 - \bar{\sigma}^2 = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\text{lig}} - \omega \quad (6.5)$$

where σ_{eq} is the von Mises equivalent stress and $\bar{\sigma}$ the yield stress in simple tension. For this criterion, the calculation of the supremum in equation (6.3) is straightforward and the expression of $\Pi(\mathbf{D})$ reduces to :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{D})} \langle \bar{\sigma} d_{\text{eq}} \rangle_{\Omega_{\text{lig}} - \omega} \quad (6.6)$$

where d_{eq} is the von Mises equivalent strain rate associated with the velocity field \mathbf{v} .

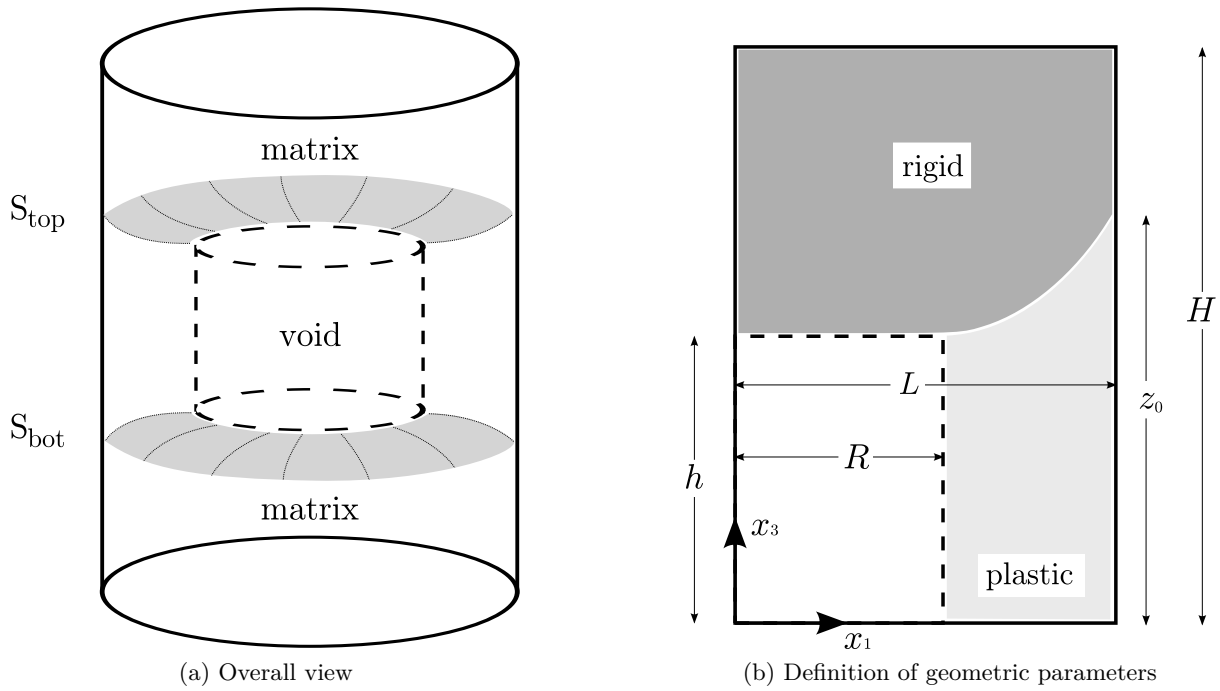


FIGURE 6.2: Schematic representation of the elementary cylindrical cell considered. When loaded in the plastic regime, this cell is composed of three regions, a deforming one containing the void surrounded by two rigid ones.

Remark 1 : Thomason (1985) in fact considered two geometries, a square-prismatic one and a cylindrical one. The advantage of square-prismatic cells is that they can be stacked up so as to build a periodic lattice. However, the square-prismatic geometry is not very suitable to describe actual void shapes. The advantages of the cylindrical geometry (as chosen here) are two-fold : (i) it better represents actual void shapes ; (ii) it leads to simpler and more explicit expressions of the coalescence criterion. Also, cylindrical cells stand as approximations of hexagonal-prismatic cells, which can be stacked up to build a periodic lattice.

Remark 2 : Cylindrical void shapes have been preferred to spheroidal void shapes (both in cylindrical cells) because the derivation of the criterion is easier for the former shapes. Since real voids are closer to spheroids than to cylinders, the validity of this approximation will be discussed in Subsections 6.5.2 and 6.5.3 using numerical finite element simulations.

Remark 3 : Unlike in the work of Benzerga and Leblond (2014), the shape of the interface between the plastic and rigid parts is not considered here to necessarily be planar. The determination of this shape, as a function of the velocity fields considered, will be discussed in the sequel. Note that the shape represented in Figure 6.2b qualitatively corresponds to that imposed by the “generalized discontinuous” velocity fields of Section 6.3.2, while a planar one is considered for the “discontinuous” and “continuous” velocity fields of Sections 6.3.1 and 6.3.3, respectively.

6.2.3 Boundary conditions

The RVE is subjected to boundary conditions of the form

$$\begin{cases} v_r(r = L, z) &= D_{11}L & (-H \leq z \leq H) \\ v_z(r, z = \pm H) &= \pm D_{33}H & (0 \leq r \leq L). \end{cases} \quad (6.7)$$

The cylindrical shape of the RVE, together with these boundary conditions, stand as an approximation of a unit cell in a periodic medium subjected to periodic boundary conditions (see [Koplik and Needleman \(1988\)](#)).

6.2.4 Admissible velocity fields to describe coalescence

The presence of rigid regions above and below the void implies that

$$v_r(r = L, z) = 0 \quad (|z| \geq z_0). \quad (6.8)$$

This implies that the overall horizontal strain rate components are nil. For the coalescence phase, the boundary conditions on the velocity field therefore read :

$$v_r(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (6.9)$$

$$v_z(\mathbf{x}) = v_z(L, \pm z_0) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega - \partial\Omega_{\text{lig}} \quad (6.10)$$

where z_0 is defined in Figure 6.2b (and with $v_\theta = 0$ everywhere because of axial symmetry¹).

At the interface between the plastic and rigid parts, the possible velocity discontinuity must be purely tangential :

$$[[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in S_{\text{int}} \quad (6.11)$$

where \mathbf{n} is the normal vector to the interface.

In the plastic inter-void ligament, the velocity must verify the property of incompressibility :

$$\text{tr } \mathbf{d} = \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\text{lig}} - \omega \quad (6.12)$$

6.3 Theoretical trial velocity fields

In what follows, the velocity fields will be given for a *positive* macroscopic strain rate D_{33} , which naturally leads to the *maximum* limit-load Σ_{33} (in tension). However, since the *minimum* limit-load, in compression, is obviously opposite to that in tension, an absolute value will be introduced in the yield criterion obtained in order to cover the two cases (tension and compression²).

6.3.1 Discontinuous velocity field of Benzerga and Leblond

[Benzerga and Leblond \(2014\)](#)'s velocity field is of the form :

$$\begin{cases} v_r(r) = \frac{HD_{33}}{2h} \left(\frac{L^2}{r} - r \right) \\ v_z(z) = \frac{HD_{33}}{h} z \end{cases} \quad (-h < z < h) \quad (6.13)$$

The expression of the associated equivalent strain rate is :

$$d_{\text{eq}} = \frac{HD_{33}}{\sqrt{3}h} \left(\frac{L^4}{r^4} + 3 \right)^{1/2}. \quad (6.14)$$

This velocity field, together with the associated equivalent strain rate, are represented in Figure 6.3, for $\chi = 0.4$ and $W = 1$.

1. Note that a non-symmetric solution is *a priori* possible but not studied here, like in the classical works of [Thomason \(1985\)](#); [Koplik and Needleman \(1988\)](#).

2. At fixed void shape, the limit-loads are the same in tension and compression. However, in an actual evolution problem the void shapes would evolve in such a way that collapse, instead of coalescence would occur in compression ([Srivastava and Needleman, 2013](#)).

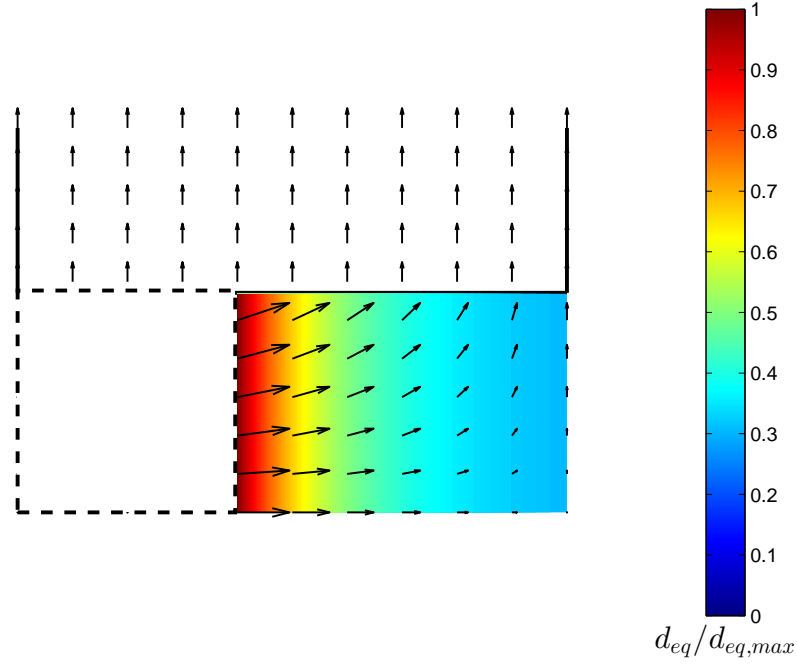


FIGURE 6.3: Benzerga and Leblond (2014)'s velocity field (represented by arrows) and the associated equivalent strain rate (represented by colors).

The overall yield criterion derived from limit-analysis using this trial velocity field reads :

$$\Phi_1(\Sigma; \chi, W) = \frac{|\Sigma_{33}|}{\bar{\sigma}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[2 - \sqrt{1 + 3\chi^4} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 3\chi^4}}{3\chi^2} + \frac{\chi^3 - 3\chi + 2}{3\chi W} \right] \leq 0 \quad (6.15)$$

where, as explained above, the absolute value permits to express the limit-loads in both tension and compression.

6.3.2 Generalized discontinuous velocity field

The aim of this section is to provide a generalization of the discontinuous velocity fields proposed by Benzerga and Leblond (2014). Extending the set of trial velocity fields is of interest because it necessarily leads to a lower estimate of the dissipation, and therefore, as explained above, a better estimate of the yield criterion.

The velocity fields investigated are of the generic form :

$$\begin{cases} v_r(r) = \varphi(r) \\ v_z(r, z) = \psi(r)z \end{cases} \quad (6.16)$$

where the functions $\varphi(r)$ and $\psi(r)$ are connected by the relation, resulting from incompressibility :

$$\varphi'(r) + \frac{\varphi(r)}{r} + \psi(r) = 0. \quad (6.17)$$

Furthermore, the boundary conditions (6.9) imply that

$$\varphi(L) = 0. \quad (6.18)$$

The non-zero components of the strain rate tensor are given by

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{rr} \equiv \frac{dv_r}{dr} = \varphi'(r) \\ d_{\theta\theta} \equiv \frac{v_r}{r} = \frac{\varphi(r)}{r} \\ d_{zz} \equiv \frac{\partial v_z}{\partial z} = \psi(r) \\ d_{rz} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2} \psi'(r) z. \end{array} \right.$$

The expression of the equivalent strain rate is then :

$$d_{\text{eq}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[2\varphi'^2(r) + 2\frac{\varphi^2(r)}{r^2} + 2\psi^2(r) + \psi'^2(r)z^2 \right]^{1/2} \quad (6.19)$$

Let us now determine the equation

$$z = \pm Z(r) \quad (6.20)$$

of the plastic/rigid interface associated with this velocity field. The latter must verify the continuity of normal velocities across the interface, equation (6.11). Since a (non-unit) normal vector to the upper interface is $-Z'(r)\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z$, condition (6.11) reads

$$-Z'(r)[v_r^{\text{R}} - v_r(r)] + v_z^{\text{R}} - v_z(r, z) = 0 \quad (6.21)$$

where v_r^{R} and v_z^{R} denote the radial and axial components of the velocity in the upper rigid zone. Taking advantage of equations (6.9), (6.10) (where $z_0 = Z(L)$), (6.16) and (6.20), one obtains from there the following differential equation on the function $Z(r)$:

$$Z'(r)\varphi(r) + \psi(L)Z(L) - \psi(r)Z(r) = 0. \quad (6.22)$$

Note that this differential equation is a bit peculiar since Z enters it twice, as the unknown function but also through the coefficient $\psi(L)Z(L)$.

Solving the differential equation (6.22) using the standard method of the variation of the constant and the incompressibility equation (6.17), one gets

$$Z(r) = -\frac{\psi(L)Z(L)r}{2\varphi(r)} + \frac{\alpha}{r\varphi(r)} \quad (6.23)$$

where α is a constant. Equations (6.17) and (6.18) then imply that

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \psi(L)Z(L)\frac{L^2}{2} = -\varphi'(L)Z(L)\frac{L^2}{2} \\ Z(L) = -2h\frac{R\varphi(R)}{(L^2 - R^2)\varphi'(L)} \end{array} \right. \quad (6.24)$$

where use has been made of the fact that $Z(R) = h$ (see Figure 6.2b). This leads to the following equation defining the shape of the interface :

$$Z(r) = h\frac{R\varphi(R)}{r\varphi(r)}\frac{L^2 - r^2}{L^2 - R^2}. \quad (6.25)$$

Note that equations (6.24)_b and (6.25) are consistent since the limit of $Z(r)$ for $r \rightarrow L$, as inferred from the latter, coincides with $Z(L)$, as given by the former.

It now becomes necessary to specify the function φ (the function ψ being deduced from φ using (6.17)). The choice is based on the following considerations :

- The function φ must decrease from a positive value at $r = R$ to zero at $r = L$. Two proportional functions will give the same result for Σ_{33} , so the value of $\varphi(R)$ is arbitrary.
- It is appropriate to include [Benzerga and Leblond \(2014\)](#)'s velocity field in the extended set of trial velocity fields, since it is supposed to provide a reasonable estimate of the limit-load; this corresponds to the choice $\varphi(r) = A \frac{L^2 - r^2}{L^2 - R^2} \frac{R}{r}$ where A is a positive constant. The choice $\varphi(r) = A \left(\frac{L^2 - r^2}{L^2 - R^2} \frac{R}{r} \right)^n$, $n > 0$, is also *a priori* suitable.

The following set of trial velocity fields including that of [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) is therefore proposed :

$$\begin{cases} \varphi(r) = A[\Lambda x^n + (1 - \Lambda)x], & x = \frac{L^2 - r^2}{L^2 - R^2} \frac{R}{r}, \quad 0 \leq \Lambda \leq 1, \quad n > 0 \\ \psi(r) = -\varphi'(r) - \frac{\varphi(r)}{r}. \end{cases} \quad (6.26)$$

This set satisfies the requirements just expounded. Note that two parameters (Λ and n) can be adjusted in order to obtain the lowest estimate of the dissipation and therefore a better estimate of the limit-load.

The velocity field and the associated equivalent strain rate are represented in [Figure 6.4](#) for the values $\Lambda = 0.2$ and $n = 5$, again for a geometry characterized by the parameters $\chi = 0.4$ and $W = 1$.

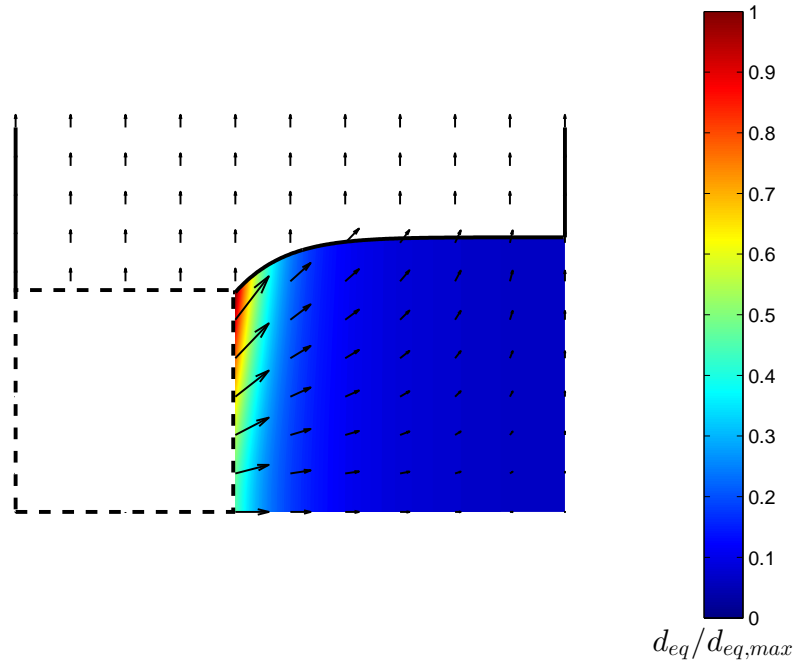


FIGURE 6.4: The generalized discontinuous velocity field (represented by arrows) and the associated equivalent strain rate (represented by colors).

6.3.3 Continuous velocity fields

In this section, the shape of the interface is taken to be planar, as in the work of [Benzerga and Leblond \(2014\)](#).

The previous velocity fields have a tangential discontinuity across the interface between the plastic and rigid parts; this is questionable from a physical point of view. It is of interest, therefore, to look for a velocity field close to the previous ones, but with a dependency on z adjusted in such a way that

$[[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{t} = 0$ on the interface where \mathbf{t} is a unit tangent vector. A candidate velocity field is :

$$\begin{cases} v_r(r, z) = g_1(z) \left(\frac{L^2}{r} - r \right) \\ v_z(z) = g_2(z) \end{cases} \quad (6.27)$$

where the functions $g_1(z)$ and $g_2(z)$ are connected by the incompressibility condition :

$$g_2'(z) - 2g_1(z) = 0. \quad (6.28)$$

Furthermore, the condition $[[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{t} = 0$ on the interface implies that

$$g_1(\pm h) = 0. \quad (6.29)$$

The non-zero components of the strain rate tensor are :

$$\begin{cases} d_{rr} \equiv \frac{\partial v_r}{\partial r} = g_1(z) \left(-\frac{L^2}{r^2} - 1 \right) \\ d_{\theta\theta} \equiv \frac{v_r}{r} = g_1(z) \left(\frac{L^2}{r^2} - 1 \right) \\ d_{zz} \equiv \frac{dv_z}{dz} = g_2'(z) \\ d_{rz} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{g_1'(z)}{2} \left(\frac{L^2}{r} - r \right) \end{cases}$$

The equivalent strain rate is given by :

$$d_{\text{eq}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[4g_1^2(z) \left(\frac{L^4}{r^4} + 3 \right) + g_1'^2(z) \left(\frac{L^2}{r} - r \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.30)$$

One possible function $g_1(z)$, satisfying equation (6.29), is :

$$g_1(z) = B(h - |z|) \quad (6.31)$$

where B is a positive constant ; for this function, the equivalent strain rate reduces to :

$$d_{\text{eq}} = \frac{B}{\sqrt{3}} \left[4(h - z)^2 \left(\frac{L^4}{r^4} + 3 \right) + \left(\frac{L^2}{r} - r \right)^2 \right]^{1/2} \quad (0 \leq z \leq h) \quad (6.32)$$

The advantage of this function is that it permits an analytical integration over z of the equivalent strain rate.

The velocity field and the associated equivalent strain rate are represented in Figure 6.5, for $\chi = 0.4$ and $W = 1$.

6.4 Determination of the effective yield criteria

6.4.1 Case of the generalized discontinuous velocity field

Following Benzerga and Leblond (2014), the macroscopic plastic dissipation in (6.3) is divided into a volumetric term, Π^{vol} , and a surface term, Π^{surf} , due to the tangential discontinuity.

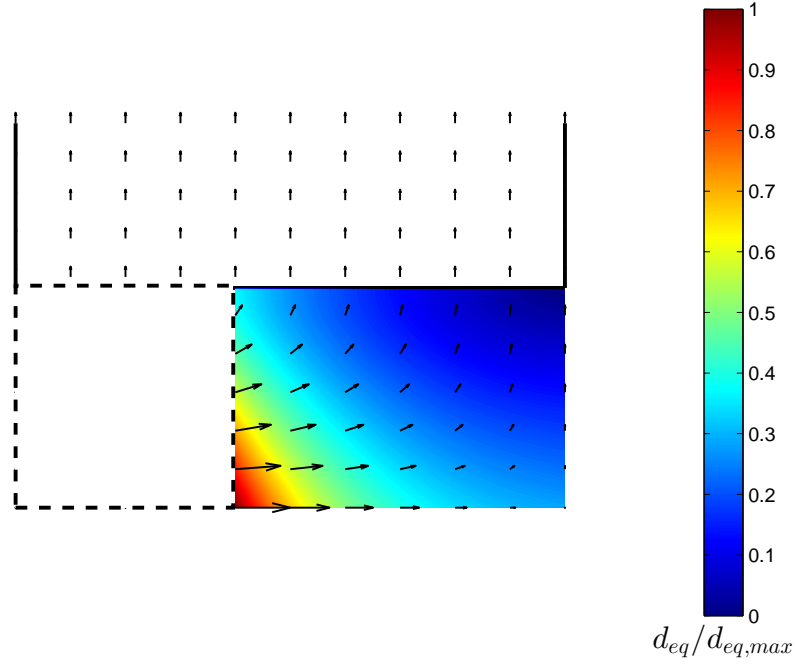


FIGURE 6.5: The continuous velocity field (represented by arrows) and the associated equivalent strain rate (represented by colors).

Volumetric dissipation : The macroscopic volumetric plastic dissipation is given by :

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\text{vol}} &= \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_R^L 2\pi r \, dr \int_{-Z(r)}^{Z(r)} \bar{\sigma} d_{\text{eq}} \, dz \\
 &= \frac{4\pi\bar{\sigma}}{\sqrt{3} \text{vol}(\Omega)} \int_R^L r \, dr \int_0^{Z(r)} \left[2\varphi'^2(r) + 2\frac{\varphi^2(r)}{r^2} + 2\psi^2(r) + \psi'^2(r)z^2 \right]^{1/2} dz \\
 &= \frac{4\pi\bar{\sigma}}{\sqrt{3} \text{vol}(\Omega)} \int_R^L \left[2\varphi'^2(r) + 2\frac{\varphi^2(r)}{r^2} + 2\psi^2(r) \right] \frac{r \, dr}{|\psi'(r)|} \int_0^{X(r)} \sqrt{1+u^2} \, du \quad (6.33)
 \end{aligned}$$

where the change of variable $u = |\psi'(r)|z / \sqrt{2\varphi'^2(r) + 2\frac{\varphi^2(r)}{r^2} + 2\psi^2(r)}$ has been used and the function X is defined by

$$X(r) = \frac{|\psi'(r)|Z(r)}{\sqrt{2\varphi'^2(r) + 2\frac{\varphi^2(r)}{r^2} + 2\psi^2(r)}}. \quad (6.34)$$

Integration over the variable u is straightforward so that :

$$\Pi^{\text{vol}} = \frac{4\pi\bar{\sigma}}{\sqrt{3} \text{vol}(\Omega)} \int_R^L \frac{r}{|\psi'(r)|} \left[\varphi'^2(r) + \frac{\varphi^2(r)}{r^2} + \psi^2(r) \right] \left[X(r)\sqrt{1+X^2(r)} + \text{Argsinh}(X(r)) \right] dr. \quad (6.35)$$

Surface dissipation : The expression of the surface dissipation is, account being taken of the symmetry with respect to the horizontal mid-plane :

$$\Pi^{\text{surf}} = \frac{2}{\text{vol}(\Omega)} \int_{S_{\text{top}}} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \llbracket v_t \rrbracket \, dS = \frac{2\bar{\sigma}}{\sqrt{3} \text{vol}(\Omega)} \int_R^L \llbracket v_t \rrbracket |2\pi r \sqrt{1+Z'^2(r)} \, dr \quad (6.36)$$

where $\llbracket v_t \rrbracket$ denotes the discontinuity of the tangential velocity across the interface. Because of the condition $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0$ on this interface, the norm of this discontinuity is given by

$$\llbracket v_t \rrbracket = \llbracket v_r \rrbracket \sqrt{1+Z'^2(r)} = \varphi(r) \sqrt{1+Z'^2(r)} \quad (6.37)$$

so that :

$$\Pi^{\text{surf}} = \frac{4\pi\bar{\sigma}}{\sqrt{3} \text{vol}(\Omega)} \int_R^L r\varphi(r)[1 + Z'^2(r)] dr. \quad (6.38)$$

The total dissipation $\Pi = \Pi^{\text{vol}} + \Pi^{\text{surf}}$ thus depends on the equation of the interface $z = \pm Z(r)$ and the velocity function $\varphi(r)$.

Expression of the yield criterion The macroscopic axial stress promoting plastic flow in the ligaments can be obtained as :

$$\Sigma_{33} = \frac{\partial \Pi}{\partial D_{33}} = \frac{\Pi}{D_{33}} = \frac{\Pi^{\text{vol}} + \Pi^{\text{surf}}}{D_{33}} \quad (6.39)$$

where the macroscopic axial strain rate D_{33} is given by :

$$D_{33} = \frac{1}{2H} [v_z(L, H) - v_z(L, -H)] = \frac{1}{2H} [v_z(L, z_0) - v_z(L, -z_0)] = \frac{\psi(L)Z(L)}{H}. \quad (6.40)$$

With no loss of generality, one may take L to be unity, since the final criterion only depends on the dimensionless parameters χ and W . Therefore, the criterion based on the generalized discontinuous velocity field finally reads :

$$\begin{aligned} \Phi_2(\Sigma; \chi, W) = & \frac{|\Sigma_{33}|}{\bar{\sigma}} - \frac{2}{\sqrt{3} \psi(1)Z(1)} \int_{\chi}^1 \left\{ \varphi(r) [1 + Z'^2(r)] \right. \\ & \left. + \frac{\varphi'^2(r) + \frac{\varphi^2(r)}{r^2} + \psi^2(r)}{|\psi'(r)|} \left[X(r) \sqrt{1 + X^2(r)} + \text{Argsinh}(X(r)) \right] \right\} r dr \leq 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

The above yield function depends on the equation of the interface $z = \pm Z(r)$ and the velocity functions $\varphi(r)$ and $\psi(r)$. For the family of velocity fields defined by (6.26), the interface equation and auxiliary function $X(r)$ are determined by (6.25) and (6.34), respectively, and, in particular, $Z(1) = \chi W / (1 - \Lambda)$. The integral in the final expression of Φ_2 may then be evaluated numerically.

It is of interest to examine the limit $W \rightarrow 0$ corresponding to a penny-shaped crack. In this limit, $Z(r) = O(W)$ so that $X(r) = O(W)$ also, and the expression of the limit-load becomes

$$\frac{|\Sigma_{33}|}{\bar{\sigma}} \sim \frac{2}{\sqrt{3}\psi(1)Z(1)} \int_{\chi}^1 \varphi(r)r dr = O\left(\frac{1}{W}\right). \quad (6.42)$$

Thus, the limit-load diverges as $1/W$, just like that provided by Benzerga and Leblond (2014)'s criterion, but in contrast with that proposed by Thomason (1985) which diverges more strongly, like $1/W^2$.

6.4.2 Case of the continuous velocity field

Plastic dissipation In this case one must determine the sole volumetric plastic dissipation since the velocity field is continuous across the interface. This dissipation is given by

$$\Pi = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_R^L 2\pi r dr \int_{-h}^h \bar{\sigma} d_{\text{eq}} dz \quad (6.43)$$

$$= \frac{4\pi\bar{\sigma}B}{\sqrt{3} \text{vol}(\Omega)} \int_R^L r dr \int_0^h \left[4(h-z)^2 \left(\frac{L^4}{r^4} + 3 \right) + \left(\frac{L^2}{r} - r \right)^2 \right]^{1/2} dz \quad (6.44)$$

Using the changes of variables $u = r^2/L^2$, $v = (h-z)/L$, the previous integral can be rewritten as

$$\Pi = \frac{2\pi L^4 \bar{\sigma} B}{\sqrt{3} \text{vol}(\Omega)} \int_{\chi^2}^1 du \int_0^{W\chi} \frac{1-u}{\sqrt{u}} \left[\frac{4(1+3u^2)}{u(1-u)^2} v^2 + 1 \right]^{1/2} dv \quad (6.45)$$

which simplifies, upon calculation of the integral on v , into :

$$\Pi = \frac{\pi L^4 \bar{\sigma} B}{2\sqrt{3} \text{vol}(\Omega)} \int_{\chi^2}^1 \frac{(1-u)^2}{\sqrt{1+3u^2}} \left[Y(u) \sqrt{1+Y^2(u)} + \text{Argsinh}(Y(u)) \right] du \quad (6.46)$$

where the function Y is defined as

$$Y(u) = \frac{2W\chi}{1-u} \sqrt{\frac{1+3u^2}{u}}. \quad (6.47)$$

Effective macroscopic criterion The macroscopic axial stress promoting plastic flow in the ligament is again obtained as $\Sigma_{33} = \frac{\partial \Pi}{\partial D_{33}} = \frac{\Pi}{D_{33}}$ where

$$D_{33} = \frac{1}{2H} [v_z(H) - v_z(-H)] = \frac{1}{2H} [v_z(h) - v_z(-h)] = B \frac{h^2}{H}. \quad (6.48)$$

The overall yield criterion derived from the continuous velocity field therefore finally reads :

$$\Phi_3(\Sigma; \chi, W) = \frac{|\Sigma_{33}|}{\bar{\sigma}} - \frac{1}{4\sqrt{3}W^2\chi^2} \int_{\chi^2}^1 \frac{(1-u)^2}{\sqrt{1+3u^2}} \left[Y(u) \sqrt{1+Y^2(u)} + \text{Argsinh}(Y(u)) \right] du \leq 0 \quad (6.49)$$

(Note that the integral is convergent since the integrand is of order 1 near the upper bound 1 by equation (6.47)).

Again it is interesting to study the limit $W \rightarrow 0$. In this limit, $Y(u) = O(W)$ so that the expression of the limit-load becomes

$$\frac{|\Sigma_{33}|}{\bar{\sigma}} \sim \frac{1}{4\sqrt{3}W^2\chi^2} \cdot O(W) = O\left(\frac{1}{W}\right). \quad (6.50)$$

Thus, the limit-load predicted by the continuous model again diverges like $1/W$.

6.5 Numerical study of the onset of coalescence

6.5.1 Description of the simulations

The aim of this section is to numerically assess all three analytical models of coalescence presented above. The limit-analysis problem is solved by means of the standard finite element method including elasticity, by considering a large load step without geometry update (Madou and Leblond, 2012b; Tekoglu et al., 2012). Indeed under such conditions, the time-discretized equations of the finite element problem are equivalent to those of limit-analysis, provided that the local “projection problem” (plastic correction of the elastic stress predictor) is solved using an implicit algorithm; see Appendix C.

The calculations are carried out using the commercial SYSTUS[®] finite element code developed by ESI Group. 2D axisymmetric meshes are used since cylindrical cells have been considered in the analytical models. Correspondingly, axisymmetric loadings are considered : $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} \neq 0$, $\Sigma_{33} \neq 0$ and $\Sigma_{ij} = 0$ otherwise. Two boundary conditions of type (6.7) are used (none of them being of the homogeneous strain-rate kind). In the first type, coalescence is not imposed so that the overall horizontal strain rate D_{11} is arbitrary (Figures 6.6a,b). In the second type, coalescence is imposed so that D_{11} is zero (Figures 6.7a,b). The values of the macroscopic strain rates D_{11} and D_{33} are taken large enough to ensure that the limit-load is reached, and the elastic strains are generally negligible; see Appendix C.

Two higher-level programmes have been developed in order to streamline the execution of a large number of simulations. The first one prepares the mesh for specified values of W and χ and runs the calculations, while the second exploits the results by calculating the macroscopic stresses Σ_{11} and Σ_{33} using the formula :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega-\omega} \sigma_{ij} d\Omega. \quad (6.51)$$

The results so obtained for the limit loads are *exact* up to numerical errors.

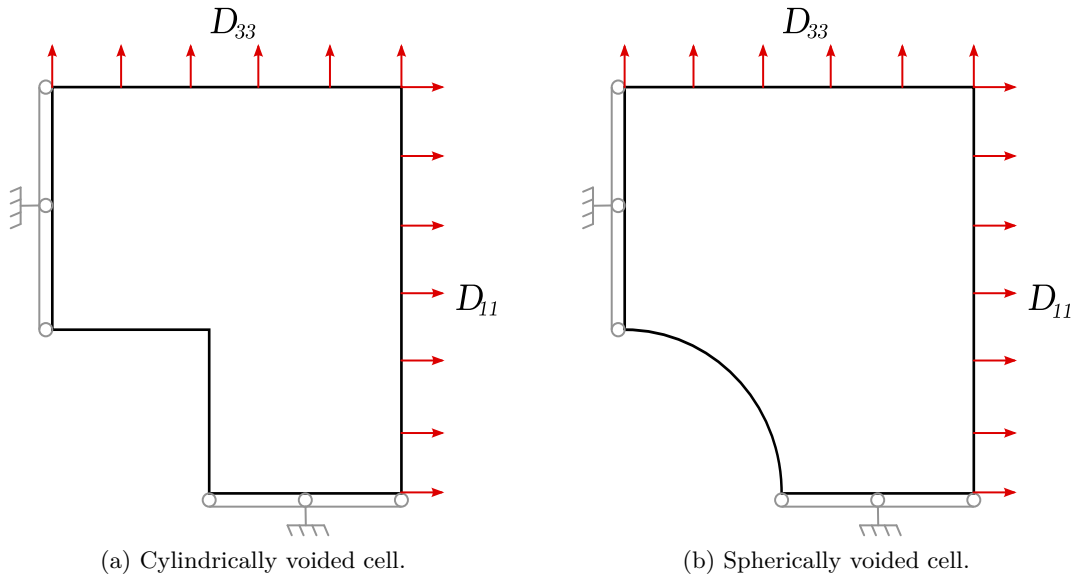


FIGURE 6.6: Boundary conditions considered for the the study of the entire yield locus.

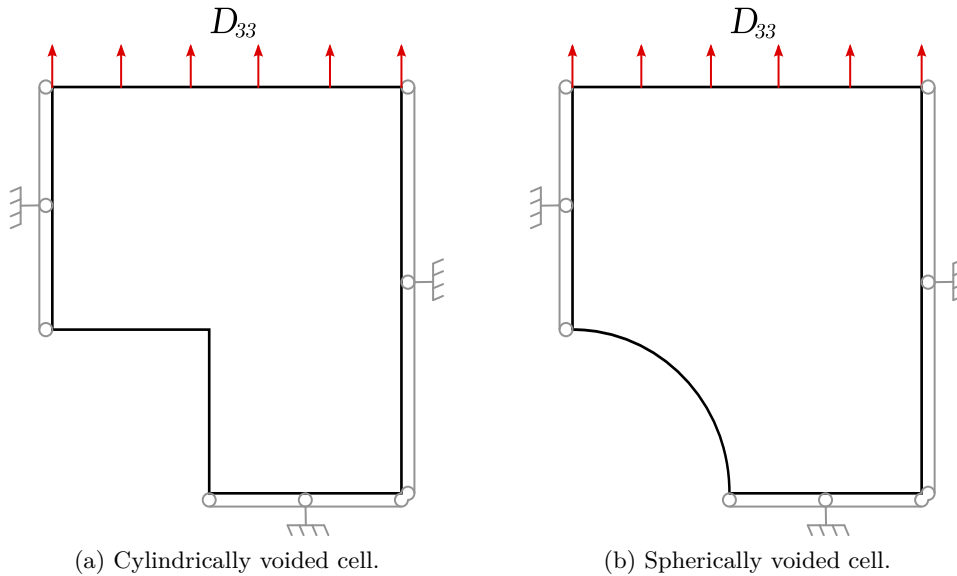


FIGURE 6.7: Boundary conditions considered for the study of the “coalescence stress”.

6.5.2 Study of the entire yield locus ($D_{11} \neq 0$)

The models assume cylindrical voids for simplicity, but actual void shapes are closer to ellipsoids. Therefore, before assessing the developed criteria, the influence of void shape on the overall yield criterion is investigated. We thus compare the entire yield surfaces corresponding to either a cylindrical cavity (Fig. 6.6a) or a spherical one (Fig. 6.6b) embedded in a cylindrical cell, having the same aspect ratio $W = 1$. The values $\lambda = 1$ and $f \equiv \text{vol}(\omega)/\text{vol}(\Omega) = 0.01$ are used for the cell aspect ratio and the porosity, respectively. The calculations are carried out without imposing coalescence, that is without prescribing a zero overall horizontal strain rate.

The computed yield surfaces are shown in Figure 6.8 along with that of Gurson (1977), in the plane $(\frac{\Sigma_m}{\sigma}, \frac{\Sigma_{33} - \Sigma_{11}}{\sigma})$, where $\Sigma_m = \frac{1}{3}(2\Sigma_{11} + \Sigma_{33})$ is the mean stress. Some comments are in order here :

- Irrespective of void shape, the computed yield surface is composed of two parts, a smooth curve and a straight line. The curved part corresponds to solutions for which the plastic strain rate is

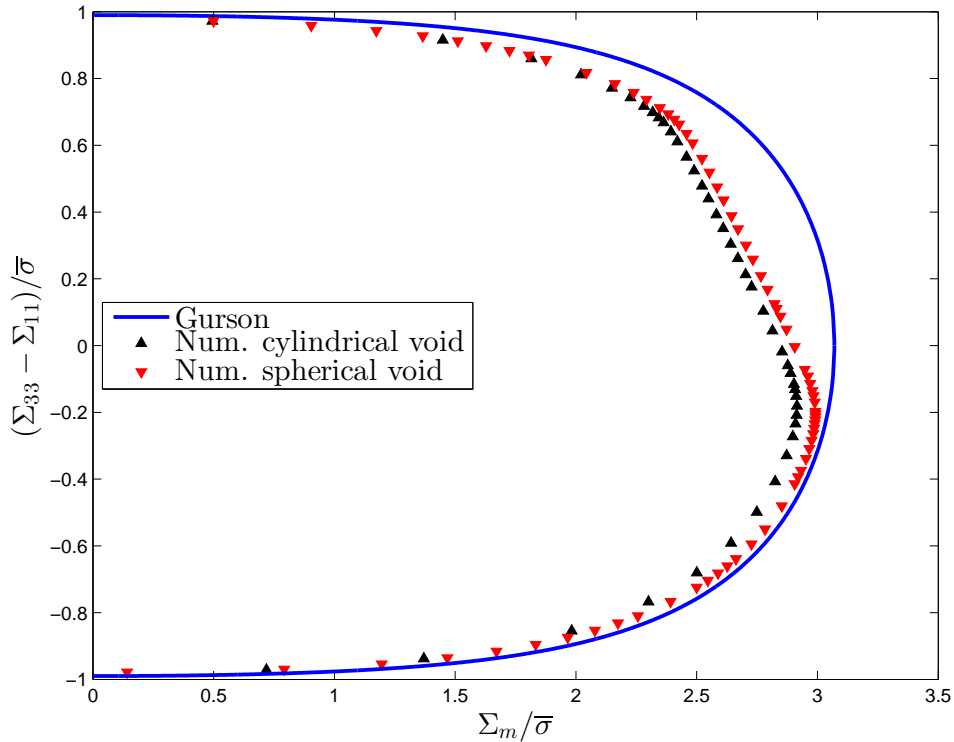


FIGURE 6.8: Yield loci of cylindrical cells containing spherical or finite-height cylindrical voids, for $W = 1$, $\lambda = 1$ and $f = 0.01$.

non-zero in the entire cell, that is to the growth phase. On the other hand, the straight line corresponds to solutions for which the plastic strain rate is concentrated in the inter-void ligament, that is to the coalescence phase. Indeed when coalescence occurs, the horizontal component of the macroscopic strain rate becomes nil, which implies *via* the normality property of the macroscopic flow rule³ that the macroscopic yield function becomes independent of the horizontal stress Σ_{11} ; this means that the criterion simply reads $\Sigma_{33} = \text{Cst.}$, which defines a straight line in the diagram of Figure 6.8.

- Gurson (1977)’s yield locus does not have any similar straight portion corresponding to coalescence, since the boundary conditions of homogeneous strain rate considered in its derivation prevent strain localization.
- The numerical results for a cylindrical void and a spherical one are very close. This justifies the choice of a cylindrical void shape in the derivation of the coalescence criterion.

6.5.3 Study of coalescence ($D_{11} = 0$)

We now concentrate on the sole coalescence phase, and more specifically on the value of the “coalescence stress”. The relevant geometric parameters for this study are the porosity in the central band and the void aspect ratio (see formulae (6.15), (6.41) and (6.49)). The porosity, defined as $f = c\chi^2$ (where $c = h/H$ is the volume fraction of the voided band), is not a pertinent parameter with regard to coalescence since c has an influence only on the curved part of the yield surface but not on the straight part, corresponding to coalescence.

Influence of the void shape : In a first series of calculations, the influence of void shape (spherical/cylindrical) on the coalescence phase is examined. The aim here is to complete the comparison made on the entire yield locus but for a single value of the triplet (W, λ, f) (see Figure 6.8), by now considering the sole “coalescence stress” but for various values of the geometric parameters. The limit

3. The normality property is preserved during the homogenization procedure; see Rice (1971) and Gurson (1977).

load corresponding to either an equiaxed cylindrical cavity (with $W = 1$ as depicted in Fig. 6.7a) or a spherical one (Fig. 6.7b) is computed for several values of the porosity in the central band, represented by the ratio $\text{vol}(\omega)/\text{vol}(\Omega_{\text{lig}})$ which itself is related to the ligament parameter χ . The coalescence stresses are compared in Figure 6.9. Again, the results show that the influence of the void shape is weak, thus justifying the choice of cylindrical voids in the derivation of the models.

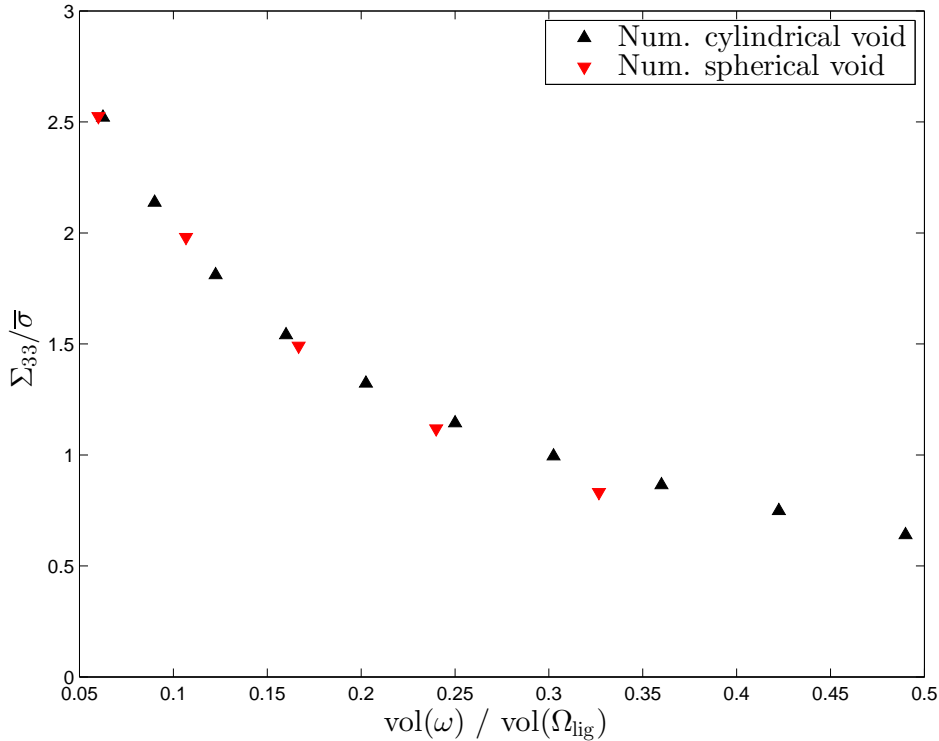


FIGURE 6.9: Computed limit-load versus porosity in the band (related to parameter χ) for cylindrical cells containing either cylindrical ($W = 1$) or spherical voids.

Coalescence of cylindrical voids : Here, focus is laid on cylindrical voids and the effects of the void aspect ratio W and the ligament parameter χ , related to the porosity in the central band, are investigated. Computed values of the macroscopic axial stress promoting coalescence are provided in Figure 6.10 for six void aspect ratios ($W = 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2, 3$) and ten void spacings ($\chi = 0.20 + 0.05k$, $k = 1, \dots, 10$). The predictions of the theoretical criteria derived in Section 6.4 and Benzerga and Leblond (2014)'s criterion are also represented. The values of the parameters used for the criterion based on the generalized discontinuous velocity field are $n = 5$ and $\Lambda = 0.8(1 - \chi)$ for $W = 0.2$ and $n = 5$, and $\Lambda = 0.2(1 - \chi)$ for $W = 0.5$.

To supplement these results, the numerical velocity field and the distribution of the associated equivalent strain rate are plotted with arbitrary units (since the magnitude of the imposed macroscopic strain rate is arbitrary) in three different cases, ($W = 3, \chi = 0.4$), ($W = 1, \chi = 0.4$) and ($W = 0.2, \chi = 0.4$), respectively in Figures 6.11, 6.12 and 6.13.

6.6 Discussion

The numerical limit-analyses performed using the standard finite element method permit to assess the theoretical coalescence criteria :

- For elongated voids, corresponding to moderate to high values of the void aspect ratio ($W \geq 1$, Figures 6.10a to 6.10d), all theoretical results are in good agreement with numerical ones. The discontinuous velocity field of Benzerga and Leblond (2014), corresponding to the particular

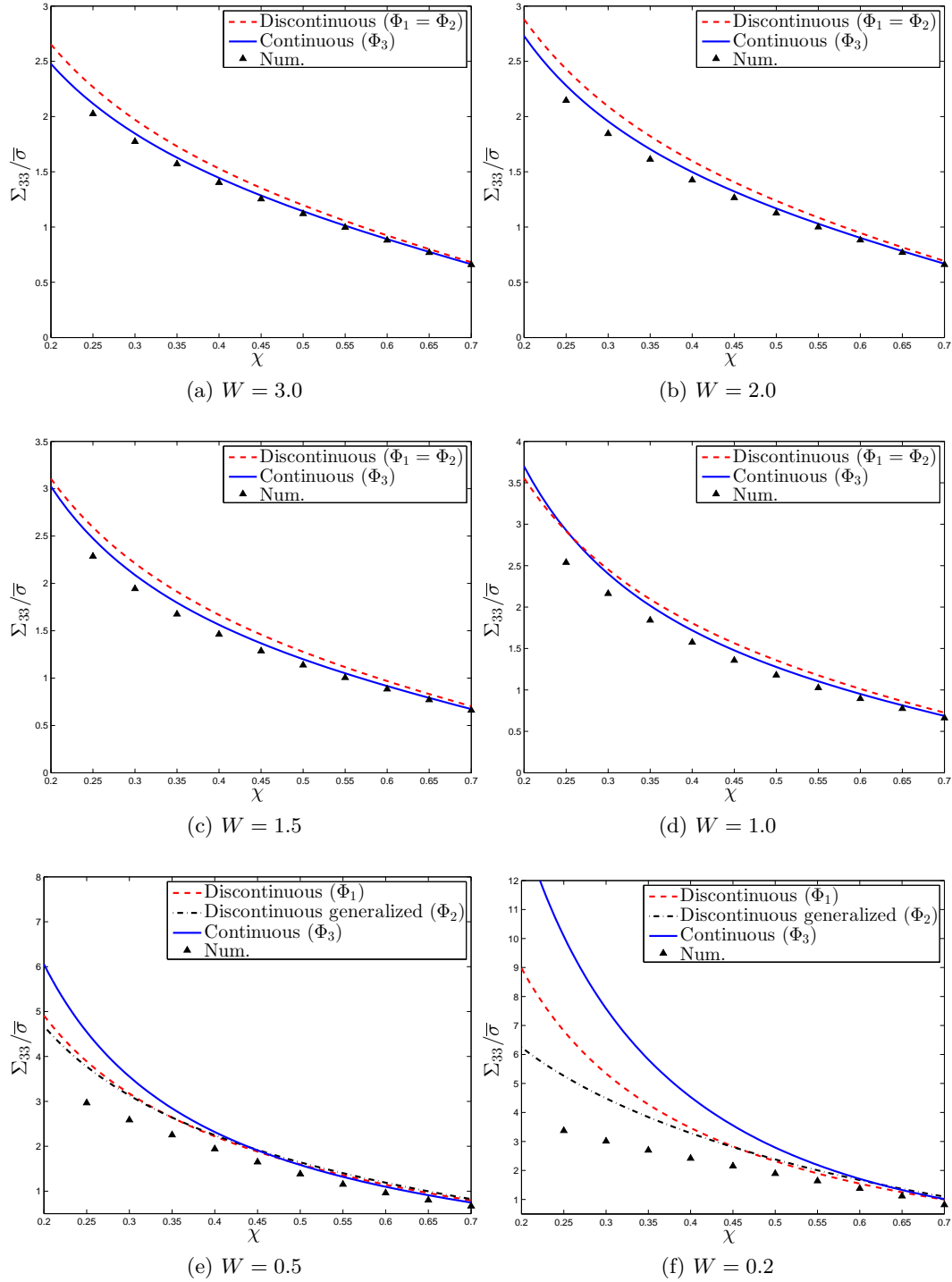


FIGURE 6.10: Numerical results and predictions of the models for the limit-load in tension of cylindrical cells containing cylindrical voids, for various values of χ and W .

choice $\psi(r) = \text{Const}$, provides the lowest limit-load among the functions $\psi(r)$ and $\varphi(r)$ investigated (which is why the results corresponding to the generalized discontinuous velocity field are not represented). It is however possible that some functions might improve the results since there is an infinity of admissible functions. An improvement is brought by the continuous velocity field, which yields results closer to the numerical ones than that of [Benzerga and Leblond \(2014\)](#).

The trends observed for the yield criterion are corroborated by the study of the numerical velocity fields (Figures 6.11a and 6.12a) : on the one hand, for a fixed r , the component v_r decreases

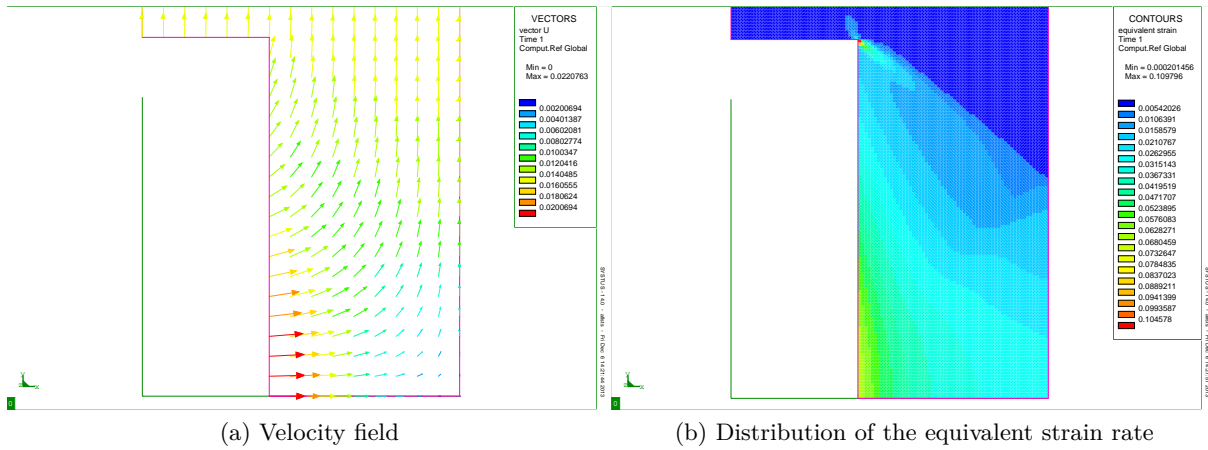


FIGURE 6.11: Numerical velocity and equivalent strain rate fields for $W = 3$ and $\chi = 0.4$ for a cylindrical cell containing a cylindrical void.

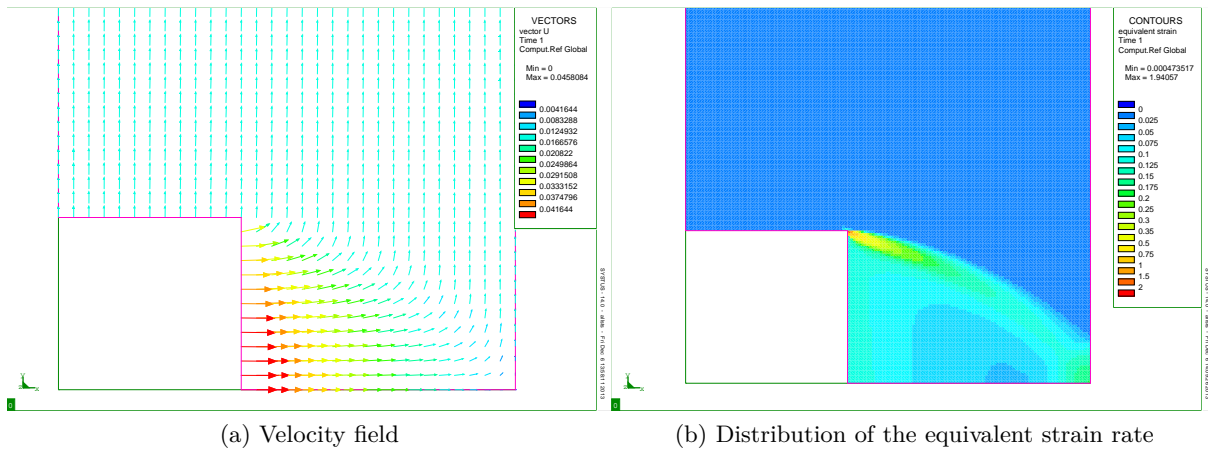


FIGURE 6.12: Numerical velocity and equivalent strain rate fields for $W = 1$ and $\chi = 0.4$ for a cylindrical cell containing a cylindrical void.

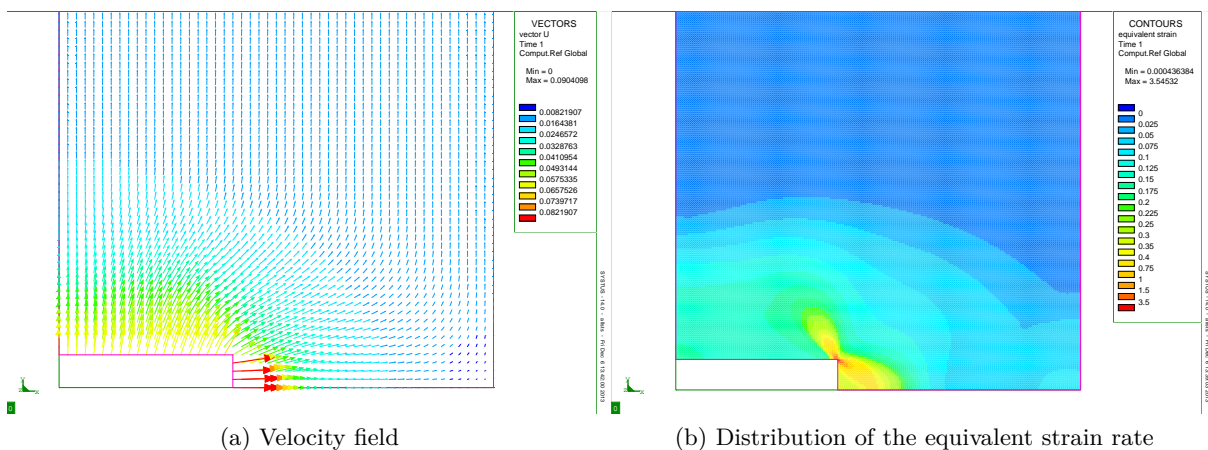


FIGURE 6.13: Numerical velocity and equivalent strain rate fields for $W = 0.2$ and $\chi = 0.4$ for a cylindrical cell containing a cylindrical void.

when z increases to become nil close to the rigid zone; on the other hand, for a fixed z , the component v_z increases when r increases, but this effect appears to be small when the void

aspect ratio increases. It is clear that the discontinuous velocity fields fail to reproduce the two features observed (see Figures 6.3 and 6.4), while the continuous one qualitatively reproduces the observation made for the component v_r but not that made for v_z (see Figure 6.5).

The same observations are in order with regard to the distribution of the equivalent strain rate (Figures 6.11b and 6.12b), which is qualitatively reproduced by the model based on the continuous velocity field (see Figure 6.5).

- For flat voids, corresponding to low values of the void aspect ratio ($W < 1$, Figures 6.10e and 6.10f), the three theoretical criteria overestimate the limit-load. The model based on the continuous velocity field provides in this case the highest limit-load. The model based on the discontinuous generalized velocity field substantially improves Benzerga and Leblond (2014)’s estimate, but still overestimates the limit-load.

The numerical results for the distribution of the equivalent strain rate (Figure 6.13b) evidence a peculiar feature : the plastic zone extends vertically beyond the void. The analytical velocity fields, both continuous and discontinuous, do not appear to be relevant for such void aspect ratios since none of them considers such a plastic zone (Figures 6.3, 6.4 and 6.5). One may however note that the generalized discontinuous velocity field partially captures this phenomenon by considering a vertically extended plastic region, but only in the ligament, not above and below the void itself (Figure 6.4). More complex velocity fields would be necessary to derive a better criterion in this case.

6.7 Conclusion

The problem of void coalescence by internal necking has been addressed analytically and computationally. The numerical limit-analysis results were used to assess the coalescence criterion developed by Benzerga and Leblond (2014) as well as two new criteria. The latter criteria are based on two different sets of kinematically admissible velocity fields consistent with nonuniform strain-rate conditions on the cell boundary.

The conclusions of this work may be summarized as follows :

1. Analytical part :
 - Two new upper-bound estimates have been derived based on homogenization combined with limit analysis. The first is based on a generalized discontinuous velocity field for which the shape of the rigid–plastic interface is free. The second is based on a continuous velocity field. Both fields are consistent with the presence of rigid zones between the regions where the strain rate is localized. Each model brings an improvement over the model of Benzerga and Leblond (2014), the extent of the improvement depending on geometric parameters.
2. Computational part :
 - For a porosity of order 0.01 the exact yield locus of the porous plastic solid exhibits a curved part and a straight part. These distinct parts correspond to loadings that are supported with plastic flow either filling the matrix or localized in the intervoid ligament, respectively. This localization is disregarded by Gurson-like models because they tacitly assume uniform boundary conditions for all stress and microstructural states.
 - At fixed void aspect ratio, the void shape (cylindrical or spherical) has little effect on the computed limit loads. This finding supports the use of finite-height cylindrical shapes in developing analytical models for void coalescence.
3. Comparison of analytical and numerical results :
 - The model of Benzerga and Leblond (2014) provides a tight upper bound for all values of the porosity (or equivalently the ligament parameter χ) provided that the voids are equiaxed or elongated ($W \geq 1$). For flat voids (say $W < 0.5$) their upper-bound overestimates the limit loads due to the $1/W$ singular behavior inherent to the model.

- The model based on the continuous velocity field provides the tightest upper-bound among all three models so long as $W \geq 1$. This range of void aspect ratios most often, but not always, defines the practical range of interest. However, because again this model exhibits a $1/W$ singularity the quality of its predictions deteriorates as W becomes smaller than about 0.5.
- The model based on a generalized discontinuous velocity field provides a significant improvement over the model of [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) for flat voids, although it still exhibits a singular behavior in the limit of penny-shaped cracks. In the range $W \geq 1$ predictions using the former model are indistinguishable from those of the latter. This suggests that details about the shape of the plastic zone do not matter in that range.

The coalescence criteria proposed in this paper can be applied to actual problems of ductile fracture in exactly the same way as [Thomason \(1985\)](#)'s criterion or variants thereof (see [Benzerga et al. \(1999\)](#); [Zhang et al. \(2000\)](#); [Benzerga et al. \(2004a\)](#); [Lassance et al. \(2007\)](#)). The expressions of the stress promoting coalescence involve integrals but this should not raise any problem since they may be readily evaluated numerically using a restricted number of integration points, the integrand behaving always quite smoothly in practical cases.

Un critère unifié de croissance et coalescence des cavités

L'objectif de ce chapitre est de développer un critère homogénéisé qui unifie les théories de croissance et de coalescence. La théorie classique de la croissance suppose que l'écoulement plastique est diffus dans l'ensemble de la matrice. À l'inverse, la théorie de la coalescence suppose la plasticité est localisée dans les ligaments intervides. La nouvelle théorie permet de recouvrir les deux scénarios grâce à un choix approprié de champs de vitesse. Une implication importante pour les problèmes d'évolution est que la transition entre croissance et coalescence est continue, en contraste avec les modèles hybrides qui présentent des transitions abruptes associées à la présence d'inévitables coins sur la surface de charge. Le nouveau critère permet de décrire l'écoulement de métaux poreux plastiques à la fois aux porosités faibles et élevées.

Ce chapitre est tiré d'un article soumis (Morin et al., 2015c).

7.1 Introduction

Early models of failure in ductile metals were based on analyses of the growth of isolated voids (McClintock, 1968; Rice and Tracey, 1969; Cocks and Ashby, 1982). The principles of homogenization constitute nowadays the underpinnings of void growth and void coalescence theories. One major advantage of homogenization is its accounting for finite porosity effects. Under such circumstances, nonlinear homogenization theory enables scale transitions whereby the macroscopic response explicitly depends on a set of microstructural parameters related to the voids and their arrangement (Ponte Castañeda and Suquet, 1997; Benzerga and Leblond, 2010). In these formulations, damage or void growth rate equations are a natural outcome. Rate-dependent formulations (Leblond et al., 1994b; Găărăjeu et al., 2000; Agoras and Ponte Castañeda, 2014) may be warranted in rate-sensitive materials under certain ranges of thermomechanical loading conditions. Nevertheless, the focus of the present work is laid on rate-independent behavior. In bringing such focus, the theory of limit analysis (Prager and Hodge, 1951; Suquet, 1983) can be used for rigid-ideally plastic materials, which represent extreme nonlinearity. In addition, the phenomenon of void coalescence in a rate-independent material is much cleaner (Koplik and Needleman, 1988; Benzerga, 2002) and, while it has eluded modelers and experimentalists alike, its mathematical foundations begin to be laid out. Incidentally, a void growth and coalescence modeling framework also enables to describe macroscopic yielding of porous materials at fixed microstructure. Most existing models of porous metal plasticity are truly applicable in the regime of low porosity (typically below 0.01) (Gurson, 1977; Tvergaard and Needleman, 1984; Gologanu et al., 1993; Benzerga and Besson, 2001; Madou and Leblond, 2012a) and there is interest in extending their applicability to the high porosity regime, as would arise for instance in cellular materials (Deshpande and Fleck, 2000).

Starting with the seminal work of Gurson (1977), the modeling of void growth in solids with finite porosity has known major improvements over the past two decades or so (see notably Gologanu et al. (1993); Madou and Leblond (2012a)). On the other hand, the modeling of void coalescence is still in its infancy. The first rigorous micromechanical formulation, which may be traced back to (Thomason, 1985) and eventually settled in (Benzerga and Leblond, 2014), considered relatively simple geometries

and loadings. The reader is referred to the recent papers by [Morin et al. \(2015b\)](#) and [Torki et al. \(2015\)](#) for a recollection of earlier developments in the field. [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) developed a macroscopic yield criterion in closed form for a porous material in which the voids are in a “state of coalescence”. By that is meant a state where all plastic flow is confined to intervoid ligaments with regions above and below the void prevented from any deformation. They considered a cylindrical void of finite-height embedded in a coaxial cylindrical cell subjected to boundary-conditions allowing for strain localization at the scale of the cell, that is imposing a vanishing lateral overall strain rate. In doing so, [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) used a set of kinematically admissible velocity fields that resemble those used by Gurson, but only in the ligaments. Because of their simplicity, these velocity fields were discontinuous within the elementary volume. While such fields are unphysical they are kinematically admissible and lead to a rigorous upper bound to the yield surface. As a matter of fact, finite-element based limit-analysis calculations by [Morin et al. \(2015b\)](#) have shown that the upper bound obtained by [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) is quite good for a broad range of microstructural parameters. In addition, [Morin et al. \(2015b\)](#) developed improved analytical models for the problem considered by [Benzerga and Leblond \(2014\)](#), or a variant thereof. They employed two new sets of velocity fields : a family of generalized discontinuous fields which considers the shape of the plastic/rigid interface as a parameter ; and continuous velocity fields. The improved models provide, in general, tighter upper bounds, albeit for different ranges of structural parameters. Even more recently, [Torki et al. \(2015\)](#) extended the model of [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) by considering combined shear and triaxial tension. Their model may be viewed as an elaboration of an earlier model by [Tekoglu et al. \(2012\)](#) who did not explicitly specify the microscopic velocity fields responsible for void expansion.

When boundary conditions of the coalescence type are not imposed *a priori* the question arises as to what the effective yield state is. In other terms, when using periodic boundary conditions on some space-filling cell or quasi-periodic boundary conditions on the cylindrical cell considered by [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) without the nil lateral strain-rate condition, the shape of the yield locus is generally unknown. What is of particular importance here is that when the problem is solved computationally, that is with no recourse to approximate trial velocity fields, the exact yield locus of the porous solid under axisymmetric loadings exhibits a curved part and a straight part ([Morin et al., 2015b](#)). These distinct parts correspond to loadings that are supported with plastic flow either filling the matrix or localized in the intervoid ligament, respectively. This feature of the yield locus is disregarded by Gurson-like models because they tacitly assume uniform boundary conditions for all stress and microstructural states. This type of yield locus is not either what the recent void coalescence models ([Benzerga and Leblond, 2014](#); [Morin et al., 2015b](#)) predict because these pertain exclusively to coalescence states. Therefore, the objective of the present work is to develop expressions for the macroscopic (or effective) yield locus that mimic essential features of the exact one obtained numerically by [Morin et al. \(2015b\)](#). Such yield loci are said to realize a unified description of void growth and coalescence.

To place the present effort in perspective, it is worth mentioning that previous work on the micromechanics of void growth and coalescence has essentially dealt with the two phenomena separately ([Zhang and Niemi, 1994](#); [Benzerga et al., 1999](#); [Pardoen and Hutchinson, 2000](#); [Benzerga, 2002](#)). By way of consequence, the effective domain of reversibility was eventually viewed as the intersection of two reversibility domains so that the yield surface exhibited some corners ; e.g., see Fig. 5 in ([Benzerga, 2002](#)). While such a hybrid approach has been successfully used to model fracture in initially crack-free three-dimensional specimens ([Benzerga et al., 2004a](#)) the coincidence of the corner on the yield surface with the first instance of coalescence may trigger plastic flow localization at macroscopic scales ([Benzerga et al., 2002](#)) in a way that brings to question the physical origin of shear band formation. Hence, the development of a unified framework of void growth and coalescence is expected to enable fundamental analyses of failure in ductile metals through competing failure mechanisms at multiple scales.

7.2 Preliminaries

7.2.1 Geometry, material, admissibility conditions of velocity fields

To define the overall behavior of the porous medium, a cylindrical representative volume element (RVE) denoted Ω is considered which contains a coaxial cylindrical void occupying domain ω . The void is truncated by horizontal planes, as depicted in Fig. 7.1 on a quadrant of the cell. Following previous work (Thomason, 1985; Benzerga and Leblond, 2014; Morin et al., 2015b) non-symmetric deformation modes, if any, are excluded in the present analysis. Although this RVE cannot be duplicated and stacked up to build a periodic lattice, it is a reasonable approximation of more complex geometries, such as hexagonal-prismatic or square-prismatic ones, rigorously defining a unit cell in a periodic lattice.

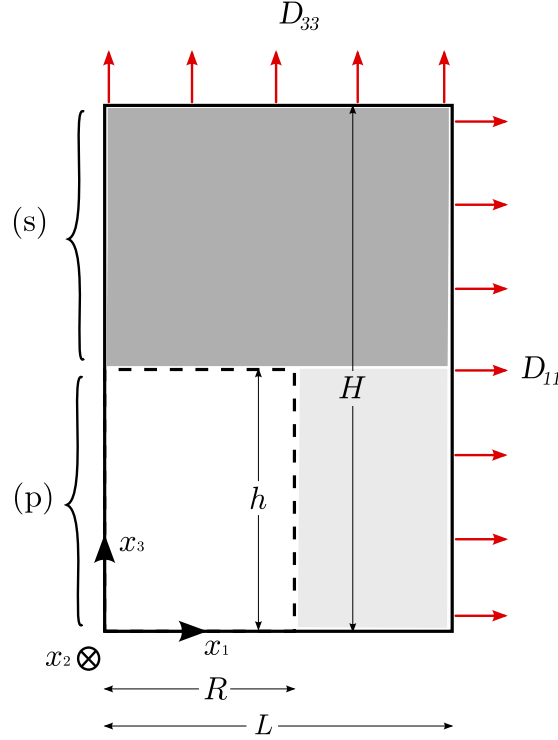


FIGURE 7.1: Definition of the geometric parameters of the cylindrical RVE

The cylindrical geometry is characterized by the *void aspect ratio* $W = h/R$, the *ligament parameter* $\chi = R/L$ and the *cell aspect ratio* $\lambda = H/L$ (see Fig. 7.1). A fourth, useful dimensionless parameter related to the first three is the *volume fraction of the voided band* $c = h/H = W\chi/\lambda$. The local orthonormal basis associated with the cylindrical coordinates r, θ, z is denoted $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$, and that associated with the Cartesian coordinates x_1, x_2, x_3 is denoted $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, with $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$.

The matrix is assumed to be rigid-ideal-plastic and obey the von Mises criterion :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{\text{eq}}^2 - \sigma_0^2 \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega - \omega \quad (7.1)$$

where σ_{eq} is the von Mises equivalent stress and σ_0 the yield stress in simple tension, together with the Prandtl-Reuss flow rule associated to this criterion via the normality property.

The cylindrical cell is subjected to boundary conditions of the form, where \mathbf{v} denotes the velocity :

$$\begin{cases} v_r(r = L, z) &= D_{11}L & -H \leq z \leq H \\ v_z(r, z = \pm H) &= \pm D_{33}H & 0 \leq r \leq L \end{cases} \quad (7.2)$$

with $v_\theta = 0$ everywhere because of axial symmetry.

In the plastic matrix, the velocity must verify the property of incompressibility imposed by the flow rule :

$$\text{tr } \mathbf{d} = \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega - \omega. \quad (7.3)$$

7.2.2 Principles of the limit-analysis

The classical inequality of limit-analysis reads :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \leq \Pi(\mathbf{D}) \quad , \quad \forall \mathbf{D} \quad (7.4)$$

where $\boldsymbol{\Sigma}$ and \mathbf{D} are the macroscopic stress and strain rate tensors, defined as the volume averages of their microscopic counterparts $\boldsymbol{\sigma}$ and \mathbf{d} , and $\Pi(\mathbf{D})$ the macroscopic plastic dissipation. This dissipation is defined, in the case of a von Mises material, by the formula

$$\Pi(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{D})} \langle \sigma_0 d_{\text{eq}} \rangle_{\Omega} \quad (7.5)$$

where $\mathcal{K}(\mathbf{D})$ is the set of velocity fields \mathbf{v} verifying the properties mentioned in Subsection 7.2.1 for the given value of \mathbf{D} , and d_{eq} the von Mises equivalent strain rate associated to the velocity field \mathbf{v} .

Because of the symmetries of the problem, the left-hand side in equation (7.4) reduces to

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} &= 2\Sigma_{11}D_{11} + \Sigma_{33}D_{33} \\ &= 3\Sigma_{11}D_m + (\Sigma_{33} - \Sigma_{11})D_{33} \end{aligned} \quad (7.6)$$

where $D_m = \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{D} = \frac{1}{3}(2D_{11} + D_{33})$ is the mean strain rate. This suggests to define the loading parameters as

$$\begin{cases} \bar{\Sigma}_1 = \Sigma_{11} \\ \bar{\Sigma}_2 = \Sigma_{33} - \Sigma_{11} \end{cases} \quad (7.7)$$

together with the ‘‘conjugate’’ kinematic parameters

$$\begin{cases} \bar{D}_1 = 3D_m \\ \bar{D}_2 = D_{33}. \end{cases} \quad (7.8)$$

It may be noted that a more usual, and seemingly more natural, choice of conjugate parameters would consist of using $\Sigma_m = \frac{1}{3}\text{tr}\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{3}(2\Sigma_{11} + \Sigma_{33})$ and $\Sigma_{33} - \Sigma_{11}$ for the stresses, versus $3D_m$ and $\frac{2}{3}(D_{33} - D_{11})$ for the strain rates. The choice made in equations (7.7) and (7.8) is however better adapted to the cylindrical geometry in that it leads to simpler calculations and expressions. With these variables, equation (7.4) reads

$$\bar{\Sigma}_1 \bar{D}_1 + \bar{\Sigma}_2 \bar{D}_2 \leq \Pi(\bar{D}_1, \bar{D}_2) \quad , \quad \forall (\bar{D}_1, \bar{D}_2). \quad (7.9)$$

The macroscopic reversibility domain of the porous material, in the 2D space of macroscopic stresses $(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2)$, is the intersection of the half-planes defined by these inequalities, \bar{D}_1 and \bar{D}_2 acting as parameters. The boundary of this domain, that is the macroscopic yield locus of the porous material, is the envelope of the straight lines $\bar{\Sigma}_1 \bar{D}_1 + \bar{\Sigma}_2 \bar{D}_2 = \Pi(\bar{D}_1, \bar{D}_2)$, \bar{D}_1 and \bar{D}_2 acting again as parameters. The regular part of this envelope is defined by the parametric equations

$$\begin{cases} \bar{\Sigma}_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{D}_1}(\bar{D}_1, \bar{D}_2) \\ \bar{\Sigma}_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{D}_2}(\bar{D}_1, \bar{D}_2). \end{cases} \quad (7.10)$$

7.3 Trial velocity fields

The trial velocity field looked for must describe both the growth and coalescence stages. The growth phase corresponds to diffuse plasticity in the entire cell. On the other hand, the coalescence phase is characterized by a sudden concentration of the strain rate within the horizontal ligament between neighbouring voids, implying the presence of rigid regions above and below the void.

To account for this concentration, [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) proposed to divide the cell into two parts, a porous one denoted $\Omega^{(p)}$ and a sound one denoted $\Omega^{(s)}$ (see [Fig.7.1](#)). The velocity field they proposed to describe coalescence consisted of a radial expansion combined with an axial extension of the porous zone, fixed by the condition of vanishing horizontal overall strain rate, $D_{11} = 0$ (special case of [Gurson \(1977\)](#)'s "cylindrical velocity field"), plus rigid-body motions of the sound regions. In order to permit the additional description of the growth of the void without localization of the strain rate within the porous zone, we shall extend this field by dropping the condition $D_{11} = 0$ (the velocity field in the porous zone becoming then identical to [Gurson \(1977\)](#)'s general "cylindrical velocity field"), and allowing the sound regions to deform uniformly.

In order to benefit from [Gurson \(1977\)](#)'s classical solution for cylindrical voids, it will be useful to consider the overall "partial" strain rates $\mathbf{D}^{(p)}$, $\mathbf{D}^{(s)}$ in the porous and sound regions, respectively. The axial and horizontal components of these strain rates verify the relations :

$$\begin{cases} D_{33} &= cD_{33}^{(p)} + (1-c)D_{33}^{(s)} \\ D_{11} &= D_{11}^{(p)} = D_{11}^{(s)}. \end{cases} \quad (7.11)$$

In addition, incompressibility of the sound zones implies that

$$D_{33}^{(s)} = -2D_{11}. \quad (7.12)$$

Combination of these relations implies that

$$\begin{cases} D_{33}^{(p)} &= \frac{1}{c} [3(1-c)D_m + cD_{33}] \\ D_m^{(p)} &= \frac{D_m}{c}. \end{cases}$$

Using the notations

$$\begin{cases} \bar{D}_1^{(p)} &= 3D_m^{(p)} \\ \bar{D}_2^{(p)} &= D_{33}^{(p)} \end{cases} \quad (7.13)$$

similar to [\(7.8\)](#), one may rewrite these relations between the porous and total overall strain rate components in the form

$$\begin{cases} \bar{D}_1^{(p)} &= \frac{\bar{D}_1}{c} \\ \bar{D}_2^{(p)} &= \left(\frac{1}{c} - 1\right) \bar{D}_1 + \bar{D}_2. \end{cases} \quad (7.14)$$

As mentioned previously, the velocity field in the porous zone is chosen identical to [Gurson \(1977\)](#)'s "cylindrical velocity field" :

$$(p) \begin{cases} v_r^{(p)}(r) &= \frac{3}{2} D_m^{(p)} \frac{L^2}{r} - \frac{D_{33}^{(p)}}{2} r \\ v_z^{(p)}(z) &= D_{33}^{(p)} z \end{cases} \quad (7.15)$$

while that in the sound zones is chosen so as to generate a uniform deviatoric strain rate :

$$(s) \begin{cases} v_r^{(s)}(r) = D_{11}r \\ v_z^{(s)}(z) = -2D_{11}z + K \end{cases} \quad (7.16)$$

where K is a constant adjusted so as to ensure continuity of the axial velocity component across the interface between the sound and porous parts, i.e. a no-jump condition $\llbracket v_z \rrbracket = 0$. In terms of the kinematic parameters \bar{D}_1, \bar{D}_2 , this velocity field reads :

$$(p) \begin{cases} v_r^{(p)}(r) = \frac{1}{2} \left(\bar{D}_1^{(p)} \frac{L^2}{r} - \bar{D}_2^{(p)} r \right) \\ v_z^{(p)}(z) = \bar{D}_2^{(p)} z \end{cases} \quad (7.17)$$

$$(s) \begin{cases} v_r^{(s)}(r) = \frac{1}{2}(\bar{D}_1 - \bar{D}_2)r \\ v_z^{(s)}(z) = (\bar{D}_2 - \bar{D}_1)z + K \end{cases} \quad (7.18)$$

with $\bar{D}_1^{(p)}, \bar{D}_2^{(p)}$ given by (7.14). (Note that this velocity field reduces to that of [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) for coalescence when $D_{11} = 0$).

7.4 Macroscopic criterion

7.4.1 Plastic dissipation

Although strictly speaking, the macroscopic plastic dissipation corresponding to the velocity field defined by equations (7.17) and (7.18) is just an upper estimate of the true one, it will be denoted by the same symbol $\Pi(\mathbf{D})$ for convenience.

The macroscopic plastic dissipation $\Pi(\mathbf{D})$ is decomposed into two volumetric contributions arising from the porous and sound zones, plus a surface contribution due to the interface between the two regions :

$$\Pi(\mathbf{D}) = c\Pi^{(p)} + (1 - c)\Pi^{(s)} + \Pi^{(i)} \quad (7.19)$$

where

$$\begin{cases} \Pi^{(p)} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega^{(p)})} \int_{\Omega^{(p)}} \sigma_0 d_{\text{eq}} d\Omega \\ \Pi^{(s)} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega^{(s)})} \int_{\Omega^{(s)}} \sigma_0 d_{\text{eq}} d\Omega \\ \Pi^{(i)} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\text{Interface}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \llbracket v_t \rrbracket dS, \end{cases} \quad (7.20)$$

$\llbracket v_t \rrbracket$ denoting the norm of the discontinuity of tangential velocity on the interface. These dissipations are calculated in [Appendix D.1](#), and their final expressions are as follows :

- *Volumetric dissipation in the porous zone :*

$$\Pi^{(p)} = \sigma_0 \left| \bar{D}_2^{(p)} \right| \left[\frac{\sqrt{3} \bar{D}_1^{(p)}}{3 \bar{D}_2^{(p)}} \text{Argsinh} \left(\frac{\sqrt{3} \bar{D}_1^{(p)}}{3 \bar{D}_2^{(p)}} u \right) - \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{3} \frac{\bar{D}_1^{(p)2}}{\bar{D}_2^{(p)2}}} \right]_{u=1}^{u=1/\chi^2}. \quad (7.21)$$

- *Volumetric dissipation in the sound zone :*

$$\Pi^{(s)} = \sigma_0 \left| \bar{D}_1 - \bar{D}_2 \right|. \quad (7.22)$$

- *Surface dissipation at the interface :*

$$\Pi^{(i)} = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}} \frac{\chi^3 - 3\chi + 2}{W\chi} \left| \bar{D}_1 \right|. \quad (7.23)$$

7.4.2 Regular (curved) parts of the yield locus

The regular parts of the yield locus are given by the parametric equations (7.10), which will now be made more explicit. It will be convenient to use the stress components in the porous zone, defined by

$$\begin{cases} \bar{\Sigma}_1^{(p)} = \Sigma_{11}^{(p)} = \frac{\partial \Pi^{(p)}}{\partial \bar{D}_1^{(p)}} \left(\bar{D}_1^{(p)}, \bar{D}_2^{(p)} \right) \\ \bar{\Sigma}_2^{(p)} = \Sigma_{33}^{(p)} - \Sigma_{11}^{(p)} = \frac{\partial \Pi^{(p)}}{\partial \bar{D}_2^{(p)}} \left(\bar{D}_1^{(p)}, \bar{D}_2^{(p)} \right). \end{cases} \quad (7.24)$$

These stress components are linked by the following equation resulting from the elimination of the ratio $\bar{D}_1^{(p)}/\bar{D}_2^{(p)}$ in their expressions :

$$\left(\frac{\Sigma_{33}^{(p)} - \Sigma_{11}^{(p)}}{\sigma_0} \right)^2 + 2\chi^2 \cosh \left(\sqrt{3} \frac{\Sigma_{11}^{(p)}}{\sigma_0} \right) - 1 - \chi^4 = 0, \quad (7.25)$$

which is just Gurson (1977)'s classical "cylindrical criterion" for the central part of the RVE.

By equation (7.19), the macroscopic stress components are given by :

$$\begin{cases} \bar{\Sigma}_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{D}_1} = c \frac{\partial \Pi^{(p)}}{\partial \bar{D}_1} + (1-c) \frac{\partial \Pi^{(s)}}{\partial \bar{D}_1} + \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \bar{D}_1} \\ \bar{\Sigma}_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{D}_2} = c \frac{\partial \Pi^{(p)}}{\partial \bar{D}_2} + (1-c) \frac{\partial \Pi^{(s)}}{\partial \bar{D}_2} + \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \bar{D}_2}. \end{cases} \quad (7.26)$$

Using equations (7.13) and (7.24), one transforms the expression of $\bar{\Sigma}_1$ into

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_1 &= c \left(\frac{\partial \Pi^{(p)}}{\partial \bar{D}_1^{(p)}} \frac{\partial \bar{D}_1^{(p)}}{\partial \bar{D}_1} + \frac{\partial \Pi^{(p)}}{\partial \bar{D}_2^{(p)}} \frac{\partial \bar{D}_2^{(p)}}{\partial \bar{D}_1} \right) + (1-c) \frac{\partial \Pi^{(s)}}{\partial \bar{D}_1} + \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \bar{D}_1} \\ &= \Sigma_{11}^{(p)} + (1-c) \left(\Sigma_{33}^{(p)} - \Sigma_{11}^{(p)} \right) + (1-c) \frac{\partial \Pi^{(s)}}{\partial \bar{D}_1} + \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \bar{D}_1}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Similarly,

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_2 &= c \left(\frac{\partial \Pi^{(p)}}{\partial \bar{D}_1^{(p)}} \frac{\partial \bar{D}_1^{(p)}}{\partial \bar{D}_2} + \frac{\partial \Pi^{(p)}}{\partial \bar{D}_2^{(p)}} \frac{\partial \bar{D}_2^{(p)}}{\partial \bar{D}_2} \right) + (1-c) \frac{\partial \Pi^{(s)}}{\partial \bar{D}_2} + \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \bar{D}_2} \\ &= c \left(\Sigma_{33}^{(p)} - \Sigma_{11}^{(p)} \right) + (1-c) \frac{\partial \Pi^{(s)}}{\partial \bar{D}_2} + \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \bar{D}_2}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

By equations (7.22) and (7.23), the partial derivatives involved in equations (7.27) and (7.28) are given

by :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi^{(s)}}{\partial \bar{D}_1} = \sigma_0 \operatorname{sgn}(\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \sigma_0 \operatorname{sgn}(D_{11}) \\ \frac{\partial \Pi^{(s)}}{\partial \bar{D}_2} = \sigma_0 \operatorname{sgn}(\bar{D}_2 - \bar{D}_1) = -\sigma_0 \operatorname{sgn}(D_{11}) \\ \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \bar{D}_1} = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}} \frac{\chi^3 - 3\chi + 2}{W\chi} \operatorname{sgn}(\bar{D}_1) = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}} \frac{\chi^3 - 3\chi + 2}{W\chi} \operatorname{sgn}(D_m) \\ \frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial \bar{D}_2} = 0 \end{array} \right. \quad (7.29)$$

where $\operatorname{sgn}(x)$ denotes the sign of x . Equations (7.27) and (7.28) then become

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Sigma}_1 = \Sigma_{11} = \Sigma_{11}^{(p)} + (1-c) (\Sigma_{33}^{(p)} - \Sigma_{11}^{(p)}) + A + B \\ \bar{\Sigma}_2 = \Sigma_{33} - \Sigma_{11} = c (\Sigma_{33}^{(p)} - \Sigma_{11}^{(p)}) - A \end{array} \right. \quad (7.30)$$

where $\Sigma_{11}^{(p)}$ and $\Sigma_{33}^{(p)} - \Sigma_{11}^{(p)}$ are given by equations (7.24), and the quantities A and B by

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sigma_0(1-c) \operatorname{sgn}(D_{11}) \\ B = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}} \frac{\chi^3 - 3\chi + 2}{W\chi} \operatorname{sgn}(D_m). \end{array} \right. \quad (7.31)$$

Equations (7.30) may be regarded as the *parametric equations* of the regular parts of the yield locus, in terms of the parameters \bar{D}_1 and \bar{D}_2 or D_{11} and D_{33} . (Complementary details on this point are provided in Appendix D.2).

Alternatively, one may use equations (7.30) to express $\Sigma_{11}^{(p)}$ and $\Sigma_{33}^{(p)} - \Sigma_{11}^{(p)}$ in terms of Σ_{11} and $\Sigma_{33} - \Sigma_{11}$, and insert the expressions found into the “yield criterion of the central zone”, equation (7.25); one thus gets the *explicit equation* of the regular parts of the overall yield locus :

$$\Phi(\Sigma) = \left(\frac{\Sigma_{33} - \Sigma_{11} + A}{c\sigma_0} \right)^2 + 2\chi^2 \cosh \left(\sqrt{3} \frac{\Sigma_{11} - (1-c)\Sigma_{33} - A - cB}{c\sigma_0} \right) - 1 - \chi^4 = 0. \quad (7.32)$$

Note that four distinct zones of the yield locus, corresponding to different signs of the constants A and B , are in fact described by this equation.

7.4.3 Singular (straight) parts of the yield locus

The presence of absolute values in the expressions (7.22) and (7.23) of $\Pi^{(s)}$ and $\Pi^{(i)}$ makes the total dissipation Π a non-differentiable function of \mathbf{D} . Therefore, there are some singular (straight) parts on the yield locus in addition to the regular (curved) parts. The study of these singular parts is the object of this subsection.

Equations (7.10) are inapplicable on the singular parts of the yield locus, so it is necessary to come back to the basic inequality (7.9). We begin by rewriting this inequality for both pairs (\bar{D}_1, \bar{D}_2) and $(-\bar{D}_1, -\bar{D}_2)$, so as to consider non-negative values of \bar{D}_2 only. One thus gets, Π being an even function of the pair (\bar{D}_1, \bar{D}_2) :

$$-\Pi(\bar{D}_1, \bar{D}_2) \leq \bar{\Sigma}_1 \bar{D}_1 + \bar{\Sigma}_2 \bar{D}_2 \leq \Pi(\bar{D}_1, \bar{D}_2) \quad , \quad \forall (\bar{D}_1, \bar{D}_2), \bar{D}_2 \geq 0. \quad (7.33)$$

We then divide inequalities (7.33) by \bar{D}_2 , accounting for the property of positive homogeneity of degree 1 of the function $\Pi(\bar{D}_1, \bar{D}_2)$. Defining the dimensionless parameter

$$\xi = \frac{\bar{D}_1}{\bar{D}_2} = \frac{3D_m}{D_{33}}, \quad (7.34)$$

we thus get

$$-g(\xi) \leq f(\xi) \leq g(\xi) \quad , \quad \forall \xi, \quad -\infty \leq \xi \leq +\infty \quad (7.35)$$

where

$$\begin{cases} f(\xi) &= \bar{\Sigma}_1 \xi + \bar{\Sigma}_2 = \Sigma_{11} \xi + \Sigma_{33} - \Sigma_{11} \\ g(\xi) &= \Pi(\xi, 1). \end{cases} \quad (7.36)$$

Figure 7.2 shows a schematic diagram, in a plane (ξ, ζ) , of the representative curves $\zeta = f(\xi)$, $\zeta = g(\xi)$, $\zeta = -g(\xi)$ of the functions $f(\xi)$, $g(\xi)$, $-g(\xi)$. These curves possess the following properties :

- The curve $\zeta = f(\xi)$ is a straight line of slope $\bar{\Sigma}_1$ and ordinate at the origin $\bar{\Sigma}_2$.
- As a consequence of the convexity of the function $\Pi(\bar{D}_1, \bar{D}_2)$ established in Appendix D.3 and the definition (7.36)₂ of the function $g(\xi)$, the curve $\zeta = g(\xi)$ is convex. Similarly, the curve $\zeta = -g(\xi)$ is concave.
- Since the expressions (7.22) and (7.23) of $\Pi^{(s)}$ and $\Pi^{(i)}$ are proportional to $|\bar{D}_1 - \bar{D}_2|$ and $|\bar{D}_1|$ respectively, the expression of the function $g(\xi)$ contains terms proportional to $|\xi - 1|$ and $|\xi|$; it follows that the curves $\zeta = g(\xi)$ and $\zeta = -g(\xi)$ have angular points at the positions $\xi = 0$ and $\xi = 1$. (At all other positions the curves are smooth).
- It is shown in Appendix D.4 that the curves $\zeta = g(\xi)$ and $\zeta = -g(\xi)$ admit straight asymptotes at the limits $\xi = \pm\infty$; furthermore the asymptote to the curve $\zeta = g(\xi)$ at the point $\xi = +\infty$ (resp. $\xi = -\infty$) coincides with the asymptote to the curve $\zeta = -g(\xi)$ at the point $\xi = -\infty$ (resp. $\xi = +\infty$).

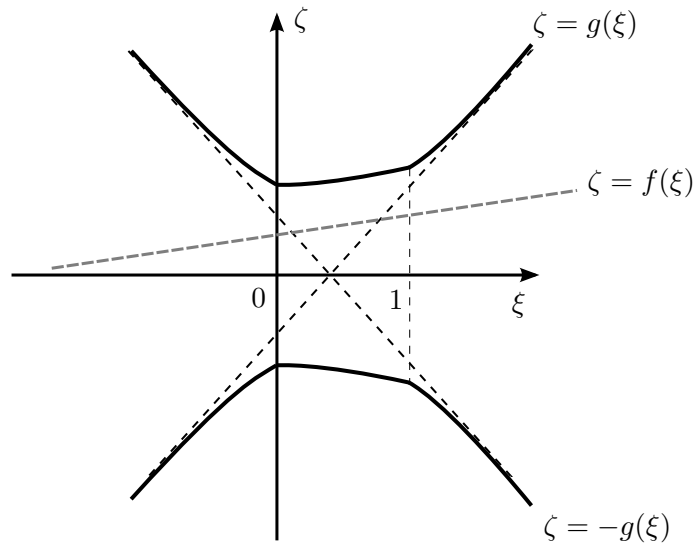


FIGURE 7.2: Diagram of the representative curves of the functions $f(\xi)$, $g(\xi)$, $-g(\xi)$.

It is now straightforward to discuss inequalities (7.35) geometrically. These inequalities state that, in order for the pair $(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2)$ to belong to the overall reversibility domain, the corresponding straight line $\zeta = f(\xi)$ must lie between the curves $\zeta = g(\xi)$ and $\zeta = -g(\xi)$ (see Fig. 7.2). Thus for this pair to lie on the overall yield locus, that is on the boundary of the reversibility domain, the straight line $\zeta = f(\xi)$ must *meet* one of the curves $\zeta = g(\xi)$, $\zeta = -g(\xi)$ at some point, *without crossing it* (by virtue of inequalities (7.35)). Since the yield locus is symmetric with respect to the origin, one may consider only half of it and thus assume that the straight line $\zeta = f(\xi)$ meets the curve $\zeta = g(\xi)$ without crossing it. Now it is clear from Fig. 7.2 that this may occur in three distinct cases :

- The straight line $\zeta = f(\xi)$ is tangent to the curve $\zeta = g(\xi)$ at some point P lying neither at $\xi = 0$ nor at $\xi = 1$ (Fig. 7.3a). In this situation the ordinate of the line at the origin $\bar{\Sigma}_2$ is a smooth function of its slope $\bar{\Sigma}_1$, which means that the point $(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2) = (\Sigma_{11}, \Sigma_{33} - \Sigma_{11})$ lies on one of the regular, curved parts of the yield locus studied in Subsection 7.4.2.
- The straight line $\zeta = f(\xi)$ meets the curve $\zeta = g(\xi)$ at $\xi = 0$ and lies between the two tangents to this curve at this point (Fig. 7.3b). Then the ordinate of the line at the origin $\bar{\Sigma}_2 = \Sigma_{33} - \Sigma_{11}$

is fixed, whereas its slope $\bar{\Sigma}_1 = \Sigma_{11}$ may vary between specific bounds; in other words, the point $(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2) = (\Sigma_{11}, \Sigma_{33} - \Sigma_{11})$ lies on a straight portion (a segment) of the yield locus. The equation of this segment may be found by determining the coordinates of its endpoints, which may be done by taking the limits $\xi \rightarrow 0^\pm$ in the parametric equations (7.30), (D.1), (D.3), (D.4) of the regular parts of the yield locus; one thus gets

$$\begin{cases} |\Sigma_{11} + \sigma_0(1 - c)\chi^2| \leq \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}} \frac{\chi^3 - 3\chi + 2}{W\chi} \\ \Sigma_{33} - \Sigma_{11} = \sigma_0(1 - c\chi^2). \end{cases} \quad (7.37)$$

- The straight line $\zeta = f(\xi)$ meets the curve $\zeta = g(\xi)$ at $\xi = 1$ and lies between the two tangents to this curve at this point (Fig. 7.3c). Then the ordinate of the line at $\xi = 1$, that is $f(1) = \bar{\Sigma}_1 + \bar{\Sigma}_2 = \Sigma_{33}$, is fixed, whereas its slope $\bar{\Sigma}_1 = \Sigma_{11}$ may vary between specific bounds; the point $(\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2) = (\Sigma_{11}, \Sigma_{33} - \Sigma_{11})$ thus again lies on a straight portion of the yield locus, the equation of which may be found by determining its endpoints through consideration of the limits $\xi \rightarrow 1^\pm$ in equations (7.30), (D.1), (D.3), (D.4) :

$$\begin{cases} \Sigma_{33} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 3\chi^4}}{3\chi^2} \right) + 2 - \sqrt{1 + 3\chi^4} \right] + \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}} \frac{\chi^3 - 3\chi + 2}{W\chi} \\ \left| \Sigma_{33} - \Sigma_{11} - \frac{c\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(2 - \sqrt{1 + 3\chi^4} \right) \right| \leq \sigma_0(1 - c). \end{cases} \quad (7.38)$$

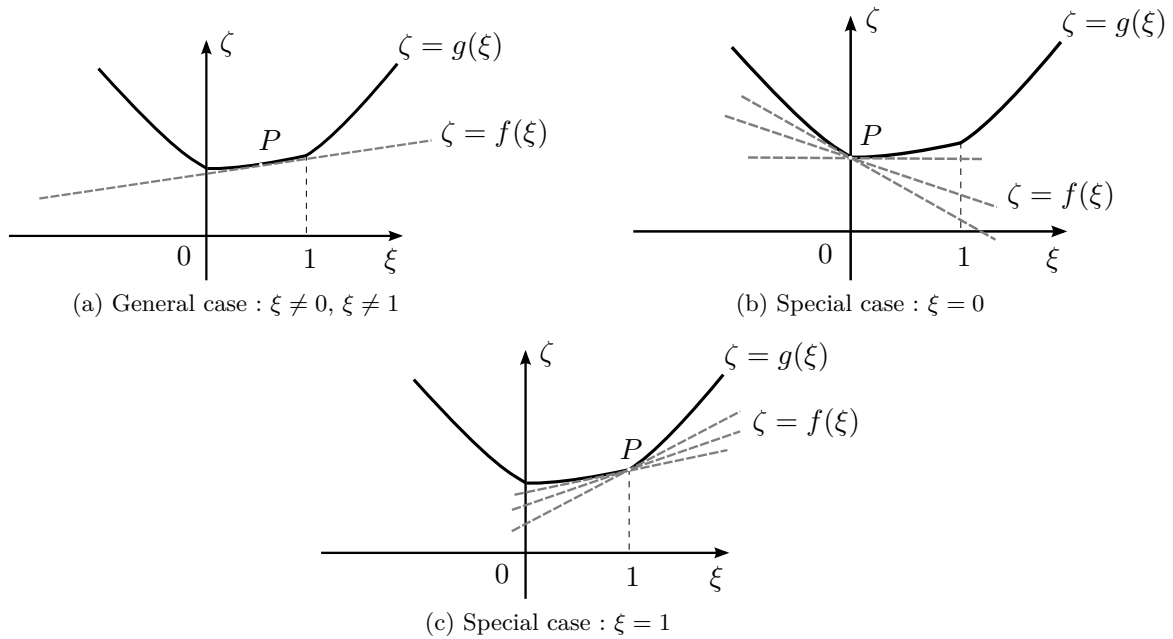


FIGURE 7.3: Qualitative study of the functions $f(\xi)$ corresponding to stresses lying on the yield locus.

It may be noted that *if* a gap existed between the tangent to the curve $\zeta = g(\xi)$ at $\xi = +\infty$ (resp. $\xi = -\infty$) and the tangent to the curve $\zeta = -g(\xi)$ at $\xi = -\infty$ (resp. $\xi = +\infty$), a third straight zone would exist on the half-yield locus considered, corresponding to straight lines $\zeta = f(\xi)$ parallel to these tangents and lying between them. But their coincidence, mentioned above, warrants absence of such a gap, and consequently of this third type of singular zone on the yield locus.

7.4.4 Absence of corners on the yield locus

The coexistence of curved and straight zones on the overall yield locus just evidenced suggests that corners might exist at the transition points between these zones. The object of this subsection is

to show that no such corners exist. The key point in the proof is the fact that the complex expression (7.21) of $\Pi^{(p)}$ implies that the function $g(\xi)$ is *nonlinear* on each of the intervals $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ and $(1, +\infty)$.

Consider for instance the transition between the singular part of the yield locus corresponding to straight lines $\zeta = f(\xi)$ meeting the curve $\zeta = g(\xi)$ at $\xi = 0$, and the regular part corresponding to lines $\zeta = f(\xi)$ meeting the curve $\zeta = g(\xi)$ at some point P having $\xi > 0$. Since the singular part has $\bar{\Sigma}_2 = \Sigma_{33} - \Sigma_{11} = \text{const.}$, showing that there is no corner on the yield locus is equivalent to showing that the derivative $(d\bar{\Sigma}_2/d\xi)(\xi = 0^+)$ is zero.

To establish such a property, consider the function $\tilde{g}(\xi)$ defined similarly to $g(\xi)$, but replacing $|\xi|$ with ξ in its expression, that is, replacing $|\bar{D}_1|$ with \bar{D}_1 in the expression (7.23) of $\Pi^{(i)}$ (see Fig. 4). This new function coincides with the old one $g(\xi)$ for $\xi \geq 0$ (not for $\xi < 0$!), but in contrast to it is perfectly smooth at $\xi = 0$. Move the point P of tangency of the straight line $\zeta = f(\xi)$ and the curve $\zeta = \tilde{g}(\xi)$ around the position $\xi = 0$. Then both the slope $\bar{\Sigma}_1$ and the ordinate at the origin $\bar{\Sigma}_2$ of the straight line vary (because the functions $g(\xi)$ and $\tilde{g}(\xi)$ are nonlinear), but it is clear from Fig. 4 that $\bar{\Sigma}_2$ reaches its maximum when $\xi = 0$. Since it is a smooth function of ξ , the derivative $d\bar{\Sigma}_2/d\xi$ must be zero at $\xi = 0^+$. This concludes the proof.

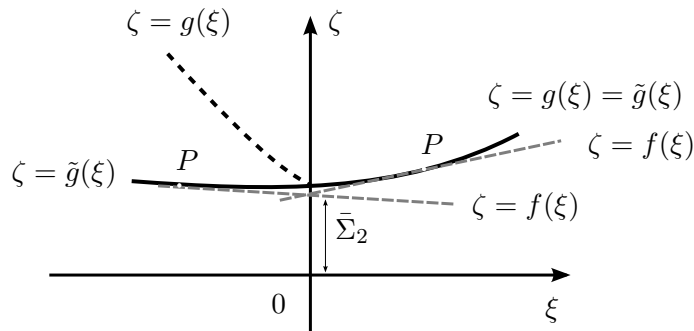


FIGURE 7.4: Diagram of the representative curves of the functions $f(\xi)$ and $\tilde{g}(\xi)$.

It must be stressed, however, that what precedes warrants the absence of corners on the sole *approximate* yield surface corresponding to the trial velocity fields envisaged; nothing can be said at this stage about the *true* yield surface.

7.5 Assessment of the theoretical model

7.5.1 Principle of the simulations

The objective of this section is to provide a numerical assessment of the theoretical criterion derived above. To this end, the limit-analysis problem is solved using the customary finite element method including elasticity, by imposing a large load step with no geometry update. Indeed, under such conditions, the time-discretized equations of the finite element problem are equivalent to those of limit-analysis, provided that the local “projection problem” (plastic correction of the elastic stress predictor) is solved using an implicit algorithm; see [Madou and Leblond \(2012a\)](#).

The numerical simulations are performed using the finite element code SYSTUS[®] developed by ESI Group. 2D axisymmetric meshes are used since a cylindrical cell was considered in the derivation of the theoretical model. The boundary conditions are represented schematically in Fig. 7.5. Axisymmetric loadings are considered ($\Sigma_{11} = \Sigma_{22} \neq 0$, $\Sigma_{33} \neq 0$ and $\Sigma_{ij} = 0$ otherwise); the macroscopic stresses Σ_{11} and Σ_{33} are obtained from their microscopic counterparts through the formula :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega-\omega} \sigma_{ij} d\Omega. \quad (7.39)$$

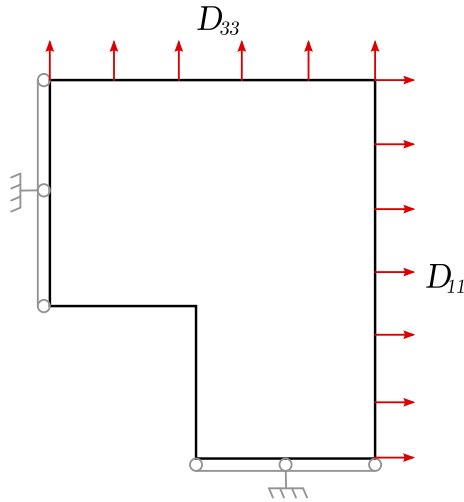


FIGURE 7.5: Boundary conditions considered for the study of the yield locus of a cylindrical hollow cell.

7.5.2 Numerical results

Results for the yield locus of a cylindrical hollow cell are provided for a cell aspect ratio $\lambda = 1$, a void aspect ratio $W = 1$ and two values of the ligament parameter $\chi = 0.4$ and 0.6 . The yield surfaces are represented in the plane $(\Sigma_m/\sigma_0, (\Sigma_{33} - \Sigma_{11})/\sigma_0)$, where $\Sigma_m = \frac{1}{3}(2\Sigma_{11} + \Sigma_{33})$ is the mean stress.

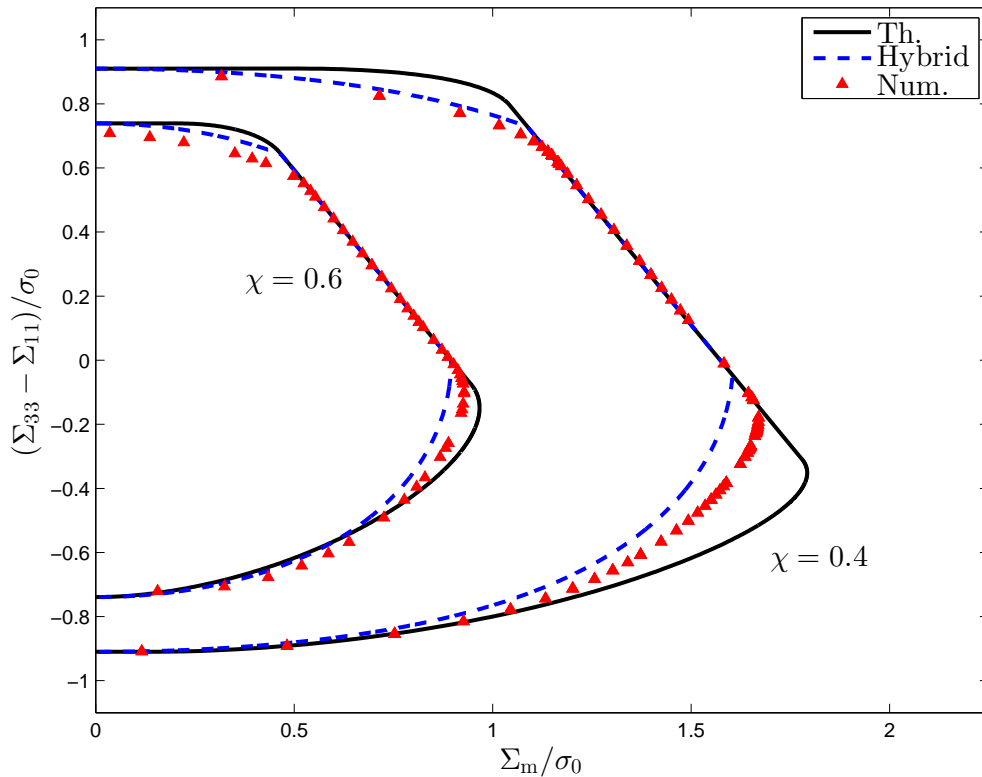


FIGURE 7.6: Yield surfaces for $\lambda = 1$, $W = 1$ and two values of χ .

Three types of results are represented in Figure 7.6 : (i) the numerical yield locus obtained through finite element limit-analysis; (ii) a “hybrid” criterion obtained by truncating Gurson (1977)’s yield

locus for a hollow sphere¹ with the same global porosity with the straight line of equation $\Sigma_{33} = \text{const.}$ corresponding to the coalescence criterion of [Benzerga and Leblond \(2014\)](#); (iii) the theoretical criterion obtained in Section 7.4.

It has been shown elsewhere that the axial stress Σ_{33} for the coalescence stage predicted by [Benzerga and Leblond \(2014\)](#)'s criterion slightly overestimates that obtained numerically; see [Morin et al. \(2015b\)](#). Since the objective of the present work is not to study this difference or reduce it by refining the velocity fields, but to compare the entire yield loci of the two analytical criteria, the gap between the numerical and theoretical limit-loads is artificially removed by introducing a heuristic parameter μ slightly modifying the value of the ligament parameter governing the value of Σ_{33} for coalescence; the parameter $\chi = R/L$ is thus replaced by $\chi^* = \mu\chi$. The values chosen are $\mu = 1.12$ for $\chi = 0.4$ and $\mu = 1.065$ for $\chi = 0.6$.

Note that the apparent slight violation of the upper bound character of the theoretical criterion for $\chi = 0.6$ is only due to the introduction of the heuristic parameter μ .

7.5.3 Discussion

In pursuing the goal of a unifying framework, one is compelled to demonstrate the feasibility of the approach for relatively simple geometries and loadings. As shown numerically by [Morin et al. \(2015b\)](#) the assumption of cylindrical voids is not the most restrictive. Indeed, at fixed void aspect ratio, the void shape (cylindrical or spheroidal) has little effect on the computed limit loads. This finding supports the use of finite-height cylindrical voids in developing analytical models for void coalescence.

The three criteria represented in Figure 7.6 exhibit the same basic features : they are all composed of curved and straight portions.

- The curved parts correspond to the growth stage, that is to solutions for which the plastic strain rate is diffuse in the entire cell.
- By way of contrast, the straight part on the right, of equation $\Sigma_{33} = \text{const.}$ where the constant depends on χ and W , corresponds to the coalescence stage, that is to solutions for which the plastic strain rate is non-diffuse but concentrated in the inter-void ligament. To understand why coalescence gives rise to such a straight segment on the yield locus, it suffices to note that the presence, during this phase, of rigid zones above and below the void implies that the horizontal components of the macroscopic strain rate become nil, which in turn implies via the normality property of the macroscopic flow rule that the overall yield function no longer depends on the horizontal stress Σ_{11} .

For the coalescence stage, the predictions of the hybrid and unified models coincide since they are based on the same trial velocity field. Some differences, however, appear for the growth stage and the transition between the two stages. These differences highlight the specificities of each approach.

Hybrid criterion. The advantages of this criterion are as follows :

- For the growth stage, the yield locus is closer to the numerical results in comparison with that predicted by the unified model, at least for major axial stresses ($\Sigma_{33} > \Sigma_{11} = \Sigma_{22}$).
- The hybrid criterion may benefit, in more advanced versions, from the sophisticated extensions of Gurson's criterion for the growth stage, including e.g. void shape effects and plastic anisotropy; see for instance ([Benzerga et al., 2004a](#)). Also, it may be applied to general loading conditions.

However the hybrid criterion also has disadvantages :

- Since the reversibility domain results from the intersection of two reversibility domains derived independently, there are some corners on the yield locus. The numerical simulations, however, do not exhibit such corners (see Fig. 7.6). Their presence in the hybrid model may generate spurious instability and bifurcation phenomena.
- The theoretical foundations of the hybrid criterion are less rigorous than those of the unified one because the intersecting reversibility domains do not pertain to the same geometry; a hol-

1. [Gurson \(1977\)](#)'s "cylindrical" criterion cannot be used because the cylindrical void implied extends up and down to the top and bottom surfaces of the RVE, in contrast to that considered here.

low sphere was considered by [Gurson \(1977\)](#) for the growth stage versus a hollow cylinder by [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) for the coalescence phase.

Unified criterion. The advantages of the unified criterion are as follows :

- The yield function is smooth so that the yield locus has no corners, in agreement with the numerical results, even though regions of high curvature may be observed at the transition points between the growth and coalescence stages.
- Growth and coalescence are described with a single class of velocity fields, thus emphasizing the basic unity of the two stages and the possibility of their unified description.

However, the unified model developed here suffers from some disadvantages :

- The presence on the yield locus of a straight part of equation $\Sigma_{33} - \Sigma_{11} = \text{const.}$ for low triaxialities, due to the discontinuity of velocity across the interface between the sound and porous parts of the cell, implies that the predicted porosity rate is nil under such conditions, in contradiction with the numerical results.
- The criterion is limited to axisymmetric loadings and cylindrical voids.

It is worth noting that in their extension of [Benzerga and Leblond \(2014\)](#)'s model to combined tension and shear, [Torki et al. \(2015\)](#) have also obtained a smooth effective yield surface with curved and straight parts. An important difference however is that their derivation exclusively focused on the coalescence stage. Yet, it does seem that the presence of both curved and straight parts is common to both models. In fact, this is traceable to the nondifferentiability of the plastic dissipation function. Since this nondifferentiability partly results from the discontinuity of the assumed velocity fields, the question arises as to what implications would a choice of continuous velocity fields have on the shape and smoothness of the macroscopic yield surface. This issue was in part tackled by [Morin et al. \(2015b\)](#) but only in the context of coalescence models under axisymmetric loadings.

7.6 Conclusion

A framework has been laid out for developing macroscopic yield criteria for porous ductile solids accounting for both void growth and coalescence. While the framework is general, closed form solutions were obtained in the case of cylindrical cells containing cylindrical voids of a given aspect ratio and subjected to axisymmetric loading conditions.

- The unified model provides a rigorous upper bound to the exact locus and enables a seamless transition between void growth (curved parts of the yield locus) and void coalescence (straight parts).
- There are no corners on the yield surface corresponding to the unified model obtained by homogenization. The yield surface however exhibits regions of high curvature at the transition points between the growth and coalescence stages. The implications of such features on plastic flow localization at macroscopic scales remain to be investigated.
- The proposed model is a first step toward a unified description of void growth and coalescence. While the model has some limitations, the most restrictive is its applicability to axisymmetric loadings only. This is being investigated and results will be reported elsewhere.

Influence de l'anisotropie plastique sur la coalescence en couches

Ce chapitre est consacré à l'étude de la coalescence en couches dans le cas des matériaux anisotropes orthotropes. On dérive un critère de coalescence basé sur les champs continus utilisés au chapitre 6, en considérant une matrice obéissant au critère quadratique de Hill. Le critère analytique obtenu est ensuite validé par des calculs éléments finis d'analyse limite. Le couplage entre les effets de forme et l'anisotropie plastique est en général bien capté par le modèle.

8.1 Introduction

Les alliages métalliques présentent une anisotropie morphologique, apparaissant notamment après leur mise en forme, qui modifie leurs propriétés de résistance et qu'il est nécessaire de prendre en compte pour décrire leur endommagement ductile. La prise en compte de l'anisotropie plastique dans les modèles de rupture ductile a été initiée par [Benzerga and Besson \(2001\)](#); ces auteurs ont étendu le modèle de [Gurson \(1977\)](#) pour les cavités sphériques en considérant une matrice obéissant au critère quadratique de [Hill \(1948\)](#). [Monchiet et al. \(2008\)](#); [Keralavarma and Benzerga \(2010\)](#) ont ensuite étendu les critères de [Gologanu et al. \(1993, 1994, 1997\)](#) au cas de l'anisotropie plastique en considérant des cavités sphéroïdales plongées dans une matrice de [Hill \(1948\)](#). Enfin, nous avons étendu au Chapitre 2 le critère de [Madou and Leblond \(2012a,b\)](#) pour les cavités ellipsoïdales au cas des matériaux anisotropes.

Nous avons vu au Chapitre 3 que l'anisotropie plastique a une grande influence sur les surfaces de charge de cellules ellipsoïdales contenant des cavités ellipsoïdales. Des calculs micromécaniques ([Keralavarma et al., 2011](#)) ont également montré cette influence sur des problèmes d'évolution de cavités; ces auteurs ont montré que l'anisotropie plastique influe grandement la croissance des cavités mais également l'apparition de la coalescence.

C'est dans ce contexte que l'on propose d'étendre les critères de coalescence précédents au cas des matériaux anisotropes. La première étape consiste à proposer un champ de vitesse test permettant de calculer la dissipation plastique macroscopique. Nous avons vu ([Morin et al., 2014](#)) que les champs de vitesse isotropes peuvent être appliqués assez efficacement pour des matériaux anisotropes, pour des raisons de caractérisation variationnelle de la surface de charge; par conséquent nous allons utiliser un champ de vitesse isotrope. Dans le cas des matériaux isotropes, nous avons notamment vu que les champs "continus", les plus réalistes physiquement, donnent les estimations les plus basses pour la charge limite de coalescence pour les cas d'intérêt pratique (cavités pas trop aplaties); on décide donc d'utiliser ici ces champs continus pour dériver la charge limite de coalescence pour des matériaux obéissant au critère de [Hill \(1948\)](#). Le critère ainsi obtenu est ensuite comparé avec des résultats d'analyse limite numérique obtenus à l'aide de la méthode des éléments finis.

8.2 Préliminaires

8.2.1 Généralités

Géométrie du VER Le VER que l'on considère est le même que celui proposé par [Thomason \(1985\)](#); [Benzerga and Leblond \(2014\)](#), c'est à dire une cellule cylindrique contenant un vide cylindrique (voir Figure 8.1). La géométrie est caractérisée par le *rapport d'aspect du vide* $W \equiv h/R$, le *paramètre de ligament* $\chi \equiv R/L$ et le *rapport d'aspect de la cellule* $\lambda \equiv H/L$. La base locale orthonormée associée aux coordonnées cylindriques r, θ, z est notée $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ et celle associée aux coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3 est notée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, avec $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$.

On rappelle que la cellule est divisée en deux parties, la partie centrale Ω_{lig} contenant le ligament plastique et le vide ω , et les parties rigides au dessus et en dessous du vide notées $\Omega - \Omega_{\text{lig}}$. On considère ici que l'interface entre les parties rigide et plastique est plane.

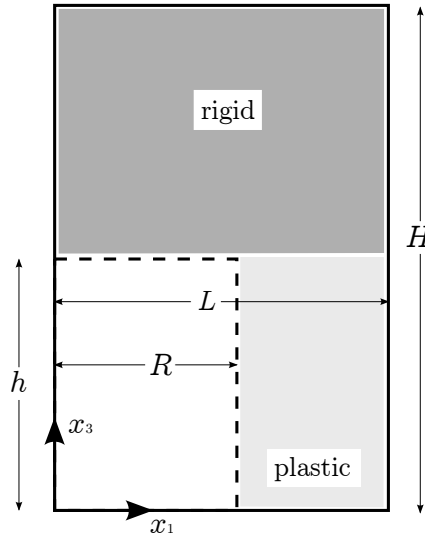


FIGURE 8.1: Définition des paramètres géométriques du VER cylindrique.

Champs de vitesse admissibles Le VER est soumis à des conditions au bord de la forme

$$\begin{cases} v_r(r = L, z) = D_{11}L & (-H \leq z \leq H) \\ v_z(r, z = \pm H) = \pm D_{33}H & (0 \leq r \leq L). \end{cases} \quad (8.1)$$

La présence de régions rigides implique que

$$v_r(r = L, z) = 0 \quad (|z| \geq h). \quad (8.2)$$

Cela implique que la composante horizontale du taux de déformation macroscopique est nulle. Ainsi les conditions aux limites pour la phase de coalescence s'écrivent :

$$\begin{cases} v_r(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ v_z(\mathbf{x}) = v_z(L, \pm h) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega - \partial\Omega_{\text{lig}} \end{cases} \quad (8.3)$$

(et avec $v_\theta = 0$ partout par symétrie axiale). Enfin, le champ de vitesse doit vérifier la propriété d'incompressibilité :

$$\text{tr } \mathbf{d} = \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\text{lig}} - \omega \quad (8.4)$$

Critère de Hill On suppose que le ligament est plastique et obéit au critère de Hill (1948) dont la base d'orthotropie est supposée coïncider avec la base carthésienne $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. L'axe d'orthotropie \mathbf{e}_3 est donc identique à l'axe de révolution de la cellule considérée. Rappelons en premier lieu les notations de type Voigt utilisées pour représenter les contraintes et les déformations. Notons $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ la représentation de Voigt du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et $\tilde{\mathbf{d}}$ celle du tenseur taux de déformation \mathbf{d} :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \\ \tilde{\sigma}_4 \\ \tilde{\sigma}_5 \\ \tilde{\sigma}_6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{d}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \\ \tilde{d}_3 \\ \tilde{d}_4 \\ \tilde{d}_5 \\ \tilde{d}_6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \\ 2d_{12} \\ 2d_{13} \\ 2d_{23} \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Le critère de Hill s'écrit

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq}^2 - \sigma_0^2 \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\text{lig}} - \omega, \quad \sigma_{eq}^2 \equiv \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{A} : \boldsymbol{\sigma} \quad (8.6)$$

où σ_{eq} est la contrainte équivalente au sens de Hill, σ_0 un scalaire et \mathbb{A} un tenseur d'ordre quatre vérifiant les symétries majeure et mineure ($A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}$). En utilisant la notation de Voigt juste introduite, le critère se réécrit

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\mathbb{A}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \sigma_0^2 \leq 0 \quad (8.7)$$

où la représentation de Voigt $\tilde{\mathbb{A}}$ du tenseur \mathbb{A} dans la base d'orthotropie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est de la forme :

$$\tilde{\mathbb{A}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{66} \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Le taux de déformation équivalent d_{eq} associé à ce critère s'écrit

$$d_{eq}^2 \equiv \mathbf{d} : \mathbb{B} : \mathbf{d} \equiv \tilde{\mathbf{d}} \cdot \tilde{\mathbb{B}} \cdot \tilde{\mathbf{d}}. \quad (8.9)$$

Les tenseurs \mathbb{A} and \mathbb{B} sont reliés par la relation suivante :

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} = \mathbb{B} : \mathbb{A} = \mathbb{K} \quad (8.10)$$

où $\mathbb{K} \equiv \mathbb{I} - \mathbb{J}$ avec \mathbb{I} le tenseur identité d'ordre quatre et $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. La représentation de Voigt $\tilde{\mathbb{B}}$ du tenseur \mathbb{B} s'écrit sous la forme

$$\tilde{\mathbb{B}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{22} & \tilde{B}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{B}_{13} & \tilde{B}_{23} & \tilde{B}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{B}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{B}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{B}_{66} \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

Les composantes de $\tilde{\mathbb{B}}$ peuvent être reliées aux composantes de $\tilde{\mathbb{A}}$ par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{B}_{12} = -\frac{1}{9} \frac{\tilde{A}_{12} - 2\tilde{A}_{13} - 2\tilde{A}_{23}}{\tilde{A}_{12}\tilde{A}_{13} + \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{23} + \tilde{A}_{13}\tilde{A}_{23}} \\ \tilde{B}_{13} = -\frac{1}{9} \frac{\tilde{A}_{13} - 2\tilde{A}_{12} - 2\tilde{A}_{23}}{\tilde{A}_{12}\tilde{A}_{13} + \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{23} + \tilde{A}_{13}\tilde{A}_{23}} \\ \tilde{B}_{23} = -\frac{1}{9} \frac{\tilde{A}_{23} - 2\tilde{A}_{12} - 2\tilde{A}_{13}}{\tilde{A}_{12}\tilde{A}_{13} + \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{23} + \tilde{A}_{13}\tilde{A}_{23}} \\ \tilde{B}_{11} = -\tilde{B}_{12} - \tilde{B}_{13} \\ \tilde{B}_{22} = -\tilde{B}_{12} - \tilde{B}_{23} \\ \tilde{B}_{33} = -\tilde{B}_{13} - \tilde{B}_{23} \\ \tilde{B}_{44} = 1/\tilde{A}_{44}; \quad \tilde{B}_{55} = 1/\tilde{A}_{55}; \quad \tilde{B}_{66} = 1/\tilde{A}_{66}. \end{array} \right. \quad (8.12)$$

Dans la suite, pour alléger les notations, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ sera remplacé par $\boldsymbol{\sigma}$, $\tilde{\mathbf{d}}$ par \mathbf{d} , $\tilde{\mathbb{A}}$ par \mathbb{A} et $\tilde{\mathbb{B}}$ par \mathbb{B} sans aucune ambiguïté.

8.2.2 Champs de vitesse

Le champ de vitesse incompressible que l'on considère est le champ de vitesse "continu" du chapitre 6. Ce champ "continu" est préféré au champ "discontinu" de [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) car il permet, dans le cas isotrope, d'obtenir la charge limite la plus basse dans la plupart des cas d'intérêt pratique ($W \geq 1$). Ce champ s'écrit (dans la partie centrale plastique) :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_r(r, z) = A(h - z) \left(\frac{L^2}{r} - r \right) \\ v_z(z) = 2A \left(hz - \frac{z^2}{2} \right). \end{array} \right.$$

Les composantes non nulles du taux de déformation \mathbf{d} sont donc

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{rr} \equiv \frac{\partial v_r}{\partial r} = A(h - z) \left(\frac{-L^2}{r^2} - 1 \right) \\ d_{\theta\theta} \equiv \frac{v_r}{r} = A(h - z) \left(\frac{L^2}{r^2} - 1 \right) \\ d_{zz} \equiv \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2A(h - z) \\ d_{rz} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{A}{2} \left(\frac{L^2}{r} - r \right) \end{array} \right.$$

Comme la base d'anisotropie plastique est la base cartésienne, il va être utile pour la suite d'exprimer les composantes du tenseur \mathbf{d} dans cette base. La transformation entre les deux bases étant une rotation, on obtient immédiatement avec la notation de Voigt introduite précédemment :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = A(h - z) \left[\cos^2(\theta) \left(\frac{L^2}{r^2} - 1 \right) + \sin^2(\theta) \left(\frac{-L^2}{r^2} - 1 \right) \right] \\ d_2 = A(h - z) \left[\cos^2(\theta) \left(\frac{-L^2}{r^2} - 1 \right) + \sin^2(\theta) \left(\frac{L^2}{r^2} - 1 \right) \right] \\ d_3 = 2A(h - z) \\ d_4 = -2A(h - z) \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)L^2}{r^2} \\ d_5 = -\frac{A}{2} \cos(\theta) \left(\frac{L^2}{r} - r \right) \\ d_6 = -\frac{A}{2} \sin(\theta) \left(\frac{L^2}{r} - r \right) \end{array} \right.$$

8.3 Calcul de la dissipation plastique macroscopique

8.3.1 Généralités

Afin de déterminer la charge limite de coalescence, il nous faut calculer la dissipation plastique macroscopique pour le champ de vitesse test considéré. Cette dissipation s'écrit

$$\Pi = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_{\text{lig}} - \omega} \sigma_0 d_{\text{eq}} \, d\Omega. \quad (8.13)$$

Explicitons la valeur de d_{eq} pour le champ de vitesse considéré :

$$d_{\text{eq}} = \sqrt{B_{11}(2d_1^2 + d_2d_3) + B_{22}(2d_2^2 + d_1d_3) + B_{33}(2d_3^2 + d_1d_2) + B_{44}d_4^2 + B_{55}d_5^2 + B_{66}d_6^2}. \quad (8.14)$$

Il est clair que le calcul de l'intégrale (8.13) ne pourra pas se faire analytiquement compte tenu des expressions des composantes du tenseur \mathbf{d} . On propose donc d'introduire une approximation, similaire à celle employée au chapitre 2, permettant de "linéariser" le taux de déformation équivalent :

$$d_{\text{eq}} \sim d_{\text{eq}}^{\text{iso}} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d} : \mathbf{b} : \mathbf{d}}{d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} \quad (8.15)$$

avec

$$\mathbf{b} = \mathbb{B} - \mathbb{B}_{\text{iso}}. \quad (8.16)$$

La valeur finale de d_{eq} est donc :

$$d_{\text{eq}} = d_{\text{eq}}^{\text{iso}} + b_{11} \frac{2d_1^2 + d_2d_3}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} + b_{22} \frac{2d_2^2 + d_1d_3}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} + b_{33} \frac{2d_3^2 + d_1d_2}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} + b_{44} \frac{d_4^2}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} + b_{55} \frac{d_5^2}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} + b_{66} \frac{d_6^2}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} \quad (8.17)$$

où $d_{\text{eq}}^{\text{iso}}$ vaut :

$$d_{\text{eq}}^{\text{iso}} = \frac{A}{\sqrt{3}} \left[4(h-z)^2 \left(\frac{L^4}{r^4} + 3 \right) + \left(\frac{L^2}{r} - r \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (8.18)$$

Une autre approche aurait été possible ici pour calculer l'intégrale (8.13) sans avoir besoin d'introduire l'approximation (8.15) : nous aurions pu remplacer la valeur moyenne (sur une surface cylindrique d'épaisseur infinitésimale) $\langle d_{\text{eq}} \rangle_{S(r)}$ par $\sqrt{\langle d_{\text{eq}}^2 \rangle_{S(r)}}$. Cette approche alternative a l'avantage de mieux approcher le calcul de la dissipation plastique, mais celle-ci n'est plus linéaire en fonction des coefficients b_{ij} ; l'intégrale de la dissipation plastique macroscopique dépendra à la fois de la géométrie et de l'anisotropie, alors qu'en utilisant l'approximation (8.15) l'intégrale ne dépendra que de la géométrie grâce à la linéarisation. C'est pour cette raison pratique que le choix de l'approximation (8.15) a été adopté.

8.3.2 Calcul de la dissipation plastique macroscopique

En substituant d_{eq} dans l'expression de la dissipation plastique macroscopique, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \Pi = \frac{\sigma_0}{2\pi H L^2} & \left[\int_R^L \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} d_{\text{eq}}^{\text{iso}}(r \, dr \, d\theta \, dz) \right. \\
 & + b_{11} \int_R^L \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \frac{2d_1^2 + d_2 d_3}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} (r \, dr \, d\theta \, dz) \\
 & + b_{22} \int_R^L \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \frac{2d_2^2 + d_1 d_3}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} (r \, dr \, d\theta \, dz) \\
 & + b_{33} \int_R^L \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \frac{2d_3^2 + d_1 d_2}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} (r \, dr \, d\theta \, dz) \\
 & + b_{44} \int_R^L \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \frac{d_4^2}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} (r \, dr \, d\theta \, dz) \\
 & \left. + (b_{55} + b_{66}) \int_R^L \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \frac{d_5^2}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} (r \, dr \, d\theta \, dz) \right]. \tag{8.19}
 \end{aligned}$$

L'équation (8.19) peut se réécrire sous la forme :

$$\Pi = \Pi_{\text{iso}} + b_{11}\Pi_1 + b_{22}\Pi_2 + b_{33}\Pi_3 + b_{44}\Pi_4 + (b_{55} + b_{66})\Pi_5 \tag{8.20}$$

avec, après intégration suivant θ ,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Pi_1 = \frac{\sigma_0}{2\pi H L^2} \int_R^L \int_{-h}^h \frac{1}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} \left[\frac{2\pi L^4 (z-h)^2 A^2}{r^4} \right] (r \, dr \, dz) \\
 \Pi_2 = \frac{\sigma_0}{2\pi H L^2} \int_R^L \int_{-h}^h \frac{1}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} \left[\frac{2\pi L^4 (z-h)^2 A^2}{r^4} \right] (r \, dr \, dz) = \Pi_1 \\
 \Pi_3 = \frac{\sigma_0}{2\pi H L^2} \int_R^L \int_{-h}^h \frac{1}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} \left[\frac{\pi (18r^4 - L^4) (z-h)^2 A^2}{r^4} \right] (r \, dr \, dz) \\
 \Pi_4 = \frac{\sigma_0}{2\pi H L^2} \int_R^L \int_{-h}^h \frac{1}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} \left[\frac{4\pi L^4 (z-h)^2 A^2}{r^4} \right] (r \, dr \, dz) = 2\Pi_1 \\
 \Pi_5 = \frac{\sigma_0}{2\pi H L^2} \int_R^L \int_{-h}^h \frac{1}{2d_{\text{eq}}^{\text{iso}}} \left[\frac{\pi (r-L)^2 (r+L)^2 A^2}{r^2} \right] (r \, dr \, dz).
 \end{array} \right.$$

Procédons tout d'abord au changement de variable $z' = h - z$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Pi_1 = \frac{\sigma_0}{2HL^2} \int_{R^2} d(r^2) \int_0^h \frac{\frac{L^4}{r^4} (z')^2 A^2}{\frac{A}{\sqrt{3}} \left[4(z')^2 \left(\frac{L^4}{r^4} + 3 \right) + \left(\frac{L^2}{r} - r \right)^2 \right]^{1/2}} dz' \\
 \Pi_3 = \frac{\sigma_0}{4HL^2} \int_{R^2} d(r^2) \int_0^h \frac{(18 - \frac{L^4}{r^4}) (z')^2 A^2}{\frac{A}{\sqrt{3}} \left[4(z')^2 \left(\frac{L^4}{r^4} + 3 \right) + \left(\frac{L^2}{r} - r \right)^2 \right]^{1/2}} dz' \\
 \Pi_5 = \frac{\sigma_0}{4HL^2} \int_{R^2} d(r^2) \int_0^h \frac{A^2 r^2 \left(1 - \frac{L^2}{r^2} \right)^2}{\frac{A}{\sqrt{3}} \left[4(z')^2 \left(\frac{L^4}{r^4} + 3 \right) + \left(\frac{L^2}{r} - r \right)^2 \right]^{1/2}} dz'.
 \end{array} \right.$$

Nous effectuons maintenant les changements de variable $u \equiv r^2/L^2$, $v \equiv z'/L$. Les expressions

précédentes s'écrivent donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0}{2HL^2} L^3 \int_{\chi^2}^1 du \int_0^{W\chi} \frac{\frac{L^2 v^2}{u^2}}{L \frac{1-u}{\sqrt{u}} (1+w^2)^{1/2}} dv \\ \Pi_3 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0}{4HL^2} L^3 \int_{\chi^2}^1 du \int_0^{W\chi} \frac{(18 - \frac{1}{u^2})L^2 v^2}{L \frac{1-u}{\sqrt{u}} (1+w^2)^{1/2}} dv \\ \Pi_5 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0}{4HL^2} L^3 \int_{\chi^2}^1 du \int_0^{W\chi} \frac{L^2 u (1 - \frac{1}{u})^2}{L \frac{1-u}{\sqrt{u}} (1+w^2)^{1/2}} dv \end{array} \right.$$

où $w = \frac{2}{1-u} \sqrt{\frac{1+3u^2}{u}} v$. En utilisant cette nouvelle variable on peut réécrire les équations sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0}{2HL^2} L^3 \int_{\chi^2}^1 du \int_0^{W\chi \frac{2}{1-u} \sqrt{\frac{1+3u^2}{u}}} \frac{\frac{L^2}{u^2} \frac{u(1-u)^2}{4(1+3u^2)} w^2}{L \frac{1-u}{\sqrt{u}} (1+w^2)^{1/2}} \frac{1-u}{2} \sqrt{\frac{u}{1+3u^2}} dw \\ \Pi_3 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0}{4HL^2} L^3 \int_{\chi^2}^1 du \int_0^{W\chi \frac{2}{1-u} \sqrt{\frac{1+3u^2}{u}}} \frac{(18 - \frac{1}{u^2})L^2 \frac{u(1-u)^2}{4(1+3u^2)} w^2}{L \frac{1-u}{\sqrt{u}} (1+w^2)^{1/2}} \frac{1-u}{2} \sqrt{\frac{u}{1+3u^2}} dw \\ \Pi_5 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0}{4HL^2} L^3 \int_{\chi^2}^1 du \int_0^{W\chi \frac{2}{1-u} \sqrt{\frac{1+3u^2}{u}}} \frac{L^2 u (1 - \frac{1}{u})^2}{L \frac{1-u}{\sqrt{u}} (1+w^2)^{1/2}} \frac{1-u}{2} \sqrt{\frac{u}{1+3u^2}} dw, \end{array} \right.$$

ce qui se réécrit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0 L^2}{16H} \int_{\chi^2}^1 \frac{(1-u)^2}{(1+3u^2)^{3/2}} du \int_0^{W\chi \frac{2}{1-u} \sqrt{\frac{1+3u^2}{u}}} \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} dw \\ \Pi_3 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0 L^2}{32H} \int_{\chi^2}^1 \frac{(18u^2 - 1)(1-u)^2}{(1+3u^2)^{3/2}} du \int_0^{W\chi \frac{2}{1-u} \sqrt{\frac{1+3u^2}{u}}} \frac{w^2}{\sqrt{1+w^2}} dw \\ \Pi_5 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0 L^2}{8H} \int_{\chi^2}^1 \frac{(1-u)^2}{\sqrt{1+3u^2}} du \int_0^{W\chi \frac{2}{1-u} \sqrt{\frac{1+3u^2}{u}}} \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} dw. \end{array} \right.$$

Le calcul des intégrales suivant la variable w est possible mais celui suivant la variable u ne l'est malheureusement pas. On aboutit aux expressions semi-analytiques des dissipations "partielles" :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0 L^2}{32H} \int_{\chi^2}^1 \frac{(1-u)^2}{(1+3u^2)^{3/2}} [Y(u)\sqrt{Y(u)^2 + 1} - \text{Argsinh}(Y(u))] du \\ \Pi_3 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0 L^2}{64H} \int_{\chi^2}^1 \frac{(18u^2 - 1)(1-u)^2}{(1+3u^2)^{3/2}} [Y(u)\sqrt{Y(u)^2 + 1} - \text{Argsinh}(Y(u))] du \\ \Pi_5 = \frac{\sqrt{3}A\sigma_0 L^2}{8H} \int_{\chi^2}^1 \frac{(1-u)^2}{\sqrt{1+3u^2}} [\text{Argsinh}(Y(u))] du \end{array} \right. \quad (8.21)$$

avec $Y(u) = \frac{2}{1-u} \sqrt{\frac{1+3u^2}{u}} W \chi$. La dissipation “partielle isotrope” Π_{iso} vaut quant à elle :

$$\Pi = \frac{A\sigma_0 L^2}{4\sqrt{3}H} \int_{\chi^2}^1 \frac{(1-u)^2}{\sqrt{1+3u^2}} \left[Y(u) \sqrt{1+Y^2(u)} + \text{Argsinh}(Y(u)) \right] du. \quad (8.22)$$

8.3.3 Calcul de la contrainte de coalescence

La contrainte de coalescence est obtenue par la relation suivante

$$\Sigma_{33} = \frac{\partial \Pi}{\partial D_{33}} = \frac{\Pi}{D_{33}} \quad (8.23)$$

avec

$$D_{33} = \frac{1}{2H} [v_z(H) - v_z(-H)] = \frac{1}{2H} [v_z(h) - v_z(-h)] = A \frac{h^2}{H}. \quad (8.24)$$

Le critère de coalescence pour les matériaux anisotropes de Hill s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \Phi(\Sigma; \chi, W, \mathbf{b}) &= \frac{|\Sigma_{33}|}{\bar{\sigma}} - \frac{1}{4\sqrt{3}w^2\chi^2} \left[\int_{\chi^2}^1 \frac{(1-u)^2}{\sqrt{1+3u^2}} \left[Y(u) \sqrt{Y(u)^2 + 1} - \text{Argsinh}(Y(u)) \right] du \right. \\ &\quad + \frac{3}{8} (b_{11} + b_{22} + 2b_{44}) \int_{\chi^2}^1 \frac{(1-u)^2}{(1+3u^2)^{3/2}} \left[Y(u) \sqrt{Y(u)^2 + 1} - \text{Argsinh}(Y(u)) \right] du \\ &\quad + \frac{3}{16} b_{33} \int_{\chi^2}^1 \frac{(18u^2 - 1)(1-u)^2}{(1+3u^2)^{3/2}} \left[Y(u) \sqrt{Y(u)^2 + 1} - \text{Argsinh}(Y(u)) \right] du \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} (b_{55} + b_{66}) \int_{\chi^2}^1 \frac{(1-u)^2}{\sqrt{1+3u^2}} \left[\text{Argsinh}(Y(u)) \right] du \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (8.25)$$

8.4 Validation numérique du critère proposé

8.4.1 Description des simulations

Le but de cette section est de valider le critère de coalescence pour matériaux anisotropes (8.25). Pour cela nous allons résoudre numériquement le même problème par la méthode des éléments finis. On utilise la méthode d'analyse limite numérique proposée par [Madou and Leblond \(2012b\)](#) pour le cas des matériaux isotropes et étendue aux matériaux anisotropes par [Morin et al. \(2014\)](#) (voir l'annexe E pour le détail de la méthode).

Contrairement aux deux chapitres précédents, on ne peut plus réaliser les calculs avec un maillage 2D axisymétrique car le matériau considéré est anisotrope. On considère donc un huitième de la cellule 3D (voir Figure 8.2). Les conditions aux limites sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_2(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in S_{\text{lat}}^1 \\ u_1(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in S_{\text{lat}}^2 \\ u_1(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in S_{\text{lat}}^3 \\ u_2(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in S_{\text{lat}}^3 \\ u_3(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in S_{\text{bot}} \\ u_3(\mathbf{x}) = U_3 & \forall \mathbf{x} \in S_{\text{top}} \end{array} \right.$$

où le déplacement U_3 est pris assez grand pour que la charge limite soit atteinte.

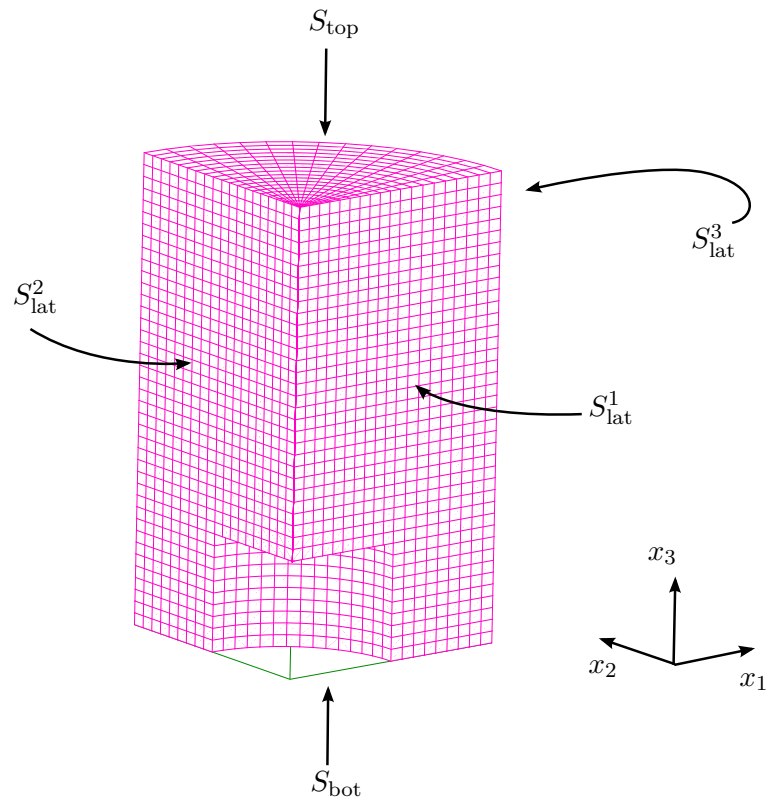


FIGURE 8.2: Maillage d'un huitième de la cellule.

La contrainte de coalescence Σ_{33} est ensuite obtenue par intégration sur les mailles :

$$\Sigma_{33} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega-\omega} \sigma_{33} d\Omega. \quad (8.26)$$

On considère plusieurs matériaux anisotropes, dont les coefficients d'anisotropie sont tirés de [Keralavarma et al. \(2011\)](#) (voir Tableau 8.1). La constante σ_0 est prise égale à 450 MPa.

Matériau	A_{11}	A_{22}	A_{33}	A_{12}	A_{13}	A_{23}	A_{44}	A_{55}	A_{66}
Isotrope	1.000	1.000	1.000	-0.500	-0.500	-0.500	3.000	3.000	3.000
Matériau 1	0.667	0.667	1.167	-0.0835	-0.5835	-0.5835	5.250	5.250	2.001
Matériau 2	2.333	2.333	0.33	-2.168	-0.165	-0.165	3.000	3.000	6.999

TABLE 8.1: Valeurs des coefficients de la matrice de Hill.

8.4.2 Résultats

Les résultats numériques pour la contrainte axiale de coalescence sont représentés Figure 8.3 pour quatre rapports d'aspect ($W = 0.5, 1, 2, 3$) et dix espacements des vides ($\chi = 0.20 + 0.05k, k = 1, \dots, 10$). Les prédictions du critère anisotrope dérivé dans la section 8.3 ainsi que pour le critère isotrope correspondant aux mêmes champs sont également représentées.

Les résultats numériques permettent de valider le critère théorique :

- Pour les cavités allongées ($W \geq 1$), le critère théorique coïncide très bien avec les résultats numériques. L'accord se dégrade légèrement lorsque χ diminue ce qui a peu d'importance pratique car la coalescence survient seulement lorsque χ est suffisamment grand. Le critère théorique capte

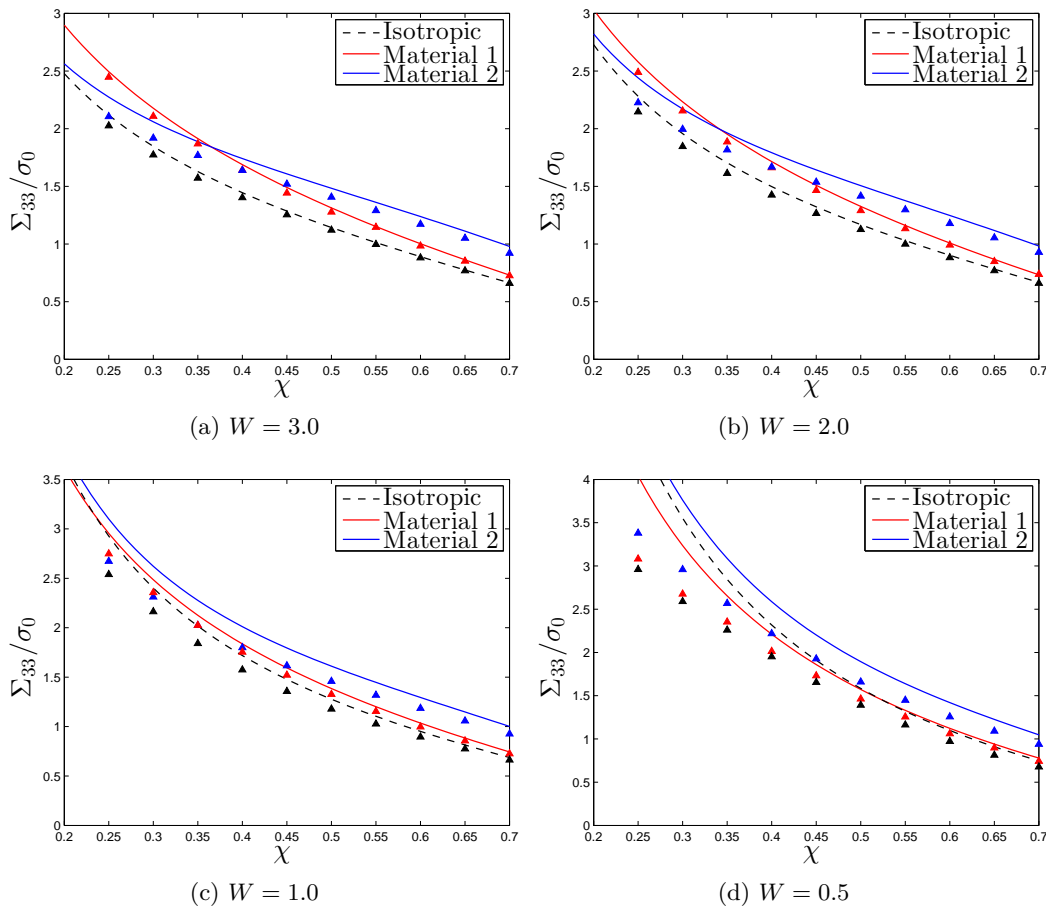


FIGURE 8.3: Résultats numériques et théoriques pour la charge limite de coalescence pour plusieurs valeurs de χ et W .

bien les spécificités des anisotropies considérées ici : le matériau 1 est plus résistant que le matériau 2 pour de faibles valeurs de χ , puis devient moins résistant pour des valeurs importantes de χ . (Un tel comportement était prévisible compte tenu des valeurs des coefficients A_{11} et A_{33} de ces matériaux). La comparaison avec le critère isotrope montre l'influence de l'anisotropie plastique sur la charge de coalescence, avec notamment une augmentation qui peut aller jusqu'à 50% de la charge de coalescence, pour le matériau 2.

- Pour les cavités aplaties ($W < 1$), l'accord entre le modèle et le numérique est satisfaisant pour des valeurs de χ élevées ($\chi \geq 0.5$) mais n'est pas bon pour les faibles valeurs de χ . Dans ce cas, l'effet de l'anisotropie n'est que qualitativement reproduit. Le critère théorique souffre ici des mêmes difficultés que le critère isotrope, à savoir une surestimation importante de la charge limite.

8.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre nous avons dérivé un critère de coalescence en couches pour des matériaux anisotropes.

Le critère théorique a été obtenu en utilisant les champs continus proposés au Chapitre 6, que l'on suppose être suffisants même pour le cas des matrices anisotropes. Pour pouvoir calculer la dissipation plastique macroscopique, une approximation est introduite, limitant le critère au cas des anisotropies modérées. On aboutit à un critère semi-analytique, qui dépend des paramètres géométriques χ et W et de l'anisotropie plastique, par l'intermédiaire du tenseur \mathbf{b} relié au tenseur \mathbb{A} de Hill.

Le critère a été validé par l'intermédiaire de calculs éléments finis d'analyse limite, que l'on supposera donner la solution exacte, aux incertitudes numériques près. Les calculs numériques montrent qu'il existe un couplage entre les effets de forme et l'anisotropie plastique, qui est en général bien capté par le critère théorique. En particulier, pour des valeurs élevées de W et χ , les critères théoriques et numériques coïncident presque parfaitement.

L'étape suivante consistera à utiliser ce critère de coalescence avec un critère de croissance (par exemple celui dérivé aux Chapitre 2 et 3) pour tenter de reproduire des calculs micromécaniques de croissance et coalescence de cavités plongées dans une matrice anisotrope (Keralavarma et al., 2011).

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale...

Cette thèse avait pour objectif l'étude de l'influence des effets de forme et de taille des cavités, ainsi que de l'anisotropie plastique sur la rupture ductile des métaux. Ces travaux s'intègrent dans certaines des problématiques actuelles de la rupture ductile concernant (i) *la prédiction de la rupture ductile à faible triaxialité*, (ii) *le développement de modèles précis de coalescence*, (iii) *la prise en compte de l'anisotropie plastique* et (iv) *la validité des modèles à faible échelle*. Nous nous sommes efforcés de proposer des éléments de réponse à ces challenges sur des aspects *théoriques, numériques* et également *applicatifs*. Les modèles théoriques développés ont systématiquement été évalués numériquement par des méthodes d'analyse limite numérique basées sur les éléments finis avant d'envisager de les appliquer. L'accent a également été porté sur l'implémentation des modèles dans des codes de calcul par éléments finis, afin de pouvoir les appliquer à des problèmes de rupture ductile sur des structures.

Dans la première partie, nous avons étudié l'influence des effets de forme des cavités et de l'anisotropie plastique sur les modèles de *croissance*.

Dans le chapitre 1, nous avons implémenté puis appliqué un modèle de rupture ductile comportant des effets de forme (modèle Madou-Leblond (Madou and Leblond, 2012a,b, 2013; Madou et al., 2013)). L'algorithme proposé de projection locale du modèle, qui se réduit à la résolution de deux équations non-linéaires couplées portant sur deux inconnues, a été implémenté dans les codes de calcul SYSTUS[®] et ABAQUS[®], permettant d'appliquer le modèle à des situations où les effets de forme sont importants. La première application a été dédiée à la comparaison des prédictions du modèle avec des calculs micromécaniques d'évolution de cellules élémentaires chargées en cisaillement (Nielsen et al., 2012; Tvergaard, 2015) : le modèle a permis de reproduire les calculs numériques que ce soit pour l'évolution de la contrainte de cisaillement ou celle des paramètres internes. La deuxième application a été consacrée à l'étude d'une structure soumise à un chargement mixte traction/cisaillement (Mohr et al., 2010; Dunand and Mohr, 2011a,b) : le modèle a permis de reproduire les courbes force-déplacement ainsi que le lieu d'amorçage de la fissure obtenus expérimentalement. Ces résultats ont permis de montrer l'importance de la prise en compte des effets de forme sur la rupture ductile en cisaillement mais également de mettre en évidence certaines limitations du modèle relatives à l'hypothèse d'isotropie de la matrice et à la modélisation de la coalescence.

Afin de surmonter la limitation liée à l'hypothèse d'isotropie de la matrice, nous avons développé dans le chapitre 2 un critère homogénéisé pour les matériaux anisotropes contenant des cavités ellipsoïdales générales, en étendant les critères récents de Madou and Leblond (2012a,b) de Madou and Leblond (2012a,b) pour des cavités ellipsoïdales générales plongées dans une matrice plastique isotrope, et de Monchiet et al. (2008); Keralavarma and Benzerga (2010) pour des cavités sphéroïdales plongées dans une matrice plastique anisotrope. Le critère a été dérivé par l'analyse limite d'une cellule ellipsoïdale constituée d'un matériau de Hill rigide parfaitement plastique contenant une cavité ellipsoïdale confocale, soumise à des conditions de taux de déformation homogène sur le bord; les champs de vitesse utilisés sont les champs isotropes établis par Leblond and Gologanu (2008). La détermination complète des coefficients du critère a été réalisée en utilisant des simulations par éléments finis pour les chargements hydrostatiques, et en utilisant une borne rigoureuse de Ponte Castañeda (1991); Willis (1991); Michel and Suquet (1992) pour les composites non linéaires pour les chargements

déviatoriques.

Le critère de plasticité dérivé au chapitre 2 a ensuite été validé numériquement dans le chapitre 3. Dans un premier temps, nous avons déterminé numériquement les surfaces de charge associées à un matériau anisotrope pour un grand nombre de cas géométriques par une méthode d'analyse limite basée sur les éléments finis. Ces calculs ont également permis de valider la loi d'écoulement macroscopique associée au critère théorique. La seconde partie du chapitre a été consacrée à l'étude des lois d'évolution de la longueur et de l'orientation des axes d'une cavité ellipsoïdale dans un milieu anisotrope, afin de définir un modèle complet de rupture ductile. L'approche heuristique formulée par [Madou et al. \(2013\)](#) dans le cas isotrope, consistant en une correction plastique des formules élastiques isotropes de [Kailasam and Ponte Castañeda \(1998\)](#), a été étendue dans le cas anisotrope : les lois de [Kailasam and Ponte Castañeda \(1998\)](#) correspondant à une cavité ellipsoïdale plongée dans un milieu élastique anisotrope sont adaptées au cas plastique en utilisant les corrections isotropes de [Madou et al. \(2013\)](#). Les prédictions théoriques pour l'évolution des axes d'une cavité ellipsoïdale ont été ensuite comparées avec succès à des calculs numériques par éléments finis, justifiant ainsi cette modélisation heuristique.

La seconde partie, plus exploratoire, a été consacrée à l'influence des effets de taille des cavités sur la rupture ductile de matériaux *nanoporeux*.

Dans le chapitre 4, nous avons étudié le comportement mécanique de matériaux ductiles nanoporeux, en nous basant sur le critère récent de [Dormieux and Kondo \(2010\)](#). Après avoir validé numériquement la surface de charge proposée par ces auteurs par une méthode d'analyse limite basée sur les éléments finis, nous avons formulé un modèle complet de rupture ductile en dérivant les équations d'évolution des paramètres internes grâce à la propriété de normalité de la loi d'écoulement. Une procédure spécifique a ensuite été développée pour implémenter le modèle de rupture ductile dans un code de calcul, en raison de la forme paramétrique de la surface de charge, permettant de réduire l'algorithme de correction plastique du prédicteur élastique à la résolution de deux équations non-linéaires couplées. L'implémentation numérique du modèle a permis de l'appliquer à des chargements proportionnels à triaxialité fixée. L'effet de taille des cavités a une influence importante sur le comportement mécanique ainsi que sur l'évolution de la porosité.

Le chapitre 5 prolonge le précédent en étudiant le couplage entre les effets de forme et de taille des cavités, en se basant sur le critère récent de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#). Dans un premier temps, nous avons dérivé un critère explicite dans le cas des cavités cylindriques. Des analyses limites numériques sur des cellules sphéroïdales contenant des cavités nanosphéroïdales ont ensuite été réalisées afin de valider le modèle de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) couplant effets de forme et de taille des cavités, ainsi que le nouveau critère pour les vides nanocylindriques. Le critère de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#) est pertinent dans tous les cas, sauf pour les cavités aplaties ; dans le cas cylindrique, le nouveau critère améliore sensiblement celui de [Monchiet and Kondo \(2013\)](#).

Enfin, la troisième partie a été consacrée à l'étude de l'influence des effets de forme et de l'anisotropie plastique sur les modèles de *coalescence*.

Nous avons étudié théoriquement et numériquement la coalescence en couches dans le chapitre 6, en profitant du cadre mathématique établi par [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) qui permet de décrire la phase de coalescence en utilisant des champs de vitesse localisés dans le ligament inter-cavités. Dans un premier temps, nous avons amélioré le critère de [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) en considérant deux nouvelles familles de champs de vitesse : dans la première, les champs discontinus de [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) sont généralisés, permettant de considérer la forme de l'interface rigide/plastique comme un paramètre ; dans la seconde, des champs de vitesse continus sont utilisés. Des calculs numériques d'analyse limite ont ensuite permis d'évaluer les deux critères proposés ainsi que celui de [Benzerga and Leblond \(2014\)](#) ; chacun des deux nouveaux critères améliore celui de [Benzerga and Leblond \(2014\)](#), pour des paramètres géométriques différents.

Nous avons ensuite développé dans le chapitre 7 un critère homogénéisé permettant d'unifier les théories de croissance et de coalescence. Le critère a été obtenu en considérant les champs de vitesse de

[Gurson \(1977\)](#) du cas cylindrique dans le ligament inter-cavités et un champ de vitesse générant un taux de déformation homogène dans les parties saines. Ce champ de vitesse a permis de recouvrir les deux scénarios, à savoir la plasticité diffuse (dans la phase de croissance) et la plasticité localisée dans les ligaments inter-cavités (dans la phase de coalescence). La surface de charge du critère unifié a ensuite été validée par des calculs d'analyse limite par éléments finis, mettant en évidence les particularités des phases de croissance et de coalescence.

Enfin, le chapitre 8 a été consacré à la dérivation d'un critère de coalescence en couches pour les matériaux anisotropes de Hill. Nous avons utilisé les champs de vitesse continus établis au chapitre 6 afin de dériver le critère pour les matériaux de Hill. Le critère obtenu a ensuite été validé par des analyses limites numériques pour deux matériaux anisotropes et plusieurs géométries. Le couplage entre les effets de forme et l'anisotropie plastique est en général très bien capté par le critère analytique.

Perspectives...

Ces travaux laissent ouvertes de nombreuses perspectives, aussi bien sur le plan théorique que le plan applicatif.

Pour compléter les travaux de la première partie sur les modèles de *croissance*, il serait intéressant d'aborder les points suivants :

- L'application du modèle ML à d'autres structures est nécessaire afin de poursuivre la validation de ce modèle. Une application envisageable est l'étude du front de fissure d'une éprouvette CT ; les modèles classiques ne permettent pas de bien prédire la forme du front de fissure en raison de la présence de zones à faible triaxialité à proximité des bords libres. Les effets de forme étant importants à faible triaxialité, il est donc intéressant d'étudier les prédictions du modèle ML dans ce cas.
- L'implémentation numérique puis l'application du modèle de rupture pour les matériaux anisotropes contenant des cavités ellipsoïdales générales dérivé aux chapitres 2 et 3 est maintenant nécessaire afin de pouvoir le valider. La comparaison des prédictions du modèle avec des calculs micromécaniques d'évolution ([Keralavarma et al., 2011](#)) serait déterminante pour pouvoir valider l'ensemble des éléments du modèle (critère, loi d'écoulement et lois d'évolution des paramètres internes). Il serait ensuite intéressant d'étudier les prédictions du modèle sur de vraies structures, comme par exemple des éprouvettes entaillées d'alliages d'aluminium anisotropes ([Benzerga et al., 2004b,a](#)), mais également l'éprouvette butterfly ([Dunand and Mohr, 2011b,a](#)) considérée au chapitre 1.

Le développement des modèles de *coalescence* en est encore à ses débuts ; de nombreuses études restent à mener :

- Le développement d'un modèle de coalescence pour des cavités de forme ellipsoïdale générale est d'une grande importance en raison de l'influence des effets de forme des cavités sur la rupture ductile. L'étude d'une cellule cylindrique à base elliptique contenant une cavité cylindrique à base elliptique confocale constituerait un premier pas dans cette direction.
- L'extension des modèles de coalescence au cas des chargements généraux est ensuite une étape nécessaire pour permettre d'utiliser ces critères dans des situations générales. Les travaux récents de [Torki et al. \(2015\)](#) permettant de coupler la traction et le cisaillement ouvrent la voie au développement d'un modèle pour les chargements généraux.
- La prise en compte simultanée, dans une même approche, de la coalescence en couches et de la coalescence en colonnes est un point d'une grande importance que devrait permettre le cadre mathématique établi par [Benzerga and Leblond \(2014\)](#).
- Enfin, l'implémentation des modèles de coalescence dans les codes de calcul est une étape cruciale afin de simuler précisément la phase finale de dégradation des matériaux ductiles. Dans un premier temps, il serait intéressant d'étudier les prédictions des modèles dérivés dans le chapitre 6 avec des calculs micromécaniques d'évolution ([Koplik and Needleman, 1988](#)). (La comparaison

des prédictions du modèle unifié avec un modèle hybride sur des problèmes d'évolution serait également un point intéressant à étudier).

Annexes

Annexes du Chapitre 2

A.1 Appendix : Ellipsoidal coordinates

We briefly recall here some elements pertaining to ellipsoidal coordinates (see [Morse and Feshbach \(1957\)](#) for more details). For each triplet (a, b, c) such that $a > b > c > 0$, one defines a set of curvilinear coordinates (λ, μ, ν) such that

$$\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2. \quad (\text{A.1})$$

The relations between these coordinates and the ordinary Cartesian ones (x, y, z) read

$$\begin{cases} x = \pm \left(\frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \right)^{1/2} \\ y = \pm \left(\frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \right)^{1/2} \\ z = \pm \left(\frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \right)^{1/2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu} = 1. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Note that there are 8 triplets (x, y, z) here for each triplet (λ, μ, ν) . Surfaces of constant λ are confocal ellipsoids denoted \mathcal{E}_λ , of semi-axes $\sqrt{a^2 + \lambda}$, $\sqrt{b^2 + \lambda}$, $\sqrt{c^2 + \lambda}$, whereas surfaces of constant μ and ν are hyperboloids of one and two sheets.

The function v , defined by

$$v(\rho) \equiv \sqrt{|a^2 + \rho| |b^2 + \rho| |c^2 + \rho|} \quad (\text{A.3})$$

plays an important role in various formulae, notably in the expression of the infinitesimal volume element :

$$d\Omega = - \frac{(\lambda - \mu)(\mu - \nu)(\nu - \lambda)}{8v(\lambda)v(\mu)v(\nu)} d\lambda d\mu d\nu. \quad (\text{A.4})$$

Note also that $\frac{4\pi}{3}v(\lambda)$ represents the volume enclosed within the ellipsoid \mathcal{E}_λ .

A.2 Appendix : Elements on the matrix representations of Hill's tensor \mathbb{B}

The non-zero components of the symmetric matrices $\tilde{\mathbb{A}}^*$ and $\tilde{\mathbb{B}}^*$ representing the tensors \mathbb{A} and \mathbb{B} in the orthotropy basis $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ are connected through the following relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{B}_{12}^* = \frac{1}{9} \frac{-\tilde{A}_{12}^* + 2\tilde{A}_{13}^* + 2\tilde{A}_{23}^*}{\tilde{A}_{12}^*\tilde{A}_{13}^* + \tilde{A}_{12}^*\tilde{A}_{23}^* + \tilde{A}_{13}^*\tilde{A}_{23}^*} \\ \tilde{B}_{13}^* = \frac{1}{9} \frac{-\tilde{A}_{13}^* + 2\tilde{A}_{12}^* + 2\tilde{A}_{23}^*}{\tilde{A}_{12}^*\tilde{A}_{13}^* + \tilde{A}_{12}^*\tilde{A}_{23}^* + \tilde{A}_{13}^*\tilde{A}_{23}^*} \\ \tilde{B}_{23}^* = \frac{1}{9} \frac{-\tilde{A}_{23}^* + 2\tilde{A}_{12}^* + 2\tilde{A}_{13}^*}{\tilde{A}_{12}^*\tilde{A}_{13}^* + \tilde{A}_{12}^*\tilde{A}_{23}^* + \tilde{A}_{13}^*\tilde{A}_{23}^*} \\ \tilde{B}_{11}^* = -\tilde{B}_{12}^* - \tilde{B}_{13}^* \\ \tilde{B}_{22}^* = -\tilde{B}_{12}^* - \tilde{B}_{23}^* \\ \tilde{B}_{33}^* = -\tilde{B}_{13}^* - \tilde{B}_{23}^* \\ \tilde{B}_{44}^* = 1/\tilde{A}_{44}^* \\ \tilde{B}_{55}^* = 1/\tilde{A}_{55}^* \\ \tilde{B}_{66}^* = 1/\tilde{A}_{66}^* \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

In the isotropic case (von Mises's criterion), the matrix representations of the tensor $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}_{iso}$ in the two bases $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ and $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ are identical :

$$\tilde{\mathbb{B}}_{iso} = \tilde{\mathbb{B}}_{iso}^* = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

A.3 Appendix : Definition of moderate anisotropy

In order to justify certain approximations made in the derivation of the model (*e.g.* the choice of isotropic velocity fields in the anisotropic case), it is necessary to define the notion of ‘‘moderate anisotropy’’. Let us first recall the Euclidean norm of a matrix \mathbb{M} :

$$\|\mathbb{M}\| = \sqrt{M_{ij}M_{ij}}. \quad (\text{A.7})$$

A normalized anisotropic Hill's tensor $\bar{\mathbb{A}}$ can be defined using this Euclidean norm :

$$\bar{\mathbb{A}} = \frac{\mathbb{A}}{\|\mathbb{A}\|}. \quad (\text{A.8})$$

Similarly, a normalized isotropic Hill's tensor $\bar{\mathbb{A}}_{iso}$ can be defined as :

$$\bar{\mathbb{A}}_{iso} = \frac{\mathbb{A}_{iso}}{\|\mathbb{A}_{iso}\|}. \quad (\text{A.9})$$

Note that the division of the tensors \mathbb{A} and \mathbb{A}_{iso} by their norm eliminates the degree of arbitrariness involved in their definition, see Section 2.2.4. The magnitude of the anisotropy can then be characterized by a dimensionless scalar γ defined by :

$$\gamma = \|\bar{\mathbb{A}} - \bar{\mathbb{A}}_{iso}\|. \quad (\text{A.10})$$

If γ is much smaller than unity, the anisotropy can be considered as moderate.

A.4 Appendix : [Leblond and Gologanu \(2008\)](#)'s velocity fields

The expression of [Leblond and Gologanu \(2008\)](#)'s velocity fields is as follows :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{D}(\lambda) \cdot \mathbf{r} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x(\mathbf{r}) \equiv D_{xx}(\lambda)x + D_{xy}(\lambda)y + D_{xz}(\lambda)z \\ v_y(\mathbf{r}) \equiv D_{yx}(\lambda)x + D_{yy}(\lambda)y + D_{yz}(\lambda)z \\ v_z(\mathbf{r}) \equiv D_{zx}(\lambda)x + D_{zy}(\lambda)y + D_{zz}(\lambda)z. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

In this equation, $\mathbf{r} \equiv x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ is the current position-vector and $\mathbf{D}(\lambda)$ a symmetric second-rank tensor depending on λ given by

$$\mathbf{D}(\lambda) \equiv \mathcal{A}\mathbf{D}^0(\lambda) + \mathbf{\Delta} \quad (\text{A.12})$$

where \mathcal{A} is an arbitrary number, $\mathbf{\Delta}$ an arbitrary constant traceless symmetric second-rank tensor, and $\mathbf{D}^0(\lambda)$ the symmetric second-rank tensor depending on λ given by

$$\begin{cases} D_{xx}^0(\lambda) \equiv \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(a^2 + \rho)v(\rho)} \\ D_{yy}^0(\lambda) \equiv \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(b^2 + \rho)v(\rho)} \\ D_{zz}^0(\lambda) \equiv \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d\rho}{2(c^2 + \rho)v(\rho)} \\ D_{xy}^0(\lambda) \equiv D_{yz}^0(\lambda) \equiv D_{zx}^0(\lambda) \equiv 0. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

It is worth noting that the trace of this tensor has a simple expression :

$$\text{tr } \mathbf{D}^0(\lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} \left(\frac{1}{a^2 + \rho} + \frac{1}{b^2 + \rho} + \frac{1}{c^2 + \rho} \right) \frac{d\rho}{2v(\rho)} = - \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{v(\rho)} \right) d\rho = \frac{1}{v(\lambda)}. \quad (\text{A.14})$$

It follows from equations (A.11) and (A.12) that the strain rate tensor $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ associated to the velocity field $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ is given by

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}) = \mathcal{A}\mathbf{d}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{\Delta} \quad (\text{A.15})$$

where $\mathbf{d}^0(\mathbf{r})$ is the strain rate tensor corresponding to the velocity field

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{D}^0(\lambda) \cdot \mathbf{r}. \quad (\text{A.16})$$

The expressions of the components of this tensor are as follows :

$$\begin{cases} d_{xx}^0(\mathbf{r}) = D_{xx}^0(\lambda) - \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2 T v(\lambda)} \\ d_{yy}^0(\mathbf{r}) = D_{yy}^0(\lambda) - \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2 T v(\lambda)} \\ d_{zz}^0(\mathbf{r}) = D_{zz}^0(\lambda) - \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2 T v(\lambda)} \end{cases} ; \begin{cases} d_{xy}^0(\mathbf{r}) = -\frac{xy}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda) T v(\lambda)} \\ d_{yz}^0(\mathbf{r}) = -\frac{yz}{(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) T v(\lambda)} \\ d_{zx}^0(\mathbf{r}) = -\frac{zx}{(c^2 + \lambda)(a^2 + \lambda) T v(\lambda)} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

where

$$T \equiv \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2}. \quad (\text{A.18})$$

A.5 Appendix : Asymptotic study of the integrand in Π

This section is devoted to the asymptotic study of the integrand in equation (2.23) defining $\Pi^{++}(\mathbf{D})$. This study will use many results obtained by Madou and Leblond (2012a), so only new ones will be explained in detail.

The expression of $\langle d_{eq}^2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ is given by equation (2.26) of the text. This equation reduces the asymptotic study of this average value to those of $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ and $\langle d_{eq}^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$.

- The off-diagonal components of the average value $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ are zero since, by equations (A.17)_{4,5,6} of Appendix A.4, the off-diagonal components of $\mathbf{d}^0(\mathbf{r})$ change sign from one of the 8 points (x, y, z) corresponding to a given triplet (λ, μ, ν) to another. *The asymptotic study of $\langle \mathbf{d}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ will therefore have to consider only the quantities $\langle d_1^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$, $\langle d_2^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ and $\langle d_3^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$.*
- According to the definition (8.9) of $d_{eq}^2(\mathbf{r})$, we then get :

$$\begin{aligned} \langle d_{eq}^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = & B_{11} \langle 2d_1^{02}(\mathbf{r}) + d_2^0(\mathbf{r})d_3^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + B_{22} \langle 2d_2^{02}(\mathbf{r}) + d_1^0(\mathbf{r})d_3^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ & + B_{33} \langle 2d_3^{02}(\mathbf{r}) + d_1^0(\mathbf{r})d_2^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ & + B_{44} \langle d_4^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + B_{55} \langle d_5^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} + B_{66} \langle d_6^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

where the coefficients $(B_{ij})_{1 \leq i \leq 3; 4 \leq j \leq 6}$ and $(B_{ij})_{4 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 3}$ do not appear, because $\langle d_{ii}^0(\mathbf{r})d_{jk}^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = 0$ for $j \neq k$ (no sum on i); also, the coefficients B_{12} , B_{13} and B_{23} here have been replaced by linear combinations of B_{11} , B_{22} and B_{33} using relations similar to (2.15). *The asymptotic study of $\langle d_{eq}^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ will therefore have to consider only the quantities $\langle 2d_1^{02}(\mathbf{r}) + d_2^0(\mathbf{r})d_3^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$, $\langle 2d_2^{02}(\mathbf{r}) + d_1^0(\mathbf{r})d_3^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$, $\langle 2d_3^{02}(\mathbf{r}) + d_1^0(\mathbf{r})d_2^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$, $\langle d_4^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$, $\langle d_5^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$ and $\langle d_6^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda}$.*

A.5.1 Asymptotic study near infinity

Following Madou and Leblond (2012a), we note that near infinity, the ellipsoids \mathcal{E}_λ become spheres of large radius $r \sim \sqrt{\lambda}$ (by equation (A.2)₄ of Appendix A.1) and large volume $\frac{4\pi}{3}v(\lambda)$, $v(\lambda) \equiv v \sim \lambda^{3/2} \sim r^3$ (by equation (A.3)). Also, the tensor $\mathbf{D}^0(\lambda)$ becomes identical to $\frac{1}{3v}\mathbf{1} \sim \frac{1}{3r^3}\mathbf{1}$ (by equations (A.13) and (A.14) of Appendix A.4), and the velocity field $\mathbf{v}^0(\mathbf{r})$ becomes identical to the incompressible “radial expansion field” $\frac{1}{3r^3}\mathbf{r}$. It then follows from elementary calculations that

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle 2d_1^{02}(\mathbf{r}) + d_2^0(\mathbf{r})d_3^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \frac{2}{15r^6} \sim \frac{2}{15v^2} \\ \langle 2d_2^{02}(\mathbf{r}) + d_1^0(\mathbf{r})d_3^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \frac{2}{15r^6} \sim \frac{2}{15v^2} \\ \langle 2d_3^{02}(\mathbf{r}) + d_1^0(\mathbf{r})d_2^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \frac{2}{15r^6} \sim \frac{2}{15v^2} \\ \langle d_4^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \langle d_5^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \langle d_6^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \frac{4}{15r^6} \sim \frac{4}{15v^2} \\ \langle d_1^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \langle d_2^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \langle d_3^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = o\left(\frac{1}{r^3}\right) = o\left(\frac{1}{v}\right) \end{array} \right. \quad \text{for } \lambda \text{ or } v \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.20})$$

so that, by equation (A.19),

$$\langle d_{eq}^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \frac{2}{15v^2} (B_{11} + B_{22} + B_{33} + 2B_{44} + 2B_{55} + 2B_{66}) \quad \text{for } \lambda \text{ or } v \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.21})$$

A.5.2 Asymptotic study near the origin : generalities

For surfaces \mathcal{E}_λ close to the completely flat confocal ellipsoid of semi-axes $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 0$, the asymptotic study is more tricky and requires distinguishing between different cases : arbitrary ellipsoid, prolate spheroid, oblate spheroid and sphere.

In all cases, the condition for the surface \mathcal{E}_λ to be close to the completely flat ellipsoid is $\lambda \rightarrow -c^2$. Therefore the limits we are interested in are

$$\begin{cases} L_x \equiv \lim_{\lambda \rightarrow -c^2} \langle d_1^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ L_y \equiv \lim_{\lambda \rightarrow -c^2} \langle d_2^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \quad ; \quad L^2 \equiv \lim_{\lambda \rightarrow -c^2} \langle d_{eq}^{0\ 2}(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \\ L_z \equiv \lim_{\lambda \rightarrow -c^2} \langle d_3^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

A.5.3 Asymptotic study near the origin : generic ellipsoidal case ($a > b > c$)

The results obtained by [Madou and Leblond \(2012a\)](#) imply that

$$L_x = \frac{K' - E'}{k'^2 \bar{a}^3} \quad ; \quad L_y = \frac{E'/k^2 - K'}{k'^2 \bar{a}^3} \quad ; \quad L_z = -\frac{E'}{k^2 \bar{a}^3} \quad (\text{A.23})$$

where E' and K' denote classical complete elliptic integrals :

$$E' \equiv E(k') \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi} \, d\phi \quad ; \quad K' \equiv K(k') \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi}}. \quad (\text{A.24})$$

Also,

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow -c^2} \langle 2d_1^{0\ 2} + d_2^0 d_3^0 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = 2L_x^2 + L_y L_z \\ \lim_{\lambda \rightarrow -c^2} \langle 2d_2^{0\ 2} + d_1^0 d_3^0 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = 2L_y^2 + L_x L_z \\ \lim_{\lambda \rightarrow -c^2} \langle 2d_3^{0\ 2} + d_1^0 d_2^0 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = 2L_z^2 + L_x L_y \\ \lim_{\lambda \rightarrow -c^2} \langle d_4^{0\ 2} \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow -c^2} \langle d_5^{0\ 2} \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \frac{4}{k^2 \bar{a}^6} \\ \lim_{\lambda \rightarrow -c^2} \langle d_6^{0\ 2} \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \frac{4}{k^4 \bar{a}^6} \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

so that, by equation (A.19), the limit L defined by equation (A.22)₄ is given by

$$L^2 = (2L_x^2 + L_y L_z) B_{11} + (2L_y^2 + L_x L_z) B_{22} + (2L_z^2 + L_x L_y) B_{33} + \frac{4}{k^2 \bar{a}^6} (B_{55} + B_{66}). \quad (\text{A.26})$$

The conclusion is that *in the generic case where $a > b > c$, all limits L_x, L_y, L_z, L^2 defined by equations (A.22) are finite.*

A.5.4 Asymptotic study near the origin : spheroidal prolate case ($a > b = c$)

The results for the components of the strain rate themselves were provided by [Madou and Leblond \(2012a\)](#) :

$$\langle d_1^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim -\frac{\ln v}{2a^3} \quad ; \quad \langle d_2^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = \langle d_3^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} = -\frac{1}{2} \langle d_1^0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \sim \frac{\ln v}{4a^3} \quad \text{for } v \rightarrow 0. \quad (\text{A.27})$$

The results for the squares of these components may also be deduced from [Madou and Leblond](#)

(2012a)'s results :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle d_2^{02} \rangle_{\varepsilon_\lambda} \sim \frac{1}{v^2} \left\langle \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{y^2 + z^2} \right)^2 \right\rangle_{\varepsilon_\lambda} \sim \frac{1}{8v^2} \\ \langle d_3^{02} \rangle_{\varepsilon_\lambda} \sim \frac{1}{v^2} \left\langle \left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{y^2 + z^2} \right)^2 \right\rangle_{\varepsilon_\lambda} \sim \frac{1}{8v^2} \\ \langle d_6^{02} \rangle_{\varepsilon_\lambda} \sim \frac{4}{v^2} \left\langle \left(\frac{1}{2} - \frac{yz}{y^2 + z^2} \right)^2 \right\rangle_{\varepsilon_\lambda} \sim \frac{1}{2v^2} \\ \langle d_2^0 d_3^0 \rangle_{\varepsilon_\lambda} \sim \frac{1}{v^2} \left\langle \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{y^2 + z^2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{y^2 + z^2} \right) \right\rangle_{\varepsilon_\lambda} \sim -\frac{1}{8v^2}, \end{array} \right. \quad \text{for } v \rightarrow 0. \quad (\text{A.28})$$

other components being negligible with respect to these ones. Equation (A.19) then implies that

$$\langle d_{eq}^{02} \rangle_{\varepsilon_\lambda} \sim \frac{1}{8v^2} (-B_{11} + 2B_{22} + 2B_{33} + 4B_{66}) \quad \text{for } v \rightarrow 0. \quad (\text{A.29})$$

In conclusion, *in the prolate spheroidal case where $a > b = c$, all limits L_x, L_y, L_z, L^2 are infinite.*

A.5.5 Asymptotic study near the origin : spheroidal oblate case ($a = b > c$)

As explained in detail by Madou and Leblond (2012a), the oblate spheroidal case is just, unlike the prolate spheroidal one, a special case of the generic situation. The values of the limits looked for are :

$$L_x = L_y = \frac{\pi}{4a^3} \quad ; \quad L_z = -\frac{\pi}{2a^3} \quad ; \quad L^2 = \frac{9\pi^2}{16a^6} B_{33} + \frac{4}{a^6} (B_{55} + B_{66}). \quad (\text{A.30})$$

Thus, *in the oblate spheroidal case where $a = b > c$, the limits L_x, L_y, L_z, L^2 are finite like in the generic case.*

A.5.6 Asymptotic study near the origin : spherical case ($a = b = c$)

In the spherical case, the limits looked for can easily be found using the same reasoning as in the previous study near infinity ; the only difference being that here formulae are exact instead of being just asymptotic. The results are as follows :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle d_1^0(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} = \langle d_2^0(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} = \langle d_3^0(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} = 0 \\ \langle d_{eq}^{02}(\mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon_\lambda} = \frac{2}{15v^2} (B_{11} + B_{22} + B_{33} + 2B_{44} + 2B_{55} + 2B_{66}). \end{array} \right. \quad (\text{A.31})$$

Thus, *in the spherical case where $a = b = c$, the limits L_x, L_y, L_z are zero whereas L^2 is infinite.*

A.6 Appendix : The nonlinear Willis bound for plastic porous solids

Willis's quadratic form $\Phi^W(\Sigma)$ defining the approximate yield criterion (2.72) reads

$$\mathcal{Q}^W(\Sigma) = (1 - f)\Sigma : \mathbb{M}^{hom} : \Sigma \quad , \quad \mathbb{M}^{hom} = \mathbb{M} + \frac{f}{1 - f} \left[\mathbb{M}^{-1} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}) \right]^{-1} \quad (\text{A.32})$$

where \mathbb{M} is the compliance tensor of some ‘‘elastic comparison material’’, to be specified below, and \mathbb{S} is the Eshelby tensor associated to the ellipsoidal void considered, embedded in an infinite medium made of this elastic material.

In order for Willis's bound to be applicable, the tensor \mathbb{M} in equation (A.32) must be identical to Hill's tensor \mathbb{A} (Leblond et al., 1994b). In this approach, different viscous materials with several Norton's exponents n are compared, with the same orthotropic expression of the potential of dissipation (except this exponent). This leads to a comparison between a perfectly plastic medium ($n = \infty$) with some Hill's tensor \mathbb{A} , and a linear medium ($n = 1$) for which the compliance tensor coincides with the previous Hill's tensor (see Leblond et al. (1994b) for more details). This raises a slight problem since \mathbb{A} is not invertible because of relations (2.15). This problem may be solved by adding a small "elastic compressibility" to \mathbb{A} , leading to the following definition of \mathbb{M} :

$$\mathbb{M} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\mathbb{A} + \epsilon \mathbb{J}). \quad (\text{A.33})$$

(Eshelby's tensor in equation (A.32) must of course correspond to this elastic compliance).

No analytical formulae are available for the components of the Eshelby tensor of an ellipsoidal cavity embedded in an infinite orthotropic medium. The calculation of these components requires the numerical computation of integrals (see for instance Gavazzi and Lagoudas (1990)).

Annexes du Chapitre 3

B.1 Etude de la loi d'écoulement macroscopique

B.1.1 Cavités ellipsoïdales générales

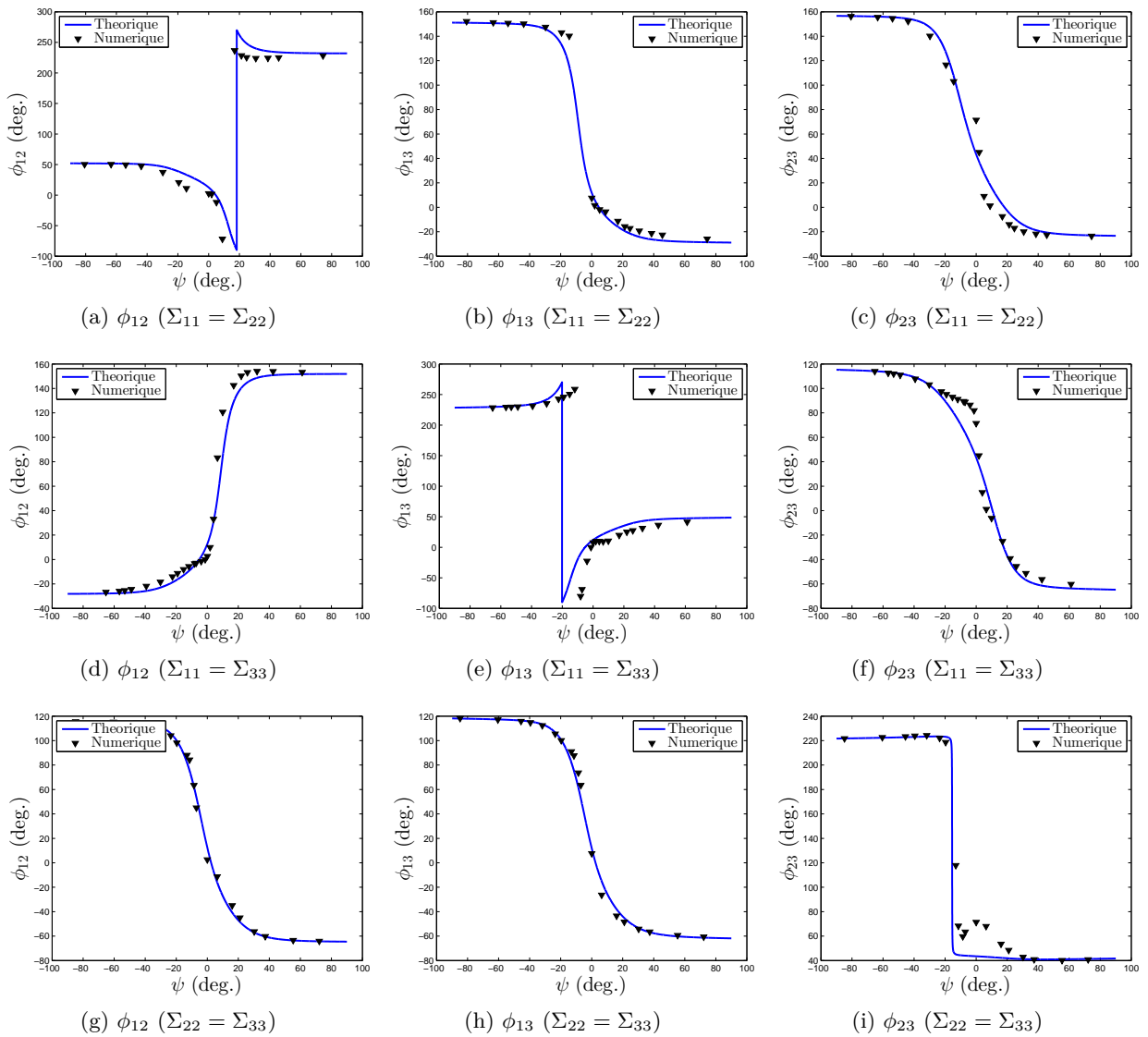


FIGURE B.1: Etude de la loi d'écoulement : cas d'axes (10 : 2 : 1)

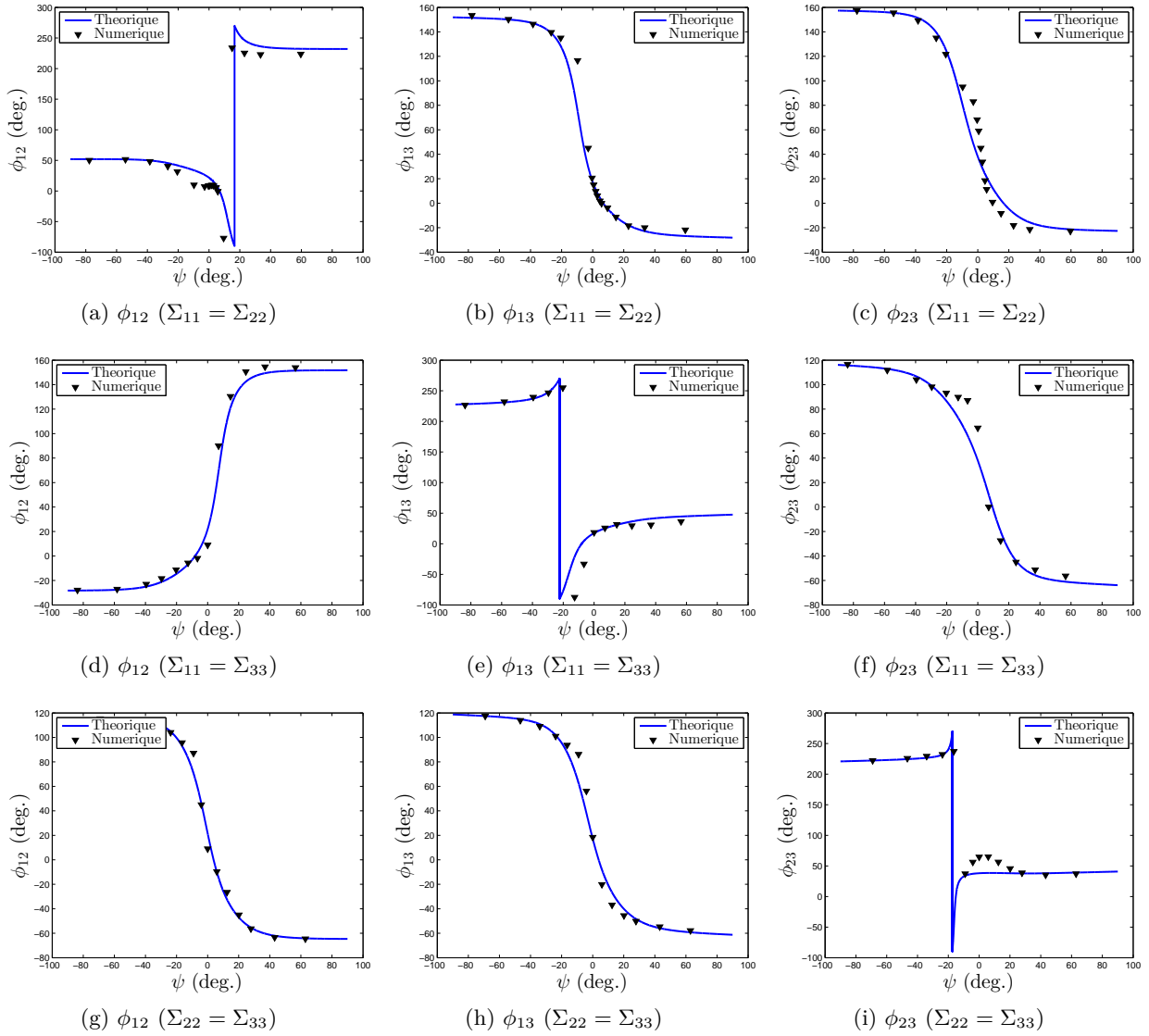


FIGURE B.2: Etude de la loi d'écoulement : cas d'axes (10 : 5 : 1)

B.1.2 Fissures

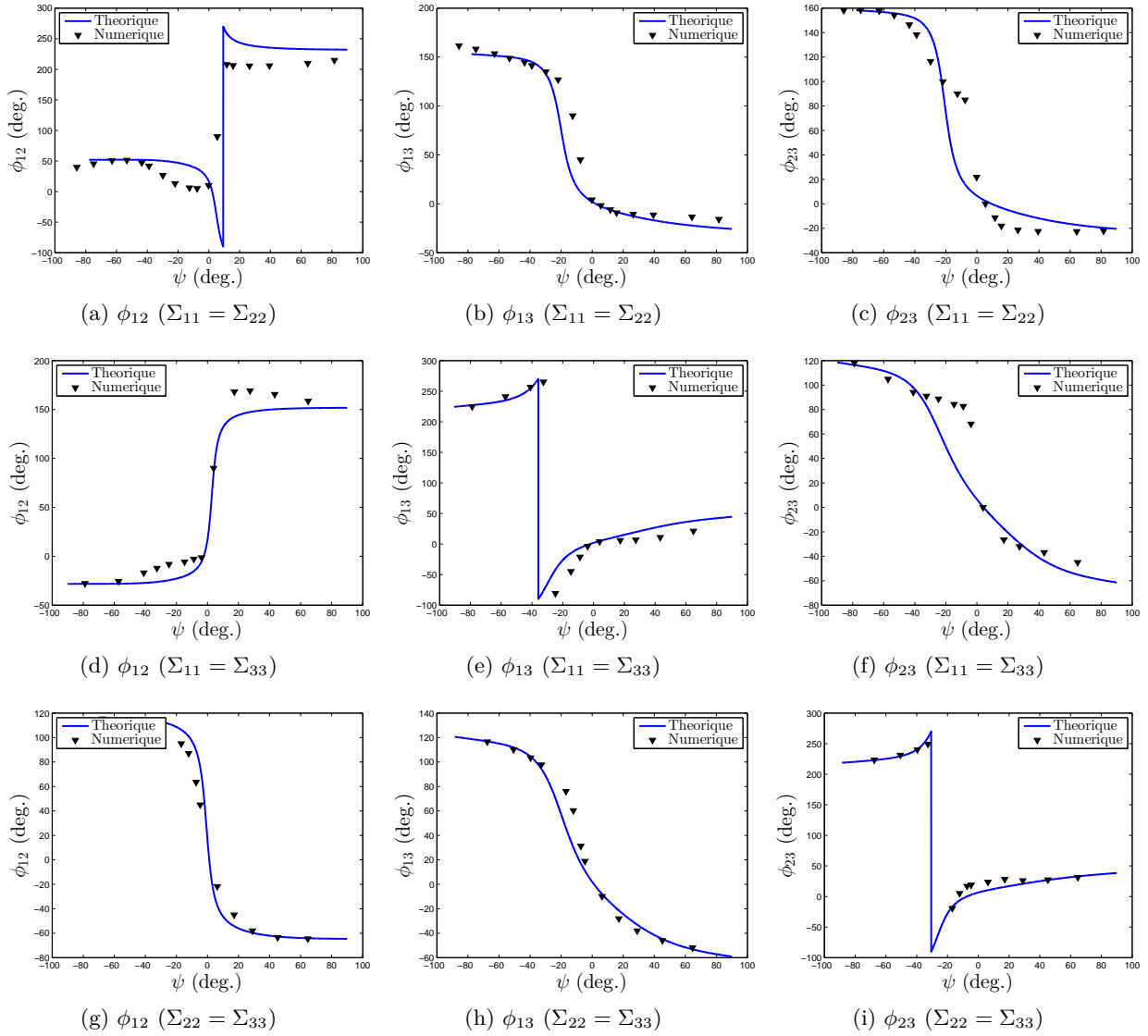


FIGURE B.3: Etude de la loi d'écoulement : cas d'axes (5 : 2 : 0.2)

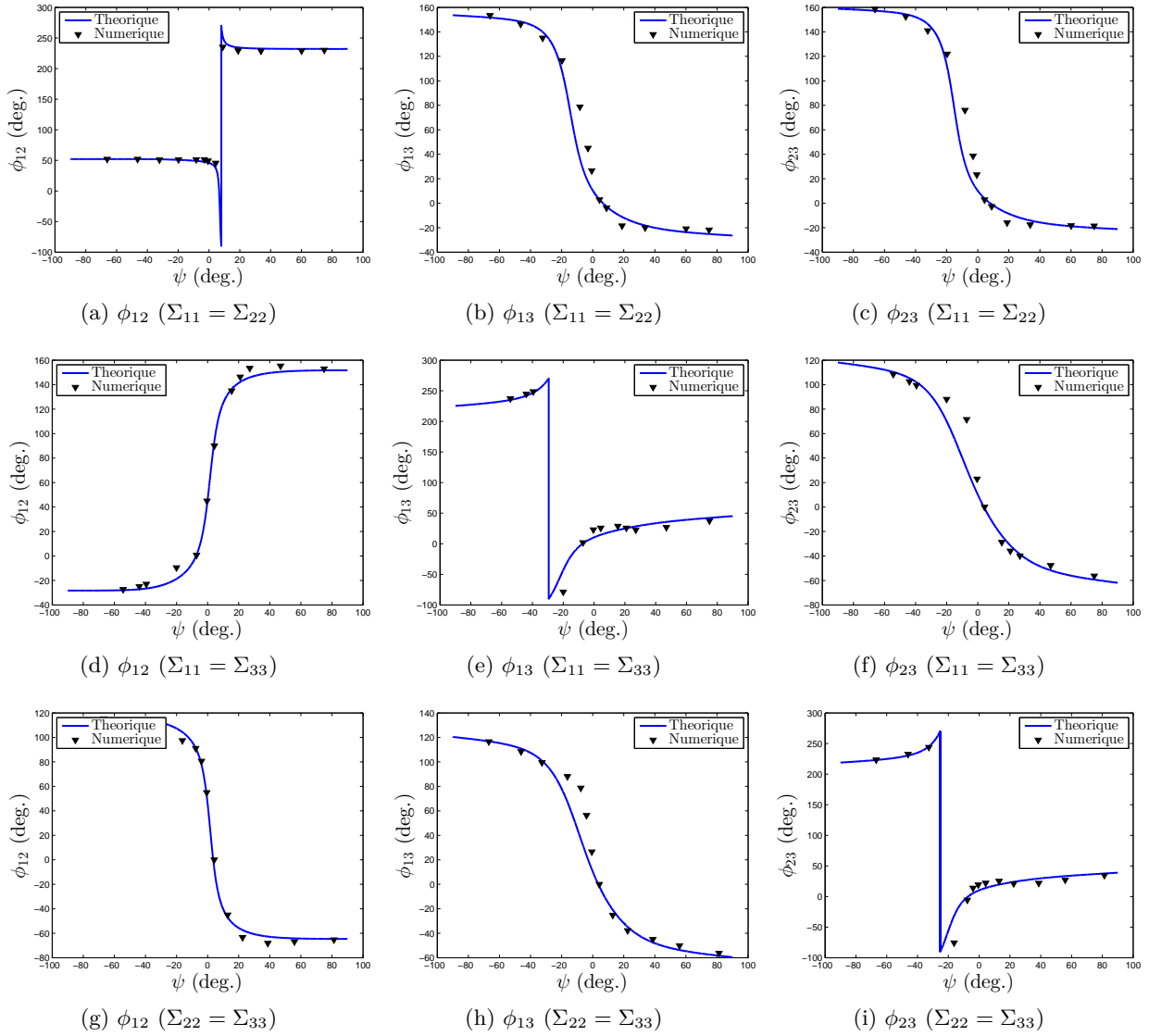
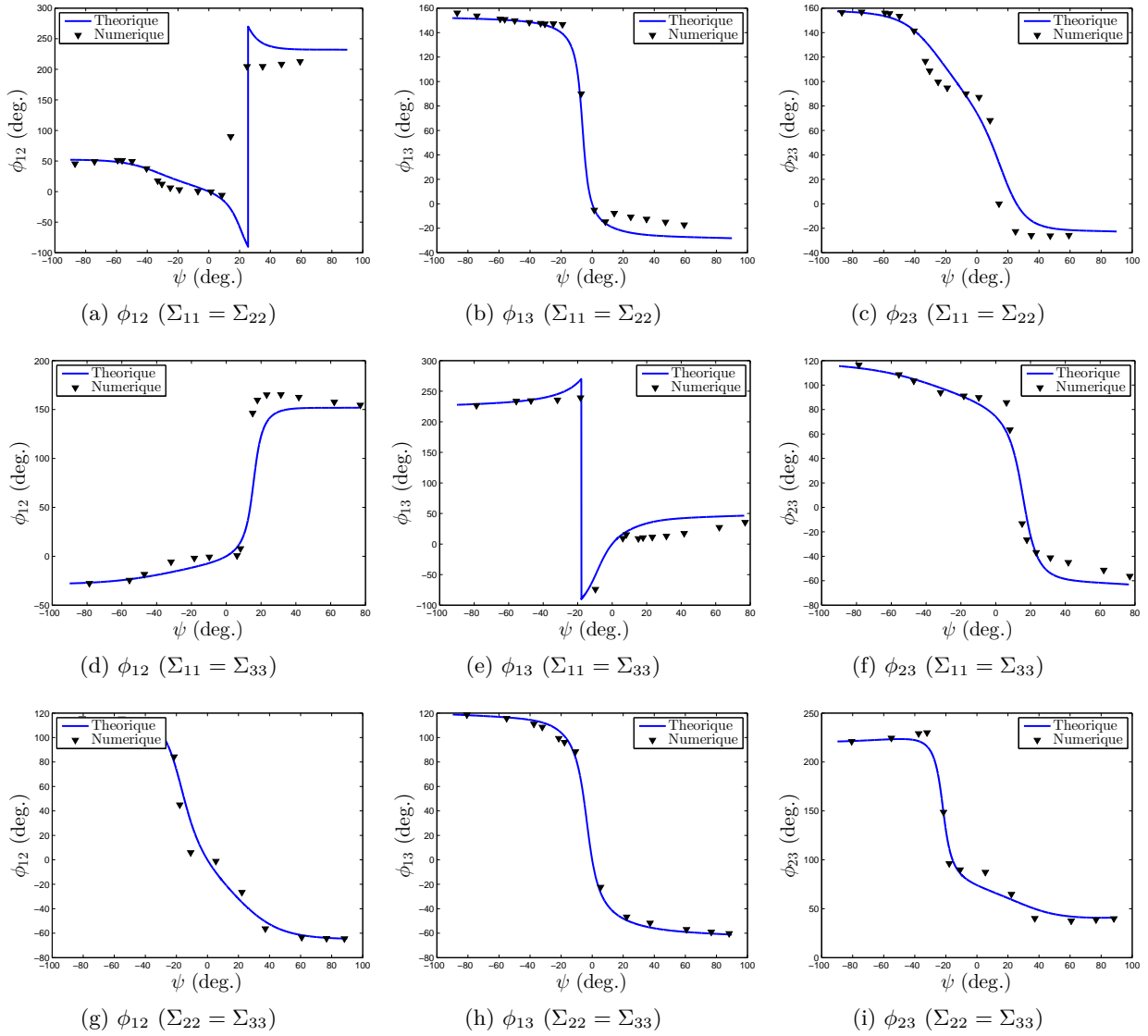
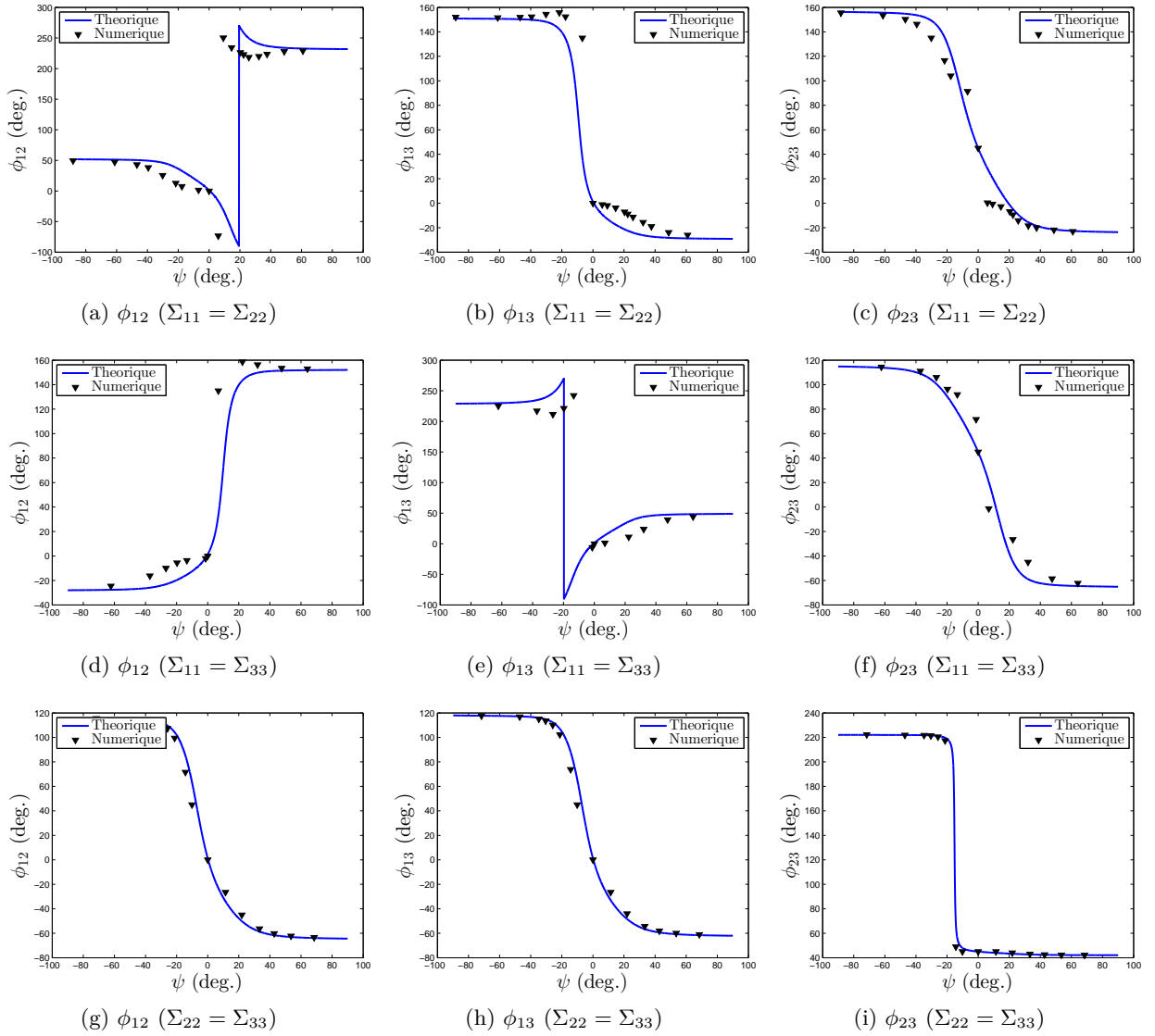


FIGURE B.4: Etude de la loi d'écoulement : cas d'axes (5 : 2 : 0.2)

B.1.3 Cavités cylindriques

FIGURE B.5: Etude de la loi d'écoulement : cas d'axes ($\infty : 5 : 1$)

FIGURE B.6: Etude de la loi d'écoulement : cas d'axes ($\infty : 5 : 5$)

B.1.4 Cavités sphériques

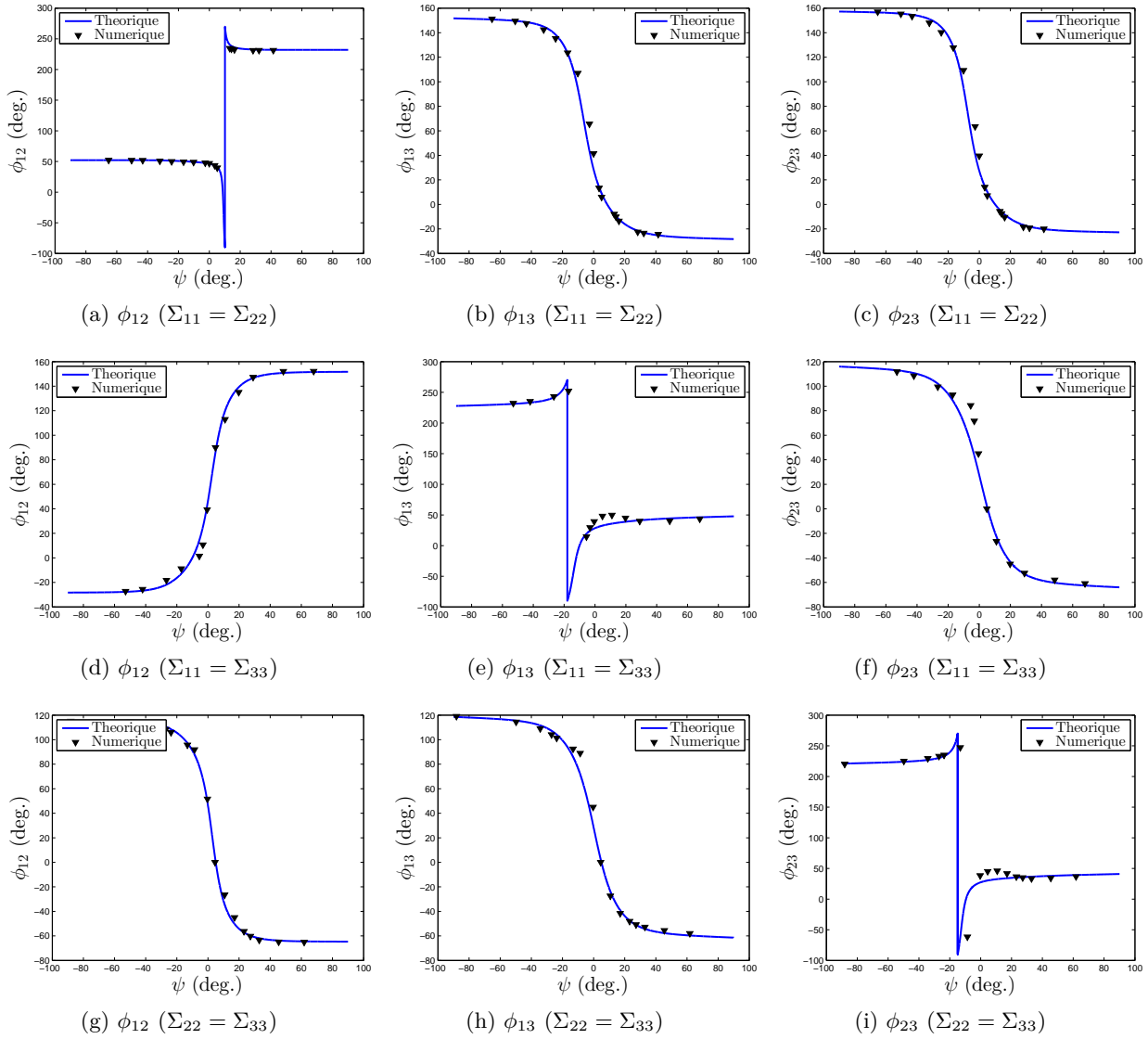


FIGURE B.7: Etude de la loi d'écoulement : cas d'axes (5 : 5 : 1)

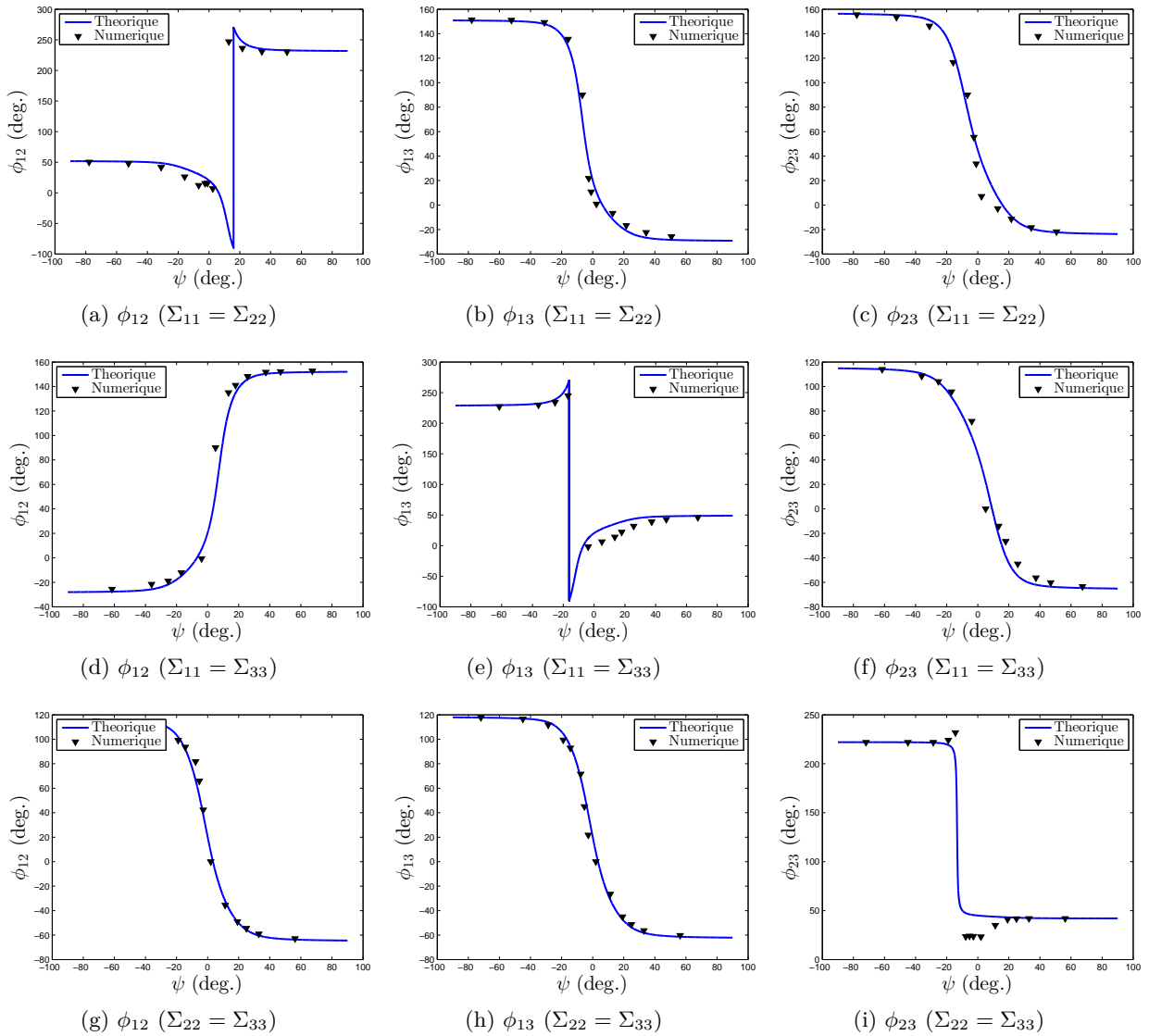


FIGURE B.8: Etude de la loi d'écoulement : cas d'axes (5 : 5 : 1)

Annexe du Chapitre 6 : Numerical limit-analysis by the finite element method

The aim of this Appendix is to briefly recall the method proposed by [Madou and Leblond \(2012b\)](#); [Tekoglu et al. \(2012\)](#) to solve a limit-analysis problem using the standard finite element method including elasticity.

The equations of limit-analysis of a structure Ω are identical to those of a problem of small strain plasticity without elasticity, that is :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \mathbf{d} = \frac{1}{2} [\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v})^T] \\ f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \\ \mathbf{d} = \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}), \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \end{array} \right. \quad \text{in } \Omega \quad (\text{C.1})$$

+B.C.

Here \mathbf{X} denotes the position-vector in the initial configuration, \mathbf{v} the velocity, \mathbf{d} the strain rate, $\boldsymbol{\sigma}$ the Cauchy stress tensor, $f(\boldsymbol{\sigma})$ the von Mises yield function, $\dot{\eta}$ the plastic multiplier, and “B.C.” stands for “boundary conditions”.

Now assume that the elastoplastic problem is solved by the finite element method using an implicit (backward Euler) algorithm for the local projection of the elastic stress predictor onto the yield locus, with a single large step and no geometry update. Let $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\sigma}^1$, $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$, \mathbf{u}^1 , $\boldsymbol{\epsilon}^0 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\epsilon}^1$ denote the initial and final stresses, initial and final displacements, initial and final strains, respectively. Provided that the load increment is large enough for the elastic strains in the structure to be generally much smaller than the plastic strains, the equations of the time-discretized problem read

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\sigma}^1 = 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}^1 = \frac{1}{2} \{ \nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}^1) + [\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}^1)]^T \} \\ f(\boldsymbol{\sigma}^1) \leq 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}^1 - \boldsymbol{\epsilon}^0 = \boldsymbol{\epsilon}^1 \simeq \Delta \eta \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^1), \quad \Delta \lambda \geq 0, \quad \Delta \lambda f(\boldsymbol{\sigma}^1) = 0 \end{array} \right. \quad \text{in } \Omega \quad (\text{C.2})$$

+B.C.

where $\Delta \eta$ denotes the discretized plastic multiplier. The equivalence of systems (E.13) and (E.14) is clear¹, with the correspondences $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}^1$, $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{u}^1$, $\mathbf{d} \leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon}^1$.

Thus one may solve a problem of limit-analysis by the standard finite element method, with a single load step sufficiently large to ensure that the elastic strains in the structure are generally much smaller than the plastic strains. From the finite element results may be deduced not only the limit-load (from the stresses), but also the velocity field (proportional to the displacement field) and the

1. The keypoint here is that $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ is taken at $\boldsymbol{\sigma}^1$ rather than at $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0}$ in the discretized flow rule.

strain rate field (proportional to the strain field). Since the value of the imposed load step is arbitrary (provided that it is large enough for the limit-load to be reached), the velocity field and the strain rate field are determined up to a positive multiplicative constant.

The accuracy of the method has been investigated in detail by [Madou \(2012\)](#). In particular, in the case of the hollow cylinder loaded in generalized plane strain, Madou's numerical results (see his Fig. 4.6b) coincide almost perfectly with Gurson's exact criterion.

Annexes du Chapitre 7

D.1 Volumetric and surfacic plastic dissipations

D.1.1 Porous zone

In the porous part, the expression of the equivalent strain rate associated to the velocity field defined by equations (7.17) reads

$$d_{\text{eq}}^{(p)} = \sqrt{\bar{D}_2^{(p)2} + \frac{1}{3}\bar{D}_1^{(p)2}\frac{L^4}{r^4}}.$$

Therefore the plastic dissipation in the porous part is given by

$$\begin{aligned}\Pi^{(p)} &= \frac{1}{\text{vol}(\Omega^{(p)})} \int_{\Omega^{(p)}} \sigma_0 d_{\text{eq}}^{(p)} d\Omega \\ &= \frac{\sigma_0}{2\pi h L^2} 4\pi h |\bar{D}_2^{(p)}| \int_R^L \sqrt{1 + \frac{1}{3} \frac{\bar{D}_1^{(p)2}}{\bar{D}_2^{(p)2}} \frac{L^4}{r^4}} r dr.\end{aligned}$$

Using the change of variable $u = L^2/r^2$, one finds the final expression of this dissipation :

$$\begin{aligned}\Pi^{(p)} &= \sigma_0 |\bar{D}_2^{(p)}| \int_1^{1/\chi^2} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \frac{\bar{D}_1^{(p)2}}{\bar{D}_2^{(p)2}} u^2} \frac{du}{u^2} \\ &= \sigma_0 |\bar{D}_2^{(p)}| \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\bar{D}_1^{(p)}}{\bar{D}_2^{(p)}} \text{Argsinh}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\bar{D}_1^{(p)}}{\bar{D}_2^{(p)}} u\right) - \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{3} \frac{\bar{D}_1^{(p)2}}{\bar{D}_2^{(p)2}}} \right]_{u=1}^{u=1/\chi^2}.\end{aligned}$$

D.1.2 Sound zone

In the sound part, the expression of the equivalent strain rate reads

$$d_{\text{eq}}^{(s)} = |D_{33}^{(s)}| = |\bar{D}_1 - \bar{D}_2|$$

so that the macroscopic plastic dissipation is simply given by

$$\Pi^{(s)} = \sigma_0 |\bar{D}_1 - \bar{D}_2|.$$

D.1.3 Interface

The surface dissipation on the interface is given by

$$\Pi^{(i)} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\text{Interface}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} |[v_t]| dS$$

where

$$[[v_t]] = v_r^{(s)}(r) - v_r^{(p)}(r) = \frac{\bar{D}_1}{2c} \left(r - \frac{L^2}{r} \right).$$

The expression of $\Pi^{(i)}$ consequently reads, accounting for the presence of two surfaces of discontinuities :

$$\begin{aligned} \Pi^{(i)} &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{2}{2\pi H L^2} \frac{|\bar{D}_1|}{2c} \int_R^L (L^2 - r^2) 2\pi dr \\ &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3} h L^2} |\bar{D}_1| \left(\frac{2L^3}{3} - L^2 R + \frac{R^3}{3} \right) \\ &= \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}} \frac{\chi^3 - 3\chi + 2}{W\chi} |\bar{D}_1|. \end{aligned}$$

D.2 Parametric equations of the regular parts of the yield locus

This Appendix provides further details on the parametric representation (7.30) of the regular parts of the yield locus.

Since the overall yield locus is symmetric with respect to the origin, it suffices to define only half of it, and thus assume $\bar{D}_2 = D_{33} \geq 0$. One may also define the dimensionless parameter

$$\xi^{(p)} = \frac{\bar{D}_1^{(p)}}{\bar{D}_2^{(p)}} = \frac{3D_m^{(p)}}{D_{33}^{(p)}} = \frac{\xi}{(1-c)\xi + c} \quad (\text{D.1})$$

where ξ is defined by

$$\xi = \frac{\bar{D}_1}{\bar{D}_2} = \frac{3D_m}{D_{33}}, \quad (\text{D.2})$$

and equations (7.13) and (7.14) have been used. Then, by equations (7.21) and (7.24), the quantities $\Sigma_{11}^{(p)}$ and $\Sigma_{33}^{(p)} - \Sigma_{11}^{(p)}$ in the expressions (7.30) of Σ_{11} and $\Sigma_{33} - \Sigma_{11}$ are given as functions of the parameter ξ by

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{11}^{(p)} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn}((1-c)\xi + c) \left[\operatorname{Argsinh}\left(\frac{\xi^{(p)}}{\sqrt{3}\chi^2}\right) - \operatorname{Argsinh}\left(\frac{\xi^{(p)}}{\sqrt{3}}\right) \right] \\ \Sigma_{33}^{(p)} - \Sigma_{11}^{(p)} = \sigma_0 \operatorname{sgn}((1-c)\xi + c) \left[\sqrt{\frac{\xi^{(p)2}}{3} + 1} - \sqrt{\frac{\xi^{(p)2}}{3} + \chi^4} \right] \end{array} \right. \quad (\text{D.3})$$

with $\xi^{(p)}$ given by (D.1); and, by equations (7.31) and (7.34), the constants A and B are given in terms of ξ by

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sigma_0(1-c) \operatorname{sgn}(\xi - 1) \\ B = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}} \frac{\chi^3 - 3\chi + 2}{W\chi} \operatorname{sgn}(\xi). \end{array} \right. \quad (\text{D.4})$$

D.3 Convexity of the macroscopic plastic dissipation

In this Appendix, it becomes exceptionally necessary to distinguish between the *true* plastic dissipation Π , defined by equation (7.5) with \mathbf{v} spanning the whole set $\mathcal{K}(\mathbf{D})$ of incompressible velocity fields kinematically admissible with \mathbf{D} , and its *upper estimate* Π^+ , defined by the same equation but with \mathbf{v} spanning some subset $\mathcal{K}'(\mathbf{D})$ of $\mathcal{K}(\mathbf{D})$.

The function to be proved convex is $\Pi^+(\bar{D}_1, \bar{D}_2)$ (noted simply $\Pi(\bar{D}_1, \bar{D}_2)$ in the main text). The proof will proceed in three steps.

Step 1. We first note that the microscopic plastic dissipation $\pi(\mathbf{d}) = \sigma_0 d_{\text{eq}}$ is a convex function of the (traceless) tensor \mathbf{d} , since it is proportional to its Euclidian norm. (This property in fact holds for *any* yield criterion, as a consequence of the definition of $\pi(\mathbf{d})$ as the Legendre transform of the characteristic function of the convex set of reversibility).

Step 2. Consider now two incompressible velocity fields $\mathbf{v}^1 \in \mathcal{K}(\mathbf{D}^1)$, $\mathbf{v}^2 \in \mathcal{K}(\mathbf{D}^2)$ and some real number $\theta \in [0, 1]$. Then the field $(1 - \theta)\mathbf{v}^1 + \theta\mathbf{v}^2$ is incompressible, and

$$\int_{\Omega} \pi \left[(1 - \theta)\mathbf{d}^1 + \theta\mathbf{d}^2 \right] d\Omega \leq (1 - \theta) \int_{\Omega} \pi(\mathbf{d}^1) d\Omega + \theta \int_{\Omega} \pi(\mathbf{d}^2) d\Omega$$

by Step 1. Now since the field $(1 - \theta)\mathbf{v}^1 + \theta\mathbf{v}^2$ is kinematically admissible with $(1 - \theta)\mathbf{D}^1 + \theta\mathbf{D}^2$, it follows from the definition (7.5) of $\Pi(\mathbf{D})$ that

$$\Pi \left[(1 - \theta)\mathbf{D}^1 + \theta\mathbf{D}^2 \right] \leq \int_{\Omega} \pi \left[(1 - \theta)\mathbf{d}^1 + \theta\mathbf{d}^2 \right] d\Omega,$$

so that, by the preceding inequality,

$$\Pi \left[(1 - \theta)\mathbf{D}^1 + \theta\mathbf{D}^2 \right] \leq (1 - \theta) \int_{\Omega} \pi(\mathbf{d}^1) d\Omega + \theta \int_{\Omega} \pi(\mathbf{d}^2) d\Omega.$$

Since this is true for all incompressible velocity fields $\mathbf{v}^1 \in \mathcal{K}(\mathbf{D}^1)$, $\mathbf{v}^2 \in \mathcal{K}(\mathbf{D}^2)$, this implies, taking the infimum of the right-hand side, that

$$\Pi \left[(1 - \theta)\mathbf{D}^1 + \theta\mathbf{D}^2 \right] \leq (1 - \theta)\Pi(\mathbf{D}^1) + \theta\Pi(\mathbf{D}^2),$$

which shows that the function $\Pi(\mathbf{D})$ is convex.

Step 3. The proof of the convexity of the function $\Pi^+(\mathbf{D})$ follows similar lines. The only difference is that it does *not* necessarily follow from $\mathbf{v}^1 \in \mathcal{K}'(\mathbf{D}^1)$, $\mathbf{v}^2 \in \mathcal{K}'(\mathbf{D}^2)$ that $(1 - \theta)\mathbf{v}^1 + \theta\mathbf{v}^2 \in \mathcal{K}'[(1 - \theta)\mathbf{D}^1 + \theta\mathbf{D}^2]$; such a property depends on the definition of the subsets $\mathcal{K}'(\mathbf{D})$ of the sets $\mathcal{K}(\mathbf{D})$. If it does hold, then the function $\Pi^+(\mathbf{D})$ is convex.

In the case considered in this paper, the subset $\mathcal{K}'(\mathbf{D})$ of $\mathcal{K}(\mathbf{D})$ consists of only one velocity field, which depends linearly upon the components of the macroscopic strain rate tensor \mathbf{D} ; it immediately follows that the above property is satisfied, so that $\Pi^+(\mathbf{D})$ is convex. The convexity of the function $\Pi^+(\bar{D}_1, \bar{D}_2)$ then follows from the fact that the pair (\bar{D}_1, \bar{D}_2) is a linear function of \mathbf{D} .

D.4 Asymptotes to the curves $\zeta = g(\xi)$ and $\zeta = -g(\xi)$

The study of the asymptotes to the curves $\zeta = g(\xi)$ and $\zeta = -g(\xi)$ at the points $\xi = \pm\infty$ is based on two main ingredients : (i) the positive homogeneity of degree 1 of the function $\Pi(\bar{D}_1, \bar{D}_2)$; (ii) its regularity at the points $(\bar{D}_1, 0)$, $\bar{D}_1 \neq 0$, arising from the absence of any term proportional to $|\bar{D}_2|$ in the expressions (7.21), (7.22), (7.23) of $\Pi^{(p)}$, $\Pi^{(s)}$, $\Pi^{(i)}$.

Let us determine the asymptotic expressions of $g(\xi)$ in the two cases $\xi \rightarrow +\infty$ and $\xi \rightarrow -\infty$ using these properties :

– For $\xi \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \Pi(\xi, 1) = \xi \Pi \left(1, \frac{1}{\xi} \right) = \xi \left[\Pi(1, 0) + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{D}_2}(1, 0) \frac{1}{\xi} + O \left(\frac{1}{\xi^2} \right) \right] \\ &= \Pi(1, 0) \xi + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{D}_2}(1, 0) + O \left(\frac{1}{\xi} \right). \end{aligned}$$

– For $\xi \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \Pi(\xi, 1) = \Pi(-|\xi|, 1) = |\xi| \Pi\left(-1, \frac{1}{|\xi|}\right) \\ &= |\xi| \left[\Pi(-1, 0) + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{D}_2}(-1, 0) \frac{1}{|\xi|} + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \right] = \Pi(-1, 0) |\xi| + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{D}_2}(-1, 0) + O\left(\frac{1}{\xi}\right) \\ &= -\Pi(1, 0) \xi - \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{D}_2}(1, 0) + O\left(\frac{1}{\xi}\right) \end{aligned}$$

where use has been made of the fact that Π is an even function of the pair (\bar{D}_1, \bar{D}_2) .

It follows from these asymptotic formulae that :

- The curve $\zeta = g(\xi)$ admits straight asymptotes at the points $\xi = \pm\infty$.
- These asymptotes are symmetric with respect to the horizontal ξ -axis, since both their slopes and ordinates at the origin are opposite to each other.
- The asymptote to the curve $\zeta = -g(\xi)$ at $\xi = -\infty$ (resp. $\xi = +\infty$), being the symmetric line of the asymptote to the curve $\zeta = g(\xi)$ at the same point, coincides by what precedes with the asymptote to the curve $\zeta = g(\xi)$ at $\xi = +\infty$ (resp. $\xi = -\infty$).

Etude numérique de critères de plasticité pour les matériaux anisotropes contenant des vides sphéroïdaux

Cette annexe est consacrée à l'analyse limite numérique de matériaux de Hill avec pour application l'étude de solides poreux ductiles anisotropes. L'objectif est de fournir une méthode efficace d'analyse limite basée sur la méthode standard des éléments finis, et de proposer quelques applications.

Nous présentons tout d'abord l'implémentation numérique du critère de Hill. Ensuite nous décrivons la procédure utilisée pour l'analyse limite numérique, qui consiste en un grand pas de chargement assurant que la charge limite est atteinte, sans actualisation de la géométrie. De plus, la convergence des itérations élastoplastiques est accélérée en ajustant les propriétés élastiques du matériau.

La méthode est appliquée pour évaluer des critères de type Gurson pour des matériaux plastiquement anisotropes contenant des cavités sphéroïdales. Nous réalisons des analyses limites numériques de cellules élémentaires constituées d'un matériau de Hill et contenant des cavités sphéroïdales, soumises à des déformations homogènes sur le bord. Les résultats numériques sont comparés aux prédictions des modèles à la fois pour les surfaces de charge et la loi d'écoulement, permettant de discuter de la pertinence des modèles théoriques considérés.

Cette annexe est tirée d'un article publié [Morin et al. \(2014\)](#).

E.1 Introduction

The most classical model of plastic porous solids, proposed by [Gurson \(1977\)](#), has been obtained by combining homogenization theory and limit-analysis of a spherical (or cylindrical) cell, made of a rigid-ideal-plastic von Mises material containing a spherical (or cylindrical) void, and loaded arbitrarily through conditions of homogeneous boundary strain rate.

Owing to the intrinsic limitation of this model to isotropic materials containing spherical (or cylindrical) voids, several extensions were developed by accounting for void shape effects : [Gologanu et al. \(1993, 1994, 1997\)](#)'s model applies to isotropic materials containing spheroidal prolate or oblate voids¹ and is known as the *GLD model*. Some generalization of these works has been very recently proposed by [Madou and Leblond \(2012a,b\)](#) who consider a general ellipsoidal void embedded in a von Mises matrix.

Another type of extension of the Gurson model has consisted in the consideration of anisotropic Hill matrices ([Hill, 1948](#)) containing first spherical voids ([Benzerga and Besson, 2001](#)), then spheroidal ones ([Monchiet et al., 2008](#)). Later, [Keralavarma and Benzerga \(2010\)](#) investigated the same problem by considering a richer description of the velocity field.

The utility of the models just mentioned lies in the fact that non-spherical voids and plastically anisotropic matrices are quite common in practice.

All these criteria need to be critically assessed through numerical analyses of the representative cells considered in their derivation. While the criteria for isotropic von Mises matrices have already been widely assessed ([Gologanu, 1997](#); [Madou and Leblond, 2012b, 2013](#)), those for anisotropic Hill matrices have been studied only in a partial way. Thus, [Pastor et al. \(2012\)](#) very recently provided numerical upper and lower bounds of the yield surfaces in the case of spherical and prolate spheroidal

1. [Monchiet et al. \(2014\)](#) used more sophisticated Eshelby-like velocity fields for the same kind of extension.

cavities, but no results were provided in this work about the flow rules associated to the yield surfaces. In order to fully understand the effect of plastic anisotropy and void shape, it is necessary to complete [Pastor et al. \(2012\)](#)'s numerical results for spherical, cylindrical, spheroidal prolate and oblate voids embedded in a Hill material, by performing numerical limit-analyses of the representative cells considered. In the present work, we shall consider both the yield criterion and the macroscopic associated flow rule.

The assessment of the models dealing with orthotropic Hill matrices is particularly important given that they are based on a seemingly crude approximation : namely, they consider trial velocity fields identical to those commonly considered in the case of von Mises matrices. Thus, [Benzerga and Besson \(2001\)](#) used the same velocity fields as [Gurson \(1977\)](#), [Monchiet et al. \(2008\)](#) used those of [Gologanu et al. \(1993, 1994\)](#) and finally [Keralavarma and Benzerga \(2010\)](#) used the richer velocity fields of [Gologanu et al. \(1997\)](#).

Estimated solutions of a limit-analysis problem can be obtained by two complementary approaches providing approximate upper and lower bound solutions, known respectively as the *kinematic and static bounds*. These approaches require some minimization in the kinematic approach and some maximization in the static approach, which can only be achieved by numerical methods in general.

The first attempt to provide numerical solutions of limit-analysis problems was based on linear programming ([Anderheggen and Knöpfel, 1972](#); [Bottero et al., 1980](#)) and the finite element method : the yield surface was approximately replaced by a polygonal surface, leading to a set of linear inequalities which were solved using linear programming. Both lower and upper bounds have been investigated ([Sloan, 1988, 1989](#); [Sloan and Kleeman, 1995](#)). Despite the relatively simplicity of the method, this kind of approach introduces inherent source of inaccuracies in the approximation of the yield surface, and also requires a specific implementation into a finite element code in order to solve the linear system.

Other significant contributions in the field of numerical limit-analysis were the so-called non linear programming methods ([Capsoni and Corradi, 1997](#); [Lyamin and Sloan, 2002a,b](#); [Krabbenhoft and Damkilde, 2003](#)). With these methods, the limit-analysis problem was directly solved without any linearisation, using non linear algorithms, for instance conic programming or interior point optimization. These works mainly considered isotropic materials governed by von Mises's criterion, and sometimes Drucker-Prager's criterion. Extensions to anisotropic criteria have also been proposed ([Corradi et al., 2006](#); [Pastor et al., 2012](#)). These "non linear" methods lead to an estimation of the limit-load without introducing any approximation on the yield surface, but they require complex numerical developments for the optimization procedure.

Recently, [Madou and Leblond \(2012b\)](#) proposed a numerical method to solve limit-analysis problems for von Mises materials, based on the standard finite element method including elasticity, without introducing any approximation of the yield surface or supplementary optimization procedure.

The aim of this paper is to provide a new technique to solve limit-analysis problems for plastically anisotropic materials obeying [Hill \(1948\)](#)'s criterion, based on an extension of [Madou and Leblond \(2012b\)](#)'s procedure for isotropic material. The main advantages of the method proposed are that since it relies on the usual finite element method including elasticity, it requires only few developments, and benefits from the entire know-how developed for, and incorporated in standard codes. (The accuracy of the numerical results it provides has thus been established by [Madou and Leblond \(2012b\)](#), in the case of isotropic materials).

The method will be used to provide numerical results for anisotropic plastic porous materials. These results will be used to assess the models mentioned previously for anisotropic matrices containing spheroidal voids. They could also potentially be used to validate any similar yield criterion.

The paper is organized as follows :

- In Section [E.2](#), we first develop a numerical implementation of Hill's criterion and the associated flow rule into a finite element code, suggested by [De Borst and Feenstra \(1990\)](#), in which the sole unknown in the local projection algorithm is the plastic multiplier. A new finite element technique for numerical limit-analysis is then proposed. The principle of this technique consists of using this algorithm with a single large load step, without any geometry update. Also, the

elastic properties of the material are suitably adjusted in order to accelerate the convergence of the global elasto-plastic iterations.

- Section E.3 investigates the application of this technique to porous plastic materials obeying Hill’s criterion. Spheroidal cells containing confocal spheroidal voids are subjected to conditions of homogeneous boundary strain rate. The numerical yield surfaces and flow rules are compared to those predicted by existing models in various cases. This permits to discuss the pertinence of the trial velocity fields used in the derivation of the models.

E.2 Finite element limit-analysis of Hill materials

E.2.1 Hill’s criterion

The materials considered in this study are assumed to be rigid-plastic and obey Hill (1948)’s yield criterion which stands as an extension of von Mises’s criterion taking account of the plastic anisotropy. With respect to the Cartesian coordinate system associated to the axes of orthotropy, the Hill criterion reads :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{A} : \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0^2 = \sigma_{eq}^2 - \sigma_0^2 \leq 0 \quad (\text{E.1})$$

where σ_{eq} is the Hill equivalent stress, σ_0 the “yield stress” and \mathbb{A} an orthotropic fourth-order tensor satisfying both major and minor symmetries ($A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}$). Employing a Voigt-type notation, such as used in finite elements codes, \mathbb{A} and $\boldsymbol{\sigma}$ may be considered as a 6×6 matrix and a 6-vector, respectively :

$$\mathbb{A} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 \equiv \sigma_{11} \\ \sigma_2 \equiv \sigma_{22} \\ \sigma_3 \equiv \sigma_{33} \\ \sigma_4 \equiv \sigma_{12} \\ \sigma_5 \equiv \sigma_{13} \\ \sigma_6 \equiv \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Note that the coefficients A_{ij} here verify the relations

$$\sum_i A_{1i} = \sum_i A_{2i} = \sum_i A_{3i} = 0 \quad (\text{E.3})$$

arising from invariance of the criterion upon addition of a hydrostatic stress.

E.2.2 Numerical implementation of the Hill criterion

In order to perform numerical limit-analyses, we first need an efficient finite element implementation of Hill materials. Only the “local” step is considered here, because the “global” step does not depend on the yield criterion and is standard in finite element codes. Furthermore, the application of the algorithm is limited to limit-analysis so it is presented in the context of small strains and ideal plasticity; its extension to large strains and strain-hardening materials can be achieved without any specific difficulty.

Let us develop the local projection algorithm suggested by De Borst and Feenstra (1990) for the Hill criterion. This algorithm considers the plastic multiplier as the unique unknown of the projection problem. That this is possible is due, as will be seen, to the quadratic form of the criterion, even though the property of collinearity of the stress deviators before and after the plastic correction, which is well-known for von Mises’s criterion, is lost for Hill’s criterion. The fact that the problem may be reduced

to finding a single unknown permits a faster procedure of solution, thanks to an easier convergence of the necessary Newton iterations.

The equations of the local elastoplasticity problem are as follows :

Decomposition of the total strain : $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$

Elasticity law : $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}^e$

Hill's criterion : $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq}^2 - \sigma_0^2 \leq 0$

Flow rule and consistency conditions : $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma})$, $\dot{\lambda} \geq 0$, $\dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ where $\boldsymbol{\epsilon}^e$ is the elastic strain tensor, $\boldsymbol{\epsilon}^p$ the plastic strain tensor, \mathbb{C} the stiffness tensor and λ the plastic multiplier.

The problem consists in finding the mechanical state $\mathcal{S}_{n+1} = \{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}\}$ at time t_{n+1} resulting from a given strain increment $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_n$, knowing the previous mechanical state $\mathcal{S}_n = \{\boldsymbol{\epsilon}_n, \boldsymbol{\epsilon}_n^p, \boldsymbol{\sigma}_n\}$ at time t_n . (The value of $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_n$ is determined by the global step).

The flow rule is discretized using an implicit scheme. Since the material belongs to the category of generalized standard materials (see Halphen and Nguyen (1975); Son (1977)), the choice of such a scheme is relevant, because the local projection problem reduces, for such materials, to finding the minimum of a strictly convex function, which implies existence and uniqueness of the solution. The discretized flow rule then reads :

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_n^p = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\epsilon}_n^p = \Delta\lambda_n \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \quad (\text{E.4})$$

Using Voigt's notations, the above set of equations becomes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : (\Delta\boldsymbol{\epsilon}_n - \Delta\boldsymbol{\epsilon}_n^p) \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas} - \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}_n^p, \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}_n \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\sigma_{n+1,eq}^2 - \sigma_0^2 \leq 0 \quad (\text{E.6})$$

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_n^p = 2\Delta\lambda_n \mathbb{A} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (\text{E.7})$$

$$\Delta\lambda_n (\sigma_{n+1,eq}^2 - \sigma_0^2) = 0. \quad (\text{E.8})$$

In these equations $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas}$ denotes the elastic predictor, that is the stress tensor resulting from the strain increment $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_n$ fictitiously considered as purely elastic. To solve these equations, two cases must be considered.

Elastic evolution If $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas}) \leq 0$, then the evolution is purely elastic. The final state is given by :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas} \quad (\text{E.9})$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_n^p \quad (\text{E.10})$$

Elasto-plastic evolution If $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas}) > 0$, then the elastic predictor is not plastically admissible. We need to add a plastic correction, given that the final stress must be such that $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = 0$. The main difficulty is the determination of the plastic multiplier. Let us rewrite $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ as

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas} - \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}_n^p \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas} - \mathbb{C} : (2\Delta\lambda_n \mathbb{A} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas} - 2\Delta\lambda_n \mathbb{C} : \mathbb{A} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}. \end{aligned}$$

This implies that :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (\mathbb{I} + 2\Delta\lambda_n \mathbb{C} \cdot \mathbb{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas}. \quad (\text{E.11})$$

Equation (E.11) shows that with Hill's criterion instead of that of von Mises, the classical property of collinearity of $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ and $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas}$ is lost ; however an explicit relation still exists between them as a direct consequence of the quadratic form of the criterion, leading to the possible reduction of the problem to finding the value of a single unknown. Indeed, the criterion $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = 0$ then implies that :

$$[(\mathbb{I} + 2\Delta\lambda_n \mathbb{C} \cdot \mathbb{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas}] \cdot \mathbb{A} \cdot [(\mathbb{I} + 2\Delta\lambda_n \mathbb{C} \cdot \mathbb{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{elas}] - \sigma_0^2 = 0 \quad (\text{E.12})$$

which is an equation on the sole unknown $\Delta\lambda_n$. This non-linear equation may be solved by a Newton method. Once $\Delta\lambda_n$ is determined, one can easily compute the final stress $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ using equation (E.11) and then the increment of plastic strain $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_n^p$ using equation (E.7).

In practice, in order to accelerate convergence of the iterations, the initial value of $\Delta\lambda_n$ is not taken nil but equal to that value $\Delta\lambda_n^0$ corresponding to some isotropic material : $\Delta\lambda_n^0 = \frac{\sigma_0^2}{6\mu} \left(\frac{\sigma_{eq,VM}^{elas}}{\sigma_{eq,VM}} - 1 \right)$, $\sigma_{eq,VM}$ denoting the von Mises equivalent stress, and μ the elastic shear modulus.

The global step of the elastoplasticity problem is achieved using a BFGS algorithm. It would also be possible to determine and use the consistent tangent operator, but in practice, the convergence of the global elastoplastic iterations requires less CPU time with a BFGS algorithm.

The local projection algorithm just expounded has been implemented in the commercial finite element code SYSTUS[®] developed by ESI Group.

E.2.3 Numerical limit-analysis : principles

In order to numerically solve a limit-analysis problem for a Hill material, we will extend [Madou and Leblond \(2012b\)](#)'s procedure initially proposed for von Mises matrices. Thus, the limit-analysis problem will be solved using standard finite element simulations, by imposing a single large step, with no update of the geometry since geometric changes are disregarded in limit-analysis. The use of a large step instead of several small ones will permit faster calculations without introducing any error of principle : indeed in the following we show the equivalence of the equations of the time-discretized finite element problem and those of limit-analysis under such conditions.

The equations of limit-analysis of a structure Ω reduce to those of a problem of plasticity without elasticity in the small strain (linearized) context :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \mathbf{d} = \frac{1}{2} [\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v})^T] \\ f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \\ \mathbf{d} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}), \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \end{array} \right. \quad \text{in } \Omega \quad (\text{E.13})$$

+B.C.

In these equations \mathbf{X} denotes the position-vector in the initial configuration, \mathbf{v} the velocity, \mathbf{d} the strain rate, $\boldsymbol{\sigma}$ the Cauchy stress tensor, $f(\boldsymbol{\sigma})$ the Hill yield function, $\dot{\lambda}$ the plastic multiplier, and "B.C." stands for "boundary conditions".

Let us assume now that the elastoplastic problem is solved by the finite element method using an implicit algorithm for the local projection problem, with no update of the geometry and a single large step. Let $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\sigma}^1$, $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$, \mathbf{u}^1 , $\boldsymbol{\epsilon}^0 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\epsilon}^1$ denote the initial and final stresses, initial and final displacements, initial and final strains, respectively. If we make sure that plastic strains are generally much bigger than elastic strains, by adopting a large load increment, then the discretized equations

read :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^1 = 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}^1 = \frac{1}{2} \{ \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^1) + [\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^1)]^T \} \\ f(\boldsymbol{\sigma}^1) \leq 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}^1 - \boldsymbol{\epsilon}^0 = \boldsymbol{\epsilon}^1 \simeq \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^1), \quad \Delta\lambda \geq 0, \quad \Delta\lambda f(\boldsymbol{\sigma}^1) = 0 \end{array} \right. \quad \text{in } \Omega \quad (\text{E.14})$$

+B.C.

where $\Delta\lambda$ denotes the discretized plastic multiplier. The equivalence of systems (E.13) and (E.14) is clear, with the correspondences $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}^1$, $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{u}^1$, $\mathbf{d} \leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon}^1$. Note that the keypoint here is that $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ is taken at the point $\boldsymbol{\sigma}^1$ rather than $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0}$ in the discretized flow rule, as a result of the use of an implicit algorithm.

The conclusion is that the problem of limit-analysis may be solved by the standard finite element method including elasticity, with a single load step sufficiently large to ensure that the elastic strains in the structure are generally much smaller than the plastic strains.

E.2.4 Numerical limit-analysis : special case of a completely plastic structure

In this section we present a method of adjustment of the elastic properties for a Hill material in the finite element problem which permits, under certain conditions, to reduce the load step, and thus accelerate convergence of the elastoplastic iterations.

Indeed, let us consider *the special, but frequent case of a structure which is entirely plastic when its limit-load is reached*. Equations (E.13)_{3,4,5} of the limit-analysis problem then read :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \\ \mathbf{d} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = 2\dot{\lambda}\mathbb{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \quad \dot{\lambda} > 0 \end{array} \right. \quad \text{in } \Omega \quad (\text{E.15})$$

Let us now suppose that the elastoplastic problem is solved by the finite element method, considering a quasi-incompressible anisotropic elastic material whose compliance tensor $\mathbb{D} = \mathbb{C}^{-1}$ is proportional to Hill's tensor \mathbb{A} :

$$\mathbb{D} \approx \alpha\mathbb{A}, \quad \alpha > 0 \quad (\text{E.16})$$

(In practice, diagonal terms of \mathbb{D} are slightly enhanced to avoid exact incompressibility which would lead to numerical difficulties). This is possible because limit-loads are known to be independent of elastic coefficients. In practice, the coefficient α may be adjusted in such a way that the components of \mathbb{D} be of order $1/E$, where E is Young's modulus.

Assume that the problem is solved using a single step *sufficiently large to ensure that the limit-load is reached, but not necessarily that the final elastic strain $\boldsymbol{\epsilon}^e$ is much smaller than the final plastic strain $\boldsymbol{\epsilon}^p$* . Under such conditions, $\boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbb{D}\cdot\boldsymbol{\sigma}^1 \approx \alpha\mathbb{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}^1$, so equations (E.14)_{3,4,5} of the discretized problem become :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\boldsymbol{\sigma}^1) = 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}^1 - \boldsymbol{\epsilon}^0 = \boldsymbol{\epsilon}^1 = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \approx \alpha\mathbb{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}^1 + \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^1) \quad \text{in } \Omega. \\ \hspace{10em} = (\alpha + 2\Delta\lambda)\mathbb{A}\cdot\boldsymbol{\sigma}^1 \end{array} \right. \quad (\text{E.17})$$

The term $(\alpha + 2\Delta\lambda)$ here is positive since both α and $\Delta\lambda$ are positive. It follows that a solution of the finite element equations (E.14)_{1,2,6} - (E.17) is also a solution of the equations (E.13)_{1,2,6} - (E.15) of the theoretical problem, with the same correspondences $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}^1$, $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{u}^1$, $\mathbf{d} \leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon}^1$ as before.

Note that this equivalence of solutions holds only for an entirely plastic structure : if the structure is only partially plastic, then there are points where $\dot{\lambda} = 0$ but $\alpha + 2\Delta\lambda = \alpha > 0$, so that the correspondence between the theoretical and numerical flow rules is imperfect.

Thus, if the structure is entirely plastic when its limit-load is reached, a finite element solution of the problem of limit-analysis may be obtained by considering an elastoplastic material whose elastic compliance tensor is proportional to Hill's anisotropic tensor, combined with a single, moderately large loading step ensuring that the limit-load is reached but not necessarily that the elastic strain is generally negligible.

E.3 Numerical yield surfaces and directions of plastic flow of anisotropic plastic porous materials

E.3.1 Generalities

We consider spheroidal cells containing a confocal spheroidal void and subjected to conditions of homogeneous boundary strain (Mandel, 1964; Hill, 1967) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} \quad \text{on } \partial\Omega \quad (\text{E.18})$$

where \mathbf{u} is the displacement, \mathbf{X} the initial position-vector, \mathbf{E} the overall strain tensor and $\partial\Omega$ the external boundary of the cell Ω . Attention is restricted to overall strain tensors having principal directions identical to those of the ellipsoidal cell, implying existence of symmetries about three perpendicular planes which permit to mesh only 1/8 of the structure.

The meshes used are represented in Figures E.1a, E.1b and E.1c, respectively for a sphere, an oblate and a prolate spheroid : they consist of 26,481 nodes and 24,000 selectively subintegrated trilinear 8-node brick elements, and there are 20 elements in the radial direction. The mesh used for the cylindrical void, represented on Figure E.1d, consists of 9,920 nodes and 4,800 selectively subintegrated trilinear 8-node brick elements, and there are 30 elements in the radial direction. The values of the macroscopic strain components imposed vary from roughly 0.1 to 1, requiring a few hundreds of BFGS iterations in order to warrant good convergence of the global elastoplastic iterations.

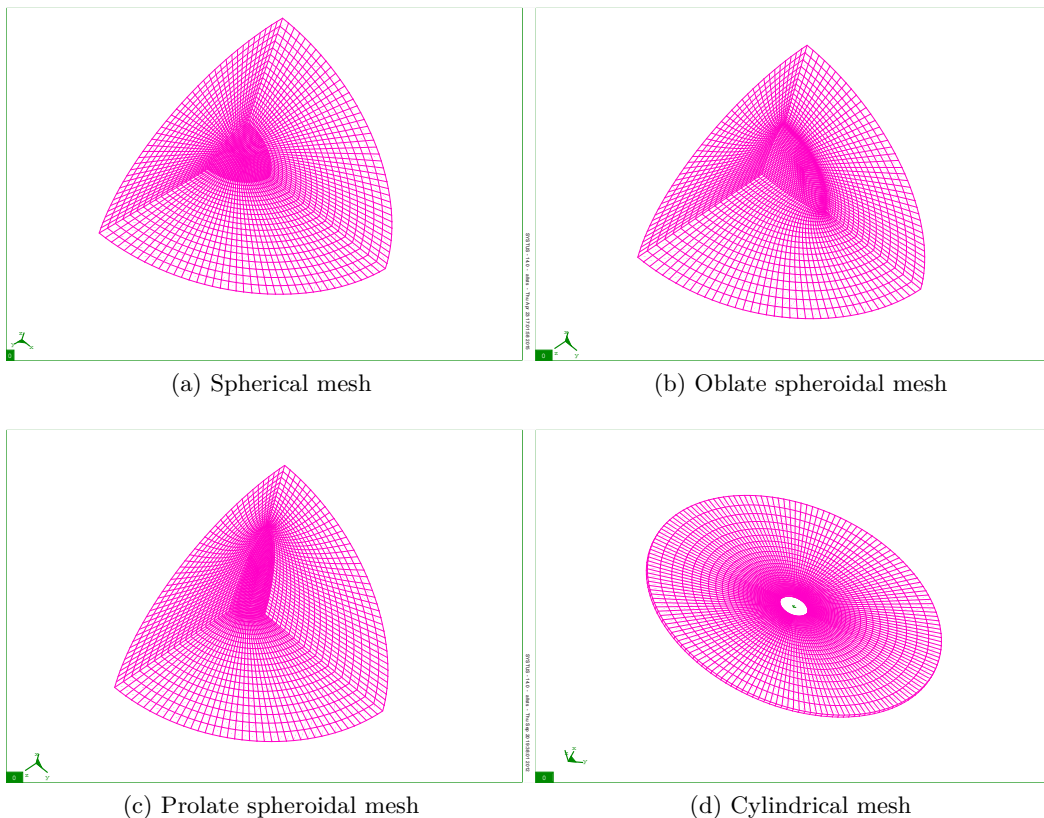


FIGURE E.1: Meshes used for micromechanical simulations

As mentioned before, the calculations use the SYSTUS[®] finite element code developed by ESI Group; this code allows the user to write higher level programmes, in order to manage and exploit the calculations. Three programmes have been developed :

- The first one creates the mesh : it displaces nodes of a standardly meshed hollow sphere so as to obtain a spheroid containing a spheroidal void.
- The second programme runs the calculations. The principal components of the overall strain tensor are adjusted using a Newton method, in order to match the desired values of the ratios of the overall stress components.
- Finally, the third programme exploits the results obtained by calculating the overall stress tensor through a volume average of the local one :

$$\Sigma = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega-\omega} \sigma dV \quad (\text{E.19})$$

where ω is the volume of the void and $\Omega - \omega$ the domain occupied by the solid matrix.

E.3.2 Material constants and quantities investigated

Numerical studies of anisotropic plastic porous materials and comparisons with theoretical criteria proposed by Benzerga and Besson (2001), Monchiet et al. (2008) and Keralavarma and Benzerga (2010) are performed by considering an anisotropic aluminium alloy whose material parameters are taken from Benzerga (2000). In Table E.1 are reported the values of the components of the tensor \mathbb{A} appearing in the definition (E.2) of the Hill criterion, together with those of a von Mises material for comparison. Note the very important anisotropy of the shear coefficients A_{44} and A_{55} .

Material	A_{11}	A_{22}	A_{33}	A_{12}	A_{13}	A_{23}	A_{44}	A_{55}	A_{66}
Isotropic	1	1	1	-0.5	-0.5	-0.5	3	3	3
Anisotropic	0.9855	0.87	0.921	-0.4673	-0.5182	-0.4028	10.494	10.8675	3.288

TABLE E.1: Values of Hill's anisotropy coefficients

The spheroid's axis of rotational symmetry is denoted Ox_3 . Axisymmetric loadings ($\Sigma_{11} = \Sigma_{22} \neq 0$, $\Sigma_{33} \neq 0$, other $\Sigma_{ij} = 0$) are considered in all numerical tests.

Two complementary aspects are investigated in these studies. First, we compare the yield surfaces provided by the analytical models to those obtained numerically. These yield surfaces are represented in a plane $(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}, \frac{\Sigma_{33}-\Sigma_{11}}{\sigma_0})$, where $\Sigma_m = \frac{1}{3}(\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33})$ is the mean stress.

A second aspect concerns the comparison of the macroscopic flow directions represented by the ratios $\frac{D_{11}}{D_{22}}, \frac{D_{11}}{D_{33}}$ and $\frac{D_{22}}{D_{33}}$. The numerical macroscopic strains E_{11}, E_{22}, E_{33} resulting from the boundary conditions may be identified to the components of the *true* macroscopic strain rates D_{11}, D_{22}, D_{33} , using the correspondence between the equations of limit-analysis and those of the finite element problem established in Section E.2.3. The *approximate* analytical macroscopic strain rate tensor is deduced up to some unimportant positive multiplicative constant, from the normality of the flow rule :

$$\mathbf{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{E.20})$$

where $\Phi(\boldsymbol{\sigma})$ denotes the theoretical macroscopic yield criterion investigated (see Appendix E.A). More precisely, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ denoting some orthogonal basis of the Euclidian plane, we shall consider the vector $D_{11}\mathbf{e}_1 + D_{22}\mathbf{e}_2$ and study the angle ϕ_{12} it makes with the vector \mathbf{e}_1 , as a function of an angle ψ measuring the position of the stress tensor considered on the yield surface ; see Figures E.2a and E.2b. We shall also study some angles ϕ_{13} and ϕ_{23} defined similarly, as functions of the same angle ψ .

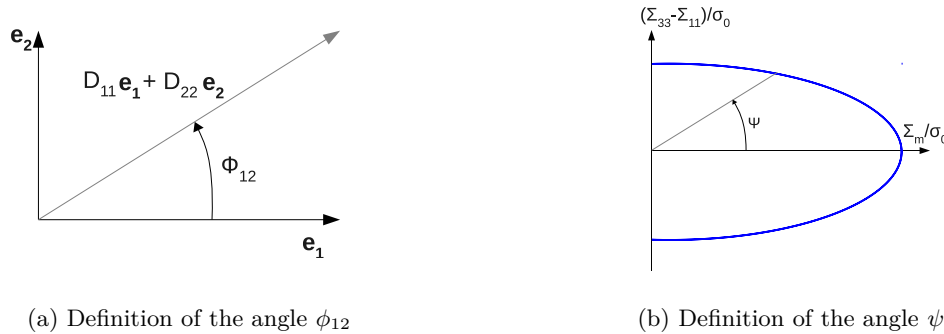


FIGURE E.2: Definition of angles

E.3.3 Spherical voids

We first investigate the case of a spherical void embedded in a spherical cell. A fixed porosity of $f = 10^{-2}$ is considered; this is a typical value for ductile metals², once nucleation of voids has taken place.

In this case, the numerical yield surface, shown on Figure E.3a, is in agreement with the theoretical one proposed by [Benzerga and Besson \(2001\)](#) and [Monchiet et al. \(2008\)](#). The comparison with [Gurson \(1977\)](#)'s criterion for the same void but in an isotropic matrix clearly shows the effect of anisotropy and the ability of the anisotropic criterion proposed to capture it.

With regards to the flow rule, the results are plotted in Figures E.3b, E.3c and E.3d. Again, a remarkable agreement is noted between numerical results and theoretical predictions, except for ϕ_{12} near $\psi = 0$ which corresponds to a hydrostatic stress state ($\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \Sigma_{33}$): there is a difference of about 30° between the numerical results and the prediction of the model.

Complementary results are provided for a spherical void embedded in a spherical cell with a porosity $f = 10^{-1}$. The yield surface is plotted in Figure E.4a, and the angles ϕ_{12} , ϕ_{13} and ϕ_{23} in Figures E.4b, E.4c and E.4d. Again, a good agreement is observed between numerical and theoretical yield surfaces. Also, the flow rule is well reproduced except near the hydrostatic point for the angle ϕ_{12} .

E.3.4 Prolate voids

We now consider the case of a prolate spheroidal void, with axes in the proportions (1 : 1 : 5). A fixed porosity of 10^{-2} is considered.

The numerical results for the yield surface are shown in Fig. E.5a. In this case, [Monchiet et al. \(2008\)](#)'s and [Keralavarma and Benzerga \(2010\)](#)'s criteria appear to be very close and in very good agreement with the numerical data. Note however that the criterion proposed by [Monchiet et al. \(2008\)](#) is slightly better. Theoretical results corresponding to [Gologanu et al. \(1997\)](#)'s criterion for the same prolate void in an isotropic matrix, and to that of [Gurson \(1977\)](#) for a spherical void in an isotropic matrix, are also plotted to highlight the combined effects of plastic anisotropy and void shape: these effects are of the same order.

Also, the analytical flow rules (Figures E.5b, E.5c, E.5d) accurately represent the numerical data, even near the hydrostatic point.

To supplement these results, we consider a cylindrical void, which is a special case of a prolate spheroidal one. For this particular geometry, [Monchiet et al. \(2008\)](#)'s and [Keralavarma and Benzerga \(2010\)](#)'s criteria coincide and reduce to that obtained previously by [Benzerga and Besson \(2001\)](#). Although a moderate discrepancy between the analytical and numerical points is observed for the yield surface (Figure E.6a), the comparison with Gurson's model for cylindrical voids shows that

². Ductile metals generally contain cavities which during the voids growth stage have small values (see for instance [Benzerga and Leblond \(2010\)](#)). This is the reason for which we mainly consider small values of porosities (1% in volume). Note that for higher values, voids coalescence modelling (which is out of the scope of the present study) will be required.

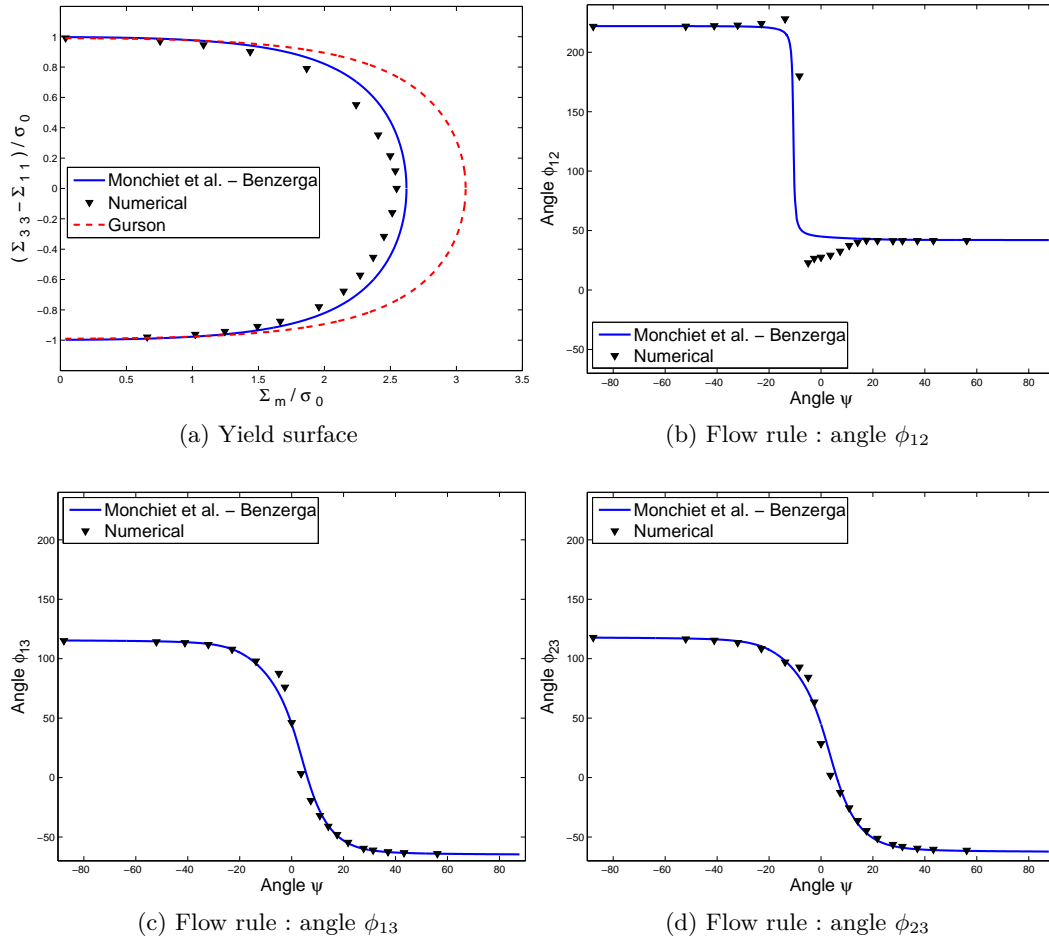


FIGURE E.3: Numerical results for a spherical void : porosity 10^{-2}

Monchiet et al. (2008)'s and Keralavarma and Benzerga (2010)'s criterion essentially captures the effect of anisotropy. Furthermore, the theoretical model is very accurate for the flow rule (Figures E.6b, E.6c, E.6d).

E.3.5 Oblate voids

We finally investigate the case of an oblate spheroidal void, with axes in the proportions (5 : 5 : 1) and a porosity of 10^{-2} .

In this case, the theoretical results for the yield locus are still very good, particularly for Keralavarma and Benzerga (2010)'s criterion which appears to be closer to the numerical one than that of Monchiet et al. (2008) (Figure E.7a). For completeness, the theoretical results corresponding to Gologanu et al. (1997)'s criterion for the same oblate void in an isotropic matrix, and to that of Gurson (1977) for a spherical void in an isotropic matrix, are also provided in order to show the effects of matrix anisotropy and void shape : again, these effects are of the same order.

With regards to the flow rule, there are only minor differences between the two theoretical predictions and they are both in very good agreement with the numerical results.

E.3.6 Discussion

In the cases considered (spherical, prolate spheroidal, oblate spheroidal and cylindrical voids), the anisotropic criteria of Benzerga and Besson (2001), Monchiet et al. (2008) and Keralavarma and Benzerga (2010), are very close to the numerical results resulting from limit-analysis performed by the finite element method, for both the yield surfaces and the directions of plastic flow. Comparisons

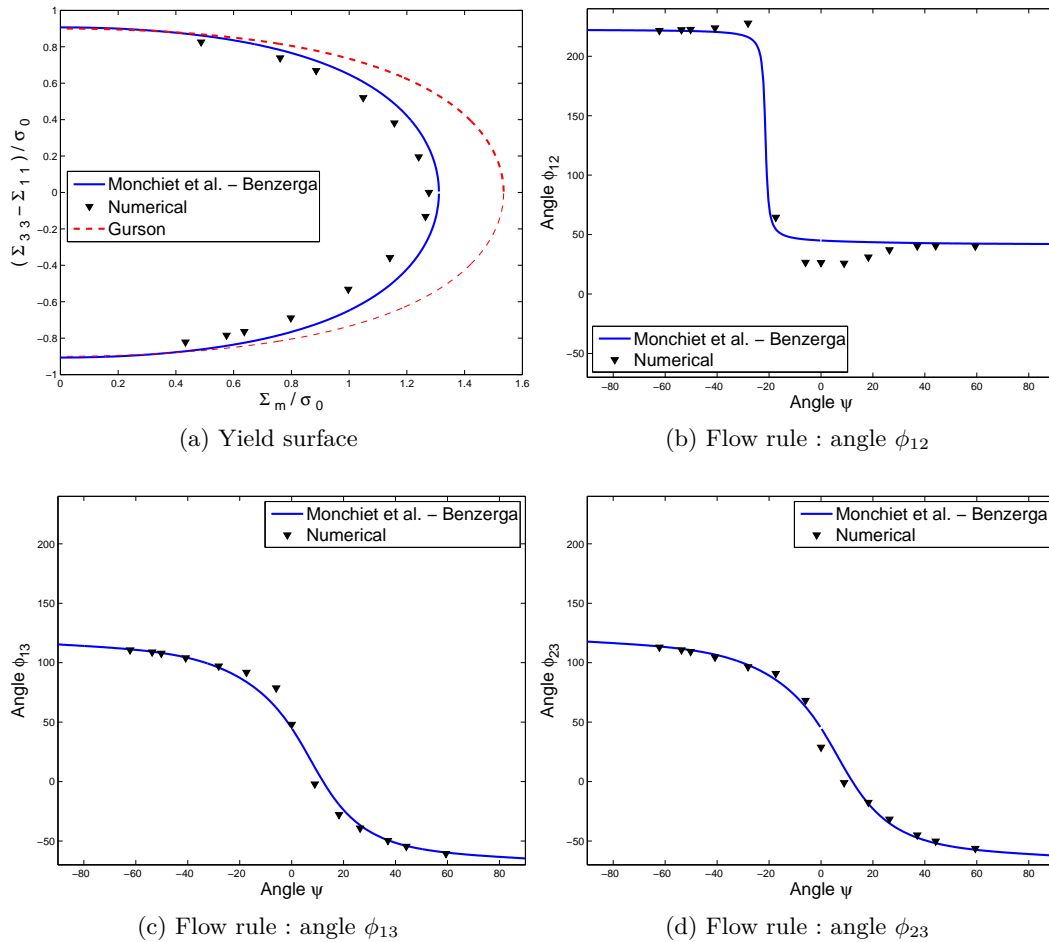


FIGURE E.4: Numerical results for a spherical void : porosity 10^{-1}

with Gurson (1977)'s and Gologanu et al. (1997)'s criteria show a complex coupling between material anisotropy and void shape, which is well reproduced by the anisotropic criteria considered.

Since the theoretical criteria were obtained by using trial velocity fields corresponding to a plastically *isotropic* matrix, the above results emphasize the great interest of this class of velocity fields even when considering *anisotropic* matrices. The success of the "isotropic" velocity fields may be explained by the variational characterization of the overall yield locus in terms of the overall plastic dissipation : indeed, provided that the anisotropy is not too great, using a trial "isotropic" velocity field differing modestly from the exact "anisotropic" one in the approximate limit-analysis must lead to a reasonable estimate of the minimum of the plastic dissipation, leading itself to a good estimate of the yield locus.

E.4 Conclusion

In this paper, we presented a new finite element technique for numerical limit-analysis of Hill materials. This method, unlike other ones, does not require any approximation of the yield surface or extra optimization procedure : it is based on the standard finite element method including elasticity. The equations of the time-discretized finite element problem reduce to those of limit-analysis by imposing a single large load step, with no geometry update, and using an implicit algorithm for the local projection procedure. The convergence of the elastoplastic iterations is accelerated by using an elastic compliance of the material proportional to Hill's tensor : this permits to use a moderate load step, provided that the structure is entirely plastic when its limit-load is reached.

This new technique was then applied to the study of the overall criteria of anisotropic plastic porous solids. We performed numerical limit-analyses of spheroidal cells containing confocal spheroidal voids

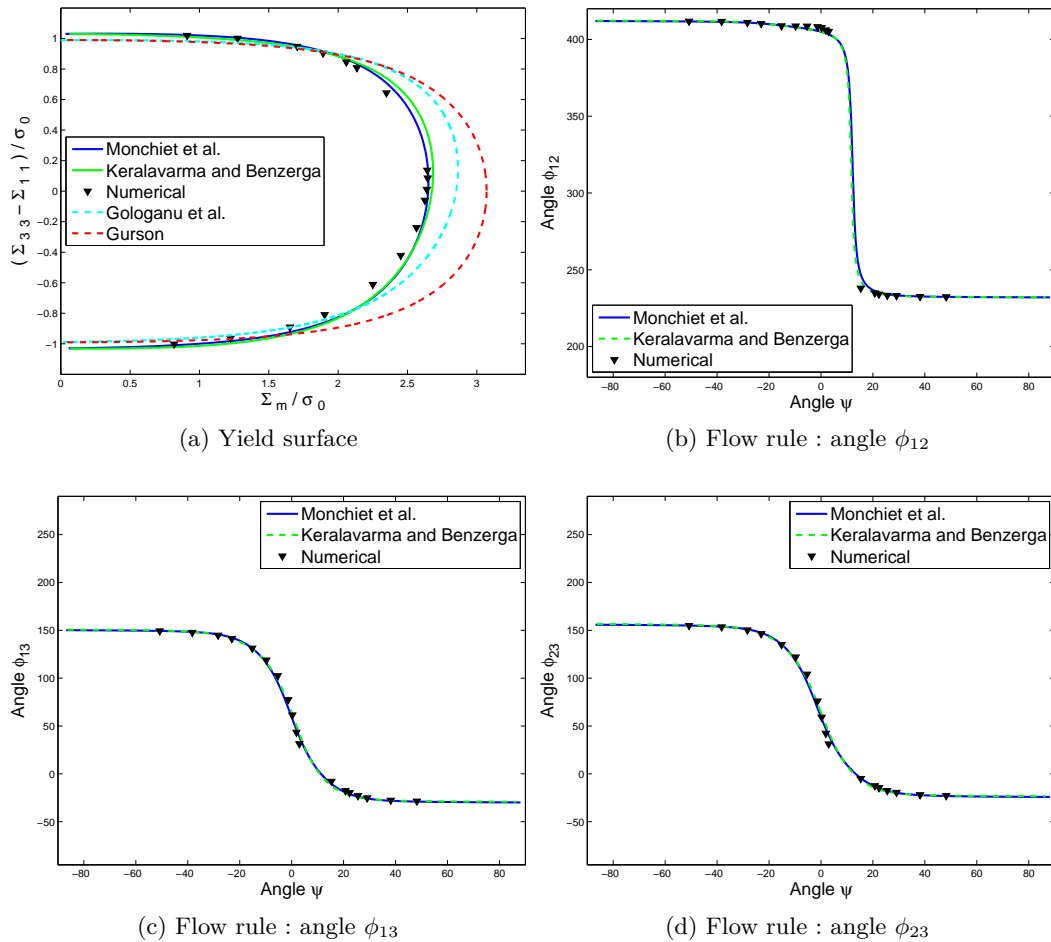


FIGURE E.5: Numerical results for a prolate void : porosity 10^{-2}

and made of Hill materials, subjected to conditions of homogeneous boundary strain rate. The results were compared to available theoretical anisotropic criteria (Benzerga and Besson (2001), Monchiet et al. (2008) and Keralavarma and Benzerga (2010)) for spherical, prolate and oblate spheroidal voids, in order to assess their accuracy. Both theoretical yield surfaces and directions of plastic flow appeared to be in very good agreement with the numerical ones, except near the hydrostatic point where some discrepancies were observed for the flow rule in some cases. Keralavarma and Benzerga (2010)'s criterion was noted to give slightly better results than that Monchiet et al. (2008)'s criterion in the oblate case ; conversely, Monchiet et al. (2008)'s criterion was observed to be slightly more accurate in the prolate case. The comparisons with the isotropic criteria of Gurson (1977) and Gologanu et al. (1997), applying respectively to spherical and spheroidal voids, evidenced a coupling between plastic anisotropy and void shape : in all the cases considered, the two effects have comparable impacts upon the yield locus.

It is important to note that the numerical results obtained could also be used to validate any other macroscopic criterion for spheroidal voids embedded in an orthotropic Hill matrix.

This study validates the choice of velocity fields corresponding to an *isotropic* matrix in the derivation of the different models, even for *anisotropic* matrices. The good predictions of the anisotropic models based on "isotropic" velocity fields are in fact due to the variational characterization of the overall yield locus in terms of the overall plastic dissipation. This paves the way to a future extension of Madou and Leblond (2012a,b)'s recently proposed criterion for *general ellipsoidal* cavities embedded in an isotropic von Mises matrix, to the context of anisotropic Hill matrices : taking advantage of the previous remark, one may hope to extend their criterion to anisotropic Hill matrices using again "isotropic" velocity fields.

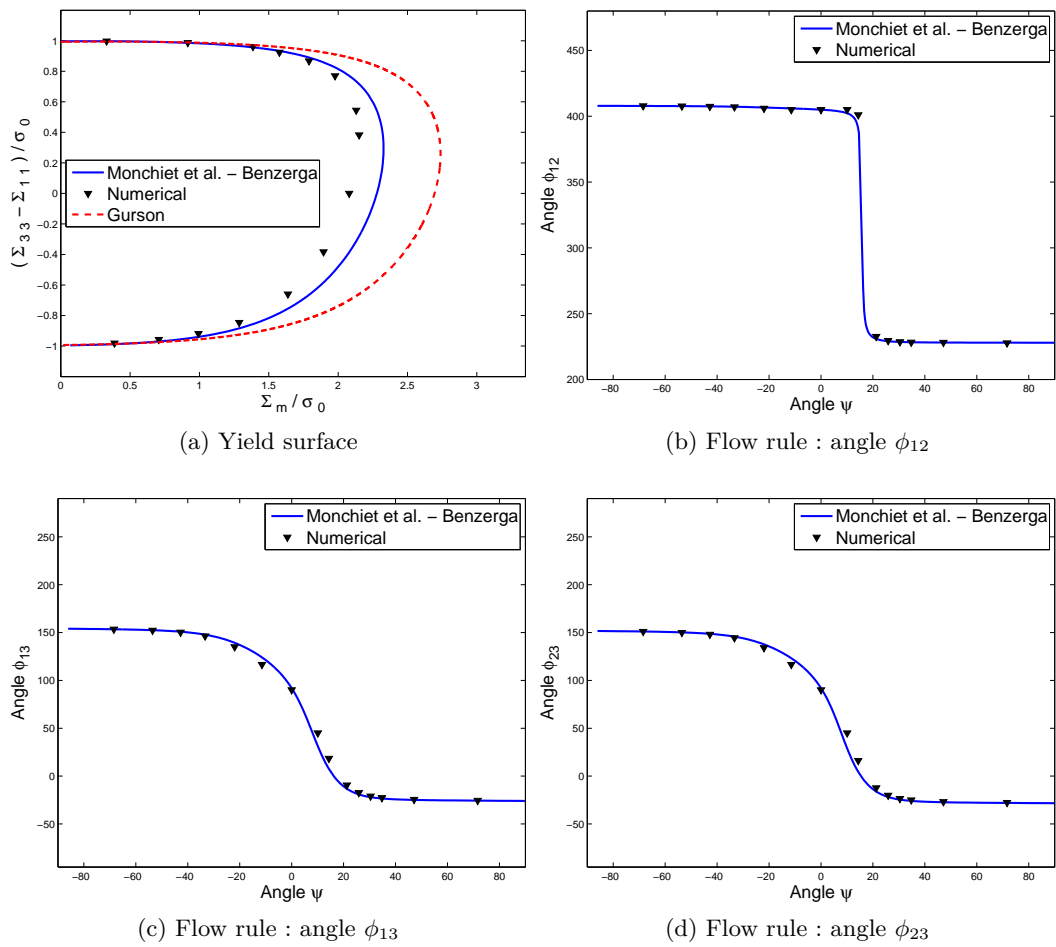


FIGURE E.6: Numerical results for a cylindrical void : porosity 10^{-2}

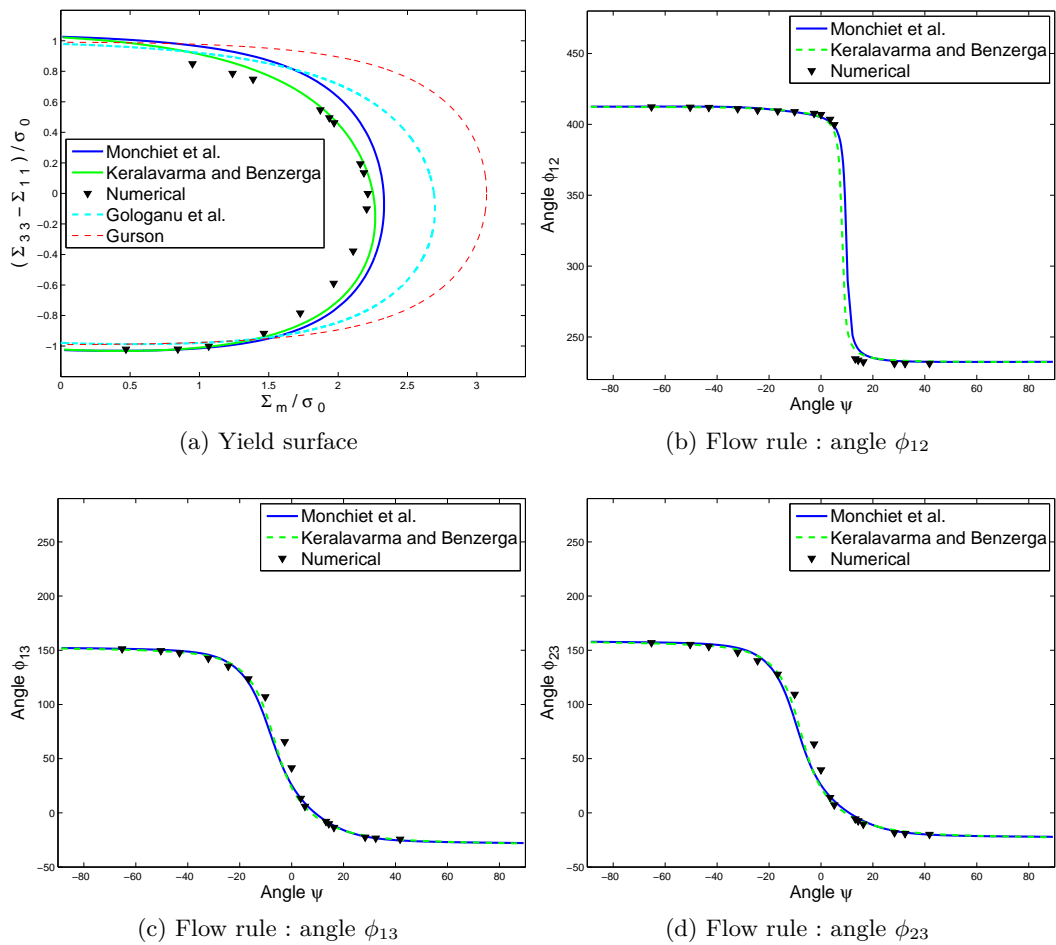


FIGURE E.7: Numerical results for a oblate void : porosity 10^{-2}

E.A Appendix : Summary of closed-form expressions of the criteria assessed

E.A.1 Macroscopic criterion for spherical voids (Benzerga and Besson)

Following Gurson (1977), the trial velocity field is of the form :

$$\underline{v} = \frac{\alpha}{r^2} \underline{e}_r + \underline{\beta} \cdot \underline{x} \quad (\text{E.21})$$

where $\underline{\beta}$ is a constant (uniform) second-order tensor and α is a constant.

The approximate yield criterion reads :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left(\frac{\kappa \Sigma_h}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0, \quad \kappa = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2h_1 + h_2 + 2h_3}} \quad (\text{E.22})$$

The h_i here are connected to the coefficients of Hill's anisotropic tensor \mathbb{H} as follows :

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}(2H_{11} + 2H_{22} + 2H_{66} - H_{33}); & h_2 &= \frac{3}{2}H_{33}; \\ h_3 &= \frac{1}{2}(H_{44} + H_{55}) \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

where \mathbb{H} is defined by the condition : $\mathbb{H} : \mathbb{A} = \mathbb{A} : \mathbb{H} = \mathbb{K}$, \mathbb{K} being the deviatoric projection tensor.

E.A.2 Macroscopic criterion for spheroidal voids (Monchiet et al.)

Following Gologanu et al. (1993, 1994), the trial velocity field \underline{v} is of the form :

$$\underline{v} = \underline{A} \cdot \underline{x} + B \underline{v}^E \quad (\text{E.24})$$

where \underline{A} is a constant (uniform) second-order tensor and B is a constant.

The approximate yield criterion reads :

$$\left(\frac{\tilde{\Sigma}_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2(1+g)(f+g) \cosh \left(\frac{\kappa \Sigma_p}{\sigma_0} \right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \quad (\text{E.25})$$

where :

$$\tilde{\Sigma}_{eq}^2 = \Sigma_{eq}^2 + \frac{1}{1-h_2\zeta} \left(h_2\eta^2 \Sigma_p^2 + \zeta \Sigma_q^2 + 2\eta \Sigma_p \Sigma_q \right) \quad (\text{E.26})$$

The coefficients ζ and η are given by :

$$\eta = \frac{\kappa^2(1+g)(f+g)(\alpha_2 - \alpha_1)}{(1-f)}; \quad \zeta = \frac{\kappa^2(1+g)(f+g)(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(1-f)^2} \quad (\text{E.27})$$

The expressions of Σ_q and Σ_p are :

$$\Sigma_q = \underline{\Sigma} : \underline{Q}; \quad \Sigma_p = \frac{1}{3} \underline{\Sigma} : \underline{X} \quad (\text{E.28})$$

where \underline{Q} is defined by :

$$\underline{Q} = \frac{1}{2}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (\text{E.29})$$

and \underline{X} is given by :

$$\underline{X} = \frac{3}{2}(1-\alpha_2)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + 3\alpha_2 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (\text{E.30})$$

The expression of κ is :

$$\kappa = \frac{3}{p} \quad (\text{E.31})$$

where p is given by :

$$p^2 = \frac{3(1+g)(f+g)}{2f(1-f)} \left\{ (\beta_1 - f\beta_2)(h_1 + 3h_2 - 4h_3) \right. \\ \left. + 6[\alpha_1(1-\alpha_1) - f\alpha_2(1-\alpha_2)]h_2 + [1-\alpha_1 - f(1-\alpha_2)](h_1 - 3h_2 + 4h_3) \right\} \quad (\text{E.32})$$

Coefficients h_i are defined by equations (E.23). The scalar functions α and β involved in the previous coefficients are defined by :

$$\alpha(e) = \begin{cases} \frac{ab^2}{c^3} \operatorname{argtanh}\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{b^2}{c^2} & (\text{prolate void}) \\ -\frac{ab^2}{c^3} \arctan\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{b^2}{c^2} & (\text{oblate void}) \end{cases} \quad (\text{E.33})$$

$$\beta(e) = \begin{cases} (1-3\alpha)\frac{a^2}{c^2} & (\text{prolate void}) \\ -(1-3\alpha)\frac{a^2}{c^2} & (\text{oblate void}) \end{cases}$$

E.A.3 Macroscopic criterion for spheroidal voids (Keralavarma and Benzerga)

The expansion velocity field is taken to be axisymmetric about the void axis and constructed from the family of incompressible velocity fields introduced by Lee and Mear (1992). This corresponds to the fields used by Gologanu et al. (1997), which are a generalization of Gologanu et al. (1993, 1994)'s fields.

The approximate yield criterion is given by :

$$\frac{3}{2}C \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{P} : \boldsymbol{\Sigma}}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(f+g) \cosh\left(\kappa \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{X}}{\sigma_0}\right) \\ -(1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \quad (\text{E.34})$$

where

$$\mathbb{P} = \mathbb{A} + \eta(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{X}); \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3; \quad (\text{E.35}) \\ \mathbf{X} = \alpha_2(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (1-2\alpha_2) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

The expression of κ is :

$$\kappa = \begin{cases} \sqrt{3} \left\{ \frac{1}{\ln f} \left[\frac{2}{3} \ln \frac{1-e_2^2}{1-e_1^2} + \frac{3+e_2^2}{3+e_2^4} - \frac{3+e_1^2}{3+e_1^4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\tan^{-1} \frac{e_2^2}{\sqrt{3}} - \tan^{-1} \frac{e_1^2}{\sqrt{3}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \ln \frac{3+e_2^4}{3+e_1^4} \right] \frac{4\hat{h}_q + 8\hat{h}_a - 7\hat{h}_t}{10} + \frac{4(\hat{h}_q + 2\hat{h}_a + 2\hat{h}_t)}{15} \right\}^{1/2} & (\text{prolate}) \\ \frac{3}{2} \left(\frac{\hat{h}_q + 2\hat{h}_a + 2\hat{h}_t}{5} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{gf - g_1 + \frac{4}{5}(g_f^{5/2} - g_1^{5/2}) - \frac{3}{5}(g_f^5 - g_1^5)}{\ln \frac{gf}{g_1}} \right\}^{-1} & (\text{oblate}) \end{cases} \quad (\text{E.36})$$

where e_1 and e_2 are the eccentricities of the void and the outer boundary of the RVE³. The coefficients \hat{h}_q, \hat{h}_t and \hat{h}_a are defined by :

$$\begin{aligned}\hat{h}_q &= \frac{1}{6}(H_{11} + H_{22} + 4H_{33} - 4H_{23} - 4H_{31} + 2H_{12}) \\ \hat{h}_t &= h_1^{Monchiet}; \quad \hat{h}_a = h_3^{Monchiet}\end{aligned}\tag{E.37}$$

We define also the coefficients g, g_f and g_1 as :

$$\begin{aligned}g &= 0 \quad (\textit{prolate}); \quad g = \frac{e_2^3}{\sqrt{1 - e_2^2}} \quad (\textit{oblate}) \\ g_f &= \frac{g}{g + f}; \quad g_1 = \frac{g}{g + 1}\end{aligned}\tag{E.38}$$

Finally the coefficient C involved in the quadratic form of the criterion reads :

$$C = -\frac{2}{3} \frac{\kappa(g+1)(g+f)sh}{(Q^* + \frac{3}{2}\hat{h}_q\eta H^*)\eta}; \quad sh = \sinh(\kappa H^*); \quad ch = \cosh(\kappa H^*)\tag{E.39}$$

where $H^* = 2\sqrt{\hat{h}_q}(\alpha_1 - \alpha_2)$ and $Q^* = 2\sqrt{\hat{h}_q}(1 - f)$. The coefficient η reads :

$$\eta = -\frac{2}{3\hat{h}_q} \frac{\kappa(g+1)(g+f)sh}{(g+1)^2 + (g+f)^2 + (g+1)(g+f)[\kappa H^* sh - 2ch]}\tag{E.40}$$

3. The void and the outer boundary are confocal.

Bibliographie

- Agoras, M., Ponte Castañeda, P., 2013. Iterated linear comparison bounds for viscoplastic porous materials with “ellipsoidal” microstructures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 61, 701–725.
- Agoras, M., Ponte Castañeda, P., 2014. Anisotropic finite-strain models for porous viscoplastic materials with microstructure evolution. *International Journal of Solids and Structures* 51, 981–1002.
- Alves, J.L., Revil-Baudard, B., Cazacu, O., 2014. Importance of the coupling between the sign of the mean stress and the third invariant on the rate of void growth and collapse in porous solids with a von Mises matrix. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 22, 025005.
- Anderheggen, E., Knöpfel, H., 1972. Finite element limit analysis using linear programming. *International Journal of Solids and Structures* 8, 1413–1431.
- Barsoum, I., Faleskog, J., 2007a. Rupture mechanisms in combined tension and shear—Experiments. *International Journal of Solids and Structures* 44, 1768–1786.
- Barsoum, I., Faleskog, J., 2007b. Rupture mechanisms in combined tension and shear—Micromechanics. *International Journal of Solids and Structures* 44, 5481–5498.
- Barsoum, I., Faleskog, J., 2011. Micromechanical analysis on the influence of the Lode parameter on void growth and coalescence. *International Journal of Solids and Structures* 48, 925–938.
- Benzerga, A.A., 2000. Rupture ductile des tôles anisotropes. Ph.D. thesis. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- Benzerga, A.A., 2002. Micromechanics of coalescence in ductile fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50, 1331–1362.
- Benzerga, A.A., Besson, J., 2001. Plastic potentials for anisotropic porous solids. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 20, 397–434.
- Benzerga, A.A., Besson, J., Batische, R., Pineau, A., 2002. Synergistic effects of plastic anisotropy and void coalescence on fracture mode in plane strain. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 10, 73.
- Benzerga, A.A., Besson, J., Pineau, A., 1999. Coalescence-Controlled Anisotropic Ductile Fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology* 121, 221–229.
- Benzerga, A.A., Besson, J., Pineau, A., 2004a. Anisotropic ductile fracture : Part I : experiments. *Acta Materialia* 52, 4623–4638.
- Benzerga, A.A., Besson, J., Pineau, A., 2004b. Anisotropic ductile fracture : Part II : theory. *Acta Materialia* 52, 4639–4650.
- Benzerga, A.A., Leblond, J.B., 2010. Ductile Fracture by Void Growth to Coalescence. *Advances in Applied Mechanics* 44, 169–305.

- Benzerga, A.A., Leblond, J.B., 2014. Effective yield criterion accounting for microvoid coalescence. *Journal of Applied Mechanics* 81, 031009.
- Bottero, A., Negre, R., Pastor, J., Turgeman, S., 1980. Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 22, 131–149.
- Boyce, B.L., Kramer, S.L.B., Fang, H.E., Cordova, T.E., Neilsen, M.K., Dion, K., Kaczmarowski, A.K., Karasz, E., Xue, L., Gross, A.J., Ghahremaninezhad, A., Ravi-Chandar, K., Lin, S.P., Chi, S.W., Chen, J.S., Yreux, E., Rüter, M., Qian, D., Zhou, Z., Bhamare, S., O'Connor, D.T., Tang, S., Elkhodary, K.I., Zhao, J., Hochhalter, J.D., Cerrone, A.R., Ingraffea, A.R., Wawrzynek, P.A., Carter, B.J., Emery, J.M., Veilleux, M.G., Yang, P., Gan, Y., Zhang, X., Chen, Z., Madenci, E., Kilic, B., Zhang, T., Fang, E., Liu, P., Lua, J., Nahshon, K., Miraglia, M., Cruce, J., DeFrese, R., Moyer, E.T., Brinckmann, S., Quinkert, L., Pack, K., Luo, M., Wierzbicki, T., 2014. The Sandia Fracture Challenge : blind round robin predictions of ductile tearing. *International Journal of Fracture* 186, 5–68.
- Budiansky, B., O'connell, R.J., 1976. Elastic moduli of a cracked solid. *International Journal of Solids and Structures* 12, 81–97.
- Capsoni, A., Corradi, L., 1997. A Finite Element Formulation of the Rigid–Plastic Limit Analysis Problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40, 2063–2086.
- Cazacu, O., Revil-Baudard, B., Lebensohn, R.A., Găărăjeu, M., 2013. On the Combined Effect of Pressure and Third Invariant on Yielding of Porous Solids With von Mises Matrix. *Journal of Applied Mechanics* 80, 064501–064501.
- Cazacu, O., Stewart, J.B., 2009. Analytic plastic potential for porous aggregates with matrix exhibiting tension–compression asymmetry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57, 325–341.
- Cocks, A.C.F., Ashby, M.F., 1982. On creep fracture by void growth. *Progress in Materials Science* 27, 189–244.
- Corradi, L., Luzzi, L., Vena, P., 2006. Finite element limit analysis of anisotropic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, 5422–5436.
- Dahl, J., Nielsen, K.L., Tvergaard, V., 2012. Effect of Contact Conditions on Void Coalescence at Low Stress Triaxiality Shearing. *Journal of Applied Mechanics* 79, 021003–021003.
- Danas, K., Ponte Castañeda, P., 2009. A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media : I – Theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 28, 387–401.
- De Borst, R., Feenstra, P.H., 1990. Studies in anisotropic plasticity with reference to the Hill criterion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29, 315–336.
- Deshpande, V.S., Fleck, N.A., 2000. Isotropic constitutive models for metallic foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, 1253–1283.
- Dormieux, L., Kondo, D., 2010. An extension of Gurson model incorporating interface stresses effects. *International Journal of Engineering Science* 48, 575–581.
- Dunand, M., Mohr, D., 2011a. On the predictive capabilities of the shear modified Gurson and the modified Mohr–Coulomb fracture models over a wide range of stress triaxialities and Lode angles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59, 1374–1394.
- Dunand, M., Mohr, D., 2011b. Optimized butterfly specimen for the fracture testing of sheet materials under combined normal and shear loading. *Engineering Fracture Mechanics* 78, 2919–2934.

- Enakoutsa, K., Leblond, J., Perrin, G., 2007. Numerical implementation and assessment of a phenomenological nonlocal model of ductile rupture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196, 1946–1957.
- Faleskog, J., Shih, C.F., 1997. Micromechanics of coalescence—I. Synergistic effects of elasticity, plastic yielding and multi-size-scale voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45, 21–50.
- Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., 1993. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41, 1825–1857.
- Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., 1997. Strain Gradient Plasticity. *Advances in Applied Mechanics Volume 33*, 295–361.
- Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., 2001. A reformulation of strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49, 2245–2271.
- Fleck, N.A., Muller, G.M., Ashby, M.F., Hutchinson, J.W., 1994. Strain gradient plasticity : Theory and experiment. *Acta Metallurgica et Materialia* 42, 475–487.
- Gao, X., Kim, J., 2006. Modeling of ductile fracture : Significance of void coalescence. *International Journal of Solids and Structures* 43, 6277–6293.
- Garajeu, M., 1995. Contribution à l'étude du comportement non linéaire de milieux poreux avec ou sans renfort. Ph.D. thesis. Université de la Méditerranée. Marseille.
- Gărăjeu, M., Michel, J.C., Suquet, P., 2000. A micromechanical approach of damage in viscoplastic materials by evolution in size, shape and distribution of voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 183, 223–246.
- Garrison, W.M., Moody, N.R., 1987. Ductile fracture. *Journal of Physics and Chemistry of Solids* 48, 1035–1074.
- Gavazzi, A.C., Lagoudas, D.C., 1990. On the numerical evaluation of Eshelby's tensor and its application to elastoplastic fibrous composites. *Computational Mechanics* 7, 13–19.
- Gologanu, M., 1997. Etude de quelques problèmes de rupture ductile des métaux. Ph.D. thesis. Université Paris 6.
- Gologanu, M., Leblond, J.B., Devaux, J., 1993. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids—case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41, 1723–1754.
- Gologanu, M., Leblond, J.B., Devaux, J., 1994. Approximate Models for Ductile Metals Containing Nonspherical Voids—Case of Axisymmetric Oblate Ellipsoidal Cavities. *Journal of Engineering Materials and Technology* 116, 290–297.
- Gologanu, M., Leblond, J.B., Perrin, G., Devaux, J., 1997. Recent Extensions of Gurson's Model for Porous Ductile Metals, in : Suquet, P. (Ed.), *Continuum Micromechanics*. Springer Vienna. number 377 in *International Centre for Mechanical Sciences*, pp. 61–130.
- Gologanu, M., Leblond, J.B., Perrin, G., Devaux, J., 2001. Theoretical models for void coalescence in porous ductile solids. I. Coalescence “in layers”. *International journal of solids and structures* 38, 5581–5594.
- Guo, T., Faleskog, J., Shih, C., 2008. Continuum modeling of a porous solid with pressure-sensitive dilatant matrix. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56, 2188–2212.

- Gurson, A.L., 1977. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth : Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *Journal of Engineering Materials and Technology* 99, 2–15.
- Gurtin, M.E., Murdoch, A.I., 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 57, 291–323.
- Gurtin, M.E., Murdoch, A.I., 1978. Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures* 14, 431–440.
- Halphen, B., Nguyen, Q.S., 1975. Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de Mécanique* 14, 39–63.
- Han, X., Besson, J., Forest, S., Tanguy, B., Bugat, S., 2013. A yield function for single crystals containing voids. *International Journal of Solids and Structures* 50, 2115–2131.
- Hill, R., 1948. A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 193, 281–297.
- Hill, R., 1967. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 15, 79–95.
- Huang, Y., 1991. Accurate Dilatation Rates for Spherical Voids in Triaxial Stress Fields. *Journal of Applied Mechanics* 58, 1084–1086.
- Huang, Y., Gao, H., Nix, W.D., Hutchinson, J.W., 2000. Mechanism-based strain gradient plasticity—II. Analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, 99–128.
- Hughes, T.J.R., 1980. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15, 1413–1418.
- Hutchinson, J.W., Evans, A.G., 2000. Mechanics of materials : top-down approaches to fracture. *Acta Materialia* 48, 125–135.
- Jeong, H.Y., 2002. A new yield function and a hydrostatic stress-controlled void nucleation model for porous solids with pressure-sensitive matrices. *International Journal of Solids and Structures* 39, 1385–1403.
- Jeong, H.Y., Pan, J., 1995. A macroscopic constitutive law for porous solids with pressure-sensitive matrices and its implications to plastic flow localization. *International Journal of Solids and Structures* 32, 3669–3691.
- Kailasam, M., Ponte Castañeda, P., 1998. A general constitutive theory for linear and nonlinear particulate media with microstructure evolution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46, 427–465.
- Keralavarma, S., Benzerga, A., 2010. A constitutive model for plastically anisotropic solids with non-spherical voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 58, 874–901.
- Keralavarma, S., Hoelscher, S., Benzerga, A., 2011. Void growth and coalescence in anisotropic plastic solids. *International Journal of Solids and Structures* 48, 1696–1710.
- Keralavarma, S.M., Benzerga, A.A., 2008. An approximate yield criterion for anisotropic porous media. *Comptes Rendus Mécanique* 336, 685–692.
- Kondori, B., Benzerga, A.A., 2014. Fracture Strains, Damage Mechanisms and Anisotropy in a Magnesium Alloy Across a Range of Stress Triaxialities. *Experimental Mechanics* 54, 493–499.

- Koplik, J., Needleman, A., 1988. Void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures* 24, 835–853.
- Krabbenhoft, K., Damkilde, L., 2003. A general non-linear optimization algorithm for lower bound limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 56, 165–184.
- Lassance, D., Fabrègue, D., Delannay, F., Pardoën, T., 2007. Micromechanics of room and high temperature fracture in 6xxx Al alloys. *Progress in Materials Science* 52, 62–129.
- Leblond, J.B., 2003. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermes Science Publications.
- Leblond, J.B., Gologanu, M., 2008. External estimate of the yield surface of an arbitrary ellipsoid containing a confocal void. *Comptes Rendus Mécanique* 336, 813–819.
- Leblond, J.B., Morin, L., 2014. Gurson’s Criterion and Its Derivation Revisited. *Journal of Applied Mechanics* 81, 051012.
- Leblond, J.B., Perrin, G., Devaux, J., 1994a. Bifurcation Effects in Ductile Metals With Nonlocal Damage. *Journal of Applied Mechanics* 61, 236–242.
- Leblond, J.B., Perrin, G., Suquet, P., 1994b. Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids. *International Journal of Plasticity* 10, 213–235.
- Lee, B.J., Mear, M.E., 1992. Axisymmetric deformation of power-law solids containing a dilute concentration of aligned spheroidal voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40, 1805–1836.
- Lee, J.H., Oung, J., 1999. Yield Functions and Flow Rules for Porous Pressure-Dependent Strain-Hardening Polymeric Materials. *Journal of Applied Mechanics* 67, 288–297.
- Lyamin, A.V., Sloan, S.W., 2002a. Lower bound limit analysis using non-linear programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55, 573–611.
- Lyamin, A.V., Sloan, S.W., 2002b. Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 26, 181–216.
- Madou, K., 2012. Contribution à l’étude des effets de forme des cavités en rupture ductile des métaux. Ph.D. thesis. Université Paris 6.
- Madou, K., Leblond, J.B., 2012a. A Gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids—I : Limit-analysis of some representative cell. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 60, 1020–1036.
- Madou, K., Leblond, J.B., 2012b. A Gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids—II : Determination of yield criterion parameters. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 60, 1037–1058.
- Madou, K., Leblond, J.B., 2013. Numerical studies of porous ductile materials containing arbitrary ellipsoidal voids – I : Yield surfaces of representative cells. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 42, 480–489.
- Madou, K., Leblond, J.B., Morin, L., 2013. Numerical studies of porous ductile materials containing arbitrary ellipsoidal voids – II : Evolution of the length and orientation of the void axes. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 42, 490–507.
- Mandel, J., 1964. Contribution théorique à l’étude de l’érouissage et des lois de l’écoulement plastique, in : *Proceedings of 11th International Congress on Applied Mechanics*, pp. 502–509.

- Mannucci, G., Demofonti, G., 2001. Fracture properties of API X100 gas pipeline steels, in : 13th Joint Meeting PRCI-EPRG.
- McClintock, F.A., 1968. A Criterion for Ductile Fracture by the Growth of Holes. *Journal of Applied Mechanics* 35, 363–371.
- Mi, C., Buttry, D.A., Sharma, P., Kouris, D.A., 2011. Atomistic insights into dislocation-based mechanisms of void growth and coalescence. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59, 1858–1871.
- Michel, J.C., Suquet, P., 1992. The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40, 783–812.
- Mohr, D., Dunand, M., Kim, K.H., 2010. Evaluation of associated and non-associated quadratic plasticity models for advanced high strength steel sheets under multi-axial loading. *International Journal of Plasticity* 26, 939–956.
- Mohr, D., Henn, S., 2007. Calibration of Stress-triaxiality Dependent Crack Formation Criteria : A New Hybrid Experimental–Numerical Method. *Experimental Mechanics* 47, 805–820.
- Mohr, D., Oswald, M., 2007. A New Experimental Technique for the Multi-axial Testing of Advanced High Strength Steel Sheets. *Experimental Mechanics* 48, 65–77.
- Molinari, A., Mercier, S., 2001. Micromechanical modelling of porous materials under dynamic loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49, 1497–1516.
- Monchiet, V., Bonnet, G., 2013. A Gurson-type model accounting for void size effects. *International Journal of Solids and Structures* 50, 320–327.
- Monchiet, V., Cazacu, O., Charkaluk, E., Kondo, D., 2008. Macroscopic yield criteria for plastic anisotropic materials containing spheroidal voids. *International Journal of Plasticity* 24, 1158–1189.
- Monchiet, V., Charkaluk, E., Kondo, D., 2007. An improvement of Gurson-type models of porous materials by using Eshelby-like trial velocity fields. *Comptes Rendus Mécanique* 335, 32–41.
- Monchiet, V., Charkaluk, E., Kondo, D., 2011. A micromechanics-based modification of the Gurson criterion by using Eshelby-like velocity fields. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 30, 940–949.
- Monchiet, V., Charkaluk, E., Kondo, D., 2014. Macroscopic yield criteria for ductile materials containing spheroidal voids : An Eshelby-like velocity fields approach. *Mechanics of Materials* 72, 1–18.
- Monchiet, V., Gruescu, C., Charkaluk, E., Kondo, D., 2006. Approximate yield criteria for anisotropic metals with prolate or oblate voids. *Comptes Rendus Mécanique* 334, 431–439.
- Monchiet, V., Kondo, D., 2013. Combined voids size and shape effects on the macroscopic criterion of ductile nanoporous materials. *International Journal of Plasticity* 43, 20–41.
- Morin, L., Kondo, D., Leblond, J.B., 2015a. Numerical assessment, implementation and application of an extended Gurson model accounting for void size effects. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 51, 183–192.
- Morin, L., Leblond, J.B., Benzerga, A.A., 2015b. Coalescence of voids by internal necking : Theoretical estimates and numerical results. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 75, 140–158.
- Morin, L., Leblond, J.B., Benzerga, A.A., Kondo, D., 2015c. A unified criterion for the growth and coalescence of microvoids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* (Submitted).
- Morin, L., Leblond, J.B., Kondo, D., 2015d. A Gurson-type criterion for plastically anisotropic solids containing arbitrary ellipsoidal voids. *International Journal of Solids and Structures* (Revised).

- Morin, L., Madou, K., Leblond, J.B., Kondo, D., 2014. A new technique for finite element limit-analysis of Hill materials, with an application to the assessment of criteria for anisotropic plastic porous solids. *International Journal of Engineering Science* 74, 65–79.
- Morse, P., Feshbach, H., 1957. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, New-York.
- Nahshon, K., Hutchinson, J.W., 2008. Modification of the Gurson Model for shear failure. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 27, 1–17.
- Nielsen, K.L., Dahl, J., Tvergaard, V., 2012. Collapse and coalescence of spherical voids subject to intense shearing : studied in full 3d. *International Journal of Fracture* 177, 97–108.
- Niordson, C.F., 2008. Void growth to coalescence in a non-local material. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 27, 222–233.
- Pardoën, T., Hutchinson, J.W., 2000. An extended model for void growth and coalescence. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, 2467–2512.
- Pastor, F., Pastor, J., Kondo, D., 2012. Limit analysis of hollow spheres or spheroids with Hill orthotropic matrix. *Comptes Rendus Mécanique* 340, 120–129.
- Paux, J., Morin, L., Brenner, R., Kondo, D., 2015. An approximate yield criterion for porous single crystals. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 51, 1–10.
- Perrin, G., 1992. Contribution à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux. Ph.D. thesis. Ecole Polytechnique.
- Perrin, G., Leblond, J.B., 1993. Rudnicki and Rice's Analysis of Strain Localization Revisited. *Journal of Applied Mechanics* 60, 842–846.
- Pineau, A., 2006. Development of the local approach to fracture over the past 25 years : Theory and applications. *Advances in Fracture Research* , 139–166.
- Ponte Castañeda, P., 1991. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39, 45–71.
- Ponte Castañeda, P., 2002. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I—theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50, 737–757.
- Ponte Castañeda, P., 2012. Bounds for nonlinear composites via iterated homogenization. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 60, 1583–1604.
- Ponte Castañeda, P., Suquet, P., 1997. Nonlinear Composites. *Advances in Applied Mechanics* 34, 171–302.
- Ponte Castañeda, P., Zaidman, M., 1994. Constitutive models for porous materials with evolving microstructure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42, 1459–1497.
- Prager, W., Hodge, P., 1951. *Theory of Perfectly Plastic Solids*. Applied Mathematics Series, John wiley & sons edition.
- Rice, J.R., 1971. Inelastic constitutive relations for solids : An internal-variable theory and its application to metal plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 19, 433–455.
- Rice, J.R., Tracey, D.M., 1969. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 17, 201–217.
- Richelsen, A.B., Tvergaard, V., 1994. Dilatant plasticity or upper bound estimates for porous ductile solids. *Acta Metallurgica et Materialia* 42, 2561–2577.

- Rudnicki, J.W., Rice, J.R., 1975. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 23, 371–394.
- Sartori, C., Mercier, S., Jacques, N., Molinari, A., 2015. Constitutive behavior of porous ductile materials accounting for micro-inertia and void shape. *Mechanics of Materials* 80, Part B, 324–339.
- Scheyvaerts, F., Onck, P.R., Tekoglu, C., Pardoën, T., 2011. The growth and coalescence of ellipsoidal voids in plane strain under combined shear and tension. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59, 373–397.
- Shen, W.Q., Shao, J.F., Kondo, D., De Saxcé, G., 2015. A new macroscopic criterion of porous materials with a Mises-Schleicher compressible matrix. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 49, 531–538.
- Shen, Y., Morgeneyer, T.F., Garnier, J., Allais, L., Helfen, L., Crépin, J., 2013. Three-dimensional quantitative in situ study of crack initiation and propagation in AA6061 aluminum alloy sheets via synchrotron laminography and finite-element simulations. *Acta Materialia* 61, 2571–2582.
- Sloan, S.W., 1988. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 12, 61–77.
- Sloan, S.W., 1989. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 13, 263–282.
- Sloan, S.W., Kleeman, P.W., 1995. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 127, 293–314.
- Son, N.Q., 1977. On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11, 817–832.
- Srivastava, A., Needleman, A., 2013. Void growth versus void collapse in a creeping single crystal. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 61, 1169–1184.
- Suquet, P., 1983. Limit analysis and homogenization. *Comptes Rendus Académie des Sciences Paris* 296, 1355–1358.
- Talbot, D.R.S., Willis, J.R., 1985. Variational Principles for Inhomogeneous Non-linear Media. *IMA Journal of Applied Mathematics* 35, 39–54.
- Tang, F.L., Cai, H.M., Bao, H.W., Xue, H.T., Lu, W.J., Zhu, L., Rui, Z.Y., 2014. Molecular dynamics simulations of void growth in γ -TiAl single crystal. *Computational Materials Science* 84, 232–237.
- Tekoglu, C., Leblond, J.B., Pardoën, T., 2012. A criterion for the onset of void coalescence under combined tension and shear. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 60, 1363–1381.
- Thomason, P.F., 1985. Three-dimensional models for the plastic limit-loads at incipient failure of the intervoid matrix in ductile porous solids. *Acta Metallurgica* 33, 1079–1085.
- Torki, M., Benzerga, A.A., Leblond, J., 2015. On Void Coalescence under Combined Tension and Shear. *Journal of Applied Mechanics* Submitted.
- Traiviratana, S., Bringa, E.M., Benson, D.J., Meyers, M.A., 2008. Void growth in metals : Atomistic calculations. *Acta Materialia* 56, 3874–3886.
- Tvergaard, V., 2009. Behaviour of voids in a shear field. *International Journal of Fracture* 158, 41–49.
- Tvergaard, V., 2012. Effect of stress-state and spacing on voids in a shear-field. *International Journal of Solids and Structures* 49, 3047–3054.

- Tvergaard, V., 2015. Effect of initial void shape on ductile failure in a shear field. *Mechanics of Materials* .
- Tvergaard, V., Needleman, A., 1984. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta metallurgica* 32, 157–169.
- Tvergaard, V., Nielsen, K.L., 2010. Relations between a micro-mechanical model and a damage model for ductile failure in shear. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 58, 1243–1252.
- Uthaisangsuk, V., Prahl, U., Bleck, W., 2009. Characterisation of formability behaviour of multiphase steels by micromechanical modelling. *International Journal of Fracture* 157, 55–69.
- Vincent, P.G., Monerie, Y., Suquet, P., 2009a. Porous materials with two populations of voids under internal pressure : I. Instantaneous constitutive relations. *International Journal of Solids and Structures* 46, 480–506.
- Vincent, P.G., Monerie, Y., Suquet, P., 2009b. Porous materials with two populations of voids under internal pressure : II. Growth and coalescence of voids. *International Journal of Solids and Structures* 46, 507–526.
- Vincent, P.G., Suquet, P., Monerie, Y., Moulinec, H., 2014a. Effective flow surface of porous materials with two populations of voids under internal pressure : I. A GTN model. *International Journal of Plasticity* 56, 45–73.
- Vincent, P.G., Suquet, P., Monerie, Y., Moulinec, H., 2014b. Effective flow surface of porous materials with two populations of voids under internal pressure : II. Full-field simulations. *International Journal of Plasticity* 56, 74–98.
- Weck, A., Wilkinson, D.S., Maire, E., 2008a. Observation of void nucleation, growth and coalescence in a model metal matrix composite using X-ray tomography. *Materials Science and Engineering : A* 488, 435–445.
- Weck, A., Wilkinson, D.S., Maire, E., Toda, H., 2008b. Visualization by X-ray tomography of void growth and coalescence leading to fracture in model materials. *Acta Materialia* 56, 2919–2928.
- Willis, J.R., 1977. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 25, 185–202.
- Willis, J.R., 1991. On methods for bounding the overall properties of nonlinear composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39, 73–86.
- Xia, L., Shih, C.F., Hutchinson, J.W., 1995. A computational approach to ductile crack growth under large scale yielding conditions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43, 389–413.
- Xue, L., 2008. Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials. *Engineering Fracture Mechanics* 75, 3343–3366.
- Yamamoto, H., 1978. Conditions for shear localization in the ductile fracture of void-containing materials. *International Journal of Fracture* 14, 347–365.
- Yerra, S.K., Tekoglu, C., Scheyvaerts, F., Delannay, L., Van Houtte, P., Pardoën, T., 2010. Void growth and coalescence in single crystals. *International Journal of Solids and Structures* 47, 1016–1029.
- Zhang, Z.L., Niemi, E., 1994. Analyzing Ductile Fracture Using Dual Dilational Constitutive Equations. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 17, 695–707.
- Zhang, Z.L., Thaulow, C., Ødegård, J., 2000. A complete Gurson model approach for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics* 67, 155–168.

