



Accélération stochastique dans un gaz de Lorentz inélastique

Emilie Soret

► To cite this version:

Emilie Soret. Accélération stochastique dans un gaz de Lorentz inélastique. Probabilités [math.PR]. Université Lille 1, 2015. Français. NNT : . tel-01236109

HAL Id: tel-01236109

<https://theses.hal.science/tel-01236109>

Submitted on 1 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

NUMÉRO D'ORDRE : 41751

Université de Lille 1 — Laboratoire Paul Painlevé

Thèse

présentée pour l'obtention du

**DIPLÔME DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE 1**

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

**Accélération stochastique dans un gaz de
Lorentz inélastique**

par

Émilie SORET

Soutenue le 30 juin 2015 devant le jury composé de :

M. Cédric	BERNARDIN	Université de Nice Sophia-Antipolis	Rapporteur
M. Grigorios A.	PAVLIOTIS	Imperial College London	Rapporteur
M. Yves	ELSKENS	Aix-Marseille Université	Examineur
M. Antoine	GLORIA	Université Libre de Bruxelles	Examineur
M. Marc	PEIGNÉ	Université François Rabelais	Examineur
M. Stephan	DE BIÈVRE	Université de Lille 1	Directeur
M. Thomas	SIMON	Université de Lille 1	Directeur

Thèse préparée au
Département de Mathématiques
Laboratoire Paul Painlevé (UMR CNRS 8524)
Université Lille 1
59 655 Villeneuve d'Ascq CEDEX

Cette histoire est vraie puisque je l'ai inventée.

Boris Vian — L'Écume des jours.

Remerciements

Il est maintenant temps de clore ce manuscrit par ce qui sera probablement sa page la plus lue. Mes premiers mercis sont tout naturellement destinés à Stephan De Bièvre. Je le remercie pour sa patience et pour avoir fini par rire de mes (trop nombreuses) étourderies. Je le remercie pour les nombreuses heures qu'il m'a accordées et pour sa passion évidente et contagieuse des mathématiques.

Je tiens à remercier Cédric Bernardin et Grigorios Pavliotis d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse ainsi que Antoine Gloria, Yves Elskens et Marc Peigné pour être membres de mon jury de thèse. Merci aussi à Thomas Simon pour sa relecture attentive de ce manuscrit.

Je suis reconnaissante envers le laboratoire Paul Painlevé et le centre Inria Lille Nord-Europe de m'avoir fourni un environnement de travail riche et agréable. Une pensée spéciale pour Marie-Claude Viano pour ses conseils et les quelques moments passés à papoter. Merci à Vianney Combet pour ses relectures jusqu'au bout des virgules.

Avant la thèse, il y a eu ces quelques années de licence et de master durant lesquelles j'ai rencontré des enseignants qui n'ont fait qu'accentuer mon envie de faire de la recherche. En particulier, merci à Christine Georgelin (elle ne s'en souvient sans doute pas, mais son "Émilie, arrêtez donc de sourire " lors d'un TD m'amuse toujours), Marc Peigné et Guy Barles. Merci à Emmanuel Chasseigne et Emmanuel Lesigne pour m'avoir encadrée sur un sujet de TER qui m'avait beaucoup plu. Je voudrais remercier Mihai Gradinaru pour m'avoir guidée lors de ma recherche d'un sujet de thèse.

Rodolphe Sopracase fait aussi partie de ceux qui m'ont donné envie de me lancer dans l'aventure de la thèse, même si pour ma part je n'ai pas eu l'occasion de construire des maquettes inter-galactiques (un peu mensongère la pub sur ce coup là!).

Aux copines thésardes de tout horizon : merci à Cori pour son enthousiasme, Morgane pour nous avoir fait lire une partie de son manuscrit. Tu m'impressionnes à écrire tant de pages sans aucune équation ! Merci aussi à Dominique, Stéphanie, Léa et Claire. Ça a été un plaisir de partager sur la thèse avec vous.

Un grand merci aux copains : Antoine pour sa gentillesse et pour les nombreuses discussions au Café Culture (discussions qui ne furent jamais goliardiques). Laurent le maître de la ligue ! Florian sans qui les pauses goûter à parler de tout et de rien ne seraient pas les mêmes (et ce pas parce qu'il n'y aurait pas de faux boudoirs). Matthieu grâce à qui mes cuissots sont un peu plus musclés. Grazie a Roberta la reine de la soupe ! Benjamin et Pierre B. pour ces matches de tennis épiques et pleins de suspense ! Julien pour les quelques parties de Hanabi et Pierre H. pour avoir rendu notre bureau un peu plus vivant. Vous avez fait des midis un moment très agréable qui me manquera.

À Christophe, merci pour ton amitié qui m'est très chère. Merci d'être toujours là pour moi et de m'avoir souvent rappelé de respirer (nénuphar).

À mes copines de longue date, Clairette porteuse du gène « petites ailes » et Élo pour les samedi restau et pour sa joie de vivre !

Merci à mon frère, Mylène, Nao (et son « pourquoi pas ? » à faire avec un mouvement du poignet tout en tenant une glace à moitié fondue) et Max (tête de chou-fleur !). Une pensée pour mes grand-parents. Même s'ils ne sont plus là aujourd'hui, je tiens à les remercier pour tout l'amour qu'ils m'ont donné. Merci à mon père pour m'avoir fait découvrir le monde de la recherche dès mon plus jeune âge, même si cela c'est longtemps résumé à avoir des ballons remplis d'hélium et à croire qu'il apprenait le chinois. Merci à ma mère pour m'avoir toujours encouragée à faire ce que j'aime et pour être une maman géniale.

Et merci à mon mécano Jérémie qui m'a laissée planter des tomates, un framboisier et des pâtisseries dans notre appartement sans balcon. Mes journées seraient moins belles si je ne me réveillais pas chaque matin à tes côtés.

Table des matières

Introduction	1
1 Particule dans un potentiel aléatoire et dépendant du temps	15
1.1 Introduction	15
1.2 Un modèle markovien	17
1.3 Analyse du transfert du moment	21
1.4 Démonstration du Théorème 1.2.2	26
1.5 Un lien avec les processus de Bessel discrets	32
2 Résultats de convergence sous changements d'échelle	35
2.1 Convergence vers un processus de Bessel	35
2.1.1 Changement d'échelle	35
2.1.2 Cut off et précompacité	37
2.1.3 Convergence et limites	40
2.1.4 Suppression des temps d'arrêts	45
2.2 Convergence des vitesses vers un mouvement brownien sphérique	46
2.2.1 Changement d'échelle	47
2.2.2 Du microscopique au macroscopique	48
2.3 Preuve du Théorème 2.2.2	50
2.3.1 Cut off et précompacité	51
2.3.2 Limite des processus arrêtés	53
2.3.3 Suppression des temps d'arrêt	55
3 Preuve du Théorème 1.4.2	57
3.1 Préliminaires	57
3.2 Processus auxiliaire	59
3.3 Contrôle des temps de séjour	70
3.4 Conclusion	80
4 Transience et récurrence d'une chaîne de Markov	83
4.1 Introduction	83
4.2 Preuve du Théorème 4.1.2	88
4.2.1 Cas transient : $\sigma < 1$	88
4.2.2 Cas récurrent : $\sigma > 1$	89
4.2.3 Cas limite : $\sigma = 1$	90
4.3 Convergence des chaînes dans le cas transient ($\sigma < 1$)	92
4.4 Conclusion	95

5	Un gaz de Lorentz dynamique	97
5.1	Introduction	97
5.2	Description par une chaîne de Markov	99
5.3	Analyse du transfert d'énergie	100
5.4	Résultat de convergence pour l'énergie	102
5.5	Température d'équilibre	109
Annexe :	Processus markoviens	111
A	Martingales	111
B	Processus de Markov	113
C	Processus de Feller et générateurs infinitésimaux	116
D	Problème aux martingales	119
E	Processus de diffusion	122
F	Équations différentielles stochastiques et problèmes aux martingales	125
G	Mouvement brownien sphérique et processus de Bessel	130
	G.1 Mouvement brownien sphérique	130
	G.2 Processus de Bessel	132
H	Convergence vers une diffusion	136
Table des figures		141
Bibliographie		143

Introduction

Dans cette thèse, nous étudions la dynamique d'une particule se déplaçant dans un milieu de telle façon que son énergie cinétique n'est pas conservée, ce milieu est modélisé par un gaz de Lorentz inélastique. Nous considérerons deux cas différents. Premièrement, nous étudierons un gaz de Lorentz *inerte*, c'est à dire que le milieu ne réagit pas au passage de la particule. Ainsi, les degrés de liberté du gaz ne sont pas affectés par le passage de la particule. Dans le modèle que nous considérerons, l'énergie cinétique de la particule croît avec le temps. Ce système, uniquement composé de la particule, est traité dans les premiers chapitres de cette thèse. Enfin, dans le dernier chapitre, nous étudierons un cas où le passage de la particule altère l'évolution du gaz. Des échanges d'énergie ont lieu entre la particule et le milieu dans lequel elle évolue, ainsi, même si l'énergie totale du système est conservée, ce n'est pas le cas de celle de la particule. Nous sommes alors dans le cadre d'un système ouvert. Le système dynamique considéré se compose de la particule et du gaz et possède un nombre infini de degrés de liberté et est dit *dynamique* (en opposition à *inerte*).

En toute généralité, l'étude de tels systèmes est motivée d'une part par la volonté d'expliquer l'origine des lois de transport macroscopiques, comme la loi de Fourier, la loi d'Ohm ou la relation d'Einstein. Cette dernière est une relation de fluctuation-dissipation entre le coefficient de diffusion D associé aux fluctuations du mouvement et à la mobilité μ reliée à la dissipation. D'autre part, on souhaite également calculer les coefficients de transport qui apparaissent en termes de la dynamique microscopique et de la température du milieu. Nous nous limiterons dans cette thèse à l'étude du phénomène d'*accélération stochastique*. Ce phénomène apparaît dans des modèles où l'énergie cinétique de la particule n'est pas bornée. Typiquement, dans un modèle inerte et inélastique, la particule ne peut pas se défaire du surplus d'énergie qu'elle accumule en évoluant dans le milieu. Son énergie cinétique n'est pas bornée et croît avec le temps. C'est cette croissance de l'énergie cinétique avec le temps qui est appelée *accélération stochastique*. Il existe de nombreux travaux dans la littérature en physique théorique et en physique mathématique, sur des problèmes de ce type motivés par des questions de physique des plasmas, d'astronomie et de physique des solides (voir par exemple [5, 49, 56]). La majorité des écrits mathématiques rigoureux sur ce sujet portent sur la recherche des équations de Fokker-Planck vérifiées par la densité du moment de la particule pour des changements d'échelle adaptés. C'est en partie ce qui est fait ici dans les chapitres 2 et 5. En revanche, les équations de Fokker-Planck où l'existence d'un processus limite obtenue sous un changement d'échelle temporelle et spatiale ne sont pas suffisantes pour donner rigoureusement des informations sur les comportement asymptotique de l'énergie cinétique moyenne

ainsi que de la variance du déplacement de la particule dans le modèle initial.

Afin de bien comprendre les systèmes étudiés, nous présentons un bref historique des gaz de Lorentz.

Les gaz de Lorentz. On appellera, dans cette thèse, gaz de Lorentz tout modèle pour lequel des particules, en mouvement dans $\mathbb{R}^d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$, sont soumises à un champ de force F et obéissent donc à l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t) = F(x).$$

On suppose que support de F est contenu dans une union dénombrable de boules, toutes de même rayon et deux à deux disjointes. Lorsque la particule n'est sous l'influence d'aucun diffuseur, son accélération est nulle et sa trajectoire est alors rectiligne. Ces boules sont disposées aléatoirement ou selon un réseau. La force modélise ainsi un ensemble de *diffuseurs*, tous identiques modulo une rotation. Nous considérerons uniquement le cas où le champ de force dérive d'un potentiel,

$$F(x) = -\nabla V(x).$$

Lorsque chaque diffuseur est formellement décrit par un potentiel infini sur son support, ceux-ci font office d'*obstacles* et la particule subit une réflexion spéculaire sur le bord de chaque diffuseur qu'elle croise. Au contraire, lorsque la force décrivant les diffuseurs est bornée, la particule peut pénétrer leur support, ainsi la trajectoire des particules dans un tel gaz de Lorentz traverse le support du champ de force. On parlera respectivement de *gaz dur* ou de *gaz mou*.

Une deuxième distinction est à faire selon que l'énergie totale de la particule est conservée ou non. Les gaz de Lorentz *élastiques* sont ceux dont la force décrivant les diffuseurs dérive d'un potentiel statique $V(x)$, c'est à dire d'un potentiel ne dépendant pas du temps : l'énergie de la particule $E(q, \dot{q}) = \|\dot{q}\|^2/2 + V(q)$ est alors conservée et aucun phénomène d'accélération stochastique ne peut être observé. Nous n'étudierons pas ce cas dans cette thèse. Par ailleurs, le cas auquel nous nous intéresserons dans la suite est celui des gaz de Lorentz *inélastiques*. Ce sont ceux dont la force subit par la particule dérive d'un potentiel dépendant du temps ou ne dérive simplement pas d'un potentiel. L'énergie de la particule n'est alors pas conservée.

Le gaz de Lorentz classique. Comme son nom le laisse penser, la première introduction des gaz de Lorentz se fit au début du XX^e siècle par Lorentz [36, 37, 38]. Dans son modèle, Lorentz décrit les propriétés statistiques du mouvement d'électrons dans un métal de faible densité. Un ensemble d'électrons supposés sans interaction entre eux évoluent dans un milieu composé d'atomes de métal et sont assimilés à des obstacles durs et fixes. L'interaction entre les électrons étant nulle, chaque trajectoire d'électron est indépendante des autres. La dynamique du système ne prend alors en compte que les collisions élastiques entre les électrons et les atomes composant le métal. Lorentz montre, par des arguments physiques, que la distribution $f(q, p, t)$ des électrons qui à l'instant t sont dans l'état (q, p) satisfait l'équation de Boltzmann linéaire dans le cas où F est une force extérieure constante qui agit sur l'électron

$$\partial_t f + p \cdot \nabla_q f + F \cdot \nabla_p f = N_{\text{at}} R^2 \mathcal{C}(f).$$

La position de la particule est décrite par la quantité $q \in \mathbb{R}^3$ et p représente sa quantité de mouvement, N_{at} et R sont respectivement la densité et le rayon des atomes de métal et le noyau de collision $\mathcal{C}(f)$ est défini par

$$\mathcal{C}(f)(q, p, t) := \int_{\substack{|v|=1 \\ p \cdot v > 0}} (f(q, p - 2(p \cdot v)v, t) - f(q, p, t)) \cos(p, v) dv.$$

Il est bien sûr clair que le mouvement des électrons dans un métal est plus complexe que le modèle introduit par Lorentz et fait en particulier appel à des phénomènes de physique quantique. Cependant, le gaz de Lorentz classique reste un sujet largement étudié de nos jours. En effet, même sans prendre en compte les aspects quantiques qui interviennent, les phénomènes macroscopiques du modèle restent compliqués à décrire. Il faudra attendre 1972 pour que la validité de l'équation de Boltzmann linéaire soit montrée rigoureusement par Gallavotti [26, 27] en partant des équations de mouvement microscopique et ce, en l'absence de forces extérieures et en considérant que les atomes de métal sont distribués selon une loi de Poisson. D'autres distributions d'obstacles ont été étudiés, notamment par Spohn [53] ainsi que par Boldrighini, Bunimovich et Sinaï et plus tard Chernov [7, 13] pour des gaz à horizon fini. Ces derniers résultats sont démontrés dans la limite de Boltzmann-Grad qui consiste à faire tendre la densité des obstacles N_{at} vers l'infini et leur rayon R vers 0 de sorte que $N_{\text{at}}R^2$ converge vers une constante σ strictement positive, et à étudier la dynamique de la particule sur une échelle de temps de l'ordre de $1/R$. Lorsque la distribution des obstacles est périodique, l'étude du modèle est plus complexe et l'équation cinétique qui en résulte est différente (voir [42, 14]). Bunimovich, Sinaï et Chernov montrent dans [11, 12, 13], en utilisant la théorie des billards hyperboliques et sans passer à la limite de Boltzmann-Grad, que, dans un gaz de Lorentz classique de dimension 2 dont les obstacles sont distribués selon un réseau périodique et où la force extérieure est identiquement nulle, les électrons ont un comportement diffusif. En notant $q(t) \in \mathbb{R}^2$ la position de l'électron à l'instant t et en désignant par $\langle \cdot \rangle$ la moyenne sur l'ensemble des particules telles que $q(0) \in [0, B_1[\times [0, B_2[$ et $\|p(0)\| = 1$, ils obtiennent

$$\langle \|q(t) - q(0)\|_d^2 \rangle \sim_{t \rightarrow +\infty} Dt$$

où D est la constante de diffusion, dépendant de la vitesse initiale, et ayant une croissance en $\|p(0)\|_d$.

Outre la relation d'Einstein et la loi d'Ohm, il est classique de s'intéresser à un possible retour à l'équilibre thermique du système. Dans cet état, la vitesse des électrons est distribuée selon la mesure de probabilité proportionnelle à $e^{-\beta \|p\|_d^2}$ où β est l'inverse de la température d'équilibre. Or, lorsque le système n'est sous l'influence d'aucune force extérieure, l'énergie cinétique des électrons reste constante et le système ne peut par conséquent pas relaxer à cet état d'équilibre thermique. Les obstacles étant immobiles, le gaz de Lorentz classique est un modèle élastique et inerte : aucun échange d'énergie entre les électrons et les atomes du métal n'est possible. Une vision plus réaliste consiste à étudier un système dont la force exercée sur la particule dépend du temps, le gaz devient alors inélastique et l'énergie cinétique de la particule n'est pas conservée. Afin d'étudier ces cas, les gaz de Lorentz

inélastiques ont été introduits. Nous distinguerons deux sortes de gaz de Lorentz inélastiques : d'une part les systèmes inertes, d'autre part les dynamiques dans lesquels le milieu réagit au passage de la particule (dont un exemple sera traité dans le chapitre 5).

Gaz de Lorentz inélastiques : le cas inerte. Un premier exemple de gaz de Lorentz inerte et inélastique est celui évoqué dans [40, 39] par Loskutov, Ryabov et Akinshin. Le milieu considéré est composé d'obstacles sphériques dont le rayon oscille en fonction du temps, aléatoirement ou périodiquement. La trajectoire de la particule ne traverse pas les obstacles et n'influe pas sur la perturbation des rayons de ceux-ci. En revanche, les chocs sont maintenant inélastiques et l'énergie de la particule n'est plus constante. Lokustov, Ryabov et Akinshin obtiennent, par le biais de simulations numériques, que l'énergie de la particule croît avec le nombre de collisions subies, avec un exposant proche de 1 (voir [2]).

Pour un second exemple, nous présentons le modèle étudié par Elskens et Pardoux dans [23]. Les auteurs étudient le mouvement unidimensionnel d'un nombre $\mathcal{N}$ de particules de masse m évoluant dans un champ composé de $\mathcal{M}$ ondes d'amplitudes $A_j e^{i\varphi_j}$ indépendantes avec de fortes corrélations spatiales et ayant des fréquences ω_j et des vitesses de propagation k_j/ω_j différentes. L'hamiltonien associé à ce système est le suivant

$$H = \frac{p^2}{m} + \sum_{j=1}^{\mathcal{M}} k_j A_j \cos(k_j q - \omega_j t - \varphi_j).$$

Les auteurs montrent rigoureusement, pour $A_m = A_0$ fixé et en terme de processus stochastiques, un résultat de Bénisti et Escande [6] statuant que le moment des particules suit un mouvement brownien avec pour coefficient de diffusion

$$D_{QL} = \pi A_0^2,$$

dans la limite $A_0/m \rightarrow +\infty$. Ils montrent de plus que pour $\mathcal{N}$ particules le processus décrivant le moment de l'ensemble des particules converge en distribution vers $\mathcal{N}$ mouvements browniens indépendants de variance πt lorsque $m \rightarrow 0$.

Enfin, le dernier exemple que nous présentons ici est celui étudié dans [22] par Dolgopyat et Koralov. Les diffuseurs sont des boules de taille fixe, dont les centres sont distribués selon une loi de Poisson dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 4$ et représentent des obstacles mous. Le champ de force décrivant les diffuseurs est aléatoire, défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et ne dérive pas d'un potentiel : $\nabla \times F \neq 0$. En notant $p(t)$ la vitesse de la particule à l'instant t , les auteurs montrent le théorème suivant.

Théorème. *Il existe $\Omega_{p(0)} \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_{p(0)})$ tend vers 1 lorsque $\|p(0)\|_d$ tend vers $+\infty$ et tel que la famille de processus $(\|p(c^3 t)\|_d^2/c^2), t \in \mathbb{R}_+)_c$ converge en distribution vers un processus de diffusion sur $\Omega_{p(0)}$ lorsque $c \rightarrow +\infty$.*

Ce résultat s'applique seulement à des forces non conservatives, nous évoquerons le cas où le champ de force ne dérive pas d'un potentiel uniquement lorsque nous parlerons du résultat de Dolgopyat et Koralov ([22]).

Outre ce résultat de convergence, Dolgopyat et Koralov montrent que, lorsque $\|p(0)\|_d$ est grand, l'énergie cinétique moyenne $\langle \|p(t)\|^2 \rangle$ croît comme $t^{2/3}$ avec grande probabilité. Cette croissance de l'énergie cinétique moyenne est assez rapide pour leur permettre de montrer que les trajectoires des particules ne s'auto-intersectent pas avec grande probabilité. Ils peuvent ainsi conclure quant au comportement des positions $q(t)$ en intégrant le résultat obtenu pour les vitesses. La famille de processus $q(c^3t)/c^4$ indexée par c converge en distribution vers un autre processus diffusif sur $\Omega_{p(0)}$. De plus, on remarque que l'échelle de temps nécessaire à la convergence du processus vitesse est identique à celle du processus position.

Dans le chapitre 1 de cette thèse, nous introduirons un gaz de Lorentz inélastique et inerte dans lequel les diffuseurs sont décrits par une force dérivant d'un potentiel et dépendant du temps. Nous montrerons que dans ce cas $\langle \|p(t)\|^2 \rangle \sim t^{2/5}$, qui est une croissance moins rapide que dans le cas où le rotationnel de la force est non nul. Dans le chapitre 2 nous montrons deux résultats de convergence pour ce modèle, l'un pour $\varepsilon p(\varepsilon^{-4}t)$ et l'autre pour $\varepsilon^3 \|p(\varepsilon^{-6}t)\|^3$ avec $\varepsilon = \|p(0)\|_d^{-1}$.

Gaz de Lorentz inélastiques : le cas dynamique. L'absence d'interaction entre la particule et le milieu dans les systèmes inertes permet une croissance non bornée de l'énergie cinétique au cours du temps. Ces systèmes ne peuvent pas retourner dans un état d'équilibre, ni vérifier la loi d'Ohm ou la relation d'Einstein. Dans le but d'évacuer ce surplus d'énergie il faut introduire des mécanismes de dissipation. Les systèmes autorisant les particules à interagir avec leur milieu sont en effet plus fidèles à la réalité.

Pour étudier la loi d'Ohm, une première idée est développée dans [8, 16, 21, 15]. Il s'agit d'ajouter aux équation du mouvement une force dissipant le surplus d'énergie entre deux collisions en introduisant un thermostat de Gauss (voir [25]). Ainsi, la vitesse de la particule entre deux collisions n'est plus constante et les équations du mouvement deviennent

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = F - \gamma(p)p, \end{cases}$$

où le terme ajouté $\gamma(p)$ peut être vu comme une force de frottement et est égal à

$$\gamma(p) = \frac{F \cdot p}{\|p\|_d^2} p.$$

Une étude rigoureuse de ce modèle est faite dans [16]. Chernov, Eyink, Lebowitz et Sinaï montrent que lorsque F provient d'un champ électrique constant, un état stationnaire pour la dynamique de ce système est établi et la loi d'Ohm ainsi que la relation d'Einstein sont satisfaites. Remarquons que lorsque $F = 0$, $\gamma(p) = 0$ et aucune dissipation n'a lieu. Le modèle est élastique et il est notamment impossible de modéliser l'approche à l'équilibre avec ce modèle.

Un autre exemple est le modèle étudié par De Bièvre, Lafitte, Parris et Silvius dans [33, 50, 19]. Celui ci présente un gaz de Lorentz périodique en dimension 1 et composé d'oscillateurs harmoniques. L'hamiltonien associé à ce système est le

suivant,

$$H = \frac{1}{2}p^2 - Fq + \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{2} (p_m^2 + \omega^2 q_m^2) + \alpha \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} q_m \rho(q - ma).$$

La position et le moment de la particule sont désignés par q et p alors que (q_m, p_m) représente la position et le moment d'un oscillateur de fréquence ω centré en $x_m = ma$. La fonction ρ est l'indicatrice du segment $]-\sigma, \sigma[$, $\rho(q - ma)$ vaut donc 1 lorsque la particule est dans la zone d'interaction de l'oscillateur et 0 sinon. La force F est extérieure et peut être nulle (c'est le cas dans [50]). Ce modèle permet donc des échanges d'énergie entre la particule et les oscillateurs (il est donc dynamique). Ce modèle est un cas particulier d'une classe de modèles plus large évoquée dans [10] dans lequel Bruneau et De Bièvre étudient en détail le comportement en temps long du système lorsque le milieu est à température nulle. La loi d'Ohm est obtenue rigoureusement dans certains cas. En revanche la température étant nulle, la relation d'Einstein ne fait pas sens ici.

À température strictement positive, il y a diffusion et il est vérifié numériquement dans [50] que, pour ce dernier modèle,

$$\langle q(t)^2 \rangle \sim_{t \rightarrow +\infty} Dt,$$

où la constante de diffusion D dépend de la température : à hautes températures, $D \sim T^{5/2}$ et à basses températures $D \sim T^{3/4}$.

Lorsque $F \neq 0$, les oscillateurs ne peuvent pas absorber tout le surplus d'énergie apporté par F à des particules trop rapide. Dans ce cas, il a été montré que ce modèle n'admet pas d'état stationnaire et par conséquent seulement une relation d'Einstein à temps fini et pour des températures élevées peut être obtenue. C'est ce qui est fait dans [1] pour une classe de modèles plus large que celle évoquée ici.

Plan de la thèse et principaux résultats.¹ Dans cette thèse, nous nous intéressons principalement au phénomène d'accélération stochastique pour une particule dans un gaz de Lorentz inélastique et inerte. Plus précisément, nous considérons des particules en mouvement dans $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, sous l'influence d'un champ de force aléatoire, dérivant d'un potentiel dépendant du temps. Nous reprenons le modèle de [1]. La loi du mouvement de la particule est alors décrit par

$$\ddot{q}(t) = - \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \lambda_i \nabla V(q(t) - r_i, \omega t + \phi_i), \quad \dot{q}(0) = v_0, \quad q(0) = q_0$$

où $q(t)$ est la position de la particule à l'instant t . Le potentiel V est une fonction régulière, dépendante du temps et à support compact en sa variable spatiale dans la boule centrée en 0 et de rayon $1/2$. Les points $r_i \in \mathbb{R}^d$ représentent les centres des diffuseurs et sont disposés aléatoirement ou sur un réseau dans $\mathbb{R}^d$, de sorte que les boules $B(r_i, 1/2)$ ne s'intersectent pas et que le modèle soit à horizon fini. Le vecteur fréquence $\omega \in \mathbb{R}^m$ est constant et de norme 1. Les λ_i sont des constantes de couplage

1. Dans cette introduction, nous reprenons la numérotation des théorèmes telle qu'elle apparaît dans la suite du document.

et les $\phi_i \in \mathbb{T}^m$ les phases initiales. Ces deux valeurs caractérisent les diffuseurs et sont choisies aléatoirement et de façon indépendante. Le comportement asymptotique d'une particule a tout d'abord été étudié numériquement, pour $d \geq 2$ dans [1, 3]. Ces analyses numériques tendent à montrer que $\langle \dot{q}(t)^2 \rangle \sim t^{2/5}$ et $\langle q(t)^2 \rangle \sim t^{2/3}$.

Une difficulté liée à l'étude rigoureuse de ce système est que les recollisions entre la particule et un même diffuseur peuvent avoir lieu. Ce phénomène rend l'analyse du système très complexe. Dans le chapitre 1, nous reprenons un modèle simplifié présenté dans [1, 3]. Ce modèle part du constat que la particule subit une succession d'événements diffusifs et que sa trajectoire est rectiligne entre deux événements. L'idée est d'approcher les états successifs de la particule avant chaque passage dans un diffuseur par une chaîne de Markov,

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + R(v_n, \kappa_n), \\ t_{n+1} = t_n + \frac{\ell}{\|v_{n+1}\|_d}, \\ q_{n+1} = q_n + \frac{\ell}{\|v_{n+1}\|_d} v_{n+1}, \end{cases} \quad (1)$$

où κ_n regroupe l'ensemble des paramètres aléatoires caractérisant le n -ième diffuseur que la particule traverse ; t_n est l'instant auquel la particule entre dans le n -ième diffuseur, avec pour vitesse v_n ; sa position à l'instant t_n est désignée par q_n . De plus, la distance ℓ est fixée. La fonction $R(v_n, \kappa_n)$ traduit le transfert du moment cinétique ayant lieu lors d'un événement diffusif où κ désigne l'aléa, plus précisément, on a

$$R(v, \kappa) = -\lambda \int_0^{+\infty} dt \nabla V(q(t), \omega t + \phi).$$

L'étude se restreint alors aux particules ayant une énergie suffisamment haute pour traverser un diffuseur en un temps de l'ordre $\|v_0\|_d^{-1}$. Pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}[$, nous considérons

$$q(t) = q_n + (t - t_n)v_{n+1}.$$

Le résultat obtenu sur la croissance de l'énergie cinétique de la particule dont le mouvement est décrit par (1) est le suivant :

Théorème 1.2.2. *Soit $d > 5$; alors pour tout $\nu > 0$ et $v_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe deux constantes $c(\nu, v_0) > 0$ et $C(\nu, v_0) > 0$ dépendant uniquement de ν et v_0 , telles que*

$$\lim_{\|v_0\|_d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\forall t > \frac{1}{\|v_0\|_d}, c(\nu, v_0)t^{\frac{1}{5}-\nu} \leq \|\dot{q}(t)\|_d \leq C(\nu, v_0)t^{\frac{1}{5}+\nu} \right) = 1.$$

Ainsi, $\langle \|\dot{q}(t)\|_d \rangle \sim t^{1/5}$. Ce résultat d'accélération stochastique est le résultat central de cette thèse. En effet, la littérature de physique théorique présente des résultats contradictoires quant aux lois de puissance de $\langle \|p(t)\|_d^2 \rangle$ et $\langle \|q(t)\|_d^2 \rangle$. La plupart des modèles étudiés sont ceux dérivant de potentiels aléatoires gaussiens et, lorsque le champ a des corrélations temporelles de durées finies mais non nulles,

plusieurs résultats présentés sont en contradiction. En effet, il est expliqué dans [28, 35, 48] qu'en dimension $d = 1$, $\langle p(t)^2 \rangle \sim t^{2/5}$ et $\langle q(t)^2 \rangle \sim t^{12/5}$, ces comportements sont compatibles avec les résultats numériques présentés dans [1, 3] et le théorème précédent. En revanche, dans [30], il est affirmé que pour $d = 1$, $\langle q(t)^3 \rangle \sim t^3$, tout comme dans le cas des potentiels aléatoires delta-corrélés en temps considéré dans [31]. Pour $d > 1$, il est affirmé dans [28] que $\langle \|p(t)\|_d^2 \rangle \sim t^{1/2}$ et $\langle \|q(t)\|_d^2 \rangle \sim t^{9/4}$. Ces conclusions sont contestés dans [48] et il est montré que pour des potentiels aléatoires gaussiens à corrélations spatiales et temporelles décroissant rapidement, $\langle \|p(t)\|_d^2 \rangle \sim t^{2/5}$ en toute dimension, et $\langle \|q(t)\|_d^2 \rangle \sim t^2$ pour $d > 1$.

Une étude numérique faite dans [35] confirme les prédictions unidimensionnelles de [28, 35, 48]. Les résultats numériques réalisés dans [1, 3] indiquent qu'en dimension 1 et 2, $\langle \|p(t)\|_d^2 \rangle \sim t^{2/5}$, ce qui concorde avec [28, 35, 48].

Le Théorème 1.2.2 est un résultat rigoureux confirmant les prédictions de [28, 35, 48, 3] mais pour $d > 5$. Cette restriction sur la dimension vient du fait que nous avons besoin d'un résultat de convergence pour la chaîne de Markov $(v_n)_n$ et nous l'avons établi seulement si le processus limite est transient, ce qui dans ce cas précis équivaudra à se restreindre aux dimensions strictement supérieures à 5 seulement. Le comportement asymptotique en $t^{2/5}$ de l'énergie cinétique est trop « lent » et rend l'analyse rigoureusement du comportement asymptotique moyen de $(q(t))_t$ difficile, contrairement au modèle étudié dans [22].

Un exemple simple illustrant la complexité de l'étude de $q(t)$ est le suivant :

Exemple. *Supposons que le potentiel décrivant les diffuseurs ne dépend pas du temps, nous sommes alors dans le cas d'un gaz de Lorentz inerte et élastique. Ainsi, l'énergie totale de la particule à l'instant t s'écrit*

$$E_T(t) = \frac{1}{2} \|\dot{q}(t)\|_d^2 + V(q(t)).$$

Cette énergie étant conservée, on obtient, en dehors des diffuseurs

$$E_T(t) = \frac{1}{2} \|v_0\|_d^2.$$

La vitesse $\|\dot{q}(t)\|_d$ se comporte alors comme t^0 mais il est beaucoup moins trivial de déterminer β tel que $\|q(t)\|_d \sim t^\beta$.

La démonstration du Théorème 1.2.2 sera faite dans la section 1.4. Section dans laquelle nous introduisons une classe de chaînes de Markov $(\xi_n)_n$ avec $\xi_n \sim \|v_n\|_d^3$. Toute chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ s'écrit

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = F(\xi_n, \omega_n) \\ \xi_0 > \xi_+, \end{cases}$$

où $(\omega_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées, bornées et de variance 1. De plus, pour tout $\xi > \xi_+$, F est une fonction continue telle que

$$F(\xi, \omega) = \xi + \omega + \frac{\gamma}{\xi} + F_0(\xi, \omega) + F_1(\xi, \omega) \quad (2)$$

avec $\gamma \in \mathbb{R}$ et où les fonctions F_0 et F_1 sont telles que, pour ξ grand,

$$\sup_{\omega} F_0(\xi, \omega) = O(\xi^{-\alpha}), \quad \mathbb{E}(F_0(\xi, \cdot)) = 0, \quad \sup_{\omega} F_1(\xi, \omega) = O(\xi^{-\beta}),$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 1$. Le lien avec le modèle précédemment introduit est que, la chaîne de Markov $(\|v_n\|_d^3)_n$ représentant le cube de la vitesse de la particule avant chaque entrée d'un diffuseur s'écrit sous cette dernière forme lorsqu'on développe le transfert du moment R pour $\|v\|_d$ grand. Aucune information sur le comportement de la particule à basse énergie n'étant disponible, F est définie seulement au-dessus d'une valeur critique. Nous avons obtenu le résultat suivant sur le comportement de $(\xi_n)_n$.

Théorème 1.4.2. *On suppose que $\gamma > \frac{1}{2}$. Alors*

1. *Pour tout $0 < p \leq 1$ et pour tout $\nu > 0$, il existe $\xi_* > \xi_+$ tel que pour tout $\xi_0 > \xi_*$, on ait*

$$\mathbb{P} \left(\forall n \in \mathbb{N}, \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}} \right)^{1-\nu} \leq \xi_n \leq \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}} \right)^{1+\nu} \right) \geq 1 - p.$$

2. *Pour tout $\nu > 0$, on a*

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\forall n \in \mathbb{N}, \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}} \right)^{1-\nu} \leq \xi_n \leq \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}} \right)^{1+\nu} \right) = 1.$$

La preuve de ce théorème fera l'objet du chapitre 3 entier et adapte une stratégie suivie par Dolgopyat et Korolov dans [22].

Dans le chapitre 2, nous nous sommes intéressés à l'échelle de temps pour laquelle une variation macroscopique de la vitesse décrite par le processus $(\dot{q}(t))_t$ est réalisée ainsi que celle pour laquelle la direction suivie par la particule varie d'un angle macroscopique. Pour cela, nous avons d'abord considéré la famille de processus continus $(R^\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}_+)_{\varepsilon > 0}$ indexée par $\varepsilon = \xi_0^{-1}$ et définie par

$$R_n^\varepsilon = \varepsilon \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$R^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon^2(n+1) - t}{\varepsilon^2} R_n^\varepsilon + \frac{t - \varepsilon^2 n}{\varepsilon^2} R_{n+1}^\varepsilon, \quad t \in [\varepsilon^2 n, \varepsilon^2(n+1)[.$$

Nous avons obtenu le résultat de convergence suivant qui sera utilisé dans la preuve du Théorème 1.4.2 dans le chapitre 3.

Théorème 2.1.1. *Soit $T > 0$ et supposons que $\gamma > \frac{1}{2}$. Alors la famille de processus stochastiques $(R^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{\varepsilon > 0}$ converge en distribution vers un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$ et de condition initiale 1. Autrement dit, la famille de processus stochastiques $(R^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{\varepsilon > 0}$ converge en distribution vers l'unique solution forte de l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{cases} dR(t) &= dB(t) + \frac{\gamma}{R(t)} dt \\ R(0) &= 1, \end{cases}$$

où B est un mouvement brownien uni-dimensionnel.

La condition $\gamma > 1/2$ vient du fait que le processus de Bessel limite est transient. La transience est indispensable dans la démonstration de ce théorème, en effet, elle permet d'éviter que le processus limite atteigne 0 en un temps fini. La restriction à $d > 5$ du Théorème 1.2.2 trouve son origine ici. Ce résultat nous indique que la particule doit subir de l'ordre de $\xi_0^2 = \|v_0\|_d^6$ collisions avant qu'un changement macroscopique de sa vitesse soit visible.

Le second résultat obtenu dans le chapitre 2 porte sur le vecteur vitesse lui-même. Nous nous intéressons à la chaîne de Markov $(v_n)_n$ décrite par (1) et nous montrons que l'échelle de temps nécessaire à l'obtention d'un résultat de convergence est différent de celui obtenu dans le Théorème 2.1.1. En effet, nous considérons la famille de processus continus $(v^\varepsilon(s), s \in \mathbb{R}_+)_{\varepsilon > 0}$ indexée cette fois par $\varepsilon = \|v_0\|_d^{-1}$ et définie par

$$\begin{aligned} v_n^\varepsilon &= \varepsilon v_n, \quad n \in \mathbb{N} \\ v^\varepsilon(t) &= \frac{\varepsilon^4(n+1) - t}{\varepsilon^4} v_n^\varepsilon + \frac{t - \varepsilon^4 n}{\varepsilon^4} v_{n+1}^\varepsilon, \quad t \in [\varepsilon^4 n, \varepsilon^4(n+1)]. \end{aligned}$$

Le résultat de convergence obtenu pour le vecteur vitesse est le suivant.

Théorème 2.2.2. *Soit $S > 0$. La famille de processus $(v^\varepsilon(s), s \in [0, S])_{\varepsilon > 0}$ converge en distribution vers le processus $(u(s))_{s \in [0, S]}$ unique solution forte de l'équation différentielle stochastique suivante*

$$\begin{cases} du(s) &= \frac{K}{\|u(s)\|_d} \left(I_d - \frac{u(s)u(s)'}{\|u(s)\|_d^2} \right) dB(s) - \frac{d-1}{2\|u(s)\|^4} K^2 u(s) ds \\ u(0) &= \frac{v_0}{\|v_0\|_d}, \end{cases}$$

où B est un mouvement brownien d -dimensionnel.

Dans ce résultat, K^2 est une constante strictement positive que nous expliciterons et pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^d$, $(I_d - xx'/\|x\|_d^2)$ représente la projection sur l'hyperplan orthogonal à x . La norme du processus limite est conservée et ce dernier est un mouvement brownien sphérique. Contrairement au résultat de convergence précédent, l'échelle de temps utilisée ici est $\varepsilon^4 = \|v_0\|_d^{-4}$. Il faut donc de l'ordre de $\|v_0\|_d^4$ collisions avant que l'angle de la direction suivie par la particule varie d'un angle macroscopique. Cette dernière tourne donc plus rapidement qu'elle n'accélère. Ce comportement est en opposition avec celui montré par Dolgopyat et Koralov dans [22] pour un modèle dont le champ de force ne dérive pas d'un potentiel. L'échelle de temps permettant un comportement diffusif étant dans les deux cas (vitesse et direction) en $\|v_0\|_d^3$. Néanmoins, ces deux derniers résultats ne nous permettent pas de conclure quant à l'existence de possibles recollisions entre la particule et un même diffuseur et nous n'avons pas été en mesure d'établir de résultat asymptotique pour $(q(t))_t$.

Comme dit précédemment, le chapitre 3 présente une démonstration rigoureuse du Théorème 1.4.2 et repose en particulier sur l'application du Théorème Portman-teau par le biais du Théorème 2.1.1. Cette preuve adapte la stratégie développée dans [22] tout en étant beaucoup plus complète. Ces trois premiers chapitres, excepté le résultat de convergence du vecteur vitesse, sont basés sur l'article [52], co-écrit avec Stephan De Bièvre et publié dans *Stochastic Processes and their Applications*. Ils ont, de plus, fait l'objet d'une note dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, [51].

Dans (2), nous pouvons remplacer $1/\xi$ par $1/\xi^\sigma$. C'est l'objet du chapitre 4. Dans ce chapitre, nous montrons les comportements transitoires ou récurrents pour des classes de chaînes de Markov s'écrivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = U(x_n, \omega_n) \\ x_0 > x_+, \end{cases}$$

où $\gamma > 0$ et où $(\omega_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, bornées, centrées et de variance 1. Pour tout $x > x_+$, la fonction $x \rightarrow U(x, \cdot)$ est alors continue et s'écrit

$$U(x, \omega) = x + \omega + \frac{\gamma}{x^\sigma} + U_0(x, \omega) + U_1(x, \omega),$$

avec

$$U_0(x, \omega) = O(x^{-\alpha}), \quad U_1(x, \omega) = O(x^{-\beta});$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > \sigma$. De plus, $\mathbb{E}(U_0(x, \cdot)) = 0$. Ces chaînes ressemblent à celles introduites dans le chapitre 1 mais présentent un drift différent. En effet les chaînes du chapitre 1 sont le cas particulier $\sigma = 1$. Lorsque $\sigma > 1$ le drift est moins important que précédemment. Nous verrons que dans ce cas les chaînes sont récurrentes et chaque point est visité une infinité de fois. Au contraire, lorsque $\sigma < 1$ le drift devient plus important et la chaîne est transiente. Le cas $\sigma = 1$ est limite, le comportement dépend de la valeur du paramètre γ .

Théorème 4.1.2. *Soit $(x_n)_n$ une chaîne de Markov définie comme précédemment. Alors,*

1. *si $\sigma < 1$, alors $(x_n)_n$ est transiente ;*
2. *si $\sigma > 1$, alors $(x_n)_n$ est récurrente ;*
3. *si $\sigma = 1$, alors $(x_n)_n$ est transiente si $\gamma > 1/2$ et est récurrente si $\gamma < 1/2$.*

Enfin, dans le dernier chapitre, nous introduisons un modèle de gaz de Lorentz inélastique et dynamique. Contrairement au modèle introduit dans le chapitre 1, la particule interagit avec les diffuseurs qu'elle traverse et un retour à l'équilibre est possible. De plus, nous expliciterons la température à laquelle le système est en équilibre thermique. Pour cela, nous reprenons un modèle introduit dans [20],

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = -\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \eta(Q_i(t)) \nabla W(q(t) - r_i) \\ M \ddot{Q}_i(t) + U'(Q_i(t)) = -\alpha \eta'(Q_i(t)) V(q(t) - r_i). \end{cases}$$

Dans ces équations, $q(t) \in \mathbb{R}^d$ représente la position de la particule à l'instant t et $Q_i(t)$ est le déplacement des degrés de liberté internes associés au diffuseur centré

en $r_i \in \mathbb{R}^d$. Le potentiel U est confinant et gouverne la dynamique non couplée des degrés de liberté des diffuseurs et η représente la fonction de couplage ; ces deux fonctions sont supposées régulières et, plus particulièrement, elle sont supposées à croissance polynomiale. Tout comme dans le modèle considéré dans les premiers chapitres, les diffuseurs sont des objets tous disjoints, et sont décrits par le potentiel W non dépendant du temps. Ce potentiel est à nouveau à support dans $B(0, 1/2)$ et est invariant par rotation. Il est de plus supposé borné par 1. Les centres r_i des diffuseurs sont à horizon fini et sont distribués aléatoirement ou périodiquement dans $\mathbb{R}^d$, tout en imposant que $\min_{i \neq j} \|r_i - r_j\|_d > 1$. Ainsi, toute particule évoluant dans ce milieu interagit uniquement avec le diffuseur centré en r_i lorsque que $\|q(t) - r_i\|_d < 1/2$.

L'évolution en temps des degrés de liberté internes $Q_i(t)$ d'un diffuseur n'entraîne pas un changement dans la localisation de son centre ni de la taille ou de la forme de la région d'interaction. En revanche, cette évolution induit un changement dépendant du temps de la magnitude ainsi que du signe du transfert d'énergie se produisant entre la particule et le diffuseur durant le temps où celle-ci traverse sa zone d'interaction. Dans un tel système, le phénomène d'accélération stochastique ne peut pas être observé, même sur des échelles de temps intermédiaire, avant d'être dans un état d'équilibre.

Nous considérons alors la trajectoire de la particule comme étant une suite d'événements diffusifs et nous décrivons l'état de la particule juste avant son passage dans le n -ième diffuseur par

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + R(v_n, \kappa_n), \\ t_{n+1} = t_n + \frac{\ell_*}{\|v_{n+1}\|_d}, \\ q_{n+1} = q_n + \frac{\ell_*}{\|v_{n+1}\|_d} p_{n+1}, \end{cases} \quad (3)$$

où κ_n décrit l'état du n -ième diffuseur traversé ainsi que l'approche de la particule. La fonction R décrit le transfert du moment subit par la particule lors d'une unique collision

$$R(v, \kappa) = -\alpha \int_0^{+\infty} dt \eta(Q(t)) \nabla W(q(t)).$$

Le couple (q_n, v_n) représente l'état de la particule à son entrée dans le n -ième diffuseur et t_n est l'instant auquel cet événement se produit. Nous nous sommes alors intéressés à la première relation de (3) qui est indépendante des deux autres. Cette chaîne étant récurrente, nous avons dû la conditionner à rester strictement positive dans le but de pouvoir établir un résultat de convergence.

La chaîne de Markov considérée dans le chapitre 5 est celle décrivant l'énergie $E_n^\alpha = \|v_n\|^2/2$:

$$E_{n+1}^\alpha = E_n^\alpha + \Delta^{(2)} E_n^\alpha$$

où $\Delta^{(2)} E$ est le développement jusqu'à l'ordre 2 du transfert d'énergie ayant lieu durant une unique collision. Nous avons imposé à cette chaîne de rester strictement supérieure à une valeur E_+ ne dépendant pas de la constante de couplage α sous laquelle le comportement de la trajectoire de la particule ne peut pas être analysé.

Nous introduisons les processus changés d'échelle en temps et continus

$$E^\alpha(\tau) = \frac{\alpha^2(n+1) - \tau}{\alpha^2} E_n^\alpha + \frac{\tau - \alpha^2 n}{\alpha^2} E_{n+1}^\alpha, \quad \tau \in [\alpha^2 n, \alpha^2(n+1)[.$$

Théorème 5.4.2. *La famille de processus $(E^\alpha(\tau), \tau \in [0, 1])_{\alpha>0}$ converge faiblement, quand α tend vers 0, vers l'unique solution du problème aux martingales associé à l'opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ où*

$$\mathcal{D}_* = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty([E_+, +\infty[), \lim_{x \rightarrow E_+} f'(x) = 0 \right\},$$

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} \right) f''(x) - \frac{C^2}{x} f'(x).$$

Les valeurs A , B et C^2 sont strictement positives et proviennent du développement du transfert d'énergie. Nous montrons ensuite que la distribution des vitesses admet un état stationnaire et nous expliciterons la température T pour laquelle le système est en équilibre thermique :

$$k_B T = \frac{1}{M} \frac{\overline{(\eta' P)^2}}{(\eta')^2}.$$

Chapitre 1

Particule dans un potentiel aléatoire et dépendant du temps

Le rôle de ce premier chapitre est de décrire la dynamique d'une particule évoluant dans un milieu inélastique et inerte décrivant un gaz de Lorentz. Cette particule évolue dans un champ de forces dépendant du temps, son énergie cinétique n'est pas conservée. Un résultat sur la croissance asymptotique de l'énergie cinétique de la particule est énoncé pour un modèle décrit par une chaîne de Markov représentant un système plus simple mais fidèle à la dynamique originale.

*Si par malheur
Au cœur de l'accélérateur
J'rencontre une particule
Qui m'mette de sale humeur
Oh, faudrait pas que j'me laisse aller.
Téléphone — La bombe humaine.*

1.1 Introduction

On étudie le mouvement d'une particule dans $\mathbb{R}^d$ subissant l'action d'un champ de force aléatoire et dépendant du temps. La position $q(t) \in \mathbb{R}^d$ de la particule à l'instant t est donnée par l'équation de Newton qui suit :

$$\ddot{q}(t) = F(q(t), t), \quad q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = v_0, \quad (1.1)$$

où le champ de force F s'écrit :

$$F(q, t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} f_i(q - r_i, t). \quad (1.2)$$

Les fonctions f_i sont régulières, bornées et à support compact en leur variable spatiale dans la sphère de rayon $1/2$ centrée en 0. Les points r_i sont distribués aléatoirement ou non dans $\mathbb{R}^d$. Un réseau de diffuseurs (c'est-à-dire des zones de $\mathbb{R}^d$ où l'impulsion de la particule varie sous l'influence d'une force) est ainsi modélisé. Ceux-ci sont tous identiques et centrés en les points r_i et ont une dépendance en temps périodique ou quasi-périodique. La particule évolue donc librement entre deux collisions successives avec des diffuseurs. On impose au système d'être à horizon fini,

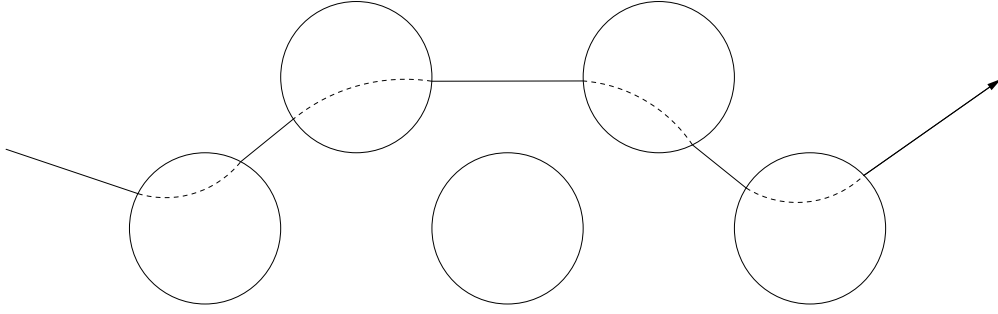


FIGURE 1.1: Trajectoire typique d'une particule dans un champ de force de la forme (1.2).

afin que toute particule évoluant dans le système croise le support de F en temps fini.

Ce modèle décrit un gaz de Lorentz inélastique et inerte, dans le sens où le milieu n'est pas affecté par le passage de la particule. Les fonctions f_i décrivant les diffuseurs étant bornées, la particule traverse les diffuseurs de façon inélastique, c'est-à-dire que sa trajectoire intersecte le support de F . On dira que le gaz est *mou* (voir Figure 1.1).

Dans [33, 50, 20], les diffuseurs réagissent au passage de la particule, le système est alors *dynamique*. Le système, composé d'une particule en interaction avec un bain d'oscillateurs est traité en utilisant la dynamique hamiltonienne et la conservation de l'énergie totale. L'interaction hamiltonienne de la particule avec le bain d'oscillateurs engendre, en plus d'une force aléatoire, une force de friction effective qui est à l'origine d'une dissipation de l'excès d'énergie accumulée par la particule. Le système est alors dans un état d'équilibre thermique. Dans ce cas, il est montré que l'énergie cinétique moyenne de la particule est constante et son mouvement est diffusif avec une constante de diffusion dépendant de la température. En particulier, nous reviendrons sur le système étudié dans [20] dans le chapitre 5.

Ici, le champ de force F considéré dans (1.1) et (1.2) est construit comme dans [1], Tout mécanisme de dissipation de l'énergie est éteint et les diffuseurs ne réagissent pas au passage de la particule. Le gaz est rendu inerte et le surplus d'énergie emmagasinée par la particule ne peut pas être évacué. Le champ de force induit dans ce cas une accélération non bornée de la particule qu'on appelle *accélération stochastique*.

Le Théorème 1.2.2 est le résultat principal de cette thèse. Il porte sur un système plus simple (voir (1.10)) que celui introduit ci-dessus dans lequel les recollisions de la particule sur un même diffuseur sont ignorées. Dans ce cas, on montre que $\|\dot{q}(t)\|_d \sim t^{1/5}$. Ce résultat est complété par deux résultats de convergence, établis dans le chapitre 2 permettant de déterminer les échelles de temps auxquelles on observe une variation macroscopique de $\|\dot{q}(t)\|_d$ ainsi que du vecteur $\dot{q}(t)$.

Une analyse mathématique de la trajectoire typique d'une particule en mouvement dans un champ de force décrit par (1.2) est faite dans la section suivante. Ce mouvement est décomposé en une suite d'événements diffusifs isolés et est alors bien approché par une chaîne de Markov discrète couplant les positions et vitesses

de la particule avant chaque entrée dans un diffuseur. Chaque pas correspond à une collision entre la particule et un unique diffuseur. Les variations de la vitesse et de l'énergie cinétique à chaque pas sont vues comme des événements aléatoires dépendants de la vitesse d'entrée de la particule dans le diffuseur et des paramètres caractérisant ce diffuseur. Une analyse théorique faite dans [3, 1] montre que pour cette chaîne de Markov, le comportement de la variation de l'énergie cinétique et de la vitesse lorsque celles-ci sont élevées détermine entièrement les propriétés asymptotiques du mouvement. Ce comportement à énergie élevée n'est sensible ni aux propriétés statistiques du champ de force, ni à la géométrie précise des diffuseurs.

1.2 Un modèle markovien

Les fonctions f_i introduites par (1.2) sont supposées être de la forme suivante :

$$f_i(q, t) = -\lambda_i \nabla_q V(q, \omega t + \phi_i).$$

Ainsi, l'équation du mouvement (1.1) devient

$$\ddot{q}(t) = - \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \lambda_i \nabla_q V(q(t) - r_i, \omega t + \phi_i). \quad (1.3)$$

La famille $(r_i \in \mathbb{R}^d)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ représente les centres des diffuseurs, sa distribution peut, à priori, être aussi bien aléatoire que déterministe. Les constantes de couplage λ_i sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$, indépendantes et identiquement distribuées selon une mesure de probabilité ν non concentrée en 0. Les diffuseurs sont alors des objets tous identiques décrits par le même potentiel $V : \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}$ supposé à support compact en sa variable spatiale dans $B(0, 1/2)$ et appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$ où $\mathbb{T}^m$ est le tore de dimension m . On suppose de plus que V est invariant par rotation, pour tout $M \in SO(\mathbb{R}^d)$,

$$V(Mq, t) = V(q, t).$$

Le vecteur pulsation $\omega \in \mathbb{T}^m$ est fixé. Lorsque ses composantes sont rationnelles, la force est périodique, sinon elle est quasi-périodique. Les phases initiales ϕ_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur le tore.

On émet l'hypothèse suivante

Hypothèse 1.2.1. *La fonction $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{T}^m)$ est à support compact dans $B(0, 1/2)$ en sa première variable. La fonction V , ainsi que ses dérivées partielles sont uniformément bornées. De plus la fonction $(\omega \cdot \nabla_\phi) V$ n'est pas identiquement nulle et, si $d = 1$, on impose que pour certains $\phi \in \mathbb{T}^m$, on ait*

$$\int_{\mathbb{R}^d} dq (\omega \cdot \nabla_\phi) V(q, \phi) \neq 0. \quad (1.4)$$

Une solution $(\dot{q}(t), q(t))$ peut être vue comme un processus stochastique défini sur un espace probabilisé généré par (r_i, λ_i, ϕ_i) . À chaque trajectoire est associée une suite $(t_n, v_n, b_n, r_{i_n}, \lambda_{i_n}, \phi_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ où t_n représente l'instant auquel la particule

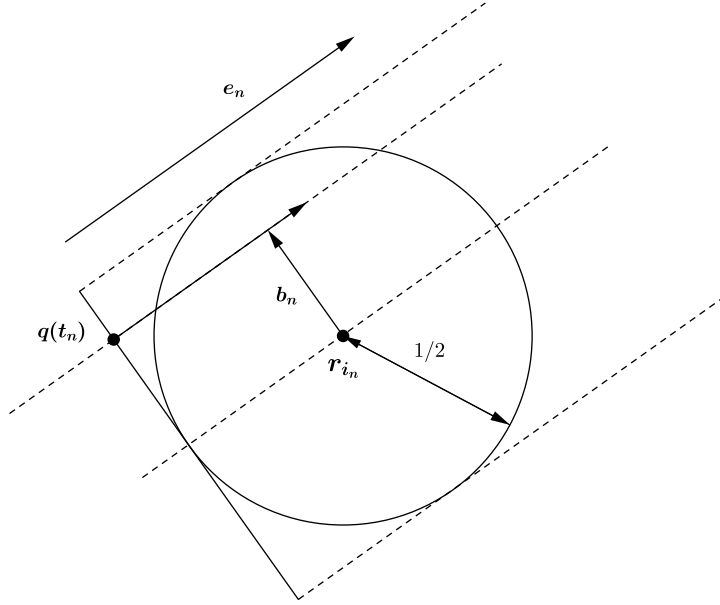


FIGURE 1.2: Particule arrivant à l'instant t_n avec vitesse v_n et paramètre d'impact b_n sur le diffuseur centré en r_{i_n} .

va rencontrer le $n + 1$ -ième diffuseur. À cet instant, la particule a pour vitesse v_n (inchangée depuis qu'elle est sortie du n -ième diffuseur). Ce $n + 1$ -ième diffuseur est centré en r_{i_n} et est caractérisé par la constante de couplage λ_{i_n} et par la phase initiale ϕ_{i_n} . Enfin, le vecteur $b_n \in \mathbb{R}^d$ représente le paramètre d'impact et est orthogonal à v_n (voir Figure 1.2). La trajectoire d'une particule arrivant à vitesse v_0 sur le diffuseur centré en r_{i_0} est alors entièrement décrite par le processus $(t_n, v_n, b_n, \lambda_{i_n}, \phi_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$. L'instant t_0 représente l'instant où la particule se situe en $q_0 = q(t_0)$ défini par

$$q_0 = r_{i_0} + b_0 - \frac{1}{2} \frac{v_0}{\|v_0\|_d}, \quad b_0 \in B(0, 1/2), \quad b_0 \cdot v_0 = 0.$$

En d'autres termes, t_0 est le premier instant où la trajectoire de la particule croise une tangente à $B(r_{i_0}, 1/2)$ orthogonale à b_0 .

Après l'action inélastique induite par le diffuseur sur la particule, celle-ci se déplace librement avec une nouvelle vitesse v_1 avant de rencontrer un second diffuseur (qui sera alors centré en r_{i_1}). Ainsi, on peut décrire une suite aléatoire d'événements diffusifs : le $n + 1$ -ième événement diffusif commence à l'instant t_n auquel la particule a pour vitesse v_n et a pour position q_n ,

$$q_n = r_{i_n} + b_n - \frac{1}{2} e_n; \quad e_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_d}. \quad (1.5)$$

Le paramètre d'impact b_n est tel que

$$b_n \cdot v_n = 0 \quad \text{et} \quad \|b_n\|_d \leq \frac{1}{2}.$$

Pour l'instant, l'existence de t_{n+1} n'est pas assurée et rien n'exclut qu'il ne soit pas défini. L'hypothèse d'horizon fini implique que toute particule sortant d'un diffuseur en rencontre un autre après un intervalle de temps fini, mais il est possible

que dans certain cas, notamment si $\|v_n\|_d$ est petite, la particule reste « enfermée » dans $B(r_{i_n}, 1/2)$. On exprimera, dans la section suivante, sous quelle condition le temps t_{n+1} est bien défini. Ainsi, lorsqu'une particule suffisamment rapide traverse le n -ième diffuseur qu'elle rencontre, elle subit l'influence du champ de force ce qui à pour conséquence une variation de vitesse. Cette variation s'écrit

$$v_n = v_{n-1} + R(v_{n-1}, b_{n-1}, \phi_{i_{n-1}}, \lambda_{i_{n-1}}), \quad (1.6)$$

et où pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}^d$ avec $v \cdot b = 0$ et $(\phi, \lambda) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}$, le transfert du moment s'écrit

$$R(v, b, \phi, \lambda) = -\lambda \int_0^{+\infty} dt \nabla_q V(q(t), \omega t + \phi) \quad (1.7)$$

où $q(t)$ est l'unique solution de

$$\ddot{q}(t) = -\lambda \nabla_q V(q(t), \omega t + \phi), \quad q(0) = b - \frac{1}{2} \frac{v}{\|v\|_d}, \quad \dot{q}(0) = v. \quad (1.8)$$

Une fois que la particule n'est plus sous l'influence du n -ième diffuseur, elle se déplace librement sur une distance qu'on notera ℓ_n avec vitesse v_n vers le $(n+1)$ -ième diffuseur qu'elle rencontre après un intervalle de temps $\ell_n/\|v_n\|_d$. En se basant sur cette description de la dynamique et en ignorant le rôle des possibles recollisions, c'est-à-dire en admettant que la particule ne repasse jamais dans un diffuseur qu'elle a déjà traversé, on peut approcher la solution $(\dot{q}(t), q(t))$ de (1.3) par une chaîne de Markov. Chaque pas représente le passage de la particule dans un diffuseur caractérisé par les variables λ_{i_n} et ϕ_{i_n} , les variables b_n et ℓ_n caractérisent quant à elles l'approche du diffuseur. Pour définir précisément cette chaîne, ces trois variables sont choisies aléatoirement et indépendamment après chaque passage dans un événement diffusif. Ainsi, partant de (v_0, q_0) , on détermine de manière itérative la vitesse et la position de la particule ainsi que l'instant avant son entrée dans le $(n+1)$ -ième diffuseur par les relations,

$$\begin{cases} v_{n+1} &= v_n + R(v_n, b_n, \phi_{i_n}, \lambda_{i_n}), \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{\ell_{n+1}}{\|v_{n+1}\|_d}, \\ q_{n+1} &= q_n + \ell_{n+1} e_{n+1}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Une dernière simplification est apportée à cette chaîne de Markov en remplaçant la variable aléatoire ℓ_n par la distance moyenne sur toutes les trajectoires $\ell = \langle \ell_n \rangle \leq L$ entre deux centres de diffuseurs visités successivement. On définit finalement la chaîne de Markov qui sera étudiée dans la suite,

$$\begin{cases} v_{n+1} &= v_n + R(v_n, b_n, \phi_{i_n}, \lambda_{i_n}), \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{\ell}{\|v_{n+1}\|_d}, \\ q_{n+1} &= q_n + \ell e_{n+1}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Cette dernière chaîne de Markov décrit le comportement d'une particule dans un système plus simple où les recollisions sur un même diffuseur sont exclues. Cette

chaîne de Markov reste tout de même fidèle au système original décrit par (1.3). Précisément, les variables b_n sont tirées aléatoirement et de manière indépendante à chaque pas de la chaîne de Markov selon une loi uniforme dans $B(0, 1/2)$ conditionnée par $b_n \cdot v_n = 0$. Les variables ϕ_{i_n} et λ_{i_n} sont aussi aléatoirement tirées à chaque pas et forment des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans $\mathbb{T}^m$ et $\mathbb{R}$ respectivement. Dans le modèle original décrit par (1.3), rien n'exclut de possibles recollisions. Néanmoins, les résultats numériques dans [3, 1] étant en accord avec les résultats obtenus dans cette thèse sur le comportement asymptotique de $\|v_n\|$ défini dans (1.10), ils laissent à penser que ces recollisions ont un impact négligeable sur la dynamique du modèle (1.3).

À partir de (1.10), on introduit les trajectoires continues $(q(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q(t_n) = q_n$ est solution de (1.10) et, pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}[$, on note

$$q(t) = q(t_n) + (t - t_n)v_{n+1}. \quad (1.11)$$

Le résultat d'accélération stochastique obtenu sur le comportement asymptotique de $\|\dot{q}(t)\|_d$ est le suivant.

Théorème 1.2.2. *Soit $d > 5$; alors pour tout $\nu > 0$ et $v_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe deux constantes $c(\nu, v_0) > 0$ et $C(\nu, v_0) > 0$ dépendant uniquement de ν et v_0 , telles que*

$$\lim_{\|v_0\|_d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\forall t > \frac{1}{\|v_0\|_d}, c(\nu, v_0)t^{\frac{1}{5}-\nu} \leq \|\dot{q}(t)\|_d \leq C(\nu, v_0)t^{\frac{1}{5}+\nu} \right) = 1.$$

La démonstration de ce résultat sera faite dans la section 1.4. Elle repose sur un résultat plus général (Théorème 1.4.2) qui porte sur une classe de chaînes de Markov incluant (1.10).

Un modèle similaire dans lequel les forces f_i ne dérivent pas d'un gradient est étudié dans [22] par Dolgopyat et Koralov. Dans ce cas les auteurs montrent que, pourvu que $\|\dot{q}(0)\|_d$ soit assez grand et pour $d \geq 4$,

$$\|\dot{q}(t)\|_d \sim t^{1/3}, \quad \|q(t)\|_d \sim t^{4/3},$$

avec une grande probabilité. La croissance de l'énergie de la particule dans un tel système est plus rapide que dans le cas présenté dans cette thèse. En effet dans notre cas l'énergie cinétique de la particule a une croissance en $t^{2/5}$ alors que cette croissance est en $t^{2/3}$ dans le modèle présenté par [22]. Le fait que l'énergie cinétique croît plus rapidement permet aux auteurs de montrer que, avec grande probabilité, les trajectoires des particules ne s'auto-intersectent pas, et que les recollisions sur un même diffuseur n'apparaissent pas. Dolgopyat et Koralov ont alors pu contrôler le comportement de $\|q(t)\|_d$. La situation présentée dans cette thèse est très différente. Dans le chapitre 2, on montrera que l'échelle de temps pour laquelle on observe un changement de direction macroscopique de la particule est plus courte que celle permettant d'apercevoir un changement macroscopique de sa vitesse. Cette différence de comportement laisse penser que les trajectoires peuvent s'auto-intersecter. Il est montré numériquement dans [3, 1] que la croissance de $\|q(t)\|_d$ est plus lente que $t^{6/5}$ qui correspond à une intégration de $\|\dot{q}(t)\|_d$. Dans les faits, les analyses numériques de [3, 1] indiquent que $\|q(t)\|_d \sim t$.

1.3 Analyse du transfert du moment

Nous avons besoin de comprendre le comportement de $R(v, \kappa)$, le noyau de transition de la chaîne $(v_n)_n$ définie dans (1.10) par :

$$v_{n+1} = v_n + R(v_n, \kappa_n), \quad (1.12)$$

où $\kappa_n = (b_n, \phi_{i_n}, \lambda_{i_n})$. Cette équation étant indépendante des deux autres dans (1.10), on peut la traiter séparément. Il est nécessaire de comprendre le comportement du transfert de moment $R(v, \kappa)$ lorsque $\|v\|_d$ est élevée ainsi que le comportement du transfert d'énergie

$$\begin{aligned} \Delta E(v, \kappa) &= \frac{1}{2} (\|v + R(v, \kappa)\|_d^2 - \|v\|_d^2) \\ &= \frac{1}{2} \|R(v, \kappa)\|_d^2 + R(v, \kappa) \cdot v. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Pour cela, nous devons étudier le comportement des solutions de :

$$\ddot{q}(t) = -\lambda \nabla V(q(t), \omega t + \phi), \quad \dot{q}(0) = v, \quad q(0) = q.$$

Soient

$$v_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{q}(t),$$

ainsi, si $q = b - \frac{1}{2}e_0$, et $v = v_0$, où $e_0 = v_0/\|v_0\|_d$,

$$R(v_0, \kappa) = v_+ - v_- = -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dt \nabla V(q(t), \omega t + \phi). \quad (1.14)$$

Les trois résultats suivants (voir [3, 1]) permettent de rendre plus explicite (1.7). En particulier, sous l'Hypothèse 1.2.1, une solution globale de (1.8) existe toujours. Néanmoins, l'intégrale (1.7) peut ne pas converger. C'est possible si, pour une vitesse initiale v donnée, la solution satisfait $\|q(t)\|_d \leq 1/2$ pour tout t grand. La particule reste alors emprisonnée dans un diffuseur et dans ce cas l'intégrale (1.7) ne converge pas. Heuristiquement, si la vitesse $\|v\|_d$ d'entrée dans un diffuseur est assez grande, la particule n'a pas le temps de subir l'influence du diffuseur et cela n'arrive pas, c'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 1.3.1 ([1]). *Supposons que l'Hypothèse 1.2.1 est vérifiée. Soient $\tau \in \mathbb{R}_+$ et $q, v \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|q\|_d \leq 1/2$ et $\|v\|_d^2 > \frac{1}{2}\lambda\|V\|_{\infty}$. Alors il existe $t_{in} < \tau < t_{out}$ uniques et tels que $\|q(t_{in})\|_d = 5/2 = \|q(t_{out})\|_d$. De plus*

$$\frac{\sqrt{3}}{\|v\|_d} \leq \min\{\tau - t_{in}, t_{out} - \tau\} \leq \max\{\tau - t_{in}, t_{out} - \tau\} \leq \frac{2\sqrt{3}}{\|v\|_d}.$$

Ce lemme nous dit que si à l'instant τ , la particule se trouve dans une région où $F \neq 0$ et que si à cet instant, la vitesse de la particule est suffisamment grande, alors il existe un temps d'entrée et un temps de sortie (respectivement inférieur et supérieur à τ) de la zone perturbée. De plus le temps mis par la particule pour traverser cette zone est de l'ordre de $\|v\|_d^{-1}$. Ce lemme implique enfin le caractère fini du transfert du moment $R(v, \kappa)$ et du transfert d'énergie $\Delta E(v, \kappa)$ lorsque $\|v\|_d \geq 12\lambda\|V\|_{\infty}$.

Lemme 1.3.2 ([1]). *Supposons que l'Hypothèse 1.2.1 est vérifiée. Soient $q, v \in \mathbb{R}^d$ et $\tau \in \mathbb{R}_+$ avec $\|v\|_d > 12\lambda\|V\|_\infty$. Alors*

$$\begin{aligned} \Delta v(q, v, \tau) := v_+ - v_- = & -\frac{\lambda}{\|v\|_d} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \nabla V(q + se, \omega\tau + \phi) \\ & - \frac{\lambda}{\|v\|_d^2} \int_{-\infty}^{+\infty} ds s \partial_t \nabla V(q + se, \omega\tau + \phi) + O(\|v\|_d^{-3}), \end{aligned}$$

où $\partial_t = \omega \cdot \nabla_\phi$, $e = v/\|v\|_d$ et où le terme d'erreur est uniforme en q, τ et λ .

La démonstration de ce lemme est faite dans [3, 1] et repose sur le changement de variable $s = (t - \tau)\|v\|_d$ dans l'expression (1.7) puis sur un développement de Taylor. La Proposition 1.3.2 nous permet d'écrire

$$R(v, \kappa) = -\frac{\lambda}{\|v\|_d} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \nabla V \left(b + \left(s - \frac{1}{2}\right)e, \omega \frac{s}{\|v\|_d} + \phi \right) + O(\|v\|_d^{-3}). \quad (1.15)$$

Plus généralement, comme $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{T}^m)$ on peut augmenter l'ordre du développement de l'intégrande R et écrire, pour $K \in \mathbb{N}_*$, $(v, \kappa) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}$ avec $b \cdot v = 0$ et $\kappa = (b, \phi, \lambda)$,

$$R(v, \kappa) = \sum_{\ell=1}^K \frac{\alpha^{(\ell)}(e, \kappa)}{\|v\|_d^\ell} + O(\|v\|_d^{-(K+1)}), \quad e = \frac{v}{\|v\|_d}, \quad (1.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}(e, \kappa) &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} ds \nabla V \left(b + \left(s - \frac{1}{2}\right)e, \phi \right), \\ \alpha^{(2)}(e, \kappa) &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} ds s \partial_t \nabla V \left(b + \left(s - \frac{1}{2}\right)e, \phi \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

En revenant à (1.13), on obtient pour $K \in \mathbb{N}_*$ et $(v, \kappa) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}$,

$$\Delta E(v, \kappa) = \sum_{\ell=0}^K \frac{\beta^{(\ell)}(e, \kappa)}{\|v\|_d^\ell} + O(\|v\|_d^{-(K+1)}), \quad e = \frac{v}{\|v\|}, \quad (1.18)$$

avec

$$\begin{aligned} \beta^{(0)}(e, \kappa) &= e \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa), \\ \beta^{(1)}(e, \kappa) &= e \cdot \alpha^{(2)}(e, \kappa), \\ \beta^{(2)}(e, \kappa) &= \frac{1}{2} \alpha^{(1)}(e, \kappa) \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa) + e \cdot \alpha^{(3)}(e, \kappa), \\ \beta^{(3)}(e, \kappa) &= \alpha^{(1)}(e, \kappa) \cdot \alpha^{(2)}(e, \kappa) + e \cdot \alpha^{(4)}(e, \kappa), \\ \beta^{(4)}(e, \kappa) &= \frac{1}{2} \alpha^{(2)}(e, \kappa) \cdot \alpha^{(2)}(e, \kappa) + \alpha^{(1)}(e, \kappa) \cdot \alpha^{(3)}(e, \kappa) + e \cdot \alpha^{(5)}(e, \kappa). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Le potentiel V étant à support compact en sa première variable, le terme du premier ordre dans le transfert du moment (1.7) est orthogonal au moment entrant, de sorte que

$$e \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa) = 0.$$

Ainsi, on obtient,

$$\beta^{(0)}(e, \kappa) = e \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa) = 0.$$

Cela a pour conséquence que $\Delta E(v, \kappa) \sim \|v\|_d^{-1}$, de plus on a :

$$\beta^{(1)}(e, \kappa) = e \cdot \alpha^{(2)}(e, \kappa) = -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} ds \partial_t V(b + se, \phi).$$

Remarque 1.3.3. *Au contraire, lorsque la force ne dérive pas d'un gradient, $\alpha^{(1)}(e, \kappa)$ n'est pas orthogonal à e et $\beta^{(0)}$ ne s'annule pas. Le terme du premier ordre dans (1.18) est non nul et $\Delta E(v, \kappa) \sim 1$, c'est de là que provient la différence d'exposant dans le comportement asymptotique de $\langle \|\dot{q}(t)\|_d \rangle$ dans [22].*

Pour tout f dépendant de $v \in \mathbb{R}^d$ et $\kappa = (b, \phi, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}$ tels que $v \cdot b = 0$ et $\|v\|_d \leq 1/2$, on désignera sa moyenne par rapport aux paramètres aléatoires associés au diffuseur lors d'une unique collision par

$$\overline{f(v)} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{db}{C_d} \int_{\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}} d\mu(\phi, \lambda) f(v, \kappa),$$

où C_d est le volume de $B(0, 1/2) \subset \mathbb{R}^{d-1}$.

Le changement d'énergie subi par une particule lors d'une unique collision est décrit par le théorème suivant.

Proposition 1.3.4 ([1]). *Supposons que l'Hypothèse 1.2.1 est vérifiée. Alors*

1. *Pour tout vecteur unitaire $e \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\overline{\alpha^{(1)}(e)} = 0 = \overline{\alpha^{(2)}(e)}.$$

De plus, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^d$

$$\overline{\Delta E(v)} = \frac{B}{\|v\|_d^4} + O(\|v\|_d^{-5}), \quad \overline{(\Delta E(v))^2} = \frac{D^2}{\|v\|_d^2} + O(\|v\|_d^{-3}),$$

où

$$B = \frac{d-3}{2} D^2,$$

et,

$$D^2 = \frac{\overline{\lambda^2}}{C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{R}^{2d}} dq dq' \|q - q'\|^{-(d-1)} \partial_t V(q, \phi) \partial_t V(q', \phi) > 0.$$

En particulier, pour tout vecteur $e \in \mathbb{R}^d$ unitaire et tout $\ell = 1, 2, 3$,

$$\overline{\beta^{(\ell)}(e)} = 0, \quad B = \overline{\beta^{(4)}(e)} \quad \text{et} \quad D^2 = \overline{(\beta^{(1)}(e))^2} > 0;$$

2. *Soit $(v_n)_n$ le processus aléatoire défini par (1.6) et $e_n = v_n / \|v_n\|$. Soit pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\beta_n^{(\ell)} = \beta^{(\ell)}(e_n, \kappa_n)$. Alors, pour tout $n \neq n' \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leq \ell \leq \ell' \leq 3$, on a*

$$\begin{cases} \langle \beta_n^{(4)} \rangle - B &= 0 = \langle \beta_n^{(\ell)} \rangle \\ \langle \beta_n^{(\ell)} \beta_{n'}^{(\ell')} \rangle &= 0 = \langle \beta_n^{(\ell)} (\beta_{n'}^{(4)} - B) \rangle = \langle (\beta_n^{(4)} - B) (\beta_{n'}^{(4)} - B) \rangle. \end{cases} \quad (1.20)$$

De plus, $\langle (\beta_n^{(4)})^2 \rangle$ et $\langle \beta_n^{(\ell)} \beta_n^{(4)} \rangle$ sont indépendants de n .

La démonstration de la Proposition 1.3.4 est faite en détail dans [1].

Un résultat supplémentaire sur les termes du développement de (1.7), dont on aura besoin dans le chapitre 2, est le suivant.

Proposition 1.3.5. *Supposons que l'Hypothèse 1.2.1 est vérifiée. Alors :*

1. Pour tout vecteur unitaire $e \in \mathbb{R}^d$,

$$\overline{\alpha^{(1)}(e) \otimes \alpha^{(1)}(e)} = K^2 (I_d - e \otimes e),$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel. La constante K^2 ne dépend pas de e et s'écrit

$$0 < K^2 = \frac{\overline{\lambda^2}}{C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{R}^d} dz \int_{\mathbb{R}} dh \partial_w V(z, \phi) \partial_w V(z + he, \phi),$$

avec $\|w\|_d = 1$, $w \cdot e = 0$ et $\partial_w = w \cdot \nabla_q$;

2. Pour tout vecteur unitaire $e \in \mathbb{R}^d$,

$$\overline{\alpha^{(3)}(e)} = -\frac{d-1}{2} K^2 e.$$

Démonstration. 1. Notons $A(e, \kappa) = \alpha^{(1)}(e, \kappa) \otimes \alpha^{(1)}(e, \kappa)$. L'invariance par rotation de V entraîne que pour tous vecteurs unitaires $u, v \in \mathbb{R}^d$ tels que $u \cdot v = 0$, et pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ avec $u \cdot a = 0 = v \cdot a$,

$$(\partial_u V(a, \phi)) = (\partial_v V(a, \phi)). \quad (1.21)$$

De plus, le produit scalaire $e \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa)$ étant nul pour tout κ , on obtient, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$ unitaire et tel que $u \cdot e = 0$,

$$(e \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa))^2 = 0, \quad (e \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa))(u \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa)) = 0. \quad (1.22)$$

D'après (1.21), pour tous vecteurs unitaires $u, v \in \mathbb{R}^d$ orthogonaux à e et tels que $u \cdot v = 0$,

$$(u \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa))^2 = (v \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa))^2. \quad (1.23)$$

La matrice $A(e, \kappa)$ est symétrique diagonale et, d'après (1.23), $(e \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa))^2 = 0$. Nous allons utiliser le Lemme de Schur pour montrer que cette matrice est en réalité diagonale. Pour cela, considérons les matrices $M \in SO(\mathbb{R}^d)$ laissant e invariant. L'espace $\mathbb{R}^d$ est alors somme d'espaces irréductibles pour ce groupe de rotations :

$$\mathbb{R}^d = \text{span}(e) \oplus \text{span}(e)^\perp.$$

Pour tout $M \in SO(\mathbb{R}^d)$ laissant e invariant, il est facile de vérifier que par (1.21), M et $A(e, \kappa)$ commutent :

$$MA(e, \kappa) = A(e, \kappa)M, \quad \forall \kappa.$$

Le Lemme de Schur s'applique et nous dit que $A(e, \kappa)$ est diagonale :

$$A(e, \kappa) = \left(\begin{array}{c|c} a_1(e, \kappa) & 0 \\ \hline 0 & a_2(e, \kappa) I_d \end{array} \right).$$

Par (1.22) $a_1(e, \kappa) = 0$, et

$$a_2(e, \kappa) = (u \cdot \alpha^{(1)}(e, \kappa))^2, \quad \forall \|u\|_d = 1, u \cdot e = 0.$$

On obtient alors,

$$\overline{A(e)} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \overline{a_2(e)} I_d \end{array} \right).$$

Il reste à calculer $K^2(e) = \overline{a_2(e)}$. Soit $u \in \mathbb{R}^d$ orthogonal à e ,

$$K^2(e) = \overline{(u \cdot \alpha^{(1)}(e))^2} = \frac{\overline{\lambda^2}}{C_d} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\substack{\mathbb{R}^d \\ b \cdot e = 0}} db \int_{\mathbb{R}} ds \int_{\mathbb{R}} ds' \partial_u V(b + (s - \frac{1}{2})e, \phi) \partial_u V(b + (\frac{1}{2} - s')e, \phi). \quad (1.24)$$

Le changement de variables $(z, h) = (b + (s - 1/2)e, s' - s)$ permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\substack{\mathbb{R}^d \\ b \cdot e = 0}} db \int_{\mathbb{R}} ds \int_{\mathbb{R}} ds' \partial_u V(b + (s - \frac{1}{2})e, \phi) \partial_u V(b + (\frac{1}{2} - s')e, \phi) \\ = \int_{\mathbb{R}^d} dz \int_{\mathbb{R}} dh \partial_u V(z, \phi) \partial_u V(z + he, \phi) > 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

La stricte positivité de cette dernière quantité découle du fait que la variable aléatoire $\alpha^{(1)}(e, \kappa)$ n'est pas identiquement nulle. En effet, si $K^2(e) = 0$, $\alpha^{(1)}(e, \kappa)$ serait identiquement égale à sa moyenne. De plus, l'invariance par rotation de V implique que (1.25) ne dépend pas du vecteur unitaire e choisi.

2. Soit $e \in \mathbb{R}^d$ unitaire. L'égalité (1.19) permet de calculer $\overline{(e \cdot \alpha^{(3)}(e))}$:

$$\overline{(e \cdot \alpha^{(3)}(e))} = \overline{\beta^{(2)}(e)} - \frac{1}{2} \overline{\alpha^{(1)}(e) \cdot \alpha^{(1)}(e)}.$$

Le Théorème 1.3.4 affirme que $\overline{\beta^{(2)}(e)} = 0$ et la première affirmation de ce lemme nous dit que

$$\overline{\alpha^{(1)}(e) \cdot \alpha^{(1)}(e)} = (d-1)K^2.$$

On obtient alors

$$\overline{e \cdot \alpha^{(3)}(e)} = -\frac{d-1}{2} K^2,$$

et

$$\overline{\alpha^{(3)}(e)} = -\frac{d-1}{2} K^2 e + \mu^\perp$$

où $\mu^\perp \in \mathbb{R}^d$ est orthogonal à e . Le système étant invariant par rotation, pour tout $M \in SO(\mathbb{R}^d)$,

$$M \overline{\alpha^{(3)}(e)} = \overline{\alpha^{(3)}(Me)}. \quad (1.26)$$

Considérons des vecteurs unitaires $u_i \in \mathbb{R}^d$, $i \in \{2, \dots, d\}$ tels que $(e, u_2, \dots, u_d)$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$. Alors, il existe une suite $(\mu_i)_{i \in \{2, \dots, d\}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\overline{\alpha^{(3)}(e)} = -\frac{d-1}{2}K^2e + \sum_{i=2}^d \mu_i u_i. \quad (1.27)$$

Soit maintenant $M \in SO(\mathbb{R}^d)$ laissant e invariant, alors d'après (1.26),

$$\overline{\alpha^{(3)}(e)} = -\frac{d-1}{2}K^2e + \sum_{i=2}^d \mu_i M u_i,$$

ce qui implique que les μ_i sont tous égaux. On notera $\mu_i = \mu$ et

$$\overline{\alpha^{(3)}(e)} = -\frac{d-1}{2}K^2e + \mu \sum_{i=2}^d u_i. \quad (1.28)$$

Remarquons maintenant que

$$\overline{\alpha^{(3)}(-I_d e)} = \overline{\alpha^{(3)}(-e)} = \frac{d-1}{2}K^2e + \mu \sum_{i=2}^d u_i$$

et

$$-I_d(\overline{\alpha^{(3)}(e)}) = \frac{d-1}{2}K^2e - \mu \sum_{i=2}^d u_i.$$

On conclut alors que $\mu = 0$ et par conséquent, pour tout $e \in \mathbb{R}^d$ unitaire, $\overline{\alpha^{(3)}(e)} = -\frac{d-1}{2}K^2e$. $\square$

Revenons maintenant, à (1.16). Les deux premiers termes de ce développement étant de moyenne nulle, $\overline{R(e_n)} \sim \|v_n\|_d^{-3}$. La chaîne de Markov (1.12) s'écrit :

$$v_{n+1} = v_n + \sum_{\ell=1}^3 \frac{\alpha^{(\ell)}(e, \kappa)}{\|v_n\|_d^\ell} + O(\|v_n\|_d^{-4}). \quad (1.29)$$

1.4 Démonstration du Théorème 1.2.2

Intéressons nous maintenant à la chaîne de Markov $(\|v_n\|_d^3)_{n \in \mathbb{N}}$ où v_n est défini par (1.10). Il est en effet plus facile d'étudier le comportement de $\|v_n\|_d^3$ plutôt que d'une autre puissance de $\|v_n\|_d$ car le terme aléatoire $\beta_n^{(1)}$ sera isolé des termes dépendants de $\|v_n\|_d^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \Delta \|v_n\|_d^3 &:= \|v_{n+1}\|_d^3 - \|v_n\|_d^3 \\ &= \|v_n\|_d^2 (\|v_{n+1}\|_d - \|v_n\|_d) \left(1 + \frac{\|v_{n+1}\|_d}{\|v_n\|_d} + \frac{\|v_{n+1}\|_d^2}{\|v_n\|_d^2} \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Le développement (1.18) permet d'exprimer les deux derniers termes du membre de droite de (1.30),

$$\frac{\|v_{n+1}\|_d^2}{\|v_n\|_d^2} = 1 + 2 \sum_{\ell=1}^4 \frac{\beta_n^{(\ell)}}{\|v_n\|_d^{\ell+2}} + O(\|v_n\|_d^{-7}), \quad (1.31)$$

$$\frac{\|v_{n+1}\|_d}{\|v_n\|_d} = 1 + \sum_{\ell=1}^3 \frac{\beta_n^{(\ell)}}{\|v_n\|_d^{\ell+2}} + O(\|v_n\|_d^{-6}) \quad (1.32)$$

$$\|v_{n+1}\|_d - \|v_n\|_d = \sum_{\ell=1}^3 \frac{\beta_n^{(\ell)}}{\|v_n\|_d^{\ell+1}} + \frac{\beta_n^{(4)} - \frac{1}{2}(\beta_n^{(1)})^2}{\|v_n\|_d^5} + O(\|v_n\|_d^{-6}). \quad (1.33)$$

Ainsi en insérant (1.31)-(1.33) dans (1.30), on obtient

$$\begin{aligned} \Delta\|v_n\|_d^3 &= \sum_{\ell=1}^3 \frac{2\beta_n^{(\ell)}}{\|v_n\|_d^{\ell-1}} + \frac{3\left(\beta_n^{(4)} + \frac{1}{2}(\beta_n^{(1)})^2\right)}{\|v_n\|_d^3} + O(\|v_n\|_d^{-4}) \\ &= 3\beta_n^{(1)} + \frac{3\left(\beta_n^{(4)} + \frac{1}{2}(\beta_n^{(1)})^2\right)}{\|v_n\|_d^3} + O_0(\|v_n\|_d^{-1}) + O(\|v_n\|_d^{-4}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

La notation $O_0(\cdot)$ représente un $O(\cdot)$ de moyenne nulle, c'est à dire $\overline{O(\cdot)} = 0$. En remplaçant le terme en $\|v_n\|_d^{-3}$ par sa moyenne (Théorème 1.3.4) dans (1.34) et en introduisant les notations suivantes,

$$\xi_n = \frac{\|v_n\|_d^3}{3D}, \quad \omega_n = \frac{\beta_n^{(1)}}{D} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{3} \left(\frac{B}{D^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{d-2}{6}, \quad (1.35)$$

on obtient finalement la chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \omega_n + \frac{\gamma}{\xi_n} + O_0\left(\xi_n^{-\frac{1}{3}}\right) + O\left(\xi_n^{-\frac{4}{3}}\right). \quad (1.36)$$

La suite de variables aléatoires réelles $(\omega_n)_n$ est égale à la suite $\left(\beta_n^{(1)}/3D\right)_n$. Ces variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées, c'est une conséquence du fait que les variables $(\kappa_n)_n$ sont elles aussi indépendantes et identiquement distribuées. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{\omega_n} = 0$ et $\overline{\omega_n^2} = 1$ et par le Théorème 1.3.4, $\gamma = (d-2)/6 > -1/6$.

Comprendre le comportement de l'énergie cinétique du système revient donc à étudier la chaîne de Markov $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$: c'est l'objet du chapitre 3 et de la section suivante. En particulier le Théorème 1.4.2 est un résultat sur le comportement d'une classe de chaînes de Markov plus large, contenant la chaîne $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (1.36). Le Théorème 1.4.2 est alors la clef de voûte de la démonstration du Théorème 1.2.2.

Considérons une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires bornées indépendantes et identiquement distribuées, centrées et de variance égale à 1 :

$$\mathbb{E}(\omega_n) = 0, \quad \mathbb{E}(\omega_n^2) = 1, \quad \exists \bar{\omega} \geq 1, |\omega_n| < \bar{\omega}. \quad (1.37)$$

Leur mesure de probabilité est notée ρ . Soit une fonction $F : \mathbb{R}_+^* \times [-\bar{\omega}, \bar{\omega}] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable et satisfaisant l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.4.1. *Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \xi_- < \xi_+$ et deux paramètres $\alpha > 0$, $\beta > 1$, tels que F est continue sur $[\xi_-, +\infty] \times [-\bar{\omega}, \bar{\omega}]$ et, pour tout $\xi > \xi_+$,*

$$F(\xi, \omega) = \xi + \omega + \frac{\gamma}{\xi} + F_0(\xi, \omega) + F_1(\xi, \omega), \quad (1.38)$$

et où les fonctions F_0 et F_1 sont telles que, pour ξ grand,

$$\sup_{\omega} |F_0(\xi, \omega)| = O(\xi^{-\alpha}), \quad \text{et} \quad \sup_{\omega} |F_1(\xi, \omega)| = O(\xi^{-\beta}), \quad (1.39)$$

De plus, $\mathbb{E}(F_0(\xi, \cdot)) = 0$.

Les deux termes F_0 et F_1 sont des perturbations de ω et γ/ξ respectivement. Les chaînes de Markov considérées sont celles s'écrivant :

$$\begin{cases} \xi_{n+1} &= F(\xi_n, \omega_n) \\ \xi_0 &> \xi_+. \end{cases} \quad (1.40)$$

La chaîne de Markov décrite par (1.36) satisfait l'Hypothèse 1.4.1 et peut donc s'écrire comme (1.40). En effet, il est facilement vérifiable que $O_0(\xi^{-\frac{1}{3}})$ et $O(\xi^{-\frac{4}{3}})$ sont respectivement de la forme $F_0(\xi, \omega)$ et $F_1(\xi, \omega)$.

Le résultat principal de cette section décrit le comportement asymptotique des chaînes de Markov définies par (1.40). Ce résultat s'applique en particulier à la chaîne de Markov $(\|v_n\|_d^3/3D)_{n \in \mathbb{N}}$ et est le pilier de la démonstration du Théorème 1.2.2 qui sera montré à la fin de cette section.

Théorème 1.4.2. *On suppose que $\gamma > \frac{1}{2}$. Alors*

1. *Pour tout $0 < p \leq 1$ et pour tout $\nu > 0$, il existe $\xi_* > \xi_+$ tel que pour tout $\xi_0 > \xi_*$, on ait*

$$\mathbb{P}\left(\forall n \in \mathbb{N}, \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}}\right)^{1-\nu} \leq \xi_n \leq \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}}\right)^{1+\nu}\right) \geq 1 - p. \quad (1.41)$$

2. *Pour tout $\nu > 0$, on a*

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\forall n \in \mathbb{N}, \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}}\right)^{1-\nu} \leq \xi_n \leq \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}}\right)^{1+\nu}\right) = 1. \quad (1.42)$$

La preuve de ce théorème nécessite un résultat de convergence énoncé et montré dans le chapitre 2. Le reste de la preuve est l'intégralité du chapitre 3.

Ce résultat peut être anticipé à partir de l'observation suivante. Considérons le cas où F est de la forme (1.38) pour tout $\xi > 0$ et non plus pour ξ grand. En oubliant les deux termes perturbatifs F_0 et F_1 , la fonction F reste strictement positive à la seule condition que $\bar{\omega} < 2\sqrt{\gamma}$. Dans ce cas il est possible de contrôler le moment d'ordre 2 de $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\xi_{n+1}^2 = \xi_n^2 + \omega^2 + 2\gamma + 2\omega_n \left(\xi_n + \frac{\gamma}{\xi_n}\right) + \frac{\gamma^2}{\xi_n^2},$$

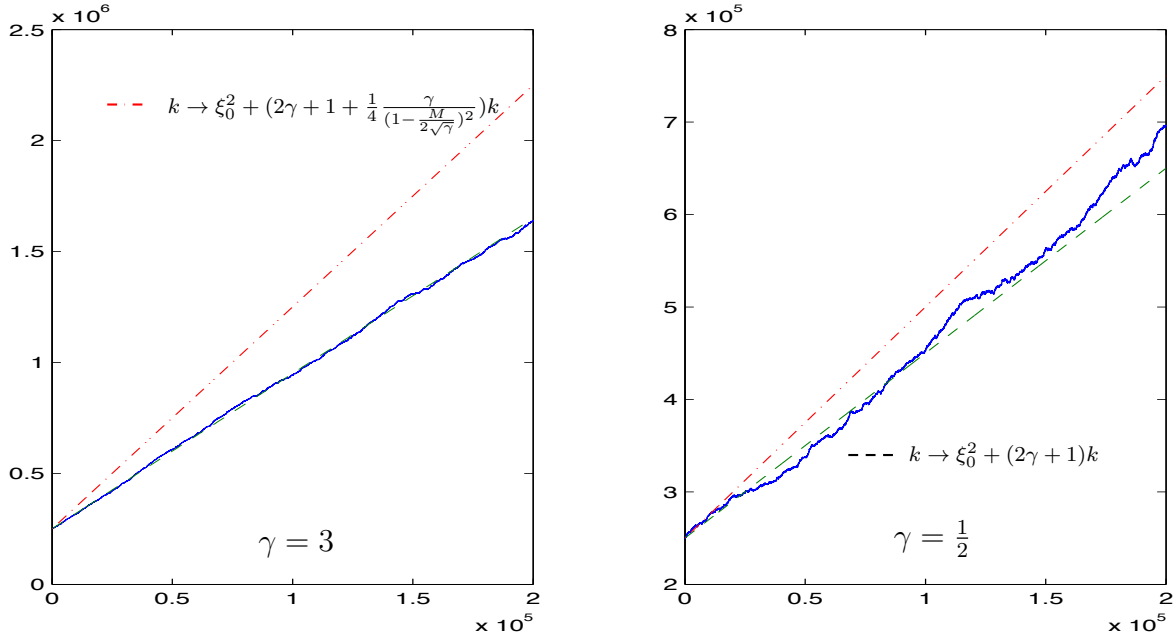


FIGURE 1.3: Illustration de (1.43) avec différentes valeurs de γ . Moyenne de 500 simulations de la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$.

et

$$\mathbb{E}(\xi_{n+1}^2) = \mathbb{E}(\xi_n^2) + (2\gamma + 1) + \gamma^2 \mathbb{E}(\xi_n^{-2}).$$

Il suit que pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{E}(\xi_n)$ vérifie l'inégalité suivante,

$$\xi_0^2 + (2\gamma + 1)n \leq \mathbb{E}(\xi_n^2) \leq \xi_0^2 + \left(2\gamma + 1 + \frac{1}{4} \frac{\gamma}{(1 - \frac{\gamma}{2\sqrt{\gamma}})^2}\right) n. \quad (1.43)$$

Dans ce simple cas, $\mathbb{E}(\xi_n^2)$ se comporte comme n . La Figure 1.3 représente le contrôle (1.43) du moment d'ordre 2 pour une trajectoire moyennisée de $(\xi_n)_n$ et pour deux valeurs de γ . Bien sûr cette information sur le comportement du moment d'ordre 2 de $(\xi_n)_n$ n'implique pas les affirmations du Théorème 1.4.2. De même, n'ayant pas le contrôle des trajectoires de $(\xi_n)_n$ sur un ensemble de faible probabilité, le Théorème 1.4.2 ne permet pas de conclure quant au comportement des moments de $(\xi_n)_n$.

Une remarque importante est que l'Hypothèse 1.4.1 ne donne aucune information sur le comportement de la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ lorsque $\xi < \xi_-$. Une telle information est en général inconnue dans les applications liées aux problèmes physiques sous-jacents. Il est intéressant de voir quels résultats peuvent être obtenus sans cette information et sans émettre d'hypothèses sur le comportement de $F(\cdot, \omega)$ sur $[0, \xi_-]$. Néanmoins, espérer obtenir des résultats généraux et valides pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ sans plus d'information est irréaliste. En effet, si γ est trop petit, les trajectoires de la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ vont atteindre l'intervalle $]0, \xi_-]$ avec probabilité 1 (la chaîne est alors récurrente), et le comportement asymptotique de la chaîne de Markov va dépendre du comportement de F dans cet intervalle. Prenons par exemple $\gamma = 0$ et $F(\xi, \omega) = \xi + \omega$, pour tout $\xi \geq \xi_-$. La chaîne (1.40) représente alors une marche aléatoire ordinaire sur $[\xi_-, +\infty[$ qui est récurrente, c'est-à-dire

qu'avec probabilité 1 la chaîne de Markov va passer sous ξ_- . Si de plus on impose $F \equiv 0$ pour tout $\xi < \xi_-$ il est facile de vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\xi_n) = 0$. En effet, en notant τ_ξ le premier temps d'atteinte de l'intervalle $[0, \xi_-]$:

$$\tau_\xi := \inf\{n \geq 0; \xi_n < \xi_-\},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espérance de ξ_n s'écrit

$$\mathbb{E}(\xi_n) = \mathbb{E}(\xi_n | n \leq \tau_\xi) (1 - \mathbb{P}(\tau_\xi < n)) + \mathbb{E}(\xi_n | n > \tau_\xi) \mathbb{P}(\tau_\xi < n).$$

Or la chaîne $(\xi_n)_n$ est une martingale et est donc d'espérance constante, alors $\mathbb{E}(\xi_n | n \leq \tau_\xi) = \xi_0$ et

$$\mathbb{E}(\xi_n) = \xi_0 (1 - \mathbb{P}(\tau_\xi < n)).$$

Cette chaîne étant récurrente, elle atteint τ_ξ en temps fini, et

$$\mathbb{P}(\tau_\xi < +\infty) = 1,$$

de plus comme $\{\tau_\xi < +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_\xi < n\}$. Donc par le théorème de convergence monotone, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\xi_n) = 0.$$

En somme, si γ est trop petit, la chaîne devient récurrente et sa trajectoire croise avec probabilité 1 l'intervalle $[0, \xi_-]$. Une condition de « non-emprisonnement » des trajectoires dans cet l'intervalle est alors nécessaire afin d'assurer que le comportement asymptotique de la chaîne $(\xi_n)_n$ reste de la forme $n^{1/2}$. Au contraire, lorsque nous nous plaçons dans le cas transient, pourvu que ξ_0 soit assez grand, il existe un ensemble de grande probabilité sur lequel les trajectoires de $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'atteignent pas $[0, \xi_-]$ et, peu importe ce qu'il peut se passer dans cet intervalle, le comportement en $n^{1/2}$ de la chaîne est assuré.

Comme nous l'avions annoncé, le Théorème 1.2.2 peut maintenant être montré seulement à partir du Théorème 1.4.2. La condition $d > 5$ est alors équivalente à $\gamma > 1/2$ (voir (1.35)).

Démonstration du Théorème 1.2.2 : Le Théorème 1.4.2 s'applique à la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ définie par (1.36). En se rappelant que $\xi_n = \|v_n\|_d^3 / 3D$ et $d = 6\gamma + 2$, on obtient que, sous la condition $d > 5$,

$$\lim_{\|v_0\|_d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left[(3D)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\|v_0\|_d^3}{3D} + n^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1-\nu}{3}} \leq \|v_n\|_d \leq (3D)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\|v_0\|_d^3}{3D} + n^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1+\nu}{3}} \right] = 1. \quad (1.44)$$

En se restreignant à l'ensemble

$$\left\{ \omega : (3D)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\|v_0\|_d^3}{3D} + n^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1-\nu}{3}} \leq \|v_n\|_d \leq (3D)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\|v_0\|_d^3}{3D} + n^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1+\nu}{3}} \right\},$$

les deux bornes suivantes sur $\|v_n\|_d$ sont obtenues :

$$(3D)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1-\nu}{6}} \leq \|v_n\|_d \leq (3D)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\|v_0\|_d^3}{3D} + 1 \right)^{\frac{1+\nu}{3}} n^{\frac{1+\nu}{6}}. \quad (1.45)$$

De plus, d'après (1.10), $t_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $t_n = \ell \sum_{j=1}^n \|v_j\|^{-1}$, ce qui combiné à (1.45) donne, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} t_n &\leq \ell (3D)^{-\frac{1}{3}} \sum_{j=1}^n j^{-\frac{1-\nu}{6}} \\ &\leq \ell (3D)^{-\frac{1}{3}} \left(1 + \int_1^n s^{-\frac{1-\nu}{6}} ds \right) \\ &\leq \ell (3D)^{-\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{6}{5+\nu} \right) n^{\frac{5+\nu}{6}}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Soit

$$C_1(\nu, v_0) = (3D)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\|v_0\|_d^3}{3D} + 1 \right)^{\frac{1+\nu}{3}},$$

alors, toujours par (1.10) et (1.45), pour tout $n \geq 1$, t_n peut se minorer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} t_n &\geq \ell C_1(\nu, v_0)^{-1} \sum_{j=1}^n j^{-\frac{1+\nu}{6}} \\ &\geq \ell C_1(\nu, v_0)^{-1} \int_1^{n+1} s^{-\frac{1+\nu}{6}} ds \\ &\geq \ell C_1(\nu, v_0)^{-1} \frac{6}{5-\nu} \left((n+1)^{\frac{5-\nu}{6}} - 1 \right) \\ &\geq \ell C_1(\nu, v_0)^{-1} \frac{6}{5-\nu} \left(1 - 2^{-\frac{5-\nu}{6}} \right) (n+1)^{\frac{5-\nu}{6}}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Les deux inégalités (1.46) et (1.47) nous permettent de contrôler n par t_n et t_{n-1} , ainsi, pour tout $n \geq 2$, on obtient

$$\left(\frac{(11+\nu)(3D)^{\frac{1}{3}}}{\ell(5+\nu)} \right)^{\frac{6}{5+\nu}} t_n^{\frac{6}{5+\nu}} \leq n \leq \left(\frac{(5-\nu)C_1(\nu, v_0)}{6\ell(1-2^{-\frac{5-\nu}{6}})} \right)^{\frac{6}{5-\nu}} t_{n-1}^{\frac{6}{5-\nu}}. \quad (1.48)$$

En revenant à (1.45) et en utilisant la dernière estimation (1.48), on montre que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $\nu > 0$,

$$c_2(\nu) t_n^{\frac{1-\nu}{5+\nu}} \leq \|\dot{q}(t_n)\|_d \leq C_2(\nu, v_0) t_{n-1}^{\frac{1+\nu}{5-\nu}}, \quad (1.49)$$

où

$$c_2(\nu) = (3D)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{(11+\nu)(3D)^{\frac{1}{3}}}{(5+\nu)\ell} \right)^{\frac{1-\nu}{5+\nu}}$$

et

$$C_2(\nu, v_0) = C_1(\nu, v_0) \left(\frac{(5-\nu)C_1(\nu, v_0)}{6\ell(1-2^{-\frac{5-\nu}{6}})} \right)^{\frac{1+\nu}{5-\nu}}.$$

Pour interpoler à tout $t > 1/\|v_0\|_d$, on utilise le fait que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $t \in]t_{n-1}, t_n]$ par (1.11), $\dot{q}(t) = \dot{q}(t_n)$. Cela nous permet d'interpoler (1.49) à tout $t > t_1 = \ell/\|v_1\|_d$ et d'obtenir

$$c_2(\nu) t^{\frac{1-\nu}{5+\nu}} \leq \|\dot{q}(t)\|_d \leq C_2(\nu, v_0) t^{\frac{1+\nu}{5-\nu}}, \quad \forall t > \frac{\ell}{\|v_1\|_d}. \quad (1.50)$$

L'extension de (1.50) à tout $t > 1/\|v_0\|_d$ se fait de manière similaire. Pour tout $t \in]\|v_0\|_d^{-1}, \ell/\|v_1\|_d^{-1}]$, $\dot{q}(t) = v_1$ et en appliquant (1.45) avec $n = 1$, on obtient,

$$\begin{aligned} \|\dot{q}(t)\|_d &\leq C_1(\nu, v_0) \\ &\leq C_1(\nu, v_0) \|v_0\|_d^{\frac{1+\nu}{5-\nu}} t^{\frac{1+\nu}{5-\nu}}, \quad t \in]\|v_0\|_d^{-1}, \ell/\|v_1\|_d^{-1}]. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Enfin, toujours par (1.45) puis en remarquant que $\ell/\|v_1\|_d \ll 1$, on obtient que

$$\|\dot{q}(t)\|_d \geq (3D)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1-\nu}{5+\nu}}. \quad (1.52)$$

En combinant (1.50)-(1.51) avec (1.44), on obtient pour tout $\nu > 0$,

$$\lim_{\|v_0\|_d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\forall t > \frac{1}{\|v_0\|_d}, c_3(\nu) t^{\frac{1-\nu}{5+\nu}} \leq \|\dot{q}(t)\|_d \leq C_3(\nu, v_0) t^{\frac{1+\nu}{5-\nu}} \right) = 1, \quad (1.53)$$

avec

$$c_3(\nu) = \min\{(3D)^{\frac{1}{3}}, c_2(\nu)\}, \quad C_3(\nu, v_0) = \max\{C_1(\nu, v_0) \|v_0\|_d^{\frac{1+\nu}{5-\nu}}, C_2(\nu, v_0)\}.$$

Enfin, soit $\tilde{\nu} = \frac{6\nu}{5(5-\nu)}$, alors (1.53) devient, pour tout $\tilde{\nu} > 0$,

$$\lim_{\|v_0\|_d \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\forall t > \frac{1}{\|v_0\|_d}, c(\tilde{\nu}) t^{\frac{1}{5}-\tilde{\nu}} \leq \|\dot{q}(t)\|_d \leq C(\tilde{\nu}, v_0) t^{\frac{1}{5}+\tilde{\nu}} \right) = 1,$$

où $c(\tilde{\nu})$ et $C(\tilde{\nu}, v_0)$ sont tels que

$$c(\tilde{\nu}) = c_3(\nu) \text{ et } C(\tilde{\nu}, v_0) = C_3(\nu, v_0). \quad \square$$

1.5 Un lien avec les processus de Bessel discrets

Remarquons que la chaîne de Markov

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_n + \omega_n + \frac{\gamma}{\xi_n}, \\ \xi_0 > 0, \end{cases}$$

qui est une version tronquée de (1.40), peut être vue comme une version discrétisée de l'équation différentielle stochastique satisfaite par le processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$:

$$\begin{cases} dR(t) = dB(t) + \frac{\gamma}{R(t)} dt, \\ R(0) > 0 \end{cases}$$

où $(B(t))_t$ est un mouvement brownien standard et $\gamma > -1/2$.

Cette remarque est au cœur de la démonstration du Théorème 1.4.2. En effet on montrera dans le chapitre 2 que la chaîne de Markov $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correctement changée d'échelle, converge en distribution vers un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$ lorsque $\gamma > 1/2$ (Théorème 2.1.1). Ce résultat de convergence sera utilisé dans le chapitre 3, dans lequel la démonstration du Théorème 1.4.2 est faite en détail. Le Théorème 2.1.1 nous permettra de relier la chaîne $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (1.40) au processus de Bessel limite via le Théorème Portmanteau.

Différentes versions de processus de Bessel discrets ont été étudiées dans la littérature. En général, et c'est le cas dans [4, 18, 34], ceux-ci sont vus comme des marches aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur les plus proches voisins à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $X_0 = 0$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} p_i = \mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 \mid X_n = i) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{i} + o(i^{-1}) \right), \\ q_i = \mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = i) = 1 - p_i, \\ p_0 = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 1. \end{cases} \quad (1.54)$$

Le caractère récurrent ou transient de ces marches aléatoires (tout comme celui des chaînes décrites par (1.40)) dépend du paramètre γ . Intuitivement, lorsque γ est petit, le comportement de $(X_n)_n$ se rapproche de celui d'une marche aléatoire symétrique à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui est connue pour être récurrente (voir [44]). Il est montré dans [17, 29] que ces marches aléatoires sont transientes si $\gamma > 1/2$ et récurrentes si $\gamma \leq 1/2$. Or, un processus de Bessel de dimension d est transient lorsque $d > 2$ et récurrent lorsque $d \leq 2$, ce qui correspond à la valeur $1/2$ de γ .

Cette relation entre les marches aléatoires $(X_n)_n$ et les processus de Bessel est développée dans [18] par un principe d'invariance forte. L'auteur montre ce principe d'invariance dans le cas transient ($\gamma > 1/2$) et :

Théorème 1.5.1 ([18]). *Sur un espace probabilisé adapté, on peut construire un processus de Bessel $(R(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ de dimension $2\gamma + 1$ et une marche aléatoire sur les plus proches voisins $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec probabilité de transition (1.54) tels que pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \rightarrow +\infty$*

$$R(n) - X_n = O(n^{1/4+\varepsilon}), \text{ presque sûrement.}$$

Un autre résultat reliant les marches aléatoires $(X_n)_n$ dont les fonctions de transition sont décrites par (1.54) à un processus de Bessel est énoncé dans [34]. L'auteur montre, toujours dans le cas où $\gamma > 1/2$, que la distribution de la suite $(X_{\lfloor nt \rfloor} / \sqrt{n})_{n \rightarrow +\infty}$ converge vers celle d'un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ce résultat diffère cependant du Théorème 2.1.1 dans le sens où nous montrons la convergence de la distribution des chaînes de Markov (ξ_n) décrites par (1.40) qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et pas seulement $\mathbb{N}$ et surtout, qui sont décrites explicitement seulement à partir d'une valeur critique ξ_+ et non pas sur $\mathbb{R}_+$.

Lorsque $\gamma < 1/2$, les marches aléatoires de noyau de transition (1.54) sont récurrentes et il est alors plus difficile d'obtenir des résultats sur leur comportement. Néanmoins, dans [4], les auteurs montrent que le premier temps de retour en 0

lorsque $X_0 = 0$ vérifie la relation suivante,

$$\mathbb{P}(\tau_0 = n | X_0 = 0) \sim n^{\gamma - \frac{3}{2}} \varphi(n)$$

où φ est une fonction entièrement déterminée par le terme $o(n^{-1})$. En particulier, il approxime la queue de la distribution de $\tau_0 = \inf\{n > 0, X_n = 0\}$.

Chapitre 2

Résultats de convergence sous changements d'échelle

Le but de ce chapitre est de montrer que, sous un changement d'échelle approprié, la chaîne de Markov $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ représentant la vitesse de la particule à chaque sortie d'un diffuseur ainsi que la chaîne $(\|v_n\|_d^3/3D)_{n \in \mathbb{N}}$ toutes deux introduites dans le chapitre 1 convergent chacune vers un processus diffusif.

*"If... she.. weighs the same as a duck, she's made of wood.
And therefore ?
A witch !"*

The Monthly Python and the Holy Grail.

2.1 Convergence vers un processus de Bessel

Dans cette section, nous établissons le Théorème 2.1.1 : résultat de convergence en distribution vers un processus de Bessel de la chaîne de Markov définie dans le chapitre précédent par (1.40) lorsque celle-ci est changée d'échelle en temps et en espace. Ce résultat sera utilisé dans le chapitre suivant comme outil dans la démonstration du Théorème 1.4.2.

2.1.1 Changement d'échelle

Rappelons tout d'abord la définition de la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$, ainsi que les hypothèses que cette dernière vérifie. Soit la classe de chaînes de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ de la forme $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies dans le chapitre 1 :

$$\begin{cases} \xi_{n+1} &= F(\xi_n, \omega_n) \\ \xi_0 &> \xi_+, \end{cases}$$

avec $(\omega_n)_n$ une famille de variables aléatoires indépendantes bornées, centrées et de variance égale à 1,

$$\mathbb{E}(\omega_n) = 0, \quad \mathbb{E}(\omega_n^2) = 1, \quad \exists \bar{\omega} > 1, |\omega_n| < \bar{\omega},$$

et vérifiant l'Hypothèse 1.4.1 que l'on rappelle ici.

Hypothèse 1.4.1 *Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et $0 < \xi_- < \xi_+$ et deux paramètres $\alpha > 0, \beta > 1$, tels que F est continue sur $[\xi_-, +\infty) \times [-\bar{\omega}, \bar{\omega}]$ et, pour tout $\xi > \xi_+$,*

$$F(\xi, \omega) = \xi + \omega + \frac{\gamma}{\xi} + F_0(\xi, \omega) + F_1(\xi, \omega), \quad (1.38)$$

et où les fonctions F_0 et F_1 sont telles que, pour ξ grand,

$$\sup_{\omega} |F_0(\xi, \omega)| = O(\xi^{-\alpha}) \quad \text{et} \quad \sup_{\omega} |F_1(\xi, \omega)| = O(\xi^{-\beta}). \quad (1.39)$$

De plus, $\mathbb{E}(F_0(\xi, \cdot)) = 0$.

Afin de changer ce processus d'échelle, nous introduisons le paramètre $\varepsilon = \xi_0^{-1}$. Le changement d'échelle temporelle est le suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $t_n = n\varepsilon^2$; la famille de processus continus $(R^\varepsilon(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et indexée par $\varepsilon > 0$ est construite de la manière suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R^\varepsilon(t_n) = \varepsilon \xi_n.$$

La continuité est obtenue par interpolation linéaire, pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}[$,

$$R^\varepsilon(t) = \frac{t_{n+1} - t}{\varepsilon^2} R^\varepsilon(t_n) + \frac{t - t_n}{\varepsilon^2} R^\varepsilon(t_{n+1}). \quad (2.1)$$

La valeur initiale $R^\varepsilon(0) = 1$, indépendamment de ε . Il suit alors de (1.38) que $R^\varepsilon(t_n)$ satisfait

$$R^\varepsilon(t_{n+1}) = F^\varepsilon(R^\varepsilon(t_n), \omega_n) \quad (2.2)$$

où, pour $x > R_+^\varepsilon = \varepsilon \xi_+$

$$F^\varepsilon(x, \omega) = x + \varepsilon \omega + \varepsilon^2 \frac{\gamma}{x} + \varepsilon^{\alpha+1} F_0^\varepsilon(x, \omega) + \varepsilon^{\beta+1} F_1^\varepsilon(x, \omega), \quad (2.3)$$

où F_0^ε et F_1^ε sont respectivement des perturbations des variables aléatoires ω et γ/ξ . De plus, elles sont telles que

$$\sup_{\omega \in \Omega} |F_0^\varepsilon(x, \omega)| = O(x^{-\alpha}) \quad \text{et} \quad \sup_{\omega \in \Omega} |F_1^\varepsilon(x, \omega)| = O(x^{-\beta}),$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ et, $\mathbb{E}(F_0^\varepsilon(x, \cdot)) = 0$. La famille de $(R^\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}_+)_{\varepsilon > 0}$ vérifie alors le résultat de convergence suivant.

Théorème 2.1.1. *Soit $T > 0$ et supposons que $\gamma > 1/2$. Alors la famille de processus stochastiques $(R^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{\varepsilon > 0}$ converge en distribution vers un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$ et de condition initiale 1. Autrement dit, la famille de processus stochastiques $(R^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{\varepsilon > 0}$ converge en distribution vers l'unique solution forte de l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{cases} dR(t) &= dB(t) + \frac{\gamma}{R(t)} dt \\ R(0) &= 1, \end{cases}$$

où B est un mouvement brownien uni-dimensionnel.

Les trois sous-sections qui suivent sont consacrées aux différentes étapes de la démonstration du Théorème 2.1.1. Le cheminement se découpe en 3 parties :

- une première étape consiste à introduire des temps d'arrêt τ^ε afin de maintenir les trajectoires des processus $(R^\varepsilon(t))_{t \in [0, T]}$ dans un compact et de montrer que cette famille arrêtée est précompacte ;
- la précompacité de la famille de processus discret $(R^\varepsilon(t \wedge \tau^\varepsilon), 0 \leq n\varepsilon^4 \leq T)_{\varepsilon > 0}$ obtenue dans la première étape nous permet d'extraire des sous-familles convergentes. Nous montrerons que les limites de ces sous-familles convergentes sont solutions du problème aux martingales associé à un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$. Ce problème aux martingales admettant une unique solution, nous concluons que les processus limites sont tous égaux en loi et, en particulier, ont la même loi qu'un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$. Nous serons alors en mesure d'étendre la convergence en distribution à la famille de processus $(R^\varepsilon(t), 0 \leq t \leq 2T)_{\varepsilon > 0}$ entière ;
- avant de conclure, il sera nécessaire de supprimer les temps d'arrêt introduits. C'est le but de la dernière étape.

Ici, t_n est égal à $n\xi_0^{-2} = n\|v_0\|^{-4}$ et n'a pas de lien avec les temps d'entrée dans un diffuseur introduits dans chapitre 1.

2.1.2 Cut off et précompacité

Soient $\eta > 1$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, le temps d'arrêt τ^ε défini pour le processus $(R^\varepsilon(t))_{t \in [0, 2T]}$ par :

$$\tau^\varepsilon := \inf\{t \in [0, 2T], R^\varepsilon(t) \notin [\eta^{-1}, \eta]\}, \quad (2.4)$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = 2T$. Ainsi, on définit les processus continus $(X^\varepsilon(t))_{t \in [0, 2T]}$ tels que pour tout $t \in [0, 2T]$,

$$X^\varepsilon(t) = R^\varepsilon(t \wedge \tau^\varepsilon).$$

Les points $\eta^{\pm 1}$ sont adhésifs pour les processus $(X^\varepsilon(t))_{t \in [0, 2T]}$. On se restreint aux $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ où $\varepsilon_* < (\eta\xi_+)^{-1}$ de sorte que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$, le processus $(X^\varepsilon(t))_{t \in [0, 2T]}$ ne passe jamais sous la valeur critique $\varepsilon\xi_+$ en deçà de laquelle le comportement du processus n'est plus explicite. Pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$, on note Π^ε la fonction de transition du processus discret $(X^\varepsilon(t_n))_n$. Nous avons alors la propriété suivante.

Lemme 2.1.2. *i) Soit l'opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ défini par*

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}f''(x) + \frac{\gamma}{x}f'(x),$$

$$\mathcal{D}_* = \{f \in \mathcal{C}^\infty([\eta^{-1}, \eta]); \lim_{x \rightarrow \eta^{\pm 1}} \mathcal{L}f(x) = 0\}.$$

Alors, pour tout $f \in \mathcal{D}_$, et tout $x \in [\eta^{-1}, \eta]$*

$$\left| \mathcal{L}f(x) - \frac{1}{\varepsilon^2}(\Pi^\varepsilon - \text{I})f(x) \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.5)$$

ii) La famille $(X^\varepsilon(t), t \in [0, 2T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ est précompacte.

Démonstration. i) Considérons, pour tout $x \in [\eta^{-1}, \eta]$, les coefficients suivants :

$$a^\varepsilon(x) = \int_{] \eta^{-1}, \eta[} (y - x)^2 \Pi^\varepsilon(x, dy) \quad \text{et} \quad b^\varepsilon(x) = \int_{] \eta^{-1}, \eta[} (y - x) \Pi^\varepsilon(x, dy),$$

ainsi que l'opérateur

$$\mathcal{A}^\varepsilon f(x) = \frac{1}{2} a^\varepsilon(x) f''(x) + b^\varepsilon(x) f'(x).$$

Nous avons, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ et tout $x \in [\eta^{-1}, \eta]$,

$$\left| \mathcal{L}f(x) - \frac{1}{\varepsilon^2} (\Pi^\varepsilon - \text{I})f(x) \right| \leq \left| \mathcal{L}f(x) - \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A}^\varepsilon f(x) \right| + \left| \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A}^\varepsilon f(x) - \frac{1}{\varepsilon^2} (\Pi^\varepsilon - \text{I})f(x) \right|. \quad (2.6)$$

Remarquons que, dans le cas où $x \in] \eta^{-1}, \eta[$, les coefficients de $\mathcal{A}^\varepsilon$ s'écrivent

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(x) &= \mathbb{E} \left((F^\varepsilon(x, \omega) - x)^2 \mathbf{1}_{|F^\varepsilon(x, \omega)| \in] \eta^{-1}, \eta[} \right) \\ &= \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

et

$$\begin{aligned} b^\varepsilon(x) &= \mathbb{E} \left((F^\varepsilon(x, \omega) - x) \mathbf{1}_{|F^\varepsilon(x, \omega)| \in] \eta^{-1}, \eta[} \right) \\ &= \varepsilon^2 \frac{\gamma}{x} + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

De plus, si $x = \eta^{\pm 1}$ il est clair que $a^\varepsilon(\eta^{\pm 1}) = 0 = b^\varepsilon(\eta^{\pm 1})$, et ce, pour tout $\varepsilon > 0$. Cela implique que, en particulier, $\mathcal{A}^\varepsilon f(\eta^{\pm 1})/\varepsilon^2 = 0$. D'après la forme de l'opérateur $\mathcal{L}$ (voir (2.5)), pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, nous avons donc, pour tout $x \in [\eta^{-1}, \eta]$,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A}^\varepsilon f(x) \longmapsto \mathcal{L}f(x).$$

Contrôlons maintenant $|(\Pi^\varepsilon - \text{I})f(x) - \mathcal{A}^\varepsilon f(x)|/\varepsilon^2$. Pour tout $x \in] \eta^{-1}, \eta[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} |(\Pi^\varepsilon - \text{I})f(x) - \mathcal{A}^\varepsilon f(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{] \eta^{-1}, \eta[} |y - x|^3 \Pi^\varepsilon(x, dy) \\ &\quad + \frac{2}{\varepsilon^2} \|f\|_\infty (\Pi^\varepsilon(x, \eta^{-1}) + \Pi^\varepsilon(x, \eta)) \end{aligned}$$

Or, d'après (2.3)

$$\int_{] \eta^{-1}, \eta[} |y - x|^3 \Pi^\varepsilon(x, dy) = O(\varepsilon^3).$$

De plus, remarquons que pour tout $\delta > 0$, il existe un $\varepsilon_+ > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_+$ et pour tout $x \in [\eta^{-1}, \eta]$, on ait

$$\Pi^\varepsilon(x, \mathbb{R} \setminus]x - \delta, x + \delta]) = 0,$$

ce qui a pour conséquence que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in [\eta^{-1}, \eta]} \frac{1}{\varepsilon^2} \Pi^\varepsilon(x, \mathbb{R} \setminus]x - \delta, x + \delta[) = 0. \quad (2.9)$$

En utilisant (2.9), on obtient, pour tout $x \in]\eta^{-1}, \eta[$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} |(\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(x) - \mathcal{A}^\varepsilon f(x)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.10)$$

De plus, dans le cas $x = \eta^{\pm 1}$, il est clair que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} (\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(\eta^{\pm 1}) &= \int_{[\eta^{-1}, \eta]} (f(y) - f(\eta^{\pm 1})) \Pi^\varepsilon(\eta^{\pm 1}, dy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, et pour tout $x \in [\eta^{-1}, \eta]$,

$$\left| \mathcal{L}f(x) - \frac{1}{\varepsilon^2} (\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(x) \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.11)$$

ii) Afin de montrer que la famille $(X^\varepsilon(t), t \in [0, 2T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ est précompacte, on utilise le Théorème H.8. Tout d'abord, pour $x \in]\eta^{-1}, \eta[$ et pour tout $f \in \mathcal{D}_*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} |(\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(x)| &\leq \frac{\|f'\|_\infty}{\varepsilon^2} \left| \int_{y \in]\eta^{-1}, \eta[} (y - x) \Pi^\varepsilon(x, dy) \right| \\ &\quad + \frac{\|f''\|_\infty}{2\varepsilon^2} \int_{y \in]\eta^{-1}, \eta[} (y - x)^2 \Pi^\varepsilon(x, dy) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$+ 2 \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon^2} (\Pi^\varepsilon(x, \eta^{-1}) + \Pi^\varepsilon(x, \eta)). \quad (2.13)$$

En combinant (2.7), (2.8) et (2.9) avec (2.13), on obtient l'existence d'une constante $\tilde{C}_f$ dépendant uniquement de f et de ses deux premières dérivées et telle que, pour tout $x \in]\eta^{-1}, \eta[$ on ait

$$\frac{1}{\varepsilon^2} |(\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(x)| \leq \tilde{C}_f. \quad (2.14)$$

Dans le cas où $x = \eta^{\pm 1}$, nous avons vu dans la démonstration de i) de ce lemme que, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(x) = 0.$$

Ainsi, (2.14) s'étend à tout $x \in [\eta^{-1}, \eta]$ et il suit que pour tout $f \in \mathcal{D}_*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(f(X^\varepsilon(t_{n+1})) + \tilde{C}_f t_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^{X^\varepsilon} \right) &= f(X^\varepsilon(t_n)) + \tilde{C}_f t_n \\ &\quad + (\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(X^\varepsilon(t_n)) + \tilde{C}_f \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\geq f(X^\varepsilon(t_n)) + \tilde{C}_f t_n. \quad (2.16)$$

Le processus $\left(f(X^\varepsilon(t_n)) + \tilde{C}_f t_n \right)_n$ est donc une sous-martingale.

Pour finir, remarquons que chaque pas de la chaîne de Markov $(X^\varepsilon(t_n))_n$ a une taille de l'ordre de ε . D'où, pour tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{\varepsilon}$ tel que, pour tout $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, on a

$$\mathbb{P}(|X^\varepsilon(t_j) - X^\varepsilon(t_{j-1})| > \delta) = 0,$$

et,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{2T}{\varepsilon} \rfloor} \mathbb{P}(|X^\varepsilon(t_j) - X^\varepsilon(t_{j-1})| > \delta) = 0, \quad (2.17)$$

Ces deux dernières affirmations, combinée avec (2.16), impliquent la précompacité de la famille de processus $(X^\varepsilon(t), t \in [0, 2T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ d'après le Théorème H.8. $\square$

La précompacité de la famille de processus continus $(X^\varepsilon(t), t \in [0, 2T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ implique l'existence de suites décroissantes $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$ et telles que

$$(t \rightarrow X^{\varepsilon_k}(t), t \in [0, 2T])_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{CVD}} (t \rightarrow X^0(t), t \in [0, 2T]). \quad (2.18)$$

2.1.3 Convergence et limites

Introduisons les temps d'arrêt pour les processus limites :

$$\tau^0 := \inf \{t \in [0, 2T]; X^0(t) \notin (\eta^{-1}, \eta)\}$$

avec la convention $\inf \{\emptyset\} = 2T$. Comme la famille $(\tau^\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ est à valeurs dans le compact $[0, 2T]$, elle est aussi précompacte. Il existe alors des suites décroissantes $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs strictement positives, convergentes vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$ et telles que $(\tau^{\varepsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge en distribution vers une variable aléatoire τ^{lim} . Remarquons que cette dernière n'est pas forcément un temps d'arrêt pour la filtration associée au processus limite $(X^0(t))_t$.

Théorème 2.1.3. *Tout processus limite $(X^0(t \wedge \tau^0))_{t \in [0, 2T]}$ où X^0 est obtenu dans (2.18) est solution du problème aux martingales associé au générateur infinitésimal $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ où*

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}$$

et

$$\mathcal{D}_* := \left\{ f \in C^\infty([\eta^{-1}, \eta]); \lim_{x \rightarrow \eta^{\pm 1}} \mathcal{L}f = 0 \right\}.$$

C'est-à-dire que, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, le processus

$$\left(f(X^0(t \wedge \tau^0)) - \int_0^{t \wedge \tau^0} \mathcal{L}f(X^0(s)) ds \right)_{t \in [0, 2T]}$$

est une $\mathcal{F}_t^{X^0}$ -martingale.

Le générateur infinitésimal $(\mathcal{L}, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))$ est celui d'un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1 > 2$. Soit $(R(t))_{t \in [0, 2T]}$ un tel processus, vérifiant $R(0) = 1$, et définissons,

$$\tau := \inf \{t \in [0, 2T]; R(t) \notin (\eta^{-1}, \eta)\}, \quad (2.19)$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = 2T$. Alors le processus $(R(t \wedge \tau))_{t \in [0, 2T]}$ est généré par $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ (voir [41] et l'Annexe E). Les conditions sur les bords du générateur : $\lim_{x \rightarrow \eta^{\pm 1}} \mathcal{L}f(x) = 0$ impliquent que ce processus de Bessel reste constant une fois qu'il atteint les points $\eta^{\pm 1}$. Ces points $\eta^{\pm 1}$ sont alors définis comme étant « adhésifs » (voir [41]). Les problèmes aux martingales associés aux processus de Bessel de dimension strictement supérieure à 2 étant bien posés, le Théorème 2.1.3 implique que les processus limites $(X^0(t \wedge \tau^0))_{t \in [0, 2T]}$ obtenus dans (2.18), ont tous la même distribution, et celle-ci est celle de $(R(t \wedge \tau))_{t \in [0, 2T]}$. En particulier, τ et tout τ^0 sont aussi égaux en distribution.

Démonstration du Théorème 2.1.3. Soit une suite décroissante $\{\varepsilon_k\}_k$ strictement positive et telle que $(t \rightarrow X^{\varepsilon_k}(t), t \in [0, 2T])_k$ est convergente. Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty([\eta^{-1}, \eta])$

$$f(X^{\varepsilon_k}(t_n)) - \sum_{j=0}^{n-1} (\Pi^{\varepsilon_k} - \text{I}) f(X^{\varepsilon_k}(t_j))_n$$

est une $\mathcal{F}_n^{X^{\varepsilon_k}}$ -martingale. En particulier, c'est une $\mathcal{F}_n^{X^{\varepsilon_k}}$ -martingale pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, de plus, l'introduction du temps d'arrêt τ^0 ne change pas la propriété de martingale de ce processus. On conclut que, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$ le processus arrêté

$$\left(f(X^{\varepsilon_k}(\lfloor \frac{t_n \wedge \tau^0}{\varepsilon^2} \rfloor \varepsilon^2)) - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t_n \wedge \tau^0}{\varepsilon^2} \rfloor - 1} (\Pi^{\varepsilon_k} - \text{I}) f(X^{\varepsilon_k}(t_j)) \right)_n$$

est une $\mathcal{F}_n^{X^{\varepsilon_k}}$ -martingale

Le Théorème de représentation de Skorohod (Théorème H.3) implique l'existence d'un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ et de processus

$$(t \rightarrow \tilde{X}^{\varepsilon_k}(t), t \in [0, 2T])_{k \in \mathbb{N}}, \text{ et } (\tilde{X}^0(t))_{t \in [0, 2T]}$$

ayant, respectivement, les mêmes distributions que

$$(t \rightarrow X^{\varepsilon_k}(t), t \in [0, 2T])_{k \in \mathbb{N}}, \text{ et } (X^0(t))_{t \in [0, 2T]}.$$

$$\sup_{t \in [0, 2T]} |\tilde{X}^0(t) - \tilde{X}^{\varepsilon_k}(t)| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0, \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on notera $\tilde{\tau}^{\varepsilon_k}$ ainsi que $\tilde{\tau}^0$ les temps d'arrêt de même loi que τ^{ε_k} et τ^0 et respectivement définis par :

$$\tilde{\tau}^{\varepsilon_k} = \inf\{t \in [0, 2T], \tilde{X}^{\varepsilon_k}(t) \notin]\eta^{-1}, \eta[\}, \quad \text{et } \tilde{\tau}^0 = \inf\{t \in [0, 2T], \tilde{X}^0(t) \notin]\eta^{-1}, \eta[\},$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = 2T$. De plus, $\tilde{\tau}^{\varepsilon_k}$ converge presque-sûrement vers $\tilde{\tau}^{\text{lim}}$, et ce dernier est de même loi que τ^{lim} .

Lemme 2.1.4. *Les trois propriétés suivantes sur l'espace de Skorohod sont vérifiées.*

- i) *L'inégalité $\tilde{\tau}^0 \leq \tilde{\tau}^{\lim}$ est vraie presque-sûrement.*
- ii) *Pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, soient $0 \leq t_1 < t_2 \leq 2T$, alors,*

$$\begin{aligned} f\left(\tilde{X}^{\varepsilon_k}\left(\left\lfloor \frac{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \right\rfloor \varepsilon_k^2\right)\right) - f\left(\tilde{X}^{\varepsilon_k}\left(\left\lfloor \frac{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \right\rfloor \varepsilon_k^2\right)\right) \\ - \sum_{j=\left\lfloor \frac{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \right\rfloor}^{\left\lfloor \frac{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \right\rfloor - 1} (\Pi^{\varepsilon_k} - \mathbf{I})f\left(\tilde{X}^{\varepsilon_k}(t_j)\right) \end{aligned}$$

converge $\tilde{\mathbb{P}}$ presque-sûrement, quand $k \rightarrow +\infty$, vers

$$f\left(\tilde{X}^0(t_2 \wedge \tilde{\tau}^0)\right) - f\left(\tilde{X}^0(t_1 \wedge \tilde{\tau}^0)\right) - \int_{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}^{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0} \mathcal{L}f\left(\tilde{X}^0(s)\right) ds, \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

- iii) *Le processus limite $\left(\tilde{M}^0(t \wedge \tilde{\tau}^0)\right)_t$,*

$$\tilde{M}^0(t \wedge \tilde{\tau}^0) = f\left(\tilde{X}^0(t \wedge \tilde{\tau}^0)\right) - \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}^0} \mathcal{L}f\left(\tilde{X}^0(s)\right) ds$$

est une $\mathcal{F}_t^{\tilde{X}^0}$ -martingale.

En revenant dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, le Lemme 2.1.4 ci-dessus implique que, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, le processus

$$\left(f(X^0(t \wedge \tau^0) - \int_0^{t \wedge \tau^0} \mathcal{L}f(X^0(s))ds\right)_{t \in [0, 2T]}$$

est une $\mathcal{F}_t^{X^0}$ -martingale. Le Théorème 2.1.3 est alors obtenu. $\square$

Démonstration du Lemme 2.1.4. i) L'espace de Skorohod $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ est construit pour que pour presque tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, on ait :

$$\tilde{\tau}^{\varepsilon_k}(\tilde{\omega}) \mapsto_{k \rightarrow +\infty} \tilde{\tau}^{\lim}(\tilde{\omega}), \text{ et}$$

$$\left|\tilde{X}^0(\tilde{\tau}^{\varepsilon_k}, \tilde{\omega}) - \tilde{X}^{\varepsilon_k}(\tilde{\tau}^{\varepsilon_k}, \tilde{\omega})\right| \leq \sup_{t \in [0, 2T]} \left|\tilde{X}^0(t, \tilde{\omega}) - \tilde{X}^{\varepsilon_k}(t, \tilde{\omega})\right| \mapsto_{k \rightarrow +\infty} 0.$$

En se restreignant aux $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ pour lesquels la convergence a lieu, deux cas de figure se présentent :

- soit $\tilde{\tau}^{\lim}(\tilde{\omega}) = 2T$, et par définition $\tilde{\tau}^0(\tilde{\omega}) \leq \tilde{\tau}^{\lim}(\tilde{\omega})$;
- soit $\tilde{\tau}^{\lim}(\tilde{\omega}) < 2T$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq N$, $\tilde{\tau}^{\varepsilon_k}(\tilde{\omega}) < 2T$. Alors, pour tout $k \geq N$, $\tilde{X}^{\varepsilon_k}(\tilde{\tau}^{\varepsilon_k}, \tilde{\omega}) = \eta^{\pm 1}$, et

$$\left|\tilde{X}^0(\tilde{\tau}^{\varepsilon_k}, \tilde{\omega}) - \eta^{\pm 1}\right| \mapsto_{k \rightarrow +\infty} 0.$$

La trajectoire $\tilde{X}^0(\cdot, \tilde{\omega})$ étant continue, on obtient finalement,

$$\tilde{X}^0(\tilde{\tau}^{\text{lim}}, \tilde{\omega}) = \eta^{\pm 1}, \quad \text{d'où} \quad \tilde{\tau}^0(\tilde{\omega}) \leq \tilde{\tau}^{\text{lim}}(\tilde{\omega}).$$

L'affirmation i) est alors montrée.

ii) Les processus limites $\tilde{X}^0$ sont continus en temps car limite presque-sûre des processus $\tilde{X}^{\varepsilon_k}$ qui sont continus en temps. Alors, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$

$$\begin{aligned} \left| f\left(\tilde{X}^0(t \wedge \tilde{\tau}^0)\right) - f\left(\tilde{X}^{\varepsilon_k}\left(\left\lfloor \frac{t \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \right\rfloor \varepsilon_k^2\right)\right) \right| &\leq \|f'\|_\infty \left(\left| \tilde{X}^0(t \wedge \tilde{\tau}^0) - \tilde{X}^0\left(\left\lfloor \frac{t \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \right\rfloor \varepsilon_k^2\right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \tilde{X}^0\left(\left\lfloor \frac{t \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \right\rfloor \varepsilon_k^2\right) - \tilde{X}^{\varepsilon_k}\left(\left\lfloor \frac{t \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \right\rfloor \varepsilon_k^2\right) \right| \right) \\ &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \tilde{\mathbb{P}} - \text{p.s.} \end{aligned}$$

Nous devons maintenant contrôler $\int_{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}^{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0} \mathcal{L}f\left(\tilde{X}^0(s)\right) ds - \sum_{j=\lfloor \frac{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor - 1} (\Pi^{\varepsilon_k} - \text{I})f\left(\tilde{X}^{\varepsilon_k}(t_j)\right)$ pour tout $f \in \mathcal{D}_*$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}^{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0} \mathcal{L}f\left(\tilde{X}^0(s)\right) ds - \sum_{j=\lfloor \frac{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor - 1} (\Pi^{\varepsilon_k} - \text{I})f\left(\tilde{X}^{\varepsilon_k}(t_j)\right) \right| \\ \leq \left| \int_{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}^{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0} \mathcal{L}f\left(\tilde{X}^0(s)\right) ds - \varepsilon_k^2 \sum_{j=\lfloor \frac{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor - 1} \mathcal{L}f\left(\tilde{X}^0(t_j)\right) \right| \\ + \varepsilon_k^2 \left| \sum_{j=\lfloor \frac{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor - 1} \mathcal{L}f\left(\tilde{X}^0(t_j)\right) - \sum_{j=\lfloor \frac{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor - 1} \mathcal{L}f\left(\tilde{X}^{\varepsilon_k}(t_j)\right) \right| \\ + \varepsilon_k^2 \left| \sum_{j=\lfloor \frac{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor - 1} \mathcal{L}f\left(\tilde{X}^{\varepsilon_k}(t_j)\right) - \frac{1}{\varepsilon_k^2} \sum_{j=\lfloor \frac{t_1 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{t_2 \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon_k^2} \rfloor - 1} (\Pi^{\varepsilon_k} - \text{I})f\left(\tilde{X}^{\varepsilon_k}(t_j)\right) \right|. \end{aligned}$$

Le premier terme est une approximation de l'intégrale par la méthode des rectangles et tend par conséquent vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$. La convergence presque sûre de $\tilde{X}^{\varepsilon_k}$ vers $\tilde{X}^0$ implique que le second terme tend lui aussi vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$. Le Lemme 2.1.2 entraîne que le troisième terme tend aussi vers 0.

iii) D'après la Proposition A.10, on veut montrer que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty([\eta^{-1}, \eta]^d \times \mathbb{R})$; $d \in \mathbb{N}$ et tous $0 = s_1 < s_2 < \dots < s_d = t_1$, l'espérance du produit

$$\left(\tilde{M}^0(t_2 \wedge \tilde{\tau}^0) - \tilde{M}^0(t_1 \wedge \tilde{\tau}^0) \right) \phi\left(\tilde{X}^0(s_1), \dots, \tilde{X}^0(s_d), \mathbf{1}_{\tilde{\tau}^0 \geq t_1}\right) \quad (2.20)$$

est nulle. Premièrement, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ et tout $f \in \mathcal{D}_*$, on considère le processus $\tilde{S}^\varepsilon(t \wedge \tilde{\tau}^0)$ défini par :

$$\tilde{S}^\varepsilon(t \wedge \tilde{\tau}^0) = f\left(\tilde{X}^\varepsilon(\lfloor \frac{t \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon^2} \rfloor \varepsilon^2)\right) - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t \wedge \tilde{\tau}^0}{\varepsilon^2} \rfloor - 1} (\Pi^{\varepsilon_k} - \text{I})f(\tilde{X}^\varepsilon(t_j)).$$

La Proposition A.10 et la propriété de martingale des processus $S^{\varepsilon_k}(\cdot \wedge \tau^0)$ nous permettent d'affirmer que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty([\eta^{-1}, \eta]^d \times \mathbb{R}_+)$; $d \in \mathbb{N}$ et tout $0 = s_1 < \dots < s_d = t_1$,

$$\mathbb{E} \left[\left(\tilde{S}^{\varepsilon_k}(t_2 \wedge \tilde{\tau}^0) - \tilde{S}^{\varepsilon_k}(t_1 \wedge \tilde{\tau}^0) \right) \phi \left(\tilde{X}^{\varepsilon_k}(s_1), \dots, \tilde{X}^{\varepsilon_k}(s_d), \mathbf{1}_{\tilde{\tau}^0 \geq t_1} \right) \right] = 0. \quad (2.21)$$

En utilisant la convergence presque-sûre de $\tilde{S}^{\varepsilon_k}$ vers $\tilde{M}^0$, de $\tilde{X}^{\varepsilon_k}$ vers $\tilde{X}^0$, on conclut que,

$$\mathbb{E} \left[\left(\tilde{M}^0(t_2 \wedge \tilde{\tau}^0) - \tilde{M}^0(t_1 \wedge \tilde{\tau}^0) \right) \phi \left(\tilde{X}^0(s_1), \dots, \tilde{X}^0(s_d), \mathbf{1}_{\tilde{\tau}^0 \geq t_1} \right) \right] = 0. \quad \square$$

D'après le Théorème 2.1.3, les processus limites $X^0(\cdot \wedge \tau^0)$ ont une unique distribution qui est celle du processus de Bessel $R(\cdot \wedge \tau)$ lorsque $\gamma > 1/2$. Par conséquent, les deux temps d'arrêt $\tau := \inf\{t \in [0, T]; R(t) \notin [\eta^{-1}, \eta]\}$ et τ^0 ont la même distribution. Nous désignerons par τ ces deux temps d'arrêt. Comme nous allons le voir dans le corollaire suivante, l'unicité des limites permet d'étendre la convergence en distribution à la famille $(X^\varepsilon(t \wedge \tau), t \in [0, 2T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ entière.

Corollaire 2.1.5. *Supposons $\gamma > 1/2$. Alors, la famille $(X^\varepsilon(t \wedge \tau), t \in [0, 2T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ converge en distribution vers le processus de Bessel $(R(t \wedge \tau))_{t \in [0, 2T]}$, où R et τ sont explicités précédemment.*

Démonstration. D'après la Définition H.2 de la convergence en distribution, il suffit de montrer que pour toute fonction $\phi : \mathcal{C}([0, 2T] : [\eta^{-1}, \eta]) \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}(\phi(X^\varepsilon(\cdot \wedge \tau))) = \mathbb{E}(\phi(R(\cdot \wedge \tau))). \quad (2.22)$$

Supposons par l'absurde qu'il existe une telle fonction ϕ pour laquelle (2.22) soit fausse. Il existerait alors une suite strictement décroissante $\{\varepsilon_k\}_k$ convergeant vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon_k < \varepsilon_*$ on ait

$$|\mathbb{E}(\phi(X^{\varepsilon_k}(\cdot \wedge \tau))) - \mathbb{E}(\phi(R(\cdot \wedge \tau)))| > \delta. \quad (2.23)$$

Le même raisonnement que celui fait dans l'étape 1 permet de montrer que la famille $(X^{\varepsilon_k}(t \wedge \tau), t \in [0, 2T])_{0 < \varepsilon_k < \varepsilon_*}$ est précompacte : il existe une fonction $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ croissante telle que $(X^{\varepsilon_{\psi(k)}}(t \wedge \tau), t \in [0, 2T])_{0 < \varepsilon_k < \varepsilon_*}$ converge en distribution vers le processus de Bessel $(R(t \wedge \tau))_{t \in [0, 2T]}$ d'après le raisonnement fait au début de cette étape, et on aurait

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\phi(X^{\varepsilon_{\psi(k)}}(\cdot \wedge \tau))) = \mathbb{E}(\phi(R(\cdot \wedge \tau))),$$

ce qui est contradictoire avec (2.23). □

2.1.4 Suppression des temps d'arrêts

Les étapes précédentes montrent que la famille de processus doublement arrêté $(R^\varepsilon(t \wedge \tau^\varepsilon \wedge \tau), t \in [0, 2T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$, avec R^ε défini par (2.1), converge en distribution vers $(R(t \wedge \tau))_{t \in [0, 2T]}$. Ici R est un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$, tel que $R(0) = 1$ et τ est son temps d'arrêt en $\eta^{\pm 1}$. On rappelle que les temps d'arrêt τ et τ^ε sont définis pour les processus $(R(t))_{t \in [0, 2T]}$ et $(R^\varepsilon(t))_{t \in [0, 2T]}$ respectivement par :

$$\tau^\varepsilon := \inf \{t \in [0, 2T], R^\varepsilon(t) \notin \eta^{-1}, \eta]\} \quad \text{et} \quad \tau := \inf \{t \in [0, 2T], R(t) \notin \eta^{-1}, \eta]\},$$

avec la convention $\inf \{\emptyset\} = 2T$.

Afin de conclure quant à la convergence en distribution de $(R^\varepsilon(t); t \in [0, T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ vers le processus de Bessel $(R(t))_{t \in [0, T]}$, il faut supprimer les temps d'arrêt introduits dans les étapes précédentes, en faisant tendre η vers $+\infty$. La transience du processus R lorsque $2\gamma + 1 > 2$ (i.e. $\gamma > 1/2$) est ici cruciale.

Démonstration du Théorème 2.1.1. D'après la Proposition G.6, lorsque $\gamma > 1/2$ le processus de Bessel R est transient, ainsi il ne peut ni atteindre 0 ni exploser en temps fini. On a alors

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\tau = 2T) = 1.$$

La famille $(\tau^\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ étant à valeurs dans le compact $[0, 2T]$, il existe des suites strictement décroissantes $\{\varepsilon_k > 0\}_k$ convergeant vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$ et telles que les familles extraites $(\tau^{\varepsilon_k})_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ convergent en distribution. Le Lemme 2.1.4 nous assure alors que

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\tau^{\text{lim}} = 2T) = 1. \quad (2.24)$$

Comme $\tau^{\text{lim}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau^{\varepsilon_k}$, on déduit de (2.24) que, pour tout $p > 0$, il existe $\eta_p \ll 1$ et $K_p \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $\eta > \eta_p$ et tout $k \geq K_p$, on a

$$\mathbb{P}(\tau^{\varepsilon_k} \geq T) \geq 1 - p. \quad (2.25)$$

Soit $\phi : \mathcal{C}([0, T] : [\eta^{-1}, \eta]) \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, alors

$$\phi(X^{\varepsilon_k}(\cdot \wedge \tau)) \mathbb{1}_{\tau \wedge \tau^{\varepsilon_k} \geq 1} = \phi(R^{\varepsilon_k}(\cdot \wedge \tau)) \mathbb{1}_{\tau \wedge \tau^{\varepsilon_k} \geq 1}.$$

Pour tout $p > 0$, tous $k \geq K_p$ et $\eta > \eta_p$, l'espérance de $\phi(R^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \phi(R(\cdot))$ se majore comme suit

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(\phi(R^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \phi(R(\cdot)))| \\ & \leq \mathbb{E}(|\phi(R^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \phi(R(\cdot))| \mathbb{1}_{\tau \wedge \tau^{\varepsilon_k} < 1}) + \mathbb{E}(|\phi(R^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \phi(R(\cdot))| \mathbb{1}_{\tau \wedge \tau^{\varepsilon_k} \geq 1}) \\ & \leq 2\|\phi\|_\infty \mathbb{P}(\tau \wedge \tau^{\varepsilon_k} < 1) + \mathbb{E}(|\phi(X^{\varepsilon_k}(\cdot \wedge \tau)) - \phi(R(\cdot \wedge \tau))| \mathbb{1}_{\tau \wedge \tau^{\varepsilon_k} \geq 1}) \\ & \leq 2\|\phi\|_\infty p + \mathbb{E}(|\phi(X^{\varepsilon_k}(\cdot \wedge \tau)) - \phi(R(\cdot \wedge \tau))|). \end{aligned}$$

Le Théorème 2.1.5 implique alors que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|\phi(X^{\varepsilon_k}(\cdot \wedge \tau)) - \phi(R(\cdot \wedge \tau))|) = 0.$$

Ainsi, pour tout $p > 0$, tous $k \geq K_p$ et $\eta > \eta_p$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\mathbb{E}(\phi(R^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \phi(R(\cdot)))| \leq 2\|\phi\|_{\infty} p.$$

En faisant tendre p vers 0, on obtient que, pour toute fonction continue et bornée $\phi : \mathcal{C}([0, T] : [\eta^{-1}, \eta]) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\mathbb{E}(\phi(R^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \phi(R(\cdot)))| = 0.$$

À ce stade, on a montré que les sous-familles $(R^{\varepsilon_k}(t), t \in [0, T])_k$ convergent en distribution vers le processus de Bessel $(t \rightarrow R(t), t \in [0, T])$, pour toute suite $\{\varepsilon_k\}_k$ telle que τ^{ε_k} converge.

Raisonnons à nouveau par l'absurde afin de généraliser la convergence à la famille

$$(R^{\varepsilon}(t), t \in [0, T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$$

entière. Supposons que celle ci ne converge pas en distribution vers $(R(t))_{t \in [0, T]}$. Alors il existe une fonction $\phi : \mathcal{C}([0, T] : [\eta^{-1}, \eta]) \rightarrow \mathbb{R}$ continue, bornée et telle qu'il existe $\delta > 0$ ainsi qu'une suite strictement décroissante $\{\varepsilon_k\}_k$ convergeant vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$, tels que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\mathbb{E}(\phi(R^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \phi(R(\cdot)))| > \delta. \quad (2.26)$$

La sous famille $(\tau^{\varepsilon_k})_k$ admet elle aussi des sous familles convergentes $(\tau^{\varepsilon_{\psi(k)}})_k$, avec $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$, car elle est à valeurs dans le compact $[0, 2T]$. Le raisonnement précédent implique que $(R^{\varepsilon_{\psi(k)}}(t), t \in [0, T])_k$ converge en distribution vers le processus de Bessel $(R(t))_{t \in [0, T]}$ et donc que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\mathbb{E}(\phi(R^{\varepsilon_{\psi(k)}}(\cdot)) - \phi(R(\cdot)))| = 0$$

ce qui est contradictoire avec (2.26) et conclut la démonstration du Théorème 2.1.1. $\square$

2.2 Convergence des vitesses vers un mouvement brownien sphérique

Rappelons que les chaînes $(\xi_n)_n$ sont liées à l'énergie de la particule, on s'intéresse ici à l'évolution du vecteur vitesse.

Dans cette section, le Théorème 2.2.2 de convergence est établi pour la chaîne de Markov $(v_n)_n$ (voir (1.29)) représentant le vecteur vitesse de la particule à chaque sortie d'un diffuseur. Sous certaines hypothèses et correctement changée d'échelle cette chaîne converge en distribution vers un mouvement brownien à valeur dans $\mathbb{S}^{d-1}$.

2.2.1 Changement d'échelle

Considérons la chaîne de Markov $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie par

$$\begin{cases} v_{n+1} &= G(v_n, \kappa_n) \\ \|v_0\|_d &> v_+, \end{cases} \quad (2.27)$$

et vérifiant l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.2.1. 1. Les variables aléatoires $(\kappa_n)_n$ sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Elles sont indépendantes, identiquement distribuées et à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}$;

2. Il existe $0 < v_- < v_+$ tels que G est continue sur $\mathbb{R}_{\setminus B(0, v_-)}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}$, et pour tout $v \in \mathbb{R}_{\setminus B(0, v_+)}^d$,

$$G(v, \kappa) = v + \sum_{\ell=1}^3 \frac{\alpha^{(\ell)}(e, \kappa)}{\|v\|_d^\ell} + O(\|v\|_d^{-4}), \quad e = \frac{v}{\|v\|_d}, \quad (2.28)$$

où :

- $$\mathbb{E}(\alpha^{(1)}(e, \kappa) \otimes \alpha^{(1)}(e, \kappa)) = K^2(\mathbf{1}_d - ee'), \quad (2.29)$$

avec $K^2 > 0$. La matrice $(\mathbf{1}_d - ee')$ représente la projection sur l'hyperplan orthogonal au vecteur e (i.e pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $(\mathbf{1}_d - ee')y = y - \langle y, e \rangle e$) ;

- $$\mathbb{E}(\alpha^{(1)}(e, \kappa)) = 0 = \mathbb{E}(\alpha^{(2)}(e, \kappa)), \quad \mathbb{E}(\alpha^{(3)}(e, \kappa)) = -\frac{d-1}{2}K^2e; \quad (2.30)$$

- pour tous $1 \leq \ell, \ell' \leq 3$,

$$\mathbb{E}(\|\alpha^\ell(e, \kappa) \otimes \alpha^{\ell'}(e, \kappa)\|_d) < +\infty; \quad (2.31)$$

- pour tous $1 \leq \ell, \ell', \ell'' \leq 3$, et tous $1 \leq i, j, k \leq d$,

$$\mathbb{E}(\left| \alpha_i^{(\ell)}(e, \kappa) \alpha_j^{(\ell')}(e, \kappa) \alpha_k^{(\ell'')}(e, \kappa) \right|) < +\infty. \quad (2.32)$$

Soit le paramètre $\varepsilon = \|v_0\|_d^{-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = n\varepsilon^4$. La famille de processus continus $(v^\varepsilon(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ indexée par $\varepsilon > 0$ est construite de la manière suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v^\varepsilon(s_n) = \varepsilon v_n.$$

La continuité est obtenue par interpolation linéaire, pour tout $s \in [s_n, s_{n+1}[$,

$$v^\varepsilon(s) = \frac{s_{n+1} - s}{\varepsilon^4} v^\varepsilon(s_n) + \frac{s - s_n}{\varepsilon^4} v^\varepsilon(s_{n+1}).$$

La famille de $(v^\varepsilon(s), s \in \mathbb{R}_+)_{\varepsilon > 0}$ ainsi définie, vérifie alors le résultat de convergence suivant.

Théorème 2.2.2. Soit $S > 0$. La famille de processus $(v^\varepsilon(s), s \in [0, S])_{\varepsilon > 0}$ converge en distribution vers le processus $(u(s))_{s \in [0, S]}$ unique solution forte de l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} du(s) &= \frac{K}{\|u(s)\|_d} (I_d - \frac{u(s)u(s)'}{\|u(s)\|_d^2}) dB(s) - \frac{d-1}{2\|u(s)\|^4} K^2 u(s) ds \\ u(0) &= \frac{v_0}{\|v_0\|_d}, \end{cases} \quad (2.33)$$

où B est un mouvement brownien d -dimensionnel.

Remarque 2.2.3. L'équation différentielle stochastique (2.33) conserve la norme, en effet un simple calcul d'Itô donne

$$\begin{aligned} d\|u(s)\|_d^2 &= 2(u(s) \cdot du(s)) + (du(s) \cdot du(s)) \\ &= -\frac{d-1}{\|u(s)\|_d^2} K^2 ds \\ &\quad + \frac{K}{\|u(s)\|_d^2} \left(\left(I_d - \frac{u(s)u(s)'}{\|u(s)\|_d^2} \right) dB(s) \cdot \left(I_d - \frac{u(s)u(s)'}{\|u(s)\|_d^2} \right) dB(s) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le processus $(u(s))_{s \in [0, S]}$ est donc unitaire. En particulier l'équation différentielle stochastique (2.33) est de la forme (G.21), sa solution est un mouvement brownien sphérique changé en temps (voir l'Annexe G.1).

2.2.2 Du microscopique au macroscopique

La chaîne de Markov $(v_n)_n$ explicitée dans le chapitre 1 par (1.29) satisfait l'Hypothèse 2.2.1 avec

$$K^2 = \frac{\bar{\lambda}^2}{C_b} \int_{\mathbb{T}^m} d\phi \int_{\mathbb{R}^d} dz \int_{\mathbb{R}} dh \partial_w V(z, \phi) \partial_w V(z + he, \phi),$$

où $\partial_w = w \cdot \nabla$, $w \cdot e = 0$ et $\|w\|_d = 1$. Le théorème de convergence s'applique donc à cette dernière chaîne.

Dans le chapitre 1, nous avons vu que la classe de chaînes de Markov de la forme $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant l'Hypothèse 1.4.1 contient la chaîne $(\|v_n\|_d^3 / 3D)_{n \in \mathbb{N}}$ (voir (1.36)). Le Théorème 2.1.1 affirme que cette chaîne, après un changement d'échelle, converge vers un processus diffusif. Le changement d'échelle temporelle nécessaire pour observer cette convergence est en $\|v_0\|_d^{-6}$ ce qui signifie qu'avant d'apercevoir un changement d'accélération macroscopique de la particule dans le système décrit par (1.10), celle-ci doit subir un nombre de collisions de l'ordre de $\|v_0\|_d^6$. Le Théorème 2.2.2, quant à lui, nous indique un tout autre comportement. En effet le changement d'échelle temporelle utilisé pour obtenir le Théorème 2.2.2 est en $\|v_0\|_d^{-4}$, il faut un nombre de collisions $\|v_0\|_d^4$ pour que la direction d'une particule typique ait varié d'un angle macroscopique.

Une particule typique dans le système (1.10) subit donc un changement de direction avant d'avoir accéléré. Les recollisions qui avaient été jusqu'ici ignorées apparaissent comme étant un phénomène probable. Néanmoins, les résultats numériques

obtenus dans [3, 1] sont en accord avec le Théorème 1.2.2, ce qui laisse à penser que les recollisions, si elles ont lieu, n'ont qu'un impact négligeable sur le comportement asymptotique de $\|\dot{q}\|_d$ défini par (1.11).

Cette différence de comportement entre la vitesse et sa norme n'apparaît pas dans le cas que Dolgopyat et Koralov étudient dans [22]. Dans cet article, les auteurs s'intéressent, comme ici, au comportement de particules dans un champ de force défini sur $\mathbb{R}^d$ dont le mouvement est régi par l'équation de Newton (1.1) :

$$\dot{q}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(q(t) - r_n).$$

Les fonctions g_n diffèrent des fonctions f_n (1.2) considérées dans le chapitre 1 dans le sens où elles ne dépendent pas du temps et principalement, elles ne dérivent pas d'un potentiel, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\nabla \times g_n \neq 0$$

et la force que la particule subit n'est pas conservative. Autrement, $(g_n)_n$ est une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées définies sur un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$. De même, ces fonctions sont à support compact dans $B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$, $R > 0$ et $g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Les auteurs considèrent la distribution de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme étant un processus de Poisson ponctuel indépendant de la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ils montrent les résultats de convergence suivants.

Théorème 2.2.4 (Dolgopyat & Koralov, 2009). *Soit $d \geq 4$, pour tout $\|v_0\|$ suffisamment grand, il existe un sous-espace Ω'_{v_0} tel que $\lim_{\|v_0\|_d \rightarrow +\infty} \mathbb{P}'(\Omega'_{v_0}) = 1$ et si Ω_{v_0} est vu comme un espace de probabilité muni de la mesure obtenue en conditionnant $\mathbb{P}'$ sur l'événement Ω'_{v_0} , i.e $\mathbb{P}'_{v_0}(\cdot) = \mathbb{P}'(\cdot)/\mathbb{P}'(\Omega'_{v_0})$, alors :*

1. *les processus position et vitesse $q(t)$ et $\dot{q}(t)$ convergent tous les deux vers $+\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$;*
2. *Le processus $\dot{q}(c^3 t)/c$ sur Ω'_{v_0} converge en distribution, quand $c \rightarrow +\infty$ vers un processus diffusif noté $(\bar{v}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$;*
3. *Le processus $q(c^3 t)/c^4$ défini sur Ω_{v_0} converge en distribution, quand $c \rightarrow +\infty$, vers le processus diffusif $(\bar{q}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$:*

$$\bar{q}(t) = \int_0^t \bar{v}(s) ds.$$

Ici, le changement d'échelle temporelle nécessaire à l'obtention d'une convergence en distribution est le même à la fois pour le processus décrivant la vitesse de la particule et celui décrivant sa position. Le nombre de collisions que la particule doit subir avant qu'un changement macroscopique de sa vitesse soit aperçu est le même que celui qu'elle doit subir avant que sa direction varie d'un angle macroscopique. La probabilité qu'une trajectoire typique ne s'auto-intersecte pas est alors proche de 1. Cette observation permet d'obtenir l'affirmation 3. du Théorème de Dolgopyat et Koralov. Dans notre cas, un quelconque résultat sur le processus $(q(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est

bien plus difficile à obtenir en raison, justement, des possibles auto-intersections des trajectoires.

Une autre remarque à propos du Théorème 2.2.4 est que le processus limite $\bar{v}$ est tel que $\|\bar{v}\|_d^{3/2}$ est un processus de Bessel de dimension $2d/3$. L'hypothèse $d \geq 4$ permet aux auteurs (tout comme nous l'avons fait dans la Section 2.1.4) de travailler avec un processus de Bessel de dimension strictement supérieure à 2 et donc transient. De plus, le changement d'échelle temporelle utilisé pour observer la convergence du processus est différent du notre. C'est après un nombre de collisions de l'ordre de $\|v_0\|_d^3$ qu'un changement de vitesse macroscopique a lieu pour une particule typique dans le modèle non-conservatif, ce qui est plus rapide que dans notre cas.

Tout ce dont nous avons besoin dans la preuve du Théorème 1.4.2 est que la famille de processus $(R^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ converge en distribution vers un processus $(R(t))_{t \in [0, T]}$ qui n'est pas forcément un Bessel mais qui vérifie

$$\mathbb{P}\left(T_{\frac{1}{2}} > T_2\right) > \frac{1}{2},$$

où $T_{\frac{1}{2}}$ et T_2 représentent respectivement les temps d'atteinte des points $1/2$ et 2 . De même la condition $\gamma > 1/2$ dans le Théorème 1.4.2 équivalente à la condition $d > 5$ du Théorème 1.2.2 n'apparaît que pour garantir la transience du processus $(R(t))_{t \in [0, T]}$ qui permet de supprimer les temps d'arrêt dans la troisième étape de la preuve.

2.3 Preuve du Théorème 2.2.2

Nous procédons en 3 étapes, comme pour la démonstration du Théorème 2.2.2. Cette fois nous engloberons la précompacité et la convergence vers le problème aux martingales dans un seul lemme.

Les trois sous-sections qui suivent sont consacrées aux différentes étapes de la démonstration du Théorème 2.2.2. Le cheminement se découpe en 3 parties :

- une première étape consiste à introduire des temps d'arrêt τ^ε afin de maintenir les trajectoires des processus $(v^\varepsilon(s))_{s \in [0, 2S]}$ dans un compact et de montrer la précompacité de la famille $(v^\varepsilon(s \wedge \tau^\varepsilon), s \in [0, 2S])_\varepsilon$. Ce lemme nous permettra aussi d'affirmer que les processus limites sont solutions d'un problème aux martingales que nous expliciterons ;
- le problème aux martingales explicité dans l'étape précédente étant celui associé à un mouvement brownien sphérique, il est bien posé. L'unicité des processus limites étendra la convergence à la famille entière et non plus seulement aux sous-familles ;
- avant de conclure, il sera nécessaire de supprimer le temps d'arrêt introduit dans la première étape. C'est le but de la dernière étape.

Comme précisé dans la section précédente, certaines notations se confondent. Le paramètre ε choisi ici est différent de celui introduit précédemment. En effet dans la Section 2.1, nous avons $\varepsilon = \|v_0\|_d^{-3}/3D$, alors que dans cette section, $\varepsilon = \|v_0\|_d^{-1}$.

2.3.1 Cut off et précompacité

Soient $\eta > 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, le temps d'arrêt τ^ε défini pour le processus $(v^\varepsilon(s))_{s \in \mathbb{R}_+}$ par :

$$\tau^\varepsilon := \inf\{s \in [0, 2S], v^\varepsilon(s) \notin I\}, \quad I = B(0, \eta) \setminus \overline{B(0, \eta^{-1})}, \quad (2.34)$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$. Afin de rester dans le domaine où $(v^\varepsilon(s))_{s \in \mathbb{R}_+}$ peut être explicité, on se restreint aux $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ où $\varepsilon_* > (\eta v_+)^{-1}$ de sorte que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$, $\varepsilon v_+ < \eta^{-1}$. Ainsi, on définit la famille de processus arrêtés $(x^\varepsilon(s), s \in [0, 2S])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ où, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ et pour tout $s \in [0, 2S]$,

$$x^\varepsilon(s) = v^\varepsilon(s \wedge \tau^\varepsilon).$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ la forme explicite de $x^\varepsilon(s)$ est alors connue. En particulier,

$$x^\varepsilon(s_n) = G^\varepsilon(x^\varepsilon(s_{n-1}), \kappa_n), \quad (2.35)$$

où

$$G^\varepsilon(x, \kappa) = x + \sum_{\ell=1}^3 \varepsilon^{\ell+1} \frac{\alpha^{(\ell)}\left(\frac{x}{\|x\|_d}, \kappa\right)}{\|x\|_d^\ell} + \varepsilon^5 O(\|x\|_d^{-4}). \quad (2.36)$$

Soit Π^ε la fonction de transition du processus $(x^\varepsilon(s_n))_n$. On note $(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{D}_*^\varepsilon)$ une expression d'un cœur de son générateur infinitésimal. La Définition C.4, nous permet d'écrire, pour tout $f \in \mathcal{D}_*^\varepsilon$,

$$(\Pi^\varepsilon - \text{I})f(x) = \int_I (f(y) - f(x)) \Pi^\varepsilon(x, dy). \quad (2.37)$$

Lemme 2.3.1. *La famille de processus $(x^\varepsilon(s), s \in [0, 2S])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ est précompacte, et tout processus limite est solution du problème aux martingales associé à l'opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ où,*

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2\|x\|_d^2} \left(\left(\text{Id} - \frac{xx'}{\|x\|_d^2} \right) D^2 f(x) \right) - \frac{d-1}{\|x\|_d^4} K^2 x \cdot \nabla f(x), \quad (2.38)$$

$$\mathcal{D}_* = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{I}), \lim_{\|x\|_d \rightarrow \eta^{\pm 1}} \mathcal{L}f(x) = 0\}.$$

Démonstration. La preuve de ce lemme est la même que celle du Lemme 2.1.2 pour la précompacité et du Théorème 2.1.5. Ici, nous montrerons seulement que, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x\|_d \in [\eta^{-1}, \eta]$,

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon^4} (\Pi^\varepsilon - \text{I})f(x) - \mathcal{L}f(x) \right\|_d \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Comme dans la section précédente, considérons, pour tout $x \in \bar{I}$ les coefficients suivants :

$$a^\varepsilon(x) = \int_{\|y\|_d \in]\eta^{-1}, \eta[} (y-x)^2 \Pi^\varepsilon(x, dy) \quad \text{et} \quad b^\varepsilon(x) = \int_{\|y\|_d \in]\eta^{-1}, \eta[} (y-x) \Pi^\varepsilon(x, dy),$$

ainsi que l'opérateur

$$\mathcal{A}^\varepsilon f(x) = \frac{1}{2}a^\varepsilon(x)f''(x) + b^\varepsilon(x)f'(x).$$

En notant

$$a(x) = \frac{1}{\|x\|_d^2} K^2 \left(I_d - \frac{xx'}{\|x\|_d^2} \right) \text{ et } b(x) = -\frac{d-1}{\|x\|_d^4} K^2 x.$$

Nous obtenons alors que, dans le cas où $x \in I$,

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(x) &= \mathbb{E} \left(((G^\varepsilon(x, \omega) - x) \otimes (G^\varepsilon(x, \omega) - x)) \mid \mathbf{1}_{\|G^\varepsilon(x, \omega)\|_d \in]\eta^{-1}, \eta[} \right) \\ &= \varepsilon^4 a(x) + o(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (2.39)$$

et

$$\begin{aligned} b^\varepsilon(x) &= \mathbb{E} \left((G^\varepsilon(x, \omega) - x) \mid \mathbf{1}_{\|G^\varepsilon(x, \omega)\|_d \in]\eta^{-1}, \eta[} \right) \\ &= \varepsilon^4 b(x) + o(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (2.40)$$

De plus, si $\|x\|_d = \eta^{\pm 1}$ il est clair que $a^\varepsilon(\eta^{\pm 1}) = 0 = b^\varepsilon(\eta^{\pm 1})$, et ce, pour tout $\varepsilon > 0$. Cela implique que, en particulier, $\mathcal{A}^\varepsilon f(\eta^{\pm 1})/\varepsilon^4 = 0$. D'après la forme de l'opérateur $\mathcal{L}$ (voir (2.38)), pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, nous avons donc

$$\frac{1}{\varepsilon^4} \mathcal{A}^\varepsilon f(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}f(x), \quad \text{pour tout } x \in \bar{I}.$$

Pour tout $x \in I$, contrôlons $\|(\Pi^\varepsilon - I)f(x) - \mathcal{A}^\varepsilon f(x)\|_d/\varepsilon^4$. Pour tout $y \in I$, il existe une constante $\mathcal{C}_f$ dépendant uniquement de f telle que

$$\frac{1}{\varepsilon^4} \|(\Pi^\varepsilon - I)f(x) - \mathcal{A}^\varepsilon f(x)\|_d \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \int_I \|y - x\|_d^3 \Pi^\varepsilon(x, dy) + \frac{2}{\varepsilon^4} \|f\|_\infty \Pi^\varepsilon(x, \partial I)$$

Or, d'après (2.36)

$$\int_I \|y - x\|_d^3 \Pi^\varepsilon(x, dy) = o(\varepsilon^3).$$

De plus, pour tout $x \in \bar{I}$, remarquons que, pour tout $\delta > 0$, il existe un $\varepsilon_+ > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_+$, on ait

$$\Pi^\varepsilon(x, \mathbb{R}^d \setminus B(x, \delta)) = 0,$$

ce qui a pour conséquence que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^4} \Pi^\varepsilon(x, \mathbb{R}^d \setminus B(x, \delta)) = 0.$$

on obtient, pour tout $x \in I$

$$\frac{1}{\varepsilon^4} \|(\Pi^\varepsilon - I)f(x) - \mathcal{A}^\varepsilon f(x)\|_d \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.41)$$

De plus, dans le cas $\|x\|_d = \eta^{\pm 1}$, il est clair que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} (\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(x) &= \int_{\bar{I}} f(y) - f(x) \Pi^\varepsilon(x, dy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, et pour tout $x \in \bar{I}$,

$$\left\| \mathcal{L}f(x) - \frac{1}{\varepsilon^4} (\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(x) \right\|_d \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.42)$$

La suite de la preuve se déroule exactement de la même façon que dans la section précédente, en montrant la précompacité puis en passant dans l'espace de Skorohod. $\square$

2.3.2 Limite des processus arrêtés

L'étape précédente nous a permis d'établir l'existence de suites strictement décroissantes $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres positifs telles que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$ tels que les processus $(x^{\varepsilon_k}(s), s \in [0, 2S])_k$ convergent faiblement vers des processus limites $(x^0(s))_{s \in [0, 2S]}$. Soit τ^0 les temps d'arrêt définis par

$$\tau^0 := \inf\{s \in [0, 2S], x^0(s) \notin I\}, \quad (2.43)$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = 2S$. Le Lemme 2.3.1 nous affirme de plus que les processus limite $(x^0(s \wedge \tau^0))_{s \in [0, 2S]}$ sont solutions du problème aux martingales associé à l'opérateur défini par (2.38).

Remarque 2.3.2. *La famille des temps d'arrêt $(\tau^\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ étant à valeur dans le compact $[0, 2S]$, est précompacte. Elle admet donc des sous-famille $(\tau^{\varepsilon_k})_k$ convergeant vers des variables aléatoires τ^{lim} . Ces dernières n'ont aucune raison d'être des temps d'arrêt, et par conséquent n'ont pas la même distribution que les temps d'arrêt des processus limites.*

De la même façon que dans la preuve de la section précédente, il est possible de comparer τ^{lim} à τ^0 .

Lemme 2.3.3. *Il existe un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ tel que*

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(\tau^{\text{lim}} \geq \tilde{\tau}^0\right) = 1,$$

où $\tilde{\tau}^{\text{lim}}$ et $\tilde{\tau}^0$ sont respectivement de même distribution que τ^{lim} et τ^0 .

Démonstration. Cette preuve est la même que celle de l'affirmation i) du Lemme 2.1.4 de la Section précédente. $\square$

Le Théorème E.4 implique que l'opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ est un cœur pour l'opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ générateur infinitésimal d'un processus de Feller $(u(s))_{s \in [0, 2S]}$ arrêté en le temps d'arrêt τ défini par,

$$\tau := \inf\{s \in [0, 2S]; u(s) \notin I\}$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = 2S$. Les processus limites $(x^0(s \wedge \tau^0))_{s \in [0, 2S]}$ sont, d'après le Lemme D.7, solutions du problèmes aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$. Ainsi, le Théorème F.12 permet d'affirmer que pour toute suite strictement décroissante $\{\varepsilon_k\}_k$ telle que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$ et telle que la sous-famille $(x^{\varepsilon_k}(s), t \in [0, 2S])_{0 < \varepsilon_k < \varepsilon_*}$ converge en distribution, les processus limites arrêtés $(x^0(s \wedge \tau^0))_{s \in [0, 2S]}$ sont solutions faibles à l'équation différentielle stochastique arrêtée

$$\begin{cases} du(s) &= \frac{K}{\|u(s)\|_d} \left(I_d - \frac{u(s)u(s)'}{\|u(s)\|_d^2} \right) \mathbf{1}_{s \leq \tau} dB(s) - \frac{d-1}{2\|u(s)\|_d^4} K^2 u(s) \mathbf{1}_{s \leq \tau} ds \\ u(0) &= \frac{v_0}{\|v_0\|_d}. \end{cases} \quad (2.44)$$

Cette équation différentielle stochastique modélise, quand elle n'est pas arrêtée, un mouvement brownien sphérique changé en temps et introduit dans l'annexe G.1. L'unicité et l'existence d'une solution forte à cette équation différentielle stochastique est vérifiée, et sa solution est un processus diffusif unitaire. On en conclut que, premièrement tous les processus limites $(x^0(s \wedge \tau^0))_{s \in [0, 2S]}$ sont égaux en loi et ne dépendent, par conséquent, pas de la suite $\{\varepsilon_k\}_k$ choisie. De plus, $\tau^0 = 2S$ presque sûrement car le processus limite est unitaire. Toutes les sous-familles $(x^{\varepsilon_k}(s), s \in [0, 2S])_{0 < \varepsilon_k < \varepsilon_*}$ convergentes ont alors la même limite et celle-ci est un mouvement brownien sphérique solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} du(s) &= \frac{K}{\|u(s)\|_d} \left(I_d - \frac{u(s)u(s)'}{\|u(s)\|_d^2} \right) dB(s) - \frac{d-1}{2\|u(s)\|_d^4} K^2 u(s) ds \\ u(0) &= \frac{v_0}{\|v_0\|_d}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Pour finir cette étape, on étend la convergence en distribution vers $(u(s))_{s \in [0, 2S]}$ à toute la famille $(x^\varepsilon(s), s \in [0, 2S])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$.

Corollaire 2.3.4. *La famille de processus $(x^\varepsilon(s), s \in [0, 2S])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ converge en distribution vers le processus $(u(s))_{s \in [0, 2S]}$ unique solution forte de l'équation différentielle stochastique (2.45).*

Démonstration. D'après la Définition H.2 de la convergence en distribution, il nous suffit de montrer que pour toute fonction $\Phi : \mathcal{C}([0, 2S] : I) \rightarrow \mathbb{R}$ continue, bornée,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}(\Phi(x^\varepsilon(\cdot))) = \mathbb{E}(\Phi(u(\cdot))). \quad (2.46)$$

Raisonnons par l'absurde, soit Φ une telle fonction pour laquelle (2.46) est fausse. Il existerait alors une suite décroissante $\{\varepsilon_k\}_k$ convergeant vers 0 quand $k \rightarrow \infty$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon_k < \varepsilon_*$,

$$|\mathbb{E}(\Phi(x^{\varepsilon_k}(\cdot))) - \mathbb{E}(\Phi(u(\cdot)))| > \delta.$$

Or, la famille $(x^{\varepsilon_k}(s), s \in [0, 2S])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ est elle aussi précompacte. Il existe donc une fonction $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $(x^{\varepsilon_{\psi(k)}}(\cdot \wedge \tau))_k$ converge en distribution et le raisonnement précédent permet de conclure que sa limite est le mouvement brownien sphérique $(u(s))_{s \in [0, 2S]}$ unique solution forte de l'équation différentielle stochastique (2.45). Ainsi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\Phi(x^{\varepsilon_{\psi(k)}}(\cdot))) = \mathbb{E}(\Phi(u(\cdot))),$$

ce qui est contradictoire. $\square$

2.3.3 Suppression des temps d'arrêt

Les deux étapes précédentes ont permis d'établir la convergence en distribution de la famille $(v^\varepsilon(s \wedge \tau^\varepsilon), s \in [0, 2S])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ vers le mouvement brownien sphérique $(u(s))_{s \in [0, 2S]}$. Ce processus étant unitaire, $\mathbb{P}(\tau = 2S) = 1$ où on rappelle que

$$\tau = \inf\{s \in [0, 2S]; u(s) \notin I\}, \quad \inf\{\emptyset\} = 2S.$$

Ceci, combiné avec le Lemme 2.3.3 entraîne que pour tous $\eta > 1$, $p > 0$, et toute famille $\{\tau^{\varepsilon_k}\}_k$ convergente, il existe $K_p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k > K_p$, on ait

$$\mathbb{P}(\tau^{\varepsilon_k} \geq S) \geq 1 - p.$$

Utilisons la Définition H.2 de la convergence en distribution. Soit $\Phi : \mathcal{C}([0, S] : \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ continue, bornée, on peut écrire

$$\Phi(x^{\varepsilon_k}(\cdot)) \mathbb{1}_{\{\tau^{\varepsilon_k} \geq T\}} = \Phi(v^{\varepsilon_k}(\cdot)) \mathbb{1}_{\{\tau^{\varepsilon_k} \geq T\}}.$$

On en déduit la majoration suivante,

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(\Phi(v^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \Phi(u(\cdot)))| \\ & \leq \mathbb{E}(|(\Phi(v^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \Phi(u(\cdot))) \mathbb{1}_{\{\tau^{\varepsilon_k} < T\}}|) \\ & \quad + \mathbb{E}(|(\Phi(v^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \Phi(u(\cdot))) \mathbb{1}_{\{\tau^{\varepsilon_k} \geq T\}}|) \\ & \leq 2\|\Phi\|_\infty \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\tau^{\varepsilon_k} < T\}}) + \mathbb{E}(|(\Phi(x^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \Phi(u(\cdot))) \mathbb{1}_{\{\tau^{\varepsilon_k} \geq T\}}|) \\ & \leq 2\|\Phi\|_\infty p + \mathbb{E}(|(\Phi(x^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \Phi(u(\cdot)))|). \end{aligned}$$

Or la convergence obtenue dans le Lemme 2.3.1 assure que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|(\Phi(x^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \Phi(u(\cdot)))|) = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\mathbb{E}(\Phi(v^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \Phi(u(\cdot)))| \leq 2\|\Phi\|_\infty p,$$

en faisant tendre δ vers 0, on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\mathbb{E}(\Phi(v^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \Phi(u(\cdot)))| = 0.$$

Pour conclure le raisonnement est le même que celui du Corollaire 2.3.4. À nouveau, supposons que $(v^\varepsilon(s), s \in [0, S])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ ne converge pas en distribution, il existe alors

une fonction $\Phi : \mathcal{C}([0, S] : \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée ainsi qu'une suite strictement décroissante $\{\varepsilon_k\}_k$ convergeant vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon_k < \varepsilon_*$,

$$|\mathbb{E}(\Phi(v^{\varepsilon_k}(\cdot)) - \Phi(u(\cdot)))| > \delta. \quad (2.47)$$

La famille $(\tau^{\varepsilon_k})_k$ étant à valeurs dans un compact, elle admet des sous-familles $(\tau^{\varepsilon_{\psi(k)}})_k$ convergentes et le raisonnement ci-dessus entraîne la convergence en distribution de $v^{\varepsilon_{\psi(k)}}(\cdot)$ vers $u(\cdot)$ sur $[0, S]$ ce qui rend (2.47) absurde et conclut la preuve du Théorème 2.2.2.

Chapitre 3

Preuve du Théorème 1.4.2

La démonstration du Théorème 1.4.2 est faite dans ce chapitre. Elle se découpe en trois parties. Tout d'abord on estime les temps pour lesquels la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ est à valeurs dans un voisinage de 2^η , $\eta \in \mathbb{Z}$. Ensuite on contrôle le temps que ξ_{τ_ℓ} met pour doubler ou réduire de moitié sa valeur. Ces deux estimations nécessitent un résultat de convergence pour la chaîne $(\xi_n)_n$ qui est énoncé et montré dans le chapitre 2.

*You know those ducks in that lagoon
right near Central Park South?
That little lake? By any chance,
do you happen to know where they go,
the ducks, when it gets all frozen over?*
J.D. Salinger — The Catcher in the Rye.

3.1 Préliminaires

Tout d'abord rappelons l'hypothèse faite sur la classe de chaînes de Markov pour lesquelles le Théorème 1.4.2 ainsi que le Théorème 2.1.1 s'appliquent, ainsi que l'énoncé de ces derniers.

Soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires bornées indépendantes et identiquement distribuées centrées et de variance égale à 1 :

$$\mathbb{E}(\omega_n) = 0, \quad \mathbb{E}(\omega_n^2) = 1, \quad \exists \bar{\omega} \geq 1, |\omega_n| < \bar{\omega}. \quad (3.1)$$

Soit une fonction $F : \mathbb{R}_+^* \times [-\bar{\omega}, \bar{\omega}] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable et satisfaisant l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.4.1 *Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \xi_- < \xi_+$ et deux paramètres $\alpha > 0, \beta > 1$, tels que F est continue sur $[\xi_-, +\infty[\times [-\bar{\omega}, \bar{\omega}]$ et, pour tout $\xi > \xi_*$,*

$$F(\xi, \omega) = \xi + \omega + \frac{\gamma}{\xi} + F_0(\xi, \omega) + F_1(\xi, \omega), \quad (1.38)$$

où les fonctions F_0 et F_1 sont telles que, pour ξ grand,

$$\sup_{\omega} |F_0(\xi, \omega)| = O(\xi^{-\alpha}) \quad \text{et} \quad \sup_{\omega} |F_1(\xi, \omega)| = O(\xi^{-\beta}). \quad (1.39)$$

De plus $\mathbb{E}(F_0(\xi, \cdot)) = 0$.

Les termes F_0 et F_1 sont respectivement des perturbations des termes aléatoires ω et γ/ξ . Les chaînes de Markov considérées sont celles s'écrivant :

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = F(\xi_n, \omega_n) \\ \xi_0 > \xi_+ \end{cases} \quad (3.2)$$

Ainsi définies, ces chaînes de Markov vérifient le théorème suivant :

Théorème 1.4.2 : *Soit $\gamma > 1/2$. Alors :*

1. *Pour tout $0 < p \leq 1$ et pour tout $\nu > 0$, il existe $\xi_* > \xi_+$ tel que, pour tout $\xi_0 > \xi_*$, on ait*

$$\mathbb{P}\left(\forall n \in \mathbb{N}, \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}}\right)^{1-\nu} \leq \xi_n \leq \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}}\right)^{1+\nu}\right) \geq 1-p. \quad (4.20)$$

2. *Pour tout $\nu > 0$, on a*

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\forall n \in \mathbb{N}, \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}}\right)^{1-\nu} \leq \xi_n \leq \left(\xi_0 + n^{\frac{1}{2}}\right)^{1+\nu}\right) = 1. \quad (4.21)$$

La stratégie de preuve est la suivante :

1. En premier lieu, dans le chapitre 2, nous avons construit une famille de processus continus en temps et indexée par un paramètre $\varepsilon = \xi_0^{-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons introduit les temps $t_n = n\varepsilon^2$ et la famille de processus continus $(R^\varepsilon(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est définie par

$$R^\varepsilon(t_n) = \varepsilon \xi_n,$$

et, pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}[$,

$$R^\varepsilon(t) = \frac{t_{n+1} - t}{\varepsilon^2} R^\varepsilon(t_n) + \frac{t - t_n}{\varepsilon^2} R^\varepsilon(t_{n+1}).$$

Le résultat de convergence en loi sur la famille $(R^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{\varepsilon > 0}$, obtenue dans le chapitre 2, est le suivant.

Théorème 2.1.1 : *Soit $T > 0$ et supposons que $\gamma > \frac{1}{2}$. Alors la famille de processus stochastiques $(R^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{\varepsilon > 0}$ converge en distribution vers un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$ et de condition initiale 1. Autrement dit, la famille de processus stochastiques $(R^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{\varepsilon > 0}$ converge en distribution vers l'unique solution forte de l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{cases} dR(t) = dB(t) + \frac{\gamma}{R(t)} dt \\ R(0) = 1, \end{cases}$$

où B est un mouvement brownien uni-dimensionnel.

Ce résultat étant indépendant du reste de la démonstration du Théorème 1.4.2, nous l'avons traité dans le chapitre précédent, avec un autre résultat de convergence en loi pour la chaîne de Markov $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ introduite dans le chapitre 1 par (1.35). La seule application du Théorème 2.1.1 dans la suite de ce chapitre se fera par le biais du Théorème Portmanteau. Néanmoins, l'hypothèse restrictive $\gamma > 1/2$ du Théorème 1.4.2 apparaît uniquement dans ce dernier résultat de convergence en loi et dans le but de permettre au processus de Bessel limite d'être transient. Cette condition sur γ est équivalente à la condition $d > 5$ du Théorème 1.2.2.

2. Ensuite, dans ce chapitre, nous suivons une méthode développée dans [22] pour un problème similaire (cas où F est non conservatif dans (1.1)) :
 - nous introduisons un processus auxiliaire $(\eta_\ell)_\ell$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et des temps d'arrêt τ_ℓ tels que, approximativement, $\xi_{\tau_\ell} \sim 2^{\eta_\ell}$ (voir la Figure 3.2). Les accroissements du processus $(\eta_\ell)_\ell$ sont alors ± 1 , et $\Delta\tau_\ell = \tau_{\ell+1} - \tau_\ell$ est le temps que met le processus $(\xi_n)_n$ pour doubler ou réduire de moitié sa valeur ;
 - le Théorème 2.2.2 et les propriétés des processus de Bessel sont utilisés via le Théorème Portmanteau pour montrer que, sous les conditions $\gamma > 1/2$ et η_0 assez grand, $(\eta_\ell)_\ell$ est une sous-martingale. Les temps de séjour $\Delta\tau_\ell$ sont enfin contrôlés dans la Proposition 3.3.4, et la Proposition 3.2.2 montre l'existence de $\mu > 0$ tel que

$$\eta_\ell \sim \mu\ell + \eta_0 \text{ et } \Delta\tau_\ell \sim 2^{2\eta_\ell}.$$

Ainsi

$$\xi_{\tau_\ell} \sim \tau_\ell^{\frac{1}{2}};$$

- enfin, la dernière section de ce chapitre interpolera ce résultat à la chaîne $(\xi_n)_n$ entière.

3.2 Processus auxiliaire

Afin de construire un processus auxiliaire décrivant les passages de $(\xi_n)_n$ sur les puissances de 2, considérons $L > 0$ et les intervalles $J_\eta = [2^\eta - L, 2^\eta + L]$, $\eta \in \mathbb{Z}$. On s'intéresse à la façon dont $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ visite l'ensemble $\mathcal{N}_L := \bigcup_{\eta \in \mathbb{Z}} J_\eta \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour cela, on introduit un processus auxiliaire $(\eta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et des temps d'arrêt correspondants τ_ℓ , tels que $\xi_{\tau_\ell} \in J_{\eta_\ell}$ (voir Figure 3.2).

Remarque 3.2.1. Dans l'Hypothèse 1.4.1, la valeur ξ_+ peut toujours être remplacée par une valeur plus grande. De cette façon, en imposant $\xi_+ \geq |\gamma|/\bar{\omega}$, pour tout $\xi_n > \xi_+$,

$$\xi_{n+1} \in]\xi_n - C_{\bar{\omega}, \gamma}, \xi_n + C_{\bar{\omega}, \gamma}[, \quad (3.3)$$

où

$$C_{\bar{\omega}, \gamma} = 2\bar{\omega} + C \frac{\bar{\omega}^\alpha}{|\gamma|^\alpha} + C \frac{\bar{\omega}^\beta}{|\gamma|^\beta}, \quad C > 0.$$

Cela traduit le fait que, dû au terme dominant de drift en ξ^{-1} , lorsque ξ_n est grand, la taille du pas de la marche aléatoire devient petite comparée à ξ_n .



FIGURE 3.1: Exemple de cas où $\xi_0 \notin \mathcal{N}_L$. Ici $\eta_0 = \tilde{\eta}_0 + 1$.

Il est maintenant possible de définir le processus $(\eta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$. Tout d'abord, soit

$$\eta_+ = \min\{\eta \in \mathbb{N} \mid 2^\eta > 2 \max\{\xi_+, C_{\bar{\omega}, \gamma}\}\}, \quad (3.4)$$

et comme $\bar{\omega} > 1$ (voir (3.1)), $\eta_+ > 2$. Afin que (3.4) soit satisfaite, on choisit L tel que $C_{\bar{\omega}, \gamma} < L < 2^{\eta_+-1}$. Ainsi, pour tous $\eta, \eta' \geq \eta_+$ tels que $\eta \neq \eta'$,

$$J_\eta \cap J_{\eta'} = \emptyset,$$

et d'après (3.3), le processus $(\xi_n)_n$ ne peut pas sauter au-dessus d'un intervalle J_η sans le traverser. De cette façon, si $\xi_n \in J_\eta$, le prochain intervalle de $\mathcal{N}_L$ que la chaîne visitera, s'il est bien défini, sera $J_{\eta+1}$ ou $J_{\eta-1}$.

Le processus $(\eta_\ell)_\ell$ et les temps d'arrêt τ_ℓ qui lui sont associés peuvent maintenant être explicités récursivement. Il existe $\tilde{\eta}_0 > \eta_+$ tel que

$$\xi_0 \in J_{\tilde{\eta}_0} \cup]2^{\tilde{\eta}_0} + L, 2^{\tilde{\eta}_0+1} - L[\cup J_{\tilde{\eta}_0+1}.$$

Soient $\tau_0 = 0$ et

$$\tilde{\tau}_0 = \inf\{n \geq 0, \xi_n \in J_{\tilde{\eta}_0} \cup J_{\tilde{\eta}_0+1}\}.$$

Ainsi $\tilde{\tau}_0 = \tau_0$ si $\xi_0 \in \mathcal{N}_L$ et soit

$$\begin{cases} \eta_0 = \tilde{\eta}_0 & \text{si } \xi_{\tilde{\tau}_0} \in J_{\tilde{\eta}_0}, \\ \eta_0 = \tilde{\eta}_0 + 1 & \text{si } \xi_{\tilde{\tau}_0} \in J_{\tilde{\eta}_0+1}. \end{cases}$$

La Figure 3.1 illustre l'initialisation du processus $(\eta_\ell)_\ell$. Ensuite notons

$$\tau_1 = \inf\{n > 0, \xi_n \in J_{\eta_0-1} \cup J_{\eta_0+1}\},$$

et

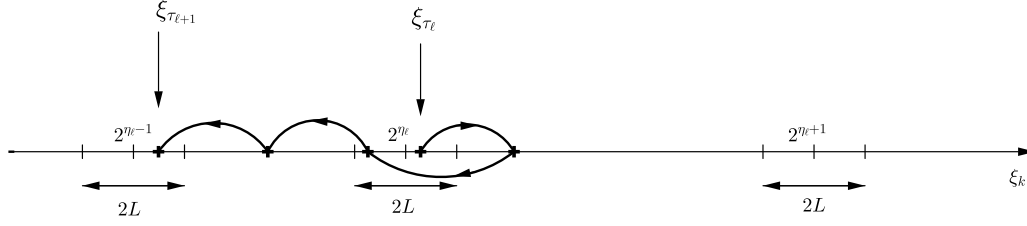
$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_0 + 1 & \text{si } \xi_{\tau_1} \in J_{\eta_0+1}, \\ \eta_1 = \eta_0 - 1 & \text{si } \xi_{\tau_1} \in J_{\eta_0-1}. \end{cases}$$

Supposons que, pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\tau_0, \eta_0, \tau_1, \eta_1, \dots, \tau_\ell, \eta_\ell$ sont bien définis, avec $\xi_{\tau_k} \in J_{\eta_k}$, pour tout $0 \leq k \leq \ell$. Dans le cas où $\eta_\ell = \eta_+$, on pose $\tau_{\ell+1} = \tau_\ell$ et $\eta_{\ell+1} = \eta_\ell$, sinon

$$\tau_{\ell+1} = \inf\{n > \tau_\ell, \xi_n \in J_{\eta_\ell-1} \cup J_{\eta_\ell+1}\},$$

et

$$\begin{cases} \eta_{\ell+1} = \eta_\ell + 1 & \text{si } \xi_{\tau_{\ell+1}} \in J_{\eta_\ell+1}, \\ \eta_{\ell+1} = \eta_\ell - 1 & \text{si } \xi_{\tau_{\ell+1}} \in J_{\eta_\ell-1}. \end{cases}$$

FIGURE 3.2: $(\xi_n)_n$ visitant $\mathcal{N}_L$. Ici, $\eta_{l+1} = \eta_l - 1$.

La suite de cette section consiste à montrer que, avec grande probabilité, le processus $(\eta_\ell)_\ell$ se comporte asymptotiquement comme une sous-martingale et qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\eta_\ell \sim \mu\ell$ (voir Proposition 3.2.2).

Le processus $(\eta_\ell)_\ell$ décrit la manière dont le processus $(\xi_n)_n$ visite des intervalles de taille fixe $2L$ et centrés en les entiers 2^η , $\eta > \eta_+$. Ce processus $(\eta_\ell)_\ell$ nous donne une information sur la tendance du terme de drift du processus $(\xi_n)_n$. Néanmoins, il n'y a aucune raison de penser que la nature de ce processus est markovienne. En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta \pm 1 | \eta_\ell = \eta, \eta_{\ell-1} = \eta \pm 1) &= \mathbb{P}(\xi_{\tau_{\ell+1}} \in J_{\eta \pm 1} | \xi_{\tau_\ell} \in J_\eta, \xi_{\tau_{\ell-1}} \in J_{\eta \pm 1}) \\ &\neq \mathbb{P}(\xi_{\tau_{\ell+1}} \in J_{\eta \pm 1} | \xi_{\tau_\ell} \in J_\eta). \end{aligned}$$

Tout dépend de si ξ_{τ_ℓ} se trouve plutôt à droite ou à gauche de l'intervalle J_{η_ℓ} . Les principales propriétés du processus $(\eta_\ell)_\ell$ sont énoncées dans la proposition suivante.

Proposition 3.2.2. *Soit $\gamma > 1/2$.*

i) *Pour tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{\eta} > \eta_+$ tel que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ et pour presque tout $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{\ell-1} \geq \eta_+$, $\eta_\ell > \tilde{\eta}$,*

$$|\mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell \pm 1 | \eta_\ell, \dots, \eta_0) - p_\pm| < \delta, \quad (3.5)$$

où

$$p_+ = \frac{2^{2\gamma-1} - 1}{2^{2\gamma-1} - 2^{1-2\gamma}} > \frac{1}{2}$$

et $p_- = 1 - p_+$.

ii) *Pour tout $0 < p \leq 1$ et pour tout $\delta > 0$, il existe $\eta_* > \eta_+$ tel que, pour tout $\eta_0 \geq \eta_*$,*

$$\mathbb{P}(\forall \ell \in \mathbb{N}, |\eta_\ell - \mu\ell - \eta_0| \leq \delta(\ell + \eta_0)) \geq 1 - p,$$

où $\mu = 2p_+ - 1 > 0$.

iii) *Pour tout $0 < p \leq 1$, il existe $\eta_* > \eta_+$ tel que, pour tout $\eta_0 \geq \eta_*$,*

$$\mathbb{P}\left(\forall \ell \in \mathbb{N}, \eta_\ell \geq \frac{\eta_0}{2}\right) \geq 1 - p.$$

La démonstration de ce résultat utilise le Théorème 2.1.1 de convergence en distribution de $(\xi_n)_n$ correctement changé d'échelle vers un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$ lorsque $\gamma > 1/2$. La première affirmation de cette proposition

indique que le processus $(\eta_\ell)_\ell$ est poussé vers la droite. À chaque pas, la probabilité que son incrément soit de 1 est plus grande que celle qu'il soit de -1 . La seconde affirmation, qui sera utile dans les deux prochaines sections, décrit le comportement de $(\eta_\ell)_\ell$ comme étant $\eta_\ell \sim \mu\ell$ avec $\mu > 0$. Enfin, la dernière affirmation permet de dire que si $\eta_0 > 2\eta_+$ alors, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\eta_\ell > \eta_+$ presque sûrement et donc que

$$\mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}, \xi_n > \xi_+) = 1.$$

Avant d'entamer cette démonstration, deux remarques sont à faire.

Premièrement, dans ce qui suit, les notations ne font pas la distinction entre, d'une part, les variables aléatoires $\mathbb{P}(A | \eta_\ell, \dots, \eta_0)$, vues comme étant des fonctions sur l'espace probabilisé sous-jacent ou sur $\mathbb{N}^{\ell+1}$ et d'autre part, les valeurs que cette fonction prends. Grossièrement,

$$\mathbb{P}(A | \eta_\ell, \dots, \eta_0) = \mathbb{P}(A | \eta_\ell = \eta_\ell, \dots, \eta_0 = \eta_0).$$

Deuxièmement, une conséquence de la nature markovienne de $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera souvent utilisée dans la suite : soit $A \in \mathcal{F}_n^+$,

$$\inf_{\xi_{n-1} \in I} \mathbb{P}(A | \xi_{n-1}) \leq \mathbb{P}(A | \xi_{n-1} \in I, C \in \mathcal{F}_{n-2}) \leq \sup_{\xi_{n-1} \in I} \mathbb{P}(A | \xi_{n-1}), \quad (3.6)$$

où I est un intervalle, $\mathcal{F}_{n-2}$ est la sigma-algèbre engendrée par les $\xi_{n'}, 0 \leq n' \leq n-2$, et $\mathcal{F}_n^+$ celle générée par les $\xi_{n'}, n' \geq n$.

La démonstration de la Proposition 3.2.2 entière étant longue, nous traitons séparément le point i) des points ii) et iii).

Démonstration de la Proposition 3.2.2, affirmation i). Dans ce qui suit, les valeurs de $\eta_0, \dots, \eta_\ell$ et des multi-indices i_j sont restreintes aux valeurs pour lesquelles l'ensemble sur lequel on conditionne est de probabilité strictement positive. Soient $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_\ell > \eta_+$. On a alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell + 1 | \eta_\ell, \dots, \eta_0) \\ &= \sum_{0 < i_1 \leq \dots \leq i_\ell} \mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell + 1 | \eta_\ell, \dots, \eta_0; \tau_\ell = i_\ell, \dots, \tau_1 = i_1) \\ & \quad \times \mathbb{P}(\tau_\ell = i_\ell, \dots, \tau_1 = i_1 | \eta_\ell, \dots, \eta_0). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $\eta > \eta_+$, soient

$$\begin{aligned} \tau_{+,i}(\eta) &= \inf \{n \geq 0 | \xi_{i+n} > 2^{\eta+1} - L\}, \\ \tau_{-,i}(\eta) &= \inf \{n \geq 0 | \xi_{i+n} < 2^{\eta-1} + L\}. \end{aligned}$$

Alors pour tous $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_\ell > \eta_+$, et pour tous $0 < i_1 < \dots < i_\ell$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell + 1 | \eta_\ell, \dots, \eta_0; \tau_\ell = i_\ell, \dots, \tau_1 = i_1) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{+,i_\ell}(\eta_\ell) < \tau_{-,i_\ell}(\eta_\ell) | \eta_\ell, \dots, \eta_0; \tau_\ell = i_\ell, \dots, \tau_1 = i_1) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{+,i_\ell}(\eta_\ell) < \tau_{-,i_\ell}(\eta_\ell) | \xi_{i_\ell} \in J_{\eta_\ell}, \dots, \xi_{i_1} \in J_{\eta_1}, \xi_0 \in J_{\eta_0}; \\ & \quad \tau_\ell = i_\ell, \dots, \tau_1 = i_1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Il suit alors de (3.6) et de l'homogénéité du processus $(\xi_n)_n$ que

$$\inf_{\xi_0 \in J_{\eta_\ell}} \mathbb{P}(\tau_{+,0}(\eta_\ell) < \tau_{-,0}(\eta_\ell) \mid \xi_0) = \inf_{\xi_{i_\ell} \in J_{\eta_\ell}} \mathbb{P}(\tau_{+,i_\ell}(\eta_\ell) < \tau_{-,i_\ell}(\eta_\ell) \mid \xi_{i_\ell})$$

et

$$\begin{aligned} \inf_{\xi_{i_\ell} \in J_{\eta_\ell}} \mathbb{P}(\tau_{+,i_\ell}(\eta_\ell) < \tau_{-,i_\ell}(\eta_\ell) \mid \xi_{i_\ell}) &\leq \mathbb{P}(\tau_{+,i_\ell}(\eta_\ell) < \tau_{-,i_\ell}(\eta_\ell) \mid \xi_{i_\ell} \in J_{\eta_\ell}, \\ &\quad \dots, \xi_0 \in J_{\eta_0}; \tau_\ell = i_\ell, \dots, \tau_1 = i_1) \\ &\leq \sup_{\xi_{i_\ell} \in J_{\eta_\ell}} \mathbb{P}(\tau_{+,i_\ell}(\eta_\ell) < \tau_{-,i_\ell}(\eta_\ell) \mid \xi_{i_\ell}) = \sup_{\xi_0 \in J_{\eta_\ell}} \mathbb{P}(\tau_{+,0}(\eta_\ell) < \tau_{-,0}(\eta_\ell) \mid \xi_0). \end{aligned} \quad (3.9)$$

En combinant avec (3.8) et en utilisant (3.7), on montre finalement que

$$\begin{aligned} \inf_{\xi_0 \in J_{\eta_\ell}} \mathbb{P}(\tau_{+,0}(\eta_\ell) < \tau_{-,0}(\eta_\ell) \mid \xi_0) &\leq \mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell + 1 \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0) \\ &\leq \sup_{\xi_0 \in J_{\eta_\ell}} \mathbb{P}(\tau_{+,0}(\eta_\ell) < \tau_{-,0}(\eta_\ell) \mid \xi_0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pour alléger les notations dans ce qui suit, nous écrirons $\tau_\pm(\eta) = \tau_{\pm,0}(\eta)$. La fin de cette preuve repose sur l'application du Théorème Portmanteau. Soient $\eta > \eta_+$ et $\xi \in J_\eta$. Introduisons l'ensemble $E(\eta)$ par :

$$E(\eta) = \{\tau_+(\eta) < \tau_-(\eta)\},$$

et soit $\mathbb{P}_\xi$ la probabilité conditionnelle définie par

$$\mathbb{P}_\xi(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid \xi_0 = \xi).$$

Ainsi

$$\inf_{\xi \in J_\eta} \mathbb{P}_\xi(\tau_+(\eta) < \tau_-(\eta)) = \inf_{\xi \in J_\eta} \mathbb{P}_\xi(E(\eta)), \quad (3.11)$$

$$\sup_{\xi \in J_\eta} \mathbb{P}_\xi(\tau_+(\eta) < \tau_-(\eta)) = \sup_{\xi \in J_\eta} \mathbb{P}_\xi(E(\eta)). \quad (3.12)$$

En remarquant que

$$E(\eta) = \{\forall n < \tau_+(\eta), \xi_n > 2^{n-1} + L\},$$

et en revenant aux notations (2.1.1), on obtient que, si $\xi \in J_\eta$,

$$E(\eta) \supseteq \left\{ \forall n < \tau_+(\eta), R^\varepsilon(t_n) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta) \right\},$$

où $\sigma_-(\eta) = (2^\eta + 2L) / (2^\eta - L)$. La fonction σ_- est alors décroissante et tend vers 1 lorsque $\eta \rightarrow +\infty$. Soit maintenant $\eta_* > \eta_+$, qu'on fixera plus tard et dépendant de δ . Soit $\eta > \eta_*$. Il suit alors que

$$\begin{aligned} E(\eta) &\supseteq \left\{ \forall n < \tau_+(\eta), R^\varepsilon(t_n) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta) \right\} \\ &\supseteq \left\{ \forall n < \tau_+(\eta), R^\varepsilon(t_n) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*) \right\}. \end{aligned}$$

Afin d'appliquer le Théorème Portemanteau, il faut remplacer les temps d'arrêt $\tau_+(\eta)$ pour la chaîne $(\xi_n)_n$ par des temps d'arrêt adaptés au processus continu en temps $(R^\varepsilon(t))_t$. Premièrement, remplaçons $\tau_+(\eta)$ par le temps d'arrêt du processus discret en temps $(R^\varepsilon(t_n))_n$:

$$\tau_+^\varepsilon = \inf \{n \geq 0 \mid R^\varepsilon(t_n) > 2\sigma_+(\eta_*)\},$$

où $\sigma_+(\eta_*) = (2\eta_* - L/2) / (2\eta_* - L)$ est aussi une fonction de η_* décroissante qui tend vers 1 quand $\eta_* \rightarrow +\infty$. Alors, pour tout $\eta > \eta_*$,

$$\tau_+^\varepsilon \geq \tau_+(\eta),$$

ce qui entraîne que, pour tout $\eta > \eta_*$ et tout $\xi \in J_\eta$:

$$E(\eta) \supseteq \{\forall n < \tau_+(\eta), R^\varepsilon(t_n) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*)\} \supseteq \{\forall n < \tau_+^\varepsilon, R^\varepsilon(t_n) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*)\}.$$

Soient maintenant les deux temps d'arrêt T_+^ε et T_-^ε adaptés au processus continu $(R^\varepsilon(t))_t$, et définis par

$$T_+^\varepsilon = \inf \{t \geq 0 \mid R^\varepsilon(t) = 2\sigma_+(\eta_*)\} \text{ et } T_-^\varepsilon = \inf \left\{ t \geq 0 \mid R^\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*) \right\}.$$

Comme $(R^\varepsilon(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est construit par interpolation linéaire entre les points $R^\varepsilon(t_n)$, $n \in \mathbb{N}$, et que $\tau_+^\varepsilon \in \mathbb{N}$, il suit que

$$(\tau_+^\varepsilon - 1)\varepsilon^2 < T_+^\varepsilon < \tau_+^\varepsilon \varepsilon^2,$$

et

$$\frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*) < R^\varepsilon((\tau_+^\varepsilon - 1)\varepsilon^2) < 2\sigma_+(\eta_*) < R^\varepsilon(\tau_+^\varepsilon \varepsilon^2).$$

D'où

$$\begin{aligned} & \left\{ \forall t < (\tau_+^\varepsilon - 1)\varepsilon^2, R^\varepsilon(t) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*); R^\varepsilon(0) = 1 \right\} \\ & \supseteq \left\{ \forall t < T_+^\varepsilon, R^\varepsilon(t) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*); R^\varepsilon(0) = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Finalement, on peut conclure que, pour tout $\eta > \eta_*$ et pour tout $\xi \in J_\eta$, avec $\varepsilon = \xi^{-1}$,

$$\mathbb{P}_\xi(E(\eta)) \geq \mathbb{P} \left(\forall t < T_+^\varepsilon, R^\varepsilon(t) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*) \mid R^\varepsilon(0) = 1 \right). \quad (3.14)$$

Le Théorème Portemanteau peut maintenant être appliqué afin d'obtenir une borne inférieure sur le terme de droite de l'inégalité (3.14). Dans ce but, on remarque tout d'abord que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\eta_* > \eta_+$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\forall t < T_+^\varepsilon, R^\varepsilon(t) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*) \mid R^\varepsilon(0) = 1 \right) \\ & = \mathbb{P} \left(\forall t < T_+^\varepsilon, R^\varepsilon(t) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*) \mid R^\varepsilon(0) \in \left] \frac{5}{6}, \frac{7}{6} \right] \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

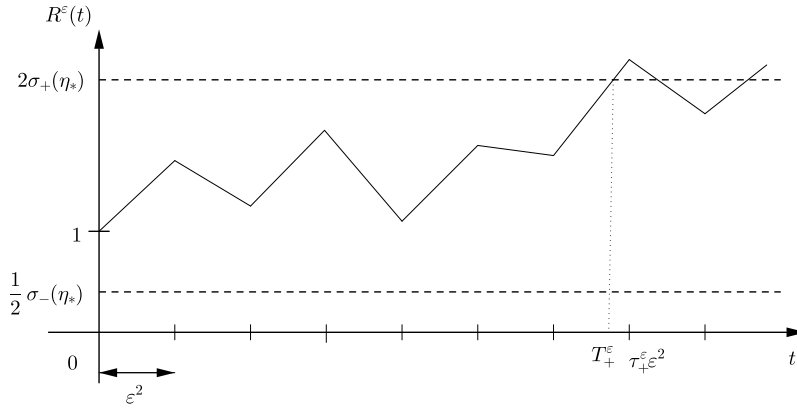


FIGURE 3.3: L'interpolation linéaire de $(R_n^\epsilon)_n$ entre t_n et t_{n+1} implique que $T_\pm^\epsilon$ est antérieur à $\epsilon^2 \tau_\pm^\epsilon$.

car $\mathbb{P}(R^\epsilon(0) \in]\frac{5}{6}, 1[\cup]1, \frac{7}{6}[) = 0$.

Soient $a_+ = 2\sigma_+(\eta_*)$ et $a_- = \sigma_-(\eta_*)/2$. L'ensemble

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}_+) \mid \forall t < T_{a_+}^\varphi, \varphi(t) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*); \varphi(0) \in \left] \frac{5}{6}, \frac{7}{6} \right[\right\}$$

avec $T_{a_+}^\varphi = \inf\{t \geq 0 \mid \varphi(t) = a_+\}$ étant ouvert, le Théorème Portmanteau et le Théorème 2.1.1 ainsi que le Lemme G.7 permettent d'obtenir la limite inférieure

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\forall t < T_+^\epsilon, R^\epsilon(t) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*)\right) &\geq \mathbb{P}(\forall t < T_{a_+}, R(t) > a_-) \\ &= \mathbb{P}(T_{a_+} < T_{a_-}) \\ &= \frac{a_-^{1-2\gamma} - 1}{a_-^{1-2\gamma} - a_+^{1-2\gamma}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où $(R(t))_t$ est un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$ et de condition initiale $R(0) = 1$ et

$$T_{a_-} := \inf\{t \geq 0; R(t) < a_-\} \text{ et } T_{a_+} := \inf\{t \geq 0; R(t) > a_+\}.$$

Comme $\sigma_\pm(\eta_*) \rightarrow 1$ lorsque $\eta_* \rightarrow +\infty$, il existe η_* assez grand, dépendant uniquement de δ et de L , tel que

$$\mathbb{P}(T_{a_+} < T_{a_-}) \geq p_+ - \frac{\delta}{2}, \text{ où } p_+ = \frac{2^{2\gamma-1} - 1}{2^{2\gamma-1} - 2^{1-2\gamma}} > \frac{1}{2},$$

lorsque $\gamma > 1/2$. L'inégalité (3.16) entraîne alors l'existence de $\tilde{\epsilon}$ tel que

$$\inf_{\epsilon < \tilde{\epsilon}} \mathbb{P}\left(\forall t < T_+^\epsilon, R^\epsilon(t) > \frac{1}{2}\sigma_-(\eta_*)\right) \geq p_+ - \delta.$$

Cette dernière équation combinée avec (3.10), (3.11) et (3.14), permet d'obtenir

$$\inf_{\eta_\ell > \tilde{\eta}} \mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell + 1 \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0) \geq p_+ - \delta, \quad (3.17)$$

où $\tilde{\eta} = \max\{\eta_*, \log_2(\tilde{\varepsilon}^{-1} + L)\}$. L'inégalité (3.17) est la borne inférieure escomptée. Pour contrôler la borne supérieure dans (3.10), on procède de la même manière. Premièrement, pour tout $\xi \in J_\eta$ et $\varepsilon = \xi^{-1}$,

$$\begin{aligned} E(\eta) &= \{\forall n < \tau_+(\eta), \xi_n > 2^{\eta-1} + L\} \\ &\subseteq \{\forall n < \tau_+(\eta), R^\varepsilon(t_n) > \frac{2^{\eta-1} + L}{2^\eta + L}\} \\ &\subseteq \{\forall n < \tau_+(\eta), R^\varepsilon(t_n) > \frac{1}{2}\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Maintenant, soit $\tilde{\eta}_* > \eta_+$, qu'on fixera plus tard, et soit $\eta > \tilde{\eta}_*$. Considérons les temps d'arrêt

$$\tilde{\tau}_+^\varepsilon = \inf\{n \geq 0 \mid R^\varepsilon(t_n) > 2\tilde{\sigma}_+(\tilde{\eta}_*)\}$$

où $\tilde{\sigma}_+(\tilde{\eta}_*) = (2^{\tilde{\eta}_*} - L/2) / (2^{\tilde{\eta}_*} + L)$. Cette fois-ci, $\tilde{\sigma}_+$ est une fonction croissante et converge vers 1 quand $\tilde{\eta}_* \rightarrow +\infty$. On vérifie alors facilement que $\tilde{\tau}_+^\varepsilon \leq \tau_+(\eta)$. Le processus $(R^\varepsilon(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ étant l'interpolation linéaire du processus discret $(R^\varepsilon(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned} \left\{ \forall n < \tau_+(\eta), R^\varepsilon(t_n) > \frac{1}{2} \right\} &\subseteq \left\{ \forall n < \tilde{\tau}_+^\varepsilon, R^\varepsilon(t_n) > \frac{1}{2}; R^\varepsilon(0) = 1 \right\} \\ &\subseteq \left\{ \forall t < \tilde{T}_+^\varepsilon, R^\varepsilon(t) > \frac{1}{2}; R^\varepsilon(0) = 1 \right\}, \end{aligned}$$

où $\tilde{T}_+^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 \mid R^\varepsilon(t) = 2\tilde{\sigma}_+(\tilde{\eta}_*)\}$ et $(\tilde{\tau}_+^\varepsilon - 1)\varepsilon^2 \leq \tilde{T}_+^\varepsilon < \tilde{\tau}_+^\varepsilon \varepsilon^2$. Finalement, on obtient

$$E_\xi(\eta) \subseteq \left\{ \forall t < \tilde{T}_+^\varepsilon, R^\varepsilon(t) > \frac{1}{2}; R^\varepsilon(0) = 1 \right\}. \quad (3.19)$$

Soit $\tilde{a}_+ = 2\tilde{\sigma}_+(\tilde{\eta}_*)$, l'ensemble

$$\{\varphi \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}_+) \mid \forall t \leq T_{\tilde{a}_+}^\varphi, \varphi(t) > \frac{1}{2}; \varphi(0) = 1\}$$

avec $T_{\tilde{a}_+}^\varphi = \inf\{t \geq 0 \mid \varphi(0) = 1, \varphi(t) = \tilde{a}_+\}$ est fermé, donc le Théorème Portman-teau et le Théorème 2.1.1 impliquent que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\forall t \leq \tilde{T}_+^\varepsilon, R^\varepsilon(t) > \frac{1}{2}\right) \leq \mathbb{P}\left(\forall t \leq T_{\tilde{a}_+}, R(t) > \frac{1}{2}\right), \quad (3.20)$$

où $(R(t))_t$ est, comme précédemment, un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$ et de condition initiale $R(0) = 1$. Soit $\tilde{a}_- = \frac{1}{2}$; le Lemme G.7 implique alors

$$\mathbb{P}\left(\forall t \leq T_{\tilde{a}_+}, R(t) > \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(T_{\tilde{a}_-} > T_{\tilde{a}_+}) = \frac{2^{2\gamma-1} - 1}{2^{2\gamma-1} - \tilde{a}_+^{1-2\gamma}}. \quad (3.21)$$

Les deux dernières relations (3.20) et (3.21) montrent l'existence de $\tilde{\varepsilon} > 0$ dépendant uniquement de δ et tel que

$$\sup_{0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}} \mathbb{P} \left(\forall t \leq \tilde{T}_+^\varepsilon, R^\varepsilon(t) > \frac{1}{2} \right) \leq p_+ + \delta.$$

Combinée avec (3.10) et (3.19), cette dernière inégalité implique l'existence de $\tilde{\eta} > \eta_+$ tel que

$$\sup_{\eta_\ell > \tilde{\eta}} \mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell + 1 \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0) \leq p_+ + \delta,$$

qui est la borne supérieure attendue. $\square$

Démonstration de la Proposition 3.2.2, affirmations ii) et iii). Le processus auxiliaire est une sous-martingale. En effet, en utilisant l'affirmation i) de ce lemme,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta_{\ell+1} \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0) &= (\eta_\ell + 1) \mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell + 1 \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0) \\ &\quad + (\eta_\ell - 1) (1 - \mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell + 1 \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0)) \\ &= \eta_\ell + 2\mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell + 1 \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0) - 1 \\ &> \eta_\ell. \end{aligned}$$

Ainsi, le Théorème A.9 permet de décomposer η_ℓ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ en :

$$\eta_\ell = \eta_0 + M_\ell + A_\ell,$$

où

$$M_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} (\eta_j - \mathbb{E}(\eta_j \mid \eta_{j-1}, \dots, \eta_0)),$$

et

$$A_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} (\mathbb{E}(\eta_j \mid \eta_{j-1}, \dots, \eta_0) - \eta_{j-1}).$$

Le processus $(M_\ell)_\ell$ est une martingale pour la filtration engendrée par le processus $(\eta_\ell)_\ell$, et

$$|\eta_\ell - (\eta_0 + \mu\ell)| \leq |M_\ell| + \sum_{j=1}^{\ell} |(\mathbb{E}(\eta_j \mid \eta_{j-1}, \dots, \eta_0) - \eta_{j-1}) - \mu|,$$

où $\mu = 2p_+ - 1 > 0$. L'affirmation i) de ce lemme implique que, pour tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{\eta} > \eta_+$ tel que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\eta_{\ell-1}, \dots, \eta_0 > \tilde{\eta} \Rightarrow |\eta_\ell - (\eta_0 + \mu\ell)| \leq |M_\ell| + \frac{\delta}{2}\ell. \quad (3.22)$$

Maintenant, pour tout $N > 0$, définissons

$$F_N = \left\{ |M_\ell| \leq \frac{\delta}{2}\ell, \forall \ell \geq N \right\}. \quad (3.23)$$

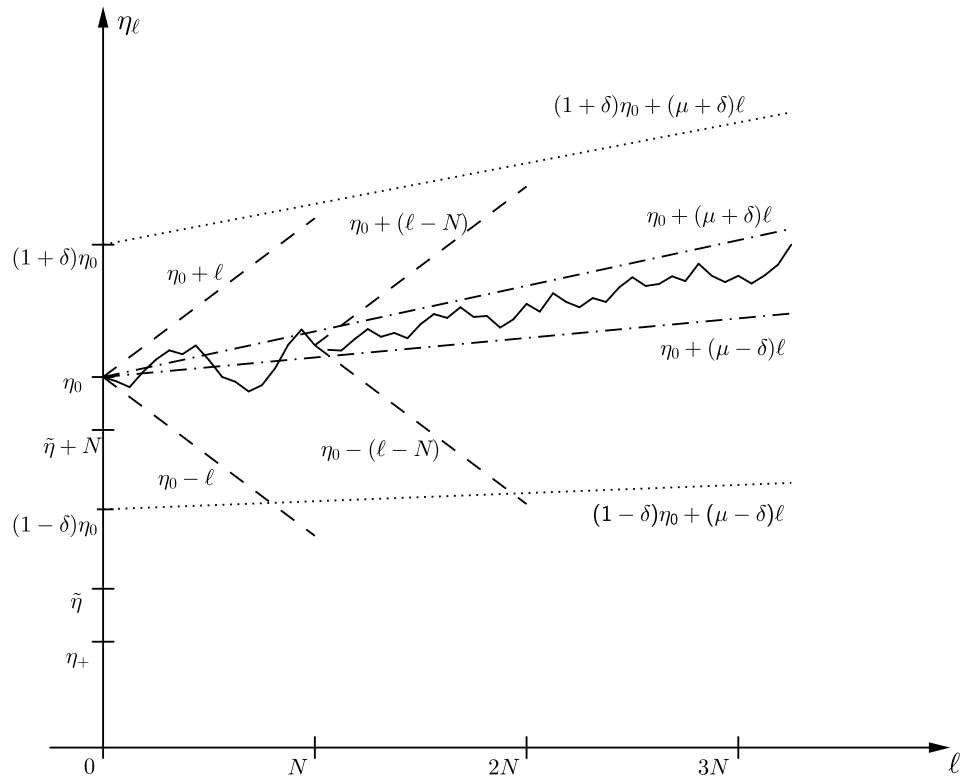


FIGURE 3.4: Une trajectoire typique de η_ℓ , sur F_N , comme définie par (3.23).

Alors, sur F_N , et pourvu que $\eta_0 > \tilde{\eta} + N > \eta_+ + N$ soit tel que $\eta_{N-1}, \dots, \eta_0 > \tilde{\eta}$, on a

$$|\eta_N - (\eta_0 + \mu N)| \leq \delta N,$$

et en particulier

$$\eta_N > \eta_0 > \tilde{\eta} + N.$$

Pour tout $0 \leq j \leq 2N$, on a alors $\eta_j > \tilde{\eta}$ et il est possible d'appliquer (3.22) pour tout $N \leq \ell \leq 2N$ et ainsi conclure que, sur F_N , et sous la condition $\eta_0 > \tilde{\eta} + N > \eta_+ + N$, on a

$$|\eta_\ell - (\eta_0 + \mu\ell)| \leq |M_\ell| + \frac{\delta}{2}\ell \leq \delta\ell. \quad (3.24)$$

Récursivement, (3.24) s'étend sur F_N , pour tout $N \leq \ell$. Pour tout $0 \leq \ell \leq N$, d'après (3.22),

$$|\eta_\ell - (\eta_0 + \mu\ell)| \leq |M_\ell| + \frac{\delta}{2}\ell \leq 2N + \delta\ell.$$

D'où, en choisissant $\eta_0 > 2N/\delta$, on peut conclure que, pour tout $0 \leq \ell \leq N$,

$$|\eta_\ell - (\eta_0 + \mu\ell)| \leq \delta(\eta_0 + \ell).$$

Cette dernière équation ainsi que (3.24) permettent d'affirmer que, pour tout $\delta > 0$ et tout $N > 0$, si

$$\eta_0 > \eta_* = \max \left\{ \tilde{\eta} + N, \frac{2N}{\delta} \right\},$$

alors

$$\mathbb{P}(\forall \ell \in \mathbb{N}, |\eta_\ell - (\eta_0 + \mu\ell)| \leq \delta(\eta_0 + \ell)) \geq \mathbb{P}(F_N). \quad (3.25)$$

Il reste alors à montrer que, pour δ et p donnés, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{P}(F_N) \geq 1 - p$$

afin de conclure cette preuve. Pour cela, on introduit la variation quadratique du processus $(M_\ell)_\ell$,

$$D_\ell^2 = \sum_{i=1}^{\ell} (M_i - M_{i-1})^2.$$

D'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{E} \left(\left(\max_{0 \leq i \leq \ell} |M_i| \right)^4 \right) \leq C \mathbb{E}(D_\ell^4).$$

La définition du processus $(\eta_\ell)_\ell$ et de la martingale $(M_\ell)_\ell$ implique immédiatement que, presque sûrement, $|M_\ell - M_{\ell-1}| \leq 2$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, et entraîne que $\mathbb{E}(D_\ell^4) \leq 4\ell^2$. D'où, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P} \left(|M_\ell| > \frac{\delta}{2}\ell \right) \leq \mathbb{P} \left(\max_{0 \leq i \leq \ell} |M_i| > \frac{\delta}{2}\ell \right) \leq \frac{2^4}{\delta^4 \ell^4} C 4\ell^2 = \frac{\tilde{C}}{\delta^4 \ell^2},$$

où $\tilde{C}$ est une constante numérique. Il suit alors que

$$\mathbb{P}(F_N) \geq 1 - \sum_{\ell \geq N} \mathbb{P}\left(|M_\ell| > \frac{\delta}{2}\ell\right) \geq 1 - \frac{\tilde{C}}{\delta^4 N}.$$

L'inégalité (3.25) permet de conclure en prenant $N = \tilde{C}/(\delta^4 p)$.

iii) C'est une conséquence immédiate de ii). En effet sur l'ensemble où, pour tout $\delta > 0$:

$$\{\forall \ell \in \mathbb{N}, |\eta_\ell - \mu\ell - \eta_0| \leq \delta(\ell + \eta_0)\}$$

est vérifié, on obtient, en prenant $\delta > 0$ arbitrairement petit, que, comme $\mu > 0$,

$$\left\{\forall \ell \in \mathbb{N}, \eta_\ell > \frac{\eta_0}{2}\right\}. \quad \square$$

3.3 Contrôle des temps de séjour

Afin d'établir la preuve du Théorème 1.4.2, il faut combiner la Proposition 3.2.2 obtenue dans la section précédente avec des estimations sur les temps de séjour $\tau_{\ell+1} - \tau_\ell$ entre les visites successives de la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ dans $\mathcal{N}_L$. Dans cette section, on montrera que $\tau_{\ell+1} - \tau_\ell \sim 2^{2\eta_\ell}$ ce qui permettra de conclure que

$$\tau_\ell \sim 2^{2\mu\ell} \text{ et } \xi_{\tau_\ell} \sim \sqrt{\tau_\ell}.$$

Remarque 3.3.1. La suite $(\tau_\ell)_\ell$ est croissante, ce qui engendre la dichotomie suivante : soit la suite $(\tau_\ell)_\ell$ est strictement croissante, et dans ce cas $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \tau_\ell = +\infty$ et, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\eta_\ell > \eta_+$; soit on a l'existence de $L_* \in \mathbb{N}$ et d'un temps $T_* > 0$ tels que $\tau_\ell = T_*$ et $\eta_\ell = \eta_+$, pour tout $\ell \geq L_*$.

Le lemme suivant montre que sur un espace de grande probabilité et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ avec $\eta_0, \dots, \eta_\ell, \tau_0, \dots, \tau_\ell$ bien définis, le temps $\tau_{\ell+1}$ est aussi fini. La chaîne de Markov $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne reste pas bloquée dans un intervalle s'écrivant $]2^{\eta-1} + L, 2^{\eta+1} - L[$.

Lemme 3.3.2. Pour tout $p > 0$, il existe $\tilde{\eta} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et pour tout $\eta_\ell > \tilde{\eta}$, $\tau_\ell \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\tau_{\ell+1} < +\infty \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0, \tau_\ell, \dots, \tau_0) > 1 - p.$$

Démonstration. Premièrement, remarquons que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tau_{\ell+1} < +\infty \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0, \tau_\ell, \dots, \tau_0) \\ &= \mathbb{P}(\exists n > \tau_\ell; \xi_n \notin (2^{\eta_\ell-1} + L, 2^{\eta_\ell+1} - L) \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0, \tau_\ell, \dots, \tau_0). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Maintenant, pour tous $\eta \in \mathbb{Z}$ et $\tau > 0$ et pour tout $\xi_0 = \xi \in J_\eta$, soit l'ensemble

$$E_\xi(\eta, \tau) := \{(\omega_j)_j; \exists n > \tau; \xi_n \notin]2^{\eta-1} + L, 2^{\eta+1} - L[, \xi_0 = \xi\}.$$

Les inclusions suivantes sont alors vérifiées :

$$\begin{aligned} E_\xi(\eta, \tau) &= \left\{ (\omega_j)_j ; \exists n > \tau ; R^\varepsilon(t_n) \notin \left[\frac{2^{\eta-1} + L}{\xi_0}, \frac{2^{\eta+1} - L}{\xi_0} \right] , \xi_0 = \xi \right\} \\ &\supseteq \left\{ (\omega_j)_j ; \exists n > \tau ; R^\varepsilon(t_n) \notin \left[\frac{2^{\eta-1} + L}{2^\eta + L}, \frac{2^{\eta+1} - L}{2^\eta - L} \right] , R^\varepsilon(0) = 1 \right\} \\ &\supseteq \left\{ (\omega_j)_j ; \exists t > 0 ; R^\varepsilon(t) \notin \left[\frac{1}{2}, 2 \right] , R^\varepsilon(0) = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

L'ensemble

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}_+^*) ; \exists t > 0, \varphi(t) \notin \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \right\}$$

étant ouvert, on peut utiliser le Théorème Portmanteau et le Théorème 2.1.1 afin d'obtenir que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\exists t > 0 ; R^\varepsilon(t) \notin \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \right) \geq \mathbb{P} \left(\exists t > 0, R(t) \notin \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \right). \quad (3.28)$$

De plus,

$$\mathbb{P} \left(\exists t > 0, R(t) \notin \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \right) \geq \mathbb{P} \left(\exists t > 0, R(t) \notin \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \right), \quad (3.29)$$

où $(R(t))_t$ est un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$. Lorsque $\gamma > \frac{1}{2}$, le processus $(R(t))_t$ est alors transient, il ne peut donc pas rester dans un ensemble compact indéfiniment, ce qui permet d'affirmer que

$$\mathbb{P} \left(\exists t > 0, R(t) \notin \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \right) = 1. \quad (3.30)$$

Combinée avec (3.30), (3.29) et (3.28), l'égalité (3.30) implique que, pour tout $p > 0$, il existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ tel que

$$\inf_{0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}} \mathbb{P} \left(\exists t > 0, R^\varepsilon(t) \notin \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \right) > 1 - p.$$

Alors, d'après (3.27), il suit que, pour tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{\eta} = \log_2(\tilde{\varepsilon}^{-1} - L)$ tel que

$$\inf_{\eta_\ell > \tilde{\eta}} \mathbb{P} \left(\exists k > \tau_\ell ; \xi_k \notin \left[2^{\eta_\ell-1} + L, 2^{\eta_\ell+1} - L \right] \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0, \tau_\ell, \dots, \tau_0 \right) > 1 - p. \quad \square$$

Les principaux résultats de cette section sont les affirmations ii) et iv) de la Proposition 3.3.4, qui contrôlent les temps de séjour $\tau_\ell - \tau_{\ell-1}$. Grossièrement, les temps $\tau_{\ell+1} - \tau_\ell$ représentent le temps nécessaire à la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ pour passer de ξ_{τ_ℓ} soit à $2\xi_{\tau_\ell}$, soit à $\frac{1}{2}\xi_{\tau_\ell}$. Ces résultats de contrôle se montrent comme dans la précédente section en utilisant le Théorème Portmanteau avec le Théorème 2.1.1.

Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, tout $b_- < 1 < b_+$, et tout $r > 0$, définissons le temps d'arrêt

$$K_{n_0} = \inf \{ n \in \mathbb{N} \mid \xi_{n_0+n} \notin]b_-, b_+ r[\}. \quad (3.31)$$

Si $\xi_{n_0} \notin]b_-, b_+ r[$, alors $K_{n_0} = 0$. Dans le cas contraire, $K_{n_0} > 0$ et $n_0 + K_{n_0} - 1$ est le dernier instant pour lequel la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ est encore dans l'intervalle $]b_-, b_+ r[$. Le lemme suivant donne un contrôle sur K_{n_0} que nous utiliserons dans la suite.

Lemme 3.3.3. Soient $\gamma > 1/2$ et $(\xi_n)_n$ une chaîne de Markov vérifiant l'Hypothèse 1.4.1.

i) Il existe $\xi_* > \xi_+$ et $0 < q_- < 1$ tels que, pour tous $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{r \geq \xi_*} \sup_{\xi_{n_0} \in]b_-, b_+ r[} \mathbb{P}(mr^2 < K_{n_0} \mid \xi_{n_0}) \leq q_-^m < 1. \quad (3.32)$$

ii) Soient b'_-, b'_+ tels que $b_- < b'_- < 1 < b'_+ < b_+$. Alors il existe $\xi_* > \xi_+$ et $0 < q_+ < 1$ tels que, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{r \geq \xi_*} \sup_{\xi_{n_0} \in]b'_-, b'_+ r[} \mathbb{P}(K_{n_0} \leq r^2 \mid \xi_{n_0}) \leq q_+ < 1. \quad (3.33)$$

Démonstration. i) On considère tout d'abord le cas $m = 1$. Soient $r > 0$ et $\xi_{n_0} \in]b_-, b_+ r[$. La nature homogène de la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ implique qu'on peut prendre $n_0 = 0$ sans altérer le résultat. Soit $\varepsilon = \xi_0^{-1}$; on considère l'ensemble

$$\begin{aligned} \{K_0 > r^2\} &= \{\forall 0 \leq n \leq r^2, \xi_n \in]b_-, b_+ r[\} \\ &= \{\forall t_n \leq \varepsilon^2 r^2, R^\varepsilon(t_n) \in]\varepsilon b_-, \varepsilon b_+ r[\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

En choisissant (b_-, b_+, r) tel que $(b_+ r)^{-1} < \varepsilon < (b_- r)^{-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} \{K_0 > r^2\} &\subseteq \left\{ \forall t_n \leq \varepsilon^2 r^2, R^\varepsilon(t_n) \in \left] \frac{b_-}{b_+}, \frac{b_+}{b_-} \right[\right\} \\ &\subseteq \left\{ \forall t_n \leq T, R^\varepsilon(t_n) \in \left] \frac{b_-}{b_+}, \frac{b_+}{b_-} \right[\right\}, \end{aligned}$$

où $T = 1/(2b_+^2)$. Afin d'avoir $\varepsilon^2 < T$, choisissons $r > (b_- \sqrt{T})^{-1}$. Soit $\tilde{K} \in \mathbb{N}$ tel que, pour $t_{\tilde{K}} \leq 2T < t_{\tilde{K}+1}$, on a $T < t_{\tilde{K}}$. Comme $(R^\varepsilon(t))_t$ est construit par interpolation linéaire entre les points $R^\varepsilon(t_n)$, $n \in \mathbb{N}$, on peut conclure que

$$\begin{aligned} \left\{ \forall t_n \leq T, R^\varepsilon(t_n) \in \left] \frac{b_-}{b_+}, \frac{b_+}{b_-} \right[\right\} &\subseteq \left\{ \forall t \leq T, R^\varepsilon(t) \in \left] \frac{b_-}{b_+}, \frac{b_+}{b_-} \right[\right\} \\ &\subseteq \left\{ \forall t \leq T, R^\varepsilon(t) \in \left[\frac{b_-}{b_+}, \frac{b_+}{b_-} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $r > (b_- \sqrt{T})^{-1}$, et tout $\xi_0 \in]b_-, b_+ r[$,

$$\mathbb{P}(K_0 > r^2) \leq \mathbb{P}\left(\forall t \leq T, R^\varepsilon(t) \in \left[\frac{b_-}{b_+}, \frac{b_+}{b_-} \right]\right). \quad (3.35)$$

L'ensemble

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}_*) \mid \forall t \in [0, T], \varphi(t) \in \left[\frac{b_-}{b_+}, \frac{b_+}{b_-} \right] \right\}$$

étant fermé, le Théorème Portmanteau et le Théorème 2.1.1 permettent d'affirmer qu'il existe $\varepsilon_* > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_*$,

$$\mathbb{P}\left(\forall t \leq T, R^\varepsilon(t) \in \left[\frac{b_-}{b_+}, \frac{b_+}{b_-} \right]\right) \leq q_-, \quad (3.36)$$

où $q_- = \frac{1}{2}(1 + \tilde{q}_-)$ et

$$\tilde{q}_- = \mathbb{P} \left(\forall t \in [0, T], R(t) \in \left[\frac{b_-}{b_+}, \frac{b_+}{b_-} \right] \right).$$

Le Lemme G.7 implique que $\tilde{q}_- < 1$ et donc que $q_- < 1$. Les relations (3.35) et (3.36) ont alors pour conséquence que, pour tout $r > \xi_*$ avec

$$\xi_* = \max\{(b_- \sqrt{T})^{-1}, (b_- \varepsilon_*)^{-1}\}$$

et pour tout $\xi_0 \in]b_- r, b_+ r[$, on a :

$$\mathbb{P}(K_0 > r^2) \leq q_- < 1.$$

L'affirmation (3.32) est alors vérifiée avec $m = 1$ et il ne reste plus qu'à la vérifier pour $m > 1$. C'est une conséquence du caractère markovien de la chaîne $(\xi_n)_n$. En effet, soit $\Delta =]b_- r, b_+ r[$ et introduisons $K_* = \lfloor r^2 \rfloor$. Premièrement, remarquons que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K_{n_0} > mK_* \mid \xi_{n_0}) &= \mathbb{P}(\xi_{n_0+1} \in \Delta, \dots, \xi_{n_0+mK_*} \in \Delta \mid \xi_{n_0}) \\ &= \prod_{s=0}^{m-1} \prod_{i=1}^{K_*} \int_{\xi_{n_0+sK_*+i} \in \Delta} \mathbb{P}(d\xi_{n_0+sK_*+i} \mid \xi_{n_0+sK_*+i-1}) \\ &= \prod_{s=0}^{m-1} \int_{\xi_{n_0+(s+1)K_*} \in \Delta} L_{K_*}(d\xi_{n_0+(s+1)K_*}, \xi_{n_0+sK_*}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

où

$$\begin{aligned} L_{K_*}(A, y) &:= \int_{\xi_{n_0+(s+1)K_*} \in A} \int_{\xi_{n_0+(s+1)K_*-1} \in \Delta} \dots \\ &\int_{\xi_{n_0+sK_*+1} \in \Delta} \prod_{i=2}^{K_*} \mathbb{P}(d\xi_{n_0+sK_*+i} \mid \xi_{n_0+sK_*+i-1}) \mathbb{P}(d\xi_{n_0+sK_*+1} \mid \xi_{n_0+sK_*} = y) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{n_0+(s+1)K_*} \in A, \xi_{n_0+sK_*+i} \in \Delta, 1 \leq i < K_* \mid \xi_{n_0+sK_*} = y). \end{aligned}$$

Notons que, comme $(\xi_n)_n$ est homogène en temps, $L_{K_*}(A, y)$ ne dépend ni de s ni de n_0 . Prenons $A = \Delta$ et $y \in \Delta$; alors

$$L_{K_*}(\Delta, y) = \mathbb{P}(K_{n_0} > K_* \mid \xi_{n_0} = y).$$

En utilisant (3.37) et (3.32) avec $m = 1$, il suit que, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$,

$$\mathbb{P}(K_{n_0} > mK_* \mid \xi_{n_0}) \leq q_-^m,$$

ce qui conclut la preuve de l'affirmation i).

ii) L'argument utilisé ici est analogue à la première partie de l'affirmation i) de ce lemme. À nouveau, grâce à l'homogénéité en temps de la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$, il est suffisant de montrer le résultat pour $n_0 = 0$.

Soit $\xi_0 \in]b'_-r, b'_+r[\subset]b_-r, b_+r[$. Alors

$$\begin{aligned} \{K_0 \leq r^2\} &= \{\exists n \leq r^2, \xi_n \notin \Delta\} \\ &\subseteq \left\{ \exists t_n \leq \frac{1}{b_-^2}, R^\varepsilon(t_n) \notin \left] \frac{b_-}{b'_-}, \frac{b_+}{b'_+} \right[\right\} \\ &\subseteq \left\{ \exists t \in [0, T], R^\varepsilon(t) \notin \left] \frac{b_-}{b'_-}, \frac{b_+}{b'_+} \right[\right\} \end{aligned}$$

où on pose $T = 1/(b'_-)^2$. L'ensemble

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}_*) \mid \exists t \in [0, T], \varphi(t) \notin \left] \frac{b_-}{b'_-}, \frac{b_+}{b'_+} \right[\right\}$$

étant fermé, le Théorème Portmanteau et le Théorème 2.1.1 s'appliquent avec le Lemme G.7 pour obtenir (3.33) avec

$$q_+ = \frac{1}{2}(1 + \tilde{q}_+), \quad \tilde{q}_+ = \mathbb{P} \left(\exists t \in [0, T], R_t \notin \left] \frac{b_-}{b'_-}, \frac{b_+}{b'_+} \right[\right) < 1. \quad \square$$

Afin d'énoncer le principal résultat de cette section, on introduit de « bons » ensembles sur lesquels les temps de séjour sont correctement contrôlés et nous montrons que ces ensembles ont une probabilité proche de 1. Soient $\eta_0 > \eta_+$ et $\delta > 0$ fixés et soient deux suites croissantes $(k_\ell^\pm)$ d'entiers positifs, avec $0 < k_\ell^- \leq \ell$. Définissons de plus la suite

$$a_\ell = 2^{2[(1-\delta)\eta_0 + (\mu-\delta)(\ell-1-k_\ell^-)]} 2^{-\delta k_\ell^-}, \quad (3.38)$$

et introduisons les ensembles

$$G_1 = \{\forall \ell \in \mathbb{N}, |\eta_\ell - \mu\ell - \eta_0| \leq \delta(\ell + \eta_0)\} = \cap_\ell G_1(\ell), \quad (3.39)$$

$$G_2 = \{\forall \ell \in \mathbb{N}_*, \tau_\ell - \tau_{\ell-1} \leq k_{\ell-1}^+ 2^{2\eta_{\ell-1}}\} = \cap_\ell G_2(\ell), \quad (3.40)$$

$$G_3 = \{\forall \ell \in \mathbb{N}_*, \exists k, \ell - k_\ell^- \leq k \leq \ell, \tau_k - \tau_{k-1} \geq a_\ell\} = \cap_\ell G_3(\ell), \quad (3.41)$$

$$G = G_1 \cap G_2 \cap G_3.$$

En posant $\delta = 0$, $k_\ell^- = 0$, $k_{\ell-1}^+ = 1$ et en utilisant (3.38), on vérifie facilement que les éléments appartenant à G vérifient

$$\tau_\ell \sim 2^{2\mu\ell} \text{ et } \xi_{\tau_\ell} \sim 2^{\mu\ell},$$

ce qui signifie que

$$\xi_{\tau_\ell} \sim \sqrt{\tau_\ell},$$

qui est la loi de puissance que nous voulons établir. Dans ce cas, on ne peut pas espérer obtenir une borne inférieure acceptable sur $\mathbb{P}(G)$. Pour le faire, il faut grossir un peu l'ensemble G en prenant $\delta > 0$ et en choisissant des suites croissantes $k_\ell^\pm$ appropriées, ce qui nous permettra de montrer que $\mathbb{P}(G)$ est proche de 1. C'est l'objet de la proposition suivante, qui utilise la Proposition 3.2.2 et le Lemme 3.3.3.

Proposition 3.3.4. Soient les ensembles G_1 , G_2 et G_3 définis par (3.39), (3.40) et (3.41). Alors

i) Pour tout $0 \leq p < 1$ et pour tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{\eta} > \eta_+$ tel que, pour tout $\eta_0 > \tilde{\eta}$ et pour toutes les suites $(k_\ell^+)_{\ell \in \mathbb{N}}$, on a

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2) \geq 1 - \sum_{\ell=1}^{+\infty} q_-^{k_{\ell-1}^+} - \frac{p}{4}, \quad (3.42)$$

où q_- est défini dans l'affirmation i) du Lemme 3.3.3.

ii) Soit $0 < \hat{\nu} < 1$. Alors il existe $\hat{\delta} > 0$ tel que, pour tout $0 < \delta \leq \hat{\delta}$ et $k_\ell^+ = 2^{\delta(\ell+\eta_0)}$, il existe $\tilde{\eta}$ tel que, pour tout $\eta_0 \geq \tilde{\eta}$,

$$\left\{ \forall \ell \in \mathbb{N}, \tau_\ell^{1-\hat{\nu}} \leq \frac{1}{2} 2^{2\eta_\ell} ; G_1 \right\} \supseteq G_1 \cap G_2,$$

d'où $\mathbb{P} \left(\forall \ell \in \mathbb{N}, \tau_\ell^{1-\hat{\nu}} \leq \frac{1}{2} 2^{2\eta_\ell} ; G_1 \right) \geq \mathbb{P}(G_1 \cap G_2).$

iii) Pour tout $0 \leq p < 1$, et pour tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{\eta} > \eta_+$ tel que, pour tout $\eta_0 \geq \tilde{\eta}$ et pour toutes les suites $0 < k_\ell^- \leq \ell$, on a

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_3) \geq 1 - \sum_{\ell=1}^{+\infty} q_+^{k_\ell^-} - \frac{p}{4}, \quad (3.43)$$

où q_+ est défini dans l'affirmation ii) du Lemme 3.3.3.

iv) Pour tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{\eta} > \eta_+$ tel que, pour tout $\eta_0 \geq \tilde{\eta}$,

$$\left\{ \forall \ell \in \mathbb{N}, \tau_\ell \geq a_\ell ; G_1 \right\} \supseteq G_1 \cap G_3,$$

d'où $\mathbb{P}(G_1, \forall \ell \in \mathbb{N}, \tau_\ell \geq a_\ell ; G_1) \geq \mathbb{P}(G_1 \cap G_3),$

avec $k_\ell^- = \min\{\delta(\ell + \eta_0), \ell\}$ et où a_ℓ est donné dans (3.38).

Remarque 3.3.5. Il est important de voir que, dans le but d'obtenir une borne supérieure satisfaisante sur $\tau_\ell - \tau_{\ell+1}$ dans l'affirmation i) du Lemme 3.3.3, une première idée serait de prendre k_ℓ^+ petit, ou au moins borné dans le membre de gauche de (3.42), mais ces estimations sont utiles seulement si k_ℓ^+ est grand pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tend vers $+\infty$ quand $\ell \rightarrow +\infty$. C'est en effet nécessaire pour que la somme du terme de droite converge vers une petite valeur.

Démonstration. i) Premièrement, l'affirmation ii) de la Proposition 3.2.2 implique que, pour tout $0 \leq p < 1$ et tout $\delta > 0$, il existe $\eta_* > \eta_+$ tel que, pour tout $\eta_0 \geq \eta_*$,

$$\mathbb{P}(G_1) \geq 1 - \frac{p}{2}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2) \geq 1 - \frac{p}{2} - \mathbb{P}(G_1 \cap G_2^c). \quad (3.44)$$

Maintenant,

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2^c) \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_2(\ell)^c \cap G_1) \quad (3.45)$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_2(\ell)^c \cap G_1(\ell-1)) \quad (3.46)$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_2(\ell)^c | G_1(\ell-1)) \quad (3.47)$$

et, pour tout $\ell \in \mathbb{N}_*$,

$$\mathbb{P}(G_2(\ell)^c | G_1(\ell-1)) \leq \sup_{\eta_{\ell-1} \in I_{\ell-1}} \mathbb{P}(G_2(\ell)^c | \eta_{\ell-1}), \quad (3.48)$$

où nous utilisons que $G_1(\ell-1) = \{\eta_{\ell-1} \in I_{\ell-1}\}$ avec

$$I_{\ell-1} = [\eta_0(1-\delta) + (\mu-\delta)(\ell-1), \eta_0(1+\delta) + (\mu+\delta)(\ell-1)].$$

Maintenant procédons comme dans le début de la preuve du Lemme 3.2.2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_2(\ell)^c | \eta_{\ell-1}) &= \mathbb{P}(\tau_\ell - \tau_{\ell-1} > k_{\ell-1}^+ 2^{2\eta_{\ell-1}} | \eta_{\ell-1}) \\ &= \sum_i \mathbb{P}(\tau_\ell - \tau_{\ell-1} > k_{\ell-1}^+ 2^{2\eta_{\ell-1}} | \eta_{\ell-1}, \tau_{\ell-1} = i) \mathbb{P}(\tau_{\ell-1} = i | \eta_{\ell-1}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$ et $\eta_{\ell-1} > \eta_*$, on a alors en utilisant (3.6) :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\tau_\ell - \tau_{\ell-1} > k_{\ell-1}^+ 2^{2\eta_{\ell-1}} | \eta_{\ell-1}, \tau_{\ell-1} = i) \\ &= \mathbb{P}\left(\inf\{k; \xi_{i+k} \notin\} 2^{\eta_{\ell-1}-1} + L, 2^{\eta_{\ell-1}+1} - L[\} > k_{\ell-1}^+ 2^{2\eta_{\ell-1}} | \xi_i \in J_{\eta_{\ell-1}}, \right. \\ &\quad \left. \tau_{\ell-1} = i\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\tau_\ell - \tau_{\ell-1} > k_{\ell-1}^+ 2^{2\eta_{\ell-1}} | \eta_{\ell-1}, \tau_{\ell-1} = i) \\ &\leq \sup_{\xi_i \in J_{\eta_{\ell-1}}} \mathbb{P}(\inf\{k; \xi_{i+k} \notin\} 2^{\eta_{\ell-1}-1} + L, 2^{\eta_{\ell-1}+1} - L[\} > k_{\ell-1}^+ 2^{2\eta_{\ell-1}} | \xi_i) \\ &\leq \sup_{\xi_i \in J_{\eta_{\ell-1}}} \mathbb{P}(\inf\{k | \xi_{i+k} \notin\} 2^{\eta_{\ell-1}-1}, 2^{\eta_{\ell-1}+1}[\} > k_{\ell-1}^+ 2^{2\eta_{\ell-1}} | \xi_i). \end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\inf\{k | \xi_{i+k} \notin\} 2^{\eta_{\ell-1}-1}, 2^{\eta_{\ell-1}+1}[\} = K_i,$$

où K_i est défini dans (3.31), avec $b_- = \frac{1}{2}$, $b_+ = 2$ et $r = 2^{\eta_{\ell-1}}$. L'affirmation i) du Lemme 3.3.3 et ce qui précède impliquent que, sous la condition $2^{\tilde{\eta}} \geq \xi_*$, on a, pour tout $\eta_{\ell-1} \geq \tilde{\eta}$,

$$\mathbb{P}(\tau_\ell - \tau_{\ell-1} > k_{\ell-1}^+ 2^{2\eta_{\ell-1}} | \eta_{\ell-1}, \tau_{\ell-1} = i) \leq q_-^{k_{\ell-1}^+}.$$

En utilisant cette dernière inégalité avec (3.45), on obtient que, pour tout $\tilde{\eta} \geq \log_2 \xi_*$,

$$\mathbb{P}(G_2(\ell)^c | \eta_{\ell-1}) = \mathbb{P}(\tau_\ell - \tau_{\ell-1} > k_{\ell-1}^+ 2^{2\eta_{\ell-1}} | \eta_{\ell-1}) \leq p_-^{k_{\ell-1}^+},$$

ce qui, combiné avec (3.44)-(3.48), implique le résultat pourvu que $\tilde{\eta} \geq \max\{\eta_*, \log_2 \xi_*\}$.

ii) Soit $\delta > 0$. Un simple calcul sur l'ensemble $G_1 \cap G_2$, avec $k_\ell^+ = 2^{\delta(\ell+\eta_0)}$, implique

$$\tau_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} \tau_k - \tau_{k-1} \leq (2^{2\mu} - 1)^{-1} 2^{2[(1+\frac{3}{2}\delta)\eta_0 + (\mu+\frac{3}{2}\delta)\ell]}.$$

Soit $\hat{\nu} > 0$ et introduisons

$$\hat{\delta} = (5 - 3\hat{\nu})^{-1} \min(2\mu\hat{\nu}, 2\hat{\nu} - \eta_+^{-1}((1 - \hat{\nu}) \log_2 |2^{2\mu} - 1| - 1)).$$

Il suit que, si $\delta \leq \hat{\delta}$ et si $\eta_0 \geq \eta_+$, alors sur l'ensemble $G_1 \cap G_2$,

$$\tau_\ell^{1-\hat{\nu}} \leq \frac{1}{2} 2^{2\eta_\ell},$$

qui est l'estimation désirée.

iii) Comme dans l'affirmation i), pour tout $0 \leq p < 1$ et tout $\delta > 0$, il existe $\eta_* > \eta_+$ tel que, pour tout $\eta_0 \geq \eta_*$,

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_3) \geq 1 - \frac{p}{2} - \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_3(\ell)^c \cap G_1(\ell-1) \cap \dots \cap G_1(\ell - k_\ell^- - 1)). \quad (3.50)$$

Afin de simplifier les notations, on introduit, pour $\ell - k_\ell^- \leq k \leq \ell$,

$$G_4(k, \ell) = \{\tau_k - \tau_{k-1} < a_\ell\} \text{ et } G_5(k, \ell) = G_4(k, \ell) \cap G_1(k-1).$$

En remarquant que

$$G_3(\ell)^c = \{\forall \ell - k_\ell^- \leq k \leq \ell, \tau_k - \tau_{k-1} < a_\ell\} = \bigcap_{k=\ell-k_\ell^-}^{\ell} G_4(k, \ell),$$

et en introduisant

$$G_5^-(k, \ell) = \bigcap_{k'=\ell-k_\ell^-}^{k-1} G_5(k', \ell),$$

il est possible d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_3(\ell)^c \cap G_1(\ell-1) \cap \dots \cap G_1(\ell - k_\ell^- - 1)) &= \mathbb{P}(\bigcap_{k=\ell-k_\ell^-}^{\ell} G_5(k, \ell)) \\ &= \left[\prod_{k=0}^{k_\ell^- - 1} \mathbb{P}(G_5(\ell - k, \ell) | G_5^-(\ell - k, \ell)) \right] \mathbb{P}(G_5(\ell - k_\ell^-, \ell)). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Maintenant, pour tout k' vérifiant $\ell - k_\ell^- < k' \leq \ell$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(G_5(k', \ell) | G_5^-(k', \ell)) \\ &= \mathbb{P}(G_4(k', \ell) | G_1(k' - 1), G_5^-(k', \ell)) \mathbb{P}(G_1(k' - 1) | G_5^-(k', \ell)), \end{aligned} \quad (3.52)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_5(k', \ell) | G_5^-(k', \ell)) &\leq \mathbb{P}(G_4(k', \ell) | G_1(k' - 1), G_5^-(k', \ell)) \\ &\leq \mathbb{P}(\Delta\tau_{k'} < a_\ell | \eta_{k'-1} \in I_{k'-1}, G_5^-(k', \ell)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Delta\tau_{k'} < a_\ell | \eta_{k'-1} \in I_{k'-1}, G_5^-(k', \ell)) \\ &\leq \sup_{\substack{\eta_j \in I_j \\ \ell - k_\ell^- - 1 \leq j < k'}} \mathbb{P}(\Delta\tau_{k'} < a_\ell | \eta_{k'-1}, \dots, \eta_{\ell - k_\ell^- - 1}, \Delta\tau_{k'-1} < a_\ell, \dots, \Delta\tau_{\ell - k_\ell^-} < a_\ell) \end{aligned} \quad (3.53)$$

où $\Delta\tau_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Alors, comme précédemment, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Delta\tau_{k'} < a_\ell | \eta_{k'-1}, \eta_{k'-2}, \dots, \eta_{\ell - k_\ell^- - 1}, \Delta\tau_{k'-1} < a_\ell, \dots, \Delta\tau_{\ell - k_\ell^-} < a_\ell) \\ &= \sum_{0 < i_j - i_{j+1} < a_\ell} \mathbb{P}(\Delta\tau_{k'} < a_\ell | \eta_{k'-1}, \eta_{k'-2}, \dots, \eta_{\ell - k_\ell^- - 1}, \tau_{k'-1} = i_{k'-1}, \dots, \\ & \quad \tau_{\ell - k_\ell^- - 1} = i_{\ell - k_\ell^- - 1}) \\ & \quad \mathbb{P}(\tau_{k'-1} = i_{k'-1}, \dots, \tau_{\ell - k_\ell^- - 1} = i_{\ell - k_\ell^- - 1} | \eta_{k'-1}, \eta_{k'-2}, \dots, \eta_{\ell - k_\ell^- - 1}, \\ & \quad \Delta\tau_{k'-1} < a_\ell, \dots, \Delta\tau_{\ell - k_\ell^-} < a_\ell). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Il reste à estimer

$$\mathbb{P}(\Delta\tau_{k'} < a_\ell | \eta_{k'-1}, \eta_{k'-2}, \dots, \eta_{\ell - k_\ell^- - 1}, \tau_{k'-1} = i_{k'-1}, \dots, \tau_{\ell - k_\ell^- - 1} = i_{\ell - k_\ell^- - 1}).$$

Dans ce but, remarquons que

$$\begin{aligned} & \left\{ \eta_{k'-1}, \eta_{k'-2}, \dots, \eta_{\ell - k_\ell^- - 1}, \tau_{k'-1} = i_{k'-1}, \dots, \tau_{\ell - k_\ell^- - 1} = i_{\ell - k_\ell^- - 1} \right\} \\ &= \left\{ \xi_{i_{k'-1}} \in J_{\eta_{k'-1}}, C \right\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

où

$$C = \left\{ \eta_{k'-2}, \dots, \eta_{\ell - k_\ell^- - 1}, \tau_{k'-1} > i_{k'-1} - 1, \dots, \tau_{\ell - k_\ell^- - 1} = i_{\ell - k_\ell^- - 1} \right\}.$$

De plus, sur l'ensemble où $\xi_{i_{k'-1}} \in J_{\eta_{k'-1}}$ et $\tau_{k'-1} > i_{k'-1} - 1$, on a $\tau_{k'-1} = i_{k'-1}$. D'où

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Delta\tau_{k'} < a_\ell | \eta_{k'-1}, \eta_{k'-2}, \dots, \eta_{\ell - k_\ell^- - 1}, \tau_{k'-1} = i_{k'-1}, \dots, \tau_{\ell - k_\ell^- - 1} = i_{\ell - k_\ell^- - 1}) \\ &= \mathbb{P}\left(\inf \left\{ t | \xi_{i_{k'-1}+t} \notin \right\} 2^{n_{i_{k'-1}}-1} + L, 2^{n_{i_{k'-1}}+1} - L \right] < a_\ell | \xi_{i_{k'-1}} \in J_{\eta_{k'-1}}, C\right) \\ &\leq \sup_{\xi_{i_{k'-1}} \in J_{\eta_{k'-1}}} \mathbb{P}\left(\inf \left\{ t | \xi_{i_{k'-1}+t} \notin \right\} 2^{n_{i_{k'-1}}-1} + L, 2^{n_{i_{k'-1}}+1} - L \right] < a_\ell | \xi_{i_{k'-1}}\right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

où il est utilisé que $C \in \mathcal{F}_{i_{k'-1}-1}$ et (3.6). Afin de conclure, nous allons utiliser le Lemme 3.3.3. Il existe alors $0 < b_- < 1 < b_+$ tel que, pour tout $r \geq 2^{\eta_+}$,

$$\frac{1}{2}r + L < b_-r < r < b_+r < 2r - L.$$

Clairement, on veut b_- proche de $1/2$ et b_+ proche de 2 . Avec les notations de (3.31) et avec $r = 2^{n_{i_{k'-1}}}$,

$$K_{i_{k'-1}} < \inf \left\{ t \mid \xi_{i_{k'-1}+t} \notin \left[2^{n_{i_{k'-1}}-1} + L, 2^{n_{i_{k'-1}}+1} - L \right] \right\},$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\inf \left\{ t \mid \xi_{i_{k'-1}+t} \notin \left[2^{n_{i_{k'-1}}-1} + L, 2^{n_{i_{k'-1}}+1} - L \right] \right\} < a_\ell \mid \xi_{i_{k'-1}} \right) \\ \leq \mathbb{P} (K_{i_{k'-1}} < a_\ell \mid \xi_{i_{k'-1}}). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Rappelons que $\ell - k_\ell^- < k' \leq \ell$. On peut vérifier que

$$a_\ell \leq r^2,$$

et (3.33) implique l'existence de $\hat{\eta}_*$ tel que, pour tout $\eta_0 \geq \hat{\eta}_*$, pour tout $\eta_{k'-1} \in I_{k'-1}$ et pour tout $\xi_{i_{k'-1}} \in J_{\eta_{k'-1}}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\inf \left\{ t \mid \xi_{i_{k'-1}+t} \notin \left[2^{n_{i_{k'-1}}-1} + L, 2^{n_{i_{k'-1}}+1} - L \right] \right\} < a_\ell \mid \xi_{i_{k'-1}} \right) \\ \leq \mathbb{P} (K_{i_{k'-1}} < a_\ell \mid \xi_{i_{k'-1}}) \\ \leq \mathbb{P} (K_{i_{k'-1}} < r^2 \mid \xi_{i_{k'-1}}) \\ \leq q_+ < 1, \end{aligned} \quad (3.58)$$

pourvu que b'_-, b'_+ soient choisis tels que

$$b_-r < b'_-r \leq r - L \leq r + L \leq b'_+r < b_+r,$$

pour tout $r \geq 2^{\eta_+}$, ce qui est toujours possible. En combinant (3.53)-(3.58) avec (3.51) on obtient

$$\mathbb{P} (G_3(\ell)^c \cap G_1(\ell - 1), \dots, G_1(\ell - k_\ell^- - 1)) \leq q_+^{k_\ell^-},$$

à la seule condition que

$$\eta_0 \geq \tilde{\eta} = \max\{\eta_*, \hat{\eta}_*\}.$$

La relation (3.50) implique alors (3.43).

iv) C'est une conséquence immédiate de l'affirmation iii) de ce lemme. $\square$

3.4 Conclusion

La démonstration du Théorème 1.4.2 peut maintenant être faite. Il a été vu dans les deux sections précédentes que

$$\xi_{\tau_\ell} \sim 2^{2\tau_\ell}.$$

Dans cette section, le résultat est étendu à tout $(\xi_n)_n$.

Démonstration du Théorème 1.4.2. i) Soient $0 < p < 1$, $0 < \nu < 1$ et $0 < \hat{\nu} < \nu$.

La Proposition 3.3.4 implique l'existence de $\hat{\delta} > 0$ et de $\tilde{\eta} > \eta_+$ tels que, pour tout $0 < \delta < \hat{\delta}$ et pour tout $\eta_0 \geq \tilde{\eta}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G) &\geq \mathbb{P}(G_1 \cap G_2) + \mathbb{P}(G_1 \cap G_3) - 1 \\ &\geq 1 - \frac{p}{2} - \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(q_-^{k_{\ell-1}^+} + q_+^{k_\ell^-} \right), \end{aligned}$$

où $G = G_1 \cap G_2 \cap G_3$. En prenant

$$k_\ell^+ = 2^{2\delta(\eta_0 + \ell)}, \quad k_\ell^- = \min\{\delta(\eta_0 + \ell), \ell\},$$

on obtient

$$\mathbb{P}(G) \geq 1 - \frac{p}{2} - \frac{(q_-^2)^{2\delta\eta_0}}{1 - (q_-^2)^{2\delta}} + \frac{q_+^{\delta\eta_0+1}}{1 - q_+}.$$

Remarquons que G dépend de η_0 et de δ . De plus, sur G , les inégalités suivantes sont vérifiées pour tout $\ell \in \mathbb{N}_*$:

$$|\eta_\ell - \mu\ell - \eta_0| \leq \delta(\ell + \eta_0), \quad (3.59)$$

$$\tau_\ell^{1-\hat{\nu}} \leq \frac{1}{2} 2^{2\eta_\ell}, \quad (3.60)$$

$$\tau_\ell \geq a_\ell = 2^{2[(1-\delta)\eta_0 + (\mu-\delta)(\ell-1-n_\ell^-)]} 2^{-\delta n_\ell^-}. \quad (3.61)$$

Dès l'instant où $(2^{\eta_0} + \tau_\ell^{\frac{1}{2}})^{1-\hat{\nu}} \leq 2^{(1-\hat{\nu})\eta_0} + \tau_\ell^{\frac{1-\hat{\nu}}{2}}$, les deux premières inégalités entraînent que, sur G et en imposant $\delta \leq \min\{\hat{\delta}, \hat{\nu}\}$, on a, pour tout $\eta_0 \geq \max\{\tilde{\eta}, (2(\hat{\nu} - \delta))^{-1}\}$, et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\left(2^{\eta_0} + \tau_\ell^{\frac{1}{2}}\right)^{1-\hat{\nu}} \leq 2^{\eta_\ell}. \quad (3.62)$$

De même, en utilisant (3.59) et (3.61) et en supposant que $\delta \leq \min\{\hat{\delta}, \hat{\nu}\}$, on montre que sur G on a, pour tout $\eta_0 \geq \max\{\tilde{\eta}, (2(\hat{\nu} - \delta))^{-1}\}$, et pour tout ℓ ,

$$2^{\eta_\ell} \leq \left(2^{\eta_0} + \tau_\ell^{\frac{1}{2}}\right)^{1+\hat{\nu}}. \quad (3.63)$$

Par la définition des temps d'arrêt τ_ℓ et en utilisant que $\eta_\ell \geq \eta_{\ell+1} - 1$ ainsi que (3.62) et (3.63), on a, pour tout $n \in [\tau_\ell; \tau_{\ell+1}[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(2^{\eta_0} + n^{\frac{1}{2}}\right)^{1-\hat{\nu}} &\leq \frac{1}{4} 2^{\eta_{\ell+1}} \leq 2^{\eta_\ell-1} + L \leq \xi_n \leq 2^{\eta_{\ell+1}} - L \\ &\leq 2 \cdot 2^{\eta_\ell} \leq 2 \left(2^{\eta_0} + n^{\frac{1}{2}}\right)^{1+\hat{\nu}}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Finalement, en remarquant que

$$2 = (2^{\eta_0})^{\frac{1}{\eta_0}} \leq (2^{\eta_0} + n^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{\eta_0}},$$

le résultat est obtenu en choisissant $\tilde{\eta}$ assez grand tel que :

$$\hat{\nu} + \frac{2}{\tilde{\eta}} \leq \nu,$$

et tel que, pour tout $\delta > 0$ et pour tout $\eta_0 > \tilde{\eta}$,

$$\frac{(q_-^2)^{2\delta\eta_0}}{1 - (q_-^2)^{2\delta}} + \frac{q_+^{\delta\eta_0+1}}{1 - q_+} \leq \frac{p}{2}.$$

- ii) C'est une conséquence immédiate de l'affirmation i) du théorème. En effet, p peut être pris arbitrairement petit et, lorsque $\xi_0 \rightarrow +\infty$ (ce qui revient à faire $\eta_0 \rightarrow +\infty$),

$$\frac{(q_-^2)^{2\delta\eta_0}}{1 - (q_-^2)^{2\delta}} + \frac{q_+^{\delta\eta_0+1}}{1 - q_+} \rightarrow 0.$$

□

Chapitre 4

Transience et récurrence d'une chaîne de Markov

Les chaînes de Markov étudiées précédemment ont un drift en γ/x pour $x \gg 1$. Nous avons vu, en particulier, que dans ce cas lorsque $\gamma > 1/2$ et sous un changement d'échelle approprié, elles convergent en distribution vers un processus de Bessel transient. Il est alors naturel de se demander quel serait leur comportement lorsque le drift est de la forme γ/x^σ avec $\gamma > 0$ et $\sigma \neq 1$. Nous analysons cette question en quelques détails dans ce chapitre. Heuristiquement, lorsque $\sigma > 1$ le drift devient petit. Les chaînes ont alors un comportement proche d'une marche symétrique ($x_{n+1} = x_n + \omega_n$) et sont, par conséquent, récurrentes. Au contraire, lorsque $\sigma < 1$, le drift devient plus important et les chaînes sont « poussées » vers l'infini. Leur comportement est alors transient. Dans ce cas, à l'instar de ce qui a été fait dans le chapitre 2, nous pouvons établir un résultat de moyennisation ainsi qu'un contrôle du comportement. Nous verrons que le terme γ/x^σ domine l'aléatoire et le processus limite pour de telles chaînes est déterministe et nous pourrons énoncer un résultat du type du Théorème 1.4.2.

*A lot of people don't believe in curses.
A lot of people don't believe
in yellow-spotted lizards either,
but if one bites you,
it doesn't make a difference
whether you believe in it or not..
Louis Sachar — Holes.*

4.1 Introduction

Tout comme dans les chapitres 1 et 2, considérons $(\omega_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que

$$\mathbb{E}(\omega_n) = 0, \quad \mathbb{E}(\omega_n^2) = 1 \text{ et } \exists \bar{\omega} > 1; |\omega_n| < \bar{\omega}.$$

De plus, on suppose que la mesure μ associée à la distribution des variables aléatoires ω_n est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet une densité $\rho \in \mathcal{C}^1([-\bar{\omega}, \bar{\omega}])$ telle que

$$d\mu(\omega) = \rho(\omega)d\omega, \quad \inf_{[-\bar{\omega}, \bar{\omega}]} \rho(\omega) > 0. \quad (4.1)$$

Soit une fonction $U : \mathbb{R}_+ \times [-\bar{\omega}, \bar{\omega}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times [-\bar{\omega}, \bar{\omega}])$ et satisfaisant l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1.1. *i) Il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, $x_+ > 0$, $\sigma > 0$ et deux paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > \sigma$, tels que, pour tout $x > x_+$,*

$$U(x, \omega) = x + \omega + \frac{\gamma}{x^\sigma} + U_0(x, \omega) + U_1(x, \omega).$$

Les fonctions U_0 et U_1 appartiennent à $\mathcal{C}^1(]x_+, +\infty[\times [-\bar{\omega}, \bar{\omega}])$ et satisfont, pour tout $x > x_+$ et tout $\omega \in [-\bar{\omega}, \bar{\omega}]$

$$-\frac{C_0}{x^\alpha} \leq U_0(x, \omega) \leq \frac{C_0}{x^\alpha}, \quad (4.2)$$

$$-\frac{C_1}{x^\beta} \leq U_1(x, \omega) \leq \frac{C_1}{x^\beta}, \quad (4.3)$$

*où C_0 et C_1 sont deux constantes strictement positives. De plus $\mathbb{E}(U_0(x)) = 0$.
ii) Pour tout $x \in [0, x_+]$, il existe $\eta_+ : [0, x_+] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\eta_- : [0, x_+] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continues tels que*

$$U(x, [-\bar{\omega}, \bar{\omega}]) = [x - \eta_-(x), x + \eta_+(x)] \subset \mathbb{R}_+.$$

$$\text{iii) } \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}_+ \\ \omega \in [-\bar{\omega}, \bar{\omega}]}} \frac{\partial U}{\partial \omega}(x, \omega) > 0.$$

Les chaînes de Markov considérées sont celles s'écrivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = U(x_n, \omega_n), \\ x_0 > x_+. \end{cases} \quad (4.4)$$

L'idée de la condition i) est que U_0 est une perturbation du terme en ω , de moyenne nulle. Tandis que U_1 perturbe le terme dominant de dérive qui est γ/x^σ . D'où la condition $\alpha > 0$, $\beta > \sigma$. La condition ii) nous permettra de montrer que $[0, x_+]$ n'est pas absorbant. Elle n'est essentielle que dans le cas où $\sigma > 1$. La condition iii) implique que les chaînes sont fortement Feller. Dans la suite, nous considérons x_+ tel que

$$\bar{\omega} - \frac{\gamma}{x_+^\sigma} - \frac{C_0}{x_+^\alpha} - \frac{C_1}{x_+^\beta} > 0. \quad (4.5)$$

Ces chaînes sont alors homogènes en temps, et on note P leur fonction de transition, pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ et $x \in \mathbb{R}_+$,

$$P(x, \Gamma) = \mathbb{P}(x_{n+1} \in \Gamma \mid x_n = x). \quad (4.6)$$

Le résultat suivant sur le comportement de ces chaînes de Markov selon les valeurs prises par σ et γ est obtenu.

Théorème 4.1.2. *Soit $(x_n)_n$ une chaîne de Markov définie par (4.4) avec U vérifiant l'Hypothèse 4.1.1.*

1. Si $\sigma < 1$, alors $(x_n)_n$ est transiente ;
2. Si $\sigma > 1$, alors $(x_n)_n$ est récurrente ;
3. Si $\sigma = 1$, alors $(x_n)_n$ est transiente si $\gamma > 1/2$ et est récurrente si $\gamma < 1/2$.

La preuve de ce théorème repose sur les méthodes de type « Lyapounov » exposées dans [43]. Il s'agit essentiellement de trouver une fonction f appropriée qui croît ou décroît en moyenne le long des trajectoires de la chaîne (voir les Lemmes 4.2.1 et 4.2.2).

Remarque 4.1.3. Lorsque $\sigma = 1$, les chaînes de Markov sont celles considérées dans le chapitre 1. La transience et la récurrence de chaînes similaires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et représentant un processus de Bessel discret sont étudiées dans [34]. Le résultat est alors le même qu'ici : la transience a lieu lorsque $\gamma > 1/2$ et la récurrence a lieu si $\gamma < 1/2$.

Avant d'entamer la démonstration de ce résultat, nous rappelons quelques définitions et résultats de [43]. Soit $(x_n)_n$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Définition 4.1.4. i) Un ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ est dit uniformément transient pour la chaîne de Markov $(x_n)_n$ si,

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{x_n \in A} \right) < +\infty.$$

Dans le cas contraire, il est dit récurrent.

ii) Un ensemble $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ est transient pour la chaîne de Markov $(x_n)_n$ s'il est recouvert par un nombre dénombrable d'ensembles uniformément transients.

Introduisons maintenant la notion de point atteignable.

Définition 4.1.5. Un point $x \in \mathbb{R}_+$ est dit atteignable si, pour tout $\mathcal{O}_x$ voisinage ouvert de x et pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe $n \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$P(x_n \in \mathcal{O}_x \mid x_0 = y) > 0.$$

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, notons τ_A le temps d'arrêt défini par

$$\tau_A = \inf \{n \geq 1 ; x_n \in A\},$$

avec la convention $\inf \{\emptyset\} = +\infty$.

Définition 4.1.6. Soit une mesure φ sur $\mathbb{R}_+$. La chaîne de Markov $(x_n)_n$ est dit φ -irréductible si pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ tel que $\varphi(A) > 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(\tau_A < +\infty \mid x_0 = x) > 0.$$

La définition de φ -irréductibilité garantit que les ensembles de mesure φ positive sont toujours atteints par la chaîne, et ce quel que soit le point de départ de cette dernière.

Proposition 4.1.7. *Si il existe φ telle que la chaîne $(x_n)_n$ est φ -irréductible, alors il existe une mesure de probabilité ψ telle que $(x_n)_n$ est ψ -irréductible et, telle que pour tout mesure φ' telle que $(x_n)_n$ est φ' -irréductible, la mesure φ' est absolument continue par rapport à ψ .*

La mesure ψ dont l'existence est garantie par la proposition précédente est unique à une équivalence près et est appelée **mesure d'irréductibilité maximale**. On dira que $A \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R}_+)$ si $\psi(A) > 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Nous pouvons alors étendre la notion de transience à la chaîne $(x_n)_n$. Nous énonçons maintenant un critère de ψ -irréductibilité.

Proposition 4.1.8. *Soit $(x_n)_n$ une chaîne de Markov fortement Feller. Supposons qu'il existe $x_* \in \mathbb{R}_+$ atteignable. Alors la chaîne est φ_{x_*} -irréductible avec $\varphi_{x_*}(A) = P(x_*, A)$.*

Démonstration. Voir la Proposition 6.1.5 de [43]. □

Définition 4.1.9. *Une chaîne de Markov $(x_n)_n$ est dite transiente si elle est ψ -irréductible et si $\mathbb{R}_+$ est transient.*

Nous avons la dichotomie suivante.

Proposition 4.1.10. *Si la chaîne $(x_n)_n$ est ψ -irréductible, alors $(x_n)_n$ est soit transiente, soit récurrente.*

Nous pouvons maintenant conclure à la ψ -irréductibilité pour les chaînes $(x_n)_n$ définies par (4.4) et satisfaisant l'Hypothèse 4.1.1 grâce à la proposition suivante combinée avec l'Hypothèse 4.1.1.

Proposition 4.1.11. *Soit $(x_n)_n$ définie par (4.4) et U vérifiant l'Hypothèse 4.1.1. Alors*

- i) *la chaîne $(x_n)_n$ est fortement Feller.*
- ii) *tout $x_* \geq x_+$ est atteignable.*
- iii) *Si $I \subset \mathbb{R}_+$ est un intervalle non réduit à un singleton et si il existe $x_* \in I$ atteignable, alors $\psi(I) > 0$.*

Démonstration. i) Soit $h \in L^\infty([-\bar{\omega}, \bar{\omega}])$ et soit $x' \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\begin{aligned} Ph(x') &= \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} h(U(x, \omega)) d\mu(\omega) \\ &= \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} h(U(x, \omega)) \rho(\omega) d\omega \\ &= \int_{U(x, -\bar{\omega})}^{U(x, \bar{\omega})} h(u) K_x(u) du, \end{aligned}$$

où

$$K_x(u) = \frac{\rho(U^{-1}(x, \omega))}{\frac{\partial U}{\partial \omega}(x, \omega)}.$$

La fonction U étant continue, $\lim_{x' \rightarrow x} U(x', \omega) = U(x, \omega)$. De plus h étant bornée, ρ et U étant $\mathcal{C}^1$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\int_a^b h(u)K_x(u)du$ est continue. On obtient que

$$\lim_{x \rightarrow x'} Ph(x') = Ph(x),$$

et ainsi, la chaîne $(x_n)_n$ est fortement Feller.

ii) Soit $x_* > x$. Premièrement, considérons le cas où $x_0 = x > x_*$. Nous voulons montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(x_n \in \mathcal{O}_{x_*} \mid x_0 = x) > 0$. Comme $x > x_+$, nous avons, d'après l'Hypothèse 4.1.1 i) :

$$\begin{aligned} \bar{\omega} + \frac{\gamma}{x^\sigma} + U_0(x, \bar{\omega}) + U_1(x, \bar{\omega}) &\geq \bar{\omega} + \frac{\gamma}{x^\sigma} - \frac{C_0}{x^\alpha} - \frac{C_1}{x^\beta} \\ &\geq \bar{\omega} - \frac{C_0}{x_+^\alpha} - \frac{C_1}{x_+^\beta}. \end{aligned}$$

Or d'après (4.5), nous avons,

$$\omega_+ = \bar{\omega} - \frac{C_0}{x_+^\alpha} - \frac{C_1}{x_+^\beta} > 0.$$

De même,

$$\begin{aligned} -\bar{\omega} + \frac{\gamma}{x^\sigma} + U_0(x, -\bar{\omega}) - U_1(x, -\bar{\omega}) &\leq -\bar{\omega} + \frac{\gamma}{x^\sigma} + \frac{C_0}{x^\alpha} + \frac{C_1}{x^\beta} \\ &\leq -(\bar{\omega} - \frac{\gamma}{x_+^\sigma} - \frac{C_0}{x_+^\alpha} - \frac{C_1}{x_+^\beta}) \end{aligned}$$

et, toujours d'après (4.5), nous avons

$$\omega_- = \bar{\omega} - \frac{\gamma}{x_+^\sigma} - \frac{C_0}{x_+^\alpha} - \frac{C_1}{x_+^\beta} > 0.$$

Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient que pour tout $x > x_*$,

$$U(x, [-\bar{\omega}, \bar{\omega}]) - x \supseteq [-\omega_-, \omega_+],$$

et il existe une suite $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ telle que $x_n \in \mathcal{O}_{x_*}$ d'après (4.1). Ensuite, le cas où $x_0 = x$ avec $x_+ \leq x < x_+$ se traite exactement de la même façon. Enfin considérons le dernier cas : soit $x < x_+$, alors d'après l'Hypothèse 4.1.1 ii), il existe une suite $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ telle que $x_n \geq x + n\eta_+(x) > x_+$ et nous nous retrouvons dans le second cas. Tout point $x_* > x_+$ est donc atteignable.

iii) Si $\psi(I) = 0$, alors, d'après la Proposition 4.1.7, $P(x_*, I) = 0$ ce qui est absurde si $x_* \in I$. $\square$

La propriété ψ -irréductibilité est indispensable pour montrer les différents comportements de la chaîne $(x_n)_n$ énoncés dans le Théorème 4.1.2.

4.2 Preuve du Théorème 4.1.2

Dans cette section, les trois affirmations du Théorème 4.1.2 sont montrées séparément. Dans la suite, $\mathcal{A}$ désigne le générateur de la chaîne $(x_n)_n$. De plus, pour toute fonction continue f et pour tout $r \geq 0$, on notera $\mathcal{C}_f(r)$ les ensembles de niveau :

$$\mathcal{C}_f(r) = \{x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq r\}. \quad (4.7)$$

4.2.1 Cas transient : $\sigma < 1$

Nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme 4.2.1 (Théorème 8.4.2 de [43]). *Supposons que la chaîne $(x_n)_n$ est irréductible et qu'il existe une fonction bornée $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $r \geq 0$ tels que :*

- $\mathcal{C}_f(r) = \{x \in \mathbb{R}_+ ; f(x) \leq r\}$ et $\mathcal{C}_f(r)^c$ appartiennent à $\mathcal{B}_+(\mathbb{R}_+)$;
- pour tout $x \in \mathcal{C}_f(r)^c$, $\mathcal{A}f(x) \geq 0$.

Alors, la chaîne de Markov $(x_n)_n$ est transiente.

La condition $\mathcal{A}f(x) \geq 0$ signifie qu'en moyenne f croît sur le long des trajectoires. Nous exhibons une fonction f bornée et un $r > 0$ tels que les conditions du Lemme 4.2.1 soient vérifiées. La transience de la chaîne $(x_n)_n$ sera alors montrée. Afin d'obtenir la transience de la chaîne $(x_n)_n$ lorsque $\sigma < 1$, il reste à exhiber une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $r \geq 0$ vérifiant les hypothèses du Lemme 4.2.1.

Démonstration du Théorème 4.1.2, Partie i). Soit $(x_n)_n$ définie par (4.4) avec U vérifiant l'Hypothèse 4.1.1 avec $\sigma < 1$. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} (x_+)^{-\delta} + 1 - x^{-\delta} & \text{si } x \in]x_+, +\infty[, \\ 1 & \text{si } x \in [0, x_+]. \end{cases}$$

Choisissons $M > x_+$ et pour $r > f(M)$ tel que $\mathcal{C}_f(r) \supset [0, M]$. Supposons que

$$M - \bar{\omega} - \frac{C_0}{M^\alpha} - \frac{C_1}{M^\beta} > x_+. \quad (4.8)$$

Les ensembles $\mathcal{C}_f(r)$ et $\mathcal{C}_f(r)^c$ sont ainsi des intervalles non réduits à un singleton et ils appartiennent donc à $\mathcal{B}^+(\mathbb{R}_+)$. Soit maintenant $x \in \mathcal{C}_f(r)^c$. Notons ξ_x la variable aléatoire $\omega + U_0(x, \omega) + U_1(x, \omega)$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(x) &= \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \mu(d\omega) f(U(x, \omega)) - f(x) \\ &= \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \mu(d\omega) f(\xi_x + x + \frac{\gamma}{x^\sigma}) - f(x) \end{aligned}$$

Or, comme $r > f^{-1}(M)$, on a d'après (4.8) $\xi_x + x + \gamma/x^\sigma \in]x_+, +\infty[$, d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(x) &= x^{-\delta} \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \mu(d\omega) \left(1 - \left(1 + \frac{\xi_x + \gamma/x^\sigma}{x} \right)^{-\delta} \right) \\ &= \delta x^{-(\delta+1)} \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \mu(d\omega) \left(\xi_x + \frac{\gamma}{x^\sigma} - \frac{\delta+1}{2x} \left(\xi_x^2 + 2\frac{\gamma\xi_x}{x^\sigma} + \frac{\gamma^2}{x^{2\sigma}} \right) + \frac{1}{x^2} O(\xi_x^3) \right) \\ &= \delta x^{-(\delta+1)} \left[\mathbb{E}(U_1(x)) + \frac{\gamma}{x^\sigma} - \frac{\delta+1}{2x} (1 + \mathbb{E}(U_0(x)^2) + \mathbb{E}(U_1(x)^2)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\gamma\mathbb{E}(U_1(x))}{x^\sigma} + \frac{\gamma^2}{x^{2\sigma}} + \frac{1}{x^2} \mathbb{E}(O((\omega + U_0(x, \omega) + U_1(x, \omega))^3)) \right]. \end{aligned}$$

D'après la forme de $U_0(x, \omega)$ et $U_1(x, \omega)$ dans l'Hypothèse 4.1.1, nous obtenons

$$\mathbb{E}(U_1(x)) + \frac{\gamma}{x^\sigma} \geq \frac{\gamma}{x^\sigma} - \frac{C_1}{x^\beta} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta+1}{2x} (1 + \mathbb{E}(U_0^2(x)) + \mathbb{E}(U_1^2(x))) + \frac{2\gamma\mathbb{E}(U_1(x))}{x^\sigma} + \frac{\gamma^2}{x^{2\sigma}} \\ \leq \frac{\delta+1}{2x} \left(1 + \frac{C_0^2}{x^{2\alpha}} + \frac{C_1^2}{x^{2\beta}} \right) + \frac{2\gamma C_1}{x^{\sigma+\beta}} + \frac{\gamma^2}{x^{2\sigma}} \end{aligned}$$

et comme $\sigma \in]0, 1[$, on obtient alors,

$$\frac{\gamma}{x^\sigma} - \frac{C_1}{x^\beta} > \frac{\delta+1}{2x} \left(1 + \frac{C_0^2}{x^{2\alpha}} + \frac{C_1^2}{x^{2\beta}} \right) + \frac{2\gamma C_1}{x^{\sigma+\beta}} + \frac{\gamma^2}{x^{2\sigma}},$$

si r est assez grand. Pour tout $x \in \mathcal{C}_f(r)^c$, on obtient bien $\mathcal{A}f(x) \geq 0$. $\square$

4.2.2 Cas récurrent : $\sigma > 1$

Le cas récurrent se montre de manière similaire au cas transient. Le Lemme 4.2.2 donne un critère de récurrence et nous montrons que la chaîne de Markov $(x_n)_n$ satisfait les hypothèses du Lemme 4.2.2.

Lemme 4.2.2 (Théorème 8.4.3 de [43]). *Supposons que $(x_n)_n$ soit ψ -irréductible qu'il existe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}_+$ compact et une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui soit non-bornée en dehors des compacts tels que, pour tout $x \in \mathcal{C}^c$, $\mathcal{A}f(x) \leq 0$. Alors, la chaîne de Markov $(x_n)_n$ est récurrente.*

Démonstration du Théorème 4.1.2, partie ii). Nous exhibons maintenant une fonction telle que les hypothèses du Lemme 4.2.2 soient vérifiées.

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^\delta + 1 - (x_+)^{\delta} & \text{si } x \in]x_+, +\infty[, \\ 1 & \text{si } x \in [0, x_+]. \end{cases}$$

Considérons $C = [0, M]$ (où M est le même que dans la démonstration du cas transient),

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} P(x, dy) f(y) - f(x) \\ &= \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \mu(d\omega) f\left(\xi_x + x + \frac{\gamma}{x^\sigma}\right) - f(x).\end{aligned}$$

Comme $\gamma > 0$, pour tout $x > 2x_+$, on a bien $\xi_x + x + \gamma/x^\sigma \in]2x_+, +\infty[$. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(x) &= \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \mu(d\omega) \left(\left(\xi_x + x + \frac{\gamma}{x^\sigma} \right)^\delta - x^\delta \right) \\ &= x^\delta \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \mu(d\omega) \left(\left(1 + \frac{\xi_x + \frac{\gamma}{x^\sigma}}{x} \right)^\delta - 1 \right) \\ &= \delta x^{\delta-1} \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \mu(d\omega) \left(\xi_x + \frac{\gamma}{x^\sigma} + \frac{\delta-1}{2x} \left(\xi_x + \frac{\gamma}{x^\sigma} \right)^2 + \frac{1}{x^2} O(\xi_x^3) \right) \\ &= \delta x^{-(1-\delta)} \left[\mathbb{E}(U_1(x)) + \frac{\gamma}{x^\sigma} - \frac{1-\delta}{2x} \left(1 + \mathbb{E}(U_0^2(x)) + \mathbb{E}(U_1^2(x)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\gamma\mathbb{E}(U_1(x))}{x^\sigma} + \frac{\gamma^2}{x^{2\sigma}} \right) + \frac{1}{x^2} \mathbb{E}(O((\omega + U_0(x) + U_1(x))^3)) \right].\end{aligned}$$

D'après la forme de $U_0(x, \omega)$ et $U_1(x, \omega)$ dans l'Hypothèse 4.1.1 et comme $\sigma > 1$, $\delta < 1$, on obtient bien

$$\mathbb{E}(U_0(x)) + \frac{\gamma}{x^\sigma} < \frac{1-\delta}{2x} (1 + \mathbb{E}(U_0^2(x)) + \mathbb{E}(U_1^2(x)) + \frac{2\gamma\mathbb{E}(U_1(x))}{x^\sigma} + \frac{\gamma^2}{x^{2\sigma}}),$$

ce qui montre que, pour tout $x \in \mathcal{C}_f(r)^c$, on a $\mathcal{A}f(x) \leq 0$ si r est assez grand. $\square$

La fonction f exhibée ici vérifie les hypothèses du Lemme 4.2.2, on peut conclure que la chaîne $(x_n)_n$ est récurrente lorsque $\sigma > 1$.

4.2.3 Cas limite : $\sigma = 1$

Le cas $\sigma = 1$ est celui de la chaîne de Markov décrite dans le chapitre 1. Lorsque $\gamma > 1/2$, le Théorème 2.1.1 indique déjà que correctement changée d'échelle, cette chaîne de Markov converge en loi vers un processus de Bessel de dimension strictement supérieure à 2 et donc transient. Il est alors assez intuitif que dans ce cas ($\gamma > 1/2$), $(x_n)_n$ est, elle aussi, transiente. Afin de montrer les comportements de la chaîne de Markov $(x_n)_n$ lorsque $\sigma = 1$ selon la valeur du paramètre γ , on reprend les Lemmes 4.2.1 et 4.2.2. Il s'agit alors, comme précédemment, d'exhiber une fonction f telle que $\mathcal{A}f$ soit positive dans le cas transient et négative dans le cas récurrent, sur $\mathcal{C}_f(r)$ avec $r \geq 0$.

Cas transient : $\gamma > 1/2$

Reprenons la fonction f introduite dans la démonstration du point i) du Théorème 4.1.2 : soit $\delta > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} (x_+)^{-\delta} + 1 - x^{-\delta} & \text{si } x \in]x_+, +\infty[, \\ 1 & \text{si } x \in [0, x_+]. \end{cases}$$

et soit M vérifiant (4.8). Ainsi, on a, $\mathcal{C}_f(r) \supset [0, M]$ et $\mathcal{C}_f(r)^c$ sont deux intervalles non réduits à un singleton, ils appartiennent donc à $\mathcal{B}^+(\mathbb{R}_+)$. Soit $x > M$, alors, par le même calcul que précédemment,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(x) = & \delta x^{-(\delta+1)} \left[\mathbb{E}(U_1(x, \omega)) + \frac{\gamma}{x} - \frac{\delta+1}{2x} \left(1 + \mathbb{E}(U_0^2(x, \omega)) + \mathbb{E}(U_1^2(x, \omega)) \right) \right. \\ & \left. + \frac{2\gamma \mathbb{E}(U_1(x, \omega))}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2} \right] + \frac{1}{x^2} \mathbb{E}(O((\omega + U_0(x, \omega) + U_1(x, \omega))^3)). \end{aligned}$$

et d'après l'Hypothèse 4.1.1, pour tout $x \in \mathcal{C}_f(r)^c$,

$$\mathbb{E}(U_1(x)) + \frac{\gamma}{x} > \frac{\delta+1}{2x} \left(1 + \mathbb{E}(U_0^2(x)) + \mathbb{E}(U_1^2(x)) + \frac{2\gamma \mathbb{E}(U_1(x))}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2} \right),$$

lorsque $\gamma > 1/2$ et r assez grand. On obtient alors la transience de la chaîne en appliquant le Lemme 4.2.1.

Cas récurrent : $\gamma < 1/2$

On applique à nouveau le Lemme 4.2.2 en reprenant les éléments de la preuve de la partie ii) du Théorème 4.1.2. Soit $0 < \delta < 1$,

$$f(x) = \begin{cases} x^\delta + 1 - \frac{x^\delta}{2} & \text{si } x \in]x_+, +\infty[, \\ 1 & \text{si } x \in [0, x_+], \end{cases}$$

et $C = [0, M]$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(x) = & \delta x^{\delta-1} \left[\mathbb{E}(U_1(x, \omega)) + \frac{\gamma}{x} - \frac{(1-\delta)}{2x} \left(1 + \mathbb{E}(U_0(x, \omega)^2) + \mathbb{E}(U_1(x, \omega)^2) \right) \right. \\ & \left. + \frac{2\gamma \mathbb{E}(U_1(x, \omega))}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2} \right] + \frac{1}{x^2} \mathbb{E}(O((\omega + U_0(x, \omega) + U_1(x, \omega))^3)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

D'après l'Hypothèse 4.1.1, pour tout $x \in C^c$,

$$\mathbb{E}(U_1(x, \omega)) + \frac{\gamma}{x} \leq \frac{1-\delta}{2x} \left(1 + \mathbb{E}(U_0^2(x, \omega)) + \mathbb{E}(U_1^2(x, \omega)) + \frac{2\gamma \mathbb{E}(U_1(x, \omega))}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2} \right),$$

sur $C_f(r)^c$ avec r assez grand et lorsque $\gamma < 1/2$. On obtient alors le caractère récurrent de la chaîne dans ce cas.

4.3 Convergence des chaînes dans le cas transient ($\sigma < 1$)

Dans cette section, nous nous intéressons à la convergence de la chaîne $(x_n)_n$ lorsqu'elle est correctement changée d'échelle et dans le cas où $\sigma < 1$

Procédons comme dans le chapitre 2. Soit le paramètre $\varepsilon = x_0^{-1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $t_n = \varepsilon^{\sigma+1}n$. La famille de processus $(x^\varepsilon(t), t \in [0, 2T])_{\varepsilon>0}$ est alors construite de la manière suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x^\varepsilon(t_n) = \varepsilon x_n,$$

la continuité est obtenue par interpolation linéaire, pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}[$,

$$x^\varepsilon(t) = \frac{t_{n+1} - t}{\varepsilon^{\sigma+1}} x^\varepsilon(t_n) + \frac{t - t_n}{\varepsilon^{\sigma+1}} x^\varepsilon(t_{n+1}).$$

L'Hypothèse 4.1.1 entraîne que,

$$x^\varepsilon(t_{n+1}) = U^\varepsilon(x^\varepsilon(t_n), \omega_n),$$

où, pour tout $x > \varepsilon x_+$,

$$U^\varepsilon(x, \omega) = x + \varepsilon\omega + \varepsilon^{\sigma+1} \frac{\gamma}{x^\sigma} + \varepsilon^{\alpha+1} U_0^\varepsilon(x, \omega) + \varepsilon^{\beta+1} U_1^\varepsilon(x, \omega), \quad (4.10)$$

et U_0^ε et U_1^ε sont respectivement des perturbations de ω et de γ/x^σ , telles que

$$U_0^\varepsilon(x, \omega) = O_0(x^{-\alpha}), \quad U_1^\varepsilon(x, \omega) = O(x^{-\beta}), \quad (4.11)$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > \sigma$. Le terme $O_0(x)$ désigne, comme habituellement, un $O(x)$ d'espérance nulle. La famille de $(x^\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}_+)_{\varepsilon>0}$ vérifie alors le résultat de convergence suivant.

Théorème 4.3.1. *Soit $T > 0$. La famille de processus $(x^\varepsilon(t); t \in [0, T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ converge en distribution vers la fonction déterministe $x(t) = (1 + (\sigma + 1)\gamma t)^{1/(\sigma+1)}$.*

Démonstration. Soit $\eta > 1$, et pour tout $\varepsilon > 0$, le temps d'arrêt τ^ε défini pour le processus $(x^\varepsilon(t))_{t \in [0, 2T]}$ par :

$$\tau^\varepsilon = \inf\{t \in [0, 2T]; x^\varepsilon(t) \notin [\eta^{-1}, \eta]\},$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = 2T$. Afin de rester dans le domaine où $(x^\varepsilon(t))_{t \in [0, 2T]}$ peut être explicité, on se restreint aux $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ où $\varepsilon_* > (\eta x_+)^{-1}$ de sorte que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$, $\varepsilon x_+ < \eta^{-1}$. Ainsi, on définit la famille de processus arrêtés $(t \rightarrow y^\varepsilon(t), t \in [0, 2T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ où, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ et pour tout $t \in [0, 2T]$,

$$y^\varepsilon(t) = y^\varepsilon(t \wedge \tau^\varepsilon).$$

Soit Π^ε la fonction de transition du processus $(y^\varepsilon(t_n))_n$ et soit l'opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ où

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{\gamma}{x^\sigma} f'(x) \quad (4.12)$$

et

$$\mathcal{D}_* = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty([\eta^{-1}, \eta]), \lim_{x \rightarrow \eta^{\pm 1}} \mathcal{L}f(x) = 0 \right\}.$$

Nous suivons le déroulement des démonstrations faites dans le chapitre 2.

Lemme 4.3.2. *Pour tout $f \in \mathcal{D}_*$ et pour tout $x \in [\eta^{-1}, \eta]$,*

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^{\sigma+1}} (\Pi^\varepsilon - \text{I}) f(x) - \mathcal{L}f(x) \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (4.13)$$

uniformément sur les compacts de $[\eta^{-1}, \eta]$.

Nous montrerons ce lemme en fin de section. Ainsi, en suivant le déroulement de la démonstration du Lemme 2.1.2 nous obtenons la précompacité de la famille de processus continus $(y^\varepsilon(t), t \in [0, 2T])_\varepsilon$.

Il existe ainsi des suites croissantes $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres strictement positifs telles que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$ et telles que $(y^{\varepsilon_k}(t), t \in [0, 2T])_k$ converge en distribution vers un processus limite $(y^0(t))_{t \in [0, 2T]}$. Pour tout processus limite $(y^0(t))_{t \in [0, 2T]}$, on notera τ^0 le temps d'arrêt défini par :

$$\tau^0 = \inf\{t \in [0, 2T], y^0(t) \notin]\eta^{-1}, \eta[\},$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = 2T$. La famille de temps d'arrêt $\{\tau^\varepsilon\}_\varepsilon$ étant à valeurs dans le compact $[0, 2T]$, il existe aussi des suites croissantes $\{\varepsilon_k\}_k$ telles que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$ et telles que les $\{\tau^{\varepsilon_k}\}_k$ convergent en distribution vers une variable aléatoire noté τ^{lim} . Il n'y a aucune raison pour que les variables τ^{lim} soient des temps d'arrêt, et donc aucune raison pour qu'elles soient égales en distribution aux temps d'arrêt τ^0 .

En passant dans l'espace de Skorohod, nous montrons, toujours de la même façon que dans le chapitre 2 que les processus limites arrêtés $(y^0(t \wedge \tau^0))_{t \in [0, 2T]}$ sont solutions du problème aux martingales associé à l'opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ défini par (4.12). Or, le coefficient de diffusion associé à ce problème aux martingales est nul. Par conséquent, les processus limites ne sont plus des processus stochastiques mais sont seulement déterministes. Le Théorème F.12 implique alors que les processus limites $(y^0(t \wedge \tau^0))_{t \in [0, 2T]}$ sont solutions de l'équation différentielle ordinaire arrêtée suivante

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(t) = \frac{\gamma}{y(t)^\sigma} \mathbb{1}_{t \leq \tau}, \end{cases} \quad (4.14)$$

où $\tau = \inf\{t \in [0, 2T], y(t) \notin]\eta^{-1}, \eta[\}$ avec la convention $\inf\{\emptyset\} = 2T$. L'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(t) = \frac{\gamma}{y(t)^\sigma}, \end{cases}$$

admet une unique solution qui la fonction croissante suivante :

$$y(t) = (1 + (\sigma + 1)\gamma t^{\sigma+1})^{\frac{1}{\sigma+1}}.$$

Il est alors facile de calculer τ . Tout d'abord remarquons que comme $\eta^{-1} < 1$, la fonction y étant croissante et de valeur initiale 1, elle n'atteint jamais η^{-1} . L'instant τ est donc celui d'atteinte de η et ainsi

$$\tau = \left(\frac{\eta^{(\sigma+1)} - 1}{\sigma + 1} \right)^{\frac{1}{\sigma+1}} \wedge 2T. \quad (4.15)$$

L'équation différentielle ordinaire (4.14) admettant une unique solution, les processus limites arrêtés sont tous de même distribution. Ainsi on conclut que $\tau^0 = \tau$ presque sûrement, et que $y^0(t \wedge \tau^0) = y(t \wedge \tau)$. Dans la suite, τ désignera à la fois τ^{lim} et τ .

La convergence en loi de la famille $(y^\varepsilon(t \wedge \tau), t \in [0, 2T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ vers $(y(t \wedge \tau))_{t \in [0, 2T]}$ se montre alors par l'absurde, de la même façon que dans les démonstrations des Théorèmes 2.2.2 et 2.1.1. Il reste alors à supprimer les temps d'arrêt τ^ε et τ . Pour cela, on fait tendre η vers $+\infty$, de cette façon et par (4.15), on obtient :

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \tau = 2T. \quad (4.16)$$

Puis, de la même façon qu'on a montré l'affirmation i) du Lemme 2.3.3, on montre que

$$\mathbb{P}(\tau \leq \tau^0) = 1,$$

ce qui, combiné avec (4.16) implique

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\tau^0 = 2T) = 1.$$

La suppression des temps d'arrêt τ^ε se traite alors comme dans l'étape 3 de la démonstration du Théorème 2.1.1. Ainsi on obtient la convergence en distribution de la famille de processus stochastiques continus $(x^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{0 < \varepsilon < \varepsilon_*}$ vers $(y(t))_{t \in [0, T]}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

Nous finissons cette section en montrant la convergence uniforme (4.13).

Démonstration du Lemme 4.3.2. Considérons, pour tout $x \in [\eta^{-1}, \eta]$, les coefficients suivants :

$$a^\varepsilon(x) = \int_{[\eta^{-1}, \eta]} (y - x)^2 \Pi^\varepsilon(x, dy) \quad \text{et} \quad b^\varepsilon(x) = \int_{[\eta^{-1}, \eta]} (y - x) \Pi^\varepsilon(x, dy),$$

ainsi que l'opérateur

$$\mathcal{A}^\varepsilon f(x) = \frac{1}{2} a^\varepsilon(x) f''(x) + b^\varepsilon(x) f'(x).$$

Nous obtenons alors que, dans le cas où $x \in]\eta^{-1}, \eta[$,

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(x) &= \mathbb{E}((U^\varepsilon(x, \omega) - x)^2 \mid \mathbb{1}_{|U^\varepsilon(x, \omega)| \in]\eta^{-1}, \eta[}) \\ &= o(\varepsilon^{\sigma+1}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

et

$$\begin{aligned} b^\varepsilon(x) &= \mathbb{E}((F^\varepsilon(x, \omega) - x) \mid \mathbb{1}_{|F^\varepsilon(x, \omega)| \in]\eta^{-1}, \eta[}) \\ &= \varepsilon^{\sigma+1} \frac{\gamma}{x^\sigma} + o(\varepsilon^{\sigma+1}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

De plus, si $x = \eta^{\pm 1}$ il est clair que $a^\varepsilon(\eta^{\pm 1}) = 0 = b^\varepsilon(\eta^{\pm 1})$, et ce, pour tout $\varepsilon > 0$. Cela implique que, en particulier, $\mathcal{A}^\varepsilon f(\eta^{\pm 1})/\varepsilon^{\sigma+1} = 0$. D'après la forme de l'opérateur $\mathcal{L}$ (4.12), pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, nous avons donc

$$\frac{1}{\varepsilon^{\sigma+1}} \mathcal{A}^\varepsilon f(x) \longmapsto \mathcal{L}f(x), \quad \text{pour tout } x \in [\eta^{-1}, \eta].$$

Contrôlons maintenant $\|(\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f - \mathcal{A}^\varepsilon f\|_\infty / \varepsilon^{\sigma+1}$. Pour tout $x \in]\eta^{-1}, \eta[$, et tout $y \in]\eta^{-1}, \eta[$, il existe une constante $\mathcal{C}_f$ dépendant uniquement de f telle que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^{\sigma+1}} |(\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(x) - \mathcal{A}^\varepsilon f(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon^{\sigma+1}} \int_{]\eta^{-1}, \eta[} |y - x|^3 \Pi^\varepsilon(x, dy) \\ &\quad + \frac{2}{\varepsilon^2} \|f\|_\infty (\Pi^\varepsilon(x, \eta^{-1}) + \Pi^\varepsilon(x, \eta)). \end{aligned}$$

Or, d'après (4.10)

$$\int_{]\eta^{-1}, \eta[} |y - x|^3 \Pi^\varepsilon(x, dy) = o(\varepsilon^3).$$

De plus, pour tout $x \in [\eta^{-1}, \eta]$, remarquons que, pour tout $\delta > 0$, il existe un $\varepsilon_+ > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_+$, on ait

$$\Pi^\varepsilon(x, \mathbb{R} \setminus]x - \delta, x + \delta]) = 0,$$

ce qui a pour conséquence que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in [\eta^{-1}, \eta]} \frac{1}{\varepsilon^2} \Pi^\varepsilon(x, \mathbb{R} \setminus]x - \delta, x + \delta]) = 0.$$

On obtient alors, pour tout $x \in]\eta^{-1}, \eta[$

$$\frac{1}{\varepsilon^{\sigma+1}} |(\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(x) - \mathcal{A}^\varepsilon f(x)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (4.19)$$

De plus, dans le cas $x = \eta^{\pm 1}$, il est clair que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} (\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f(\eta^{\pm 1}) &= \int_{[\eta^{-1}, \eta]} f(y) - f(\eta^{\pm 1}) \Pi^\varepsilon(\eta^{\pm 1}, dy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, pour tout $x \in [\eta^{-1}, \eta]$,

$$\left| \mathcal{L}f(x) - \frac{1}{\varepsilon^{\sigma+1}} (\Pi^\varepsilon - \mathbf{I})f \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

□

4.4 Conclusion

Dans les cas où $\sigma > 1$ ou $\sigma = 1$ et $\gamma < 1/2$, les chaînes de Markov sont récurrentes. Nous n'avons pas été en mesure d'établir de résultats de convergence vers un processus limite sans hypothèse supplémentaire sur le comportement des chaînes sous la valeur critique x_+ ou sans les conditionner à rester supérieures à cette valeur critique. En effet, l'étape de suppression des temps d'arrêt faite dans les Théorèmes 2.1.1, 2.2.2 et 4.3.1 n'est plus possible (voir une situation analogue dans le chapitre suivant).

En revanche si $\sigma < 1$, les chaînes sont transientes et ceci nous permet d'aller plus loin dans l'étude du comportement des chaîne de Markov. En effet, le chapitre 3 peut s'adapter grâce au Théorème 4.3.1 à ces chaînes.

Théorème 4.4.1. *Soit $\sigma > 1$ et soit une chaîne de Markov $(x_n)_n$ vérifiant l'hypothèse 4.1.1. Alors*

1. *Pour tout $0 < p \leq 1$ et pour tout $\nu > 0$, il existe $x_* > x_+$ tel que pour tout $x_0 > x_*$, on ait*

$$\mathbb{P} \left(\forall n \in \mathbb{N}, \left(x_0 + n^{\frac{1}{\sigma+1}} \right)^{1-\nu} \leq x_n \leq \left(x_0 + n^{\frac{1}{\sigma+1}} \right)^{1+\nu} \right) \geq 1 - p. \quad (4.20)$$

2. *Pour tout $\nu > 0$, on a*

$$\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\forall n \in \mathbb{N}, \left(x_0 + n^{\frac{1}{\sigma+1}} \right)^{1-\nu} \leq x_n \leq \left(x_0 + n^{\frac{1}{\sigma+1}} \right)^{1+\nu} \right) = 1. \quad (4.21)$$

La solution limite exhibée dans le Théorème 4.3.1 étant déterministe, la preuve de ce théorème se trouve simplifiée par rapport à celle du Théorème 1.4.2. En effet, le Théorème 4.3.1 s'applique seulement via le Théorème Portmanteau et le caractère déterministe de la solution simplifie l'élaboration de la Proposition 3.2.2. On obtient que pour tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{\eta} > \eta_+$ tel que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ et pour presque tout $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{\ell-1} \geq \eta_+$, $\eta_\ell > \tilde{\eta}$,

$$|\mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell \pm 1 \mid \eta_\ell, \dots, \eta_0) - 1| < \delta,$$

en construisant le processus $(\eta_\ell)_\ell$ de la même façon que celui construit dans la section « Processus auxiliaire ». Il en est de même pour le Lemme 3.3.3 ainsi que pour la Proposition 3.3.4.

Chapitre 5

Un gaz de Lorentz dynamique

Pour ce dernier chapitre, nous étudions un modèle de gaz de Lorentz inélastique et dynamique introduit dans [20]. Le système étudié présente un couplage entre la dynamique de la particule et celle du milieu. Cela signifie que les degrés de liberté internes des diffuseurs sont perturbés par le passage de la particule et des échanges d'énergie ont lieu. Il en résulte que l'énergie cinétique de la particule ne se comporte plus comme précédemment. En particulier, sous un changement d'échelle approprié qui correspond à une limite de couplage faible, l'énergie cinétique se comporte comme un processus diffusif récurrent admettant un état d'équilibre thermique.

*"You weren't there, you didn't see," he said.
"There must be something in books, things we can't imagine,
to make a woman stay in a burning house ;
You don't stay for nothing."
"She was simple-minded."
Ray Bradbury — Fahrenheit 451.*

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions le système particule-diffuseur introduit dans [20]. Ce système est un gaz de Lorentz dynamique dans le sens de l'introduction. L'état du système particule-diffuseur vérifie les équations

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = -\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \eta(Q_i(t)) \nabla W(q(t) - r_i) \\ M\ddot{Q}_i(t) + U'(Q_i(t)) = -\tilde{\alpha} \eta'(Q_i(t)) W(q(t) - r_i). \end{cases} \quad (5.1)$$

La donnée $q(t)$ représente la position de la particule à l'instant t . Les localisations $r_i \in \mathbb{R}^d$ des centres des diffuseurs sont définies de la même façon que dans le chapitre 1. Le déplacement du degré de liberté interne associé au diffuseur centré en r_i est représenté par Q_i . Le potentiel U contrôlant la dynamique « non couplée » des degrés de liberté des diffuseurs, ainsi que la fonction de couplage η , sont supposés appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Plus particulièrement, on supposera que ce dernier a une croissance polynomiale :

$$U(Q) \sim |Q|^r \quad \text{et} \quad |\eta(Q)| \sim |Q|^{r'}$$

et que η est borné. Le potentiel U est donc un potentiel confinant. Le potentiel $W \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ apparaissant dans les termes d'interaction est tel que $\|W\|_\infty \leq 1$ et, comme dans le chapitre 1, supposé invariant par rotation, et à support compact dans la sphère de rayon $1/2$ centrée en 0. Les valeurs $\alpha, \tilde{\alpha} \geq 0$ représentent la constante de couplage.

Le modèle inerte étudié dans le chapitre 1, correspond au cas où $\tilde{\alpha} = 0$ et $\alpha > 0$. Les diffuseurs ne sont alors pas affectés par le passage de la particule. Le potentiel V introduit dans le chapitre 1 correspond à ηW et en particulier,

$$V(q, t) = \eta \left(Q(0) \cos(\omega t) + \omega \dot{Q}(0) \sin(\omega t) \right) W(q).$$

Dans la suite, on considérera le cas où les deux constantes de couplage sont égales et non nulles : $\alpha = \tilde{\alpha} > 0$. Le système (5.1) devient

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = -\alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \eta(Q_i(t)) \nabla W(q(t) - r_i) \\ M \ddot{Q}_i(t) + U'(Q_i(t)) = -\alpha \eta'(Q_i(t)) W(q(t) - r_i). \end{cases} \quad (5.2)$$

En notant $v = \dot{q}$ et $P_i = M \dot{Q}_i$, les équations (5.2) sont générées par l'hamiltonien

$$H(q, v, Q_i, P_i) = \frac{v^2}{2} + \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} H_{\text{diff}}(Q_i, P_i) + \alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \eta(Q_i) V(q - r_i),$$

où H_{diff} est l'hamiltonien associé à la dynamique d'un unique diffuseur. L'énergie totale du système est donc conservée.

$$H_{\text{diff}}(Q, P) = \frac{P^2}{2M} + U(Q). \quad (5.3)$$

En d'autres termes, les degrés de liberté internes de chaque diffuseur répondent au passage de la particule tout en permettant à l'énergie du système d'être conservée. Notons que cette modification des degrés de libertés n'entraîne aucunement une modification de la localisation du centre du diffuseur ou de la zone d'interaction.

Dans [20], il est établi, si la constante de couplage α est petite et sous des conditions appropriées sur la distribution de (Q_i, P_i) que la distribution des vitesses de la particule approche une distribution de Maxwell-Boltzmann pour une température T ,

$$\rho_{eq} = \frac{1}{(2\pi k_B T)^{d/2}} \exp(-\|v\|_d^2 / 2k_B T).$$

La température T est déterminée par la distribution des (Q_i, P_i) . Les résultats de [20] sont obtenus en partie numériquement et ne sont que très partiellement appuyés par des résultats rigoureux. Pour progresser dans cette direction nous montrons rigoureusement ici, en considérant un modèle simplifié que dans une limite de couplage faible, l'énergie cinétique de la particule se comporte comme une diffusion admettant un état d'équilibre thermique.

5.2 Description par une chaîne de Markov

De la même manière que dans le chapitre 1, nous allons étudier un système simplifié en excluant les possibles recollisions entre la particule et un même diffuseur ainsi que les difficultés liées à la géométrie tout en conservant la dynamique non triviale. Le couple position-vitesse $(v(t), q(t))$ de la particule est à nouveau vu comme un processus stochastique. À chaque trajectoire, on associe une suite $(t_n, v_n, b_n, P_n, Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où t_n représente l'instant auquel la particule s'approche à vitesse v_n d'un diffuseur. Elle arrive sur ce diffuseur selon un paramètre d'impact b_n orthogonal à v_n (voir Figure 1.2). Le moment P_n ainsi que le déplacement Q_n sont supposés être identiquement et indépendamment distribués selon l'état stationnaire de l'hamiltonien (5.3) :

$$\rho(Q_n, P_n) = \hat{\rho}(H_{\text{diff}}(Q_n, P_n)) = \rho(Q_n, -P_n), \quad (5.4)$$

et où ρ est à support compact. À chaque événement diffusif l'état du système change et, en particulier, la particule subit un changement de moment :

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n.$$

Ce transfert dépend uniquement du paramètre d'impact b_n ainsi que du déplacement Q_n et du moment P_n associés au diffuseur. Nous écrivons alors

$$v_{n+1} = v_n + R(v_n, b_n, Q_n, P_n), \quad (5.5)$$

où

$$R(v, b, Q, P) = -\alpha \int_0^{+\infty} dt \eta(Q(t)) \nabla W(q(t)) \quad (5.6)$$

et où (q, Q) est l'unique solution de

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = -\alpha \eta(Q(t)) \nabla W(q(t)) \\ M \ddot{Q}(t) + U'(Q(t)) = -\alpha \eta'(Q(t)) W(q(t)), \end{cases} \quad (5.7)$$

avec les conditions initiales

$$q(0) = b - \frac{v}{2\|v\|_d}, \quad v(0) = v, \quad Q(0) = Q \quad \text{et} \quad P(0) = P, \quad v \cdot b = 0.$$

Comme dans le chapitre 1, chaque pas de cette chaîne représente un événement diffusif. Les variables $(Q_n, P_n)_n$ caractérisent l'état des diffuseurs traversés, tandis que la variable b_n représente l'approche de ces diffuseurs. Partant d'une donnée initiale (q_0, p_0) , les positions q_n et moments v_n de la particule aux instants t_n sont définis itérativement par les relations

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + R(v_n, \kappa_n), \\ t_{n+1} = t_n + \frac{\ell_*}{\|v_{n+1}\|_d}, \\ q_{n+1} = q_n + \frac{\ell_*}{\|v_{n+1}\|_d} v_{n+1}, \end{cases} \quad (5.8)$$

où $\kappa_n = (b_n, Q_n, P_n)$ est indépendant de v_n et $R(v, \kappa)$ est défini par (5.6). Les paramètres $(Q_n, P_n)_n$ sont maintenant considérés comme étant une suite de variables aléatoires indépendantes, et identiquement distribuées selon la mesure stationnaire $\hat{\rho}(H_{\text{diff}}(Q, P))$. Les paramètres d'impact $(b_n)_n$ sont, eux aussi, représentés par des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme dans $B(0, 1/2)$ et sont conditionnées à ce que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \cdot v_n = 0$. La chaîne de Markov précédente est alors entièrement déterminée par la donnée initiale (q_0, v_0) et par la suite de variables aléatoires $(\kappa_n)_n$. La différence avec le système (1.9) réside en la différence essentielle entre (1.8) et (5.7).

5.3 Analyse du transfert d'énergie

Nous avons, comme dans le chapitre 1, besoin de comprendre de comportement du transfert du moment $R(v, \kappa)$ de la chaîne

$$v_{n+1} = v_n + R(v_n, \kappa_n),$$

et défini par (5.6) avec $\kappa_n = (b_n, Q_n, P_n)$. Cette relation étant indépendante des deux autres dans (5.8), on peut la traiter séparément. Le transfert d'énergie cinétique ayant lieu lors d'une unique collision pour une particule de moment $v \in \mathbb{R}^d$ s'écrit,

$$\Delta E(v, \kappa) = \frac{1}{2} (\|v + R(v, \kappa)\|_d^2 - \|v\|_d^2).$$

En terme des solutions de (5.2), ce transfert d'énergie peut s'écrire

$$\Delta E = \alpha \int_0^{t_+} ds \eta'(Q(s)) \dot{Q}(s) W(q(s)), \quad (5.9)$$

où t_+ est l'instant auquel la particule n'est plus sous l'influence du diffuseur. Notons que rien n'exclut le fait que ce dernier puisse être infini.

La distribution ρ des diffuseurs étant à support compact, l'énergie moyenne E_* définie par

$$E_* = \int dQ dP H_{\text{diff}}(Q, P) \hat{\rho}(H_{\text{diff}}(Q, P))$$

est finie. Il est possible de développer le transfert d'énergie ayant lieu durant une unique collision lorsque $\|v\|_d$ est grand. Pour tout $K \in \mathbb{N}_*$ et tout $(v, \kappa) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\Delta E(v, \kappa) = \sum_{\ell=0}^K \frac{\beta_{\alpha}^{(\ell)}(\kappa)}{\|v\|_d^{\ell}} + O\left(\|v\|_d^{-(K+1)}\right). \quad (5.10)$$

La particule passe un temps de l'ordre $\|v\|_d^{-1}$ dans un diffuseur, il est donc clair que sous cette condition, pour tout κ ,

$$\beta_{\alpha}^{(0)}(\kappa) = 0.$$

Dans la suite, pour toute fonction dépendant de v et de $\kappa = (b, P, Q)$, avec $b \cdot v = 0$ et $\|b\|_d \leq 1/2$, nous désignerons son espérance par rapport à la variable aléatoire κ par

$$\overline{f(v)} = \int_{\substack{\|b\|_d \leq 1/2 \\ b \cdot p = 0}} \frac{db}{C_d} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} dQ dQ \rho(Q, P) f(v, b, Q, P), \quad (5.11)$$

où C_d est le volume de la sphère de rayon $1/2$ dans $\mathbb{R}^{d-1}$. Les coefficients du développement (5.10) vérifie la proposition suivante.

Proposition 5.3.1. ([20]) *Soient les coefficients $\beta_\alpha^{(1)}(\kappa)$ et $\beta_\alpha^{(2)}(\kappa)$ introduits dans (5.10). Alors*

1. *Pour tout $\kappa = (b, Q, P)$,*

$$\beta_\alpha^{(1)}(\kappa) = \frac{\alpha}{M} \eta'(Q) P L_0(\|b\|_d), \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \beta_\alpha^{(2)}(\kappa) = \frac{\alpha}{M^2} (P^2 \eta''(Q) - M \eta'(Q) U'(Q)) L_1(\|b\|_d) \\ - \frac{\alpha^2}{2M} (\eta'(Q))^2 L_0^2(\|b\|_d), \end{aligned} \quad (5.13)$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout vecteur unitaire $e \in \mathbb{R}^d$ tel que $b \cdot e = 0$,

$$L_k(\|b\|_d) = \int_0^1 ds s^k W \left(b + (s - \frac{1}{2})e \right). \quad (5.14)$$

2. *Supposons que la mesure ρ soit stationnaire pour la dynamique libre des diffuseur générée par H_{diff} ,*

$$\overline{\beta_\alpha^{(1)}} = 0, \quad \overline{\beta_\alpha^{(2)}} = -\frac{\alpha^2}{2M} \overline{(\eta')^2} \overline{L_0^2} \quad \text{et} \quad \overline{(\beta_\alpha^{(1)})^2} = \frac{\alpha^2}{M^2} \overline{(\eta' P)^2} \overline{L_0^2}. \quad (5.15)$$

Le calcul des coefficients $\beta_\alpha^{(1)}(\kappa)$ et $\beta_\alpha^{(2)}(\kappa)$ est fait en détail dans l'annexe de [20]. Le fait que $\overline{\beta_\alpha^{(1)}}$ soit nul vient de la parité en P de la mesure stationnaire. Remarquons enfin que (5.14) ne dépend que de $\|b\|_d$, ce qui est une conséquence de l'invariance rotationnelle du potentiel W . Les coefficients (5.15) du transfert d'énergie dépendant de α , nous introduisons les notations suivantes afin de séparer les termes de différents ordres en α et ceux de moyenne nulle ou non. Pour tout κ , nous noterons dans la suite

$$\begin{aligned} \beta_\alpha^{(1)}(\kappa) &= \alpha \beta_0^{(1)}(\kappa), \\ \beta_\alpha^{(2)}(\kappa) &= \alpha \beta_0^{(2)}(\kappa) - \alpha^2 \beta_+^{(2)}(\kappa). \end{aligned}$$

D'après la Proposition 5.3.1,

$$\beta_0^{(1)}(\kappa) = M^{-1} \eta'(Q) P L_0(\|b\|_d), \quad \beta_0^{(2)}(\kappa) = M^{-2} (P^2 \eta''(Q) - M \eta'(Q) U'(Q)) L_1(\|b\|_d)$$

sont tous deux de moyenne nulle et

$$\beta_+^{(2)}(\kappa) = (2M)^{-1}(\eta'(Q))^2 L_0^2(\|b\|_d) \quad \text{vérifie} \quad \overline{\beta_+^{(2)}} > 0.$$

Notons maintenant $E_n^\alpha = \|v_n\|_d^2/2$ et nous considérons la chaîne de Markov obtenue en ne retenant que les deux premiers termes du développement (5.10),

$$E_{n+1}^\alpha = E_n^\alpha + \frac{\alpha\beta_0^{(1)}(\kappa_n)}{\sqrt{2E_n^\alpha}} + \frac{\alpha\beta_0^{(2)}(\kappa_n) - \alpha^2\beta_+^{(2)}(\kappa_n)}{2E_n^\alpha}. \quad (5.16)$$

Dans le modèle inerte du chapitre 1, le terme dominant de moyenne non nulle est $\beta^{(4)}/(2E_n)^2$. Ici le terme dominant de moyenne non nulle est $\beta^{(2)}$ à cause de la présence du terme $\overline{\beta_+^{(2)}} > 0$. Comme expliqué dans [20], c'est la présence de ce terme de « frottement dynamique » qui constitue la différence essentielle entre le gaz de Lorentz inerte (chapitres 1 à 3) et le gaz de Lorentz dynamique étudié ici. Dans la suite, nous étudierons la chaîne (5.16) sur $\mathbb{R}_+^*$. À cause du terme en $-\alpha^2\beta_+^{(2)}/(2E_n^\alpha)$ elle est récurrente et n'est par conséquent pas bien définie. En effet, pour E_n^α petit, on peut avoir $E_{n+1}^\alpha < 0$.

5.4 Résultat de convergence pour l'énergie

La chaîne de Markov $(E_n^\alpha)_n$, définie précédemment par (5.16), dépend de la constante de couplage α . Dans la suite de cette section, nous allons considérer cette constante de couplage comme étant un paramètre indexant une famille de processus continus construits à partir de la chaîne de Markov $(E_n^\alpha)_n$. Dans le chapitre 2, nous avons changé d'échelle spatiale les chaînes de Markov considérées en y introduisant un paramètre $\varepsilon > 0$ qui était lié à la condition initiale. Ici, α contrôle la force du couplage entre la particule et les diffuseurs et c'est α qui joue le rôle de paramètre d'échelle.

Tout d'abord, nous allons définir la chaîne de Markov plus précisément sur laquelle nous allons établir un résultat de convergence. Pour tout $\alpha > 0$, soit la fonction $F^\alpha : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$F^\alpha(x, \kappa) = x + \alpha \left(\frac{\beta_0^{(1)}(\kappa)}{\sqrt{2x}} + \frac{\beta_0^{(2)}(\kappa)}{2x} \right) - \alpha^2 \frac{\beta_+^{(2)}(\kappa)}{2x}.$$

Supposons que les variables aléatoires $\beta_0^{(1)}$, $\beta_0^{(2)}$ et $\beta_+^{(2)}$ sont à valeurs bornées. C'est à dire qu'il existe $M \geq 1$ tel que,

$$\sup_{\kappa \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left\{ |\beta_0^{(1)}(\kappa)|, |\beta_0^{(2)}(\kappa)|, |\beta_+^{(2)}(\kappa)| \right\} < M,$$

Dans les paragraphes suivants, nous ajoutons à (5.16) une condition au bord appropriée puis nous étudions son comportement. Afin d'éviter que la chaîne de Markov (5.16) ne touche 0, nous introduisons une énergie critique E_+ et nous conditionnons la chaîne à rester supérieure ou égale à cette valeur. Le conditionnement que nous

introduisons entraîne une réflexion de la chaîne en E_+ . Pour tout $\alpha > 0$, les chaînes de Markov considérées sont donc :

$$\begin{cases} E_{n+1}^\alpha = F^\alpha(E_n^\alpha, \kappa_n), & \text{si } F^\alpha(E_n^\alpha, \kappa_n) \geq E_+ \\ E_{n+1}^\alpha = 2E_+ - F^\alpha(E_n^\alpha, \kappa_n), & \text{si } F^\alpha(E_n^\alpha, \kappa_n) < E_+. \end{cases} \quad (5.17)$$

avec pour condition initiale $E_0^\alpha = E_0 > E_+$ ne dépendant pas de α . La chaîne de Markov ainsi définie est à valeurs dans $[E_+, +\infty[$. La seconde relation de (5.17) interdit à la chaîne de Markov de toucher 0. Contrairement aux chaînes de Markov étudiées dans le chapitre 2, le drift est ici négatif, cela a pour conséquence que la chaîne n'est pas transiente et la particule peut entrer dans un état de basse énergie, et ce peu importe sa vitesse initiale. Considérons maintenant une famille de processus continus et indexée par α construite à partir des chaînes de Markov $(E_n^\alpha)_n$ définies par (5.17). Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n = \alpha^2 n$ et, pour tout $\tau \in [\tau_n, \tau_{n+1}[$, on introduit

$$E^\alpha(\tau) = \frac{\tau_{n+1} - \tau}{\alpha^2} E_n^\alpha + \frac{\tau - \tau_n}{\alpha^2} E_{n+1}^\alpha.$$

Ainsi, pour tout $\alpha > 0$, le processus $(E^\alpha(\tau))_{\tau \in \mathbb{R}_+}$ est continu. Nous avons alors le résultat de convergence suivant sur la famille $(E^\alpha(\tau), \tau \in [0, 1])_{\alpha > 0}$, soulignons que τ correspond à un nombre de collisions et non pas à un temps.

Théorème 5.4.1. *La famille de processus $(E^\alpha(\tau), \tau \in [0, 1])_{\alpha > 0}$ converge faiblement, quand α tend vers 0, vers l'unique solution du problème aux martingales associé à l'opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ où*

$$\mathcal{D}_* = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty([E_+, +\infty[), \lim_{x \rightarrow E_+} f'(x) = 0 \right\}, \quad (5.18)$$

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{(\overline{\beta_0^{(1)}})^2}{2x} + \frac{(\overline{\beta_0^{(2)}})^2}{4x^2} \right) f''(x) - \frac{\overline{\beta_+^{(2)}}}{2x} f'(x). \quad (5.19)$$

Ainsi défini, $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ est un cœur pour le générateur infinitésimal du processus généré par $\mathcal{L}$ et étant réfléchi en E_+ . Le schéma de la démonstration est identique à celui des théorèmes de convergence du chapitre 2. D'abord, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.4.2. *Pour tout $\alpha > 0$, soit $(\Pi^\alpha - \text{I})$ le générateur du processus $(E^\alpha(\tau_n))_n$.
i) Pour tout $f \in \mathcal{D}_*$ et pour tout $x \in [E_+, +\infty[$*

$$\left| \mathcal{L}f(x) - \frac{1}{\alpha^2} (\Pi^\alpha - \text{I})f(x) \right| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0.$$

ii) La famille $(E^\alpha(\tau), \tau \in [0, 1])_{\alpha > 0}$ est précompacte.

Démonstration. i) Considérons, pour tout $x \in [E_+, +\infty[$, les coefficients suivants :

$$a^\alpha(x) = \int_{[E_+, +\infty[} (y-x)^2 \Pi^\alpha(x, dy) \quad \text{et} \quad b^\alpha(x) = \int_{[E_+, +\infty[} (y-x) \Pi^\alpha(x, dy), \quad (5.20)$$

ainsi que l'opérateur

$$\mathcal{A}^\alpha f(x) = \frac{1}{2}a^\alpha(x)f''(x) + b^\alpha(x)f'(x).$$

Les coefficients $a^\alpha(x)$ et $b^\alpha(x)$ sont, respectivement les moment d'ordre 2 et 1 des pas de la marche aléatoire $(E^\alpha(\tau_n))_n$. Nous avons, pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in [E_+, +\infty[$,

$$\left| \mathcal{L}f(x) - \frac{1}{\alpha^2}(\Pi^\alpha - \text{I})f(x) \right| \leq \left| \mathcal{L}f(x) - \frac{1}{\alpha^2}\mathcal{A}^\alpha f(x) \right| + \left| \frac{1}{\alpha^2}\mathcal{A}^\alpha f(x) - \frac{1}{\alpha^2}(\Pi^\alpha - \text{I})f(x) \right|. \quad (5.21)$$

Contrôlons tout d'abord le premier terme du membre de droite de l'inégalité précédente. Remarquons que, pour $x \in [E_+, +\infty[$, les coefficients de $\mathcal{A}^\alpha$ sont les espérances suivantes :

$$\begin{aligned} a^\alpha(x) = \mathbb{E} \Big((F^\alpha(x, \kappa) - x)^2 \mathbb{1}_{F^\alpha(x, \kappa) > E_+} \\ + (2E_+ - F^\alpha(x, \kappa) - x)^2 \mathbb{1}_{F^\alpha(x, \kappa) \leq E_+} \Big) \end{aligned} \quad (5.22)$$

et

$$\begin{aligned} b^\alpha(x) = \mathbb{E} \Big((F^\alpha(x, \kappa) - x) \mathbb{1}_{F^\alpha(x, \kappa) > E_+} \\ + (2E_+ - F^\alpha(x, \kappa) - x) \mathbb{1}_{F^\alpha(x, \kappa) \leq E_+} \Big). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Considérons le cas où $x > E_+$. Le pas de la chaîne étant de taille α , pour tout $x > E_+$ il existe α_* tel que pour tout $\alpha < \alpha_*$,

$$\mathbb{1}_{F^\alpha(x, \kappa) > E_+} = 1, \quad \text{presque sûrement.} \quad (5.24)$$

Ainsi, pour tout $x > E_+$, il existe $\alpha_* > 0$ tel que pour tout $\alpha < \alpha_*$,

$$\begin{aligned} a^\alpha(x) &= \mathbb{E} \left((F^\alpha(x, \kappa) - x)^2 \right) \\ &= \alpha^2 \left(\frac{(\overline{\beta_0^{(1)}})^2}{2x} + \frac{(\overline{\beta_0^{(2)}})^2}{4x^2} + \frac{\overline{\beta_0^{(1)}}\overline{\beta_0^{(2)}}}{x\sqrt{2x}} \right) - \alpha^3 \left(\frac{\overline{\beta_0^{(1)}}\overline{\beta_+^{(2)}}}{x\sqrt{2x}} + \frac{\overline{\beta_0^{(2)}}\overline{\beta_+^{(2)}}}{2x^2} \right) + \alpha^4 \frac{(\overline{\beta_+^{(2)}})^2}{4x^2}. \end{aligned}$$

La mesure $\rho(\cdot, P)$ étant paire, par (5.12) et (5.13), $\overline{\beta_0^{(1)}}\overline{\beta_0^{(2)}} = 0$, et ainsi,

$$a^\alpha(x) = \alpha^2 a(x) + o(\alpha^2). \quad (5.25)$$

De même,

$$b^\alpha(x) = \mathbb{E} \left((F^\alpha(x, \kappa) - x) \right) \quad (5.26)$$

$$= -\alpha^2 \frac{\overline{\beta_+^{(2)}}}{2x}. \quad (5.27)$$

$$(5.28)$$

Considérons maintenant le cas $x = E_+$, alors

$$a^\alpha(E_+) = \mathbb{E} \left((F^\alpha(E_+, \kappa) - E_+)^2 \right) \\ \alpha^2 a(E_+) + o(\alpha^2).$$

De plus, tout $f \in \mathcal{D}_*$ vérifie la condition $f'(E_+) = 0$ d'où, pour tout $x \geq E_+$

$$\left| \mathcal{L}f(x) - \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{A}^\alpha f(x) \right| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0.$$

Il nous reste à contrôler le second terme de (5.21). En faisant un développement de Taylor à l'ordre 2 et en utilisant (5.20), on a que, pour tout $x \geq E_+$ et pour tout $y \geq E_+$, il existe $z \in]x, y[$ tel que

$$(\Pi^\alpha - \mathbf{I})f(x) \leq \mathcal{A}^\alpha f(x) + \frac{1}{6} \int_{[E_+, +\infty[} f^{(3)}(z)(y-x)^3 \Pi^\alpha(x, dy). \quad (5.29)$$

De plus, d'après (5.17), nous avons

$$\left| \int_{[E_+, +\infty[} f^{(3)}(z)(y-x)^3 \Pi^\alpha(x, dy) \right| \leq \|f^{(3)}\|_\infty \int_{[E_+, +\infty[} |y-x|^3 \Pi^\alpha(x, dy) \\ \leq \|f^{(3)}\|_\infty \left(\mathbb{E}(|F^\alpha(x, \kappa) - x|^3 \mathbf{1}_{F^\alpha(x, \kappa) \geq E_+}) \right. \\ \left. + \mathbb{E}(|2E_+ + F^\alpha(x, \kappa) - x|^3 \mathbf{1}_{F^\alpha(x, \kappa) < E_+}) \right).$$

D'après (5.24), on obtient

$$\left| \int_{[E_+, +\infty[} f^{(3)}(z)(y-x)^3 \Pi^\alpha(x, dy) \right| \leq \|f^{(3)}\|_\infty O(\alpha^3).$$

En combinant cette dernière inégalité avec (5.29), on obtient finalement que pour tout $x \geq E_+$,

$$\left| \frac{1}{\alpha^2} (\Pi^\alpha - \mathbf{I})f(x) - \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{A}^\alpha f(x) \right| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0.$$

ii) Afin de montrer que la famille $(E^\alpha(\tau), \tau \in [0, 1])_{\alpha > 0}$ est précompacte, on utilise le Théoreme H.8. Premièrement, remarquons que d'après (5.29) et (5.25), (5.27), pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, il existe une nouvelle constante $\tilde{C}_f > 0$ telle que,

$$\frac{1}{\alpha^2} \|(\Pi^\alpha - \mathbf{I})f\|_\infty \leq \tilde{C}_f. \quad (5.30)$$

Il suit que, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$,

$$\mathbb{E} \left(f(E^\alpha(\tau_{n+1})) + \tilde{C}_f \tau_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^{E^\alpha} \right) = f(E^\alpha(\tau_n)) + \tilde{C}_f \tau_n \\ + (\Pi^\alpha - \mathbf{I})f(E^\alpha(\tau_n)) + \tilde{C}_f \alpha^2 \quad (5.31)$$

$$\geq f(E^\alpha(\tau_n)) + \tilde{C}_f \tau_n. \quad (5.32)$$

Ainsi, le processus $\left(f(E^\alpha(\tau_n) + \tilde{C}_f \tau_n)\right)_n$ est une sous-martingale. Ensuite, chaque pas de la chaîne de Markov $(E^\alpha(\tau_n))_n$ a une taille de l'ordre de α . D'où, pour tout $\delta > 0$, il existe $\tilde{\alpha}$ tel que, pour tout $\alpha < \tilde{\alpha}$, on a

$$\mathbb{P}(|E^\alpha(\tau_j) - E^\alpha(\tau_{j-1})| > \delta) = 0,$$

et,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{1}{\alpha^2} \rfloor} \mathbb{P}(|E^\alpha(\tau_j) - E^\alpha(\tau_{j-1})| > \delta) = 0, \quad (5.33)$$

Ces deux dernières affirmations, combinée avec (5.32), impliquent la précompacité de la famille de processus $(E^\alpha(\tau), \tau \in [0, 1])_{\alpha > 0}$ d'après le Théorème H.8. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le Théorème 5.4.1.

Démonstration du Théorème 5.4.1. L'affirmation iv) du Lemme 5.4.2 nous permet d'établir l'existence de suites décroissantes $\{\alpha_k\}_k$ et à valeurs strictement positives telles que $\alpha_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$ et telles que les sous-famille $(E^{\alpha_k}(\tau), \tau \in [0, 1])_{k \in \mathbb{N}}$ convergent en distribution vers des processus limites $(E^0(\tau))_{\tau \in [0, 1]}$. Ces processus limites sont alors à valeurs dans $[E_+, +\infty[$.

Le Théorème de représentation de Skorohod implique alors l'existence d'un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ ainsi que de processus

$$\left(\tilde{E}^{\alpha_k}(\tau), \tau \in [0, 1]\right)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\tilde{E}^0(\tau)\right)_{\tau \in [0, 1]}$$

respectivement de même distribution que

$$(E^{\alpha_k}(\tau), \tau \in [0, 1])_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (E^0(\tau))_{\tau \in [0, 1]},$$

et tels que

$$\sup_{\tau \in [0, 1]} \left| \tilde{E}^0(\tau) - \tilde{E}^{\alpha_k}(\tau) \right| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-presque sûrement.}$$

Lemme 5.4.3. *Pour tout $f \in \mathcal{D}_*$. On a les deux propriétés suivantes sur l'espace de Skorohod.*

i) *Soient $0 \leq u_1 < u_2 \leq 1$, alors,*

$$f\left(\tilde{E}^{\alpha_k}\left(\left\lfloor \frac{u_2}{\alpha_k^2} \right\rfloor \alpha_k^2\right)\right) - f\left(\tilde{E}^{\alpha_k}\left(\left\lfloor \frac{u_1}{\alpha_k^2} \right\rfloor \alpha_k^2\right)\right) - \sum_{j=\lfloor \frac{u_1}{\alpha_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{u_2}{\alpha_k^2} \rfloor - 1} (\Pi^{\alpha_k} - \mathbf{I})f\left(\tilde{E}^{\alpha_k}(\tau_j)\right)$$

converge $\tilde{\mathbb{P}}$ presque-sûrement, quand $k \rightarrow +\infty$, vers

$$f\left(\tilde{E}^0(u_2)\right) - f\left(\tilde{E}^0(u_1)\right) - \int_{u_1}^{u_2} \mathcal{L}f\left(\tilde{E}^0(s)\right) ds, \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

ii) Le processus limite $\left(\widetilde{M}^0(\tau)\right)_\tau$,

$$\widetilde{M}^0(\tau) = f\left(\widetilde{E}^0(\tau)\right) - \int_0^\tau \mathcal{L}f\left(\widetilde{E}^0(s)\right) ds$$

est une $\mathcal{F}_\tau^{\widetilde{X}^0}$ -martingale.

En revenant dans l'espace probabilisé d'origine, ce lemme nous assure que, tout processus limites $(E^0(\tau))_\tau$ est solution du problème aux martingales associé à l'opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ défini dans (5.18) et (5.19). Les coefficients de ce problème aux martingales étant lipschitziens sur $[E_+, +\infty[$, il est bien posé. Les processus limites sont alors tous égaux en distribution. Afin de conclure cette démonstration, on montre que ce ne sont pas seulement les sous-familles qui convergent en distribution vers la solution de ce problème aux martingales mais la famille $(E^\alpha(\tau), \tau \in [0, 1])_{\alpha > 0}$ entière.

Pour cela, revenons à la Définition H.2 de la convergence en distribution et raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\phi \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ ainsi qu'une suite décroissante $\{\alpha_k\}_k$ de nombres strictement positifs et tendant vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{E}(\phi(E^{\alpha_k}(\cdot))) - \mathbb{E}(\phi(E^0(\cdot)))| > \varepsilon. \quad (5.34)$$

Or, la famille $(E^{\alpha_k}(\tau), \tau \in [0, 1])_{k \in \mathbb{N}}$ est à nouveau précompacte. En effet, les hypothèses du Théorème H.8 sont encore satisfaites. On peut alors extraire une sous-suite $\{\alpha_{\varphi(k)}\}_k$ convergente telle que $(E^{\alpha_{\varphi(k)}}(\tau), \tau \in [0, 1])_{k \in \mathbb{N}}$ converge en distribution. D'après ce qui précède, le processus limite de cette famille est $(E^0(\tau))_{\tau \in [0, 1]}$. Ainsi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\phi(E^{\alpha_{\varphi(k)}}(\cdot))) = \mathbb{E}(\phi(E^0(\cdot))),$$

ce qui rend (5.34) absurde. Une telle fonction ϕ n'existe donc pas et nous pouvons conclure la démonstration du théorème. $\square$

Cette section se conclut avec la démonstration du Lemme 5.4.3 utilisé dans celle du Théorème 5.4.1.

Démonstration du Lemme 5.4.3. i) Les processus limites $\widetilde{E}^0$ sont continus en temps car limite presque-sûre des processus $\widetilde{E}^{\alpha_k}$ qui sont continus en temps. Alors, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$,

$$\begin{aligned} \left| f\left(\widetilde{E}^0(\tau)\right) - f\left(\widetilde{E}^{\alpha_k}\left(\left\lfloor \frac{\tau}{\alpha_k^2} \right\rfloor \alpha_k^2\right)\right) \right| &\leq \|f'\|_\infty \left(\left| \widetilde{E}^0(\tau) - \widetilde{E}^0\left(\left\lfloor \frac{\tau}{\alpha_k^2} \right\rfloor \alpha_k^2\right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \widetilde{E}^0\left(\left\lfloor \frac{\tau}{\alpha_k^2} \right\rfloor \alpha_k^2\right) - \widetilde{E}^{\alpha_k}\left(\left\lfloor \frac{\tau}{\alpha_k^2} \right\rfloor \alpha_k^2\right) \right| \right) \\ &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \widetilde{\mathbb{P}} - \text{p.s.} \end{aligned}$$

Nous devons maintenant contrôler $\int_{u_1}^{u_2} \mathcal{L}f(\tilde{E}^0(s)) ds - \sum_{j=\lfloor \frac{u_1}{\alpha_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{u_2}{\alpha_k^2} \rfloor - 1} (\Pi^{\alpha_k} - \text{I})f(\tilde{E}^{\alpha_k}(\tau_j))$ pour tout $f \in \mathcal{D}_*$.

$$\begin{aligned} & \left| \int_{u_1}^{u_2} \mathcal{L}f(\tilde{E}^0(s)) ds - \sum_{j=\lfloor \frac{u_1}{\alpha_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{u_2}{\alpha_k^2} \rfloor - 1} (\Pi^{\alpha_k} - \text{I})f(\tilde{E}^{\alpha_k}(\tau_j)) \right| \\ & \leq \left| \int_{u_1}^{u_2} \mathcal{L}f(\tilde{E}^0(s)) ds - \alpha_k^2 \sum_{j=\lfloor \frac{u_1}{\alpha_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{u_2}{\alpha_k^2} \rfloor - 1} \mathcal{L}f(\tilde{E}^0(\tau_j)) \right| \\ & \quad + \alpha_k^2 \left| \sum_{j=\lfloor \frac{u_1}{\alpha_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{u_2}{\alpha_k^2} \rfloor - 1} \mathcal{L}f(\tilde{E}^0(\tau_j)) - \sum_{j=\lfloor \frac{u_1}{\alpha_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{u_2}{\alpha_k^2} \rfloor - 1} \mathcal{L}f(\tilde{E}^{\alpha_k}(\tau_j)) \right| \\ & \quad + \alpha_k^2 \left| \sum_{j=\lfloor \frac{u_1}{\alpha_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{u_2}{\alpha_k^2} \rfloor - 1} \mathcal{L}f(\tilde{E}^{\alpha_k}(\tau_j)) - \frac{1}{\alpha_k^2} \sum_{j=\lfloor \frac{u_1}{\alpha_k^2} \rfloor}^{\lfloor \frac{u_2}{\alpha_k^2} \rfloor - 1} (\Pi^{\alpha_k} - \text{I})f(\tilde{E}^{\alpha_k}(\tau_j)) \right|. \end{aligned}$$

Le premier terme est une approximation de l'intégrale par la méthode des rectangles et tend par conséquent vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$. La convergence presque sûre de $\tilde{E}^{\alpha_k}$ vers $\tilde{E}^0$ implique que le second terme tend lui aussi vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$. L'affirmation i) du Lemme 5.4.2 implique la convergence vers 0 du troisième terme.

ii) Pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, soit le processus $(\tilde{S}^{\alpha_k}(\tau_n))_n$ défini par

$$\tilde{S}^{\alpha_k}(\tau_n) = f(\tilde{E}^{\alpha_k}(\tau_n)) - \sum_{j=0}^{n-1} (\Pi^{\alpha_k} - \text{I})f(\tilde{E}^{\alpha_k}(\tau_j)).$$

La Proposition C.8 nous assure que, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, le processus $(S^{\alpha_k}(t_n))_n$ est une $\mathcal{F}_n^{E^{\alpha_k}}$ -martingale. Ainsi d'après la Proposition A.10,

$$\left| \mathbb{E} \left[\left(\tilde{S}^{\alpha_k}(\lfloor \frac{u_2}{\alpha_k^2} \rfloor \alpha_k^2) - \tilde{S}^{\alpha_k}(\lfloor \frac{u_1}{\alpha_k^2} \rfloor \alpha_k^2) \right) \phi(\tilde{E}^{\alpha_k}(s_1), \dots, \tilde{E}^0(s_d)) \right] \right| = 0 \quad (5.35)$$

et ce, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_\infty([E_+, +\infty[^d)$ à support compact, $d \in \mathbb{N}^*$, et toute subdivision

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_d = u_1.$$

Comme on travaille dans l'espace de Skorohod, la convergence presque-sûre

$$\phi(\tilde{E}^{\alpha_k}(s_1), \dots, \tilde{E}^{\alpha_k}(s_d)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \phi(\tilde{E}^0(s_1), \dots, \tilde{E}^0(s_d)),$$

est vérifiée. Donc, d'après l'affirmation i) de ce lemme, le produit dans l'espérance de (5.35) converge presque-sûrement vers

$$(\tilde{M}^0(u_2) - \tilde{M}^0(u_1)) \phi(\tilde{E}^0(s_1), \dots, \tilde{E}^0(s_d))$$

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty([E_+, +\infty[)$ à support compact. De plus, d'après (5.30), le produit dans l'espérance de (5.35) se majore par

$$(2\|f\|_\infty + \tilde{C}_f(u_2 - u_1))\|\phi\|_\infty.$$

Ainsi, d'après (5.35) et le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E} \left[\left(\tilde{M}^0(u_2) - \tilde{M}^0(u_1) \right) \phi \left(\tilde{E}^0(s_1), \dots, \tilde{E}^0(s_d) \right) \right] = 0.$$

Nous pouvons conclure par la Proposition A.10 que le processus $\left(\tilde{M}^0(\tau) \right)_{\tau \in [0,1]}$ est une $\mathcal{F}_\tau^{\tilde{E}^0}$ -martingale. □

5.5 Température d'équilibre

Dans cette section, nous étudions brièvement l'unique mesure stationnaire du processus $E(\tau)$ solution du problème aux martingales associé à l'opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*))$, avec

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{(\beta_0^{(1)})^2}}{2x} + \frac{\overline{(\beta_0^{(2)})^2}}{4x^2} \right) f''(x) - \frac{\overline{\beta_+^{(2)}}}{2x} f'(x).$$

L'équation de Fokker-Planck associée à ce problème aux martingales est la suivante

$$\partial_\tau \hat{\rho}(x, \tau) = \partial_x \left[\frac{\overline{\beta_+^{(2)}}}{2x} \hat{\rho}(x, \tau) + \frac{1}{2} \partial_x \left(\left(\frac{\overline{(\beta_0^{(1)})^2}}{2x} + \frac{\overline{(\beta_0^{(2)})^2}}{4x^2} \right) \hat{\rho}(x, \tau) \right) \right]. \quad (5.36)$$

L'équation (5.36) admet une solution stationnaire $\hat{\rho}_{\text{eq}}$ solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\partial_x \left[\frac{\overline{\beta_+^{(2)}}}{2x} \hat{\rho}_{\text{eq}}(x) + \frac{1}{2} \partial_x \left(\left(\frac{\overline{(\beta_0^{(1)})^2}}{2x} + \frac{\overline{(\beta_0^{(2)})^2}}{4x^2} \right) \hat{\rho}_{\text{eq}}(x) \right) \right] = 0. \quad (5.37)$$

En notant

$$A = \frac{\overline{(\beta_0^{(1)})^2}}{2}, \quad B = \frac{\overline{(\beta_0^{(2)})^2}}{4} \quad \text{et} \quad C^2 = \frac{\overline{\beta_+^{(2)}}}{2}, \quad (5.38)$$

on obtient l'expression suivante pour la distribution limite :

$$\hat{\rho}_{\text{eq}}(x) = \mathcal{N} x^2 (Ax + B)^{\frac{2C^2 B}{A^2} - 1} \exp \left(-\frac{2C^2 x}{A} \right), \quad (5.39)$$

avec $\mathcal{N}$ une constante de normalisation. Le changement de variable de $x = \|v\|_d^2/2$ qui représente l'énergie cinétique au moment $\|v\|_d$, donne la distribution,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{eq}}(\|v\|_d) &= \|v\|_d \hat{\rho}_{\text{eq}}(x) \\ &= \mathcal{N} \|v\|_d \frac{\|v\|_d^4}{2} \left(\frac{A}{2} \|v\|_d^2 + B \right)^{\frac{2C^2 B}{A^2} - 1} \exp \left(-\frac{C^2 \|v\|_d^2}{A} \right). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Cette distribution est associée au nombre de collision pour lequel la vitesse finale de la particule est $\|v\|_d$ lorsque le système est à l'équilibre. Afin de se ramener à une densité décrivant l'état de la particule mais associé au temps et non plus au nombre de collisions que celle-ci a subi, on remarque que le temps moyen que met une particule de vitesse $\|v\|_d$ entre deux collisions est $\ell_*/\|v\|_d$. Ainsi la densité de probabilité à l'équilibre $\rho_{\text{eq}}(\|v\|_d)$, décrivant le temps $\rho_{\text{eq}}(\|v\|_d)d\|v\|_d$ que la particule passe avec un moment entre $\|v\|_d$ et $\|v\|_d + d\|v\|_d$ satisfait la relation

$$\rho_{\text{eq}}(\|v\|_d) = \frac{\ell_*}{\|v\|_d} \hat{\rho}_{\text{eq}}(\|v\|_d).$$

D'après (5.40), la distribution $\rho(\|v\|_d, t)$ des particules de vitesse $\|v\|_d$ se comporte asymptotiquement comme la distribution

$$\rho_{\text{eq}}(\|v\|_d) = \mathcal{N}_0 \|v\|_d^4 \left(\overline{(\beta_0^{(1)})^2} \|v\|_d^2 + \overline{(\beta_0^{(2)})^2} \right)^{\frac{1}{4k_B T} \overline{(\beta_0^{(2)})^2} \left(\overline{(\beta_0^{(1)})^2} \right)^{-1} - 1} \exp \left(-\frac{\|v\|_d^2}{2k_B T} \right), \quad (5.41)$$

avec une température effective T donnée par l'expression

$$k_B T = \overline{(\beta_0^{(1)})^2} / \left(2\overline{\beta_+^{(2)}} \right) = \overline{(\eta' P)^2} / (M \overline{(\eta')^2}). \quad (5.42)$$

La chaîne de Markov étudiée dans [20] ne prend pas en compte le terme $\beta_0^{(2)}$ considéré ici. La température d'équilibre est alors la même que celle obtenue ici. En revanche le polynôme dans la distribution est en $\|p\|_d^2$. Nous remarquons qu'ignorer ce terme revient à prendre $B = 0$ dans (5.40), avec $B = \overline{(\beta_0^{(2)})^2}/4$. Or, d'après (5.13), le coefficient $\overline{(\beta_0^{(2)})^2}$ se comporte comme $E_*/(2M)$ et le régime dans lequel ces deux chaînes ont la même distribution stationnaire apparaît lorsque M est grand.

Annexe : Processus markoviens

Pour plus de clarté et afin de fixer nos notations, nous rappelons dans ce chapitre les notions et outils nécessaires aux démonstrations des Théorèmes 2.2.2 et 2.1.1 faites dans le chapitre 2. Nous nous référons à [24, 32, 41] et [55] pour plus de détails. Dans ce chapitre, (I, ρ) est un espace métrique complet et séparable (nous utiliserons $I \subset \mathbb{R}^d$, $1 \leq d < +\infty$ avec $\rho = \|\cdot\|_d$). Par ailleurs, $(\mathcal{C}_b(I), \|\cdot\|_\infty)$ représente l'espace de Banach des fonctions continues et bornées sur l'intérieur de I et dont les $\lim_{x \rightarrow \partial I} f(x)$ existent et sont finies muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} \|f(x)\|_d$.

*Freedom is the freedom to say
that two plus two make four.
If that is granted, all else follows.
George Orwell — 1984.*

A Martingales

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On rappelle tout d'abord la notion de probabilité et d'espérance conditionnelle, toutes deux nécessaires à l'introduction des processus de Markov.

Définition A.1. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, on appelle l'**espérance conditionnelle** de X par rapport à $\mathcal{G}$ l'unique variable aléatoire $\mathcal{G}$ -mesurable notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ telle que

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \mathbf{1}_B) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_B), \quad \forall B \in \mathcal{G}.$$

De même, soit $A \in \mathcal{F}$, la **probabilité conditionnelle** de A par rapport à $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire $\mathcal{G}$ -mesurable notée $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) \mathbf{1}_B) \quad \forall B \in \mathcal{G}, \quad \text{ou encore,} \\ \mathbb{P}(A|\mathcal{G}) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{G}). \end{aligned}$$

La variable aléatoire $\mathbb{P}(A|X)$ désigne la probabilité conditionnelle de A par rapport à $\mathcal{F}^X$, la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par X . De plus $\mathbb{P}(A|X = x)$ est la valeur prise par la variable aléatoire $\mathbb{P}(A|X)$ en tout point $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x$.

On rappelle maintenant la définition d'un processus stochastique.

Définition A.2. Un **processus stochastique** X , indexé par un ensemble ordonné $\mathcal{T}$, à valeurs dans un espace métrique appelé **espace des états** (I, ρ) , et défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille de variables aléatoires $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$.

Le paramètre t est généralement utilisé pour représenter le temps, ainsi il est raisonnable de considérer $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}_+$. Si $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{N}$ est un ensemble discret on dira que X est un processus stochastique à temps discret. Au contraire si $\mathcal{T}$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ on dira que X est à temps continu. Un processus stochastique peut aussi être défini comme étant une fonction $X : \mathcal{T} \times \Omega \rightarrow I$ telle que la fonction $X(t, \cdot)$ soit mesurable par rapport à $\mathcal{B}(I)$, la tribu borélienne sur I .

En considérant la tribu engendrée par un processus stochastique à chaque moment de $\mathcal{T}$, on obtient la notion de filtration.

Définition A.3. Une **filtration** complétée est une famille $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ croissante pour l'inclusion de sous σ -algèbres de $\mathcal{F}$. Un processus stochastique $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est **adapté** à la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ si $X(t, \cdot)$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

En particulier, tout processus stochastique $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est adapté à sa filtration usuelle $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ où $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X(s), s \leq t)$. La notion de filtration permet entre autres de définir les martingales et les temps d'arrêt.

Définition A.4. Une variable aléatoire τ positive à valeurs dans $\mathcal{T} \cup \{+\infty\}$ est un **temps d'arrêt** pour la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ si pour tout $t \in \mathcal{T}$,

$$\{\omega \in \Omega, \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

De même que pour les filtrations usuelles, on peut définir la tribu des éléments qui sont antérieurs à un temps d'arrêt.

Définition A.5. Soit τ un temps d'arrêt pour $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$. On note $\mathcal{F}_\tau$, la tribu antérieure à τ :

$$A \in \mathcal{F}_\tau \iff \forall t \in \mathcal{T}, A \cap \{\omega \in \Omega, \tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Les éléments de $\mathcal{F}_\tau$ sont entièrement décrits par les événements antérieurs à τ .

En particulier, si $\tau = t$ est déterministe alors $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.

Lemme A.6. Si τ est un temps d'arrêt adapté à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ alors τ est $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable. De plus si σ est aussi un temps d'arrêt adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$, alors

- i) $\sigma + \tau, \sigma \wedge \tau$ et $\sigma \vee \tau$ sont aussi des temps d'arrêt pour la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$,
- ii) si $A \in \mathcal{F}_\sigma$, alors $A \cap \{\sigma < \tau\}$ et $A \cap \{\sigma \leq \tau\}$ sont dans $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$,
- iii) si $\sigma \leq \tau$, alors $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

Définition A.7. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ une filtration et soit $(M(t))_{t \in \mathcal{T}}$ un processus stochastique à valeurs réelles, adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ et intégrable. On dit que $(M(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est :

- une **martingale** par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$, si pour tout $t, s \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{E}(M(t+s)|\mathcal{F}_t) = M(t);$$

- Une **sur-martingale** par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$, si pour tout $t, s \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{E}(M(t+s)|\mathcal{F}_t) \leq M(t);$$

- Une **sous-martingale** par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$, si pour tout $t, s \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{E}(M(t+s)|\mathcal{F}_t) \geq M(t).$$

Dans la suite un tel processus stochastique sera nommé $\mathcal{F}_t$ -martingale ou respectivement $\mathcal{F}_t$ sur/sous-martingale. Les martingales sont des processus stochastiques dont l'espérance reste constante au cours du temps. De plus, si un processus est une martingale (respectivement une sur/sous-martingale) par rapport à sa filtration usuelle, on dira simplement que c'est une (sur/sous-)martingale sans préciser par rapport à quelle filtration.

Théorème A.8 (Optional Sampling Theorem (Doob)). *Soient $\tau \leq \sigma$ deux temps d'arrêts bornés pour la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ et soit $(M(t))_{t \in \mathcal{T}}$ une martingale. Alors*

$$\mathbb{E}(M(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) = M(\sigma).$$

Théorème A.9 (Théorème de décomposition de Doob-Meyer). *Soit $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ une sous-martingale (respectivement une sur-martingale) continue. Alors il existe une unique décomposition*

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t)$$

où $(M(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est une martingale continue telle que $M(0) = 0$ et $(A(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est un processus croissant (respectivement décroissant) et adapté tel que $A(0) = 0$.

À partir de la définition de l'espérance conditionnelle, la propriété de martingale peut se traduire de la façon suivante :

Proposition A.10. *Un processus stochastique intégrable $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est une martingale pour sa filtration usuelle si, et seulement si, pour tous $s, t \in \mathcal{T}$ tels que $s < t$ et pour toute subdivision $s_1 < \dots < s_d \leq s$ appartenant à $\mathcal{T}$ et pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\mathbb{E}[(X(t) - X(s)) \Phi(X(s_1), \dots, X(s_d))] = 0.$$

Théorème A.11. *Soit $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ une martingale pour sa filtration usuelle $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ et soit τ un temps d'arrêt pour cette même filtration. Si τ prend un nombre dénombrable ou fini de valeurs, alors le processus arrêté $X(\cdot \wedge \tau)$ et le processus décalé $X(\cdot + \tau)$ sont toujours des martingales par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$. En particulier, si X est une martingale en temps discret et τ un temps d'arrêt quelconque, ces deux processus sont des martingales. Dans le cas des processus en temps continu, on peut ignorer l'hypothèse sur les valeurs de τ dès que les trajectoires de X sont continues à droite.*

B Processus de Markov

Pour commencer, on définit les fonctions de transition comme étant des fonctions $P_{s,t} : I \times \mathcal{B}(I) \rightarrow [0, 1]$, $0 \leq s < t$, satisfaisant pour tous $x \in I$ et $\Gamma \in \mathcal{B}(I)$ les trois assertions suivantes :

- i) $P_{s,t}(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur $(I, \mathcal{B}(I))$ pour tout $0 \leq s < t$ et pour tout $x \in I$;
- ii) $P_{s,t}(\cdot, \Gamma)$ est $\mathcal{B}(I)$ -mesurable pour tout $0 \leq s < t$ et tout $\Gamma \in \mathcal{B}(I)$;
- iii) si $0 \leq s < t < u$ et $\Gamma \in \mathcal{B}(I)$, alors, pour tout $x \in I$,

$$P_{s,u}(x, \Gamma) = \int_I P_{s,t}(x, dy) P_{t,u}(y, \Gamma). \quad (\text{B.1})$$

L'équation (B.1) est connue sous le nom d'équation de Chapman-Kolmogorov. Une fonction de transition doit être vue comme étant une distribution conditionnelle d'un processus au temps t sachant qu'à l'instant s ce processus était en x . Les fonctions de transition permettent de définir la classe des processus markoviens.

Définition B.1. Soit $(P_{s,t})_{0 \leq s < t}$ une fonction de transition et μ une mesure de probabilité sur $(I, \mathcal{B}(I))$. Un processus $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est un **processus de Markov** de distribution initiale μ et de fonction de transition $(P_{s,t})_{0 \leq s < t}$, si

$$\mathbb{P}(X(0) \in \Gamma) = \mu(\Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{B}(I),$$

et si pour tous $0 \leq s < t$ et $\Gamma \in \mathcal{B}(I)$,

$$\mathbb{P}(X(t) \in \Gamma | \mathcal{F}_s^X) = P_{s,t}(X(s), \Gamma). \quad (\text{B.2})$$

De plus, si pour tous $0 \leq s < t$,

$$P_{s,t}(x, \Gamma) = P_{0,t-s}(x, \Gamma) \quad x \in I \text{ et } \Gamma \in \mathcal{B}(I)$$

alors le processus de Markov est dit **homogène en temps**.

Pour plus de clarté, on écrira P_t au lieu de $P_{0,t}$ dans le cas de fonctions de transition homogènes en temps. Une fonction de transition homogène en temps décrit un **semi-groupe** lorsqu'elle agit sur les fonctions $f \in \mathcal{C}_b(I)$ de sorte que $P_t : \mathcal{C}_b(I) \rightarrow L^\infty(I)$ et

$$P_t f(x) := \int_I P_t(x, dy) f(y).$$

Ainsi si, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(I)$,

$$\mathbb{E}(f(X(t)) | X(0) = x) = P_t f(x),$$

alors le processus $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est un processus de Markov homogène en temps.

L'équation (B.2) implique que si le processus $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est un processus de Markov alors pour tout $0 \leq s < t$ et tout $\Gamma \in \mathcal{B}(I)$,

$$\mathbb{P}(X(t) \in \Gamma | \mathcal{F}_s^X) = \mathbb{P}(X(t) \in \Gamma | X(s)). \quad (\text{B.3})$$

L'équation (B.3) implique pour tout $f \in \mathcal{C}_b(I)$ et tout $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}(f(X(t)) | \mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(f(X(t)) | X(s)).$$

Avec (B.2), cela résulte en

$$\mathbb{E}(f(X(t)) | \mathcal{F}_s^X) = \int_I P_{s,t}(X(s), dy) f(y).$$

De plus, dire que le processus $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est homogène en temps est équivalent à dire que, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(I)$ et tout $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}(f(X(t)) | \mathcal{F}_s^X) = \int_I P_{0,t-s}(X(s), dy) f(y).$$

La loi finie-dimensionnelle d'un processus de Markov $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ de distribution initiale μ et de fonction de transition $(P_{s,t})_{0 \leq s < t}$ est définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(0) \in \Gamma_0, X(t_1) \in \Gamma_1, \dots, X(t_n) \in \Gamma_n) \\ = \int_{\Gamma_0} \dots \int_{\Gamma_{n-1}} P_{t_{n-1}, t_n}(y_{n-1}, \Gamma_n) P_{t_{n-2}, t_{n-1}}(y_{n-2}, dy_{n-1}) \\ \dots P_{0, t_1}(y_0, dy_1) \mu(dy_0). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Il convient de se demander si à toute fonction de transition on peut associer un unique processus de Markov.

Théorème B.2. *Soit $(P_t)_{t \in \mathcal{T}}$ une fonction de transition homogène en temps et soit μ une mesure de probabilité sur $(I, \mathcal{B}(I))$. Alors il existe un unique processus de Markov $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ à valeurs dans I dont la loi finie-dimensionnelle est uniquement déterminée par (B.4).*

La preuve de ce théorème est faite en détail dans [24, 55].

Afin de différencier les notations dans le cadre où $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{N}$ est discret, on écrira, pour tout $n, m > 0$

$$\begin{aligned} \Pi_{n,m}(x, \Gamma) &= \mathbb{P}(X_{n+m} \in \Gamma | X_n = x) \\ &= P_{n,n+m}(x, \Gamma), \quad x \in I \text{ et } \Gamma \in \mathcal{B}(I), \end{aligned}$$

et

$$\Pi_n(x, \Gamma) = \Pi_{0,n}(x, \Gamma), \quad \forall x \in I \text{ et } \Gamma \in \mathcal{B}(I).$$

De manière équivalente à la Définition B.1, on définit les processus de Markov en temps discret.

Définition B.3. *Soient $\Pi_{n,m}$ une fonction de transition discrète et μ une mesure de probabilité sur $(I, \mathcal{B}(I))$. Un processus en temps discret $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov** de distribution initiale μ et de probabilité de transition $(\Pi_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ si*

$$\mathbb{P}(X_0 \in \Gamma) = \mu(\Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{B}(I),$$

et si pour tous $n, m > 0$ et $\Gamma \in \mathcal{B}(I)$,

$$\mathbb{P}(X_{n+m} \in \Gamma | \mathcal{F}_n^X) = \Pi_{n,m}(X_n, \Gamma).$$

De plus, si pour tout $n, m > 0$

$$\Pi_{n,m}(x, \Gamma) = \Pi_m(x, \Gamma), \quad x \in I \text{ et } \Gamma \in \mathcal{B}(I)$$

alors la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite homogène en temps.

Fondamentalement, une martingale est un processus à accroissements indépendants et centrés. En temps continu les mouvements browniens (aussi appelés processus de Wiener) sont sans aucun doute les martingales et processus de Markov les plus connus.

Définition B.4. *Un mouvement brownien d-dimensionnel issu de l'origine est un processus stochastique $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant les conditions suivantes*

- $B(0) = 0$, $\mathbb{P}$ -presque sûrement ;
- pour tous $s \leq t$, $B(t) - B(s)$ est un vecteur aléatoire gaussien centré indépendant de $\mathcal{F}_s^B$ et de matrice de covariance $(t - s)\mathbf{I}_d$. On dit que ses **accroissements** sont **indépendants** et **stationnaires**.

Il existe plusieurs constructions de ces processus. Une première construction consiste à voir le mouvement brownien comme étant la limite d'une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. C'est le principe d'invariance de Donsker. Cette construction est faite plus en détail dans [32, 47]. On peut facilement montrer que l'indépendance des accroissements d'un mouvement brownien entraîne la propriété de martingale. En effet, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B(t+s)|\mathcal{F}_s^B) &= \mathbb{E}(B(t+s) - B(s)|\mathcal{F}_s^B) + \mathbb{E}(B(s)|\mathcal{F}_s^B) \\ &= \mathbb{E}(B(t)) + B(s) \\ &= B(s). \end{aligned}$$

La propriété d'accroissements indépendants du brownien a aussi comme conséquence le théorème suivant.

Théorème B.5. *Tout mouvement brownien d-dimensionnel est un processus de Markov homogène en temps.*

De plus, la Définition B.4 permet d'affirmer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $B(t)$ est un vecteur gaussien centré et de matrice de covariance $t\mathbf{I}_d$, ce qui nous permet d'explicitier sa fonction de transition :

$$P_t(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\|y - x\|^2}{2t}\right) dy, \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (\text{B.5})$$

C Processus de Feller et générateurs infinitésimaux

Dans cette section on se restreint aux processus de Markov à trajectoires continues. Plus particulièrement aux processus dont la fonction de transition engendre un semi-groupe de Feller. Nous rappelons que nous considérerons $I \subset \mathbb{R}^d$.

Définition C.1. *Un semi groupe de Feller sur $\mathcal{C}_b(I)$ est une famille $(T_t)_{t \in \mathcal{T}}$ d'opérateurs linéaires de $\mathcal{C}_b(I)$ dans $\mathcal{C}_b(I)$ telle que*

- i) $T_0 = \text{Id}$ et $(T_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est contractant : pour tout $t \geq 0$, $\|T_t\| \leq 1$;
- ii) Pour tous $s, t \geq 0$, $T_{t+s} = T_t T_s$;
- iii) $(T_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est fortement continu : pour tout $f \in \mathcal{C}_b(I)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \|T_t f - f\| = 0$.

Proposition C.2. *Pour tout semi-groupe de Feller $(T_t)_{t \in \mathcal{T}}$ sur I , il existe une unique fonction de transition $(P_t)_{t \in \mathcal{T}}$ sur $(I, \mathcal{B}(I))$ telle que $T_t f = P_t f$ pour tout $f \in \mathcal{C}_b(I)$ et tout $x \in I$.*

Une fonction de transition associée à un semi-groupe de Feller est appelée fonction de transition de Feller. Pour montrer qu'une fonction de transition est de Feller, il est pratique d'utiliser la caractérisation suivante.

Proposition C.3. *Une fonction de transition est Feller si, et seulement si,*

- i) *Pour tout t ; $P_t : \mathcal{C}_b(I) \rightarrow \mathcal{C}_b(I)$;*
- ii) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(I)$ et pour tout $x \in I$, $\lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x) = f(x)$.*

Définition C.4. *Soient $\mathcal{T}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ et $(P_t)_{t \in \mathcal{T}}$ une fonction de transition de Feller et $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ le processus de Markov qui lui est associé. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}_b(I)$ appartient au domaine $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ du générateur infinitésimal de $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ si la limite uniforme*

$$\mathcal{L}f = \|\cdot\| - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f - f)$$

existe dans $\mathcal{C}_b(I)$. L'opérateur $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{C}_b(I)$ ainsi défini est appelé générateur infinitésimal du processus $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ ou de la fonction de transition $(P_t)_{t \in \mathcal{T}}$.

Ainsi, $\mathcal{L}$ décrit l'évolution infinitésimale du processus sur un petit intervalle de temps.

Proposition C.5. *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, alors*

- i) *Pour tout $t \geq 0$, $P_t f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$;*
- ii) *La fonction $t \rightarrow P_t f$ est fortement dérivable à droite dans $\mathcal{C}_b(I)$ et, pour tout $t \geq 0$,*

$$\frac{d}{dt} P_{t+} f = \mathcal{L} P_t f = P_t \mathcal{L} f;$$

- iii) *Pour tout $t \geq 0$,*

$$P_t f - f = \int_0^t \mathcal{L} P_s f ds. \quad (\text{C.6})$$

Démonstration. Soit $t \geq 0$. La propriété de semi-groupe assure que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} (P_s P_t f - P_t f) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} (P_t (P_s f - f)) = P_t \mathcal{L} f,$$

ce qui prouve i) et la relation de commutation $P_t \mathcal{L} f = \mathcal{L} P_t f$ donc ii). De plus, $t \rightarrow P_t f$ admet une dérivée à droite égale à $P_t \mathcal{L} f$.

Considérons la fonction $t \rightarrow \int_0^t P_s \mathcal{L} f ds$. Elle est dérivable et sa dérivée vaut $P_t \mathcal{L} f$. Comme la différence de deux fonctions qui ont la même dérivée à droite est nécessairement une constante, il existe $g \in \mathcal{C}_b(I)$ telle que $P_t f = \int_0^t P_s \mathcal{L} f ds + g$, en faisant $t = 0$, on obtient que $g = f$ ce qui prouve iii). $\square$

Définition C.6. *Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ un opérateur linéaire avec $\mathcal{D}(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{C}_b(I)$. On dit que $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ est fermé si son graphe*

$$\Gamma(\mathcal{L}) = \{(f, \mathcal{L}f) : f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})\}$$

est un fermé de $\mathcal{C}_b(I) \times \mathcal{C}_b(I)$.

Proposition C.7. *L'espace $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ est dense dans $\mathcal{C}_b(I)$ et $\mathcal{L}$ est un opérateur fermé.*

Démonstration. Soit $\mathcal{L}_h = \frac{1}{h}(P_h f - f)$ et $\mathcal{B}_s f = \frac{1}{s} \int_0^s P_u f du$. Les opérateurs $\mathcal{L}_h$ et $\mathcal{B}_s$ sont bornés sur $\mathcal{C}_b(I)$ et de plus

$$\mathcal{L}_h \mathcal{B}_s = \mathcal{B}_s \mathcal{L}_h = \mathcal{B}_h \mathcal{L}_s = \mathcal{L}_s \mathcal{B}_h.$$

Pour tout $s > 0$ et $f \in \mathcal{C}_b(I)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}_h \mathcal{B}_s f = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}_s (\mathcal{B}_h f) = \mathcal{L}_s f,$$

donc $\mathcal{B}_s f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ et comme $\mathcal{B}_s f \rightarrow f$ quand $s \rightarrow 0$, $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ est dense dans $\mathcal{C}_b(I)$.

Soit à présent une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ qui converge vers f et telle que $(\mathcal{L}f_n)_n$ converge vers g . Alors

$$\mathcal{B}_s g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{B}_s (\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}_h f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}_s (\mathcal{B}_h f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_s f_n = \mathcal{L}_s f.$$

Ainsi la fonction f est dans le domaine de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}f = g$, ce qui prouve que $\mathcal{L}$ est un opérateur fermé. $\square$

Proposition C.8. *Soit $(X(t))_t$ un processus de Feller et $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ son générateur. Alors pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, le processus M à valeurs réelles défini par :*

$$M(t) = f(X(t)) - \int_0^t \mathcal{L}f(X(s)) ds \quad (\text{C.7})$$

est une $\mathcal{F}_t^X$ -martingale.

Démonstration. Puisque f et $\mathcal{L}f$ sont bornées, $M(t)$ est intégrable pour tout t . De plus, pour tout $t, u \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{t+u} | \mathcal{F}_t^X) &= \mathbb{E}(f(X_{t+u}) | \mathcal{F}_t^X) - \int_0^{t+u} \mathbb{E}(\mathcal{L}f(X(s)) | \mathcal{F}_t^X) ds \\ &= P_u f(X(t)) - \int_0^t \mathcal{L}f(X(s)) ds - \int_t^{t+u} P_{s-t} \mathcal{L}f(X(t)) ds \\ &= P_u f(X(t)) - \int_0^t \mathcal{L}f(X(s)) ds - \int_0^u P_s \mathcal{L}f(X(t)) ds \\ &= P_u f(X(t)) - \int_0^t \mathcal{L}f(X(s)) ds - (P_u f(X(t)) - f(X(t))) \\ &= M(t), \end{aligned}$$

où (C.6) est utilisé pour le passage à l'avant dernière équation. $\square$

Une réciproque à la Proposition C.8 est la proposition suivante.

Proposition C.9. *Soit $f \in \mathcal{C}_b(I)$ et soient $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de Feller et $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ son générateur infinitésimal. Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{C}_b(I)$ telle que*

$$f(X(t)) - \int_0^t g(X(s)) ds$$

soit une $\mathcal{F}_t^X$ -martingale. Alors $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ et $g = \mathcal{L}f$.

Démonstration. Pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in I$,

$$\mathbb{E} \left(f(X(t)) - \int_0^t g(X(s)) ds \mid X(0) = x \right) = f(x).$$

On a donc $P_t f(x) - \int_0^t P_s g(x) ds = f(x)$ pour tout $x \in I$ avec $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ la fonction de transition de $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$. D'où

$$\left\| \frac{1}{t} (P_t f - f) - g \right\| = \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (P_s g - g) ds \right\| \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|P_s g - g\| ds \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

On obtient alors que $g = \mathcal{L}f$. Comme $g \in \mathcal{C}_b(I)$, alors $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. $\square$

D Problème aux martingales

Par **problème aux martingales** on entend le problème inverse à celui énoncé dans la Proposition C.8 : à partir d'un opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ linéaire, fermé et donné, une solution au problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ où $\mathcal{D}_* \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{L})$ sera un processus de Feller $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{D}_*$, le processus $(M(t))_{t \in \mathcal{T}}$ défini par (C.7) est une $\mathcal{F}_t^X$ -martingale.

Définition D.1. Soient $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ un opérateur linéaire fermé. Soit $\mathcal{D}_* \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{L})$. On dit qu'un processus de Feller $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est **solution du problème aux martingales** associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ si, pour tout $f \in \mathcal{D}_*$ le processus

$$\left(f(X(t)) - \int_0^t \mathcal{L}f(X(s)) ds \right)_{t \in \mathcal{T}}$$

est une $\mathcal{F}_t^X$ -martingale.

Définition D.2. Soient $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ et $(Y(t))_{t \in \mathcal{T}}$ deux processus de Feller de même distribution initiale μ et solution du même problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$, où $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ est un opérateur linéaire fermé et $\mathcal{D}_* \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{L})$.

- i) Si les deux processus X et Y ont la même loi finie-dimensionnelle, alors on dit qu'il y a **unicité** pour le problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ de distribution initiale μ ;
- ii) S'il existe une solution pour $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ de distribution initiale μ et que l'unicité est vérifiée, le problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ de distribution initiale μ est dit **bien posé** ;
- iii) Enfin si le caractère bien posé est vérifié pour tout distribution initiale μ , le problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ est bien posé.

Comme il est souvent difficile de déterminer le domaine d'un opérateur, il est nécessaire de se poser la question sur les conditions que $\mathcal{D}_*$ doit satisfaire afin que la solution d'un problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ soit aussi solution de celui associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$. En effet, dans les démonstrations des Théorèmes 2.2.2 et 2.1.1 nous serons amenés à vérifier qu'un processus est solution d'un problème aux martingales associé à un opérateur $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ où $\mathcal{D}_*$ n'est pas le domaine de $\mathcal{L}$. Il faudra

alors être capable de conclure que ce processus est aussi solution du problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$, voir Lemme D.7. C'est dans ce but qu'on introduit la notion de **cœur d'un opérateur**.

Définition D.3. Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ un opérateur linéaire fermé. Un sous-espace $\mathcal{D}_* \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{L})$ est un **cœur** pour $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ si l'adhérence de la restriction de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{D}_*$ est égale à $\mathcal{L}$. (i.e $\overline{\mathcal{L}|_{\mathcal{D}_*}} = \mathcal{L}$). C'est-à-dire que pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, il existe une suite $(f_n)_n \subset \mathcal{D}_*$ telle que $f_n \rightarrow f$ et $\mathcal{L}f_n \rightarrow \mathcal{L}f$.

Ainsi, si un processus de Feller est solution d'un problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ tel que $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ soit un opérateur linéaire fermé et que $\mathcal{D}_* \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{L})$, alors la Proposition C.9 permet d'affirmer que $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ est le générateur infinitésimal de ce processus et que $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ est un cœur pour $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$.

Lemme D.4. Un sous ensemble $\mathcal{D}_* \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{L})$ est un cœur pour $\mathcal{L}$ si, et seulement si, $\mathcal{D}_*$ est dense dans $\mathcal{C}_b(I)$ et qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $Im(\lambda - \mathcal{L}|_{\mathcal{D}_*})$ est dense dans $\mathcal{C}_b(I)$.

La preuve du Lemme D.4 est faite dans [24]. Le lemme suivant est une caractérisation très utile des cœurs dans le contexte des générateurs infinitésimaux.

Lemme D.5. Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ le générateur d'un semi-groupe de Feller $(P_t)_{t \in \mathcal{T}}$. Soit $\mathcal{D}_*$ un sous ensemble dense de $\mathcal{C}_b(I)$, si pour tout $t \geq 0$, $P_t : \mathcal{D}_* \rightarrow \mathcal{D}_*$, alors $\mathcal{D}_*$ est un cœur pour $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}_*$, on introduit la suite de fonctions

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n^2} e^{-\frac{\lambda k}{n}} P_{\frac{k}{n}} f, \quad \lambda > 0.$$

Par hypothèse, $f_n \in \mathcal{D}_*$ et $(P_t)_{t \in \mathcal{T}}$ étant un semi-groupe de Feller, il est fortement continu ; cela implique que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda - \mathcal{L})f_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n^2} e^{-\frac{\lambda k}{n}} P_{\frac{k}{n}} (\lambda - \mathcal{L})f \\ &= \int_0^{+\infty} dt e^{-\lambda t} P_t (\lambda - \mathcal{L})f \\ &:= R_\lambda (\lambda - \mathcal{L})f \end{aligned}$$

où R_λ est la résolvante de $\mathcal{L}$. Or $(P_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est un semi-groupe de Feller, d'où $R_\lambda = (\lambda - \mathcal{L})^{-1}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda - \mathcal{L})f_n = f.$$

Pour tout $f \in \mathcal{D}_*$ il existe alors une suite de fonctions $(\lambda - \mathcal{L})f_n \in Im(\lambda - \mathcal{L}|_{\mathcal{D}_*})$ qui converge vers f . L'ensemble $\mathcal{D}_*$ étant dense dans $\mathcal{C}_b(I)$, le résultat suit du Lemme D.4. $\square$

Exemple D.6. Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ le générateur du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{L}$ est la fermeture de $\frac{1}{2}f''$ avec son domaine et $(\mathcal{L}, \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}))$ est un cœur pour $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$. Afin de le montrer, vérifions tout d'abord que la restriction de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$ est égale à $\frac{1}{2}f''$. Soient $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien à valeurs réelles et $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ la filtration engendrée par B . Soient $f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$ et le processus $(M(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini par :

$$M(t) = f(B(t)) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s)) ds.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M(t+u)|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(f(B(t+u))|\mathcal{F}_t) - \frac{1}{2} \int_0^{t+u} \mathbb{E}(f''(B(s))|\mathcal{F}_t) ds \\ &= f(B(t)) + \mathbb{E}(f(B(t+u))|\mathcal{F}_t) - f(B(t)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s)) ds - \frac{1}{2} \int_t^{t+u} \mathbb{E}(f''(B(s))|\mathcal{F}_t) ds \\ &= M(t) + \mathbb{E}(f(B(t+u))|\mathcal{F}_t) - f(B(t)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{E}(f''(B(s))|\mathcal{F}_0) ds \\ &= M(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left(-\frac{(y-B(t))^2}{2u}\right) dy - f(B(t)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^u \frac{ds}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} dy f''(y) \exp\left(-\frac{(y-B(t))^2}{2s}\right) \\ &= M(t). \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient par une double intégration par partie. Ainsi, la Propriété C.9 permet d'affirmer que $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{L})$ et que pour tout $f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$, $\frac{1}{2}f'' = \mathcal{L}f$. Pour montrer que $(\frac{1}{2}f'', \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}))$ est un cœur pour $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$, on utilise le Lemme D.5 : l'espace $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et est stable sous l'action du semi-groupe engendré par la fonction de transition du mouvement brownien explicité par (B.5).

Lemme D.7. Soit $\mathcal{D}_*$ un cœur d'un opérateur linéaire fermé $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ et soit un processus de Feller $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ solution du problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$. Alors, $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est aussi solution du problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Comme $\mathcal{D}_*$ est un cœur, il est dense dans $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ et il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_*$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathcal{L}f_n - \mathcal{L}f\|_\infty = 0$. Alors, pour tout $t \in \mathcal{T}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f(X(t)) - \int_0^t \mathcal{L}f_n(X(s)) ds \right) = f(X(t)) - \int_0^t \mathcal{L}f(X(s)) ds,$$

Pour tous $t, u \in \mathcal{T}$ tels que $t + u \in \mathcal{T}$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(f(X(t+u)) - \int_0^{t+u} \mathcal{L}f(X(s)) \, ds \mid \mathcal{F}_t^X \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(f_n(X(t+u)) - \int_0^{t+u} \mathcal{L}f_n(X(s)) \, ds \mid \mathcal{F}_t^X \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f_n(X(t)) - \int_0^t \mathcal{L}f_n(X(s)) \, ds \right) \\ &= f(X(t)) - \int_0^t \mathcal{L}f(X(s)) \, ds, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que le processus de Feller $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est aussi solution du problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$. $\square$

E Processus de diffusion

Dans la suite de cette section, on considère des processus de Feller à temps continu et à valeurs dans l'espace d'états $\mathbb{R}^d$ ou dans un fermé $I \subset \mathbb{R}^d$, et $\|\cdot\|_d$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. On impose aux fonctions de transition étudiées de vérifier l'hypothèse suivante. Nous adaptons la définition de [24] en notant, pour tout $0 \leq k \leq +\infty$, l'ensemble $\mathcal{C}_{\text{lim}}^{(k)}(I)$ des fonctions bornées et k fois dérivables dans I et telles que leurs limites ainsi que celles des dérivées jusqu'à l'ordre k existent sur les bords.

Hypothèse E.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $\delta > 0$, $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ satisfait :

1.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[1 - \int_{|y-x| < \delta} P_t(x, dy) \right] = 0; \quad (\text{E.8})$$

2. Pour tout $1 \leq i, j \leq d$:

$$a_{i,j}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x| < \delta} (y_i - x_i)(y_j - x_j) P_t(x, dy) < +\infty; \quad (\text{E.9})$$

3. Pour tout $1 \leq i \leq d$:

$$b_i(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x| < \delta} (y_i - x_i) P_t(x, dy) < +\infty. \quad (\text{E.10})$$

Les termes $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$, où $\mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de taille $d \times d$ à entrées dans $\mathbb{R}$, et $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ représentent respectivement la variance et l'espérance du processus sur un intervalle de temps infinitésimal.

Une écriture équivalente des coefficients $a(x)$ et $b(x)$ est la suivante

1.

$$a(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}((X(t+s) - X(s)) \otimes (X(t+s) - X(s)) \mid X(s) = x);$$

2.

$$b(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}((X(t+s) - X(s)) | X(s) = x).$$

Le coefficient a est appelé coefficient de diffusion et b coefficient de dérive du processus $(X(t))_t$. La condition (E.8) impose au processus de rester dans une sphère de rayon δ sur un intervalle de temps infinitésimal. De plus $\int_{\|x-y\|_d > \delta} P_t(x, dy)$ est un $o(t)$.

Il est alors possible d'avoir une forme générale pour $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ le générateur infinitésimal du processus $(X(t))_t$.

Théorème E.2. *Sous les conditions énoncées dans l'Hypothèse E.1 et pour tous $f \in \mathcal{C}_{\lim}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$:*

$$\mathcal{L}f(x) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x), \quad (\text{E.11})$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $f \in \mathcal{C}_{\lim}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{L}f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_I (f(y) - f(x)) P_t(x, dy).$$

Alors, il existe $L = \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$ et ξ appartenant à l'intérieur de L tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\|y-x\|_d < \delta} \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) (y_i - x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi) (y_i - x_i) (y_j - x_j) \right) P_t(x, dy).$$

Maintenant, notons $\mathcal{B} := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, on a alors

$$\mathcal{L}f(x) - \mathcal{B}f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \int_{\|y-x\|_d < \delta} \sum_{i,j=1}^d \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (f(\xi) - f(x)) \right) (y_i - x_i) (y_j - x_j) P_t(x, dy).$$

À tout $t \geq 0$ fixé, la valeur absolue de l'intégrale est majorée par

$$\frac{1}{2t} \int_{\|y-x\|_d < \delta} \sup_{z: \|z-x\|_d < \delta} \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (f(x) - f(z)) \right| (y_i - x_i) (y_j - x_j) P_t(x, dy).$$

Or, pour tout $1 \leq i, j \leq d$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{z: \|z-x\|_d < \delta} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (f(x) - f(z)) \right| = 0.$$

D'où passant à la limite

$$|\mathcal{L}f(x) - \mathcal{B}f(x)| \leq \frac{1}{2} a(x) \sup_{z: \|z-x\|_d < \delta} \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (f(x) - f(z)) \right|.$$

On a le résultat en passant à l'infimum sur δ . □

Nous nous intéressons maintenant aux diffusions sur un ensemble fermé de $I \subset \mathbb{R}^d$. Notamment nous nous intéressons à la forme que prend le générateur infinitésimal d'un processus pour lequel nous imposons des conditions sur le bord de I .

Un premier exemple est celui d'un mouvement brownien à valeurs dans $\overline{B(0,1)}$ de dimension d et avec condition de Dirichlet sur les bords.

Exemple E.3. Soit $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et soit τ le temps d'arrêt défini par

$$\tau := \inf \left\{ t \geq 0, B(t) \notin \overset{\circ}{I} \right\}, \quad I = \overline{B(0,1)}.$$

Soit le mouvement brownien arrêté $\tilde{B}(\cdot) = B(\cdot \wedge \tau)$ et soit $(\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}))$ son générateur infinitésimal. Alors, tout $f \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}})$ vérifie la condition $\lim_{\|x\|_d \rightarrow 1} \tilde{\mathcal{L}}f(x) = 0$. En effet, soient x tel que $\|x\|_d = 1$ et $f \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}})$, alors

$$\tilde{\mathcal{L}}f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_I (f(y) - f(x)) \tilde{P}_t(x, dy),$$

où $\tilde{P}_t$ est la fonction de transition de $(\tilde{B}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$. Il est clair que pour tout $\Gamma \subseteq B(0,1)$, $\tilde{P}_t(x, \Gamma) = 0$, et on a

$$\tilde{\mathcal{L}}f(x) = 0.$$

Or, $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}) \subset C_b(I)$, on en conclut que tout $f \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}})$ vérifie

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 1} \tilde{\mathcal{L}}f(x) = 0.$$

Ce type de bord est abordé dans [41], ouvrage dans lequel l'auteur étudie plusieurs conditions sur les bords qu'il est possible d'imposer à des processus de Feller. Il explicite une condition nécessaire sur f à l'appartenance à un cœur. L'auteur qualifie le type de bord vu dans l'Exemple E.3 d'**adhésif**; ce terme est justifié par le fait qu'en arrêtant un processus comme dans l'Exemple E.3, une fois le bord atteint, le processus reste «collé». Nous utilisons ce type de bord dans le chapitre 2. Il est bien sûr possible d'étendre le résultat vu dans l'exemple précédent à tout processus de Feller vérifiant l'Hypothèse E.1.

Considérons un processus de Feller $(X(t))_t$ vérifiant l'Hypothèse E.1 et soit $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ son générateur infinitésimal. Soit $I \subset \mathbb{R}^d$, on définit le temps d'arrêt

$$\tau := \inf \{ t \geq 0, X(t) \notin \overset{\circ}{I} \}.$$

Théorème E.4. Soit le processus arrêté $\tilde{X}(\cdot) = X(\cdot \wedge \tau)$. Alors $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ avec

$$\mathcal{D}_* := \left\{ f \in \mathcal{C}_{\text{lim}}(I) \cap \mathcal{C}_{\text{lim}}^\infty(\overset{\circ}{I}), \lim_{x \rightarrow \partial I} \mathcal{L}f(x) = 0 \right\}$$

est un cœur pour le générateur infinitésimal de $(\tilde{X}(t))$.

Démonstration. La condition nécessaire d'appartenance à un cœur se montre comme dans l'Exemple E.3. On note $(\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}))$ le générateur infinitésimal du processus $(\tilde{X}(t))_t$ et $\tilde{P}_t$ sa fonction de transition. Soit $x \in \partial I$, alors pour tout $\Gamma \subseteq \overset{\circ}{I}$, $\tilde{P}_t(x, \Gamma) = 0$. Ainsi pour tous $x \in \partial I$ et $f \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}})$,

$$\tilde{\mathcal{L}}f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\bar{I}} (f(y) - f(x)) \tilde{P}_t(x, dy) = 0.$$

Par définition $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}) \subseteq \mathcal{C}_b(I)$, tout $f \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}})$ vérifie la condition $\lim_{x \rightarrow \partial I} \tilde{\mathcal{L}}f(x) = 0$.

Soit maintenant $x \in \overset{\circ}{I}$, pour tout $f \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}})$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} & \left(\int_I (f(y) - f(x)) P_t(x, dy) (1 - \mathbb{P}(\tau \leq t)) \right. \\ & \left. + \int_{\partial I} (f(y) - f(x)) P_t(x, dy) \mathbb{P}(\tau \leq t) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Comme $(X(t))_t$ vérifie l'Hypothèse E.1, la relation (E.8) permet d'obtenir pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$ et $f \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}})$

$$\tilde{\mathcal{L}}f(x) = \mathcal{L}f(x).$$

Le fait que la condition $\lim_{x \rightarrow \partial I} \mathcal{L}f(x) = 0$ soit suffisante pour que $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ soit un cœur pour le générateur infinitésimal de $(\tilde{X}(t))_t$ est montré dans [24, 41]. □

Plus particulièrement, $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{D}}_*)$ avec

$$\tilde{\mathcal{D}}_* = \{\mathcal{C}_{\lim}(\bar{I}) \cap \mathcal{C}_{\lim}^\infty(I), \lim_{x \rightarrow \partial I} \mathcal{L}f(x) = 0\}$$

est un cœur pour $(\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{L}}))$.

Seule cette condition sur les bords nous sera utile dans le chapitre 2. D'autres conditions sur les bords ainsi que les conséquences qu'elles engendrent sur les cœurs sont détaillées dans [24, 41].

F Équations différentielles stochastiques et problèmes aux martingales

Les équations différentielles stochastiques décrivent l'évolution d'une dynamique perturbée par un phénomène aléatoire communément appelé «bruit». Ce bruit est généralement modélisé à l'aide un mouvement brownien précédé d'un coefficient de diffusion représentant l'intensité de ce bruit. Dans cette section, on s'intéresse aux équations différentielles stochastiques de la forme suivante :

$$dY(t) = \sigma(Y(t))dB(t) + b(Y(t))dt, \quad (\text{F.13})$$

où $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. La fonction vectorielle $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est appelé le vecteur de dérive et $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}^d)$ est la matrice de diffusion. Deux types de solutions à l'équation (F.13) peuvent être définies : les **solutions fortes** et les **solutions faibles**. Un processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est solution forte si l'unique inconnue de (F.13) est le processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, les termes σ , b ainsi que le mouvement Brownien $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ étant connus. Par contre, lorsque seuls les termes σ et b sont connus, une solution faible de (F.13) est la donnée d'un processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ et d'un mouvement brownien $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ satisfaisant l'équation (F.13). On définit plus précisément ces deux notions dans la suite.

Pour tout $\sigma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}^d)$ on utilisera la norme matricielle et pour tout $b \in \mathbb{R}^d$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$:

$$\|\sigma\|^2 := \sum_{1 \leq i, j \leq d} \sigma_{i,j}^2, \quad \|b\|_d^2 := \sum_{i=1}^d b_i^2.$$

Définition F.1. Soit Y_0 une variable aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ et $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien d -dimensionnel définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En considérant la filtration

$$\mathcal{G}_t := \sigma\{Y_0, B(s); 0 \leq s \leq t\} \quad \forall 0 \leq t < +\infty$$

ainsi que la collection d'ensembles de mesure nulle

$$\mathcal{N} := \{N \subset \Omega, \exists G \in \mathcal{G}_\infty \text{ tel que } N \subset G \text{ et } \mathbb{P}(G) = 0\},$$

on crée la **filtration augmentée** $\mathcal{F}_t := \sigma\{\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}\}$, pour tout $0 \leq t < +\infty$.

Une **solution forte** de (F.13) sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par rapport au mouvement brownien $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ et avec condition initiale Y_0 , est un processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que :

- le processus Y est adapté à la filtration augmentée $\mathcal{F}_t$;
- $\mathbb{P}(Y(0) = Y_0) = 1$;
- $\mathbb{P}\left(\int_0^t |b(Y(s))| + \sigma^2(Y(s)) ds < +\infty\right) = 1$ pour tout $0 \leq t < +\infty$;
- l'égalité

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y(s)) dB(s) + \int_0^t b(Y(s)) dt, \quad 0 \leq t < +\infty \quad (\text{F.14})$$

est vraie presque-sûrement.

L'équation (F.14) est la version intégro-différentielle de l'équation différentielle stochastique (F.13). Le terme $\int_0^t \sigma(Y(s)) dB(s)$ est l'intégrale stochastique (ou intégrale d'Itô) de $\sigma(Y(\cdot))$ par rapport au brownien B . Pour plus de détails, cette intégrale est construite et étudiée dans le chapitre 3 de [32].

Définition F.2. Une **solution faible** de l'équation (F.13) est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, (Y, B) où :

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une filtration ;

- le processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est continu et adapté pour la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien d -dimensionnel adapté pour la filtration $\mathcal{F}_t$;
- l'égalité

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma(Y(s)) dB(s) + \int_0^t b(Y(s)) dt, \quad 0 \leq t < +\infty \quad (\text{F.15})$$

est vraie presque-sûrement.

La mesure de probabilité définie par $\mu(\Gamma) := \mathbb{P}(Y(0) \in \Gamma)$, pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est appelé **distribution initiale** de la solution.

La filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ utilisée pour une solution faible n'est pas forcément la filtration augmentée construite à partir du brownien et de la condition initiale. La valeur $Y(t)$ d'une solution faible à un temps t fixé n'est donc pas forcément mesurable par rapport à $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ et à la distribution de la condition initiale. C'est là, la principale différence entre solutions faible et forte. On déduit alors que l'existence d'une solution faible n'implique pas celle d'une solution forte. La réciproque est, quant à elle, vraie : l'existence d'une solution forte entraîne celle d'une solution faible. La suite de cette section regroupe les résultats les plus utilisés pour montrer l'existence de solutions faibles ou fortes à l'équation (F.13).

Définition F.3. Il y a **unicité forte** si pour toutes solutions fortes Y_1 et Y_2 de l'équation (F.13) par rapport au même mouvement brownien B et pour la même condition initiale Y_0 sont indistinguables, c'est à dire que

$$\mathbb{P}(Y_1(t) = Y_2(t), \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1.$$

Il existe plusieurs critères d'existence et d'unicité forte dans la littérature. On reprend ici un énoncé montré dans [32].

Théorème F.4. Supposons que les termes b et σ de l'équation différentielle stochastique (F.13) sont lipschitziens et à croissance au plus linéaire, c'est à dire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d$, on ait

$$\begin{aligned} \|b(x) - b(y)\|_d + \|\sigma(x) - \sigma(y)\| &\leq K\|x - y\|_d, \\ \|b(x)\|_d^2 + \|\sigma(x)\|^2 &\leq K^2(1 + \|x\|_d^2). \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

Alors l'équation différentielle (F.13) admet une unique solution forte.

Le théorème suivant est un résultat de Yamada et Watanabe lorsque $d = 1$, voir [57].

Théorème F.5. Yamada & Watanabe (1971) Soit l'équation différentielle stochastique (F.13) uni-dimensionnelle. On suppose de plus qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, les coefficients b et σ vérifient

$$\|b(x) - b(y)\|_d \leq K\|x - y\|_d$$

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq h(\|x - y\|_d),$$

où $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction strictement croissante telle que $h(0) = 0$ et

$$\int_0^\varepsilon h^{-2}(u) du = \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

L'unicité forte pour l'équation différentielle stochastique (F.13) uni-dimensionnelle est alors vérifiée.

Ce théorème peut être appliqué avec $h(u) = u^\alpha$, $\alpha \geq 1/2$. C'est le résultat ayant les hypothèses les moins restrictives pour obtenir l'unicité forte des solutions à l'équation (F.13) uni-dimensionnelle.

Un premier résultat d'existence faible pour l'équation différentielle stochastique (F.13) est le suivant.

Théorème F.6. Soient $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ continus et bornés. L'équation différentielle stochastique (F.13) admet alors une solution faible de distribution initiale μ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pourvu que celle-ci satisfasse

$$\exists m > 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_d^{2m} \mu(dx) < +\infty.$$

Alors qu'il n'existe qu'une notion d'unicité pour les solutions fortes, dans le cas des solutions faibles, il en existe deux.

Définition F.7. L'équation (F.13) vérifie la propriété d'**unicité trajectorielle** si pour tout couple de solutions faibles $(Y_1, B), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $(Y_2, B), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{G}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ définies sur une même espace probabilisé et ayant mêmes mouvement brownien et condition initiale,

– on a

$$\mathbb{P}(Y_1(0) = Y_2(0)) = 1;$$

– les deux processus Y_1 et Y_2 sont indistinguables :

$$\mathbb{P}(Y_1(t) = Y_2(t), \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1.$$

Les résultats sur l'unicité forte sont aussi valides pour l'unicité trajectorielle. En effet, les preuves d'unicité forte n'utilisent pas la forme de la filtration augmentée.

Définition F.8. L'équation (F.13) vérifie l'**unicité en loi** si toutes solutions faibles

$$(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1), \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}, (Y_1, B_1) \text{ et } (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2), \{\mathcal{G}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}, (Y_2, B_2),$$

définies sur des espaces de probabilités a priori différents mais ayant la même distribution initiale

$$\mathbb{P}_1(Y_1(0) \in \Gamma) = \mathbb{P}_2(Y_2(0) \in \Gamma), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

ont la même distribution.

L'unicité en loi est plus adapté que l'unicité trajectorielle à la notion de solution faible. En effet deux solutions faibles peuvent être égales en loi sans évoluer sur le même espace probabilisé et sans vérifier (F.13) avec le même mouvement brownien contrairement à la notion d'unicité trajectorielle.

Proposition F.9 (Yamada & Watanabe [57]). *L'unicité trajectorielle de solutions faibles implique leur unicité en loi.*

La réciproque est bien sûr fausse. L'exemple suivant qui est classique exhibe une équation différentielle stochastique pour laquelle l'unicité en loi est vérifiée mais pas l'unicité trajectorielle.

Exemple F.10. *On considère l'équation différentielle stochastique*

$$dY(t) = \operatorname{sgn}(Y(t))dB(t).$$

Supposons que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, (Y, B) soit une solution faible de cette équation différentielle stochastique. Alors le processus $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale continue et de carré intégrable, par construction de l'intégrale stochastique (voir chapitre 3 de [32]). La variation quadratique $\langle Y \rangle_t = \int_0^t \operatorname{sgn}^2(Y(s))ds = t$; le processus Y est donc un mouvement brownien (Théorème 3.3.16 de [32]). L'unicité en loi est alors vérifiée. Néanmoins, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, $(-Y, B)$ est aussi une solution faible mais le processus $(-Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ n'est clairement pas indistinguishable de $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Il existe un corollaire à la Proposition F.9 reliant l'existence d'une solution faible à celle d'une solution forte et qui nous sera utile par la suite.

Corollaire F.11. *L'existence d'une solution faible associée à l'unicité trajectorielle implique l'existence d'une solution forte.*

On a vu que lorsque les coefficients de dérive et de diffusion d'une équation différentielle stochastique sont lipschitziens et à croissance linéaire (Théorème F.4), alors l'équation admet une unique solution forte. Pour des coefficients plus généraux, une solution forte peut ne pas exister, c'est le cas de l'exemple F.10. On peut alors vouloir résoudre l'équation différentielle stochastique mais dans son sens faible. Une alternative à cette approche, développée par Stroock & Varadhan dans [55] en 1969 consiste à relier la recherche de la loi d'un processus diffusif pour lequel les coefficients de dérive et de diffusion sont donnés à un problème aux martingales. Cette formulation a l'avantage d'être bien adaptée à la convergence des chaînes de Markov vers des processus diffusifs et nous sera très utile dans les démonstrations du chapitre 2.

Cette alternative met en évidence un lien entre l'existence faible et l'unicité en loi de la solution à l'équation différentielle stochastique (F.13), avec $\sigma\sigma^t = a$ et le caractère bien posé du problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ défini par

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x), \quad (\text{F.17})$$

$$\mathcal{D}_* = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

où $a(x) = \sigma(x)\sigma^t(x)$. L'équivalence suivante est vérifiée.

Théorème F.12. *Soient σ et b mesurables et bornées sur les compacts de $\mathbb{R}^d$. Alors il existe une solution faible à l'équation différentielle stochastique (F.13) de condition initiale Y_0 si, et seulement si, il existe une solution avec condition initiale X_0 de même distribution que Y_0 au problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$.*

Une conséquence de la démonstration (voir [55]) de ce théorème est que la solution faible de l'équation différentielle stochastique et celle du problème aux martingales ont la même distribution. On en déduit le corollaire suivant sur l'unicité des solutions :

Corollaire F.13. *Si b et σ sont continues et bornées sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, alors pour toute condition initiale $x \in \mathbb{R}^d$, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Le problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}, \mathcal{D}_*)$ et de distribution initiale δ_x est bien posé ;*
2. *L'équation différentielle stochastique (F.13) admet une solution faible vérifiant l'unicité en loi et telle que $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$.*

Remarque F.14. *Soit $(Y(t))_t$ une solution faible de l'équation différentielle stochastique (F.13) et soient $I \subseteq \mathbb{R}^d$ et τ un temps d'arrêt défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par :*

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : Y(t) \notin I\}.$$

Il a été vu dans la section précédente comment s'écrivait le générateur infinitésimal du processus $(Y(t \wedge \tau))_t$. L'équation différentielle stochastique que $Z(\cdot) = Y(\cdot \wedge \tau)$ vérifie est la suivante

$$dZ(t) = \sigma(Z(t))\mathbb{1}_{t < \tau}dB(t) + b(Z(t))\mathbb{1}_{t < \tau}dt.$$

G Mouvement brownien sphérique et processus de Bessel

Le but de cette section est d'introduire les deux processus qui seront importants dans le chapitre 2 et de citer leurs propriétés qui nous seront utiles.

G.1 Mouvement brownien sphérique

Le **mouvement brownien sphérique** (voir Figure 1) est un processus diffusif à valeurs dans la sphère unité vérifiant les propriétés définissant un mouvement brownien. Il apparaît dans [54] afin d'illustrer un résultat reliant la croissance d'une intégrale stochastique à son coefficient de diffusion. Dans [9], l'auteur obtient le mouvement brownien sphérique à partir d'une équation différentielle stochastique en coordonnées sphériques. Sa construction, que nous reprenons, est faite dans [45]. Soit $(\tilde{B}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d > 2$ et de condition initiale strictement positive. Ce mouvement brownien étant transient, $\mathbb{P}(\|\tilde{B}(t)\|_d > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$, ainsi on peut utiliser la formule d'Itô sur le processus renormalisé $Y = \tilde{B}/\|\tilde{B}\|_d$ et celui ci vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dY(t) &= \frac{1}{\|\tilde{B}(t)\|_d} \sigma(Y(t)) d\tilde{B}(t) + \frac{1}{\|\tilde{B}(t)\|_d^2} b(Y(t)) dt, \\ Y(0) &\in \mathbb{S}^{d-1} \end{cases} \quad (\text{G.18})$$

où, en notant x' la transposé du vecteur $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\sigma(x) = \mathbf{1}_d - \frac{xx'}{\|x\|_d^2} \text{ et } b(x) = -\frac{d-1}{2\|x\|_d^2}x. \quad (\text{G.19})$$

La matrice $\sigma(x)$ représente la projection sur l'hyperplan orthogonal à x . Afin d'éliminer les facteurs dépendant de $\tilde{B}$ dans (G.18) on effectue le changement en temps

$$S(t) = Y(\alpha(t, \omega)) \quad \text{avec} \quad \alpha(t, \omega) = \beta(t)^{-1}, \quad \beta(t) = \int_0^t \frac{ds}{\|\tilde{B}(s)\|_d^2}.$$

Théorème G.1. *Changement en temps pour l'intégrale d'Ito, [45]. Soient $c(t)$ un processus continu tel que $\beta(t) = \int_0^t c(s)ds$ soit strictement continu et que le processus $\alpha(t)$ inverse de $\beta(t)$ (i.e $\alpha(\beta(t)) = t = \beta(\alpha(t))$) soit aussi continu avec $\alpha(0) = 0$ presque sûrement et $\mathbb{E}(\alpha(t)) < +\infty$. Soit de plus, $(\tilde{B}(t), \mathcal{F}_t)$ un mouvement brownien et soit σ_t un continu et borné. Définissons*

$$B(t) = \int_0^{\alpha(t)} \sqrt{c(s)} d\tilde{B}(s).$$

Alors $B(t)$ est un $\mathcal{F}_{\alpha(t)}$ mouvement brownien et

$$\int_0^{\alpha(t)} b(s) d\tilde{B}(s) = \int_0^t b(\alpha(r)) \sqrt{\alpha'(r)} dB(r),$$

où $\alpha'(r)$ est la dérivée de $\alpha(r)$ par rapport à r , et

$$\alpha'(r) = \frac{1}{c(\alpha_r)}.$$

Formellement, ce résultat indique qu'en prenant $c_t = 1/\|\tilde{B}(t)\|_d^2$

$$\frac{1}{\|\tilde{B}(\alpha_t)\|_d} \sigma(Y(\alpha_t)) d\tilde{B}(\alpha_t) = \sigma(S(t)) dB(t).$$

En appliquant le Théorème G.1, le processus $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dS(t) = \sigma(S(t)) dB(t) + b(S(t)) dt, \quad (\text{G.20})$$

où $B(t) = \int_0^t \frac{d\tilde{B}(\alpha(s))}{\|\tilde{B}(\alpha(s))\|_d}$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. La norme du processus $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est constante, en effet par le calcul d'Ito,

$$\begin{aligned} d\|S(t)\|_d^2 &= 2(S(t) \cdot dS(t)) + (dS(t) \cdot dS(t)) \\ &= 2(S(t) \cdot b(S(t)) dt) + (\sigma(S(t)) dB(t) \cdot \sigma(S(t)) dB(t)) \\ &= -(d-1) + (d-1) = 0. \end{aligned}$$

Le processus $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est invariant sous les transformations orthogonales de $\mathbb{R}^d$, il est appelé **mouvement brownien sphérique**.

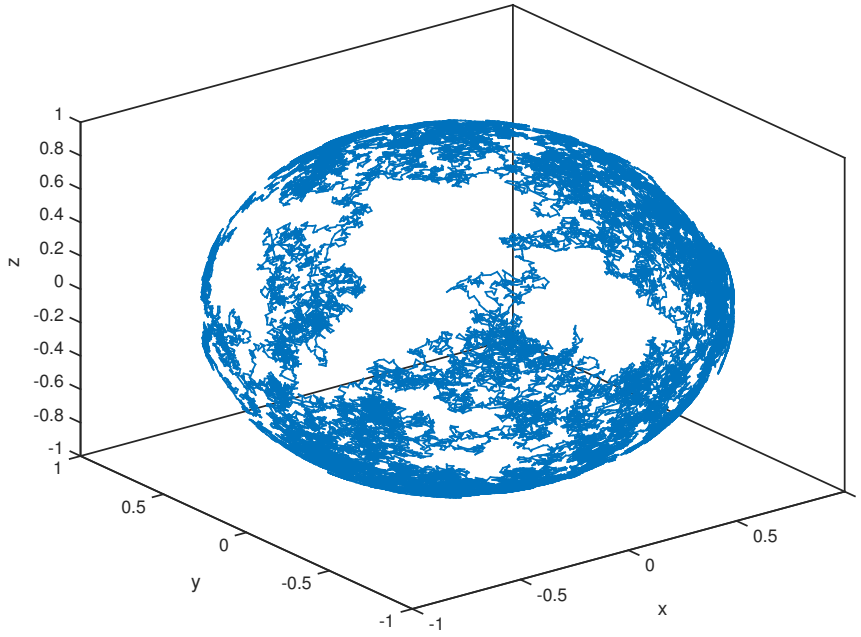


FIGURE 1: Une trajectoire du processus $(S(t))_{0 \leq t \leq 10}$ avec $d = 3$ et $S(0) = [1 \ 0 \ 0]$.

Théorème G.2. *Il existe une unique solution forte $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ à l'équation différentielle (G.20) et cette solution est un mouvement brownien sphérique.*

La preuve est faite en détail dans [46]. La construction précédente, faite dans [45] met en évidence un couple (S, B) solution faible de l'équation différentielle stochastique (G.20). Afin de déduire l'existence et l'unicité forte de la solution, les coefficients σ et b ne satisfont pas le critère lipschitzien (F.16) du Théorème F.4 à l'origine. Néanmoins le processus $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ construit est de norme constante et n'atteint donc presque-sûrement jamais l'origine. Cet argument permet à [46] de conclure.

Dans le chapitre 2, nous considérerons un mouvement brownien sphérique non standard, c'est à dire que la matrice de covariance de $S(t) - S(s)$ n'est pas égale à $(t - s)\mathbb{1}_d$. En effet nous serons dans le cas d'une équation différentielle stochastique s'écrivant :

$$\begin{cases} dZ(t) &= c\sigma(Z(t))dB(t) + c^2b(Z(t))dt \\ Z(0) &\in \mathbb{S}^{d-1}, \end{cases} \quad (\text{G.21})$$

où $c \in \mathbb{R}_+^*$ est une constante et les coefficients σ et b sont les mêmes que dans (G.20). Le processus $(Z(t))_t$ est un mouvement brownien sphérique auquel on applique à nouveau un changement d'échelle en temps : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Z(t) = S(c^2t)$.

G.2 Processus de Bessel

Les processus de Bessel ont de très nombreuses fois été étudiés dans la littérature, notamment dans [47] et [32].

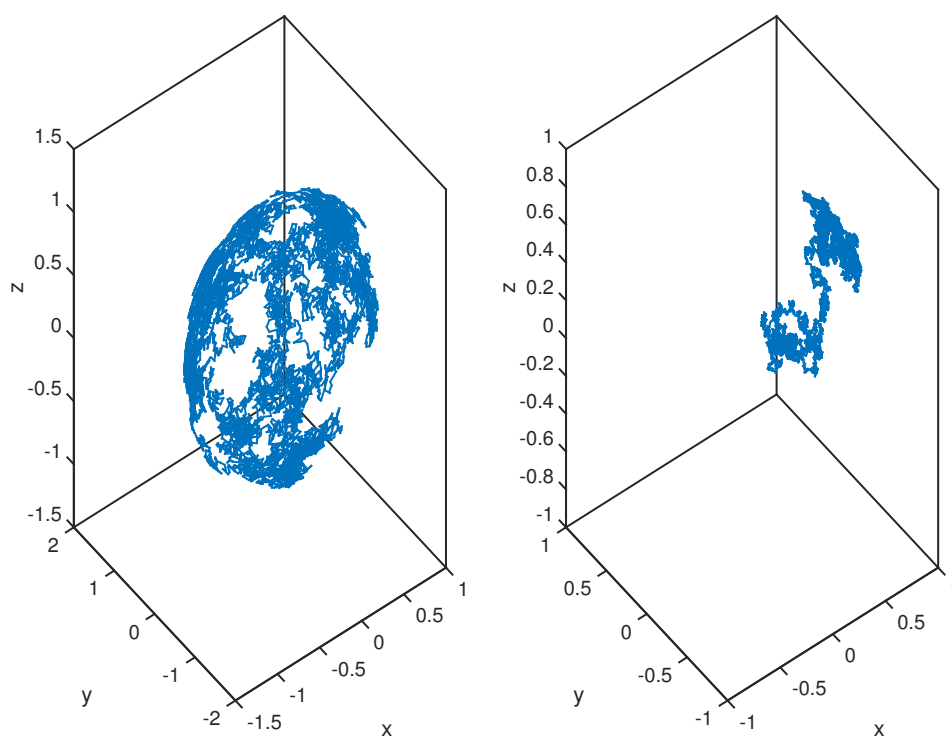


FIGURE 2: À gauche : le processus $(S(t))_{0 \leq t \leq 10}$ solution de l'équation différentielle stochastique (G.20) partant de $S(0) = [1 \ 0 \ 0]$. À droite : le processus $(Z(t))_{0 \leq t \leq 10}$ solution de l'équation différentielle stochastique (G.21) avec $c = 0.2$ et tel que $Z(0) = S(0)$. Le processus Z décrit moins rapidement la sphère que S .

Soit $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien d -dimensionnel. On introduit le processus $(R(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $R(t) = \|B(t)\|_d$ et on note $(Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ le processus tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $Z(t) = R^2(t)$. La formule d'Itô implique que

$$Z(t) = \|B(0)\|^2 + 2 \sum_{i=1}^d \int_0^t B_i(s) dB_i(s) + t.$$

De plus, le processus

$$\beta(t) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{B_i(s)}{\sqrt{|Z(s)|}} dB_i(s)$$

est un mouvement Brownien uni-dimensionnel car sa variation quadratique est égale à t . En effet

$$\langle \beta \rangle_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{B_i(s)^2}{|Z(s)|^2} ds = t.$$

Le couple (Z, β) est alors solution faible de l'équation différentielle stochastique

$$dZ(t) = 2\sqrt{|Z(t)|} d\beta(t) + dt. \quad (\text{G.22})$$

On peut donc appliquer le Théorème F.5 avec $h(u) = \sqrt{u}$ afin de conclure quant à l'unicité forte de l'équation différentielle stochastique (G.22). Le Corollaire F.11 implique finalement que $(Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est l'unique solution forte de (G.22).

Théorème G.3. *Pour tout $d \in \mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle stochastique*

$$Z(t) = 2\sqrt{|Z(t)|} dB(t) + dt \quad (\text{G.23})$$

admet une unique solution forte.

Le processus $(Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est appelé processus de Bessel carré en dimension d , on le note $BESQ(d)$.

Proposition G.4. *En toute dimension $d > 0$ et pour toute condition initiale $Z(0) > 0$, le processus de Bessel carré $(Z(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est à valeurs positives et est non-explosif :*

$$\mathbb{P}(|Z(t)| < +\infty, \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1.$$

De plus, en dimension $d > 2$, il satisfait

$$\mathbb{P}(Z(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1.$$

D'après ce résultat, on remarque qu'en dimension $d > 2$ et pour toute condition initiale positive, le processus de Bessel carré est solution de l'équation différentielle (G.23) mais sans valeur absolue :

$$dZ(t) = 2\sqrt{Z(t)} dB(t) + dt.$$

Ainsi, le processus $(R(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dR(t) = dB(t) + \frac{d-1}{2R(t)} dt.$$

Théorème G.5. *Pour tout $d > 2$ l'équation différentielle stochastique*

$$R(t) = dB(t) + \frac{d-1}{2R(t)}dt \quad (\text{G.24})$$

admet une unique solution forte.

Le processus $(R(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est appelé processus de Bessel en dimension d et est noté $BES(d)$. Lorsque $d < 2$, le processus de Bessel carré peut atteindre 0 en temps fini. La formule d'Itô ne peut pas être appliquée pour obtenir l'équation différentielle stochastique vérifiée par $\sqrt{|Z|}$ à l'inverse du cas $d > 2$.

Proposition G.6. *En dimension $d > 2$ et pour toute condition initiale strictement positive, le processus de Bessel $(R(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ satisfait*

$$\mathbb{P}(0 < R(t) < +\infty, \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1.$$

De plus, dans ce cas le processus $(R(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est transient.

D'après le Théorème F.12, le processus de Bessel de dimension $d > 2$ est solution du problème aux martingales associé à $(\mathcal{L}_R, \mathcal{D}_R)$ où

$$\mathcal{L}_R f(x) = \frac{1}{2}f''(x) + \frac{d-1}{2x}f'(x), \quad \mathcal{D}_R = \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Un dernier lemme sur les temps de sortie d'un intervalle pour un processus de Bessel, sera utilisé dans le chapitre 3.

Lemme G.7. *Soit $d > 0$, et R un processus de Bessel de dimension d avec, comme condition initiale $R(0) = 1$. Soit, pour tout $a_- < 1 < a_+$,*

$$T_{a_-, a_+} = \inf\{t \geq 0 \mid R(t) \notin]a_-, a_+[\}, \quad T_{a_-} = \inf\{t \geq 0 \mid R(t) < a_-\},$$

$$T_{a_+} = \inf\{t \geq 0 \mid R(t) > a_+\}.$$

i) *Pour tout $T > 0$, on a*

$$0 < \mathbb{P}(T_{a_-, a_+} > T) < 1;$$

ii) *Si on suppose de plus que $d > 2$, alors on a*

$$\mathbb{P}(T_{a_-} > T_{a_+}) = \frac{a_-^{-d} - 1}{a_-^{-d} - a_+^{-d}}.$$

Démonstration. i) Cette affirmation est montrée dans [41, 47, 24].

ii) On utilise le Théorème A.8. On considère le processus $M(t) = R(t)^{-d}$. Le processus de Bessel étant alors presque-sûrement positif, le processus $(M(t))_t$ est alors bien défini. Introduisons

$$T_+^M = \inf\{t \geq 0 \mid M(t) = a_+^{-d}\} \quad \text{et} \quad T_-^M = \inf\{t \geq 0 \mid M(t) = a_-^{-d}\}.$$

Il est clair que $\mathbb{P}(T_{a_+} < T_{a_-}) = \mathbb{P}(T_+^M < T_-^M)$. Le Lemme d'Ito permet de vérifier que le processus $(M(t))$ est une martingale locale. Il suit alors du Théorème A.8 que

$$\mathbb{E}(M(T_+^M \wedge T_-^M)) = 1. \quad (\text{G.25})$$

Et d'une autre part,

$$\mathbb{E}(M(T_+^M \wedge T_-^M)) = a_+^{-d} \mathbb{P}(T_+^M < T_-^M) + a_-^{-d} (1 - \mathbb{P}(T_+^M < T_-^M)). \quad (\text{G.26})$$

De (G.25) et (G.26), on obtient alors

$$\mathbb{P}(T_+^M < T_-^M) = \frac{a_-^{-d} - 1}{a_-^{-d} - a_+^{-d}},$$

ce qui implique le résultat. □

H Convergence vers une diffusion

Afin d'établir les Théorèmes 2.2.2 et 2.1.1, nous aurons besoin d'outils permettant de démontrer la convergence de certaines familles de chaînes de Markov vers des diffusions. Nous les présenterons brièvement dans cette section, le détail étant dans [24, 55].

Définition H.1. Soit (S, ρ) un espace métrique muni de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(S)$. Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, des mesures de probabilité sur $(S, \mathcal{B}(S))$. La suite $(\mathbb{P}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ **converge faiblement** vers $\mathbb{P}$ si pour toute fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S f(s) d\mathbb{P}_\varepsilon(s) = \int_S f(s) d\mathbb{P}(s).$$

Rappelons que la distribution d'une variable aléatoire X à valeurs dans S , notée $\mathbb{P}X^{-1}$ est une mesure de probabilité sur $(S, \mathcal{B}(S))$ et est donnée par

$$\mathbb{P}X^{-1}(B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}(S).$$

On caractérise la notion de convergence en distribution pour une suite de variables aléatoires.

Définition H.2. Soit $(\Omega_\varepsilon, \mathcal{F}_\varepsilon, \mathbb{P}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une suite d'espaces probabilisés. Sur chacun d'eux, on considère une variable aléatoire X^ε à valeurs dans l'espace métrique (S, d) . Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur cet espace à valeurs dans (S, ρ) . On dit que la suite $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ **converge en distribution** vers X si la suite des mesures de probabilité $(\mathbb{P}_\varepsilon(X^\varepsilon)^{-1})_{\varepsilon > 0}$ converge faiblement vers $\mathbb{P}X^{-1}$. De manière équivalente, la suite $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge en distribution vers la variable aléatoire X si, et seulement si, pour toute fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}_\varepsilon(f(X^\varepsilon)) = \mathbb{E}(f(X)),$$

où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}_\varepsilon$ correspondent respectivement aux espérances des mesures de probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}_\varepsilon$.

Le but est d'établir des résultats de convergence sur des suites de processus stochastiques. Pour se ramener à la Définition H.2 on identifie un processus stochastique continu $(X(t))_{t \in [0, T]}$ défini sur un intervalle de temps compact $[0, T]$ avec une variable aléatoire X à valeurs dans l'espace des fonctions continues muni de la norme uniforme $(\mathcal{C}([0, T] : \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$. La convergence en distribution est une notion plus faible que la convergence presque-sûre. Il est néanmoins possible de passer d'une convergence à l'autre par le biais du résultat suivant.

Théorème H.3 (Skorohod). *On suppose que l'espace (S, ρ) est complet et séparable. Soit $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans S convergeant en distribution vers une variable aléatoire X définie sur le même espace probabilisé et aussi à valeurs dans S . Alors, il existe un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ et des variables aléatoires $\tilde{X}^\varepsilon$ et $\tilde{X}$ définies sur cet espace probabilisé et à valeurs dans S tels que, pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}(S)$, on ait*

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X} \in B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}^\varepsilon \in B) = \mathbb{P}(X^\varepsilon \in B), \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$\rho(\tilde{X}^\varepsilon - \tilde{X}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{presque-sûrement.}$$

Considérons les cas où $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est une suite de processus stochastiques à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}^d$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et sur un intervalle de temps compact $[0, T]$. Supposons que $(X^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge en distribution vers un processus stochastique X lui aussi défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et sur $[0, T]$ et à valeurs dans I . Le Théorème H.3 nous donne alors l'existence d'un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ et de processus stochastiques $(\tilde{X}^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{\varepsilon > 0}$ et $(\tilde{X}(t))_{t \in [0, T]}$ tous à valeurs dans I et tels que pour tout borélien B de $(\mathcal{C}([0, T] : \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ on ait

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X} \in B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{X}^\varepsilon \in B) = \mathbb{P}(X^\varepsilon \in B), \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$\|\tilde{X}^\varepsilon - \tilde{X}\|_\infty := \sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{X}^\varepsilon(t) - \tilde{X}(t)\|_d \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{presque-sûrement.}$$

Définition H.4. *Une famille $\mathcal{P}$ de mesures de probabilité sur $(S, \mathcal{B}(S))$ est **relativement compacte** si toute suite d'éléments de $\mathcal{P}$ admet une sous-suite faiblement convergente.*

La notion de relative compacité est équivalente à celle de **précompacité** (i.e $\overline{\mathcal{P}}$ compact). Dans la suite la notion de précompacité sera utilisé pour déduire l'existence de sous-suites faiblement convergentes.

Définition H.5. *Une famille $\mathcal{P}$ de probabilités sur $(S, \mathcal{B}(S))$ est **tendue** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset S$ tel que $\mathbb{P}(K) \geq 1 - \varepsilon$ pour toutes mesures de probabilité $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$.*

Sous certaines conditions sur la nature de l'espace métrique (S, ρ) , la relative compacité d'une famille de mesures de probabilité est équivalente à sa tension.

Théorème H.6 (Prohorov). *Soit (S, ρ) un espace métrique complet et séparable. Alors une famille de mesures de probabilité sur S est relativement compacte si, et seulement si, elle est tendue.*

Le théorème suivant présente un critère pour vérifier la précompacité d'une famille de mesures de probabilité.

Théorème H.7. *Soit $(X^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{\varepsilon > 0}$ une suite de processus stochastiques continus, $0 < T < +\infty$ tous définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans I telle que*

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\varepsilon > 0} \mathbb{P}(\|X^\varepsilon(0)\|_d \geq \delta) = 0;$$

et pour tout $\varsigma > 0$ et $0 < T < +\infty$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\sup_{\substack{0 \leq s < t \leq T \\ t-s < \delta}} \rho(X^\varepsilon(t) - X^\varepsilon(s)) \geq \varsigma \right) = 0. \quad (\text{H.27})$$

Alors la famille $(\mathbb{P}(X^\varepsilon(\cdot))^{-1})_{\varepsilon > 0}$ de mesures induites par $(X^\varepsilon(\cdot))_{\varepsilon > 0}$ est précompacte.

On considère maintenant une famille indexée par $\varepsilon > 0$ de chaînes de Markov homogènes $(X_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}^d$ et une suite $(h_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ positive et décroissante telle que $h_\varepsilon \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On construit alors une suite de processus stochastiques continus :

$$\begin{cases} Y^\varepsilon(nh_\varepsilon) &= X_n^\varepsilon, \\ Y^\varepsilon(t) &= \frac{(n+1)h_\varepsilon - t}{h_\varepsilon} Y^\varepsilon(nh_\varepsilon) + \frac{t - nh_\varepsilon}{h_\varepsilon} Y^\varepsilon((n+1)h_\varepsilon), \quad t \in [nh_\varepsilon, (n+1)h_\varepsilon]. \end{cases} \quad (\text{H.28})$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on notera $\Pi^\varepsilon(x, \Gamma) = \mathbb{P}(Y^\varepsilon((n+1)h_\varepsilon) \in \Gamma | Y^\varepsilon(nh_\varepsilon) = x)$ la probabilité de transition pour la chaîne de Markov discrète $(Y^\varepsilon(nh_\varepsilon))_{0 \leq nh_\varepsilon \leq T}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, le générateur $\Pi^\varepsilon - \text{I}$ du processus $(Y^\varepsilon(nh_\varepsilon))_{0 \leq nh_\varepsilon \leq T}$ est défini de façon analogue à la Définition C.4 :

$$(\Pi^\varepsilon - \text{I})f(x) := \int_I (f(y) - f(x)) \Pi^\varepsilon(x, dy),$$

Le résultat suivant est un critère de précompacité énoncé dans [55] (Voir Théorème 1.4.11).

Théorème H.8. *Soit $(Y^\varepsilon(t), t \in [0, T])_{\varepsilon > 0}$ une suite de processus stochastiques continus définis comme dans (H.28), $0 < T < +\infty$, sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $(h_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite positive décroissante telle que $h_\varepsilon \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, le processus $(Y^\varepsilon(nh_\varepsilon))_{0 \leq nh_\varepsilon \leq T}$ satisfait l'hypothèse suivante :*

- i) *soit $\Pi^\varepsilon - \text{I}$ le générateur de $(Y^\varepsilon(nh_\varepsilon))_{0 \leq nh_\varepsilon \leq T}$. On suppose que pour toute fonction positive $f \in \mathcal{C}_b(I)$ il existe une constante $C_f \geq 0$ ne dépendant pas de ε telle que le processus*

$$(f(Y^\varepsilon(nh_\varepsilon)) + C_f nh_\varepsilon)_{0 \leq nh_\varepsilon \leq T}$$

soit une sous-martingale positive par rapport à la filtration engendrée par le processus discret $(Y^\varepsilon(nh_\varepsilon))_{0 \leq nh_\varepsilon \leq T}$;
 ii) Si de plus, pour tout $0 < T < +\infty$ et tout $\delta > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{0 \leq nh_\varepsilon \leq T} \mathbb{P}(\|Y^\varepsilon((n+1)h_\varepsilon) - Y^\varepsilon(nh_\varepsilon)\|_d \geq \delta) = 0 ;$$

iii)

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sup_{\varepsilon > 0} \mathbb{P}(\|Y^\varepsilon(0)\|_d \geq \ell) = 0.$$

Alors, la famille des mesures $(\mathbb{P}(Y^\varepsilon(\cdot)^{-1})_{\varepsilon > 0}$ sur $(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d)))$ est précompacte.

Pour tout $x \in I$ et pour tout $\delta > 0$, l'équivalent des coefficients a et b introduits dans l'hypothèse (E.1) peut être défini pour des processus discrets,

$$a_\varepsilon^{i,j}(x) = \frac{1}{h_\varepsilon} \int_{\|y-x\|_d < 1} (y_i - x_i)(y_j - x_j) \Pi^\varepsilon(x, dy) ; \quad (\text{H.29})$$

$$b_\varepsilon^i(x) = \frac{1}{h_\varepsilon} \int_{\|y-x\|_d < 1} (y_i - x_i) \Pi^\varepsilon(x, dy) ; \quad (\text{H.30})$$

et

$$\Delta_\varepsilon^\delta(x) = \frac{1}{h_\varepsilon} \Pi^\varepsilon(x, I \setminus B(x, \delta)). \quad (\text{H.31})$$

Supposons de plus qu'il existe deux fonctions $a : S \rightarrow \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ et $b : S \rightarrow \mathbb{R}^d$ continues telles que pour tout $R > 0$ et tout $\delta > 0$ on ait

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq R} \|a_\varepsilon(x) - a(x)\| = 0 ; \quad (\text{H.32})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq R} \|b_\varepsilon(x) - b(x)\|_d = 0 ; \quad (\text{H.33})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq R} \Delta_\varepsilon^\delta(x) = 0. \quad (\text{H.34})$$

Les trois derniers résultats de cette section sont développés dans [55] et permettent de caractériser la limite d'une famille de processus convergente en distribution vers la solution d'un problème aux martingales.

Lemme H.9. *Les conditions (H.32), (H.33) et (H.34) sont équivalentes à la convergence uniforme sur les compacts de I ,*

$$\left\| \mathcal{L}f - \frac{1}{h_\varepsilon} (\Pi^\varepsilon - \text{I})f \right\|_\infty \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$$

où

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} a^{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Table des figures

1.1	Trajectoire typique d'une particule dans un champ de force de la forme (1.2).	16
1.2	Particule arrivant à l'instant t_n avec vitesse v_n et paramètre d'impact b_n sur le diffuseur centré en r_{i_n}	18
1.3	Illustration de (1.43) avec différentes valeurs de γ . Moyenne de 500 simulations de la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$	29
3.1	Exemple de cas où $\xi_0 \notin \mathcal{N}_L$. Ici $\eta_0 = \tilde{\eta}_0 + 1$	60
3.2	$(\xi_n)_n$ visitant $\mathcal{N}_L$. Ici, $\eta_{\ell+1} = \eta_\ell - 1$	61
3.3	L'interpolation linéaire de $(R_n^\varepsilon)_n$ entre t_n et t_{n+1} implique que $T_\pm^\varepsilon$ est antérieur à $\varepsilon^2 \tau_\pm^\varepsilon$	65
3.4	Une trajectoire typique de η_ℓ , sur F_N , comme définie par (3.23).	68
1	Une trajectoire du processus $(S(t))_{0 \leq t \leq 10}$ avec $d = 3$ et $S(0) = [1 \ 0 \ 0]$	132
2	À gauche : le processus $(S(t))_{0 \leq t \leq 10}$ solution de l'équation différentielle stochastique (G.20) partant de $S(0) = [1 \ 0 \ 0]$. À droite : le processus $(Z(t))_{0 \leq t \leq 10}$ solution de l'équation différentielle stochastique (G.21) avec $c = 0.2$ et tel que $Z(0) = S(0)$. Le processus Z décrit moins rapidement la sphère que S	133

Bibliographie

- [1] B. AGUER : *Comportements asymptotiques dans des gaz de Lorentz inélastiques*. Thèse de doctorat, 2010. Thèse de doctorat dirigée par De Bièvre, Stephan and Lafitte-Godillon, Pauline Mathématiques appliquées Lille 1 2010.
- [2] B. AGUER et S. DE BIEVRE : On (in) elastic non-dissipative lorentz gases and the (in) stability of classical pulsed and kicked rotors. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(47):474001, 2010.
- [3] B. AGUER, S. DE BIÈVRE, P. LAFITTE et P. E. PARRIS : Classical motion in force fields with short range correlations. *J. Stat. Phys.*, 138(4-5):780–814, 2010.
- [4] K. S. ALEXANDER : Excursions and local limit theorems for Bessel-like random walks. *Electron. J. Probab.*, 16:no. 1, 1–44, 2011.
- [5] A. BECK et N. MEYER-VERNET : The trajectory of an electron in a plasma. *American Journal of Physics*, 76(10):934–936, 2008.
- [6] D. BÉNISTI et D. F. ESCANDE : Origin of diffusion in Hamiltonian dynamics. *Phys. Plasmas*, 4(5, part 2):1576–1581, 1997. 38th Annual Meeting of the Division of Plasma Physics of the American Physical Society (Denver, CO, 1996).
- [7] C. BOLDRIGHINI, L. A. BUNIMOVICH et Y. G. SINAÏ : On the Boltzmann equation for the Lorentz gas. *J. Statist. Phys.*, 32(3):477–501, 1983.
- [8] F. BONETTO, D. DAEMS et J. L. LEBOWITZ : Properties of stationary nonequilibrium states in the thermostatted periodic Lorentz gas. I. The one particle system. *J. Statist. Phys.*, 101(1-2):35–60, 2000. Dedicated to Grégoire Nicolis on the occasion of his sixtieth birthday (Brussels, 1999).
- [9] D. R. BRILLINGER : A particle migrating randomly on a sphere. *J. Theoret. Probab.*, 10(2):429–443, 1997. Dedicated to Murray Rosenblatt.
- [10] L. BRUNEAU et S. DE BIÈVRE : A Hamiltonian model for linear friction in a homogeneous medium. *Communications in mathematical physics*, 229(3):511–542, 2002.
- [11] L. A. BUNIMOVICH et Y. G. SINAÏ : Markov partitions for dispersed billiards. *Comm. Math. Phys.*, 78(2):247–280, 1980/81.
- [12] L. A. BUNIMOVICH et Y. G. SINAÏ : Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers. *Comm. Math. Phys.*, 78(4):479–497, 1980/81.
- [13] L. A. BUNIMOVICH, Y. G. SINAÏ et N. I. CHERNOV : Statistical properties of two-dimensional hyperbolic billiards. *Uspekhi Mat. Nauk*, 46(4(280)):43–92, 192, 1991.

- [14] E. CAGLIOTI et F. GOLSE : On the Boltzmann-Grad limit for the two dimensional periodic Lorentz gas. *J. Stat. Phys.*, 141(2):264–317, 2010.
- [15] N. I. CHERNOV, G. L. EYINK, J. L. LEBOWITZ et Y. G. SINAI : Derivation of Ohm’s law in a deterministic mechanical model. *Phys. Rev. Lett.*, 70:2209–2212, Apr 1993.
- [16] N. I. CHERNOV, G. L. EYINK, J. L. LEBOWITZ et Y. G. SINAI : Steady-state electrical conduction in the periodic Lorentz gas. *Comm. Math. Phys.*, 154(3):569–601, 1993.
- [17] K. L. CHUNG : *Markov chains with stationary transition probabilities*. Second edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 104. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.
- [18] E. CSÁKI, A. FÖLDES et P. RÉVÉSZ : Transient nearest neighbor random walk and Bessel process. *J. Theoret. Probab.*, 22(4):992–1009, 2009.
- [19] S. DE BIÈVRE, P. LAFITTE et P. E. PARRIS : Normal transport at positive temperatures in classical Hamiltonian open systems. In *Adventures in mathematical physics*, volume 447 de *Contemp. Math.*, pages 57–71. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [20] S. DE BIÈVRE et P. E. PARRIS : Equilibration, generalized equipartition, and diffusion in dynamical Lorentz gases. *J. Stat. Phys.*, 142(2):356–385, 2011.
- [21] C. P. DETTMANN et G. P. MORRIS : Crisis in the periodic Lorentz gas. *Phys. Rev. E*, 54:4782–4790, 1996.
- [22] D. DOLGOPYAT et L. KORALOV : Motion in a random force field. *Nonlinearity*, 22(1):187–211, 2009.
- [23] Y. ELSKENS et E. PARDOUX : Diffusion limit for many particles in a periodic stochastic acceleration field. *Ann. Appl. Probab.*, 20(6):2022–2039, 2010.
- [24] S. N. ETHIER et T. G. KURTZ : *Markov processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.
- [25] D. J. EVANS et G. MORRIS : *Statistical mechanics of nonequilibrium liquids*. Cambridge University Press, 2008.
- [26] G. GALLAVOTTI : Divergences and the approach to equilibrium in the lorentz and the wind-tree models. *Physical Review*, 185(1):308, 1969.
- [27] G. GALLAVOTTI : Rigorous theory of the Boltzmann equation in the Lorentz gas. 1972.
- [28] L. GOLUBOVIĆ, S. FENG et F. ZENG : Classical and quantum superdiffusion in a time-dependent random potential. *Phys. Rev. Lett.*, 67(16):2115–2118, 1991.
- [29] T. E. HARRIS : First passage and recurrence distributions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 73:471–486, 1952.
- [30] J. HEINRICHS : Diffusion and superdiffusion of a quantum particle in time-dependent random potentials. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 89(1):115–121, 1992.

- [31] A. M. JAYANNAVAR et N. KUMAR : Nondiffusive quantum transport in a dynamically disordered medium. *Phys. Rev. Lett.*, 48:553–556, Feb 1982.
- [32] I. KARATZAS et S. E. SHREVE : *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1991.
- [33] P. LAFITTE, P. E. PARRIS et S. DE BIÈVRE : Normal transport properties in a metastable stationary state for a classical particle coupled to a non-Ohmic bath. *J. Stat. Phys.*, 132(5):863–879, 2008.
- [34] J. LAMPERTI : A new class of probability limit theorems. *J. Math. Mech.*, 11:749–772, 1962.
- [35] N. LEBEDEV, P. MAASS et S. FENG : Diffusion and superdiffusion of a particle in a random potential with finite correlation time. *Physical review letters*, 74(11):1895, 1995.
- [36] H. A. LORENTZ : The motion of electrons in metallic bodies i. In *KNAW, Proceedings*, volume 7, pages 438–453, 1905.
- [37] H. A. LORENTZ : The motion of electrons in metallic bodies ii. In *KNAW, Proceedings*, volume 7, pages 585–593, 1905.
- [38] H. A. LORENTZ : The motion of electrons in metallic bodies iii. In *KNAW, Proceedings*, volume 7, pages 684–693, 1905.
- [39] A. LOSKUTOV, A. B. RYABOV et L. G. AKINSHIN : Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 33(44):7973, 2000.
- [40] A. Y. LOSKUTOV, A. B. RYABOV et L. G. AKINSHIN : Mechanism of fermi acceleration in dispersing billiards with time-dependent boundaries. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 89(5):966–974, 1999.
- [41] P. MANDL : *Analytical treatment of one-dimensional Markov processes*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 151. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1968.
- [42] J. MARKLOF et A. STRÖMBERGSSON : The Boltzmann-Grad limit of the periodic Lorentz gas. *Ann. of Math. (2)*, 174(1):225–298, 2011.
- [43] S. MEYN et R. L. TWEEDIE : *Markov chains and stochastic stability*. Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 2009. With a prologue by Peter W. Glynn.
- [44] J. R. NORRIS : *Markov chains*, volume 2 de *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Reprint of 1997 original.
- [45] B. ØKSENDAL : *Stochastic differential equations in infinite dimensions*. *SIAM Rev.*, 55(3):585–588, 2013.
- [46] P. E. PROTTER : *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 de *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Second edition. Version 2.1, Corrected third printing.

- [47] D. REVUZ et M. YOR : *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third édition, 1999.
- [48] M. N. ROSENBLUTH : Comment on “classical and quantum superdiffusion in a time-dependent random potential”. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1831–1831, Sep 1992.
- [49] M. B. SILEVITCH et K. I. GOLDEN : Dielectric formulation of test particle energy loss in a plasma. *Journal of Statistical Physics*, 7(1):65–87, 1973.
- [50] A. A. SILVIUS, P. E. PARRIS et S. DE BIÈVRE : Adiabatic-nonadiabatic transition in the diffusive hamiltonian dynamics of a classical holstein polaron. *Physical Review B*, 73(1):014304, 2006.
- [51] E. SORET et S. DE BIÈVRE : Particule à haute énergie dans un potentiel aléatoire dépendant du temps. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 352(7-8):645–649, 2014.
- [52] E. SORET et S. DE BIÈVRE : Stochastic acceleration in a random time-dependent potential. *Stochastic Process. Appl.*, 125(7):2752–2785, 2015.
- [53] H. SPOHN : The Lorentz process converges to a random flight process. *Comm. Math. Phys.*, 60(3):277–290, 1978.
- [54] D. W. STROOCK : On the growth of stochastic integrals. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 18:340–344, 1971.
- [55] D. W. STROOCK et S. R. S. VARADHAN : *Multidimensional diffusion processes*, volume 233 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [56] P. A. STURROCK : Stochastic acceleration. *Physical Review*, 141(1):186, 1966.
- [57] T. YAMADA et S. WATANABE : On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *J. Math. Kyoto Univ.*, 11:155–167, 1971.