HAL open science

Analyse semi-classique des opérateurs courbes en TQFT

Renaud Detcherry

To cite this version:

Renaud Detcherry. Analyse semi-classique des opérateurs courbes en TQFT. Topologie géométrique [math.GT]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066252 . tel-01237611

HAL Id: tel-01237611

https://theses.hal.science/tel-01237611

Submitted on 3 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale de Science Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Renaud Detcherry

Analyse semi-classique des opérateurs courbes en TQFT

---

dirigée par Julien Marché

Soutenue le 10 juillet 2015 devant le jury composé de :

M. François Costantino	Université de Toulouse III	Examinateur
M. Elisha Falbel	Université de Pierre et Marie Curie	Examinateur
M. Louis Funar	Institut Fourier	Examinateur
M. Julien Marché	Université de Pierre et Marie Curie	Directeur
M. Grégor Masbaum	Université de Pierre et Marie Curie	Examinateur
M. Stéphane Nonnenmacher	Institut de Physique théorique de Saclay	Rapporteur

Remerciements

Il me faut tout d'abord exprimer ma profonde gratitude envers Julien Marché, pour avoir dirigé ma thèse. J'ai été très heureux de bénéficier de sa grande disponibilité, de sa pédagogie, et de l'étendue de son savoir mathématique. Le sujet de thèse qu'il m'a proposé m'a d'emblée fasciné, et il a toujours été présent pour m'aider jusqu'à aboutir au présent mémoire. Je suis très redevable aussi à sa compréhension et à son soutien dans les moments plus difficiles. Son enseignement a beaucoup contribué à me faire apprécier la beauté de la discipline et il restera un modèle inestimable pour la suite de ma vie mathématique.

Ce mémoire doit beaucoup également à Laurent Charles et à l'aide généreuse qu'il m'a apporté au cours de nos nombreuses discussions. Son expertise m'a été très précieuse pour maîtriser les aspects analytiques utilisés dans ce mémoire. En outre, je le remercie plus généralement pour l'intérêt et le soutien dont il m'a fait part au cours de mes travaux.

Je suis très reconnaissant à Rinat Kashaev et Stéphane Nonnenmacher d'avoir accepté le délicat travail de rapporteur pour ma thèse. Je les remercie pour la rapidité avec laquelle ils ont accompli cette lourde tâche.

Je me sens également très obligé vis à vis d'Elisha Falbel, Louis Funar, Grégor Masbaum pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'ai pu bénéficié au cours de mes années de formation à l'Institut de Mathématiques de Jussieu de nombreuses discussions mathématiques enrichissantes. Je tiens notamment à remercier Maxime Wolff, Colin Guillarmou, et Antonin Guilloux pour la disponibilité dont ils ont fait preuve pour répondre à mes questions.

Grâce à Jesua, Léo, Maÿlis, Louis, Marc, Nicolas et beaucoup d'autres, j'ai profité pendant trois années d'une excellente ambiance parmi les thésards de Jussieu, d'un point de vue mathématique comme humain.
Je veux saluer aussi Xavier, Anthony, Marco, Jules et Fathi pour les moments inoubliables que nous avons vécus en conférence à La Llagonne, Pau ou Genève.

Pour terminer, je veux adresser un gros merci à Simon, Marien, Cyril, Julien, Kévin, Jean-Louis, Alix, Tom, Noémie, et Anisse pour les nombreux moments d'amitié, de convivialité et de rigolade qu'ils ont pu m'offrir, et enfin exprimer ma gratitude envers mes parents, mon frère Damien et ma soeur Séverine pour leur soutien indéfectible depuis toujours.

Table des matières

I Introduction **5**

II TQFT et quantification géométrique **11**

1 Construction et propriétés de la TQFT de Witten-Reshetikhin-Turaev **11**
1.1 Crochet de Kauffman et polynôme de Jones 11
1.2 Modules de Kauffman et idempotents de Jones-Wenzl 14
1.3 Chirurgie et mouvements de Kirby 18
1.4 Invariants de Reshetikhin-Turaev 20
1.5 Axiomatique des TQFT 21
1.6 Construction universelle 24
1.7 Bases, opérateurs courbes et valeurs propres 25

2 Espace des modules SU_2 d'une surface **27**
2.1 Définitions et premières propriétés 27
2.2 Espace tangent et cohomologie tordue 29
2.3 Structure symplectique 30
2.4 Flot de Goldman et paramétrisation 31
2.5 Lien avec le module de Kauffman 32
2.6 Fibrés de Chern-Simons 34
2.7 Structure métaplectique 36
2.8 Holonomie en paramétrisation réelle 37

3 Quantification géométrique **38**
3.1 Variétés préquantifiées et opérateurs de Toeplitz 38
3.2 Spectres et vecteurs propres des opérateurs de Toeplitz 40

III Asymptotic formulas for curve operators in TQFT **43**

4 Introduction **43**

5 Matrix coefficients of curve operators **44**

6 Computations of curve operators using fusion rules **49**
6.1 Fusion rules in a pants decomposition 49
6.2 Examples of ψ-symbol 57

7 Principal symbol and representation spaces **60**
7.1 The intersection algebra A_Γ and multiplicativity of the ψ-symbol 60
7.2 Principal symbol and the SL_2-character variety 62
7.3 A system of actions-angles coordinates on the SU_2-character variety 64

8 First order of the ψ-symbol **67**

IV Geometric quantization and semi-classical limit of pairings of TQFT vectors **70**

9 TQFT and geometric quantization **70**
9.1 TQFT vector spaces $V_r(\Sigma)$ as spaces of holomorphic sections of line bundles 70
9.2 Curve operators as Toeplitz operators 73

10 Intersections of Lagrangians in $\mathcal{M}(\Sigma)$ **78**

11 Pairings of eigenvectors of curve operators **81**
11.1 Pairing in the half-form bundle 81
11.2 Quasimodes of curve operators 82
11.3 A formula for pairings of eigenvectors 87
11.4 A geometric interpretation of the phase and index 89

Bibliographie **91**

Partie I
Introduction

L'objet de ce mémoire est de présenter plusieurs résultats sur l'asymptotique de certains invariants quantiques intervenant dans la théorie quantique topologique des champs de Witten-Reshetikhin-Turaev de groupe de jauge SU_2.
La topologie quantique nait avec l'article de Jones [?] définissant son célèbre invariant polynomial des noeuds à partir de l'étude de représentations du groupe de tresse dans des algèbres de Von Neumann. Cet invariant, le polynôme de Jones, associe à tout entrelacs L dans S^3 un polynôme $J_L \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ et peut se calculer facilement par des relations d'écheveau; en revanche, son interprétation géométrique est mystérieuse.
En effet, contrairement aux invariants des noeuds connus précédemment, appelés invariants classiques, comme le polynôme d'Alexander, il ne correspond à aucun invariant topologique évident du complémentaire $E_L = S^3 \setminus L$.
Dans son article [?], Witten construit de nombreux invariants des variétés de dimension 3 à partir du polynôme de Jones évalué en les racines de l'unité. Sa méthode, inspirée de la théorie quantique des champs, consiste à définir ces invariants comme intégrale de chemin $Z_r(M) = \int e^{irCS(A)} dA$, où l'intégrale porte sur l'ensemble des SU_2-connexions sur M et CS est la fonctionnelle de Chern-Simons de groupe de jauge SU_2.
Cette fonctionnelle est définie sur l'espace des SU_2-connexions sur M. Cette définition à partir d'une intégrale de chemins n'est pas rigoureuse. L'intégrale porte sur un espace de dimension infinie et on ne sait pas donner un sens mathématique précis à la mesure dA. Cependant, elle permet à Witten de conjecturer l'existence de tels invariants et de déterminer certaines de leurs propriétés: en particulier ils doivent faire partie d'une structure plus riche que nous décrivons ci-dessous.
Il existe un foncteur V_r qui envoie les surfaces orientées compactes fermées Σ sur des espaces vectoriels $V_r(\Sigma)$, et les cobordismes avec entrelacs (M, Σ, Σ', L) sur des applications linéaires $V_r(M, L) : V_r(\Sigma) \to V_r(\Sigma')$, le recollement des cobordismes étant envoyé sur la composition des applications linéaires. Enfin, pour les variétés M sans bord on a $Z_r(M) = V_r(M) \in \mathrm{End}(V_r(\emptyset)) = \mathbb{C}$.
Cette propriété plus quelques autres axiomes confèrent à V_r une structure de *théorie quantique topologique des champs*, aussi appelée TQFT. Cette notion sera axiomatisée par Atiyah [?] à la suite des travaux de Witten sur les invariants Z_r.
Les invariants $Z_r(M)$ et la théorie quantique topologique des champs sous-jacente seront peu après définis rigoureusement par Reshetikhin et Turaev dans [?], en étudiant les valeurs des polynômes de Jones des présentations de chirurgie de M aux racines de l'unité.
Peu après, en reprenant les travaux de Reshetikhin et Turaev, Kirby et Melvin dans [?] puis Blanchet, Habegger, Masbaum et Vogel dans [?] produisent d'autres constructions de ces invariants et TQFT. Dans ce mémoire, nous utiliserons la construction de [?] qui se base sur le crochet de Kauffman et permet de simplifier les calculs de théorie d'écheveau.
De plus, dans la théorie de [?], les espaces $V_r(\Sigma)$ sont munis de forme hermitiennes naturelles, et aux décompositions en pantalons $\mathcal{C} = \{C_e, e \in E\}$ de Σ sont associées des bases φ_c de $V_r(\Sigma)$ indexées par des coloriages $c : E \to \{1, \ldots, r-1\}$.

Remarquons que la structure de TQFT munit les espaces $V_r(\Sigma)$ associés aux surfaces de nombreux opérateurs naturels. Pour tout élément ϕ du groupe des difféotopies $\Gamma(\Sigma)$ de

Σ, le cylindre $M_\phi = [0,1]\times\Sigma \underset{\phi}{\cup} \Sigma$ est un cobordisme entre Σ et Σ qui induit une application

$$\rho_r(\phi) = V_r(M_\phi) \in \mathrm{End}(V_r(\Sigma))$$

D'autre part, toute courbe simple γ sur Σ permet de définir un opérateur $T_r^\gamma = V_r(\Sigma \times [0,1], \gamma \times \{\frac{1}{2}\}) \in \mathrm{End}(V_r(\Sigma))$. Cet opérateur est appelé opérateur courbe associé à la courbe γ. Ces opérateurs seront l'un de nos principaux objets d'étude dans ce mémoire.
Les éléments $\rho_r(\phi)$ associés aux difféotopies sont particulièrement intéressants: comme le recollement des cylindres d'applications correspond à la composition des difféotopies $M_\phi \underset{\Sigma}{\cup} M_{\phi'} \simeq M_{\phi'\circ\phi}$, on déduit de la structure de TQFT que les ρ_r sont des représentations de dimension finie des groupe $\Gamma(\Sigma)$. En realité, ce ne sont que des représentations projectives, il existe une *anomalie* dans les TQFT définies par Reshetikhin et Turaev qui fait que pour deux cobordismes M et M', l'application $V_r(M \underset{\Sigma}{\cup} M')$ n'est égale à $V_r(M') \circ V_r(M)$ qu'à une constante près. Les représentations ρ_r' sur $\mathrm{End}(V_r(\Sigma))$ correspondant à envoyer ϕ sur la conjugaison par $\rho_r(\phi)$ sont elles de vraies représentations. Les représentations ρ_r constituent un outil remarquable pour étudier les propriétés mal connues des groupes $\Gamma(\Sigma)$.

Il existe une autre approche pour définir les TQFT V_r issue de la théorie de la quantification géométrique. Cette théorie correspond à chercher à représenter les espaces vectoriels $V_r(\Sigma)$ comme des espaces de sections holomorphes $H^0(M, L^r)$. Ici M désigne une variété Kählerienne et L est un fibré en droites complexes L sur M, de courbure $\frac{\omega}{i}$, la forme ω étant la forme symplectique sur M. Les applications $f \in C^\infty(M)$ fournissent alors des opérateurs sur $H^0(M, L^r)$ par la formule

$$T_r^f = \Pi_r \circ m_f$$

où m_f est l'opérateur de multiplication par f, et Π_r est la projection orthogonale sur les sections holomorphes. Il s'est vite avéré que l'espace naturel sur lequel appliquer la quantification géométrique pour obtenir les espaces $V_r(\Sigma)$ était l'espace des modules

$$\mathcal{M}(\Sigma) = \mathrm{Hom}(\pi_1\Sigma, \mathrm{SU}_2)/\,\mathrm{SU}_2$$

Cet espace est toujours muni d'une forme symplectique naturelle, qui a été définie par Atiyah et Bott dans [?].
Tout d'abord, dans [?], Jeffrey et Weistman ont remarqué que la dimension des espaces $V_r(\Sigma)$ était égale au nombre de fibres de Bohr-Sommerfeld de certains systèmes intégrables $h_\mathcal{C} : \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathbb{R}^E$ associés aux décompositions $\mathcal{C} = \{C_e,\ e \in E\}$ de Σ en pantalons. Ces systèmes intégrables sont définis par la formule $h_\mathcal{C} = (h_{C_e})_{e\in E}$ avec

$$h_{C_e} = \frac{1}{\pi}\mathrm{acos}(\frac{\mathrm{Tr}(\rho(C_e))}{2})$$

Suite à l'observation de Jeffrey et Weistman, Hitchin a introduit dans [?] un fibré $\mathcal{V}_r(\Sigma)$ sur l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(\Sigma)$ munie d'une connexion projectivement plate et dont les fibres ont même dimension que $V_r(\Sigma)$. Une fibre $\mathcal{V}_r(\Sigma)_\sigma$ s'identifie à un espace $H^0(\mathcal{M}(\Sigma)_\sigma, L_\sigma^r)$ où $\mathcal{M}(\Sigma)_\sigma$ est l'espace $\mathcal{M}(\Sigma)$ muni d'une structure Kählerienne associée à $\sigma \in \mathcal{T}(\Sigma)$. La connexion sur $\mathcal{T}(\Sigma)$ permet de reconstruire les représentations quantiques ρ_r de $V_r(\Sigma)$. Cette construction constitue l'approche géométrique de la TQFT de Witten-Reshetikhin-Turaev.
Dans une série d'articles [?][?][?][?], Andersen et Ueno ont montré récemment un isomorphisme entre la TQFT combinatoire définie par Reshetikhin et Turaev et la TQFT

géométrique. Les approches géométriques et combinatoire de la TQFT sont complémentaires: l'approche combinatoire permet de réaliser beaucoup de calculs explicites à partir de la théorie d'écheveau ou des groupes quantiques, l'approche géométrique permet d'exploiter des outils d'analyse quand on souhaiter étudier l'asymptotique d'invariants quantiques.
Comme exemple de cette démarche, Andersen a prouvé dans [?] que les représentations ρ_r sur $\mathrm{End}(V_r(\Sigma))$ sont asymptotiquement fidèles si le genre $g(\Sigma)$ est supérieur à 3, et que le noyau est constitué de l'identité et de l'involution elliptique ou hyperelliptique si $g(\Sigma)$ est égal à 1 ou 2. Sa preuve utilise le modèle géométrique de la TQFT $V_r(\Sigma)$ et introduit des opérateurs de Toeplitz de symboles principaux les fonctions traces $f_\gamma = -\mathrm{Tr}(\rho(\gamma))$ sur $\mathcal{M}(\Sigma)$ qui approximent les opérateurs courbes T_r^γ à l'ordre 1.
A la suite des travaux d'Andersen sur les opérateurs courbes, Marché et Paul ont construit dans [?] une représentation des opérateurs courbes sur la sphère à quatre trous et sur le tore épointé comme des opérateurs de Toeplitz, de symboles principaux des fonctions trace et de symboles sous-principaux de Weyl nuls. La méthode de [?] basée sur la théorie d'écheveau et la définition combinatoire de la TQFT par [?] repose sur un développement asymptotique des coefficients de matrices dans les bases données par [?] des opérateurs courbes. Leur approche repose sur le calcul explicite des opérateurs courbes associés aux trois générateurs de l'algèbre de Kauffman de la sphère à quatre trous et du tore épointé. Dans l'article [?] que nous présenterons dans la Partie **??**, nous généralisons leurs résultats à n'importe quel surface. Nous montrons la formule asymptotique suivante pour les coefficients de matrice des opérateurs courbes:

Théorème 0.1. *Soit γ une courbe sur une surface orientée compacte Σ et soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes décomposant Σ en pantalons. Soit φ_c la base de $V_r(\Sigma)$ associée à cette décomposition. Les coefficients des matrices des opérateurs courbes $\langle T_r^\gamma \varphi_c, \varphi_{c+k}\rangle$ admettent le développement asymptotique suivant:*

$$\langle T_r^\gamma \varphi_c, \varphi_{c+k}\rangle = F_k(\frac{c}{r}) + \sum_{e\in E} \frac{k_e}{2r}\frac{\partial}{\partial x_e} F_k(\frac{c}{r}) + O(r^{-1})$$

où $F_k(x)$ est le k-ème coefficient de Fourier de la fonction trace f_γ sur le tore $h_C^{-1}(x)$.

Cette formule asymptotique constitue une première étape pour représenter les opérateurs courbes comme opérateurs de Toeplitz. Dans la Partie **??**, nous introduisons un modèle géométrique pour les espaces de TQFT $V_r(\Sigma)$ avec une approche différente de celle des travaux Hitchin et Andersen. Comme dans les travaux de Marché et Paul [?] dans le cas de la sphère à quatre trous et du tore épointé, ou comme dans [?] et [?] pour le tore fermé, on construit un isomorphisme

$$\psi_r : V_r(\Sigma) \to H_r$$

où H_r est un espace de la forme $H^0(M, L^r)$. Cet isomorphisme est construit de manière explicite en envoyant une base orthonormée φ_c de $V_r(\Sigma)$ données par [?] sur une base orthonormée de H_r. L'espace de phase que nous considérons n'est plus l'espace des modules $\mathcal{M}(\Sigma)$ mais un ouvert dense $U \subset \mathcal{M}(\Sigma)$ correspondant à l'image inverse des valeurs régulières du système intégrable $h_\mathcal{C}$ associé à un décomposition en pantalons $\mathcal{C}$.

Théorème 0.2. *Soit Σ une surface compacte connexe orientée. Pour toute courbe simple γ sur Σ, l'opérateur $T_r = \psi_r \circ T_r^\gamma \circ \psi_r^{-1}$ est un opérateur de Toeplitz de symbole principal la fonction trace $f_\gamma = -\operatorname{Tr}(\rho(\gamma))$ et de symbole sous-principal de Weyl nul.*

Ce théorème sera démontré dans la Partie **??**.

L'importance des modèles géométriques pour la TQFT est qu'ils permettent de mettre à profit les outils de l'analyse micro-locale pour étudier l'asymptotique d'invariants quantiques. La formule $Z_r(M) = \int e^{irCS(A)} dA$ par laquelle Witten a défini les invariants quantiques d'une variété M compacte orientée a l'intérêt de fournir une heuristique pour ces invariants. En effet, en supposant qu'une méthode de la phase stationnaire est applicable dans ce cas, Witten conjecture que les invariants $Z_r(M)$ sont asymptotiquement équivalents à une somme de contributions sur les points critiques de la fonctionnelle CS, qui correspondent en fait aux connexions plates à valeurs dans SU_2, c'est-à-dire aux représentations $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1 M, \mathrm{SU}_2)$. Witten en déduit la formule asymptotique suivante:

Conjecture 0.1. *(Formule asymptotique de Witten, [**?**]) Pour toute variété M orientée compacte fermée de dimension 3, les invariants Z_r admettent la formule asymptotique suivante:*

$$Z_r(M) = (1 + O(r^{-1})) \sum_{\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1 M, SU_2)/\, SU_2} e^{2i\pi r CS(\rho)} r^{\frac{h^1(\rho)) - h^0(\rho))}{2}} \sqrt{\mathrm{Tor}(M,\rho)} I_\rho$$

où $h^1(\rho)$ et $h^0(\rho)$ sont les dimensions des espaces d'homologie tordue $H^1(M, \mathrm{Ad}_\rho)$ et $H^0(M, \mathrm{Ad}_\rho)$, CS est l'invariant de Chern-Simons, Tor *est la torsion de Reidemeister et I_ρ est une racine 8-ème de l'unité qui se calcule comme un flot spectral.*

De nombreuses approches ont été tentées pour prouver cette conjecture. Dans [**?**], Jeffrey a montré que les invariants quantiques des espaces lenticulaires vérifient la conjecture. D'autres travaux [**?**][**?**][**?**][**?**] ont donné des exemples d'autres variétés de dimension 3 vérifiant la conjecture. Ces exemples concernent des variétés de Seifert, et utilisent des calculs explicites des invariants $Z_r(M)$.
Andersen et Hempel ont utilisé l'approche géométrique de la TQFT via la connexion de Hitchin pour prouver le résultat pour des tores de difféotopies d'ordre fini dans [**?**] et [**?**]. Le cas de tores d'application de difféotopies vérifiant une certaine hypothèse de transversalité a été traité par Charles dans [**?**]. Enfin, Charles et Marché sont parvenus à montrer que les remplissages de Dehn du noeud de huit vérifient la formule asymptotique de Witten. Leur approche basée sur l'analyse micro-locale, consiste d'abord à montrer que les vecteurs d'état du noeud $V_r(E_K) \in V_r(\mathbb{T}^2)$, où E_K est le complémentaire du noeud de huit, se concentrent sur la sous-variété de $\mathcal{M}(\mathbb{T}^2)$ correspondant aux représentations qui s'étendent en une représentation de l'extérieur du noeud.

Dans la partie **??**, nous allons montrer une formule asymptotique similaire à la formule de Witten pour certains invariants quantiques. Remarquons que comme une variété M peut être obtenue par un scindement de Heegaard $M = H \underset{\Sigma}{\cup} H'$, on peut exprimer les invariants $Z_r(M)$ comme le produit scalaire $\langle Z_r(H), Z_r(H') \rangle$. Nous disposons d'autres vecteurs remarquables dans $V_r(\Sigma)$: les vecteurs de bases donnés par la construction de [**?**]. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux décompositions de pantalons de Σ, on note φ_α et ψ_β les bases orthonomées correspondantes.

Soit α_r une suite de colorations r-admissibles. Dans la Partie **??**, on montre par l'analyse micro-locale que les vecteurs φ_{α_r} se concentrent sur des lagrangiens

$$\Lambda^{\mathcal{C}}_{\frac{\alpha_r}{r}} = h_{\mathcal{C}}^{-1}(\frac{\alpha_r}{r}) = \{\rho \ / \ \mathrm{Tr}(\rho(C_e)) = 2\cos(\frac{\pi\alpha_e}{r})\}$$

. Nous donnons une formule asymptotique pour ces vecteurs au voisinage du lagrangien. Ce résultat est l'analogue de celui de Charles et Marché pour les vecteurs d'état du noeud de huit.
Les champs de vecteurs hamiltioniens $X_{h_{C_e}}$ forment en tout point $x \in \Lambda^{\mathcal{C}}_{\frac{\alpha_r}{r}}$ une base de $T_x\Lambda^{\mathcal{C}}_{\frac{\alpha_r}{r}}$ et induisent une base duale $(\theta_e)_{e\in E}$ et donc une forme volume

$$\beta = |\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n|$$

sur $\Lambda^{\mathcal{C}}_{\frac{\alpha_r}{r}}$. Le calcul des périodes du flot des $X_{h_{C_e}}$ permet de montrer que le volume V du tore lagrangien $\Lambda^{\mathcal{C}}_x$ ne dépend en fait pas de x. Si $\mathcal{D}$ est une autre décomposition en pantalons, on définit de manière analogue β' à partir des champs de vecteurs $X_{h_{D_f}}$.
Enfin, nous utiliserons ces formules asymptotiques pour les vecteurs de bases pour calculer l'asymptotique de produits scalaires $\langle\varphi_{\alpha_r}, \psi_{\beta_r}\rangle$ pour des suites α_r et β_r vérifiant des conditions de généricité, correspondant notamment à demander que les intersections $\Lambda^{\mathcal{C}}_{\frac{\alpha_r}{r}}$ et $\Lambda^{\mathcal{D}}_{\frac{\beta_r}{r}}$ soient transverses. On obtient alors le résultat suivant:

Théorème 0.3. *Soit $(C_e)_{e\in E}$ et $(D_f)_{f\in F}$ deux décompositions en pantalons d'une surface compacte orientée Σ. Soit $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in I_r}$ et $(\psi_\beta)_{\beta\in J_r}$ les deux bases de $V_r(\Sigma)$ associées à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Pour des suites génériques (α_r, β_r) dans $I_r \times J_r$ on a la formule*

$$\langle\varphi_{\alpha_r}, \psi_{\beta_r}\rangle = u_r \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{VV'}} \sum_{z\in\Lambda^C_{\frac{\alpha_r}{r}}\cap\Lambda^D_{\frac{\beta_r}{r}}} \frac{e^{ir\eta(z_0,z)}}{|\det(\{h_{C_e}, h_{D_f}\})|^{\frac{1}{2}}} \sqrt{-1}^{m(z_0,z)} + O(r^{-\frac{n}{2}-1})$$

où $n = \dfrac{dim(\mathcal{M}(\Sigma))}{2}$, u_r est une suite de nombres complexes de modules 1, et où V (respectivement V') est le volume commun des Λ^C_x (respectivement Λ^D_y) pour les formes volumes β (resp. β'). Le point z_0 est un point de référence arbitrairement choisi dans $\Lambda^{\mathcal{C}}_{\frac{\alpha_r}{r}} \cap \Lambda^{\mathcal{D}}_{\frac{\beta_r}{r}}$.
D'autre part, $\eta(z_0, z)$ est l'holonomie du fibré L sur l'union d'un arc allant de z_0 à z dans Λ^C_x et d'une arc allant de z à z_0 dans Λ^D_y.
Enfin $m(z_0, z)$ est un entier, correspondant à un indice de Maslov.

Dans cette formule asymptotique on constate que les termes $\eta(z_0, z)$ jouent un rôle analogue aux invariants de Chern-Simons $CS(\rho)$ dans la formule de Witten, le terme $|\det(\{\mu_i, \mu'_j\})|$ remplace la torsion de Reidemeister et les $i^{m(z_0,z)}$ sont l'analogue des flots spectraux I_ρ apparaissant dans la formule de Witten, et définis par exemple dans [**?**].

Les produits scalaires $\langle\varphi_\alpha, \psi_\beta\rangle$ peuvent s'interprêter de deux manières: tout d'abord, les vecteurs $V_r(H)$ associés aux corps en anses correspondent à des vecteurs de bases de coloration constante égale à 1. En ce sens notre formule est une généralisation de la formule de Witten, bien que notre hypothèse de généricité ne soit jamais vérifiée pour de telles suites de vecteurs.
D'autre part, si une difféotopie ϕ envoie la décomposition en pantalons $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{D}$, l'endomophisme $\rho_r(\phi)$ envoie la base φ_α sur ψ_β. Les produits scalaires considérés correspondent alors à des coefficients de matrices des représentations quantiques ρ_r.

Notons que du point de vue de la quantification géométrique, si les opérateurs courbes en TQFT correspondent à des opérateurs de Toeplitz, les opérateurs $\rho_r(\phi)$ associés aux difféotopies ϕ par les représentations quantiques ρ_r devraient s'exprimer comme des opérateurs Fourier intégraux. La formule asymptotique obtenue pour leur coefficient de matrice tend à confirmer cette intuition.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante: la Partie **??** détaille les différentes théories utilisées dans les Parties **??** et **??**. Aucun résultat original n'est introduit dans cette partie. Les deux parties suivantes présentent les contenus des articles [**?**] et [**?**].
Dans la Partie **??** sont étudiés les coefficients de matrice des opérateurs courbes et le Théorème **??** y est démontré.
La Partie **??** reprend les résultats de l'article [**?**]. On met à profit les résultats de la partie précédente pour exhiber un modèle géométrique de $V_r(\Sigma)$ comme espace de sections $H^0(X, L^r \otimes \delta)$ où les opérateurs courbes s'expriment comme opérateurs de Toeplitz, comme expliqué dans le Théorème **??**. Puis on utilise ce modèle et les outils de l'analyse micro-locale pour établir la formule asymptotique du Théorème **??**.

Partie II
TQFT et quantification géométrique

Dans cette partie introductive, nous définirons dans la Section **??** les invariants de Reshetikhin-Turaev Z_r et expliquerons la construction combinatoire des TQFT V_r par [**?**].

Dans la Section **??**, nous introduirons notre autre principal objet d'étude dans ce mémoire: les espaces de modules des surfaces $\mathcal{M}(\Sigma)$ et exposerons quelques propriétés de la géométrie de ces espaces, dont nous aurons besoin dans les parties ultérieures.

Enfin, la Section **??** présente l'outil qui nous permettera de faire un pont entre les deux précédents objets: la méthode de la quantification géométrique. Nous donnerons aussi des résultats généraux sur les valeurs et vecteurs propres des opérateurs de Toeplitz.

1 Construction et propriétés de la TQFT de Witten-Reshetikhin-Turaev

Dans la Section **??**,après quelques rappels de théorie des noeuds, nous définirons le polynôme de Jones et sa variante pour les entrelacs solides le crochet de Kauffman.
La Section **??** est consacrée aux modules de Kauffman.
La théorie de la chirurgie et du calcul de Kirby sera brièvement expliquée dans la section **??**.
Au paragraphe **??**, on donnera la formule des invariants de Reshetikhin-Turaev, et on expliquera leur invariance par les mouvements de Kirby.
L'axiomatique d'Atiyah pour la TQFT sera détaillée dans la Section **??**.
Dans la Section **??** sera exposée la construction combinatoire de la TQFT par Blanchet, Habegger, Masbaum et Vogel.
Enfin, quelques propriétés basiques de celle-ci seront énoncés au paragraphe **??**: bases, valeurs et vecteurs propres des opérateurs courbes.

1.1 Crochet de Kauffman et polynôme de Jones

Avant d'introduire le crochet de Kauffman et le polynôme de Jones, commençons par quelques rappels et notations sur les noeuds et entrelacs. Dans tout le mémoire, un noeud K dans une variété M de dimension 3 désignera une classe d'isotopie de plongement C^∞ de S^1 dans la variété M, modulo reparamétrage de S^1. Un noeud orienté sera une classe d'isotopie de plongement de S^1 dans M, sans autoriser de reparamétrage de S^1 qui change l'orientation.
De même, un entrelacs L dans M à n composantes $L_1, \ldots, L_n$ est une classe d'isotopie de plongement d'une union disjointe de cercles $\coprod_{i=1\ldots n} S^1 \hookrightarrow M$, modulo reparamétrage. De même, que pour les noeuds, lorsqu'on autorise pas de reparamétrage inversant l'orientation, on obtient un entrelacs orienté. Chaque composante est alors un noeud orienté.
Un entrelacs en bandes L à n composantes est une classe d'isotopie de plongement d'une union disjointe de n anneaux $S^1 \times [0,1]$ dans M, modulo reparamétrage de $S^1 \times [0,1]$. Les deux composantes de bord de chaque bande sont des noeuds isotopes, et l'entrelacs sous-jacent à L défini en prenant une composante de bord de chaque composante de L est bien défini. L'auto-enlacement d'une composante de L est l'enlacement de deux composantes de

bord. Deux entrelacs en bandes L et L' ayant le même entrelacs sous-jacent sont identiques si et seulement si l'auto-enlacement de chaque composante est le même dans L et dans L'.
Il existe aussi la notion d'entrelacs solides, qui correspond aux plongements de tores solides $S^1 \times D^2$ modulo reparamétrage, cette notion est en fait équivalente à celle d'entrelacs en bandes, le plongement étant déterminé à isotopie près par le plongement des bandes $S^1 \times [0,1] \subset S^1 \times D^2$.
Etant donné un noeud ou entrelacs L dans S^3, des arguments de transversalité assure que génériquement une projection plane L n'a qu'un nombre fini de points doubles et aucun point triple. La donnée de la projection plane et de la position relative des deux brins au niveau de chaque point double de la projection permet de déterminer l'entrelacs L, on appelle cette donnée un diagramme de l'entrelacs L. Les points doubles sont aussi appelés croisements du diagramme.
La théorie de la transversalité permet aussi de déterminer les singularités qui se produisent génériquement au niveau de la projection lorsqu'on effectue une isotopie de l'entrelacs L. On en déduit ainsi le théorème suivant:

Théorème 1.1. *(Reidemeister): Deux diagrammes d'entrelacs représentent le même entrelacs si on peut passer de l'un à l'autre par une succession d'isotopies planaires du diagramme et des mouvements de Reidemeister RI, RII et RIII, présentés à la Figure* **??**.

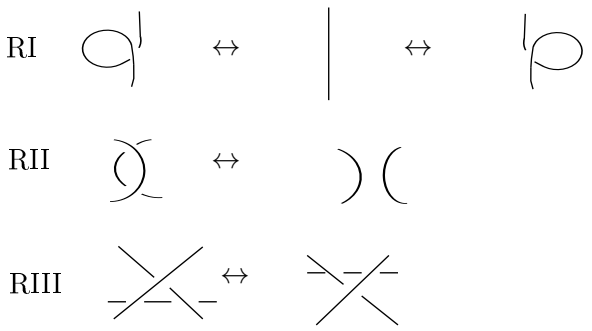


Figure 1: Mouvements de Reidemeister

Un diagramme d'entrelacs orienté est un diagramme d'entrelacs où l'on a choisi une orientation pour chaque composante. L'ajout de ces orientations détermine l'entrelacs orienté.
D'autre part, tout diagramme d'entrelacs peut également être vu comme le diagramme d'un entrelacs en bandes, il suffit pour cela d'épaissir les arcs dans la projection planaire en des bandes. Comme deux entrelacs en bande de même entrelacs sous-jacents ne diffèrent que par l'auto-enlacement de chaque composante, on en déduit que tout entrelacs en bandes admet un diagramme, et on obtient une version du théorème de Reidemeister pour les entrelacs en bandes. Notons que le mouvement RI du théorème de Reidemeister change l'auto-enlacement d'une composante, le résultat modifié est le suivant:

Théorème 1.2. *(Reidemeister): Deux diagrammes d'entrelacs en bandes représentent le même entrelacs si on peut passer de l'un à l'autre par une succession d'isotopie planaire du diagramme et des mouvements RII, RIII et du mouvement RI' ci-dessous:*

La question de la classification des noeuds et entrelacs a amené à la construction d'une multitude d'invariants: des quantités algébriques telles que des nombres, groupes, polynômes, complexes d'espaces vectoriels...associées aux noeuds ou entrelacs et qui ne

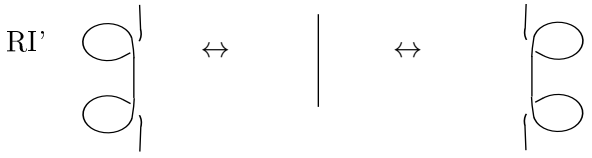


Figure 2: Mouvement de de Reidemeister RI' pour les entrelacs en bandes

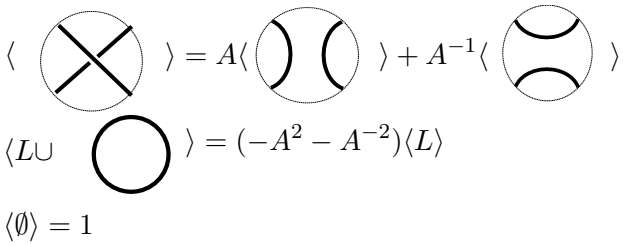


Figure 3: Les relations de Kauffman. La première relation fait intervenir trois entrelacs identiques sauf dans une petite boule où ils diffèrent comme indiqué sur le dessin. La deuxième relation correspond à la suppression d'une composante triviale disjointe du reste de l'entrelacs.

dépendent que de leurs classes d'isotopie. Jusqu'à la découverte du polynôme de Jones, ces invariants reposent sur des propriétés topologiques du complémentaire $E_L = S^3 \setminus L$ de l'entrelacs: ainsi le groupe de l'entrelacs n'est autre que le groupe fondamental $\pi_1(S^3 \setminus L)$, et le polynôme d'Alexander $\Delta(K)$ d'un noeud K est l'ordre du premier groupe d'homologie d'un certain revêtement cyclique du complémentaire E_K du noeud K.
En 1984, dans son célèbre article [**?**], Jones construit un nouvel invariant polynomial des noeuds et entrelacs, depuis appelé polynôme de Jones, qui ne correspond à aucune propriété topologique évidente du complémentaire E_L. Bien que sa construction repose sur l'étude de représentations de groupe de tresses dans des algèbres de Von Neumann, nous privilégierons ici une approche plus élémentaire basée sur le crochet de Kauffman.

Théorème et définition 1.1. *: Il existe un unique invariant des entrelacs en bandes $\langle\ \rangle$ à valeurs dans $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ qui vérifie les relations de Kauffman, représentées sur la Figure* **??**.

Preuve: En effet, on peut vérifier que la formule suivante définit une fonction sur les diagrammes de noeud vérifiant les relations ci-dessus:

$$\langle D \rangle = \sum_{s:c(D)\to\{\pm 1\}} A^{s(D)}(-A^2 - A^{-2})^{n(D_s)}$$

Ici $c(D)$ est l'ensemble des croisements du diagramme D. La somme est indexée par les applications s de $c(D)$ dans $\{\pm 1\}$, qu'on appelle états du diagramme. Ces états définissent chacun une résolution du diagramme, modification locale au niveau de chaque croisement définie dans la Figure **??**, définissant un diagramme sans croisement D_s. Enfin, $s(D)$ est la somme des valeurs de s et $n(D_s)$ est le nombre de composantes connexes du diagramme D_s.
Cette définition vérifie de manière immédiate les relations de Kauffman. Pour montrer que $\langle L \rangle$ est bien un invariant des entrelacs en bandes, il suffit alors d'après le théorème de Reidemeister de vérifier qu'il est invariant par les mouvements des Reidemeister RI', RII et

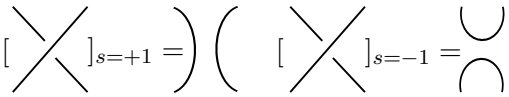


Figure 4: Résolution positive et négative d'un croisement du diagramme

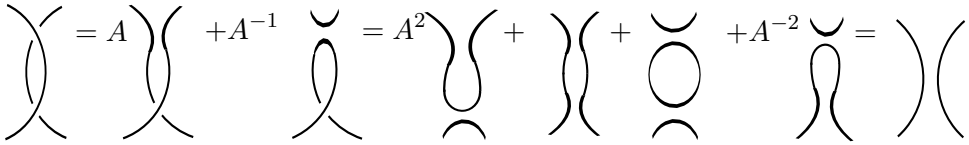


Figure 5: Le crochet de Kauffman est invariant par le mouvement de Reidemeister RII

RIII. Des calculs élémentaires permettent de vérifier qu'un polynôme vérifiant les relations de Kauffman est invariant par les mouvements de Reidemeister. Un exemple de calcul pour le mouvement RII est donné à la Figure **??**, les calculs pour les autres mouvements sont similaires. □

Le crochet de Kauffman n'est cependant pas invariant par le mouvement RI: on vérifie facilement que le mouvement RI change $\langle L\rangle$ en $(-A^3)^{\varepsilon}\langle L\rangle$, où ε désigne le signe du croisement qu'on a ajouté. Toutefois, nous remarquons que le crochet de Kauffman est très proche d'un invariant des entrelacs orientés: le polynôme de Jones. En effet, pour obtenir un invariant d'entrelacs à partir du crochet de Kauffman, introduisons le vrillage d'un diagramme orienté: le vrillage $v(D)$ est la somme des signes des croisements du diagramme orienté D, les signes des croisements étant définis sur la Figure **??**. On a alors:

Théorème et définition 1.2. *Pour D un diagramme de l'entrelacs orienté L on définit un polynôme $J(L) = \langle D\rangle(-A^3)^{-v(D)}$ où $v(D)$ est le vrillage du diagramme D. Ce polynôme ne dépend pas du diagramme choisi, c'est donc un invariant des entrelacs qu'on appelle le polynôme de Jones.*

L'invariance par mouvement RI est immédiate à vérifier, étant donné que RI augmente le vrillage de D de 1.
Le polynôme $J(L)$ est le polynôme de Jones de L, c'est un polynôme en A qu'on peut réexprimer en fonction de la variable $q = -A^2$.

1.2 Modules de Kauffman et idempotents de Jones-Wenzl

La notion de module de Kauffman ou module d'écheveau a été introduite indépendamment par Turaev [**?**] et par Przytycki [**?**]. Cette construction associe un $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ module à toute

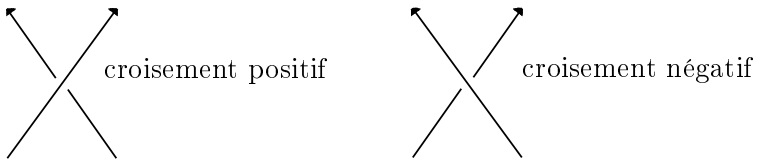


Figure 6: Signe des croisements

variété orientée compacte M, dont le bord ∂M contient une famille de points en bandes $(p_1, \ldots, p_n)$. Par un point en bandes dans une surface Σ, nous désignons un segment orienté plongé dans Σ.
Les modules de Kauffman associant des structures linéaires (des $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ modules) aux variétés, ils constituent un premier pas dans la direction de la construction d'une TQFT. De fait, on obtiendra les espaces $V_r(\Sigma)$ associés aux surfaces en prenant un certain quotient d'un module de Kauffman.

Définition 1.1. *Le module de Kauffman $K(M, A)$ d'une variété orientée compacte de dimension M munie d'une famille de points en bandes $(p_1, \ldots, p_n)$ est le $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$-module quotient du $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$-module libre engendré par les classes d'isotopie d'enchevêtrement dans M de bord $(p_1, \ldots, p_n)$, quotienté par les relations de Kauffman.*

Si z est un élément inversible d'un anneau R, on peut définir le module de Kauffman évalué en x comme un certain R-module par la formule

$$K(M, z) = K(M, A) \underset{\mathbb{Z}[A^{\pm 1}]}{\otimes} R$$

où le morphisme d'algèbre $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}] \to R$ est simplement l'évaluation de A en z. On utilisera souvent les modules de Kauffman évalué en $\zeta_r \in \mathbb{C}^*$ où ζ_r sera une racine $4r$-ème de l'unité, et aussi les modules de Kauffman évalué en $-e^{i\frac{\pi h}{2}} \in \mathbb{C}[[h]]$.

Le théorème sur l'unicité du crochet de Kauffman donné dans la partie précédente revient à dire que le module de Kauffman $K(S^3, A)$ est de dimension 1, engendré par l'entrelacs $\emptyset$.
Les modules de Kauffman de variétés difféomorphes peuvent être naturellement identifiés. De plus, les recollements de variétés induisent naturellement des opérations au niveau des modules de Kauffman: si une variété M est obtenue par recollement de variétés M_1 et M_2 le long d'une surface avec points en bandes (Σ, p_i) incluse dans leurs bords, alors l'inclusion des enchevêtrements induit une application bilinéaire:

$$\begin{array}{ccccc} K(M_1, A) & \times & K(M_2, A) & \to & K(M, A) \\ \gamma & , & \delta & \to & \gamma \cup \delta \end{array}$$

Notons que pour deux variétés M_1 et M_2 dont le recollement donne la sphère S^3 (par exemple deux corps en anses), comme $K(S^3, A) = \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$, le recollement induit une forme bilinéaire $\langle , \rangle : K(M_1, A) \times K(M_2, A) \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$.
D'autre part, pour les surfaces épaissies $\Sigma \times [0, 1]$, contenant éventuellement une famille de points en bandes, la décomposition $\Sigma \times [0, 1] = \Sigma \times [0, \frac{1}{2}] \cup \Sigma \times [\frac{1}{2}, 1]$ induit le produit d'empilement

$$\begin{array}{ccccc} K(\Sigma \times [0, \frac{1}{2}], A) & \times & K(\Sigma \times [\frac{1}{2}, 1], A) & \to & K(\Sigma \times [0, 1], A) \\ \gamma & , & \delta & \to & \gamma \cup \delta \end{array}$$

qui munit le module de Kauffman $K(\Sigma \times [0, 1], A)$ d'une structure d'algèbre. Ces modules de Kauffman des surfaces épaissies, particulièrement important dans notre étude, sont aussi notés abusivement $K(\Sigma, A)$.
Un cas particulier de telles algèbres de Kauffman est celui des anneaux épaissis, c'est-à-dire des tores solides, considérés sans points en bandes.

Proposition 1.3. *Le module de Kauffman du tore solide $S^1 \times D^2$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}[A, A^{-1}][z]$, par un isomorphisme qui envoie l'âme du tore solide $S^1 \times \{0\}$ sur l'indéterminée z.*

Preuve: On identifie D^2 à $[0,1] \times [0,1]$, c'est-à-dire qu'on voit le tore solide comme un anneau épaissi. Les entrelacs dans $S^1 \times D^2$ admettent des diagrammes d'entrelacs dans l'anneau $S^1 \times [0,1]$. Par les relations de Kauffman, en résolvant les croisements, on peut réduire tout entrelacs à une union disjointe de composantes triviales ou d'entrelacs parallèles à l'entrelacs $S^1 \times \{\frac{1}{2}\} \subset S^1 \times [0,1]$, puis on peut supprimer les composantes triviales. Le module de Kauffman du tore solide est donc engendré comme algèbre par l'entrelacs $z = S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$. Pour voir qu'il n'y a pas d'autre relation, il suffit de modifier la formule du crochet de Kauffman donnée dans la Section **??**. La somme sur les résolutions du diagramme doit être modifiée de la façon suivante:

$$\langle D \rangle = \sum_{s:c(D)\to\{\pm 1\}} A^{s(D)}(-A^2 - A^{-2})^{n(D_s)} z^{m(D_s)}$$

où $m(D_s)$ est le nombre de composantes parallèles à $S^1 \times \frac{1}{2}$ dans la résolution. $\square$

Définition 1.2. *Soit (Σ, p_i) une surface compacte connexe orientée avec une famille de points marqués $p_1, \ldots, p_n$. On appelle multicourbe dans (Σ, p_i) toute union disjointe de courbes simples qui ne rencontrent pas les points marqués $p_1, \ldots, p_n$.*

Un raisonnement similaire à celui que nous avons mené pour les tores solides permet de justifier que les classes d'isotopies de multicourbes sur (Σ, p_i) engendrent le module de Kauffman $K(\Sigma, p_i)$ et qu'elles forment une base de $K(\Sigma, p_i)$.
Le calcul du module de Kauffman des tores solides permet d'étendre le crochet de Kauffman d'un invariant des entrelacs solides en un invariant des entrelacs solides dont les composantes ont été coloriés par des polynômes dans $\mathbb{Z}[A, A^{-1}][z]$. En effet, on définit le crochet de Kauffman $\langle L, c \rangle$ de l'entrelacs L dont la composante L_i est coloriée par c_i de la façon suivante: la sphère S^3 peut-être obtenue en recollant les composantes de L qui sont difféomorphes à des tores solides à $S^3 \setminus L$. Ce recollement induit une application multilinéaire $K(D^2 \times S^1, A)^n \to K(S^3, A) = \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ où n est le nombre de composantes de L. L'image $\langle L, c \rangle$ de l'élément c est un invariant des entrelacs coloriés, cet invariant est appelé le multicrochet de Kauffman.

L'autre exemple important de module de Kauffman est celui des algèbres de Kauffman des disques à n points $K((D^2, p_1, \ldots, p_n), A)$ qui correspondent aussi aux modules de Kauffman de la boule avec $2n$ points en bande dans le bord. Ces algèbres sont aussi appelées algèbres de Temperley-Lieb et notées $TL_n(A)$. Quand on évalue le module de Kauffman en $A = \zeta_r$ une racine $4r$-ème de l'unité, on peut définir récursivement des éléments idempotents dans les algèbres $TL_n(\zeta_r)$.

Proposition 1.4. *La relation de récurrence donnée à la Figure **??** définit une suite d'éléments idempotents f_n qui vérifie*

- *$f_n \cdot e_i = e_i \cdot f_n = 0$ pour chacun des générateurs e_i de l'algèbre $TL_n(A)$.*
- *f_n est un élément idempotent de $TL_n(A)$.*

De plus, la relation de récurrence permet de définir les f_n dans $TL_n(\zeta_r)$ pour tout $n \leq r-1$ et on a $f_{r-1} = 0$.

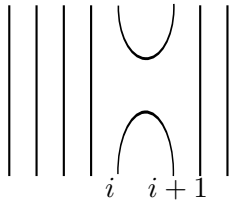


Figure 7: Le générateur e_i de l'algèbre $TL_n(A)$

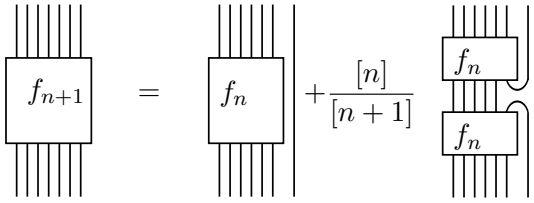


Figure 8: Relation de récurrence entre les idempotents de Jones-Wenzl. On a noté $[n] = \dfrac{A^{2n} - A^{-2n}}{A^2 - A^{-2}}$

Nous utilisons les idempotents de Jones-Wenzl pour introduire la notion de module de Kauffman d'une variété M avec des points dans le bord ∂M coloriés par des entiers dans $\{1, \ldots, r-1\}$.

Définition 1.3. *Soit M une variété de dimension 3 compacte orientée et $p_1, \ldots, p_n$ une famille de points en bandes dans le bord ∂M, $c_1, \ldots, c_n$ une famille d'entiers dans $\{1, \ldots, r-1\}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soient $q_i^1, \ldots q_i^{c_i}$ des points en bandes obtenus en prenant c_i sous-segments consécutifs de p_i. Le module de Kauffman $K(M, (p_i, c_i), \zeta_r)$ de la variété M avec points coloriés est l'image de l'application*

$$K(M, q_1^1, \ldots, q_n^{c_n}, \zeta_r) \to K(M, q_1^1, \ldots, q_n^{c_n}, \zeta_r)$$

donnée par le recollement d'un idempotent f_{c_i} sur un petit disque contenant les points $q_i^1, \ldots q_i^{c_i}$.

Avec cette définition, on a toujours la compatibilité du module de Kauffman avec le recollement des variétés avec points en bandes coloriés dans le bord, et $K(\Sigma, p_i, c_i)$ est une algèbre pour toute famille de points en bandes coloriés $(p_1, c_1), \ldots, (p_n, c_n)$.

Définition 1.4. *Une graphe trivalent en bandes dans une variété M de dimension 3, dont le bord contient des points en bandes marqués $p_1, \ldots, p_n$ est un graphe Γ dont tous les sommets sont univalents ou trivalents et contenu dans une surface $S\Gamma$ plongée dans M telle que*

- *$S\Gamma$ rencontre ∂M transversalement, en l'union des points marqués $p_1, \ldots, p_n$.*
- *$S\Gamma$ est un voisinage régulier de Γ dans $S\Gamma$, et $S\Gamma \cap \partial M$ est un voisinage régulier de $\Gamma \cap \partial M$ dans $S\Gamma \cap \partial M$.*

A l'aide des idempotents de Jones-Wenzl, nous associons des éléments des modules de Kauffman aux graphes trivalents en bandes coloriés. Soit M une variété de dimension 3 compacte orientée, avec points en bandes coloriés $(p_i, \hat{c}_i)$ dans le bord. Soit Γ un graphe

trivalents en bandes dans M. Un coloriage de Γ est une application $c : E \to \{1, \ldots, r-1\}$ où E est l'ensemble des arêtes de Γ et telle que l'arête adjacente à p_i est coloriée par $\hat{c}_i$. Nous définissons un élément $(\Gamma, c)_r$ de $K(M, (p_i, \hat{c}_i), \zeta_r)$. Pour cela, prenons $c_e - 1$ copies parallèles de chaque arête e (vue comme une courbe dans la surface $S\Gamma$) et insérons au milieu l'idempotent f_{c_e-1}. Au niveau des sommets trivalents, on relie les différentes bandes de l'unique manière qui évite les croisements. Ceci est possible si $c_e \in \{1, \ldots, r-1\}$ et pour tout triplet (e, f, g) de courbes adjacentes à un même sommet on a

- $c_e < c_f + c_g$, $c_f < c_e + c_g$ et $c_g < c_e + c_f$
- $c_e + c_f + c_g$ est impair

De plus, le corollaire 4.3 de [?] montre que l'élément de $K(M, (p_i, \hat{c}_i, \zeta_r)$ obtenu est nul sauf si on a au niveau de chaque sommet $c_e + c_f + c_g < 2r$. Un coloriage du graphe Γ vérifiant toutes ces conditions est appelé coloriage r-admissible.
Enfin, les idempotents de Jones-Wenzl permettent de définir des éléments spécifiques dans les modules de Kauffman $K(D^2 \times S^1, \zeta_r)$ des tores solides.

Définition 1.5. *Soit ζ_r une racine $4r$-ème de l'unité et notons γ l'entrelacs $\{0\} \times S^1$ dans $D^2 \times S^1$. L'élément de $K(D^2 \times S^1, \zeta_r)$ défini par la formule $\omega = \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{i-1} [i](\gamma, i)_r$ est appelé élément de Kirby.*

Ces éléments vérifient la propriété remarquable suivante:

Proposition 1.5. *Le multicrochet de Kauffman est invariant par l'opération de glissement d'une composante de l'entrelacs par rapport à une composante coloriée par la couleur de Kirby ω, comme expliqué dans la figure ci-dessous:*

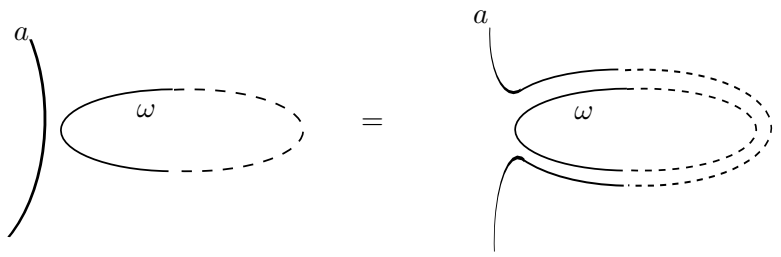


Figure 9: Le multicrochet de Kauffman est invariant par l'opération de glissement

Le multicrochet de Kauffman d'un entrelacs dont toutes les composantes sont coloriées par ω sera alors invariant par glissement de n'importe quelle composante de l'entrelacs sur n'importe quelle autre. Nous allons voir dans la partie suivante le lien entre l'opération de glissement et la théorie de la chirurgie.

1.3 Chirurgie et mouvements de Kirby

La théorie de la chirurgie permet d'encoder les variétés topologiques compactes orientables de dimension 3 par la donnée d'entrelacs dans la sphère S^3.
Etant donné un noeud solide K dans une variété M fermée de dimension 3, on peut construire une nouvelle variété $M(K)$ de la façon suivante: $M \setminus K$ est une variété de dimension 3 à bord, de bord ∂K qui est homéomorphe au tore $S^1 \times S^1$. On peut choisir

un tel homéomorphisme qui envoie un méridien de K sur $S^1 \times \{1\}$. On obtient une variété de dimension 3 fermée en recollant le long de ∂K une copie de $D^2 \times S^1$ qui a aussi pour bord $S^1 \times S^1$. En utilisant le recollement trivial, on obtiendrait de nouveau la variété M, en revanche, en utilisant comme homéomorphisme de recollement l'échange des facteurs $S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$, on obtient a priori une nouvelle variété $M(K)$. On dit que $M(K)$ est obtenue par chirurgie de M par rapport à K ou que (M, K) est une présentation par chirurgie de $M(K)$. On peut réaliser le même procédé pour un entrelacs en bandes L dans M, il suffit de faire de telles chirurgies composante par composante.

Théorème 1.3. *[?][?] Toute variété compacte connexe orientable M admet une présentation par chirurgie $M = S^3(L)$ où L est un entrelacs en bandes dans S^3.*

Ce résultat a été prouvé indépendamment par Lickorish [**?**] et Wallace [**?**]. La preuve de Lickorish repose sur deux faits: toute variété connexe compacte orientable de dimension 3 admet un scindement de Heegaard: $M = H \underset{\Sigma}{\cup} H'$ où H et H' sont des corps en anses de bord Σ, une surface connexe compacte orientable. L'existence d'un tel scindement repose sur la théorie de Morse: la surface Σ peut être vue comme ligne de niveau d'une fonction de Morse f sur M, et les corps en anses sont obtenus par attachement successifs d'anses en correspondance avec les points critiques de f.
D'autre part, Lickorish prouve que le groupe des difféotopies d'une surface Σ est engendré par les twists de Dehn. Enfin, il suffit d'expliciter une chirurgie reproduisant l'effet d'un twist de Dehn.

Etant donné que toute variété de dimension 3 peut être présentée par une chirurgie sur S^3, il est naturel de se demander quels entrelacs dans S^3 produisent par chirurgie des variétés difféomorphes. Des arguments de transversalité comme dans la preuve du théorème de Reidemeister permettent de résoudre cette question: de tels entrelacs sont reliés par certains mouvements, introduits par Kirby dans [**?**]. Plus exactement, la preuve de Kirby utilise la théorie de Cerf en dimension 4 pour déterminer quelles singularités peuvent apparaître lorsqu'on considère une famille de présentations de chirurgie de M. Il obtient le résultat suivant:

Théorème 1.4. *[?]: Deux variétés obtenues par chirurgie $S^3(L)$ et $S^3(L')$ sont difféomorphes si et seulement si les diagrammes de L et L' peuvent être reliés par une suite d'isotopies planaires, de mouvements de Reidemeister RI', RII et RIII et des mouvements KI et KII de la Figure* **??**.

Le mouvement KI s'appelle le glissement de la composante L_i de l'entrelacs le long de la composante L_j, il consiste à remplacer la composante L_i de l'entrelacs par L'_i qui est la somme connexe des composantes L_i et L_j. Le mouvement KII est l'ajout d'une composante triviale d'auto-enlacement ± 1 disjointe du reste de l'entrelacs. Nous renvoyons à [**?**] pour la preuve.

Il est à noter que le choix d'une présentation de chirurgie $M = S^3(L)$ pour une variété de dimension 3 orientable connexe compacte fournit également une variété de dimension 4 à bord W_L telle que $\partial W_L = M$. Notons $L_1, \ldots, L_n$ les composantes de l'entrelacs L. La variété W_L est construite de la façon suivante: on part d'une boule B^4 de dimension 4 dont le bord est une sphère S^3 et on lui attache n anses d'indice 2 $D^2 \times D^2$ en recollant $(\partial D^2) \times D^2 = S^1 \times D^2$ sur une composante L_i de l'entrelacs solide L. Le bord de W_L est alors obtenu par chirurgie de S^3 par rapport à l'entrelacs L, donc isomorphe à M.
Le calcul de l'homologie de W_L aboutit au résultat suivant:

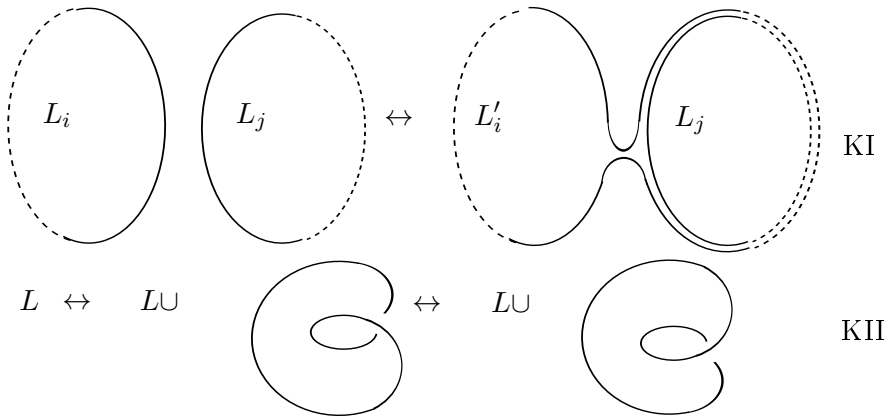


Figure 10: Mouvements de Kirby

Proposition 1.1. *Soit L un entrelacs dans S^3, M la variété de dimension 3 obtenue par chirurgie par rapport à L et W_L la variété de dimension 4 de bord M associée à la présentation de chirurgie $M = S^3(L)$. Alors:*

- *$H_k(W_L, \mathbb{Z})$ est nul sauf pour $k = 0$ et $k = 2$. $H_2(W_L, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ où n est le nombre de composantes de L. Une base de $H_2(W_L, \mathbb{Z})$ est donnée par les $[L_i]_{i=1,\dots,n}$, où L_i est une surface de bord l'âme $\{0\} \times S^1 \subset L_i$ de la i-ème composante de L.*

- *$H_k(W_L, M, \mathbb{Z})$ est nul sauf pour $k = 2$ et $k = 4$. $H_2(W_L, M, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ et une base de $H_2(W_L, \mathbb{Z})$ est donnée par les $[D_i]_{i=1,\dots,n}$, où D_i est un disque méridien dans la i-ème anse.*

- *Dans les bases précédentes, la matrice de la forme d'intersection*

$$H_2(W_L, \mathbb{Z}) \times H_2(W_L, M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

  est la matrice d'enlacement B_L de coefficients

$$(B_L)_{i,j} = e(L_i, L_j), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}^2$$

  où $e(L_i, L_j)$ est l'enlacement des noeuds (orientés) L_i et L_j dans M (ou bien l'auto-enlacement quand $i = j$).

Remarquons que le mouvement de Kirby KI ne change pas la signature de B_L: en effet son action remplace la matrice d'entrelacement B_L par $M^T B_L M$ où M est une matrice de transposition. D'autre part, le mouvement KII ajoute ± 1 à la signature (suivant que la composante qu'on rajoute à l'entrelacs est d'auto-enlacement ± 1).

1.4 Invariants de Reshetikhin-Turaev

Le calcul de Kirby, qui permet de représenter une variété de dimension 3 par une certaine classe d'équivalence d'entrelacs dans S^3 ouvre une approche intéressante pour construire des invariants de variétés de dimension 3: il suffit de construire un invariant $I(L)$ des entrelacs en bandes qui soit invariant par les mouvements de Kirby KI et KII, et l'invariant $I(L)$ sera un invariant par difféomorphisme de la variété $S^3(L)$.
On fixe ζ_r une racine $4r$-ème de l'unité. Nous avons vu à la fin de la Section **??** que le

multicrochet d'un entrelacs dont les composantes sont coloriées par la couleur de Kirby est invariant par le mouvement KI de glissement. Il suffit alors pour obtenir un invariant de renormaliser pour obtenir une quantité invariante par le mouvement KII.
Pour L un entrelacs à n composantes on note $\langle L, \omega^{\otimes n}\rangle$ le multicrochet de L avec chaque composante coloriée par ω. De même, pour (Γ, c) un graphe trivalent en bandes dans S^3 colorié par une couleur r-admissible, l'élément $(\Gamma, c)_r$ de $K(S^3, \zeta_r)$ défini dans la Section **??** est un nombre complexe qu'on note simplement $\langle \Gamma, c\rangle$.
Pour L un entrelacs, on note $(b_+(L), b_0(L), b_-(L))$ la signature de la matrice d'entrelacement B_L. Notons en outre U, U_+ et U_- les noeuds triviaux dans S^3 avec auto-enlacement 0, 1 et -1 respectivement. On introduit le nombre complexe D tel que $\langle U, \omega\rangle = D^2$. On note enfin $\kappa = e^{\frac{3i\pi}{4} - \frac{3i\pi}{2r}}$.
Un calcul [**?**] permet en fait de montrer que

$$\langle U, \omega\rangle = D^2 = \frac{r}{2\sin^2(\frac{\pi}{r})}$$

et

$$\langle U_\varepsilon, \omega\rangle = D\kappa^\varepsilon$$

Théorème 1.5. *[?][?] Pour M une variété compacte connexe orientée sans bord de dimension 3 et m un entier. Soit (Γ, c) un graphe trivalent en bandes colorié dans M, soit L un entrelacs tel que $M = S^3(L)$ et $\sigma(L) = m$ et $\Gamma' \subset S^3 \setminus L$ isotope à Γ. La quantité*

$$Z_r(M, m, \Gamma, c) = D^{-b_0(M)-b_1(M)}\kappa^m \frac{\langle L \cup \Gamma', \omega^{\otimes n} \cup c\rangle}{\langle U_+, \omega\rangle^{b_+}\langle U_-, \omega\rangle^{b_-}}$$

est un invariant de difféomorphisme de (M, m, Γ, c). De plus, on a les valeurs

$$Z_r(S^2 \times S^1, 0, \emptyset) = 1 \quad \textit{et} \quad Z_r(S^3, 0, \emptyset) = \frac{1}{D}$$

Preuve : Ce résultat découle de la propriété d'invariance du multicrochet de Kauffman par glissement sur les composante coloriées par ω, qui assure l'invariance par le mouvement KI. De plus, comme l'ajout d'une composante $U_\pm$ disjointe de L augmente $b_\pm$ de 1 et multiplie le multicrochet par $\langle U_\pm, \omega\rangle_r$, le mouvement KII multiplie l'invariant par $\kappa^{\pm 1}$. Les valeurs de l'invariant pour $S^2 \times S^1$ et S^3 se calculent en utilisant le fait que la première variété est obtenue par chirurgie sur un noeud trivial U, et la seconde par chirurgie sur l'entrelacs vide. □

L'invariant Z_r, défini pour les variétés connexes, peut être étendu aux variétés non connexes en posant $Z_r(\coprod_i M_i) = \prod_i Z_r(M_i)$. On obtient alors un invariant multiplicatif et symétrique: si $\overline{M}$ est la variété $M = S^3(L)$ munie de l'orientation opposée, cette variété est obtenue par chirurgie sur l'entrelacs miroir de L, et on a $Z_r(\overline{M}, -n) = \overline{Z_r(M, n)}$.

1.5 Axiomatique des TQFT

Nous avons déjà évoqué le fait que les TQFT sont définies comme étant certains foncteurs entre des catégories de cobordismes et une catégorie d'espaces vectoriels. Bien qu'il soit possible de définir des TQFT à valeurs dans les espaces vectoriels sur k pour tout corps k, voire dans les modules sur un anneau A, nous n'étudierons que des TQFT à valeurs dans les espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Plusieurs types de catégories de cobordismes peuvent être définies.

Rappelons d'abord qu'un cobordisme lisse entre deux variétés M et M' lisses orientées compactes de dimension n est une variété lisse W de dimension $n+1$ dont le bord est décomposé comme union disjointe $\partial W = -M \sqcup M'$ où $-M$ est difféomorphe à la variété M et munie de l'orientation opposée. On note un tel cobordisme (W, M, M').
On construit une relation d'équivalence sur les cobordismes: deux cobordismes (W, M, M') et (W', M, M') sont équivalents s'il existe un difféomorphisme préservant l'orientation $\Phi : W \to W'$ tel que $\Phi|_{\partial W} = \mathrm{id}_{\partial W}$.
Si l'on dispose de deux cobordismes (W, M_0, M_1) et (W', M_1, M_2), on peut construire leur recollement $(W \underset{M_1}{\cup} W', M_0, M_2)$ qui est un cobordisme entre M_0 et M_2. L'application de recollement est compatible avec la relation d'équivalence sur les cobordismes. De plus pour toute surface Σ, le cobordisme produit $\Sigma \times [0,1]$ fait office d'élément neutre pour l'opération de recollement. On peut à présent définir la catégorie $n-\mathrm{Cob}$ des cobordismes en dimension $n+1$:

Définition 1.6. *La catégorie $n-\mathrm{Cob}$ des cobordismes en dimension $n+1$ est la catégorie dont les objets sont les variétés différentielles orientées compactes de dimension n, l'ensemble des morphismes entre deux variétés M et M' est l'ensemble des classes d'équivalence de cobordisme (W, M, M'), et la composition entre morphismes est donnée par l'application de recollement.*

Les invariants de Reshetikhin-Turaev ne s'étendent malheureusement pas exactement en une TQFT sur la catégorie $3-\mathrm{Cob}$, mais seulement en une TQFT projective, où la composition des cobordismes ne correspond à la composition des applications linéaires qu'à un facteur multiplicatif près appelé anomalie. Nous aurons donc besoin d'introduire une autre catégorie de cobordismes: la catégorie des cobordismes étendus, sur laquelle on pourra étendre les invariants de Reshetikhin-Turaev en un foncteur de TQFT.
La catégorie des cobordismes étendus est définie de la façon suivante: les objets sont des surfaces étendues (Σ, L), c'est-à-dire des couples formés d'une surface Σ et d'un sous-espace $L \subset H_1(\Sigma, \mathbb{R})$ lagrangien pour la forme d'intersection sur $H_1(\Sigma, \mathbb{R})$. Les morphismes entre (Σ_0, L_0) et (Σ_1, L_1) sont des cobordismes étendus: couples (M, n) formé d'un cobordisme (M, Σ_0, Σ_1) entre Σ_0 et Σ_1 et d'un entier n. On peut aussi envisager les cobordismes étendus (M, n) comme des classes d'équivalence de variétés W de dimension 4 de bord M, la relation d'équivalence étant donnée par l'égalité des signatures. De même, une surface étendue (Σ, L) peut être vue comme une classe d'équivalence de variétés N de dimension 3 avec $\partial N = \Sigma$ et la relation d'équivalence est donnée par le fait d'avoir même noyau pour l'application induite en homologie par l'inclusion: $H_1(\Sigma, \mathbb{R}) \to H_1(N, \mathbb{R})$. En particulier, il faut noter que la donnée d'une présentation de chirurgie $M = S^3(L)$ munit M d'une structure étendue: la signature de la variété W_L (qui n'est autre que la signature de la forme d'intersection B_L de l'entrelacs).
Le calcul de la signature d'un recollement nous amène à introduire la notion d'indice de Maslov:

Définition 1.7. *Soient L_-, L_0 et L_+ trois sous-espaces lagrangiens d'un espace symplectique réel (H, ω) de dimension finie, l'indice de Maslov $\mu(L_-, L_0, L_+)$ est la signature de la forme bilinéraire symétrique $\langle , \rangle$ définie sur $E = \{(a_-, a_0, a_+) \in L_- \times L_0 \times L_+ \ / \ a_- + a_0 + a_+ = 0\}$ par $\langle a, b \rangle = \omega(a_-, b_0)$*

Théorème 1.6. *(Wall) Soient W une variété de dimension 4 obtenue par recollement de W_- et W_+ le long d'une partie de leur bord:*
$\partial W_- = -M_- \underset{\Sigma}{\cup} M_0$, $\partial W_+ = -M_0 \underset{\Sigma}{\cup} M_+$ avec $\partial M_- = \partial M_0 = \partial M_+ = \Sigma$. Alors la

signature $\sigma(W)$ de W est donnée par la formule $\sigma(W) = \sigma(W_-) + \sigma(W_+) - \mu(L_-, L_0, L_+)$ où $L_\varepsilon = \mathrm{Ker}(H_1(\Sigma, \mathbb{R}) \to H_1(M_\varepsilon, \mathbb{R})$.

Le théorème de Wall permet de définir la bonne notion de recollement de cobordismes étendus. Etant donné deux cobordismes étendus $((M, n), (\Sigma_0, L_0), (\Sigma_1, L_1))$ et $(M', n'), (\Sigma_1, L_1), (\Sigma_2, L_2))$ leur recollement est le cobordisme $((M \underset{\Sigma_1}{\cup} M', n + n' - \mu(L_-, L_1, L_+), (\Sigma_0, L_0), (\Sigma_2, L_2))$, où $L_- = (i_{1*})^{-1}(i_{0*}(L_0))$ et $L_+ = (j_{1*})^{-1}(j_{2*}(L_2))$ avec i_ε (resp. j_ε) inclusion de Σ_ε dans M (resp. M'). L'entier associé au recollement correspond exactement à la formule de Wall pour le calcul de la signature, et donc la composition des cobordismes étendus est bien associative.
Il sera utile dans les définitions suivantes d'autoriser dans la catégorie des cobordismes étendus la présence d'entrelacs en bandes, ou de graphes trivalents en bandes. Le bord de ces graphes trivalents en bandes dans une variété M sera une union de points en bande dans ∂M.

Définition 1.8. *Les objets de la catégorie $3 - \widetilde{\mathrm{Cob}}$ sont les surfaces étendues avec points en bandes (Σ, L, p_i). Les morphismes entre deux surfaces étendues (Σ, L, p_i) et (Σ', L', p'_j) seront les cobordismes étendus (M, n, Γ) où Γ est un graphe trivalent en bandes dans M dont le bord est l'union des $p_i \subset \Sigma$ et des $p'_j \subset \Sigma'$.*

Définition 1.9. *On appelle TQFT de dimension $2 + 1$ un foncteur V de la catégorie $3 - \mathrm{Cob}$ ou $3 - \widetilde{\mathrm{Cob}}$ vers la catégorie des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie vérifiant les propriétés suivantes:*

- *(Naturalité) Chaque difféomorphisme entre deux surfaces Σ et Σ' induit un isomorphisme $g_* : V(\Sigma) \to V(\Sigma')$. De plus, ces isomorphismes sont compatibles avec les applications linéaires définies par les cobordismes: pour tout difféomorphisme (h, g, g') entre deux cobordismes $(M_0, \Sigma_0, \Sigma'_0)$ et $(M_1, \Sigma_1, \Sigma'_1)$ on a*

$$V(M_1) = g'_* \circ V(M_0) \circ g_*^{-1}$$

- *(Fonctorialité) Pour tout recollement $M = M' \underset{\Sigma_1}{\cup} M''$ de deux cobordismes (M', Σ_0, Σ_1) et $(M'', \Sigma_1, \Sigma_2)$ on a*

$$V((M, \Sigma_0, \Sigma_2)) = V((M'', \Sigma_1, \Sigma_2) \circ V((M', \Sigma_0, \Sigma_1))$$

- *(Normalisation) Un cobordisme produit agit par l'identité:*

$$V(\Sigma \times [0, 1], \Sigma, \Sigma) = \mathrm{Id}_{V(\Sigma)}$$

- *(Multiplicativité) Il existe des isomorphismes fonctoriels*

$$V(\Sigma \coprod \Sigma') \simeq V(\Sigma) \otimes V(\Sigma'), \quad V(\emptyset) \simeq \mathbb{C}$$

  compatibles avec les isomorphismes

$$V(\Sigma \coprod (\Sigma' \coprod \Sigma'') \simeq V((\Sigma \coprod \Sigma') \coprod \Sigma''), \quad V(\Sigma \coprod \emptyset) \simeq V(\Sigma)$$

- *(Symétrie) L'isomorphisme $V(\Sigma \coprod \Sigma') \simeq V(\Sigma' \coprod \Sigma)$ est compatible avec l'isomorphisme $V(\Sigma) \otimes V(\Sigma') \simeq V(\Sigma') \otimes V(\Sigma)$*

Si M est une variété compacte sans bord de dimension 3, M peut être considéré comme un cobordisme de $\emptyset$ vers $\emptyset$, donc $V(M) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$. Le foncteur V restreint aux variétés de dimension 3 sans bord constitue alors une fonction à valeur complexe sur les classes de difféomorphismes de variétés de dimension 3, c'est-à-dire un invariant complexe des variétés de dimension 3. De plus la propriété de multiplicativité de la TQFT assure la multiplicativité de l'invariant par unions disjointes.

1.6 Construction universelle

Si l'on se donne un invariant I des variétés de dimensions 3 à valeurs dans $\mathbb{C}$ et symétrique (tel que $I(\overline{M}) = \overline{I(M)}$), il est toujours possible de définir des espaces vectoriels $V(\Sigma)$ et d'associer des applications linéaires $V(M) : V(\Sigma) \to V(\Sigma')$ aux cobordismes (M, Σ, Σ') de façon à vérifier certain des axiomes d'une TQFT étendant l'invariant I. Cette construction, introduite dans [?], est appelée construction universelle.
Etant donnée une surface Σ, on considère l'espace vectoriel $\mathcal{V}(\Sigma)$ engendré par les classes de difféomorphismes de variétés M de dimension 3 telles que $\partial M = \Sigma$. On dispose d'une forme sesquilinéaire $\langle , \rangle$ sur cet espace: pour M et M' de bord Σ, on pose $\langle M, M' \rangle = I(\overline{M} \underset{\Sigma}{\cup} M')$ et on étend par sesquilinéarité. Alors on peut définir

$$V(\Sigma) = \mathcal{V}(\Sigma)/\mathrm{Ker}(\langle , \rangle)$$

Le recollement d'un cobordisme (M, Σ, Σ') définit une application linéaire naturelle de $\mathcal{V}(\Sigma)$ dans $\mathcal{V}(\Sigma')$. Cette application passe au quotient en $V(M) : V(\Sigma) \to V(\Sigma')$.
Cette construction vérifie de manière automatique les propriétés de naturalité, fonctorialité et de normalisation parmi les axiomes énoncés plus haut. En revanche, les espaces vectoriels $V(\Sigma)$, obtenus par quotient d'un espace vectoriel de dimension infinie, ne sont a priori pas de dimension finie. Plus fondamentalement, la propriété de multiplicativité n'est pas forcément vérifiée, on a en général seulement une injection $V(\Sigma) \otimes V(\Sigma') \to V(\Sigma \coprod \Sigma')$, car il existe des bordismes de $\Sigma \coprod \Sigma'$ connexes. Ces bordismes ne sont alors pas nécessairement dans l'image de l'application ci-dessus.
Notons que la finitude de la dimension des espaces $V(\Sigma)$ est automatique si la propriété de multiplicativité est vérifiée. En effet, dans ce cas, on trouve que $\mathrm{Id}_{V(\Sigma)} \in \mathrm{End}(V(\Sigma))$, qui est l'image du cobordisme produit $[0,1] \times \Sigma$ appartient à $V(\Sigma) \otimes V(\Sigma)^*$. Ceci n'est possible que si $V(\Sigma)$ est de dimension finie.
Dans [?], les auteurs utilisent les propriétés de compatibilité des invariants Z_r avec les opérations de chirurgie pour montrer qu'ils peuvent s'étendre en une TQFT. Nous avons déjà expliqué l'opération de chirurgie d'une variété par rapport à un noeud, qu'on appelle aussi chirurgie d'indice 2. On a aussi la notion de chirurgie d'indice 1: M' est obtenue à partir de M par chirurgie d'indice 1 s'il existe deux boules B_1 et B_2 plongées dans M telles que $M' \simeq (M \setminus (B_1 \coprod B_2)) \underset{S^2 \coprod S^2}{\cup} (S^2 \times [0,1])$.
Dans [?], il est montré que les invariants Z_r satisfont les axiomes suivants:

Proposition 1.6. - *(Axiome S1) Il existe une constante D telle que si M' est obtenue à partir de M par chirurgie d'indice 1 alors $Z_r(M', n) = DZ_r(M, n)$*

- *(Axiome S2) Il existe une combinaison linéaire d'entrelacs en bandes dans $D^2 \times S^1$ notée $\omega = \sum \lambda_i L_i$ telle que si M' est obtenue de M par chirurgie d'indice 2 sur un noeud solide L alors on a $Z_r(M') = \sum \lambda_i Z_r(M, \phi(L_i))$ où ϕ est le plongement $D^2 \times S^1 \to M$ défini par L.*

Preuve : L'axiome S2 est vérifié de manière tautologique du fait de la définition de Z_r comme multicrochet d'une présentation de chirurgie coloriée par l'élément de Kirby. Pour voir que Z_r vérifie l'axiome S1, il faut remarquer le fait suivant: soit M' une variété obtenue par chirurgie d'indice 1 sur une variété M présentée par chirurgie $M = S^3(L)$. Soit L' l'entrelacs obtenue en rajoutant à l'etrelacs L une composante triviale disjointe de L, alors on a $M' = S^3(L')$. Comme $b_1(M') = b_1(M) + 1$, et $\langle L \cup U, \omega\rangle_r = D^2\langle L, \omega\rangle$, on a bien $Z_r(M') = DZ_r(M)$.

Les axiomes S1 et S2 sont suffisants pour pouvoir définir une TQFT:

Théorème 1.7. *[?] Lorsqu'on applique la construction universelle à un invariant I des variétés de dimension 3 multiplicatif, symétrique et vérifiant les axiomes S1 et S2, on obtient une TQFT sur la catégorie $3 - \widetilde{\mathrm{Cob}}$.*

L'article [?] déduit de ces axiomes que pour toute surface orientée Σ les espaces $V(\Sigma)$ fournis par la construction universelle sont de dimension finie, et donne leur dimension. Il faut en outre vérifier que la construction satisfait l'axiome de multiplicativité $V(\Sigma \coprod \Sigma') = V(\Sigma) \otimes V(\Sigma')$. L'idée de la preuve de la multiplicativité consiste à utiliser les axiomes de chirurgie pour montrer que tout cobordisme (M, L) avec $\partial M = \Sigma \coprod \Sigma'$ est équivalent à une combinaison linéaire de cobordismes produits $(M_1 \coprod M_2, L_1 \cup L_2)$. D'autre part, la finitude de la dimension de $V(\Sigma)$ avec Σ connexe consiste à utiliser les axiomes de chirurgie pour montrer que $V(\Sigma)$ est engendré par les $V(H, L)$ où H corps en anses de bord Σ. Puis, on choisit une décomposition en pantalons de Σ par des courbes qui bordent des disques dans H et qui découpent H en une union de boules. L'axiome de chirurgie S2 permet de montrer pour engendrer $V(\Sigma)$ il suffit de prendre des entrelacs dont le nombre de points d'intersection avec chacun de ces disques est borné, ce qui montre ainsi la finitude de $\dim(V(\Sigma))$. Nous référons à [?] pour la preuve complète.

1.7 Bases, opérateurs courbes et valeurs propres

Dorénavant, on note $V_r(\Sigma)$ les espaces associés à la surface Σ par la construction de [?] appliquée aux invariants de Reshetikhin-Turaev Z_r et V_r le foncteur de TQFT en général. Notons que nous oublions abusivement de préciser la structure étendue (Σ, L) sur Σ, ceci ne posera pas problème car nous ne ferons pas varier cette structure.
Rappelons que la construction de [?] munit les espaces vectoriels $V_r(\Sigma)$ de formes sesquilinéaires naturelles:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V_r(\Sigma) \times V_r(\Sigma) \to \mathbb{C}$$

De plus, il est montré dans [?] que cette forme sesquilinéaire est hermitienne pour le choix de racine de l'unité $\zeta_r = -e^{\frac{i\pi}{2r}}$. C'est le choix de racine de l'unité que nous ferons dans toute la suite.

D'autre part, dans le cas de TQFT obtenues à partir des invariants Z_r, les raisonnements de la partie précédente montrent que les espaces $V_r(\Sigma, (p_i, \hat{c}_i))$ sont les quotients des modules de Kauffman $K(H, (p_i, \hat{c}_i), \zeta_r)$ où H est un corps en anses de bord Σ par le noyau de la forme sesquilinéaire $K(H, (p_i, \hat{c}_i), \zeta_r) \times K(H, (p_i, \hat{c}_i), \zeta_r) \to K(S^3, \zeta_r) = \mathbb{C}$.
Soit $\mathcal{C} = \{C_e, e \in E\}$ une famille de courbes qui décompose Σ en pantalons et en petits disques contenant chacun un point colorié. On dit qu'un graphe en bandes Γ plongé dans Σ, avec sommets trivalents ou univalents est dual à la décomposition $\mathcal{C}$ si Γ comporte un sommet trivalent dans chaque pantalon, a pour sommet univalent p_i dans le disque contenant p_i et chaque arête intersecte une unique courbe C_e, et ce en un seul segment.

Soit maintenant H un corps en anses de bord Σ dans lequel chaque C_e borde un disque. On peut pousser le graphe Γ dans H pour avoir $\Gamma \cap \Sigma = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Nous avons vu dans la Section **??** qu'à tout coloriage r-admissible de Γ on peut associer un élément $(\Gamma, c)_r \in K(H, (p_i, \hat{c}_i), \zeta_r)$. On note ψ_c son image dans $V_r(\Sigma, (p_i, \hat{c}_i))$.

Théorème 1.8. *[?] $\{\psi_c,\ c$ coloriage r-admissible$\}$ est une base orthogonale de $V_r(\Sigma)$. Soit P l'ensemble des sommets de Γ, et E celui des arêtes. Pour $n \in \mathbb{R}$, on pose $\langle n \rangle = \sin(\frac{\pi n}{r})$, $\langle n \rangle! = \prod_{i=1}^{n} \langle i \rangle$, on note c_s^1, c_s^2, and c_s^3 les couleurs des arêtes adjacentes à s, et enfin pour $a, b, c \in \mathbb{N}$ on pose*

$$\langle a, b, c \rangle = \frac{\langle \frac{a+b+c-1}{2} \rangle! \langle \frac{a+b-c-1}{2} \rangle! \langle \frac{a-b+c-1}{2} \rangle! \langle \frac{b+c-a-1}{2} \rangle!}{\langle a-1 \rangle! \langle b-1 \rangle! \langle c-1 \rangle!}$$

Alors on a

$$||\psi_c||^2 = \left(\frac{2}{r}\right)^{\frac{\chi(\Gamma)}{2}} \frac{\prod_{s \in P} \langle c_s^1, c_s^2, c_s^3 \rangle}{\prod_{e \in E} \langle c_e \rangle}$$

Les vecteurs $\varphi_c = \frac{\psi_c}{||\psi_c||}$ forment alors une base orthonormale de $V_r(\Sigma, (p_i, \hat{c}_i), \zeta_r)$. Nous référons encore à [**?**] pour la preuve de ce théorème.

Pour finir cette partie d'introduction de la TQFT, nous introduisons des opérateurs $T_r^\gamma \in \mathrm{End}(V_r(\Sigma, (p_i, \hat{c}_i), \zeta_r))$ associés aux multicourbes sur Σ qui vont jouer un rôle important dans la suite. On rappelle qu'une *multicourbe* sur une surface avec points en bandes $(\Sigma, p_1, \ldots, p_n)$ est une union disjointe de courbes simples dans $\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Définition-proposition 1.7. *Pour toute multicourbe γ sur Σ, ou plus généralement $\gamma \in K(\Sigma, (p_i, \hat{c}_i), \zeta_r)$, on appelle opérateur courbe associé à γ l'endomorphisme*

$$T_r^\gamma = V_r(\Sigma \times [0,1], \gamma) \in \mathrm{End}(V_r(\Sigma, (p_i, \hat{c}_i)))$$

De plus, l'application

$$\begin{array}{rcl} K(\Sigma, (p_i, \hat{c}_i), \zeta_r) & \to & \mathrm{End}(V_r(\Sigma, (p_i, \hat{c}_i))) \\ \gamma & \to & T_r^\gamma \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres. En particulier, les opérateurs courbes associés à des multicourbes disjointes commutent.

D'autre part, les opérateurs courbes associés aux multicourbes sont des éléments hermitiens de $\mathrm{End}(V_r(\Sigma, (p_i, \hat{c}_i))$. On peut déterminer leur spectre et vecteurs propres:

Proposition 1.8. *Soit γ une multicourbe dans une surface Σ éventuellement munie de points coloriés $(p_1, c_1), \ldots, (p_n, c_n)$.*
Soit $\mathcal{C} = (C_e)_{e \in E}$ une famille de courbes qui découpe Σ en pantalons et disques à un point, telle que toute composante de γ soit homotope à l'une des courbes C_e. Soit ψ_c une base de $V_r(\Sigma, (p_i, \hat{c}_i))$ associée aux colorations r-admissibles d'un graphe dual à la décomposition $\mathcal{C}$. Alors la base des φ_c est une base de diagonalisation de T_r^γ et si on note n_e le nombre de composantes de γ homotopes à C_e on a

$$T_r^\gamma \varphi_c = \prod_{e \in E} \left(-2\cos\left(\frac{\pi c_e}{r}\right)\right)^{n_e} \varphi_c$$

Notons en particulier le rayon spectral de T_r^γ est toujours borné par $2^{n(\gamma)}$, où $n(\gamma)$ est le nombre de composantes connexes de γ.

2 Espace des modules SU_2 d'une surface

L'espace des modules SU_2 d'une surface sans bord Σ peut être défini par:

$$\mathcal{M}(\Sigma) = \mathrm{Hom}(\pi_1\Sigma, \mathrm{SU}_2)/\,\mathrm{SU}_2$$

Le but de cette section sera simplement de rappeler quelques résultats classiques sur les espaces de modules, et d'introduire les structures sur $\mathcal{M}(\Sigma)$ qui nous permettront de mettre en oeuvre sa quantification géométrique (voir Section **??** et **??**).
Nous commencerons par donner deux définitions alternatives de l'espace des modules. Nous décrirons ensuite la description de son espace tangent en terme de cohomologie tordue. Puis, nous introduirons la structure symplectique sur $\mathcal{M}(\Sigma)$ définie par Atiyah-Bott [**?**] et montrerons comment les fonctions traces associées aux courbes d'une décompositon de pantalon fournissent des applications moment. Nous expliquerons la description du flot hamiltonien de ces fonctions par Goldman [**?**] ainsi que les paramétrisations de $\mathcal{M}(\Sigma)$ ainsi obtenues. En outre, nous exposerons deux théorèmes qui permettent de faire un lien entre les espaces de fonctions traces sur $\mathcal{M}(\Sigma)$ et le module de Kauffman de Σ défini dans la section **??**. Enfin, nous définirons le fibré de Chern-Simons et la structure métaplectique sur $\mathcal{M}(\Sigma)$. Le premier constitue un fibré préquantifiant sur $\mathcal{M}(\Sigma)$ et le deuxième permettant d'introduire un fibré de demi-formes sur certain ouverts de $\mathcal{M}(\Sigma)$. Ces structures seront nécessaires à la quantification géométrique de $\mathcal{M}(\Sigma)$.

2.1 Définitions et premières propriétés

Dans toute cette section, on considère une variété M orientée, connexe et fermée de dimension inférieure ou égale à 3.

Définition 2.1. *L'espace des modules $\mathcal{M}(M)$ est l'ensemble*

$$\mathcal{M}(M) = \{\rho : \pi_1 M \to SU_2\}/\,SU_2$$

où le quotient par SU_2 correspond à la conjugaison des représentations.

Nous aurons aussi parfois besoin d'introduire l'espace des caractères $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ défini par $\mathcal{M}'(M) = \mathrm{Hom}(\pi M, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))//\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Il s'agit du quotient algébro-géométrique de l'espace des représentations dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par la conjugaison par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Notons que l'espace des représentations dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est un variété algébrique affine complexe, et que l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est une action algébrique d'un groupe algébrique. L'espace des orbites sous cet action n'est plus forcément séparé pour la topologie quotient, et le quotient algébro-géométrique est le plus petit quotient séparé de cet espace. Le quotient algébro-géométrique est encore une variété algébrique affine, voir par exemple [**?**].
L'adhérence de l'orbite d'une représentation dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sous la conjugaison contient une représentation dans SU_2 si et seulement si la trace de tout élément est un réel appartenant à $[-2, 2]$. L'espace des modules $\mathcal{M}(M)$ est ainsi un ensemble semi-algébrique réel dans $\mathcal{M}'(M)$. Notons que comme le groupe SU_2 est compact, les orbites sous la conjugaison par SU_2 sont toujours fermées, et le quotient algébro-géométrique revient au quotient ordinaire. Si Σ est une surface sans points marqués de genre g alors $\mathcal{M}(\Sigma)$ une variété algébrique réelle de dimension $6g - 6$ si $g \geq 2$, et de dimension 2 si $g = 1$.

Il est parfois utile de définir l'espace des modules d'une autre manière, à partir de la théorie de jauge. Pour M une variété de dimension inférieure ou égale à 3, on considère le SU_2-fibré principal trivial $M \times \mathrm{SU}_2$. Remarquons que les SU_2-fibrés principaux au dessus

de M sont toujours trivialisables, du fait que les groupes $\pi_1(\mathrm{SU}_2)$ et $\pi_2(\mathrm{SU}_2)$ sont triviaux. La donnée d'une connexion A sur ce fibré principal revient alors à la donnée d'une 1-forme lisse $\alpha \in \Omega^1(M, \mathrm{su}_2)$ où su_2 est l'algèbre de Lie de SU_2. On dira qu'une 1-forme est plate si sa courbure

$$F_\alpha = d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha]$$

est nulle. Si une 1-forme est plate, son holonomie le long d'un chemin ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin, et la connexion permet de définir une représentation

$$hol(A) : \pi_1 M \to \mathrm{SU}_2$$

On note $\Omega^1_p(M, \mathrm{SU}_2)$ l'espace des SU_2 connexions plates.

L'analogue de la conjugaison des représentations pour les connexions est donnée par l'action du groupe de jauge $C^\infty(M, \mathrm{SU}_2)$. Le groupe de jauge agit à droite sur $\Omega^1(M, \mathrm{su}_2)$ par

$$\alpha^g = g^{-1}\alpha g + g^{-1}dg$$

Si $A = d + \alpha$ est une SU_2-connexion plate, on note aussi A^g la connexion associée à α^g. Cette action préserve les formes plates et l'espace quotient

$$\Omega^1_p(M, \mathrm{su}_2)/C^\infty(M, \mathrm{SU}_2)$$

s'identifie à l'espace des modules $\mathcal{M}(M)$.

Considérons à présent le cas où M est une surface Σ, avec des points marqués $p_1, \ldots, p_n$ coloriés par des réels $t_1, \ldots, t_n \in]-2, 2[$. On introduit des courbes simples γ_i pour $i \in \{1, \ldots n\}$, de sorte que γ_i borde un disque dans Σ contenant uniquement le point marqué p_i. La définition de $\mathcal{M}(\Sigma)$ ne pose pas de problème quand il n'y a pas de points marqués, dans le cas contraire on pose:

$$\mathcal{M}(\Sigma, (p_1, t_1), \ldots, (p_n, t_n)) = \{\rho : \pi_1(\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}) \to \mathrm{SU}_2 \ / \ \mathrm{Tr}(\rho(\gamma_i)) = t_i\}/\,\mathrm{SU}_2$$

On définit de même

$$\mathcal{M}'(\Sigma, (p_1, t_1), \ldots, (p_n, t_n)) = \{\rho : \pi_1(\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \ / \ \mathrm{Tr}(\rho(\gamma_i) = t_i\}/\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

Pour tout élément γ de $\pi_1(\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\})$ on dispose d'une fonction algébrique sur $\mathcal{M}(\Sigma)$ ou $\mathcal{M}'(\Sigma)$ définie par

$$f_\gamma(\rho) = -\,\mathrm{Tr}(\rho(\gamma))$$

Comme la trace est invariante par conjugaison, $f_\gamma(\rho)$ ne dépend bien que de la classe de conjugaison de ρ. De plus $f_\gamma(\rho)$ ne dépend également que de la classe de conjugaison de γ dans $\pi_1(\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\})$. Or une courbe sur Σ définit une classe de conjugaison dans $\pi_1(\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\})$, cette définition permet donc d'associer à toute courbe γ une fonction algébrique f_γ sur l'espace des modules.
Enfin, rappelons que tout élément de SU_2 est conjugué à une unique matrice

$$U_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\pi\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in [0, 1]$. Pour γ une classe de conjugaison dans $\pi_1(\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\})$, on note $h_\gamma(\rho)$ l'unique élément $\theta \in [0, 1]$ tel que $\rho(\gamma)$ soit conjugué à U_θ. La fonction h_γ est reliée à f_γ par la formule

$$f_\gamma = -2\cos(\pi h_\gamma)$$

La fonction h_γ est continue sur $\mathcal{M}(\Sigma)$ et lisse sur $f_\gamma^{-1}(]-2, 2[)$.

2.2 Espace tangent et cohomologie tordue

L'espace des modules est une variété algébrique réelle et n'est en général pas une variété différentielle. Si la surface est sans points marqués, $\mathcal{M}(\Sigma)$ présente des singularités dès que le genre g de Σ est supérieur ou égal à 2. Dans cette section, nous allons identifier l'espace tangent à un élément $[\rho]$ de $\mathcal{M}(\Sigma)$ à un espace de cohomologie tordue et montrer que les points lisses de $\mathcal{M}(\Sigma)$ correspondent aux représentations irréductibles, les représentations qui ne laissent invariant aucun sous-espace de $\mathbb{C}^2$.
Nous noterons $\mathcal{M}^{irr}(\Sigma)$ l'ensemble des classes de conjugaison de représentations irréductibles dans $\mathcal{M}(\Sigma)$ et $\mathcal{M}^{ab}(\Sigma)$ l'ensemble des classes de conjugaison de représentations abéliennes. Notons qu'une représentation à valeurs dans SU_2 est toujours soit irréductible soit abélienne. L'ensemble $\mathcal{M}^{irr}(\Sigma)$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}(\Sigma)$ si $g \geq 2$.
Commençons par des rappels sur la cohomologie tordue. Considérons un espace topologique X connexe homéomorphe à un CW-complexe fini. On note $\pi = \pi_1(X)$, et on considère V une représentation de π. Le revêtement universel $\tilde{X}$ de X est muni d'une structure de CW-complexe compatible avec l'action de π. Le complexe des chaines $C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$ est alors un $\mathbb{Z}[\pi]$-module et on définit l'homologie de X tordue par la représentation V par:

$$H_*(X, V) = H_*(C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \underset{\mathbb{Z}[\pi]}{\otimes} V)$$

De même, la cohomologie tordue se définit par: $H^*(X, V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi]}(C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}), V)$. On définit de manière similaire les notions d'homologie et cohomologie tordue pour les paires d'espace (X, Y).
Les théorèmes classiques d'homologie se généralisent dans ce contexte. Ainsi, on a une version du théorème de dualité de Poincaré. Soit N une variété différentielle de dimension n de bord ∂N, et V une représentation de dimension finie de $\pi_1 N$. Pour tout $k \in \{0, \dots n\}$ il existe des isomorphismes de dualité de Poincaré:

$$H^k(N, V) \simeq H_{n-k}(N, \partial N, V) \text{ et } H_k(N, V) \simeq H^{n-k}(N, \partial N, V)$$

Si l'on dispose de deux représentations V et W, toute forme bilinéaire $\pi_1 N$ invariante non dégénérée $\langle , \rangle : V \times W \to \mathbb{C}$ induit une dualité parfaite

$$H^k(N, V) \times H_k(N, W) \to V \otimes W \overset{\langle , \rangle}{\to} \mathbb{C}$$

où la première flèche est la contraction de la cohomologie sur l'homologie.
Nous allons à présent voir que la cohomologie tordue est l'outil approprié pour calculer les espaces tangents des classes de conjugaison de représentations.
Etant donné un groupe π de présentation finie

$$\pi = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots r_m \rangle$$

l'espace des représentations $\mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{SU}_2)$ s'identifie à

$$\{g \in {\mathrm{SU}_2}^n \ / r_i(g) = 1 \text{ pour } i = 1 \dots m\}$$

On a noté $r_i : {\mathrm{SU}_2}^n \to \mathrm{SU}_2$ l'application consistant à remplacer les lettres x_i du mot r_i par leur valeur g_i. L'espace des représentations est lisse au point ρ si l'application $R = (r_1, \dots, r_m) : {\mathrm{SU}_2}^n \to {\mathrm{SU}_2}^m$ est une submersion en ρ.
On définit une application de conjugaison $C : \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{SU}_2) \to \mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{SU}_2)$ par

$$C(g, g_1, \dots, g_n) = (g g_1 g^{-1}, \dots, g g_n g^{-1})$$

Si l'on a également l'injectivité de la différentielle de $C^\rho = C(\cdot, \rho)$ en l'identité alors la classe de ρ dans $\mathcal{M}(\pi) = \mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{SU}_2)/\,\mathrm{SU}_2$ est un point lisse et on a

$$T_{[\rho]}\mathcal{M}(\pi) = \mathrm{Ker} D_\rho R / \mathrm{Im} D_{\mathrm{Id}} C^\rho$$

Soit maintenant X un 2-complexe avec une seule 0-cellule, une 1-cellule l_i pour chaque générateur x_i et m 2-cellules $D_1, \ldots, D_m$, où D_j est recollé sur les l_i en suivant le mot r_j, de sorte que $\pi_1 X = \pi$. On note ρ la représentation définie par $\rho(x_i) = g_i$ et Ad_ρ la représentation adjointe de ρ définie pour tout $\xi \in \mathrm{su}_2$ par $\gamma \cdot \xi = \rho(\gamma)\xi\rho(\gamma)^{-1}$. Les cochaînes d'homologie tordues $C^0(X, \mathrm{Ad}_\rho)$, $C^1(X, \mathrm{Ad}_\rho)$ et $C^2(X, \mathrm{Ad}_\rho)$ s'identifient respectivement à su_2 , su_2^n et su_2^m. De plus, le calcul de $D_1 C^\rho$ et $D_g R$ permettent d'établir que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T_1\,\mathrm{SU}_2 & \overset{D_1 C^\rho}{\to} & T_g\,\mathrm{SU}_2{}^n & \overset{D_g R}{\to} & T_1\,\mathrm{SU}_2{}^m \\ \downarrow\sim & & \downarrow\sim & & \downarrow\sim \\ C^0(X, \mathrm{Ad}_\rho) & \overset{d}{\to} & C^1(X, \mathrm{Ad}_\rho) & \overset{d}{\to} & C^2(X, \mathrm{Ad}_\rho) \end{array}$$

est commutatif. L'hypothèse sur $D_1 C^\rho$ et $D_g R$ pour que ρ soit un point lisse revient à demander que les groupes d'homologies $H^0(X, \mathrm{Ad}_\rho)$ et $H^2(X, \mathrm{Ad}_\rho)$ s'annulent. Par la dualité de Poincaré, ceci est le cas dès que $H^0(X, \mathrm{Ad}_\rho) = 0$. Le diagramme commutatif implique qu'on a alors

$$T_{[\rho]}\mathcal{M}(\Sigma) = H^1(X, \mathrm{Ad}_\rho)$$

Enfin, notons que l'espace $H^0(X, \mathrm{Ad}_\rho)$ s'identifie à l'espace des vecteurs invariants

$$\{\xi \ /\forall \gamma \in \pi \ \rho(\gamma)\xi\rho(\gamma)^{-1} = \xi\}$$

Cet espace est donc réduit à $\{0\}$ dès que la représentation est irréductible, et l'ouvert $\mathcal{M}^{\mathrm{irr}}(X)$ de $\mathcal{M}(X)$ est constitué de points lisses.

Enfin, si Σ est une surface privée de n points $p_1, \ldots, p_n$, ce calcul permet de déterminer la dimension de l'espace des modules $\mathcal{M}(\Sigma)$. En effet, dès que $g \geq 2$ ou dès que $n \geq 1$ si $g = 0$ ou $n \geq 3$ si $g = 0$, il existe une représentation irréductible ρ, pour laquelle on a donc $H^0(\Sigma, \mathrm{Ad}_\rho) = 0$ et aussi $H^2(\Sigma, \mathrm{Ad}_\rho) = 0$ par dualité de Poincaré. On a alors $\dim(T_{[\rho]}\mathcal{M}(\Sigma)) = \dim(H^1(\Sigma, \mathrm{Ad}_\rho) = \chi(C^*(\Sigma, \mathrm{Ad}_\rho)) = 3\chi(\Sigma) = 6g - 6 + 3n$.

De plus, on peut montrer que lorsqu'on fixe les classes de conjugaison des courbes de bord (en demandant $\mathrm{Tr}(\rho(\gamma_i)) = t_i$, où γ_i est une courbe entourant le point p_i), on obtient $\dim(\mathcal{M}(\Sigma, (p_1, t_1), \ldots, (p_n, t_n))) = 6g - 6 + 2n$ pour tout t dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

2.3 Structure symplectique

Nous nous restreignons à présent où cas où X est une surface Σ éventuellement privée d'une famille de points $p_1, \ldots, p_n$. Considérons une forme bilinéaire sur su_2, su_2-invariante et non dégénérée. Une telle forme est toujours proportionnelle à la forme $B(\xi, \eta) = \mathrm{Tr}(\xi\eta)$.
Cette forme bilinéaire est non dégénérée et induit pour tout ρ irréductible une dualité parfaite

$$\omega_\rho : H^1(\Sigma, \mathrm{Ad}_\rho) \times H^1(\Sigma, \mathrm{Ad}_\rho) \to \mathbb{R}$$

Etant donnée l'identification $H^1(\Sigma, \mathrm{Ad}_\rho) \simeq T_{[\rho]}\mathcal{M}(\Sigma)$, ceci munit donc $\mathcal{M}^{irr}(\Sigma)$ en tout point d'une 2-forme non dégénérée. La forme ω munit en fait $\mathcal{M}^{irr}(\Sigma)$ d'une structure symplectique, et la forme ω est en fait fermée.
On introduit pour voir ce fait, une autre définition de la forme ω, en utilisant la théorie

de jauge. On a vu que l'espace des modules $\mathcal{M}(\Sigma)$ peut aussi s'exprimer comme l'espace $\Omega^1_p(\Sigma, \mathrm{su}_2)$ des SU_2-connexions plates sur Σ, quotienté par l'action du groupe de jauge. On introduit une 2-forme ω sur $\Omega^1(\Sigma, \mathrm{su}_2)$ par la formule :

$$\omega(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma \mathrm{Tr}(\alpha \wedge \beta)$$

Cette 2-forme est une forme symplectique sur l'espace affine $\Omega^1(\Sigma, \mathrm{su}_2)$ et le groupe de jauge $C^\infty(\Sigma, \mathrm{SU}_2)$ agit par symplectomorphismes affines sur $\Omega^1(\Sigma, \mathrm{su}_2)$. On peut voir la forme de courbure $F_\alpha = d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha]$ comme une application moment pour cette action. La théorie de la réduction symplectique assure que la 2-forme ω induite sur le quotient $F^{-1}(0)/C^\infty(\Sigma, \mathrm{SU}_2) = \mathcal{M}(\Sigma)$ est elle aussi une forme symplectique. Cette structure s'identifie en fait à la première définition en terme de $H^1(\Sigma, \mathrm{Ad}_\rho)$.

2.4 Flot de Goldman et paramétrisation

A présent que nous avons muni l'espace des modules d'une forme symplectique ω, toute fonction lisse h sur $\mathcal{M}^{irr}(\Sigma)$ induit un champ de vecteur hamiltonien X_h tel que $\omega(X_h, \cdot) = dh$. De plus pour deux fonctions lisses f et g on peut définir leur crochet de Poisson par $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$. Nous avons défini dans la Section **??** des fonctions f_γ et h_γ associées à toute classe de conjugaison dans $\pi_1\Sigma$. On s'intéresse à leurs crochets de Poisson et à leurs flots hamiltoniens.
Dans l'article [**?**], Goldman a étudié les crochets de Poisson des fonctions $f_\gamma = -\mathrm{Tr}(\rho(\gamma))$ associées aux courbes simples γ sur Σ. En particulier, il montre le théorème suivant:

Théorème 2.1. *[?] Soit γ et δ deux courbes simples sur Σ homotopes à des courbes disjointes. Alors $\{f_\gamma, f_\delta\} = 0$.*

Sur $h_\gamma^{-1}(]0,1[) \cap h_\delta^{-1}(]0,1[)$, les fonctions h_γ et h_δ sont lisses et leur crochet de Poisson est bien défini. Si γ et δ sont homotopes à des courbes disjointes, comme $h_\gamma = \frac{1}{\pi}\mathrm{Acos}(-\frac{f_\gamma}{2})$, les fonctions h_γ et h_δ Poisson commutent également. Les fonctions h_γ ont des flots hamiltoniens particulièrement simples:

Théorème 2.2. *[?] Sur $h_\gamma^{-1}(]0,1[)$ le flot du champ de vecteur hamiltonien X_{h_γ} est bien défini et de période 2π si γ est non séparante et π si γ est séparante. Notons $\theta \cdot \rho = \phi_\theta(X_{h_\gamma})(\rho)$ ce flot et soit ρ le représentant de $[\rho]$ tel que $\rho(\gamma) = U_{h_\gamma([\rho])}$.*

- *Si γ est non séparante, on a $\theta \cdot [\rho](\alpha) = \rho(\alpha)$ si $\alpha \cap \gamma = \emptyset$.*

- *Si γ est non-séparante et α rencontre γ une seule fois dans le sens positif, on pose $\theta \cdot [\rho](\alpha) = U_\theta \rho(\alpha)$.*
  Pour une courbe α générale, on peut toujours écrire $\alpha = \alpha_1^{\varepsilon_1}\gamma^{n_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\gamma^{n_2}\ldots\alpha_k^{\varepsilon_k}\gamma^{n_k}$ où les courbes α_i intersectent une unique fois dans le sens positif la courbe γ, où les n_i sont des entiers et où $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. On étend la définition de $\theta \cdot [\rho]$ par multiplicativité.

- *γ sépare Σ en Σ_1 et Σ_2, on pose $\theta \cdot [\rho](\alpha) = \rho(\alpha)$ si α est homotope à une courbe dans Σ_1 et $\theta \cdot [\rho](\alpha) = U_\theta \rho(\alpha) U_{-\theta}$ si α est homotope à une courbe dans Σ_2.*
  Pour une courbe α générale, on peut toujours écrire $\alpha = \beta_1\delta_1\beta_2\delta_2\ldots\delta_k$, où les β_i sont des courbes dans Σ_1 et les δ_i des courbes dans Σ_2 et on étend la définition de $\theta \cdot [\rho]$ par multiplicativité.

Soit Σ une surface fermée orientée connexe, $p_1, \ldots, p_n$ des points distincts dans Σ, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des courbes disjointes qui bordent chacune un disque D_i contenant p_i.
De la même manière que dans le cas fermé, pour toute représentation irréductible ρ de $\pi_1(\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\})$, on peut définir une forme bilinéaire sur l'espace tangent $T_{[\rho]}\mathcal{M}(\Sigma \setminus \{p_1 \ldots, p_n\})$. Cependant, dans ce cas-ci les formes bilinéaires obtenues peuvent être dégénérées, et on obtient seulement une structure de Poisson sur $\mathcal{M}(\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\})$.
Soit $\mathcal{C} = \{C_e,\ e \in E\}$ une famille de courbes qui décompose $\Sigma' = \Sigma \setminus \underset{i}{\cup} D_i$ en pantalons. On note S l'ensemble des triplets (e, f, g) tels que C_e, C_f et C_g bordent un pantalons (on permet la répétition des indices). Comme les courbes C_e sont disjointes, les fonctions h_{C_e} Poisson commutent. Jeffrey et Weistman [**?**] ont montré que ces fonctions forment un système intégrable sur $\mathcal{M}(\Sigma)$.

Théorème 2.3. - *Les feuilles symplectiques de la structure de Poisson sont les ensembles* $\cap h_{\gamma_i}^{-1}(t_i)$ *où* $t \in \mathbb{R}^n$

- *L'image de l'application* $h_{\mathcal{C}} : \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathbb{R}^E$ *définie par* $h_{\mathcal{C}} = (h_{C_e})_{e \in E}$ *est le polytope*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^E \ /x_e + x_f + x_g \leq 2 \text{ et } x_e \leq x_f + x_g \ \forall (e, f, g) \in S\}$$

- *Pour tout* $x \in \mathring{P}$ *le flot hamiltonien des* h_{C_e} *agit transitivement sur* $h_{\mathcal{C}}^{-1}(x)$ *et admet pour période le réseau* $2\pi\Lambda$ *où*

$$\Lambda = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(u_e \ e \in E,\ \frac{u_e + u_f + u_g}{2},\ (e, f, g) \in S)$$

et $(u_e)_{e \in E}$ *est la* $\mathbb{Z}$*-base canonique de* $\mathbb{Z}^E$.

Par ce théorème l'ouvert dense $U = h_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathring{P})$ de $\mathcal{M}(\Sigma)$ est homéomorphe à l'espace $\mathring{P} \times \mathbb{R}^E/2\pi\Lambda$. Etant donné une section s lagrangienne de $h_{\mathcal{C}} : U \to \mathring{P}$, on peut définir des coordonnées (x, θ) sur U par $x(\rho) = h_{\mathcal{C}}(\rho)$ et si $\rho = \theta \cdot s(x(\rho))$ alors $\theta(\rho) = \theta$. Ces coordonnées vérifient que

$$\omega = \sum_{e \in E} dx_e \wedge d\theta_e$$

On appelle coordonnées actions-angles pour l'application moment $h_{\mathcal{C}}$ toute coordonnées qui vérifient $x(\rho) = h_{\mathcal{C}}(\rho)$ et cette dernière propriété.

2.5 Lien avec le module de Kauffman

Nous allons à présent voir deux théorèmes qui établissent un lien entre l'espace des modules $\mathcal{M}'(\Sigma) = \mathrm{Hom}(\pi_1\Sigma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))//\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ d'une surface et les modules de Kauffman $K(\Sigma, A)$.

Théorème 2.4. *Soit* $\mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)]$ *l'algèbre des fonctions régulières de* $\mathcal{M}'(\Sigma)$ *dans* $\mathbb{C}$. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & K(\Sigma, -1) & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)] \\ & \gamma = \underset{i}{\cup}\gamma_i & \longrightarrow & \prod_i f_{\gamma_i} \text{ où } f_\gamma(\rho) = -Tr(\rho(\gamma)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Remarquons que cette définition a bien un sens, car les multicourbes engendrent le module de Kauffman. Notons que le fait que cette application soit un morphisme d'algèbre

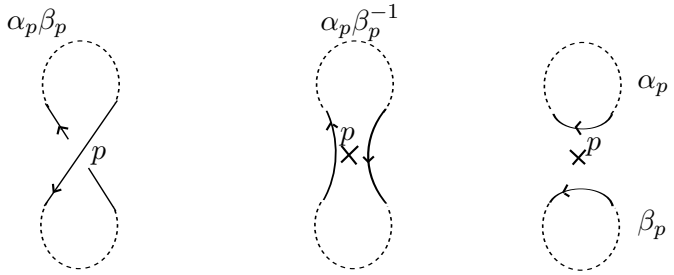


Figure 11: Lacets correspondant à la résolution d'un croisement

est une conséquence de la formule de trace fondamentale dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$: pour tout A et $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on a

$$\mathrm{Tr}(AB) + \mathrm{Tr}(AB^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$$

elle-même étant une simple conséquence du théorème de Cayley-Hamilton. Considérons une courbe dans $\Sigma \times [0,1]$ dont la projection sur Σ admet un croisement en un point p. On choisit une orientation de la courbe, elle définit alors un lacet basé en p. On peut exprimer ce lacet comme un produit $\alpha_p\beta_p$, de sorte que l'une des résolutions du croisement corresponde au lacet $\alpha_p\beta_p^{-1}$, et l'autre à une union de deux courbes homotopes à α_p et β_p., voir Figure **??**. Comme on a

$$-\mathrm{Tr}(\alpha_p\beta_p) = -(-\mathrm{Tr}(\alpha_p\beta_p^{-1})) - (-\mathrm{Tr}(\alpha_p))(-\mathrm{Tr}(\beta_p))$$

les fonctions traces vérifient bien la relation de Kauffman en -1.
La partie délicate du théorème est de démontrer la bijectivité de ce morphisme. Ceci est la conséquence des travaux de plusieurs auteurs. Bullock [**?**] a d'abord montré que l'application de $K(\Sigma,-1)$ dans $\mathcal{M}'(\Sigma)$ est surjective et a pour noyau le nilradical de $K(\Sigma,-1)$. Przytycki et Sikora ont ensuite montré de manière indépendante dans [**?**] que le résultat de Bullock découle des travaux de Brunfiel et Hilden [**?**]. Ces travaux sont basés sur des résultats dus à Procesi [**?**] en théorie géométrique des invariants.
Dans [**?**], Sikora a montré que les algèbres $K(\Sigma,-1)$ sont en effet réduites, en étudiant l'espace tangent des variétés algébriques associées via la cohomologie tordue. Le résultat de Sikora conclut la preuve du Théorème **??**.
Charles et Marché dans [**?**] offrent une méthode alternative pour cette deuxième étape, en montrant que les fonctions traces associées aux multicourbes sur Σ sont linéairement indépendantes. Comme $K(\Sigma,A)$ admet les multicourbes comme $\mathbb{Z}[A,A^{-1}]$-base, ce résultat donne automatiquement l'injectivité du morphisme d'algèbre.

Rappelons que nous avons défini les espaces de TQFT $V_r(\Sigma)$ comme des modules de Kauffman en $\zeta_r = -e^{i\frac{\pi}{2r}}$. Les racines de l'unité ζ_r tendent vers -1, et le théorème de Bullock-Przytycki-Sikora nous permet d'identifier les algèbres de Kauffman en -1. Dans la Partie **??**, nous aurons besoin de comprendre les algèbres de Kauffman des surfaces en ζ_r proche de -1 mais différent de -1.
Pour cela on considère l'élément $-e^{i\frac{\pi h}{2}} \in \mathbb{C}[[h]]$ et le module de Kauffman

$$K(\Sigma,-e^{i\frac{\pi h}{2}}) = K(\Sigma,A) \underset{A=-e^{i\frac{\pi h}{2}}}{\otimes} \mathbb{C}[[h]]$$

Comme les modules de Kauffman $K(\Sigma,A)$ et $K(\Sigma,-1)$ ont pour bases les multicourbes, on a $K(\Sigma,A) \simeq K(\Sigma,-1) \otimes \mathbb{Z}[A,A^{-1}]$, et on peut identifier $K(\Sigma,-e^{i\frac{\pi h}{2}})$ à un sous-espace

de $K(\Sigma,-1)[[h]]$.
Le résultat suivant nous permet d'identifier les algèbres de Kauffman $K(\Sigma,-e^{i\frac{\pi h}{2}})$ comme des déformations quantiques de l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathcal{M}'(\Sigma)$.

Théorème 2.5. *[?][?] Soit γ et δ deux multicourbes, que l'on voit comme des éléments de $K(\Sigma,-e^{\frac{i\pi\hbar}{2}}) = K(\Sigma,A) \underset{A=-e^{\frac{i\pi\hbar}{2}}}{\otimes} \mathbb{C}[[\hbar]]$. On identifie cet espace avec un sous-espace de $\mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)][[\hbar]]$ par l'application σ du Théorème ??. Alors on a:*

$$\gamma\cdot\delta = f_\gamma f_\delta + \frac{\hbar}{i}\{f_\gamma, f_\delta\} + o(\hbar)$$

Le théorème, du à Turaev [?] est une conséquence des travaux de Goldman: dans [?] est démontrée une formule, que nous appelerons la formule de Goldman, pour calculer le crochet de Poisson de deux fonctions traces. Soit α et β sont deux courbes simples, qui s'intersectent transversalement en un nombre fini de points. On choisit une orientation de ces courbes. Pour p un tel point d'intersection, on note α_p et β_p les lacets basés en p donnés par les courbes α et β. On note $\varepsilon(p)\in\{\pm1\}$ l'intersection algébrique de α_p et β_p en p. Alors on a:

$$\{f_\alpha, f_\beta\}(\rho) = \sum_{p\in\alpha\cap\beta}\varepsilon(p)(\mathrm{Tr}(\rho(\alpha_p\beta_p)) - \mathrm{Tr}(\rho(\alpha_p\beta_p^{-1}))$$

La preuve de Turaev dans [?] consiste alors à identifier les termes dans la formule de Goldman pour le crochet de Poisson aux termes d'ordre 1 dans le produit dans l'algèbre de Kauffman.

2.6 Fibrés de Chern-Simons

Soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes décomposant une surface Σ en pantalons, et $h_{\mathcal{C}}$ l'application moment associée, et enfin $U\subset\mathcal{M}(\Sigma)$ l'image réciproque des valeurs régulières de $h_{\mathcal{C}}$. Nous avons vu que U est symplectomorphe à une variété $(\mathring{P}\times T,\omega)$ où $\mathring{P}$ est un polytope ouvert, T est un tore, et $\omega = \sum_{e\in E} dx_e\wedge d\theta_e$. Pour terminer la préquantification de cette variété, nous allons introduire un fibré préquantifiant L et un fibré de demi-formes δ provenant de structures naturelles sur $\mathcal{M}(\Sigma)$.

Le fibré préquantifiant nous sera fourni par la théorie de Chern-Simons. En utilisant la présentation de l'espace des modules par la théorie de jauge comme vu dans la Section ??, nous introduisons $L = \Omega^1_p(\Sigma,\mathrm{su}_2)\times\mathbb{C}^*$. On choisit une variété de dimension M telle que $\partial M=\Sigma$. Pour $A = d+\alpha$ une SU_2-connexion plate sur Σ et g un élément du groupe de jauge $C^\infty(\Sigma,\mathrm{SU}_2)$, qui s'étend à $C^\infty(M,\mathrm{SU}_2)$, on définit

$$c(A,g) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}Ag\wedge g^{-1}Ag) - \frac{1}{24\pi}\int_M \mathrm{Tr}(g^{-1}dg\wedge[g^{-1}dg\wedge g^{-1}dg])$$

La quantité $c(A,g)$ est indépendante du choix de M et de l'extension de g à M modulo $2\pi\mathbb{Z}$. En effet, remarquons tout d'abord que $g^{-1}dg$ s'identifie à la forme $g^*\theta$, où θ est la forme de Maurer-Cartan sur SU_2. La forme $\chi = \frac{1}{24\pi}\mathrm{Tr}(\theta\wedge[\theta\wedge\theta)$, appelée forme de Cartan sur SU_2, est un générateur de $H^3(\mathrm{SU}_2,2\pi\mathbb{Z})$.
Si nous considérons M' et M'' deux variétés de bord Σ, et g' et g'' des extensions de g de

Σ à M' et M'' respectivement. On note $\overline{g}$ l'élément de $C^\infty(M' \underset{\Sigma}{\cup} \overline{M''}, \mathrm{SU}_2)$ qui se restreint à g' sur M' et g'' sur M''. On a alors

$$\int_{M' \underset{\Sigma}{\cup} \overline{M''}} g^*\chi = 2\pi \mathrm{deg}(g) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

ce qui montre que $c(A, g)$ est bien défini modulo $2\pi\mathbb{Z}$.
On peut voir que $c(A, g)$ vérifie une relation de cocycle: on a pour toute SU_2 connexion plate A

$$c(A, gh) = c(A, g) + c(A^g, h)$$

De ce fait on déduit que l'action du groupe de jauge sur L donnée par $(A, z)^g = (A^g, ze^{ic(A,g)})$ est bien définie et passe au quotient en un fibré $\mathcal{L}$ hermitien sur $\mathcal{M}^{irr}(\Sigma)$. La connection $d + \eta$ sur le fibré trivial $L = \Omega^1_p(\Sigma, \mathrm{SU}_2) \times \mathbb{C}^*$, où $\eta_u(v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Sigma \mathrm{Tr}(u \wedge v)$ passe au quotient en une connection ∇ sur $\mathcal{L}$.
Le fibré $\mathcal{L}$ est appelé fibré de Chern-Simons et sa courbure est $\dfrac{1}{i}\omega$ où ω est la forme symplectique sur $\mathcal{M}^{irr}(\Sigma)$. Il s'agit donc d'un fibré préquantifiant.
Ce fibré est liée à la fonctionnelle de Chern-Simons, qui pour toute variété M de dimension est une fonction $CS : \mathcal{M}(M) \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ définie par la formule:

$$CS(\alpha) = \frac{1}{24\pi} \int_M \mathrm{Tr}(A \wedge [A \wedge A])$$

Remarquons que $A \wedge A \wedge A$ est une 3-forme dans $\Omega^3(M, \mathrm{su}_2^{\otimes 3})$ et donc $\mathrm{Tr}(A \wedge [A \wedge A])$ est dans $\Omega^3(M, \mathbb{R})$, l'intégration donne donc bien un nombre réel.
La fonctionnelle CS est a priori définie sur $\Omega^1(M, \mathrm{su}_2)$, mais pour M sans bord, on a la formule suivante

$$CS(A^g) = CS(A) + \frac{1}{12} \int_M g^*\chi$$

où χ est la forme de Cartan introduite ci-dessus. De même que précédemment, on voit que la quantité $W(g) = \dfrac{1}{24\pi}\displaystyle\int_M g^*\chi = 2\pi\mathrm{deg}(g)$ est un multiple entier de 2π. On peut montrer de même que si M a du bord, $CS(A)$ ne dépend que de la restriction de A au bord.
Si M est une variété de bord Σ et α_t une famille à un paramètre de connexions plates sur M, le théorème de Stokes permet de démontrer la formule:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} CS(\alpha_t) = \frac{1}{2} \int_\Sigma \mathrm{Tr}(\alpha_0 \wedge \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_t)$$

Autrement dit, la fonctionnelle de Chern-Simons sur une variété à bord M induit une section plate du fibré tiré en arrière $r^*\mathcal{L}$ sur $\mathcal{M}(M)$, où $r : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(\Sigma)$ est l'application de restriction.

Sur l'invariant de Chern-Simons, terminons par un calcul qui éclairera la signification de la formule asymptotique que nous prouverons dans la Section **??**. Considérons un scindement de Heegaard $M = H \underset{\Sigma}{\cup} \overline{H'}$, et deux points ρ_0 et ρ de $\mathcal{M}^{irr}(M)$.
On note r l'application de restriction $\mathcal{M}(H) \to \mathcal{M}(\Sigma)$ et r' la restriction $\mathcal{M}(H') \to \mathcal{M}(\Sigma)$.
On note $A_0 = d + \alpha_0$ et $A = d + \alpha$ les connexions associées à ρ_0 et ρ.
On a $CS(\alpha) = CS(\alpha|_H) - CS(\alpha|_{H'})$ et de même pour α_0.

La différence $CS(\alpha) - CS(\alpha_0)$ peut alors s'exprimer comme l'holonomie du fibré $\mathcal{L}$ le long d'une courbe $\gamma_{\rho_0,\rho}$ définie de la façon suivante:
La courbe $\gamma_{\rho_0,\rho}$ joint ρ_0 à ρ par un chemin dans $r(\mathcal{M}(H)) \subset \mathcal{M}(\Sigma)$ puis ρ à ρ_0 par un chemin dans $r'(\mathcal{M}(H')) \subset \mathcal{M}(\Sigma)$.
Si cette courbe borde un disque D_{ρ,ρ_0} cette quantité est également l'aire symplectique du disque D_{ρ,ρ_0} puisque le fibré $\mathcal{L}$ a pour courbure ω.

2.7 Structure métaplectique

Nous introduisons dans cette section la notion de structure métaplectique sur une variété symplectique et montrons que l'espace des modules $\mathcal{M}(\Sigma)$ en admet une. Nous allons également expliquer pourquoi cette structure permet de construire des fibrés de demi-formes.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, rappelons que le groupe symplectique réel $\mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ est connexe, et que son groupe fondamental est $\mathbb{Z}$. Ce groupe admet donc toujours un unique revêtement non trivial d'ordre deux, qu'on appelle le groupe métaplectique et qu'on note $\mathrm{MP}_{2n}(\mathbb{R})$.
D'autre part, le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut toujours être plongé dans $\mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ via le morphisme de groupe

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \hookrightarrow & \mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R}) \\ & A & \to & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^T)^{-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Il existe alors un unique revêtement double $\mathrm{ML}_n(\mathbb{R})$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ muni d'un plongement $\overline{\pi} : \mathrm{ML}_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{MP}_n(\mathbb{R})$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ML}_n(\mathbb{R}) & \overset{\overline{\pi}}{\hookrightarrow} & \mathrm{MP}_{2n}(\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \overset{\pi}{\hookrightarrow} & \mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R}) \end{array}$$

soit commutatif. Ce groupe est nommé groupe métalinéaire. Il est isomorphe au groupe $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
On peut alors construire un morphisme $\det^{\frac{1}{2}} : \mathrm{ML}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par la formule

$$\det^{\frac{1}{2}}(A, x) = i^x \sqrt{\det(A)}$$

dont le carré passe au quotient par la projection en le morphisme det sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Etant donné (V, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$, une base symplectique de V est une base $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ de V telle que $\omega(e_i, e_j) = 0$, $\omega(f_i, f_j) = 0$ et $\omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$.
Une structure métaplectique sur V est un ensemble $\tilde{R}(V)$ sur lequel $\mathrm{MP}_{2n}(\mathbb{R})$ agit et muni d'une projection équivariante sur l'ensemble $R_\omega(V)$ des bases symplectiques de V.
On définit de même pour W un espace vectoriel de dimension n une structure métalinéaire sur W comme un ensemble $\widehat{R}(W)$ sur lequel $\mathrm{ML}_n(\mathbb{R})$ agit et muni d'une projection équivariante $\widehat{R}(W) \to R(W)$ où $R(W)$ est l'ensemble des bases de W.
Etant donnée une decomposition $V = L \oplus L'$ de V en somme de deux lagrangiens, une structure métaplectique sur V induit par restriction aux bases adaptées à la décomposition une structure métalinéaire $\widehat{R}(L)$ sur L.
Une structure métalinéaire induit un fibré de demi-formes $\det^{\frac{1}{2}}(L)$ en quotientant le produit $\widehat{R}(L) \times \mathbb{C}$ par la relation

$$(h \cdot r, z) \sim (r, \det^{\frac{1}{2}}(h) z)$$

On a alors un isomorphisme $\det^{\frac{1}{2}}(L)^{\otimes 2} \simeq \det(L) = \Lambda^n L$.

Considérons maintenant la variété symplectique $M = \mathcal{M}^{irr}(\Sigma)$ munie d'une application moment $h_{\mathcal{C}}$ associée à une décomposition de Σ en pantalons $\mathcal{C}$. La variété M admet une structure métaplectique, c'est-à-dire un fibré $\tilde{R}(M)$ sur M dont la fibre $\tilde{R}(M)_x$ en x est une structure métaplectique sur T_xM.
Ce résultat est obtenu de la façon suivante: on sait de manière générale qu'une structure métaplectique sur une variété symplectique M existe si et seulement si la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$ s'annule. Un calcul de classe de Chern dans [**?**] montre que cette classe est nulle et donc que la structure métaplectique existe. Voir aussi [**?**] pour une méthode alternative pour exhiber la structure métaplectique sur $M = \mathcal{M}^{irr}(\Sigma)$.

2.8 Holonomie en paramétrisation réelle

Dans cette section, nous allons expliciter l'holonomie des fibrés de Chern-Simons et de demi-formes que nous avons introduit le long des tores associés au système intégrable $h_{\mathcal{C}}$. Notons P le polytope image de l'application moment $h_{\mathcal{C}}$, l'intérieur $\mathring{P}$ du polytope est l'ensemble des valeurs régulières de $h_{\mathcal{C}}$. Pour tout $x \in M$ le noyau de la différentielle $d_x h_{\mathcal{C}}$ est un sous-espace lagrangien L_x de T_xM. L'espace des lagrangiens transverses à L_x étant affine, on peut choisir continûment une décomposition lagrangienne $T_xM = L_x \oplus L'_x$. La structure spin sur M induit alors une structure métalinéaire sur chaque L_x, et le fibré δ dont la fibre en x est donnée par $\delta_x = \det^{\frac{1}{2}}(L)$ est alors un fibré en droites complexe, appelé fibré de demi-forme. Le fibré L étant trivial, le fibré δ est plat et admet donc une connexion plate.

Sur chaque fibre $h_{\mathcal{C}}^{-1}(x)$, le fibré $\mathcal{L}$ est également plat, puisque sa courbure est multiple de ω et les fibres de $h_{\mathcal{C}}$ sont lagrangiennes. Une telle fibre est alors appelée fibre de Bohr-Sommerfeld de niveau r si et seulement si il existe une section plate de $\mathcal{L}^r \otimes \delta$, c'est-à-dire si l'holonomie du fibré $\mathcal{L}^r \otimes \delta$ restreint à la fibre est triviale. Les fibres de Bohr-Sommerfeld joue un rôle particulier dans la théorie de la quantification géométrique, comme nous allons l'expliquer dans la section suivante. L'étude des fibres de Bohr-Sommerfeld fournissent un autre lien entre la géométrie de l'espace des modules et les TQFT de Witten-Reshetikhin-Turaev.

En effet, il a été pour la première fois observé dans [**?**] que la dimension des espaces $V_r(\Sigma)$ est égale au nombre de fibres de Bohr-Sommerfeld des applications $h_{\mathcal{C}}$. La preuve de Jeffrey et Weistman repose sur un calcul explicite de l'holonomie du fibré de Chern-Simons dans cette paramétrisation. Ce calcul est repris dans [**?**] en ajoutant des fibrés de demi-formes. On obtient le résultat suivant:

Proposition 2.1. *[**?**]Soit Σ une surface fermée et $\mathcal{C}$ une famille de courbe la décomposant en pantalons et $h_{\mathcal{C}} : \mathcal{M}(\Sigma) \to P$ l'application moment associée.*
*On note pour $e \in E$ ou $v = (e, f, g) \in S$, u_e et $u_v = \dfrac{u_e + u_f + u_g}{2}$ les générateurs du réseau $\dfrac{1}{2\pi}\Lambda$ défini dans la Section **??**. Pour $\alpha \in \mathring{P}$, $\alpha + tu_e$ (resp. $\alpha + tu_v$) parcoure 2π périodiquement (resp. π-périodiquement) un lacet $\gamma_{\alpha,e}$ (resp. $\gamma_{\alpha,v}$) dans $h_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathring{P})$. Alors*

- *L'holonomie de $\mathcal{L}$ le long de $\gamma_{\alpha,e}$ est $e^{2i\pi\alpha_e}$*
- *L'holonomie de $\mathcal{L}$ le long de $\gamma_{\alpha,v}$ est $e^{i\pi(\alpha_e+\alpha_f+\alpha_g)}$*

- *L'holonomie de δ est 1 le long des $\gamma_{\alpha,e}$ et -1 le long des $\gamma_{\alpha,v}$.*

Ainsi, $\alpha \in \mathring{P}$ représente une fibre de Bohr-Sommerfeld de niveau r si et seulement si $r\alpha \in r\mathring{P}$ est un coloriage r-admissible.

3 Quantification géométrique

La Section **??** nous a permis d'introduire les TQFT de Reshetikhin-Turaev. On a construit ainsi, à partir de la donnée géométrique d'une surface Σ, une suite d'espaces vectoriels $V_r(\Sigma)$ et associé aux courbes γ sur la surface des endomorphismes de $V_r(\Sigma)$. L'objet de la présente section est d'introduire une procédure générale, appelée quantification géométrique, qui à partir de la donnée géométrique d'une variété Kählerienne munie de certains fibrés en droites (M, ω, L, δ) construit de tels espaces vectoriels et endomorphismes. Une telle variété est dite préquantifiée.
Nous avons vu à la Section **??** que $\mathcal{M}(\Sigma)$ était naturellement munie d'une structure symplectique, et de plus on a introduit deux fibrés: le fibré de Chern-Simons et un fibré de demi-formes pour construire une structure de variété préquantifée sur $\mathcal{M}(\Sigma)$.
Enfin, nous expliquerons qu'on peut associer à une variété préquantifiée M une suite d'espace vectoriels et aux fonctions lisses sur M des opérateurs appelés opérateurs de Toeplitz. On décrira la forme des vecteurs propres de ces opérateurs.

3.1 Variétés préquantifiées et opérateurs de Toeplitz

Soit M une variété Kählerienne compacte de dimension complexe n, on note ω sa forme symplectique. Tout fibré L en droites complexes muni d'une structure hermitienne est localement holomorphiquement trivialisable. Si dans une telle trivialisation locale, la forme hermitienne sur L s'écrit $h_L = e^{-\varphi}$ alors on définit la courbure de Chern de L par $c(L) = \partial\overline{\partial}\varphi$. On appelle *fibré préquantifiant* sur M tout fibré en droites complexes L de courbure $c(L) = \frac{1}{i}\omega$.
M étant une variété complexe de dimension n, le fibré des n-formes holomorphes $\Omega^{n,0}T^*M$ est un fibré en droites complexe sur M. On appelle fibré de demi-formes tout fibré en droites δ muni d'un isomorphisme de fibré

$$\varphi : \delta^{\otimes 2} \to \Omega^{n,0}T^*M$$

Une variété complexe n'admet de fibré de demi-formes que si l'obstruction donnée par la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$ s'annule. Si tel est le cas, comme on peut toujours tordre un fibré de demi-formes par un fibré plat d'holonomie dans $\{\pm 1\}$, l'ensemble des fibrés de demi-formes est un espace affine paramétré par $H^1(M, \{\pm 1\})$.

Définition 3.1. *Une variété préquantifiée (M, ω, L, δ) est une variété Kählerienne M de forme symplectique ω munie d'un fibré L préquantifiant, et d'un fibré δ de demi-formes.*

La variété M étant compacte, pour tout entier $r \geq 0$, les ensembles $H_r = H^0(M, L^r \otimes \delta)$ des sections holomorphes des fibrés en droites $L^r \otimes \delta$ sont des espaces vectoriels de dimension finie. Notons h la structure hermitienne sur le fibré $L^r \otimes \delta$. Cette structure induit un produit scalaire hermitien sur H_r par la formule suivante:

$$\langle s, s' \rangle = \int_M h(s, s') \frac{\omega^n}{n!}$$

Les sections s de $L^r \otimes \delta$ telles que la norme $||s||^2 = \langle s, s\rangle$ est finie sont appelées sections $\mathbb{L}^2$ de $L^r \otimes \delta$. Les sections holomorphes sont également $\mathbb{L}^2$, car continues et car M est compacte. On note l'ensemble de ces sections $\mathbb{L}^2(M, L^r \otimes \delta)$.
On dispose alors d'un opérateur de projection orthogonale

$$\Pi_r : \mathbb{L}^2(M, L^r \otimes \delta) \to H^0(M, L^r \otimes \delta)$$

Définition 3.2. *Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $C^\infty(M)$. On dit qu'une suite $T_r \in \mathrm{End}(H^0(M, L^r \otimes \delta)$ est un opérateur de Toeplitz si pour tout k la suite d'opérateurs*

$$T_r - \Pi_r \circ m_{f_0+\ldots+\frac{1}{r^k}f_k}$$

est un $O(r^{-k-1})$ pour la norme d'opérateur associé à la norme $\mathbb{L}^2$.
Dans ce cas, la série formelle $f = f_0 + hf_1 + \ldots \in C^\infty(M)[[h]]$ est appelé le symbole de l'opérateur T_r et f_0 est son symbole principal.

Remarquons que si f est une fonction non nulle, la norme des opérateurs $\Pi_r m_f$ est équivalente à $||f||_\infty$. Ceci implique en particulier l'unicité du symbole d'un opérateur de Toeplitz.
Nous serons amené à introduire dans la partie **??** une définition un peu différente d'opérateur de Toeplitz, puisque nous étudierons une variété Kählerienne non compacte M. La variété M sera en effet donnée par un ouvert dense de $\mathcal{M}(\Sigma)$ correspondant aux valeurs régulières d'une application moment.
Nous détaillons dans cette introduction les résultats classiques sur les opérateurs de Toeplitz dans le cas M compact. Les opérateurs de Toeplitz sont stables par composition:

Théorème 3.1. *[?] Soit $f, g \in C^\infty(M)[[h]]$ et T_f et T_g des opérateurs de Toeplitz sur M. Alors l'opérateur $T_f \circ T_g$ est un opérateur de Toeplitz dont le symbole $f * g$ ne dépend que de f et g. L'application*

$$\begin{array}{ccccc} C^\infty(M)[[h]] & \times & C^\infty(M)[[h]] & \to & C^\infty(M)[[h]] \\ f & , & g & \to & f * g \end{array}$$

munit $C^\infty(M)[[h]]$ d'une structure d'algèbre stellaire. On a:

$$f * g = f_0 g_0 + O(h) \text{ et } f * g - g * f = \frac{h}{i}\{f_0, g_0\} + O(h^2)$$

Rappelons qu'un produit stellaire est un produit associatif et $\mathbb{C}[[h]]$-linéaire sur $C^\infty(M)[[h]]$ et dont l'ordre 0 correspond au produit sur $C^\infty(M)$. A l'ordre 1, un tel produit s'écrit toujours:

$$f * g = f_0 g_0 + h(f_1 g_0 + f_0 g_1 + B_1(f_0, g_0)) + O(h^2)$$

où B_1 est une forme bilinéaire dont la partie antisymétrique est un crochet de Poisson.
On appelle une équivalence de jauge sur $C^\infty(M)[[h]]$ une application

$$D : C^\infty(M)[[h]] \to C^\infty(M)[[h]]$$

telle que $D = Id + \sum_{i\geq 1} h^i D_i$ où les D_i sont des opérateurs différentiels. Deux produits stellaires $*$ et $\square$ sont dits équivalents s'il existe une équivalence de jauge D telle que

$$f * g = D(D^{-1}(f) \square D^{-1}(g))$$

Un calcul classique montre que pour deux produits stellaires équivalents, la forme B_1 a même partie antisymétrique et de plus tout produit stellaire est équivalent à un produit tel que B_1 soit antisymétrique. L'équivalence de jauge est alors unique à l'ordre 1.
En conclusion, il existe un opérateur différentiel D tel que si $\sigma_1(f) = f_1 + D(f_0)$, alors pour le produit stellaire $*$ défini par la composition des opérateurs de Toeplitz vérifie

$$\sigma_1(f * g) = f_0\sigma_1(g) + \sigma_1(f)g + \frac{h}{i}\{f_0, g_0\}$$

Cet opérateur est unique modulo un champ de vecteur. La quantité $\sigma_1(f)$ est alors un *symbole sous-principal* de Weyl de l'opérateur T_f.

3.2 Spectres et vecteurs propres des opérateurs de Toeplitz

Déterminer le spectre et les vecteurs propres d'opérateurs différentiels est un problème fondamental en analyse, pour lequel les méthodes de l'analyse micro-locale s'avèrent très fructueuses. Un premier exemple classique de l'utilisation de telles méthodes est celui de l'approximation BKW pour déterminer les solutions $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ de l'équation de Schrödinger

$$(\widehat{H} - E)u = 0$$

où $\widehat{H}$ est l'opérateur de Schrödinger $\widehat{H} = -h\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)$ avec $V \in C^\infty(\mathbb{R})$. La méthode BKW consiste à chercher des solutions de la forme $a(x)e^{i\frac{S(x)}{h}}$ avec

$$a(x) = \sum_{j\geq 0} a_j(x)\left(\frac{h}{i}\right)^j$$

Appliquer formellement l'équation à cet Ansatz produit l'équation eiconale

$$S'(x)^2 + V(x) - E = 0$$

et des équations de transport

$$a_{j-1}^{''}(x) + 2a_j'(x)S'(x) + a_j(x)S^{''}(x) = 0$$

On peut alors résoudre ces équations et donner un sens aux solutions formelles $a(x)e^{i\frac{S(x)}{h}}$ pour obtenir des solutions de l'équation de Schrödinger. Nous renvoyons à [**?**] pour une exposition détaillée de ces techniques.
Borthwick, Paul et Uribe ont introduit l'idée dans [**?**] d'utiliser une méthode perturbative semblable à la méthode BKW pour calculer les vecteurs propres d'opérateurs de Toeplitz, en les exprimant comme des sections lagrangiennes. Cette approche a ensuite été développée par Charles [**?**].
Dans le cas simple où M est de dimension 2 et T_r^f est un opérateur de Toeplitz de symbole principal $f_0 = h$ et de symbole sous-principal nul, Charles obtient dans [**?**] le résultat suivant sur le spectre de l'opérateur T_f.

Théorème 3.2. *[?]Soit M une variété préquantifiée de dimension 2 et T^f un opérateur de Toeplitz de symbole principal f_0 et symbole sous-principal de Weyl nul.*
On considère un intervalle $]a, b[$ inclus dans les valeurs régulières de f_0. Les opérateurs T_r^f étant auto-adjoints, on note $\lambda_1^r < \ldots < \lambda_{k_r-1}^r$ leurs valeurs propres dans $]a, b[$, λ_0^r la plus grande valeur propre de T_r strictement inférieure à a et $\lambda_{k_r}^r$ la plus petite valeur propre

strictement supérieure à b. On pose $a(r) = \dfrac{a+\lambda_0^r}{2}$ *et* $b(r) = \dfrac{b+\lambda_{k_r}^r}{2}$.
Soit $\beta_0^r < \ldots < \beta_{l_r}^r$ *les éléments de* $]a,b[$ *tels que l'holonomie de* $L^r \otimes \delta$ *soit triviale sur* $f_0^{-1}(\beta_i)$. *Alors, à partir d'un certain rang, les valeurs propres de* T_r^f *dans* $]a(r),b(r)[$ *sont toutes simples,* $k_r = l_r$ *et enfin il existe une constante* C *telle que* $|\lambda_i^r - \beta_i^r| < \dfrac{C}{r}$ *pour tout* r *assez grand et tout* $i \in \{0,\ldots,k_r\}$.

Si une suite $E^r = E_0 + \dfrac{1}{r}E^1 + O(r^{-2})$ est telle que l'holonomie de $L^r \otimes \delta$ sur $f_0^{-1}(E_r)$ est triviale à $O(r^{-1})$ près, alors ce théorème implique que E^r est proche à $O(r^{-2})$ du spectre $\mathrm{Spec}(T^f)$. On dit dans ce cas que E_r *vérifie les conditions de Bohr-Sommerfeld* à $O(r^{-1})$ près.

On définit un *quasimode* comme une suite de vecteurs ψ_r de norme $O(r^m)$ pour un certain m telle que

$$T_f^r \psi_r = E_r \psi_r + O(r^{-k})$$

pour tout k, le O étant au sens de la norme $\mathbb{L}^2$ sur les sections de $L^r \otimes \delta$.
Un quasimode pour $E_r = E^0 + \dfrac{1}{r}E^1 + \ldots$ vérifiant les conditions de Bohr-Sommerfeld se concentre sur les lignes de niveau $h = E^0$, le supremum de ψ_r sur tout compact disjoint de ces lignes de niveau est un $O(r^{-k})$ pour tout k.

Considérons (M,ω,L,δ) une variété préquantifiée avec M compacte de dimension réelle $2n$, et $h = (h_i)_{1\leq i\leq n} : M \to \mathbb{R}^n$ une application moment, qu'on suppose analytique. En particulier, les h_i Poisson commutent. Soit $T_r^1,\ldots,T_r^n$ des opérateurs de Toeplitz qui commutent deux à deux, de symboles principaux les h_i et de symboles sous-principaux de Weyl nuls. Le théorème d'Arnold-Liouville assure que $h^{-1}(x)$ est un tore de dimension n si x est une valeur régulière de h. On s'intéresse au spectre joint

$$\mathrm{Spec}(T_r) = \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\ /\exists \varphi \in H_r\ /T_r^i\varphi = \lambda_i\varphi\}$$

Un quasimode pour une suite $E_r = E^0 + \dfrac{1}{r}E^1 + \ldots \in \mathbb{R}^n$ est une suite de vecteurs $\psi_r \in H_r$ de norme $||\psi_r|| = O(r^m)$ pour un certain m et tels que $T_r^i\psi_r = E_r^i\psi_r + R_r$ où le reste R_r est un $O(r^{-k})$ pour tout k. On va pouvoir construire des quasimodes à partir de section F holomorphe de L qui sont plates sur $h^{-1}(E^0)$. Notons que comme les fibres régulières de h sont analytiques, on peut étendre une section plate de L sur $h^{-1}(E_0)$ holomorphiquement sur un voisinage de $h^{-1}(E_0)$.
Le résultat suivant est démontré dans [**?**]:

Théorème 3.3. *Soit* E_r *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^n$ *telle que* $E_r = E^0 + \dfrac{1}{r}E^1 + O(r^{-2})$, *avec* E^0 *une valeur régulière de* h. *Alors on a:*

- $E_r \in \mathrm{Spec}(T_r) + O(r^{-1})$ *si et seulement si l'holonomie de* $L^r \otimes \delta$ *sur le tore* $\Lambda_{E_r} = h^{-1}(E_r)$ *est triviale à* $O(r^{-1})$ *près. C'est la condition de Bohr-Sommerfeld.*

- *Soient* F *et* g *des sections de* L *et* δ, *à support compact et holomorphes sur un voisinage de* Λ_{E_r}. *Si de plus* F *est plate et de norme* 1 *sur* Λ_{E_r} *et de norme* < 1 *ailleurs, et que* g *vérifie les équations de transport* $\mathcal{L}_{X_{h_i}} g = 0$ *alors le vecteur* $\psi_r = \dfrac{F^r g}{||F^r g||}$ *de* H_r *vérifie*

$$T_r^i \psi_r = E_r \psi_r + O(\frac{1}{r^2})$$

et ψ_r est proche à $O(r^{-1})$ près d'un vecteur propre joint des T_r^i.

On donnera un énoncé plus précis de ces résultats dans la partie **??**.

Partie III

Asymptotic formulas for curve operators in TQFT

In this section, we show that the matrix elements of the curve operators $T_r^\gamma \in \mathrm{End}(V_r(\Sigma))$ associated to multicurves γ on a surface Σ have an asymptotic expansion in orders of $\frac{1}{r}$. Furthermore, we give a formula to compute the first two terms in terms of trace functions, generalizing results of [**?**].
This property, proved in [**?**] for the punctured torus and the 4-holed sphere, was used by them to show that curve operators on these surfaces are Toeplitz operators and to obtain the semi-classical behavior of many quantum invariants.
Our result is a first step in order to present curve operators as Toeplitz operators, as we will do in Section **??**.

4 Introduction

Let Σ be a compact oriented surface. As was explained in Section **??**, the vector spaces $V_r(\Sigma)$ come with a natural Hermitian form and for each banded graph Γ, such that the boundary of a regular neighboorhood of Γ is Σ, there is a natural Hermitian basis $(\varphi_c)_{c\in U_r}$, labelled by the set U_r of r-admissible colorings $c : E \to \mathbb{Z}$ of the set E of edges of Γ.
Then the matrix coefficients of the curve operators admit a presentation as below:

$$T_r^\gamma \varphi_c = \overline{c}(\gamma) \sum_{k:E\to\mathbb{Z}} F_k^\gamma(\frac{c}{r}, \frac{1}{r})\varphi_{c+k}$$

Here, $\overline{c}$ is the element of $H^1(\Gamma, \partial\Gamma, \mathbb{Z}/2)$ dual to the multicurve L_c on Γ that has $c_e - 1$ parallel strings along each edge e of Γ. The factor $\overline{c}(\gamma)$ is just a sign and is always trivial if Γ is planar. Furthermore, we have an open set $U \subset \mathbb{R}^E$, such that for $c \in U_r$, we have $\frac{c}{r} \in \overline{U}$, and F_k^γ are smooth functions on a neighborhood of $U \times \{0\}$ in $U \times [0, \infty)$.
This result extends a result of [**?**], which studied the case of curve operators on the punctured torus and the four-holed sphere. In this article, an asymptotic formula was given to characterize the first two asymptotic terms of the F_k^γ in orders of $\frac{1}{r}$ as Fourier coefficients of trace functions f_γ on the moduli space $\mathcal{M}(\Sigma) = \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}_2)/\mathrm{SU}_2$, where $f_\gamma : \rho \mapsto -\mathrm{tr}(\rho(\gamma))$. We generalize the approach and the asymptotic formula of [**?**]. We notice a new phenomenon, not appearing in the simple case of the four-holed sphere or the pointed torus: oscillating signs appear in the matrix coefficients of curve operators. To control these signs we introduce the intersection algebra:
First let π be the natural map $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2) \to H^1(\Gamma, \partial\Gamma, \mathbb{Z}/2)$ and B be its image. The intersection algebra of Γ is:

$$A_\Gamma = \bigoplus_{[\gamma]\in B} \mathbb{C}[\gamma]$$

with the product $[\gamma][\delta] = (-1)^{\gamma\cap\tilde{\delta}}[\gamma+\delta]$ where $\pi(\tilde{\delta}) = \delta$ and $\cap$ is the intersection form $H^1(\Gamma, \partial\Gamma, \mathbb{Z}/2) \times H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$.
We remark that Σ can be seen as the gluing of two copies of Γ along their boundaries and that there is a continuous folding map $p : \Sigma \to \Gamma$. The composition of this map and π induces a map $p_* : H^1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) \to H^1(\Gamma, \partial\Gamma, \mathbb{Z}/2)$.
Then for each morphism of algebras $\chi : A_\Gamma \to \mathbb{C}$ we introduce the ψ-symbol:

$$\sigma_\chi^\gamma(\tau, \theta, \hbar) = \sum_{e\in E} F_k^\gamma(\tau, \hbar) e^{ik\theta} \chi(p_*(\gamma))$$

Theorem 4.1. *Let $\mathcal{C}$ be the pants decompostion of Σ induced by Γ et $h_\mathcal{C}$ the associated momentum mapping. $\exists R_\chi$ an action-angle parametrization of $\mathcal{M}(\Sigma)$ such that we have the asymptotic expansion:*

$$\sigma_\chi^\gamma(\tau, \theta, \hbar)) = f_\gamma(R_\chi(\tau, \theta)) + \frac{\hbar}{2i} \sum_{e\in E} \frac{\partial^2}{\partial\tau_e \partial\theta_e} f_\gamma(R_\chi(\tau, \theta)) + o(\hbar)$$

where f_γ is the trace function on $\mathcal{M}(\Sigma)$ introduced above.

This formula is very similar to the one in [**?**] which gives an approximation at order 1 of curve operators in the geometric setting of TQFT by Toeplitz operators having trace functions as principal symbols and whose subprincial symbols are computed in terms of the Laplacian of trace functions. Their methods using the geometric framework of TQFT and the Hitchin connection are quite different from ours which is more based on skein theory and the continuation of the work of [**?**].
The proof of [**?**] in the case where Σ is the punctured torus and the four-holed sphere relied on explicit computations for some simple set of curves that generates the Kauffman algebra of Σ, then extending the result to general curves. This approach failed in higher genus as no simple set of generators is known. Instead, we developped a more conceptual and systematic method, which relies on the study of algebraic properties of the ψ-symbol and the Kauffman algebra of Σ.

The authors of [**?**] used the asymptotic estimation to construct a framework for curve operators on the punctured torus and the four-holed sphere as Toeplitz operators on the sphere. This allowed to implement the WKB-approximation for eigenvectors, and deduce asymptotic expansions of quantum invariants (such as a new proof of the asymptotic expansion of $6j$-symbols, and an expression for the punctured S-matrix). The asymptotic formula we compute for matrix coefficients of curve operators on general surfaces will allow us to see curve operators as Toeplitz operators associated to trace functions in Section **??**. It will also yield asymptotics of many quantum invariants, as we will also explain in Section **??**.

5 Matrix coefficients of curve operators

We consider a surface Σ with marked points $(p_1, \hat{c_1}), \ldots, (p_n, \hat{c_n})$. We have seen in Section **??** that the TQFT of Witten-Reshetikhin-Turaev associate to such a surface a finite dimensional Hermitian vector space $V_r(\Sigma, \hat{c})$. Moreover, for γ a multicurve on $\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$, or more generally an element of $K(\Sigma, \hat{c}, \zeta_r)$ we have defined an endomorphism T_r^γ of $V_r(\Sigma, \hat{c})$ such that the map

$$\begin{array}{rccc} T_r^{\cdot}: & K(\Sigma, \zeta_r) & \longrightarrow & \mathrm{End}(V_r(\Sigma, \hat{c})) \\ & \gamma & \longmapsto & T_r^\gamma \end{array}$$

is a morphism of algebras.

Furthermore, to any pair of pants decomposition of Σ by a familly of curves $\mathcal{C} = (C_e)_{e\in E}$ and to any dual banded trivalent graph Γ to the decomposition, we recalled that there is an Hermitian basis $(\varphi_c)_{c\in U_r}$ of the space $V_r(\Sigma, \hat{c})$. The index set U_r is the set of admissible coloring of edges $e \in E$ of Γ. We explained that a coloring is admissible if the following conditions hold:

- For each edge e connected to a univalent vertex p_i one has $c_e = \hat{c}_i$.
- For any triple of edges e, f, g adjacent to the same vertex one has
  - $c_e + c_f + c_g$ is odd
  - $c_e + c_f < c_g$
  - $c_e + c_f + c_g < 2r$.

For the remainder of this section, we fix a surface Σ with marked points $p_1, \dots, p_n$ and we fix $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. We define colorations of the marked points as $(\hat{c}_r)_i = rt_i$. Thus we will need to suppose that r is a multiple of D, the least common denominator of the t_i, so that $(\hat{c}_r)_i$ are integers. For any multicurve γ, and r a mutiple of D, T_r^γ is an endomorphism of $V_r(\Sigma, \hat{c}_r)$. We fix a pants decomposition $\{C_e\}_{e\in E}$ of Σ and a compatible trivalent banded graph Γ drawn on Σ, and thus a Hermitian basis $(\varphi_c)_{c\in U_r}$ of $V_r(\Sigma, \hat{c}_r)$ as explained above.

Note that the data of Γ give us a cell decomposition of Σ into a bunch of hexagons, by the boundary components of Γ, and the curves C_e. For each $e \in E$, we name $C_e^{'}$ (respectively $C_e^{''}$) the segment $\Gamma \cap C_e$ (resp. $C_e \setminus \mathrm{Int}(C_e \cap \Gamma)$), see Figure **??**.
We will associate to each admissible color c an element $\overline{c}$ of $H^1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)$ by writing, for $\gamma \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)$:

$$\overline{c}(\gamma) = \prod_{e\in E} (-1)^{(c_e-1)(C_e^{'*}(\gamma)+C_e^{''*}(\gamma))}$$

In this formula, $C_e^{'*}$ (resp. $C_e^{''*}$) is the cellular cochain dual to $C_e^{'}$ (resp. $C_e^{''}$). We can check that the such defined $\overline{c}$ is indeed a cocycle as its value on the boundary of each hexagon is of the form $(-1)^{c_e+c_f+c_g-1}$ for e, f, g three adjacent edges, which equals to 1 as c is an admissible color.
There is also a way to think of $\overline{c}(\gamma)$ as computing an algebraic intersection modulo 2 of curves. If c is an admissible coloring of the graph Γ, we obtain a multicurve L_c inside Γ by taking $c_e - 1$ parallel strings along the edge e of Γ for any $e \in E$ and then joining strings together at trivalent vertices without intersections. Furthermore, the surface Σ is obtained by gluing two copies of the banded graph Γ. Indeed, the complement of Γ in Σ is a trivalent banded graph homeomorphic to Γ. Thus we get a continuous "folding" map $p : \Sigma \to \Gamma$ by identifying the two banded graphs. The map p and the projection $\pi : H_1(\Gamma, \mathbb{Z}/2) \to H_1(\Gamma, \partial\Gamma, \mathbb{Z}/2)$ induces a map $p_* : H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) \to H_1(\Gamma, \partial\Gamma, \mathbb{Z}/2)$. Then $\overline{c}(\gamma)$ is simply the intersection $L_c \cdot p_*(\gamma)$.

We introduce a set U of "real admissible colorations", that we view as a set of limits of admissible colorations in U_r. Recall that we denote by S the set of triples (e, f, g) such that C_e, C_f and C_g bounds a pair of pants. Also for $1 \le i \le n$ we call e_i the edge adjacent

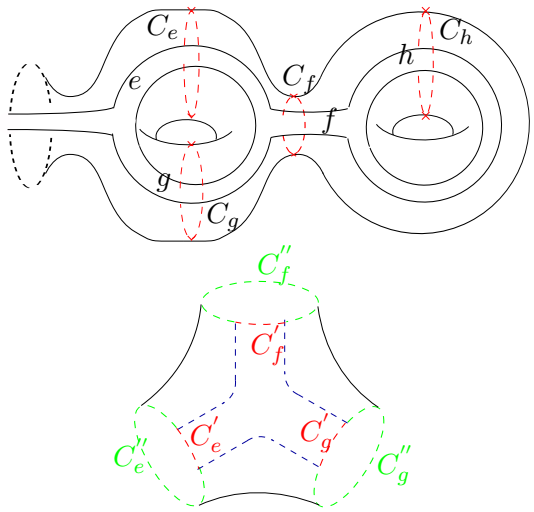


Figure 12: A banded graph compatible to a pants decomposition of Σ by the curve C_e and the associated cell decomposition of a pants into hexagons

to the marked point p_i. Then we define:

$$U = \{\tau : E \to (0,1) | \forall (e,f,g) \in S,\ \tau_e + \tau_f + \tau_g < 2,\ \tau_e < \tau_f + \tau_g, \\ \text{and for } 1 \leq i \leq n,\ \tau_{e_i} = t_i\}$$

It was seen in Section **??** that this set is the interior of the image of $\mathcal{M}(\Sigma)$ by the momentum map $h_{\mathcal{C}} = (\frac{1}{\pi}\text{Acos}(\frac{\text{Tr}(\rho(C_e))}{2}))_{e\in E}$.

We can now give an expression for $T_r^\gamma \varphi_c$ when $\frac{c}{r}$ tends to an element $\tau \in U$ when $r \to +\infty$.

Theorem 5.1. *Let γ be a multicurve in $\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$. We introduce an open set $V_\gamma \subset U \times [0,1]$ by the formula*

$$V_\gamma = \{(\tau, \hbar)\ /\ (\tau_e + \varepsilon_e \hbar I_e)_{e\in E} \in U\ ,\ \forall \varepsilon \in \{\pm 1\}^E\}$$

Then
1) There are smooth functions $(F_k^\gamma)_{k:E\to\mathbb{Z}}$ on V_γ such that we have for any $c \in U_r$,

$$T_r^\gamma \varphi_c = \overline{c}(\gamma) \sum_{k:E\to\mathbb{Z}} F_k^\gamma(\frac{c}{r}, \frac{1}{r})\varphi_{c+k}$$

2)Let $I_e = \sharp(\gamma \cap C_e)$. If there exists $e \in E$ such that $k_e > I_e$ or such that $k_e \neq I_e (mod\ 2)$, then $F_k^\gamma = 0$.

We recall that here, $\overline{c}$ is an element of $H^1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)$, so that $\overline{c}(\gamma)$ is just a sign. So up to this oscillating sign which varies with the level r, the matrix coefficients of curves operators are converging when $r \to +\infty$. One might remark that this sign factor did not appear in [**?**], but it can be shown that it is trivial when the banded trivalent graph Γ is planar (which was the case for the punctured torus and the four-holed sphere).

The two points of the theorem are proved by doing local computations, working in each pants of the pants decomposition of Σ. The proof is rather technical but not difficult and relies on fusion rules in TQFT. It will be detailed in **??**.

The coefficients F_k^γ can be computed recursively for any surface Σ (together with pants decomposition $\mathcal{C}$ and trivalent banded graph Γ), but are uneasy to make explicit. However, we will provide a formula to get the first two term $F_{k,0}^\gamma$ and $F_{k,1}^\gamma$ of their asymptotic expansion in orders of $\hbar = \dfrac{1}{r}$:

$$F_k^\gamma(\tau,\hbar) = F_{k,0}^\gamma(\tau) + \hbar F_{k,1}^\gamma(\tau) + o(\hbar)$$

To state our asymptotic formula, we have yet another definition to give.

We defined the *intersection algebra* A_Γ as

$$A_\Gamma = \bigoplus_{\alpha\in B} \mathbb{C}\cdot[\alpha]$$

with the product structure given by $[\gamma]\cdot[\delta] = (-1)^{\langle\gamma,\delta\rangle}[\gamma+\delta]$. We will explain in **??** that the form we defined on B does not depend on the lift of α, is bilinear and symmetric, thus the product we obtained on A_Γ is really associative and actually commutative.
Now A_Γ is a commutative $\mathbb{C}$-algebra of dimension $l = 2^d$, where d is the dimension of B. Define $\hat{A}_\Gamma$ to be the set of algebra morphisms $A_\Gamma \to \mathbb{C}$. Then l is the cardinal of $\hat{A}_\Gamma$, and A_Γ is isomorphic to $\mathbb{C}^l$, by the map $a \in A_\Gamma \mapsto (\chi(a))_{\chi\in\hat{A}_\Gamma}$.
An important case will be if the banded graph Γ can be embedded in the plane, then B has dimension 0 and A is just $\mathbb{C}$.

Definition 5.1. *Let γ be a multicurve on Σ. For all $\theta \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^E$ and $(\tau,\hbar) \in V_\gamma$, we define the ψ-symbol of T_r^γ as the following element of A_Γ:*

$$\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar) = \sum_{k:E\to\mathbb{Z}} F_k(\tau,\hbar)e^{ik\cdot\theta}[p_*(\gamma)]$$

Let us add a few remarks on this definition:
1) To begin with, the sum over $k : E \to \mathbb{Z}$ is actually a finite sum, as only a finite number of coefficients F_k^γ does not vanish by the second point of Theorem **??**. Furthermore, we wrote $k\cdot\theta$ for $\sum_{e\in E} k_e\theta_e$. Also, we will often omit the p_* and just write $[\gamma]$ for the element $[p_*(\gamma)]$, when γ is a multicurve.
2) We will often refer to the zero order in $\hbar$ of the ψ-symbol, that is $\sigma^\gamma(\tau,\theta,0)$, as the principal symbol of T_r^γ.
3) For a fixed $(\tau,\theta,\hbar)$, the definition of the ψ-symbol only introduces $\gamma \mapsto \sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)$ as a map from multicurves to A_Γ. We extend it by multilinearity to obtain $\sigma(\tau,\theta,\hbar)$: $K(\Sigma, -e^{\frac{i\pi\hbar}{2}}) \to A_\Gamma[[\hbar]]$, as $K(\Sigma, -e^{\frac{i\pi\hbar}{2}})$ is spanned by multicurves.

The Fourier coefficients of the ψ-symbol of T_r^γ are the matrix coefficients of T_r^γ. Thus the asymptotic behavior of these matrix coefficients are entirely captured by the ψ-symbol. We use it to state our main result:

Theorem 5.2. *Let γ be a multicurve on Σ. The ψ-symbol $\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)$ of the curve operator T_r^γ has the following asymptotic expansion:*

$$\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar) = \sigma^\gamma(\tau,\theta,0) + \frac{\hbar}{2i}\sum_{e\in E}\frac{\partial^2}{\partial\tau_e\partial\theta_e}\sigma^\gamma(\tau,\theta,0) + o(\hbar)$$

and writing $\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta) = \chi(\sigma^\gamma(\tau,\theta,0))$, we have $\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta) = f_\gamma(R_\chi(\tau,\theta)) = -Tr(R_\chi(\tau,\theta)(\gamma))$, where the R_χ are action-angle parametrizations associated to the momentum map $h_\mathcal{C}$ on

$$\mathcal{M}(\Sigma) = Hom(\pi_1(\Sigma\setminus\{p_1,\dots,p_n\}), SU_2)/SU_2$$

differing only by the origin of angles.

The above theorem is quite similar to results obtained by Andersen and Gammelgaard in [**?**] in the geometric framework of Witten-Reshetikhin-Turaev TQFT. The geometric framework for TQFT consists of providing a compact closed surface Σ with a particular complex structure σ in the Teichmüller space $\mathcal{T}$ of Σ. The moduli space of Σ has an associated structure of Kähler manifold M_σ. It is then possible to identify TQFT vector spaces $V_r(\Sigma)$ with spaces of holomorphic sections $H^0(M_\sigma, L^r)$, where L is the Chern-Simons vector bundle. The theorem 7 of [**?**] shows that curve operators T_r^γ are approximated at order 1 by Toeplitz operators of principal symbol f_γ and subprincipal symbols

$$\frac{1}{4}\Delta_\sigma f_\gamma + i\nabla_{X_F''} f_\gamma$$

where X_F'' is the $(0,1)$-part of the Hamiltonian vector field for the Ricci potential.
An alternative proof of Theorem **??** could be to combine the results of [**?**] with results explaining how these Laplace operators degenerate when the complex structure on Σ converges to the pair of pants decomposition. See [**?**] for an outline of such techniques, where it is explained how the complex structures on $\mathcal{M}(\Sigma)$ degenerate as σ converges to a pair of pants decomposition.

The proof of Theorem **??**, giving an asymptotic formula for the ψ-symbol, will be the goal of Sections **??** and **??**. It will rely heavily on the following property of the ψ-symbol, that explains its compatibility with the product in $K(\Sigma, -e^{\frac{i\pi\hbar}{2}})$:

Proposition 5.3. *Let γ and δ be two multicurves on Σ. Then we have the following asymptotic expression:*

$$\sigma^{\gamma\cdot\delta}(\tau,\theta,\hbar) = \left(\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)\sigma^\delta(\tau,\theta,\hbar) + \frac{\hbar}{i}\sum_e \partial_{\tau_e}\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)\partial_{\theta_e}\sigma^\delta(\tau,\theta,\hbar)\right) + o(\hbar)$$

This expression is similar to the composition of symbols of Toeplitz operators. This is not a surprise as curve operators can be approximated at order 1 by Toeplitz operators by [**?**]. The Theorem 8 of [**?**] gives the order 1 of the symbols of the composition of two such operators. It could again be possible to derive this result by degenerating the complex structure to a pair of pants decomposition.

According to this proposition, the principal symbol $\sigma^{\cdot}(\tau,\theta,0) \ : \ K(\Sigma,-1) \to A_\Gamma$ is a

morphism of algebras. Recall that there is an isomorphism between the algebras A_Γ and $\mathbb{C}^{\hat{A}_\Gamma}$, the components of which are morphisms we named $\chi : A_\Gamma \to \mathbb{C}$. Then the maps $\sigma_\chi = \chi \circ \sigma(\tau, \theta, 0) : K(\Sigma, -1) \to \mathbb{C}$ constitutes a collection of algebra morphisms.
We will then use the theorem of Bullock to show that these morphisms have the form $f \in \mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)] \to f(R_\chi)$, for some representations R_χ of $\pi_1(\Sigma \setminus \{p_1, \dots p_n\})$.
Finally, we identify precisely the representations R_χ and how they depend on (τ, θ) by checking the special values of the ψ-symbol on the curves C_e.

As for the computation of the first order term, we proceed in a similar fashion: first we will show, using only Proposition **??** that this term is related to derivations of algebras $K(\Sigma, -1) \to A$, then by studying the values of the ψ-symbol on the curves C_e and an other family of curves D_e, we show the first order term is indeed given by the formula in Theorem **??**.

6 Computations of curve operators using fusion rules

This section is devoted to the skein theory computations that will be needed in order to prove Theorem **??**. We describe the general form of matrix coefficents of curve operators, and give examples of explicit computations of the coefficients F_k^γ and the ψ-symbol σ^γ for some curves γ.

6.1 Fusion rules in a pants decomposition

In this paragraph, we will work with a fixed closed oriented surface Σ, along with a pants decomposition by a family of curves $\mathcal{C} = \{C_e\}_{e \in E}$. We can consider $n_e \geq 1$ parallel copies $(C_e^k)_{1 \leq k \leq n_e}$ of the curves C_e so that the curves C_e^k cut the surface Σ into a collection of pants $\{P_s\}_{s \in S}$ and annuli $\{A_e^k \ , e \in E \ , \ \ 1 \leq k \leq n_e - 1\}$.
We recall that to this pants decomposition is associated a Hermitian basis φ_c of $V_r(\Sigma)$, of which we will recall the construction:

Let Γ be a banded trivalent graph compatible to the pants decomposition $\mathcal{C}$ of Σ as in Subsection **??**. We recall that Γ is viewed as drawn on Σ. Given an admissible coloring $c \ : \ E \to C_r$, we define $\psi_c \in K(\Sigma; \hat{c}; \zeta_r)$ as follows:

- Replace each edge e of Γ by $c_e - 1$ parallel copies of e lying on Σ.
- Insert in the middle of each edge the idempotent $f_{c_e - 1}$ where we recall that f_k is k-th Jones-Wenzl idempotent.
- In the neighborhood of each trivalent vertex, join the three bunches of lines in Σ in the unique possible way avoiding crossings.

We recall that by the Theorem **??** of [**?**] that we introduced in **??**, this family of vectors is actually an orthogonal basis of $V_r(\Sigma, c)$ for a natural Hermitian structure defined in [**?**] and we have the formula:

$$||\psi_c||^2 = (\frac{2}{r})^{\frac{\chi(\Gamma)}{2}} \frac{\prod_P \langle c_P^1, c_P^2, c_P^3 \rangle}{\prod_e \langle c_e \rangle} \tag{1}$$

Here the first product is over all vertex P corresponding to pants of the pants decomposition, the second over the edges e of the graph Γ. We write $\langle n \rangle$ for $\sin(\frac{\pi n}{r})$, $\langle n \rangle!$ for $\prod_{i=1}^{n} \langle i \rangle$,

c_P^1, c_P^2, and c_P^3 for the colors of the 3 edges adjacent to P, and we also set

$$\langle a,b,c\rangle = \frac{\langle\frac{a+b+c-1}{2}\rangle!\langle\frac{a+b-c-1}{2}\rangle!\langle\frac{a-b+c-1}{2}\rangle!\langle\frac{b+c-a-1}{2}\rangle!}{\langle a-1\rangle!\langle b-1\rangle!\langle c-1\rangle!}$$

As we will work with TQFT vectors locally, inside a pants of the pants decomposition for example, we will need to give a local version of this norm. Notice that if we forget the global factor $(\frac{2}{r})^{\frac{\chi(\Gamma)}{2}}$ in the norm, we will not change the matrix coefficients of curve operators T_r^γ. Then, we will decide that the square of the norm of a trivalent graph is

$$\frac{\prod_P \langle c_P^1, c_P^2, c_P^3\rangle}{\prod_{e\in E_2}\langle c_e\rangle \prod_{e\in E_1}\langle c_e\rangle^{\frac{1}{2}}}$$

where the products in the denominator are over E_2, the set of edges adjacent to 2 internal vertices (we include the marked points here), and E_1 the set of edges adjacent to 1 internal vertex and 1 external vertex (the other edges bear no contribution to the norm). With this definition, if we paste pieces of colored graph to get the graph Γ, we obtain the previous norm.

With this setting, we give a normalized version of fusion rules in TQFT. The fusion rules derived in [**?**], give a way to compute the image of the vector φ_c by curves operators. We list the fusion rules that we will need below; our version differs from the rules in [**?**], as we express them with the normalized vectors φ_c instead of the vectors ψ_c from [**?**].

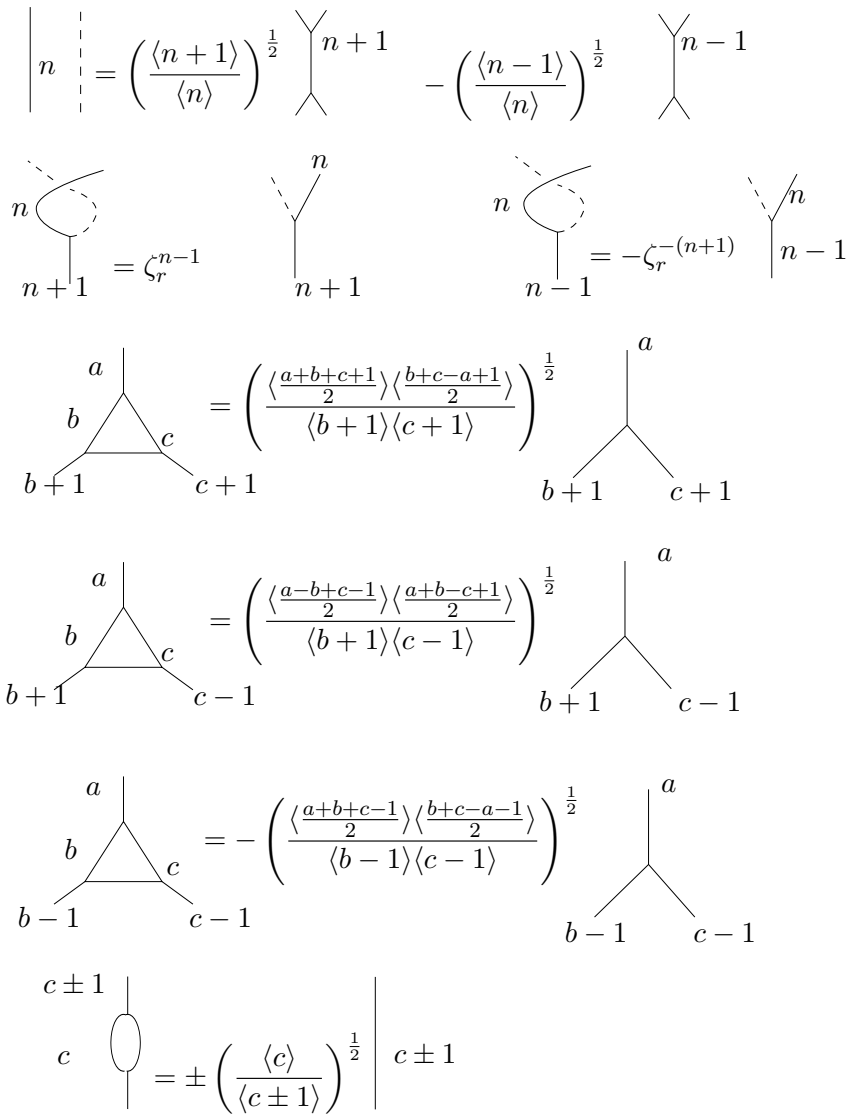


Figure 13: Fusion rules

These "normalized" fusion rules allow to simplify the union of a colored banded graph and a curve colored by 2. The dotted edges are colored by 2. The first rule allows to merge an edge colored by 2 with an other one. The second line consists of the "half-twist formulae" of [**?**]. When all curves have been merged with the graph, the 3rd, 4th and 5th lines can be used to remove trigons, and the last rule to remove bigons.

We will perform the computations by using fusion rules only locally, that is only inside of a pair of pants of the pants decomposition, or inside an annulus in the neighboorhood of one of the curves C_e.
Indeed, for γ a multicurve, by a classification provided by Dehn, we can isotope γ so that the intersection of γ with each pants P_s of the decomposition looks like the 4th picture of Figure **??**, and the intersection with each of the annuli A_e^k looks like one of the first three pictures of Figure **??**.
Furthermore, in this isotopy class, the intersection of γ with each C_e is the smallest in the isotopy class of γ. We refer to [**?**] for the proof of this classification.

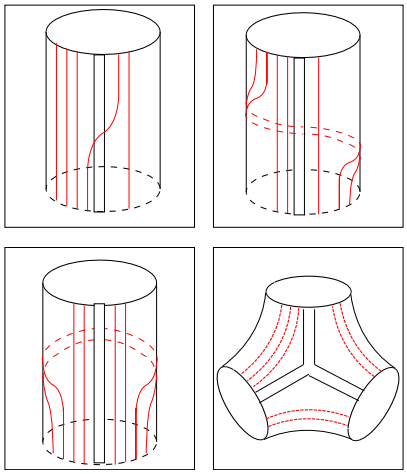


Figure 14: Dehn presentation of multicurves

Now, we do the computations in two steps:
First, we use fusion rules to reduce each type of piece to elements corresponding to the intersection of the graph Γ in a pants or annulus with a certain coloring, glued with "candlesticks".

We call a *candlestick* an element of the TQFT vector space of an annulus that is the normalized vector associated to a banded trivalent graph in an annulus, consisting of a central edge joining the boundary components (with no twist), colored by $n \in \mathcal{C}_r$ on the bottom component, a collection of legs colored by 2, joining the central edge and the bottom component, as in Figure **??**.

The data that define a candlestick with k legs $C(n, \varepsilon, \Theta)$ is the color $n \in \mathcal{C}_r$ of the central edge at the bottom, the order Θ in which the legs join the central edge, and the shifts of the color of the central edge $(\varepsilon_i)_{i=1\ldots k}$ when we pass each vertex corresponding to a leg.

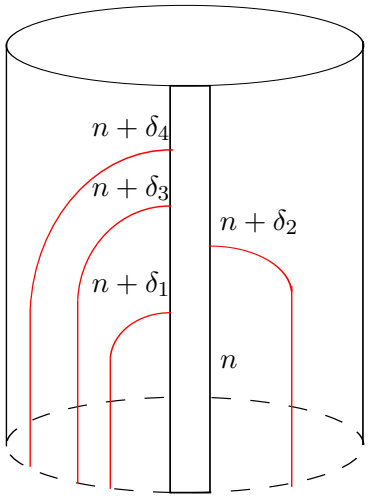
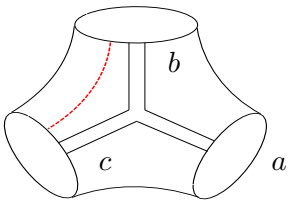


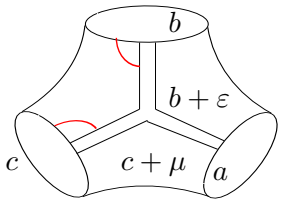
Figure 15: A candlestick $C(n,\varepsilon,\theta)$ with 4 legs

We wrote $\delta_i = \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_j$ the partial sums of the shifts. In the bottom the central edge is colored by n, and the color is shifted by ε_i when Γ meets the i-th leg. Notice that the legs can go alternatively to the left or to the right of the central edge.

Reduction of the different pieces : Simple computations using fusion rules give us the following formulae when the pants or the annuli contain only one curve:



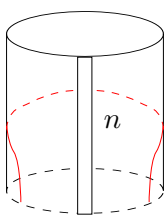
$$= \sum_{\varepsilon,\mu} F_{\varepsilon,\mu}(a,b,c,r)$$



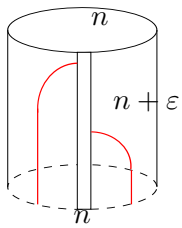
where we set $F_{+,+}(a,b,c,r) = \left(\frac{\langle \frac{a+b+c+1}{2} \rangle \langle \frac{b+c-a+1}{2} \rangle}{\langle b \rangle \langle c \rangle} \right)^{\frac{1}{2}}$,

$F_{+,-}(a,b,c,r) = F_{-,+}(a,c,b,r) = -\left(\frac{\langle \frac{a-b+c-1}{2} \rangle \langle \frac{a+b-c-1}{2} \rangle}{\langle b \rangle \langle c \rangle} \right)^{\frac{1}{2}}$

and $F_{-,-}(a,b,c,r) = -\left(\frac{\langle \frac{a+b+c-1}{2} \rangle \langle \frac{b+c-a-1}{2} \rangle}{\langle b \rangle \langle c \rangle} \right)^{\frac{1}{2}}$

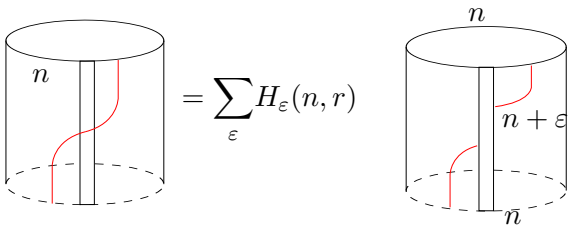


$$= \sum_{\varepsilon} G_{\varepsilon}(n,r)$$



where $G_+(n,r) = (-1)^{n+1} e^{\frac{-i\pi(n-1)}{r}} \left(\frac{\langle n+1\rangle}{\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}$

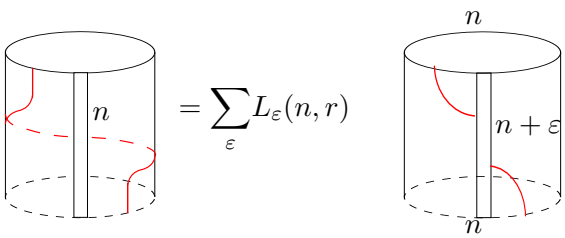
and $G_-(n,r) = (-1)^{n+1} e^{\frac{i\pi(n+1)}{r}} \left(\frac{\langle n-1\rangle}{\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}$



$$= \sum_{\varepsilon} H_\varepsilon(n,r)$$

where $H_+(n,r) = (-1)^{n+1} e^{\frac{i\pi(n-1)}{r}} \left(\frac{\langle n+1\rangle}{\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}$

and $H_-(n,r) = (-1)^{n+1} e^{\frac{-i\pi(n+1)}{r}} \left(\frac{\langle n-1\rangle}{\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}$



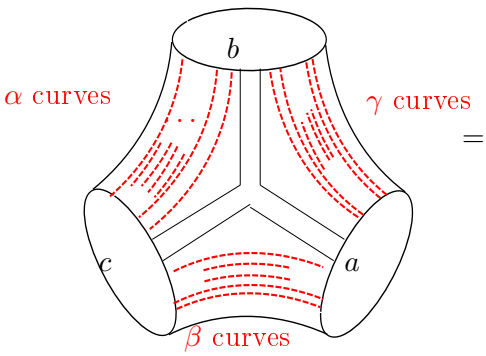
$$= \sum_{\varepsilon} L_\varepsilon(n,r)$$

where $L_+(n,r) = (-1)^{n+1} e^{\frac{i\pi(n+2)}{r}} \left(\frac{\langle n+1\rangle}{\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}$

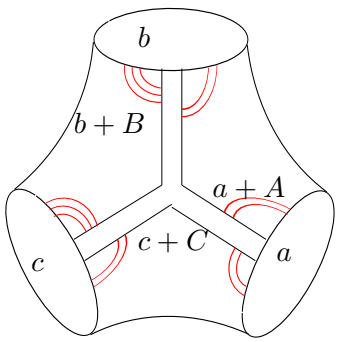
and $L_-(n,r) = (-1)^{n+1} e^{\frac{-i\pi(n-2)}{r}} \left(\frac{\langle n-1\rangle}{\langle n\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}$

All these coefficients are of the required form $\overline{c}(\gamma)F(\frac{c}{r},\frac{1}{r})$ where F is a smooth function defined on $V_\gamma = \{(\tau,\hbar) \ / \ \tau_e \pm \hbar I_e \in U\}$, and $\overline{c}(\gamma)$ is a sign factor, corresponding to taking the holonomy $\mathrm{Hol}(\varepsilon,\gamma)$ of the cocyle $\overline{c}$ with values in $\{\pm 1\}$ along γ already defined in Section **??** and displayed in Figure **??**.

If we have many curves in a pants or annulus, we only need to choose an order to make the fusions, and apply the latter formulae. For example, in the case of the pants , we obtain:



$$= \sum_{\varepsilon,\mu,\nu} P_{\varepsilon,\mu,\nu}(a,b,c,r)$$



where we use the notation $A = \sum_{i=1}^{\beta+\gamma} \varepsilon_i$, $B = \sum_{j=1}^{\alpha+\gamma} \mu_j$, and $C = \sum_{k=1}^{\alpha+\beta} \nu_k$

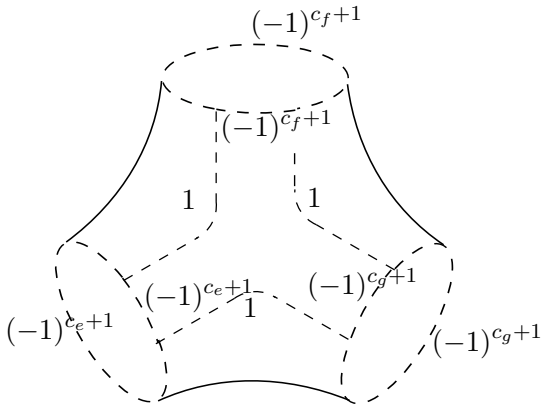


Figure 16: The cocycle $\overline{c}$ on the pants bounded by the curves C_e, C_f and C_g

Here we have first used fusion on the α curves that go from C_b to C_c, then the β curves that run from C_a to C_c, and finally the γ curves from C_a to C_c. With this order for the fusions, the coefficients $P_{\varepsilon,\mu,\nu}(a,b,c,r)$ are products of three factors corresponding to each series of fusions:

$$F_{\mu_1,\nu_1}(a,b,c,r)F_{\mu_2,\nu_2}(a,b+\mu_1,c+\nu_1,r)\dots F_{\mu_\alpha,\nu_\alpha}(a,b+\sum_{i=1}^{\alpha-1}\mu_i,c+\sum_{i=1}^{\alpha-1}\nu_i,r)$$
$$F_{\nu_{\alpha+1},\varepsilon_1}(b+\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i,a,c+\sum_{i=1}^{\alpha}\nu_i,r)\dots F_{\nu_{\alpha+\beta},\varepsilon_\beta}(b+\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i,a+\sum_{i=1}^{\beta-1}\varepsilon_i,c+\sum_{i=1}^{\alpha+\beta-1}\nu_i,r)$$
$$F_{\mu_{\alpha+1},\varepsilon_{\beta+1}}(c+\sum\nu,b+\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i,a+\sum_{i=1}^{\beta}\varepsilon_i,r)\dots F_{\mu_{\alpha+\gamma},\varepsilon_{\beta+\gamma}}(c+\sum\nu,b+\sum_{i=1}^{\alpha+\gamma-1}\mu_i,a+\sum_{i=1}^{\beta+\gamma-1}\varepsilon_i,r)$$

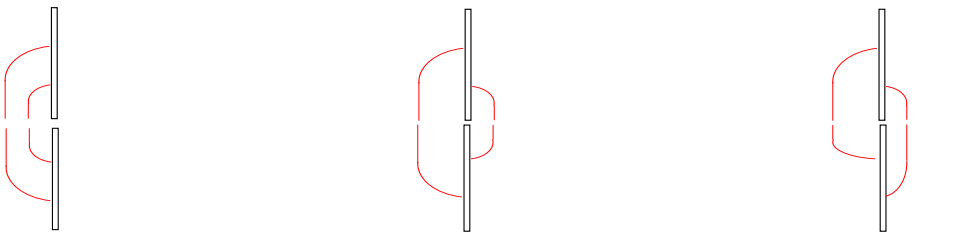
Notice that at every step of the fusion, the shifts in the color c_e are sums of ± 1 terms, one term for each arc intersecting C_e that has been merged with Γ. Hence the coefficients $P_{\varepsilon,\mu,\nu}$ is defined and smooth on the required domain $V_\gamma = \{(\tau,\hbar)\ /\ \tau_e \pm I_e^\gamma\hbar \in U\}$. Furthermore, in the end the shift of c_e is no greater than the number of curves that intersect C_e and of the same parity as this number.

We now only need to explain what happens when we glue together two candlesticks.
First, remark that we can only paste candlesticks with the same number of legs, and the same bottom color n. Moreover, if we paste two candlesticks $C(n,\varepsilon,\Theta)$ and $C(n,\mu,\Theta')$ with $\sum_j \mu_j \neq \sum_i \varepsilon_i$, then we obtain always 0 (as the vector space $V_r(\Sigma)$ of a sphere Σ with two points marked by different colors is 0).

Proposition 6.1. *The gluing of two candlesticks with k legs $C(n,\varepsilon,\Theta)$ and $C(n,\mu,\Theta')$ with $\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{k}\mu_j$ is proportionnal to a band colored by $n+\sum\varepsilon_i$ joining the two boundary components of the annulus with no twist, the proportionality constant being $G(\frac{n}{r},\frac{1}{r})$, where G is a smooth function on $\{(\tau,\hbar)\mid \tau\pm k\hbar\in(0,1)\}$.*

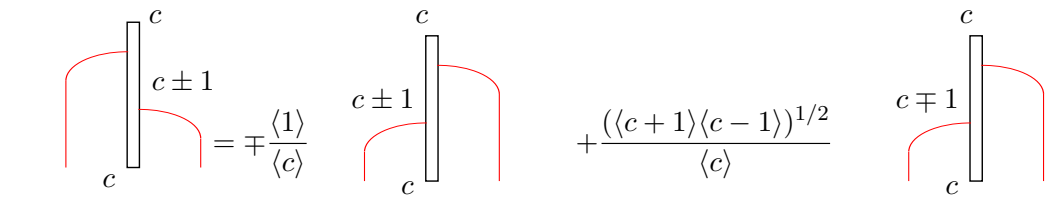
We should point out that in this proposition, the function G depends on Θ, Θ', ε and μ.

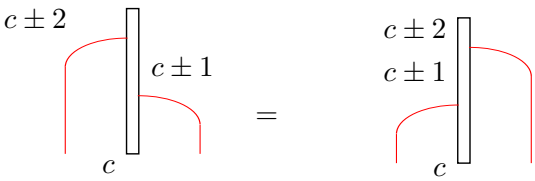
Proof : We prove this proposition by induction on the number of legs of the candlestick. If we paste two candlesticks with only one leg, it is direct from the fusion rule eliminating bigons (see Figure **??**), as it only a factor $(\frac{\langle c \pm 1\rangle}{\langle c\rangle})^{\frac{1}{2}}$. Now, if $n = 2$, the only delicate case is when the legs of the two part are disposed as in the third case of the figure below :



Case 1 Case 2 Case 3

Indeed, in case 1 and 2, we could simply eliminate two bigons. For the case 3, we use the following switching legs formulae:





This shows Proposition **??** for $k \leq 2$.

Now, suppose we glue two candlesticks with $k + 1$ legs. We have two cases as in Figure **??**:

In case 1, the upper leg of the upper candlestick and the bottom leg of the bottom candlestick both go to the right (or both to the left), the gluing is obtained by gluing two candlesticks with k legs, then suppressing a bigon. The factor we get is of the form $G(\frac{n}{r}, \frac{1}{r}) \left(\frac{\langle n + \sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_i\rangle}{\langle n + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}$, which is indeed a function of $(\frac{n}{r}, \frac{1}{r})$ that is smooth on the domain we claimed.

In case 2, the upper leg of the upper part and the bottom leg of the bottom part go to different sides, but by applying the above formulae to switch legs, we can reduce this to the former case.

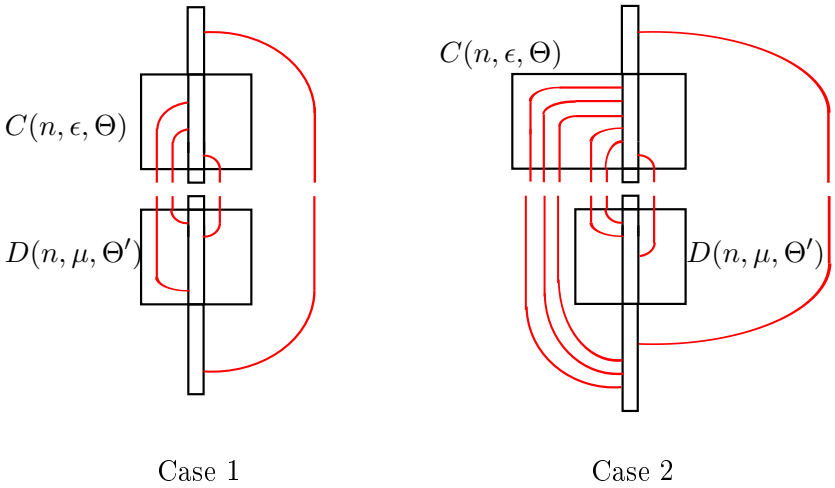


Figure 17: The two cases of pasting candlesticks with k legs

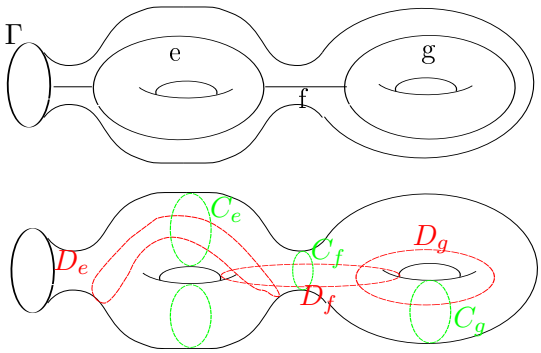


Figure 18: The family of curves D_e on Σ associated to the trivalent banded graph Γ

6.2 Examples of ψ-symbol

We derive expressions of ψ-symbol for two families of curves on Σ: the first family consists of the curves C_e of the pants decompostion itself, and the other of curves $(D_e)_{e\in E}$ that are in some sense dual to the curves C_e. The D_e are defined this way: if e is an internal edge that joins a vertex to itself, then D_e is a loop parallel to e. If e joints two different vertices, then D_e consists of two arcs parallel to e that we close into a loop as in Figure **??**.

Note that C_e and D_f intersect each other if and only if $e = f$, and in this case they intersect once or twice, and that $p(C_e)$ and $p(D_e)$ vanish in $H_1(\Gamma, \partial\Gamma, \mathbb{Z}/2)$.

Proposition 6.2. *We have for any $e \in E$ and $c \in U_r$:*

- $T_r^{C_e}\varphi_c = -2\cos(\pi\frac{c_e}{r})\varphi_c$ *and* $\sigma^{C_e} = -2\cos(\pi\frac{c_e}{r})[0]$
- *If e is an edge joining an internal vertex to itself as in the left case of the Figure* **??**, *then we have*

$$\sigma^{D_e}(\frac{c}{r},\theta,\frac{1}{r}) = \left(W(\pi\frac{c_e}{r},\pi\frac{c_f}{r},\frac{\pi}{r})e^{i\theta_e} + W(\pi\frac{c_e}{r},\pi\frac{c_f}{r},-\frac{\pi}{r})e^{-i\theta_e}\right)[0]$$

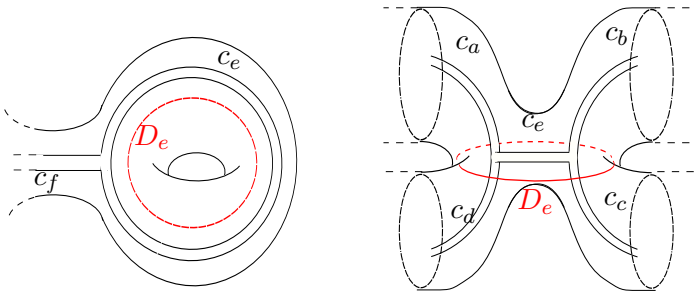


Figure 19: The curve D_e around an edge e joining one or two internal vertices

where

$$W(\tau,\alpha,\hbar)=\left(\frac{\sin(\tau+\alpha/2+\hbar/2)\sin(\tau-\alpha/2+\hbar/2)}{\sin(\tau)\sin(\tau+\hbar)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

- *If e is an edge between two distinct internal vertices as in the right of Figure* **??**, *then we have*

$$\sigma^{D_e}(\frac{c}{r},\theta,\frac{1}{r})=-\left(I(\pi\tau,\pi\hbar)+J(\pi\tau,\pi\hbar)e^{2i\theta_e}+J(\pi(\tau-2\hbar\delta_e),\pi\hbar)e^{-2i\theta_e}\right)[0]$$

Here, we have set $\tau=\frac{c}{r}$, $\hbar=\frac{1}{r}$, δ_e for the Kronecker symbol $\delta_{e,f}=1$ if and only if $e=f$ and else equals 0, and finally we set

$$\begin{aligned}I(\tau,\hbar) &= 2\cos(\tau_c+\tau_d-\hbar)\\ &+4\frac{\sin(\frac{\tau_a+\tau_d-\tau_e-\hbar}{2})\sin(\frac{\tau_a-\tau_d+\tau_e+\hbar}{2})\sin(\frac{\tau_b+\tau_c-\tau_e-\hbar}{2})\sin(\frac{\tau_b-\tau_c+\tau_e+\hbar}{2})}{\sin(\tau_e)\sin(\tau_e+\hbar)}\\ &+4\frac{\sin(\frac{\tau_a+\tau_d+\tau_e-\hbar}{2})\sin(\frac{-\tau_a+\tau_d+\tau_e-\hbar}{2})\sin(\frac{\tau_b+\tau_c+\tau_e-\hbar}{2})\sin(\frac{-\tau_b+\tau_c+\tau_e-\hbar}{2})}{\sin(\tau_e)\sin(\tau_e-\hbar)}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}J(\tau,\hbar) &= 4(\frac{\sin(\frac{\tau_a+\tau_d-\tau_e-\hbar}{2})\sin(\frac{\tau_a-\tau_d+\tau_e+\hbar}{2})\sin(\frac{\tau_b+\tau_c-\tau_e-\hbar}{2})\sin(\frac{\tau_b-\tau_c+\tau_e+\hbar}{2})}{\sin(\tau_e)\sin(\tau_e+\hbar)}\\ &\frac{\sin(\frac{\tau_a+\tau_d+\tau_e+\hbar}{2})\sin(\frac{-\tau_a+\tau_d+\tau_e+\hbar}{2})\sin(\frac{\tau_b+\tau_c+\tau_e+\hbar}{2})\sin(\frac{-\tau_b+\tau_c+\tau_e+\hbar}{2})}{\sin(\tau_e+\hbar)\sin(\tau_e+2\hbar)})^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

The expressions of $T_r^{C_e}$ and $T_r^{D_e}$ can be derived by using fusion rules. The computations are rather long in the last case, but straightforward.
These expressions, as well as the expressions of the ψ-symbol of the curves C_e and D_e were already given in [**?**]. They also checked by hand that the formulae of Theorem **??** were satisfied by these curves. We will only derive from the formulae that the zero-th and first order term for these curves are related as in Theorem **??**, as this is rather quick, and we will use it later:

Proposition 6.3. *Let γ be any of the curves C_e or D_e.*
Then $\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)=\sigma^\gamma(\tau,\theta,0)+\frac{\hbar}{2i}\sum_{e\in E}\frac{\partial^2}{\partial\tau_e\partial\theta_e}\sigma^\gamma(\tau,\theta,0)+o(\hbar)$

Proof : For C_e, there is not much to prove: as σ^{C_e} does not depend on $\hbar$, the first order term vanishes, and as σ^{C_e} does not depend on θ_e, $\frac{\partial^2}{\partial\tau_e\partial\theta_e}\sigma^{\gamma}(\tau,\theta,0)$ also vanishes.
For the curves D_e, we need to separate the case 1 where e joints a vertex to itself, and the case 2 where it joints two distinct vertices.
In case 1 depicted by the figure above, we have
$\sigma^{D_e}(\tau,\theta,\hbar) = (W(\pi\tau_e,\pi\tau_f,\pi\hbar)e^{i\theta_e} + W(\pi\tau_e,\pi\tau_f,-\pi\hbar)e^{-i\theta_e})[0]$. Notice that from the formula of W given above, we get $W(\pi\tau_e,\pi\tau_f,\pi\hbar) = W(\pi(\tau_e+\frac{\hbar}{2}),\pi\tau_f,0)+o(\hbar)$. Thus

$$\begin{aligned}\sigma^{D_e}(\tau,\theta,\hbar) &= \sigma^{D_e}(\tau,\theta,0) + \frac{\hbar}{2}(W(\pi\tau_e,\pi\tau_f,0)e^{i\theta_e} - W(\pi\tau_e,\pi\tau_f,0)e^{-i\theta_e})[0] + o(\hbar)\\ &= \sigma^{D_e}(\tau,\theta,0) + \frac{\hbar}{2i}\sum_{e\in E}\frac{\partial^2}{\partial\tau_e\partial\theta_e}\sigma^{D_e}(\tau,\theta,0) + o(\hbar)\end{aligned}$$

as expected.
Finally, in the case 2 above, we have
$\sigma^{D_e}(\tau,\theta,\hbar) = -(I(\pi\tau,\pi\hbar) + J(\pi\tau,\pi\hbar)e^{2i\theta_e} + J(\pi(\tau-2\hbar\delta_e),\pi\hbar)e^{-2i\theta_e})[0]$. It is easily seen that $J(\tau,\hbar) = J(\tau+\hbar\delta_e,0)$ for δ_e Kronecker symbol. Thus we only need to prove that $I(\tau,\hbar) = I(\tau,0)+o(\hbar)$. This is a bit more tricky:
First, notice that we can write

$$I(\tau,\hbar) = 2\cos(\tau_c+\tau_d-\hbar) + \frac{1}{\sin(\tau_e)}(F(\tau_e+\hbar) - F(-\tau_e+\hbar)) + o(\hbar)$$

where

$$\begin{aligned}F(\tau_e) &= 4\frac{\sin(\frac{\tau_a+\tau_d-\tau_e}{2})\sin(\frac{\tau_a-\tau_d+\tau_e}{2})\sin(\frac{\tau_b+\tau_c-\tau_e}{2})\sin(\frac{\tau_b-\tau_c+\tau_e}{2})}{\sin(\tau_e)}\\ &= \frac{(\cos(\tau_d-\tau_e)-\cos(\tau_a))(\cos(\tau_c-\tau_e)-\cos(\tau_b))}{\sin(\tau_e)}\end{aligned}$$

Therefore, the first order term of $I(\tau,\hbar)$ is $\hbar\left(2\sin(\tau_c+\tau_d) + \frac{2}{\sin(\tau_e)}\frac{d}{d\tau_e}\mathcal{P}(F)(\tau_e)\right)$, where $\mathcal{P}(F)$ is the even part of the function F. From the formula above, we have

$$\mathcal{P}(F)(\tau_e) = \sin(\tau_c+\tau_d)\cos(\tau_e) - \cos(\tau_a)\sin(\tau_c) - \cos(\tau_b)\sin(\tau_d)$$

So that $\frac{1}{\sin(\tau_e)}\frac{d}{d\tau_e}\mathcal{P}(F)(\tau_e) = -\sin(\tau_c+\tau_d)$, and the first order of $I(\tau,\hbar)$ vanishes.

The computations of σ^{C_e} and σ^{D_e} were previously used in [**?**] to prove a version of Theorem **??** for the punctured torus and the 4-holed sphere. Their approach was to derive from the above formulae that the asymptotic estimate of Theorem **??** was valid for the curves C_e, D_e and $\tau_{C_e}(D_e)$ where τ_{C_e} denotes the Dehn-twist along C_e. Then they used the compatibility of the ψ-symbol with the product in $K(\Sigma,-e^{\frac{i\pi\hbar}{2}})$ to prove that if Theorem **??** is verified by γ and δ two multicurves, then it is also true for their product $\gamma\cdot\delta$. This yielded Theorem **??** for all multicurves in the punctured torus and the 4-holed sphere, as the curves C_e, D_e, and $\tau_{C_e}(D_e)$ were sufficient to generate the Kauffman algebra.
However, this approach fails in higher genus, as this set of curves no longer generate the Kauffman algebra. Therefore, we developped another approach to tackle the higher genus cases, which was also more conceptual and required less computations. Our fundamental idea is to use the multiplicativity of the ψ-symbol together with the theorem of Bullock to

view the zero-th and first order term of the ψ-symbol in terms of algebra morphism and derivation of algebras on $\mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)]$. We then only need to compare this general shape with the values of the ψ-symbol on a few curves to get the formula of Theorem **??**. (In fact, we will only need the values on the C_e for the zero order term, while the first order term also required the values on D_e)

7 Principal symbol and representation spaces

This section will be centered on the study of the principal symbol $\sigma^\gamma(\tau,\theta,0)$, that is the zero-order of the ψ-symbol $\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)$. The goal of this paragraph is to establish the formula for the principal symbol, which is stated in our main theorem: $\sigma^\gamma_\chi(\tau,\theta,0) = f_\gamma(R_\chi(\tau,\theta))$, where f_γ is the function on $\mathcal{M}(\Sigma)$ such that $f_\gamma(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho(\gamma))$, and R_χ are action-angles parametrization on $\mathcal{M}(\Sigma)$.

7.1 The intersection algebra A_Γ and multiplicativity of the ψ-symbol

The aim of this section is to prove the property of compatibility of the ψ-symbol with the multiplication in $K(\Sigma,-1)$, given by Proposition **??**:

Proposition ?? : Let γ and δ be two multicurves on Σ. Then we have the following asymptotic expression:

$$\sigma^{\gamma\cdot\delta}(\tau,\theta,\hbar) = \left(\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)\sigma^\delta(\tau,\theta,\hbar) + \frac{\hbar}{i}\sum_e \partial_{\tau_e}\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)\partial_{\theta_e}\sigma^\delta(\tau,\theta,\hbar)\right) + o(\hbar)$$

A version of this proposition appeared in [**?**], but they worked with an other definition of the ψ-symbol, which took values in $\mathbb{C}$, whereas in our definition, the ψ-symbol takes values in A_Γ.
Thus, before we turn to the proof of the proposition, we would like to define more properly the algebra A_Γ.

Proposition 7.1. *Let π be the natural map $H_1(\Gamma,\mathbb{Z}/2) \to H_1(\Gamma,\partial\Gamma,\mathbb{Z}/2)$ and let B be the image of π. For $\alpha,\beta \in B$ and $\tilde\alpha$ a lift of α let*

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \tilde\alpha \cap \beta$$

where $\cap$ is the usual intersection form $H_1(\Gamma,\mathbb{Z}/2) \times H_1(\Gamma,\partial\Gamma,\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$. Then $\langle,\rangle$ is a well-defined bilinear symmetric form on B.

Proof. Let us first show that $\langle\alpha,\beta\rangle = \tilde\alpha \cap \beta$ is independent of the choice of the lift $\tilde\alpha$. Indeed, two lifts of α differ by an element of $H_1(\partial\Gamma,\mathbb{Z}/2)$. Furthermore, any element γ of $H_1(\Gamma,\partial\Gamma,\mathbb{Z}/2)$ can be seen as a linear combination of closed curves and curves with extremities in $\partial\Gamma$, and $\gamma \in B$ if and only if its number of extremities in each component of $\partial\Gamma$ is even. Thus the intersection of an element of $H_1(\partial\Gamma,\mathbb{Z}/2)$ with any element of B vanishes, and the form $\langle,\rangle$ is independent of the choice of lift.
Actually, this shows that we can think of B as the quotient of $H_1(\Gamma,\mathbb{Z}/2)$ by the kernel of the intersection form on $H_1(\Gamma,\mathbb{Z}/2)$, and of $\langle,\rangle$ as the corresponding quotient form.
The bilinearity of the form $\langle,\rangle$ is then evident. Finally, given $\tilde\alpha$ and $\tilde\beta$ lifts of $\alpha,\beta \in B$, $\langle\alpha,\beta\rangle = \tilde\alpha \cap \beta$ is also the intersection number mod 2 of $\tilde\alpha$ and $\tilde\beta$, so that the form is symmetric. $\square$

As an easy consequence of this bilearity of $\langle , \rangle$, we obtain that the product structure $[\gamma][\delta] = (-1)^{\langle \gamma, \delta \rangle}[\gamma + \delta]$ on $A_\Gamma = \bigoplus_{[\gamma] \in B} \mathbb{C}[\gamma]$ is associative. Also, as the form is symmeric, we see that A_Γ is a commutative $\mathbb{C}$-algebra of dimension 2^d where d is the dimension of B. This dimension can be computed using the exact sequence

$$H_1(\Gamma, \mathbb{Z}/2) \to H_1(\Gamma, \partial\Gamma\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\delta} H_0(\partial\Gamma, \mathbb{Z}/2) \to H_0(\Gamma, \mathbb{Z}/2) \to 0$$

We have $B = \mathrm{Ker}(\delta)$, $\dim(\mathrm{Ker}\delta) + \mathrm{rg}(\delta) = g$ and $\mathrm{rg}(\delta) = b - 1$ where b is the number of boundary components of Γ. Thus the dimension of B is $g - b + 1$.
Note that when Γ can be embedded in the plane this dimension is 0 and $A_\Gamma = \mathbb{C}$.

As a finite-dimensional commutative $\mathbb{C}$-algebra, A_Γ is isomorphic to the algebra $\mathbb{C}^l$, where $l = \dim(A_\Gamma) = \mathrm{Card}(\hat{A_\Gamma})$ where we recall that $\hat{A_\Gamma}$ is the (finite) set of algebra morphisms from A_Γ to $\mathbb{C}$. The isomorphism is given by

$$\alpha \in A_\Gamma \to (\chi(\alpha))_{\chi \in \hat{A_\Gamma}}$$

An element χ of $\hat{A_\gamma}$ must send each $[\alpha]$ with $\alpha \in B$ to some $(-1)^{q(\alpha)}$, with the conditions that $q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$ modulo 2. Thus $\hat{A_\Gamma}$ is in bijective correspondance with the set of "relative spin-structures" on $(\Gamma, \partial\Gamma)$.

Now the principal symbol $\sigma^\gamma(\tau, \theta, 0)$ is a morphism $K(\Sigma, -1) \to A_\Gamma$, we denote its components $\sigma^\gamma_\chi(\tau, \theta) = \chi(\sigma^\gamma(\tau, \theta, 0))$ for every $\chi \in \hat{A_\Gamma}$.

Proof of Proposition ??: We fix $r > 0$ and we take γ and δ two multicurves on Σ. The two functions appearing in the equality are smooth functions on a neighborhood of $U \times \{0\}$ in $U \times [0, 1]$. We remark that any point of U can be approximated by sequence $\frac{c_r}{r}$ with $c_r \in U_r$. Hence it suffice to show that they have the same asymptotic expansion at order one on sequences $(\frac{c_r}{r}, \theta, \frac{1}{r})$ where $\frac{c_r}{r} \to x \in U$. According to Theorem **??**, writing $\tau = \frac{c_r}{r}$ and $\hbar = \frac{1}{r}$, the matrix coefficents of the operator T^γ_r can be written as:

$$T^\gamma_r \varphi_c = \overline{c}(\gamma) \sum_{k : E \to \mathbb{Z}} F^\gamma_k(\tau, \hbar) \varphi_{c+k}$$

with the F^γ_k being smooth functions on V_γ such that $F^\gamma_k = 0$ as soon as there is some $e \in E$ such that $|k_e| > I^\gamma_e$ or $k_e \not\equiv I^\gamma_e (\mathrm{mod}\ 2)$.
As $\gamma \in K(\Sigma, -e^{\frac{i\pi}{2r}}) \to T^\gamma_r \in \mathrm{End}(V_r(\Sigma))$ is an morphism of algebras, we have:

$$T^{\gamma \cdot \delta}_r \varphi_c = T^\gamma_r (T^\delta_r \varphi_c)$$

and from the above expression of the matrix coefficients, we get

$$\begin{aligned} T^{\gamma \cdot \delta}_r \varphi_c &= \sum_{m : E \to \mathbb{Z}} \left(\sum_{k+l=m} F^\gamma_l(\tau + k\hbar, \hbar) F^\delta_k(\tau, \hbar) \overline{c}(\delta) \overline{c+k}(\gamma) \right) \varphi_{c+m} \\ &= \overline{c}(\gamma) \overline{c}(\delta) i(\gamma, \delta) \sum_{m : E \to \mathbb{Z}} \left(\sum_{k+l=m} F^\gamma_l(\tau + k\hbar, \hbar) F^\delta_k(\tau, \hbar) \right) \varphi_{c+m} \end{aligned}$$

To obtain the second equality, note that $\overline{c+k}(\gamma) = \overline{c}(\gamma)\overline{k}(\gamma)$ and observe that if there exists e such that $k_e \neq I_e^\delta[2]$ then by Theorem **??** F_k^δ is 0. However if $k_e = I_e^\delta[2]$ for all $e \in E$ then $\overline{k}(\gamma) = \prod_{e\in E}(-1)^{I_e^\delta(C_e'^*(\gamma)+C_e''^*(\gamma))} = i(\gamma,\delta)$ is independant of k. Hence we can factor $\overline{k}(\gamma)$ out of the sum. We will later show that $i(\gamma,\delta)$ correspond to the intersection in $H_1(\Gamma,\partial\Gamma,\mathbb{Z}/2)$ of the projections of γ and δ.
Now as $K(\Sigma,-e^{\frac{i\pi\hbar}{2}})$ is generated by multicurves, we can write $\gamma\cdot\delta = \sum_\lambda f_\lambda(\hbar)\lambda$, and in this sum, $f_\lambda \neq 0$ only when $[\lambda] = [\gamma]+[\delta] \in H_1(\Sigma,\mathbb{Z}/2)$, according to the Kauffman relations. When it is the case, we have $\overline{c}(\lambda) = \overline{c}(\gamma)\overline{c}(\delta)$. We can write another formula for the curve operator of the product:

$$T_r^{\gamma\cdot\delta}\varphi_c = \sum_m \left(\sum_\lambda \overline{c}(\lambda) f_\lambda(\hbar) F_m^\lambda(\tau,\hbar)\right)\varphi_{c+m}$$

So, identifying coefficients in the two formulae, we get:

$$\sum_\lambda f_\lambda(\hbar)F_m^\lambda(\tau,\hbar) = \left(\sum_{k+l=m} F_l^\gamma(\tau+k\hbar,\hbar)F_k^\delta(\tau,\hbar)\right) i(\gamma,\delta)$$

Now, remember that we defined the ψ-symbol of an arbitrary element of $K(\Sigma,-e^{\frac{i\pi\hbar}{2}})$ by extending lineary the formula for multicurves. Thus, we have:

$$\sigma^{\gamma\cdot\delta}(\tau,\theta,\hbar) = \sum_m\sum_\lambda f_\lambda(\hbar)F_m^\lambda(\tau,\hbar)e^{im\theta}[\lambda]$$

recalling that $[\lambda] = [\gamma]+[\delta]$ and using the previous identity of coefficients:

$$\begin{aligned}
&= i(\gamma,\delta)\sum_m\left(\sum_{k+l=m} F_l^\gamma(\tau+k\hbar,\hbar)F_k^\delta(\tau,\hbar)\right)e^{im\theta}[\gamma+\delta]\\
&= i(\gamma,\delta)\sum_m\left(\sum_{k+l=m}\left(F_l^\gamma(\tau,\hbar)+\hbar\sum_{e\in E}k_e\frac{\partial}{\partial\tau_e}F_l^\gamma(\tau,\hbar)\right)e^{il\theta}F_k^\delta(\tau,\hbar)e^{ik\theta}\right)[\gamma+\delta]\\
&= i(\gamma,\delta)\langle p_*(\gamma),p_*(\delta)\rangle\left(\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)\sigma^\delta(\tau,\theta,\hbar)+\frac{\hbar}{i}\sum_{e\in E}\partial_{\tau_e}\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)\partial_{\theta_e}\sigma^\delta(\tau,\theta,\hbar)\right)+o(\hbar)
\end{aligned}$$

To obtain the third equality recall that $[\gamma][\delta] = \langle p_*(\gamma),p_*(\delta)\rangle[\gamma+\delta]$ in A_Γ. All that is left to prove is to show that the formula given for $i(\gamma,\delta)$ actually computes the intersection in $H_1(\Gamma,\partial\Gamma,\mathbb{Z}/2)$.
Let γ and δ be two curves in Γ. We can isotope γ and δ so that δ lies in the interior of Γ, and γ follows the edges of the cell decomposition of Γ. Then the intersection points lie only in the curves $p(C_e) = L_e$. The number of intersection points of γ and δ in L_e is congruent modulo 2 to $\sharp(\delta\cap L_e)L_e^*(\gamma)$ where L_e^* is the dual to the cell L_e. If $\tilde{\gamma}$ and $\tilde{\delta}$ are lifts of γ and δ to Σ, then $L_e^*(\gamma) = C_e'^*(\tilde{\gamma}) + C_e''^*(\tilde{\gamma})$ and $\sharp(\delta\cap L_e) = \sharp(\tilde{\delta}\cap C_e)$ modulo 2, hence the formula for $i(\tilde{\gamma},\tilde{\delta})$ computes the number of intersection points of γ and δ modulo 2.

7.2 Principal symbol and the SL_2-character variety

This section aims to elaborate a link between the components of the principal symbol σ_χ and functions on the space of representations $\pi_1(\Sigma)\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

We will start our study of the principal symbol by the following proposition, which describes which values $\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta)$ can take:

Proposition 7.2. *For any multicurve γ and $\chi \in \hat{A}_\Gamma$, we have:*
1) $\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta) \in \mathbb{R}$
2) $|\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta)| \leq 2^{n(\gamma)}$ where $n(\gamma)$ is the number of components of γ.

Proof : 1) We recall that the components of the ψ-symbol σ_χ^γ are complex-valued. The stated property comes from the fact that curve operators are Hermitian: for any multicurve γ, and every r, the operator T_r^γ is a Hermitian endomorphism of $V_r(\Sigma)$. By definition, we have $T_r^\gamma \varphi_c = \sum_k F_k^\gamma(\frac{c}{r},\frac{1}{r})\varphi_{c+k}$. As the basis $(\varphi_c)_{c\in U_r}$ is a Hermitian basis, we get $F_{-k}^\gamma(\frac{c+k}{r},\frac{1}{r}) = \overline{F_k^\gamma(\frac{c}{r},\frac{1}{r})}$ for all $c \in U_r$. Then for $r \to +\infty$ we have $F_{-k}^\gamma(\tau,0) = \overline{F_k^\gamma(\tau,0)}$. Hence $\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta) = \chi(\gamma)\sum_k F_k^\gamma(\tau,0)e^{ik\cdot\theta} \in \mathbb{R}$, $\forall(\tau,\theta) \in U \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^E$

2) We want to find a bound for $|\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta)|$, where γ is a multicurve. By definition, we have $\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta) = \chi(\gamma)\sum_k F_k^\gamma(\tau,0)e^{ik\cdot\theta}$. On the one hand, we know that the coefficients F_k^γ are zero as soon as there is an e such that $|k_e| > I_e^\gamma = \sharp(\gamma \cap C_e)$. The number of non-zero coefficients is then lower than $M_\gamma = \prod_{e\in E}(2I_e^\gamma + 1)$. On the other hand, for any $r \geq 2$ and $c \in U_r$:

$$F_k^\gamma(\frac{c}{r},\frac{1}{r}) = \langle T_r^\gamma \varphi_c, \varphi_{c+k}\rangle \leq ||T_r^\gamma||$$

We recalled in the preliminary section the spectral radius of T_r^γ is always $\leq 2^{n(\gamma)}$. Thus we have $|F_k^\gamma(\frac{c}{r},\frac{1}{r})| \leq 2^{n(\gamma)}$ for every r $>$ 0 and every $c \in U_r$. Taking the limit, we get $|F_k^\gamma(\tau,0)| \leq 2^{n(\gamma)}$.
These two estimations only allow us to write $|\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta)| \leq M_\gamma 2^{n(\gamma)}$. To obtained to the promised inequality, we use the multiplicativity of $\sigma_\chi^{\cdot}(\tau,\theta)$:
We have, for any integer p: $|\sigma_\chi^{\gamma^p}(\tau,\theta)| = |\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta)|^p$. But γ^p is also a multicurve, obtained by taking p parallel copies of each component of γ.
We deduce that $|\sigma_\chi^{\gamma^p}(\tau,\theta)| \leq M_{\gamma^p}2^{n(\gamma^p)} \leq p^{3g-3}M_\gamma 2^{pn(\gamma)}$ and so we get by taking $p \to +\infty$ that $|\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta)| \leq 2^{n(\gamma)}$ for all $(\tau,\theta) \in U \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^E$.

Now, recall that the components of the ψ-symbol

$$\sigma_\chi(\tau,\theta) \ : \ K(\Sigma,-1) \to \mathbb{C}$$

are morphisms of algebras. There is a simple description of all such morphism of algebras: indeed, by the Theorem **??** that we recalled in Section **??**, we have an isomorphism

$$K(\Sigma,-1) \simeq \mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)]$$

where $\mathcal{M}'(\Sigma)$ stands for $\mathrm{Hom}(\pi_1\Sigma, SL_2(\mathbb{C}))//SL_2(\mathbb{C})$, the spaces of characters of the fundamental group of Σ in $SL_2(\mathbb{C})$. This space is an affine algebraic variety, and we are writing $\mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)]$ for the set of regular functions from $\mathcal{M}'(\Sigma)$ to $\mathbb{C}$). A morphism of algebras ϕ from $\mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)]$ to $\mathbb{C}$ is always of the form

$$\phi \ : \ f \in \mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)] \ \to \ f(\rho)$$

for some $\rho \in \mathcal{M}'(\Sigma)$. We deduce the existence of maps

$$R_\chi \ : \ U \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^E \to \mathcal{M}'(\Sigma)$$

such that $\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta) = f_\gamma(R_\chi(\tau,\theta))$.

7.3 A system of actions-angles coordinates on the SU_2-character variety

This paragraph will be devoted to study the maps R_χ more closely, the aim is to prove that it actually gives actions-angles coordinates on the character variety $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}_2)/\mathrm{SU}_2$ that we will note $\mathcal{M}(\Sigma)$.
In $\mathcal{M}(\Sigma)$ there is an open dense subset $\mathcal{M}_{\mathrm{irr}}(\Sigma)$ consisting of all conjugacy of irreducible representations. It is a well-known fact that $\mathcal{M}_{\mathrm{irr}}(\Sigma)$ consists only of smooth points of $\mathcal{M}(\Sigma)$ and has a symplectic structure.
The maps R_χ have at first sight their image in $\mathcal{M}'(\Sigma)$. Again, we have a subset $\mathcal{M}'_{\mathrm{irr}}(\Sigma) \subset \mathcal{M}'(\Sigma)$ consisting of conjugacy classes of irreducible representations, and there is a structure of complex symplectic variety on it, that restricts to that of $\mathcal{M}_{\mathrm{irr}}(\Sigma)$.
We have two remarks:
First, we point out that $R_\chi(\tau,\theta)$ is always a non-commutative representation. Indeed, for a commutative representation, we would have for e,f,g three adjacent edges

$$h_{C_e}(\rho) + h_{C_f}(\rho) = h_{C_g}(\rho)$$

for one of the three ordering of e,f,g, or have $h_{C_e}(\rho) + h_{C_f}(\rho) + h_{C_g}(\rho) = 2$. This can not happen for $R_\chi(\tau,\theta)$ as $(h_{C_e})_{e\in E}$ maps it to $\tau \in U$, and we have strict inequalities $\tau_g < \tau_e + \tau_f$, $\tau_e + \tau_f + \tau_g < 2$.

Our second point is that the map R_χ is smooth. This has a sense as by our first remark its image is in the smooth part of $\mathcal{M}'(\Sigma)$. Remark that for any $\gamma \in K(\Sigma, -1)$ the map $(\tau,\theta) \to \sigma^\gamma(\tau,\theta,0)$ is a smooth function on $U \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^E$. So $(\tau,\theta) \to \mathrm{Tr}(R_\chi(\tau,\theta)(\gamma))$ is smooth for every $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$. As the space $\mathcal{M}'(\Sigma)$ can be parametrized by a finite collection of coordinates $\rho \to \mathrm{Tr}(\rho(\gamma_j))$, where $\gamma_j \in \pi_1(\Sigma)$, the map $R_\chi : U \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^E \to \mathcal{M}'(\Sigma)$ is smooth.

Proposition 7.3. *The maps R_χ take in fact values in $\mathcal{M}_{irr}(\Sigma) = Hom(\pi_1\Sigma, SU_2)/SU_2$*

Proof : Indeed, we have seen with Proposition **??** that $\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta)$ is real-valued. We can use a well-known lemma:

Lemma : Any irreductible subgroup $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ such that the trace of all elements of G are real is conjugated to either a subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ or a subgroup of SU_2.

The proof of this lemma is based only on elementary algebra, manipulating trace of products of elements of G. A detailed proof can be found for example in [**?**, p.3040-3041].
As we have $\sigma^\gamma(\tau,\theta,0) = -\mathrm{Tr}(R(\tau,\theta)(\gamma)) \in \mathbb{R}$, we get that $R(\tau,\theta)$ is conjugated to either a representation in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ or a representation in SU_2.

To prove Proposition **??**, we still need to dismiss the case where the image of $R_\chi(\tau,\theta)$ would be conjugated to a subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. To this end, we use the point 2) of Proposition **??**, which states that $|\mathrm{Tr}(R_\chi(\tau,\theta)\gamma)| \leq 2$ for every $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$ representing a simple closed curve on Σ. We use the following lemma, proved in [**?**]:

Lemma 2.1 : Let $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ be a non-elementary representation, then there exists two simple loops a and b intersecting once such that $\rho(a)$ and $\rho(b)$ are loxodromic ($|\mathrm{Tr}(\rho(a))| > 2$, $|\mathrm{Tr}(\rho(b))| > 2$) and non commuting.

This lemma appeared as Lemma 3.1.1 in [**?**] and follows from elementary considerations in hyperbolic geometry. From the lemma, we get that since $R(\tau,\theta)(a)$ is never loxodromic, it must be an elementary representation into $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. But if $R(\tau,\theta)$ was conjugated to a representation in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, it would be a commutative representation, and we saw that $R(\tau,\theta)$ is not.

Proposition 7.4. *For any $\chi \in \hat{A}_\Gamma$, the map $R_\chi : (\tau,\theta) \in U \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^E \to R_\chi(\tau,\theta) \in \mathcal{M}(\Sigma)$ gives action-angle coordinates on the symplectic variety $\mathcal{M}_{irr}(\Sigma)$.*

The proposition 5.2 of [**?**] shows that when a pants decomposition $\mathcal{C} = \{C_e\}_{e\in E}$ of Σ is given, the family of functions $h_{C_e} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Acos}(-\frac{f_{C_e}}{2})$ constitutes a moment mapping $h : h^{-1}(U) \to U$ and $h^{-1}(U)$ is an open dense subset of $\mathcal{M}(\Sigma)$. The variables τ_e are the action coordinates associated to this moment mapping:

$$h_{C_e}(R_\chi(\tau,\theta)) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Acos}(-\frac{f_{C_e}(R_\chi(\tau,\theta))}{2}) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Acos}(-\frac{\sigma_\chi^{C_e}(\tau,\theta)}{2}) = \tau_e$$

where the third equality comes from the computation of the operator $T_r^{C_e}$ given in Section **??**: for any coloration c of E, we have $T_r^{C_e}\varphi_c = -2\cos(\frac{\pi c}{r})\varphi_c$, so that $\sigma_\chi^{C_e}(\tau,\theta,\hbar) = F_0^{C_e}(\tau,\hbar)\chi([0]) = -2\cos(\pi\tau_e)$.

The only missing condition for (τ,θ) to be a system of action-angle coordinates on $\mathcal{M}(\Sigma)$ is that:

$$\omega = \sum_{e\in E} d\tau_e \wedge d\theta_e$$

where ω refers to the symplectic form on the variety $\mathcal{M}(\Sigma)$.
It also amounts to the fact that the vector fields ∂_{θ_e} and $X_{h_{C_e}}$ (the symplectic gradient associated to the function h_{C_e}) on $\mathcal{M}(\Sigma)$ are equals. This equality of vector fields can be rewritten in terms of Poisson brackets:

$$\forall f \in C^\infty(\mathcal{M}(\Sigma),\mathbb{C}),\ \forall \tau,\theta \text{ we have } \{h_{C_e}, f\} = \frac{\partial}{\partial\theta_e} f(R_\chi(\tau,\theta))$$

We only need to verify this equality when f is one of the function f_γ, where $\gamma \in K(\Sigma,-1)$ as the Poisson bracket is a first order differential operator, and any function f on $\mathcal{M}(\Sigma)$ can be approximated at order 1 by a trace function f_γ. By linearity, we only have to show it for γ a multicurve.
To compute such Poisson brackets, we can apply the formula of Goldman [**?**] that we recalled in Section **??**:
We denote by ε the linear map

$$\varepsilon : K(\Sigma, -e^{\frac{i\pi\hbar}{2}}) \to K(\Sigma,-1) \simeq \mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)]$$

$$\sum_{\gamma \text{ multicurve}} c_\gamma(\hbar)\gamma \to \sum_{\gamma \text{ multicurve}} c_\gamma(0)\gamma$$

For γ and $\delta \in K(\Sigma, -e^{\frac{i\pi\hbar}{2}})$ we have:

$$\{f_{\varepsilon(\gamma)}, f_{\varepsilon(\delta)}\} = f_{\varepsilon(\frac{i}{\hbar}[\gamma,\delta])}$$

with $[\gamma, \delta] = \gamma \cdot \delta - \delta \cdot \gamma \in K(\Sigma, -e^{\frac{i\pi\hbar}{2}})$.
We apply the above formula to compute $\{h_{C_e}, f_\gamma\}$ for any $\gamma \in K(\Sigma, -e^{\frac{i\pi\hbar}{2}})$: We recall that $h_{C_e} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Acos}(-\frac{f_{C_e}}{2})$. Our strategy to compute the Poisson bracket is to approximate h_{C_e} with polynomials in f_{C_e}.
Since $\tau \in U$ we have $-2\cos(\pi\tau_e) \in (-2, 2)$ and we can choose a a polynomial P such that $P(-2\cos(\pi(\tau_e + x))) = x + o(x^2)$.

Now, the maps $\{\cdot, f_\gamma\} \ : \ C^\infty(\mathcal{M}(\Sigma)) \to C^\infty(\mathcal{M}(\Sigma))$
and $\frac{i}{\hbar}[\cdot, \gamma] \ : \ K(\Sigma, -1) \to K(\Sigma, -1)$ being derivations of algebras, we have by Goldman's formula:

$$\{P(f_{C_e}), f_\gamma\}(R_\chi(\tau, \theta)) = f_{\varepsilon(\frac{i}{\hbar}[P(C_e),\gamma])}(R_\chi(\tau, \theta)) = \sigma_\chi^{\varepsilon(\frac{i}{\hbar}[P(C_e),\gamma])}(\tau, \theta, 0)$$

We compute this last quantity: we recall that we wrote $T_r^\gamma \varphi_c = \sum_k F_k^\gamma(\tau, \hbar)\varphi_{c+k}$ and we gave in Section **??** the expression $T_r^{C_e}\varphi_c = -2\cos(\pi\tau_e)\varphi_c$. Hence $T_r^{P(C_e)}\varphi_c = P(-2\cos(\pi\tau_e))\varphi_c$.
We deduce that for $c \in U_r$:

$$T_r^{[P(C_e),\gamma]}\varphi_c = \sum_k P(-2\cos(\pi(\tau_e + k_e\hbar)))F_k^\gamma(\tau, \hbar)\varphi_{c+k} - \sum_k P(-2\cos(\pi\tau_e))F_k^\gamma(\tau, \hbar)\varphi_{c+k}$$

But since $[C_e^k] = [0]$ in A_Γ,

$$\sigma_\chi^{\varepsilon(\frac{i}{\hbar}[P(C_e),\gamma])}(\tau, \theta, 0) = i\sum_k \left.\frac{P(-2\cos(\pi(\tau_e + k_e\hbar))) - P(-2\cos(\pi\tau_e))}{\hbar}\right|_{\hbar=0} F_k^\gamma(\tau, 0)e^{ik\cdot\theta}\chi(\gamma)$$

By our choice of P this reduces to

$$\sum_k ik_e F_k^\gamma(\tau, \hbar)e^{ik\cdot\theta}\chi(\gamma) = \frac{\partial}{\partial\theta_e}\sigma_\chi^\gamma(\tau, \theta, 0) = \frac{\partial}{\partial\theta_e}f_\gamma(R_\chi(\tau, \theta))$$

The last equality ends the proof: we have indeed $\{h_{C_e}, f_\gamma\}(R_\chi(\tau, \theta)) = \frac{\partial}{\partial\theta_e}f_\gamma(R_\chi(\tau, \theta))$ for every multicurve γ , and R_χ gives an action-angle parametrization of $\mathcal{M}_{\mathrm{irr}}(\Sigma)$.

Origin of angle coordinates

Finally, we want to investigate how exactly R_χ varies with $\chi \in \hat{A}_\Gamma$. We recall that according to Section **??**, the values of two different morphisms χ and χ' on $[\gamma]$ differ by a representation $\rho : H_1(\Gamma, \partial\Gamma, \mathbb{Z}/2) \to \{\pm 1\}$.
Let us also get more precise about angle coordinates. We recall that we have an hamiltonian $h : \mathcal{M}_{\mathrm{irr}}(\Sigma) \to U$, given by $(h(\rho))_e = \frac{1}{\pi}\mathrm{Acos}(\frac{\mathrm{Tr}(\rho(C_e))}{2})$. The hamiltonian flow gives an action of $\mathbb{R}^E$ on $\mathcal{M}_{\mathrm{irr}}(\Sigma)$. This action has a kernel

$$\Lambda = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}\{(2\pi u_e)_{e\in E}, \quad \pi(u_e + u_f + u_g)_{(e,f,g)\in S}\}$$

where $(u_e)_{e\in E}$ is the canonical basis of $\mathbb{R}^E$, E is the set of edges of Γ, and S is the set of triple of edges adjacent to the same vertex in Γ. We also define $\Lambda' = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}(\pi u_e) \supset \Lambda$. The quotient Λ'/Λ then acts on $\mathcal{M}^{\mathrm{irr}}(\Sigma)$ by $\pi u_e \cdot \rho(\gamma) = (-1)^{(C_e,\gamma)}\rho(\gamma)$, where $(\cdot,\cdot)$ is the intersection form in Σ.

Now that we know that the maps R_χ give action-angle coordinates on $\mathcal{M}_{\mathrm{irr}}(\Sigma)$, the only ambiguity is the choice of the origin of the angle part. That is we must have for any $\chi, \chi' \in \hat{A}_\Gamma$ that $R_{\chi'}(\tau,\theta) = R_\chi(\tau, \theta + v_{\chi,\chi'}(\tau))$ where $v_{\chi,\chi'}$ is a continuous function from U to $\mathbb{R}/\Lambda$.
We use the values of R_χ on the curves D_e to get the origin of angle coordinates. We have $\mathrm{Tr}(R_\chi(\tau,\theta)(D_e)) = -\sigma_\chi^{D_e}(\tau,\theta,0) = -2W(\pi\tau,0)\cos(\theta_e)$ if e joins a vertex to itself,
or $= I(\pi\tau,0) + 2J(\pi\tau,0)\cos(2\theta_e)$ otherwise. We see that in the first case, $\theta_e = 0$ is the unique minimum of $\mathrm{Tr}(R_\chi(\tau,\theta)(D_e))$, so that this origin of this coordinate is the same for all $\chi \in \hat{A}_\Gamma$. In the second case, $\theta_e \mapsto \mathrm{Tr}(R_\chi(\tau,\theta)(D_e))$ has exactly two maxima, one for $\theta_e = 0$, one for $\theta_e = \pi$. So θ is fixed modulo πu_e. Thus for $\chi, \chi' \in \hat{A}_\Gamma$, we have $v_{\chi,\chi'}(\tau) \in \Lambda'/\Lambda$. Furthermore, $v_{\chi,\chi'}$ is continuous, hence it has to be constant.
Taking two elements χ, χ' in $\hat{A}_\Gamma$ we know that they differ by a morphism $\rho : H_1(\Gamma, \partial\Gamma, \mathbb{Z}/2) \to \{\pm 1\}$. It is possible to recover the vector $v_{\chi,\chi'} \in \Lambda'/\Lambda$ from the representation ρ: indeed, by Poincare duality, one can write $\rho(p_*(\gamma)) = (-1)^{\langle C,\gamma\rangle}$ where $C \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}/2)$, p_* is the projection $H_1(\Sigma,\mathbb{Z}/2) \to H_1(\Gamma,\partial\Gamma,\mathbb{Z}/2)$ and $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is the intersection form in $H_1(\Sigma,\mathbb{Z}/2)$. Remember that p_* maps each C_e to zero, so that the intersection of C with each C_e must vanish. As the C_e generate a Lagragian of $H_1(\Sigma,\mathbb{Z}/2)$, C is a linear combination of the C_e and this yields a vector $v_\rho \in \Lambda'/\Lambda$ such that $R_{\rho\chi}(\tau,\theta) = R_\chi(\tau,\theta + v_\rho)$.

We need to note that when Γ is a planar graph we can drop these complicated consideration of angle origins and we could have taken the ψ-symbol to be just $\mathbb{C}$-valued. Indeed, in this case the intersection form in $H_1(\Gamma,\partial\Gamma,\mathbb{Z}/2)$ is trivial, and the image of $H_1(\Sigma,\mathbb{Z}/2) \to H_1(\Gamma,\partial\Gamma,\mathbb{Z}/2)$ is $\{0\}$, so the ψ-symbol is $\mathbb{C}$-valued.

8 First order of the ψ-symbol

In this section, we investigate the first order term in $\hbar$ of the asymptotic expansion of the ψ-symbol. We identify this term by linking it with the principal symbol, of which we already know a formula.
We recall that for γ a multicurve, the map $(\tau,\hbar,\theta) \to \sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)$ is defined as a finite sum of smooth functions on V_γ, and V_γ is a neighborhood of $U \times \{0\}$ in $U \times [0,1]$. We may write, for any multicurve γ:

$$\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar) = \sigma^\gamma(\tau,\theta,0) + \hbar(\Delta_\gamma(\tau,\theta) + D_\gamma(\tau,\theta)) + o(\hbar)$$

Here, $\Delta_\gamma(\tau,\theta)$ refers to the expected first order as in Theorem 2:
$\Delta_\gamma(\tau,\theta) = \dfrac{1}{2i}\displaystyle\sum_e \frac{\partial^2}{\partial\tau_e\partial\theta_e}\sigma^\gamma(\tau,\theta,0)$. Hence what we want to prove in this section is that the remainder $D_\gamma(\tau,\theta)$ is zero for all γ and $(\tau,\theta) \in U \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^E$.
We remark that the previous expressions defines $\Delta(\tau,\theta)$ and $D(\tau,\theta)$ as maps from the set of multicurves to A_Γ, what we can extend by linearity to linear maps $K(\Sigma, -e^{\frac{i\pi\hbar}{2}}) \to A_\Gamma[[\hbar]]$. Furthermore, Δ_γ and D_γ are some linear combinations of partial derivatives of the smooth functions F_k on V_γ, they are both smooth on $U \times (\mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z})^E$.

Proposition 8.1. *For any multicurve γ and for all (τ,θ), the remainder term $D_\gamma(\tau,\theta)$ vanishes, so that the first order term of $\sigma^\gamma(\tau,\theta,\hbar)$ is $\Delta_\gamma(\tau,\theta)=\frac{1}{2i}\sum_e \frac{\partial^2}{\partial\tau_e\partial\theta_e}\sigma^\gamma(\tau,\theta,0)$.*

The proof relies on the two following lemmas:

Lemma 8.2. *Let (τ,θ) be in $U\times(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^E$. We will provide $\mathbb{C}$ with the structure of a $K(\Sigma,-1)$-module (or equivalently of $\mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)]$-module): for $x\in\mathbb{C}$ and $f\in\mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)]$, we define $f\cdot x=f(R_\chi(\tau,\theta))x$. Then the corresponding component of the remainder term $\gamma\mapsto\chi(D_\gamma(\tau,\theta))$ is a derivation of $K(\Sigma,-1)$-modules from $K(\Sigma,-1)$ to $\mathbb{C}$.*

Lemma 8.3. *With respect to the above discussed $\mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)]$-module structure on $\mathbb{C}$ as above, we have an isomorphism $Der(\mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)],\mathbb{C})\simeq T_{R_\chi(\tau,\theta)}\mathcal{M}(\Sigma)$ sending a vector $X\in T_{R_\chi(\tau,\theta)}\mathcal{M}(\Sigma)$ to the derivation $f\to\mathcal{L}_X f(R_\chi(\tau,\theta))$, and the vector fields $(R_\chi^*\frac{\partial}{\partial\tau_e},R_\chi^*\frac{\partial}{\partial\theta_e})$ give basis of the tangent spaces $T_{R_\chi(\tau,\theta)}\mathcal{M}(\Sigma)$.*

Proof of Lemma ?? : We use Proposition **??** to determine how the remainder term $D(\tau,\theta)$ behaves with the product of elements in $K(\Sigma,-e^{\frac{i\pi\hbar}{2}})$. We work with one component σ_χ of the ψ-symbol at a time. For $\gamma\in K(\Sigma,-1)$, we will note $E_\gamma=\chi(\Delta_\gamma+D_\gamma)$, so that we can write $\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta,\hbar)=\sigma^\gamma(\tau,\theta,0)+\hbar E_\gamma(\tau,\theta)+o(\hbar)$.
Then, applying $\chi\in\hat{A}_\Gamma$ to Proposition **??** we have:

$$\sigma_\chi^{\gamma\cdot\delta}(\tau,\theta,\hbar)=\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta,\hbar)\sigma_\chi^\delta(\tau,\theta,\hbar)+\frac{\hbar}{i}\sum_e\partial_{\tau_e}\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta,\hbar)\partial_{\theta_e}\sigma_\chi^\delta(\tau,\theta,\hbar)+o(\hbar)$$

We have $\sigma_\chi^\gamma(\tau,\theta,0)=f_\gamma(R_\chi(\tau,\theta))$. Recall that by the formula of Goldman given in Section **??**, $f_{\gamma\cdot\delta}=f_\gamma f_\delta+\hbar\frac{\pi}{i}\{f_\gamma,f_\delta\}+o(\hbar)$. So, isolating terms of order 1 in $\hbar$, we get:

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{i}\{f_\gamma,f_\delta\}(R_\chi(\tau,\theta))+E_{\gamma\cdot\delta}(\tau,\theta)\\ =E_\gamma(\tau,\theta)f_\delta(R_\chi(\tau,\theta))+E_\delta(\tau,\theta)f_\gamma(R_\chi(\tau,\theta))&+\frac{1}{i}\sum_e\partial_{\tau_e}f_\gamma(R_\chi(\tau,\theta))\partial_{\theta_e}f_\delta(R_\chi(\tau,\theta))\end{aligned}$$

but $\{f_\gamma,f_\delta\}=\frac{1}{2\pi}\sum_e\partial_{\tau_e}f_\gamma\partial_{\theta_e}f_\delta-\partial_{\tau_e}f_\delta\partial_{\theta_e}f_\gamma$. We deduce that

$$E_{\gamma\cdot\delta}=E_\gamma\sigma_\chi^\delta+E_\delta\sigma_\chi^\gamma+\frac{1}{2i}\sum_e\partial_{\tau_e}\sigma_\chi^\gamma\partial_{\theta_e}\sigma_\chi^\delta+\partial_{\theta_e}\sigma_\chi^\gamma\partial_{\tau_e}\sigma_\chi^\delta$$

However, as for $\gamma,\delta\in K(\Sigma,-1)$ we have $f_{\gamma\cdot\delta}=f_\gamma f_\delta$, and $\chi(\Delta_\gamma)=\frac{1}{2i}\sum_e\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial\tau_e\partial\theta_e}\circ R_\chi$, the Leibniz rules implies that $\chi(\Delta_\gamma)$ satisfies the same law of composition:

$$\chi(\Delta_{\gamma\cdot\delta})=\chi(\Delta_\gamma)f_\delta+\chi(\Delta_\delta)f_\gamma+\frac{1}{2i}\sum_e\partial_{\tau_e}f_\gamma\partial_{\theta_e}f_\delta+\partial_{\theta_e}f_\gamma\partial_{\tau_e}f_\delta$$

This concludes the proof of Lemma **??**: $\chi\circ D$ is a derivation.

Proof of Lemma ?? : It is well-known that $\mathcal{M}'(\Sigma)$ is an affine algebraic variety those

smooth points is the open dense subset $\mathcal{M}'_{\text{irr}}(\Sigma)$ (see [?] for example). The point $R_\chi(\tau,\theta)$ is thus a smooth point of $\mathcal{M}'(\Sigma)$ for any $(\tau,\theta) \in U \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
Then the proof comes from elementary considerations of algebraic geometry: when V is an affine algebraic variety, and x a point of V, we put a structure of $\mathbb{C}[V]$-module on $\mathbb{C}$ by defining $f \cdot \lambda = f(x)\lambda$. Then $\text{Der}_x(V,\mathbb{C})$ identifies with $T_xV = m_x/(m_x)^2$ the algebraic tangent space to V at x (where $m_x = \{f \ / \ f(x) = 0\}$), and the algebraic tangent space at a smooth point is the same of as the tangent space of V at x in the sense of differential manifolds. As the affine variety $\mathcal{M}'(\Sigma)$ is smooth on the image of R_χ, by this general property, derivations of $\mathbb{C}[\mathcal{M}(\Sigma)]$ can be viewed as vectors of the tangent space. As $(\tau,\theta) \mapsto R_\chi(\tau,\theta)$ is a parametrization of $\mathcal{M}(\Sigma)$, the vector fields $(\dfrac{\partial}{\partial\tau_e}, \dfrac{\partial}{\partial\theta_e})$ give a basis of the tangent space $T_{R_\chi(\theta,\tau)}\mathcal{M}(\Sigma)$ for each (τ,θ).

Proof of Proposition ?? from the Lemmas **??** and **??**. Combining these two lemmas allow us to assert that $\chi(D(\tau,\theta))$, viewed as a map $\mathbb{C}[\mathcal{M}'(\Sigma)] \to \mathbb{C}$, is of the form $f \to \mathcal{L}_X f(R_\chi(\tau,\theta))$ for some $X \in T_{R_\chi(\tau,\theta)}\mathcal{M}'(\Sigma)$ and we may write
$X = \sum_e a_e \dfrac{\partial}{\partial_{\tau_e}} + b_e \dfrac{\partial}{\partial_{\theta_e}}$ for some coefficients $a_e, b_e : \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathbb{C}$. As D_γ is smooth, so are the coefficients a_e and b_e.
We want to prove that these coefficients all vanish. To this end, we recall that we proved in Section **??** that the remainder term vanishes for the curves C_e and D_e. Besides, we have the formula of Section **??**:
We have $\sigma^{C_e}(\tau,\theta,\hbar) = -2\cos(\pi\tau_e)[0]$, so that $\chi(D_{C_e})(\tau,\theta) = 2a_e\pi\sin(\pi\tau_e)$. Since the remainder term vanishes on C_e, we must have $a_e = 0$.
To show the vanishing of the b_e, we use the formulae for D_e:
In the first kind of curve D_e, described in Section **??**, we have $f_{D_e}(R_\chi(\tau,\theta)) = \sigma_\chi^{D_e}(\tau,\theta,0) = 2W(\pi\tau,0)\cos(\theta_e)$ where W does not vanish for $\tau \in U$.
We know that remainder term D_{D_e} vanishes, so we have
$\chi(D_{D_e}(\tau,\theta)) = b_e \dfrac{\partial}{\partial\theta_e} f_{D_e}(R_\chi(\tau,\theta)) = -2b_e\pi\sin(\theta_e)W(\pi\tau,0) = 0$. This yields $b_e = 0$.

In the second case, we have $f_{D_e}(R_\chi(\tau,\theta)) = \sigma_\chi^{D_e}(\tau,\theta,0) = -2J(\pi\tau,0)\cos(2\theta_e) - I(\pi\tau,0)$ for the functions I and J defined in Section **??**, that are non-vanishing for $\tau \in U$.
Again since
$\chi(D_{D_e}(\tau,\theta)) = b_e \dfrac{\partial}{\partial\theta_e} f_{D_e}(R_\chi(\tau,\theta)) = 4\pi b_e \sin(2\theta_e)J(\pi\tau,0)$ vanishes, we must have $b_e = 0$.
It follows that the remainder term $\gamma \mapsto D_\gamma$ is the zero derivation on $K(\Sigma,-1) \mapsto A_\Gamma$, which is the last ingredient we needed to complete the proof of the Proposition **??**.

Partie IV
Geometric quantization and semi-classical limit of pairings of TQFT vectors

This section exposes an explicit mapping between the TQFT vector spaces $V_r(\Sigma)$ defined combinatorially in **??** and spaces of holomorphic sections of complex line bundles on some Kähler manifold, following the approach of geometric quantization. We explain how curve operators in TQFT can then be seen as Toeplitz operators with symbols corresponding to some trace functions. As an application, we show that eigenvectors of these operators are concentrated near the level sets of these trace functions, and obtain asymptotic estimates of pairings of such eigenvectors. This yields an asymptotic for the matrix coefficients of the image of mapping classes by quantum representations.

9 TQFT and geometric quantization

In this section and the following ones, Σ will be a close compact connected oriented surface. In the first subsection, we will introduce a prequantized manifold M and a space H_r of holomorphic sections of a line $L^r \otimes \delta$ with an explicit Hermitian isomorphism with $V_r(\Sigma)$. We use this isomorphism and the asymptotic formula for matrix coefficients of curve operators proven in Part **??**, to show that curve operators are Toeplitz operators on H_r, for an appropriate definition of Toeplitz operators.

9.1 TQFT vector spaces $V_r(\Sigma)$ as spaces of holomorphic sections of line bundles

We want to translate the combinatorial definition of the TQFT space of **??** in a geometric framework, and see the $V_r(\Sigma)$ as spaces of holomorphic $\mathcal{L}^2$ sections of a complex line bundle over a Kähler manifold.

Since the discovery of Witten-Reshetikhin-Turaev TQFT, it has been a popular endeavor to link the combinatorial definition of TQFT with a definition based on geometric quantization. Given a compact Kähler manifold M, with a prequantization line bundle L (that is a line bundle with Chern curvature $\frac{1}{i}\omega$) and a half-form bundle, we have a sequence of vector spaces $V_r = H^0(M, L^r \otimes \delta)$, and any continuous function f on M gives rise to a sequence of operators $\mathcal{T}_r^f = \Pi_r m_f$ where Π_r is the orthogonal projector from $\mathcal{L}^2$ sections of $L^r \otimes \delta$ to the space of holomorphic sections.

The natural geometric object to represent the combinatorial TQFT spaces is then the moduli space $\mathcal{M}(\Sigma)$ together with its Chern-Simons bundle, and a half-form bundle. The problem is that for a general genus g, $\mathcal{M}(\Sigma)$ is not smooth, and also there is no canonical choice of complex structure to work with. These hurdles can be solved: for each complex structure σ on Σ the geometric quantization process yields TQFT spaces $V_r^\sigma(\Sigma)$ and there is a connection on the Teichmüller space of Σ called the Hitchin connection, which gives a way of identifying the various $V_r^\sigma(\Sigma)$ arising from different complex structures on $\mathcal{M}(\Sigma)$ (see [**?**]). The non-smoothness of $\mathcal{M}(\Sigma)$ is usually avoided of by working with the moduli space of Σ with a puncture and choosing appropriate holonomy around the puncture instead of the moduli space of Σ.

It has been recently showed by Andersen and Ueno in a serie of articles in [**?**][**?**][**?**][**?**] that the TQFT defined by the geometric approach is isomorphic to the combinatorial one.

However, the geometric approach to TQFT loses some of the structure of the combinatorial approach: it is not clear how to geometrically define the Hermitian structures on the vector spaces $V_r(\Sigma)$, or the natural basis associated to pants decompositions, also, the identification is quite unexplicit.
As we wish to use analysis to study pairings of such basis vectors, we will take another approach. Instead of using $\mathcal{M}(\Sigma)$ to do geometric quantization procedures, we will use some open subset of $\mathcal{M}(\Sigma)$ associated to a pants decomposition of Σ: the set of regular points of the momentum map associated to the pants decomposition. Then we are able to very easily define a complex structure on this set, and to exhibit an isomorphism between $V_r(\Sigma)$ and a space of holomorphic sections over this open subset.

Given a pants decomposition of Σ, the set $\mu^{-1}(\mathring{P})$ of regular points of the associated momentum map is an open dense subset of $\mathcal{M}(\Sigma)$ as described in Section **??**. By action-angle coordinates it is symplectomorphic to $\mathring{P} \times T$ equiped with the symplectic form $\omega = \sum dt_i \wedge d\theta_i$. This open set can be seen as a submanifold of $M = \mathbb{R}^E \times T$ which we will equip with a Kähler structure.
A symplectic form on M is given by the formula $\omega = \sum dt_i \wedge d\theta_i$. The complex structure on M will be induced by the map

$$\begin{array}{rccc} Z: & \mathbb{R}^E \times T & \to & (\mathbb{C}^*)^E/\Upsilon \\ & (t_i, \theta_i) & \to & z_i = e^{\frac{t_i}{2}+i\theta_i} \end{array}$$

and the usual complex structure of $(\mathbb{C}^*)^E$.
Here Υ is the discrete subgroup of $(\mathbb{C}^*)^E$ generated by $\{\varepsilon^v \ , v \in S\}$ where if $v = (e, f, g)$, then $\varepsilon_k^v = (-1)^{\delta_{ek}+\delta_{fk}+\delta_{gk}}$, where δ_{ij} is the Kronecker symbol. In fact, $(\mathbb{C}^*)^E/\Upsilon$ is just isomorphic to $(\mathbb{C}^*)^E$, but it is easier to work with these coordinates to give an expression of the symplectic form ω. Note that the symplectic form induced on $(\mathbb{C}^*)^E/\Upsilon$ by this map is the form $i\sum dw_j \wedge d\overline{w_j}$, where $w_j = \ln(z_j)$, for a local determination of the logarithm. We endow the line bundle $M \times \mathbb{C}$ with the Hermitian form h such that $h(t, \theta)(1) = e^{-\varphi}$ where $\varphi = \dfrac{||t||^2}{2} = \dfrac{1}{2}\sum \ln(z_i\overline{z_i})^2$. The Chern curvature of this complex line bundle is $\partial\overline{\partial}\varphi = \sum dw_j \wedge d\overline{w_j} = \dfrac{1}{i}\omega$. That is, this is a prequantization bundle.

The manifold M also carries a half-form bundle δ: the bundle of n-form is trivial as the n-form $\dfrac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \dfrac{dz_n}{z_n}$ is well-defined globally (because the action of Υ leaves each $\dfrac{dz_i}{z_i}$ invariant). The square root of the n-form bundle are then parametrized by $H^1(M, \{\pm 1\})$. We then choose as half-form bundle a flat bundle with holonomy -1 along the loops $(t, \theta + \varphi u_v)_{0 \leq \varphi \leq \pi}$ for $v \in S$. As we will see below, this choice will allow us to identify $H^0(M, L^r \otimes \delta)$ with a space spanned by monomials which share the same parity conditions as r-admissible colors.

Notice that with these definitions, we have a symplectomorphism between $\mathring{P} \times T \subset \mathbb{R}^E \times T$ and $\mu^{-1}(\mathring{P}) \subset \mathcal{M}(\Sigma)$. Furthermore, the complex line bundle L with Hermitian connection h is constructed to have the same curvature and holonomy as the Chern-Simons bundle, and for δ a bundle on $\mu^{-1}(\mathring{P})$ with the same holonomy called the metaplectic bundle can also be defined, see [**?**].

We now want to build an isomorphism between $V_r(\Sigma)$ and holomorphic sections of $L^r \otimes \delta$ on M. The space of holomorphic sections of $L^r \otimes \delta$ has a Hermitian scalar product induced

by the Hermitian structures on L and δ:

$$(s,s') = \int_{\mathbb{R}^E\times T} s\overline{s'}e^{-r\varphi}\frac{\omega^n}{n!} = \int_{\mathbb{R}^E\times T} s(t,\theta)\overline{s'(t,\theta)}e^{-\frac{r}{2}||t||^2}dt_1\dots dt_n d\theta_1\dots d\theta_n$$

Let κ be the constant such that $\frac{1}{\kappa}\int_{\mathbb{R}^E\times T} e^{-\frac{r}{2}||t||^2}dt_1\dots dt_n d\theta_1\dots d\theta_n = 1$ (that is, $\kappa = \mathrm{Vol}(T)\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}$, where we recall that $n = |E|$).

Proposition 9.1. *For $\alpha \in I_\infty$ the formula*

$$e_\alpha = \frac{z^\alpha}{||z^\alpha||} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}e^{\frac{t\cdot\alpha}{2}+i\alpha\cdot\theta}e^{-\frac{||\alpha||^2}{4r}}$$

defines a holomorphic section of $L^r\otimes\delta$, and if we set $H_r = \mathrm{Vect}\{e_\alpha\ ,\alpha\in I_r\}$, the map

$$\begin{array}{rccc} \Phi_r: & V_r(\Sigma) & \mapsto & H_r \\ & \varphi_\alpha & \mapsto & e_\alpha \end{array}$$

is an unitary isomorphism between $V_r(\Sigma)$ and H_r.

Proof. Indeed the parity conditions for $\alpha\in I_\infty$ is exactly what is required for the sections z^α to have the correct equivariance to be a section of $L^r\otimes\delta$. It is easy to see then that the z^α are orthogonal for the Hermitian product on $H^0(M,L^r\otimes\delta)$ and form an Hermitian basis of $H^0(M,L^r\otimes\delta)$. The vector spaces $V_r(\Sigma)$ and H_r have orthonormal basis φ_α and e_α indexed exactly by the same label set I_r, hence Φ_r is indeed an unitary isomorphism. □

We end this section with a technical result that we will need in Section **??**: the asymptotics of the Schwartz kernel of the orthogonal projection $\Pi_r : \mathbb{L}^2(M,L^r\otimes\delta)\to H_r$. If s is an $\mathbb{L}^2$ section of $L^r\otimes\delta$, then $\Pi_r s$ may be expressed as

$$\Pi_r s(t,\theta) = \sum_{\alpha\in I_r}\langle e_\alpha, s\rangle e_\alpha(t,\varphi) = \int_M N(t,\theta,u,\varphi)s(u,\varphi)dud\varphi$$

where $N(t,\theta,u,\varphi) = e^{-\frac{r||t||^2}{2}}\sum_{\alpha\in I_r}\overline{e_\alpha(u,\varphi)}e_\alpha(t,\theta)$ is the Schwartz kernel of Π_r. There is also a orthogonal projection map: $\Pi'_r : \mathbb{L}^2(M,L^r\otimes\delta)\to H^0(M,L^r\otimes\delta)$ whose Schwartz kernel N' is called the Bergman kernel. The Bergman kernel is a section of the bundle $L\boxtimes L^{-1}\otimes\delta\boxtimes\delta^{-1}$ on $M\times M$. The asymptotics of Bergman kernels of a compact Kähler manifold M with prequantizing bundle are well understood and concentrate on the diagonal $\Delta = \{(x,x)\ x\in M\}$, see for example [**?**]. Here the Kähler manifold we work with is not compact but we have:

Proposition 9.2. *The Bergman kernel $N(t,\theta,u,\varphi) = e^{-\frac{r||t||^2}{2}}\sum_{\alpha\in I_r}\overline{e_\alpha(u,\varphi)}e_\alpha(t,\theta)$ defined on $M\times M$ is $O(r^N)$ for the norm of the supremum for some N, and on any compact subset K of $(\mathring{P}\times T)^2$ we have the asymptotic expansion:*

$$N(t,\theta,u,\varphi) =$$
$$(\frac{r}{2\pi})^n 2^{6-4g}\exp\left(-\frac{r||t-u||^2}{8}-\frac{r||\theta-\varphi||^2}{2}+ir\left(\frac{t+u}{2}\right)\cdot(\theta-\varphi)\right)e^{i\sum_j(\theta_j-\varphi_j)}+O(r^{-\infty})$$

for the norm of the supremum on K.

Proof. First notice that

$$N(t,\theta,u,\varphi) = e^{-\frac{r||t||^2}{2}} \sum_{\alpha\in I_r} \overline{e_\alpha(u,\varphi)} e_\alpha(t,\theta) = \frac{1}{\kappa} \sum_{\alpha\in I_r} e^{-\frac{r||t-\frac{\alpha}{r}||^2}{4} - \frac{r||u-\frac{\alpha}{r}||^2}{4}} e^{i\alpha\cdot(\theta-\varphi)}$$

is bounded uniformly by a polynomial in r as each term in the sum is bounded by 1 on $M \times M$ and $\kappa = \mathrm{Vol}(T)\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}$.
Furthermore, elements of I_r are of the form $\alpha = -(1,\dots,1) + \gamma$ where γ is an element of the lattice Λ defined in Section **??**. On a compact subset K of $(\mathring{P} \times T)^2$, this sum is the same as

$$\frac{1}{\kappa} \sum_{\alpha\in\Lambda} e^{-\frac{r||t+\frac{1}{r}-\frac{\alpha}{r}||^2}{4} - \frac{r||u+\frac{1}{r}-\frac{\alpha}{r}||^2}{4}} e^{i\alpha\cdot(\theta-\varphi)} = \frac{1}{\kappa} \sum_{\alpha\in\Lambda} f(r,t,u,\theta-\varphi,\frac{\alpha}{r})$$

where $f(r,t,u,\xi,x) = e^{-\frac{r||t+\frac{1}{r}-x||^2}{4} - \frac{r||u+\frac{1}{r}-x||^2}{4}} e^{irx\xi}$. Note that as a function of the last variable x, it is in the Schwartz class $\mathcal{S}(\mathbb{R}^E)$, with all Schwartz semi-norms bounded independently from r and uniform in all other variables. We set $g(x) = f(r,t,u,\xi,x)$ and we use Poisson summation formula: for the Schwartz function g on $\mathbb{R}^E$, we have:

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} g(\frac{\alpha}{r}) = \frac{r^n}{\mathrm{Covol}(\Lambda)} \sum_{\mu\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^E/\Lambda,\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} \hat{g}(r\mu)$$

where $\hat{g}$ is the Fourier transform $\hat{g}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^E} g(t)e^{-i\mu(t)}dt$. But as g is in the Schwartz class with uniform semi-norms independent of r, all terms corresponding to $\mu \neq 0$ are $O(r^{-\infty})$. Finally $\frac{r^n}{\kappa\mathrm{Covol}(\Lambda)} = \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{3n}{2}} 2^{6-4g}$ as $\mathrm{Vol}(T) = (2\pi)^n\mathrm{Covol}(\Lambda)$ and $\mathrm{Covol}(\Lambda) = 2^{2g-3}$ (see [**?**]) and thus we get:

$$\begin{aligned} N(t,\theta,u,\varphi) &= \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{3n}{2}} 2^{6-4g}\hat{g}(0) \\ &= (\frac{r}{2\pi})^n 2^{6-4g} \exp\left(-\frac{r||t-u||^2}{8} - \frac{r||\theta-\varphi||^2}{2} + ir\left(\frac{t+u}{2}\right)\cdot(\theta-\varphi)\right) e^{i\sum_j(\theta_j-\varphi_j)} \end{aligned}$$

up to $O(r^{-\infty})$ as claimed. □

9.2 Curve operators as Toeplitz operators

The above section explained the construction of a geometric quantization model for $V_r(\Sigma)$, the isomorphism Φ_r sends $V_r(\Sigma)$ to a space of holomorphic sections on a Kähler manifold M of line bundles $L^r \otimes \delta$. This model is not a very natural object but it has the advantage of being quite simple and explicit, which is what we need for our goal of computing pairings of vectors in $V_r(\Sigma)$.
Having a simple model for $V_r(\Sigma)$, we turn to the curve operators associated to curves on Σ. By conjugating a curve operator $T_r^\gamma \in \mathrm{End}(V_r(\Sigma))$ using the isomorphism Φ_r between $V_r(\Sigma)$ and H_r, the curve operators can be seen as endomorphisms of H_r. We wish to understand the curve operators as Toeplitz operators on H_r.
Usually given a compact Kähler manifold with a prequantizing bundle L and half form bundle δ, Toeplitz operators are defined as follows: we have an orthogonal projection operator $\Pi_r : \mathbb{L}^2(M, L^r \otimes \delta) \to H^0(M, L^r \otimes \delta)$ and for $f : M \to \mathbb{R}$ a smooth function we have an operator m_f acting on sections of $L^r\otimes$ by pointwise multiplication by f. A

sequence of endomorphisms of $H^0(M, L^r \otimes \delta)$ is then a Toeplitz operator if there exists a function $g(\cdot, r)$ with asymptotic expansion $g(\cdot, r) = g_0 + \frac{1}{r} g_1 + \dots$ for the norm of the supremum such that:

$$T_r = \Pi_r m_g(\cdot, r) + R_r$$

where the term R_r is an operator of norm $O(r^{-N})$ for any N.
We introduce a slightly modified definition of Toeplitz operators as we wish to work with the open manifold $M = \mathbb{R}^E \times T$. Let Π_r be the orthogonal projector $\mathbb{L}^2(M, L^r \otimes \delta) \to H_r$ where H_r is the vector space defined in the last section. Moreover for any smooth bounded function f on M, let m_f be the operator on $\mathbb{L}^2(M, L^r \otimes \delta)$ of multiplication of a section by f.

Definition 9.1. *Let U be an open subset of $\mathbb{R}^E \times T$ and let $f_0, f_1, f_2, \dots$ be a sequence of smooth functions on an open subset U. We say that the sequence T_r of endomorphisms of H_r is a Toeplitz operator of symbol $f_0 + \frac{1}{r} f_1 + \frac{1}{r^2} f_2 + \dots$ on U if for any k and any compact subset $K \subset U$ we have:*

$$T_r = \Pi_r m_{\chi(f_0 + \frac{1}{r} f_1 + \dots + \frac{1}{r^k} f_k)} + R_r$$

where χ is some smooth function with compact support in U such that $\chi \equiv 1$ on a neighborhood of K, and R_r are operators whose norms are $O(r^{-k-1})$ for the norm of operators $(H_r, ||\cdot||_{\mathbb{L}^2(M)}) \to (H_r, ||\cdot||_{L^\infty(K)})$ for any compact subset $K \subset U$ and are $O(r^N)$ for the norm of operator $H_r \to H_r$, for some $N \in \mathbb{N}$

Representing curve operators as Toeplitz operators is the main ingredient towards our formula for pairings of curve operator eigenvectors. Indeed, the asymptotic behavior of eigenvectors of Toeplitz operators is well understood, eigenvectors are expected to concentrate on level sets of the principal symbols.
The Theorem **??** will serve to identify the principal and subprincipal symbols of curve operators: we will use it to match the asymptotic expansion of matrix coefficients of T_r^γ with that of a Toeplitz operator of symbol $f = f_0 + \frac{1}{r} f_1 + \frac{1}{r^2} f_2 + \dots$. We will find that the appropriate principal symbol is the trace function on $\mathcal{M}(\Sigma)$ associated to the curve γ.
Our definition of Toeplitz operators is a bit unusual in that Toeplitz operators are usually introduced as having smooth symbol on a compact prequantized manifold M. Here we work with on an open manifold M and the symbol we get from Theorem **??** might not behave well on the boundary of $P \times T$, hence the need for this local definition of Toeplitz operator. The usual computation of quasimodes of Toeplitz operators derived from microlocal calculus will still work with this definition.

We want to compute the matrix coefficients of some Toeplitz operator of symbol f. We will link the matrix coefficients of such a Toeplitz operator to the Fourier coefficient of its symbol.

Lemma 9.1. *Let α_r be a sequence of admissible colorings such that $\frac{\alpha_r}{r} \in K$ where K is a compact neighborhood of some point x in $\mathring{P}$, and let e_{α_r} be the corresponding basis vectors of H_r.*
Let f be a smooth function on $\mathbb{R}^E$ with compact support. Finally, take $k \in \mathbb{Z}^E$ and define Δ as the differential operator $\sum_e \frac{\partial^2}{(\partial x_e)^2}$. Then there exists differential operators $(L_i)_{i \geq 2}$

on $\mathbb{R}^E$ such that for any n we have:

$$\Pi_r m_{f(t)e^{ik\theta}e_{\alpha_r}} = \big(f(\frac{\alpha_r}{r}) + \frac{1}{2r}\big(\Delta f(\frac{\alpha_r}{r}) + k\cdot\bigtriangledown f(\frac{\alpha_r}{r}) - \frac{||k||^2}{4}f(\frac{\alpha_r}{r})\big) + \sum_{n\geq 2}\frac{1}{r^n}(L_n f)(x) + O(r^{-n-1})\big)e_{\alpha_r+k}$$

Furthermore, the $O(r^{-n-1})$ are independent of the sequence α_r such that $\frac{\alpha_r}{r}\in K$.

Proof. It is straightforward from the definition of e_{α_r} that $f(t)e^{ik\theta}e_{\alpha_r}$ is orthogonal to e_{α_r+l} for any $l\neq k$. Thus $\Pi_r m_{f(t)e^{ik\theta}e_{\alpha_r}}$ is colinear to e_{α_r+k} and we only need to estimate the coefficient

$$\begin{aligned}(f(t)e^{ik\theta}e_{\alpha_r}, e_{\alpha_r+k}) &= \frac{1}{\kappa}\int_M f(t)e^{-\frac{r}{2}||t||^2}e^{\alpha_r\cdot t+\frac{k}{2}\cdot t-\frac{||\alpha_r||^2}{2r}-\frac{k\cdot\alpha_r}{2r}-\frac{||k||^2}{4r}}\\ &= \frac{e^{-\frac{k\cdot\alpha_r}{2r}-\frac{||k||^2}{4r}}}{\kappa}\int_M g(t)e^{-\frac{r}{2}||t-\frac{\alpha_r}{r}||^2}\end{aligned}$$

where we set $g(t) = f(t)e^{\frac{k}{2}\cdot t}$.
A stationary phase lemma argument will give us an asymptotic expansion of the integral. Indeed, let K' be a compact neighborhood of K, as $\frac{\alpha_r}{r}\in K$ for all r, for $x\in M\backslash K'$ we have $|g(t)|e^{-\frac{r}{2}||t-\frac{\alpha_r}{r}||^2}\leq ||g||_\infty e^{-rd(x,K)^2}$. As $d(K, M\setminus K')>0$, the integral of $g(t)e^{-\frac{r}{2}||t-\frac{\alpha_r}{r}||^2}$ on $M\setminus K'$ is a $O(r^{-k})$ for every k, with constants independent of $\frac{\alpha_r}{r}$.
Furthermore, we write the Taylor expansion at $\frac{\alpha_r}{r}$ of g on K' at order k:

$$g(t) = g(\frac{\alpha_r}{r}) + Dg(\frac{\alpha_r}{r})(t-\frac{\alpha_r}{r}) + \ldots + \frac{1}{k!}D^k g(\frac{\alpha_r}{r})(t-\frac{\alpha_r}{r}) + h(t)$$

with $|h(t)|\leq \frac{C_k}{(k+1)!}(t-\frac{\alpha_r}{r})^{k+1}$ where C_k is the supremum of $||D^{k+1}g||$ on K', which is an universal constant independent of $\frac{\alpha_r}{r}$.
Integrating by part each integral $\int_M D^k g(\frac{\alpha_r}{r})(t-\frac{\alpha_r}{r})e^{-\frac{r}{2}||t-\frac{\alpha_r}{r}||^2}dt$, we get 0 whenever k is odd, $\frac{1}{r}\Delta g(\frac{\alpha_r}{r})$ if $k=2$ and $\frac{1}{r^n}L_n(g)(\frac{\alpha_r}{r})$ when $k=2n$ and where $(L_n g)(\frac{\alpha_r}{r})$ is a linear combination of the degree k derivatives of g. We get the asymptotic expansion:

$$\frac{1}{\kappa}\int_M g(t)e^{-\frac{r}{2}||t-\frac{\alpha_r}{r}||^2} = g(\frac{\alpha_r}{r}) + \frac{1}{2r}\Delta g(\frac{\alpha_r}{r}) + \sum\frac{1}{r^k}L_k g(\frac{\alpha_r}{r}) + O(r^{-k-1})$$

where $\Delta g = \sum_{e\in E}\frac{\partial^2}{(\partial x_e)^2}$ and L_k are some differential operators of degree $2k$. The $O(r^{-k-1})$ is uniform for $\frac{\alpha_r}{r}\in K$.
As $g(t) = f(t)e^{\frac{k}{2}t}$, the derivatives of g can be computed in terms of the derivatives of f. We find that there are differential operators L'_n of degree less than $2n$ such that $(L_n g)(t) = (L'_n f)(t)e^{\frac{k}{2}t}$ and we have $\Delta g(t) = \left(\Delta f(t) + \frac{1}{2}k\cdot\nabla f(t) + \frac{||k||2}{4}f(t)\right)e^{\frac{k}{2}t}$ where ∇ is the

gradient, $\cdot$ is the scalar product in $\mathbb{R}^E$ and $||\cdot||$ is the Euclidian norm in $\mathbb{R}^E$.
Hence the matrix coefficient $(f(t)e^{ik\theta}e_{\alpha_r}, e_{\alpha_r+k})$ has the asymptotic expansion:

$$(f(t)e^{ik\theta}e_{\alpha_r}, e_{\alpha_r+k}) = f(\frac{\alpha_r}{r}) + \frac{1}{2r}\left(\Delta f(\frac{\alpha_r}{r}) + k\cdot\nabla f(\frac{\alpha_r}{r}) - \frac{||k||^2}{4}f(\frac{\alpha_r}{r})\right) + \sum_{n\geq 2}\frac{1}{r^n}(L'_n f)(x) + O(r^{-n-1})$$

where L'_n are some differential operators of degree less than $2n$.
The error factor $O(r^{-n-1})$ is again uniform for $\frac{\alpha_r}{r} \in K$. □

Theorem 9.2. *For any simple closed curve γ on Σ, there exists functions $f_k \in C^\infty(\mathring{P}\times T)$ such that $T_r^\gamma \in End(H_r)$ is a Toeplitz operator on $\mathring{P}\times T$ of symbol $f_0 + \frac{1}{r}f_1 + \dots$ Furthermore the principal symbol f_0 of T_r^γ is the trace function $\sigma^\gamma(t,\theta) = -Tr(\rho_{t,\theta}(\gamma))$ and the Weyl subprincipal symbol defined as $f_1 + \frac{1}{2}\Delta_\partial f_0$ vanishes, where Δ_∂ is the Kähler Laplacian on M.*

Proof. First we want to introduce the functions $f_0, f_1, \dots$ that constitutes the symbol of T_r^γ, using Theorem **??** and Lemma **??**. Let K be a compact in $\mathring{P}\times T$ and let K' be a compact neighborhood of K in $\mathring{P}\times T$. We choose a function χ with compact support in $\mathring{P}\times T$ which is identically 1 on K'.
Let also α_r be a sequence such that $\frac{\alpha_r}{r} \in K'$.
According to Theorem **??**, to represent T_r^γ as a Toeplitz operator $T_r^{f_r}$ acting on H_r with $f_r = f_0 + \frac{1}{r}f_1 + \frac{1}{r^2}f_2 + \dots$, and f_i^j is the j-th Fourier coefficient of f_i, we need to have:

$$\begin{aligned} F_k^\gamma(\frac{\alpha}{r},\frac{1}{r}) &= \langle T_r^\gamma\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+k}\rangle = (T_r^{f_r}e_\alpha, e_{\alpha+k}) \\ &= f_0^k(\frac{\alpha}{r}) + \frac{1}{r}\left(f_1^k(\frac{\alpha}{r}) + \frac{1}{2}\left[\Delta f_0^k(\frac{\alpha}{r}) + k\cdot\nabla f_0^k(\frac{\alpha}{r}) - \frac{||k||^2}{4}f_0^k(\frac{\alpha}{r})\right]\right) + O(r^{-2}) \end{aligned}$$

using Lemma **??** for the second equality.
Gathering the equations for each Fourier coefficient and using Theorem **??**, we get:

$$f_0(t,\theta) = \sum_{k:E\to\mathbb{Z}} F_k^\gamma(t,0)e^{ik\theta} = -\mathrm{Tr}(\rho_{t,\theta}(\gamma)) = \sigma^\gamma(t,\theta)$$

and

$$f_1(t,\theta) + \sum_{e\in E}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t_e^2} + \frac{1}{2i}\frac{\partial^2}{\partial t_e\partial\theta_e} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2}{\partial\theta_e^2}\right]f_0(t,\theta) = \frac{1}{2i}\sum_{e\in E}\frac{\partial^2}{\partial t_e\partial\theta_e}\sigma^\gamma$$

Remember that $w_e = \frac{t_e}{2} + i\theta_e$ are local complex coordinates such that $\omega = i\sum dw_e\wedge d\overline{w_e}$, thus the Kähler laplacian Δ_∂ on M is simply $\sum\frac{\partial^2}{\partial w_e\partial\overline{w_e}} = \sum\frac{\partial^2}{\partial t_e^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial\theta_e^2}$.
Thus $f_1 + \frac{1}{2}\Delta_\partial f_0$ must vanish.
It is then possible to choose further coefficients f_k to match the asymptotic expansion up to $O(r^{-k+1})$ for each k, simply choosing f_{k+1} to cancel the residual term in $\frac{1}{r^{k+1}}$ in $T_r^\gamma - \Pi_r m_{f_0+\frac{1}{r}f_1+\dots\frac{f_k}{r^k}}$.

At this state, we have introduce smooth functions $f_0, f_1, f_2, \ldots$ such that for any K compact subset of $\mathring{P} \times T$, any K' compact neighborhood of K and $\chi \equiv 1$ on K' of compact support, we have

$$\left(T_r^\gamma - \Pi_r m_{\chi(f_0 + \frac{1}{r} f_1 + \cdots \frac{1}{r^k} f_k)}\right) s_r = O(r^{-k-1})_{L^\infty(K)}$$

uniformly for $s_r \in \mathrm{Vect}(e_{\alpha_r} \in H_r \ / \ \dfrac{\alpha_r}{r} \in K')$ of norm 1.
So we just have to control the difference of the two operators on the subspace $\mathrm{Vect}(e_\alpha \in H_r, / \dfrac{\alpha}{r} \in P - K')$. But there is a constant C such that $\forall \alpha \in P - K'$, we have $\sup\limits_K(|e_\alpha|^2) \leq Ce^{-rd(K, P-K')^2}$. Thus for $s_r \in \mathrm{Vect}(e_\alpha \in H_r, / \dfrac{\alpha}{r} \in P - K')$ of norm 1, we have $\sup\limits_K |s_r| < Cr^{-k-1}$ for an constant C not depending on s_r. As the operators T_r^γ sends e_α to a linear combination of $e_{\alpha+k}$ with k bounded, and as the T_r^γ are bounded for the norm of operators on H_r, we must also have $\sup\limits_K |T_r^\gamma s_r| < C' r^{-k-1}$. □

The quantity $f_1 + \dfrac{1}{2}\Delta_\partial f_0$ is sometimes called in the litterature the Weyl-subprincipal symbol of the Toeplitz operator T_r^f. A straightforward computation gives that, for T_r^f and T_r^g two Toeplitz operators of principal symbols f_0 and g_0 and subprincipal symbols f_1 and g_1, the composition $T_r^f T_r^g$ has $f_0 g_0$ as principal symbol and $f_0 g_1 + f_1 g_0 + \dfrac{1}{2}\{f, g\}$ as subprincipal symbol, which is the composition law that a Weyl-subprincipal symbol ought to satisfy.

With the framework we developed in the last paragraphs, we wish to study the following problem: take Σ a closed oriented surface of genus g and $\mathcal{C} = (C_e)_{e \in E}$ a pants decomposition of Σ. Such a pants decomposition gives rise to a moment application $\mu : \mathcal{M}(\Sigma) \to P$, to basis φ_α of $V_r(\Sigma)$ where α are some integer points of the moment polytope P and to isomorphisms $\phi_r : V_r(\Sigma) \longrightarrow H_r$ defined above, where H_r are subspaces of $H^0(M, L^r \otimes \delta)$. Suppose $\mathcal{D} = (D_f)_{f \in F}$ is another pants decomposition, and the associated basis of $V_r(\Sigma)$ is ψ_β. As $V_r(\Sigma)$ has an Hermitian product, we can form the pairings $\langle \varphi_\alpha, \psi_\beta \rangle$ and study the limit as $\dfrac{\alpha}{r}$ and $\dfrac{\beta}{r}$ tend to some limits in $\mathbb{R}^E$ and $\mathbb{R}^F$.
But the vectors ψ_β are joint eigenvectors of the curve operators $T_r^{\gamma_i}$, and by Theorem **??**, we know that the operators $T_r^{\gamma_i}$ act as Toeplitz operators with symbol σ^{γ_i} on $H^0(\mathring{P} \times T, L^r \otimes \delta)$. Eigenvectors of Toeplitz operators are well understood, in particular they concentrate on level sets of the principal symbols. We will be able to give an asymptotic form for ψ_β as a section of $L^r \otimes \delta$, and thus we will be able to compute the pairing with φ_α. As φ_α and ψ_β concentrate on level sets of σ^{C_e} and σ^{D_f}, the formula will be a sum of contributions coming from each intersection points of these level sets. The next section is to devoted to a result proving that generically, such level sets intersect nicely in a finite number of points, allowing us to obtain an asymptotic formula by summing the contributions of each of these points to the pairing in Section **??**.
Such pairings have an interpretation as quantum invariants: $\langle \varphi_\alpha, \psi_\beta \rangle$ is the Reshetikhin-Turaev invariant of the 3-manifold with links obtained by gluing the handlebodies associated to the pants decompositions $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$, and adding in each handlebody the dual graph of the pants decomposition colored by α and β respectively. A special case would be if both coloring are trivial colorings $(1, \ldots, 1)$, then adding the colored trivalent graphs correspond

to adding empty links in each handlebody, thus we would obtain the Reshetikhin-Turaev invariants of the 3-manifold with Heegard genus g and Heegard splitting corresponding by the pants decomposition $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$. Unfortunately our approach to calculating pairings fails in this case, as some intersection points will be in $\partial P \times T$ and we lack control over what happens on ∂P.

10 Intersections of Lagrangians in $\mathcal{M}(\Sigma)$

We fix a pants decomposition $\mathcal{C} = (C_e)_{e\in E}$, which defines an isomorphism $\Phi_r : V_r(\Sigma) \to H_r$ as in Proposition **??**. Furthermore, we denote by U the set $\mu^{-1}(\mathring{P}) \subset \mathcal{M}(\Sigma)$, where μ is the moment map defined as in Subsection **??**.
For $\mathcal{D} = (\gamma_i)_{i\in I}$ a pants decomposition of Σ, we introduce the closed subset $\Lambda_x^{\mathcal{D}}$ of $\mathcal{M}(\Sigma)$ defined by

$$\Lambda_x^{\mathcal{D}} = \{\rho, \forall i \in I, -\operatorname{Tr}(\rho(\gamma_i)) = x_i\}$$

When x is in the interior of the moment polytope associated to the pants decomposition $\mathcal{D}$, these subsets are Lagrangian tori of $\mathcal{M}(\Sigma)$: indeed, it is the pre-image of a regular value of the Poisson commuting trace functions $\operatorname{Tr}(\rho(\gamma_i))$. The Arnold-Liouville theorem ensures it is a torus of dimension n where $\dim(\mathcal{M}(\Sigma)) = 2n$.

As we expect the joint eigenvectors of curve operators $T_r^{\gamma_i}$, viewed as elements of H_r to concentrate on such Lagrangians, we wish to show that they have nice properties for generic x.

Proposition 10.1. *For $\mathcal{D} = (\gamma_i)_{i\in I}$ and $\mathcal{F} = (\delta_j)_{j\in J}$ any pants decompositions of Σ, we have:*

- *For any x in an open dense subset of $\mathbb{R}^I$, the intersection $\Lambda_x^{\mathcal{D}} \cap \mu^{-1}(\partial P)$ is transverse and $\Lambda_x^{\mathcal{D}} \setminus \mu^{-1}(\partial P)$ is connected.*
- *For any x, y in an open dense subset of $\mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^J$, the intersection $\Lambda_x^{\mathcal{D}} \cap \Lambda_y^{\mathcal{F}}$ is transverse.*

Proof. The proposition follows from two steps. First we can obtain the transversality conditions as an application from a classical result in real algebraic geometry, the algebraic Sard theorem. We will shortly introduce the notions needed to state this result, a detailled background is found in [**?**].

To begin with, we define a semi-algebraic set N as a subset of some $\mathbb{R}^N$ defined by polynomial equations or inequations (strict or large): there are a families of polynomials $P_1, \dots, P_n$, $Q_1, \dots Q_m$, and $R_1, \dots R_l$ such that

$$N = \{x \in \mathbb{R}^N \,/\, P_1(x) = 0, \dots P_n(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots Q_m(x) > 0, R_1(x) \geq 0, \dots R_l \geq 0\}$$

Any affine algebraic variety is a semi-algebraic set (defined by equations only). For the usual topology on $\mathbb{R}^N$, an affine algebraic variety is a stratified manifold. Each of its strata are then semi-algebraic sets.
Moreover any semi-algebraic set is also a stratified manifold. The dimension of a semi-algebraic set is then defined to be the maximal dimension of any of its strata.
Regular maps between semi-algebraic sets still are those given by polynomial functions. Finally, semi-algebraic sets have tangent spaces defined in the same manner as in the case of algebraic varieties.

We can now express the algebraic Sard theorem:

Theorem 10.1. *[?]Let N and M be two semi-algebraic sets. If $f : N \to M$ is an algebraic map, then the set* $\mathrm{Crit}(f) = \{f(x) \,/\, \dim Tf_x(T_xN) < \dim(T_{f(x)}M)\}$ *is semi-algebraic and has dimension* $< \dim M$

Now we note that the intersections occurring in Proposition **??** are intersections of real algebraic subvarieties inside $\mathcal{M}(\Sigma)$.

Lemma 10.2. *$Y = \mu^{-1}(\partial P)$ is a real subvariety of $\mathcal{M}(\Sigma)$. Moreover for any $\mathcal{D}$ pants decomposition of Σ and any $x \in \mathbb{R}^I$, the set $\Lambda_x^{\mathcal{D}}$ is a real algebraic subvariety of $\mathcal{M}(\Sigma)$.*

Proof. Indeed, given three curves $C_e, C_f, C_g \in \mathcal{C}$ that bound a pair of pants Q, the coordinates x_e, x_f and x_g of $\mu(\rho)$ satisfy three triangular identities of the type $x_e \leq x_f + x_g$, and the inequation $x_e + x_f + x_g \leq 2$. We have equality in one of these equations if and only if the restriction of ρ to the pair of pants Q is commutative. Hence, $\rho \in \mu^{-1}(\partial P)$ if and only if its restriction to one of the pants is commutative, and the set Y is the reunion of the subvarieties $\{\mathrm{Tr}(\rho([C_e, C_f]) = 2\}$, for C_e and C_f in the same pair of pants.
The case of $\Lambda_x^{\mathcal{D}}$ is straightforward as $\Lambda_x^{\mathcal{D}}$ is defined as the set $\{\rho \,/\, \mathrm{Tr}(\rho(D_i)) = x_i\}$. □

Topologically, as Y is a real algebraic manifold, it is a stratified manifold. Its strata are in turn semi-algebraic sets.
We can apply the algebraic Sard theorem to the map $(f_{D_e})_{e\in E} : \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathbb{R}^I$ restricted to any stratum $Z \subset Y$. We obtain that for x in a dense open subset of $\mathbb{R}^I$, the map $(f_{D_e})_{e\in E}$ does not have x as a critical value on the stratum Z. This is the same as saying that $\Lambda_x^{\mathcal{D}}$ is transverse to the stratum Z of Y, so for generic x it is transverse to each stratum of Y. The same applies to showing the transversality of $\Lambda_x^{\mathcal{D}}$ and $\Lambda_y^{\mathcal{F}}$ for generic x and y.

The only thing that remains to prove is the part about the connectedness of $\Lambda_x^{\mathcal{D}} \setminus Y$. We will need the following lemma:

Lemma 10.3. *The real algebraic subvariety $Y = \mu^{-1}(\partial P)$ has codimension 2 in $\mathcal{M}(\Sigma)$.*

Proof. Recall that the subvariety Y is included in the union of subvarieties

$$\{\rho \,/ \mathrm{Tr}(\rho([C_e, C_f])) = 2\}$$

where C_e and C_f are curves of the pair of pants decomoposition that bound a common pair of pants. Thus we only have to show that subvarieties of this type have codimension at least 2.
Let γ and δ two disjoint non-isotopic simple closed curves in the surface Σ. We show that the subvariety $\{\mathrm{Tr}(\rho([\gamma, \delta])) = 2\}$ has codimension at least 2 in $\mathcal{M}(\Sigma)$. This contains the subvariety of abelian representations, which has dimension $2g$ and thus codimension greater than 2, as $g \leq 2$. Therefore we are interested in the codimension near an irreducible representation ρ.
One possibly is that $\rho \in \{\rho \in \mathcal{M}_{irr}(\Sigma) \,/\, \rho(\gamma) = \pm I\}$. This semi-algebraic set is of codimension at least 3 in $\mathcal{M}(\Sigma)$.
Indeed, consider the projection $\pi : \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathrm{Hom}(\pi_1\Sigma, \mathrm{SO}_3)/\mathrm{SO}_3$. This map is a cover on its image, and thus conserves dimension. The representation ρ is sent to a representation $\tilde{\rho}$ such that $\tilde{\rho}(\gamma) = I$ in SO_3. Taking $\tilde{\rho}(\gamma) = I$ amounts to replace $\mathcal{M}(\Sigma)$ with the moduli space of $\Sigma//\gamma$, that is we smash γ to a point.
We have two cases: either γ is separating, we obtain the wedge of two surfaces of genus g_1 and g_2 with $g = g_1 + g_2$, whose fundamental space is $\pi_1\Sigma_{g_1} * \pi_1\Sigma_{g_2}$, and whose moduli space has dimension $6g_1 - 6 + 6g_2 - 6 = 6g - 12$. When the curve γ is non-separating, $\Sigma//\gamma$ has fundamental group $\pi_1\Sigma_{g-1} * \mathbb{Z}$ and the moduli space has dimension $6(g-1) - 6 + 3 = 6g - 9$.

In either case, the codimension is greater than 3.

Thus we need only to show that $\{\mathrm{Tr}(\rho([\gamma,\delta])) = 2\}$ has codimension at least 2 in the neighborhood of points ρ such that $\rho(\gamma) \neq \pm I$ and $\rho(\delta) \neq \pm I$.
We denote by F the function $\rho \to \mathrm{Tr}(\rho([\gamma,\delta]))$. Let ρ an irreducible representation in $\{F(\rho) = 2\}$ with $\rho(\gamma) \neq \pm I$ and $\rho(\delta) \neq \pm I$. As we consider representation in SU_2, the function F has a local maximum at ρ, thus the differential $D_\rho F$ vanishes. To understand the local structure of $\{F = 2\}$ near ρ, we compute the 2nd differential of F. We will exhibit a subspace of the tangent space of dimension 2 on which D^2F is definite negative. This will prove that the tangent space of $\{\mathrm{Tr}(\rho([\gamma,\delta])) = 2\}$ has codimension at least 2, and hence finish the proof of our claim.
Claim: There is a pair of pants P' such that ρ is commutative on P' and the restriction map $\mathcal{M}(\Sigma) \to \mathcal{M}(P')$ is a submersion.
Indeed it is an elementary fact that the tangent space $T_\rho\mathcal{M}(\Sigma)$ is isomorphic to the twisted cohomology group $H^1(\Sigma, \mathrm{Ad}\,\rho)$ where $\mathrm{Ad}\rho$ stands for the adjoint representation of ρ (see for example [**?**]).
Consider the exact sequence in twisted cohomology associated to the pair (Σ, P):

$$H^1(\Sigma, \mathrm{Ad}\,\rho) \to H^1(P, \mathrm{Ad}\,\rho) \to H^2(\Sigma, P, \mathrm{Ad}\,\rho)$$

By Poincaré duality, we have $H^2(\Sigma, P, \mathrm{Ad}\,\rho) \simeq H^0(\Sigma \setminus P, \mathrm{Ad}\,\rho)^*$. If $\Sigma \setminus P$ is connected, ρ must be irreducible on $\Sigma \setminus P$ and then $H^0(\Sigma \setminus P, \mathrm{Ad}\,\rho) = 0$. When it is not the case, either ρ is irreducible on each components of $\Sigma \setminus P$ and $H^0(\Sigma \setminus P, \mathrm{Ad}\,\rho) = 0$, or there is another pair of pants P' in the decomposition on which ρ is commutative and such that $\Sigma \setminus P'$ is connected: just take one of the connected components of $\Sigma \setminus P$ on which ρ is commutative, it is a surface with one or two boundary curves, and any decomposition of such a surface has a nonseparating pair of pants disjoint from the boundary.
Hence, we can always assume that $H^0(\Sigma \setminus P, \mathrm{Ad}\,\rho) = 0$ and thus that the restriction map is a submersion.

Now we only have to show that $\{\rho' \,/\, F(\rho') = 2\}$ is of codimension 2 in $\mathcal{M}(P)$.
We now compute the second derivative of the restriction $F|_{\mathcal{M}(P)}$. As $\rho(\gamma)$ and $\rho(\delta)$ commute, up to conjugation we can assume that $\rho(\gamma)$ and $\rho(\delta)$ are diagonal with coefficients $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ and $(e^{i\varphi}, e^{-i\varphi})$ respectively. We denote these diagonal matrices by U_θ and U_φ respectively. We compute the second differential of $F|_{\mathcal{M}(P)}$ on $H^1(P, \mathrm{Ad}\,\rho)$, space which is isomorphic to

$$H^1(P, \mathrm{Ad}\,\rho) = \mathrm{su}_2 \bigoplus \mathrm{su}_2 / \{(\xi - U_\theta \xi U_\theta^{-1}, \xi - U_\varphi \xi U_\varphi^{-1},\ \xi \in \mathrm{su}_2\}$$

Let us introduce the notations: $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ and $k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.
Now the vector space $V = \{(\xi, 0), \xi \in \mathrm{Vect}(j,k)\}$ is a subspace of dimension 2 of $H^1(P, \mathrm{Ad}\,\rho)$ (as U_θ and U_φ have the same commutant, no $(\xi, 0)$ is equivalent to $(0,0)$ in $H^1(P, \mathrm{Ad}\,\rho)$).
We can endow it with a norm $||\cdot||$ for which (j,k) is an orthonormal basis.
We show that D^2F is definite negative on V: we have

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(U_\theta e^{\xi} U_\varphi e^{-\xi} U_{-\theta-\varphi}) &= 2 - \mathrm{Tr}(U_\theta \xi U_\varphi \xi U_{-\theta-\varphi}) + 2\,\mathrm{Tr}(\xi^2) + O(||\xi||^3) \\
&= 2 + \mathrm{Tr}(\xi^2 U_{-2\varphi}) - 2||\xi||^2 + O(||\xi||^3) \\
&= 2 + 2||\xi||^2(\cos(2\varphi) - 1) + O(||\xi||^3) = 2 - 4\sin(\varphi)||\xi||^2 + O(||\xi||^3)
\end{aligned}$$

As the second differential is definite negative on a subspace of dimension 2, in a neighborhood of ρ the space $\{\rho' \,/\, F(\rho') = 2\}$ is of codimension at least 2. $\square$

To finish the proof of Proposition **??** we deduce the connectedness of $\Lambda_x^{\mathcal{D}} \cap Y$ for generic x from the Lemma **??**. Recall that for generic x the intersection $\Lambda_x^{\mathcal{D}} \cap Y$ is transverse, thus the intersections of $\Lambda_x^{\mathcal{D}}$ with each $\{\mathrm{Tr}(\rho([C_e, C_f])) = 2\}$ are transverse. Also, for generic $x \in \mathbb{R}^n$ we can assume that the set $\Lambda_x^{\mathcal{D}}$ is either empty or a torus of dimension n inside $\mathcal{M}(\Sigma)$. In the former case the connectedness is trivial. In the latter case, to show that $\Lambda_x^{\mathcal{D}} \cap \mu^{-1}(\mathring{P})$ is connected, we will only need to show that $\Lambda_x^{\mathcal{D}} \cap Y$ is of codimension at least 2 in $\Lambda_x^{\mathcal{D}}$. What we mean by codimension at least 2, is that each strata of this stratified variety has topological codimension at least 2 in the torus $\Lambda_x^{\mathcal{D}}$. As the intersection $\Lambda_x^{\mathcal{D}} \cap Y$ is transverse, it follows from the fact that Y is of codimension at least 2 in $\mathcal{M}(\Sigma)$. $\square$

11 Pairings of eigenvectors of curve operators

11.1 Pairing in the half-form bundle

In this short preliminary section, we define various pairings for the half-form bundle δ on Kähler manifold M. These pairing forms will be useful to describe the asymptotic expansions occuring in the pairing of quasimodes in Section **??**.
We consider a general Kähler vector space E of complex dimension n with symplectic form ω and complex structure J.
Choose two transverse Lagrangian subspaces Γ_1 and Γ_2 of the vector space E.
Let $\Lambda^{n,0}E^*$ be the space of complex n-forms on M, of which δ is a square root. We have maps:

$$\pi_i : \Lambda^{n,0}E^* \to \Lambda^n \Gamma_i^* \otimes \mathbb{C}$$

which consist of restricting a complex n-form on E to Γ_i, getting an isomorphism between complex n-forms on E and the complexification of real n-forms on Γ_i. On the other hand we have maps

$$\Lambda^n \Gamma_i^* \otimes \mathbb{C} \to \Lambda^{n,0}E^*$$

extending n-form on Γ_i to complex n-form on E. These maps are well defined as the Γ_i are Lagrangian (thus $\Gamma_i \bigoplus J\Gamma_i = E$), and are the inverse isomorphisms of the first couple of maps.
Now given n-forms on Γ_1 and Γ_2 the wedge product create an $2n$-form on E, which we can compare with the Liouville form $\dfrac{\omega^n}{n!}$. Combining with the restriction maps π_i, we get the pairing

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^{n,0}E^* & \times & \Lambda^{n,0}E^* & \to & \mathbb{C} \\ \alpha & , & \beta & \to & (\alpha,\beta)_{\Gamma_1,\Gamma_2} = i^{n(2-n)} \dfrac{\pi_1(\alpha) \wedge \pi_2(\beta)}{\omega^n} \end{array}$$

If we have a complex line δ with an isomorphism $\phi : \delta^{\otimes 2} \to \Lambda^{n,0}E^* = \mathbb{C}$, a pairing for δ associated to Lagrangians Γ_1 and Γ_2 is

$$(\alpha,\beta)_{\Gamma_1,\Gamma_2} = \sqrt{(\alpha^{\otimes 2}, \beta^{\otimes 2})_{\Gamma_1,\Gamma_2}}$$

The determination of the square root goes as follows: recall that we also have an Hermitian pairing

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^{n,0}E^* & \times & \Lambda^{n,0}E^* & \to & \mathbb{C} \\ \alpha & , & \beta & \to & (\alpha,\beta) = i^{n(2-n)} \dfrac{\alpha \wedge \overline{\beta}}{\omega^n} \end{array}$$

and thus also a pairing $(\alpha, \beta) = \sqrt{(\alpha^{\otimes 2}, \beta^{\otimes 2})}$
It is shown in [?] that when $\Gamma_2 = J\Gamma_1$, this pairing is the same as the pairing $(\alpha, \beta)_{\Gamma_1, \Gamma_2}$ up to a positive constant. We require the same to be true for the corresponding pairing on δ, for general transverse Γ_1 and Γ_2 we extend the definition so that it depends continuously on Γ_1 and Γ_2.

Suppose we consider, instead of just a Kähler vector space, a (connected) Kähler manifold M of complex dimension n, equipped with a half-form bundle δ. Pick a point x in M, pairings on δ_x can be defined by the above procedure. We get pairings on any δ_y for $y \in M$ by extending these by continuity.

11.2 Quasimodes of curve operators

Let $\mathcal{C} = (C_e)_{e \in E}$ and $\mathcal{D} = (D_f)_{f \in F}$ be two collections of curves that form pair of pants decompositions of Σ. We assume that these pair of pants decompositions have planar dual graphs. We call I_r (resp. J_r) the set of r-admissible colorings associated to the pair of pants decomposition $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{D}$), $(\varphi^r_\alpha)_{\alpha \in I_r}$ and $(\psi^r_\beta)_{\beta \in J_r}$ the associated basis of $V_r(\Sigma)$.

We introduce the polytope P (resp. Q) that is the image of $\mathcal{M}(\Sigma)$ by the momentum mapping $\mu : \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathbb{R}^E$ such that $\mu(\rho) = \operatorname{acos}(\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\rho(C_e)))$ (resp. μ' such that $\mu'(\rho) = \operatorname{acos}(\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\rho(C_e)))$.
We want to study the asymptotic behavior of pairings $\langle \varphi^r_{\alpha_r}, \psi^r_{\beta_r} \rangle$ for large level r. We impose conditions on the sequence α_r and β_r: firstly, we need $\frac{\alpha_r}{r}$ and $\frac{\beta_r}{r}$ to stay in compact subsets of $\mathring{P}$ and $\mathring{Q}$. Indeed the representation of common eigenvectors of commuting Toeplitz operators works well only for eigenvalues corresponding to regular values of the principal symbols: that is, here, the interior of the polytopes. Secondly, as the eigenvectors will concentrate on Lagrangian $\Lambda^{\mathcal{C}}_{-2\cos(\pi\frac{\alpha_r}{r})}$ and $\Lambda^{\mathcal{D}}_{-2\cos(\pi\frac{\beta_r}{r})}$, thus we want the intersection to be transverse. By Section **??**, there is an open dense subset $W_{\pitchfork}$ of $\mathring{P} \times \mathring{Q}$ such that for any $x, y \in W_{\pitchfork}$ the Lagrangian $\Lambda^{\mathcal{C}}_{-2\cos(\pi\frac{\alpha_r}{r})}$ and $\Lambda^{\mathcal{D}}_{-2\cos(\pi\frac{\beta_r}{r})}$ are transverse.
So we impose the following conditions on α_r and β_r:

Property (*) : We say that a sequence $(\alpha_r, \beta_r) \in I_r \times J_r$ satisfy Property (*) if there is a compact subset K in $W_{\pitchfork}$, such that $(\frac{\alpha_r}{r}, \frac{\beta_r}{r}) \in K$ for any r.

As explained in Section **??**, the pants decomposition $\mathcal{C}$ induces an isomorphism Φ_r from $V_r(\Sigma)$ into $H_r \subset H^0(M, L^r \otimes \delta)$, where $M = \mathbb{R}^E \times T$, where T is the torus that is the fiber of the map μ. The vectors ψ^r_β, as linear combinations of the φ^r_α, can be viewed as elements of H_r, furthermore their $\mathbb{L}^2$-norms are concentrated near $P \times T$.
The curve operators $T^{D_f}_r$ have ψ^r_β as common eigenvectors with eigenvalues $-2\cos(\frac{\pi\beta_f}{r})$. But we have given an expression of the curve operators acting on H_r as Toeplitz operators on $U = \mathring{P} \times T$. Call σ^{D_f} the Toeplitz symbol associated to $T^{D_f}_r$, that is the trace function associated to the curve D_f.

Proposition 11.1. *Let W be a compact subset of $\mathring{P}$ and $\beta_r \in J_r$ be a sequence such that*

$\frac{\beta_r}{r} \in W$. *The vectors* $\psi^r_{\beta_r}$ *are microlocal solutions on* U *of*

$$T_r^{\sigma^{D_f}}\Psi_r = -2\cos(\frac{\pi\beta_{r,f}}{r})\Psi_r$$

meaning that they satisfy the following 2 conditions:

- *(admissibility condition) For any compact subset* $K \subset U$*, there exists constants* C *and* N *such that* $|\Psi_r(x)| \leq Cr^N$ *for all* $x \in K$*.*
- *(quasimode condition) For any* $x \in U$ *there is a function* φ *with compact support containing* x*, such that* $\Pi_r(\varphi\Psi_r) = \Psi_r + O(r^{-\infty})$
  and $T_r^{D_f}\Pi_r(\varphi\Psi_r) = -2\cos(\frac{\pi\beta_{r,f}}{r})\Psi_r + O(r^{-\infty})$ *uniformly on a neighborhood of* x*.*

Such a sequence of vectors Ψ_r *is also called a quasimode of the Toeplitz operators* $T_r^{D_f}$*, for the joint eigenvalue* $-2\cos(\frac{\pi\beta_{r,f}}{r})$

Proof. Indeed, $\psi^r_{\beta_r}$ is a linear combination of the vectors φ_α which are in number less or equal than $r^{|E|}$ and the coefficients in the linear combination are all less or equal than 1 as $\psi^r_{\beta_r}$ is of norm 1. As $h(e_\alpha, e_\alpha)(x) \leq 1$ for all α and $x \in \mathbb{R}^E$, the vectors $\psi^r_{\beta_r}$ satisfy the admissibility condition.
For the quasimode condition, choose $x = (t, \theta) \in U$, let φ be a T invariant cutoff function with compact support in U and identically equal to 1 on a set of the form $V \times T$ where V is a neighborhood of x. Then up to $O(r^{-\infty})$, the projection $\Pi_r(\varphi\psi^r_{\beta_r})$ has the same coefficients as $\psi^r_{\beta_r}$ on each e_α with $\frac{\alpha}{r} \in V$, and on a small neighborhood $V' \subset V$ of x, any other e_α is $O(r^{-\infty})$. Thus $\Pi_r(\varphi\psi^r_{\beta_r}) = \psi^r_{\beta_r} + O(r^{-\infty})$ on V'.
Finally, we know that $\psi^r_{\beta_r}$ is an eigenvector of $T_r^{D_f}$ which on U acts as a Toeplitz operator of symbol σ^{D_f} by Theorem **??**. As $\psi^r_{\beta_r}$ has the same coefficients on the e_α with $\alpha \in V$ up to $O(r^{-\infty})$, and $T_r^{D_f}$ has a finite number of nonzero diagonals,

$$T_r^{\sigma^{D_f}}\Pi_r(\varphi\psi^r_{\beta_r}) = -2\cos(\frac{\pi\beta_{r,f}}{r})\varphi\psi^r_{\beta_r} + O(r^{-\infty})$$

on $V' \times T$. □

The operators $T_r^{D_f}$ of H_r commute as they are curve operators on disjoint curves.
Quasimodes of commuting Toeplitz operators are well understood. When $T_1, \ldots, T_n$ are commuting Toeplitz over a Kähler manifold M of dimension $2n$, with principal symbols μ_i, and E is a regular value of $\mu : M \to \mathbb{R}^n$, the set $\mu^{-1}(E)$ is a Lagrangian torus of M by the Arnold-Liouville theorem.
Quasimodes associated to eigenvalues E^i concentrate on the Langrangian torus Λ_E, and some Ansatz can be used to compute the asymptotic behavior of quasimodes. We will follow the approach of [**?**], which describes quasimodes of such operators as so-called "Lagrangian sections".
Let $U \subset U'$ be two contractible neighborhoods of E, consisting of regular values of μ. By Arnold-Liouville theorem, $\mu^{-1}(U')$ is diffeomorphic to $U' \times T$ where T is an n-dimensional torus, and μ acts as the projection $U' \times T \to U'$ on it. For any $E' \in U'$, the torus $\Lambda_{E'}$ is Lagrangian. We take a sequence $E^r \in U$, and we are interested in quasimodes of the Toeplitz operators $T_1, \ldots, T_n$, that is microlocal solutions of

$$T_i^r\Psi_r = E_i^r\Psi_r \tag{2}$$

Proposition 3.5 [?] gives a formula that allows to compute quasimodes on contractible subsets in the following way:

Proposition 11.2. *Let E be a regular value of the momentum map $\mu : M \to \mathbb{R}^n$ and $U \subset U'$ be small contractible neighborhoods of E, so that $\mu^{-1}(U) = U \times T$ where T is a torus. Let V be a contractible open subset of the torus T. Then:*

- *There is a smooth map $F_V : U \to \mathbb{L}^2(U' \times V, L)$ such that for any $E \in U$, the section $F_V(E)$ is flat of norm 1 on Λ_E and of norm < 1 elsewhere in $U' \times V$, such that $F_V(E)$ is holomorphic in a neighborhood of Λ_E in $U \times V$, and such that all $F_V(E)$ for $E \in U$ have the same compact support in $U' \times V$*
- *There is a sequence of smooth map $g_V(\cdot, r) : U \to \mathbb{L}^2(U' \times V, \delta)$ such that $g_V(E, r)$ is holomorphic in a neighborhood of Λ_E, and $g_V(\cdot, r)$ has an asymptotic expansion $g_V(\cdot, r) = g_V^0(\cdot) + \frac{1}{r} g_V^1(\cdot) + \dots$ with $g_V^0(E)|_{\Lambda_E}$ satisfying the transport equations $\mathcal{L}_{X_e} g_V^0(E) = 0$ where X_e is the symplectic gradient of the function μ_e.*

such that $F_V(E_r)^r g(E_r, r)$ is a microlocal solution on $U \times V$ of (??)

Furthermore, the proposition 3.6 of [?] garanties that quasimodes are always of this form:

Proposition 11.3. *Let E be a regular value of μ and U and V be defined as in Proposition ??. Suppose that ψ_r is a microlocal solution of (??) on $U \times V$. Then there exists a sequence λ_r with $\lambda_r = O(r^N)$ for some N such that:*

$$\psi_r = \lambda_r F_V(E_r)^r g(E_r, r) + O(r^{-\infty})$$

Proof of Propositions ?? and ??: The material in [?] and [?] is sufficient to get these two propositions. The proof of Proposition ?? consists two steps: first step is a computation of how Toeplitz operators act on Lagrangian sections given by the Ansatz $\psi_r = F_V^r g(\cdot, \frac{1}{r})$. We follow the proof in [?] to work out this calculation. First, the projection on H_r acts on a Lagrangian section by sending ψ_r to

$$\Pi_r \psi_r(x) = \int_M N(x, y) F^r(y) g(y) \mu_M(y)$$

where $N(x, y)$ is the Bergman kernel we computed in ??. What differs from [?] is that we integrate over a non-compact manifold M. However, as $[F| \leq 1$, $|g| = O(r^a)$ for some a, and $N(x, y) < C r^b e^{-rd(x,y)^2}$ for some constants C and a, we can reduce this integral to an integral over a bounded open set: let y be in a compact subset K of $\mathring{P} \times T$, and let $\varepsilon < d(K, \partial P)$. We set $K_\varepsilon = \{y \ / \ d(y, K) < \varepsilon\}$. We have:

$$\int_{M \setminus K_\varepsilon} N(x, y) F^r(y) g(y) \mu_M(y) = O(r^{-\infty})$$

where the $O(r^{-\infty})$ is uniform for $y \in K$. Once we reduced to an integral over a bounded set, the computations in [?] apply directly to show that $\Pi_r \psi_r = \psi_r + O(r^{-\infty})$ uniformly on K. In the same way, when we compute the action of the Toeplitz operator T_r^γ on the Lagrangian section $F^r g$, we can restrict everything to an integral over a bounded set. We have that:

$$T_r^\gamma \psi_r(x) = \int_M N(x, y) f_\gamma(y) \chi(y) F^r(y) g(y) \mu(y) + O(r^{-\infty})$$

where the O is uniform for $x \in K$, where f_γ is the symbol of T_r^γ, and χ is some cutoff function that is identically 1 over K_ε. Again, as $N(x,y) < Cr^b e^{-rd(x,y)^2}$, the integral over $M \setminus K_\varepsilon$ is a $O(r^{-\infty})$ uniformly on K, and we have

$$T_r^\gamma \psi_r(x) = \int_{K_\varepsilon} N(x,y) f_\gamma(y) F^r(y) g(y) \mu_M(y) + O(r^{-\infty})$$

We then refer to [**?**] for the computation of the action of a Toeplitz operator on the Lagrangian section:
it is shown that a Toeplitz operator of principal symbol μ_i and vanishing subprincipal symbol sends the Lagrangian section $F_V^r g$ to a Lagrangian section

$$F_V^r(E_r g_0 + \frac{1}{r}(E_r g_1 + \frac{1}{i}\mathcal{L}_{X_i} g_0) + \ldots) + O(r^{-\infty})$$

These computations are again purely local, and transport directly in our setting.
Once the action of Toeplitz operators on Lagrangian sections is known, it is possible to recursively define the sections g_i to get a quasimode by solving transport equations. Moreover the first term g_0 must satisfy $\mathcal{L}_{X_i} g_0 = 0$.
Then the proof of Proposition **??** in [**?**] consists of using Fourier integral operators to show the microlocal equation is equivalent to an equation in a "model manifold" in which the equation can be explicitly solved. The same arguments using the control we have on the Bergman kernel to localize all integrations can be used to show that the proof in [**?**] can also be applied to our setting.□

In general the quasimodes on such contractible open set can be patched together to get a quasimode on $U \times T$ if the sequence E^r satisfy some conditions called the Bohr-Sommerfeld conditions, and then on M using functions, as quasimodes are negligible away from Λ_{E_r}. Roughly speaking, the Bohr-Sommerfeld conditions consist in the following: as the sections $F_V(E_r)$ for different contractible $V \subset T$ differ by a complex number, we need to be able to renormalize them in a coherent way, this is possible when the holonomy of $L \times \delta$ along Λ_{E^r} is trivial.
In our case, we do not need to study the Bohr-Sommerfeld conditions: we already know the spectrum of $T_r^{D_f}$ and we have a sequence $\psi_{\beta_r}^r \in H_r$ that realize a quasimode on $U = \mathring{P} \times T$ of the Toeplitz operators $T_r^{D_f}$ for $E_i^r = -2\cos(\frac{\pi \beta_{i,r}}{r})$.
These quasimode have to concentrate on the Lagrangian $\Lambda_{E^r}^{D_f}$. If we chose E^r in an appropriate open dense subset of $\mathbb{R}^F$, the intersection $\Lambda_{E^r}^{D_f}$ is connected according to Section **??**. Hence, if we cover $\Lambda_{E^r}^{D_f} \cap U$ by contractible open sets $V_1, \ldots, V_k$, we know that on each V_i, there are coefficients $\lambda_{r,i}$ such that

$$\psi_{\beta_r}^r|_{V_i} = \lambda_{r,i} F_{V_i}^r(E^r) g_{V_i}(E^r, r) + O(r^{-\infty})$$

as sections in $\mathbb{L}^2(\mathring{P} \times V_i, L^r \otimes \delta)$, and the coefficients $\lambda_{r,i}$ differ by complex numbers of norm 1; the sections $F_{V_i}(E^r)$ can be patched together to give a section F of L that is flat of norm 1 on Λ_{E^r}, similarly the $g_{V_i}(E^r, r)$ are patched together to form a section g of δ. The sections F and g can be multivalued, however, $F^r g$ is a single-valued section of $L^r \times \delta$ which has trivial holonomy on Λ_{E^r} as E_r satisfy the Bohr-Sommerfeld conditions.
Note that here we have used the fact that the intersection $U \cap \Lambda_{E^r}$ is connected, otherwise we would need multiple constants λ_r, one for each connected component of the intersection.

Now that we know an asymptotic expression of $\psi^r_{\beta_r}$ as a Lagrangian section, we want to calculate $|\lambda_r|$ using the fact that $\psi^r_{\beta_r}$ is of norm 1.

Proposition 11.4. *The vectors ψ_{β_r} for $\frac{\beta_r}{r} \in W$ where W is a compact subset of $\mathring{Q}$, have an asymptotic expansion as elements of H_r:*

$$\psi_{\beta_r} = u_r \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{n}{4}} (1 + O(r^{-1}))F^r(E^r)g(E^r)$$

where

- *u_r is a sequence of complex number of moduli 1*
- *E^r is the sequence of common eigenvalues corresponding to ψ_{β_r}, given by the formula $E^r_i = -2\cos(\pi\frac{\beta_{r,i}}{r})$*
- *F and $g(\cdot, r)$ are the smooth maps in $W \to \mathbb{L}^2(M, L)$ and $W \to \mathbb{L}^2(M, \delta)$ respectively, with $F(E^r)$ flat of norm 1 on $\Lambda^{\mathcal{D}}_{E^r}$, holomorphic in a neighborhood of this Lagrangian, and of norm < 1 elsewhere.*
  And finally the sections $g(E^r)$ of δ on M are holomorphic in a neighborhood of $\Lambda^{\mathcal{D}}_{E^r}$ and have an asymptotic expansion $g = g_0 + \frac{1}{r}g_1 + \dots$ with g_0 a smooth section of the half-form bundle δ such that on $\Lambda^{\mathcal{D}}_{E^r}$ we have $g_0^{\otimes 2} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda^{\mathcal{D}}_{E^r})} d\theta_1 \wedge \dots d\theta_n$, where the θ_i are angle coordinates on $\Lambda^{\mathcal{D}}_{E^r}$.

Proof. The norm of Lagrangian sections are easily computed using stationary phase lemma: according to [?], the Lagrangian section is normalized when we normalize the section g_V by $g^0_V(E)^{\otimes 2} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda_{E^r})} d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_n$ where θ_i are angle coordinates on Λ_{E^r}, and $\lambda_r = \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{n}{4}}$.
But as the difference between $\psi^r_{\beta_r}$ and the Lagrangian section is $O(r^{-\infty})$ uniformly only on compact subset of $U = \mathring{P} \times T$, we need to be careful that ψ_{β_r} does not carry too much weight over small neighborhoods of $\partial P \times T$.
To compute the coefficient λ_r, we will introduce an operator Π to localize our eigenvector on $\mathring{P} \times T$. Let ρ be a cutoff function with compact support inside $\mathring{P}$ and identically equal to 1 on the open set $\{x \in P \,/\, d(x, \partial P) > \varepsilon\}$. For ε sufficiently small, this set has non trivial intersection with $\Lambda^{\mathcal{D}}_{-2\cos(\pi x)}$ for any x in a given compact subset W of $\mathring{Q}$.
Now the operator $\Pi_r \in \mathrm{End}(V_r(\Sigma))$ acts on the basis of φ_α associated to the pants decomposition $\mathcal{C}$ by:

$$\Pi_r \varphi_\alpha = \rho(\frac{\alpha}{r})\varphi\alpha$$

The operator Π_r can actually be seen as a function of the curve operators $T^{C_e}_r$: we have $\Pi_r = \rho(\frac{1}{\pi}\mathrm{acos}(-\frac{T^{C_e}_r}{2}))$. Therefore, it can be viewed as a Toeplitz operator of principal symbol $\sigma = \rho(\frac{1}{\pi}\mathrm{acos}(-\frac{f_{C_e}}{2}))$ and vanishing subprincipal symbol, where f_{C_e} are the trace functions associated to the curves C_e. In [?], it is stated that for a Lagrangian section $\Psi_r = \lambda_r(\frac{r}{2\pi})^{\frac{n}{4}} F^r g$ concentrating on Λ_{E^r}, and for a Toeplitz operator T_r of principal symbol σ and vanishing subprincipal symbol, we have

$$\langle T_r\Psi_r, \Psi_r\rangle = (1 + O(r^{-1}))|\lambda_r|^2 \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda_{E^r})} \int_{\Lambda_{E^r}} \sigma d\theta_1 \wedge \dots d\theta_n$$

We can apply this for the vector ψ_{β_r} as an element of H_r and the Toeplitz operator Π_r to get an expression of $\langle \Pi_r \psi_{\beta_r}, \psi_{\beta_r} \rangle$.
But instead of using the isomorphism from $V_r(\Sigma)$ to H_r corresponding to the pants decomposition $\mathcal{C}$, we also have an isomorphism corresponding to the decomposition $\mathcal{D}$. With this isomorphism, ψ_{β_r} is sent to a monomial e_{β_r} in $M' = \mathbb{R}^F \times T'$, which is a Lagrangian section concentrating on $\{\frac{\beta_r}{r}\} \times T'$, furthermore, in this simple situation, the coefficient λ_r is exactly $(\frac{r}{2\pi})^{\frac{n}{4}}$. Though the operator Π_r does not have a simple expression as a diagonal operator in the base of the e_β, it is still a Toeplitz operator of principal symbol $\sigma = \rho(\frac{1}{\pi}\mathrm{acos}(-\frac{f_{C_e}}{2}))$ and vanishing subprincipal symbol in this new setting. Hence we have:

$$\langle \Pi_r \psi_{\beta_r}, \psi_{\beta_r} \rangle = (1 + O(r^{-1}))(\frac{r}{2\pi})^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\mathrm{Vol}(T')} \int_{\{\frac{\beta_r}{r}\} \times T'} \sigma d\theta_1 \wedge \ldots d\theta_n$$

Comparing the two asymptotic expansions of $\langle \Pi_r \psi_{\beta_r}, \psi_{\beta_r} \rangle$, as the integral of the principal symbol of Π_r on Λ_{E^r} is non-vanishing, we get that the coefficient of normalization is indeed that of the proposition. □

11.3 A formula for pairings of eigenvectors

We are ready to prove our final theorem:

Theorem 11.1. *Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be two pair of pants decompositions of a closed oriented surface Σ. Let α_r and β_r r-admissible colorings for the two pants decompositions such that (α_r, β_r) satisfies Property (*), and let φ_{α_r} and ψ_{β_r} be the corresponding basis vectors of $V_r(\Sigma)$. Then we have the following asymptotic expansion:*

$$\langle \varphi_{\alpha_r}, \psi_{\beta_r} \rangle = u_r \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Vol}(\Lambda^{\mathcal{C}}_{E_{\alpha_r}})\mathrm{Vol}(\Lambda^{\mathcal{D}}_{E'_{\beta_r}})}} \sum_{z \in \Lambda^{\mathcal{C}}_{E_{\alpha_r}} \cap \Lambda^{\mathcal{D}}_{E'_{\beta_r}}} \frac{e^{ir\eta(z)} i^{m(z)}}{|\det(\{\mu_i, \mu'_j\})|^{\frac{1}{2}}} + O(r^{-\frac{n}{2}-1})$$

where $n = 3g - 3$ is half the dimension of the moduli space, u_r is a sequence of complex numbers of moduli 1, $\mu_i = -\,Tr(\rho(C_i))$ (resp. $\mu'_j = -\,Tr(\rho(D_j))$) are the principal symbols of the curve operators $T_r^{C_i}$ (resp. $T_r^{D_j}$), the volumes of the Lagrangians are volumes for n-forms dual to the n-vectors $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$ (resp. $X'_1 \wedge \ldots \wedge X'_n$) of Hamiltonian vector fields of μ_i (resp. μ'_j), $e^{i\eta(z)} \in \mathbb{U}$ is the holonomy of L along a loop $\gamma_{z_0,z}$ which goes from a reference point $z_0 \in \Lambda^{\mathcal{C}}_{E_{\alpha_r}} \cap \Lambda^{\mathcal{D}}_{E'_{\beta_r}}$ to z in $\Lambda^{\mathcal{C}}_{E_{\alpha_r}}$ then back to z_0 in $\Lambda^{\mathcal{D}}_{E'_{\beta_r}}$ and finally $m(z) \in \mathbb{Z}$ corresponds to a Maslov index.

Proof. Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be two pants decompositions of Σ, and (α_r, β_r) be a sequence of admissible r-colorings (that is index of basis vectors) satisfying Property (*) of **??**.
We consider pairings of the vectors φ_{α_r} and ψ_{β_r}. The first is a common eigenvector of the $T_r^{C_e}$ with eigenvalues $E_e^r = -2\cos(\frac{\pi\alpha_{r,e}}{r})$. The second is a common eigenvector of the $T_r^{D_f}$ with common eigenvalues $E'^r_f = -2\cos(\frac{\pi\beta_{r,f}}{r})$.
We use the first pants decomposition as a decomposition of reference, giving us an isomorphism Φ_r between $V_r(\Sigma)$ and a space H_r of holomorphic sections of a complex line bundle $L^r \otimes \delta$, by the work done in Section **??**. Under this isomorphism, we know that the images of the vectors ψ_{β_r} are Lagrangian sections, concentrating on the Lagrangian $\Lambda^{\mathcal{D}}_{E'^r}$, and of

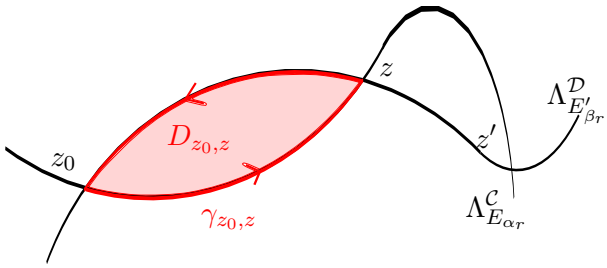


Figure 20: The loop $\gamma_{z_0,z}$

the form $(1+O(r^{-1})(\frac{r}{2\pi})^{\frac{n}{4}}F^r g$, where F section of L and g section of δ satisfying the conditions explained in Section **??**. The same is true for the φ_{α_r}. (actually, the situation is even simpler, as the isomorphism Φ_r sends the vectors φ_{α_r} to the vectors e_{α_r} of H_r, which are exactly the expected Lagrangian sections).
As these sections concentrate respectively on $\Lambda^{\mathcal{C}}_{E^r}$ and $\Lambda^{\mathcal{D}}_{E'^r}$, the only meaningful contribution in the integral comes from the intersection points of these two Lagrangians. But as α_r and β_r were carefully chosen to respect Property (*), the intersection of these two Lagrangians is always transversal, in particular, consists of a finite set of points. The contribution of each intersection point can be computed by means of stationary phase methods, the computations are done in [**?**].
For two Lagrangian sections $(\frac{r}{2\pi})^{\frac{n}{4}}F_1 g_1$ and $(\frac{r}{2\pi})^{\frac{n}{4}}F_2 g_2$ concentrating on Λ_1 and Λ_2, the first order of the contribution of an intersection point z of their Lagrangian supports is $(\frac{r}{2\pi})^{-\frac{n}{2}}F_1(z)^r\overline{F_2}(z)^r(g_1(z),g_2(z))_{T_z\Lambda_1,T_z\Lambda_2}$.
But F_1 and F_2 are flat of norm 1 on Λ_1 and Λ_2. Thus, if we write $(F_1\overline{F_2})^r(z)=e^{ir\eta(z)}$ and pick a point $z_0\in\Lambda_1\cap\Lambda_2$ of reference, then $e^{i\eta(z)-\eta(z_0)}$ is the holonomy of the line bundle L along a loop $\gamma_{z_0,z}$ which goes from z_0 to z in Λ_1 and returns from z to z_0 in Λ_2.
Furthermore, up to normalization, $g_1^{\otimes 2}(z)$ and $g_2^{\otimes 2}(z)$ are n-forms dual to the n-vectors $X_1\wedge\ldots\wedge X_n(z)$ and $X'_1\wedge\ldots\wedge X'_n(z)$ (where the vector fields X_i and X'_i are Hamiltonian vector fields of μ_i and μ'_i). Thus the pairing $(g_1(z),g_2(z))_{T_z\Lambda_1,T_z\Lambda_2}$ is a square root of $\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda_1)\mathrm{Vol}(\Lambda_2)}\det(\{\mu_i,\mu'_j\})^{-1}(z)$.
We can introduce integers $m(z)$ such that

$$(g_1(z),g_2(z))_{T_z\Lambda_1,T_z\Lambda_2}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Vol}(\Lambda_1)\mathrm{Vol}(\Lambda_2)}}|\det(\{\mu_i,\mu'_j\})|^{-\frac{1}{2}}(z)i^{m(z)}$$

Recall that g_1 and g_2 are sections of δ such that $g_1^{\otimes 2}$ and $g_2^{\otimes 2}$ are the complexification of the n-forms on Λ_1 and Λ_2 given by $\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda_1)}\beta_1$ and $\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Lambda_2)}\beta_2$ (where β_1 and β_2 are dual to the Hamiltonian vector fields of the two sets of principal symbols). The pairings of these sections have been described in **??**, which gives a rule depending on the relative positions of the Lagrangian Λ_1 and Λ_2 to choose the square root.
These definitions of $\eta(z)$ and $m(z)$ depend only on the homotopy class $\gamma_{z_0,z}$ as L and δ are flat on Λ_1 and Λ_2. Furthermore, $L^r\otimes\delta$ is flat and trivial on Λ_1 and Λ_2 as Bohr-Sommerfeld conditions are verified, thus the asymptotic expansion does not depend on the choice of $\gamma_{z_0,z}$ at all. $\square$

11.4 A geometric interpretation of the phase and index

Our Theorem **??** introduces two quantities: a phase $\eta(z)$ and an integer index $m(z)$ where z is in the intersection of the two Lagrangian Λ_1 and Λ_2 of the theorem. They are defined using features of Kähler geometry: holonomy of a prequantizing bundle, parallel transport in a half-form bundle, and the pairings in half-form bundle of Section **??**. From this description, the procedure to compute the index $m(z)$ seems rather intricate.
We would like a simple geometric picture to interpret both the phase $\eta(z)$ and the index $m(z)$. Of course, only their variation are relevant: if we choose a reference point z_0 in the intersection $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, we can assume $\eta(z_0) = 0$ and $m(z_0) = 0$ just by changing the moduli 1 complex number u_r appearing in Theorem **??**. The geometric picture we have in mind should preferably involve only the symplectic geometry and not the complex structure J on our quantizing space M, as it is the only structure inherited from the moduli space $\mathcal{M}(\Sigma)$.

An interesting case is when a loop $\gamma_{z_0,z}$ is trivial in $\pi_1 M$ and thus bounds a disk $D_{z_0,z}$. As the prequantizing line bundle L has curvature $\frac{\omega}{i}$, the holonomy of L along $\gamma_{z_0,z}$ is the same as $e^{iA(D_{z_0,z})}$, where $A(D_{z_0,z})$ is the symplectic area of $D_{z_0,z}$.
As for the index $m(z)$, observe that as $D(z_0, z)$ is contractile, the half-form bundle δ is trivial on it. After choosing $g_1(z_0)$ and $g_2(z_0)$ (for which there is a sign ambiguity), the value of $g_1(x)$ and $g_2(x)$ is determined for any $x \in D(z_0, z)$ by parallel transport. View $g_1(z_0)^{\otimes 2}$ as the complexification of a n-form on Λ_1, then following $\gamma_{z_0,z}$ we get a path $e(x)$ in the oriented Lagrangian Grassmanian $LG^+(D(z_0, z))$ of $D(z_0, z)$, such that for $x \in \gamma_{z_0,z}$, the element $g_1(x)^{\otimes 2}$ is the complexification of a positive n-form on $e(x)$. The same can be done for the return map from z to z_0 in Λ_2, we get a path f. There is a canonical way to connect these two paths to get a loop in the Lagrangian Grassmanian. Indeed, fix a Lagrangian frame L. The set of Lagrangians L' transverse to L is affine: any such Lagrangian is the graph of a map $A : L \to JL$ such that JA is symmetric, thus defines a quadratic form on L. We can thus connect L' to JL by a segment. This give us paths p_{z_0} and p_z from $T_{z_0}\Lambda_2$ to $JT_{z_0}\Lambda_1$ and from $JT_z\Lambda_1$ to $T_z\Lambda_2$. The path Je allows us to close the path $p_z f p_{z_0}$. We get a close path in the oriented Lagrangian Grassmanian, the π_1 class of which is exactly $m(z)$.
Indeed, as our index $m(z)$ and the class we defined depend only on the Lagrangian Λ_1 and Λ_2, we can move our Lagrangian so that at points of intersection z_0 and z we have $T\Lambda_2 = JT\Lambda_1$. Then the pairing $(\cdot,\cdot)_{T\Lambda_1,T\Lambda_2}$ in the half-form bundle is positively proportional to the square root of the Hermitian pairing on n-form on $D_{z_0,z}$. Thus, the ambiguity in the square root comes from which square roots of $d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n$ (resp $d\theta'_1 \wedge \ldots \wedge d\theta'_n$) the section g_1 (resp. g_2) represents at z_0 and z. It is easy to see that following a loop of class 1 in $\pi_1 LG^+(D_{z_0,z})$, parallel transport changes g_i by a $-$ sign. Hence the π_1-class of $(Je) \cdot p_z \cdot f \cdot p_{z_0}$ calculates the index $m(z)$
The definition of the index seems to depend on the quasi-complex structure J. However, the set of quasi-complex structures on the disk $D_{z_0,z}$ is affine. As the index we defined depend continuously on J, it must be constant when the quasi-complex structure J varies.

The argument to interpret geometrically the index $m(z)$ works only when the loop $\gamma_{z_0,z}$ bounds a disk in $\mathring{P} \times T$. The situation is more complicated when the loop is not trivial in $\mathring{P} \times T$ (whose fundamental group is the same as T, that is $\mathbb{Z}^n$), and the interpretation of the index is not clear in this picture, and seems to depend on our specific choice of half-form bundle.

A possible way of tackling this problem would be to show that our choice of half-form bundle derives from the choice of a spin-structure on $\mathcal{M}(\Sigma)$. The loop $\gamma_{z_0,z}$ can be defined as a loop in $\mathcal{M}(\Sigma)$. As the fundamental group of the moduli space $\mathcal{M}(\Sigma)$ is trivial (as explained in [**?**]), this loop always bounds a disk in $\mathcal{M}(\Sigma)$. We expect the index $m(z)$ to be computable as the class of some specific loop in the Lagrangian Grassmanian of $\mathcal{M}(\Sigma)$.

References

[AB82] M.F. Atiyah and R.Bott *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces* Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 308 (1982), 523-615

[AHLS] M.F. Atiyah, N. Hitchin, R. Lawrence and G. Segal: *Oxford seminar on Jones-Witten theory* (1988).

[And06] J.E. Andersen. *Asymptotic faithfulness of the quantum SU(n) representations of the mapping class groups.* Ann. of Math., 163, vol.1, (2006), 347-368.

[And08] J.E. Andersen *The Nielsen-Thurston classification of mapping classes is determined by TQFT*, J. Math. Tokyo Univ. 48 2 (2008) 323-338

[And09] J.E. Andersen. *Asymptotics of the Hilbert-Smith norm of curve operators in TQFT* Letters of Mathematical Physics 91 3 (2010) 205-214.

[And10] J.E. Andersen. *Toeplitz operators and Hitchin?s projectively flat connection.* The many facets of geometry, 177-209, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010.

[And11] J.E. Andersen. *The Witten invariant of finite order mapping tori I.* Journal fuer die Reine und Angewandte Mathematik, No. 681, 2013, p. 1-38.

[AG] J.E. Andersen and N.L. Gammelgaard *Hitchin's Projectively Flat Connection, Toeplitz Operators and the Asymptotic Expansion of TQFT Curve Operators*, Grassmanians, Moduli Spaces ad Vector Bundles, 1-24, Clay Math. Proc., 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011

[AH] J.E. Andersen and B. Himpel *The Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of finite order mapping tori II* In: Quantum Topology, Vol. 3, No. 3/4, 2012, p. 377-421.

[Ati] M.F. Atiyah *Topological quantum field theories* Publ. Math. IHES 68 (1989), 175-186.

[AU1] J.E. Andersen and K. Ueno *Geometric construction of modular functors from conformal field theory* Journal of Knot theory and its Ramifications. 16 2 (2007), 127 - 202

[AU2] J.E. Andersen and K. Ueno *Abelian conformal field theory and determinant bundles* International Journal of Mathematics, Vol. 18, No. 8, 2007, p. 919-993

[AU3] J.E Andersen and K. Ueno *Modular functors are determined by their genus zero data* Quantum Topology, Vol. 3, No. 3/4, 2012, p. 255-291

[AU4] J.E. Andersen and K. Ueno *Construction of the Witten?Reshetikhin?Turaev TQFT from conformal field theory* http://arxiv.org/pdf/1110.5027.pdf

[BG81] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin, *The spectral theory of Toeplitz operators*, Annals of math. stud. 99, Princeton University, 1981.

[BH] G.W. Brumfiel and H.M. Hilden *Sl(2) Representations of Finitely Presented Groups*, Contemp. Math. 187 (1995)

[BHMV] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum and P. Vogel *Topological quantum field theories derived from the kauffman bracket* Topology Vol. 34, No. 4, pp. 883-927, 1995

[BPR] S. Basu, R. Pollack and M-F. Roy *Algorithms in real algebraic geometry*

[BPU] D. Borthwick, T. Paul and A. Uribe, *Legendrian distributions with applications to relative Poincar´e series*, Invent. Math., Vol. 122, pp. 359-402, 1995.

[Bul97] D. Bullock *Rings of SL2(C)-characters and the kauffman bracket skein-module* Comment. Math. Helv., 72, no.4, (1997), 521-542.

[Cha03] L. Charles *Quasimodes and the Bohr-Sommerfeld conditions for the Toeplitz operators* Comm. Partial Differential Equations 28, (2003), no. 9-10, p. 1527–1566

[Cha06] L. Charles *Symbolic calculus for Toeplitz operators with half forms* J. Symplectic Geom. Volume 4, Number 2 (2006), 171-198

[Cha10a] L. Charles *On the quantization of polygon spaces* Asian Journal of Math. Vol. 14.1. (2010)

[Cha10b] L. Charles *Asymptotic properties of the quantum representations of the mapping class group* arXiv:1005.3452

[Col] Y. Colin de Verdière *Méthodes semi-classiques et théorie spectrale*

[CM09] L. Charles and J. Marché. *Multicurves and regular functions on the representation variety of a surface in SU(2)* To be published in Commentarii Math. Helv..

[CM11a] L. Charles and J. Marché. *Knot state asymptotics I. AJ conjecture and abelian represantions*

[CM11b] L. Charles and J. Marché. *Knot state asymptotics II. Witten conjecture and irreducible representations*

[Det12] R. Detcherry *Asymptotic formulas for curve operators in TQFT* http://arxiv.org/pdf/1206.0887v3.pdf

[Det14] R. Detcherry *Geometric quantization and semi-classical limits of pairings of TQFT vectors* http://arxiv.org/pdf/1412.4333v1.pdf

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach and V. Poenaru *Travaux de Thurston sur les surfaces* Astérisque, 1979

[FR] V. Fock and A. Rosly *Poisson structure on moduli of flat connections on Riemann surfaces and the r-matrix*, Moscow Seminar in Mathematical Physics, 67-86, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 191, Amer. Math. Soc., Provide,ce, RI, 1999

[GKM] D. Gallo, M. Kapovich, and A. Marden *The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces* Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 2, 625-704

[G86] W.M. Goldman *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations* Invent. math. 85, 263-302 (1986)

[Hit90] N. Hitchin *Flat connections and geometric quantization* Comm.Math.Phys., 131 (1990) 347?380.

[Hik05] H. Hikami. *On the quantum invariant for the Brieskorn homology spheres* Internat. J. Math., 16, no. 6, (2005), 661-685.

[HK] M. Heusener and E. Klassen *Deformations of dihedral representations* Proc. Amer. Math. Soc. 125 3039-3047 1997

[HP92] J. Hoste and J.H. Przytycki *A survey of skein modules of 3-manifolds* Knots 90, De Gruyter- Berlin (1992), 363-379.

[HT01] S.K. Hansen and T. Takata. *Quantum invariants of Seifert 3- manifolds and their asymptotic expansions* Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001), 69-87 (electronic), Geom. Topol. Monogr., 4, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.

[Jef92] L.C. Jeffrey. *Chern-Simons-Witten invariants of lens spaces and torus bundles, and the semiclassical approximation.* Comm. Math. Phys., 147, no.3, (1992), 563-604.

[Jon85] V. Jones *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebra.* Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.) 12: 103?111.

[JW] L.C. Jeffrey and J.Weistman *Bohr-Sommerfeld orbits and the Verlinde dimension formula* Commun. Math. Phys. 150, 593-630 (1992)

[Kir78] R. Kirby *A Calculus for Framed Links in S3* Inventiones Mathematicae, vol. 45 (1978), pp. 35?56.

[KM] R. Kirby and P. Melvin *The 3-manifolds invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for SL2(C)* Invent. Math. 105, no 3, (1991), 473-545.

[Lic] W. Lickorish *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. 76 (3): 531-540 (1962)

[LZ99]R. Lawrence and D. Zagier. *Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds.* Asian J. Math., 3, no.1, (1999), 93-107.

[Mar09] J. Marché *Geometry of representations spaces in SU(2)* Strasbourg Master class of Geometry, April 2009

[MP] J. Marché and T. Paul *Toeplitz operators in TQFT via skein theory*

[MV] G. Masbaum and P. Vogel. *3-valent graphs and the Kauffman bracket* Pacific Journal of Mathematics, 164, no.2, 361-381, 1994.

[P87] C. Procesi *A formal inverse to the Cayley-Hamilton Theorem.* Journal of algebra, 107, (1987), 63-74

[PS00] J.H. Przytycki and A.S. Sikora *On skein algebras and SL2(C)-character varieties* Topology, 39(1): 115-148, 2000.

[Roz96]L. Rozansky. *Residue formulas for the large k asymptotics of Witten?s invariants of Seifert manifolds. The case of SU(2).* Comm. Math. Phys., 178, (1996), 27-60.

[RSW] T.R. Ramadas, I.M. Singer and J. Weistman. *Some comments on Chern-Simons gauge theory* Comm. Math. Phys. 126, 409-420 (1989)

[RT]N.Y. Reshetikhin and V.G. Turaev. *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups.* Invent. Math., 92: 547-597, 1991.

[Si09]A.S. Sikora *Character varieties* To appear in Trans. Amer. Soc., ArXiv :0902.2589, 2009

[SZ02] B. Schifman and C. Zelditch *Asymptotics of almost holomorphic sections on symplectic manifolds*J. Reine Angew. Math. 544 (2002), 181–222

[Tho] R.P. Thomas *Notes on GIT and symplectic reduction for bundles and varieties* http://arxiv.org/pdf/math/0512411v3.pdf

[TU91] V.G. Turaev *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 24, no.4, (1991), 635-704.

[Tur] V.G. Turaev *Quantum invariants of knots and 3-manifolds* De Gruyter Studies in Mathematics, 18. Walter de Gruyter and Co, Berlin, 1994. x+588 pp ISBN: 3-11-013704-6

[Tur88] V.G. Turaev *The Conway and Kauffman modules of a solid torus* J. Soviet Math. 52, no 1, (1990), 2799-2805

[Wal] A.H. Wallace*Modifications and cobounding manifolds* (1960) Canad. J. Math. 12: 503?528

[W89] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial* Comm. Math. Phys., 121, vol.3: 351-399, 1989.