



**HAL**  
open science

# Méthodes numériques pour l'homogénéisation élastodynamique des matériaux hétérogènes périodiques

Tran Thang Dang

► **To cite this version:**

Tran Thang Dang. Méthodes numériques pour l'homogénéisation élastodynamique des matériaux hétérogènes périodiques. Autre. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PESC1046 . tel-01235647

**HAL Id: tel-01235647**

**<https://theses.hal.science/tel-01235647>**

Submitted on 30 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ PARIS EST**

ANNÉE 2015

THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS EST**

Discipline : Génie Civil

présentée par

**Tran Thang DANG**

Titre :

**Méthodes numériques pour l'homogénéisation élastodynamique  
des matériaux hétérogènes périodiques**

soutenue le 07 juillet 2015 devant le jury composé de

M. Jean-François DEÛ	Rapporteur
M. Anthony GRAVOUIL	Rapporteur
M. Benoît BARY	Examineur
M. Jian-Fu SHAO	Président et Examineur
M. Qi-Chang HE	Directeur de thèse
M. Hung LE QUANG	Co-encadrant de thèse



## Résumé

La théorie d'homogénéisation élastodynamique des matériaux hétérogènes initiée par J.R. Willis il y a environ une trentaine d'années a récemment reçu une très grande attention. D'après cette théorie qui est mathématiquement exacte, la loi constitutive homogénéisée est non locale en espace et en temps ; le tenseur des contraintes dépend non seulement du tenseur des déformations mais aussi de la vitesse ; la quantité du mouvement dépend à la fois de la vitesse et du tenseur des déformations, faisant apparaître en général une masse anisotrope. Ces propriétés constitutives effectives, qui pourraient être surprenantes d'un point de vue mécanique classique, se révèlent en fait très utiles pour la conception de métamatériaux acoustiques et de capes acoustiques. Ce travail de thèse consiste essentiellement à proposer et développer deux méthodes numériques efficaces pour déterminer les propriétés élastodynamiques effectives des matériaux périodiquement hétérogènes. La première méthode relève de la méthode des éléments finis alors que la deuxième méthode est basée sur la transformée de Fourier rapide. Ces deux méthodes sont d'abord élaborées pour une microstructure périodique 3D quelconque et ensuite implantées pour une microstructure périodique 2D quelconque. Les avantages et les inconvénients de chacune de ces deux méthodes sont comparés et discutés. A l'aide des méthodes numériques élaborées, la théorie de Willis est appliquée au calcul élastodynamique sur un milieu infini hétérogène et sur celui homogénéisé. Les différents cas d'homogénéisabilité et de non-homogénéisabilité sont discutés.

*Mots-clés* : Métamatériaux ; Elastodynamique ; Homogénéisation ; Composite périodique ; Eléments finis ; Transformée de Fourier rapide.

## **Abstract**

The elastodynamic homogenization theory of heterogeneous materials initiated by J.R. Willis about thirty years ago has recently received considerable attention. According to this theory which is mathematically exact, the homogenized constitutive law is non-local in space and time ; the stress tensor depends not only on the strain tensor but also on the velocity ; the linear momentum depends both on the velocity and on the strain tensor, making appear an anisotropic mass tensor in general. These effective constitutive properties, which may be surprising from a classical mechanical point of view, turn out in fact to be very useful for the design of acoustic metamaterials and acoustic cloaks. The present work is essentially to propose and develop an efficient numerical method based on the finite element method (FEM) for determining the effective elastodynamic properties of periodically heterogeneous materials. The method is first developed for any 3D periodic microstructure and then implemented for any 2D periodic microstructure. Using the elaborated numerical methods, the Willis theory is applied to the elastodynamic computation over the infinite heterogeneous medium and over the homogenized one. The various cases of homogenizability and non-homogenizability are discussed.

*Keywords* : Metamaterial ; Elastodynamics ; Homogenization ; Periodic composite ; Finite elements ; Fast Fourier transform.

*A mon père...*



# Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-Echelle (MSME) - UMR 8208 CNRS de l'Université Paris-Est Marne la Vallée.

Je tiens, en premier lieu, à exprimer mes profonds remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur le professeur Qi-Chang HE, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'ai été sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral. Grâce à ses encouragements, j'ai pu effectuer un sujet de thèse très intéressant. Sans lui, cette thèse n'aurait sûrement jamais vu le jour.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Jean-François DEÛ, professeur au CNAM de Paris et Monsieur Anthony GRAVOUIL, professeur à l'INSA Lyon et membre de l'Institut Universitaire de France, de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse.

Mes remerciements chaleureux vont également à Monsieur Jian-Fu SHAO, professeur à l'Université de Lille 1 pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et de présider le jury de la thèse.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Benoît BARY, HDR/Ingénieur au CEA-Saclay d'avoir accepté de participer au jury et d'avoir examiné ma thèse. Ses conseils scientifiques ainsi que ses corrections du français ont beaucoup aidé à améliorer mon manuscrit.

Je remercie Monsieur Hung LE QUANG, Maître de Conférences au MSME, mon co-encadrant pour ses conseils scientifiques.

D'autre part, j'exprime mes remerciements au directeur du laboratoire MSME, Monsieur le professeur Salah NAILI ainsi que son ancien directeur Monsieur le professeur Christian SOIZE,



pour m’ avoir accueilli dans de bonnes conditions de travail et pour m’ avoir offert un environnement de recherche exceptionnel.

Je tiens également à remercier Monsieur le professeur Julien YVONNET pour m’ avoir inculqué les bases du calcul numérique pendant son encadrement de mon stage de master 2 recherche de Génie Civil au laboratoire MSME.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous les membres du laboratoire MSME. Je conserverai de nos échanges amicaux et scientifiques des souvenirs inoubliables. Surtout, je tiens à remercier mes amis proches Hussein NASSAR et Olivier EZVAN pour leur gentillesse, leur soutien scientifique et pour avoir participé aux activités sportives avec moi.

Enfin, j’ exprime du fond de mon coeur mes sincères remerciements à ma famille qui m’ a toujours soutenu avec leurs encouragements et leur amour. Je suis vraiment heureux de les avoir à mes côtés !

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>14</b>
<b>1 Théorie de l'homogénéisation élastodynamique des milieux périodiques</b>	<b>19</b>
1.1 Equations élastodynamiques locales . . . . .	19
1.2 Application du théorème de Bloch . . . . .	20
1.3 Equations élastodynamiques effectives . . . . .	22
1.4 Lemme de Hill-Mandel en dynamique . . . . .	23
1.5 Propriétés effectives en fonction de l'opérateur de Green . . . . .	24
1.6 Courbe de dispersion . . . . .	26
<b>2 Calcul des propriétés élastodynamiques effectives par la méthode des éléments finis</b>	<b>32</b>
2.1 Propriétés effectives en fonction de deux tenseurs de localisation . . . . .	32
2.2 Formulation faible du problème de localisation . . . . .	34
2.3 Discrétisation . . . . .	35
2.4 Courbe de dispersion . . . . .	36
2.5 Exemples numériques 1D . . . . .	37
2.5.1 Exemple 1D avec une cellule de base symétrique . . . . .	38
2.5.2 Exemple 1D avec une cellule de base anti-symétrique . . . . .	39
2.6 Exemple numérique 2D . . . . .	41
<b>3 Calcul des propriétés élastodynamiques effectives par la transformée de Fourier rapide</b>	<b>47</b>
3.1 Notions de base . . . . .	48
3.2 Equation intégrale . . . . .	49
3.3 Fonction caractéristique et fonction de forme . . . . .	53
3.4 Approche de résolution en déformation et en vitesse . . . . .	55
3.4.1 Formulation intégrale . . . . .	55

3.4.2	Schéma itératif en déformation et en vitesse . . . . .	57
3.5	Approche de résolution en contrainte et en quantité de mouvement . . . . .	58
3.5.1	Formulation intégrale . . . . .	58
3.5.2	Schéma itératif en contrainte et en quantité de mouvement . . . . .	60
3.6	Expression du tenseur de Green pour un milieu isotrope . . . . .	61
3.7	Validation dans le cas statique . . . . .	63
3.8	Convergence des schémas itératifs . . . . .	64
3.8.1	Influence du choix du milieu de comparaison et du contraste . . . . .	65
3.8.2	Singularité du tenseur de Green . . . . .	66
3.8.3	Algorithme modifié . . . . .	69
3.9	Applications numériques . . . . .	73
3.9.1	Première application . . . . .	73
3.9.2	Comparaison des deux approches (E-V) et ( $\Sigma$ -P) . . . . .	80
3.9.3	Deuxième application pour le cas anti-symétrique . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Calculs direct et indirect : exemples numériques</b>	<b>90</b>
4.1	Méthode du calcul direct . . . . .	90
4.2	Méthode du calcul indirect . . . . .	91
4.3	Discrétisation de la transformée de Fourier . . . . .	92
4.4	Application . . . . .	93
4.4.1	Condition nécessaire d'homogénéisabilité pour les ondes libres . . . . .	93
4.4.2	Exemple 1D . . . . .	94
4.4.3	Exemple 2D . . . . .	100
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>112</b>



# Notations

## • Notations tensorielles

$a$	scalaire,	$\mathbf{a}$	vecteur,
$\mathbf{A}$	tenseur d'ordre deux,	$\mathbb{A}$	tenseur d'ordre quatre,
$\mathcal{A}$	tenseur d'ordre trois,	$i^2 = -1$	nombre complexe,
$\mathbf{I}$	tenseur identité d'ordre deux,	$\mathbb{I}$	tenseur identité d'ordre quatre,
$\cdot$	produit contracté d'ordre un,	$:$	produit contracté d'ordre deux,
$\otimes^s$	produit tensoriel symétrique,	$\delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{y})$	symbole de Kronecker,

## • Notations propres au chapitre 3

$\mathbb{S}$	tenseur de souplesse,
$\eta$	volume massique,
$\tau$	polarisation en contrainte,
$\gamma$	polarisation en quantité de mouvement,
$\xi$	vecteur d'onde dans l'espace de Fourier,
$\chi(\mathbf{x})$	fonction caractéristique,
$\hat{\chi}(\xi)$	fonction de forme,
$\delta\mathbb{C}$	différence du tenseur de rigidité par rapport à celui du milieu de comparaison,
$\delta\mathbb{S}$	différence du tenseur de souplesse par rapport à celui du milieu de comparaison,
$\delta\rho$	différence de la masse volumique par rapport à celle du milieu de comparaison,
$\delta\eta$	différence du volume massique par rapport à celui du milieu de comparaison,

## • Notations communes à tous les chapitres

$\mathbb{C}^{hom}$	tenseur élastique effectif d'ordre quatre,
$\mathcal{T}^{hom}, \mathcal{S}^{hom}$	tenseurs effectifs de couplage d'ordre trois,
$\mathbf{R}^{hom}$	tenseur effectif de densité de masse d'ordre deux,
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes microscopiques,
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur des déformations microscopiques,
$\mathbf{p}$	vecteur des quantités de mouvement microscopiques,
$\mathbf{v}$	vecteur des vitesses microscopiques,
$\mathbf{u}$	vecteur des déplacements microscopiques,
$\boldsymbol{\Sigma}$	tenseur des contraintes macroscopiques,
$\mathbf{E}$	tenseur des déformations macroscopiques,
$\mathbf{P}$	vecteur des quantités de mouvement macroscopiques,
$\mathbf{V}$	vecteur des vitesses macroscopiques,
$\mathbf{U}$	vecteur des déplacements macroscopiques,
$\mathbf{f}$	vecteur de la force volumique,
$\nabla$	opérateur de gradient,
$\omega$	pulsation,
$\mathbf{k}$	vecteur d'onde,
$\mathbb{C}$	tenseur de rigidité,
$\lambda, \mu$	coefficients de Lamé,
$\rho$	masse volumique,
$\nu$	coefficient de Poisson,
$\mathbf{E}_0$	déformation libre,
$\mathbf{G}$	opérateur de Green.

# Introduction

La micromécanique des matériaux hétérogènes a trois objectifs principaux. D'abord, quand la microstructure d'un matériau hétérogène est très simple, elle vise à trouver exactement et analytiquement ses propriétés effectives (ou macroscopiques) ou bien une partie de ses propriétés, ou encore certaines relations entre ses propriétés effectives en fonction des propriétés locales et de la distribution géométrique (ou microstructure) de ses constituants (ou phases) (par exemple Nemat-Nasser et Hori [24], He et al. [12],...). Ensuite, quand la microstructure d'un matériau hétérogène n'est plus suffisamment simple, elle consiste à construire des schémas analytiques ou des méthodes numériques de façon à obtenir des estimations analytiques ou numériques pour les propriétés effectives en fonction des propriétés locales et de la microstructure (par exemple Moulinec et Suquet [21], Michel et al. [14],...). Enfin, à l'aide de certaines hypothèses relativement générales sur la microstructure et sur les propriétés locales, elle a pour objectif d'encadrer les propriétés effectives (par exemple Hashin et Shtrikman [9][10][11],...). Ces objectifs ont été atteints dans une large mesure pour les phénomènes linéaires statiques et dans une mesure nettement moindre pour les phénomènes non linéaires statiques (par exemple Nemat-Nasser et Hori [24], Milton et Serkov [16], Torquato [38],...). Quand les phénomènes en jeu deviennent dynamiques, le niveau de développement de la micromécanique des matériaux hétérogènes est considérablement plus bas, même s'ils restent linéaires. Par rapport à ce constat général, la théorie de l'homogénéisation élastodynamique linéaire de Willis en 1997 [48] est certainement une exception.

La théorie de Willis trouve ses prémisses dans certains travaux qu'il a publiés durant la première moitié des années 80 du dernier siècle [43] [44] [45] [47]. Dans un cadre formel très général où les composites (ou matériaux hétérogènes) peuvent être aléatoires ou périodiques, les éléments de base de cette théorie ont été présentés dans un chapitre d'un ouvrage collectif issu d'un cours [48] et complétés dans un article beaucoup plus récent [50]. Comme Nassar et al. [22] les ont notés et soulignés, la théorie de Willis présente plusieurs aspects remarquables ou surprenants par rapport à l'élastodynamique classique. Pour comprendre les motivations de

ce travail de thèse, il convient de rappeler ces aspects remarquables/surprenants ci-dessous :

- (a) La théorie de Willis est mathématiquement exacte et rigoureuse au sens que le processus d'homogénéisation proposé ne fait appel à aucune hypothèse d'approximation.
- (b) Après le processus d'homogénéisation, les effets des hétérogénéités matérielles microscopiques se reflètent seulement à travers les relations constitutives effectives, les équations du mouvement macroscopique conservant en même temps la forme classique habituelle.
- (c) Pour un composite dont les constituants sont caractérisés par les lois constitutives élastodynamiques classiques locales en temps et espace, ses relations constitutives effectives deviennent en général non locales à la fois en temps et en espace.
- (d) La masse volumique effective n'est plus une quantité scalaire comme dans le cas habituel, mais une quantité tensorielle du second ordre.
- (e) Dans les relations constitutives effectives, le tenseur des contraintes dépend non seulement du tenseur des déformations mais aussi de la vitesse, et la quantité de mouvement est fonction à la fois de la vitesse et du tenseur des déformations.
- (f) Les paramètres dans les relations constitutives effectives sont en général non uniques mais peuvent être rendus uniques par la prescription d'un champ de déformations libres.

La généralité et la rigueur de la théorie de Willis font que cette théorie est très élégante et captivante. En contrepartie, son domaine de validité au niveau de la physique n'était a priori pas clair du tout. Dans un travail récent de Nassar et al. [22], cette question importante a été étudiée et élucidée pour les composites à microstructure périodique. Cependant, les aspects non classiques (c)-(f) décrits ci-dessus rendent ardue la tâche de déterminer les relations constitutives effectives dans la théorie de Willis, même pour un composite stratifié [48][50][18].

Le développement récent des métamatériaux a bien attiré l'attention d'un bon nombre de chercheurs sur la théorie de l'homogénéisation élastodynamique de Willis [18][1][26][28][32]. Les métamatériaux sont des matériaux artificiels dont les microstructures particulières leur confèrent des comportements mécaniques ou/et physiques "surprenants ou exotiques" que les matériaux naturels ne possèdent pas. Les phénomènes "surprenants" manifestés par les métamatériaux incluent, par exemple, l'indice de réfraction négatif, les bandes interdites absolues, l'invisibilité optique et la non-détektivité acoustique [31] [39] [54] . Les métamatériaux ont de nombreuses applications potentielles importantes telles que les super-lentilles, l'isolation phonique, le filtrage fréquentiel sélectif, la furtivité en acoustique sous-marine. Le premier concept des métamatériaux remonte aux travaux de Veselago [40] [41] dans lesquels des matériaux à permittivité négative et à perméabilité négative ont été suggérés et étudiés. Le véritable



développement des métamatériaux a commencé avec les travaux de recherche très influents de Pendry [29] et Smith et al. [31]. Il se trouve que les lois de comportement élastodynamiques effectives dans la théorie de Willis sont nécessaires pour certains métamatériaux acoustiques. Ce fait a récemment stimulé l'application et le développement de la théorie de Willis [48] [50] [18].

L'objectif principal de ce travail de thèse est de proposer et implémenter deux méthodes numériques générales et efficaces pour effectuer l'homogénéisation élastodynamique des matériaux hétérogènes périodiques selon la théorie de Willis. La première est basée sur la méthode des éléments finis (MEF) et la deuxième repose sur la transformée de Fourier rapide (TFR). La raison d'en proposer et développer deux au lieu d'une seule d'entre elles est la suivante. L'approche numérique basée sur MEF est très générale et très souple mais le temps de calcul est long quand de hautes fréquences sont considérées. L'approche numérique issue de TFR nécessite peu de temps mais elle n'est pas aussi générale ni aussi souple que l'approche reposant sur MEF. Donc, quand ces deux approches auront été élaborées et implémentées, on pourra en choisir une suivant la situation considérée.

Ce mémoire de thèse est structuré en 4 chapitres.

Dans le chapitre 1, les éléments principaux de la théorie de l'homogénéisation élastodynamique de Willis sont présentés pour les milieux périodiques. Après avoir rappelé les équations élastodynamiques classiques, le principe de superposition et le théorème de Bloch sont appliqués pour trouver la solution du problème de localisation élastodynamique où les forces volumiques constantes sont imposées en tant que sollicitations extérieures. Les ondes de Bloch se révèlent essentielles pour définir les variables macroscopique intervenant dans les équations du mouvement macroscopiques et dans les relations constitutives effectives. Une version dynamique du lemme de Hill-Mandel, qui jouera un rôle important, est rappelée et démontrée. Les propriétés élastodynamiques effectives sont exprimées en fonction de l'opérateur de Green quand un vecteur d'onde et une fréquence sont prescrits. La fonction de dispersion pour un milieu périodique biphasique unidimensionnel (1D) est fournie. Ce milieu périodique simple sera en particulier exploité pour tester la validité des méthodes numériques proposées.

Dans le chapitre 2, une approche numérique d'homogénéisation élastodynamique basée sur MEF est proposée, implémentée et testée. Les propriétés élastodynamiques effectives sont d'abord exprimées de façon à faire intervenir deux tenseurs de localisation comme en micromécanique classique. Une formulation faible est ensuite donnée pour le problème de localisation avec les conditions aux limites périodiques imposées à une cellule de base. Ce problème de lo-

calisation est finalement rendu discret à l'aide de la MEF. En particulier, avec la MEF, la courbe de dispersion est fournie par la méthode d'analyse modale. A partir de la courbe de dispersion, nous trouvons les bandes interdites où les ondes libres ne peuvent pas se propager. La validité de l'approche numérique est testée en comparant nos résultats numériques avec ceux de Nemat-Nasser et Srivastava [26]. Enfin, notre méthode numérique est appliquée à la résolution d'un problème d'homogénéisation élastodynamique bidimensionnel (2D).

Dans le chapitre 3, nous proposons, implémentons et testons deux schémas numériques basés sur la TFR. Le premier utilise le tenseur des déformations et la vitesse comme variables de contrôle alors que le deuxième emploie le tenseur des contraintes et la quantité de mouvement comme variables de contrôle. Ces schémas donnent lieu à deux procédures numériques itératives pour trouver les propriétés élastodynamiques effectives. Les deux schémas proposés sont équivalents dans le cas statique où les effets dynamiques disparaissent. Les facteurs qui influencent les conditions de convergence de chacun des schémas sont discutés. En particulier, une stratégie est élaborée pour régler le problème de divergence de l'opérateur de Green associé à un milieu de comparaison. Les résultats obtenus par les deux schémas proposés sont discutés et comparés à ceux fournis par l'approche numérique basée sur la MEF et présentée dans le chapitre précédent.

Au chapitre 4, la validité des méthodes numériques présentées dans les chapitres 2 et 3 est testée à travers le calcul "direct" sur un milieu infini hétérogène et à travers le calcul "indirect" sur un milieu infini homogénéisé selon la théorie de Willis. En particulier, le champ des déplacements microscopiques est comparé au champ des déplacements macroscopiques dans les différentes zones de la courbe de dispersion pour discuter des cas d'homogénéisabilité et de non-homogénéisabilité. L'atténuation du champ des déplacements dans les bandes interdites est bien discutée et analysée au travers d'exemples.

Ce mémoire de thèse se termine par des conclusion générales et des perspectives.



# Chapitre 1

## Théorie de l'homogénéisation

### élastodynamique des milieux périodiques

#### 1.1 Equations élastodynamiques locales

Nous considérons un milieu hétérogène périodique  $\bar{\Omega}$  composé de phases élastiques linéaires. Les équations du mouvement dans  $\bar{\Omega}$  sont données par

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \dot{\mathbf{p}}, \quad (1.1)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{p}$  sont respectivement les champs microscopiques des contraintes et des quantités de mouvement. Le vecteur  $\mathbf{f}$  correspond à un champ de forces volumiques imposées dans le milieu. Le symbole  $\nabla \cdot$  désigne l'opérateur de divergence et le point superposé désigne la dérivée par rapport au temps. Le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est relié au tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  selon la loi de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.2)$$

où  $\mathbb{C}$  est le tenseur de rigidité élastique d'ordre quatre et où le symbole  $(:)$  désigne la double contraction. Le champ des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est défini comme le gradient symétrique du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla) \equiv \nabla \otimes^s \mathbf{u}, \quad (1.3)$$

où  $\nabla$  est l'opérateur gradient, le symbole  $\otimes$  désigne le produit tensoriel et l'exposant  $(^s)$  désigne la symétrisation. Par définition, le champ des quantités de mouvement  $\mathbf{p}$  est lié au champ des vitesses  $\mathbf{v}$  par

$$\mathbf{p} = \rho \mathbf{v}, \quad (1.4)$$

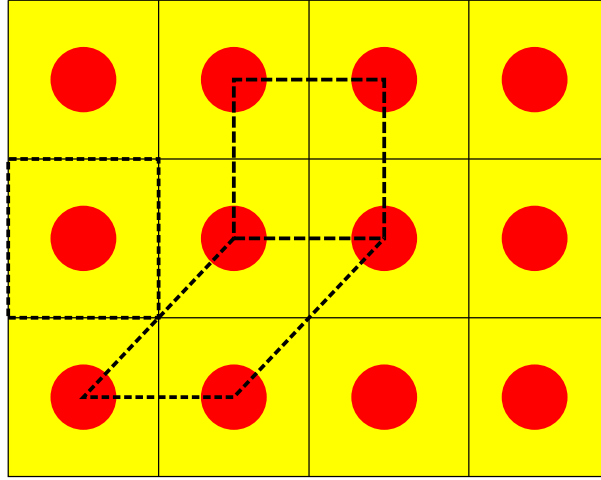
où  $\rho$  est la masse volumique.

L'hypothèse que le milieu en question est périodique implique que  $\mathbb{C}$  satisfait la propriété

$$\mathbb{C}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}),$$

pour tout vecteur de position  $\mathbf{x}$  et pour tout vecteur  $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 n_i l_i \mathbf{e}_i$  où  $n_i$  est un entier et où  $l_i$  est la longueur d'une cellule de base  $\Omega$  dans la direction  $\mathbf{e}_i$ . De même, la masse volumique  $\rho$  est périodique et satisfait ainsi la relation

$$\rho(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \rho(\mathbf{x}).$$



**Figure 1.1:** Définition de la cellule de base du milieu périodique.

Pour appliquer la théorie de l'homogénéisation élastodynamique de Willis [48] [50] au milieu périodique en question, nous ferons appel au principe de superposition. Ainsi, nous imposons une force volumique  $\mathbf{f}$  harmonique plane définie par

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{f}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (1.5)$$

où  $\omega$  est une pulsation,  $\mathbf{k}$  un vecteur d'onde,  $\tilde{\mathbf{f}}$  une amplitude constante indépendante de  $\mathbf{x}$  et de  $t$ . Selon la théorie de Willis [48] [50], le comportement effectif est non-local en temps et en espace. Donc, les propriétés effectives dépendent de  $\omega$  et de  $\mathbf{k}$ .

## 1.2 Application du théorème de Bloch

Avec la force volumique  $\mathbf{f}$  donnée par l'équation (1.5), le théorème de Bloch [42] garantit que les champs solutions  $\phi \in \{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\}$  ont la forme suivante :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} = \tilde{\phi}(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (1.6)$$

où la fonction  $\tilde{\phi}(\mathbf{x})$  est périodique par rapport à  $\mathbf{x}$ . A partir de maintenant, pour  $\phi \in \{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\}$  nous travaillons avec les amplitudes périodiques  $\tilde{\phi}$  données par

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\boldsymbol{\nabla} + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}}, \quad (1.7)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = -i\omega\tilde{\mathbf{u}}, \quad (1.8)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (1.9)$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \rho\tilde{\mathbf{v}}. \quad (1.10)$$

Les équations (1.1) du mouvement se réduisent à

$$(\boldsymbol{\nabla} + i\mathbf{k}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \tilde{\mathbf{f}} = -i\omega\tilde{\mathbf{p}}, \quad (1.11)$$

ou encore à

$$(\boldsymbol{\nabla} + i\mathbf{k}) \cdot \mathbb{C} : [(\boldsymbol{\nabla} + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}}] + \tilde{\mathbf{f}} = -\omega^2\rho\tilde{\mathbf{u}}. \quad (1.12)$$

Maintenant, nous vérifions que le champ solution  $\tilde{\mathbf{u}}$  de l'équation (1.12) est effectivement périodique. Tout d'abord, nous cherchons une solution de la forme  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$  où  $\tilde{\mathbf{u}}$  est quelconque pour le moment. En introduisant cette fonction dans les équations du mouvement et en tenant compte des lois constitutives élastodynamiques, nous obtenons

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \{ \mathbb{C}(\mathbf{x}) : [\boldsymbol{\nabla} \otimes^s (\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)})] \} + \tilde{\mathbf{f}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} = -\omega^2\rho(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}.$$

En y éliminant le facteur  $e^{-i\omega t}$ , il vient que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \{ \mathbb{C}(\mathbf{x}) : [\boldsymbol{\nabla} \otimes^s (\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})] \} + \tilde{\mathbf{f}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -\omega^2\rho(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

En remplaçant  $\mathbf{x}$  par  $\mathbf{x} + \mathbf{a}$  pour une translation où  $\mathbf{a}$  respecte la périodicité de  $\Omega$ , nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \{ \mathbb{C}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) : [\boldsymbol{\nabla} \otimes^s (\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x} + \mathbf{a})e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{a})})] \} + \tilde{\mathbf{f}}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{a})} \\ = -\omega^2\rho(\mathbf{x} + \mathbf{a})\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x} + \mathbf{a})e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{a})}. \end{aligned}$$

La simplification du facteur  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}$  dans l'équation ci-dessus nous donne

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \{ \mathbb{C}(\mathbf{x}) : [\boldsymbol{\nabla} \otimes^s (\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x} + \mathbf{a})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})] \} + \tilde{\mathbf{f}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -\omega^2\rho(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x} + \mathbf{a})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Ainsi, nous voyons que  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  et  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x} + \mathbf{a})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  sont deux solutions du même problème. Par l'unicité de la solution d'un problème élastodynamique, nous en concluons que  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ .

### 1.3 Equations élastodynamiques effectives

Un champ macroscopique (ou effectif) associé à un champ microscopique  $\phi \in \{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\}$  est défini en faisant la moyenne volumique de l'amplitude périodique dans sa forme de Bloch comme suit :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv \tilde{\Phi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{\phi}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \equiv \langle \tilde{\phi} \rangle e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (1.13)$$

Dans cette définition,  $|\Omega|$  représente le volume de la cellule de base  $\Omega$ ,  $\langle \bullet \rangle$  désigne la moyenne volumique sur  $\Omega$  et enfin nous avons  $\Phi \in \{\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{E}, \mathbf{P}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$  avec  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{U}$  étant les contreparties macroscopiques des champs microscopiques  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{u}$  respectifs.

En utilisant le théorème de la divergence et en tenant compte de la périodicité, nous avons

$$\int_{\Omega} \nabla \otimes^s \tilde{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \otimes^s \mathbf{n} dS = 0.$$

Ainsi, nous pouvons déduire que

$$\tilde{\mathbf{E}} = i\mathbf{k} \otimes^s \tilde{\mathbf{U}}, \quad (1.14)$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = -i\omega \tilde{\mathbf{U}}. \quad (1.15)$$

La moyenne volumique des équations (1.11) donne à l'échelle macroscopique

$$i\mathbf{k} \cdot \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{f}} \rangle = -i\omega \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle. \quad (1.16)$$

En multipliant ces équations par  $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$  et notant que le vecteur  $\tilde{\mathbf{f}}$  est constant, nous obtenons les équations du mouvement macroscopique

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{f} = -i\omega \mathbf{P}. \quad (1.17)$$

Nous remarquons que la force volumique microscopique est égale à celle macroscopique. Willis [48] [50] a montré que la loi de comportement effective (ou macroscopique) prend la forme

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\text{hom}} & \mathcal{T}^{\text{hom}} \\ \mathcal{S}^{\text{hom}} & \mathbf{R}^{\text{hom}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix},$$

ou la forme équivalente

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\text{hom}} & \mathcal{T}^{\text{hom}} \\ \mathcal{S}^{\text{hom}} & \mathbf{R}^{\text{hom}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Ci-dessus,  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  est le tenseur élastique effectif d'ordre quatre,  $\mathbf{R}^{\text{hom}}$  est le tenseur effectif de densité de masse d'ordre deux,  $\mathcal{S}^{\text{hom}}$  et  $\mathcal{T}^{\text{hom}}$  sont les deux tenseurs effectifs de couplage d'ordre trois. Tous ces tenseurs dépendent de  $\mathbf{k}$  et de  $\omega$ .

Dans le cas 3D, la matrice des propriétés effectives dans l'équation (1.18) contient  $9 \times 9$  composantes. Donc, les 3 chargements donnés par la force volumique  $\mathbf{f}$  ne sont pas suffisants pour déterminer ces composantes. Pour imposer les 6 chargements manquants, une possibilité consiste à introduire un champ de déformations libres  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  correspondant à des ondes planes. Les équations (1.9) et (1.12) se réécrivent alors comme suit :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0), \quad (1.19)$$

$$(\nabla + i\mathbf{k}) \cdot \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{E}}_0] + \tilde{\mathbf{f}} = -\omega^2 \rho \tilde{\mathbf{u}}. \quad (1.20)$$

La loi constitutive effective devient alors

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{\text{hom}} & \mathcal{T}^{\text{hom}} \\ \mathcal{S}^{\text{hom}} & \mathbf{R}^{\text{hom}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

En effet, la vitesse macroscopique  $\tilde{\mathbf{V}}$  donnée par l'équation (1.15) et le tenseur de déformations macroscopiques  $\tilde{\mathbf{E}}$  donné par l'équation (1.14) ne sont pas indépendants. L'introduction du tenseur de déformations libres  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  fait donc que  $\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  deviennent indépendants, permettant de déterminer de manière unique toutes les composantes de la loi effective.

## 1.4 Lemme de Hill-Mandel en dynamique

Le lemme de Hill-Mandel en dynamique est une généralisation de sa version statique bien connue. Ce lemme joue un rôle très important, car la satisfaction des conditions exigées par ce lemme garantit l'égalité entre le travail microscopique et le travail macroscopique. En dynamique, le lemme de Hill-Mandel s'écrit

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \rangle - \langle i\omega \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} : \tilde{\mathbf{E}}^* - i\omega \tilde{\mathbf{P}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^* \quad (1.22)$$

où  $(\bullet)^*$  désigne la conjugaison complexe de  $(\bullet)$ . Pour donner une démonstration de cette relation, nous écrivons

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \rangle - \langle i\omega \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle \\ &= \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : [(\nabla - i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}}^*] \rangle - \langle i\omega \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle \\ &= \langle (-i\mathbf{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle + \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : (\nabla \otimes^s \tilde{\mathbf{u}}^*) \rangle - \langle i\omega \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \langle (-i\mathbf{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle - \langle (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle - \langle i\omega \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle \\
&= - \langle [(\nabla + i\mathbf{k}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}] \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle - \langle i\omega \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle \\
&= \langle \tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle \\
&= \tilde{\mathbf{f}} \cdot \langle \tilde{\mathbf{u}}^* \rangle \\
&= (-i\mathbf{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} - i\omega \tilde{\mathbf{P}}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^* \\
&= \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} : (i\mathbf{k} \otimes^s \tilde{\mathbf{U}})^* - i\omega \tilde{\mathbf{P}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^*
\end{aligned}$$

où les définitions des grandeurs macroscopiques données par l'équation (1.13), le théorème de la divergence et enfin la condition de périodicité ont été utilisés.

## 1.5 Propriétés effectives en fonction de l'opérateur de Green

Nous définissons l'opérateur de Green  $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  comme la solution du problème formulé ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{|\Omega|} (\nabla_{\mathbf{y}} - i\mathbf{k}) \cdot \mathbb{C}(\mathbf{y}) : (\nabla_{\mathbf{y}} - i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^j(\mathbf{x}, \mathbf{y})^* + \delta_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \mathbf{e}^j = -\frac{1}{|\Omega|} \omega^2 \rho(\mathbf{y}) \tilde{\mathbf{G}}^j(\mathbf{x}, \mathbf{y})^*, \\ \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ périodique en } \mathbf{y}, \\ \left\{ \mathbb{C}^0 : [(\nabla - i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^j(\mathbf{x}, \mathbf{y})^*] \right\} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique en } \mathbf{y}, \end{array} \right. \quad (1.23)$$

où  $\delta_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$  est une force ponctuelle appliquée en  $\mathbf{x}$  et où  $\mathbf{e}^j$  est le vecteur unitaire suivant la direction  $j$  ( $j=1, 2$  ou  $3$ ). En utilisant  $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , le champ périodique des déplacements  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot [\tilde{\mathbf{f}} - (\nabla_{\mathbf{y}} + i\mathbf{k}) \cdot \mathbb{C}(\mathbf{y}) : \tilde{\mathbf{E}}_0] d\Omega(\mathbf{y}) \\
&\quad + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot [\mathbb{C}(\mathbf{y}) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})] dS(\mathbf{y}). \quad (1.24)
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations,  $\tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  sera noté  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  quand il n'y a pas de risque de confusion. De plus, les termes se trouvant à gauche de  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  dépendent implicitement du vecteur de position  $\mathbf{x}$ , alors que les termes se trouvant à droite de  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  dépendent tacitement du vecteur de position  $\mathbf{y}$  dans  $\Omega$ . D'ailleurs, nous adoptons la notation  $\ll \bullet \gg = \langle \bullet \rangle_{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbf{x}}$ .

A partir de l'équation (1.24) et en appliquant une intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^* \cdot \mathbf{f} d\Omega + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} [(\nabla - i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^*] : (\mathbb{C} : \tilde{\mathbf{E}}_0) d\Omega \\
&\quad + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^* \cdot [\mathbb{C} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0)] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.25)
\end{aligned}$$

Puisque  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  est périodique et que le vecteur contrainte  $[\mathbb{C} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0)] \cdot \mathbf{n}$  est anti-périodique, le dernier terme de l'équation de l'expression ci-dessus s'annule. De plus, en intégrant les équations du mouvement dans l'équation (1.23) définissant l'opérateur de Green, nous avons

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla - i\mathbf{k}) : \mathbb{C} d\Omega(\mathbf{y}) = \mathbf{I}|\Omega| + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \omega^2 \tilde{\mathbf{G}}^* \rho d\Omega(\mathbf{y}), \quad (1.26)$$

où  $\mathbf{I}$  désigne le tenseur d'identité d'ordre deux. Enfin, en faisant apparaître  $\tilde{\mathbf{E}} - (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0)$  à la place de  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  dans l'équation (1.25) et en combinant cette dernière avec l'équation (1.26), nous aboutissons à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= \langle \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \tilde{\mathbf{G}}^* \rangle_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{f}} - \langle \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla - i\mathbf{k}) : \mathbb{C} \rangle_{\mathbf{y}} : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) \\ &+ \langle i\omega \tilde{\mathbf{G}}^* \rho \rangle_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Nous allons localiser  $\tilde{\mathbf{u}}$  par rapport à  $\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$ . En faisant la moyenne volumique de l'équation (1.27), nous exprimons  $\tilde{\mathbf{f}}$  en fonction de  $\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  comme suit :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \gg^{-1} \cdot \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla - i\mathbf{k}) : \mathbb{C} \gg : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) - \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \gg^{-1} \cdot i\omega \tilde{\mathbf{G}}^* \rho \cdot \tilde{\mathbf{V}}.$$

En injectant l'expression de  $\tilde{\mathbf{f}}$  ci-dessus dans l'équation (1.27), il vient que

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \langle \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \rangle + \mathcal{M}(\mathbf{x}) : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}, \quad (1.28)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{x}) &= \langle \tilde{\mathbf{G}}^* \rangle_{\mathbf{y}} \cdot \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \gg^{-1} \cdot \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla - i\mathbf{k}) : \mathbb{C} \gg \\ &- \langle \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla - i\mathbf{k}) : \mathbb{C} \rangle_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \langle \tilde{\mathbf{G}}^* \rangle_{\mathbf{y}} \cdot \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \gg^{-1} \cdot \ll -i\omega \tilde{\mathbf{G}}^* \rho \gg + \langle i\omega \tilde{\mathbf{G}}^* \rho \rangle_{\mathbf{y}}. \quad (1.30)$$

Nous voyons bien que sans introduire le tenseur de déformations libres  $\tilde{\mathbf{E}}_0$ , la dépendance entre  $\tilde{\mathbf{E}}$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  donnerait une infinité de possibilités pour  $\mathcal{M}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ . Par contre, l'utilisation de  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  permet de rendre les expressions de  $\mathcal{M}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  uniques grâce à l'indépendance de  $\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0$  par rapport à  $\tilde{\mathbf{V}}$ .

A partir de l'équation (1.28), nous obtenons l'expression de  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) &= (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \\ &= \tilde{\mathbf{E}} + (\nabla_{\mathbf{x}} + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{M}(\mathbf{x}) : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) + (\nabla_{\mathbf{x}} + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

L'introduction de (1.31) dans (1.19) donne l'expression de  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) &= \mathbb{C}(\mathbf{x}) : [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{E}}_0] \\ &= \mathbb{C}(\mathbf{x}) : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \mathbb{C}(\mathbf{x}) : (\nabla_{\mathbf{x}} + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{M}(\mathbf{x}) : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) \\ &+ \mathbb{C}(\mathbf{x}) : (\nabla_{\mathbf{x}} + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

De même, nous avons l'expression des quantités de mouvement  $\tilde{\mathbf{p}}$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) &= \rho(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \\ &= -i\omega\rho(\mathbf{x})\mathcal{M}(\mathbf{x}) : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \rho(\mathbf{x})[\mathbf{I} - i\omega\mathbf{N}(\mathbf{x})] \cdot \tilde{\mathbf{V}}.\end{aligned}\quad (1.33)$$

Finalement, en prenant la moyenne volumique des équations (1.32) et (1.33), nous obtenons les expressions des propriétés effectives en fonction de l'opérateur de Green :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega) &= \langle \mathbb{C}(\mathbf{x}) \rangle - \ll \mathbb{C} : (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla - i\mathbf{k}) : \mathbb{C} \gg \\ &+ \ll \mathbb{C} : (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \gg \cdot \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \gg^{-1} \cdot \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla - i\mathbf{k}) : \mathbb{C} \gg,\end{aligned}\quad (1.34)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega) &= \ll \mathbb{C} : (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \gg \cdot \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \gg^{-1} \cdot \ll -i\omega\tilde{\mathbf{G}}^* \rho \gg \\ &+ \ll \mathbb{C} : (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s i\omega\tilde{\mathbf{G}}^* \rho \gg,\end{aligned}\quad (1.35)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega) &= \ll -i\omega\rho\tilde{\mathbf{G}}^* \gg \cdot \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \gg^{-1} \cdot \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla - i\mathbf{k}) : \mathbb{C} \gg \\ &+ \ll i\omega\rho\tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla - i\mathbf{k}) : \mathbb{C} \gg,\end{aligned}\quad (1.36)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega) &= \langle \rho(\mathbf{x})\mathbf{I} \rangle + \ll i\omega\rho\tilde{\mathbf{G}}^* \gg \cdot \ll \tilde{\mathbf{G}}^* \gg^{-1} \cdot \ll i\omega\tilde{\mathbf{G}}^* \rho \gg \\ &+ \ll \omega^2\rho\tilde{\mathbf{G}}^* \rho \gg.\end{aligned}\quad (1.37)$$

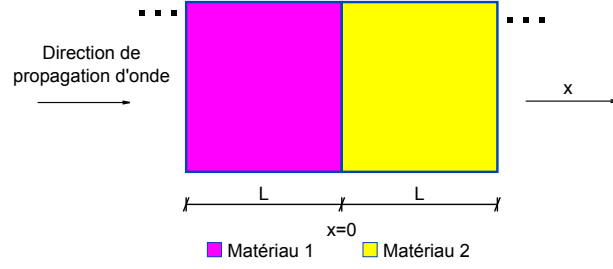
Notons que les tenseurs effectifs ont les symétries suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega) &= [\mathbb{C}^{\text{hom}}(-\mathbf{k}, \omega)]^T, & \mathbf{R}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega) &= [\mathbf{R}^{\text{hom}}(-\mathbf{k}, \omega)]^T, \\ \mathcal{T}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega) &= [\mathcal{S}^{\text{hom}}(-\mathbf{k}, \omega)]^T, & \mathcal{S}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega) &= [\mathcal{T}^{\text{hom}}(-\mathbf{k}, \omega)]^T, \\ [\mathbb{C}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega)]^T &= [\mathbb{C}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega)]^*, & [\mathbf{R}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega)]^T &= [\mathbf{R}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega)]^*, \\ [\mathcal{T}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega)]^T &= -[\mathcal{S}^{\text{hom}}(\mathbf{k}, \omega)]^*.\end{aligned}$$

grâce à la symétrie de l'opérateur de Green :  $\tilde{\mathbf{G}}^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

## 1.6 Courbe de dispersion

La courbe de dispersion est la représentation graphique de l'ensemble des couples  $(\mathbf{k}, \omega)$  vérifiant la relation de dispersion nécessaire à l'existence d'ondes libres, à savoir les solutions non-nulles des équations du mouvement lorsque la force volumique  $\mathbf{f}$  est nulle. Pour bien comprendre la construction de cette courbe, nous considérons le cas 1D d'un composite stratifié périodique dont la cellule de base (Voir la Fig. 1.2) est constituée de deux couches de même épaisseur  $L$ .



**Figure 1.2:** Cellule de base 1D du composite à deux couches d'épaisseur  $L$ .

L'équation du mouvement pour le cas 1D en question s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f = \rho \ddot{u}, \quad (1.38)$$

où  $E$  est le module élastique. En y introduisant les formes de Bloch, données par l'équation (1.6), des champs considérés, nous obtenons une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \left( k^2 - \frac{\rho \omega^2}{E} \right) \tilde{u} + \frac{\tilde{f}}{E} = 0. \quad (1.39)$$

Le champ du déplacement  $\tilde{u}$  et le champ de la contrainte  $E \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + ik\tilde{u} \right)$  doivent vérifier les conditions de périodicité. Le champ  $\tilde{u}$  solution de l'équation (1.39) prend la forme

$$\tilde{u}_m = a_m e^{\lambda_m x} + b_m e^{\mu_m x} + d_m,$$

où  $\tilde{u}_m$  désigne le déplacement dans la phase  $m \in \{1, 2\}$ ;  $a_m, b_m, d_m$  sont des réels à déterminer;  $\lambda_m$  et  $\mu_m$  sont les racines de l'équation caractéristique

$$\alpha^2 + 2ik\alpha - k^2 + \frac{\rho \omega^2}{E} = 0.$$

Nous pouvons trouver facilement que

$$\lambda, \mu = -ik \pm i\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}.$$

Dans le but de déterminer les six inconnues  $(a_m, b_m, d_m)$ , nous introduisons les notations suivantes :

– le gradient :

$$\left[ \tilde{\nabla} \right] = \begin{bmatrix} \lambda_1 + ik & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 + ik & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ik & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 + ik & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 + ik & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ik \end{bmatrix},$$

– la matrice d'élasticité :

$$[C] = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{bmatrix},$$

– la matrice de masse :

$$[M] = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 \end{bmatrix},$$

– la condition de continuité à l'interface entre les deux phases :

$$\{\delta\}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

– la condition de périodicité au bord :

$$\{\eta\}^T = \begin{bmatrix} e^{-L\lambda} & e^{-L\mu} & 1 & -e^{L\lambda} & -e^{L\mu} & -1 \end{bmatrix}.$$

En utilisant les notations ci-dessus, l'équation du mouvement (1.38) s'écrit

$$\left[ \tilde{\nabla} C \tilde{\nabla} \right] \{\tilde{u}\} + \omega^2 [M] \{\tilde{u}\} = \{0\}. \quad (1.40)$$

De plus, la continuité du déplacement et celle de la contrainte à l'interface des deux phases s'expriment par

$$\{\delta\}^T \{\tilde{u}\} = 0, \quad (1.41)$$

$$\{\delta^T C \tilde{\nabla}\} \{\tilde{u}\} = 0. \quad (1.42)$$

Enfin, les conditions de périodicité sont formulées par

$$\{\eta\}^T \{\tilde{u}\} = 0, \quad (1.43)$$

$$\{\eta^T C \tilde{\nabla}\} \{\tilde{u}\} = 0. \quad (1.44)$$

A partir de l'équation différentielle (1.40), nous pouvons déterminer la constante  $d_m$  pour chacune des deux phases. A l'aide des équations (1.41)-(1.44), nous pouvons calculer les constantes  $a_m$  et  $b_m$  pour chaque phase. Nous cherchons la courbe de dispersion, à savoir les couples  $(k, \omega)$  permettant l'existence de solutions non triviales  $a_m, b_m, d_m$  pour  $f = 0$ .

Le système d'équations peut finalement s'écrire sous la forme :

$$[K]_{k,\omega} u = 0,$$

avec

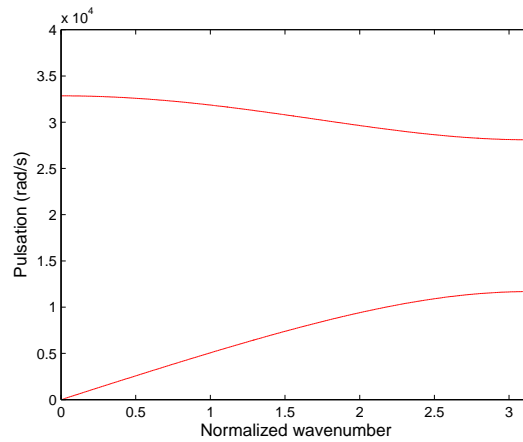
$$[K]_{k,\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^2 - \omega^2 \frac{\rho_1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 - \omega^2 \frac{\rho_2}{E_2} \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ e^{-\lambda_1 L} & e^{-\mu_1 L} & 1 & -e^{-\lambda_2 L} & -e^{-\mu_2 L} & -1 \\ E_1(\lambda_1 + ik) & E_1(\mu_1 + ik) & ikE_1 & -E_2(\lambda_2 + ik) & -E_2(\mu_2 + ik) & -ikE_2 \\ E_1(\lambda_1 + ik)e^{-\lambda_1 L} & E_1(\mu_1 + ik)e^{-\mu_1 L} & ikE_1 & -E_2(\lambda_2 + ik)e^{-\lambda_2 L} & -E_2(\mu_2 + ik)e^{-\mu_2 L} & -ikE_2 \end{bmatrix}.$$

La relation de dispersion est donc caractérisée par l'équation  $\det[K]_{k,\omega} = 0$  qui est équivalente à la suivante :

$$(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2 \cos \frac{L\omega (c_1 + c_2)}{c_1 c_2} - (\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1)^2 \cos \frac{L\omega (c_1 - c_2)}{c_1 c_2} = 4\rho_1 \rho_2 c_1 c_2 \cos(2Lk), \quad (1.45)$$

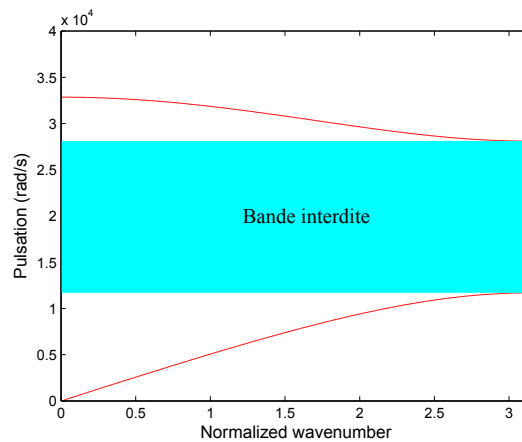
où  $c_m = \sqrt{\frac{\lambda_m + 2\mu_m}{\rho_m}}$  est la célérité longitudinale dans la phase  $m = 1$  ou  $2$ . L'expression (1.45) correspond au résultat de Rytov [30] dans le cas d'un composite stratifié à deux couches de même épaisseur.

Pour une application numérique, nous choisissons les valeurs  $L = 0.005(m)$ ,  $E_1 = 2.10^6(Pa)$ ,  $\rho_1 = 1000(kg/m^3)$ ,  $E_2 = 3.10^{11}(Pa)$ ,  $\rho_2 = 2000(kg/m^3)$ . Dans la Fig. 1.3, nous traçons la courbe de dispersion correspondante.



**Figure 1.3:** Courbe de dispersion du composite biphasique 1D (de cellule de base représentée dans la Fig. 1.2) obtenue par la solution analytique.

Dans la Fig. 1.3, nous ne montrons que deux branches parmi l'infinité de branches de la courbe de dispersion. Dans ce cas, nous constatons une bande interdite de fréquences, représentée en bleu à la Fig. 1.4, où aucune onde ne se propage.



**Figure 1.4:** Une bande interdite de la courbe de dispersion du composite biphase 1D ( de cellule de base représentée dans la Fig. 1.2).

Dans la bande interdite, la vitesse de phase est complexe. En effet, comme le nombre d'onde  $k$  est imaginaire, le terme  $e^{ikx}$  cause l'atténuation des ondes dans l'espace.



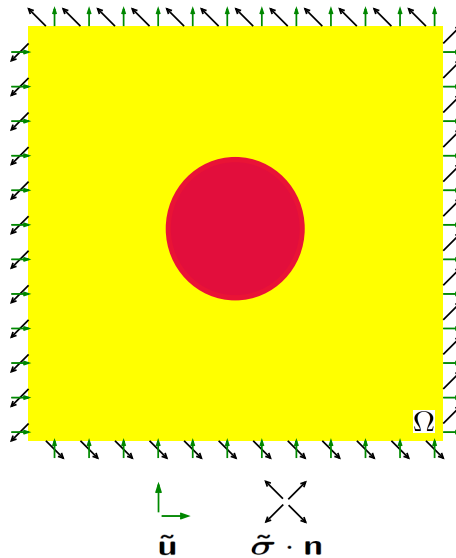


# Chapitre 2

## Calcul des propriétés élastodynamiques effectives par la méthode des éléments finis

### 2.1 Propriétés effectives en fonction de deux tenseurs de localisation

Nous traitons un problème d'homogénéisation élastodynamique sur une cellule de base  $\Omega$  soumise à des conditions aux limites de périodicité pour le champ des déplacements  $\tilde{\mathbf{u}}$  et d'anti-périodicité pour le vecteur des contraintes  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$ , comme illustré à la Fig. 2.1.



**Figure 2.1:** Cellule de base avec conditions aux limites.

Dans le paragraphe (1.5) nous avons donné les expressions des propriétés élastodynamiques effectives en fonction de l'opérateur de Green donné par les équations (1.34-1.37) du problème

formulé pour une cellule de base. La détermination analytique de cet opérateur est impossible dans le cas général. Il est donc nécessaire de déterminer numériquement les propriétés effectives. Nous commençons par introduire les deux tenseurs de localisation du troisième ordre  $\mathcal{A}$  et du second ordre  $\mathbf{B}$ , dépendant de  $\mathbf{k}$  et de  $\omega$ , tels que

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}_{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{x}) : \tilde{\mathbf{E}}_0 + \mathbf{B}_{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}. \quad (2.1)$$

Cette relation "localise"  $\tilde{\mathbf{u}}$  par rapport aux chargements imposés  $\tilde{\mathbf{f}}$  et  $\tilde{\mathbf{E}}_0$ . Du fait de l'indépendance entre  $\tilde{\mathbf{f}}$  et  $\tilde{\mathbf{E}}_0$ , les tenseurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont uniques. Numériquement, une colonne de ces tenseurs est déterminée en imposant le chargement unitaire correspondant. Grâce à ces tenseurs, nous pouvons localiser tous les champs inconnus en fonction de  $\tilde{\mathbf{f}}$  et  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{A} - \mathbf{I} & (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{B} \\ -i\omega\mathcal{A} & -i\omega\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{A} - \mathbf{I}] & \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{B}] \\ -\omega^2 \rho \mathcal{A} & -\omega^2 \rho \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Ensuite, en prenant la moyenne volumique des relations ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{A} - \mathbf{I} \rangle & \langle (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{B} \rangle \\ -i\omega \langle \mathcal{A} \rangle & -i\omega \langle \mathbf{B} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{A} - \mathbf{I}] \rangle & \langle \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{B}] \rangle \\ -\omega^2 \langle \rho \mathcal{A} \rangle & -\omega^2 \langle \rho \mathbf{B} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Finalement, la relation constitutive effective peut être écrite comme

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{\text{hom}} & \mathcal{T}^{\text{hom}} \\ \mathcal{S}^{\text{hom}} & \mathbf{R}^{\text{hom}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix},$$

où

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}^{\text{hom}} & \mathcal{S}^{\text{hom}} \\ \mathcal{T}^{\text{hom}} & \mathbf{R}^{\text{hom}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{A} - \mathbf{I}] \rangle & \langle \mathbb{C} : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{B}] \rangle \\ -\omega^2 \langle \rho \mathcal{A} \rangle & -\omega^2 \langle \rho \mathbf{B} \rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \langle (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathcal{A} - \mathbf{I} \rangle & \langle (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \mathbf{B} \rangle \\ -i\omega \langle \mathcal{A} \rangle & -i\omega \langle \mathbf{B} \rangle \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.6)$$

est une matrice complexe de dimension  $d(d+3)/2 \times d(d+3)/2$  en dimension  $d$  (dD),  $9 \times 9$  en 3D,  $5 \times 5$  en 2D et  $2 \times 2$  en 1D.

Le schéma d'homogénéisation numérique peut être résumé comme suit :

- Choisir un couple  $(\mathbf{k}, \omega)$ .
- Résoudre les équations du mouvement (1.12) pour les différents chargements :  $(\tilde{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{e}_i \otimes^s \mathbf{e}_j, \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0})$  et  $(\tilde{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{e}_i)$ . Pour cela, nous devons résoudre  $d(d+1)/2 + d$  problèmes élémentaires.
- Après avoir trouvé  $\tilde{\mathbf{u}}$ , en déduire  $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}},$  et  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ .
- Calculer les moyennes  $\tilde{\mathbf{E}}$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  des amplitudes de Bloch  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\tilde{\mathbf{v}}$  sur  $\Omega$  pour trouver  $[\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0, \tilde{\mathbf{V}}]^T$  qui détermine une colonne de la matrice de localisation de l'équation (2.4) et calculer les moyennes  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$  et  $\tilde{\mathbf{P}}$  des amplitudes de Bloch  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\tilde{\mathbf{p}}$  sur  $\Omega$  pour trouver  $[\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}, \tilde{\mathbf{P}}]^T$  qui détermine une colonne de la matrice de localisation de l'équation (2.5).
- Ayant les deux matrices de localisation, déterminer les propriétés effectives selon l'équation (2.6).

## 2.2 Formulation faible du problème de localisation

Une méthode efficace de résolution des équations du mouvement (1.12) est la méthode des éléments finis. Nous considérons une cellule de base  $\Omega$  soumise à une force volumique uniforme  $\tilde{\mathbf{f}}$  et à une déformation libre  $\tilde{\mathbf{E}}_0$ . De plus, nous imposons des conditions périodiques pour le champ des déplacements  $\tilde{\mathbf{u}}$  et des conditions anti-périodiques pour le vecteur des contraintes  $\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$  sur le bord  $\partial\Omega$ . Pour établir une formulation faible, nous commençons par l'écriture des équations du mouvement conjuguées

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* + \mathbf{f}^* = -\omega^2 \rho \mathbf{u}^*. \quad (2.7)$$

En multipliant l'équation ci-dessus par une fonction test  $\delta \mathbf{u}$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega$ , nous obtenons

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^*) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega = -\omega^2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega.$$

A l'aide du théorème de la divergence et en tenant compte des conditions aux limites périodiques, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \mathbb{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tilde{\mathbf{u}})^* : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\delta \tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho \tilde{\mathbf{u}}^* \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{E}}_0 : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\delta \tilde{\mathbf{u}}) \, d\Omega, \quad (2.8)$$

qui est la formulation faible du problème. Nous insistons sur le fait que le champ test  $\delta \tilde{\mathbf{u}}$  est périodique en raison des conditions aux limites de périodicité pour  $\tilde{\mathbf{u}}$ .

## 2.3 Discrétisation

Par souci de simplicité, nous présentons la discrétisation en 2D. Celle en 3D peut s'effectuer de façon similaire.

La discrétisation  $\{\tilde{\mathbf{u}}\}^*$  du champ des déplacements est construite par

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\}^* = [\mathbf{N}] \{\tilde{\mathbf{u}}_{Node}\}^*,$$

où  $[\mathbf{N}]$  est la matrice des fonctions de forme et où  $\{\tilde{\mathbf{u}}_{Node}\}^*$  est le vecteur des déplacements nodaux d'un élément. Dans ce travail, nous utilisons en particulier les fonctions de forme d'un élément triangulaire. La discrétisation  $\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^*$  du tenseur des déformations est fournie par

$$\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^* = \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}) - i \mathbf{k} \otimes^s \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}) = [\mathbf{Y}] \{\tilde{\mathbf{u}}_{Node}\}^* - i [\mathbf{k}] [\mathbf{N}] \{\tilde{\mathbf{u}}_{Node}\}^*.$$

La matrice des fonctions de forme  $[\mathbf{N}]$ , celle des dérivées des fonctions de forme  $[\mathbf{Y}]$  et celle du vecteur d'onde  $[\mathbf{k}]$  sont données par

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) & 0 & N_2(\mathbf{x}) & 0 & N_3(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & N_1(\mathbf{x}) & 0 & N_2(\mathbf{x}) & 0 & N_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\mathbf{x})}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2(\mathbf{x})}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3(\mathbf{x})}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(\mathbf{x})}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2(\mathbf{x})}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial N_1(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial N_2(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial N_2(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial N_3(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial N_3(\mathbf{x})}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \\ k_y & k_x \end{bmatrix}.$$

La formulation faible définie à l'équation (2.8) devient alors

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \{\tilde{\mathbf{u}}\}^* = \{\mathbf{F}\} \quad (2.9)$$

avec

$$[\mathbf{K}] = \int_{\Omega} [\mathbf{Y}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{Y}] d\Omega - i \int_{\Omega} [\mathbf{Y}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{k}] [\mathbf{N}] d\Omega + i \int_{\Omega} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{k}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{Y}] d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{k}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{k}] [\mathbf{N}] d\Omega, \quad (2.10)$$

$$[\mathbf{M}] = \int_{\Omega} \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d\Omega, \quad (2.11)$$

$$\{\mathbf{F}\} = \int_{\Omega} [\mathbf{Y}]^T [\mathbf{C}] \{\tilde{\mathbf{E}}_0\} d\Omega + i \int_{\Omega} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{k}]^T [\mathbf{C}] \{\tilde{\mathbf{E}}_0\} d\Omega + \int_{\Omega} [\mathbf{N}]^T \{\tilde{\mathbf{f}}\} d\Omega. \quad (2.12)$$

Nous constatons que la matrice de rigidité et la matrice de masse respectivement définis par les équations (2.10) et (2.11) sont Hermitiennes, c'est-à-dire  $[\mathbf{K}]^T = [\mathbf{K}]^*$ ,  $[\mathbf{M}]^T = [\mathbf{M}]^*$ .

La condition de périodicité du champ des déplacements au bord est prise en compte en imposant

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\}^{*+} = \{\tilde{\mathbf{u}}\}^{*-}, \quad (2.13)$$

où les signes "+" et "-" désignent les noeuds homologues du maillage au bord de la cellule de base. Cette condition a également été imposée par Nemat-Nasser et Srivastava [26].

Concernant la taille du maillage, la dimension d'un élément est tout d'abord choisie comme 5 fois plus petite que la longueur d'onde (pour le cas 1D,  $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{\rho}}$ ). Ensuite, le maillage est encore raffiné jusqu'à la convergence de la solution.

## 2.4 Courbe de dispersion

Après la discrétisation, nous cherchons les couples  $(\mathbf{k}, \omega)$  qui satisfont l'équation caractérisant la relation de dispersion :

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & \mathbf{P}^T \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\det (\mathbf{K}_{glob} - \omega^2 \mathbf{M}_{glob}) = 0,$$

avec

$$\mathbf{K}_{glob} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{P}^T \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{glob} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Dans les expressions ci-dessus,  $\mathbf{P}$  est la matrice associée à la condition de périodicité de l'équation (2.13), en introduisant les multiplicateurs de Lagrange  $\mathbf{\Lambda}$  comme ci-après :

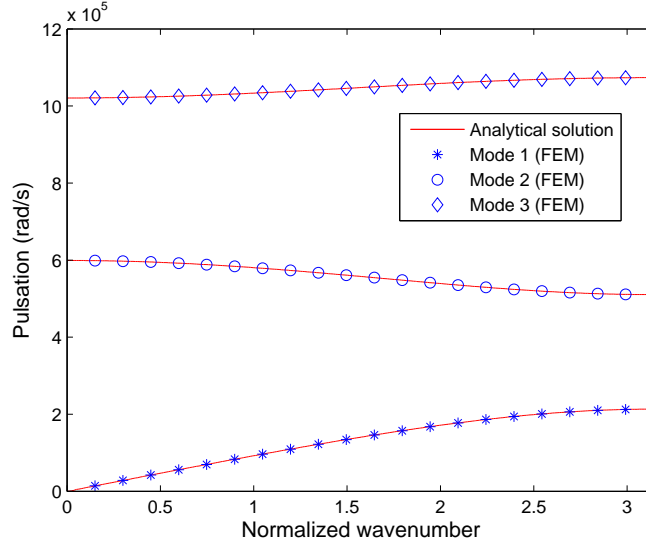
$$[\mathbf{P}]\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \{0\},$$

$$([\mathbf{K}_{glob}] - \omega^2 [\mathbf{M}_{glob}]) \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{\Lambda} \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{P}^T \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}.$$

Nous obtenons les pulsations propres  $\omega$  à partir des valeurs propres  $\omega^2$  associés aux vecteurs propres  $\mathbf{Q}$ , solutions du problème aux valeurs propres généralisé suivant,

$$\mathbf{K}_{glob} \{ \mathbf{Q} \} = \omega^2 \mathbf{M}_{glob} \{ \mathbf{Q} \}.$$

Afin de comparer la solution numérique et la solution exacte, nous prenons l'exemple 1D décrit précédemment, avec une épaisseur  $L = 0.005(m)$ , les modules d'élasticité  $E_1 = 1.10^9(Pa)$  et  $E_2 = 200.10^9(Pa)$  et les densités de masse  $\rho_1 = 1500(kg/m^3)$  et  $\rho_2 = 3000(kg/m^3)$ . Nous voyons clairement sur la Fig.2.2 que les deux résultats coïncident parfaitement. Ceci constitue une première validation de la méthode numérique.



**Figure 2.2:** Courbe de dispersion du composite biphasique 1D ( de cellule de base représentée dans la Fig. 1.2) : solutions analytique (trait continu) et solution obtenue par MEF (étoiles, cercles, diamants).

Dans la partie suivante, nous calculons les propriétés effectives dans certains cas 1D. La comparaison sera faite vis-à-vis des résultats de Nemat Nasser et Srivastava [26].

## 2.5 Exemples numériques 1D

Nemat-Nasser et Srivastava [26] ont calculé les propriétés effectives de certains composites stratifiés 1D. Ils divisent les phases constituantes en petits sous-domaines dans lesquels les champs en question sont supposés constants, dans le but de calculer de façon approchée les champs moyens. Ils écrivent la loi de comportement élastodynamique effective sous la forme

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varepsilon} \rangle &= \bar{D} \langle \tilde{\sigma} \rangle + \bar{T}^1 \langle \tilde{v} \rangle, \\ \langle \tilde{p} \rangle &= \bar{T}^2 \langle \tilde{\sigma} \rangle + \bar{R} \langle \tilde{v} \rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

De notre côté, nous utilisons la méthode des éléments finis pour calculer les propriétés effectives. En comparant les équations (1.21) et (2.14), nous dégageons les relations entre les

paramètres effectifs :

$$\begin{aligned}\bar{D} &= (C^{\text{hom}})^{-1}, \\ \bar{T}^1 &= -(C^{\text{hom}})^{-1}T^{\text{hom}}, \\ \bar{T}^2 &= S^{\text{hom}}(C^{\text{hom}})^{-1}, \\ \bar{R} &= R^{\text{hom}} - S^{\text{hom}}(C^{\text{hom}})^{-1}T^{\text{hom}}.\end{aligned}$$

En 1D, Nemat-Nasser et Srivastava [26] ont également défini des relations effectives liant, sans couplage, la déformation à la contrainte, et la quantité de mouvement à la vitesse :

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\varepsilon} \rangle &= D^{\text{eff}} \langle \tilde{\sigma} \rangle, \\ \langle \tilde{p} \rangle &= \rho^{\text{eff}} \langle \tilde{v} \rangle,\end{aligned}\tag{2.15}$$

où

$$D^{\text{eff}} = \frac{\bar{D}}{1 + v_p \bar{T}^1},\tag{2.16}$$

$$\rho^{\text{eff}} = \frac{\bar{R}}{1 + v_p \bar{T}^2},\tag{2.17}$$

avec

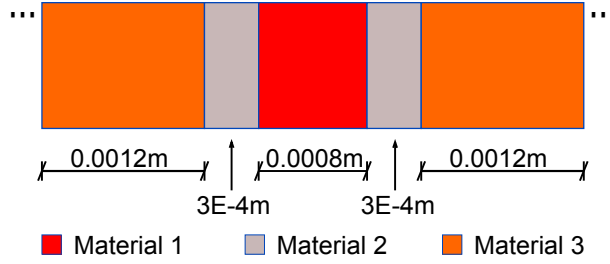
$$v_p^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{D^{\text{eff}} \rho^{\text{eff}}}.\tag{2.18}$$

Pour une dimension physique supérieure à 1, nous ne pourrions pas contourner le couplage de cette façon.

Dans la suite, nous présentons d'abord nos résultats numériques quant aux propriétés effectives  $D^{\text{eff}}$ ,  $\rho^{\text{eff}}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{T}_1$ ,  $\bar{T}_2$  et  $\bar{R}$ . Ces résultats sont ensuite comparés à ceux obtenus par Nemat-Nasser et Srivastava [26].

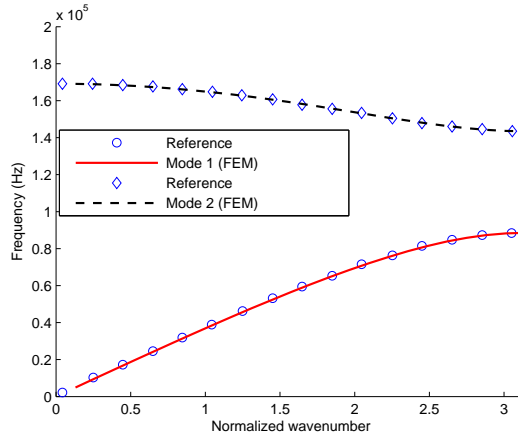
### 2.5.1 Exemple 1D avec une cellule de base symétrique

Pour comparaison, le composite stratifié étudié est identique à celui de Nemat-Nasser et Srivastava [26]. La cellule de base représentée dans la Fig. 2.3 est formée de cinq couches. La couche centrale est la plus rigide et la plus dense avec un module d'élasticité  $E_1 = 3.10^{13}(Pa)$  et une densité de masse  $\rho_1 = 8000(kg/m^3)$ . Les deux couches juxtaposées à cette dernière sont très souples par rapport aux autres avec  $E_2 = 3.10^8(Pa)$  et  $\rho_2 = 300(kg/m^3)$  et ont des épaisseurs identiques de sorte d'avoir une cellule symétrique. Les deux couches extérieures sont les plus épaisses, avec  $E_3 = 8.10^{11}(Pa)$  et  $\rho_3 = 1000(kg/m^3)$ .



**Figure 2.3:** Cellule de base 1D symétrique constituée de 3 phases.

La courbe de dispersion obtenue (voir Fig. 2.4) est identique à celle de Nemat-Nasser et Srivastava [26].



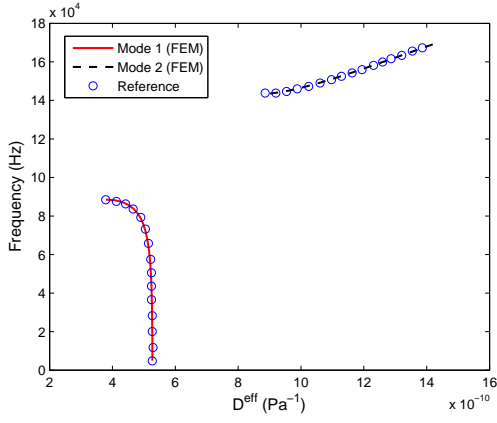
**Figure 2.4:** Courbe de dispersion du composite stratifié 1D symétrique (de cellule de base représentée dans la Fig.2.3).

Pour chaque couple  $(k, \omega)$  de la courbe de dispersion, nous calculons les propriétés élastodynamiques effectives. Dans ce cas,  $\bar{D}$ ,  $\bar{T}^1$ ,  $\bar{T}^2$ ,  $\bar{R}$  sont réels. Nous calculons directement  $D^{eff}$  (voir Fig. 2.5) et  $\rho^{eff}$  (voir Fig. 2.6) en fonction de  $(k, \omega)$ , à l'aide des équations (2.16) et (2.17). Malgré la symétrie de la cellule, les termes de couplage  $\bar{T}^1$  et  $\bar{T}^2$  se trouvent non nuls.

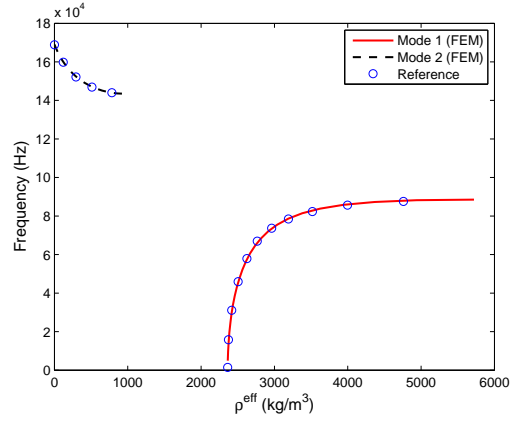
### 2.5.2 Exemple 1D avec une cellule de base anti-symétrique

Ensuite, nous étudions un autre exemple où les propriétés élastodynamiques effectives de couplage  $\bar{T}^1$  et  $\bar{T}^2$  sont de partie imaginaire non nulle. Les épaisseurs des couches les plus souples sont différentes (voir Fig. 2.7). Les propriétés des matériaux sont les mêmes que précédemment.

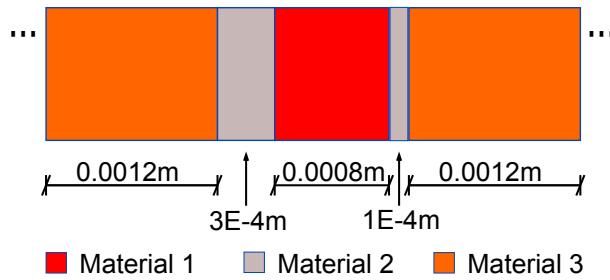




**Figure 2.5:** Densité effective  $D^{eff}$  du composite stratifié 1D symétrique.

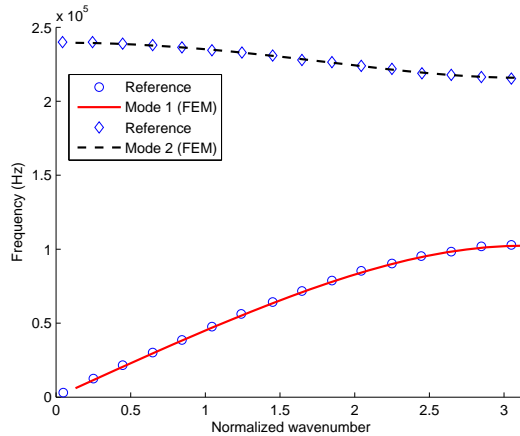


**Figure 2.6:** Souplesse effective  $\rho^{eff}$  du composite stratifié 1D symétrique.



**Figure 2.7:** Cellule de base 1D anti-symétrique constituée de 3 phases.

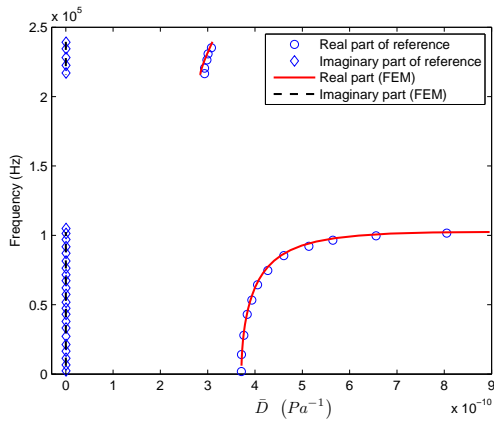
Encore une fois, la courbe de dispersion calculée par la MEF est exactement la même que celle trouvée par Nemat-Nasser et Srivastava [26]. Pour chaque couple  $(k, \omega)$  de cette courbe, les propriétés élastodynamiques effectives ont été calculées.



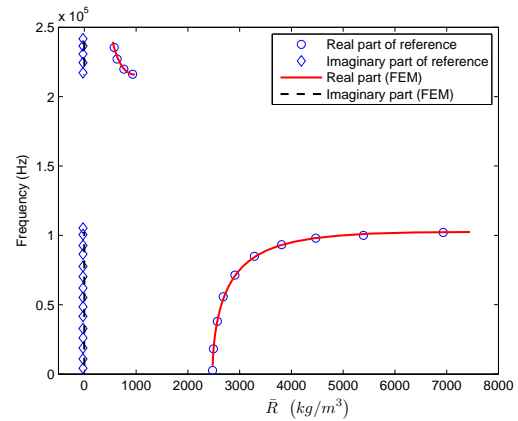
**Figure 2.8:** Courbe de dispersion du composite stratifié 1D anti-symétrique (de cellule de base représentée dans la Fig.2.7).

Dans le cas considéré,  $\bar{D}$  et  $\bar{R}$  sont réels tandis que  $\bar{T}^1$  et  $\bar{T}^2$  sont complexes et vérifient la

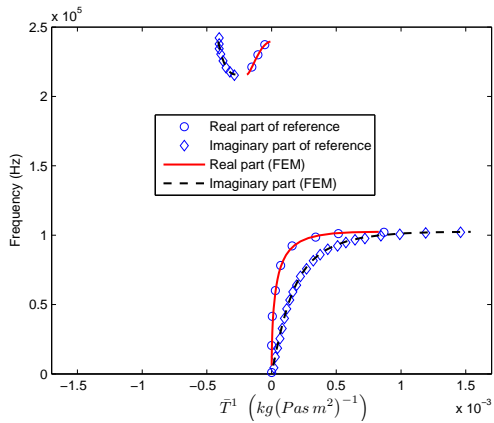
relation  $\bar{T}^1 T = \bar{T}^{2*}$ . Notre résultat coïncide avec celui de Nemat-Nasser et Srivastava [26], ce qui constitue une validation en 1D de la méthode numérique proposée.



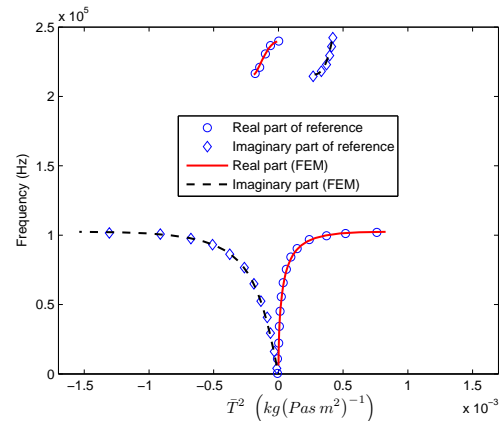
**Figure 2.9:** *Souplesse effective  $\bar{D}$  du composite stratifié 1D anti-symétrique.*



**Figure 2.10:** *Densité effective  $\bar{R}$  du composite stratifié 1D anti-symétrique.*



**Figure 2.11:**  *$\bar{T}^1$  du composite stratifié 1D anti-symétrique.*



**Figure 2.12:**  *$\bar{T}^2$  du composite stratifié 1D anti-symétrique.*

## 2.6 Exemple numérique 2D

Maintenant, nous appliquons notre méthode numérique pour traiter d'un cas 2D où le composite est en déformations planes. Les phases constituantes sont supposées isotropes. Ainsi, son tenseur de rigidité est donné par

$$C_{mnpq} = \lambda \delta_{mn} \delta_{pq} + \mu (\delta_{mp} \delta_{nq} + \delta_{mq} \delta_{np}),$$

en fonction des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  ou sous la forme matricielle suivante

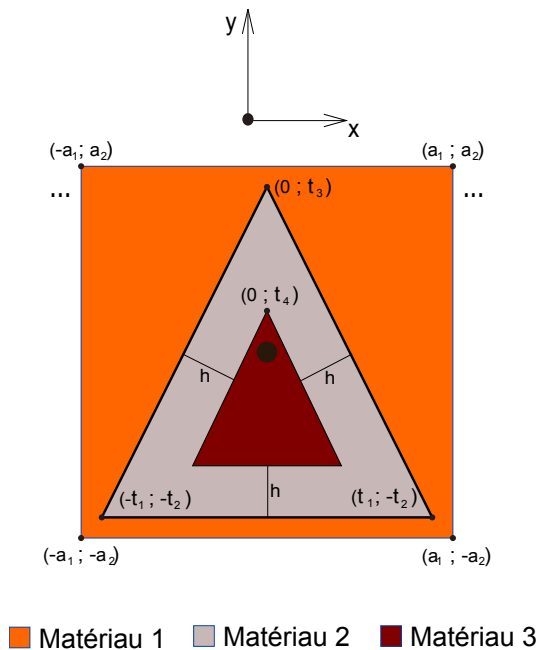
$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix},$$

en fonction du coefficient de Poisson  $\nu$  et du module d'Young  $E$ .

Un exemple a été étudié pour le cas où les composantes du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  sont telles que  $k_x \neq 0$  et  $k_y = 0$ . La cellule de base est formée d'une matrice rectangulaire dans laquelle est noyée une inclusion triangulaire via une interphase. Cette dernière est de rigidité et de densité faibles pour favoriser les effets dynamiques. Les dimensions de cette cellule sont données par  $a_1 = 0.0002(m)$ ,  $a_2 = 0.0002(m)$ ,  $t_1 = 0.00016(m)$ ,  $t_2 = 0.0001(m)$ ,  $t_3 = 0.00016(m)$ ,  $t_4 = 0.00002(m)$ . Les propriétés des phases constituantes sont choisies pour avoir un contraste prononcé. Les valeurs des propriétés des phases du composite sont précisées par le Tab. 2.1.

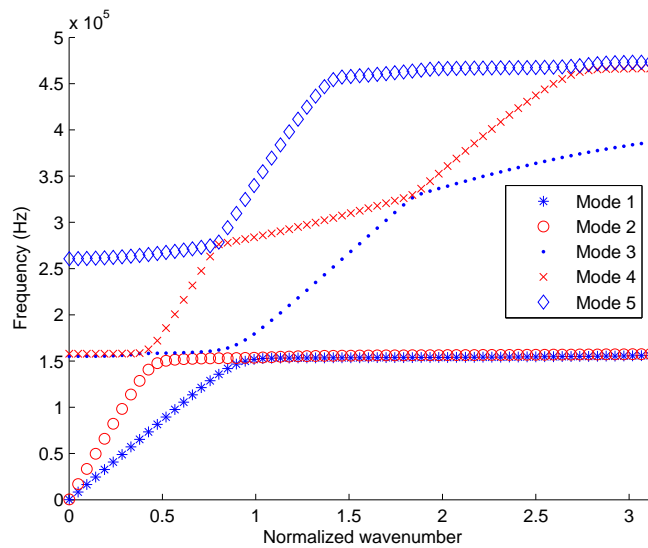
Matériaux	Module de Young $E(Pa)$	Densité de masse $\rho (kg/m^3)$	Coefficient de Poisson ( $\nu$ )
Matériau 1	$8.10^9$	6000	0.1
Matériau 2	$3.10^6$	300	0.4
Matériau 3	$300.10^9$	8000	0.2

**TABLE 2.1:** Tableau des propriétés des matériaux constituants

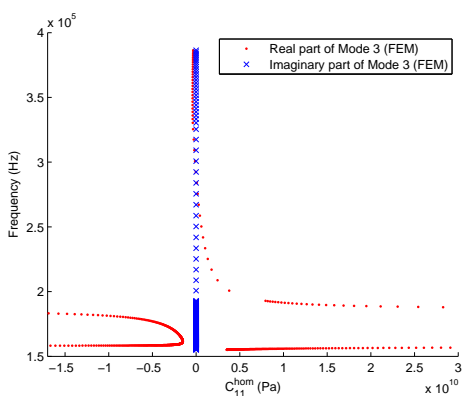


**Figure 2.13:** Cellule de base du composite 2D.

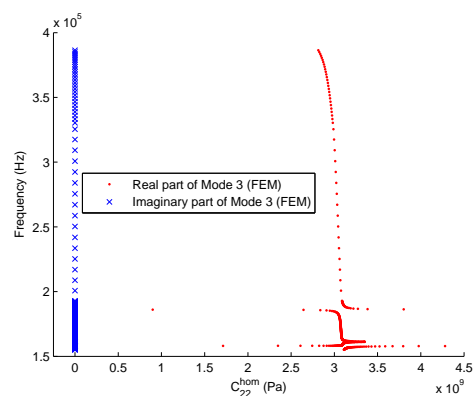
Pour un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  imposé, nous déterminons la pulsation  $\omega$  de façon que le couple  $(\mathbf{k}, \omega)$  soit sur une branche de la courbe de dispersion. Les propriétés élastodynamiques effectives sont tracées en fonction de  $\omega$ . Les figures Fig. 2.15 à Fig. 2.26 montrent une forte variation des propriétés effectives avec la fréquence. A partir de cet exemple, nous constatons des valeurs négatives pour les composantes du tenseur effectif de la densité de masse  $\mathbf{R}^{hom}$ . De plus, malgré que les matériaux constituants sont isotropes, la densité de masse effective  $\mathbf{R}^{hom}$  est devenue anisotrope. Nous voyons bien la différence entre les deux composantes  $R_{11}^{hom}$  et  $R_{22}^{hom}$  de  $\mathbf{R}^{hom}$  dans les figures Fig. 2.19, Fig. 2.20.



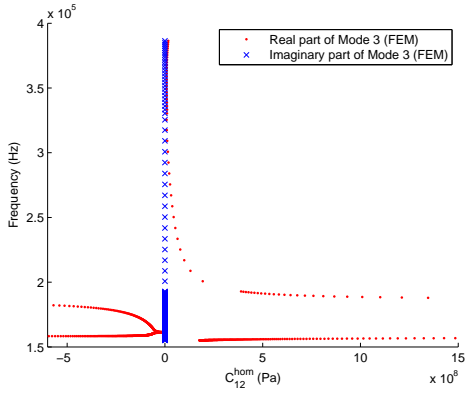
**Figure 2.14:** Courbe de dispersion du composite triphasique à inclusions triangulaires (de cellule de base représentée dans la Fig. 2.13).



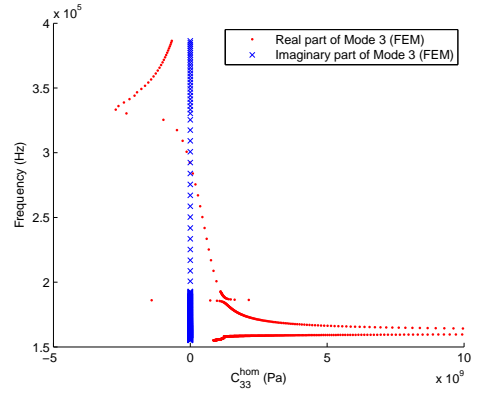
**Figure 2.15:**  $C_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



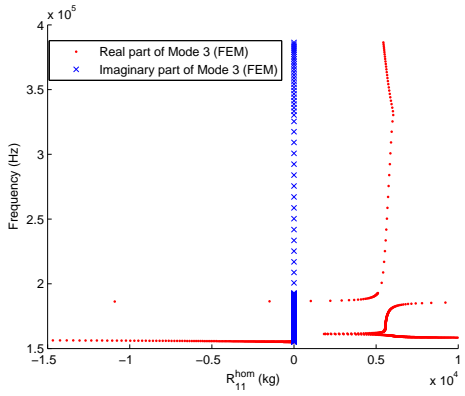
**Figure 2.16:**  $C_{22}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



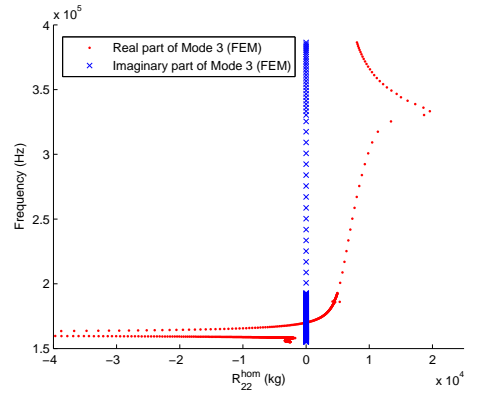
**Figure 2.17:**  $C_{12}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



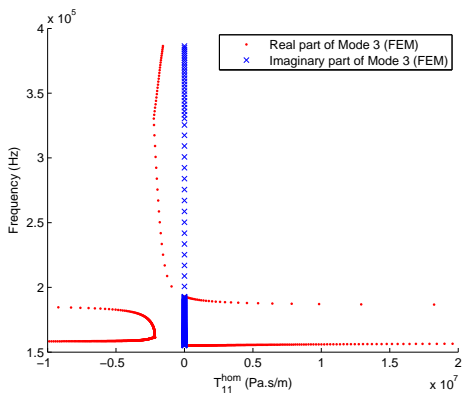
**Figure 2.18:**  $C_{33}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



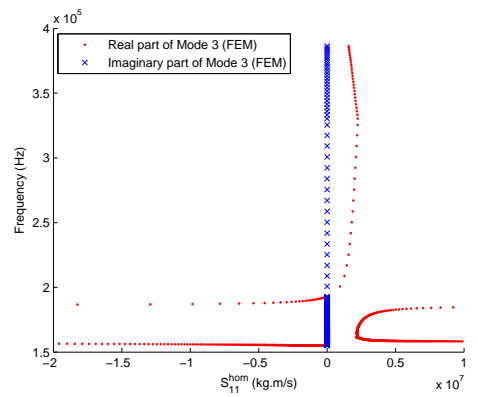
**Figure 2.19:**  $R_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



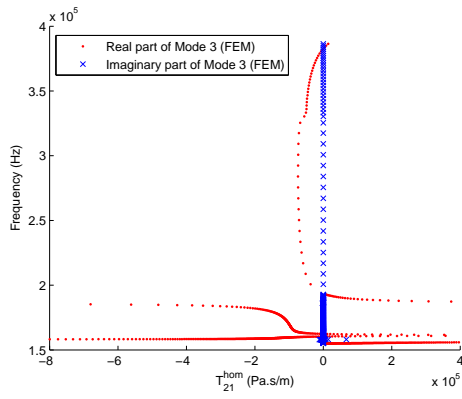
**Figure 2.20:**  $R_{22}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



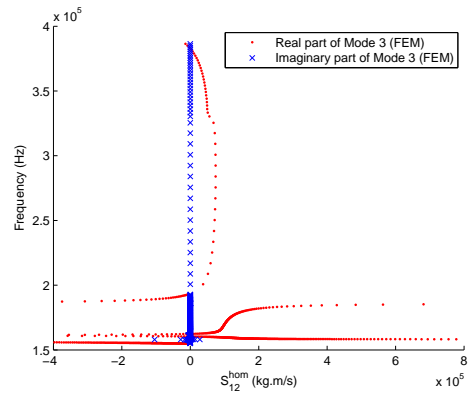
**Figure 2.21:**  $T_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



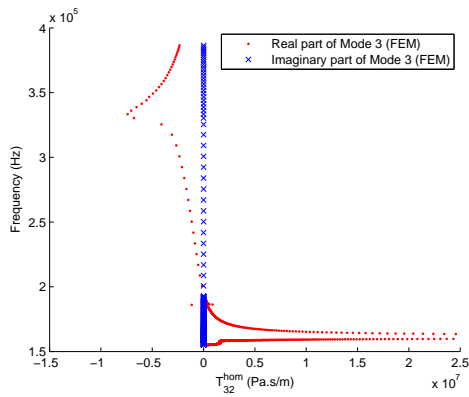
**Figure 2.22:**  $S_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



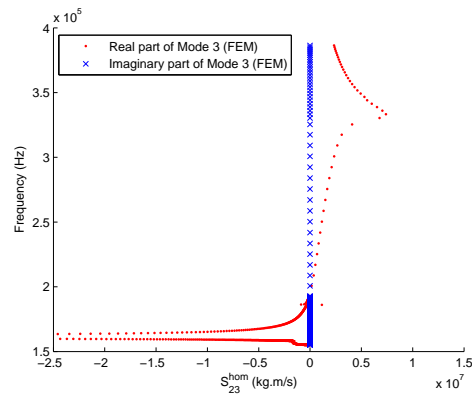
**Figure 2.23:**  $T_{21}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



**Figure 2.24:**  $S_{12}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



**Figure 2.25:**  $T_{32}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



**Figure 2.26:**  $S_{23}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 3) du composite triphasique à inclusions triangulaires.



# Chapitre 3

## Calcul des propriétés élastodynamiques effectives par la transformée de Fourier rapide

Nous proposons dans ce chapitre une méthode basée sur la transformée de Fourier rapide (TFR) afin de calculer les propriétés élastodynamiques effectives des composites périodiques. Cette méthode, utilisée initialement dans le contexte de l'élasticité linéaire et stationnaire, présente des avantages par rapport à la méthode classique des éléments finis. Plus précisément, au lieu de résoudre un système d'équations de grande dimension par MEF, dans la résolution du problème aux limites par TFR, grâce à l'utilisation des schémas itératifs, le temps et la mémoire de calcul pourraient être réduits considérablement. Particulièrement, l'utilisation d'une grille régulière, sans recours à un maillage des différentes phases constituant la cellule de base, permet de s'adapter aux microstructures aussi bien simples que complexes.

Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord quelques notions de base sur l'analyse de Fourier qui seront utilisées pour la suite de ce chapitre. Nous établissons ensuite une équation intégrale du problème élastodynamique sur laquelle repose la méthode de résolution numérique basée sur la TFR. Puis, nous proposons deux approches pour résoudre l'équation intégrale décrite précédemment. La première approche est en déformation et en vitesse ( $\mathbf{E} - \mathbf{V}$ ) tandis que la deuxième approche est en contrainte et en quantité de mouvement ( $\mathbf{\Sigma} - \mathbf{P}$ ). Dans ces deux approches, les fonctions caractéristiques des phases sont données : soit grâce à une discrétisation directe de l'image de la microstructure, soit à partir d'une troncature de leurs transformées de Fourier si elles sont connues. Nous discutons également sur les conditions de convergence des schémas itératifs utilisés. Mis à part le problème de convergence lié au con-



traste des phases constituantes du composite qui est déjà connu en statique, nous rencontrons dans le cas dynamique un autre problème lié au mode de sollicitation  $(\mathbf{k}, \omega)$  pour lequel nous proposons une solution qui s'est avérée efficace. Ensuite, nous présenterons quelques exemples numériques pour valider les approches proposées par des comparaisons des résultats obtenus avec ceux de la méthode des éléments finis. Les temps de calcul des deux approches ( $\mathbf{E} - \mathbf{V}$ ) et ( $\Sigma - \mathbf{P}$ ) sont également comparés.

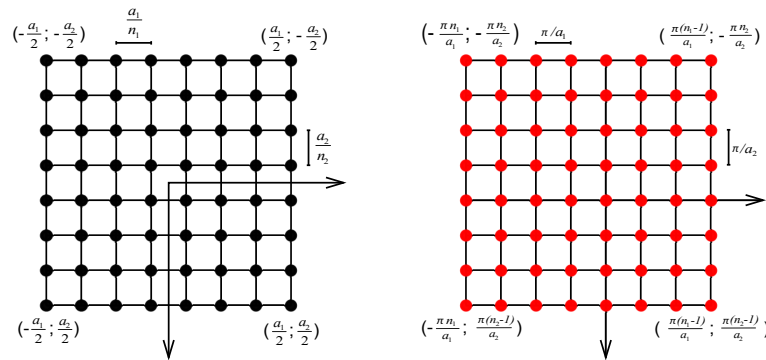
### 3.1 Notions de base

Nous considérons maintenant un matériau composite périodique bi-dimensionnel (2D) ou tri-dimensionnel (3D) dont une cellule de base typique, notée par  $\Omega$ , est supposé être rectangulaire dans le cas 2D ou cubique dans le cas 3D. Du fait que le composite en question est périodique, chaque champ périodique  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  peut être exprimé en série de Fourier sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_{m,n,p}) e^{i\boldsymbol{\xi}_{m,n,p} \cdot \mathbf{x}}, \quad (3.1)$$

où  $\widehat{\mathbf{F}}$  est la transformée de Fourier de  $\mathbf{F}$ . Dans le cas d'une cellule cubique, le vecteur d'onde  $\boldsymbol{\xi}_{m,n,p}$  de l'équation (3.1) est donné par  $\boldsymbol{\xi}_{m,n,p} = \left[ \frac{2\pi m}{a_1}, \frac{2\pi n}{a_2}, \frac{2\pi p}{a_3} \right]$ , où  $a_j$  est la longueur de la cellule de base dans la direction  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

L'expression (3.1) nous montre qu'un champ périodique  $\mathbf{F}$  peut être exprimé comme la somme de l'ensemble de ses valeurs prises aux noeuds d'une grille régulière de pas  $\frac{a_1}{m}, \frac{a_2}{n}, \frac{a_3}{p}$  où  $\{m, n, p\}$  désignent le nombre de points de discrétisations de vecteurs d'onde chacune de direction  $\{1, 2, 3\}$ . Sa transformée de Fourier est définie sur le réseau  $\frac{2\pi}{a_1} \mathbb{Z} \times \frac{2\pi}{a_2} \mathbb{Z} \times \frac{2\pi}{a_3} \mathbb{Z}$ . Cela est illustré dans la Fig. 3.1



**Figure 3.1:** Grille réelle et grille tronquée dans l'espace de Fourier.

Dans l'espace réel, pour capter les petites oscillations il faut raffiner le maillage de l'image pixelisée. Or, en travaillant dans le domaine de Fourier, il suffit d'augmenter le nombre de couches au delà des  $m, n, p$  initialement retenues.

Pour toute fonction  $\mathbf{F}$  de la variable réelle  $\mathbf{x}$ , sa transformée de Fourier  $\widehat{\mathbf{F}}$  est donnée par

$$\widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\Omega, \quad (3.2)$$

où  $|\Omega|$  dénote l'aire ou bien le volume de  $\Omega$ . Cette relation nous mène à

$$\widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\Omega \equiv \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}) \rangle .$$

Donc, les transformées de Fourier des champs des vitesses  $\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})$ , des quantités de mouvement  $\widehat{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\xi})$ , des déformations  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi})$  et des contraintes  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\xi})$  en  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  correspondent respectivement à leurs valeurs moyennes volumiques  $\langle \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \rangle$ ,  $\langle \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \rangle$ ,  $\langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \rangle$  et  $\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \rangle$ , c'est-à-dire aux champs macroscopiques associés  $\tilde{\mathbf{V}}$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}$  et  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ , à savoir

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) &= \tilde{\mathbf{E}} \quad , \quad \widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) = \tilde{\mathbf{V}}, \\ \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) &= \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \quad , \quad \widehat{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) = \tilde{\mathbf{P}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Particulièrement, il est bien connu que la transformée de Fourier d'un produit de convolution entre deux fonctions  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$  est le produit ordinaire des transformées de Fourier  $\widehat{\mathbf{g}}$  et  $\widehat{\mathbf{h}}$  de ces deux fonctions, et réciproquement. C'est-à-dire que nous avons

$$\widehat{\mathbf{g} * \mathbf{h}} = \widehat{\mathbf{g}} \cdot \widehat{\mathbf{h}}, \quad \widehat{\mathbf{g} \cdot \mathbf{h}} = \widehat{\mathbf{g}} * \widehat{\mathbf{h}},$$

où  $(*)$  dénote le produit de convolution.

Norris et al. [28] se sont servis des propriétés ci-dessus pour transformer les équations du mouvement en système algébrique infini. Ce système est alors résolu après troncature. Ici, nous nous servons des séries de Fourier combinées avec une approche par polarisations.

## 3.2 Equation intégrale

L'objectif de ce paragraphe est d'établir une équation intégrale du problème aux limites périodique en élastodynamique pour la cellule de base  $\Omega$ .

Similairement au cas élastostatique, la cellule de base initialement hétérogène caractérisée par son tenseur de rigidité locale  $\mathbb{C}(\mathbf{x})$  et de masse volumique locale  $\rho(\mathbf{x})$  est maintenant remplacée par une cellule de base homogène de tenseur de rigidité  $\mathbb{C}^0$  et de masse volumique  $\rho^0$  (ou

bien de souplesse  $\mathbb{S}^0 = (\mathbb{C}^0)^{-1}$  et de volume massique  $\eta^0 = (\rho^0)^{-1}$ . Ce milieu fictif est soumis aux champs périodiques de polarisation en contraintes  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})$  et en quantités de mouvement  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x})$ , définis par

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}) = (\mathbb{C}(\mathbf{x}) - \mathbb{C}^0) : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{E}}_0), \quad (3.4)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x}) = (\rho(\mathbf{x}) - \rho^0)\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), \quad (3.5)$$

où  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\tilde{\mathbf{v}}$  sont respectivement le tenseur des déformations et le vecteur des vitesses qui dérivent de la solution  $\tilde{\mathbf{u}}$  recherchée. Du fait que le matériau composite en question est périodique, les champs de polarisation en contraintes  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  et en quantités de mouvement  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  prennent aussi la forme des ondes de Bloch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \tilde{\boldsymbol{\tau}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= \tilde{\boldsymbol{\gamma}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}, \end{aligned}$$

comme indiqué dans l'équation (1.6). Ensuite, en écrivant

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(\mathbf{x}) &= \mathbb{C}^0 + [\mathbb{C}(\mathbf{x}) - \mathbb{C}^0], \\ \rho(\mathbf{x}) &= \rho^0 + [\rho(\mathbf{x}) - \rho^0], \end{aligned}$$

et en tenant compte des équations (3.4) et (3.5), les équations du mouvement s'écrivent sous la forme équivalente suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla + i\mathbf{k}) \cdot [\mathbb{C}^0 : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})] + \tilde{\mathbf{f}} = -i\omega[\rho^0\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{x})], \\ \tilde{\mathbf{u}} \text{ périodique}, \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique}, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

où  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  et  $\tilde{\mathbf{f}}$  sont les chargements imposés à la cellule de base  $\Omega$ . Comme vu précédemment,  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  est une déformation libre imposée de sorte que la déformation macroscopique  $\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0$  et la vitesse macroscopique  $\tilde{\mathbf{V}}$  soient indépendantes. Nous introduisons ensuite l'opérateur de Green associé au milieu de référence de tenseur de rigidité  $\mathbb{C}^0$  et de masse volumique  $\rho^0$ , noté par  $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , qui est défini comme le déplacement au point  $\mathbf{x}$  quand une force ponctuelle unitaire est appliquée suivant la direction  $j$  au point  $\mathbf{y}$ . L'opérateur de Green  $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  doit vérifier le problème formulé ci-dessous

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{|\Omega|} (\nabla + i\mathbf{k}) \cdot \left\{ \mathbb{C}^0 : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^j(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \right\} + \delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{e}^j = \frac{1}{|\Omega|} \left( -\omega^2 \rho^0 \tilde{\mathbf{G}}^j(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right), \\ \tilde{\mathbf{G}} \text{ périodique}, \\ \left\{ \mathbb{C}^0 : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^j(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \right\} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique}, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

où  $\delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  est la distribution de Dirac,  $\mathbf{e}^j$  est le vecteur unitaire dans la direction  $j$  et où  $\tilde{\mathbf{G}}^j$  est la colonne  $j$ -ième de  $\tilde{\mathbf{G}}$ .

Le champ des déplacements solution est déterminé par

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}^j(\mathbf{x}) &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{G}}^j)^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \left\{ \tilde{\mathbf{f}} + i\omega\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{y}) + (\boldsymbol{\nabla} - i\mathbf{k}) \cdot [\mathbb{C}^0 : \tilde{\mathbf{E}}_0 - \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})] \right\} d\Omega(\mathbf{y}) \\ &+ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathbf{G}}^j)^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot [\mathbb{C}^0 : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})] dS(\mathbf{y}).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Dans cette équation intégrale,  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire extérieure au contour  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  et  $\tilde{\mathbf{G}}^*$  correspond au tenseur complexe conjugué de  $\tilde{\mathbf{G}}$ .

En utilisant une intégration par parties, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \left\{ \boldsymbol{\nabla} \cdot [\mathbb{C}^0 : \tilde{\mathbf{E}}_0 - \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})] \right\} d\Omega(\mathbf{y}) \\ = \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \left\{ [\mathbb{C}^0 : \tilde{\mathbf{E}}_0 - \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \right\} dS(\mathbf{y}) \\ - \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) : [\mathbb{C}^0 : \tilde{\mathbf{E}}_0 - \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})] d\Omega(\mathbf{y}),\end{aligned}$$

et l'expression (3.8) devient

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot [\tilde{\mathbf{f}} + i\omega\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{y})] d\Omega(\mathbf{y}) \\ &- \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \otimes^s (\boldsymbol{\nabla} + i\mathbf{k}) : [\mathbb{C}^0 : \tilde{\mathbf{E}}_0 - \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})] d\Omega(\mathbf{y}) \\ &+ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot [\mathbb{C}^0 : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y}) - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}).\end{aligned}\quad (3.9)$$

Nous constatons que le dernier terme des équations (3.9) s'annule en raison de la périodicité de l'opérateur de Green et de l'anti-périodicité du terme  $[\mathbb{C}^0 : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}] \cdot \mathbf{n}$  sur le bord de  $\Omega$ . De plus, en remplaçant  $\tilde{\mathbf{E}}_0 = \tilde{\mathbf{E}}_0 - \tilde{\mathbf{E}} + i\mathbf{k} \otimes^s \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$  par  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  dans l'équation (3.9), nous obtenons

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot [\tilde{\mathbf{f}} + i\omega\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{y})] d\Omega(\mathbf{y}) \\ &+ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \otimes^s (\boldsymbol{\nabla} + i\mathbf{k}) : [\mathbb{C}^0 : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})] d\Omega(\mathbf{y}) \\ &- \frac{1}{|\Omega|} \left( \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \otimes^s (\boldsymbol{\nabla} + i\mathbf{k}) : (\mathbb{C}^0 \cdot i\mathbf{k}) d\Omega(\mathbf{y}) \right) \cdot \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle.\end{aligned}\quad (3.10)$$

D'autre part, l'intégrale sur  $\Omega$  de l'équation (3.7) nous donne

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \nabla \cdot [\mathbb{C}^0 : \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] d\Omega(\mathbf{y}) \\
& + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} i\mathbf{k} \cdot \mathbb{C}^0 : \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k}) d\Omega(\mathbf{y}) \\
& = -\mathbf{I}|\Omega| - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \omega^2 \rho^0 \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{y}),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité du deuxième ordre. Le premier terme de l'équation (3.11) est nul à cause de l'anti-périodicité du vecteur des contraintes sur le bord de  $\Omega$ . En appliquant le théorème de la divergence, nous avons

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [\mathbb{C}^0 : \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] d\Omega(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} \mathbb{C}^0 : \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = 0.$$

Par conséquent, en introduisant le champ des vitesses macroscopique  $\tilde{\mathbf{V}} = -i\omega \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle$ , nous obtenons l'expression du champ des déplacements  $\tilde{\mathbf{u}}$  en fonction de l'opérateur de Green comme suit :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{G}}^* \rangle \cdot \tilde{\mathbf{f}} \\
&+ \langle \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k}) : \mathbb{C}^0 \rangle : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \langle i\omega \rho^0 \tilde{\mathbf{G}}^* \rangle \cdot \tilde{\mathbf{V}} \\
&+ \langle \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k}) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}) \rangle_{\mathbf{y}} + \langle i\omega \tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{y}) \rangle_{\mathbf{y}}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

De plus, avec une manipulation simple consistant à faire la moyenne volumique de l'expression (3.12), nous pouvons exprimer les termes en  $\tilde{\mathbf{f}}$ ,  $\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  en fonction des polarisations  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  et  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ , grâce à la relation

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{\mathbf{G}}^* \rangle \cdot \tilde{\mathbf{f}} + \langle \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k}) : \mathbb{C}^0 \rangle : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \langle i\omega \rho^0 \tilde{\mathbf{G}}^* \rangle \cdot \tilde{\mathbf{V}} \\
& = -[\tilde{\mathbf{G}}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})]^* \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} \rangle - [i\omega \tilde{\mathbf{G}}^*]^* \langle \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \rangle.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

En introduisant ensuite l'expression (3.13) dans l'équation (3.12), nous arrivons à une nouvelle expression du champ des déplacements donnée par

$$\tilde{\mathbf{u}} = \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle + [\tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})]^* (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} \rangle) + [i\omega \tilde{\mathbf{G}}^*]^* (\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \rangle). \tag{3.14}$$

L'équation intégrale ci-dessus nous permet de déterminer le champ des déplacements solution par des schémas itératifs. Cependant, l'utilisation de l'équation (3.14) pose trois questions auxquelles il convient de répondre.

- Question 1 : Comment pouvons-nous représenter numériquement le tenseur de rigidité  $\mathbb{C}$  (ou de souplesse  $\mathbb{S}$ ) et la masse volumique  $\rho$  (ou le volume massique  $\eta$ ) qui interviennent dans les expressions des polarisations  $\tilde{\tau}$  et  $\tilde{\gamma}$  ?
- Question 2 : Au lieu d'imposer des chargements de force volumique  $\tilde{\mathbf{f}}$  et de déformations libres  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  comme précédemment, quels chargements faut-il imposer pour déterminer d'une part le champ des déplacements  $\tilde{\mathbf{u}}$  et d'autre part les propriétés effectives ?
- Question 3 : Quelles sont les conditions de convergence appliquées aux schémas itératifs utilisés ?

Pour répondre à la question 1, nous proposons d'utiliser au choix : soit une discrétisation de  $\chi(\mathbf{x})$  soit une troncature de  $\hat{\chi}(\boldsymbol{\xi})$  lorsque  $\hat{\chi}(\boldsymbol{\xi})$  est connu. Ces deux approches sont utilisées pour caractériser le tenseur local  $\mathbb{C}$  (ou  $\mathbb{S}$ ) ainsi que  $\rho$  (ou  $\eta$ ) dans l'espace réel ainsi que dans l'espace de Fourier. Le détail de ces deux approches sera donné dans le prochain paragraphe de ce chapitre.

En ce qui concerne la question 2, pour la détermination des propriétés effectives, nous proposons deux approches, où nous chargeons en déformations et en vitesses d'une part, et où nous chargeons en contraintes et en quantités de mouvement d'autre part. La première approche est mieux adaptée au cas d'inclusions molles tandis que la seconde est bien adaptée au cas d'inclusions rigides.

Concernant la question 3, plusieurs facteurs conditionnent la convergence des schémas itératifs, par exemple, le choix du milieu de comparaison défini par  $\mathbb{C}^0$  et  $\rho^0$ , le contraste entre les phases constituantes ainsi que les valeurs prises par le couple  $(\mathbf{k}, \omega)$ . Dans la suite, nous présenterons une méthode qui permet de surmonter les difficultés liées à la divergence des schémas itératifs utilisés. Dans les paragraphes suivants, nous expliciterons dans l'ordre les solutions apportées à ces différents problèmes.

### 3.3 Fonction caractéristique et fonction de forme

Dans l'approche de Moulinec et Suquet [21] en statique, il est proposé d'utiliser la fonction caractéristique pour décrire le tenseur d'élasticité microscopique  $\mathbb{C}(\mathbf{x})$  par un tenseur approximé  $\mathbb{C}(\mathbf{x}_n)$  défini aux points  $\mathbf{x}_n$  d'une image pixélisée qui remplace la géométrie réelle. En utilisant

cette approche, nous pouvons exprimer le tenseur de rigidité  $\mathbb{C}$  (ou de souplesse  $\mathbb{S}$ ) et la masse volumique  $\rho$  (ou le volume massique  $\eta$ ) dans l'espace réel. Nous supposons que la cellule de base est constituée de plusieurs phases notées par  $\Omega_\alpha$  avec  $\alpha = 1, 2, \dots$ . En notant par  $\mathbb{C}_\alpha$  (respectivement  $\mathbb{S}_\alpha$ ) et  $\rho_\alpha$  (respectivement  $\eta_\alpha$ ) le tenseur de rigidité (respectivement de souplesse) et la masse volumique (respectivement le volume massique) de la phase  $\alpha$ , nous pouvons écrire les tenseurs locaux sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(\mathbf{x}) &= \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbb{C}_{\alpha} \quad , \quad \mathbb{S}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbb{S}_{\alpha}, \\ \rho(\mathbf{x}) &= \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(\mathbf{x}) \rho_{\alpha} \quad , \quad \eta(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(\mathbf{x}) \eta_{\alpha},\end{aligned}$$

où  $\chi_{\alpha}(\mathbf{x})$  est la fonction caractéristique de la phase  $\alpha$  définie par

$$\chi_{\alpha}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha} \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_{\alpha} \end{cases} .$$

En raison de la répartition de la cellule de base  $\Omega$  en différentes phases  $\Omega_{\alpha}$ , telle que  $\sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} = \Omega$ , nous avons  $\sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(\mathbf{x}) = 1$ . Dans le cas où le composite est constitué de phases à géométrie simple, une expression exacte de la transformée de Fourier de la fonction caractéristique peut être obtenue. Cette transformée de Fourier, notée  $\hat{\chi}_{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ , est appelée la "fonction de forme" et est donnée par

$$\hat{\chi}_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_{\alpha}} e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\Omega.$$

Cette fonction est déjà introduite par Nasser et Hori dans [24]. Les fonctions de forme sont utilisées pour exprimer les transformées de Fourier du tenseur de rigidité (respectivement de souplesse) et de la masse volumique (respectivement du volume massique) comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Omega} \mathbb{C}(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\Omega = \sum_{\alpha} \hat{\chi}_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \mathbb{C}_{\alpha} \quad , \quad \hat{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega} \mathbb{S}(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\Omega = \sum_{\alpha} \hat{\chi}_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \mathbb{S}_{\alpha}, \\ \hat{\rho}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\Omega = \sum_{\alpha} \hat{\chi}_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\alpha} \quad , \quad \hat{\eta}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\Omega = \sum_{\alpha} \hat{\chi}_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \eta_{\alpha}.\end{aligned}$$

Ces "fonctions de formes" possèdent les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}, \quad \sum_{\alpha} \hat{\chi}_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) &= 0, \\ \hat{\chi}_{\alpha}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) &= g_{\alpha},\end{aligned}$$

où  $g_{\alpha}$  est la fraction volumique de la phase  $\alpha$ . Dans la suite, nous calculons  $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbb{S}(\mathbf{x})$ ,  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $\eta(\mathbf{x})$ , soit de façon directe via une discrétisation de la fonction caractéristique soit de façon indirecte par TFR inverse de la fonction de forme tronquée.

### 3.4 Approche de résolution en déformation et en vitesse

Comme mentionné dans le paragraphe (3.2), nous pouvons appliquer d'autres chargements pour remplacer les chargements initiaux de force volumique homogène  $\tilde{\mathbf{f}}$  et de déformations libres  $\tilde{\mathbf{E}}_0$ . Dans ce paragraphe, nous proposons d'imposer 6 chargements en déformations  $\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0$  et 3 chargements en vitesses  $\tilde{\mathbf{V}}$  pour avoir 9 chargements dans le cas 3D. Nous rappelons que ces nouveaux chargements sont indépendants en raison de la présence de  $\tilde{\mathbf{E}}_0$ . Ce paragraphe se décompose en deux parties. La première partie vise à établir l'équation intégrale adaptée à cette approche. La deuxième partie est consacrée à décrire le schéma itératif de résolution.

#### 3.4.1 Formulation intégrale

De l'expression (3.14), nous obtenons les expressions des champs des déformations et des vitesses données par

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 &= (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ &= \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ &+ [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] * [\delta\mathbb{C} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) - \langle \delta\mathbb{C} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) \rangle] \\ &+ i\omega[(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^*] * [\delta\rho\tilde{\mathbf{v}} - \langle \delta\rho\tilde{\mathbf{v}} \rangle],\end{aligned}\quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}} &= -i\omega\tilde{\mathbf{u}} \\ &= \tilde{\mathbf{V}} - i\omega[\tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] * [\delta\mathbb{C} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) - \langle \delta\mathbb{C} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) \rangle] \\ &+ \omega^2\tilde{\mathbf{G}}^* * [\delta\rho\tilde{\mathbf{v}} - \langle \delta\rho\tilde{\mathbf{v}} \rangle],\end{aligned}\quad (3.16)$$

avec  $\delta\mathbb{C} = \mathbb{C} - \mathbb{C}^0$  et  $\delta\rho = \rho - \rho^0$ . Les équations ci-dessus peuvent s'exprimer sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{\varepsilon,v}(\mathbf{x}) * \begin{bmatrix} \delta\mathbb{C} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) - \langle \delta\mathbb{C} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) \rangle \\ \delta\rho\tilde{\mathbf{v}} - \langle \delta\rho\tilde{\mathbf{v}} \rangle \end{bmatrix}(\mathbf{x}), \quad (3.17)$$

avec

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{\varepsilon,v}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k}) & i\omega(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \\ -i\omega\tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k}) & \omega^2\tilde{\mathbf{G}}^* \end{bmatrix}.$$

Leurs transformées de Fourier sont données par

$$\begin{bmatrix} \widehat{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0} \\ \widehat{\tilde{\mathbf{v}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \delta_0(\boldsymbol{\xi}) + \widehat{\boldsymbol{\mathcal{L}}^{\varepsilon,v}}(\boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} [\widehat{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbb{C}^0\delta_0(\boldsymbol{\xi})] * \widehat{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0}(\boldsymbol{\xi}) \\ [\widehat{\rho}(\boldsymbol{\xi}) - \rho^0\delta_0(\boldsymbol{\xi})] * \widehat{\tilde{\mathbf{v}}}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$



où les grandeurs  $\widehat{\mathfrak{L}}^{\varepsilon,v}$  associées au tenseur de Green dans le cas de l'approche en déformations et en vitesses sont déterminées par

$$\widehat{\mathfrak{L}}^{\varepsilon,v}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{A}}^{\varepsilon,\varepsilon} & \widehat{\mathcal{A}}^{\varepsilon,v} \\ \widehat{\mathcal{A}}^{v,\varepsilon} & \widehat{\mathbb{A}}^{v,v} \end{bmatrix}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} -(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes^s \widehat{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) & -\omega(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes^s \widehat{\mathbf{G}}^* \\ \omega \widehat{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) & \omega^2 \widehat{\mathbf{G}}^* \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{A}}^{\varepsilon,\varepsilon}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) &= \mathbf{0} \quad , \quad \widehat{\mathcal{A}}^{\varepsilon,v}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \\ \widehat{\mathcal{A}}^{v,\varepsilon}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) &= \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbb{A}}^{v,v}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

puisque  $\widehat{\mathfrak{L}}^{\varepsilon,v}$  n'agit que sur des champs à moyenne nulle.

Une simplification des équations (3.15) et (3.16) est possible. Pour un champ des déplacements  $\tilde{\mathbf{u}}$  vérifiant les équations du mouvement du milieu de comparaison (3.6), en moyennant sur  $\Omega$ , nous avons

$$(\nabla + i\mathbf{k}) \cdot \left\{ \mathbb{C}^0 : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle - \tilde{\mathbf{E}}_0] + \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} \rangle \right\} + \tilde{\mathbf{f}} + i\omega \langle \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \rangle = -\omega^2 \rho^0 \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle .$$

La soustraction entre l'équation (3.6) et l'équation ci-dessus nous donne

$$\begin{aligned} (\nabla + i\mathbf{k}) \cdot \left\{ \mathbb{C}^0 : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s (\tilde{\mathbf{u}} - \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle)] + \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} \rangle \right\} \\ = -i\omega(\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \rangle) - \omega^2 \rho^0 (\tilde{\mathbf{u}} - \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle). \end{aligned}$$

Ensuite, nous imposons les chargements

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} \rangle = -\mathbb{C}^0 : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle), \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \rangle = -\rho^0 (\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle),$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = -i\omega \tilde{\mathbf{u}},$$

de sorte que nous aboutissons aux propriétés suivantes de la fonction de Green pour tous champs  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\tilde{\mathbf{v}}$  qui dérivent d'un même champ des déplacements  $\tilde{\mathbf{u}}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}} &= [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] * [-\mathbb{C}^0 : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle)] \\ &+ i\omega [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^*] * [-\rho^0 (\tilde{\mathbf{v}} - \langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle)], \\ \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{V}} &= -i\omega [\tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] * [-\mathbb{C}^0 : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle)] \\ &+ \omega^2 \tilde{\mathbf{G}}^* * [-\rho^0 (\tilde{\mathbf{v}} - \langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle)]. \end{aligned}$$

Finalement, en appliquant le résultat ci-dessus au champ inconnu  $\tilde{\mathbf{u}}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] * [\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle] + i\omega [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^*] * [\tilde{\mathbf{p}} - \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle], \\ \tilde{\mathbf{v}} &= \tilde{\mathbf{v}} - i\omega [\tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] * [\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle] + \omega^2 \tilde{\mathbf{G}}^* * [\tilde{\mathbf{p}} - \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle], \end{aligned}$$

ou la forme matricielle équivalente

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) + \mathfrak{L}^{\varepsilon, v}(\mathbf{x}) * \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \\ \tilde{\mathbf{p}} - \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle \end{bmatrix}(\mathbf{x}). \quad (3.21)$$

En utilisant soit les équations (3.17) soit les équations (3.21), nous pouvons déduire des schémas itératifs présentés ci-dessous pour calculer les propriétés élastodynamiques effectives.

### 3.4.2 Schéma itératif en déformation et en vitesse

Nous présentons la procédure d'un schéma itératif de résolution des équations (3.15), (3.16), (3.18). L'algorithme du schéma est résumé par les étapes suivantes :

- Etape 1 : Initialisation des champs des déformations et des vitesses dans l'espace réel, à savoir  $(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0)^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  et  $\tilde{\mathbf{v}}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

- Etape i :

$$\begin{aligned} & (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0)^{(i)}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{v}}^{(i)}(\mathbf{x}) \text{ connus} \\ & \quad \downarrow \\ & \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0)^{(i)}(\mathbf{x}) \\ & \quad \tilde{\mathbf{p}}^{(i)}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{v}}^{(i)}(\mathbf{x}) \\ & \quad \downarrow \\ & \hat{\mathbf{J}}^{\varepsilon(i)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F} \left\{ [\mathbb{C}(\mathbf{x}) - \mathbb{C}^0] : [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{E}}_0] \right\}(\boldsymbol{\xi}) \\ & \quad \hat{\mathbf{H}}^{v(i)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F} \left\{ [\rho(\mathbf{x}) - \rho^0]\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \right\}(\boldsymbol{\xi}) \\ & \quad \downarrow \\ & (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0)^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{\mathbb{A}}^{\varepsilon, \varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) : \hat{\mathbf{J}}^{\varepsilon(i)}(\boldsymbol{\xi}) + \hat{\mathbb{A}}^{\varepsilon, v}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{H}}^{v(i)}(\boldsymbol{\xi}) \right\}(\mathbf{x}) \\ & \quad \tilde{\mathbf{v}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{V}} + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{\mathbb{A}}^{v, \varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) : \hat{\mathbf{J}}^{\varepsilon(i)}(\boldsymbol{\xi}) + \hat{\mathbb{A}}^{v, v}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{H}}^{v(i)}(\boldsymbol{\xi}) \right\}(\mathbf{x}) \\ & \quad \downarrow \\ & \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0)^{(i+1)}(\mathbf{x}) \\ & \quad \tilde{\mathbf{p}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{v}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) \\ & \quad \downarrow \\ & \text{vérification du critère de convergence dans l'espace réel} \\ & \frac{\left\| \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}(\mathbf{x}) \right\|}{\left\| \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) \right\|} < \epsilon, \frac{\left\| \tilde{\mathbf{p}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{p}}^{(i)}(\mathbf{x}) \right\|}{\left\| \tilde{\mathbf{p}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) \right\|} < \epsilon, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  désignent respectivement la transformée de Fourier et son inverse,  $\epsilon$  est la précision requise et le symbol  $\|\bullet\|$  dénote la norme Frobenius de  $\bullet$ .

- Etape n : Si le critère de convergence est atteint avec  $n$  itérations, nous obtenons les champs des contraintes et des quantités de mouvement macroscopiques  $\tilde{\Sigma}$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}$  en fonction des chargements unitaires indépendants en déformations  $\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0$  et en vitesses  $\tilde{\mathbf{V}}$ , par calcul des moyennes volumiques

$$\tilde{\Sigma} = \langle \tilde{\sigma} \rangle, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle .$$

Les colonnes de la matrice  $(9 \times 9)$  des grandeurs effectives sont alors égales aux vecteurs solutions  $\begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix}$  obtenus pour chacun des 9 cas de chargements imposés.

### 3.5 Approche de résolution en contrainte et en quantité de mouvement

Nous proposons dans ce paragraphe une autre approche de résolution basée sur les chargements en contraintes  $\tilde{\Sigma}$  et en quantités de mouvement  $\tilde{\mathbf{P}}$ . Cette approche est considérée comme l'approche duale de celle présentée dans le paragraphe précédent. Avec cette approche, nous déterminons la matrice inverse de celle des propriétés élastodynamiques effectives calculées précédemment.

#### 3.5.1 Formulation intégrale

En travaillant avec les champs des contraintes et des quantités de mouvement, nous réécrivons les expressions des champs de polarisations comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0) : (\tilde{\epsilon} - \tilde{\mathbf{E}}_0) = (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0) : \mathbb{S} : \tilde{\sigma} = \mathbb{C}^0 : (\mathbb{S}^0 - \mathbb{S}) : \tilde{\sigma} = \mathbb{C}^0 : \delta\mathbb{S} : \tilde{\sigma}, \\ \tilde{\gamma} &= (\rho - \rho^0)\tilde{\mathbf{v}} = (\rho - \rho^0)\rho^{-1}\tilde{\mathbf{p}} = \rho^0(\eta^0 - \eta)\tilde{\mathbf{p}} = \rho^0\delta\eta\tilde{\mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

avec  $\delta\mathbb{S} = \mathbb{S}^0 - \mathbb{S}$  et  $\delta\eta = \eta^0 - \eta$ . A partir des équations (3.15) et (3.16), nous pouvons écrire les champs des contraintes et des quantités de mouvement comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \mathbb{C}^0 : (\tilde{\epsilon} - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \tilde{\tau} \\ &= \mathbb{C}^0 : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \mathbb{C}^0 : \delta\mathbb{S} : \tilde{\sigma} \\ &+ \left\{ \mathbb{C}^0 : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] : \mathbb{C}^0 \right\} * [\delta\mathbb{S} : \tilde{\sigma} - \langle \delta\mathbb{S} : \tilde{\sigma} \rangle] \\ &+ \left\{ \mathbb{C}^0 : i\omega[(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^*]\rho^0 \right\} * [\delta\eta\tilde{\mathbf{p}} - \langle \delta\eta\tilde{\mathbf{p}} \rangle], \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{p}} &= \rho^0 \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \\
&= \rho^0 \tilde{\mathbf{V}} + \rho^0 \delta \eta \tilde{\mathbf{p}} \\
&\quad - \left\{ \rho^0 i \omega [\tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i \mathbf{k})] : \mathbb{C}^0 \right\} * [\delta \mathbb{S} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \langle \delta \mathbb{S} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle] \\
&\quad + \left\{ \rho^0 \omega^2 \tilde{\mathbf{G}}^* \rho^0 \right\} * [\delta \eta \tilde{\mathbf{p}} - \langle \delta \eta \tilde{\mathbf{p}} \rangle].
\end{aligned} \tag{3.24}$$

De plus, en introduisant dans les équations (3.23) et (3.24) les expressions suivantes des champs des contraintes et des quantités de mouvement macroscopiques  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$  et  $\tilde{\mathbf{P}}$  :

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} &= \mathbb{C}_0 : (\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0) + \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} \rangle, \\
\tilde{\mathbf{P}} &= \rho_0 \tilde{\mathbf{V}} + \langle \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \rangle,
\end{aligned}$$

nous obtenons les équations intégrales en contrainte et en quantité de mouvement qui s'écrivent

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \\
&\quad + \left\{ \mathbb{C}^0 \delta_0 + \mathbb{C}^0 : [(\nabla + i \mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i \mathbf{k})] : \mathbb{C}^0 \right\} * [\delta \mathbb{S} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \langle \delta \mathbb{S} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle] \\
&\quad + \left\{ \mathbb{C}^0 : i \omega [(\nabla + i \mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^*] \rho^0 \right\} * [\delta \eta \tilde{\mathbf{p}} - \langle \delta \eta \tilde{\mathbf{p}} \rangle], \quad \text{et}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{p}} &= \tilde{\mathbf{P}} \\
&\quad - \left\{ \rho^0 i \omega [\tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i \mathbf{k})] : \mathbb{C}^0 \right\} * [\delta \mathbb{S} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \langle \delta \mathbb{S} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle] \\
&\quad + \left\{ \rho^0 \mathbf{I} \delta_0 + \rho^0 \omega^2 \tilde{\mathbf{G}}^* \rho^0 \right\} * [\delta \eta \tilde{\mathbf{p}} - \langle \delta \eta \tilde{\mathbf{p}} \rangle].
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ou sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} (\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\mathfrak{L}}^{\sigma,p}(\mathbf{x}) * \begin{bmatrix} \delta \mathbb{S} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \langle \delta \mathbb{S} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \\ \delta \eta \tilde{\mathbf{p}} - \langle \delta \eta \tilde{\mathbf{p}} \rangle \end{bmatrix} (\mathbf{x}), \tag{3.27}$$

avec

$$\boldsymbol{\mathfrak{L}}^{\sigma,p}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^0 \delta_0 + \mathbb{C}^0 : [(\nabla + i \mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i \mathbf{k})] & \mathbb{C}^0 : i \omega [(\nabla + i \mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^*] \rho^0 \\ -\rho^0 i \omega [\tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i \mathbf{k})] : \mathbb{C}^0 & \rho^0 \mathbf{I} + \rho^0 \omega^2 \tilde{\mathbf{G}}^* \rho^0 \end{bmatrix}.$$

Les transformées de Fourier des équations intégrales (3.25) et (3.26) sont de la forme

$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \\ \hat{\tilde{\mathbf{p}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \delta_0(\boldsymbol{\xi}) + \hat{\boldsymbol{\mathfrak{L}}}^{\sigma,p}(\boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} [\mathbb{S}^0 \delta_0(\boldsymbol{\xi}) - \hat{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\xi})] * \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}(\boldsymbol{\xi}) \\ [\eta^0 \delta_0(\boldsymbol{\xi}) - \hat{\eta}(\boldsymbol{\xi})] * \hat{\tilde{\mathbf{p}}}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

où  $\hat{\boldsymbol{\mathfrak{L}}}^{\sigma,p}$  dérive du tenseur de Green, tel que

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\mathfrak{L}}}^{\sigma,p}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbb{A}}^{\sigma,\sigma} & \hat{\mathbb{A}}^{\sigma,p} \\ \hat{\mathbb{A}}^{p,\sigma} & \hat{\mathbb{A}}^{p,p} \end{bmatrix}(\boldsymbol{\xi}) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{C}^0 - \mathbb{C}^0 : (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes^s \hat{\mathbf{G}}^*(\boldsymbol{\xi}) \otimes^s (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) : \mathbb{C}^0 & -\mathbb{C}^0 : \omega (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes^s \hat{\mathbf{G}}^*(\boldsymbol{\xi}) \rho^0 \\ \rho^0 \omega \hat{\mathbf{G}}^*(\boldsymbol{\xi}) \otimes^s (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) : \mathbb{C}^0 & \rho^0 \mathbf{I} + \rho^0 \omega^2 \hat{\mathbf{G}}^*(\boldsymbol{\xi}) \rho^0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Puisque  $\widehat{\mathcal{L}}^{\sigma,p}$  n'agit que sur des champs à moyenne nulle, nous obtenons

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{A}}^{\sigma,\sigma}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) &= \mathbf{0} \quad , \quad \widehat{\mathbb{A}}^{\sigma,p}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \\ \widehat{\mathbb{A}}^{p,\sigma}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) &= \mathbf{0} \quad , \quad \widehat{\mathbb{A}}^{p,p}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}) = \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{3.30}$$

De la même façon qu'au paragraphe précédent, dès que  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\tilde{\mathbf{p}}$  sont équilibrés, nous pouvons démontrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\Sigma} &= \left\{ \mathbb{C}^0 \delta_0 + \mathbb{C}^0 : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] : \mathbb{C}^0 \right\} * [\mathbb{S}^0 : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle)] \\ &+ \left\{ \mathbb{C}^0 : i\omega [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^*] \rho^0 \right\} * [\eta^0 (\tilde{\mathbf{p}} - \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle)], \\ \tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{P}} &= - \left\{ \rho^0 i\omega [\tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] : \mathbb{C}^0 \right\} * [\mathbb{S}^0 : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle)] \\ &+ \left\{ \rho^0 \mathbf{I} \delta_0 + \rho^0 \omega^2 \tilde{\mathbf{G}}^* \rho^0 \right\} * [\eta^0 (\tilde{\mathbf{p}} - \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle)].\end{aligned}$$

Finalement, pour l'approche en contrainte et en quantité de mouvement nous obtenons les équations intégrales simplifiées suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \left\{ \mathbb{C}^0 \delta_0 + \mathbb{C}^0 : [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] : \mathbb{C}^0 \right\} * (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle) \\ &- \left\{ \mathbb{C}^0 : i\omega [(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^*] \rho^0 \right\} * (\tilde{\mathbf{v}} - \langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle), \quad \text{et} \\ \tilde{\mathbf{p}} &= \tilde{\mathbf{p}} + \left\{ \rho^0 i\omega [\tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k})] : \mathbb{C}^0 \right\} * (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle) \\ &- \left\{ \rho^0 \mathbf{I} \delta_0 + \rho^0 \omega^2 \tilde{\mathbf{G}}^* \rho^0 \right\} * (\tilde{\mathbf{v}} - \langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle).\end{aligned}$$

ou la forme matricielle équivalente :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) + \mathcal{L}^{\sigma,p}(\mathbf{x}) * \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \\ \tilde{\mathbf{v}} - \langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle \end{bmatrix}(\mathbf{x}).$$

### 3.5.2 Schéma itératif en contrainte et en quantité de mouvement

Le schéma de résolution est itératif et est donné par la procédure suivante à partir de l'équation (3.28) :

- Etape 1 : Initialisation des champs des contraintes et des quantités de mouvement dans l'espace réel, donnés par  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  et  $\tilde{\mathbf{p}}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

- Etape i :

$$\begin{aligned}
& \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{p}}^{(i)}(\mathbf{x}) \text{ connus} \\
& \downarrow \\
& (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0)^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathbb{S}(\mathbf{x}) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}(\mathbf{x}) \\
& \tilde{\mathbf{v}}^{(i)}(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{p}}^{(i)}(\mathbf{x}) \\
& \downarrow \\
& \hat{\mathbf{J}}^{\sigma(i)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F} \{[\mathbb{S}^0 - \mathbb{S}(\mathbf{x})] : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})\}(\boldsymbol{\xi}) \\
& \hat{\mathbf{H}}^{p(i)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F} \{[\eta^0 - \eta(\mathbf{x})]\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{x})\}(\boldsymbol{\xi}) \\
& \downarrow \\
& \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{\mathbf{A}}^{\sigma,\sigma}(\boldsymbol{\xi}) : \hat{\mathbf{J}}^{\sigma(i)}(\boldsymbol{\xi}) + \hat{\mathbf{A}}^{\sigma,p}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{H}}^{p(i)}(\boldsymbol{\xi}) \right\}(\mathbf{x}) \\
& \tilde{\mathbf{p}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{P}} + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{\mathbf{A}}^{p,\sigma}(\boldsymbol{\xi}) : \hat{\mathbf{J}}^{\sigma(i)}(\boldsymbol{\xi}) + \hat{\mathbf{A}}^{p,p}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \hat{\mathbf{H}}^{p(i)}(\boldsymbol{\xi}) \right\}(\mathbf{x}) \\
& \downarrow \\
& (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{E}}_0)^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \mathbb{S}(\mathbf{x}) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) \\
& \tilde{\mathbf{v}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{p}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) \\
& \downarrow \\
& \text{vérification du critère de convergence dans l'espace réel} \\
& \frac{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}(\mathbf{x})\|}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i+1)}(\mathbf{x})\|} < \epsilon, \quad \frac{\|\tilde{\mathbf{v}}^{(i+1)}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{v}}^{(i)}(\mathbf{x})\|}{\|\tilde{\mathbf{v}}^{(i+1)}(\mathbf{x})\|} < \epsilon
\end{aligned}$$

- Etape n : Si le critère de convergence est atteint avec  $n$  itérations, nous pouvons obtenir les champs des déformations et des vitesses macroscopiques en fonction des chargements unitaires indépendants en contraintes et en quantités de mouvement  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$  et  $\tilde{\mathbf{P}}$  par calcul des moyennes volumiques

$$\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 = \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle - \tilde{\mathbf{E}}_0 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{V}} = \langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle .$$

Les colonnes de l'inverse de la matrice  $(9 \times 9)$  des propriétés effectives sont alors égales aux vecteurs solutions  $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0 \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix}$  obtenus pour chacun des 9 chargements imposés.

### 3.6 Expression du tenseur de Green pour un milieu isotrope

Dans toutes les approches que nous avons présentées plus haut, la connaissance du tenseur de Green  $\tilde{\mathbf{G}}$  associé au milieu de comparaison est nécessaire. A partir des équations (3.7), il est

possible d'obtenir le tenseur de Green dans le domaine de Fourier comme solution de l'équation suivante :

$$[(i\boldsymbol{\xi} + i\mathbf{k}) \cdot \mathbb{C}^0 \cdot (i\boldsymbol{\xi} + i\mathbf{k}) + \omega^2 \rho^0 \mathbf{I}] \cdot \widehat{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Cette solution est donnée par

$$\widehat{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}) = [(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \cdot \mathbb{C}^0 \cdot (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) - \omega^2 \rho^0 \mathbf{I}]^{-1}. \quad (3.31)$$

Dans le cas où le milieu de comparaison est élastique et isotrope, le tenseur de rigidité est de la forme

$$C_{mijn}^0 = \lambda^0 \delta_{mi} \delta_{jn} + \mu^0 (\delta_{mj} \delta_{in} + \delta_{mn} \delta_{ij}), \quad (3.32)$$

où  $\lambda^0$  et  $\mu^0$  sont les coefficients de Lamé. En injectant l'expression (3.32) dans l'expression (3.31), nous obtenons l'expression de tenseur de Green  $\widehat{\mathbf{G}}$  du milieu de comparaison isotrope donnée par

$$\widehat{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}) = [(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \cdot (\lambda^0 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu^0 \mathbb{I}) \cdot (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) - \omega^2 \rho^0 \mathbf{I}]^{-1} = [\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi})]^{-1},$$

avec

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{mijn} &= \delta_{mi} \delta_{jn}, \\ (\mathbb{I})_{mijn} &= \frac{1}{2} (\delta_{mj} \delta_{in} + \delta_{mn} \delta_{ij}). \end{aligned}$$

Dans le but d'inverser le tenseur du second ordre  $\mathbf{A}$ , nous le décomposons en deux parties orthogonales comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) &= (\lambda^0 + 2\mu^0)(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) + \mu^0 [|\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2 \mathbf{I} - (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k})] - \omega^2 \rho^0 \mathbf{I} \\ &= \rho^0 (c_2^2 |\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2 - \omega^2) \mathbf{I} + \rho^0 (c_1^2 - c_2^2) (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \\ &= \rho^0 |\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2 \left\{ \left[ c_1^2 - \frac{\omega^2}{|\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2} \right] \mathbf{I} + (c_1^2 - c_2^2) \left[ \frac{(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k})}{|\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2} - \mathbf{I} \right] \right\} \\ &= \rho^0 (c_2^2 |\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2 - \omega^2) \left[ \mathbf{I} - \frac{(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k})}{|\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2} \right] + \rho^0 (c_1^2 |\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2 - \omega^2) \frac{(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k})}{|\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2} \\ &= \rho^0 (c_2^2 |\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2 - \omega^2) (\mathbf{I} - \mathbf{D}) + \rho^0 (c_1^2 |\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2 - \omega^2) \mathbf{D}, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{D} = \frac{(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k})}{|\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2}$  est un tenseur sphérique et  $\mathbf{I} - \mathbf{D}$  est un tenseur déviatorique et où  $c_1$  et  $c_2$  sont respectivement les célérités longitudinales et transversales des ondes dans

le milieu de comparaison, données par  $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda^0 + 2\mu^0}{\rho^0}}$  et  $c_2 = \sqrt{\frac{\mu^0}{\rho^0}}$ . Finalement, nous

obtenons l'expression analytique de l'opérateur de Green dans l'espace de Fourier en inversant simplement les coefficients devant les deux tenseurs orthogonaux comme ci-après

$$\widehat{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\rho^0 (c_2^2 |\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2 - \omega^2)} (\mathbf{I} - \mathbf{D}) + \frac{1}{\rho^0 (c_1^2 |\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2 - \omega^2)} \mathbf{D},$$

ou encore

$$\widehat{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\rho^0 (c_2^2 |\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2 - \omega^2)} \left[ \mathbf{I} - \frac{(c_1^2 - c_2^2)(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}) \otimes (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k})}{c_1^2 |\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}|^2 - \omega^2} \right]. \quad (3.33)$$

Nous remarquons que les composantes du tenseur de Green sont réelles, ce qui implique que  $\widehat{\mathbf{G}}^* = \widehat{\mathbf{G}}$ .

### 3.7 Validation dans le cas statique

Nous avons établi une formulation intégrale générale des équations élastodynamiques en utilisant le tenseur de Green. Ces équations se réduisent à celles de la statique lorsque nous annulons les effets dynamiques en considérant que la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  sont nuls. Dans ce cas, les termes de vitesses et de quantités de mouvement disparaissent de cette formulation. De plus, les déformations libres  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  ne sont plus utiles. Dans le cas de l'approche en déformation et en vitesse, l'équation intégrale devient donc

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{E}} - (\nabla \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s \nabla) * [(\mathbb{C} - \mathbb{C}^0) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \langle (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle].$$

En raison de la périodicité du tenseur de Green, le produit  $(\nabla \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s \nabla) * \langle (\mathbb{C} - \mathbb{C}^0) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$  est nul. En conséquence, nous obtenons l'expression simplifiée de l'équation intégrale correspondant au cas statique comme suit :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{E}} - (\nabla \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s \nabla) * [(\mathbb{C} - \mathbb{C}^0) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}].$$

D'ailleurs, nous pouvons montrer que la transformée de Fourier  $\mathcal{F}(\nabla \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s \nabla)(\boldsymbol{\xi})$  coïncide avec l'opérateur de Green de l'approche en déformation. Pour un milieu isotrope, cet opérateur est donné par

$$\widehat{\Gamma}_{ijpq}^0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\mu^0 |\boldsymbol{\xi}|^2} (\xi_i \delta_j p \xi_q + \xi_j \delta_i p \xi_q + \xi_i \delta_j q \xi_p + \xi_j \delta_i q \xi_p) - \frac{\lambda^0 + \mu^0}{\mu^0 (\lambda^0 + 2\mu^0)} \frac{\xi_i \xi_j \xi_p \xi_q}{|\boldsymbol{\xi}|^4}.$$

Cette expression est identique à celle utilisée par Moulinec et Suquet dans [14].



De façon analogue à l'approche en déformation et en vitesse, l'approche en contrainte et en quantité de mouvement est aussi utilisable dans le cas statique en mettant la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  nuls. Plus précisément, comme le produit

$$\left( \mathbb{C}^0 \delta_0 + \mathbb{C}^0 : \nabla \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s \nabla : \mathbb{C}^0 \right) * \langle (\mathbb{S}^0 - \mathbb{S}) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle,$$

est égal à zéro, nous arrivons à l'équation intégrale suivante dans le cas statique :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} + \left( \mathbb{C}^0 \delta_0 + \mathbb{C}^0 : \nabla \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s \nabla : \mathbb{C}^0 \right) * [(\mathbb{S}^0 - \mathbb{S}) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}].$$

De plus, la transformée de Fourier  $\mathcal{F}\left(\mathbb{C}^0 + \mathbb{C}^0 : \nabla \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s \nabla : \mathbb{C}^0\right)(\boldsymbol{\xi})$  coïncide avec l'opérateur de Green de l'approche en contrainte, dans l'espace de Fourier, noté  $\hat{\Delta}^0(\boldsymbol{\xi})$  et donné par

$$\hat{\Delta}_{ijpq}^0(\boldsymbol{\xi}) = C_{ijpq}^0 + C_{ijmn}^0 \hat{\Gamma}_{mnkh}^0(\boldsymbol{\xi}) C_{mnpq}^0.$$

Cette expression a également été utilisée par Bonnet dans [5].

### 3.8 Convergence des schémas itératifs

Les schémas numériques que nous avons présentés plus haut correspondent à des développements en série de Neumann. Nous discutons dans ce paragraphe de la convergence de ces schémas. En multipliant l'équation (3.15) à gauche par  $\mathbb{C} - \mathbb{C}^0$  et l'équation (3.16) par  $\rho - \rho^0$ , nous avons

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} \rangle \\ \langle \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{C}(\mathbf{x}) - \mathbb{C}^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho(\mathbf{x}) - \rho^0 \end{bmatrix} : \left\{ \boldsymbol{\mathfrak{L}}(\mathbf{x}) * \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) \right\}, \quad (3.34)$$

avec

$$\boldsymbol{\mathfrak{L}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k}) & i\omega(\nabla + i\mathbf{k}) \otimes^s \tilde{\mathbf{G}}^* \\ -i\omega \tilde{\mathbf{G}}^* \otimes^s (\nabla + i\mathbf{k}) & \omega^2 \tilde{\mathbf{G}}^* \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Pour condenser les notations, nous introduisons une application  $\mathbb{T}$  qui s'applique à  $\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix}$  et donne le second terme des équations (3.34). Ainsi nous avons

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = [\mathbb{I} - \mathbb{T}]^{-1} \begin{bmatrix} \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} \rangle \\ \langle \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

où  $\mathbb{I}$  est l'application identité. En utilisant le développement en série de Neumann de l'inverse de  $\mathbb{I} - \mathbb{T}$ , nous aboutissons à

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = (\mathbb{I} + \mathbb{T} + \mathbb{T} \circ \mathbb{T} + \dots) \begin{bmatrix} \langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} \rangle \\ \langle \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

où  $\mathbb{T} \circ \mathbb{T}$  désigne la composition de l'application  $\mathbb{T}$  avec elle-même. Nous voyons que la convergence du schéma itératif pour résoudre l'équation (3.37) dépend du rayon spectral de  $\mathbb{T}$ . Plus précisément, pour que le schéma itératif converge, les valeurs propres de  $\mathbb{T}$  doivent appartenir à l'intervalle  $] -1, 1[$ , à savoir

$$|V_p(\mathbb{T})| < 1. \quad (3.38)$$

Les facteurs influant sur la condition (3.38) sont les suivants :

- Le choix du milieu de comparaison défini par  $\mathbb{C}^0$  et  $\rho^0$ .
- Le contraste entre les paramètres des matériaux du milieu étudié et du milieu de comparaison.
- La dépendance des composantes du tenseur de Green vis-à-vis du couple  $(\mathbf{k}, \omega)$ .

De plus, le choix du nombre de points de discrétisation du vecteur d'onde dans la transformée de Fourier discrète influence la précision obtenue. Nous allons analyser ci-dessous les influences de ces paramètres sur la convergence des schémas itératifs utilisés.

### 3.8.1 Influence du choix du milieu de comparaison et du contraste

Pour étudier l'influence du choix du milieu de référence  $\mathbb{C}^0$  (ou  $\mathbb{S}^0$ ) sur la convergence des schémas itératifs présentés ci-dessus, nous proposons d'étudier un composite à deux phases, la matrice notée  $m$  et l'inclusion désignée par  $i$ . Nous choisissons un milieu de référence dont les modules élastiques  $\lambda^0$ ,  $\mu^0$  et  $\rho^0$  sont définis en fonction d'un paramètre  $q$  que nous ferons varier. Pour le schéma en déformation et en vitesse ( $\mathbf{E} - \mathbf{V}$ ) nous posons

$$\begin{aligned} \lambda^0 &= (1 - q)\lambda^m + q\lambda^i, \\ \mu^0 &= (1 - q)\mu^m + q\mu^i, \\ \rho^0 &= (1 - q)\rho^m + q\rho^i. \end{aligned}$$

Nous trouvons numériquement les valeurs de  $q$  pour lesquelles les schémas itératifs convergent, pour les cas d'une inclusion plus molle que la matrice ( $\mathbf{I} < \mathbf{M}$ ) ou bien plus rigide que la matrice ( $\mathbf{I} > \mathbf{M}$ ). Les valeurs de  $q$  sont données par

$$\begin{cases} 0 < q \leq 0.5 & \text{si } \mathbf{I} < \mathbf{M} \\ q \geq 0.5 & \text{si } \mathbf{I} > \mathbf{M} \end{cases} \quad \text{pour tout } (\mathbf{k}, \omega).$$

Dans l'approche en contrainte et en quantité de mouvement ( $\Sigma - \mathbf{P}$ ), le tenseur de souplesse de référence  $\mathbb{S}^0$  et la masse volumique  $\rho^0$  s'écrivent en fonction de  $q$  comme

$$\begin{aligned}\lambda^0 &= \left( \frac{1-q}{\lambda^m} + \frac{q}{\lambda^i} \right)^{-1}, \\ \mu^0 &= \left( \frac{1-q}{\mu^m} + \frac{q}{\mu^i} \right)^{-1}, \\ \rho^0 &= \left( \frac{1-q}{\rho^m} + \frac{q}{\rho^i} \right)^{-1}.\end{aligned}$$

De même, nous trouvons numériquement les valeurs de  $q$  pour lesquelles nous avons convergence :

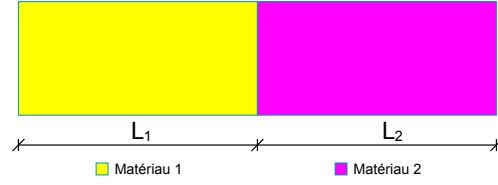
$$\begin{cases} q \geq 0.5 & \text{si } I < M \\ 0 < q \leq 0.5 & \text{si } I > M \end{cases} \quad \text{pour tout } (\mathbf{k}, \omega).$$

### 3.8.2 Singularité du tenseur de Green

La dépendance en  $(\mathbf{k}, \omega)$  de  $\mathfrak{L}$  dans l'équation (3.35) influe fortement sur la convergence des schémas itératifs. En effet, il existe des couples  $(\mathbf{k}, \omega)$  pour lesquels certaines composantes de  $\widehat{\mathfrak{L}}$  tendent vers l'infini et provoquent ainsi la divergence du schéma itératif utilisé. Pour étudier ce problème, nous discutons d'un cas 1D où la transformée du tenseur  $\mathfrak{L}$  s'écrit comme suit :

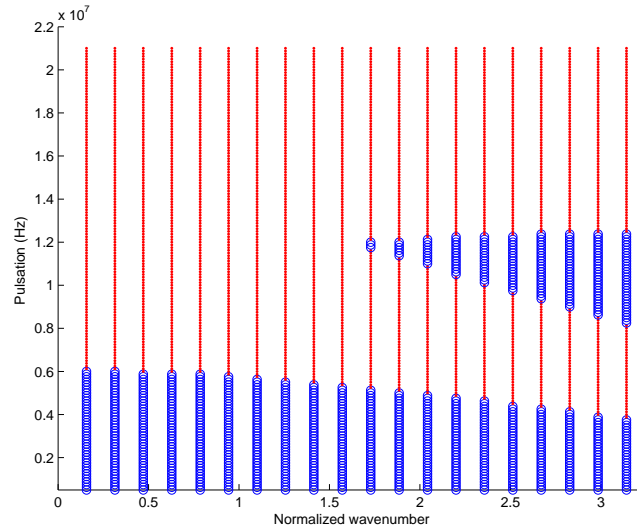
$$\widehat{L}(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{(\xi+k)^2}{\rho^0[c^2(\xi+k)^2 - \omega^2]} & -\frac{\omega(\xi+k)}{\rho^0[c^2(\xi+k)^2 - \omega^2]} \\ \frac{\omega(\xi+k)}{\rho^0[c^2(\xi+k)^2 - \omega^2]} & \frac{\omega^2}{\rho^0[c^2(\xi+k)^2 - \omega^2]} \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

où  $c = c_1$  est la célérité longitudinale. Nous pouvons voir que dans l'expression de  $\widehat{L}(\xi)$  ci-dessus, pour certains couples  $(\mathbf{k}, \omega)$ , il peut exister des valeurs de  $\xi$  telles que  $c^2(\xi+k)^2 - \omega^2 \approx 0$ , ce qui implique que les valeurs propres de  $\mathbb{T}$  deviennent très grandes. Cela provoque alors la divergence du schéma itératif. A titre d'exemple, nous présentons dans la suite un exemple en 1D afin d'illustrer l'origine du problème de convergence des schémas itératifs. Dans cet exemple, la cellule de base considérée est composée de deux phases à comportement élastique de modules d'Young  $E_1 = 10^9(Pa)$  et  $E_2 = 2.10^{10}(Pa)$ , de masses volumiques  $\rho_1 = 1000(kg/m^3)$  et  $\rho_2 = 3000(kg/m^3)$  et qui s'étendent sur des longueurs  $L_1 = L_2 = 0.0005(m)$ . La cellule est représentée dans la Fig. 3.2.



**Figure 3.2:** Cellule de base 1D pour le test de convergence des schémas itératifs en fonction du couple  $(k, \omega)$ .

Le comportement élastique de la phase  $j$  avec  $j = \{1, 2\}$  s'exprime par la loi de Hooke  $\sigma_j = E_j \varepsilon_j$ . Nous effectuons une série de calculs balayant un espace des valeurs de  $(k, \omega)$ . La Fig. 3.3 détermine les zones où les schémas numériques convergent (ronds en bleu) ainsi que les zones où les schémas divergent (points en rouge).

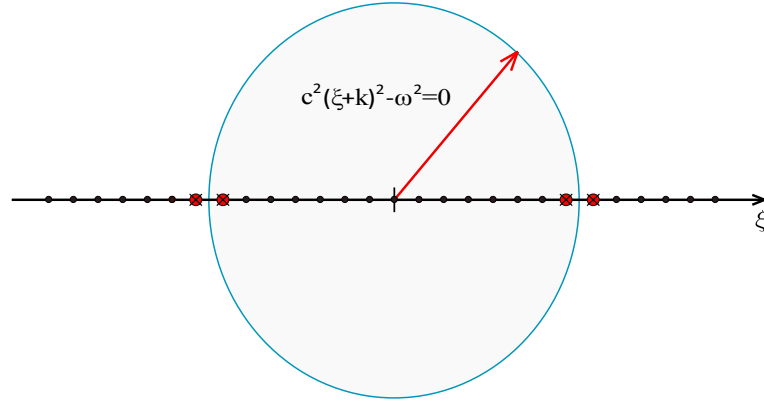


**Figure 3.3:** Localisation des couples  $(k, \omega)$  singuliers

Les couples  $(k, \omega)$  appartenant à la zone en rouge sont tels que le dénominateur de l'opérateur de Green se rapproche de zéro pour certains  $\xi$ , c'est-à-dire que les couples  $(k, \omega)$  vérifient la relation

$$\frac{\xi + k}{\omega} \approx \pm \frac{1}{c} \quad \text{pour certains } \xi. \quad (3.40)$$

Nous voyons clairement que les grandes valeurs des composantes de  $\hat{L}$  correspondent aux valeurs de  $\xi$  situées près du cercle caractérisé par l'équation  $c^2(\xi + k)^2 - \omega^2 = 0$ . Ce cercle est illustré dans la Fig. 3.4.



**Figure 3.4:** Position du cercle par rapport au réseau des  $\xi$

Dans le cas général multiphasique et multidimensionnel, pour éviter la divergence du schéma itératif utilisé, nous proposons de calculer l'inverse de  $\mathbb{T}$  en deux étapes : une inversion par schéma itératif de la partie non-singulière de  $\mathbb{T}$  et une inversion directe non-itérative de la partie singulière de  $\mathbb{T}$ . Nous présentons, à titre d'exemple, l'équation suivante

$$\left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \right) \{X\} = \{Y\}, \quad (3.41)$$

avec  $|\varphi| < 1$  et  $|\beta| > 1$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité,  $\{Y\}$  est donné et  $\{X\}$  est inconnu. Ici,  $\beta$  représente un point singulier tandis que  $\varphi$  non. L'équation (3.41) peut s'écrire comme ci-après :

$$\left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \{X\} = \{Y\} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \{X\}.$$

Puisque  $|\varphi| < 1$ , en introduisant la matrice associée au développement en série de Neuman  $[S_\varphi]$  telle que

$$\left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \approx \left( \mathbf{I} + \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots \right) = [S_\varphi]$$

nous obtenons

$$\{X\} = [S_\varphi] \left( \{Y\} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \{X\} \right).$$

Ensuite, en multipliant à gauche l'équation ci-dessus par le terme  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ , nous avons

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \{X\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [S_\varphi] \{Y\} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [S_\varphi] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \{X\},$$

d'où il vient que

$$\left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [S_\varphi] \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \{X\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [S_\varphi] \{Y\},$$

et enfin nous obtenons

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \{X\} = \left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [S_\varphi] \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [S_\varphi] \{Y\},$$

et la solution  $\{X\}$  est déterminée par l'expression suivante

$$\{X\} = [S_\varphi] \left\{ \{Y\} + \left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [S_\varphi] \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [S_\varphi] \{Y\} \right\}.$$

Dans l'expression ci-dessus, l'opérateur  $[S_\varphi]$  est calculé itérativement alors que la matrice  $\left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} [S_\varphi] \right)$ , dont la dimension dépend du nombre de points singuliers  $\beta$  que nous noterons  $n_\beta$ , est inversée directement.

### 3.8.3 Algorithme modifié

En appliquant la méthode présentée à la section ci-dessus, nous proposons une adaptation des schémas itératifs TFR pour chacune des approches, en déformation et en vitesse d'une part, et en contrainte et en quantité de mouvement d'autre part. Pour un couple  $(\mathbf{k}, \omega)$  fixé et pour un nombre de points singuliers  $n_\beta$  non nul, les schémas itératifs proposés précédemment ne convergent pas. Nous proposons un nouvel algorithme où nous contournerons le problème des singularités.

Afin d'alléger l'écriture, nous introduisons des notations qui sont résumées au Tab. 3.1.

TABLE 3.1: Tableau des notations

Notations	Approche $\mathbf{E} - \mathbf{V}$	Approche $\Sigma - \mathbf{P}$
$\tilde{\psi}, \tilde{\theta}$	$\tilde{\varepsilon} - \tilde{\mathbf{E}}_0, \tilde{\mathbf{v}}$	$\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{p}}$
$\tilde{\Psi}, \tilde{\Theta}$	$\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_0, \tilde{\mathbf{V}}$	$\tilde{\Sigma}, \tilde{\mathbf{P}}$
$\mathbb{M}^{\psi, \theta}$	$\mathbb{C} - \mathbb{C}^0$	$\mathbb{S}^0 - \mathbb{S}$
$n^{\psi, \theta}$	$\rho - \rho^0$	$\eta^0 - \eta$
$\mathfrak{L}^{\psi, \theta}$	$\mathfrak{L}^{\varepsilon, v}$	$\mathfrak{L}^{\sigma, p}$
$\overline{\mathfrak{L}}^{\psi, \theta}$	$\overline{\mathfrak{L}}^{\varepsilon, v}$	$\overline{\mathfrak{L}}^{\sigma, p}$
$\mathfrak{L}_\beta^{\psi, \theta}$	$\mathfrak{L}_\beta^{\varepsilon, v}$	$\mathfrak{L}_\beta^{\sigma, p}$

Ces notations sont utilisables aussi bien pour l'approche en déformation et en vitesse ( $\mathbf{E} - \mathbf{V}$ ) que pour l'approche en contrainte et en quantité de mouvement ( $\mathbf{\Sigma} - \mathbf{P}$ ). Dans ce tableau,  $\tilde{\boldsymbol{\psi}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}$  désignent des champs microscopiques ;  $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}, \tilde{\boldsymbol{\Theta}}$  désignent des champs macroscopiques, et  $\mathbb{M}^{\psi,\theta}, n^{\psi,\theta}$  désignent différents champs de propriétés. Enfin, les  $\mathfrak{L}_\beta^{\psi,\theta}, \overline{\mathfrak{L}}^{\psi,\theta}$  désignent des opérateurs associés au tenseur de Green, où  $\mathfrak{L}_\beta^{\varepsilon,v}$  et  $\mathfrak{L}_\beta^{\sigma,p}$  sont les parties singulières de  $\mathfrak{L}^{\varepsilon,v}$  et  $\mathfrak{L}^{\sigma,p}$  données par

$$\widehat{\mathfrak{L}}_\beta^{\varepsilon,v}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \widehat{\mathfrak{L}}^{\varepsilon,v}(\beta) & \text{si } \boldsymbol{\xi} = \beta \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \neq \beta \end{cases}, \quad \widehat{\mathfrak{L}}_\beta^{\sigma,p}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \widehat{\mathfrak{L}}^{\sigma,p}(\beta) & \text{si } \boldsymbol{\xi} = \beta \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} \neq \beta \end{cases}.$$

De plus,  $\overline{\mathfrak{L}}^{\varepsilon,v}$  et  $\overline{\mathfrak{L}}^{\sigma,p}$  sont les parties complémentaires non-singulières de  $\mathfrak{L}^{\varepsilon,v}$  et  $\mathfrak{L}^{\sigma,p}$ , données par

$$\widehat{\mathfrak{L}}^{\varepsilon,v}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} = \beta \\ \widehat{\mathfrak{L}}^{\varepsilon,v}(\boldsymbol{\xi}) & \text{si } \boldsymbol{\xi} \neq \beta \end{cases} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathfrak{L}}^{\sigma,p}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{\xi} = \beta \\ \widehat{\mathfrak{L}}^{\sigma,p}(\boldsymbol{\xi}) & \text{si } \boldsymbol{\xi} \neq \beta \end{cases}.$$

Les équations (3.17) et (3.27) correspondant aux approches en  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{V}}$  et en  $\tilde{\mathbf{\Sigma}}, \tilde{\mathbf{P}}$  s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \widehat{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} \\ \widehat{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \end{bmatrix}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Psi}} \\ \tilde{\boldsymbol{\Theta}} \end{bmatrix} \delta_0 + \widehat{\mathfrak{L}}^{\psi,\theta}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathcal{F} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\boldsymbol{\psi}} - \langle \mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\boldsymbol{\psi}} \rangle \delta_0 \\ n^{\psi,\theta} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \langle n^{\psi,\theta} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \rangle \delta_0 \end{bmatrix} \right\}(\boldsymbol{\xi}).$$

Nous pouvons réécrire les équations ci-dessus de telle sorte qu'apparaissent la partie singulière et la partie non-singulière comme ci-dessous

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} \\ \widehat{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \end{bmatrix}(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Psi}} \\ \tilde{\boldsymbol{\Theta}} \end{bmatrix} \delta_0 + \widehat{\mathfrak{L}}_\beta^{\psi,\theta}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathcal{F} \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\boldsymbol{\psi}}]_\beta \\ [n^{\psi,\theta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}]_\beta \end{bmatrix} \right\} \delta_\beta \\ &+ \widehat{\mathfrak{L}}^{\psi,\theta}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{F} \left\{ \mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\boldsymbol{\psi}} \right\} - \langle \mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\boldsymbol{\psi}} \rangle \delta_0 - \mathcal{F} \left\{ [\mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\boldsymbol{\psi}}]_\beta \right\} \delta_\beta \\ \mathcal{F} \left\{ n^{\psi,\theta} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right\} - \langle n^{\psi,\theta} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \rangle \delta_0 - \mathcal{F} \left\{ [n^{\psi,\theta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}]_\beta \right\} \delta_\beta \end{bmatrix}(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Dans ces équations, les termes considérés comme les chargements ne sont plus  $\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Psi}} \\ \tilde{\boldsymbol{\Theta}} \end{bmatrix}$  mais deviennent

$$\widehat{\mathbf{F}}^{\psi,\theta}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Psi}} \\ \tilde{\boldsymbol{\Theta}} \end{bmatrix} \delta_0 + \widehat{\mathfrak{L}}_\beta^{\psi,\theta}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{F} \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\boldsymbol{\psi}}]_\beta \\ [n^{\psi,\theta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}]_\beta \end{bmatrix} \right\} \delta_\beta.$$

Donc, nous effectuons les calculs en utilisant les schémas itératifs avec  $9(n_\beta + 1)$  chargements indépendants (9 pour chaque fonction dirac  $\delta_\beta$  et 9 pour la fonction  $\delta_0$ ) imposés au lieu des

9 chargements initiaux afin d'inverser la partie non-singulière de  $\mathbb{T}$ , nous obtenons alors les colonnes de la matrice associée au tenseur de localisation  $\mathbb{B}^{\psi,\theta}$  par la relation

$$\begin{bmatrix} \widehat{\tilde{\psi}} \\ \widehat{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta}(\boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Theta} \\ \widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\beta}^{\psi,\theta} \cdot \mathcal{F} \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\psi}]_{\beta} \\ [n^{\psi,\theta}\boldsymbol{\theta}]_{\tilde{\beta}} \end{bmatrix} \right\} \end{bmatrix}.$$

Nous déterminons ensuite les chargements auxiliaires en fonction des chargements initiaux selon la formule

$$\begin{aligned} & \widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\beta}^{\psi,\theta} \cdot \mathcal{F} \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\psi}]_{\beta} \\ [n^{\psi,\theta}\boldsymbol{\theta}]_{\tilde{\beta}} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\beta}^{\psi,\theta} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{M}^{\psi,\theta} & \mathbf{0} \\ 0 & n^{\psi,\theta} \end{bmatrix}_{\beta} \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta}(\boldsymbol{\xi}) \begin{bmatrix} \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Theta} \\ \widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\beta}^{\psi,\theta} \cdot \mathcal{F} \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\psi}]_{\beta} \\ [n^{\psi,\theta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}]_{\beta} \end{bmatrix} \right\} \end{bmatrix} \\ &= \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Theta} \\ \widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\beta}^{\psi,\theta} \cdot \mathcal{F} \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\psi}]_{\beta} \\ [n^{\psi,\theta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}]_{\beta} \end{bmatrix} \right\} \end{bmatrix} \\ &= \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Theta} \end{bmatrix} + \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\beta}^{\psi,\theta} \cdot \mathcal{F} \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\psi}]_{\beta} \\ [n^{\psi,\theta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}]_{\beta} \end{bmatrix} \right\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} & \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} \\ \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} & \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} \end{bmatrix} = \widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\beta}^{\psi,\theta} \cdot \mathcal{F} \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\psi}]_{\beta} \\ [n^{\psi,\theta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}]_{\beta} \end{bmatrix} \right\} \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta},$$

où  $\widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta}$  est l'opérateur associé à la sous-matrice des 9 premières colonnes de la matrice associée à l'opérateur  $\widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta}$  et où  $\widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta}$  est l'opérateur associé à la sous-matrice des  $9n_{\beta}$  dernières colonnes de la matrice associée à l'opérateur  $\widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta}$ . Ainsi, nous obtenons

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\beta}^{\psi,\theta} \cdot \mathcal{F} \left\{ \begin{bmatrix} [\mathbb{M}^{\psi,\theta} : \tilde{\psi}]_{\beta} \\ [n^{\psi,\theta}\boldsymbol{\theta}]_{\tilde{\beta}} \end{bmatrix} \right\}_{\beta} = \left[ \mathbf{I}_{\widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta}} - \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} \right]^{-1} \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Theta} \end{bmatrix},$$

ce qui nous permet d'écrire

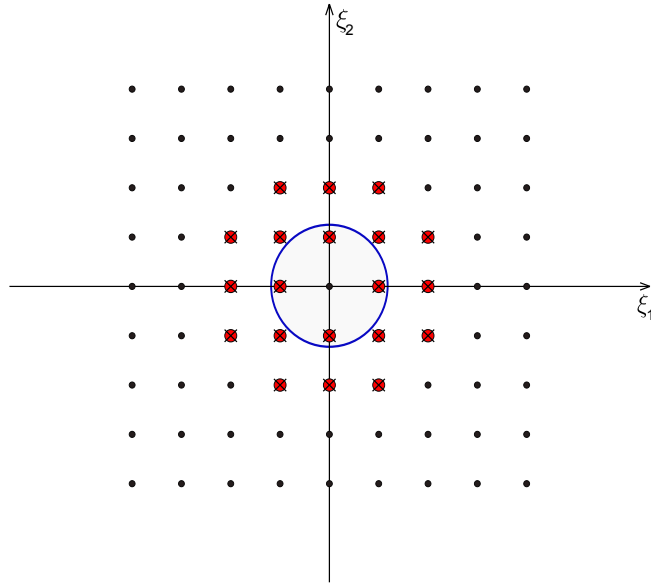
$$\begin{bmatrix} \widehat{\tilde{\psi}} \\ \widehat{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta}} \\ \left[ \mathbf{I}_{\widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta}} - \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} \right]^{-1} \widehat{\mathbb{B}}^{\psi,\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Theta} \end{bmatrix}.$$



Dans l'équation précédente, les champs microscopiques  $\begin{bmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix}$  sont déduits des champs macroscopiques  $\begin{bmatrix} \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Theta} \end{bmatrix}$  par l'intermédiaire d'un tenseur de localisation donné par le produit  $\widehat{\mathbb{B}}^{\psi, \theta} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Theta} \end{bmatrix}$  par l'intermédiaire d'un tenseur de localisation donné par le produit  $\widehat{\mathbb{B}}^{\psi, \theta} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\widehat{\mathbb{B}}^1} \\ \left[ \mathbf{I}_{\widehat{\mathbb{B}}^2} - \widehat{\mathbb{B}}^{\psi, \theta} \right]^{-1} \widehat{\mathbb{B}}^{\psi, \theta} \end{bmatrix}$ . Nous obtenons finalement les propriétés effectives en calculant les moyennes volumiques des champs duaux.

Pour résumer, la procédure du calcul des propriétés effectives, pour un couple  $(\mathbf{k}, \omega)$  donné, est effectuée selon les étapes principales suivantes :

- Premièrement, nous détectons les points  $\xi = \beta_j$  singuliers (points rouges dans la Fig. 3.5 en étudiant le changement de signe du dénominateur des composantes du tenseur de Green.



**Figure 3.5:** Schéma présentant les points singuliers dus au changement de signe (cas 2D)

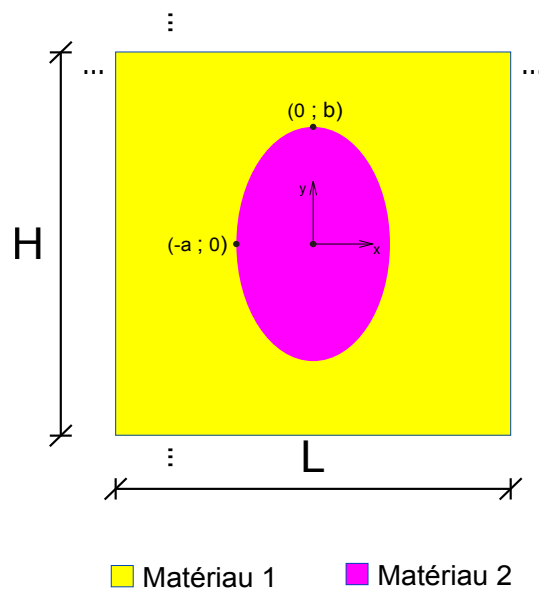
- Ensuite, nous calculons le tenseur de localisation  $\widehat{\mathbb{B}}^{\psi, \theta}$  en résolvant itérativement un certain nombre de problèmes auxiliaires. Si la résolution itérative ne converge pas, alors nous essayons d'élargir l'ensemble des points  $\beta$ .
- Enfin, nous construisons la matrice associée au tenseur de localisation, dont la moyenne volumique donne les propriétés effectives.

### 3.9 Applications numériques

Dans ce paragraphe, en appliquant l'algorithme modifié présenté précédemment, nous allons calculer les propriétés élastodynamiques effectives des composites. Les résultats obtenus seront comparés à ceux déterminés par MEF. Ensuite, nous comparerons la vitesse de calcul entre les deux approches utilisées en déformation et en vitesse ( $\mathbf{E} - \mathbf{V}$ ) d'une part et en contrainte et en quantité de mouvement ( $\mathbf{\Sigma} - \mathbf{P}$ ) d'autre part. Les deux exemples seront basés sur des cellules de base centrosymétrique ou bien asymétrique en vue d'illustrer numériquement les effets de la symétrie de la microstructure sur la forme de la loi effective. Dans l'ensemble des applications proposées dans ce chapitre, la précision utilisée pour vérifier la condition de convergence  $\epsilon$  est choisie telle que  $\epsilon = 10^{-3}$ .

#### 3.9.1 Première application

Considérons un composite à fibres de section elliptique arrangées parallèlement et périodiquement dans un réseau carré. La cellule de base correspondante est une cellule 2D carrée de côté  $h = 0.0004(m)$  située dans le plan perpendiculaire à la direction des fibres. La cellule de base (voir Fig. 3.6) contient une inclusion elliptique dont le centre coïncide avec le centre de la cellule de base. L'inclusion elliptique a pour petit axe horizontal  $2a = 0.0002(m)$  et pour grand axe vertical  $2b = 0.0003(m)$ . La matrice a pour coefficients de Lamé  $\lambda_1 = 5,77.10^5(Pa)$  et  $\mu_1 = 3,85.10^5(Pa)$  et pour densité de masse  $\rho_1 = 1000(kg/m^3)$  tandis que pour inclusion  $\lambda_2 = 1,43.10^8(Pa)$  et  $\mu_2 = 3,57.10^7(Pa)$  et  $\rho_2 = 3000(kg/m^3)$ .



**Figure 3.6:** Cellule de base 2D avec une inclusion elliptique noyée dans une matrice rectangulaire.

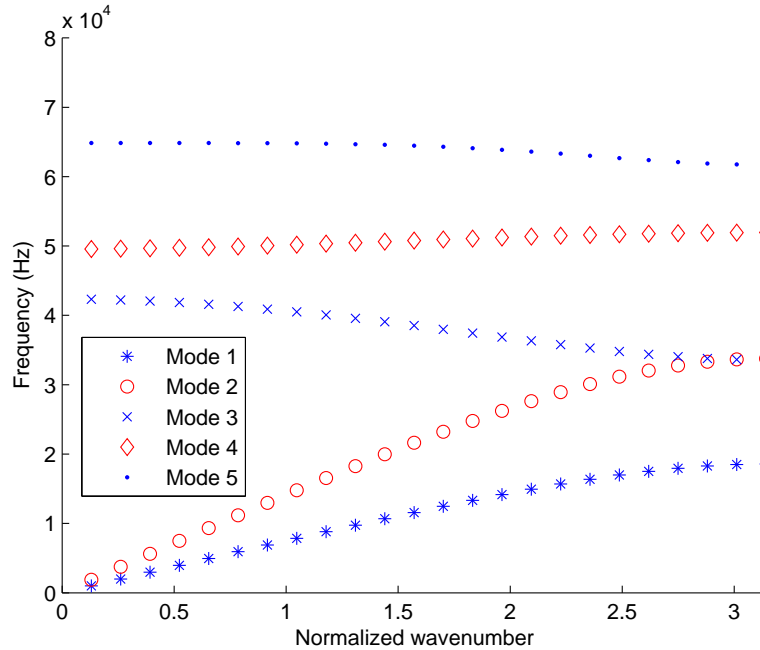
Nous déterminons les propriétés effectives en régime dynamique selon la méthode présentée dans la section précédente pour le cas  $k_x \neq 0$  et  $k_y = 0$ . La représentation matricielle de la loi effective en déformation plane est donnée au paragraphe (2.6) du chapitre 2. Nous utilisons l'algorithme TFR modifié avec lequel nous pouvons résoudre le problème concernant la divergence liée au couple  $(\mathbf{k}, \omega)$ . Comme mentionné précédemment, nous pouvons au choix utiliser directement la fonction caractéristique (indicatrice) donnée par l'équation d'une ellipse ou bien utiliser la transformée de Fourier inverse de la fonction de forme définie dans l'espace de Fourier. Pour cet exemple, nous avons l'expression analytique pour la fonction de forme elliptique  $\hat{\chi}(\boldsymbol{\xi})$  donnée par Nemat-Nasser et Hori dans [24] telle que

$$\hat{\chi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}_{(n)}) = 2.S_\alpha J_1(r)/r.e^{(i\boldsymbol{\xi}_{(n)} \cdot \mathbf{x}_c(\alpha))},$$

où  $J_1$  est la fonction de Bessel du premier ordre et de la première forme,  $S_\alpha$  est l'aire de l'inclusion et  $\mathbf{x}_c(\alpha)$  est le vecteur position du centre de l'inclusion  $\alpha$ . De plus, le rayon  $r$  est donné par

$$r = (\xi_1^2 a^2 + \xi_2^2 b^2)^{\frac{1}{2}},$$

où  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont les composantes du vecteur d'onde  $\boldsymbol{\xi}$ . En utilisant la courbe de dispersion présentée à la Fig. 3.7 obtenue par MEF,



**Figure 3.7:** Courbe de dispersion du composite à la cellule de base centrosymétrique, obtenue par MEF.

nous déterminons les propriétés effectives pour des couples  $(\mathbf{k}, \omega)$  appartenant d'abord à la première branche (correspondant au premier mode, associé aux basses fréquences) puis à la quatrième branche (correspondant au quatrième mode, associé aux hautes fréquences). Ensuite, pour un couple  $(\mathbf{k}, \omega)$  de la première branche de la courbe de dispersion pour lequel les effets dynamiques sont importants (nous prendrons  $k = k_x = 4,91.10^3(\text{rad}/\text{m})$ ,  $k_y = 0$  et  $\omega = 8,89.10^4(\text{rad}/\text{s})$ ), nous fournissons les résultats détaillés des propriétés effectives obtenues par TFR dans Tab. 3.2 comparées à celles obtenues par MEF présentées dans Tab. 3.3.

**TABLE 3.2:** *Tableau des propriétés effectives obtenues par TFR pour  $k_x = 4,91.10^3(\text{rad}/\text{m})$ ,  $k_y = 0$  et  $\omega = 8,89.10^4(\text{rad}/\text{s})$ .*

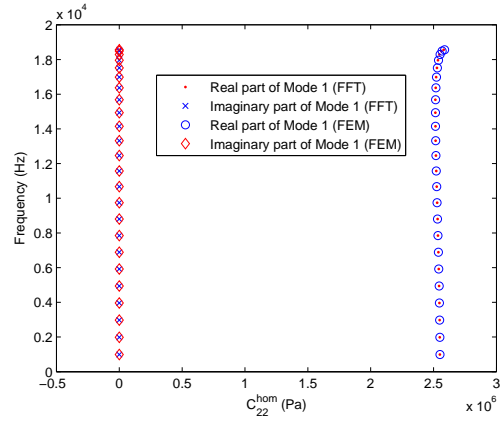
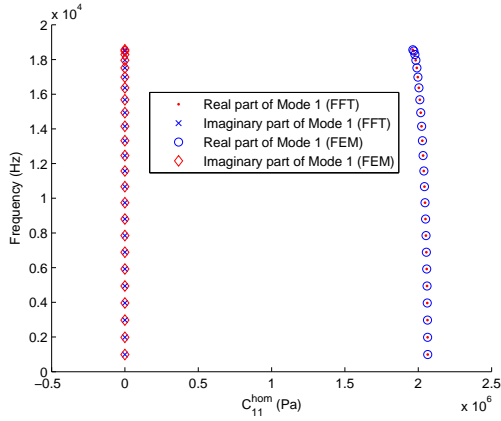
$C_{11}^{hom} = 2,022.10^6 + 0i$	$C_{12}^{hom} = 8,361.10^5 + 0i$	$C_{13}^{hom} = 0 + 0i$
$C_{21}^{hom} = 8,361.10^5 + 0i$	$C_{22}^{hom} = 2,515.10^6$	$C_{23}^{hom} = 0 + 0i$
$C_{31}^{hom} = 0 + 0i$	$C_{32}^{hom} = 0 + 0i$	$C_{33}^{hom} = 5,605.10^5 + 0i$
$T_{11}^{hom} = 5,150.10^2 + 0i$	$T_{21}^{hom} = 8,624.10^2 + 0i$	$T_{31}^{hom} = 0 + 0i$
$T_{12}^{hom} = 0 + 0i$	$T_{22}^{hom} = 0 + 0i$	$T_{32}^{hom} = 7,910.10^2 + 0i$
$S_{11}^{hom} = -5,157.10^2 + 0i$	$S_{12}^{hom} = -8,645.10^2 + 0i$	$S_{13}^{hom} = 0 + 0i$
$S_{21}^{hom} = 0 + 0i$	$S_{22}^{hom} = 0 + 0i$	$S_{23}^{hom} = -7,910.10^2 + 0i$
$R_{11}^{hom} = 1,602.10^3 + 0i$	$R_{12}^{hom} = R_{21}^{hom} = 0 + 0i$	$R_{22}^{hom} = 1,621.10^3 + 0i$

**TABLE 3.3:** *Tableau des propriétés effectives obtenues par MEF pour  $k_x = 4,91.10^3(\text{rad}/\text{m})$ ,  $k_y = 0$  et  $\omega = 8,89.10^4(\text{rad}/\text{s})$ .*

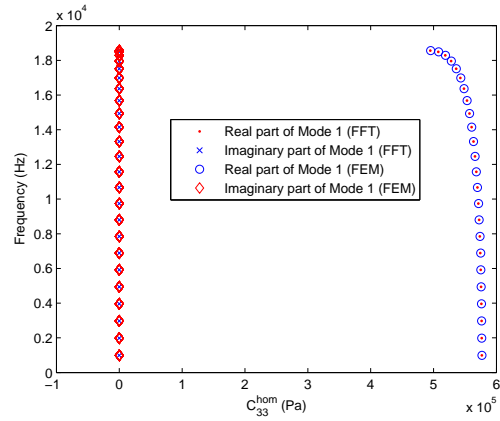
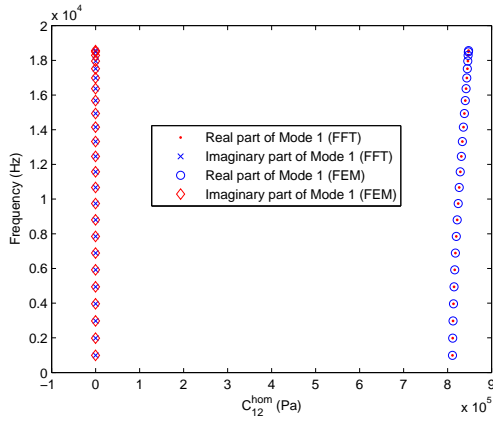
$C_{11}^{hom} = 2,023.10^6 + 0i$	$C_{12}^{hom} = 8,359.10^5 + 0i$	$C_{13}^{hom} = 0 + 0i$
$C_{21}^{hom} = 8,359.10^5 + 0i$	$C_{22}^{hom} = 2,515.10^6$	$C_{23}^{hom} = 0 + 0i$
$C_{31}^{hom} = 0 + 0i$	$C_{32}^{hom} = 0 + 0i$	$C_{33}^{hom} = 5,610.10^5 + 0i$
$T_{11}^{hom} = 5,158.10^2 + 0i$	$T_{21}^{hom} = 8,656.10^2 + 0i$	$T_{31}^{hom} = 0 + 0i$
$T_{12}^{hom} = 0 + 0i$	$T_{22}^{hom} = 0 + 0i$	$T_{32}^{hom} = 7,932.10^2 + 0i$
$S_{11}^{hom} = -5,158.10^2 + 0i$	$S_{12}^{hom} = -8,656.10^2 + 0i$	$S_{13}^{hom} = 0 + 0i$
$S_{21}^{hom} = 0 + 0i$	$S_{22}^{hom} = 0 + 0i$	$S_{23}^{hom} = -7,931.10^2 + 0i$
$R_{11}^{hom} = 1,603.10^3 + 0i$	$R_{12}^{hom} = R_{21}^{hom} = 0 + 0i$	$R_{22}^{hom} = 1,622.10^3 + 0i$

Nous pouvons constater que les écarts sont relativement faibles (<1%). Les propriétés effectives

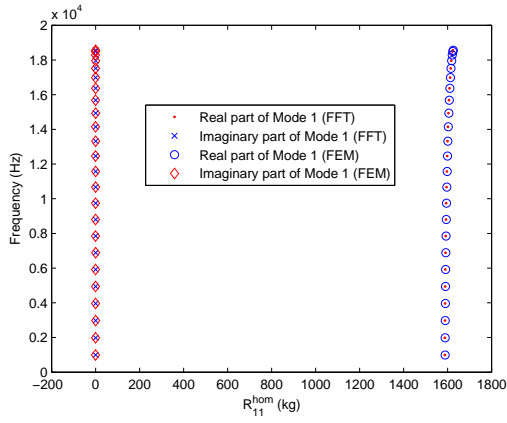
sont bien des valeurs réelles. Les matrices  $\mathbb{C}^{hom}$  et  $\mathbb{R}^{hom}$  sont symétriques. De plus, nous avons  $\mathcal{S}^{hom} = -(\mathcal{T}^{hom})^T$ . Pour  $(\mathbf{k}, \omega)$  appartenant à la première branche, nous présentons également aux Fig. 3.8 à Fig. 3.19 la variation des propriétés effectives en fonction de  $(\mathbf{k}, \omega)$ , calculée parallèlement par la méthode des éléments finis et par l'approche TFR. Ensuite, aux Fig. 3.20 à Fig. 3.31, nous illustrons les mêmes variations mais pour des couples  $(\mathbf{k}, \omega)$  appartenant à la quatrième branche. Nous voyons ici que même en hautes fréquences les résultats obtenus par l'approche TFR sont bien cohérents avec ceux calculés par la méthode des éléments finis.



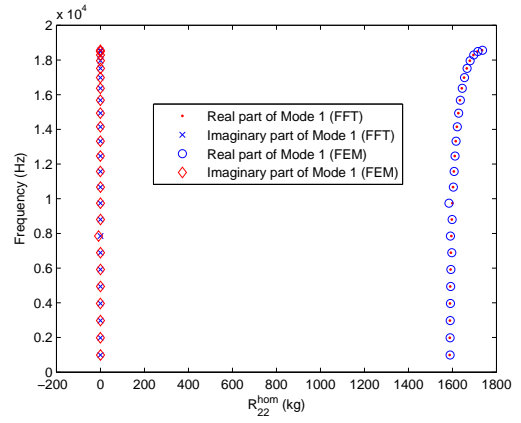
**Figure 3.8:**  $C_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) **Figure 3.9:**  $C_{22}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour la cellule de base centrosymétrique.



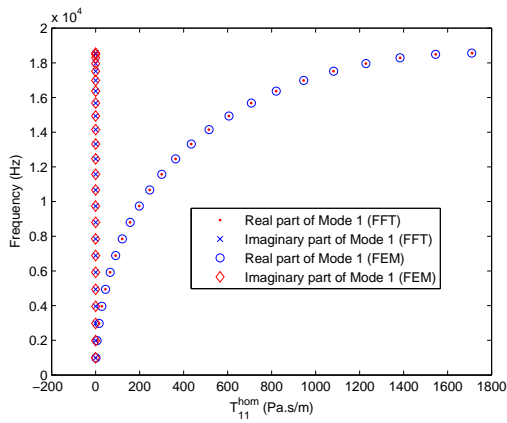
**Figure 3.10:**  $C_{12}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) **Figure 3.11:**  $C_{33}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour la cellule de base centrosymétrique.



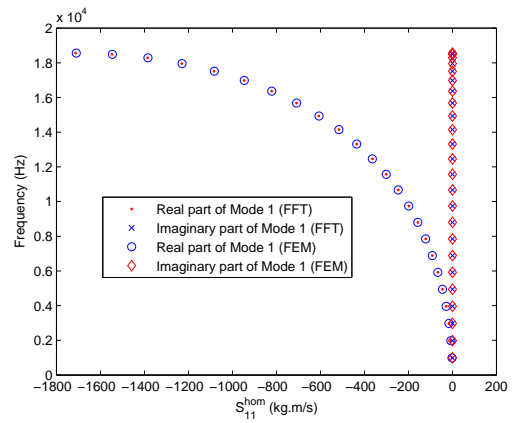
**Figure 3.12:**  $R_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour la cellule de base centrosymétrique.



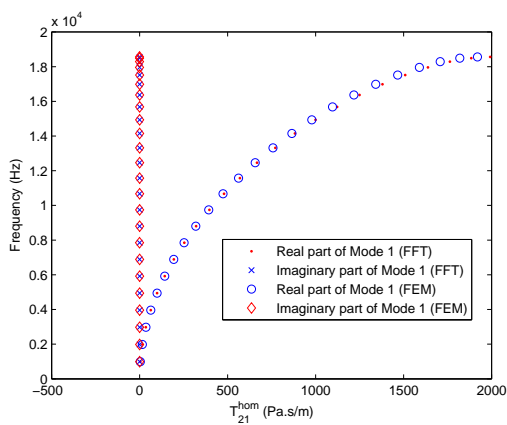
**Figure 3.13:**  $R_{22}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour la cellule de base centrosymétrique.



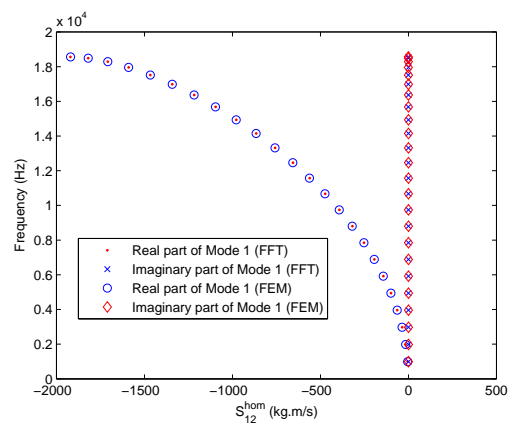
**Figure 3.14:**  $T_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour la cellule de base centrosymétrique.



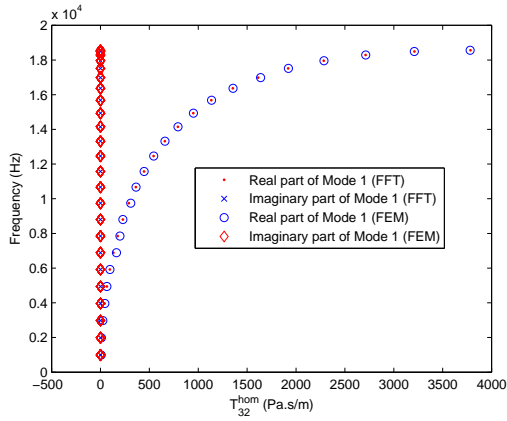
**Figure 3.15:**  $S_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour la cellule de base centrosymétrique.



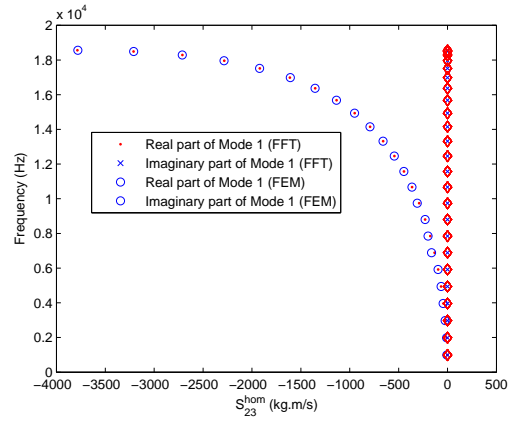
**Figure 3.16:**  $T_{21}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour la cellule de base centrosymétrique.



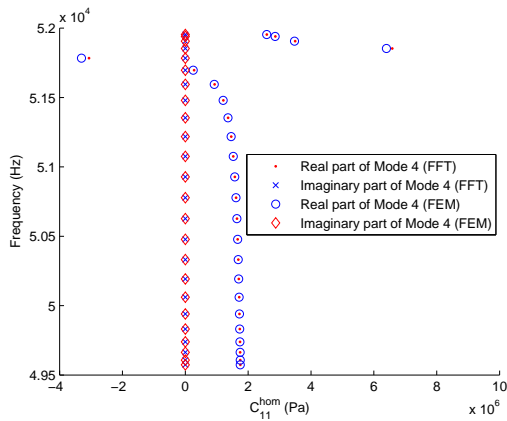
**Figure 3.17:**  $S_{12}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour la cellule de base centrosymétrique.



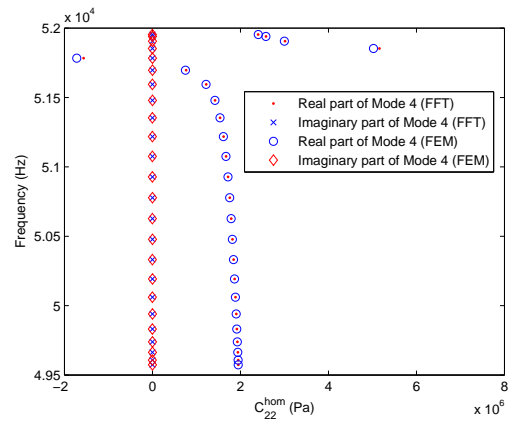
**Figure 3.18:**  $T_{32}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour la cellule de base centrosymétrique.



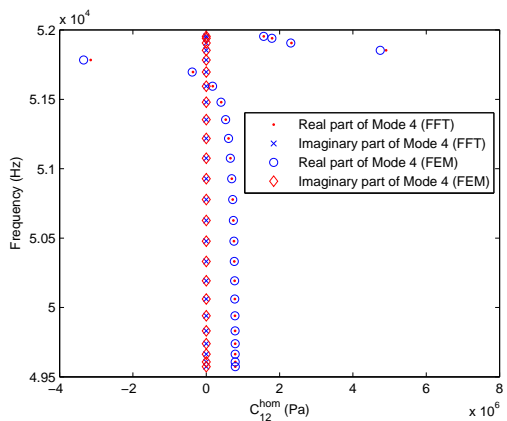
**Figure 3.19:**  $S_{23}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour la cellule de base centrosymétrique.



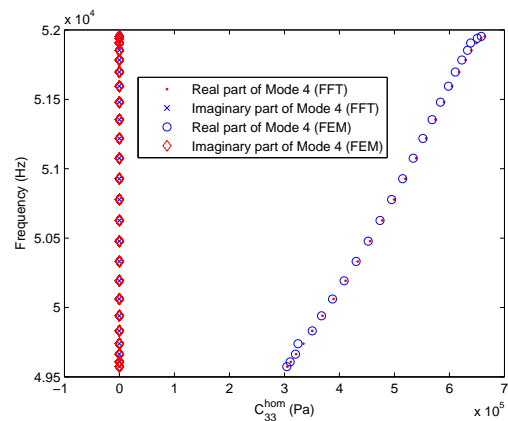
**Figure 3.20:**  $C_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) pour la cellule de base centrosymétrique.



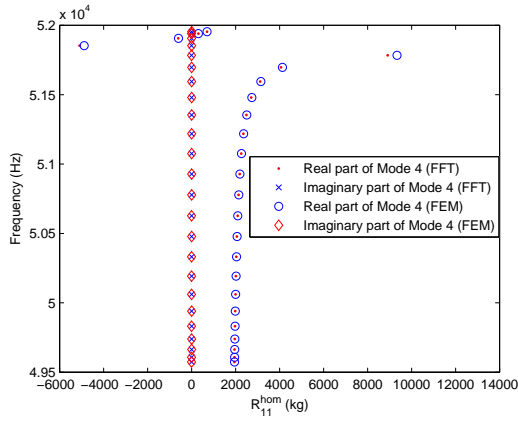
**Figure 3.21:**  $C_{22}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) pour la cellule de base centrosymétrique.



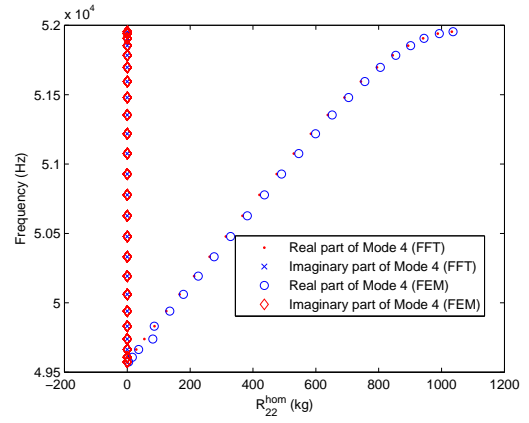
**Figure 3.22:**  $C_{12}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) pour la cellule de base centrosymétrique.



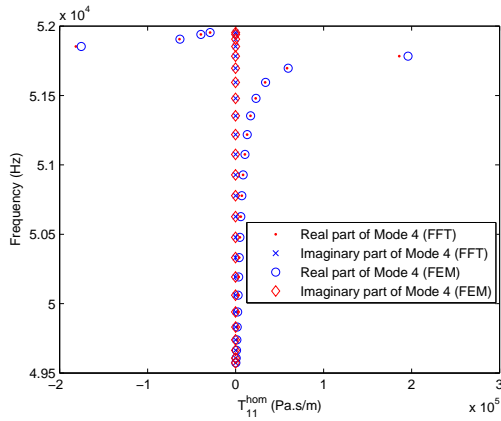
**Figure 3.23:**  $C_{33}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) pour la cellule de base centrosymétrique.



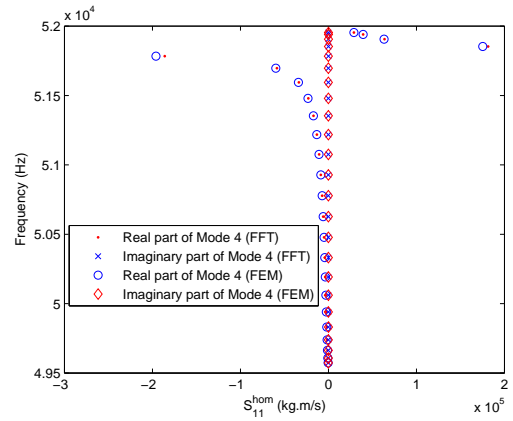
**Figure 3.24:**  $R_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) pour la cellule de base centrosymétrique.



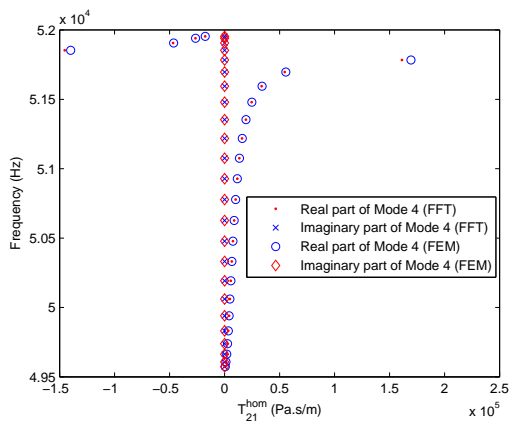
**Figure 3.25:**  $R_{22}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) pour la cellule de base centrosymétrique.



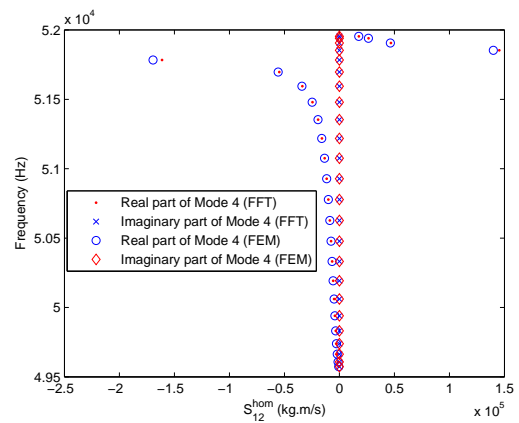
**Figure 3.26:**  $T_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) pour la cellule de base centrosymétrique.



**Figure 3.27:**  $S_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) pour la cellule de base centrosymétrique.

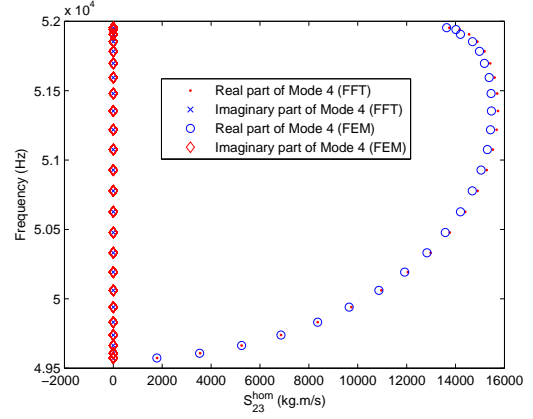
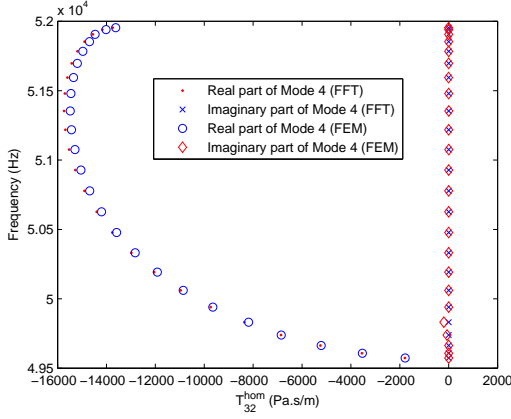


**Figure 3.28:**  $T_{21}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) pour la cellule de base centrosymétrique.



**Figure 3.29:**  $S_{12}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) pour la cellule de base centrosymétrique.

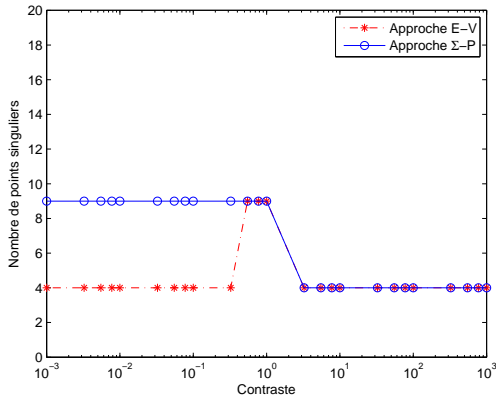




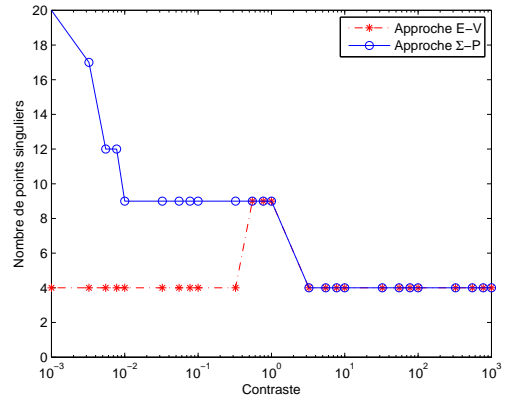
**Figure 3.30:**  $T_{32}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) **Figure 3.31:**  $S_{23}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 4) pour la cellule de base centrosymétrique.

### 3.9.2 Comparaison des deux approches (E-V) et ( $\Sigma$ -P)

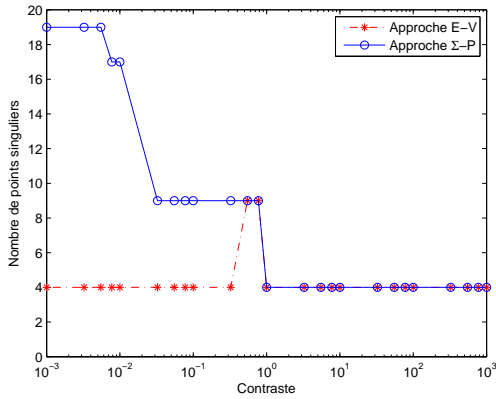
Dans cet exemple, nous utilisons la même cellule de base centrosymétrique (voir Fig. 3.6). Nous faisons varier la composante  $k_x$  du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  (normalisé par  $k$  rapport aux dimensions de la cellule de base carrée) de  $0 : \pi$  alors que la composante  $k_y$  est prise nulle. L'efficacité des deux approches TFR, (E - V) et ( $\Sigma$  - P), est étudiée. En général, l'efficacité des deux approches TFR dépend du contraste entre les phases du composite. Pour effectuer nos comparaisons, nous allons utiliser des propriétés identiques pour les phases constituantes, sauf pour le module d'Young. Nous ferons varier le module d'Young de l'inclusion entre mille fois moins ( $\alpha_c = 10^{-3}$ ) et mille fois plus ( $\alpha_c = 10^3$ ) que le module d'Young de la matrice. Le temps de calcul numérique dépend, avec une valeur de précision fixée  $\epsilon$ , du nombre de couches nécessaires pour atteindre la convergence ainsi que du nombre de points singuliers  $n_\beta$  rencontrés. Ce dernier dépend du contraste des phases. Nous comparerons les résultats, pour différents contrastes et pour un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  fixé dont la pulsation est lié en dépend du contraste (les composantes du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  normalisé varient entre  $0$  et  $\pi$ ) puisque la courbe de dispersion est également fonction du contraste. Notons que pour ce cas particulier, où seul le module d'Young varie entre les phases, seules les propriétés élastiques effectives  $\mathbb{C}^{hom}$  seront calculées. En fonction du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  normalisé, le nombre de points singuliers  $n_\beta$  varie, pour chacune des deux approches (E - V) et ( $\Sigma$  - P). Nous distinguons deux cas, où soit l'inclusion est plus molle que la matrice (contraste  $\alpha_c$  entre  $10^{-3}$  et  $1$ ) soit elle est plus rigide que la matrice (contraste  $\alpha_c$  entre  $1$  et  $10^3$ ).



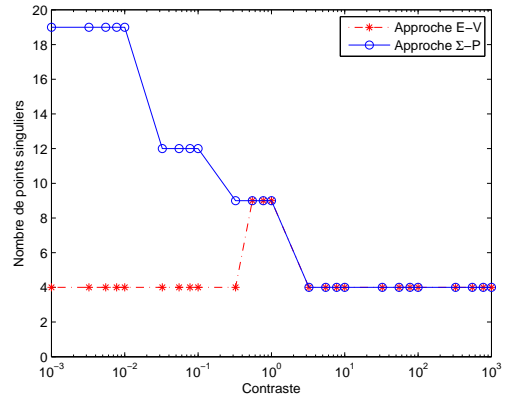
**Figure 3.32:** Nombre de points singuliers pour les deux approches E-V et  $\Sigma$ -P avec  $k_x = \frac{\pi}{8}$ .



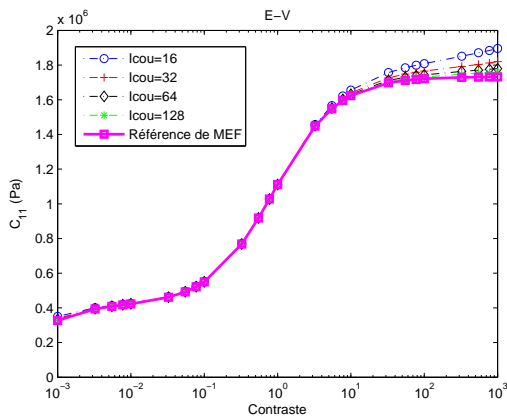
**Figure 3.33:** Nombre de points singuliers pour les deux approches E-V et  $\Sigma$ -P avec  $k_x = \frac{3\pi}{8}$ .



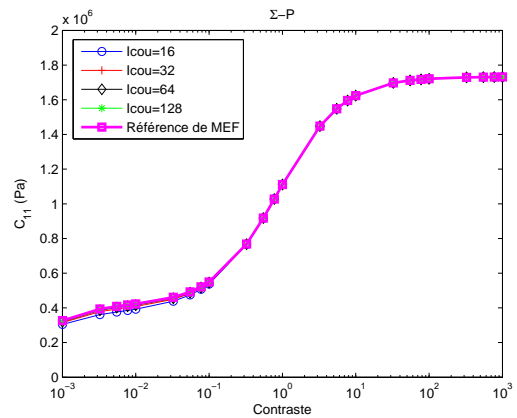
**Figure 3.34:** Nombre de points singuliers pour les deux approches E-V et  $\Sigma$ -P avec  $k_x = \frac{5\pi}{8}$ .



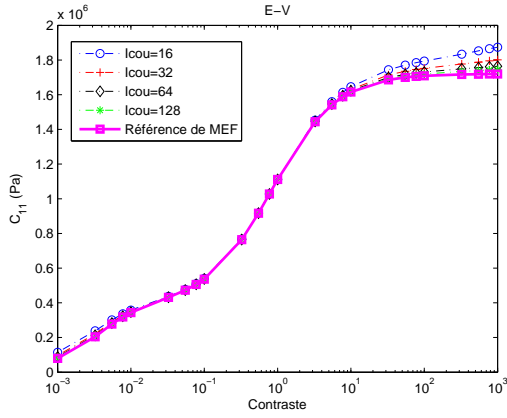
**Figure 3.35:** Nombre de points singuliers pour les deux approches E-V et  $\Sigma$ -P avec  $k_x = \frac{7\pi}{8}$ .



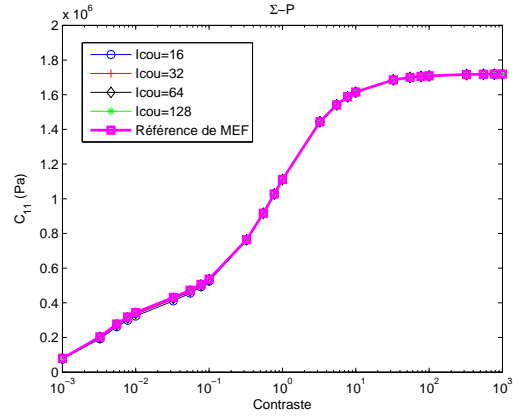
**Figure 3.36:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche E-V avec  $k_x = \frac{\pi}{8}$ .



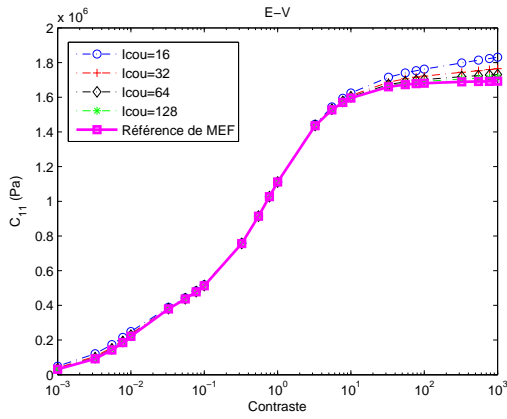
**Figure 3.37:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche  $\Sigma$ -P avec  $k_x = \frac{\pi}{8}$ .



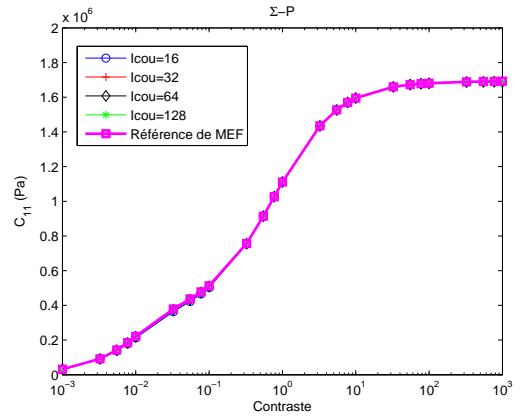
**Figure 3.38:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche E-V avec  $k_x = \frac{3\pi}{8}$ .



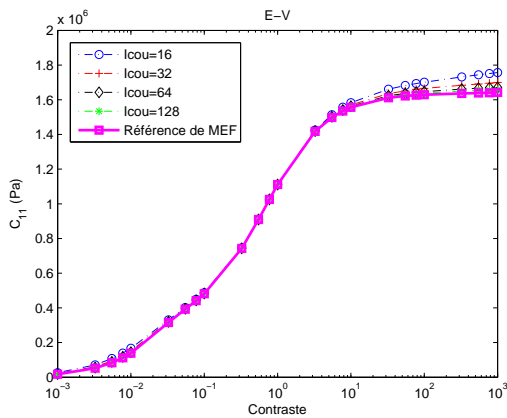
**Figure 3.39:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche  $\Sigma$ -P avec  $k_x = \frac{3\pi}{8}$ .



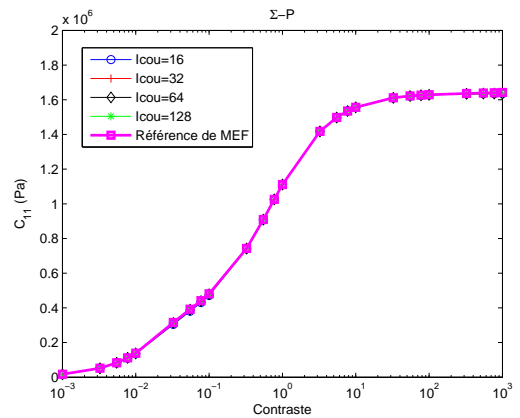
**Figure 3.40:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche E-V avec  $k_x = \frac{5\pi}{8}$ .



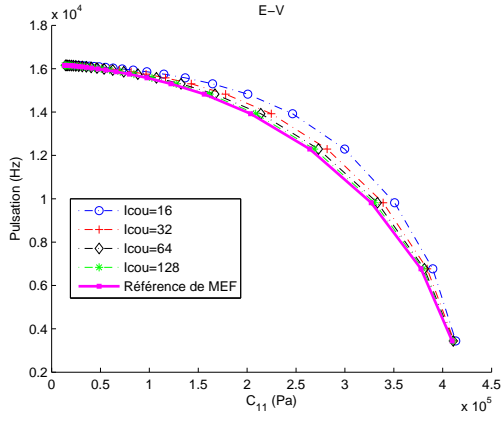
**Figure 3.41:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche  $\Sigma$ -P avec  $k_x = \frac{5\pi}{8}$ .



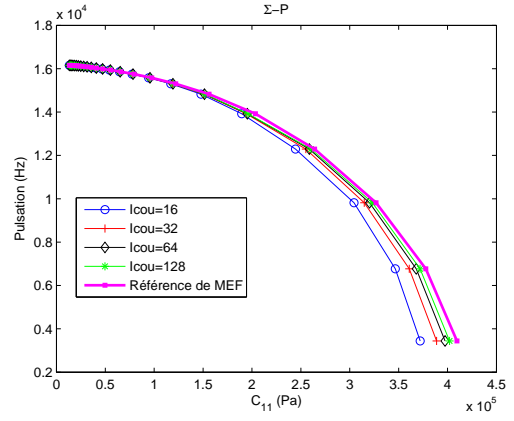
**Figure 3.42:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche E-V avec  $k_x = \frac{7\pi}{8}$ .



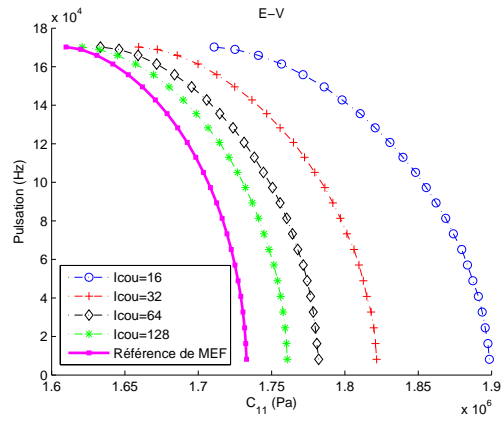
**Figure 3.43:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche  $\Sigma$ -P avec  $k_x = \frac{7\pi}{8}$ .



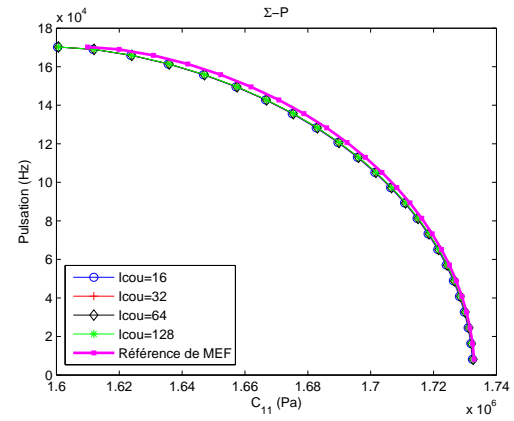
**Figure 3.44:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche E-V avec le contraste  $\alpha_c = 10^3$ .



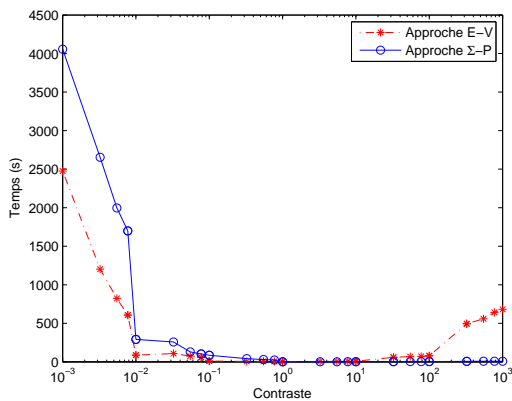
**Figure 3.45:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche  $\Sigma$ -P avec le contraste  $\alpha_c = 10^3$ .



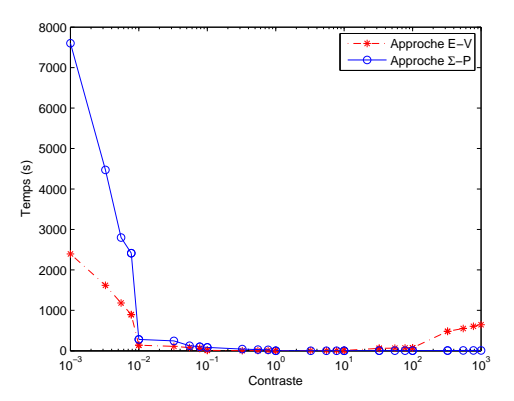
**Figure 3.46:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche E-V avec le contraste  $\alpha_c = 10^3$ .



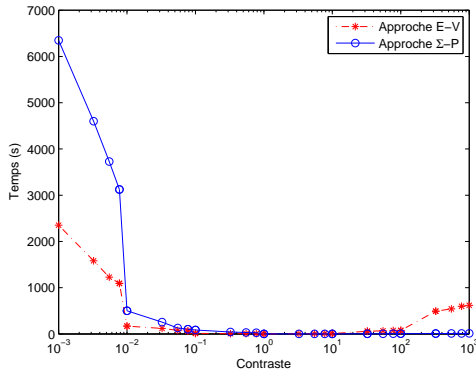
**Figure 3.47:**  $C_{11}^{hom}$  obtenu par l'approche  $\Sigma$ -P avec le contraste  $\alpha_c = 10^3$ .



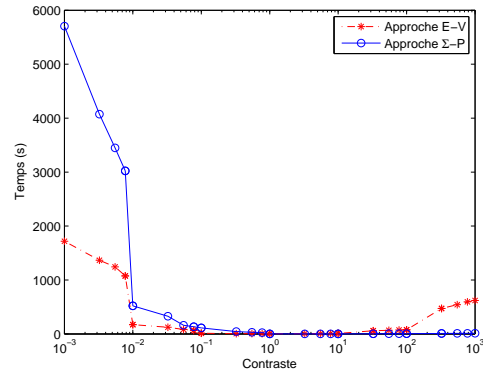
**Figure 3.48:** Temps de calcul par les deux approches E-V et  $\Sigma$ -P pour  $k_x = \frac{\pi}{8}$ .



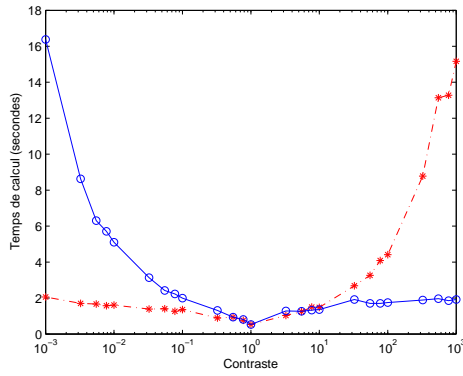
**Figure 3.49:** Temps de calcul par les deux approches E-V et  $\Sigma$ -P pour  $k_x = \frac{3\pi}{8}$ .



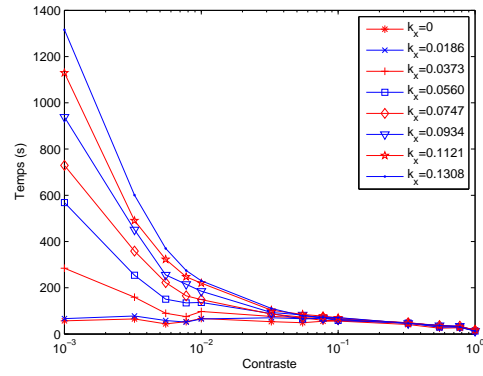
**Figure 3.50:** Temps de calcul par les deux ap-  
proches E-V et  $\Sigma$ -P pour  $k_x = \frac{5\pi}{8}$ .



**Figure 3.51:** Temps de calcul par les deux ap-  
proches E-V et  $\Sigma$ -P pour  $k_x = \frac{7\pi}{8}$ .



**Figure 3.52:** Temps de calcul pour les schémas  
dynamiques avec  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$  nuls qui correspondent au par l'approche E-V pour la transition de régime de  
cas statique.



**Figure 3.53:** Temps de calcul en fonction de  $k_x$   
la statique à la dynamique au cas  $I < M$

### Analyse des résultats

- Dans les Fig. 3.32 à Fig. 3.35, nous présentons le nombre de points singuliers obtenus par les deux approches ( $\mathbf{E} - \mathbf{V}$ ) et ( $\mathbf{\Sigma} - \mathbf{P}$ ) pour les nombres d'onde  $k_x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$ , et  $\frac{7\pi}{8}$  respectivement.
- Aux Fig. 3.36 à Fig. 3.43, nous traçons le module effectif  $C_{11}$  obtenu en fonction du contraste pour les nombres d'onde  $k_x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$  et  $\frac{7\pi}{8}$ , cela pour un nombre de couches égal à  $2^n$ ,  $n$  allant de 4 jusqu'à 7.
- Les Fig. 3.44 et Fig. 3.45 montrent le module effectif  $C_{11}$  en fonction de  $\omega$  pour un contraste  $\alpha_c = 10^{-3}$ .
- Les figures Fig. 3.46 et Fig. 3.47 montrent le module effectif  $C_{11}$  en fonction de  $\omega$  pour un contraste  $\alpha_c = 10^3$ .

- Aux Fig. 3.48 à Fig. 3.51, nous traçons, pour  $k_x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8},$  et  $\frac{7\pi}{8}$ , le temps de calcul en fonction du contraste, obtenu en optimisant l'utilisation de chaque approche et en cherchant à atteindre un niveau d'erreur inférieur à 1% par rapport à la référence donnée par la MEF.
- La Fig. 3.52 présente le temps de calcul pour  $(\mathbf{k}, \omega)$  nuls, correspondant au cas statique. Cette allure est déjà obtenu par Vincent et al. dans [19] et valide ainsi nos résultats.
- La Fig. 3.53 présente le temps de calcul lorsque nous varions le nombre d'onde  $k_x$  de 0 à  $\frac{\pi}{24}$  en vue d'étudier la transition du régime statique vers le régime dynamique.

Dans la suite nous commandons les résultats en distinguant deux cas, selon que l'inclusion soit plus molle ( $I < M$ ) ou plus rigide ( $I > M$ ) que la matrice.

### Cas 1 : Inclusion plus molle que la matrice ( $I < M$ )

- Dans ce cas, nous constatons que le nombre de points singuliers obtenus par l'approche en  $(\mathbf{E} - \mathbf{V})$  est plus faible que par l'approche en  $(\Sigma - \mathbf{P})$ , à cause du milieu de référence choisi.
- Nous trouvons que les deux approches  $(\mathbf{E} - \mathbf{V})$  et  $(\Sigma - \mathbf{P})$  ont besoin au moins d'un nombre de couches  $I_{cou}$  d'au moins  $I_{cou} = 2^7 = 128$  pour obtenir un niveau d'erreur satisfaisant ( $< 1\%$ ) par rapport à la référence calculée par MEF.
- Nous trouvons que l'approche  $(\mathbf{E} - \mathbf{V})$  est moins coûteuse par rapport à l'approche  $(\Sigma - \mathbf{P})$ , mais reste néanmoins chère, surtout dans le cas d'un contraste fort ( $\alpha_c < 10^{-2}$ ). En statique ( $\mathbf{k}$  et  $\omega$  sont nuls), nous trouvons la même tendance que dans la littérature donnée par Monchiet et al. [19], comme montré à la Fig. 3.52. En statique, l'approche  $(\mathbf{E} - \mathbf{V})$  s'avère toujours moins coûteuse. Cela reste vrai en régime dynamique, mais dans ce cas le temps de calcul explose. La Fig. 3.53 illustre la variation du temps de calcul en fonction du contraste avec un nombre d'onde  $k_x$  variant de 0 à  $\frac{\pi}{24}$ . Nous pouvons voir que l'approche  $(\mathbf{E} - \mathbf{V})$  donne des temps de calculs faibles pour un contraste faible et des temps de calculs qui explosent pour un contraste fort. Cela s'explique par le fait que le nombre de points singuliers est grand dans ce cas, toujours à cause du choix du milieu de référence mais aussi par la nécessité d'un nombre de couches plus grand. Dans ce cas là, il est évident que l'approche  $(\Sigma - \mathbf{P})$  prendrait encore plus de temps de calcul que celle  $(\mathbf{E} - \mathbf{V})$ , à cause de la présence d'un nombre plus grand de points singuliers.

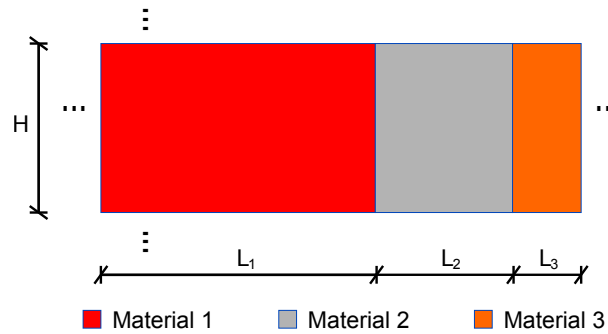
### Cas 2 : Inclusion plus rigide que la matrice ( $I > M$ )

- Dans ce cas, nous pouvons voir que le nombre de points singuliers est toujours le même pour les différentes valeurs de  $k_x$ .
- L'approche  $(\Sigma - \mathbf{P})$  demande moins de couches que l'approche  $(\mathbf{E} - \mathbf{V})$ , à précision fixée : 16

couches pour  $(\Sigma - \mathbf{P})$  et 128 couches pour  $(\mathbf{E} - \mathbf{V})$ , ce qui reste inchangé pour tout contraste. Nous constatons qu'avec le même nombre de couches, l'approche  $(\Sigma - \mathbf{P})$  demande un temps de calcul très réduit en comparaison à celui donné de l'approche  $(\mathbf{E} - \mathbf{V})$ . Donc, l'approche  $(\Sigma - \mathbf{P})$  est plus rapide et cela très largement par rapport à l'approche  $(\mathbf{E} - \mathbf{V})$ .

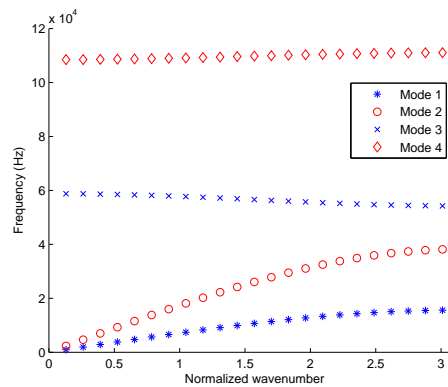
### 3.9.3 Deuxième application pour le cas anti-symétrique

Nous étudions un dernier exemple où la cellule de base est anti-symétrique. Cette cellule de base (voir 3.54) stratifiée est composée de trois phases.



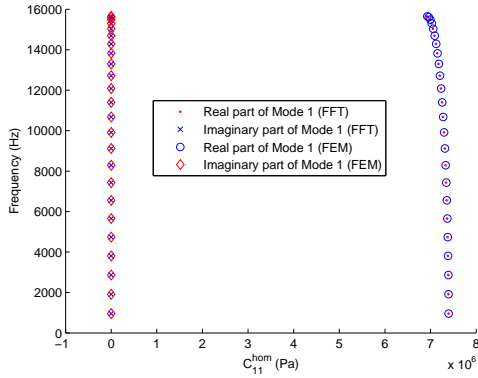
**Figure 3.54:** Cellule de base du stratifié triphasique 2D anti-symétrique.

Plus précisément, les dimensions de la cellule de base sont  $L_1 = 0.0002(m)$ ,  $L_2 = 0.0001(m)$ ,  $L_3 = 0.00005(m)$  et  $H = 0.0001(m)$ . Les propriétés du matériau 1 sont caractérisées par  $\lambda_1 = 1,136.10^8(Pa)$ ,  $\mu_1 = 4,545.10^8(Pa)$  et  $\rho_1 = 6000(kg/m^3)$ . Les propriétés des matériaux 2 et 3 sont respectivement donnés par  $\lambda_2 = 1,428.10^6(Pa)$ ,  $\mu_2 = 3,571.10^5(Pa)$ ,  $\rho_2 = 3000(kg/m^3)$  et  $\lambda_3 = 2,777.10^7(Pa)$ ,  $\mu_3 = 4,166.10^7(Pa)$ ,  $\rho_3 = 3500(kg/m^3)$ . Nous nous plaçons toujours dans le cas de déformations planes. Grâce à la méthode des éléments finis, nous pouvons déterminer la courbe de dispersion, tracée à la Fig. 3.55 pour le cas  $k_x \neq 0$  et  $k_y = 0$ .

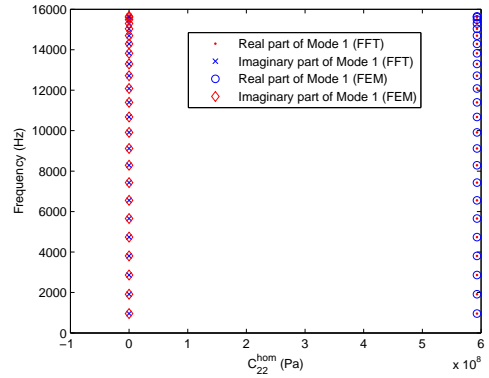


**Figure 3.55:** Courbe de dispersion du stratifié triphasique 2D anti-symétrique obtenue par MEF.

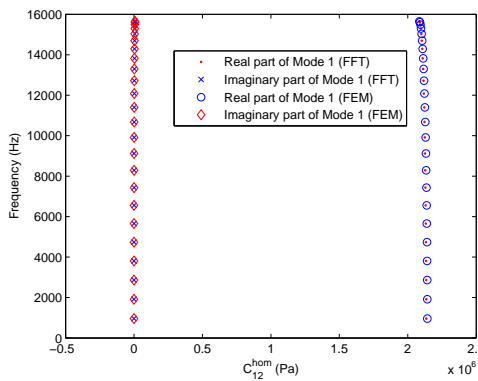
Dans ce cas, à cause de l'anti-symétrie de la cellule de base, des termes imaginaires dans les propriétés effectives apparaissent. Les propriétés effectives sont exposées aux Fig. 3.56 à Fig. 3.67.



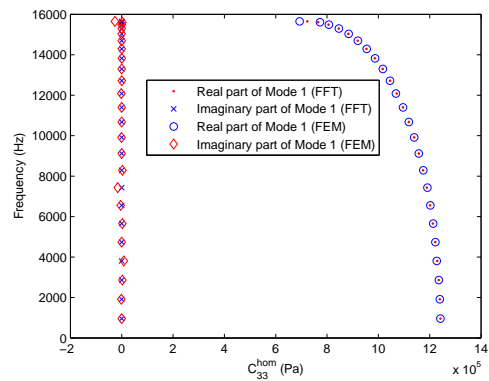
**Figure 3.56:**  $C_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.



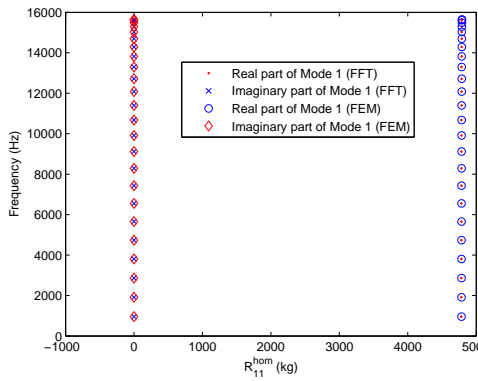
**Figure 3.57:**  $C_{22}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.



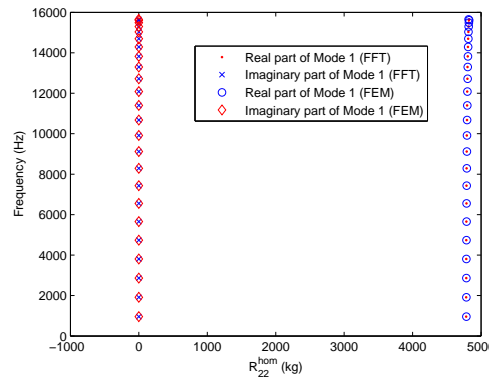
**Figure 3.58:**  $C_{12}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.



**Figure 3.59:**  $C_{33}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.

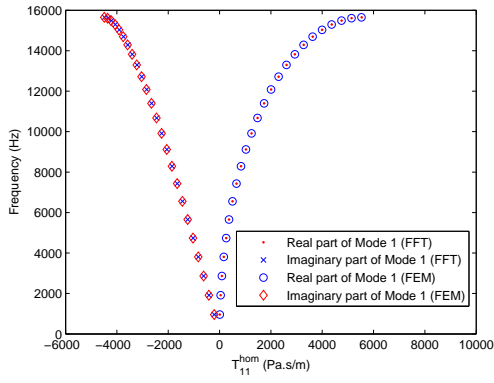


**Figure 3.60:**  $R_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.

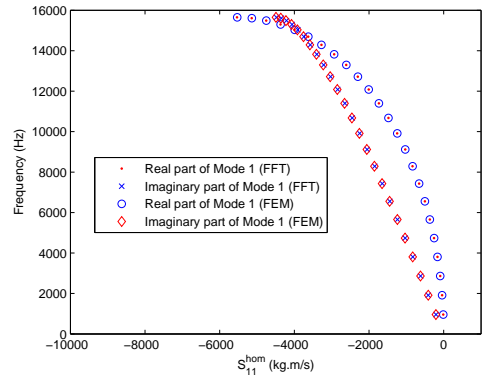


**Figure 3.61:**  $R_{22}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.

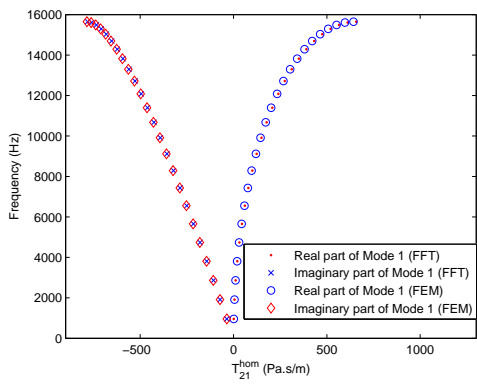




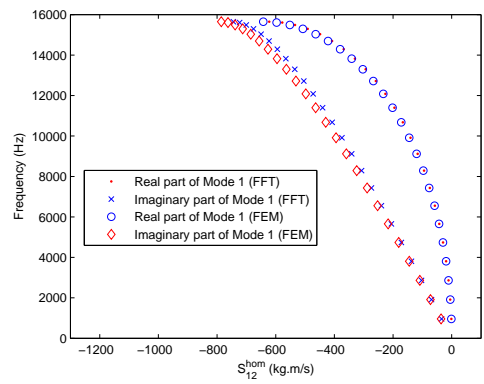
**Figure 3.62:**  $T_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.



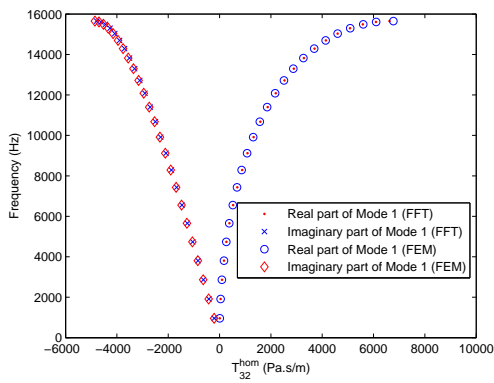
**Figure 3.63:**  $S_{11}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.



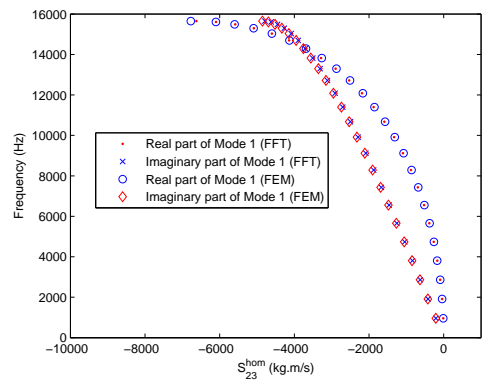
**Figure 3.64:**  $T_{21}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.



**Figure 3.65:**  $S_{12}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.



**Figure 3.66:**  $T_{32}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.



**Figure 3.67:**  $S_{23}^{hom}$  en fonction de  $\omega$  (mode 1) pour le stratifié anti-symétrique.



# Chapitre 4

## Calculs direct et indirect : exemples numériques

Dans ce chapitre, nous considérons d'abord un milieu 1D périodique infini et ensuite un milieu 2D périodique infini. A chacun de ces deux milieux, nous imposons une force volumique harmonique et nous étudions la propagation des ondes. Dans un premier temps, nous ferons un calcul, qualifié de "direct", pour un milieu périodiquement hétérogène. Dans un deuxième temps, nous effectuerons un calcul, dit "indirect", pour le milieu homogénéisé selon la théorie de Willis. Enfin, nous comparons les champs des déplacements obtenus par ces deux méthodes pour montrer et illustrer les conditions sous lesquelles le milieu hétérogène en question est "homogénéisable" ou "non homogénéisable". Ces comparaisons constituent également des tests de validation pour la théorie de l'homogénéisation élastodynamique de Willis.

### 4.1 Méthode du calcul direct

Soit  $\mathbf{f}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$  un champ de forces volumiques imposées à un milieu périodique de dimension  $d$  occupant l'espace  $\mathbb{R}^d$  avec ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ). L'amplitude  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  de ce champ harmonique de fréquence  $\omega$  admet pour transformée de Fourier  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k})$  qui s'écrit

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{f}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dV(\mathbf{x}).$$

Pour chaque composante  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , l'équation du mouvement dans le domaine de Fourier s'écrit alors

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -\omega^2 \rho \mathbf{u}(\mathbf{k}, \mathbf{x}).$$

La solution de cette équation pour une cellule de base avec conditions de périodicité prend la forme  $\mathbf{u}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  où  $\tilde{\mathbf{u}}$  est périodique par rapport à  $\mathbf{x}$ . Par le principe de superposition, le champ des déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  dans l'espace temporel est obtenu par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$$

avec

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dV(\mathbf{k}). \quad (4.1)$$

L'équation (4.1) à laquelle s'ajoutent les conditions de périodicité sera directement résolue numériquement par la méthode des éléments finis.

## 4.2 Méthode du calcul indirect

Dans cette sous-section, le milieu périodique est remplacé par le milieu homogénéisé occupant l'espace  $\mathbb{R}^d$  et caractérisé par les lois élastodynamiques effectives de Willis, données par l'équation (1.21). Comme dans la sous-section précédente, nous y imposons les forces volumiques harmoniques  $\mathbf{f}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ . Dans ce cas, les équations du mouvement macroscopique sont données par l'équation (1.17), à savoir

$$\nabla \cdot \Sigma(\mathbf{k}, \mathbf{x}) + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -i\omega \mathbf{P}(\mathbf{k}, \mathbf{x}).$$

Le milieu effectif étant homogène, nous savons que la solution des équations du mouvement avec conditions aux limites périodiques prend la forme  $\mathbf{U}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  où  $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{k})$ -amplitude dénote une uniforme.

En introduisant les lois de comportement élastodynamique effectives, les équations du mouvement deviennent

$$i\mathbf{k} \cdot [\mathbb{C}^{hom} : (i\mathbf{k} \otimes^s \tilde{\mathbf{U}}) - \mathcal{T}^{hom} \cdot i\omega \tilde{\mathbf{U}}] + \hat{\mathbf{f}} = -i\omega [\mathcal{S}^{hom} : (i\mathbf{k} \otimes^s \tilde{\mathbf{U}}) - \mathbf{R}^{hom} i\omega \tilde{\mathbf{U}}].$$

Dans cette équation, l'amplitude  $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{k})$  du champ des déplacements macroscopiques est égale à la moyenne volumique de l'amplitude  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  du champ des déplacements microscopiques. Enfin, nous obtenons le champ des déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  dans l'espace géométrique réel par

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$$

avec

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dV(\mathbf{k}). \quad (4.2)$$

Cette méthode pour le calcul du champ des déplacements  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  est dite "indirecte".

### 4.3 Discrétisation de la transformée de Fourier

Les deux calculs microscopique et macroscopique, présentés ci-dessus, demandent l'évaluation de la transformée de Fourier en fonction du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Soit  $\mathbb{D} = \{\delta k n, n \in \mathbb{Z}\}$  l'ensemble des entiers multipliés par le nombre réel  $\delta k$  avec  $\delta k$  le pas de discrétisation du vecteur d'onde. Les équations (4.1) et (4.2) sont alors approximées sous la forme

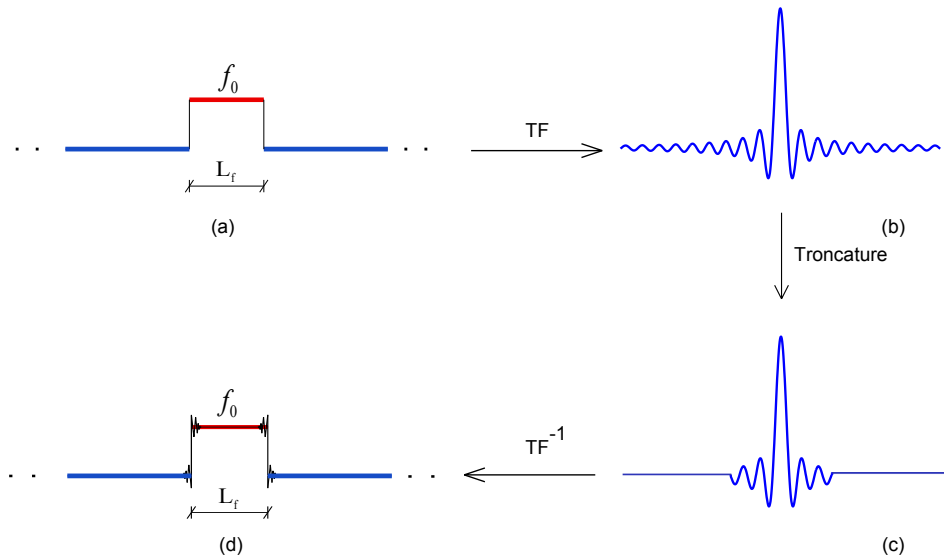
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{D}^d} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\delta k)^d,$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{D}^d} \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\delta k)^d.$$

Ensuite, chacune de ces sommes infinies est tronquée de sorte à ne conserver que les termes qui satisfont à la condition  $|\mathbf{k}| < k_{max}$ . Ici, la valeur  $k_{max}$  est choisie de sorte que

$$|\mathbf{k}| > k_{max} \Rightarrow |\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k})| \ll \epsilon$$

où  $\epsilon$  est une valeur que nous devons fixer selon le besoin. Autrement dit, les composantes de très courtes longueurs d'onde du vecteur des forces volumiques sont négligées. Dans la Fig. 4.1, un exemple est donné. Précisément, la Fig. 4.1-b représente la transformée de Fourier de la force volumique de la Fig. 4.1-a ; dans la Fig. 4.1-c, les parties qui oscillent rapidement sont négligées ; dans la Fig. 4.1-d, la force volumique provenant de la transformée de Fourier inverse du champ représenté dans la Fig. 4.1-c est fournie.

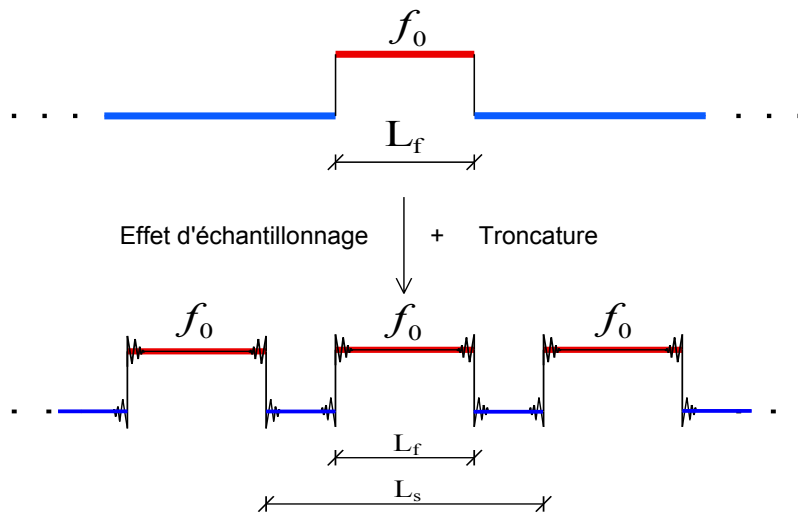


**Figure 4.1:** Approximation de la force réelle après troncature du vecteur d'onde pour la transformée de Fourier et son inverse.

La discrétisation de la transformée de Fourier  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k})$  avec un pas  $\delta k$  constant suivant  $d$  directions a pour effet de rendre  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  périodique. Par exemple, dans le cas 1D, si nous partons d'une

force  $f(x)$  qui est constante et non nulle seulement dans l'intervalle  $[-\frac{L_f}{2}, \frac{L_f}{2}]$ , la discrétisation produit un champ à support  $[-\frac{L_f}{2} - \frac{\pi}{\delta k}p, \frac{L_f}{2} + \frac{\pi}{\delta k}p]$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ . L'approximation qui résulte de cette discrétisation n'a donc un sens que sur l'intervalle  $[-\frac{\pi}{\delta k}, \frac{\pi}{\delta k}]$  et le pas de discrétisation doit respecter la condition

$$\delta k < \frac{2\pi}{L_f}.$$



**Figure 4.2:** Effet d'échantillonnage et de troncature pour une force réelle constante dans l'intervalle de longueur  $L_f$ .

En conclusion, une fois que  $\delta k$  est choisi tel que  $\delta k < \frac{2\pi}{L_f}$ , les champs solutions recherchés sont des approximations qui ne sont valables que dans l'intervalle  $[-\frac{L_s}{2}, \frac{L_s}{2}]$  avec  $L_s = \frac{2\pi}{\delta k}$ .

## 4.4 Application

Dans cette sous-section, nous traitons d'exemples 1D et 2D. Nous déterminons d'abord les courbes de dispersion et mettons en évidence l'existence de différents régimes suivant la valeur de la fréquence, à la fois pour les champs microscopique et macroscopique. Nous discutons enfin des conditions d'homogénéisabilité. Les résultats numériques seront comparés et analysés à l'aide des conditions d'homogénéisabilité proposées par Nassar et al. [22].

### 4.4.1 Condition nécessaire d'homogénéisabilité pour les ondes libres

Dans [22], Nassar et al. ont proposé une condition nécessaire d'homogénéisabilité pour les ondes libres. Cette condition est une inégalité qui fait intervenir la pulsation  $\omega$ , la norme du

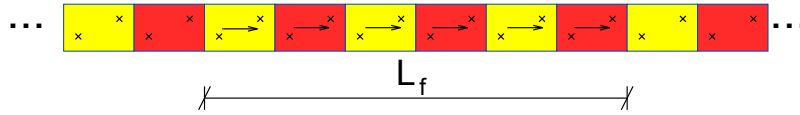
vecteur d'ondes  $\mathbf{k}$  et la valeur propre maximum du tenseur de rigidité microscopique  $\mathbb{C}$  sur la cellule de base  $\Omega$  :

$$\omega^2 \leq \max_{\mathbf{x} \in \Omega, I=1\dots 6} \left( \frac{c_I(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} \right) |\mathbf{k}|^2. \quad (4.3)$$

Dans le cas 1D, la valeur propre  $c_I$  correspond au module d'Young  $E$ . Dans le cas 2D et pour des matériaux isotropes, les valeurs propres  $c_I$  correspondent aux modules de compressibilité  $k_c$  et de cisaillement  $\mu_c$ .

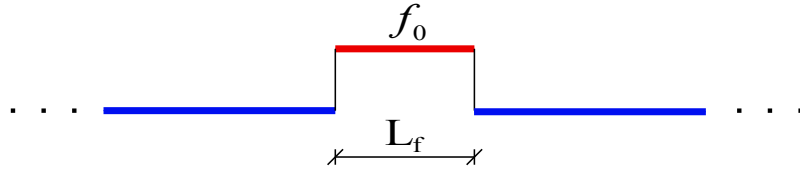
#### 4.4.2 Exemple 1D

Nous considérons un milieu linéique périodique infini engendré par la répétition d'une cellule de base biphasique de longueur  $2L_c$  présentée dans la Fig. 4.3.



**Figure 4.3:** Milieu infini 1D stratifié constitué d'une cellule de base biphasique.

Nous imposons à ce milieu périodique une force  $f(x) = 1_{[-L_f/2, L_f/2]} f_0$  concentrée sur un intervalle de longueur  $L_f$ .

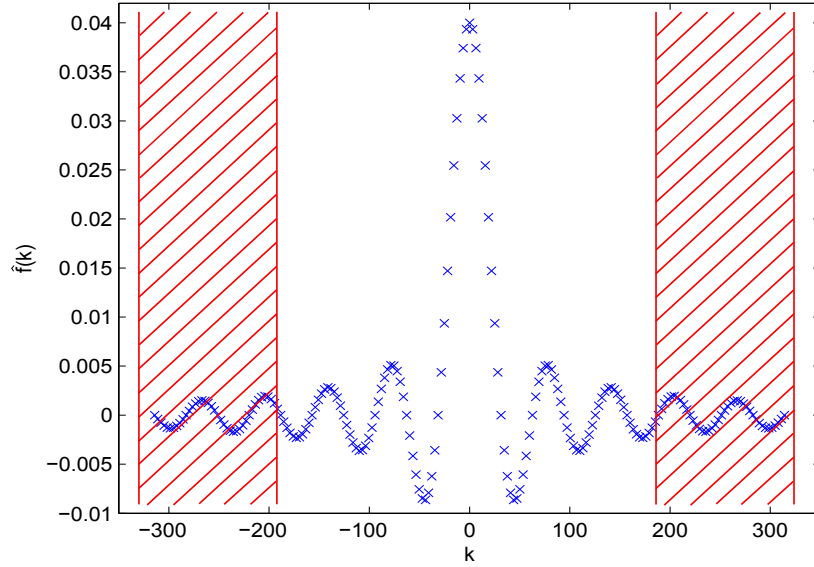


**Figure 4.4:** Force volumique imposée, dans l'espace réel, au milieu infini 1D.

La transformée de Fourier  $\hat{f}(k)$  de la force  $f(x)$  est donnée par

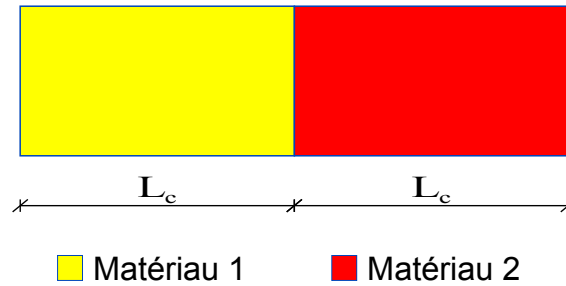
$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-L_f/2}^{L_f/2} f_0 e^{-ikx} dx = \begin{cases} f_0 \frac{2 \sin(kL_f/2)}{k} & \text{si } k \neq 0 \\ L_f & \text{si } k = 0 \end{cases}, \quad (4.4)$$

qui correspond à un sinus cardinal comme représenté par la courbe bleue dans la Fig. 4.5.



**Figure 4.5:** La transformée de Fourier de la force volumique dans le cas 1D.

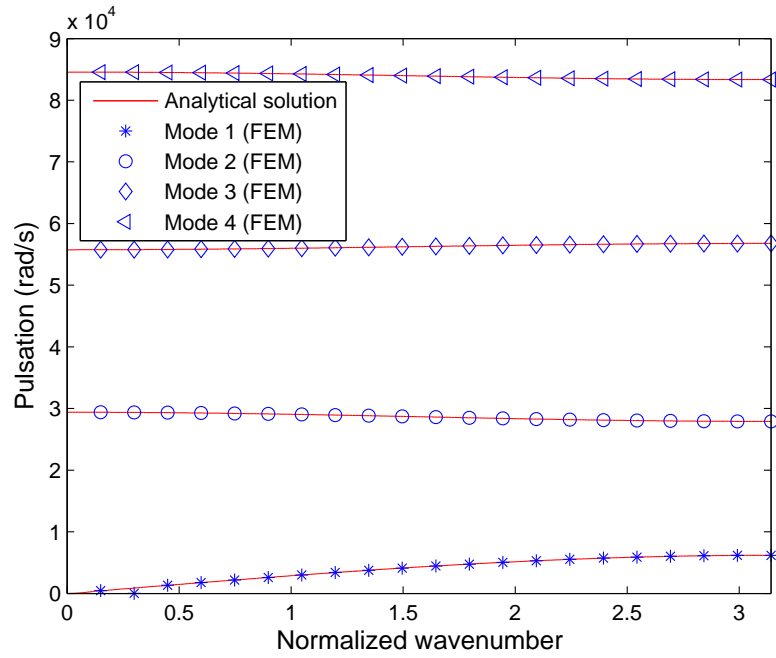
Nous voyons bien que l'amplitude de  $\hat{f}(k)$  est faible quand  $k$  est grand. Pour  $k_{max} = \frac{6\pi}{L_f}$ , nous avons  $|\hat{f}(k)| < 1\%$ . Cette troncature revient à éliminer la zone rouge visible dans la Fig. 4.5. D'autre part, pour que le comportement macroscopique ait un sens, il faut que la force imposée soit sur une longueur  $L_f$  suffisamment grande par rapport à la taille de la cellule de base. Ceci garantit l'égalité entre le travail à l'échelle microscopique et celui à l'échelle macroscopique. Dans les calculs effectués, nous choisissons  $L_f = 20 \times L_c$  où  $2 \times L_c$  est la longueur de la cellule de base biphasique (chaque phase est de même longueur  $L_c$ ) présentée à la Fig. 4.6. Les matériaux formant cette dernière ont les propriétés suivantes :  $E_1 = 2.10^6(Pa)$ ,  $E_2 = 3.10^8(Pa)$ ,  $\rho_1 = 1000(kg/m^3)$ ,  $\rho_2 = 8000(kg/m^3)$ ,  $L_c = 0.005(m)$ .



**Figure 4.6:** Cellule de base biphasique du milieu 1D infini.

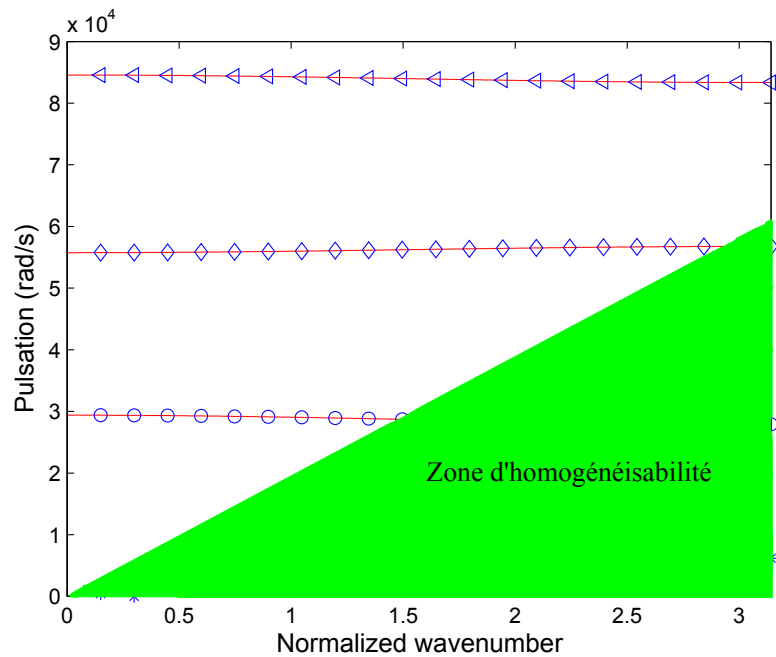
Pour cette microstructure, les deux premières branches de la courbe de dispersion sont tracées dans la Fig. 4.7.





**Figure 4.7:** Courbe de dispersion du biphasique 1D.

En appliquant l'équation (4.3), nous trouvons la zone d'homogénéisabilité associée, représentée dans la Fig.4.8 par la couleur verte.



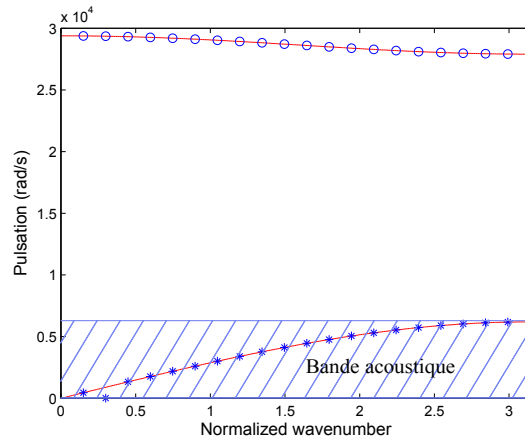
**Figure 4.8:** Zone d'homogénéisabilité proposée par Nassar et al. [22] pour la cellule de base biphasique 1D.

Nous distinguons trois bandes de fréquence qui correspondent aux bandes acoustique, optique et interdite. Pour chacune de ces bandes, nous calculons les champs des déplacements

microscopiques et macroscopiques dans le domaine réel. Nous présentons les résultats pour chacun de ces trois cas et justifions le bien-fondé du critère d'homogénéisabilité proposé par Nassar et al. [22].

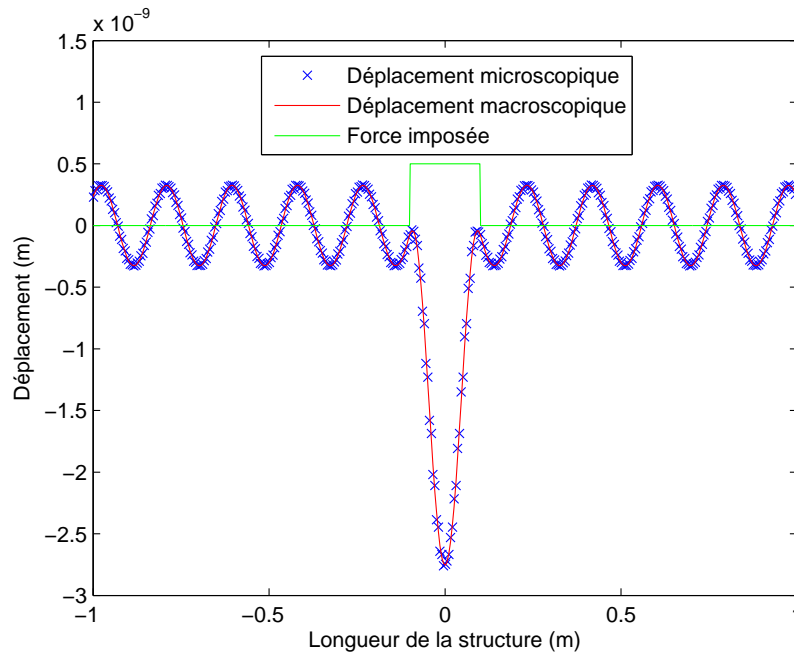
– **Cas 1 : bande acoustique**

La pulsation  $\omega$  se trouve à la fois dans le domaine couvert par la branche acoustique illustré dans la Fig. 4.9 ainsi que dans la zone d'homogénéisabilité définie par l'équation (4.3) et présentée à la Fig. 4.8.



**Figure 4.9:** Zone hachurée : bande acoustique du biphasique 1D.

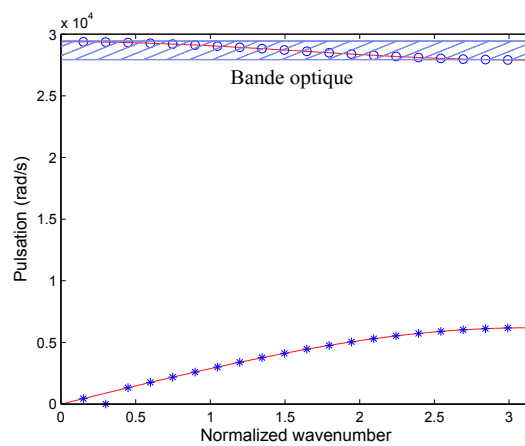
Nous constatons que le champ de force localisé en espace fait propager une onde à l'infini. Ayant une fréquence dans la bande acoustique, la force volumique  $f$  excite un mode propre de la microstructure et fait propager une onde libre. La longueur d'onde de cette dernière peut être déterminée soit directement à partir du champ solution soit indirectement à l'aide de la courbe de dispersion. Nous notons que le champ des déplacements microscopiques  $\tilde{u}$  coïncide bien avec celui des déplacements macroscopiques  $\tilde{U}$ , ce qui nous permet de conclure que le comportement effectif réalise une bonne approximation du comportement microscopique dans ce premier domaine fréquentiel. Ce résultat est en bon accord avec la zone d'homogénéisabilité proposée par Nassar et al. [22].



**Figure 4.10:** *Déplacement dans la bande acoustique du biphase 1D*

– **Cas 2 : bande optique**

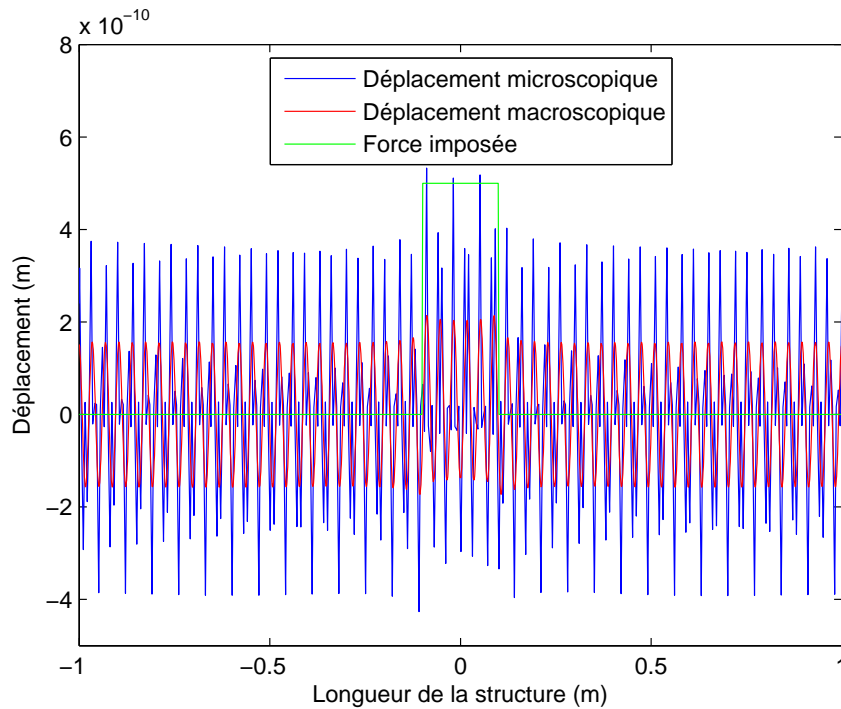
La pulsation  $\omega$  est située à la fois dans le domaine couvert par la branche optique présentée dans la Fig.4.11 ainsi qu'à l'extérieur de la zone d'homogénéisabilité définie par l'équation (4.3) et présentée à la Fig. 4.8.



**Figure 4.11:** *Zone hachurée : première bande optique du biphase 1D.*

Le champ de force localisé en espace fait propager une onde à l'infini. Ayant une fréquence dans la bande optique, la force volumique  $f$  excite un mode propre de la microstructure et fait apparaître une onde libre. Cependant, la Fig. 4.12 montre que le champ des déplacements microscopiques est différent du champ des déplacements macroscopiques. Nous constatons qu'il existe une limite d'homogénéisabilité en fréquence au delà de laquelle les fluctuations

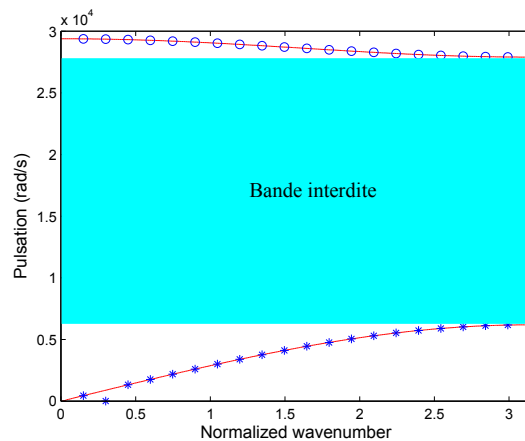
rapides du champ des déplacements microscopiques deviennent plus importantes que les fluctuations lentes du champ des déplacements macroscopiques. Ce résultat est cohérent vis-à-vis la condition d'homogénéisabilité définie par l'équation (4.3).



**Figure 4.12:** *Déplacement dans la première bande optique du biphase 1D.*

– **Cas 3 : bande interdite**

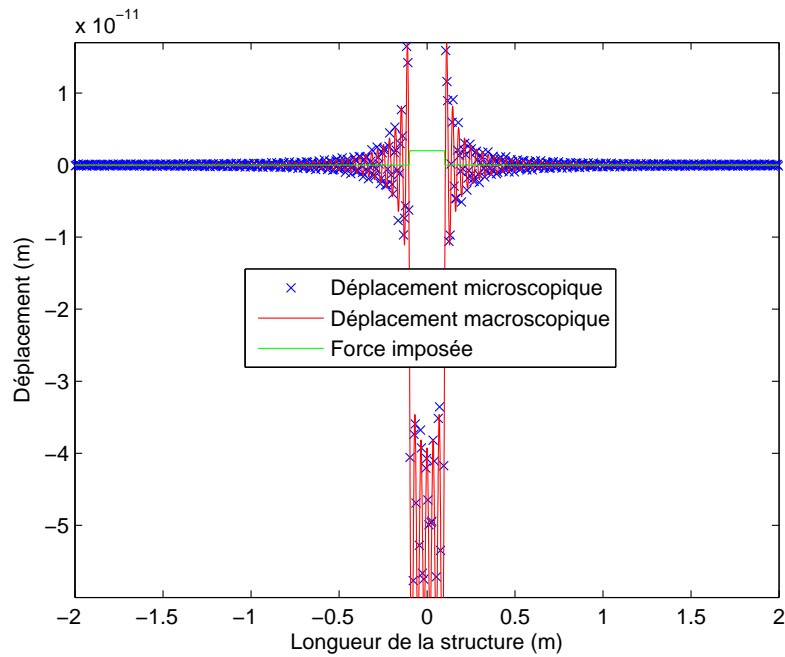
La condition d'homogénéisabilité proposée par Nassar et al. [22] s'applique seulement aux ondes libres. Cette condition n'est plus valable quand la pulsation  $\omega$  est localisée dans la zone interdite, représentée en bleu dans la Fig. 4.13.



**Figure 4.13:** *Zone bleue : une première bande interdite du biphase 1D.*

Dans cette bande, les perturbations provoquées par les sollicitations décroissent exponen-

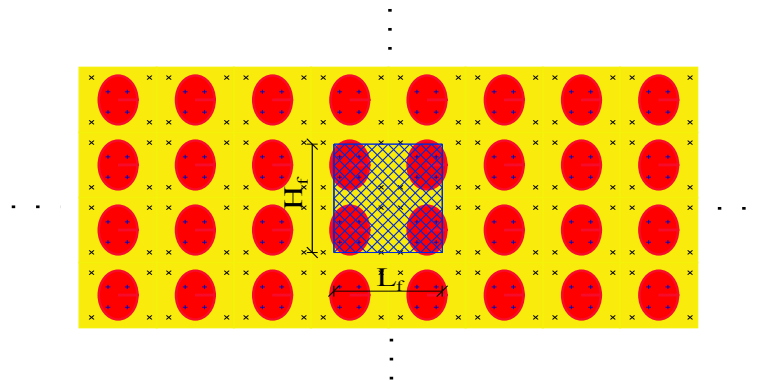
tiellement avec la distance à la source. Par conséquent, dans la bande interdite, aucun mode propre libre  $(\mathbf{k}, \omega)$  n'existe. De plus, les champs des déplacements microscopiques et macroscopiques coïncident moins bien, surtout dans la région excitée du milieu. Dans la région non-excitée, l'allure de la décroissance du champ des déplacements microscopiques est très proche de celle du champ des déplacements macroscopiques. Ceci correspond à un cas intermédiaire entre les basses fréquences et les hautes fréquences.



**Figure 4.14:** *Déplacement dans la première bande interdite du biphasique 1D.*

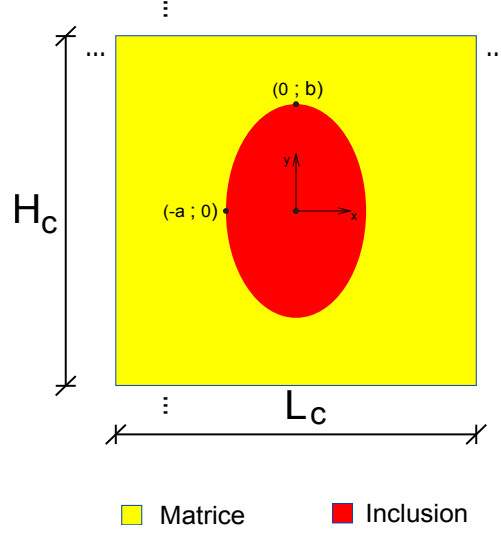
### 4.4.3 Exemple 2D

D'une façon analogue au cas 1D, nous traitons un deuxième exemple 2D dont la microstructure est représentée à la Fig. 4.15.



**Figure 4.15:** *Milieu infini 2D constitué d'une cellule de base biphasique de la forme matrice-inclusion avec inclusion elliptique.*

Le milieu infini est engendré par la répétition d'une cellule de base carrée biphasique constituée d'une matrice avec une inclusion elliptique. Les dimensions de cette cellule de base sont  $L_c = H_c = 0.0004(m)$ ,  $a = 0.0001(m)$ ,  $b = 0.00015(m)$ . Les propriétés des matériaux constitutifs de l'inclusion et de la matrice sont respectivement :  $E_{inc} = 2.10^8(Pa)$ ,  $E_{mat} = 2.10^6(Pa)$ ,  $\rho_{inc} = 9000(kg/m^3)$ ,  $\rho_{mat} = 1000(kg/m^3)$ ,  $\nu_{inc} = 0.4$ ,  $\nu_{mat} = 0.3$ .



**Figure 4.16:** Cellule de base du biphasique 2D à l'inclusion elliptique.

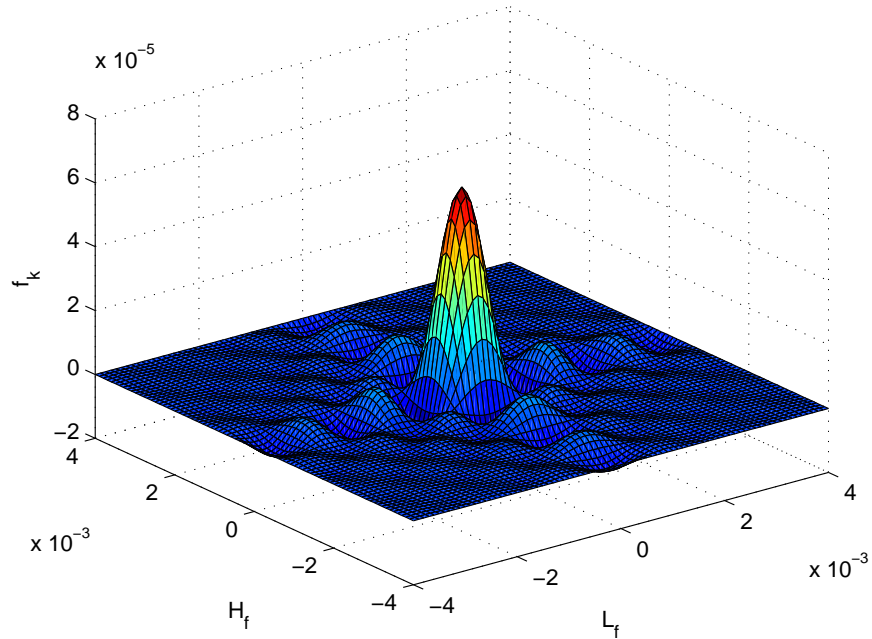
Nous imposons une force volumique dans une zone de longueur  $L_f$  et de largeur  $H_f$  :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_{[-L_f/2, L_f/2], [-H_f/2, H_f/2]} \mathbf{f}_0, \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{f}_0$  est une force constante. La transformée de Fourier de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \mathbf{f}_0 \int_{-L_f/2}^{L_f/2} \int_{-H_f/2}^{H_f/2} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dx dy \\ &= \begin{cases} 4\mathbf{f}_0 \frac{\sin(k_x L_f/2)}{k_x} \frac{\sin(k_y H_f/2)}{k_y} & \text{si } k_x \neq 0, k_y \neq 0; \\ 2\mathbf{f}_0 \frac{\sin(k_x L_f/2)}{k_x} H_f & \text{si } k_x \neq 0, k_y = 0; \\ 2\mathbf{f}_0 \frac{\sin(k_y H_f/2)}{k_y} L_f & \text{si } k_x = 0, k_y \neq 0; \\ \mathbf{f}_0 L_f H_f & \text{si } k_x = 0, k_y = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

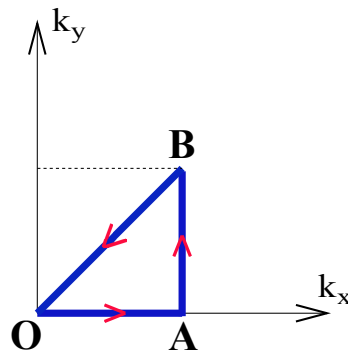
Comme dans le cas 1D, le support de la force doit être grand par rapport à la taille de la cellule de base. Précisément, nous choisissons  $L_f = 20L_c$  et  $H_f = 20H_c$ .



**Figure 4.17:** Force volumique imposée, dans l'espace de Fourier, au biphasique 2D à l'inclusion elliptique.

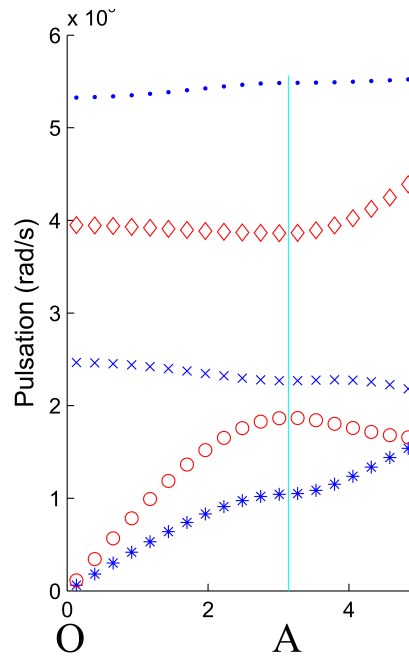
Au lieu de trouver la surface de dispersion, il est plus parlant de tracer une courbe de dispersion  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  où  $\mathbf{k}$  décrit un chemin dans l'espace des vecteurs d'onde (voir Fig. 4.18). Ce chemin est composé de trois segments :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{OA} : k_x = 0 \rightarrow \frac{\pi}{L_c} \quad \text{et} \quad k_y = 0; \\ \text{AB} : k_x = \frac{\pi}{L_c} \quad \text{et} \quad k_y = 0 \rightarrow \frac{\pi}{H_c}; \\ \text{BO} : k_x = \frac{\pi}{L_c} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad k_y = \frac{\pi}{H_c} \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (4.7)$$



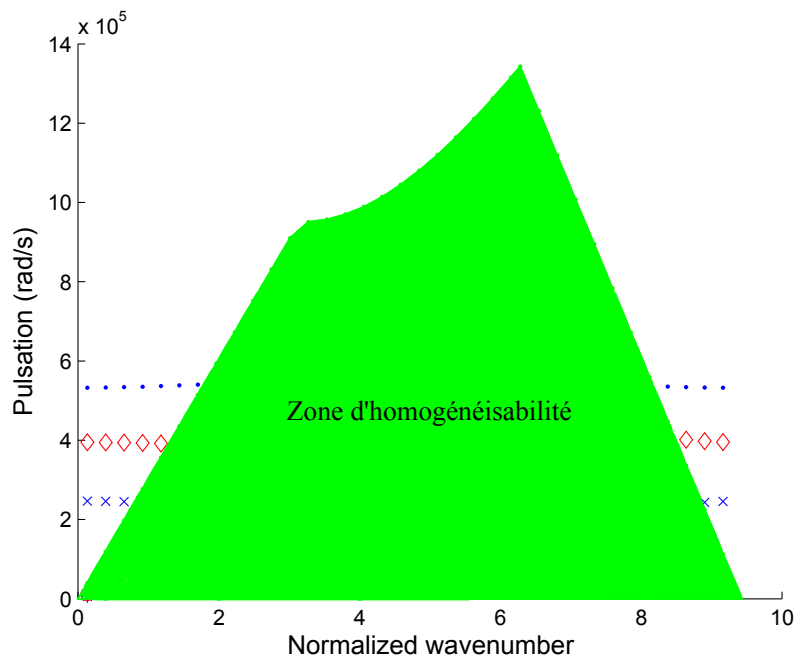
**Figure 4.18:** Vecteur d'onde imposé pour le biphasique 2D à inclusion elliptique.

La Fig. 4.19 donne les cinq premières branches de la courbe de dispersion.



**Figure 4.19:** Courbe de dispersion du biphasique 2D à inclusion elliptique.

En appliquant l'équation (4.3), nous trouvons la zone d'homogénéisabilité associée, représentée par la couleur verte dans la Fig. 4.20.



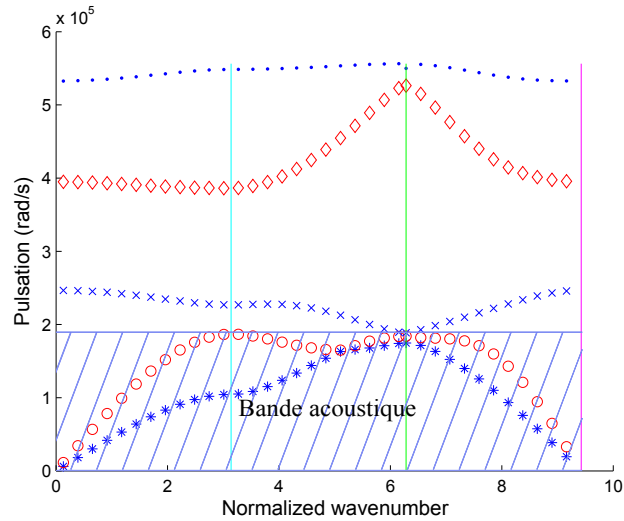
**Figure 4.20:** Zone d'homogénéisabilité proposée par Nassar et al. [22] pour le biphasique 2D à inclusion elliptique.

D'une façon similaire au cas 1D, nous distinguons trois cas :

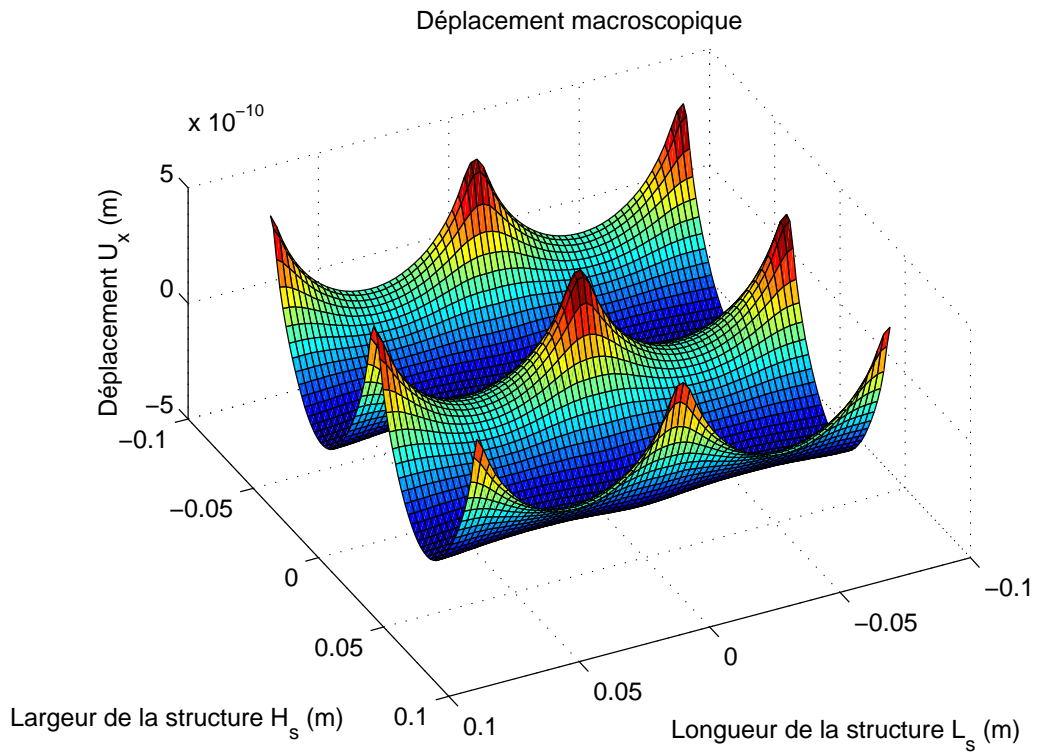


– **Cas 1 : bande des basses fréquences (bande acoustique)**

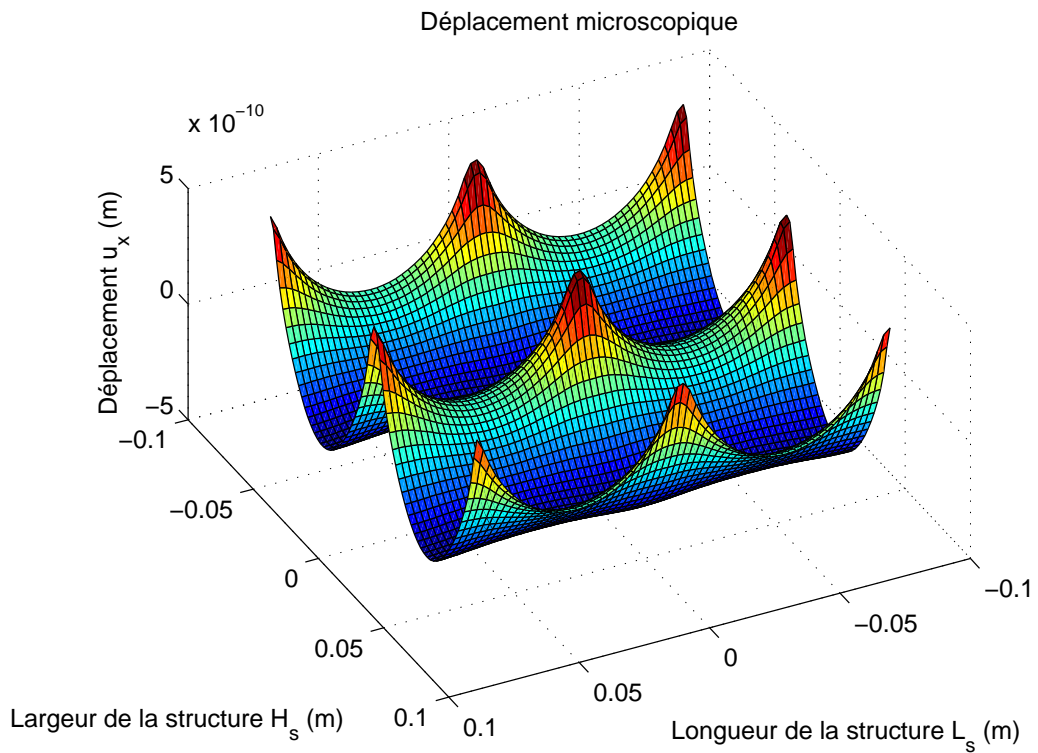
Nous présentons les deux composantes  $\tilde{u}_x$  et  $\tilde{u}_y$  du champ des déplacements microscopiques ainsi que les composantes  $\tilde{U}_x$  et  $\tilde{U}_y$  du champ des déplacements macroscopiques. Dans ce cas, une fois de plus, nous trouvons un bon accord entre les réponses en déplacements aux deux échelles pour une pulsation choisie à la fois dans la zone d'homogénéisabilité (voir Fig. 4.20) et dans bande acoustique (voir Fig. 4.21). Nous constatons aux 4.22 à Fig.4.25 que les résultats coïncident bien.



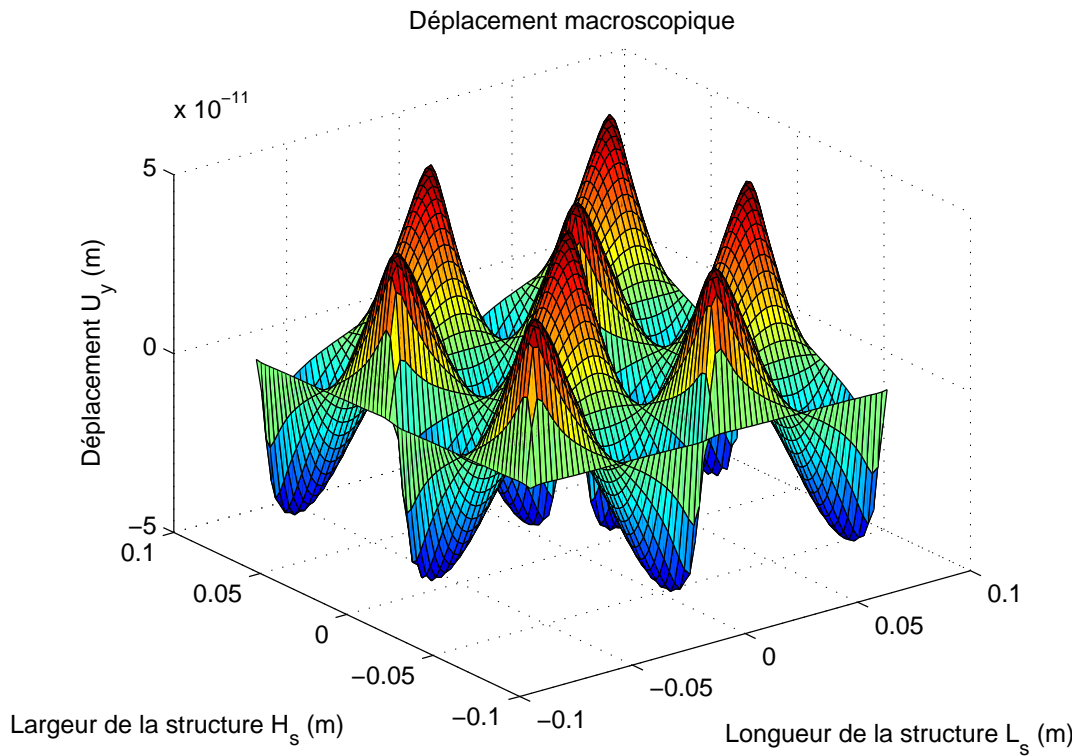
**Figure 4.21:** Zone hachurée : bande des basses fréquences correspondant à la bande acoustique.



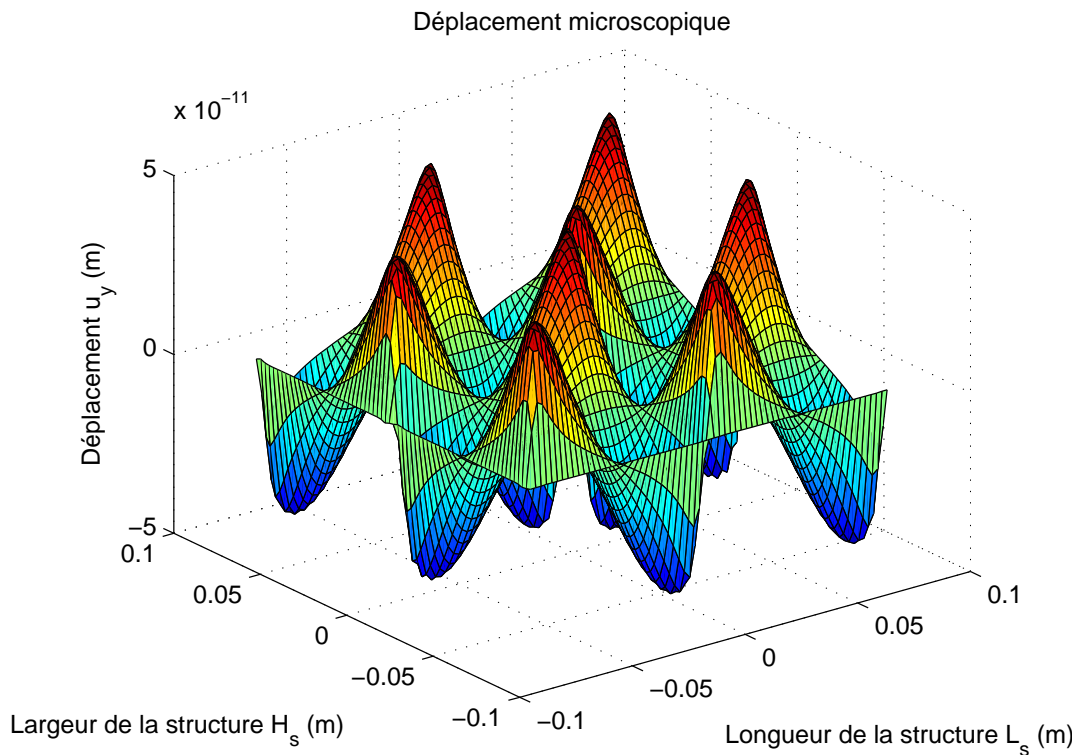
**Figure 4.22:** *Déplacement macroscopique  $\tilde{U}_x$  en basse fréquence pour le biphase 2D à inclusion elliptique.*



**Figure 4.23:** *Déplacement microscopique  $\tilde{u}_x$  en basse fréquence pour le biphase 2D à inclusion elliptique.*

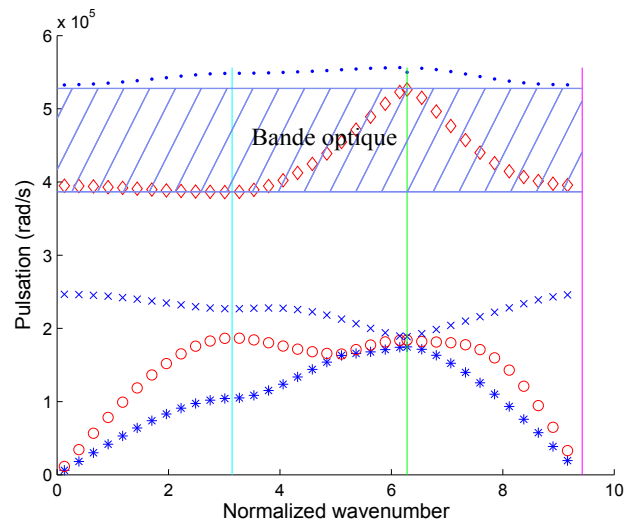


**Figure 4.24:** *Déplacement macroscopique  $\tilde{U}_y$  en basse fréquence pour le biphase 2D à inclusion elliptique.*



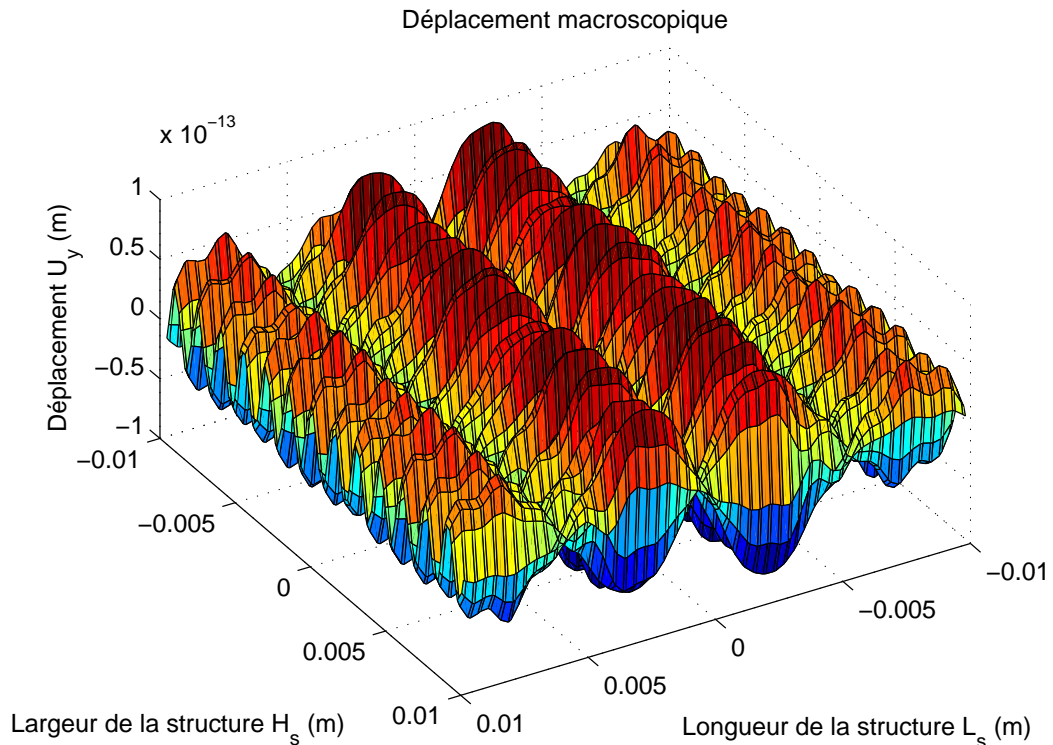
**Figure 4.25:** *Déplacement microscopique  $\tilde{u}_y$  en basse fréquence pour le biphase 2D à inclusion elliptique.*

– Cas 2 : bande des hautes fréquences (bande optique)

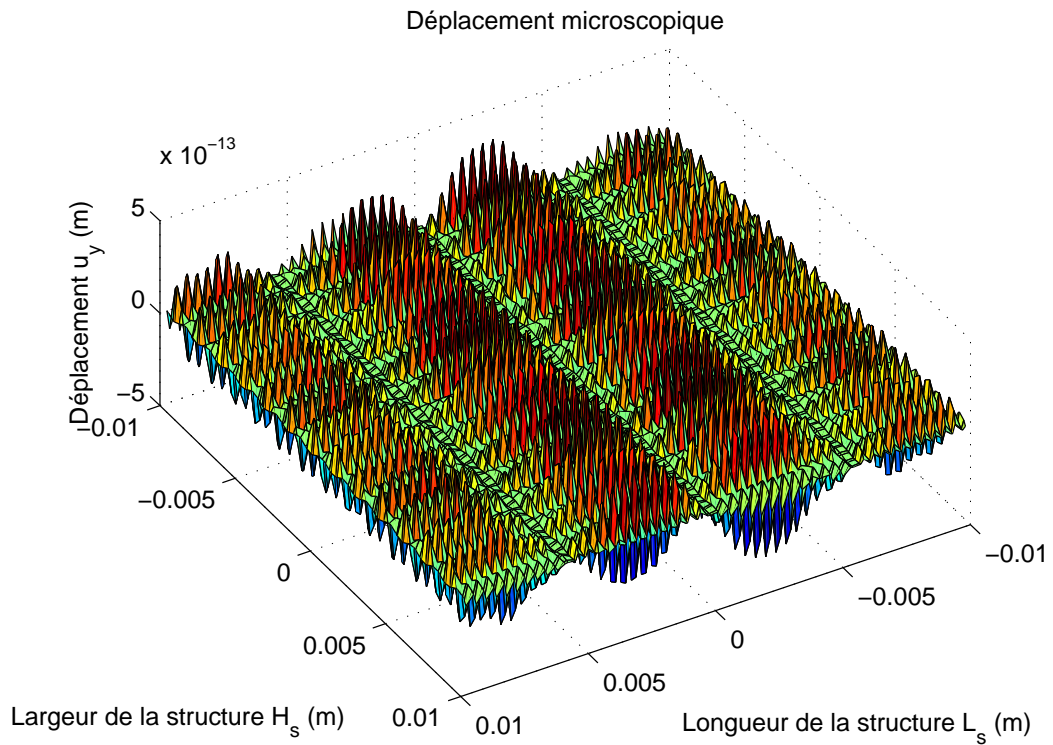


**Figure 4.26:** Zone hachurée : bande des hautes fréquences correspondant à la bande optique.

En hautes fréquences, les champs des déplacements microscopiques et macroscopiques sont différents l'un de l'autre, comme le montrent les Fig. 4.27 et Fig. 4.28, pour une pulsation n'appartenant pas à la zone d'homogénéisabilité présentée dans la Fig. 4.20.



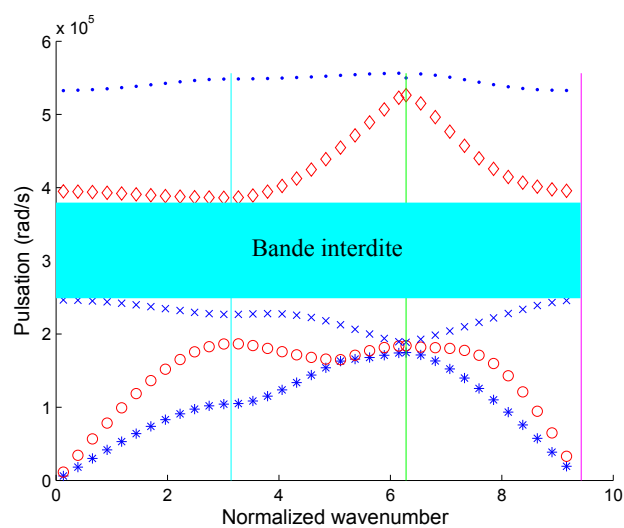
**Figure 4.27:** Déplacement macroscopique  $\tilde{U}_y$  en hautes fréquences du biphasique 2D à l'inclusion elliptique.



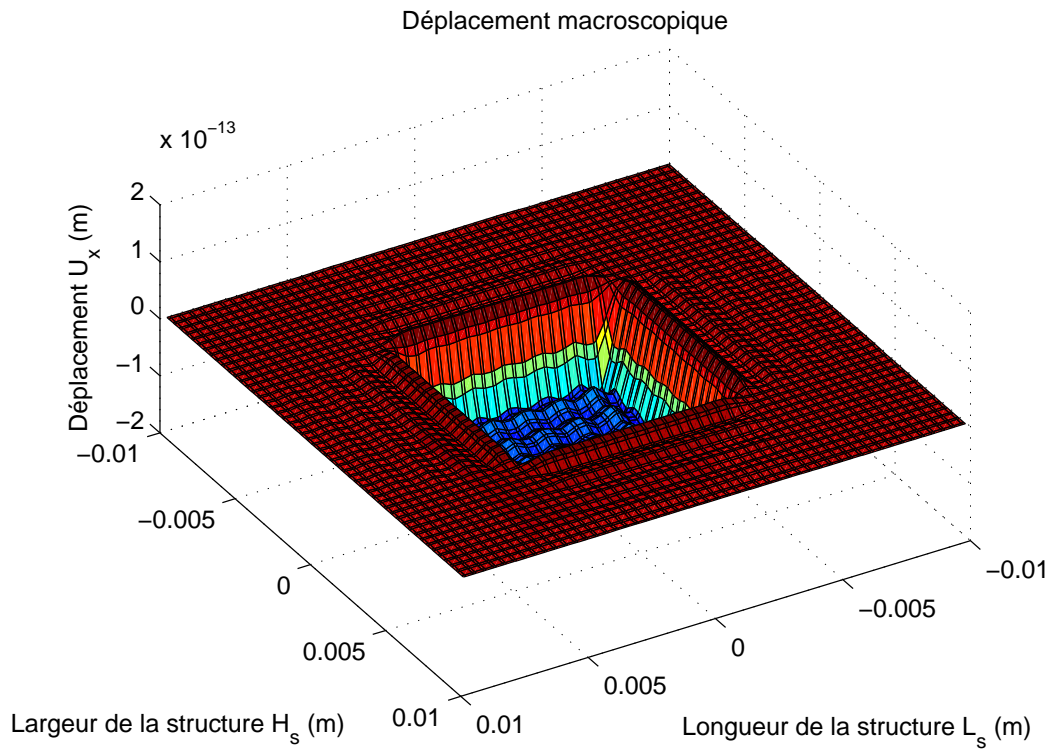
**Figure 4.28:** *Déplacement microscopique  $\tilde{u}_y$  en hautes fréquences du biphasique 2D à l'inclusion elliptique.*

– **Cas 3 : bande interdite**

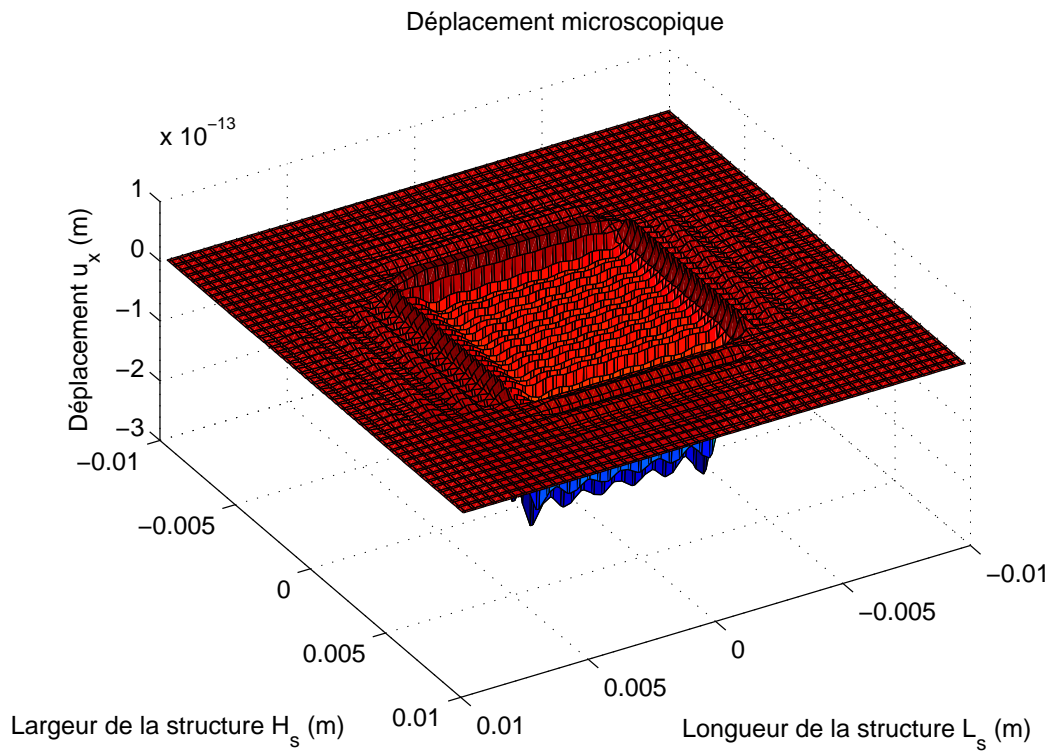
Dans ce cas, les perturbations s'atténuent exponentiellement. Bien que les résultats diffèrent au niveau de la région excitée, en dehors de cette zone, les allures des champs microscopiques et macroscopiques sont similaires (voir Fig. 4.30 à Fig. 4.33).



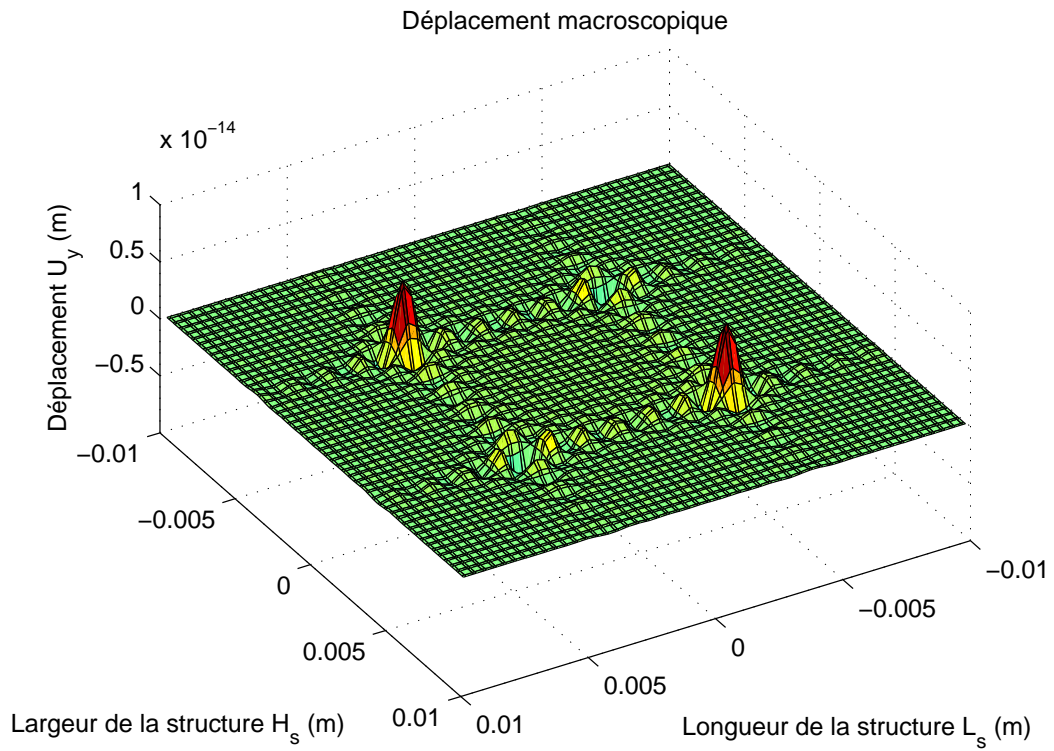
**Figure 4.29:** *Zone bleue : une première bande interdite.*



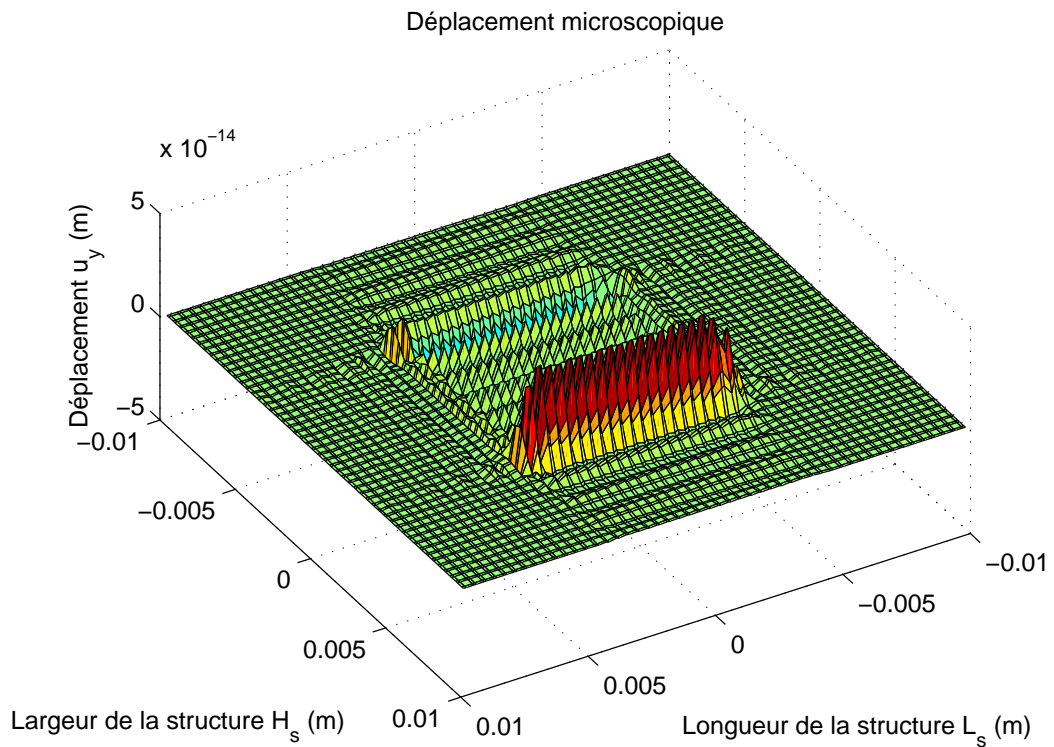
**Figure 4.30:** *Déplacement macroscopique  $\tilde{U}_x$  dans la bande interdite du biphase 2D à inclusion elliptique.*



**Figure 4.31:** *Déplacement microscopique  $\tilde{u}_x$  dans la bande interdite du biphase 2D à inclusion elliptique.*



**Figure 4.32:** *Déplacement macroscopique  $\tilde{U}_y$  dans la bande interdite du biphase 2D à inclusion elliptique.*



**Figure 4.33:** *Déplacement microscopique  $\tilde{u}_y$  dans la bande interdite du biphase 2D à inclusion elliptique.*





# Conclusions et perspectives

Dans ce travail de thèse, nous avons étudié l'homogénéisation des milieux périodiquement hétérogènes dans le cadre élastodynamique. L'objectif principal de ce travail était de déterminer numériquement leurs propriétés élastodynamiques effectives selon la théorie de Willis. Pour atteindre cet objectif, nous avons élaboré, implémenté et testé deux méthodes numériques générales. La première relève de la méthode des éléments finis (MEF) alors que la deuxième est basée sur la transformée de Fourier rapide (TFR). A notre connaissance, ces deux méthodes numériques n'avaient jamais été proposées pour effectuer l'homogénéisation élastodynamique des milieux périodiques à partir de la théorie de Willis. Les deux méthodes, qui sont valables dans le cas 3D, ont été implémentées et testées dans les cas 1D et 2D. Les résultats numériques obtenus ont été comparés et testés par rapport à ceux qui existaient dans la littérature. Ces comparaisons et tests montrent que les deux méthodes numériques proposées sont fiables, robustes et efficaces au moins dans les cas 1D et 2D.

Cependant, certaines questions relatives aux deux approches numériques proposées et développées restent ouvertes :

- L'approche relevant de la MEF est très générale et souple mais le temps de calcul est très long quand de hautes fréquences sont en jeu. Comment réduire le temps de calcul dans cette situation reste une question en suspend.
- L'approche basée sur la TFR est très rapide, à condition que la courbe de dispersion soit connue. Cette dernière peut être trouvée à l'aide, par exemple, de la méthode de Newton-Raphson. Mais la combinaison de ces deux méthodes rend le temps de calcul très long. Comment résoudre ce problème est une autre question sans réponse pour l'instant.
- Deux méthodes numériques basées sur la TFR ont été élaborées. L'une utilise le tenseur des déformations et la vitesse comme variables de contrôle alors que l'autre emploie le tenseur des contraintes et la quantité du mouvement comme variables de contrôle. Comment construire une méthode "mixte" dans le cas dynamique à l'image de la méthode mixte proposée par Monchiet et Bonnet [19] en statique est une autre question intéressante à étudier.

– L'implémentation de nos deux méthodes est limitée aux cas 1D et 2D. Leur implémentation dans le cas 3D ne pose pas de problème de principe mais elle devra être faite.

Les deux méthodes numériques proposées et développées dans ce travail de thèse font que la théorie de l'homogénéisation élastodynamique de Willis peut être concrètement appliquée aux matériaux périodiques. Ceci ouvre de nouvelles perspectives. En particulier, nos méthodes peuvent être utilisées et exploitées pour l'optimisation des microstructures afin de concevoir des métamatériaux acoustiques destinés à des applications diverses.

En relation avec le développement de la théorie de Willis et la clarification de ses relations avec les approches d'homogénéisation élastodynamiques asymptotiques (par exemple Auriault et Boutin [4]...), nos deux méthodes numériques trouveront naturellement des extensions. Par exemple, elles peuvent s'étendre au cas où la relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations à l'échelle microscopique n'est plus la loi de Hooke mais une loi viscoélastique linéaire. Enfin, par analogie, nos méthodes numériques peuvent être transposables à d'autres phénomènes physiques linéaires (par exemple Monchiet et Bonnet [20]).



# Bibliographie

- [1] **Amirkhizi A.V., Nemat-Nasser S.** (2008)  
Microstructurally-based homogenization of electromagnetic properties of periodic media. *Comptes Rendus Mécanique* 336, 24-33.
- [2] **Andrianov I.V., Bolshakov V.I., Danishevs'kyi V.V., Weichert D.** (2008)  
Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials. *Proceedings of the Royal Society A* 464, 1181-1201.
- [3] **Auriault J.-L., Boutin C., Geindreau C.** (2009)  
Homogénéisation de Phénomènes Couplés en Milieux Hétérogènes 1, Hermes Science Publications.
- [4] **Auriault J.-L., Boutin C.** (2012)  
Long wavelength inner-resonance cut-off frequencies in elastic composite materials. *International Journal of Solids and Structures* 49, 3269-3281.
- [5] **Bonnet G.** (2007)  
Effective properties of elastic periodic composite media with fibers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 55, 881-889.
- [6] **Caloz C., Itoh T.** (2006)  
Electromagnetic Metamaterials. *Transmission Line Theory and Microwave Applications*, Wiley.
- [7] **Fietz C., Shvets G.** (2010)  
Current-driven metamaterial homogenization. *Physica B* 405, 2930-2934.
- [8] **Floquet G.** (1883)  
Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 12, 47-88.

- [9] **Hashin Z., Shtrikman S.** (1962a)  
On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10, 335-342.
- [10] **Hashin Z., Shtrikman S.** (1962b)  
A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10, 343-352.
- [11] **Hashin Z., Shtrikman S.** (1963)  
A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11, 127-140.
- [12] **He Q.-C., Le Quang H., Feng Z.-Q** (2006)  
Exact Results for the Homogenization of Elastic Fiber-Reinforced Solids at Finite Strain. *Journal of Elasticity* 83, 153-177.
- [13] **Liu Z., Chan C. T., Sheng P.** (2005)  
Analytic model of phononic crystals with local resonances. *Physical Review B* 71, 014103.
- [14] **Michel J., Moulinec H., Suquet P.** (1998)  
Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 172, 109-143.
- [15] **Michel J., Moulinec H., Suquet P.** (2000)  
A computational method based on Lagrangians and fast Fourier transforms for composites with high contrast. *Computer Modeling in Engineering and Science* 1(2), 79-88.
- [16] **Milton G.W., Serkov S.K.** (2000)  
Bounding the current in nonlinear conducting composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, 1295-1324.
- [17] **Milton G.W., Briane M., Willis J.R.** (2006)  
On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form. *New Journal of Physics* 8, 248.
- [18] **Milton G.W., Willis J.R.** (2007)  
On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics. *Proceedings of the Royal Society A* 463, 855-880.
- [19] **Monchiet V., Bonnet G.** (2012)  
A polarization-based FFT iterative scheme for computing the effective properties of elastic

composites with arbitrary contrast. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 89, 1419-1436.

[20] **Monchiet V., Bonnet G.** (2013)

A polarization-based FFT iterative scheme for computing the effective conductivity of composites. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow* 23(7), 1256-1271.

[21] **Moulinec H., Suquet P.** (1994)

A fast numerical method for computing the linear and the nonlinear properties of composites. *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 318, 1417-1423.

[22] **Nassar H., He Q.-C., Auffray N.** (2015)

Willis elastodynamic homogenization theory revisited for periodic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 77, 158-178.

[23] **Nemat-Nasser S.** (1972)

General variational methods for waves in elastic composites. *Journal of Elasticity* 2(2), 73-90.

[24] **Nemat-Nasser S., Hori M.** (1993)

Micromechanics : Overall properties of heterogeneous materials. North-Holland, Amsterdam.

[25] **Nemat-Nasser S., Willis J.R., Srivastava A., Amirkhizi A.V.** (2011)

Homogenization of periodic elastic composites and locally resonant sonic materials. *Physical Review B* 83, 104103.

[26] **Nemat-Nasser S., Srivastava A.** (2011)

Overall dynamic constitutive relations of layered elastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59, 1953-1965.

[27] **Nemat-Nasser S., Srivastava A.** (2013)

Bounds on effective dynamic properties of elastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 61, 254-264.

[28] **Norris A.N., Shvalov A.L., Kutsenko A.A.** (2012)

Analytical formulation of three-dimensional dynamic homogenization for periodic elastic systems. *Proceedings of the Royal Society A* 468, 1629-1651.

[29] **Pendry J.B.** (2000)

Negative Refraction Makes a Perfect Lens. *Physical Review Letters* 85, 3966.

- [30] **Rytov S.** (1956)  
Acoustical properties of a thinly laminated medium. *Soviet Physics-Acoustics* 2, 68-80.
- [31] **Shelby R.A., Smith D.R., Schultz S.** (2001)  
Experimental Verification of a Negative Index of Refraction. *Science* 292 (5514), 77-79.
- [32] **Shuvalov A.L., Kutsenko A.A., Norris A.N., Poncelet O.** (2011)  
Effective Willis constitutive equations for periodically stratified anisotropic elastic media. *Proceedings of the Royal Society A* 467, 1749-1769.
- [33] **Sjöberg D.** (2006)  
Exact and Asymptotic Dispersion Relations for Homogenization of Stratified Media with Two Phases. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 20, 781-792.
- [34] **Smith D.R., Pendry J.B.** (2006)  
Homogenization of metamaterials by field averaging. *Journal of the Optical Society of America B* 23, 391-403.
- [35] **Srivastava A., Nemat-Nasser S.** (2011a)  
Universal theorems for total energy of the dynamics of linearly elastic heterogeneous solids. *Mechanics of Materials* 43, 913-917.
- [36] **Srivastava A., Nemat-Nasser S.** (2011b)  
Overall dynamic properties of three-dimensional periodic elastic composites. *Proceedings of the Royal Society A* 468, 269-287.
- [37] **Srivastava A., Nemat-Nasser S.** (2014)  
On the limit and applicability of dynamic homogenization. *Wave Motion* 51, 1045-1054.
- [38] **Torquato S.** (2002)  
*Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties*, Springer.
- [39] **Unlu H.** (1992)  
A Thermodynamic Model for Determining Pressure and Temperature Effects on the Bandgap Energies and other Properties of some Semiconductors. *Solid State Electronics* 35(9), 1343-1352.
- [40] **Veselago V.G.** (1967)  
The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* 92, 517-26.

- [41] **Veselago V.G.** (1968)  
The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . Soviet Physics Uspekhi 10(4), 509-14.
- [42] **Wilcox C.H.** (1978)  
Theory of Bloch waves. Journal d' Analyse Mathématique 33(1), 146-167
- [43] **Willis J.R.** (1980a)  
A polarization approach to the scattering of elastic wave-I. Scattering by a single inclusion. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 28, 287-305.
- [44] **Willis J.R.** (1980b)  
A polarization approach to the scattering of elastic wave-II. Multiple scattering from inclusions. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 28, 307-327.
- [45] **Willis J.R.** (1981)  
Variational principles for dynamic problems for inhomogeneous elastic media. Wave motion 3(181) 1-11.
- [46] **Willis J.R.**(1982)  
"Elasticity theory of composites" in H.G. Hopkins and M.J. Sewell, Eds. Mechanics of Solids, the Rodney Hill 60th Anniversary Volume, 653-686, Pergamon Press, Oxford, UK.
- [47] **Willis J.R.** (1985)  
The nonlocal influence of density variations in a composite. International Journal of Solids and Structures 21(7), 805-817.
- [48] **Willis J.R.** (1997)  
"Dynamics of composites", vol. 495. Continuum Micromechanics : CISM Lecture Notes, ch. 1, pp. 265-290. Vienna, Austria : Springer.
- [49] **Willis J.R.** (2009)  
Exact effective relations for dynamics of a laminated body. Mechanics of Materials 41, 385-393.
- [50] **Willis J.R.** (2011)  
Effective constitutive relation for waves in composites and metamaterials. Proceedings of the Royal Society A 467, 1865-1879.
- [51] **Willis J.R.** (2012a)  
A comparaison of two formulations for effective relations for waves in a composite. Mechanics of Materials 47, 41-60.



[52] **Willis J.R.** (2012b)

The construction of effective relations for waves in a composite. *Compte Rendus Mecanique* 340, 181-192.

[53] **Yao S., Zhou X., Hu G.** (2008)

Experimental study on negative effective mass in a 1D mass-spring system. *New Journal of Physics* 10, 043020.

[54] **Zhang B., Luo Y., Liu X., Barbastathis** (2011)

Macroscopic invisibility cloak for visible light. *Physical Review Letters* 106, 033901.

