



**HAL**  
open science

# Cavité à haute finesse pour la production et la détection de sources atomiques cohérentes

Etienne Cantin

► **To cite this version:**

Etienne Cantin. Cavité à haute finesse pour la production et la détection de sources atomiques cohérentes. Optique / photonique. Université de Bordeaux, 2015. Français. NNT : 2015BORD0259 . tel-01238892

**HAL Id: tel-01238892**

**<https://theses.hal.science/tel-01238892>**

Submitted on 7 Dec 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'Université de Bordeaux**

Spécialité doctorale “Lasers, matière et nanosciences”

*présentée et soutenue publiquement par*

**Etienne Cantin**

le 3 novembre 2015

# Cavité à haute finesse pour la production et la détection de sources atomiques cohérentes

Directeur de thèse : **Philippe Bouyer**, LP2N

### Jury

<b>Mr. Antoine BROWAEYS,</b>	Rapporteur
<b>Mr. Jakob REICHEL,</b>	Rapporteur
<b>Mr. Peter ROSENBUSCH,</b>	Examineur
<b>Mr. David PUREUR,</b>	Examineur
<b>Mr. Philippe BOUYER,</b>	Directeur de thèse
<b>Mr. Andrea BERTOLDI,</b>	Membre invité

## **Titre: Cavité à haute finesse pour la production et la détection de sources atomiques cohérentes**

**Résumé:** Cette thèse décrit le développement de deux outils originaux pour l'interférométrie atomique. Le premier est une cavité optique à haute finesse pour la manipulation d'atomes ultra-froids de  $^{87}\text{Rb}$ . Cette cavité est d'abord utilisée pour augmenter l'intensité d'un piège dipolaire optique qui permet de piéger et refroidir les atomes. Ainsi, en procédant à un refroidissement par évaporation de l'échantillon atomique, nous avons atteint le régime de condensation de Bose-Einstein. La cavité étant non dégénérée, elle permet également l'injection de différents modes transverses électromagnétiques. Nous avons alors démontré la création et la manipulation de réseaux d'ensembles atomiques en utilisant ces modes. La mesure successive de ces ensembles atomiques au cours d'une séquence d'interférométrie atomique permettrait d'augmenter le temps de mesure et ainsi d'améliorer la sensibilité de l'instrument.

Deuxièmement, l'utilisation d'une mesure faible non destructive sur les atomes permet de soutirer de l'information du système sans le perturber. En appliquant une rétroaction après ces mesures, l'état quantique peut être contrôlé. Par l'utilisation d'une séquence de Ramsey adaptée avec des mesures faibles et des corrections de phase, nous avons ainsi démontré la réalisation d'une boucle à verrouillage de phase entre un oscillateur local et l'état atomique. Nous avons ensuite démontré que ce protocole améliore la stabilité d'une horloge atomique en surpassant la limite de stabilité de l'oscillateur local.

Nous avons également validé l'utilisation de la plate-forme laser commercial EYLSA de Quantel sur deux expériences de refroidissement d'atomes par laser.

**Mots clés:** Interférométrie atomique - Atomes froids - Mesures non destructives - Contrôle par rétroaction - Cavité optique - Laser fibré

---

## **Title: High finesse cavity for the production and the detection of coherent atomic sources**

**Abstract:** This thesis reports the development of two original tools for atom interferometry. The first is a high finesse optical cavity for the manipulation of  $^{87}\text{Rb}$  cold atoms. This cavity is firstly used to enhance the intensity of an optical dipole trap. Thus, by realizing an evaporative cooling on the atomic sample, we reached Bose-Einstein condensation. Furthermore, the non-degenerate cavity allows the injection of different transverse electromagnetic modes. In this way, we have demonstrated the generation and the manipulation of arrays of atomic ensembles using these modes. Successive measurements of these atomic ensembles in an atom interferometric sequence would increase the interrogation time and thus the sensitivity of the sensor.

Secondly, the use of weak nondestructive measurements on the atoms allows to extract information from the system with negligible perturbation of the ensemble. Applying feedback after the measurement, we were able to control the quantum state of the system. Using a modified Ramsey sequence with weak nondestructive measurements and phase corrections, we realized a phase lock loop between a local oscillator and the atomic state. We have then demonstrated that this protocol leads to a stability enhancement of an atomic clock by overcoming the limit set by the local oscillator.

We also contributed to the development of the commercial laser platform EYLSA from Quantel, testing its performances on two laser cooling experiments.

**Keywords:** Atom Interferometry - Cold Atoms - Nondestructive Measurements - Feedback Control - Optical Cavity - Fiber laser

# Remerciements

J'ai réalisé mes travaux de thèse d'abord au Laboratoire Charles Fabry à Palaiseau puis au Laboratoire Photonique, Numérique et Nanosciences à Bordeaux après le déménagement de l'expérience. Je remercie Pierre Chavel et Patrick Georges, directeurs successifs du LCF pour leur accueil, ainsi que Philippe Bouyer, directeur du LP2N. Je remercie également l'entreprise Quantel pour avoir financé ma thèse dans le cadre d'une Convention Industrielle de Formation par la REcherche (CIFRE).

Je tiens à remercier tous les membres de mon jury pour leur enthousiasme et pour avoir été présent lors de ma soutenance. Merci à Antoine Browaeys et Jakob Reichel pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, vos remarques et questions ont été pertinentes et constructives. Merci également à Peter Rosenbusch et David Pureur pour leurs questions et discussions intéressantes.

Philippe Bouyer, mon directeur de thèse, m'a toujours poussé vers l'avant tout au long de ma thèse et a toujours été très optimiste malgré des problèmes techniques et infrastructurels récurrents. Je le remercie de m'avoir fait confiance et de m'avoir permis de réaliser ma thèse dans de bonnes conditions.

Andrea Bertoldi a été mon encadrant au jour le jour sur l'expérience. Toujours de très bons conseils, Andrea a toujours été disponible, notamment pendant la période stressante du déménagement de l'expérience. Andrea, je te remercie également de ta relecture attentive de mon manuscrit, de tes recettes italiennes et des nombreux cafés que l'on a partagé! Je te souhaite beaucoup de bonheur pour la suite ainsi qu'à toute ta petite famille.

Mon doctorat a été financé par Quantel et David Pureur a été mon responsable scientifique dans l'entreprise. Je le remercie de m'avoir fait découvrir l'ingénierie laser et le domaine de l'entreprise en général, très différent du domaine de la recherche. J'espère que nous resterons en contact et si l'occasion se présente de manger une crêpe bretonne ensemble!

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont l'achèvement d'un travail d'équipe. Lorsque je suis arrivé sur l'expérience, Thomas Vanderbruggen et Ralf Kohlhaas étaient doctorants. Malgré la rédaction de son manuscrit, Thomas a pris le temps de répondre à mes questions et m'a aidé pour les différents projets de mon stage de fin de master. J'ai ensuite travaillé avec Ralf lors de ma première année de thèse à Palaiseau. Ralf a une vision intuitive de la physique et de fortes compétences techniques qui nous ont grandement aidé pour l'étude sur l'asservissement de phase atomique. Ça a été un réel plaisir de travailler avec lui, que ce soit professionnellement qu'humainement, et j'espère qu'il est heureux aux Pays-Bas.

Après le déménagement de l'expérience à Bordeaux, j'ai commencé la phase de reconstruction de l'expérience. Pendant cette période, Deepak Pandey est arrivé sur l'expérience en tant que post-doc. Il a ainsi pu maîtriser rapidement les différents éléments de l'expérience et ses compétences en simulation nous ont aidés à mieux comprendre les problèmes rencontrés. Grigor Kuyumjyan a ensuite été stagiaire puis doctorant sur l'expérience. Grigor est réfléchi



---

et a très rapidement été autonome sur le projet de cavité doublement résonante. Je n'ai aucun doute que ces travaux vont mener à d'excellents résultats et je lui souhaite du courage pour continuer son exploration de la physique, des vins et des rhums français! Lors de ma rédaction, Walid Cherifi était stagiaire sur l'expérience et sa curiosité de la physique a amené une fraîcheur dans l'équipe. Ses travaux de stage ont permis d'éclairer les projets d'interférométrie Bragg sur l'expérience. J'espère qu'il trouvera un financement de thèse rapidement et je lui souhaite de la réussite pour la suite.

Le groupe atomes froids à Bordeaux a grossi d'année en année depuis la construction de l'Institut d'Optique d'Aquitaine. L'expérience ICE puis AUFRONS ont été les premières à s'installer à Bordeaux. Même si les locaux provisoires du LP2N étaient un sous-sol de l'université, j'ai néanmoins eu plaisir de côtoyer et de discuter avec Vincent Ménoret et Leticia Tarruell. Je remercie aussi Pierre Alain et Hugo, présents à ce moment-là, pour leur motivation et leur gentillesse, c'est avec eux que j'ai commencé à connaître Bordeaux! Le groupe s'est ensuite enrichi de doctorants, post-docs et permanents avec qui j'ai passé de très bons moments. J'ai ainsi connu Bryn, qui m'a fait découvrir la faune canadienne d'abord (et qu'il était possible de survivre en dessous de  $-10^{\circ}\text{C}$ ) puis l'ultimate, les expressions bizarres canadiennes, le squash... Je te souhaite beaucoup de bonheur avec Jackie et Cameron.

L'ambiance dans le groupe était très agréable, je remercie pour cela Isabelle, Laura, Sebastian, Jonathan, Margaux, Laure, Jin-Yi, Caroline, Maxime, Grégoire, Sophie, Baptiste, Benjamin et Simon. Je vous remercie tous pour les bons moments que nous avons passé ensemble et les discussions très intéressantes que nous avons partagés!

J'ai également interagi avec les autres groupes de recherche au cours de ces trois années. Je remercie Antoine, Jean Baptiste, Bin, Pierre, Kevin pour leur bonne humeur continue. J'ai eu plaisir à connaître Pierre Alain (aka Patou) dont l'enthousiasme n'a d'égal que la joie de vivre et Margaux qui a amené un vent marin au labo. Je remercie Philippe L pour les parties de tennis, de foot et de pala qui m'ont permis de décompresser. Rémi a été un partenaire de jeu et un ami de tous les instants : Pétanque, Foot, Ping-Pong, jeu de société, golf-de-bureau... et j'en oublie! J'espère pouvoir venir au stade avec toi toute la saison!

Le soutien administratif et technique du laboratoire a été très efficace. Je remercie tout d'abord les ateliers électronique et mécanique : Giorgio, Jean-Hugues, Jérémie et Philippe T. Je remercie Jacky pour le temps qu'il a passé à réparer la clim des labos. Je remercie le service administratif : Fabien, Stéphanie et Laurent. Et enfin je remercie Jean de m'avoir fait confiance dans l'encadrement des TP de 3e année.

Lors de ma première année, j'ai apprécié travaillé au sein du groupe d'optique atomique du LCF et je remercie notamment Lauriane, Jérémie et Almaz pour leur soutien et leur enthousiasme. J'aimerais également remercier toute l'équipe R&D de Quantel, particulièrement David, Alex et Alain avec qui j'ai apprécié travailler.

Mon manuscrit et ma soutenance n'aurait pas été abouti sans le soutien de mes amis et de ma famille. Merci à Greg et Gaga pour avoir été présent! Je peux toujours compter sur vous les colocs! Merci à Anne, Michel et Philip d'avoir fait le déplacement et d'avoir partagé un verre.

Merci à toute ma famille pour son soutien continu et pour m'avoir appuyé le jour J! Merci tout spécialement à mes parents Gilles et Chantale et à mon frère Clément pour leur correction assidue du manuscrit (et surtout la préparation du pot après la soutenance qui était délicieux!).

Et enfin je remercie Marie, ma chère et tendre. Sans elle, ma thèse n'aurait pas eu le même intérêt. Tu as toujours été présente au long de ces trois ans où j'ai eu des hauts et des bas! Tu es ma source d'inspiration. Je t'aime.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 États collectifs de spins dans un interféromètre de Ramsey</b>	<b>5</b>
1.1 États collectifs de spins . . . . .	5
1.1.1 Sphère de Bloch . . . . .	6
1.1.2 État cohérent de spins . . . . .	7
1.1.3 État comprimé de spins . . . . .	10
1.2 Bruit dans un interféromètre de Ramsey . . . . .	12
1.2.1 Interaction atomes-champ dans un interféromètre . . . . .	12
1.2.2 Interféromètre de Ramsey . . . . .	14
<b>2 Mesures non destructives de l'ensemble atomique</b>	<b>17</b>
2.1 Généralisation de la mesure en physique quantique . . . . .	17
2.1.1 Mesure généralisée . . . . .	18
2.1.2 Cas d'une mesure projective . . . . .	18
2.1.3 Mesure quantique généralisée d'un ensemble collectif de spins . . . . .	19
Mesure forte . . . . .	20
Mesure faible . . . . .	21
Mesure non destructive . . . . .	21
2.2 Mesure non destructive d'un ensemble d'atomes . . . . .	22
2.2.1 Spectroscopie par modulation de fréquence . . . . .	23
Principe . . . . .	23
Bruit de détection . . . . .	24
Opérateur de mesure . . . . .	25
Mesure dispersive . . . . .	26
2.2.2 Réalisation expérimentale . . . . .	27
Schéma expérimental . . . . .	27
Mesure de la différence de population atomique . . . . .	30
Oscillations de Rabi en temps réel . . . . .	33
Compensation du déplacement lumineux . . . . .	34
Symétrie de la décohérence par émission spontanée . . . . .	36
Optimisation de la mesure . . . . .	38
2.2.3 Mesures en temps réel d'oscillations de Rabi . . . . .	41
2.3 Conclusion du chapitre . . . . .	41
<b>3 Dynamique d'atomes ultra-froids piégés dans des modes transverses</b>	<b>43</b>
3.1 Pièges magnéto-optiques . . . . .	44
3.1.1 Système laser . . . . .	44
3.1.2 Piège magnéto-optique 2D et 3D et système à vide . . . . .	45
3.1.3 Caméra CCD . . . . .	46

3.2	Piège dipolaire intra-cavité . . . . .	48
3.2.1	Potentiel dipolaire . . . . .	48
	Déplacement lumineux induit . . . . .	49
3.2.2	Cavité optique pour le piégeage . . . . .	49
	Géométrie . . . . .	50
	Propriétés optiques et modes de la cavité . . . . .	51
	Propriétés spectrales . . . . .	53
3.2.3	Laser de piège et asservissement sur la cavité . . . . .	56
	Asservissement Pound-Drever-Hall via un modulateur acousto-optique . . . . .	56
	Asservissement par modulation serrodyne . . . . .	58
3.2.4	Tomographie des modes de la cavité . . . . .	60
3.2.5	Contrôle du déplacement lumineux différentiel sur la transition de mesure . . . . .	64
	Compensation du déplacement lumineux différentiel avec un laser désaccordé dans le bleu . . . . .	64
	Utilisation des déplacements lumineux . . . . .	67
3.2.6	Préparation des états internes des atomes . . . . .	68
3.3	Mesure intra-cavité . . . . .	69
3.3.1	Motivations . . . . .	69
3.3.2	Configuration d'injection dans la cavité . . . . .	70
3.3.3	Perspectives de mesures améliorées par la cavité . . . . .	74
3.4	Condensation de Bose Einstein . . . . .	75
3.4.1	Théorie d'un condensat de bosons . . . . .	76
	Condensat de bosons sans interaction . . . . .	76
	Condensat avec interactions à deux corps - Equation de Gross-Pitaevskii . . . . .	78
	Mesure de la température par temps de vol . . . . .	79
3.4.2	Chargement d'atomes dans le piège dipolaire . . . . .	80
3.4.3	Condensat de Bose-Einstein . . . . .	83
	Rampe d'évaporation . . . . .	84
	Dimple . . . . .	87
	Condensat . . . . .	89
3.5	Dynamique d'atomes ultra-froids dans les modes transverses . . . . .	90
3.5.1	Motivations . . . . .	90
3.5.2	Réalisation expérimentale . . . . .	91
3.5.3	Résultats préliminaires . . . . .	93
3.5.4	Limites et perspectives . . . . .	94
3.6	Conclusion du chapitre . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Boucle à verrouillage de phase atomique</b> . . . . .	<b>97</b>
4.1	Horloges atomiques . . . . .	98
4.1.1	Principe d'une horloge . . . . .	98
4.1.2	Stabilité et exactitude d'une horloge . . . . .	100
	Variance d'Allan de la déviation relative de fréquence . . . . .	100
4.1.3	Interrogation Ramsey . . . . .	100
4.1.4	Limitations . . . . .	102
	Stabilité de l'oscillateur local . . . . .	102
	Effet Dick . . . . .	102
	Bruit de détection . . . . .	103
	Effets systématiques . . . . .	103
4.1.5	Notre horloge modèle . . . . .	103
4.2	Concept du verrouillage de phase . . . . .	104

4.2.1	Séquence modifiée . . . . .	104
4.3	Démonstration du verrouillage de phase atomique . . . . .	107
4.3.1	Montage expérimental . . . . .	107
4.4	Résultats appliqués aux horloges atomiques . . . . .	109
4.5	Améliorations et perspectives . . . . .	113
4.6	Conclusion du chapitre . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Plate-forme laser industrielle EYLSA pour le refroidissement des atomes</b>	<b>117</b>
5.1	Architecture et performances de la plate-forme EYLSA . . . . .	118
5.1.1	Laser maître . . . . .	118
5.1.2	Amplification . . . . .	119
5.1.3	Doublage de fréquence . . . . .	120
5.1.4	Performances . . . . .	121
	Bruit de fréquence et largeur spectrale mesurée . . . . .	121
	Stabilité de puissance et de longueur d'onde . . . . .	122
	Qualité du faisceau et polarisation de sortie . . . . .	123
5.2	Démonstration sur l'expérience . . . . .	125
5.2.1	Insertion du laser . . . . .	125
5.2.2	Asservissement du laser . . . . .	125
5.2.3	Résultats . . . . .	128
5.3	Utilisation de la plate-forme en micro-gravité sur l'expérience ICE . . . . .	128
5.3.1	PMO embarqué . . . . .	129
5.3.2	Mélasse optique . . . . .	130
5.4	Conclusion du chapitre . . . . .	131
	<b>Conclusion</b>	<b>133</b>
	<b>A Transitions atomiques de la ligne D2 du <math>^{87}\text{Rb}</math></b>	<b>137</b>
	<b>B Calcul et mesure expérimentale de la largeur au col du faisceau de mesure</b>	<b>139</b>
B.1	Approche ondulatoire . . . . .	139
B.2	Mesure expérimentale . . . . .	140
	<b>C Décohérence de l'ensemble d'atomes dans le piège dipolaire</b>	<b>145</b>
	<b>D Publications</b>	<b>147</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>249</b>

# Table des figures

1.1	Représentation d'un système à deux niveaux sur la sphère de Bloch . . . . .	7
1.2	Représentation d'un état cohérent de spins . . . . .	8
1.3	Représentation d'un état comprimé de spins . . . . .	10
2.1	Schéma de principe d'une mesure par spectroscopie de modulation de fréquence	24
2.2	Schéma expérimental de la mesure non destructive . . . . .	28
2.3	Variance de bruit de la photodiode . . . . .	30
2.4	Position des composantes du faisceau sonde par rapport aux transitions atomiques . . . . .	31
2.5	Signal dispersif après démodulation . . . . .	32
2.6	Mesure en temps réel des oscillations de Rabi . . . . .	33
2.7	Compensation du déplacement lumineux . . . . .	35
2.8	Calibration de la compensation du déplacement lumineux par interférométrie Ramsey . . . . .	36
2.9	Configuration optimale de la mesure . . . . .	37
2.10	Schéma simplifié du faisceau de sonde . . . . .	39
2.11	Incertitude de la mesure . . . . .	40
2.12	Mesure des oscillations en temps réel avec le nouveau dispositif . . . . .	41
3.1	Spectroscopie par absorption saturée . . . . .	46
3.2	Enceinte à vide . . . . .	47
3.3	Géométrie de la cavité . . . . .	51
3.4	Largeur du mode fondamental de la cavité à 1560 nm . . . . .	52
3.5	Spectre de fréquence de la cavité . . . . .	54
3.6	Largeur spectrale de la cavité . . . . .	55
3.7	Schéma de principe Pound-Drever-Hall . . . . .	57
3.8	Schéma expérimental de l'asservissement Pound-Drever-Hall . . . . .	58
3.9	Densité spectrale de puissance de bruit de fréquence . . . . .	59
3.10	Schéma de l'asservissement par modulation serrodyne . . . . .	60
3.11	Transitions d'intérêts pour le déplacement lumineux sur les états $5S_{1/2}$ et $5P_{3/2}$	62
3.12	Principe de la tomographie du potentiel intra-cavité dans le mode fondamental $TEM_{00}$ . . . . .	63
3.13	Potentiel dipolaire optique du mode fondamental mesuré par tomographie . .	63
3.14	Tomographie des modes transverses . . . . .	65
3.15	Transformation du mode par masque de phase . . . . .	65
3.16	Compensation du déplacement lumineux . . . . .	66
3.17	Réalisation de la compensation du déplacement lumineux . . . . .	67
3.18	Configuration du système optique pour la mesure intra-cavité . . . . .	72
3.19	Fréquences des faisceaux pour l'injection de la cavité . . . . .	73
3.20	Fréquences des faisceaux pour la mesure intra-cavité sur les atomes . . . . .	75

3.21	Principe du chargement dans le piège dipolaire . . . . .	80
3.22	Atomes dans le piège dipolaire . . . . .	81
3.23	Température des atomes en fonction du temps de piège . . . . .	82
3.24	Temps de vie des atomes dans le piège dipolaire . . . . .	82
3.25	Rampe d'évaporation. . . . .	85
3.26	Loi d'échelle lors de l'évaporation atomique. . . . .	86
3.27	Lignes isopotentielles avec le faisceau dimple. . . . .	88
3.28	Condensat de Bose-Einstein . . . . .	89
3.29	Réalisation expérimentale des atomes piégés dans les modes transverses de la cavité . . . . .	92
3.30	Atomes dans le mode TEM <sub>01</sub> de la cavité . . . . .	93
4.1	Représentation de la dérive de phase hors de la région d'inversion . . . . .	99
4.2	Représentation d'une séquence de Ramsey . . . . .	101
4.3	Séquence de Ramsey adaptée au verrouillage de phase atomique . . . . .	105
4.4	Montage expérimental pour la boucle à verrouillage de phase atomique . . . . .	108
4.5	Évolution temporelle de la projection de la phase relative . . . . .	109
4.6	Correction de la dérive constante de phase . . . . .	110
4.7	Correction des sauts de phase . . . . .	110
4.8	Séquence d'une horloge atomique utilisant une boucle à verrouillage de phase atomique . . . . .	111
4.9	Comparaison d'une horloge utilisant un asservissement de phase de $N = 2$ mesures intermédiaires avec une horloge classique . . . . .	112
4.10	Comparaison d'une horloge utilisant un asservissement de phase de $N = 9$ mesures intermédiaires avec une horloge classique . . . . .	114
5.1	Fibre à gaine double . . . . .	120
5.2	Efficacité du doublage de fréquence . . . . .	121
5.3	Densité spectrale de puissance de bruit de fréquence . . . . .	122
5.4	Largeur spectrale du laser à 1560 nm et à 780 nm . . . . .	123
5.5	Stabilité de longueur d'onde . . . . .	124
5.6	Stabilité de puissance . . . . .	124
5.7	Insertion du laser EYLSA sur le banc optique . . . . .	126
5.8	Asservissement du laser EYLSA . . . . .	127
5.9	Phases de vol pendant une parabole zéro-G . . . . .	128
5.10	PMO obtenu en vol . . . . .	130
5.11	Schéma de l'expérience de refroidissement sub-doppler . . . . .	130
A.1	Structure de la ligne D2 du <sup>87</sup> Rb . . . . .	137
B.1	Largeur du faisceau dans le plan horizontal . . . . .	142
B.2	Largeur du faisceau sans et avec télescope . . . . .	142
B.3	Largeur du faisceau dans le plan vertical et horizontal . . . . .	143
C.1	Décroissance du contraste en fonction du temps d'interrogation . . . . .	146



# Introduction

L’histoire des sciences tend à comprendre comment la recherche scientifique s’est construite autour d’une certaine vision du monde. Au fil du temps, les principes scientifiques se sont appuyés sur des critères théoriques, méthodologiques et techniques qui ont été validés par la communauté scientifique. Ainsi, c’est en fonction de leur représentation du monde que leurs conclusions ont été apportées.

Par ailleurs, les théories scientifiques sont fortement liées au contexte sociétal. C’est sur ce point que l’opinion des historiens actuels diverge de celle de leur prédécesseurs. Dans son ouvrage intitulé *Du monde clos à l’univers infini* [Koyré, 1962], Alexandre Koyré exprime notamment que l’évolution des idées est indissociable de la condition économique, sociale et psychologique des scientifiques. Cette idée tranche avec les travaux précédents, dont le jugement n’était porté que sur la véracité des théories.

De ce fait, les historiens s’accordent actuellement à expliquer l’évolution des idées, notamment en physique, d’après le contexte historique et la conception du monde.

Ce n’est souvent qu’après que le modèle commun ait échoué à expliquer un problème, qu’une nouvelle conception du réel émerge. Ce phénomène observé est alors appelé *révolution scientifique* par les historiens des sciences. Dans son ouvrage intitulé *La structure des révolutions scientifiques* [Kuhn, 1972], Thomas Samuel Kuhn décrit ces événements comme de la science “extraordinaire”, c’est-à-dire que les nouveaux modèles proposés ne seraient plus restreints par un consensus scientifique. Ce développement mènerait de manière progressive à un renouveau des critères théoriques, méthodologiques et techniques. Dès lors, l’établissement d’un nouveau consensus serait mis en place et fournirait le point de départ à d’autres travaux.

Cependant, cette conception des révolutions n’est pas partagée par tous les historiens des sciences. Ainsi, si Kuhn les conçoit comme présentes à un stade local — au sein d’un certain domaine scientifique —, Koyré lui, affirme qu’une révolution s’effectue plus globalement et que l’impact sur les sciences est plus large. [Jorland, 2002].

Bien qu’appelée révolution, cette époque conduit à des réformes profondes de la compréhension du réel alors même qu’elle conserve les démonstrations et résultats précédents. Ainsi, même lors de refontes des principes physiques, les travaux passés et présents s’accumulent et mènent à l’idée de progrès scientifique.

La dynamique avant et pendant une révolution scientifique prend en compte de nombreuses variables. Un des facteurs déterminants consiste en la réalisation d’une expérience capitale à la compréhension et la validation de nouveaux modèles physiques. Alors que certains historiens des sciences restent sceptiques quant à la validation expérimentale, tels que David Hume puis Karl Popper — selon lesquels l’expérience n’a pas de réel pouvoir vérificateur — certaines expériences ont néanmoins permis le développement et l’affirmation de nouvelles réformes scientifiques. Ainsi, Albert Einstein et Léopold Infeld défendent la place de l’expérience au sein du progrès scientifique dans leur ouvrage *L’évolution des idées en*



*physique* [Einstein and Infeld, 1983].

Selon l'exemple encore actuel du caractère dualiste des particules, l'expérience de Hans Christian Ørsted a permis de relier les forces électriques et magnétiques [Gudmandsen et al., 1977]. Elle a été déterminante dans le développement de la théorie de l'électromagnétisme et de la définition de champ.

Par ailleurs, ce type d'expérience n'est souvent possible que dans un contexte économique et politique favorable. Que ce soit simplement pour les moyens technologiques disponibles, ou plus actuellement, concernant les moyens économiques et humains lors d'un projet international.

De ce fait, alors qu'un des enjeux actuels de la physique est de lier la théorie probabiliste de la mécanique quantique à celle de la relativité générale, nul doute qu'une expérience déterminante sur ce sujet permettrait d'en éclairer la compréhension.

Il faudrait pour cela pouvoir mesurer les effets gravitationnels prédits par la relativité générale. Actuellement, l'horloge atomique se trouve être un moyen technologique permettant de mesurer des constantes fondamentales à une sensibilité inégalée. Par exemple, le décalage d'Einstein, conséquence directe de la dilatation du temps prédite par la relativité générale, a été mesuré par la comparaison de deux horloges à ions [Chou et al., 2010].

Par conséquent, beaucoup d'efforts ont été portés sur l'amélioration des horloges atomiques durant les trente dernières années. Différents types d'instruments ont été créés, améliorant sans cesse la sensibilité de la mesure du temps. Actuellement, les horloges atomiques à réseau optique permettent une erreur sur la mesure de l'ordre de  $10^{-18}$  — soit une erreur sur l'estimation de l'âge de l'univers de moins d'une seconde — et sont encore limitées par des effets non fondamentaux.

C'est dans ce cadre que se situe cette thèse. Nous allons développer de nouveaux outils pour les horloges atomiques, qui permettraient de dépasser les limitations actuelles.

Nous allons ainsi développer une mesure préservant la cohérence des atomes, en opposition avec la mesure quantique idéalement projective. De cette façon, la détection nous permet de manipuler et de corriger le système mesuré. Par conséquent, nous pouvons réaliser une boucle de verrouillage sur l'ensemble atomique, par des mesures et des corrections répétées. Cette technique est d'un grand intérêt pour les horloges atomiques. Si elle est implémentée convenablement, elle permet d'atteindre de plus longs temps d'interrogation et ainsi d'augmenter la sensibilité de la mesure.

La seconde amélioration que nous allons apporter concerne le système atomique lui-même. Au lieu d'un seul nuage d'atomes, l'utilisation d'une cavité optique non dégénérée nous permet de piéger plusieurs ensembles atomiques grâce aux modes transverses électro-magnétiques au sein de la cavité. En mesurant alternativement les ensembles, la mesure du temps peut s'effectuer en continu, là où traditionnellement il faut re-préparer le nuage atomique. On peut diminuer ainsi les effets restrictifs sur l'horloge atomique dûs à une mesure discontinue.

Les horloges atomiques s'inscrivent dans le développement des atomes froids. L'essor de ce domaine a été récompensé par deux prix Nobels : l'un concerne le refroidissement d'atomes par laser (S. Chu, C. Cohen-Tannoudji et W.D. Phillips en 1997 [Chu, 1997, Cohen-Tannoudji, 1997, Phillips, 1997]), l'autre, l'état de condensation de Bose-Einstein (E.A. Cornell, W. Ketterle et C.E. Wieman en 2001 [Cornell, 2001, Ketterle, 2001, Wieman, 2001]).

En outre, de nouvelles techniques de refroidissement, plus simples et optimales ont été développées depuis l'achèvement de nuages d'atomes froids. Leur maîtrise a incité la commercialisation d'équipements dans ce domaine. Par exemple, plusieurs entreprises proposent des

plates-formes laser prêtes à l'emploi ainsi que des systèmes d'atomes froids dans un piège magnéto-optique.

Ma thèse s'intègre dans cette dynamique de transfert de connaissances et de technologies avec l'entreprise Quantel, dans le cadre de la plate-forme EYLSA. Ce laser fibré est dédié aux applications scientifiques, notamment le refroidissement d'atomes, mais aussi la spectroscopie atomique ou moléculaire. Au départ conçu pour les atomes les plus communément refroidis — comme le Rubidium ou le Potassium —, la plate-forme s'est développée à différentes longueurs d'onde et puissances pour offrir une plus large utilisation en laboratoire. Elle a ainsi été testée sur deux expériences d'atomes froids afin d'être validée.

Mon financement de doctorat s'inscrit dans une Convention Industrielle de Formation par la REcherche (CIFRE). J'ai trouvé très instructif cette double formation à la recherche et à l'entrepreneuriat, notamment parce que cela m'a permis d'approfondir mon travail en recherche fondamentale tout en ayant un lien avec l'entreprise. C'est un réel atout que d'en comprendre les différentes considérations et les objectifs.

A cause d'une contrainte logistique, les résultats de cette thèse se divisent en deux études majeures : l'expérience a été déménagée en Août 2013 du Laboratoire Charles Fabry à Palaiseau jusqu'au Laboratoire Photonique, Numérique et Nanosciences à Bordeaux.

A Palaiseau, lors de ma première année de thèse, une étude a été réalisée sur le maintien de la cohérence d'un état atomique initial par des mesures faibles suivies de corrections. Elle a mené à deux articles compagnons [Vanderbruggen et al., 2013, 2014].

Par ailleurs, les derniers résultats obtenus avant le déménagement ont permis de démontrer une boucle à verrouillage de phase atomique. Cette étude est publiée dans la revue scientifique *Physical Review X* [Kohlhaas et al., 2015]. En outre, le protocole d'asservissement par la séquence de mesures faibles suivies de corrections, avec une mesure projective finale, a fait l'objet d'un brevet en cours de dépôt.

Nous avons ensuite procédé au déménagement de l'expérience. Du fait qu'elle n'ait pas été construite pour être portable, nous avons dû la désassembler autour de l'enceinte afin de la reconstruire entièrement. Étape par étape, nous avons de nouveau obtenu des atomes dans le piège magnéto-optique, dans le piège dipolaire et dans l'état de condensation de Bose-Einstein, tout en optimisant l'expérience.

Actuellement, l'étude en cours vise à manipuler et faire interférer le (ou les) condensat(s), grâce aux modes transverses électro-magnétiques de la cavité. Dans cette thèse, j'en présenterai les résultats préliminaires.

## Plan du manuscrit

Le manuscrit se divise en 5 chapitres, détaillés de la manière suivante :

- J'introduis tout d'abord le système d'étude, un état atomique. Les atomes sont décrits par un ensemble de systèmes à deux niveaux, qui peut former différents états collectifs particulièrement intéressants pour l'interférométrie atomique. Un tel ensemble est représenté sur la sphère de Bloch. Cet outil sera utile tout au long du manuscrit et plus particulièrement dans la suite du chapitre, dans lequel l'évolution de l'état atomique est décrite au cours de la séquence utilisée pour l'horloge atomique.
- Ayant modélisé le système, le chapitre 2 est ainsi dédié à sa mesure, plus particulièrement à sa détection non destructive.

Sa réalisation expérimentale sera alors montrée, après en avoir décrit théoriquement le contexte.

J'expose ensuite les résultats de l'optimisation de cette mesure, par l'ajustement de la taille du faisceau sonde sur celle du nuage atomique.

- Dans le troisième chapitre, le dispositif de refroidissement est expliqué étape par étape. Les atomes sont refroidis d'abord par un piège magnéto-optique en deux dimensions, puis en trois dimensions. Afin d'évaporer de manière toute optique l'échantillon atomique, une cavité est utilisée pour amplifier le piège dipolaire. Par une rampe d'évaporation efficace, ainsi que l'ajout d'un deuxième faisceau de piège, l'état de condensation de Bose-Einstein est atteint.

Au cours de ces étapes de refroidissement, les éléments théoriques et expérimentaux utilisés sont décrits. Un intérêt majeur a été porté sur la description de la cavité optique. J'explique en effet qu'en plus d'être utilisée pour le refroidissement, elle peut être avantageuse dans l'amélioration de la mesure non destructive sur les atomes.

Ce chapitre se termine par l'une des deux études majeures de ma thèse. En effet, je montre que l'ensemble d'atomes froids peut être divisé, recombinaison et manipulé dans les modes transverses de la cavité.

- Connaissant à ce stade le système, sa mesure non destructive et le processus de refroidissement, une boucle de verrouillage de phase atomique peut être réalisée expérimentalement. Cette étude a de fortes implications en interférométrie atomique, notamment dans l'amélioration des horloges atomiques.

Dans un premier temps, je présente le principe d'une horloge atomique, les dernières avancées du domaine et les limitations actuelles.

Je discute ensuite de l'amélioration possible des horloges par un asservissement de phase, décrivant les paramètres importants et le gain théorique. A partir d'une séquence d'horloge "classique", les modifications — les mesures faibles successives, puis les corrections de phase — sont ajoutées progressivement jusqu'à démontrer la réalisation de la boucle à verrouillage de phase.

Cette technique est adaptée à l'amélioration d'une horloge atomique, pour laquelle la stabilité d'une horloge traditionnelle est comparée à celle d'une horloge comportant l'asservissement de phase. Je présente en dernier lieu les résultats et les limites dans le cas présent, ainsi que les améliorations et les perspectives de cette technique.

- Le dernier chapitre est dédié au développement du laser commercial EYLSA. J'y expose son architecture ainsi que ses performances.

Le laser est testé sur deux expériences d'atomes froids : la première est en laboratoire et la deuxième est embarquée pour des vols paraboliques. Les résultats obtenus lors des expériences et les performances sur les atomes sont enfin discutés.

# Chapitre 1

## États collectifs de spins dans un interféromètre de Ramsey

Nous allons dans ce chapitre décrire théoriquement le système étudié. Le système est un ensemble d'atomes froids où chaque atome est décrit par un système à deux niveaux. Nous allons voir que le système d'atomes peut être considéré comme un ensemble de spins, ou pseudo-spins plus exactement, pouvant se comporter comme un ensemble cohérent sous certaines conditions. L'ensemble atomique sera alors étudié pour différents états quantiques, classiques ou non classiques. Nous allons également avancer les différents outils théoriques pertinents, notamment la représentation sur la sphère de Bloch que nous utiliserons tout au long de cette thèse.

Après cette description, nous allons voir comment évolue un état cohérent de spins dans un interféromètre de Ramsey, en nous focalisant sur le bruit en sortie. La mesure du système atomique est une mesure de son énergie (*i.e.* de la différence de population atomique dans les deux niveaux) qui est la seule observable accessible. Après un rappel sur les interactions atomes-lumière, nous allons dériver les opérateurs d'évolution au cours d'une séquence d'interférométrie. Ce type d'interféromètre sera utilisé dans le Chap. 4 pour étudier l'amélioration d'une horloge atomique par des mesures faibles non destructives et des corrections de phase.

### 1.1 États collectifs de spins

Beaucoup de systèmes quantiques se résument à un ou plusieurs systèmes à deux niveaux. La particularité d'un système à deux niveaux est que son état peut toujours être décrit sur une base de deux états fondamentaux  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . Ce système est bien connu en mécanique quantique, et sa dynamique peut être intuitivement comprise grâce à la sphère de Bloch.

Un système à deux niveaux correspond par exemple au spin magnétique d'un électron, à la superposition d'états de polarisation d'un photon [O'Brien, 2007] ou à un qubit, utilisé en informatique quantique, qui peut consister en un spin électronique dans un défaut particulier du diamant appelé azote-vacant par exemple ("Nitrogen-Vacancy center" NV center en anglais) [Loubser and van Wyk, 1978] [Davies and Hamer, 1976]. Dans notre cas, le système étudié est un ensemble d'atomes de  $^{87}\text{Rb}$ . Les deux états hyperfins du niveau fondamental  $5S_{1/2}$  de la ligne D2 séparés de  $\omega = 6.8$  GHz (voir Annexe A) sont considérés comme un système à deux niveaux puisque les états excités sont éloignés de  $\omega' = 384$  THz tels que  $\omega' \gg \omega$ .

Tout état  $|\psi\rangle$  d'un tel système s'écrit alors :

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta e^{-i\omega t} |1\rangle, \quad (1.1)$$

avec  $(\alpha, \beta)$  un couple de nombre complexe représentant les amplitudes de probabilité d'être dans l'état  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$  respectivement et tel que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . La fréquence angulaire  $\omega$  vient de la différence d'énergie entre les deux niveaux  $E_{at} = E_1 - E_0 = \hbar(\omega_1 - \omega_0) = \hbar\omega$  où les états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  peuvent être vus comme des oscillateurs de fréquence angulaire  $\omega_0$  et  $\omega_1$ . Pour la superposition de ces deux états, la phase relative  $\varphi = \omega$  oscille donc à la fréquence angulaire  $\omega$ .

Dans un cas idéal, si l'on observe l'état depuis un référentiel en rotation de fréquence angulaire  $\omega_{OL} = \omega$ , le terme  $e^{-i\omega t}$  disparaît et la phase de l'état observé est fixe. En pratique, la fréquence de l'oscillateur local (OL) n'est pas stable et ne peut pas être utilisée comme référence, donc la phase  $\varphi = \varphi_{OL} - \varphi$  dérive. Dans le cas particulier des horloges atomiques, on cherche à asservir la fréquence de l'OL sur celle des atomes qui est alors utilisée comme référence.

### 1.1.1 Sphère de Bloch

Considérant la normalisation des probabilités à l'unité  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , et sans perte de généralité nous pouvons réécrire l'Eq. 1.1 comme :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle, \quad (1.2)$$

où  $0 \leq \theta \leq \pi$ . On reconnaît ici la paramétrisation en coordonnées polaires d'une sphère. L'état d'un système à deux niveaux peut donc être représenté par un point sur une sphère comme sur la Fig. 1.1, appelé sphère de Bloch en l'honneur du physicien Félix Bloch.

Historiquement, la sphère de Bloch a d'abord été introduite pour la représentation de spin magnétique [Bloch, 1946] (c'est pour cela que l'on utilise encore le nom de "spin" ou "pseudo-spin" pour un système à deux niveaux), puis a été étendue à tout système à deux niveaux dont la dynamique est régie par l'équation de Schrödinger [Feynman et al., 1957].

Sur la sphère de Bloch, les états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  pointent au pôle sud et nord respectivement. Tous les autres états (*i.e.* les états de combinaison linéaire de  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ ) se situent sur la surface de la sphère. Notamment, la superposition des deux états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  de phase arbitraire se situent sur l'équateur de la sphère (zone grisée sur la Fig. 1.1).

Toute évolution d'un système à deux niveaux sur la sphère de Bloch se résume à une série de rotation. L'outil utilisé alors pour déterminer l'évolution selon l'équation de Schrödinger est l'opérateur de rotation  $R$ . Pour formuler cet opérateur, il faut préalablement formaliser le système étudié.

Le système à deux niveaux, ou spin 1/2, est représenté sur la sphère de Bloch comme un vecteur de spin  $\mathbf{j}$ , dont les trois composantes  $j_x$ ,  $j_y$  et  $j_z$  sont des observables et s'écrivent :

$$j_x = \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|), \quad (1.3)$$

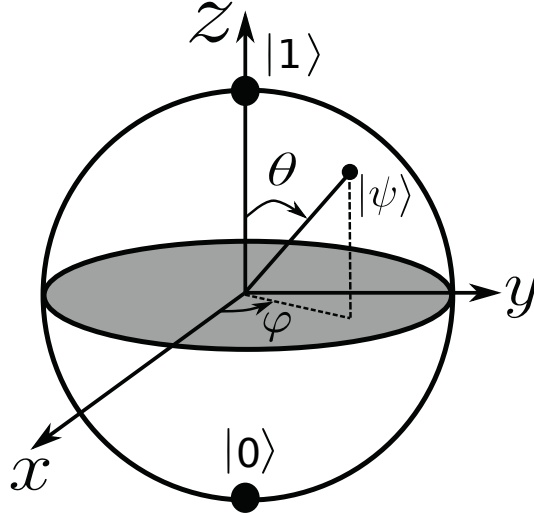
$$j_y = \frac{i}{2} (|0\rangle \langle 1| - |1\rangle \langle 0|), \quad (1.4)$$

$$j_z = \frac{1}{2} (|1\rangle \langle 1| - |0\rangle \langle 0|). \quad (1.5)$$

Ces opérateurs vérifient les relations de commutations  $[j_k, j_l] = i\epsilon_{klm} j_m$ , avec  $\epsilon_{klm}$  le symbole de Levi-Civita.

Les opérateurs de rotation associés aux rotations d'axe x,y et z et d'angles  $\theta$ ,  $\Theta$  et  $\varphi$  respectivement s'écrivent :

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta j_x}, \quad R_y(\Theta) = e^{-i\Theta j_y}, \quad R_z(\varphi) = e^{-i\varphi j_z}. \quad (1.6)$$



**Figure 1.1** – Représentation d'un système à deux niveaux sur la sphère de Bloch. Les états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  sont sur les pôles de la sphère. L'angle  $\varphi$  représente la phase de l'état s'il est préparé sur l'équateur de la sphère et l'angle  $\theta$  est lié à la différence de population entre  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . Typiquement, les atomes sont dans un des deux états fondamentaux et subissent un pulse  $\theta = \pi/2$  pour créer une superposition d'état sur l'équateur de la sphère (zone grisée).

Ces opérateurs décrivent à eux seuls l'évolution du spin.

Pour décrire une situation expérimentale réaliste comme une séquence d'interférométrie par exemple, il est plus facile d'utiliser une forme factorisée de ces opérateurs. On utilise pour cela les angles d'Euler  $\alpha, \beta, \gamma$  pour passer d'un formalisme cartésien à un formalisme sphérique généralisé. L'opérateur se réécrit alors :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha j_z} e^{-i\beta j_y} e^{-i\gamma j_z}, \quad (1.7)$$

où les rotations se font sur l'axe  $z$ , puis l'axe  $y$  et enfin l'axe  $z$ . Toute rotation peut se décrire par cet unique opérateur, et nous allons par la suite représenter une séquence d'interférométrie de Ramsey avec cet opérateur.

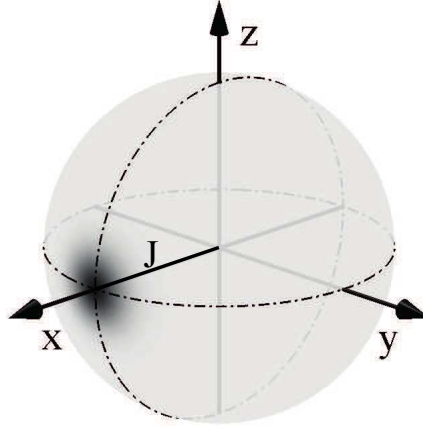
### 1.1.2 État cohérent de spins

La description précédente ne prend en compte qu'un seul spin décrit par les observables  $j_i$ ,  $i = x, y, z$ . Dans l'expérience, nous travaillons avec un ensemble d'atomes, donc un ensemble de pseudo-spins : nous devons alors généraliser les résultats précédents à un ensemble de  $N_{at}$  spins.

Cette généralisation est particulièrement aisée si tous les spins sont initialement dans le même état : ils forment alors un état cohérent de spins. Expérimentalement, les atomes sont préparés dans un seul et même état fondamental en entrée de l'interféromètre. Ainsi tous les spins s'additionnent pour former un plus grand spin de longueur de vecteur  $J = N_{at}/2$  représenté sur une sphère de Bloch de rayon également plus grand comme sur la Fig. 1.2.

Les opérateurs associés à ce pseudo-spin s'écrivent :

$$J_x = \sum_{n=1}^{N_{at}} j_x^{(n)}, \quad J_y = \sum_{n=1}^{N_{at}} j_y^{(n)}, \quad J_z = \sum_{n=1}^{N_{at}} j_z^{(n)}, \quad (1.8)$$



**Figure 1.2** – Représentation d'un état cohérent de spins. L'état pointe sur l'équateur de la sphère de Bloch de rayon  $J = N_{\text{at}}/2$  avec un bruit isotrope dans les directions orthogonales au vecteur, représenté par la tâche noire sur la sphère.

où  $n$  dénote le  $n$ ième spin. Ces opérateurs vérifient les mêmes lois de commutation  $[J_k, J_l] = i\epsilon_{klm}J_m$  que les opérateurs individuels. Ces observables ne commutent pas entre elles, trois relations d'incertitudes les relient et sont formulées par la relation de Schrödinger-Robertson [Robertson, 1929] :

$$\Delta J_k \Delta J_l \geq \frac{1}{2} \left| \langle [J_k, J_l] \rangle_\psi \right|, \quad (1.9)$$

où  $k, l = x, y, z$  et  $k \neq l$ . Le symbole  $\langle \rangle_\psi$  désigne la moyenne sur l'état  $|\psi\rangle$  et  $[\ ]$  le commutateur. La variance de l'opérateur  $J_k$  s'écrit  $\Delta J_k^2 = \langle J_k^2 \rangle - \langle J_k \rangle^2$ .

Les lois de commutation pour un état cohérent de spins nous donne alors :

$$\Delta J_k \Delta J_l = \frac{1}{2} \left| \langle J_m \rangle_\psi \right|. \quad (1.10)$$

Une propriété importante d'un état cohérent est qu'il n'y a aucune corrélation entre les spins, donc l'état n'est pas intriqué. Un état cohérent présente alors une variance égale dans les directions orthogonales à la direction moyenne du spin. Pour un état cohérent pointant selon l'axe  $x$ , comme sur la Fig. 1.2, les variances  $\Delta J_z^2$  et  $\Delta J_y^2$  sont égales, et d'après la relation d'incertitude Eq. 1.10 :

$$\Delta J_z = \Delta J_y = \sqrt{\frac{N_{\text{at}}}{4}}. \quad (1.11)$$

Cette caractéristique est représentée par une région d'incertitude circulaire à la pointe du spin comme sur la Fig. 1.2. On appelle cette incertitude le bruit de projection quantique, qui mène à une limitation sur la mesure appelée limite quantique standard [Wineland et al., 1992], [Giovannetti et al., 2004].

La paire d'observables  $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  et  $J_z$  forme un ensemble complet d'observables qui commutent <sup>1</sup> (ECOC, [Cohen-Tannoudji et al., 1973]). Ces observables représentent

1.  $J^2$  et  $J_z$  forment un ECOC si les particules du système sont indiscernables. Puisque la mesure sur l'ensemble d'atomes est indépendante des états externes (voir Sec. 2.2), en préparant initialement tous les atomes dans le même état on obtient un ensemble de spins indiscernables.

physiquement la cohérence de l'état et la différence de population atomique entre  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  respectivement.

Il est possible de montrer que ces observables ne sont pas diagonales dans la base produit mais le sont dans la base symétrique où les états propres  $|J, N\rangle$  sont appelés états de Dicke d'après R. H. Dicke et sont donnés par [Dicke, 1954] :

$$\mathbf{J}^2 |J, N\rangle = J(J+1) |J, N\rangle, \quad (1.12)$$

$$J_z |J, N\rangle = N |J, N\rangle, \quad (1.13)$$

où  $J, N$  sont deux nombres quantiques tels que  $0 \leq J \leq \frac{N_{at}}{2}$  et  $-J \leq N \leq J$ .  $N$  est la valeur propre de l'observable  $J_z$  et donne alors la différence de population atomique.

On introduit les opérateurs  $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$  qui, par analogie avec les opérateurs de création et annihilation, permettent de créer les états de Dicke à partir de  $|J, \pm J\rangle$  [Arecchi et al., 1972] tels que :

$$J_{\pm} |J, N\rangle = \sqrt{J(J+1) - N(N \pm 1)} |J, N \pm 1\rangle. \quad (1.14)$$

On peut montrer qu'ils vérifient la relation :

$$J_{\mp} J_{\pm} = \mathbf{J}^2 - J_z (J_z \pm \mathbf{1}). \quad (1.15)$$

Pour une description plus complète du système, nous allons décomposer un état cohérent de spins sur les états de Dicke [Zhang et al., 1990] et voir que la distribution d'un état cohérent suit une distribution normale comme énoncé par les relations d'incertitudes Eq. 1.10.

Dans la base des états de Dicke, un état cohérent de spins s'écrit [Zhang et al., 1990] :

$$|\theta, \varphi\rangle = \sum_{n=-J}^J c_n(\theta) e^{-i(J+n)\varphi} |J, N\rangle, \quad (1.16)$$

où les coefficients  $c_n(\theta)$  suivent une loi binomiale piquée autour de  $\theta$  avec

$$c_n(\theta) = \binom{2J}{J+N}^{1/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^{J-N} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{J+N}. \quad (1.17)$$

Pour un large ensemble d'atomes  $N_{at} \gg 1$ , la distribution binomiale est très proche d'une distribution normale et le théorème de Moivre-Laplace permet d'approximer les coefficients en :

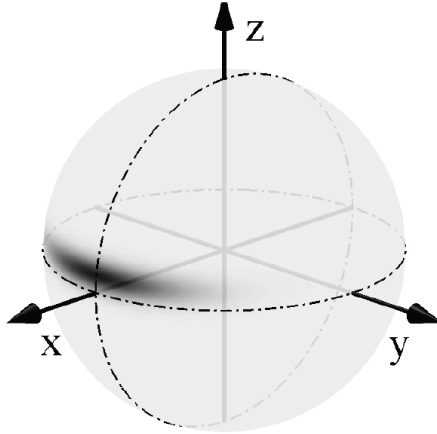
$$c_n(\theta) = (\sqrt{\pi J} \sin\theta)^{-1/2} \exp\left(\frac{-(n - J \cos\theta)^2}{2J \sin^2\theta}\right). \quad (1.18)$$

Dans l'exemple d'un état cohérent de spins crée par un pulse  $\theta = \pi/2$ , c'est-à-dire pour un pseudo-spin sur l'équateur de la sphère de Bloch, la distribution de probabilité  $p(n)$  de mesurer la valeur  $n$  via l'observable  $J_z$  est

$$p\left(n, \theta = \frac{\pi}{2}\right) = c_n^2\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi J}} e^{-n^2/J}. \quad (1.19)$$

On retrouve alors bien la distribution gaussienne attendue d'après les relations d'incertitudes Eq. 1.10, avec le bruit de projection quantique donné dans l'Eq. 1.11. Pour un état cohérent de spins, cette incertitude fondamentale ne permet pas de définir la direction moyenne du spin  $(\theta, \varphi)$  avec une précision arbitraire.





**Figure 1.3** – Représentation d'un état comprimé de spins. Le bruit n'est plus isotrope, et une des deux variances est réduite (ici la variance  $\Delta J_z^2$ ), au détriment de l'autre car on a conservation des relations d'incertitude.

L'incertitude de mesure de la phase de l'état cohérent de spins de l'Eq. 1.16 notée  $\Delta\varphi$  est définie par le ratio de l'incertitude orthogonale à la direction du spin  $\Delta J_\perp$  sur la longueur moyenne du spin  $\langle J \rangle$  telle que

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta J_\perp}{\langle J \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2J}} = \frac{1}{\sqrt{N_{at}}}. \quad (1.20)$$

Cette incertitude décrit la limite quantique standard, qui restreint par exemple la précision de la mesure d'un interféromètre de Ramsey pour les horloges atomiques.

En interférométrie atomique, les états cohérents de spins sont souvent utilisés comme état initial. Ces états présentent en effet une grande cohérence et permettent donc de longs temps d'interrogation. La description faite dans cette section va donc nous permettre de comprendre le système au cours d'une séquence d'interférométrie, et notamment au cours d'un cycle d'horloge atomique.

Ces états présentent néanmoins une limite fondamentale sur la précision de la mesure, qui limite actuellement les horloges à fontaines atomiques de Césium. Nous allons voir dans la section suivante comment des états dits non classiques permettent de passer outre cette limite. Ensuite, l'évolution d'un état cohérent de spins au cours d'une séquence d'interférométrie Ramsey va être décrite, reprenant les résultats de cette section.

### 1.1.3 État comprimé de spins

La limite quantique standard est une limite fondamentale pour un ensemble de spins non intriqués, mais peut être surpassée en introduisant des corrélations entre les particules. Ainsi, la variance sur l'une des directions orthogonales est réduite, et l'observable peut être plus précisément mesurée.

Les relations d'incertitude démontrées précédemment (Eq.1.10) restent valides, par conséquent la variance dans l'autre direction est augmentée. Cet état est appelé un état comprimé de spins (voir Fig. 1.3), à cause de sa compression dans une direction comme un ballon de rugby.

Lors d'une séquence d'interférométrie Ramsey, une seule observable peut être mesurée : la différence de population atomique  $J_z$ . Lors d'une séquence d'interférométrie, on veut mesurer

la phase  $\varphi$ , donc on va projeter cette phase en une différence de population mesurable. Sur la sphère de Bloch, cela correspond à la projection de l'angle  $\varphi$  sur l'axe  $z$ , où l'observable  $J_z$  est ensuite mesurée.

Il est donc possible de gagner en précision sur la mesure de la phase si l'état initial est comprimé et la variance  $\Delta J_z^2$  avant la mesure est réduite, comme sur la Fig. 1.3. L'augmentation de la variance dans l'autre direction n'a pas d'impact sur la mesure de la projection de la phase<sup>2</sup>.

Plusieurs critères ont été développés pour quantifier le gain métrologique grâce à un état comprimé de spins [Ma et al., 2011]. Historiquement, le premier critère a été postulé par M. Kitagawa et M. Ueda [Kitagawa and Ueda, 1993], où l'état est considéré comme comprimé si la variance d'une de ses composantes est inférieure au bruit de projection quantique  $J/2$ , donné par l'Eq. 1.11. Le critère  $\xi_{KU}$  s'écrit donc

$$\xi_{KU}^2 = \frac{2}{J} \Delta J_{\perp, min}^2, \quad (1.21)$$

où  $\Delta J_{\perp, min}^2$  représente la variance des composantes orthogonales au spin la plus basse. Pour un état cohérent de spins, on retrouve que  $\xi_{KU}^2 = 1$ ; et l'état est donc comprimé si  $\xi_{KU}^2 < 1$ .

Ce critère ne prend cependant pas en compte la décohérence de l'état, grandeur physique essentielle en interférométrie. Il peut alors s'avérer que l'état soit comprimé si  $\xi_{KU}^2 < 1$ , mais que la longueur du pseudo-spin soit fortement réduite par la création de l'état et donc au final détériore la sensibilité de l'interféromètre. Le critère  $\xi_S$  proposé par [Wineland et al., 1994] prend en compte la décohérence de l'état (*i.e.* la longueur moyenne du spin  $\langle |\mathbf{J}| \rangle^2$ ) et donne l'utilité d'un état comprimé en interférométrie :

$$\xi_S^2 = \frac{\xi_{KU}^2}{\langle |\mathbf{J}| \rangle^2}. \quad (1.22)$$

La sensibilité de la mesure de la phase en sortie d'un interféromètre augmente alors si  $\xi_S^2 < 1$  et on retrouve  $\xi_S^2 = 1$  dans le cas d'un état cohérent de spins en entrée de l'interféromètre. On voit que  $\xi_S^2 \leq \xi_{KU}^2$ , donc le critère de Wineland est plus restrictif.

Expérimentalement, un état comprimé de spins est produit par évolution non linéaire de l'équation de Schrödinger. Ainsi, des états comprimés de spins ont été réalisés par interactions atomiques [Estève et al., 2008], par interactions atomes-lumière via une cavité optique [Leroux et al., 2010a] ou par mesures non destructives du pseudo-spin [Schleier-Smith et al., 2010] [Appel et al., 2009b]. Ces états non classiques ont été utilisés en interférométrie atomique et ont démontré un gain métrologique de l'interféromètre [Louchet-Chauvet et al., 2010] [Leroux et al., 2010b] [Ockeloen et al., 2013].

A l'heure actuelle, le gain métrologique le plus élevé démontré pour un état comprimé de spins est de 23(5) dB réalisé au JILA [Cox et al., 2015]. Il reste néanmoins à appliquer ce gain sur des interféromètres de précision, notamment pour voir si les effets systématiques peuvent être contrôlés et corrigés afin de ne pas détériorer la sensibilité.

Notre mesure non destructive permet d'obtenir  $\xi_{KU}^2 < 1$  mais pour une décohérence importante. Le critère  $\xi_S^2 < 1$  n'est alors pas vérifié, et l'état comprimé ainsi créé ne permet pas une meilleure sensibilité de la mesure de la phase. Dans la Sec. 3.3, nous étudions l'injection

---

2. A une condition cependant : la phase doit être proche de zéro. Si ce n'est pas le cas, il a été démontré qu'une séquence adaptée peut être utilisée pour éviter que l'état comprimé ne mène à plus de décohérence qu'il n'apporte de gain en sensibilité [Borregaard and Sørensen, 2013b].

de la mesure dans la cavité optique, qui permet de créer des états comprimés de spin pour une moindre décohérence. Le critère de Wineland pourra ainsi être vérifié, et les états comprimés de spins pourront être utilisés dans l'étude du Chap.4 pour augmenter la sensibilité d'une horloge.

Cette étude de la mesure intra-cavité est en cours de réalisation, et pour les résultats de cette thèse nous utilisons des états cohérents de spins. Dans le Chap.4, nous démontrons l'amélioration de la stabilité d'une horloge atomique par des mesures non destructives successives. Cette horloge est basée sur une séquence d'interférométrie de Ramsey, pour laquelle l'évolution de l'état atomique est décrite dans la section suivante.

## 1.2 Bruit dans un interféromètre de Ramsey

Comme nous l'avons vu, l'évolution d'un état cohérent de spins peut s'interpréter en termes de rotations autour de la sphère de Bloch par l'opérateur rotation  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  (Eq.1.7). Une séquence d'interférométrie peut alors être décrite par une succession de rotations. Avant de décrire cette évolution, notamment dans le cas d'un interféromètre de Ramsey, nous allons rappeler l'origine de l'interaction à la base d'un interféromètre.

### 1.2.1 Interaction atomes-champ dans un interféromètre

Le couplage entre un ensemble d'atomes, modélisé par des systèmes à deux niveaux de différence d'énergie  $\hbar\omega_0$ , et un champ électromagnétique (EM) de pulsation  $\omega_{em}$  et d'opérateur de champ électrique  $E$ , est décrit par l'hamiltonien  $H$  où :

$$H = H_{at} + H_{em} + H_{int}. \quad (1.23)$$

Les différents termes sont décrits comme suit :

- $H_{at}$  est l'hamiltonien propre à l'ensemble d'atomes, avec les opérateurs collectifs de spins  $J_i$ ,  $i = x, y, z$ . L'évolution du système est décrit par :

$$H_{at} = \hbar\omega_0 J_z. \quad (1.24)$$

- $H_{em}$  est l'hamiltonien du champ électromagnétique (EM). Il est décrit par les opérateurs création et annihilation  $a^\dagger$  et  $a$ . On a :

$$H_{em} = \hbar\omega_{em}(a^\dagger a + \frac{1}{2}). \quad (1.25)$$

- $H_{int}$  représente l'hamiltonien d'interaction entre l'ensemble d'atomes et le champ EM. Il est décrit par le champ électrique  $E = E_0(a + a^\dagger)$  et l'opérateur moment dipolaire  $D = d_0(J_+ - J_-)$  des atomes, où  $d_0$  est le moment dipolaire restreint et  $J_\pm$  les opérateurs liés à l'ensemble de spins décrits par l'Eq. 1.14. Le terme d'interaction s'écrit :

$$H_{int} = -D.E = -\frac{\hbar\Omega_0}{2}(a - a^\dagger)(J_+ - J_-), \quad (1.26)$$

avec  $\Omega_0 = 2d_0E_0/\hbar$  la constante du couplage.

Dans l'approximation de l'onde tournante, on néglige les termes proportionnels à  $a^\dagger J_+$  et  $a J_-$  car ils oscillent rapidement et se moyennent rapidement à zéro. Dans cette approximation, l'hamiltonien s'écrit alors :

$$H = \hbar\omega_0 J_z + \hbar\omega_{em}(a^\dagger a + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar\Omega_0}{2}(a^\dagger J_- + a J_+). \quad (1.27)$$

Il est courant de diviser cet hamiltonien en deux parties : l'une étant une constante du mouvement  $H_0$  et l'autre l'hamiltonien de Jaynes-Cummings  $H_{JC}$  tel que  $H = H_0 + H_{JC}$ . On exprime  $H_0$  comme :

$$H_0 = \hbar\omega_{em}\left(a^\dagger a + \frac{1}{2} + J_z\right). \quad (1.28)$$

$H_0$  représente donc le nombre total de particules (atomes et photons) dans le système. En utilisant les relations  $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}_{em}$  et  $[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm$ , on peut montrer que  $[H_0, H] = 0$  et donc que le nombre de particules est une constante du mouvement.

L'hamiltonien de Jaynes-Cummings décrit l'évolution d'un atome, ou ici d'un ensemble collectif d'atomes considéré comme un pseudo-spin, plongé dans un champ EM [Jaynes and Cummings, 1963]. Il s'écrit :

$$H_{JC} = \hbar\delta J_z - \frac{\hbar\Omega_0}{2}(a^\dagger J_- + a J_+), \quad (1.29)$$

où  $\delta = \omega_0 - \omega_{em}$  est le décalage entre la fréquence propre des atomes et la fréquence de la radiation EM.

Pour mieux comprendre l'interaction, plaçons nous dans un cas simple où l'on excite le système atomique proche de résonance tel que  $\delta = 0$ . Si de plus, la radiation EM est un champ cohérent, comme pour la radiation d'un laser par exemple, alors le champ peut être remplacé par un champ classique d'amplitude  $\alpha$ , qui est un nombre réel si la phase à l'origine est nulle. L'hamiltonien  $H_{JC}$  s'écrit alors :

$$H_{JC} = -\hbar\Omega J_x, \quad (1.30)$$

où  $\Omega = \alpha\Omega_0$  est la fréquence de Rabi. L'opérateur d'évolution est donc :

$$U(\tau) = e^{-iH_{JC}\tau/\hbar} = e^{-i\theta J_x}, \quad (1.31)$$

avec  $\theta = \Omega\tau$  où  $\tau$  est le temps d'interaction. On retrouve ici une rotation autour de la sphère de Bloch d'axe x et d'angle  $\theta$ . L'opérateur d'évolution est donc similaire à l'opérateur de rotation décrit précédemment dans l'Eq. 1.7. Dans ce cas, le spin collectif réalise des oscillations de Rabi de fréquence  $\Omega$ , comme mesurées en temps réel dans la Sec. 2.2.3.

Si l'on fixe le temps d'interaction  $\tau$  de telle manière que  $\theta = \pi/2$ , et partant d'un ensemble de spins sur  $|0\rangle$ , on obtient une superposition d'états sur l'équateur de la sphère de Bloch : c'est la séparatrice d'entrée d'un interféromètre Ramsey. Après le pulse  $\pi/2$ , l'étape suivante d'une séquence Ramsey est une évolution libre du pseudo spin, on coupe alors le champ EM ( $E = 0$  et donc  $\Omega_0 = 0$ ), l'opérateur s'écrit alors :

$$U_{libre}(\tau) = e^{-i\varphi J_z}. \quad (1.32)$$

Dans ce cas, c'est autour de l'axe z que le spin tourne, d'un angle  $\varphi = \delta\tau$ . On voit alors que la rotation du spin dépend de la différence de fréquence  $\omega_0 - \omega_{em}$  entre la transition atomique et le champ. La fréquence du champ est "imprimée" par le premier pulse  $\pi/2$ , et le déphasage durant l'évolution libre dépend de la différence de fréquence. Une mesure de cette phase permet donc de connaître précisément la différence de fréquence entre le champ et les atomes et de rétroagir sur cette fréquence pour obtenir une mesure précise du temps comme pour les horloges atomiques (voir Chap. 4).

### 1.2.2 Interféromètre de Ramsey

Dans cette thèse, nous allons décrire et étudier le principe d'une horloge atomique basée sur une séquence d'interférométrie de Ramsey.

L'interféromètre de Ramsey tend à séparer les états internes du pseudo-spin plutôt que les états externes comme un interféromètre Raman qui sépare les paquets d'ondes de matière de manière sélective en vitesse. Une séquence sur les états internes de l'ensemble peut alors être décrite du point de vue des opérateurs liés à l'ensemble collectif de spins comme nous venons de le discerner dans la section précédente.

Comme dans tout interféromètre, la quantité importante est la phase. Un interféromètre de Ramsey est utilisé pour mesurer la phase relative entre les atomes et un oscillateur local (OL) qui est un champ EM en résonance avec la transition atomique considérée. La phase n'est pas une observable du système et l'idée est alors de projeter cette phase sur une observable du système. Comme vu précédemment, un état cohérent de spins peut se décrire essentiellement par la cohérence de l'état quantique  $J^2$ , et par la différence de population entre les deux états  $J_z$  (*i.e.* l'énergie du système). La phase relative est donc projetée sur l'axe  $z$ , et une mesure de  $J_z$  permet donc de l'évaluer.

Nous avons vu qu'un interféromètre peut s'exprimer en termes de rotations du pseudo-spin. L'opérateur de rotation d'une séquence de Ramsey s'écrit typiquement comme

$$R = e^{-i\frac{\pi}{2}J_y} e^{-i\varphi J_z} e^{-i\frac{\pi}{2}J_y}. \quad (1.33)$$

C'est une séquence de trois rotations d'angles et d'axes différents que nous allons maintenant décrire.

— Première rotation  $e^{-i\frac{\pi}{2}J_y}$

L'état initial du pseudo-spin est préparé dans l'état  $|0\rangle$ , le premier pulse fait évoluer le pseudo-spin tel qu'il tourne d'un angle  $\pi/2$  autour de l'axe  $y$ . C'est la séparatrice d'entrée d'un interféromètre, qui permet d'être sensible à la phase et d'accumuler ensuite un déphasage qui fournira le signal à mesurer. Dans notre cas, le pseudo-spin pointe le long de l'axe  $x$  et n'est plus le long de l'axe  $z$  : il devient sensible à une rotation autour de l'axe  $z$  donc devient sensible à la phase  $\varphi$ .

On obtient par cette rotation l'état cohérent de superpositions d'états atomiques utilisé comme état d'entrée de l'interféromètre, décrit précédemment.

Cette rotation est induite par le rayonnement d'un champ EM pendant un temps  $\tau_{\pi/2}$  en résonance avec la transition atomique, comme expliqué dans la Sec. 1.2.1.

— Deuxième rotation  $e^{-i\varphi J_z}$

La seconde évolution du pseudo-spin est une rotation autour de l'axe  $z$  d'un angle  $\varphi$ . Après le premier pulse, la phase du champ EM est "imprimée" sur les atomes et la direction du spin nous donne la dérive de phase  $\varphi$  relative, c'est-à-dire la différence de fréquence entre les deux oscillateurs. Pendant cette étape, le champ EM est éteint et le pseudo-spin évolue librement, comme expliqué dans la Sec. 1.2.1.

Pour une horloge atomique, cette phase  $\varphi$  permet de comparer l'OL avec la fréquence de la transition atomique *à priori* absolue et immuable. En asservissant ainsi l'OL sur les atomes, on obtient une évaluation précise de la seconde. La dérive de phase est souvent notée  $\varphi = \delta T$ , où  $\delta$  est la différence de fréquence entre les deux oscillateurs et  $T$  le temps d'interrogation Ramsey. Le pseudo-spin tourne donc avec une vitesse angulaire  $\delta$  pendant un temps  $T$ .

— Troisième rotation  $e^{-i\frac{\pi}{2}J_y}$

Après l'évolution libre du pseudo-spin, on souhaite mesurer la phase relative. La seule observable directement accessible est la différence de population atomique  $J_z$ , qui donne la différence de population entre les deux états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . Le troisième pulse vise donc à projeter cette phase sur l'axe  $z$  : on effectue une rotation de  $\pi/2$  d'axe  $y$ <sup>3</sup>. Après ce pulse de projection, la phase relative est mesurée, et on obtient une comparaison de la fréquence de l'OL avec une fréquence de référence, ici la fréquence d'une transition atomique.

A partir de l'opérateur de rotation, nous pouvons déduire la valeur attendue et la variance de l'observable  $J_z$  après la mesure de la projection de la phase relative sur l'observable  $J_z$  [Vanderbruggen, 2012]. Nous pouvons donc ainsi estimer le bruit de l'interféromètre.

La valeur attendue après la mesure de  $J_z$  est calculée sur l'état initial  $|\psi_0\rangle$  par l'opérateur de rotation  $R$  :

$$\langle J_z^{out} \rangle = \langle \psi_0 | R^\dagger J_z^{in} R | \psi_0 \rangle \quad (1.34)$$

$$= -\cos\varphi \langle J_z^{in} \rangle + \sin\varphi \langle J_y^{in} \rangle \quad (1.35)$$

$$= J \cos\varphi. \quad (1.36)$$

On voit que l'interféromètre mène à des franges d'interférence en sortie selon la phase relative  $\varphi$ , donc selon le désaccord  $\delta = \omega_0 - \omega$ . Un exemple de ces interférences est montré dans le cas d'une horloge atomique dans [Clairon et al., 1991], et sera expliqué plus en détails dans le Chap. 4. On remarque que si le pulse de projection se réalise autour de l'axe  $x$ , on obtient  $\langle J_z \rangle = J \sin\varphi$ . Ce qui mène également à des franges d'interférences Ramsey.

Cette mesure de  $J_z$  a une variance de bruit déterminée par  $\Delta J_z^2$ , tel que

$$\Delta J_z^2 = \langle (J_z)^2 \rangle - \langle (J_z) \rangle^2. \quad (1.37)$$

En utilisant les opérateurs  $J_\pm$  et leur relation Eq. 1.15, on obtient

$$\Delta J_z^2 = \left( \frac{J}{2} \sin^2 \varphi + J^2 \cos^2 \varphi \right) - J^2 \cos^2 \varphi, \quad (1.38)$$

$$= \frac{J}{2} \sin^2 \varphi. \quad (1.39)$$

Considérant une mesure projective parfaite, l'écart-type de ces fluctuations de mesure de la phase est donné par :

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta J_z}{\left| \frac{\partial \langle J_z \rangle}{\partial \varphi} \right|} = \frac{1}{\sqrt{N_{at}}}, \quad (1.40)$$

avec  $N_{at} = 2J$ .

On retrouve que les fluctuations de mesure de la phase d'un état cohérent de spin, donnant la sensibilité de l'interféromètre, sont proportionnelles à l'inverse de la racine du nombre d'atomes, comme dans l'Eq. 1.20. Cette limite est appelée limite quantique standard, ou limite du bruit de projection quantique.

---

3. On remarque qu'il est possible de projeter la phase relative en effectuant une rotation d'axe  $x$  ou  $y$ , menant au cosinus ou sinus de la phase relative. Dans le Chap. 4, la projection de la phase se fait par une rotation autour de l'axe  $x$ .

Nous avons vu précédemment qu'en introduisant des corrélations pour obtenir des états intriqués de spins, la limite quantique standard peut être dépassée. Dans un interféromètre de Ramsey, on pourrait utiliser pour cela un état comprimé de spins en entrée, où la variance sur l'observable  $J_z$  est diminuée, et où les fluctuations de phase en sortie de l'interféromètre mènent à la limite de Heisenberg. On peut montrer qu'avec un tel état, les fluctuations de phase s'écrivent [Yurke et al., 1985] [Vanderbruggen, 2012] :

$$\Delta\varphi_{min}^2 = \frac{4}{N_{at}(N_{at} + 2)}, \quad (1.41)$$

dans l'hypothèse où  $\varphi$  reste proche de 0, on a  $\varphi = \varphi_{min}$ . Si  $\varphi$  n'est pas proche de son minimum, un état comprimé de spins n'amène pas de gain métrologique sur la mesure de la phase, et peut même détériorer la sensibilité de l'interféromètre pour  $\varphi \sim \pi/2$ . Dans la limite  $N_{at} \gg 1$ , on obtient pour la sensibilité de l'interféromètre :

$$\Delta\varphi_{min} \sim \frac{2}{N_{at}}. \quad (1.42)$$

C'est la limite de Heisenberg, où les fluctuations de phase sont proportionnelles à l'inverse du nombre d'atomes. Toute la difficulté est d'obtenir un état comprimé d'un grand ensemble de spins, tout en gardant la cohérence de l'état, afin d'avoir un fort gain métrologique et de s'approcher de la limite de Heisenberg.

Dans cette expérience, des états comprimés de spins peuvent être réalisés par l'application d'une mesure non destructive dans le régime projectif. Mais pour cette mesure la décohérence est conséquente et le facteur métrologique  $\xi_S > 1$  n'amène aucun gain sur l'interféromètre. Cette mesure est décrite dans le chapitre suivant, où son principe et sa réalisation sont exposés, ainsi que les caractéristiques d'une telle mesure sur les atomes.

La mesure peut également être réalisée avec un faisceau en résonance dans la cavité. Cela mène à plusieurs interactions avec les atomes, déterminé par la finesse de la cavité. L'information obtenue sera alors augmentée et peut mener à un gain métrologique  $\xi_S < 1$ .

Nous avons donc vu dans ce chapitre les outils théoriques au système étudié ici. Chaque atome est décrit par un système à deux niveaux, représenté comme un spin sur la sphère de Bloch, et l'ensemble d'atomes forme un ensemble cohérent de spins si les atomes sont tous dans le même état.

Le bruit intrinsèque lors d'une mesure de cet ensemble est le bruit de projection quantique, et peut être dépassé par des états de spins non classiques, notamment par la création d'états comprimés de spins par la mesure.

Nous avons ensuite vu l'évolution d'un état cohérent de spin au cours d'un interféromètre de Ramsey, utilisé pour les horloges atomiques. La dynamique d'un tel état est décrite par un hamiltonien de Jaynes-Cummings lors de son interaction avec un champ électromagnétique. Les évolutions de l'ensemble lors de l'interféromètre peuvent être décrites par des rotations autour de la sphère de Bloch, et le bruit en sortie de l'interféromètre a été décrit pour un état cohérent de spin et un état comprimé de spin.

## Chapitre 2

# Mesures non destructives de l'ensemble atomique

Après avoir décrit le système d'atomes dans le chapitre précédent, nous allons voir qu'une mesure non destructive de son état quantique peut être réalisée. En généralisant le principe de la mesure en mécanique quantique — dont la loi de Born est un cas particulier — nous allons voir qu'il est possible de mesurer un état quantique sans le projeter ni détruire le système. Certaines conditions doivent être remplies pour que la mesure soit non destructive, notamment il faut qu'elle soit indirecte.

Cette mesure est basée sur une technique de spectroscopie par modulation de fréquence, où l'on module le faisceau pour créer deux bandes latérales. Ces bandes latérales interagissent avec l'ensemble atomique et fournissent le signal proportionnel à la différence de population de l'ensemble.

L'intérêt d'une telle technique est de n'utiliser qu'un seul faisceau pour la mesure, simplifiant grandement le montage expérimental. De plus, le fait de moduler la fréquence dans le domaine du GHz permet de s'affranchir des bruits parasites, et permet par exemple d'opérer la mesure en pleine lumière. Cette méthode a l'avantage de pouvoir mesurer l'ensemble avec un bruit limité au bruit de photons pour un grand nombre d'atomes.

Après l'explication du principe de cette technique, nous allons voir comment la réaliser expérimentalement. Pour cela, le montage expérimental est discuté en détails, et il est appliqué à la mesure de la différence de population de l'ensemble. Les paramètres du faisceau sonde sont alors fixés afin de mesurer directement l'opérateur  $J_z$ , et une mesure en temps réel des oscillations de Rabi est démontrée confirmant ainsi le caractère non destructif de la mesure.

Nous allons ensuite voir les limitations de la mesure et la décohérence induite par le faisceau sonde. La décohérence provient de deux contributions dominantes que nous allons étudier et que nous allons essayer de supprimer. Enfin, la fin du chapitre portera sur l'amélioration de la mesure, c'est-à-dire augmenter la précision de la mesure tout en gardant une faible destructivité sur l'ensemble. Afin de voir les améliorations apportées, nous allons comparer des mesures de l'ancien et du nouveau dispositif.

### 2.1 Généralisation de la mesure en physique quantique

Dans une première approche à la physique quantique [Cohen-Tannoudji et al., 1973], la mesure nous est présentée comme étant projective : c'est la mesure de Von Neumann



[Von Neumann, 1955] du nom de son initiateur, ou plus couramment appelée loi de Born<sup>1</sup>. Elle peut être formulée comme suit : si l'état initial d'un système quantique est une superposition d'états propres d'une observable, alors la mesure ne peut donner comme résultat qu'un état propre de l'observable. La probabilité de mesurer cet état est le module au carré de la projection de l'état du système avant la mesure sur l'état propre considéré. De plus, le postulat de réduction du paquet d'ondes nous dit qu'immédiatement après la mesure, le système n'est plus dans l'état de superposition initial mais dans l'état propre détecté. La mesure est dès lors un processus d'évolution pour un système quantique, tout comme peut l'être l'équation de Schrödinger.

Cette approche simple de la mesure quantique est en fait un cas limite d'un postulat plus vaste de la mesure généralisée [Nielsen and Chuang, 2000]. Dans des situations expérimentales décrites avec une précision finie du détecteur ou aboutissant à la destruction du système quantique après la mesure (photodétection par exemple), la loi de Born échoue à décrire le système, on se place alors dans le postulat de la mesure généralisée.

### 2.1.1 Mesure généralisée

Le postulat de la mesure généralisée se base sur la notion d'ensemble d'opérateurs hermitiques POVM (pour *Positive-Operator Valued Measure* en anglais) donnant la probabilité de détection dans le cas général. Ces opérateurs, notés  $\{M_n\}$ , donnent une mesure d'une observable agissant sur les états de l'espace de Hilbert considéré. Les valeurs  $n$  indiquent les valeurs possibles de la mesure, qui vérifient la relation de complétude :

$$\sum_n M_n^\dagger M_n = \mathbf{1}. \quad (2.1)$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir le résultat  $n$  pour l'état  $|\psi\rangle$  associé à l'opérateur  $M_n$  s'écrit :

$$P_n = \langle \psi | M_n^\dagger M_n | \psi \rangle, \quad (2.2)$$

où l'on obtient la normalisation  $\sum_n P_n = 1$  en utilisant l'Eq. 2.1.

L'évolution de l'état après la mesure s'écrit :

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \frac{M_n |\psi_{\text{in}}\rangle}{\sqrt{\langle \psi_{\text{in}} | M_n^\dagger M_n | \psi_{\text{in}} \rangle}}, \quad (2.3)$$

et va nous être utile pour connaître la projection de l'état par la mesure.

Ces équations représentent la généralisation de la loi de Born, et peuvent s'appliquer dans tous les cas. On peut retrouver la loi de Born dans le cas limite où l'ensemble  $\{M_n\}$  est l'ensemble de projecteurs  $\{\Pi_n\}$ , ce qui est décrit dans la section suivante. Cette mesure généralisée peut être également appliquée à un ensemble cohérent de spins, où différents régimes de détection peuvent être dérivés.

### 2.1.2 Cas d'une mesure projective

Dans le cas d'une mesure projective, l'ensemble des opérateurs de mesure est un ensemble de projecteurs qui présente une distribution de Dirac, où l'on note  $\Pi_n \equiv |n\rangle \langle n|$  le projecteur

---

1. Max Born a obtenu le prix nobel en 1954 pour ses travaux d'interprétation statistique de la mécanique quantique [Born, 1964].

sur l'état  $n$ . Cet ensemble est un ensemble complet d'opérateurs de mesure (POVM) car il vérifie la relation de complétude :

$$\sum_n \Pi_n^\dagger \Pi_n = \sum_n \Pi_n = \sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbf{1}, \quad (2.4)$$

avec  $\Pi_n^\dagger = \Pi_n$  et  $\Pi_n^2 = \Pi_n$ .

D'après l'Eq. 2.2, la probabilité de mesurer  $\psi$  dans l'état  $|n\rangle$  est :

$$P_n = |\langle \psi | n \rangle|^2. \quad (2.5)$$

On retrouve ici la loi de Born pour laquelle la probabilité de mesurer l'état est le module au carré de la projection de l'état du système. De plus, l'évolution de l'état après la mesure de  $n$  est  $\Pi_n |\psi\rangle = |n\rangle$ , la mesure projette donc l'état sur l'état de mesure. Nous venons donc de démontrer que la mesure projective est un cas limite de la mesure généralisée où l'ensemble d'opérateurs de mesure est un ensemble de projecteurs.

### 2.1.3 Mesure quantique généralisée d'un ensemble collectif de spins

Nous allons nous intéresser maintenant à la mesure d'un ensemble cohérent de spins. Comme nous l'avons expliqué dans la Sec. 1.2.2, nous mesurons la différence de population liée à l'observable  $J_z$ .

L'Eq. 1.16 nous donne l'expression d'un ensemble cohérent de spins dans la base des états de Dicke, et l'Eq. 1.18 les coefficients correspondants dans l'approximation  $N_{at} \gg 1$ .

On considère ici une mesure non destructive pour laquelle l'état reste pur après la mesure, et où le détecteur a un bruit gaussien d'écart-type  $\sigma_{det}$ . L'opérateur de mesure associé à l'état s'écrit :

$$M_n = \left(2\pi\sigma_{det}^2\right)^{-1/4} e^{-\frac{1}{4\sigma_{det}^2}(J_z-n)^2}. \quad (2.6)$$

C'est un opérateur hermitien  $M_n^\dagger = M_n$  qui vérifie la relation de complétude :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M_n^\dagger M_n dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{det}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(n-J_z)^2}{2\sigma_{det}^2}} dn = \mathbf{1}. \quad (2.7)$$

En prenant un état cohérent de spins, la probabilité de mesurer la valeur  $n_0$  est donnée par l'Eq. 2.2 et s'écrit :

$$P_{n_0} = \langle \theta, \varphi | M_{n_0}^\dagger M_{n_0} | \theta, \varphi \rangle = \frac{\xi}{\sqrt{2\pi\sigma_{det}^2}} e^{-\frac{\xi^2 (n_0 - J \cos \theta)^2}{2\sigma_{det}^2}}, \quad (2.8)$$

où  $\xi$  est le facteur de compression décrit plus loin. Nous avons utilisé ici  $\langle J', n' | J'', n'' \rangle = \delta(J' - J'')\delta(n' - n'')$  et  $J_z = J \cos \theta$ .

Au cours de la mesure de  $n_0$  avec une probabilité  $P_{n_0}$ , l'état évolue selon l'Eq. 2.3 tel que :

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{M_{n_0} |\psi_{in}\rangle}{\sqrt{P_{n_0}}} \quad (2.9)$$

$$= \left(2\pi\xi^2 J \sin^2 \theta\right)^{-1/4} \sum_{n=-J}^J e^{-\frac{(n-\mu_0)^2}{2\xi^2 J \sin^2 \theta} - i(J+n)\varphi} |J, n\rangle. \quad (2.10)$$

Différents paramètres ont été introduits ici :

$$\mu_0 = \frac{\kappa^2 n_0 \sin^2 \theta + J \cos \theta}{1 + \kappa^2 \sin^2 \theta} \quad (2.11)$$

est la position du centre de la distribution gaussienne après la mesure. L'état après la mesure est le produit de l'état initial et d'une gaussienne centrée en  $\mu_0$ .

$$\xi^2 = \frac{1}{1 + \kappa^2 \sin^2 \theta} \quad (2.12)$$

représente le facteur de compression de l'état, où  $\kappa^2 = \sigma_J^2 / \sigma_{det}^2 = J / 4\sigma_{det}^2$  est la force de la mesure. Comme nous l'avons vu dans la Sec.1.1.3, des états comprimés peuvent être créés par la mesure où la compression est décrite par ce facteur.

Pour une mesure non destructive, le facteur de compression dépend de la projection de l'état, donc de la précision de la mesure et du paramètre  $\kappa^2$ . On voit que la paramètre  $\kappa^2$  donne le rapport de la précision de la mesure  $\sigma_J$  sur la largeur de la fonction d'onde  $\sigma_{det}$ . Il déterminera alors différents régimes de mesure, les régimes de mesure forte et faible.

Ce facteur peut être intuitivement compris dans le cas d'un ensemble cohérent de spins préparé sur l'équateur de la sphère de Bloch, où  $\cos(\theta = \pi/2) = 0$  et  $\sin(\pi/2) = 1$ . Dans ce cas, l'Eq. 2.10 se simplifie en :

$$|\psi_{out}\rangle = \left( \frac{2\pi J}{1 + \kappa^2} \right)^{-1/4} \sum_{n=-J}^J \exp \left\{ \frac{\left( \frac{n - \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2} n_0}{2J} \right)^2}{\frac{1}{1 + \kappa^2}} \right\} e^{-i(J+n)\varphi} |J, n\rangle. \quad (2.13)$$

Le paramètre  $\kappa$  influe sur la distribution de l'état cohérent de spins. Il décrit le ratio entre la taille de la distribution gaussienne initiale de l'état cohérent de spins sur l'équateur et l'incertitude de la mesure. Le paramètre  $\xi = \frac{1}{1 + \kappa^2}$  représente la différence entre la taille de la distribution après et avant la mesure.

On peut remarquer que le facteur de compression  $\xi$  est relié au critère métrologique  $\xi_S^2$  (Eq. 1.22) par  $\xi = \eta^2 \xi_S^2$ , avec  $\eta = |\langle \mathbf{J} \rangle| / J$  la cohérence résiduelle après la mesure. Ainsi, on voit qu'un état comprimé de spins peut amener une amélioration métrologique si la cohérence après la mesure reste élevée, ou en d'autres termes si la destructivité de la mesure est négligeable ce que nous allons voir plus loin.

### Mesure forte

On voit que si  $\kappa \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire que la mesure est idéalement précise (*i.e.*  $\sigma_{det} \rightarrow 0$ ), la distribution de l'état après la mesure tend vers une distribution de Dirac autour de la valeur mesurée  $n_0$ . La probabilité de mesurer  $n_0$  tend vers 1 et la mesure est projective, comme dans le cas étudié précédemment 2.1.2.

De manière générale, la mesure est dite forte, ou partiellement projective, si  $\sigma_{det} \lesssim \sigma_J$  ou en d'autres termes  $\kappa > 1$ . Dans ce cas,  $\xi^2 < 1$  et il est donc possible d'obtenir des états comprimés de spins par une mesure partiellement projective.

En interférométrie atomique, l'état comprimé ainsi créé mènera à un gain métrologique si la projection de l'état par la mesure est négligeable. Dans une telle séquence d'interférométrie, l'état comprimé est initialement créé par une mesure forte puis la séquence classique se réalise où la mesure d'interférométrie se fait sur l'état comprimé [Louchet-Chauvet et al., 2010] [Leroux et al., 2010b] [Ockeloen et al., 2013]. Cette dernière mesure est liée à la mesure de

préparation de l'état par le facteur  $\epsilon = \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2}$ , appelé coefficient de corrélation puisque la valeur attendue après la mesure de préparation de l'état comprimé est  $\epsilon n_0$ .

### Mesure faible

Au contraire, si la projection de l'état est négligeable, c'est-à-dire si  $\sigma_{det} \gg \sigma_J$  et  $\kappa \rightarrow 0$ , l'état n'évolue pas au cours de la mesure  $|\psi_{out}\rangle \simeq |\psi_{in}\rangle$ . C'est le régime de mesure faible [Aharonov et al., 1988] [Aharonov and Vaidman, 1990].

En pratique, il est possible de soutirer de l'information du système sans le perturber, *i.e.* sans projeter son état par la mesure. On peut alors mesurer une observable du système avant de rétroagir sur celui-ci.

Notre mesure utilise un faisceau lumineux passant à travers l'ensemble atomique comme nous allons le voir dans la Sec. 2.2. Pour ce type de mesure, la destructivité est étroitement liée à la force de la mesure par le nombre de photons interagissant avec les atomes. On essaiera donc, pour implémenter une rétroaction sur le système, de se placer dans un régime où la projection du système sont négligeables tout en obtenant de l'information.

À première vue, moins on projette l'état, plus la mesure est imprécise et éloignée de la valeur moyenne. Mais si l'on utilise un grand nombre d'atomes, cette mesure n'est pas nécessairement imprécise : l'incertitude de la mesure de  $J_z$  d'un état cohérent de spins est proportionnelle à  $\frac{\sigma_{det}}{J}$  qui tend vers 0 pour un grand ensemble d'atomes (*i.e.*  $J \rightarrow \infty$ ). Pour la mesure faible d'états cohérents de spins, on essaiera alors de se placer dans le régime :

$$\frac{1}{2J} < \kappa^2 \ll 1, \quad \xi \simeq 1, \quad \epsilon \sim 0, \quad N_{at} = 2J \gg 1, \quad (2.14)$$

pour lequel la projection de l'état du système est négligeable, et la mesure est arbitrairement précise.

Ce régime sera utilisé pour la suite de la thèse, où nous démontrons l'asservissement en phase d'un oscillateur local et d'un ensemble d'atomes par des mesures faibles non destructives suivies de corrections de phase dans le Chap. 4.

Seul la projection de l'état par la mesure a été mis en évidence ici. Pour implémenter une mesure non destructive, c'est-à-dire sans amener de décohérence sur le système quantique, il faut qu'elle vérifie certaines relations, notamment qu'elle soit indirecte comme nous allons le voir.

### Mesure non destructive

En pratique, la détection d'un ensemble atomique se fait souvent de manière destructive, comme pour la mesure par fluorescence ou par absorption, où la cohérence de l'ensemble de spins est totalement perdue après la mesure. Pour que la mesure soit non destructive, il faut qu'elle soit indirecte, c'est-à-dire que l'on va mesurer l'interaction des atomes avec une sonde  $\mathcal{M}$  et ainsi obtenir des informations sur le système  $\mathcal{S}$  en le préservant d'une mesure directe et destructive. La sonde est alors intriquée avec l'ensemble de spins, et elle peut être mesurée de manière destructive (dans notre cas par photodétection).

Certaines conditions doivent néanmoins être remplies. On note  $H_{\mathcal{M}}$  et  $H_{\mathcal{S}}$  l'hamiltonien de la sonde et du système respectivement, et  $H_{\mathcal{S}\mathcal{M}}$  l'hamiltonien d'interaction. L'observable est noté  $O_{\mathcal{S}}$ , et l'on note  $O_{\mathcal{M}}$  l'observable mesurée de la sonde, qui est à priori différent de  $O_{\mathcal{S}}$ .

En premier lieu, il faut que l'information de l'observable  $O_S$  du système soit transférée sur la sonde, donc que l'interaction change l'observable  $O_M$  de la sonde tel que

$$[H_{SM}, O_M] \neq 0. \quad (2.15)$$

Par une mesure de la sonde, on aura alors indirectement accès à l'observable  $O_S$ . La mesure est non destructive si l'état du système ne change pas, donc si l'interaction avec la sonde ne modifie pas l'observable  $O_S$  :

$$[H_{SM}, O_S] = 0. \quad (2.16)$$

Ainsi, le système est inchangé après l'interaction avec la sonde. La mesure doit enfin être répétable, donc l'observable  $O_S$  doit être une constante du mouvement et doit donc commuter avec l'hamiltonien total  $H = H_S + H_M + H_{SM}$ . La condition  $[H_{SM}, O_S] = 0$  est déjà vérifiée, il faut donc que

$$[H_S, O_S] = 0. \quad (2.17)$$

Ces trois conditions sont nécessaires et suffisantes pour que la mesure soit non destructive.

En pratique, l'Eq. 2.16 est difficilement réalisable dans notre cas puisqu'il y a toujours une faible décohérence par l'interaction avec la sonde. La sonde est un faisceau lumineux adressant la transition atomique, elle amène donc une perte de cohérence par émission spontanée. Il faut alors appliquer une technique qui minimise cette décohérence expérimentalement, comme nous allons voir par la suite.

On peut alors faire le parallèle avec la description du système de l'Eq. 1.24. L'observable que l'on souhaite mesurer est l'observable  $J_z$  de l'ensemble cohérent de spins  $J$ . L'hamiltonien du système s'écrit  $H_J = \hbar\omega_0 J_z$ . La condition  $[H_J, J_z] = 0$  est directement vérifiée.

Ce système est mesuré indirectement grâce à l'interaction avec un autre système de spins  $\mathcal{M}$ , décrit par les opérateurs de spin  $\mathcal{M}_x$ ,  $\mathcal{M}_y$ ,  $\mathcal{M}_z$ , où l'on choisit de mesurer  $\mathcal{M}_x$ . Si l'on prend l'hamiltonien d'interaction [Kuzmich et al., 1998] :

$$H_{\mathcal{J}\mathcal{M}} = \hbar g J_z \mathcal{M}_z, \quad (2.18)$$

les conditions  $[H_{\mathcal{J}\mathcal{M}}, J_z] = 0$  et  $[H_{\mathcal{J}\mathcal{M}}, \mathcal{M}_x] \neq 0$  sont vérifiés puisque  $[\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_z] \neq 0$ . On peut donc utiliser cet hamiltonien d'interaction pour réaliser une mesure non destructive.

Par la suite, le système  $J$  sera l'ensemble atomique et la sonde  $\mathcal{M}$  sera composée de deux modes d'un champ électromagnétique.

Après la description théorique d'une mesure généralisée d'un état cohérent de spins, nous avons cité les critères pour que la mesure soit non destructive, avant de l'appliquer à notre système de pseudo-spins mesuré grâce à un faisceau optique.

Nous allons maintenant décrire expérimentalement cette mesure.

## 2.2 Mesure non destructive d'un ensemble d'atomes

Nous avons vu qu'une mesure non destructive sur un système quantique est réalisable sous certaines conditions. L'ensemble atomique est défini comme un ensemble cohérent de spins, dont l'énergie peut être mesurée par l'observable  $J_z$ . Expérimentalement, la mesure non destructive sur l'ensemble d'atomes est basée sur une technique de spectroscopie par modulation de fréquence (spectroscopie FM). Cette mesure est indirecte puisque l'on mesure un faisceau optique ayant interagi avec les atomes, ou plus précisément on mesure le déphasage du faisceau induit par les atomes peuplant l'un ou l'autre des états hyperfins.

Après avoir présenté le principe et les caractéristiques d'une spectroscopie FM, nous allons

calculer le déphasage du faisceau attendu lors d'une telle mesure sur les atomes. Puis nous allons réaliser et caractériser expérimentalement cette mesure non destructive sur les atomes afin de mesurer directement la différence de population de l'ensemble atomique.

Nous allons ensuite voir comment optimiser et améliorer cette mesure, où la quantité importante est le rapport signal à bruit à décohérence fixée. En ajustant la taille du faisceau sur celle du nuage d'atomes, nous pouvons ainsi augmenter d'un facteur 5 cette quantité, ce qui est une amélioration majeure.

### 2.2.1 Spectroscopie par modulation de fréquence

#### Principe

La spectroscopie FM repose sur la modulation en phase d'un faisceau qui va interagir avec un milieu dispersif. Les bandes latérales sont proches de résonance du milieu alors que la porteuse reste loin de résonance. Sans milieu dispersif, la situation est symétrique et on obtient un signal nul après démodulation. Alors qu'avec le déphasage par le milieu sur les bandes latérales, on détecte un battement avec une amplitude qui dépend de l'interaction entre le milieu et les bandes latérales.

Ainsi, la porteuse joue le rôle de référence de phase et les bandes latérales véhiculent l'information. Cette information est transformée en modulation d'amplitude après détection et en signal dispersif après démodulation.

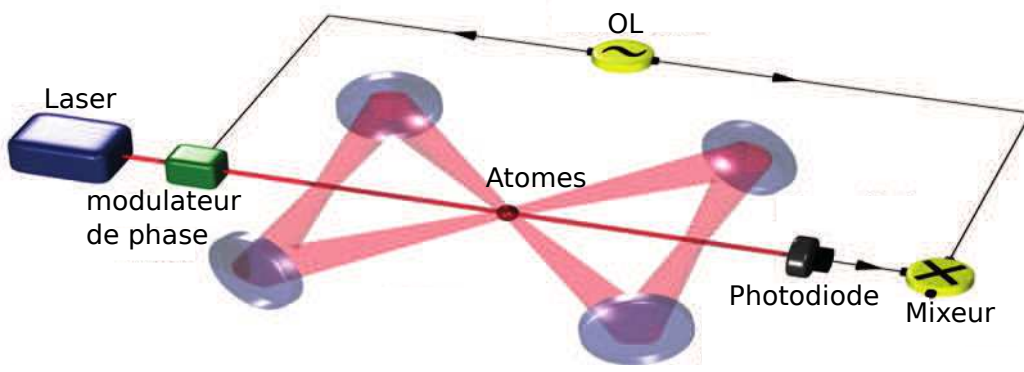
Pour détecter le nombre d'atomes dans les deux niveaux hyperfins des atomes, on place chaque bande latérale proche de résonance d'un des deux niveaux : elles vont chacune être déphasée par les atomes dans l'état correspondant. Après démodulation, les battements des bandes latérales avec la porteuse vont donner un signal proportionnel à la différence de population entre les deux états hyperfins.

Un schéma de principe de cette technique est représentée sur la Fig. 2.1. Un modulateur de phase de fréquence de modulation  $\Omega$  permet de créer deux bandes latérales autour de la porteuse de fréquence  $\omega$ . En passant à travers le nuage d'atomes, chaque bande latérale va être déphasée par les atomes peuplant l'état hyperfin correspondant. Après détection sur une photodiode, on démodule le signal avec l'oscillateur local de fréquence  $\Omega$  pour obtenir le signal dispersif proportionnel à l'observable  $J_z$ . La porteuse n'interagit pas avec les atomes, et sera la référence de phase.

La source de décohérence dominante pour cette technique est l'émission spontanée par les bandes latérales, que l'on va essayer de minimiser pour obtenir une mesure la moins destructive possible.

La séparation du faisceau se faisant spectralement, la porteuse et les bandes latérales empruntent le même chemin optique. Cette méthode est donc robuste aux fluctuations de chemin optique, contrairement à un interféromètre de Mach-Zehnder par exemple. Il est possible de montrer que l'erreur due à des fluctuations de chemin optique dans notre cas est de sept ordres de grandeurs plus bas que pour un interféromètre de Mach-Zehnder classique [Bernon et al., 2011] : ces fluctuations sont donc complètement négligeables.

Afin d'étudier plus en profondeur cette technique de mesure qui va être utilisée pour une partie des résultats de cette thèse, nous allons calculer le rapport signal à bruit de cette mesure, ainsi que le déphasage induit par les atomes sur le faisceau. Nous allons alors pouvoir donner l'expression des paramètres d'une mesure non destructive décrits dans la section précédente pour cette technique.



**Figure 2.1** – Schéma de principe d'une mesure par spectroscopie de modulation de fréquence sur les atomes. La mesure des atomes se fait grâce à la détection d'un faisceau optique ayant interagi avec l'ensemble atomique.

Le laser de fréquence  $\omega$  est modulé en phase pour créer deux bandes latérales à la fréquence de modulation  $\Omega$ . Après interaction avec les atomes et détection sur une photodiode, le signal est démodulé avec l'oscillateur local de fréquence  $\Omega$  et fournit le signal atomique.

### Bruit de détection

Afin d'obtenir le rapport signal à bruit et l'opérateur de mesure liés à ce type de détection, il faut formuler le signal en sortie de la photodiode ainsi que le bruit associé.

Si l'on module le faisceau sonde de pulsation  $\omega$  à une fréquence  $\Omega$  avec une profondeur de modulation  $\beta$ , le champ électrique s'écrit :

$$E = E_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos(\omega t + k\Omega t), \quad (2.19)$$

où  $J_k$  représente la fonction de Bessel du premier type d'ordre  $k$ . Dans l'approximation d'une faible modulation ( $\beta \ll 1$ ), on ne garde que les premiers ordres  $k = -1, 0, 1$  du développement, et les fonctions de Bessel s'écrivent  $J_{-1}(\beta) \simeq -\beta$ ,  $J_0(\beta) \simeq 0$  et  $J_1(\beta) \simeq \beta$ . La porteuse correspond à l'ordre  $k = 0$  et les deux bandes latérales à  $k = \pm 1$ . On notera  $\phi_{-1}$ ,  $\phi_0$  et  $\phi_1$  les déphasages acquis par les trois composantes pendant l'interaction avec les atomes (on négligera ici les autres sources de déphasage lors de la propagation du faisceau).

Le photocourant après la mesure sur la photodiode s'écrit :

$$i_{\text{det}} = 2 \frac{\eta_q e}{\hbar \omega} P_p \left\{ 1 + \beta \cos \left[ \Omega \left( t - \frac{L}{c} \right) \right] \Delta\Phi_+ + \beta \sin \left[ \Omega \left( t - \frac{L}{c} \right) \right] \Delta\Phi_- \right\}, \quad (2.20)$$

où  $L$  est la distance entre le modulateur et le détecteur,  $P_p$  la puissance optique de la porteuse et  $\eta = \frac{\eta_q e}{\hbar \omega}$  est la sensibilité de la photodiode avec  $\eta_q$  l'efficacité quantique de la photodiode. Les termes de déphasages  $\Delta\Phi_+$  et  $\Delta\Phi_-$  sont définis par :

$$\Delta\Phi_+ = \cos(\phi_1 - \phi_0) - \cos(\phi_0 - \phi_{-1}), \quad (2.21)$$

$$\Delta\Phi_- = \sin(\phi_1 - \phi_0) - \sin(\phi_0 - \phi_{-1}). \quad (2.22)$$

Le signal est ensuite démodulé avec l'oscillateur local sinusoïdal  $E_{\text{dem}} \sim \sin(\Omega t + \phi_{\text{dem}})$ . La phase  $\phi_{\text{dem}}$  est choisie de telle manière à satisfaire  $\phi_{\text{dem}} = -\Omega L/c$  et le signal après démodulation s'écrit :

$$S = 2 \frac{\eta_q e}{\hbar \omega} \sqrt{P_p P_{bl}} \Delta\Phi_-, \quad (2.23)$$

avec  $P_{bl} = \beta^2 P_p$ .

Dans le cas de déphasages faibles  $\phi_k \ll 1$ ,  $k = -1, 0, 1$ , les Eqs. 2.21 et 2.22 se réécrivent :

$$\Delta\Phi_+ = \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_{-1})(2\phi_0 - \phi_1 - \phi_{-1}), \quad (2.24)$$

$$\Delta\Phi_- = \phi_1 + \phi_{-1} - 2\phi. \quad (2.25)$$

Si de plus les atomes sont tous dans le même état hyperfin  $|F = 2\rangle$ , seule la bande latérale d'ordre  $k = 1$  est déphasée; on a donc  $\Delta\Phi_- = \phi_1 = N_{at}\varphi_{max}$  où  $\varphi$  est le déphasage dû à un seul atome. Dans ce cas, le signal est maximal et vaut :

$$S = 2 \frac{\eta_q e}{\hbar\omega} \sqrt{P_p P_{bl}} N_{at} \varphi_{max}. \quad (2.26)$$

Si le bruit de détection est dominé par le bruit de photons de la porteuse, le bruit de courant après la détection s'écrit :

$$N = \sqrt{2e \frac{\eta_q e}{\hbar\omega} \frac{P_c}{\Delta t}}, \quad (2.27)$$

où  $\Delta t$  est le temps de détection. On peut donc maintenant calculer le rapport signal à bruit (SNR). En termes de nombre de photons  $N_{bl}$  dans une bande latérale, le rapport SNR s'écrit<sup>2</sup>

$$\text{SNR} = \sqrt{2\eta_q N_{bl} N_{at}} |\varphi|, \quad (2.28)$$

avec  $\hbar\omega N_{bl} = P_{bl} \Delta t$ . Pour un grand nombre d'atomes, la détection est donc limitée au bruit de photons de la bande latérale.

### Opérateur de mesure

L'opérateur de mesure  $M_{n_0}$ , et notamment son incertitude  $\sigma_{det}$ , peuvent être directement calculés à partir du rapport signal à bruit. Considérant une distribution gaussienne, l'opérateur de mesure a la même forme que dans l'Eq 2.6 :

$$M_{n_0} = \left(2\pi\sigma_{det}^2\right)^{-1/4} e^{-\frac{1}{4\sigma_{det}^2}(J_z - n_0)^2}, \quad (2.29)$$

avec l'incertitude de mesure s'exprimant :

$$\sigma_{det} = \frac{J}{\text{SNR}} = \frac{N_{at}}{2\text{SNR}} = \frac{1}{2\sqrt{2\eta_q N_{bl}} |\varphi|}. \quad (2.30)$$

Tous les résultats concernant la mesure d'un état cohérent de spins décrits dans la Sec. 2.1.3 sont donc valides pour notre mesure tant que la détection est limitée par le bruit de photons du faisceau de mesure. Le modulateur de phase et la photodiode, ainsi que l'électronique

---

2. De manière générale, le rapport signal à bruit est proportionnel à

$$\text{SNR} \sim \frac{\sqrt{N_{bl} N_p}}{\sqrt{N_{bl} + N_p + N_{elec}}},$$

où  $N_{elec}$  est le bruit électronique du photodétecteur en nombre de photons équivalent. Nous faisons l'approximation ici que la puissance dans les bandes latérales est négligeable ( $N_{bl} \ll N_p$ ) et que la détection est limitée au bruit de photon ( $N_{elec} \ll N_p$ ), on obtient  $\text{SNR} \sim \sqrt{N_{bl}}$ .



autour de ces éléments devront être caractérisés en détails afin d'obtenir une détection au bruit de photons.

Pour un état cohérent de spins, le facteur de compression  $\xi^2$  est directement lié à la force de la mesure  $\kappa$  (voir Eq. 2.12). L'évolution de cet état après la mesure dépend donc du seul facteur  $\xi^2$  défini par :

$$\xi^2 = \frac{1}{1 + \kappa^2}. \quad (2.31)$$

Pour la mesure utilisée ici, la force de la mesure s'écrit :

$$\kappa = \frac{\sigma_J}{\sigma_{det}} = \sqrt{2\eta_q N_{bl} N_{at}} |\varphi|. \quad (2.32)$$

Il dépend donc du carré du nombre de photons dans une bande latérale et du carré du nombre d'atomes mesurés, ainsi que du déphasage transmis par les atomes au faisceau sonde. Si l'on veut une mesure plus précise, on peut utiliser une photodiode avec une efficacité quantique plus haute, augmenter le nombre de photons ou d'atomes dans le système, où amener un plus grand déphasage sur le faisceau sonde en s'approchant de résonance.

Mais pour notre étude, le caractère non destructif de la mesure est autant important que la précision : si par exemple on augmente le nombre de photons dans les bandes latérales, on va avoir plus de décohérence par émission spontanée donc plus de destructivité sur l'ensemble atomique. On va donc chercher à augmenter la précision pour une destructivité donnée, c'est-à-dire en prenant en compte les sources de décohérence du système. Dans la section suivante, nous allons donc formuler le déphasage par les atomes sur la sonde, ainsi que l'émission spontanée.

### Mesure dispersive

Nous allons exprimer le déphasage sur le faisceau sonde par les atomes et l'émission spontanée de cette interaction.

Le déphasage dû à un atome s'exprime de manière générale :

$$\varphi = \frac{\sigma}{\mathcal{A}}, \quad (2.33)$$

où  $\mathcal{A} = \pi w^2$  est l'aire de la section du faisceau à la position des atomes avec  $w$  la taille du faisceau, et  $\sigma = \sigma_0 \mathcal{L}(\Delta)$  est la section efficace de diffusion dépendant de la section de diffusion à résonance  $\sigma_0 = 3\lambda_0^2/2\pi$  et de la fonction spectrale  $\mathcal{L}(\Delta)$ .

Pour une interaction faible avec le faisceau, la diffusion élastique se modélise par une fonction spectrale de Lorentz telle que :

$$\mathcal{L}(\Delta) = -\frac{2\Delta\Gamma}{\Gamma^2 + 4\Delta^2}, \quad (2.34)$$

où  $\Delta = \omega - \omega_0$  est le désaccord entre le laser de fréquence  $\omega$  et la transition de résonance  $\omega_0$ , et  $\Gamma$  la largeur naturelle de la transition. Pour un désaccord largement supérieur à la largeur de la transition  $\Delta \gg \Gamma$ , on obtient donc l'expression suivante :

$$\varphi = -\frac{3\lambda_0^2}{2\pi^2 w^2} \frac{2\Delta\Gamma}{\Gamma^2 + 4\Delta^2} \approx -\frac{3\lambda_0^2}{2\pi^2 w^2} \frac{\Gamma}{2\Delta}. \quad (2.35)$$

Un atome à deux niveaux en interaction avec un champ monochromatique est décrit par les équations de Bloch optiques. Dans ce cadre, et en faisant l'approximation de l'onde

tournante, l'émission spontanée est proportionnelle à la population de l'état excité  $\rho_{ee}$  [Steck, 2001] :

$$\rho_{ee} = \frac{\Omega^2}{\Gamma^2 + 4\Delta^2}. \quad (2.36)$$

Dans l'approximation  $\Delta \gg \Gamma$ , on obtient donc :

$$\rho_{ee} \approx \frac{\Omega^2}{4\Delta^2} \approx \frac{I}{2I_{sat}} \frac{\Gamma^2}{4\Delta^2}, \quad (2.37)$$

où  $\Omega$  est la fréquence de Rabi et  $I_{sat}$  est l'intensité de saturation définie comme  $I/I_{sat} = 2\Omega^2/\Gamma^2$ . L'émission spontanée mène à la décohérence de l'ensemble atomique avec une décroissance de l'état atomique  $\Gamma\rho_{ee}$ .

D'après ces équations, le déphasage est proportionnel à  $1/\Delta$  alors que l'émission spontanée est proportionnelle à  $1/\Delta^2$ . Nous voyons donc que le désaccord  $\Delta$  peut être un paramètre pour améliorer la mesure.

Mais augmenter le désaccord n'augmente pas la précision de la mesure pour une destructivité fixe. En effet, le rapport signal à bruit dépend de  $SNR = \sqrt{N_{bl}}N_{at}\varphi$ . Si l'on diminue par exemple le désaccord par un facteur 2 ( $\Delta \rightarrow \Delta/2$ ), la même destructivité est atteinte pour 4 fois plus de photons dans les bandes latérales  $N_{bl} \rightarrow 4N_{bl}$  : pour ces deux changements le rapport signal à bruit n'augmente pas. On en conclut que tant que la condition  $\Delta \gg \Gamma$  est vérifiée, l'amélioration de la mesure est indépendante du désaccord.

Par la suite, nous allons changer la taille du faisceau pour améliorer la mesure à une destructivité donnée. En effet, la taille du faisceau sonde doit correspondre à la taille du nuage pour que tous les photons présents contribuent au signal atomique.

## 2.2.2 Réalisation expérimentale

Nous allons maintenant démontrer la réalisation expérimentale de la mesure non destructive sur les atomes. Le schéma expérimental de la spectroscopie FM est dans un premier temps expliqué, où un grand intérêt a été porté aux différents éléments afin d'obtenir une détection au bruit de photons du faisceau sonde. Pour ce type de bruit, la caractérisation théorique de la mesure a été développée dans la section précédente.

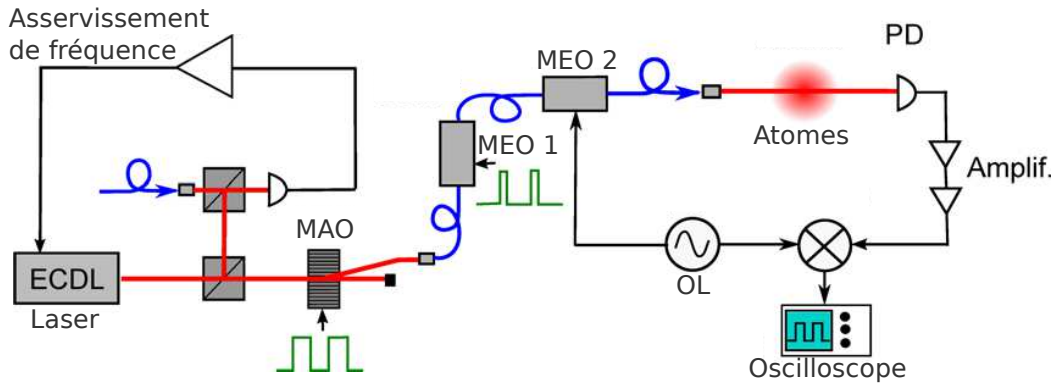
Nous allons ensuite appliquer ce set-up expérimental à la mesure de la différence de population atomique, où les paramètres du faisceau sonde vont être ajustés pour mesurer directement l'observable  $J_z$ . Nous allons ensuite étudier la performance de cette méthode et ses limitations, notamment les limitations induites par le déplacement lumineux de la sonde qui peut être compensé et par le brassage des états par l'asymétrie de l'émission spontanée.

La dernière section portera sur l'amélioration de la mesure, c'est-à-dire augmenter le rapport signal à bruit pour la même destructivité sur les atomes. Cette amélioration permet des mesures faibles non destructives successives pendant un temps plus long. Avec cette mesure améliorée, nous avons démontré une meilleure stabilité pour une horloge atomique micro-onde basée sur ces mesures faibles corrélées suivies de rétroactions, comme décrit dans le Chap.4.

### Schéma expérimental

Le schéma expérimental utilisé est présenté sur la Fig. 2.2. Il est basé sur le schéma de principe de la Fig. 2.1. Nous allons décrire dans ce paragraphe les éléments importants du montage.

La source laser est une diode laser montée en cavité étendue [Baillard et al., 2006] de largeur spectrale de 300 kHz. Elle est asservie par battement avec un laser maître, utilisé



**Figure 2.2** – Schéma expérimental de la mesure non destructive. Le laser sonde est tout d'abord asservi en fréquence sur la transition atomique par battement avec un laser maître (à gauche). Il est ensuite envoyé dans un modulateur acousto-optique (MAO) et dans un premier modulateur d'amplitude électro-optique (MEO 1) pour créer des pulses de durées différentes dépendant de l'application. Le faisceau sonde est ensuite modulé en phase par un modulateur de phase électro-optique (MEO 2), avant d'être envoyé sur les atomes et détecté sur une photodiode (PD) (à droite). Le signal est ensuite amplifié puis démodulé avec l'oscillateur local (OL) afin de fournir le signal dispersif propre à une spectroscopie par modulation de fréquence.

comme laser repompeur pour le refroidissement d'atomes, lui-même asservi par absorption saturée sur le croisement de raie  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1, 2\rangle$  (voir Chap. 3).

Le battement est détecté sur une photodiode rapide (G4176-03, Hamamatsu) suivie de deux amplificateurs (LCA-0408, Miteq) avant d'être envoyé à un détecteur de phase haute fréquence (ADF4108, Analog Devices) fournissant un signal d'erreur [Appel et al., 2009a].

Le signal est intégré une première fois pour la correction sur le courant de la diode, puis une seconde fois pour la correction basse fréquence sur l'actuateur piezo-électrique contrôlant la longueur de la cavité du laser.

Le laser est limité au bruit de photons pour une grande plage de puissances et de fréquences autour de la porteuse. Pour des fréquences multiples de l'intervalle spectral libre de la cavité laser à 1.5 GHz, le laser présente des oscillations résiduelles et n'est donc pas parfaitement monomode. Pour ces fréquences, le bruit du laser est limité par un bruit technique qui est quadratique si l'on trace la densité spectrale de puissance de bruit en fonction de la puissance optique.

Nous nous plaçons pour la suite dans une région pour laquelle le bruit du laser est limité au bruit de photons, pour obtenir une détection au bruit de photons.

Le modulateur de phase doit pouvoir créer des bandes latérales à plusieurs GHz. On utilise pour cela un modulateur de phase électro-optique de modèle NIR-MPX800-LN-05 de chez Photline Technologies, noté MEO 1 sur la figure, qui permet de moduler le faisceau autour d'une fréquence de 3.4 GHz<sup>3</sup>.

La modulation de phase d'un faisceau peut s'accompagner d'une modulation d'amplitude résiduelle qui peut être limitante dans le cas d'une spectroscopie FM [Gehertz et al., 1985]. Cette modulation d'amplitude peut grandement augmenter la sensibilité de la détection aux fluctuations de longueur du chemin optique et peut être limitante pour la mesure de faibles

3. La transition entre les deux niveaux hyperfins est de 6.8 GHz. Idéalement, les bandes latérales sont placées proches de résonance des niveaux, et la porteuse loin de résonance. La situation étudiée ici et expliqué en détails plus loin place la porteuse entre les deux niveaux et les bandes latérales proches des niveaux : la fréquence de modulation sera alors égale à  $6.8/2 = 3.4$  GHz.

déphasages. Elle a été calculée en détails dans [Bernon et al., 2011] pour une fréquence de modulation de 2.4 GHz et une puissance optique de 629  $\mu$ W. L'amplitude résiduelle est de 1 % quelle que soit la puissance RF appliquée au modulateur, elle est donc négligeable.

L'oscillateur local utilisé pour générer la fréquence de modulation appliqué au modulateur (modèle 68017C, Anritsu) est de très bonne qualité et on le considère par la suite comme parfait. Aucun bruit ne sera alors ajouté après la démodulation.

Afin de réaliser la détection non destructive dans le régime de mesure faible, des impulsions courtes du faisceau sonde vont être envoyées sur l'ensemble atomique pour limiter la décohérence par émission spontanée. Après la mesure faible, l'état atomique n'est que légèrement perturbé et on peut alors appliquer une rétroaction. La décroissance rapide de la cohérence de l'état pendant l'interaction avec le faisceau sonde nous impose des pulses très courts — de l'ordre de 60 ns si l'on veut appliquer une séquence de mesures successives.

Le temps des impulsions dépend néanmoins des applications, donc nous utilisons deux modulateurs d'amplitude avec des temps de montée différents. Un premier modulateur acousto-optique (MAO) permet des impulsions supérieures au temps de montée de 250 ns. Et des pulses plus courts de l'ordre de 10 ns se réalisent avec un modulateur d'amplitude électro-optique (MEO 1) de temps de montée 100 ps (modèle NIR-MX800-LN-20, Photline Technologies). Ce dernier comporte deux entrées : une entrée RF permettant de déterminer l'allure des pulses et une entrée DC changeant le chemin optique d'un des bras du modulateur et contrôlant ainsi les interférences en sortie. Dans le cas de pulse très courts, le MAO est alors un moyen supplémentaire pour atténuer le faisceau optique et ainsi éviter la lumière parasite sur les atomes.

La photodiode est l'instrument central de la mesure. Afin d'avoir une mesure au bruit de photons, elle ne doit pas amener de bruit technique pour une large bande passante (typiquement pour la fréquence de modulation à 3.4 GHz). De telles caractéristiques sont contraignantes et peu de constructeurs proposent ce genre de photodiode.

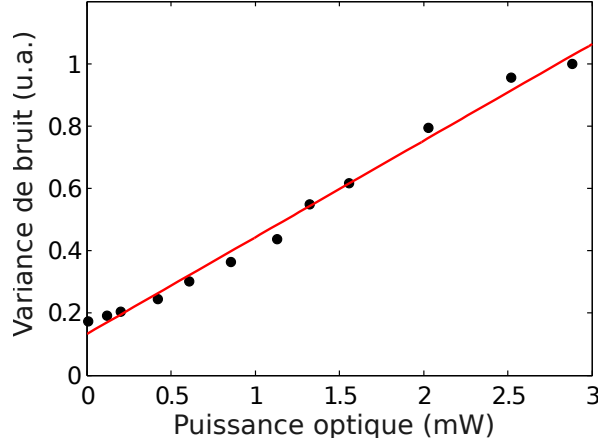
Pour des photodiodes montées en transimpédance, une grande résistance de transimpédance permet d'avoir une grande bande passante au détriment d'un gain faible et pour un bruit Johnson plus haut ; ou inversement un bruit plus bas mais avec une bande passante réduite.

Un bon compromis a été trouvé en utilisant la photodiode 1591NF de New Focus, en ôtant le collimateur de fibre en entrée. Cette photodiode a une bande passante minimum de 4.5 GHz sur une plage de longueur d'onde entre 450 et 870 nm, et une sensibilité de 0.4 A/W à 780 nm.

Avec tous ces éléments, la variance du bruit de la photodiode en fonction de la puissance optique dans la sonde est donnée sur la Fig. 2.3. On observe que la dépendance est linéaire comme pour une détection limitée au bruit de photons où  $\sigma_{det} \propto N_{bl}$ . La fréquence de modulation est ici  $\Omega = 3.852$  GHz et le signal est mesuré sur un analyseur de spectre pour une bande passante de résolution (Resolution Bandwidth RBW) de 300 kHz. La limite pour laquelle le bruit de photons est égal au bruit de détection est de 430  $\mu$ W.

La plupart des résultats développés après, et notamment les résultats du Chap. 4 sont au-dessus de cette limite pour laquelle la détection est limitée au bruit de photons.

Nous avons développé dans cette partie les caractéristiques techniques du système de spectroscopie FM pour la mesure. Connaissant les paramètres théoriques d'une mesure par spectroscopie, notamment le rapport signal à bruit, l'émission spontanée induite par la sonde et les critères de non-destructivité, nous pouvons désormais appliquer cette mesure sur les



**Figure 2.3** – Variance de bruit de la photodiode pour une fréquence de modulation de  $\Omega = 3.852 \text{ GHz}$ . La variance de bruit de la photodiode dépend linéairement de la puissance optique dans le faisceau sonde, donc la détection est limitée au bruit de photons. La limite du bruit de photons pour laquelle le bruit technique égale le bruit de photons correspond à une puissance optique de  $430 \text{ }\mu\text{W}$ .

atomes afin de mesurer la différence de population atomique  $J_z$ .

### Mesure de la différence de population atomique

Le nuage atomique est composé d'atomes de  $^{87}\text{Rb}$ , qui sont refroidis et tous préparés dans le sous-niveau  $m_F = 0$  de l'état hyperfin  $|F = 1\rangle$  du niveau fondamental  $5S_{1/2}$  (voir Chap. 3). Pour ces deux niveaux hyperfins  $|F = 1\rangle$  et  $|F = 2\rangle$  séparés d'une fréquence de  $6.834682 \text{ GHz}$ , qui est aussi appelée transition d'horloge, l'atome est modélisé par un système à deux niveaux. Les états excités correspondent au niveau  $5P_{3/2}$  de la ligne D2, et sont séparés de  $780 \text{ nm}$  (voir Annexe A). Les niveaux d'énergie sont modélisés sur la Fig. 2.4, où l'axe des ordonnées représente les fréquences.

On veut mesurer la différence de population entre les deux niveaux hyperfins. On va donc placer les bandes latérales proches de résonance des niveaux, et par symétrie la porteuse sera donc entre les deux niveaux, comme sur la Fig. 2.4, où  $\Omega$  est la fréquence de modulation et  $\Delta_{FF'}$  le désaccord des bandes latérales avec les transitions  $|F\rangle \rightarrow |F'\rangle$ .

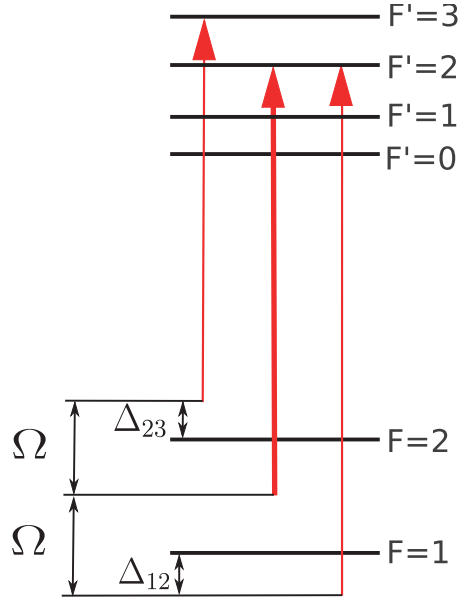
Pour ne pas être limité par l'émission spontanée due à la porteuse, la gamme de la fréquence de modulation est typiquement entre  $2.5 \text{ GHz}$  et  $4.5 \text{ GHz}$  pour laquelle la porteuse reste dans une région proche du milieu de la transition, loin de résonance.

Le couplage des bandes latérales avec les niveaux atomiques est proportionnel aux déphasages  $\Delta_{FF'}$ . Ainsi on note  $S_F$  le coefficient de couplage entre le niveau  $F = 1, 2$  correspondant au niveau mesuré et tous les niveaux excités. Le couplage s'écrit :

$$S_F = \sum_{F'} \frac{\Gamma \Delta_{FF'}}{\Delta_{FF'}^2 + \Gamma^2 (1 + I/I_{\text{sat}})} S_{FF'}, \quad (2.38)$$

où  $S_{FF'}$  est le coefficient de couplage pour les transitions uniquement polarisées  $\pi$  partant des sous-niveaux  $m_F = 0$ ,  $\Gamma$  est la largeur de la transition et  $I_{\text{sat}} = 2.503 \text{ mW/cm}^2$  est l'intensité de saturation des transitions  $|F\rangle \rightarrow |F'\rangle$ .

Les différents couplages  $S_{FF'}$  [Steck, 2001] sont répertoriés dans le Tab. 2.1, où les couplages  $S_{11}$  et  $S_{22}$  sont nuls par interférence destructive de l'excitation, et les couplages  $S_{13}$  et



**Figure 2.4** – Position des composantes du faisceau sonde par rapport aux transitions atomiques. La ligne D2 des atomes de  $^{87}\text{Rb}$  est représentée, où les états excités sont notés  $F'$  et les états fondamentaux  $F$ . Les bandes latérales (traits fins rouges) sont placées proches de chaque niveau hyperfin avec des désaccords notés  $\Delta_{FF'}$  et à l'extérieur de la transition. La porteuse (trait épais rouge) est loin de résonance et espacée de la fréquence de modulation  $\Omega$  des bandes latérales.

$S_{10}$	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$	$S_{20}$	$S_{21}$	$S_{22}$	$S_{23}$
$1/6$	$0$	$1/6$	$0$	$0$	$1/30$	$0$	$3/10$

**Table 2.1** – Coefficients de couplage pour les transitions uniquement polarisées  $\pi$  et partant des sous-niveaux  $m_F = 0$ . Les couplages  $S_{11}$  et  $S_{22}$  sont nuls par interférence destructive de l'excitation, et les couplages  $S_{13}$  et  $S_{20}$  sont interdits par les règles de sélection.

$S_{20}$  sont interdits par les règles de sélection.

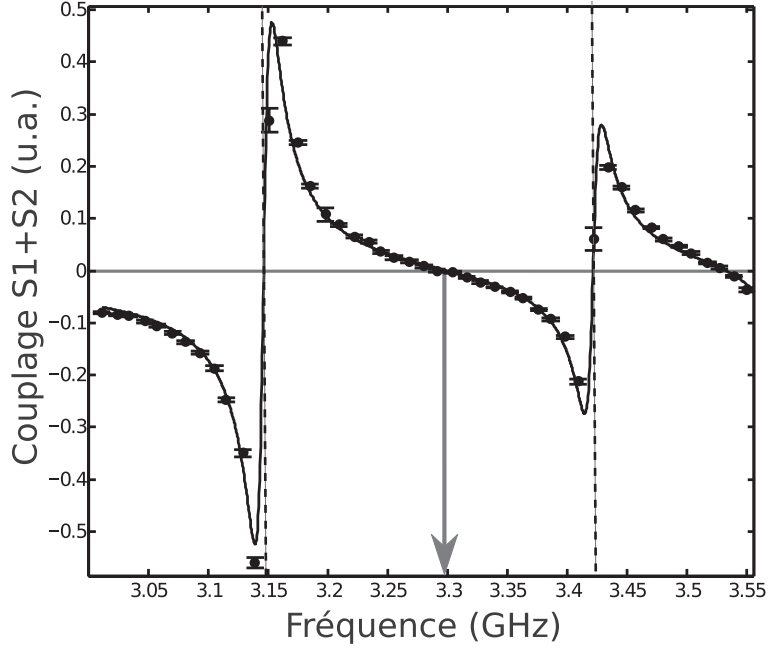
Le déphasage du faisceau sonde par les atomes s'écrit donc [Oblak et al., 2005, Vanderbruggen et al., 2011] :

$$\varphi = \frac{\lambda_0}{2\pi\mathcal{A}} (N_1 S_1 + N_2 S_2), \quad (2.39)$$

avec  $N_1$  et  $N_2$  le nombre d'atomes dans  $|F = 1\rangle$  et  $|F = 2\rangle$  respectivement, et  $\mathcal{A}$  la section du faisceau sur le nuage d'atomes.

Si l'on veut mesurer directement la différence de population ( $N_1 - N_2$ ), il faut alors vérifier la condition  $S_1 = -S_2$ . Cette condition peut être remplie en changeant séquentiellement la fréquence de modulation puis les désaccords  $\Delta_{FF'}$ . Par exemple, si l'on choisit la fréquence de modulation  $\Omega = 3.4213$  GHz, il est possible de trouver les désaccords  $\Delta_{1F'}$  et  $\Delta_{2F'}$  tels que le signal après démodulation  $V_{out} \propto \varphi$  vérifie  $V_{out} \propto (N_1 - N_2) \propto J_z$ .

Pour cela, en pratique, on bouge la position de la porteuse et donc des bandes latérales par rapport à la transition d'horloge pour une fréquence de modulation fixée. En partant d'un schéma où les deux bandes latérales sont en dehors de la transition, comme sur la Fig. 2.4, une bande latérale va se rapprocher (resp. s'éloigner) de la résonance alors que l'autre va s'en éloigner (resp. se rapprocher). On obtient alors un signal dispersif de la Fig. 2.5, où la



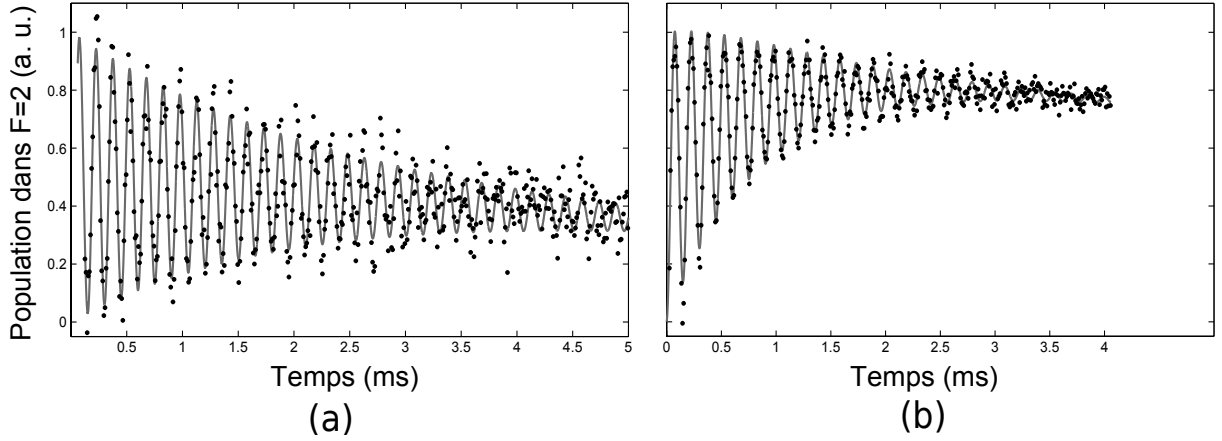
**Figure 2.5** – Signal dispersif après démodulation proportionnel aux couplages  $S_1 + S_2$  en fonction de la position de la porteuse. Le signal donne directement une mesure de  $J_z$  lorsque  $S_1 + S_2 = 0$  pour une fréquence de 3.291 GHz ici. Les lignes pointillées verticales correspondent aux divergences lorsque les bandes latérales sont en résonance avec les transitions  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  et  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ .

différence de couplage  $S_1 + S_2$  est représentée en fonction de la position de la porteuse par rapport à la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ .

On voit que le signal s'annule pour une position de la porteuse par rapport au niveau  $|F = 1\rangle$  de 3.291 GHz. C'est la position pour laquelle la condition  $V_{out} \propto (N_1 - N_2)$  est vérifiée.

Les divergences représentées par les lignes pointillées verticales sur la figure sont les positions pour lesquelles les bandes latérales sont en résonance avec les transitions  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  et  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . En partant de la position de signal nul et en allant vers des fréquences inférieures, le signal est positif jusqu'à ce que  $\Delta_{23} = 0$ , où la bande latérale entre en résonance avec la transition (ligne pointillée à 3.15 GHz sur la figure). Les deux contributions sont ensuite négatives et donnent donc un signal négatif. Pour des fréquences supérieures à 3.291 GHz, la situation est inverse et on observe une divergence où l'autre bande latérale entre en résonance avec l'état  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ .

Avec cette configuration, nous pouvons mesurer l'observable  $J_z$  — et donc également la projection de la phase lors d'un cycle d'horloge — avec peu d'émission spontanée, donc peu de destructivité. Nous allons par la suite étudier en détails la destructivité induite par la sonde et voir comment la diminuer encore davantage. Il est donc à noter que ce schéma n'est pas celui adopté pour les principaux résultats de cette thèse, le schéma définitif est donné dans la suite de cette section où les limitations sont prises en compte et sont réduites. Ce schéma est utilisé ici pour fixer les idées, et a été adopté lors des premiers résultats de l'expérience [Bernon et al., 2011] [Vanderbruggen et al., 2011] [Vanderbruggen et al., 2013] [Vanderbruggen et al., 2014].



**Figure 2.6** – Mesure en temps réel des oscillations de Rabi. (a) Oscillations de Rabi pour un désaccord de  $7.9\Gamma$  de la bande latérale par rapport à la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . (b) Oscillations de Rabi pour un désaccord de  $0.8\Gamma$ . L'état atomique est mesuré toutes les  $10 \mu\text{s}$  avec une impulsion de durée de  $1.25 \mu\text{s}$ .

### Oscillations de Rabi en temps réel

Pour valider le caractère non destructif de la mesure, nous pouvons mesurer des oscillations de Rabi en temps réel avec la mesure décrite dans la section précédente. Nous allons ensuite comparer ces résultats avec ceux d'une mesure améliorée dans la suite de ce chapitre.

Pour manipuler de manière cohérente la transition d'horloge  $|F = 1\rangle \rightarrow |F = 2\rangle$  à 6.835 GHz, nous envoyons une radiation micro-onde via une antenne radio-fréquence (RF). Le pseudo-spin tourne autour de la sphère selon un axe déterminé par la phase de la micro-onde. Ce signal est dérivé de la chaîne de fréquence basée sur un quartz de fréquence 100 MHz et de bruit de  $-113 \text{ dBc/Hz}$  à  $1 \text{ Hz}$ <sup>4</sup>. Un signal à 7 GHz est obtenu à partir des harmoniques du quartz et est ensuite soustrait pour obtenir 6.835 GHz.

En partant d'un état cohérent de spins dans  $|F = 1, m_F = 0\rangle$ , la radiation micro-onde à 6.8 GHz est émise en continu et le pseudo-spin tourne autour de l'axe  $y$  en continu. La différence de population  $J_z$  va ainsi osciller au cours du temps.

Il est à noter que la photodiode utilisée ici n'est pas celle décrite dans la Sec. 2.2.2, c'est une photodiode de modèle HFD3180-203 de chez Finisar montée en circuit transimpédance et décrite en détails dans [Vanderbruggen, 2012]. Cette photodiode ne permettait pas une mesure au bruit de photon pour une large gamme de fréquence et de puissance optique, d'où l'utilisation du modèle de chez New Focus.

Pour voir l'influence de la sonde non destructive, les oscillations ont été mesurées pour deux positions de la bande latérale proche du niveau  $|F = 2\rangle$ , avec un désaccord de  $\Delta_{23} = 0.8\Gamma$  puis de  $\Delta_{23} = 7.9\Gamma$ . Ces résultats sont présentés sur la Fig. 2.6 où chaque point est le résultat d'une mesure faible non destructive d'impulsion  $1.25 \mu\text{s}$  du niveau  $|F = 2\rangle$ . Le temps entre chaque mesure est de  $10 \mu\text{s}$ .

Pour un désaccord de  $\Delta_{23} = 7.9\Gamma$  (Fig. 2.6(a)), on observe bien des oscillations de la population atomique avec une origine à zéro puisque les atomes sont initialement dans  $|F = 1\rangle$ . Le caractère non destructif de la sonde est donc confirmé : après chaque mesure, l'état n'est que négligemment détruit et projeté.

4. Ce bruit est très bas comparé aux autres sources de bruit du système de mesure, c'est pourquoi nous considérons tous les signaux dérivés de la chaîne comme parfait, notamment l'oscillateur à 3.4 GHz pour la modulation et démodulation du faisceau sonde.



L'amortissement lié à ces oscillations provient principalement de la décohérence par la sonde non destructive où différents effets interviennent :

- Premièrement, la sonde optique amène un déplacement lumineux différentiel sur les états mesurés. Ce déplacement est dû aux déplacements des trois composantes de la bande latérale, c'est-à-dire la porteuse qui est plus énergétique mais plus éloignée de résonance, et les bandes latérales moins énergétiques et plus proches de résonance. Le déplacement n'est alors pas homogène sur les deux états et la valeur de la mesure est imparfaite.
- Le deuxième effet limitant est visible sur la Fig. 2.6(b) pour un désaccord de  $\Delta_{23} = 0.8\Gamma$ . La valeur moyenne des oscillations dérive au cours du temps pour atteindre une valeur proche de 1, donc une population atomique proche de  $|F = 2\rangle$ . Cet effet provient de l'émission spontanée induite par la sonde. En effet, si l'on regarde la Fig. 2.4, on voit que la bande latérale la moins énergétique est proche de la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ ; donc par émission spontanée l'état va se désexciter vers l'état  $|F = 2\rangle$  seulement. Pour l'autre bande latérale, l'état excité  $|F' = 2\rangle$  peut se désexciter dans les deux états fondamentaux  $|F = 1\rangle$  et  $|F = 2\rangle$ . Après un temps de mesure total relativement long<sup>5</sup>, la détection va amener un brassage des états et donc un décalage sur le signal détecté. Ce que l'on observe bien sur la figure.

Ces deux effets sont les principales limitations de notre mesure non destructive. Nous allons voir que le déplacement lumineux peut être compensé par la structure de la mesure elle-même, sans recourir à aucune compensation externe. Le brassage des états à cause de l'émission spontanée est inévitable pour notre schéma de mesure : si l'on veut l'annuler il faut avoir recours à une autre configuration de mesure comme dans [Louchet-Chauvet et al., 2010] par exemple. Nous allons toutefois montrer que l'on peut minimiser cet effet en calibrant les paramètres de la mesure.

### Compensation du déplacement lumineux

Le déplacement lumineux sur les états  $|F = 1\rangle$  et  $|F = 2\rangle$  par les bandes latérales et la porteuse amènent une inhomogénéité sur la mesure et est une source de décohérence. Pour annuler ce déplacement inhomogène, nous pouvons compenser le déplacement lumineux de la porteuse par les déplacements lumineux des bandes latérales.

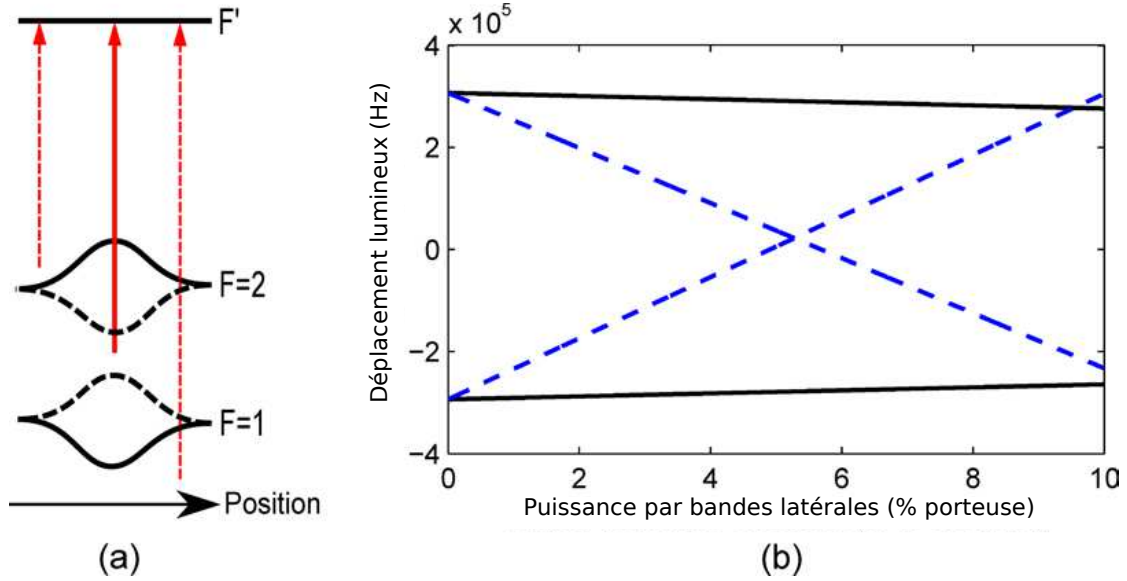
La position des trois composantes par rapport aux niveaux hyperfins, ainsi que l'allure des déplacements induits, sont montrés sur la Fig. 2.7(a).

Les bandes latérales ont la même puissance et sont toutes deux situées à l'extérieur de la transition : elles vont générer un déplacement lumineux de même proportion sur les états hyperfins. On voit aussi que le déplacement lumineux des bandes latérales est de signe opposé au déplacement lumineux de la porteuse qui est à l'intérieur de la transition. En ajustant alors les puissances des bandes latérales par rapport à celle de la porteuse, on peut annuler le déplacement lumineux total.

En calculant théoriquement le déplacement lumineux sur les deux états en fonction de

---

5. On peut grossièrement ajuster les données par une fonction exponentielle de temps caractéristiques de 2 ms. Ce temps est grand devant le temps de manipulation des atomes, comme impulsion  $\pi/2$  de 50  $\mu$ s par exemple, mais est du même ordre de grandeur que le temps d'interrogation Ramsey dans notre expérience.



**Figure 2.7** – Compensation du déplacement lumineux. (a) Schéma des trois composantes du faisceau sonde et leur déplacement lumineux correspondant. (b) Déplacement lumineux total en fonction de la puissance dans les bandes latérales. Les lignes pleines noires représentent le déplacement lumineux de la porteuse sans bandes latérales. Les lignes pointillées bleues représentent le déplacement lumineux total des trois composantes.

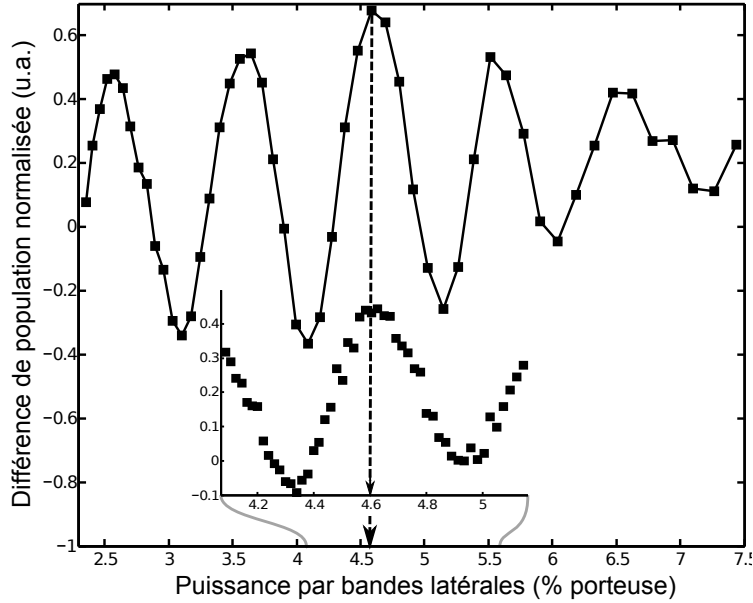
la puissance dans les bandes latérales, il est possible de trouver une puissance pour laquelle les déplacements lumineux s'annulent. Les résultats sont représentés sur la Fig. 2.7(b), où les lignes continues noires sont les déplacements lumineux de la porteuse sans bandes latérales, et les lignes pointillés bleues les déplacements lumineux induits par les trois composantes en fonction de la puissance dans les bandes latérales pour une puissance dans la porteuse  $P_p = 1$  mW.

On trouve que le déplacement différentiel s'annule pour une puissance théorique dans les bandes latérales de  $P_{bl} = 0.053P_p$ , donc pour un ratio de puissance  $\frac{P_{bl}}{P_p} = 5.3\%$ .

Expérimentalement, la compensation du déplacement différentiel est fixée en optimisant les franges d'un interféromètre de Ramsey. La séquence commence avec un pulse  $\pi/2$ , puis une impulsion de mesure de  $40 \mu\text{s}$  est envoyée. Pendant cette impulsion, les atomes vont se déphaser proportionnellement au déplacement différentiel, le pseudo-spin va ainsi tourner sur l'équateur de la sphère de Bloch.

Après un deuxième pulse  $\pi/2$  pour fermer l'interféromètre, on obtient une valeur proportionnelle à ce déphasage. En itérant cette séquence avec à chaque fois une puissance différente dans les bandes latérales, on obtient des franges comme sur la Fig. 2.8.

La compensation est réalisée lorsque les franges sont maximales, *i.e.* lorsqu'aucun déphasage n'est présent. On voit que la compensation se fait expérimentalement lorsque le ratio de puissance est de 4.6 %. Cette valeur est légèrement différente de la théorie et s'explique par la différence de fréquence de modulation utilisée : la compensation a été calculée théoriquement avec  $\Omega = 2$  GHz et la compensation expérimentale dans le cas où  $\Omega = 3.4213$  GHz et les désaccords  $\Delta_{12} = 122$  MHz et  $\Delta_{23} = 153$  MHz.



**Figure 2.8** – Calibration de la compensation du déplacement lumineux par interférométrie Ramsey. Le déplacement lumineux différentiel entraîne un déphasage de l'état atomique qui peut être mesuré dans une séquence de Ramsey. La mesure de  $J_z$  en fonction de la puissance dans les bandes latérales donne des franges de Ramsey en sortie de l'interféromètre. Inséré : franges de Ramsey pour une impulsion de mesure de 70  $\mu\text{s}$  au lieu de 40  $\mu\text{s}$ .

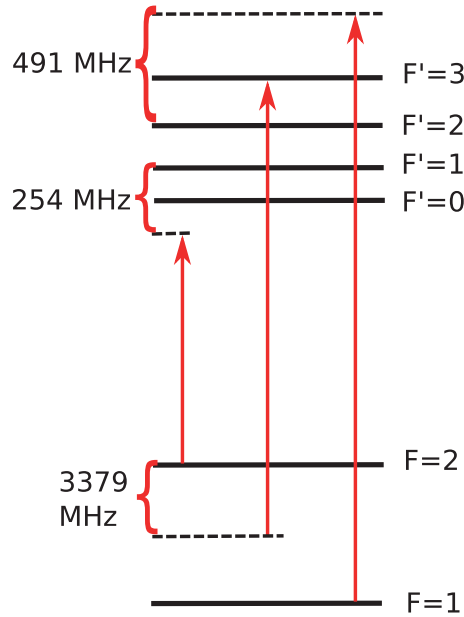
### Symétrie de la décohérence par émission spontanée

Les bandes latérales ne sont pas couplées aux mêmes transitions de la ligne D2. L'une est couplée sur la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ , pouvant se désexciter sur le niveau  $|F = 2\rangle$ , et l'autre est couplée à  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  pouvant se désexciter sur les deux niveaux hyperfins  $|F = 1\rangle \rightarrow |F = 2\rangle$ . Pendant chaque impulsion de mesure, le faisceau sonde excite ces niveaux excités par émission spontanée et redistribue donc les états après désexcitation, menant à un décalage du signal vers  $|F = 2\rangle$  pour les mesures suivantes.

Cette redistribution est inévitable avec le dispositif actuel. Pour l'annuler il faudrait que les deux bandes latérales agissent sur une transition fermée à partir de  $|F = 1\rangle$  et  $|F = 2\rangle$ , ce qui n'est pas possible pour la ligne D2 du  $^{87}\text{Rb}$ . Connaissant le processus d'émission spontanée, l'effet systématique sur le décalage du signal peut être connu et soustrait du résultat, mais il est préférable de réduire cet effet au départ pour accéder à des temps de cohérence plus longs.

Ainsi, pour limiter le décalage du signal, on peut trouver une configuration pour laquelle la redistribution se fait de manière symétrique dans les deux états hyperfins. En d'autres termes, la désexcitation peut être dirigée sur le plan équatorial de la sphère de Bloch, évitant une redistribution inéquilibrée de la population pendant la mesure. La décohérence par émission spontanée est alors symétrique, et aucun décalage du signal n'est présent.

La difficulté est ici de trouver une configuration pour laquelle cet effet est réduit tout en conservant les propriétés de la mesure, c'est-à-dire la mesure directe de  $J_z$  par ajustement des couplages des bandes latérales avec les transitions atomiques et la compensation du déplacement lumineux différentiel.



**Figure 2.9** – Configuration optimale de la mesure. Cette configuration permet de mesurer directement  $J_z$  tout en vérifiant la compensation du déplacement lumineux et la symétrie de la cohérence.

Il est possible de calculer théoriquement la désexcitation asymétrique en connaissant la décroissance de l'émission spontanée, ce qui est expliqué en détails dans [Kohlhaas, 2014]. Pour calculer une configuration de mesure optimale, la procédure est itérative et est décrite ci-après :

- Comme précédemment, on fixe la fréquence de modulation  $\Omega$  à une valeur, typiquement entre 2.5 GHz et 4.5 GHz pour que la porteuse soit loin de résonance.
- Pour cette valeur de fréquence de modulation, on fait varier la position du triplet de fréquence afin de satisfaire la condition  $V_{out} \propto (N_1 - N_2)$ , et on calcule la décroissance de l'émission spontanée pour connaître les chemins de redistribution sur les deux états hyperfins.
- Si les deux conditions sont remplies, c'est-à-dire que l'on mesure directement  $J_z$  et que la décohérence par redistribution des états est symétrique, on calcule les puissances dans les bandes latérales nécessaires à la compensation du déplacement lumineux.
- On vérifie alors que les puissances trouvées n'affectent pas les conditions précédentes.

Si les conditions de chaque étape ne sont pas remplies, on revient en arrière, jusqu'à changer la fréquence de modulation  $\Omega$  et on recalcule alors les étapes.

La configuration pour laquelle toutes les conditions sont remplies est exposée sur la Fig. 2.9. La fréquence de modulation est  $\Omega = 3.852$  GHz, la position de la porteuse par rapport à la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  est de 3.379 GHz, et la profondeur de modulation des bandes latérales est de 14.8 %.

Pour cette configuration, il est démontré expérimentalement que le signal n'est pas décalé par l'émission spontanée [Kohlhaas, 2014]. Si l'on prépare un état cohérent de spins sur l'équateur de la sphère de Bloch, l'état atomique reste à  $J_z = 0$  lors d'une impulsion continue de mesure même lorsqu'on a plus de 50% de décohérence par émission spontanée.

Avec cette configuration, et avec un faisceau de puissance  $P_p = 1.16$  mW et de largeur au niveau des atomes de 47  $\mu\text{m}$ , l'état cohérent a un temps de décroissance de 1.18  $\mu\text{s}$ . Ce temps limité nous oblige par la suite à utiliser des pulses très courts de l'ordre de 60 ns, c'est la

raison pour laquelle un modulateur d'amplitude électro-optique est utilisé pour les impulsions (noté MEO 2 sur la Fig. 2.2).

Il faut noter que nous avons ici seulement éviter le décalage de signal de  $J_z$ . La décohérence par émission spontanée reste présente. Elle a pour effet de redistribuer les états également dans les sous-niveaux  $m_F = \pm 1$ , ce qui amène des effets systématiques supplémentaires et une dépendance du premier ordre de l'effet Zeeman pour ces atomes. La redistribution aléatoire des états agit également dans le sens contraire à la création d'états comprimés de spins par l'ajout d'un bruit blanc supplémentaire.

### Optimisation de la mesure

Comme nous l'avons vu précédemment, améliorer la mesure non destructive signifie augmenter la précision de mesure pour une destructivité constante. Par exemple, augmenter le désaccord  $\Delta = \omega - \omega_0$  améliore la précision de la mesure pour une destructivité plus grande et si l'on se ramène à la même destructivité, le rapport SNR est au final constant.

Dans cette section, nous allons améliorer la mesure en changeant la géométrie du faisceau pour s'adapter au nuage d'atomes.

D'après les Eqs. 2.28 et 2.35, on obtient la dépendance du rapport signal à bruit :

$$\text{SNR} \propto \sqrt{\eta_q N_{bl} N_{at}} \frac{\lambda_0^2}{w^2} \frac{1}{\Delta}, \quad (2.40)$$

alors que d'après l'Eq. 2.37 la destructivité est dépendante de :

$$\rho_{ee} \propto \frac{N_{bl}}{w^2} \frac{1}{\Delta^2}. \quad (2.41)$$

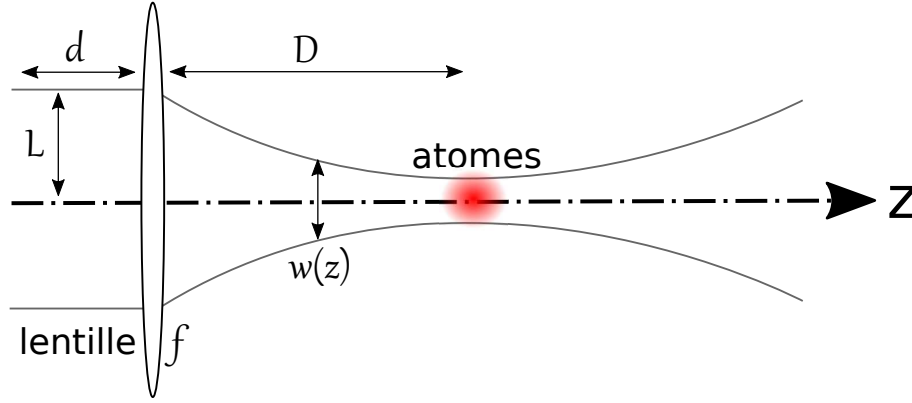
On voit donc que l'efficacité quantique du détecteur  $\eta_q$  et la longueur d'onde de la transition atomique étudiée  $\lambda_0$  permettent directement d'améliorer la précision de la mesure sans changer la destructivité. La transition est bien sûr fixée par le choix des atomes étudiés dans l'expérience, alors que l'efficacité quantique du détecteur est fixée par la photodiode utilisée.

Les contraintes sont fortes sur le choix de la photodiode comme expliqué dans la Sec. 2.2.2, et une bonne efficacité quantique pour ce type de photodiode est difficilement atteignable. Nous allons par contre modifier la géométrie du faisceau, et notamment sa taille  $w$  à la position des atomes, pour optimiser la mesure.

On voit d'après les équations qu'en diminuant la largeur du faisceau, le rapport SNR et la destructivité diminue de manière quadratique. Si la taille du faisceau est diminuée, cela veut aussi dire que le faisceau est plus intense sur l'ensemble atomique, augmentant ainsi la destructivité.

Pour mettre en valeur cette augmentation, posons  $w \rightarrow w/\zeta$  avec  $\zeta$  le facteur de diminution de la largeur du faisceau. Le rapport SNR, ainsi que la destructivité, vont augmenter d'un facteur  $\zeta^2$ . Pour la même destructivité, on doit alors diminuer le nombre de photons  $N_{bl}$  d'un facteur  $\zeta^2$  pour que la destructivité reste fixe  $\rho_{ee} \rightarrow \frac{\zeta^2}{\zeta^2} \rho_{ee}$ . On a alors  $\text{SNR} \rightarrow \frac{\zeta^2}{\zeta} \text{SNR}$ , et au final le rapport SNR est augmenté d'un facteur  $\zeta$  : on peut alors améliorer la mesure en diminuant la taille du faisceau.

Il faut néanmoins réaliser que le gain en précision est limité par la taille du nuage d'atomes. Dans l'Eq. 2.40, le nombre d'atomes est un nombre d'atomes effectif représentant les atomes ayant interagis avec le système. Si le faisceau est plus petit que le nuage atomique, on ne va pas mesurer tous les atomes, et le gain par la diminution de la taille du faisceau est compensé par la perte en nombre d'atomes ayant interagis.



**Figure 2.10** – Schéma simplifié du faisceau de sonde. La largeur au col du faisceau  $w(z)$  à la position des atomes est calculée, puis mesurée par une méthode de Foucaultage.

Dans notre cas, la taille du faisceau pour les mesures précédentes est de  $245 \mu\text{m}$  alors que la taille du nuage est de l'ordre de  $50 \mu\text{m}$  : un gain d'un facteur 5 en rapport signal à bruit est possible.

Cette amélioration va néanmoins augmenter l'intensité sur les atomes et pour pouvoir mesurer l'échantillon dans le régime faible, nous voulons à l'inverse que la destructivité soit minimale. Il faudra donc envoyer un faisceau moins puissant, et surtout pendant un temps d'impulsion plus court de l'ordre de la dizaine de nanosecondes. Initialement, avec un seul MAO, ces temps d'impulsions courts ne pouvaient pas être atteints : c'est pourquoi le deuxième MEO a été calibré et installé sur le montage. Ce modulateur a un temps de montée de  $100 \text{ ps}$ , et permet donc des temps d'impulsions voulus.

Afin de connaître exactement le facteur d'amélioration que l'on implémente, il faut connaître la taille du faisceau avec précision. Le système optique a donc été calibré grâce à une méthode de Foucaultage, après avoir été calculé analytiquement.

Le système optique est modélisé sur la Fig. 2.10. Un laser est injecté dans une fibre optique, la sortie de la fibre est collimatée, le faisceau parcourt une distance  $d$  puis passe à travers une lentille de rayon  $L$  et de distance focale  $f$ .

On veut calculer la largeur au col du faisceau  $w_0$ , placée à une distance  $D$  après la lentille. Nous pouvons nous placer dans l'approximation de l'optique géométrique. Cette approximation est valable si la portée ou distance de Rayleigh est très inférieure aux distances caractéristiques de notre système. On définit la distance de Rayleigh  $z_R$  par :

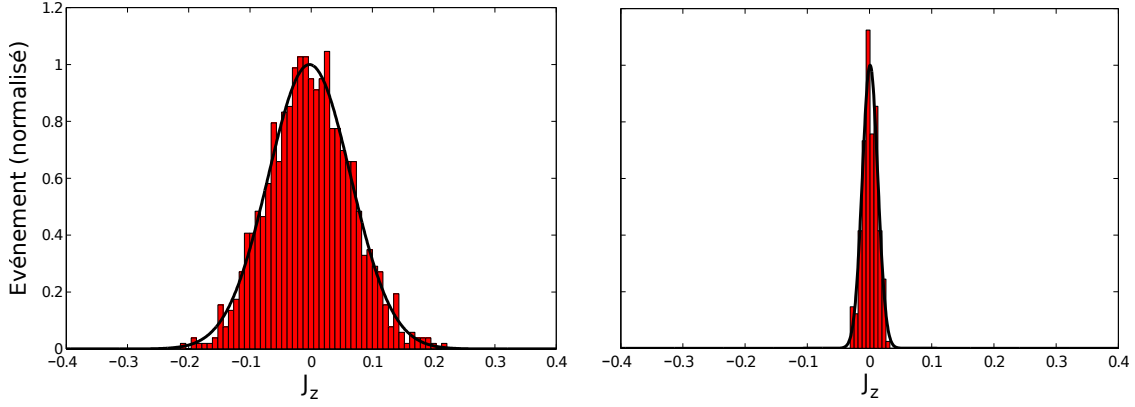
$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (2.42)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde du faisceau. Pour  $z \gg z_R$ , la divergence du faisceau s'écrit :

$$\Theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (2.43)$$

Cette dernière équation, couplée à l'expression de la divergence en fonction des données de la lentille  $\Theta \simeq L/f$ , nous donne une expression simple de la largeur au col du faisceau :

$$w_0 = \frac{\lambda f}{\pi L}. \quad (2.44)$$



**Figure 2.11** – Incertitude de la mesure pour une destructivité de 2%. (a) La largeur du faisceau de mesure à la position du nuage atomique est de  $245 \mu\text{m}$  et la détection se fait avec la photodiode Finisar. (b) La largeur du faisceau de mesure à la position du nuage atomique est de  $47 \mu\text{m}$  et la détection se fait avec la photodiode New Focus.

La largeur au col du faisceau obtenue avec nos valeurs expérimentales ( $\lambda = 780 \text{ nm}$ ,  $L = 1.75 \text{ mm}$  et  $f = 300 \text{ mm}$ ) est  $w_0 = 42.6 \mu\text{m}$ .

Pour vérifier que l'approximation géométrique est valide, on calcule la distance de Rayleigh  $z_R$  en prenant comme valeur  $\lambda = 780 \text{ nm}$  et  $w_0$  de l'ordre de  $25 \mu\text{m}$ ; alors  $z_R$  est de l'ordre de  $z_R \simeq 2.5 \text{ mm}$ . La distance focale de la lentille est de  $f = 300 \text{ mm}$ , deux ordres de grandeur au-dessus de la distance de Rayleigh, l'approximation géométrique est donc valide ici.

La mesure expérimentale de la largeur du faisceau grâce à une méthode de Foucaultage en utilisant une roue crantée est expliquée en détails dans l'annexe B. Les aberrations sphériques et asymétriques sont également étudiées. La mesure nous donne une valeur expérimentale de  $w = 47 \pm 0.94 \mu\text{m}$ , adaptant ainsi la taille du faisceau à celle du nuage.

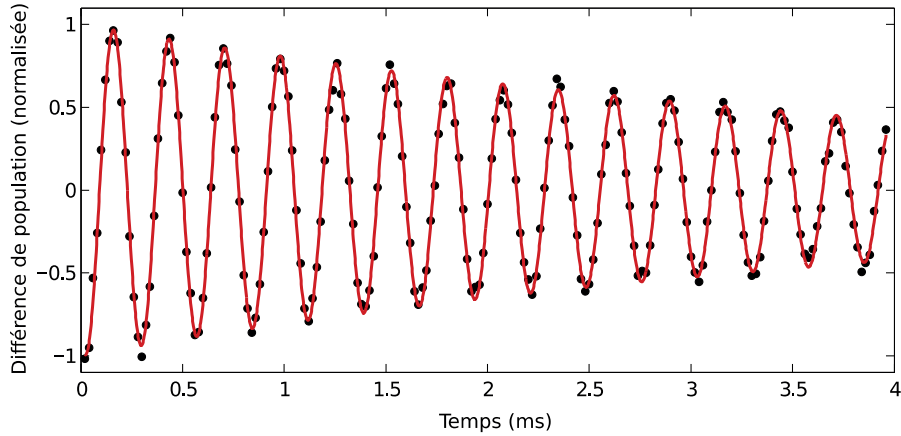
Afin de vérifier l'amélioration de la mesure sur les atomes, le rapport signal à bruit est mesuré en prenant la différence du signal avec et sans atomes.

Les atomes sont initialement préparés dans  $|F = 2, m_F = 0\rangle$ , donc la mesure donnera un signal maximal. Les atomes sont ensuite éjectés par une impulsion puissante de lumière résonante, et l'on mesure ainsi le signal sans atome, donnant le bruit de la mesure.

Pour comparer les deux systèmes de largeur de faisceau différente avec la même destructivité, on change le temps d'impulsion de la mesure pour avoir 98% de cohérence résiduelle de l'état atomique après la mesure dans les deux cas. On pourra ainsi comparer les deux SNR avec la même destructivité.

En répétant les mesures, on obtient une distribution gaussienne de la mesure de  $J_z$  (Fig. 2.11), qui donne l'incertitude de mesure. Pour le faisceau de largeur de  $245 \mu\text{m}$ , on obtient une incertitude de mesure de 6.73%, et pour le faisceau de largeur de  $47 \mu\text{m}$  une incertitude de mesure de 1.24%. La précision de la mesure est améliorée d'un facteur 5.4 pour la même destructivité.

Ce facteur est supérieur à la valeur attendue, et peut s'expliquer par le fait que l'étude du faisceau à  $245 \mu\text{m}$  n'utilisait pas la même photodiode et le bruit de la détection n'était pas au bruit de photons.



**Figure 2.12** – *Mesure des oscillations en temps réel avec le nouveau dispositif. L'état atomique est mesuré toutes les 1.1 ms avec une durée d'impulsion de 100 ns. La puissance de la porteuse est de 120  $\mu$ W et la taille du faisceau de 47  $\mu$ m.*

### 2.2.3 Mesures en temps réel d'oscillations de Rabi

Pour démontrer l'amélioration de la mesure apportée dans la section précédente, nous pouvons comparer la mesure en temps réel d'oscillations de Rabi avec le nouveau dispositif.

Les oscillations de Rabi avec l'ancien dispositif sont montrées sur la Fig. 2.6 et nous ont permis de valider le caractère non destructif et de montrer les limitations de la mesure. Avec la diminution de la taille du faisceau, l'utilisation d'une nouvelle photodiode moins bruyante et l'implémentation d'un modulateur d'amplitude pour créer des impulsions plus courtes, le temps de cohérence sur les atomes pour un même rapport SNR devrait être augmenté.

Les oscillations de Rabi avec le nouveau dispositif sont montrées sur la Fig. 2.12. La puissance de la porteuse est de 120  $\mu$ W (donc les puissances des bandes latérales sont de 18  $\mu$ W), la taille du faisceau de 47  $\mu$ m et la durée d'impulsion pour chaque mesure de 100 ns. L'état atomique est mesuré toute les 1.1 ms.

On voit directement que le temps de cohérence est augmenté grâce à la plus faible destructivité pour le même SNR. Après 200 mesures faibles non destructives, la cohérence résiduelle est de 45%.

## 2.3 Conclusion du chapitre

Nous avons développé dans ce chapitre la réalisation d'une mesure non destructive sur un ensemble cohérent d'atomes.

Après avoir donné les outils théoriques pertinents à notre étude, nous avons réaliser expérimentalement la mesure. Elle est basée sur une technique de spectroscopie par modulation de fréquence, où les bandes latérales de faible puissance permettent de mesurer la différence de population atomique tout en limitant la décohérence de l'état.

La première source de décohérence a été supprimée grâce à la configuration même de la mesure. Plus précisément, le déplacement lumineux de la porteuse peut être compensé par ceux des bandes latérales en ajustant leurs puissances.

L'émission spontanée engendrée par l'interaction du faisceau sonde avec les atomes est malheureusement inévitable. Nous avons vu que ce processus amène un décalage du signal de mesure lorsque les états sont redistribués de manière inévitabile. En ajustant la position



des bandes latérales, il est possible de trouver une configuration pour laquelle le décalage disparaît, c'est-à-dire pour laquelle la décohérence est symétrique sur les deux états. Cette configuration permet également de mesurer directement  $J_z$  et de compenser le déplacement lumineux différentiel.

La mesure a ensuite été améliorée. La condition ici est d'obtenir une précision plus grande pour une même destructivité sur l'ensemble atomique. Pour cela, nous avons adapté la taille du faisceau sonde à celui des atomes, augmentant ainsi le rapport signal à bruit pour le même nombre de photons d'un facteur 5.4. Nous avons ensuite démontré l'amélioration de la mesure sur les atomes. Ces travaux ont été commencés lors de mon stage de master sur l'expérience (notamment la mesure par Foucaultage du faisceau de mesure), et ont été poursuivis lors de ma 1ère année de thèse avec Ralf Kohlhaas, alors en 3ème année de thèse.

Cette mesure va être utilisée par la suite dans le régime faible, permettant de réaliser une rétroaction sur les atomes et ainsi implémenter une boucle à verrouillage de phase entre un oscillateur local et l'ensemble atomique. Ce procédé est d'un grand intérêt pour les horloges atomiques limitées en temps d'interrogation par le bruit de l'oscillateur local, comme nous allons le voir dans le Chap. 4

Il a également été démontré que cette mesure faible couplée à une rétroaction pouvait protéger l'état atomique contre la décohérence éventuelle [Vanderbruggen et al., 2014]. Dans cette étude, l'état cohérent est soumis à des rotations aléatoires qui dégradent sa cohérence, l'évolution du pseudo-spin est alors mesuré avec une perturbation minimale pour ensuite le corriger. La cohérence résiduelle après une rotation aléatoire peut alors atteindre 98%, au lieu de 70% sans correction. Après 10 itérations, la cohérence résiduelle est de 77% avec les mesures faibles suivies de corrections contre 3% sans correction.

Cette étude n'est pas présentée dans cette thèse, et a été expliquée en détails dans [Kohlhaas, 2014, Vanderbruggen, 2012].

## Chapitre 3

# Dynamique d'atomes ultra-froids piégés dans des modes transverses

Dans ce chapitre, nous présentons le procédé expérimental de refroidissement d'atomes jusqu'à l'obtention de l'état de condensation de Bose-Einstein. La dynamique de nuages d'atomes ultra-froids dans les modes électromagnétiques transverses ( $\text{TEM}_{mn}$ ) de la cavité optique pour le piégeage dipolaire est également étudiée.

Pour obtenir de tels nuages atomiques, un piège magnéto-optique permet de refroidir les atomes jusqu'aux centaines de mK [Raab et al., 1987] dans un premier temps, et les atomes sont ensuite piégés dans un faisceau optique qui a la particularité d'être injecté dans une cavité optique.

La cavité joue un rôle important dans l'expérience, c'est la pièce autour de laquelle s'articule tout le procédé de refroidissement. Les cavités optiques, ou résonateurs, sont utilisées dans divers domaines de la physique, pour l'amplification à l'intérieur d'un laser (prix Nobel 1964 sur l'effet LASER par C. H. Townes, N. G. Basov et A. M. Prokhorov [Townes, 1964] [Basov, 1964] [Prokhorov, 1964]), pour l'interaction cohérente produite entre la matière et le champ électromagnétique confiné dans une cavité [Brennecke et al., 2007] [Gleyzes et al., 2007], en information quantique où les atomes sont un système de qubits stationnaires et les photons des qubits flottants [van Enk et al., 2004], mais aussi en interférométrie atomique où la division du paquet d'ondes se fait grâce à un pulse optique résonant dans une cavité [Hamilton et al., 2015] ou pour la génération d'intrications dans l'ensemble atomique [Leroux et al., 2010a].

Un résonateur optique peut être aussi utilisé pour amplifier une radiation et ainsi atteindre de hautes puissances. La cavité optique est ici utilisée pour amplifier le faisceau de piège dipolaire et ainsi obtenir une haute puissance ( $\sim 200$  W) à partir d'une puissance raisonnable ( $\sim 5$  W) et réaliser ainsi un refroidissement tout optique des atomes.

La cavité à également un rôle pour la mesure non destructive sur les atomes : intuitivement plus la finesse est grande plus le déphasage du laser de mesure s'accumule lors des passages consécutifs sur les atomes pour la même destructivité (*i.e.* pour le même nombre de photons). On obtiendra donc une grande précision sur la détection d'une observable (ici la différence de population atomique  $J_z$ ) tout en gardant le caractère non destructif de la mesure et on pourra ainsi obtenir des états comprimés de spin [Wineland et al., 1992] [Leroux et al., 2010a].

L'idée initiale est de pouvoir injecter deux radiations dans la cavité pour manipuler les atomes : l'une sera utilisée comme un piège dipolaire et l'autre pour la mesure. On utilise donc un piège dipolaire intra-cavité à 1560 nm, loin de résonance de la transition atomique

D2 du  $^{87}\text{Rb}$  à 780 nm, où la finesse de la cavité est déterminée par la profondeur de piège voulue. Et l'on veut obtenir simultanément la plus haute finesse possible pour la mesure à 780 nm, les deux lasers à 1560 nm et 780 nm pouvant provenir de la même source en utilisant un doubleur de fréquence optique. Cette double résonance n'est pour l'instant pas utilisée, et est en cours de réalisation afin d'obtenir la mesure intra-cavité et ainsi pouvoir opérer la mesure dans le régime fort pour créer des états comprimés de spin, et dans le régime faible pour ensuite rétroagir sur les atomes.

Après une étude des différents paramètres de la cavité, où notamment l'utilisation d'une technique de tomographie intra-cavité permet de connaître la puissance interne du piège dipolaire, nous étudions le chargement des atomes dans le piège dipolaire, puis le refroidissement par évaporation menant à la condensation de Bose-Einstein.

Ce condensat de Bose-Einstein peut être manipulé dans les modes transverses de la cavité optique, celle-ci étant non dégénérée. Ainsi, nous pouvons étudier la dynamique du condensat dans ces modes et même mesurer des interférences après de sa séparation et sa recombinaison. Le condensat vient d'être obtenu, et nous présentons donc dans cette thèse des résultats préliminaires sur la manipulation de nuages d'atomes froids dans les modes  $\text{TEM}_{00}$  et  $\text{TEM}_{01}$ . Différents objectifs vont être avancés pour cette étude, notamment une séquence d'interférométrie Bragg de deux condensats dans un guide d'onde et l'utilisation de différents nuages atomiques pour implémenter une horloge atomique optimisée.

Au début de ma thèse, l'expérience était au Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique de Palaiseau, où nous avons obtenu des résultats sur l'étude de l'asservissement en phase d'un oscillateur classique sur un état atomique (Chap. 4). Nous avons ensuite déménager l'expérience jusqu'à Bordeaux. Il a alors fallu reconstruire et recalibrer les différents éléments de l'expérience étape par étape. Dans ce chapitre, nous allons utiliser des études faites à Palaiseau surtout pour les descriptions générales de l'expérience (par exemple la description géométrique et spectrale de la cavité, la description du système à vide et du banc optique) qui sont toujours actuelles. Toutes les mesures données dans ce chapitre pour la manipulation et le refroidissement d'atomes, du piège magnéto-optique à l'évaporation, et aussi pour la tomographie des modes de la cavité ont été prises au LP2N à Bordeaux (sauf indication contraire) et peuvent légèrement différées du set-up à Palaiseau.

## 3.1 Pièges magnéto-optiques

### 3.1.1 Système laser

Afin d'obtenir un nuage d'atomes ultra-froids et d'atteindre le régime de condensation de Bose-Einstein, il est nécessaire de refroidir initialement les atomes dans un piège magnéto-optique (PMO). Comme son nom l'indique, ce piège utilise un gradient magnétique couplé à un laser de refroidissement proche de résonance d'une transition cyclante.

Les atomes sont refroidis ici par refroidissement Doppler, la radiation laser est légèrement désaccordée dans le rouge de la transition cyclante de telle manière que par effet Doppler, seuls les atomes se rapprochant de la source du laser absorbent de la lumière et subissent la vitesse de recul d'un photon. Les atomes sont ainsi repoussés au centre du piège puisque par l'effet isotrope d'émission stimulée, les photons sont réémis sans direction privilégiée. Le gradient magnétique déplace les résonances atomiques par effet Zeeman, de telle manière que si les atomes se déplacent hors du centre, la fréquence de leur transition atomique s'approche de la fréquence des faisceaux optiques de direction opposée et sont donc repoussés au

centre. La force créée sur les atomes après plusieurs itérations de ce processus est équivalente à une force de friction, diminuant la vitesse des atomes initialement à température ambiante jusqu'à une température dite de Doppler (150  $\mu\text{K}$  pour le  $^{87}\text{Rb}$ ). Cette limite vient du caractère aléatoire de la réémission de photons et se formule comme  $T_D = \hbar\Gamma/2k_B$  [Lett et al., 1988].

Dans le cas d'atomes de rubidium 87, la transition cyclante pour le refroidissement est la transition  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 3\rangle$  à une longueur d'onde de 780 nm (voir Annexe A) pour laquelle le désaccord dans le rouge de la transition du laser de refroidissement est fixé à  $2.5\Gamma$  [Lindquist et al., 1992] ( $\Gamma$  étant la largeur naturelle de la transition  $\Gamma = 6.0666$  MHz [Steck, 2001]).

De plus, cette radiation peut exciter de manière non résonante la transition  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 2\rangle$ , à partir de laquelle les atomes peuvent se désexciter dans l'état fondamental  $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$  qui est un état noir pour le laser de refroidissement. Il est donc nécessaire de repomper ces atomes en utilisant un deuxième laser en résonance avec la transition  $|5S_{1/2}, F = 1\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 2\rangle$ .

Le laser repompeur est un laser commercial New Focus TLB-6813 de largeur de raie  $\simeq 200$  kHz intégré sur 50 ms. Le laser utilisé au LCF à Palaiseau était similaire à celui pour le refroidissement mais le piezo circulaire à l'intérieur s'est cassé, sans pièce de rechange à Bordeaux. Après avoir temporairement utilisé le laser pour la mesure non destructive, nous avons adopté le laser commercial New Focus comme laser repompeur. Il est asservi en fréquence sur le croisement de raie  $|5S_{1/2}, F = 1\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 1, 2\rangle$  par une spectroscopie d'absorption saturée, voir Fig. 3.1. Cette spectroscopie a été remaniée après le déménagement à Bordeaux afin de la simplifier.

Le laser est ensuite désaccordé à l'aide d'un modulateur acousto-optique (MAO) pour être résonant avec la transition souhaitée  $|5S_{1/2}, F = 1\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 2\rangle$ .

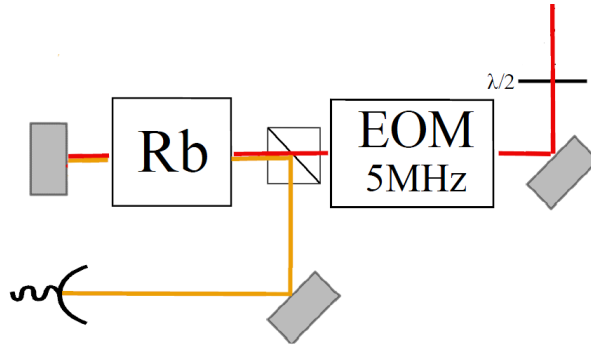
Le laser de refroidissement utilisé est une diode montée en cavité étendue conçue au laboratoire dont la largeur de raie est d'environ 300 kHz. Ce type de laser a été utilisé à la construction de l'expérience et sera bientôt remplacé par un laser commercial New Focus TLB-6813 pour une question de stabilité et de longévité.

Le laser de refroidissement est asservi en fréquence par battement avec le repompeur. Le battement des deux lasers à 6.8 GHz est mixé, puis converti en tension avant d'être soustrait à une tension de référence (voir [Bernon, 2011]) qui permet un désaccord sur une plage de 400 MHz nécessaire pour le chargement des atomes dans le piège dipolaire comme expliqué dans la section 3.4.2.

La lumière est transportée de la table optique à la chambre de science par fibre optique, où la puissance dans chaque collimateur du PMO en trois dimensions est de 10 mW et où les faisceaux sont rétro-réfléchis pour plus d'efficacité. La puissance totale dans les faisceaux du PMO en deux dimensions est de 200 mW pour le faisceau de refroidissement et de 100 mW pour le faisceau repompeur.

### 3.1.2 Piège magnéto-optique 2D et 3D et système à vide

Pour obtenir un nuage d'atomes en trois dimensions, refroidi de manière efficace, un quadrupôle magnétique est créé par deux bobines magnétiques en configuration anti-Helmholtz et les faisceaux optiques sont polarisés circulairement  $\sigma^+/\sigma^-$  pour un refroidissement Sisyphé



**Figure 3.1** – Spectroscopie par absorption saturée. Une technique plus traditionnelle a été adoptée par rapport au schéma initial d'absorption (dans [Bernon, 2011]).

[Dalibard and Cohen-Tannoudji, 1989]. Par effet Zeeman, les sous-niveaux des atomes s'éloignant du centre deviennent plus proches de résonance de la lumière dans la direction opposée au déplacement des atomes ; les atomes sont donc repoussés au centre par la force de friction effective.

Les atomes sont préalablement refroidis dans un PMO en deux dimensions, qui permet ensuite un chargement plus rapide et plus efficace dans le PMO 3D. Dans le PMO 2D, les atomes refroidis créent un filet et sont ensuite déplacés jusqu'au centre du PMO 3D dans la chambre de science principale par un faisceau pousseur de quelques mW. Ils sont alors piégés et refroidis dans le PMO 3D (voir Fig. 3.2).

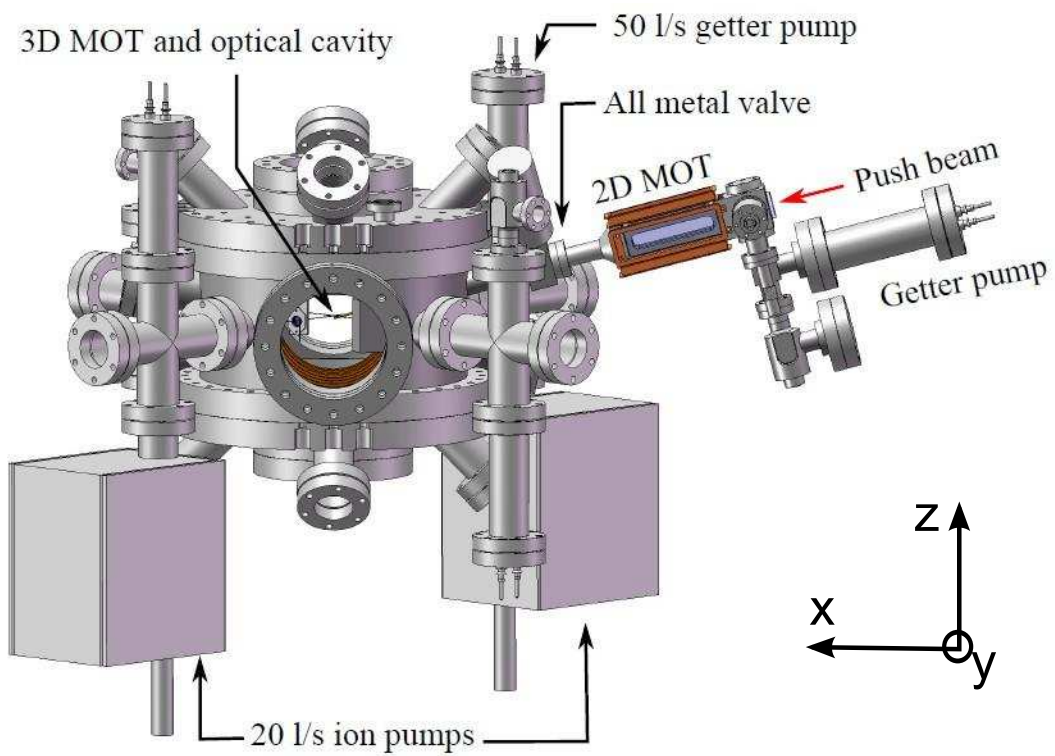
Pour limiter les interactions avec l'environnement et ainsi éviter le chauffage des atomes par collisions et le mixage des états internes des atomes, le piège s'opère dans un vide poussé. Le PMO 2D atteint un vide inférieur à  $10^{-7}$  mbar grâce à une pompe getter 50 l/s et la chambre de science atteint un vide inférieur à  $10^{-9}$  mbar grâce à deux pompes ioniques 20 l/s (voir Fig. 3.2). Lors du déménagement, l'enceinte à vide a été déplacée dans la même position, fixée sur la table optique. Les pompes à vide ont été coupées pendant 48 h, et remises en marche dès l'arrivée à Bordeaux. Après 24 h, le vide était revenu à sa valeur nominale.

### 3.1.3 Caméra CCD

Pour visualiser les atomes par une technique d'imagerie par fluorescence ou par absorption, nous utilisons une camera CCD ("charge-coupled device" en anglais). La camera utilisée à Palaiseau de marque Apogée n'était plus utilisable car le film recouvrant le capteur s'est ondulé, probablement avec les différences de température. Nous utilisons actuellement une caméra de modèle Ikon-M de marque Andor, où l'image sur le capteur est obtenue avec le même dispositif que précédemment [Bernon, 2011], à savoir un télescope de marque Schneider optics de modèle Xenoplan 1 :5, suivi d'un objectif microscope  $\times 5$ ,  $\times 10$  ou  $\times 20$  (Zeiss, modèle Fluor) attaché à un tube avec une lentille amenant l'image sur le capteur.

Cette caméra a été alternativement montée dans le plan de la cavité ou perpendiculaire à la cavité pour différentes mesures sur les atomes. Actuellement, la caméra fournit une image dans le plan de la cavité pour des mesures précises et un deuxième capteur CCD (Point Grey, modèle Chameleon) est monté dans l'autre plan, permettant d'ajuster l'alignement des faisceaux verticaux, par exemple lors de l'évaporation de l'échantillon (voir Sec. 3.4.3).

Par la suite, nous allons appeler le plan de la cavité le plan horizontal (x,y), qui est aussi



**Figure 3.2** – Enceinte à vide. Les atomes sont préalablement refroidis dans le PMO en deux dimensions (sur la droite de l'image) et sont ensuite poussés dans l'enceinte principale (à gauche de l'image) où ils sont piégés dans le PMO 3D puis dans le piège dipolaire intra-cavité.

horizontal à la table optique (voir les axes sur la Fig. 3.2). De même le plan vertical à la cavité est le plan (x,z). Sur la Fig. 3.2, la caméra PointGrey est placée au dessus de l'enceinte et orientée vers le bas pour prendre une image du plan vertical, et la caméra Andor est dans l'axe du hublot central pour prendre une image du plan horizontal.

## 3.2 Piège dipolaire intra-cavité

Après avoir obtenu un nuage d'atomes froids dans le PMO 3D, nous utilisons un piège dipolaire optique injecté dans la cavité pour effectuer l'évaporation de l'échantillon et atteindre la condensation de Bose-Einstein.

Avant d'expliquer le piégeage expérimental des atomes au sein de la cavité, nous allons d'abord voir comment une force dipolaire permet de piéger les atomes. La cavité va ensuite être caractérisée, et nous allons donner ses propriétés optiques et spectrales en détails. Après cette étude, nous allons injecter le laser de piège à 1560 nm en résonance avec la cavité, où un asservissement sur le laser est effectué pour supprimer les fluctuations de fréquence différentielles.

Il est difficile de connaître exactement la puissance intra-cavité appliquée sur les atomes puisque la cavité ne nous permet pas de mesurer le mode optique en son sein. Nous allons toutefois voir qu'une mesure *in situ* du potentiel dipolaire est réalisable grâce aux atomes piégés à l'intérieur. En effet, en imageant les atomes à différentes profondeurs de piège nous pouvons le profil du potentiel dipolaire et ainsi en déduire les puissances de piège. Cette partie se terminera par la préparation de l'échantillon atomique avant la mesure décrite dans le Chap.2. Nous allons voir que le piège dipolaire amène une limitation par le fort déplacement lumineux qu'il induit, mais qui peut être dépassée par l'utilisation d'un laser à 1529 nm.

### 3.2.1 Potentiel dipolaire

La force dipolaire utilisée pour piéger les atomes vient de l'interaction du moment dipolaire atomique  $\mathbf{p}$  avec la composante électrique  $\mathbf{E}$  du champ lumineux. En effet, un atome dans un champ lumineux voit son moment dipolaire osciller à la fréquence du champ électrique. Le potentiel de cette interaction s'écrit de manière générale [Grimm et al., 2000] :

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{p} \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I(\mathbf{r}). \quad (3.1)$$

avec  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$  où  $\alpha$  représente la polarisabilité complexe et  $I = 2\epsilon_0 c |\mathbf{E}|^2$  l'intensité optique.

La force dipolaire liée à ce potentiel s'écrit :

$$F_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\nabla U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \propto \nabla I(\mathbf{r}). \quad (3.2)$$

Cette force est conservative, et permet de piéger les atomes aux extrema d'intensité.

Le taux de diffusion est défini comme la puissance absorbée lors de cette interaction formulée en termes de cycles d'absorption et de réémission spontanée de photons et donne la limite pouvant être atteinte par ce type de piège :

$$\Gamma_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\hbar \epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\mathbf{r}). \quad (3.3)$$

En pratique, le taux de diffusion limite le temps de vie des atomes dans le piège par chauffage de l'échantillon, il est donc intéressant de se placer dans un cas où ce taux devient négligeable.

Si l'on considère l'atome comme un système à deux niveaux de fréquence de transition  $\omega_0$  et que l'on note  $\Delta = \omega - \omega_0$  le décalage entre le laser de fréquence  $\omega$  et la transition, alors dans le cas  $|\Delta| \ll \omega_0$  et où la saturation de la transition atomique est négligeable, le potentiel dipolaire et le taux de diffusion deviennent [Grimm et al., 2000] :

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I(\mathbf{r}), \quad (3.4)$$

$$\Gamma_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 I(\mathbf{r}), \quad (3.5)$$

où  $\Gamma$  est la largeur de la transition atomique.

Ces deux équations montrent deux points importants pour le piégeage optique, le premier concerne la proportionnalité du décalage  $\Delta$ , inversement proportionnel pour le potentiel dipolaire et inversement proportionnel au carré pour le taux de diffusion. Pour réduire le chauffage par diffusion des atomes tout en piégeant les atomes, le décalage en fréquence doit être large et l'intensité lumineuse importante. Le signe du décalage donne également le type d'extremum de piégeage.

Pour un décalage négatif  $\Delta < 0$  – ou décalage dans le rouge – les atomes sont attirés dans les régions d'intensité maximale car le potentiel est attractif. Alors que pour un décalage dans le bleu de la transition  $\Delta > 0$ , le potentiel est répulsif et les atomes sont attirés dans les régions d'intensité minimale. En pratique, la géométrie la plus simple pour un piège décalé dans le rouge est un faisceau de mode gaussien collimaté. Nous utilisons ici une cavité pour amplifier la puissance du piège. Le mode de la cavité forme un piège croisé au centre où l'intensité est maximale. Le laser de piège est à 1560 nm donc désaccordé dans le rouge pour des atomes de  $^{87}\text{Rb}$ . Les atomes vont donc être piégés au centre de la cavité.

### Déplacement lumineux induit

Lors de l'interaction atome-laser, un déplacement lumineux  $\Delta E$  égal au potentiel dipolaire (Eq. 3.1) est induit sur la transition atomique. L'émission spontanée est négligeable dans l'hypothèse d'un désaccord important, donc la polarisabilité peut être uniquement décrite par sa partie réelle que l'on note simplement  $\alpha$ . Elle s'écrit [Khadjavi et al., 1968] [Clément, 2008] :

$$\alpha_\mu = \frac{1}{\hbar} \sum_k \frac{|\langle k|d|\mu\rangle|^2 \omega_{k,\mu}}{\omega_{k,\mu}^2 - \omega^2}. \quad (3.6)$$

La polarisabilité est ici calculée sur l'état  $\mu$  considérant toutes les transitions possibles vers les états  $k$  de fréquence  $\omega_{k,\mu}$  avec les moments dipolaires  $\langle k|d|\mu\rangle$ .

On voit donc que le déplacement lumineux suit le profil du potentiel dipolaire, ce qui est une propriété importante pour la suite où l'on verra qu'il est possible d'imager les atomes dans le piège pour mesurer le profil du potentiel dipolaire [Brantut et al., 2008] [Clément, 2008]. Cet outil est d'une grande importance lorsque la mesure directe du potentiel dipolaire est impossible, comme dans notre cas où le piège dipolaire est un laser injecté dans une cavité optique.

### 3.2.2 Cavité optique pour le piégeage

L'utilisation d'une cavité optique pour piéger les atomes a été étudiée dès les années 90 pour piéger un atome unique avec un fort couplage [Rempe et al., 1991] [Thompson et al., 1992] [Gleyzes et al., 2007]. Récemment, l'utilisation d'un résonateur Fabry-Pérot a été démontré en interférométrie atomique [Hamilton et al., 2015] où les pulses d'interactions sont



en résonance avec la cavité, et est un développement important pour les mesures de précision [Geiger et al., 2015].

L'usage d'une cavité dans cette expérience a un double intérêt, d'une part elle permet de piéger les atomes grâce au potentiel dipolaire d'un laser résonant dans la cavité mais aussi de pouvoir théoriquement réaliser des mesures quantiques.

Comme nous l'avons vu plus haut (Sec. 3.2.1), il est possible de piéger les atomes dans un champ lumineux loin de résonance et de grande intensité. Le piège dipolaire utilisé ici à une longueur d'onde de 1560 nm facilement accessible par les lasers telecom avec une largeur spectrale de l'ordre du kHz. Le fort désaccord fait que le taux de diffusion est négligeable devant le potentiel dipolaire comme nous l'avons vu plus haut. On remarque que cette longueur d'onde est le double de la fréquence de mesure sur les atomes de  $^{87}\text{Rb}$ , on pourra alors utiliser seulement une source laser doublée en fréquence pour les deux applications.

Pour obtenir une profondeur de piège de l'ordre du mK, permettant de piéger plusieurs millions d'atomes et de procéder ensuite à une évaporation efficace à partir d'un PMO 3D, la largeur au col du faisceau doit être de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$  et la puissance intra-cavité effective de l'ordre de 100 W. Avec un faisceau incident de plusieurs watts de puissance, il faut alors une finesse de l'ordre de plusieurs milliers pour atteindre la puissance intra-cavité voulue.

Avec ces conditions, la finesse à 780 nm pour la mesure (voir plus loin Sec. 3.3) doit être la plus haute possible pour profiter ainsi du plus haut rapport signal à bruit possible [Lye et al., 2003].

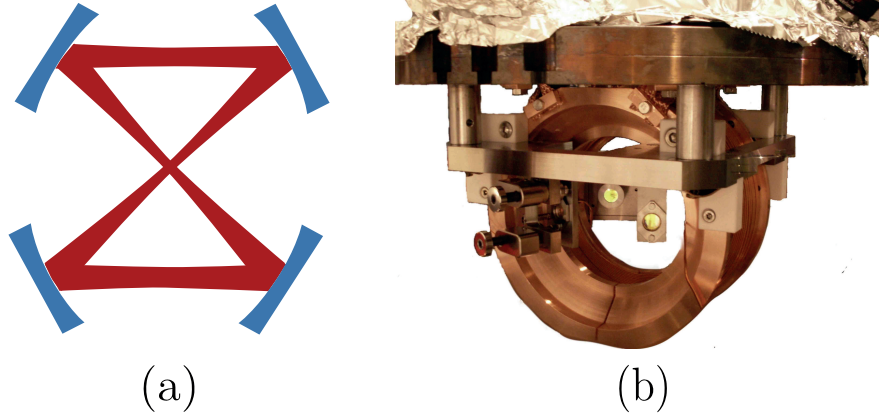
La caractérisation de la cavité qui suit provient essentiellement des premières thèses de l'expérience [Bernon, 2011, Kohlhaas, 2014, Vanderbruggen, 2012]. Nous en donnons les détails ici pour bien comprendre le potentiel dipolaire mis en jeu, et l'expérience en général. La cavité étant sous vide dans l'enceinte principale, elle est restée avec l'enceinte sur la table optique pendant le déménagement, et aucune différence dans sa configuration n'a été constatée lors de la reconstruction de l'expérience.

## Géométrie

La cavité est composée de 4 miroirs disposés en forme de papillon où la diagonale mesure 90 mm, et où deux bras se croisent au centre à  $90^\circ$  comme sur la Fig. 3.3. Un des miroirs est disposé sur un actuateur piézoélectrique 3 points (Mad City Labs, mod. M3Z) permettant de fins ajustements et un autre miroir est disposé sur une monture avec vis picomotrices permettant l'ajustement grossier de la cavité. La cavité est dans un vide poussé inférieur à  $10^{-9}$  mbar et est surmontée des bobines de PMO. Le piège à deux faisceaux croisés permet des fréquences de piège comparables dans les trois directions de l'espace. La polarisation est choisie dans le plan de la cavité pour n'avoir aucune interférence au croisement des faisceaux.

L'onde se propage dans la cavité de manière progressive, contrairement à une cavité Fabry-Pérot où l'onde est stationnaire et qui est surtout utilisée pour créer un réseau optique sur les atomes ou pour réaliser un couplage atome-cavité homogène [Lee et al., 2014].

Coté intérieur à la cavité, les miroirs doublement résonants ont un coefficient de transmission  $t_{1560}^2 = 0.038\%$  à 1560 nm et  $t_{780}^2 = 0.00155\%$  à 780 nm, et un rayon de courbure de 100 mm. Coté extérieur, ils sont plans (comme sur la Fig. 3.3(a)), avec une réflectivité  $r_{1560}^2 = 0.034\%$  et  $r_{780}^2 = 0.079\%$ .



**Figure 3.3** – Géométrie de la cavité. (a) Schéma de la cavité en anneau à 4 miroirs. (b) Réalisation de la cavité suspendue à l'enceinte à vide. On peut voir le miroir sur monture micrométrique à gauche et les supports circulaires pour les bobines magnétiques du PMO 3D.

### Propriétés optiques et modes de la cavité

La caractérisation exacte du piège dipolaire intra-cavité est indispensable pour connaître le potentiel dipolaire appliqué ainsi que les fréquences de piège et donc pour évaporer l'échantillon de manière efficace. La haute finesse de la cavité ne permet pas de mesurer le profil du faisceau par les moyens classiques (imagerie CCD le long du faisceau, Foucaultage), il faudra donc utiliser une technique différente.

Dans un premier temps nous allons calculer la largeur théorique au col du faisceau et la finesse théorique à partir des données des miroirs. Dans la Sec. 3.2.4 nous allons utiliser une technique de tomographie des modes de la cavité basée sur l'imagerie des atomes piégés à différents niveaux du potentiel qui donnera le profil *in situ* du piège dipolaire.

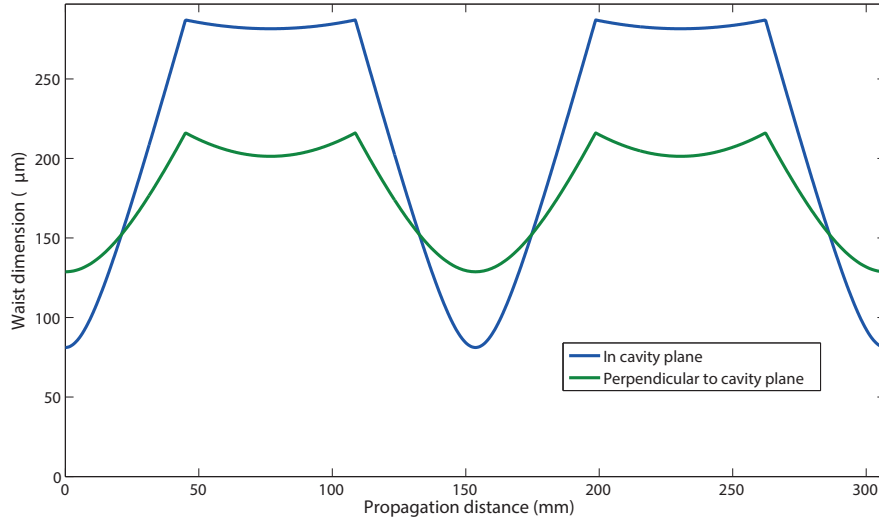
**Finesse théorique** La finesse est liée au nombre moyen de tours qu'un photon fait dans la cavité, elle est indépendante de la géométrie et dépend seulement des pertes à l'intérieur de la cavité. Elle peut être calculée à partir des pertes après un tour mais aussi à partir des propriétés des miroirs :

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\rho} = \frac{\pi r^2}{1 - r^4}, \quad (3.7)$$

où  $\rho$  représente la fraction de perte de puissance après un tour et  $r^2$  représente la réflectivité des miroirs à une longueur d'onde donnée. On voit que plus les miroirs ont une bonne réflectivité, plus la finesse est haute et les photons restent plus longtemps dans la cavité.

La finesse théorique à 1560 nm est donc  $\mathcal{F}_{1560} = 4160$  et celle à 780 nm de  $\mathcal{F}_{780} \simeq 10^5$ , ce qui donne également des pertes après un tour de  $\rho_{1560} = 0.15\%$  et  $\rho_{780} = 0.006\%$ .

**Largeur théorique au centre de la cavité** Avec le formalisme de la matrice ABCD [Kogelnik and Li, 1966], il est possible d'obtenir le profil théorique du faisceau à l'intérieur de la cavité connaissant les caractéristiques des miroirs. En partant du centre où le faisceau est à son col, le faisceau se réfléchit sur les 4 miroirs et traverse les distances entre chaque miroir ; chaque matrice vient donc se multiplier en conséquence pour former la matrice de transfert de l'ensemble  $T$  (calculée dans [Vanderbruggen, 2012]). Ainsi nous pouvons obtenir la taille du faisceau en tout point, donc le mode de la cavité.



**Figure 3.4** – Largeur du mode fondamental de la cavité à 1560 nm d’après la matrice de transfert de la cavité. La largeur du mode dans le plan de la cavité est présenté en bleu, et dans le plan perpendiculaire à la cavité en vert.

Sur la Fig. 3.4, on obtient le profil du mode dans le plan de la cavité (en bleu) et dans le plan perpendiculaire (en vert) pour le faisceau à 1560 nm en partant du centre de la cavité. La taille du faisceau est minimale au centre où la largeur dans le plan de la cavité est  $\omega_{\parallel}^{(1560)} = 81 \mu\text{m}$  et dans le plan vertical  $\omega_{\perp}^{(1560)} = 128 \mu\text{m}$ .

Pour connaître les largeurs au col à différentes longueurs d’onde, il suffit de considérer que la distance de Rayleigh est constante puisque le rayon de courbure des miroirs ne varie pas. La distance de Rayleigh se formule  $z_R = \pi\omega_{\lambda}^2/\lambda$  donc il s’ensuit que  $\omega_{\lambda} \propto \sqrt{\lambda}$ . Les largeurs au col à 780 nm sont ainsi  $\omega_{\parallel}^{(780)} = \sqrt{\frac{780}{1560}} \omega_{\parallel}^{(1560)} = 57.3 \mu\text{m}$  et  $\omega_{\perp}^{(780)} = 90.5 \mu\text{m}$ , et à 1529 nm<sup>1</sup>  $\omega_{\parallel}^{(1529)} = 80.2 \mu\text{m}$  et  $\omega_{\perp}^{(1529)} = 126.7 \mu\text{m}$ .

Ce formalisme nous renseigne aussi sur la stabilité du résonateur, qui est donnée par la condition suivante applicable à toute cavité de matrice  $T$  :  $-2 \leq \text{trace}(T) \leq 2$ . Le calcul théorique nous donne  $\text{trace}(T_{\parallel}) = 1.87$  dans le plan de la cavité et  $\text{trace}(T_{\perp}) = 0.97$  dans le plan perpendiculaire à la cavité. La configuration de la cavité est quasi-concentrique, proche de l’instabilité ( $|\text{trace}(T)| > 2$ ) dans le plan de la cavité.

**Modes de la cavité** Les modes transverses électromagnétiques (TEM) de la cavité apparaissent en prenant la solution plus générale de l’équation d’onde faisant intervenir les polynômes d’Hermite que nous allons dériver dans ce paragraphe. L’équation d’onde s’écrit :

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Pour un champ où les variables de temps et d’espace peuvent se séparer, et où la propagation se fait selon  $z$ , on cherche  $E$  sous la forme  $E(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})e^{-ikz}e^{i\omega t}$ . En considérant que  $U(\mathbf{r})$

1. Les largeurs à 1529 nm nous seront utiles lors de la compensation du déplacement lumineux du piège dipolaire par un laser à cette longueur d’onde (Sec. 3.2.5). Cette compensation est nécessaire pour avoir un déplacement lumineux différentiel homogène sur la transition de mesure.

varie lentement selon  $z$ , l'équation se réécrit alors :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (3.9)$$

De manière générale, on cherche une solution de la forme

$$U(x, y, z) = g(x)h(y)e^{-iP(x)}e^{-i\frac{k}{2q(z)}(x^2+y^2)}, \quad (3.10)$$

avec  $g$  (resp.  $h$ ) une fonction de  $x$  et  $z$  (resp.  $y$  et  $z$ ),  $P(x)$  est le déphasage complexe et  $q$  le paramètre complexe du faisceau. On réinjecte maintenant cette forme dans l'Eq. 3.9 pour obtenir l'équation différentiel des polynômes d'Hermite-Gauss. La solution de l'équation s'écrit donc :

$$U_{mn}(x, y, z) = U_0 \frac{w_0}{v} H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-i\frac{k}{2q(z)}(x^2+y^2)} e^{-ikz+i(m+n+1)\zeta(z)}, \quad (3.11)$$

où  $H_m$  dénote les polynômes d'Hermite  $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}$  et  $\zeta$  est la phase de Gouy du mode [Gouy, 1890]. Les indices  $m$  et  $n$  donnent les modes d'ordre supérieur TEM <sub>$mn$</sub>  horizontaux pour  $m > 0$  et verticaux pour  $n > 0$ .

Pour le mode TEM<sub>00</sub>, on retrouve bien sûr un faisceau gaussien où  $w(z)$  est la taille du faisceau et  $w_0$  la largeur au col,  $k = 2\pi/\lambda$  le nombre d'onde,  $q(z)$  le paramètre complexe du faisceau et  $\zeta(z)$  la phase de Gouy.

Expérimentalement, pour voir les modes transverses, il suffit de scanner la longueur de la cavité puisque la cavité est non dégénérée (en pratique, les 3 transducteurs piezo-électriques sur un miroir de la cavité oscillent à la même fréquence). Et pour coupler plusieurs modes de manière visible lors du scan, un léger désalignement du faisceau incident par rapport à la position où le mode transverse fondamental est injecté est nécessaire. La Fig. 3.5 présente le spectre de la cavité où les indices  $mn$  sont représentés. Les modes horizontaux TEM <sub>$m0$</sub>  sont en noir sur la figure, et les modes verticaux TEM <sub>$0n$</sub>  en bleu. Les premiers modes transverses supérieurs sont espacés par rapport au fondamental de 78.9 MHz pour le TEM<sub>10</sub> et de 164.6 MHz pour le TEM<sub>01</sub>.

### Propriétés spectrales

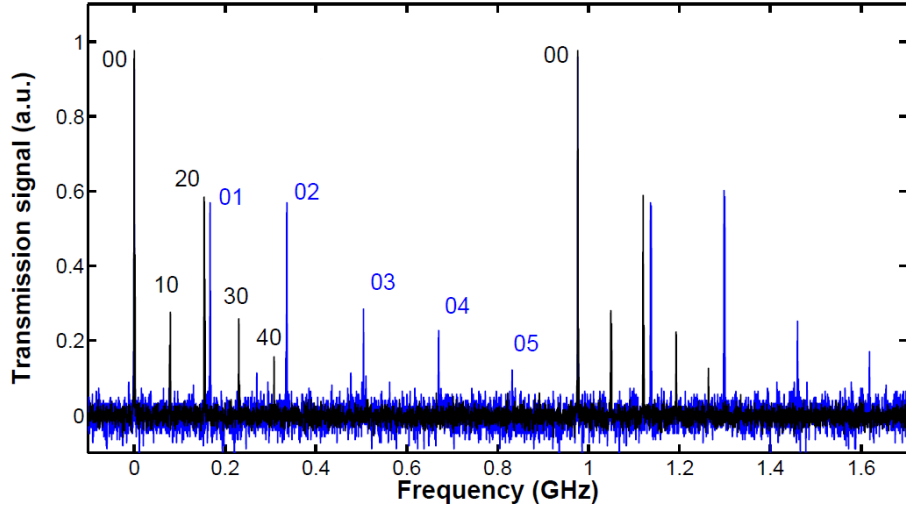
Nous allons ici mesurer expérimentalement les caractéristiques de la cavité en utilisant ses propriétés spectrales, notamment son intervalle spectral libre, sa largeur spectrale, sa finesse et son facteur de qualité.

**Intervalle spectral libre** L'intervalle spectral libre (ISL) est lié à la longueur du résonateur, et donne l'espacement spectral entre deux mêmes modes consécutifs. Il est donné par  $\Delta\nu_{ISL} = c/L$ , où  $L$  est la longueur totale du résonateur. Connaissant la géométrie de la cavité de diagonale 90 mm, il est possible de mesurer théoriquement cet intervalle, ce qui donne  $\Delta\nu_{ISL} = 975.6$  MHz (voir aussi l'espacement sur la Fig. 3.5).

Pour mesurer cet intervalle expérimentalement [Bernon, 2011], on injecte un laser préalablement modulé en phase. La fréquence de modulation est fixée de façon à voir la porteuse et les bandes latérales en transmission (c'est-à-dire que les trois composantes sont en résonance avec la cavité), et l'intervalle spectral libre est donc un diviseur de la fréquence de modulation. On obtient :

$$\Delta\nu_{ISL} = 976.20 \pm 0.05 \text{ MHz}. \quad (3.12)$$

Ce qui est en accord avec la valeur théorique, et permet de connaître la valeur exacte de la longueur de la cavité. La diagonale mesure ainsi 90.010(5) mm.



**Figure 3.5** – Spectre de fréquence de la cavité. Les modes transverses  $TEM_{0n}$  verticaux sont présentés en bleu, avec le premier mode  $TEM_{01}$  à 164.6 MHz par rapport au mode fondamental. Les modes  $TEM_{m0}$  horizontaux sont présentés en noirs, avec le premier mode  $TEM_{10}$  déplacé de 78.9 MHz par rapport au fondamental.

**Largeur spectrale** La largeur spectrale  $\delta\nu$  d'une cavité à très haute finesse est souvent mesurée par le temps de décroissance  $\tau = 2/\delta\nu$  de l'intensité lumineuse en transmission de la cavité. Une cavité à haute finesse est fréquemment utilisée pour des mesures de Cavity Ring-Down Spectroscopy (CRDS) afin de mesurer le spectre d'absorption d'un gaz [Wheeler et al., 1998] [Romanini et al., 1996].

Ici avec une finesse de l'ordre de 4000, on s'attend à obtenir un temps de décroissance de l'ordre de 1  $\mu$ s qui est difficilement mesurable puisqu'il faut préalablement couper le faisceau incident avec un temps négligeable par rapport au temps de décroissance.

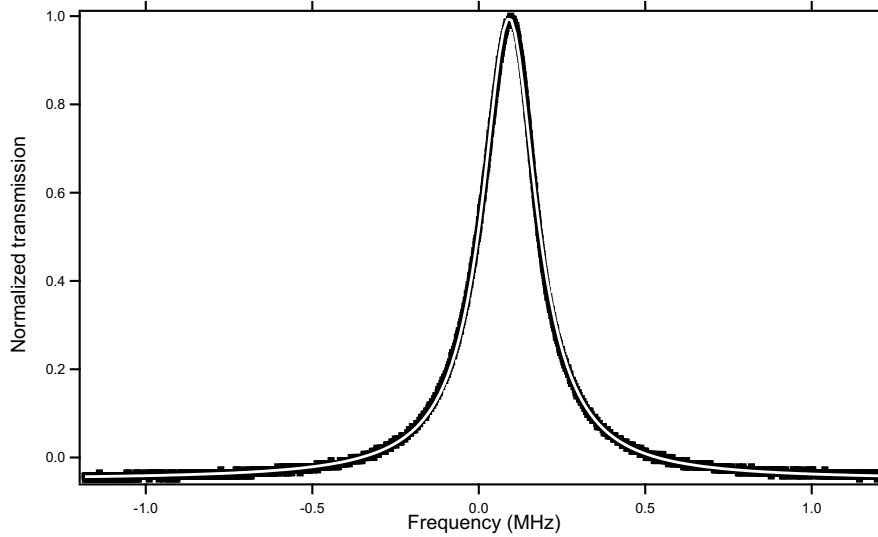
La technique utilisée ici est basée sur la modulation de phase du faisceau incident, où seule une bande latérale est placée proche de résonance de la cavité [Bernon, 2011]. La fréquence de modulation est scannée avec une vitesse connue précisément (en pratique on utilise un synthétiseur radio-fréquence avec une vitesse de scan de 12 MHz/ms), et l'on regarde la transmission de cette bande latérale dans la cavité. Le graphe obtenu est présenté Fig. 3.6, où le trait blanc est un ajustement par une lorentzienne. La largeur à mi-hauteur mesurée expérimentalement est  $\delta\nu = 546$  kHz.

**Finesse expérimentale** Grâce à la mesure de la largeur spectrale et de l'intervalle spectral libre, nous pouvons obtenir la valeur de la finesse expérimentalement par la relation :

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_{ISL}}{\delta\nu} = 1788. \quad (3.13)$$

La valeur expérimentale est différente d'un facteur supérieur à 2 par rapport à la valeur théorique  $\mathcal{F}_{1560} = 4160$ . Cette différence peut être expliquée soit par la moins bonne réflectivité des miroirs par rapport aux données constructeur, soit par les pertes de la cavité.

A 780 nm, la finesse théorique est de l'ordre de  $\mathcal{F}_{780} = 100\,000$  donc une mesure par temps de décroissance est réalisable expérimentalement puisqu'on s'attend à un temps de l'ordre de  $\tau = 25$   $\mu$ s. En utilisant un modulateur acousto-optique pour éteindre le faisceau (avec un temps d'extinction de l'ordre de 200 ns) et une photodiode rapide, nous pouvons



**Figure 3.6** – La ligne noire est la mesure de la largeur spectrale de la cavité par le déplacement en fréquence d’une bande latérale. La ligne blanche est un ajustement par une lorentzienne.

ainsi mesurer des temps courts. La caractérisation de la cavité à 780 nm est en cours de réalisation actuellement (voir Sec.3.3 pour les avancées sur cette étude).

Cette étude est faite sur une cavité "test", qui comprend les mêmes caractéristiques mais est sujette aux vibrations et aux flux d’air changeant l’indice de réfraction local puisqu’elle n’est pas sous vide. On s’attend alors à une finesse inférieure à la finesse que l’on a sur l’expérience principale. Une mesure complémentaire doit alors être faite sur la cavité à l’intérieur de l’enceinte à vide.

**Facteur de qualité** Une cavité optique peut être considérée comme un filtre passe-bas fréquentiel; à ce titre le facteur de qualité noté  $Q$  détermine de combien la résonance est piquée, et donc détermine si le filtre est très sélectif (pour un facteur de qualité très élevé) ou peu sélectif (pour un facteur de qualité bas). Ce paramètre joue un rôle important en métrologie et surtout pour les horloges atomiques à réseau optique où l’oscillateur local est un laser préalablement injecté dans une cavité à très haut facteur de qualité permettant ainsi une largeur spectrale très fine et une instabilité de fréquence de l’ordre de  $10^{-16}$  à court terme [Jiang et al., 2011] [Cole et al., 2012].

Le but ici n’est pas d’obtenir une largeur spectrale du laser très fine, mais de l’utiliser comme piège dipolaire sur les atomes. La finesse est ici déterminé par la profondeur de piège voulu. Le facteur de qualité peut être calculé connaissant la finesse et l’intervalle spectrale libre :

$$Q = \frac{\mathcal{F}\nu_0}{\Delta\nu_{ISL}}. \quad (3.14)$$

Ainsi, le facteur de qualité à 1560 nm est  $Q = 3.5 \cdot 10^8$ .

Nous avons décrit ici la cavité optique utilisée pour le piégeage dipolaire. Cette cavité permet de réaliser un piège croisé de haute intensité avec une profondeur de piège de l’ordre de 1 mK. La finesse de 4000 relativement haute requiert un asservissement entre la fréquence du laser et la résonance de la cavité pour maintenir une puissance constante sur les atomes. Nous avons choisi d’asservir le laser sur la cavité à cause des bandes passantes accessibles, en utilisant une technique Pound-Drever-Hall comme nous allons le voir dans la section suivante.

Le piège dipolaire amène un déplacement lumineux sur la transition de mesure, qui peut être compensé par un laser à 1529 nm dans le bleu de la transition (Sec. 3.2.5). Ce laser va également être injecté dans la cavité pour avoir une homogénéité spatiale quasi-idéale. Nous allons voir qu'une technique basée sur une modulation serrodyne permet un asservissement plus robuste qu'un asservissement classique.

### 3.2.3 Laser de piège et asservissement sur la cavité

Le laser utilisé pour le piégeage est une source commerciale (DFB EDFA, de modèle RTAdE15PztSPm de chez Koheras Adjustik NKT Photonics) de largeur spectrale inférieure à 1 kHz calculée sur 120  $\mu$ s, qui est ensuite amplifié jusqu'à 5 W (EDFA Keopsys) avant d'être injecté dans la cavité avec 30% d'injection maximum.

Afin d'éviter des fluctuations de puissance dans la cavité, il faut asservir la fréquence du laser sur la cavité ou inversement. En effet, la fréquence du laser fluctue, et la longueur de la cavité dérive avec le temps, un asservissement est donc nécessaire pour maintenir la résonance. L'asservissement utilise une technique appelée Pound-Drever-Hall [Hall and Hänsch, 1984] [Black, 2001], qui permet une grande bande passante et donc une correction sur de larges échelles de fréquences.

Il a été choisi d'asservir la fréquence laser sur la résonance de la cavité et non l'inverse car la bande passante de correction sur les actionneurs piezo-électriques qui contrôle la position d'un des miroirs de la cavité n'est que de l'ordre de centaines de Hz, alors que l'on recherche une bande passante de l'ordre d'une centaine de kHz minimum, bien supérieure aux bruits acoustiques de la cavité jusqu'à 10 kHz.

Une technique basée sur une modulation serrodyne a également été développée ensuite pour asservir le laser 1529 nm pour la compensation du déplacement lumineux de manière plus robuste et avec une bande passante plus large [Kohlhaas et al., 2012].

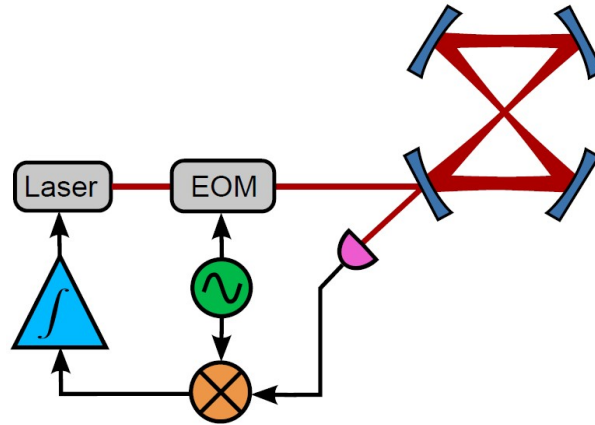
Pour la remise en place de l'expérience après le déménagement, deux facteurs auraient pu nous prendre beaucoup de temps : le vide et l'injection du laser dans la cavité haute finesse. Après 24 h de pompage, le vide est revenu à sa valeur nominale.

La deuxième chose que nous avons vérifiée à l'arrivée à Bordeaux est l'injection dans la cavité. Heureusement, certains modes étaient encore résonants avec la cavité, ce qui nous a permis ensuite de retrouver le mode fondamental dans la cavité. Les valeurs de gain dans la boucle d'asservissement étaient par contre différentes. Pour les deux asservissements présentés dans cette section, nous avons dû faire quelques modifications sur la carte Proportionnel-Intégrateur pour le signal haute fréquence et basse fréquence afin de retrouver un asservissement performant.

Nous en avons également profité pour apporter des améliorations, comme par exemple des interrupteurs électroniques pour optimiser la séquence. Nous pouvons ainsi couper la puissance dans la cavité de manière précise, pendant l'imagerie par temps de vol sur les atomes par exemple.

#### Asservissement Pound-Drever-Hall via un modulateur acousto-optique

La méthode Pound-Drever-Hall (PDH) [Drever et al., 1983] [Pound, 1946] est couramment utilisée pour asservir un laser sur une cavité, elle est basée sur une mesure de spectroscopie par modulation de fréquence. Le laser incident est modulé en phase pour créer deux bandes latérales à une fréquence de modulation supérieure à la largeur spectrale de la cavité et différente des multiples de l'intervalle spectral libre. Ainsi, quand la porteuse est en résonance avec la cavité, les bandes latérales vont permettre d'obtenir un signal d'erreur dispersif par



**Figure 3.7** – Schéma de principe de l'asservissement Pound-Drever-Hall. Le laser est modulé en phase par un modulateur électro-optique (MEO ou EOM en anglais). Seule la porteuse est résonante, et le signal collecté sur la photodiode donne le battement entre la porteuse et les bandes latérales proportionnel au déphasage de la porteuse. Ce signal est démodulé, puis amplifié et intégré avant de rétroagir sur le laser.

battement avec la porteuse. La porteuse va se déphaser dans la cavité selon sa fréquence par rapport à la résonance, et lorsqu'elle est retransmise dans la direction de la réflexion initiale il va apparaître un battement avec les bandes latérales non injectées.

L'amplitude de ce battement est proportionnelle au déphasage, et après démodulation on obtient le signal d'erreur utilisé pour asservir le laser, voir le schéma de principe Fig. 3.7. La bande passante de correction que l'on peut atteindre avec cette méthode est limitée par l'actuateur ou l'électronique RF utilisé dans la boucle de verrouillage.

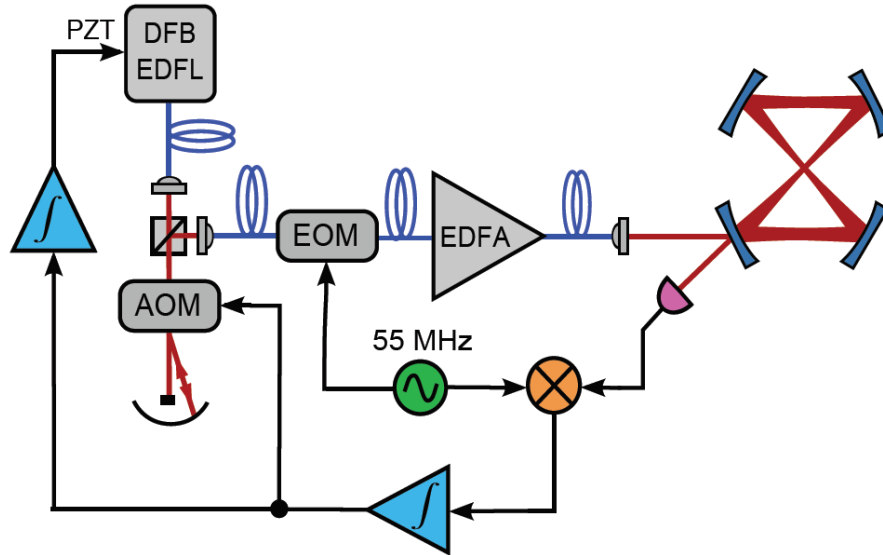
On agit sur le piezo du laser fibré pour les corrections à basse fréquence (typiquement jusqu'à 1 kHz) et on réalise la correction à plus hautes fréquences sur un modulateur acousto-optique (MAO ou AOM en anglais) en double passage, ce qui permet de conserver l'alignement du faisceau en sortie quelle que soit la fréquence sur le MAO.

Un schéma du montage expérimental est présenté Fig. 3.8. Le laser passe à travers un MAO en double passage et en espace libre avant d'être réinjecté dans une fibre. Il est ensuite modulé en phase et amplifié par un amplificateur fibré (*EDFA* pour *Erbium Doped Fiber Amplifier* en anglais) pour atteindre 4 W de puissance. Le signal de battement est obtenu sur une photodiode. On démodule ensuite le battement pour obtenir le signal d'erreur. La correction sur le MAO est envoyée après intégration du signal d'erreur, et la correction sur le piezo du laser après une double intégration pour s'assurer que les basses fréquences soient principalement compensées par celui-ci.

La performance de l'asservissement est donnée en mesurant le bruit de fréquence relatif entre le laser et la résonance de la cavité (courbe grise, Fig. 3.9) [Vanderbruggen, 2012]. La densité spectrale de puissance de bruit de fréquence augmente à partir du kHz jusqu'à atteindre une bosse de bruit (faible ici, mais plus accentuée sur d'autres données) à 250 kHz, cette valeur donne la bande passante de l'asservissement. La limite de bande passante provient du temps que met l'onde acoustique dans le cristal du MAO pour se propager à tout le faisceau. La focalisation du faisceau dans le modulateur permet d'obtenir une plus grande bande passante jusqu'au MHz.

Néanmoins, si l'on utilise un modulateur électro-optique au lieu d'un modulateur acousto-





**Figure 3.8** – Schéma expérimental de l'asservissement du laser de piège sur la cavité. La correction haute fréquence se fait sur le MAO en double passage, et la correction basse fréquence sur le piezo du laser.

optique, la bande passante possible est alors de plusieurs dizaines de GHz [Hall and Hänsch, 1984], mais d'autres contraintes apparaissent, comme nous allons le voir.

### Asservissement par modulation serrodyne

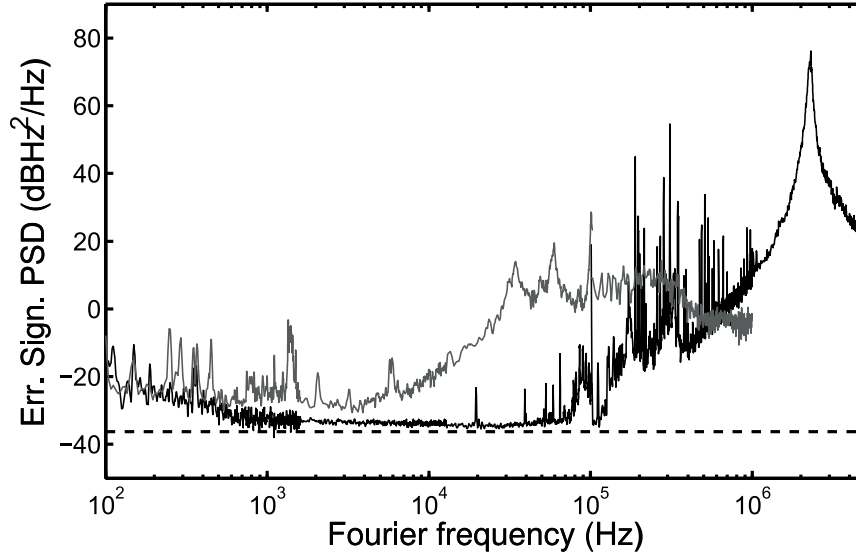
La modulation de fréquence serrodyne appliquée à un modulateur électro-optique (MEO) permet des décalages de fréquence de l'ordre du GHz [Johnson et al., 2010]. Comparé à un modulateur acousto-optique avec des décalages de l'ordre du MHz, la modulation serrodyne est d'un grand intérêt pour la spectroscopie en général.

Un MEO est un modulateur de phase qui change la phase du faisceau lorsqu'on lui applique une tension. L'application d'une rampe de tension sur le MEO résulte donc en une rampe de phase sur le faisceau optique et donc à un décalage de fréquence égal à la pente de la rampe. Lors de cette rampe, il faut faire attention à ne pas endommager le modulateur en envoyant une tension trop haute (pour laquelle on a un déphasage de plusieurs  $\pi$ ) : une solution est d'envoyer un signal en dent de scie d'amplitude  $2\pi$  pour la phase et de période  $T$ . Ainsi, le décalage de fréquence est directement de  $1/T$ .

En pratique, un signal en dents de scie peut être obtenu grâce à une ligne de transmission non linéaire (NLTL), qui transforme un signal sinusoïdal en signal en dent de scie de même fréquence avec une grande fidélité. De cette manière, des décalages de fréquence de 200 MHz à 1.2 GHz [Johnson et al., 2010] ou de 350 MHz à 1.65 GHz [Houtz et al., 2009] peuvent être obtenus avec une efficacité de 80% maximum limitée par la qualité du signal en dents de scie.

Cette technique peut être appliquée dans notre cas pour l'asservissement du laser sur la cavité [Kohlhaas et al., 2012], où la correction de fréquence se fait par modulation serrodyne sur un MEO. Le signal d'erreur est obtenu comme précédemment par battement entre les bandes latérales et la porteuse, l'intérêt étant d'utiliser le MEO comme modulateur de phase et comme actuateur de la correction de fréquence.

Un schéma expérimental est donné Fig. 3.10.



**Figure 3.9** – Densité spectrale de puissance de bruit de fréquence pour l’asservissement Pound-Drever-Hall avec le MAO (en gris), et pour l’asservissement par modulation serrodyne (en noir). Les pointillés correspondent au bruit de photons.

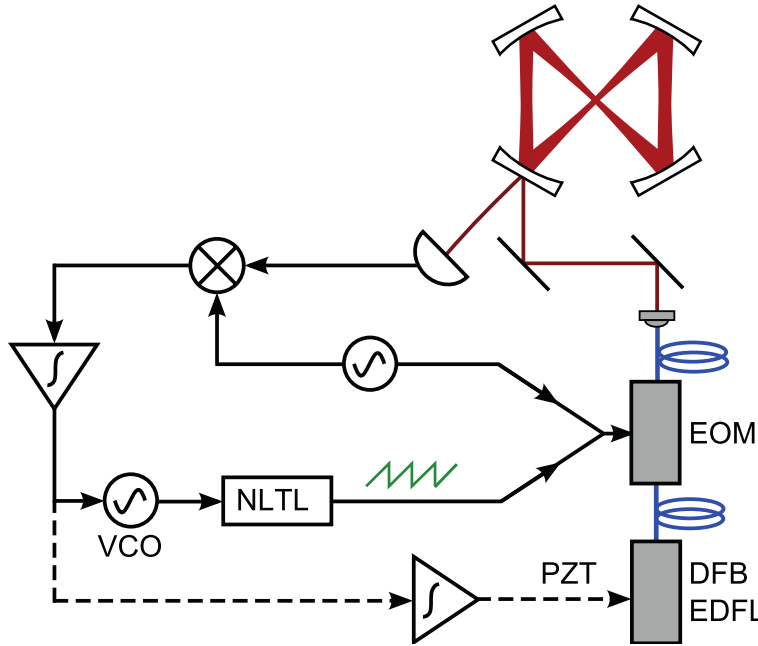
Le signal d’erreur obtenu après démodulation est intégré et envoyé pour corriger la fréquence du générateur (*VCO* pour *Voltage Controlled Oscillator* en anglais) délivrant le signal au MEO après passage dans la ligne de transmission non linéaire (*NLTL* pour *Non Linear Transmission Line* en anglais). La cavité pouvant dériver à long terme hors de la bande de correction de l’asservissement, une correction a été ajoutée sur le piezo du laser avec un signal d’erreur intégré une deuxième fois.

Le graphe Fig. 3.9 montre la densité spectrale de bruit de fréquence pour l’asservissement via un MAO (en gris) et pour l’asservissement par modulation serrodyne via un MEO (en noir) pour le même laser à 1560 nm sur la cavité à haute finesse. Pour obtenir ces données, les fluctuations de tension du signal d’erreur ont été analysées dans la boucle de verrouillage puis converties en bruit de fréquence connaissant la pente du signal PDH et compensées pour prendre en compte la fonction de transfert de la cavité  $[1 + (2\nu/\Delta\nu)^2]^{-1/2}$ .

La bande passante de l’asservissement par modulation serrodyne est de 2.3 MHz comme le montre la bosse de bruit à cette fréquence, un ordre de grandeur au-dessus de la bande passante de l’asservissement via le MAO. On a donc également une meilleure stabilité à basse fréquence pour la modulation serrodyne, puisque le gain de correction est plus grand à ces fréquences.

Aussi, le spectre de bruit est au bruit de photon (ligne pointillée) sur la photodiode entre 2 et 50 kHz. La bande de correction est limitée à 280 MHz pour sa borne basse (due à la limite du VCO), et à 500 MHz pour sa borne haute (limitée par la fréquence de coupure de l’amplificateur RF avant le NLTL). La bande de correction de 220 MHz est elle aussi d’un ordre de grandeur supérieure à celle de l’asservissement via un MAO, et peut être encore grandement améliorée en utilisant de l’électronique RF à large bande.

Les deux types d’asservissement utilisés sur l’expérience ont été détaillés dans cette section. Le laser pour le piège dipolaire est asservi sur la cavité par une technique PDH via un MAO en double passage, menant à une plage de correction de 20 MHz et une bande passante



**Figure 3.10** – Schéma de l'asservissement par modulation serrrodyne. La correction optionnelle (en pointillés) appliquée sur le piezo du laser permet de corriger les dérives de fréquence à long terme. Le MEO a ici une double utilisation : il crée les bandes latérales et permet de corriger la fréquence.

de 250 kHz. Un asservissement basée sur une modulation serrrodyne a été développée, permettant une plage de correction de 220 MHz et une bande passante de 2.3 MHz grâce à la correction de fréquence sur un MEO. Cet asservissement est utilisé sur le laser fibré à 1529 nm utilisé pour la compensation du déplacement lumineux différentiel sur la transition de mesure.

Cette première partie de chapitre a été dédiée à la caractérisation des éléments de l'expérience : le banc optique laser, les enceintes à vide et le laser de piège et la cavité principalement. Nous allons voir dans la deuxième partie leur utilisation sur les atomes.

Pour finaliser la caractérisation du piège dipolaire, nous allons mesurer directement le potentiel dipolaire intra-cavité grâce aux atomes piégés à l'intérieur.

Ensuite, la préparation des atomes en vue de la mesure va être discutée. Il faudra en effet compenser le déplacement lumineux inhomogène sur la transition de mesure, et préparer les atomes dans le même sous niveau d'un état hyperfin par pompage optique.

Pour les résultats de cette thèse, la mesure non destructive est en simple passage sur le nuage d'atomes. Le fait d'injecter le faisceau de mesure en résonance avec la cavité permet un gain notable en rapport signal à bruit. Cette étude est en cours, et nous allons montrer les résultats préliminaires.

Ce chapitre s'achève sur le refroidissement des atomes jusqu'à la condensation de Bose-Einstein, et la manipulation de condensats ou d'atomes ultra-froids dans les différents modes transverses électromagnétiques de la cavité.

### 3.2.4 Tomographie des modes de la cavité

La difficulté primordiale d'utiliser une cavité à haute finesse pour le piège dipolaire est de ne pas pouvoir mesurer les caractéristiques du faisceau à l'intérieur de la cavité. Les valeurs théoriques sont souvent éloignées des valeurs mesurées car elles ne prennent pas en compte les

Transition	Longueur d'onde (nm)	Moments dipolaires $d$ ( $ea_0$ )
$5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2}$	794.979	4.221
$5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$	780.241	5.956
$5P_{3/2} \rightarrow 6S_{1/2}$	1366.875	6.047
$5P_{3/2} \rightarrow 4D_{3/2}$	1529.261	3.633
$5P_{3/2} \rightarrow 4D_{5/2}$	1529.366	10.899

**Table 3.1** – *Éléments dipolaires importants pour le déplacement lumineux sur les états  $5S_{1/2}$  et  $5P_{3/2}$ . L'unité est  $ea_0$ , où  $e$  est la charge de l'électron et  $a_0$  le rayon de Bohr.*

différentes pertes à l'intérieur de la cavité. Ainsi, la finesse mesurée à 1560 nm est plus faible d'un facteur supérieur à 2, donc la puissance intra-cavité et le potentiel dipolaire différent alors des valeurs attendues. Il est donc nécessaire d'utiliser une technique permettant de mesurer directement la puissance intra-cavité.

Les mesures traditionnelles de puissance, d'intensité ou de profil de faisceau ne peuvent être appliquées ici, puisque mettre un détecteur dans la cavité amène énormément de perte et le mode de la cavité est détruit. Une technique de tomographie des modes de la cavité a été développée [Bertoldi et al., 2010, Brantut et al., 2008, Courteille et al., 2001], mesurant les atomes dans différentes régions du déplacement lumineux induit par le potentiel dipolaire. Cette méthode permet donc de mesurer indirectement la profondeur du piège en imageant les atomes à l'intérieur.

Le laser de piège à 1560 nm est proche de résonance des transitions  $5P_{3/2} \rightarrow 4D_{3/2,5/2}$  de longueurs d'onde de 1529 nm pour les atomes de  $^{87}\text{Rb}$ , comme le montre la Fig. 3.11. Un déplacement lumineux est alors induit sur cette transition et est déterminé par l'équation Eq. 3.1 où la polarisabilité peut être calculée d'après l'équation Eq. 3.6 en prenant en compte les niveaux en question.

Le tableau Tab. 3.1 donne les moments dipolaires des états  $5S_{1/2}$  et  $5P_{3/2}$  avec les transitions possibles. La radiation à 1560 nm est dans le rouge pour les quatre transitions :  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ ,  $5P_{3/2} \rightarrow 4D_{3/2,5/2}$  et  $5P_{3/2} \rightarrow 6S_{1/2}$  (voir Fig. 3.11(a)). Intuitivement, en comparant les désaccords de fréquence et les moments dipolaires des niveaux, le niveau  $5P_{3/2}$  subira un plus grand déplacement lumineux que le niveau  $5S_{1/2}$ . En effet, la longueur d'onde du piège est plus proche de 1529 nm que de 780 nm et la contribution des éléments dipolaires pour la transition  $5P_{3/2} \rightarrow 4D_{5/2}$  est plus forte que les autres.

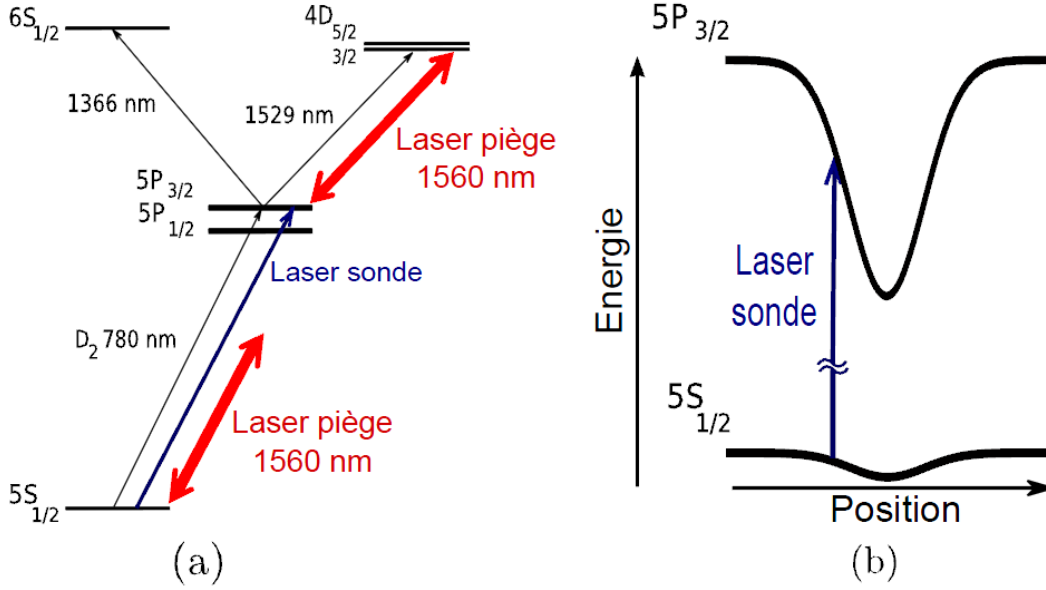
Si l'on calcule les polarisabilités scalaires sur les états  $5S_{1/2}$  et  $5P_{3/2}$  d'après l'Eq. 3.6 et en prenant les moments dipolaires du tableau Tab. 3.1, on obtient :

$$\alpha_{5S_{1/2}} = 6.83 \cdot 10^{-39} \text{Jm}^2/\text{W}, \quad (3.15)$$

$$\alpha_{5P_{3/2}} = 3.255 \cdot 10^{-37} \text{Jm}^2/\text{W}. \quad (3.16)$$

Le déplacement lumineux sur l'état  $5P_{3/2}$  sera donc  $\beta = \alpha_{5P_{3/2}}/\alpha_{5S_{1/2}} = 47.7$  fois plus important que sur l'état  $5S_{1/2}$ , comme le montre l'allure des déplacements lumineux sur les deux niveaux sur la Fig. 3.11(b). Ce déplacement lumineux inhomogène sur la transition à 780 nm nous sera utile pour charger les atomes dans le piège dipolaire comme nous allons le voir dans la section 3.4.2, mais sera source de décohérence lors de la mesure et devra donc être compensé pour que le temps d'interrogation n'en soit pas limité.

Cet effet est utilisé ici pour observer les atomes piégés à différents déplacements lumineux comme le montre la Fig. 3.12 tirée de [Bernon, 2011]. Nous pouvons donc ensuite reconstruire



**Figure 3.11** – (a) Transitions d'intérêts pour le déplacement lumineux sur les états  $5S_{1/2}$  et  $5P_{3/2}$ . (b) Déplacement lumineux total induit sur la transition de mesure  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ .

le profil du faisceau, calculer la profondeur du piège et ainsi obtenir la puissance intra-cavité.

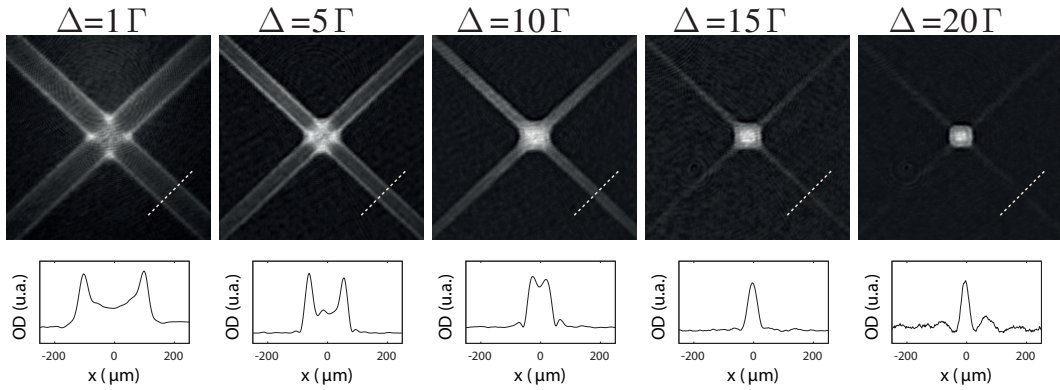
Expérimentalement, le faisceau pour l'imagerie d'absorption est désaccordé dans le rouge par différentes valeurs lorsque les atomes sont dans le piège dipolaire. On obtient les images de la Fig. 3.12, où l'espacement entre les atomes des deux bords du piège nous donne la largeur du déplacement lumineux et donc directement le profil d'intensité du faisceau de piège. Mesurant cette distance, nous pouvons reconstruire le profil du faisceau, et déterminer le potentiel dipolaire appliqué.

Afin de connaître exactement l'intensité du piège sur les atomes, cette mesure a été refaite au LP2N après le déménagement. Elle permet de calibrer les puissances de piège avant et après la cavité par rapport à la puissance à l'intérieur de la cavité. Le chargement d'atomes dans le piège après le déménagement était plus bas, nous suspicions plus de pertes dans la cavité, ce qui a motivé le fait de reprendre cette mesure.

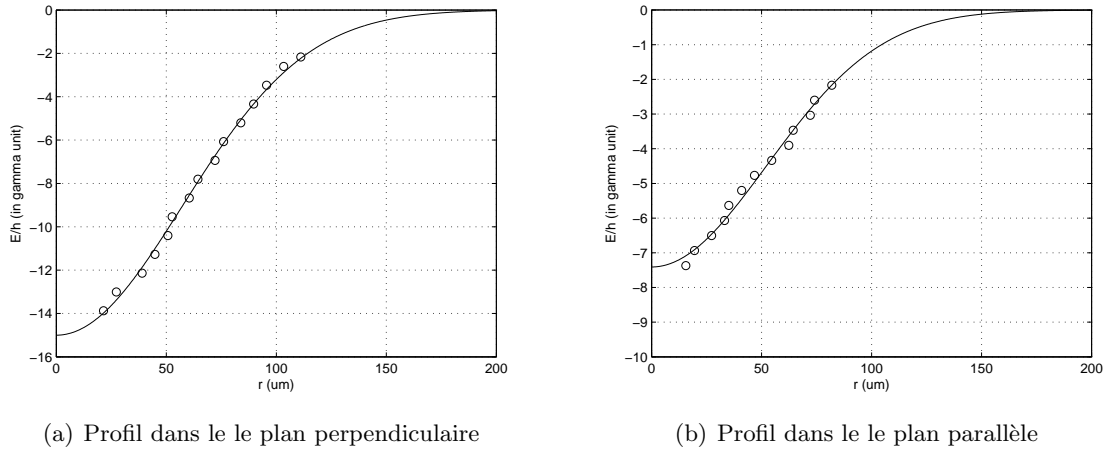
Le profil dans le plan perpendiculaire à la cavité après reconstruction est présenté Fig. 3.13(a), et celui dans le plan de la cavité sur la Fig. 3.13(b). Ces profils sont gaussiens et seulement la moitié est montrée par raison de symétrie. Dans le plan perpendiculaire, l'ajustement par une gaussienne nous donne une largeur de faisceau au centre du piège de  $\omega_{\perp}^{(1560)} = 113.7 \pm 2.5 \mu\text{m}$  ce qui est de l'ordre de grandeur de la largeur théorique de  $\omega_{\perp}^{(1560)} = 128 \mu\text{m}$ . Dans le plan parallèle à la cavité, nous mesurons  $\omega_{\parallel} = 104.5 \pm 2.5 \mu\text{m}$ , qui est plus éloigné de la valeur théorique  $\omega_{\parallel} = 81 \mu\text{m}$ .

Ces deux mesures ont été prises pour des puissances intra-cavité différentes. Le désaccord du faisceau d'imagerie mesuré au fond du puits de potentiel intra-cavité est de  $\delta_{\perp} = -15.0 \pm 0.33\Gamma$  dans le plan perpendiculaire, et  $\delta_{\parallel} = -7.4 \pm 0.24\Gamma$  dans le plan de la cavité.

Sous l'influence du déplacement lumineux du piège, la transition d'imagerie de fréquence



**Figure 3.12** – Principe de la tomographie du potentiel intra-cavité. (Haut) Les images par absorption des atomes dans le potentiel dipolaire sont prises pour différents désaccords du faisceau d'imagerie de  $\Delta = 1\Gamma$  à  $\Delta = 20\Gamma$ , donc pour différentes positions dans le potentiel dipolaire. (Bas) La densité optique est intégrée selon un des bras du piège (ligne pointillée à  $45^\circ$ ).



(a) Profil dans le le plan perpendiculaire

(b) Profil dans le le plan parallèle

**Figure 3.13** – Potentiel dipolaire optique du mode fondamental mesuré par tomographie. (a) Profil du potentiel dans le plan perpendiculaire à la cavité. (b) Profil du potentiel dans le plan de la cavité. L'abscisse est la largeur du potentiel et l'ordonnée est le désaccord du faisceau d'imagerie en unité de la largeur naturelle  $\Gamma$ . Les ajustements (lignes noires) donnent  $\omega_{\perp} = 113.7 \pm 2.5 \mu$  et  $\omega_{\parallel} = 104.47 \pm 2.5 \mu$ .

$\omega_{im}$  aura une énergie de :

$$\hbar\omega_{im} = \hbar\omega_0 + \frac{\alpha_{5S_{1/2}} I}{2\epsilon_0 c} (1 - \beta), \quad (3.17)$$

avec  $w_0$  la fréquence de transition nominale, et  $\beta = \frac{\alpha_{5P_{3/2}}}{\alpha_{5S_{1/2}}} = 47.7$  le ratio des polarisabilités.

Si le faisceau d'imagerie a un désaccord  $\delta$  correspondant à  $|\delta| = |\omega_{im} - \omega_0|$ , il sera absorbé par les atomes ayant une énergie potentielle de :

$$U_{dip} = \frac{\alpha_{5S_{1/2}} I}{2\epsilon_0 c} = \frac{\hbar|\delta|}{\beta - 1}. \quad (3.18)$$

A partir du potentiel intra-cavité dans un bras du piège en fonction du désaccord du faisceau d'imagerie, nous pouvons calculer l'intensité et la puissance intra-cavité.

En exprimant l'intensité en fonction du désaccord dans l'Eq. 3.18, on obtient :

$$I_{intra} = \frac{4\epsilon_0 c \hbar |\delta_{\perp}|}{\alpha_{5P_{3/2}} - \alpha_{5S_{1/2}}} = 3.2 \cdot 10^8 \text{ W/m}^2, \quad (3.19)$$

$$P_{intra} = \frac{\pi \omega_{\parallel} \omega_{\perp} I_{intra}}{2} = 11.90 \text{ W}. \quad (3.20)$$

La puissance totale intra-cavité pour la mesure dans le plan perpendiculaire à la cavité est de 8.7 W, pour les deux bras du piège. De même, la puissance lors de la mesure dans le plan de la cavité avec un désaccord  $\delta_{\parallel} = -7.4 \pm 0.24\Gamma$  donc un potentiel dipolaire  $U_{dip} = 7.4 \mu\text{K}$  est de 5.86 W.

Cette mesure par tomographie des déplacements lumineux nous permet donc de reconstruire le profil du potentiel dipolaire *in situ*, et ainsi de connaître la puissance intra-cavité exacte.

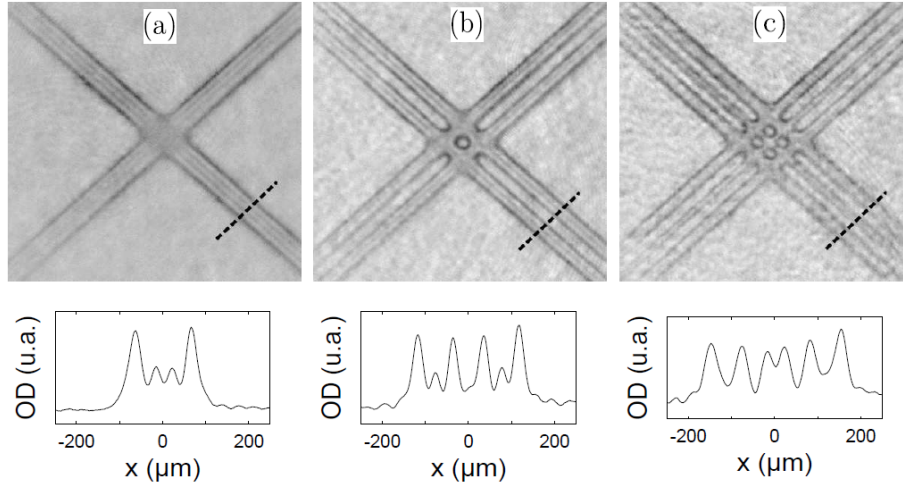
L'utilisation des différents modes de la cavité devrait permettre la manipulation, la séparation et l'interférence de plusieurs ensembles atomiques (voir Sec 3.5). En effet, en injectant un des modes transverses  $\text{TEM}_{mn}$  pendant le chargement d'atomes, on obtient 4 ensembles atomiques dans le plan de la cavité pour le mode  $\text{TEM}_{10}$  ou 9 ensembles pour le mode  $\text{TEM}_{20}$  comme le montre la Fig. 3.14 (tirée de [Bernon, 2011]). De la même manière, les profils des modes d'ordre supérieur peuvent être mesurés.

En pratique, pour obtenir une bonne injection des modes transverses dans la cavité, on optimise l'injection du mode fondamental puis on utilise des masques de phase dans le chemin incident, dont le principe est exposé sur la Fig. 3.15. Un masque avec un saut de phase (0 -  $\pi$ ) permet de projeter le mode gaussien dans le mode  $\text{TEM}_{10}$  (figure de gauche, représenté en bleu et encadré en bas à gauche) avec un recouvrement de 79% (courbe verte sur la figure et encadré en haut à droite), et un masque de phase (0 -  $\pi$  - 0) permet d'obtenir le mode  $\text{TEM}_{20}$  (en bleu et encadré en bas à gauche, figure de droite) avec un recouvrement de 68% (en vert, encadré en bas à droite).

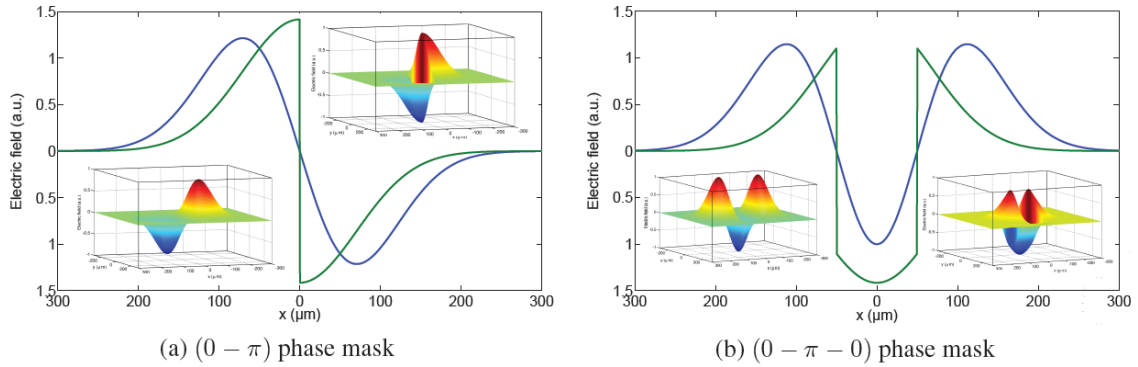
### 3.2.5 Contrôle du déplacement lumineux différentiel sur la transition de mesure

#### Compensation du déplacement lumineux différentiel avec un laser désaccordé dans le bleu

Lors de la mesure non destructive des atomes, le déplacement lumineux induit par le piège dipolaire est inhomogène sur la transition  $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ . On ne détecte pas la même



**Figure 3.14** – Tomographie des modes  $TEM_{00}$ ,  $TEM_{10}$  et  $TEM_{20}$ . On obtient respectivement un, quatre et neuf ensembles atomiques.



**Figure 3.15** – Transformation du mode par masque de phase. (gauche) Projection (en vert) sur un mode  $TEM_{10}$  (en bleu) avec un masque de phase  $(0 - \pi)$  (ou  $TEM_{01}$  selon l'axe  $z$ ). (droite) Projection (en vert) sur un mode  $TEM_{20}$  (en bleu) avec un masque de phase  $(0 - \pi - 0)$  (ou  $TEM_{02}$  selon l'axe  $z$ ).

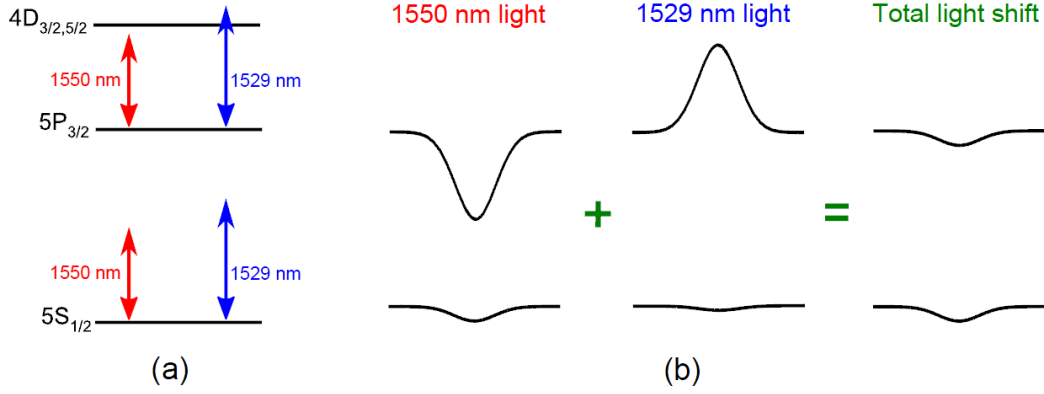
différence de population atomique selon la position du faisceau, et donc la mesure est biaisée. Afin de compenser ce déplacement inhomogène, on peut créer un déplacement lumineux inverse afin d'obtenir un déplacement lumineux total nul.

L'étude théorique et les mesures expérimentales suivantes ont été réalisées avec un laser de piège à 1550 nm et un laser de compensation à 1529 nm. Cette compensation a été utilisée pour l'asservissement de phase entre l'oscillateur local et l'ensemble cohérent d'atomes présenté Chap. 4.

Comme le montre la Fig. 3.16, le laser à 1529 nm est désaccordé dans le bleu des transitions  $5P_{3/2} \rightarrow 4D_{3/2,5/2}$  et va donc amener un déplacement lumineux contraire au laser 1560 nm ou 1550 nm.

Les polarisabilités liées à ces déplacements lumineux peuvent se calculer en prenant en compte les éléments dipolaires de chaque transition (Tab. 3.1). Ainsi, on obtient pour chaque





**Figure 3.16** – Compensation du déplacement lumineux du laser à 1550 nm par un laser à 1529 nm. (a) Le laser à 1550 nm est sur le rouge de la transition de la ligne D2 du  $^{87}\text{Rb}$  alors que le laser à 1529 nm est sur le bleu, tel que le déplacement lumineux peut être annulé en ajustant les puissances (b).

niveau et pour les deux longueurs d'onde :

$$\alpha_{5S_{1/2}}^{1550} = 6.79 \cdot 10^{-39} \text{ Jm}^2/\text{W}, \quad (3.21)$$

$$\alpha_{5P_{3/2}}^{1550} = 4.74 \cdot 10^{-37} \text{ Jm}^2/\text{W}, \quad (3.22)$$

$$\alpha_{5S_{1/2}}^{1529} = 6.86 \cdot 10^{-39} \text{ Jm}^2/\text{W}, \quad (3.23)$$

$$\alpha_{5P_{3/2}}^{1529} = -3.34 \cdot 10^{-35} \text{ Jm}^2/\text{W}. \quad (3.24)$$

La polarisabilité du niveau  $5P_{3/2}$  à 1529 nm est plus forte qu'à 1550 nm, on aura donc besoin de moins de puissance à 1529 nm pour compenser le déplacement lumineux à 1550 nm. Le ratio de puissance peut être calculé pour satisfaire la condition de compensation pour laquelle le déplacement au centre du piège est le même pour les deux états :

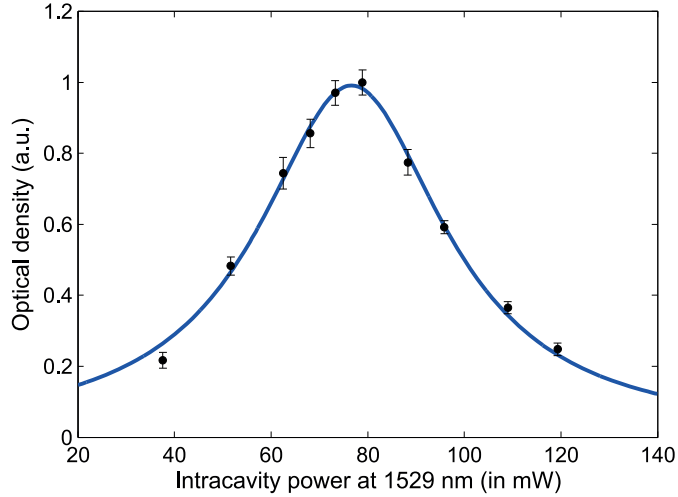
$$\frac{P_{1550}}{P_{1529}} = \frac{|\alpha_{5S_{1/2}}^{1529} - \alpha_{5P_{3/2}}^{1529}|}{|\alpha_{5P_{3/2}}^{1550} - \alpha_{5S_{1/2}}^{1550}|} \simeq \frac{|\alpha_{5P_{3/2}}^{1529}|}{|\alpha_{5P_{3/2}}^{1550}|} \simeq 70. \quad (3.25)$$

Étant plus proche de résonance, le laser à 1529 nm doit être 70 fois moins puissant que celui à 1550 nm pour que la transition de mesure soit homogène. On peut remarquer alors que son effet sur les états fondamentaux sera négligeable par rapport au faisceau 1560 nm<sup>2</sup>.

Le laser 1550 nm est asservi sur la cavité par la technique Pound-Drever-Hall, et l'asservissement par modulation serrodyne a été réalisé pour le laser à 1529 nm. On trouve expérimentalement la valeur de compensation en détectant les atomes par absorption à la fréquence de la ligne D2 pour différentes puissances du laser à 1529 nm. Après le chargement des atomes dans le piège dipolaire, la puissance intra-cavité à 1550 nm est fixée à 6.4 W et la puissance à 1529 nm à différentes valeurs.

La Fig. 3.17 nous montre la densité optique mesurée par absorption en fonction de la puissance intra-cavité à 1529 nm. La compensation du déplacement lumineux est réalisée

2. Le déplacement lumineux sur la transition  $|F=1\rangle \rightarrow |F=2\rangle$  est une source de décohérence pour l'étude du Chap. 4. En effet, ce déplacement n'est pas homogène sur la transition d'horloge est les atomes vont se déphaser différemment en fonction de leur position (voir Annexe. C). Étant moins puissant, le laser de compensation à 1529 nm ne contribue pas à cette limitation.



**Figure 3.17** – Réalisation de la compensation du déplacement lumineux. Le déplacement lumineux est annulé lorsque la densité optique des atomes mesurée sur la ligne D2 est maximale.

pour le maximum de densité optique, c'est-à-dire pour une puissance intra-cavité de 77 mW à 1529 nm. En effet, la taille du faisceau d'absorption est plus grande que la taille du nuage, donc une transition inhomogène mène à une perte de signal.

Le ratio de puissance expérimental est donc de 83, ce qui est proche de la valeur théorique de 70. Les puissances intra-cavités ont été dérivées de la puissance en transmission d'après la calibration par les mesures de tomographie précédentes, où la mesure de la finesse à 1529 nm donne  $\mathcal{F}_{1529} = 1000$ .

Expérimentalement, les deux lasers sont injectés dans la cavité pour avoir le plus d'homogénéité spatiale possible. Néanmoins, les tailles de faisceau sont différentes ( $\omega_0^{1550} = 122.6 \mu\text{m}$  à 1550 nm et  $\omega_0^{1529} = 111.9 \mu\text{m}$  à 1529 nm) et la compensation ne sera alors pas parfaite. On peut toutefois montrer [Kohlhaas, 2014] que l'écart de déplacement lumineux entre les deux niveaux dû à cet effet ne dépasse pas 0.5 MHz, ce qui est négligeable considérant le désaccord du faisceau utilisé pour la mesure et la largeur naturelle  $\Gamma$  du  $^{87}\text{Rb}$ .

### Utilisation des déplacements lumineux

Comme nous l'avons vu, le faisceau à 1529 nm amène un fort déplacement lumineux sur la transition de mesure des atomes. Ce faisceau peut être utilisé pour créer un mécanisme de refroidissement continu des atomes jusqu'à la condensation [Stellmer et al., 2013].

Nous pouvons ainsi créer différentes régions avec des déplacements lumineux différents où les atomes seront de plus en plus refroidis. Les atomes les plus énergétiques seront refroidis par effet Doppler dans le PMO, jusqu'à la température limite de Doppler, où ils pourront ensuite passer dans la région où le faisceau étroit à 1529 nm amène un fort déplacement lumineux. Dans cette région, les transitions des atomes ne seront plus en résonance avec le laser de refroidissement du PMO et les atomes pourront s'accumuler pour accroître la densité atomique et ainsi augmenter la densité dans l'espace des phases.

Ce processus est continu, et les atomes dans la région du faisceau à 1529 nm chauffés par collision et s'échappant du piège pourront être de nouveau refroidis dans la région du PMO les entourant. Après plusieurs cycles, les atomes peuvent s'accumuler dans la région centrale de fort déplacement lumineux et atteindre la condensation de Bose-Einstein si leur température le permet.

Cette technique peut être améliorée en ajoutant une région intermédiaire grâce au dépla-

cement lumineux du piège dipolaire, les atomes passeront alors du PMO d'une température de 150  $\mu\text{K}$ , à la région du piège dipolaire où la profondeur de piège peut être ajustée pour atteindre une température des atomes de l'ordre de quelques dizaines de  $\mu\text{K}$ . A partir de cette région, les atomes peuvent s'accumuler dans la région étroite du faisceau à 1529 nm de fort confinement et se condenser.

Dans ce type d'étude, la détection des atomes est difficile. En effet, les atomes ne ressentent pas tous le même déplacement lumineux donc ne seront pas tous détectés par le faisceau d'imagerie. Il faudra alors développer des techniques d'imagerie particulière pour bien comprendre la dynamique mise en jeu.

### 3.2.6 Préparation des états internes des atomes

Afin d'effectuer des mesures d'interférométrie, il est nécessaire de préparer un état initial de l'ensemble atomique, et un choix fréquent est de préparer les atomes dans le même sous-niveau  $m_F = 0$  d'un état hyperfin pour ne pas être sensible à l'effet Zeeman du premier ordre. Pour cela, on utilise le principe de "pompage optique" développé par Alfred Kastler [Kastler, 1933, 1966], pour lequel différents sous-niveaux sont adressés par une onde électromagnétique avec certaines polarisations.

L'idée est ici d'accumuler les atomes dans le sous-niveau  $m_F = 0$  d'un des deux états hyperfins, ce sous-niveau étant transparent, ou "noir", à la lumière utilisée. Pour le rubidium, on utilise couramment le fait que la transition  $|F = 2, m_F = 0\rangle \rightarrow |F' = 2, m_F = 0\rangle$  est interdite par les lois de sélection et de conservation, donc les atomes s'accumulent dans  $|F = 2, m_F = 0\rangle$ . En excitant la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  avec un faisceau rétro-réfléchi de polarisation linéaire, on accumule alors les atomes dans le sous-niveau  $m_F = 0$ ; l'état atomique est alors purement "polarisé".

Cette technique ne peut néanmoins pas être utilisée dans un nuage de forte densité, ce qui est notre cas puisque la densité du nuage est d'environ  $n = 10^{18}$  at/cm<sup>3</sup>. Dans un tel nuage, les photons émis n'ont plus de polarisation finie et peuvent donc être réabsorbés pour pomper le sous-niveau  $m_F = 0$  vers d'autres sous-niveaux. Le pompage optique est donc inefficace dans ce cas [Fleischhauer, 1999], et l'état n'est pas purement polarisé.

La méthode adoptée ici permet d'obtenir l'état  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  avec une pureté de 99% et avec plus du tiers d'atomes dans l'état final. Elle se base sur plusieurs cycles de purification, dans notre cas 3 cycles suffisent à atteindre une grande pureté de l'état. Au cours du chargement dans le piège, les atomes sont dans les sous-niveaux  $|F = 1, m_F = 0, \pm 1\rangle$  de manière équiprobable, les deux états hyperfins étant séparés d'une fréquence de 6.8 GHz, les transitions  $\pi$  entre ces deux états se font grâce à une radiation micro-onde.

Le cycle commence par transférer les atomes de  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  dans  $|F = 2, m_F = 0\rangle$  par un pulse micro-onde  $\pi$  afin d'obtenir déjà un tiers des atomes dans l'état voulu. Ensuite, un pulse du faisceau de repompeur polarisé  $\sigma^+/\sigma^-$  vient transférer les atomes dans  $|F = 1, m_F = \pm 1\rangle$  jusqu'aux sous-niveaux de l'état  $|F = 2, m_F = 0, \pm 1\rangle$ . Le faisceau est contre-propageant pour éviter d'éjecter les atomes hors du piège. A ce stade, les atomes peuplent plus le sous-niveau  $m_F = 0$  que les autres et afin de purifier l'ensemble, on transfère ces atomes dans le niveau  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  par un second pulse  $\pi$  avant d'envoyer un faisceau pousseur pour éjecter les atomes restants dans les sous-niveaux  $|F = 2, m_F = \pm 1\rangle$ .

Après un cycle, on obtient une pureté de 97% mesurée en comparant le nombre total d'atomes et le nombre d'atomes dans  $|F = 2\rangle$  par imagerie d'absorption, et après 3 cycles une pureté de 99%. On peut noter que cette méthode est applicable pour de fortes densités atomiques, et permet d'obtenir plus de 33% d'atomes dans  $|F = 1, m_F = 0\rangle$ . Avant la mesure non destructive, l'ensemble est typiquement de  $5 \times 10^5$  atomes à une température de 10  $\mu\text{K}$

(comme pour les mesures du Chap. 4).

Afin de pallier à la forte diminution du nombre d'atomes pendant la préparation des états internes de l'ensemble d'atomes, il est envisageable d'implémenter une technique basée sur le pompage de la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 0\rangle$ . Cette transition étant seulement liée à l'état  $|F = 1\rangle$ , si les atomes dans le bon sous-niveau  $m_F = 0$  sont transférés dans  $|F = 2\rangle$  aucun photon avec une polarisation indéfinie ne pourra être réabsorbé pour dégrader l'état.

Si après avoir transféré les atomes de  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  dans  $|F = 2, m_F = 0\rangle$  par un pulse micro-onde  $\pi$  on envoie un faisceau contra-propageant sur la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 0\rangle$  de polarisation  $\sigma^+/\sigma^-$ , alors les atomes restants sont transférés dans l'unique sous-niveau de  $|F' = 0\rangle$  à partir duquel ils peuvent repeupler le sous-niveau  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  par une transition  $\pi$  et ainsi s'accumuler dans le sous-niveau voulu. Il faut pour cela, en plus du faisceau de polarisation circulaire, avoir un faisceau de polarisation rectiligne.

Les deux sections précédentes étaient dédiées à la préparation de l'échantillon atomique avant une mesure. La compensation du déplacement lumineux et la préparation des atomes dans le même sous-niveau sont utilisées par exemple pour les mesures non destructives appliquées sur une horloge atomique du Chap. 4. Pour cette étude, et afin de par exemple créer des états comprimés de spin, la mesure peut être implémentée en résonance avec la cavité. C'est l'objet de la section suivante.

Lors du refroidissement des atomes jusqu'à la condensation, ou lorsqu'ils sont piégés dans les modes transverses supérieurs, nous les relâchons du piège pour des mesures de temps de vol. Le piège est coupé pendant la mesure et aucun déplacement n'est donc présent. La compensation n'a pas lieu d'être, et les atomes ne doivent pas non plus nécessairement être préparés dans le même sous-niveau.

### 3.3 Mesure intra-cavité

#### 3.3.1 Motivations

Dans le Chap. 2, nous avons vu la description d'une mesure de spectroscopie par modulation de fréquence pour un faisceau passant à travers les atomes. L'idée initiale de l'expérience était d'utiliser la cavité pour réaliser cette mesure. Les miroirs de la cavité ont été conçus pour réfléchir deux longueurs d'ondes : 1560 nm pour le piégeage dipolaire et 780 nm pour la mesure sur les atomes. La réflectivité à 1560 nm est fixée par la puissance intra-cavité du piège dipolaire souhaitée, dans notre cas la puissance intra-cavité est de 200 W pour avoir une profondeur de piège de l'ordre de 1 mK. Pour un laser incident de plusieurs W, cela donne une finesse de plusieurs milliers. Étant donné cette condition, la réflectivité à 780 nm devait être la meilleure possible pour avoir la plus grande finesse possible. Les miroirs ont été commandés à l'entreprise ATFilms et permettent une finesse théorique de 100 000 à 780 nm.

En effet, à l'intérieur de la cavité, le faisceau de mesure va interagir de nombreuses fois avec les atomes, la valeur moyenne de ce nombre étant fixé par le nombre de tours  $\mathcal{F}/\pi$  que fait le faisceau dans la cavité. Le déphasage du faisceau sonde dû aux atomes va donc être augmenté de ce même facteur. Pour évaluer le gain du rapport signal à bruit, il faut se placer à la même destructivité de l'ensemble atomique et prendre en compte la puissance circulant dans la cavité notée  $P_{circ}$  et définie par  $P_{inc} = \frac{\mathcal{F}}{P_{circ}}$ , où  $P_{inc}$  est la puissance incidente à la cavité. Le rapport signal à bruit défini par l'Eq. 2.28 est proportionnel à  $SNR = \sqrt{N_{bl}}\varphi$  donc va être amélioré d'un facteur  $\sqrt{\mathcal{F}}$  [Lye et al., 2003]. La finesse théorique de la cavité à 780 nm est de  $10^5$ , donc un facteur d'amélioration supérieur à 300 est attendu.

La force de la mesure  $\kappa$  définie par l'Eq. 2.32 augmente avec  $\sqrt{\mathcal{F}}$  car elle dépend également du déphasage total des atomes et de la racine carrée du nombre de photons incidents. On voit alors que le facteur de compression  $\xi^2$  (Eq. 2.31) peut dans ce cas plus facilement satisfaire la condition  $\xi_S^2 < 1$  (Eq. 1.22), et des états comprimés de spin avec de plus forts gains métrologiques peuvent être réalisés intra-cavité. Plusieurs groupes ont déjà démontré ces états par une mesure intra-cavité, nous pouvons citer par exemple [Cox et al., 2015, Leroux et al., 2010a].

Outre le fait de créer des états comprimés de spin, la mesure réalisée dans la cavité permet également d'améliorer les mesures dans le régime faible suivi de rétro-actions (comme par exemple dans [Vanderbruggen et al., 2014] ou dans l'étude du Chap. 4). En effet, l'intérêt d'une telle mesure est de tirer de l'information du système quantique sans le détruire ni le projeter pour ensuite le corriger. En interférométrie atomique, on cherchera à faire une succession de mesures faibles et de corrections pour accéder à un temps d'interrogation plus long. En pratique, la destructivité est négligeable pour une seule mesure mais peut être conséquente et même limitante pour une série de mesures. La mesure réalisée intra-cavité peut alors apporter moins de destructivité pour la même information et ainsi atteindre des séquences plus longues.

On remarque également que pour rester dans le régime faible, il faudra compenser l'augmentation de la puissance effective sur les atomes par une puissance plus faible dans le faisceau de mesure. Avec typiquement 400  $\mu\text{W}$  à l'intérieur de la cavité, la puissance en transmission sera de l'ordre du nW, difficilement détectable. Il faudra alors trouver un moyen technique pour mesurer ce faisceau sans lumière parasite.

On peut même envisager de réaliser un état comprimé de spin en entrée d'un interféromètre par une mesure forte, puis entreprendre une série de mesures faibles et de corrections, réduisant ainsi le bruit en sortie de l'interféromètre par le gain métrologique dû à l'état comprimé tout en allongeant le temps d'interrogation par les mesures faibles.

### 3.3.2 Configuration d'injection dans la cavité

Pour développer les techniques d'injection et d'asservissement, une seconde cavité optique de géométrie similaire a été construite. Les miroirs sont les mêmes que ceux utilisés sur la cavité principale, donc les propriétés géométriques et spectrales données dans la Sec. 3.2.2 sont valides pour cette cavité. Cela permet d'étudier la cavité pour les deux longueurs d'onde sans perturber l'expérience principale.

Cette seconde cavité a été mon projet à Bordeaux lors de ma première année de thèse, partageant alors mon temps entre l'expérience principale à Palaiseau et le projet dans les locaux provisoires du LP2N à Bordeaux jusqu'au déménagement de l'expérience. J'ai donc remonté le système optique autour de la cavité afin d'injecter et d'asservir un faisceau à 1560 nm dans un premier temps. Ce projet a ensuite été repris par Grigor Kuyumjyan commençant sa thèse.

Au départ, la configuration que nous voulions obtenir était l'injection des deux radiations à partir de la même source en utilisant un doubleur de fréquence. Nous voulons en effet interroger les atomes par des pulses intra-cavité à 780 nm, nous allons donc utiliser l'asservissement de la source à 1560 nm pour rester proche de résonance à 780 nm<sup>3</sup>.

---

3. Pour une configuration où les deux radiations sont données par deux lasers distincts, il est difficile d'asservir le laser à 780 nm en continu tout en utilisant des pulses de laser.

On peut même penser qu'en profitant d'un asservissement robuste sur la source à 1560 nm et en limitant les déphasages dans la suite du système, la radiation à 780 nm aurait été idéalement référencée à la cavité. Cela n'a en fait pas été le cas pour trois raisons principales :

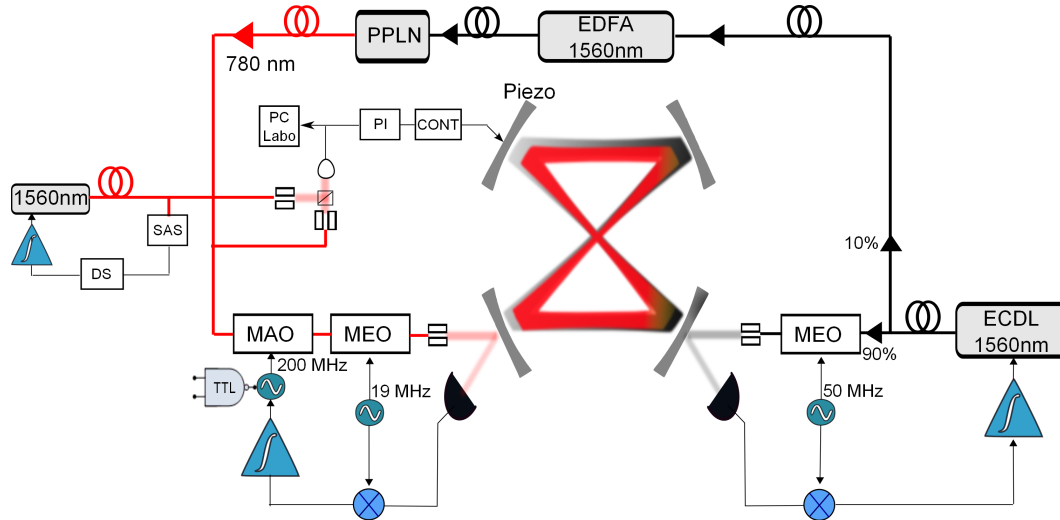
- La finesse à 780 nm est 100 fois plus grande que celle à 1560 nm. Ce qui implique que la largeur spectrale à 780 nm de la cavité est 100 fois plus fine, donc l'intégration du signal autour du pic spectral à 1560 nm mènera à des fluctuations qui seront conséquentes pour l'injection à 780 nm. Nous avons en effet vu que la radiation à 780 nm balaie la largeur spectrale de la cavité et mène donc à une injection non constante.
- Idéalement la fréquence de résonance à 780 nm est exactement le double de celle à 1560 nm. Ce n'est en fait pas le cas car les couches optiques sur les miroirs de la cavité pour les deux longueurs d'onde induisent des longueurs effectives de cavité différentes. Il faudra donc déplacer la fréquence à 780 nm pour trouver la résonance.
- La cavité n'est pas sous vide et des fluctuations d'indice de l'air sont présentes. Ces fluctuations, en plus d'ajouter des pertes à la cavité, font fluctuer la longueur de la cavité différemment à 1560 nm et à 780 nm et limitent donc l'injection à 780 nm. Le même problème a été limitant sur une autre expérience du groupe (le projet MIGA [B. Canuel et al., 2014]). Dans cette expérience, Une source à 1560 nm a été asservie sur une cavité Fabry-Pérot (de finesse de l'ordre de 100, plus basse que la nôtre) puis doublée en fréquence pour être injectée dans une cavité résonante à 780 nm. Les deux cavités ont les mêmes caractéristiques géométriques, et elles diffèrent uniquement par leur fréquence de résonance. Le fait d'avoir entouré les deux faisceaux intra-cavité d'un tube hermétique a grandement amélioré l'injection à 780 nm. Les fluctuations d'indice de l'air ont ainsi été réduites et l'injection est plus stable.  
Cette limite ne devrait plus être présente lors de l'injection du faisceau dans la cavité sous vide.

Connaissant ces limitations, il est donc nécessaire d'implémenter deux asservissements sur la cavité, l'un à 1560 nm et l'autre à 780 nm, ce qui a été réalisé récemment.

Le schéma de la Fig. 3.18 représente le système optique tel qu'il est actuellement. Pour une question de compacité et de robustesse à long terme, tous les éléments optiques sont fibrés, et les faisceaux sont en espace libre seulement pour l'injection sur la cavité. Ainsi les traits gras noirs (rouges) représentent les trajets fibrés à 1560 nm (780 nm), et les faisceaux plus clairs et moins distincts sont les trajets en espace libre proche de la cavité. Les deux radiations sont asservies par une technique Pound-Drever-Hall (voir Sec. 3.2.3) en prenant les signaux de réflexion sur la cavité.

La source à 1560 nm est une diode laser papillon à cavité étendue (*Extended Cavity Diode Laser*, *ECDL* en anglais, de modèle Planex RIO0195-3-01-1-E5 de chez Redfern Integrated Optics) de largeur spectrale inférieure à 10 kHz, qui est ensuite modulé en phase par un MEO (MEO 1, de modèle MPZ-LN-10 de chez Photline Technologies) pour créer les bandes latérales de l'asservissement PDH. Le signal en réflexion est détecté et démodulé, puis intégré par une carte PI pour implémenter la correction. Les fluctuations de basse fréquence sont corrigées sur la température de la diode et les hautes fréquences sont corrigées directement sur le courant de la diode permettant une bande passante de 1 MHz.

Une partie du faisceau à 1560 nm est envoyée sur le cristal doubleur fibré de Niobate de Lithium périodiquement polarisé (*Periodically Polarized Lithium Niobate*, *PPLN*, de modèle WH-0780-000-F-B-C de chez NTT Electronics) après avoir été amplifiée par un amplificateur

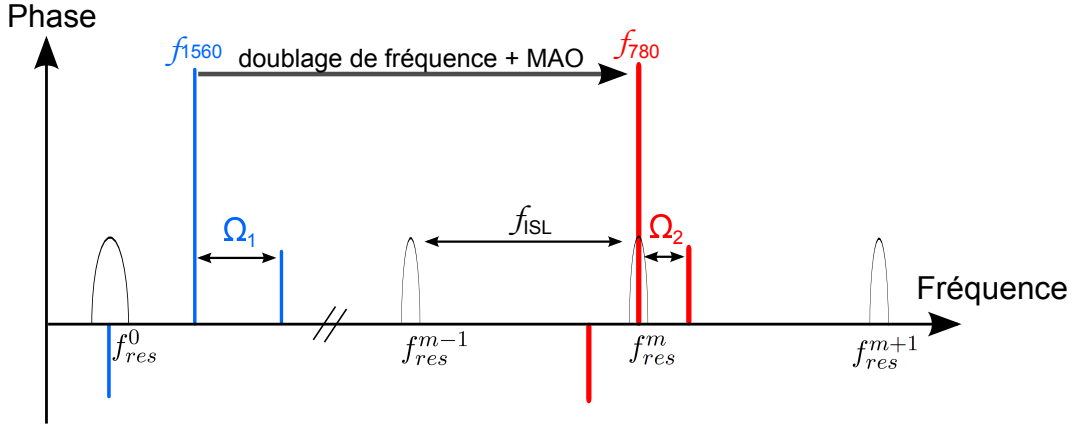


**Figure 3.18** – Configuration du système optique pour la mesure intra-cavité. Les traits gras représentent les parties optiques fibrées à 1560 nm (noir) et 780 nm (rouge). Les parties en espace libres sont floutées et en couleur claire. La source à 1560 nm est asservie sur la cavité par une technique PDH en utilisant un modulateur électro-optique (MEO) pour créer les bandes latérales (en bas à droite de la figure). La correction est directement amenée sur la température et le courant de la diode. Une partie de la source est doublée en fréquence pour obtenir la radiation à 780 nm qui est elle aussi asservie sur la cavité (en bas à gauche de la figure). La correction de fréquence se fait sur un MAO fibré avant la modulation de phase.

Pour référencer le système de mesure sur la transition atomique, on compare le laser sonde à 780 nm par battement avec un faisceau référencé sur la transition (ici par détection synchrone (DS) du signal de spectroscopie par absorption saturé (SAS)). On asservit ainsi la cavité — donc également le faisceau sonde — sur la transition via l’actuateur piezo-électrique de la cavité où la correction est intégré par un Proportionnel Intégrateur (PI) avant d’être envoyée par le contrôleur du piezo (CONT). Les fluctuations de fréquences non corrigées sont extraites du signal pour traitement numérique ultérieur.

à fibre dopée Erbium (*Erbium Doped Fiber Amplifier*, EDFA, de modèle CEFA-C-PB-HP-PM-27-NL1-OM1-B2026-FA-FA de chez Keopsys). L’efficacité de conversion de puissance du doublage est de 10.3 % pour une puissance en sortie à 780 nm de 35 mW (voir Sec. 5.1.3 pour le doublage de fréquence). Le faisceau passe ensuite à travers un MAO (de modèle MT200-NIR20-Fio-PM0.5-J3V-A de chez AA Opto Electronic) qui sera l’actuateur pour la correction de fréquence, puis dans un MEO (MEO 2, de modèle NIR-MPX800 de chez Photline Technologies) pour créer les bandes latérales de l’asservissement à 780 nm. De la même manière, la radiation à 780 nm est asservie par une technique PDH où la correction des hautes fréquences agit sur le MAO de bande passante 50 kHz, les fluctuations à basse fréquence de la cavité étant déjà corrigées lors de l’asservissement à 1560 nm.

Dans un premier temps, nous avons ici choisi d’asservir le faisceau à 1560 nm sur une des bandes latérales et le faisceau à 780 nm sur la porteuse, comme représenté sur la Fig. 3.19. Les résonances de la cavité (en gris) sont espacées de l’intervalle spectral libre ( $\Delta\nu_{ISL} \simeq 1$  GHz) et sont notées  $f_{res}^i$ , où l’on choisit  $i = 0$  pour la résonance à 1560 nm. En ajustant correctement la fréquence de modulation du MEO 1 à 1560 nm, la porteuse à 780 nm peut directement tomber sur une résonance de la cavité. Pour asservir le faisceau à 780 nm, on utilise un MAO : il faudra donc prendre en compte son déplacement de fréquence additionnel.



**Figure 3.19** – Fréquences des faisceaux pour l'injection de la cavité. À gauche, les fréquences des faisceaux liées au domaine proche de 1560 nm (en bleu), et à droite, celle liées au domaine de fréquence de 780 nm (en rouge). Les résonances de la cavité (en gris) sont espacés de l'intervalle spectral libre ( $\Delta\nu_{ISL}$ ) et sont notées  $f_{res}^i$ , où l'on choisit  $i = 0$  pour la résonance à 1560 nm. La fréquence de modulation  $\Omega_1$  à 1560 nm est de 50 MHz (MEO 1). Après le doublement de fréquence, on fixe la fréquence du MAO à  $f_{MAO} = 200$  MHz telle que la fréquence de la porteuse à 780 nm corresponde à une résonance de la cavité  $f_{res}^m$ .

Nous allons ici exprimer la condition sur les fréquences pour que la porteuse à 780 nm corresponde à une résonance de la cavité.

Le doublement de fréquence suivi du déplacement de fréquence du MAO nous donne :

$$f_{780} = 2f_{1560} + f_{MAO}. \quad (3.26)$$

De plus, si l'on asservi la bande latérale à 1560 nm sur une résonance de la cavité, on a :

$$f_{res}^0 = f_{1560} - \Omega_1. \quad (3.27)$$

On injecte les équations Eq. 3.26 et 3.27 dans l'équation :

$$f_{res}^m = m\Delta\nu_{ISL} + f_{res}^0, \quad (3.28)$$

$$= m\Delta\nu_{ISL} + \frac{1}{2}(f_{780} - f_{MAO}) - \Omega_1. \quad (3.29)$$

Donc pour avoir la porteuse sur la résonance au final, *i.e.*  $f_{780} = f_{res}^m$ , il faut remplir la condition :

$$f_{780} = 2m\Delta\nu_{ISL} - f_{MAO} - 2\Omega_1. \quad (3.30)$$

En pratique, cette condition est vérifiée si la fréquence de modulation est de  $\Omega_1 = 50$  MHz, et la fréquence du MAO  $f_{MAO} = 200$  MHz. On remarque de plus que la fréquence de modulation  $\Omega_2$  n'intervient pas puisqu'on asservi la porteuse à 780 nm sur la cavité. La modulation du MEO 2 sert seulement pour l'asservissement PDH.

L'étude décrite précédemment a été réalisée surtout pour démontrer le principe d'injection à partir d'une seule source dans une cavité doublement résonante et pour caractériser la cavité à 780 nm. Nous allons voir que cette configuration n'est pas totalement appropriée à la mesure intra-cavité sur les atomes, et nous allons donner par la suite quelques perspectives envisageables.



### 3.3.3 Perspectives de mesures améliorées par la cavité

Afin d'utiliser la cavité pour améliorer la mesure de la différence de population atomique  $J_z$ , il faut tout d'abord référencer le système de mesure à la transition atomique.

Pour l'instant, les faisceaux à 1560 nm et à 780 nm sont asservis sur la cavité. Et nous voulons maintenant que le faisceau à 780 nm soit référencé à la transition atomique.

Le faisceau sonde à 780 nm étant déjà asservi, un deuxième asservissement sur la transition atomique par absorption saturée ou par battement avec un autre laser n'est pas envisageable. En effet, pour être efficace, l'asservissement sur la transition atomique doit avoir une bande passante proche de celle de l'asservissement sur la cavité donc les deux asservissements essaieront de corriger les mêmes fréquences et la fréquence ne sera au final pas asservie sur les deux systèmes.

Le seul élément libre de tout asservissement est la cavité optique. Le faisceau à 780 nm étant asservi sur la cavité, on peut alors le référencer indirectement à la transition via la cavité. La correction pourra ainsi se faire sur l'actuateur piezo-électrique d'un des miroirs de la cavité. Ce type d'actuateur permet une plage de correction très large (de l'ordre de plusieurs GHz) mais une bande passante réduite aux dizaines de Hz. Dans notre cas, la bande passante serait de 20 Hz sur l'actuateur piezo-électrique et une bande passante de l'ordre de dizaines de kHz est typiquement nécessaire pour une un asservissement par absorption saturée.

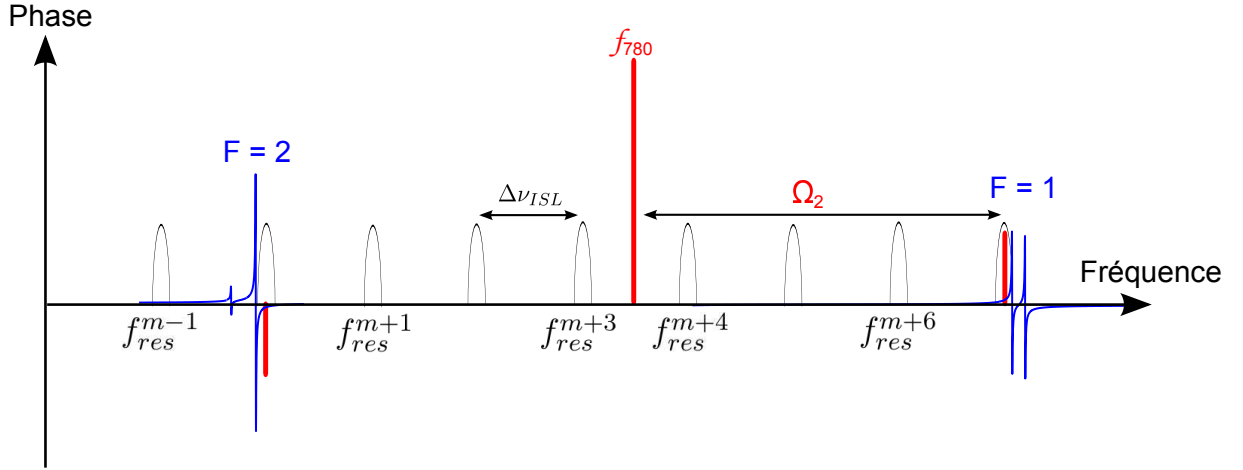
Pour pallier à cette limitation, nous pouvons par exemple envisager de comparer la fréquence du faisceau sonde par battement avec un laser référencé sur la transition comme sur la Fig. 3.18. Les fluctuations avec un temps caractéristique supérieur à la bande passante du piezo seront corrigées sur la cavité et les fluctuations à un temps plus court seront sauvegardées pour un traitement ultérieur du bruit ajouté. Les désaccord entre les bandes latérales du faisceau sonde et les niveaux hyperfins des atomes seront calculés et le résultat de la mesure pourra être corrigé numériquement par la suite.

Dans le schéma de la Fig. 3.19, les fréquences pour l'injection des deux radiations sont données sans prendre en compte la mesure sur les atomes. Nous avons besoin pour la mesure de  $J_z$  de placer deux bandes latérales proches des deux états hyperfins atomiques de différence de fréquence de 6.835 GHz.

Nous avons vu dans le Chap.2 que la limitation principale de la mesure est l'émission spontanée due au faisceau sonde. Il est donc préférable de placer la porteuse hors résonance de la cavité, les bandes latérales étant alors les seules composantes à l'intérieur de la cavité. Pour cela, il est alors nécessaire de trouver une position où la fréquence de modulation du faisceau sonde permet à la fois une mesure symétrique de  $J_z$ , c'est à dire pour laquelle  $S_1 = -S_2$  (cf Chap. 2) et d'avoir les deux bandes latérales en résonance avec la cavité, c'est à dire séparées de  $m\Delta\nu_{ISL}$ . Sur la Fig. 3.20, on voit que dans notre cas l'espacement entre 7 intervalles spectraux libres est de  $7\Delta\nu_{ISL} = 7 \times 976.2 = 6833$  MHz, proches de la fréquence d'horloge et proches de la configuration du Chap. 2 où la différence de fréquence entre les bandes latérales est de  $2\Omega = 6.8426$  GHz.

En fait, les calculs de la fréquence pour la configuration de la mesure du Chap. 2 prennent en compte la symétrie de la mesure, mais aussi la réduction de la décohérence par mixage des états hyperfins (voir Sec. 2.2.2). Pour la configuration éventuelle expliquée ici, il faudra prendre en compte cette décohérence et trouver une position pour la réduire.

Nous avons vu dans cette section la possibilité d'injecter le faisceau sonde dans la cavité à haute finesse pour la mesure de la différence de population  $J_z$ . Comparé à d'autres études comme [Long et al., 2007] [Norcia and Thompson, 2015] où seul le nombre d'atomes est mesuré par déplacement de fréquence de la cavité avec un unique faisceau, pour notre mesure de  $J_z$ ,



**Figure 3.20** – Fréquences des faisceaux pour la mesure intra-cavité sur les atomes. La fréquence des composantes du faisceau sonde (rouge) sont représentées en fonction des résonances de la cavité (gris) espacées de  $\Delta\nu_{ISL} = 976.2$  MHz et de la transition entre les états hyperfins atomiques (bleu). Les bandes latérales sont en résonance avec la cavité et proches des états hyperfins alors que la porteuse n'entre pas dans la cavité. La fréquence de modulation est de  $\Omega_2 = 3.417$  GHz et correspond à  $\frac{7}{2}\Delta\nu_{ISL}$ .

nous utilisons deux bandes latérales, injectées dans la cavité, référencées sur une transition atomique et proches des états hyperfins.

Malgré ces difficultés supplémentaire, implémenter la mesure dans la cavité à haute finesse permettrait de profiter d'un fort signal à bruit et d'obtenir des états comprimés de spin. La mesure serait alors très adaptable. Pour une séquence d'interférométrie par exemple, on pourrait obtenir des états comprimés de spin par une mesure forte en état d'entrée, puis implémenter une série de mesures faibles et de corrections sur l'ensemble atomique profitant de la destructivité plus basse grâce à la finesse conséquente.

### 3.4 Condensation de Bose Einstein

Après avoir caractérisé l'expérience et surtout la cavité dans les sections précédentes, nous allons maintenant voir comment le piège dipolaire intra-cavité peut mener à l'évaporation du nuage atomique et à la condensation de Bose-Einstein<sup>4</sup> s'il est couplé à un faisceau supplémentaire. Nous allons tout d'abord définir ce qu'est un condensat de bosons, avant d'expliquer la réalisation du refroidissement par évaporation.

La condensation de Bose-Einstein est un état où une large fraction d'atomes se retrouve dans l'état fondamental du système. C'est-à-dire que le mouvement d'un seul atome de l'ensemble ne peut plus être distingué individuellement et l'état externe de l'ensemble atomique peut être considéré comme un objet quantique macroscopique.

Pour obtenir cet état, l'ensemble atomique doit être ultra-froid (centaines voire dizaines de nK) et très confiné. La grandeur physique importante du système est la densité dans l'espace des phases  $D = n_{at}\Lambda_{dB}^3$  qui prend en compte la densité volumique des atomes  $n_{at}$  et la longueur de De Broglie thermique  $\Lambda_{dB}$  décrivant les propriétés ondulatoires de l'ensemble.

Par définition, la longueur de De Broglie prend en compte l'impulsion des particules, donc

4. Un condensat de boson a déjà été démontré par le même procédé lorsque l'expérience était au LCF, voir [Vanderbruggen, 2012].

dans le cas d'un gaz leur température  $T$  telle que :  $\Lambda_{dB} = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$ , avec  $m$  la masse d'un atome. La densité dans l'espace des phases peut de réécrire :

$$D = N \left( \frac{\bar{\omega}\hbar}{k_B T} \right)^3, \quad (3.31)$$

avec  $N$  le nombre total d'atomes. La fréquence moyenne de piège s'écrit  $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$  où les fréquences dans les trois directions de l'espace sont données en fonction des largeurs du faisceaux de piège par :

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{4U}{m\omega_{\parallel}}}, \quad (3.32)$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{8U}{m\omega_{\perp}}}. \quad (3.33)$$

Ces équations ne sont valides que si l'on considère l'influence de la gravité négligeable par rapport au potentiel de piège ( $U \gg mg\omega_{\perp}$ ), où  $U$  est le potentiel de piège durant le processus d'évaporation.

L'évaporation d'atomes dans le piège dipolaire va permettre d'augmenter la densité dans l'espace des phases de manière efficace, en réduisant la température et en augmentant la densité atomique, jusqu'à l'obtention du condensat de Bose-Einstein.

### 3.4.1 Théorie d'un condensat de bosons

#### Condensat de bosons sans interaction

Le potentiel de piège peut être approximé par un piège harmonique de forme [Dalfovo et al., 1999] :

$$V_{ext}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (3.34)$$

En négligeant dans un premier temps les interactions à deux corps, l'hamiltonien du système est la somme des hamiltoniens de chaque atome, dont les valeurs propres s'écrivent :

$$\epsilon_{n_x n_y n_z} = \hbar(n_x \omega_x + n_y \omega_y + n_z \omega_z), \quad (3.35)$$

avec  $n_x, n_y, n_z \geq 0$  les nombres quantiques de l'état. La fonction d'onde du niveau fondamental pour lequel  $n_x = n_y = n_z = 0$  s'exprime sous une forme gaussienne :

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \left( \frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar} \right)^{3/4} e^{-m/2\hbar (\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)}, \quad (3.36)$$

de largeur moyenne  $a_{oh} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$ .

A température finie, tous les atomes ne se trouvent pas dans l'état fondamental et le nuage présente donc deux phases : la fraction condensée de largeur  $a_{oh}$  et le nuage thermique de plus grande largeur. L'émergence du condensat se distingue alors par l'apparition d'un pic étroit de densité.

En prenant la distribution en impulsion par transformée de Fourier de la distribution de densité, il est possible de démontrer que la largeur du pic de la fraction condensée est également plus petite que la fraction thermique : il apparaît alors également un pic d'impulsion lors de la condensation. En utilisant une mesure par temps de vol, où l'expansion balistique du nuage permet de relier la distribution spatiale du nuage à sa distribution d'impulsion initiale, il est alors possible de voir l'émergence du pic lors de la condensation.

La géométrie du piège fixe la symétrie du système. En effet, la forme du condensat va être déterminée par le ratio des fréquences de piège radiale et axiale. Le paramètre  $\lambda_{asy} = \omega_z/\omega_r$  fixe l'asymétrie du piège, avec  $\omega_r = \omega_x = \omega_y$  la fréquence de piège radiale. Dans notre cas, l'utilisation d'un faisceau supplémentaire vertical — appelé "dimple" — en plus du piège dipolaire optique permet de baisser la fréquence  $\omega_z$  jusqu'à  $2\pi \times 50$  Hz tout en conservant une fréquence moyenne de piège élevée  $\bar{\omega} = 2\pi \times 250$  Hz (voir Sec. 3.4.3).

L'asymétrie du piège est alors  $\lambda_{asy} = 0.1$  à la fin de l'évaporation, le condensat aura donc une forme de "cigare" dans la direction verticale. Lors de son expansion libre, le nuage sera soumis à un phénomène d'inversion d'ellipticité. Avec une forme initiale de cigare, le condensat s'étend plus rapidement dans la direction verticale lors de son expansion libre et prend la forme d'un disque dans le plan horizontal.

Dans la limite thermodynamique, la température critique  $T_c$  pour laquelle le phénomène de condensation apparaît est exprimée en fonction du nombre d'atomes :

$$k_B T_c = \hbar \bar{\omega} \left( \frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} = 0.94 \hbar \bar{\omega} N^{1/3}, \quad (3.37)$$

où  $\zeta(n)$  est la fonction de Riemann. En remplaçant cette équation dans l'équation 3.31, on voit que le phénomène de condensation apparaît pour une densité dans l'espace des phases de l'ordre de  $D \sim 1$ .

La fraction condensée est fonction de la température critique  $T_c$ , et s'exprime comme le ratio entre le nombre d'atomes dans l'état fondamental  $N_0$  sur le nombre total d'atomes tel que :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (3.38)$$

Ces équations ne sont néanmoins valides que dans la limite thermodynamique où  $N \rightarrow \infty$ ,  $\bar{\omega} \rightarrow 0$  et où le produit  $N\bar{\omega}^3$  reste constant, mais expérimentalement le nombre d'atomes piégés n'est pas macroscopique et la limite thermodynamique n'est jamais atteinte. Au lieu de prendre la limite  $N \rightarrow \infty$  où le potentiel chimique  $\mu$  ne dépend pas du nombre d'atomes, il est possible de calculer numériquement le système pour un nombre d'atomes fixe [Dalfovo et al., 1999]. Dans ce cas, le potentiel chimique devient dépendant du nombre d'atomes  $N$  et de la température  $T$  et la correction au premier ordre de la fraction condensée pour un large nombre d'atomes s'écrit :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 - \frac{(\lambda_{asy} + 2)\zeta(2)}{2\lambda_{asy}^{1/3}(\zeta(3))^{2/3}} \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 N^{-1/3}, \quad (3.39)$$

où  $\lambda_{asy}$  dépend seulement des fréquences de piège. Il en résulte que la fraction condensée est plus petite en considérant un nombre fini d'atomes dans l'état fondamental. La température critique est elle aussi diminuée, et le déplacement de la température critique s'écrit comme suit

$$\frac{\delta T_c}{T_c} = \frac{(\lambda_{asy} + 2)\zeta(2)}{6\lambda_{asy}^{1/3}(\zeta(3))^{2/3}} N^{-1/3}. \quad (3.40)$$

En prenant  $\lambda_{asy} = 0.1$  pour notre expérience, on calcule un déplacement de la température critique de 5% plus faible, ce qui est négligeable. De manière plus générale, pour un nombre d'atomes supérieur à  $10^4$ , les effets de taille finie sont encore négligeables par rapport aux effets d'interactions à deux corps comme nous allons le voir.

### Condensat avec interactions à deux corps - Equation de Gross-Pitaevskii

Les interactions à deux corps interviennent dans l'hamiltonien du système comme un potentiel  $V(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  qui modifie la fonction d'onde  $\phi_0$  du condensat (Eq. 3.36). Dans un gaz ultra-froid dilué, seules les collisions binaires à basse température sont importantes et elles sont caractérisées par la longueur de diffusion en onde  $s$  notée  $a$ .

On peut alors écrire un potentiel effectif  $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , où  $g$  est la constante de couplage proportionnelle à la longueur de diffusion  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ . Pour le  $^{87}\text{Rb}$ , la longueur de diffusion est positive et mène à un potentiel inter-atomique répulsif : les atomes auront donc tendance à se repousser et le condensat sera plus large. Pour obtenir la fonction d'onde du condensat  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$  confiné dans un potentiel  $V_{\text{ext}}$ , on écrit l'évolution temporelle de l'opérateur de champ en utilisant l'équation d'Heisenberg de l'hamiltonien à  $N$  corps [Dalfovo et al., 1999] :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g |\psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi_0(\mathbf{r}, t). \quad (3.41)$$

Cette équation est valide pour un nombre d'atomes largement supérieur à 1 ( $N \gg 1$ ) et où la longueur de diffusion  $a$  est petite devant la distance moyenne entre les atomes.

Pour l'état fondamental, on cherche une solution stationnaire à cette équation : on peut donc séparer les variables d'espace de la variable temporelle  $\psi_0(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}) e^{-i\mu t/\hbar}$  et l'équation se réécrit sous la forme d'une équation de Schrödinger non linéaire :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g |\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right) \phi_0(\mathbf{r}) = \mu \phi_0(\mathbf{r}), \quad (3.42)$$

où  $\mu$  est le potentiel chimique du condensat et où la non linéarité de l'équation vient du terme d'interactions inter-atomiques.

Par intégration de cette équation, on trouve le potentiel chimique en fonction des différentes contributions des énergies :

$$\mu = (E_{\text{cin}} + E_{\text{oh}} + E_{\text{int}})/N, \quad (3.43)$$

avec l'énergie cinétique  $E_{\text{cin}} \sim N_0 \hbar^2 \nabla^2 / 2m$ , l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique  $E_{\text{oh}} \sim N_0 V_{\text{ext}}$  et l'énergie d'interaction  $E_{\text{int}} \sim g N_0^3$ .

Dans le cas où le nombre d'atomes est large et où la densité présente une variation spatiale lente, le terme d'interactions prédomine sur le terme d'énergie cinétique qui devient alors négligeable : c'est le *régime de Thomas-Fermi*. Le profil de densité s'écrit :

$$n_0(\mathbf{r}) = \max \left\{ \frac{\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{g}, 0 \right\}, \quad (3.44)$$

où la densité est nulle dans les régions où  $\mu < V_{\text{ext}}$ . Le condensat prend alors la forme du potentiel de piège et n'est plus gaussien comme pour un gaz idéal mais prend la forme d'une parabole inversée. Le rayon de Thomas-Fermi de cette parabole est défini par les points où la densité s'annule et s'écrit :

$$R_{\text{TF}} = a_0 \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar\omega}}, \quad (3.45)$$

où  $a_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$  est le rayon de l'oscillateur harmonique. La densité au centre du piège est  $n_{\text{TF}}(0) = \mu/g$ , qui est moins grande que dans le cas sans interactions où  $n(0) = N/(\pi^{3/2} a_0^3)$  à cause du potentiel répulsif des atomes.

La fraction condensée peut elle aussi être corrigée dans le cas où les interactions atome-atome sont présentes. La condensation apparaît pour une température critique plus basse, l'Eq. 3.39 devient :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 - \eta \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3\right]^{2/5}, \quad (3.46)$$

où  $\eta \equiv \mu/k_B T_c$  est un paramètre sans dimension caractérisant l'influence des interactions sur la thermodynamique du gaz de Bose piégé.

### Mesure de la température par temps de vol

Expérimentalement, on mesure la densité dans l'espace des phases grâce à une imagerie par temps de vol. On relâche les atomes du piège pendant un temps  $t_{vol}$  avant de prendre une image des atomes par absorption. L'expansion balistique du nuage après  $t_{vol}$  permet de relier la distribution spatiale à la distribution en impulsion initiale des atomes.

En mesurant ainsi la taille du faisceau à deux temps différents ou plus (ici on mesure typiquement la taille initiale à  $t = 0$  et la taille après quelques ms de temps de vol), on peut calculer la température du nuage et les fréquences de piège. En ajustant la distribution du nuage, on peut également obtenir le nombre d'atomes et donc la densité atomique du nuage. Cela nous permet de calculer la densité dans l'espace des phases.

En notant  $\sigma(t_{vol})$  le rayon à  $1/e$  du nuage, on a :

$$\sigma(t_{vol}) = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{k_B T}{m} t_{vol}^2} = \sigma_0 \sqrt{1 + \omega^2 t_{vol}^2}, \quad (3.47)$$

avec  $\sigma_0$  le rayon à  $t = 0$ . Ainsi, on obtient la température  $T$  et la fréquence de piège  $\omega$  en fonction des tailles de nuage et du temps de vol :

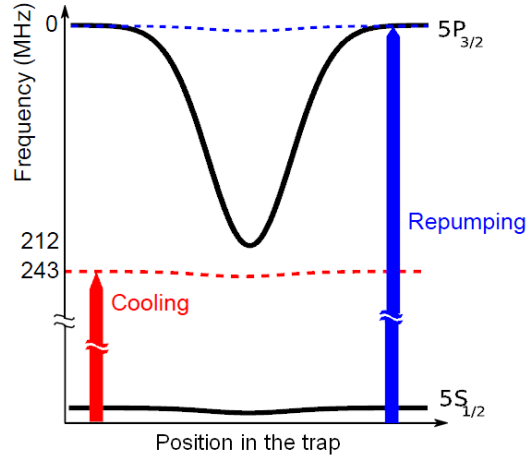
$$T = \frac{m}{k_B} \frac{\sigma(t_{vol})^2 - \sigma_0^2}{t_{vol}^2}, \quad (3.48)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{\sigma(t_{vol})^2 - \sigma_0^2}}{\sigma_0 t_{vol}}. \quad (3.49)$$

Pour des nuages ultra-froids, des effets de densité apparaissent pour des temps de vol courts et peuvent fausser les calculs précédents. Il est alors préférable d'imager le nuage après des temps de vol plus long pour plus de précision.

Pour des faibles nombre d'atomes, les franges optiques du faisceau d'absorption peuvent amener du bruit et limiter l'ajustement du nuage. En effet, le temps entre l'image avec les atomes et sans atome est relativement long (quelques centaine de ms dans notre cas), et la caméra peut vibrer entre temps menant à une mauvaise soustraction des franges optiques. Pour pallier à cet effet, une base de données d'images du faisceau sans atome peut être enregistré [Ockeloen et al., 2010]. Après chaque mesure par absorption, l'image de la base de données la plus proche<sup>5</sup> de l'image courante est ainsi soustraite, et les franges optiques sont diminuées.

5. Pour déterminer quelle image choisir, une décomposition LU (*Lower/Upper* en anglais) est faite sur les deux images et les résultats sont comparés.



**Figure 3.21** – Principe du chargement dans le piège dipolaire. On utilise le fort déplacement lumineux sur l'état excité de la ligne D2 pour accumuler les atomes dans l'état fondamental et ainsi charger le piège.

### 3.4.2 Chargement d'atomes dans le piège dipolaire

Nous allons mettre à profit les développements des sections précédentes pour procéder au refroidissement par évaporation des atomes.

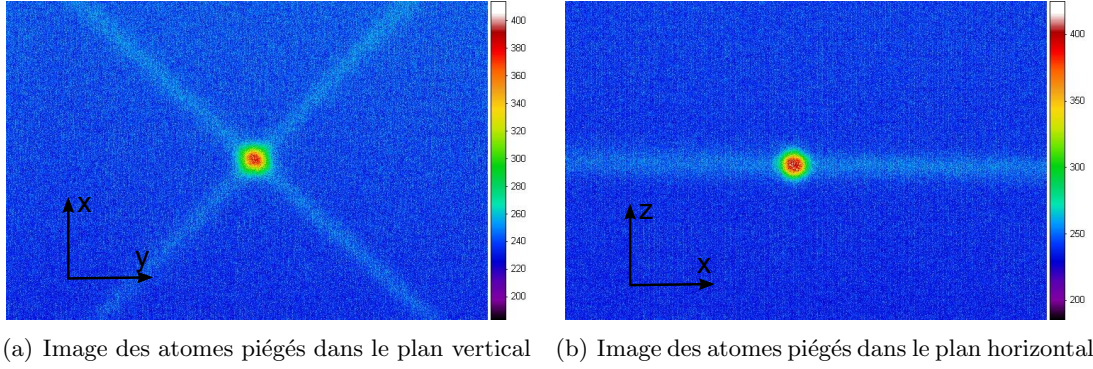
Durant le piégeage et le refroidissement magnéto-optique, on obtient typiquement  $10^9$  atomes à une température de l'ordre de 1 mK. Afin de refroidir et de confiner davantage l'échantillon atomique, il faut charger les atomes dans le piège dipolaire intra-cavité avant de procéder à l'évaporation de l'échantillon atomique. On utilise pour cela un piège dipolaire désaccordé dans le rouge de la transition dans lequel les atomes sont attirés dans les régions d'intensité maximale. L'idée est ici d'accumuler les atomes dans le même état interne, qui sera non résonant avec la lumière de repompage, au centre de la cavité afin de les piéger.

En appliquant un fort déplacement lumineux sur les niveaux excités grâce au potentiel dipolaire et en ajustant le désaccord du laser de refroidissement, les atomes au centre du piège ne sont plus résonants avec le laser repompeur mais toujours avec le laser de refroidissement et vont ainsi s'accumuler dans l'état  $|F = 1\rangle$ .

Un schéma des désaccords et des déplacements lumineux des niveaux atomiques est représenté Fig. 3.21.

Après le chargement du PMO, on désaccorde les faisceaux de  $5\Gamma$  dans le rouge pendant 50 ms pour obtenir un nuage comprimé plus dense [Petrich et al., 1994]. La profondeur du piège dipolaire est initialement fixée à  $U_{\text{dip}} = 110 \mu\text{K}$  pour obtenir un déplacement lumineux de  $\delta = 35\Gamma$  sur les états excités. On désaccorde alors le laser de refroidissement de  $40\Gamma$  pour qu'il soit dans le rouge de la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  et dans le bleu de la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  : il va exciter les atomes dans la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  jusqu'à ce qu'ils s'accumulent dans l'état noir  $|F = 1\rangle$ .

Cette dernière phase où l'on désaccorde de  $40\Gamma$  le refroidisseur n'est pas à proprement parler une phase de mélasse puisque les bobines magnétiques du PMO ne sont pas éteintes. En effet, les bobines sont à l'intérieur de l'enceinte à vide, proches de la cavité donc induisent une force de Lorentz sur celle-ci : éteindre le champ magnétique change cette force appliquée sur les supports de la cavité donc change la longueur de la cavité et déplace brutalement la résonance du laser de piège. L'asservissement du faisceau de piège sur la cavité n'a pas



**Figure 3.22** – Atomes dans le piège dipolaire dans le plan horizontal et vertical. Les échelles de couleur sont en unités de nombre de pixels.

une gamme de correction assez importante, ni une correction assez rapide pour maintenir la résonance sans bruit ajouté.

Comme l'alignement du centre du PMO avec le centre de la cavité n'est pas parfait, on utilise des bobines magnétiques de compensation pour aligner la partie la plus dense du nuage au centre de la cavité et ainsi maximiser le chargement.

Après le chargement, les faisceaux de PMO sont éteints et la puissance du piège est augmentée jusqu'à son maximum de 1.1 mK en 20 ms pour augmenter le taux de diffusion afin de pouvoir ensuite évaporer l'échantillon atomique plus rapidement. La Fig. 3.22 donne une image par fluorescence des atomes dans le piège (pour le mode fondamental TEM<sub>00</sub>) (a) dans le plan de la cavité et (b) perpendiculaire à la cavité. Les axes montrés sur la figure ont pour référence ceux de la Fig. 3.2. Avant de prendre l'image, le piège dipolaire est éteint, donc aucun déplacement lumineux n'est présent sur les transitions atomiques, et les impulsions du laser refroidisseur et repompeur pour la fluorescence sont envoyés via les collimateurs de PMO pour une durée de 50  $\mu$ s.

Lorsque nous avons pour la première fois testé le chargement d'atomes dans le piège dipolaire à Bordeaux avec les mêmes paramètres qu'à Palaiseau, nous n'avons vu aucun atome dans le piège. Les paramètres du chargement étaient très différents de Palaiseau, notamment ceux liés à la table optique (le temps des interrupteurs manuels, les paramètres des modulateurs acousto-optiques, les puissances relatives repompeur/refroidisseur). Il a fallu changer la camera de place et la positionner dans le plan vertical pour commencer à voir les atomes dans le croisement du piège dipolaire en changeant les paramètres un à un. En optimisant ensuite le chargement, nous avons obtenu la même situation qu'à Palaiseau, décrite ci-dessous.

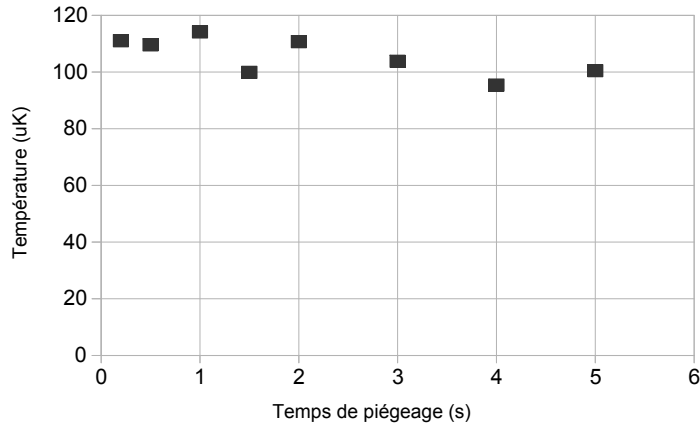
Après le chargement, on obtient  $10^7$  atomes à une température de 230  $\mu$ K.

La température dans le piège ne change pas en fonction du temps de piégeage comme le montre la Fig. 3.23, on en déduit que le chauffage du faisceau de piège est négligeable.

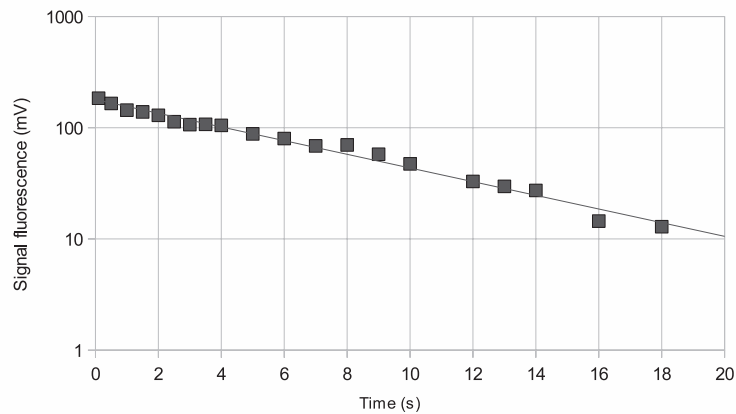
Les pertes inélastiques attendues dans ce type de piège dipolaire sont dominées par les pertes à un corps avec le gaz résiduel. En effet, les atomes étant dans le même état fondamental  $|F = 1\rangle$  pendant et après le chargement, les pertes à deux corps par changement hyperfin [Grimm et al., 2000] sont négligeables. On s'attend donc à avoir une décroissance exponentielle du nombre d'atomes en fonction du temps dans le piège, comme le vérifie la Fig. 3.24.

La durée de vie moyenne est ici de  $\tau = 6.25$  s, mais était de 100 ms au début de l'ex-





**Figure 3.23** – Température des atomes en fonction du temps de piège. La température décroît lentement par évaporation dans le piège. Il n’y a pas de chauffage excessif de l’échantillon atomique pendant le temps d’observation.



**Figure 3.24** – Temps de vie des atomes dans le piège dipolaire. La décroissance est exponentielle, ce qui prouve que les pertes sont principalement dues à un phénomène à un corps.

périence. La limitation principale est la propagation inverse de lumière à l’intérieur de la cavité, provenant principalement de la diffusion du faisceau incident sur les miroirs [Bernon, 2011] et créant un réseau qui chauffe et éjecte les atomes hors du piège. S’il est stationnaire, ce réseau ne devrait pas être limitant sur le temps de vie, mais comme la cavité n’est pas référencée elle vibre et crée un mouvement du potentiel du réseau. Pour limiter cet effet, il faut fréquemment ajuster la géométrie de la cavité avec les actuateurs piezo-électriques sur le miroir de la cavité.

Dans la perspective de faire la mesure non destructive à l’intérieur de la cavité, le faisceau de mesure sera référencé à la transition atomique et asservi sur la cavité (voir Sec. 3.3). La correction basse fréquence de l’absorption saturée sera envoyée sur le piezo de la cavité. Ainsi, la dérive de la cavité sera limitée et la rétro-diffusion sera stable au cours du temps.

### 3.4.3 Condensat de Bose-Einstein

Après le chargement d'atomes dans le piège dipolaire et l'augmentation du piège dipolaire à sa puissance maximale pour accroître le taux de collision, le processus d'évaporation de l'échantillon peut commencer. Avec  $N_{at} = 10^7$ ,  $T = 230 \mu\text{K}$  et  $\bar{\omega} = 2\pi \times 790 \text{ Hz}$ , on a une densité dans l'espace des phases initiale de  $D_0 = 4.5 \cdot 10^{-5}$ . Le condensat se forme pour une densité dans l'espace des phases  $D \sim 1$  (voir Eq. 3.37), il faudra donc gagner 5 ordres de grandeur lors de l'évaporation dans le piège optique.

L'évaporation se réalise en diminuant le potentiel dipolaire graduellement, ainsi les atomes les plus énergétiques vont sortir du piège menant à une rethermalisation de l'échantillon restant par collisions inter-atomiques. En ajustant bien les paramètres de l'évaporation, il est possible de baisser la température du nuage et augmenter la densité atomique  $n_{at} = N_{at}/V_{at}$ , menant à une augmentation de la densité dans l'espace des phases.

Pour les pièges optiques, on force l'évaporation des atomes en réalisant une rampe de diminution de la puissance du piège. Mais lors de cette rampe, on va également diminuer les fréquences de piège et le confinement des atomes<sup>6</sup>, contrairement aux pièges magnétiques où confinement et profondeur de piège sont indépendants. Le taux de collision  $\gamma_{coll}$  peut ainsi diminuer fortement même si la densité dans l'espace des phases augmente. Pour que le nuage se thermalise, il faut en moyenne 3 collisions par atome, donc si le taux de collision chute à une valeur de l'ordre de quelques collisions par seconde ou moins, l'évaporation est trop lente et le processus n'est plus efficace. Il faudra alors choisir une rampe de diminution de la puissance du piège pour laquelle la densité dans l'espace des phases augmente tout en gardant un taux de collision élevé.

On voit alors que les deux paramètres importants pour caractériser l'évaporation sont la densité dans l'espace des phases et le taux de collision  $\gamma_{coll}$ . Ce dernier est défini à partir de la densité atomique  $n_{at}$ , de la section efficace de diffusion  $\sigma_{diff}$  et de la vitesse moyenne des atomes, tel que :

$$\gamma_{coll} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} n_{at} \sigma_{diff} \bar{v} = \frac{m \bar{\omega}^3 \sigma_{diff} N_{at}}{2\pi^2 k_B T}, \quad (3.50)$$

avec  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$ , et  $\bar{w} = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$ , où  $\sigma_0$  est le rayon initial en  $1/e$  du nuage. L'inverse de ce taux nous donne le temps pour lequel le nuage se thermalise : au début de l'évaporation, la thermalisation du nuage est très rapide, alors qu'en fin d'évaporation elle est plus longue. La rampe devra alors avoir une allure proche d'une forme exponentielle pour laisser au nuage le temps de se rethermaliser à chaque étape.

Lors de l'évaporation, la puissance du piège est diminuée et peut alors atteindre une valeur critique où le potentiel dipolaire  $U_{dip}$  est comparable au potentiel gravitationnel  $U_g = mgz$ . Pour cette valeur, le minimum du piège harmonique  $U_{dip} = U_0$  correspond exactement à l'influence de la gravité  $U_0 \simeq U_g$ . Les atomes peuvent donc s'échapper du piège par gravité. Il est possible de calculer pour quelles valeurs de potentiel l'effet de la gravité devient comparable à l'effet du piège dipolaire (voir [Vanderbruggen, 2012]). Le potentiel gravitationnel est inférieure au potentiel dipolaire si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{U_{dip}}{mgw_{\perp}} \geq \frac{\sqrt{e}}{4}, \quad (3.51)$$

6. Au fond du piège, la fréquence  $\omega$  est proportionnelle à  $\sqrt{P}w$  avec  $w$  la taille du faisceau de piège.

avec  $w_{\perp}$  la largeur du faisceau de piège dans le plan perpendiculaire à la cavité. Dans le cas limite  $U = \sqrt{e} mgw_{\perp}/4$ , et avec  $w_{\perp} = 128 \mu\text{m}$  et  $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$ , on obtient  $U_{lim} \sim 4 \mu\text{K}$  pour la profondeur du potentiel optique en-dessous de laquelle les atomes s'échappent tous par gravité. On peut donc considérer que la gravité influence le potentiel optique pour  $U \lesssim mgw_{\perp} = 10 \mu\text{K}$ .

En partant d'une profondeur de piège de  $U_0 = 1.1 \text{ mK}$ , on pourra donc réduire la puissance jusqu'à un facteur 100 lors de l'évaporation.

Prenant en compte ces limitations, nous allons caractériser dans la section suivante une rampe d'évaporation efficace.

### Rampe d'évaporation

Pendant l'évaporation, il a été démontré que l'énergie mise en jeu suivait des lois d'échelle déterminées [O'Hara et al., 2001]. Ainsi, si l'on néglige les pertes dans le piège, le gain dans l'espace des phases dépend de la perte d'atomes durant l'évaporation tel que :

$$\frac{D}{D_0} = \left( \frac{N_{at_0}}{N_{at}} \right)^{\alpha_{evap}}, \quad (3.52)$$

où le paramètre  $\alpha_{evap}$  décrit la loi de puissance associé à cette équation. Une manière de comprendre ce paramètre est de prendre le logarithme de l'Eq. 3.52, on obtient alors :

$$\alpha_{evap} = - \frac{\ln(D/D_0)}{\ln(N_{at}/N_{at_0})}. \quad (3.53)$$

On voit que ce paramètre décrit l'augmentation de la densité dans l'espace des phases tout en prenant en compte la diminution du nombre d'atomes. En d'autres termes, il correspond au gain dans l'espace des phases par atome perdu. Pour une rampe d'évaporation efficace, on va donc essayer de maximiser ce facteur.

Pour les pièges magnétiques, la valeur de  $\alpha_{evap}$  pour obtenir un condensat est typiquement de 1 à 2, alors que pour une condensation tout optique on a typiquement  $\alpha_{evap} = 2$  à 4 [Hung et al., 2008]. L'évaporation jusqu'à la condensation pour un piège optique sera alors théoriquement plus rapide que pour un piège magnétique<sup>7</sup>.

En introduisant le ratio de la profondeur de piège sur la température du nuage, noté  $\eta = \frac{U_0}{k_B T}$ , on peut exprimer théoriquement  $\alpha_{evap}$  par l'équation :

$$\alpha_{evap} = \eta - 4 + \frac{\eta - 5}{\eta - 4}. \quad (3.54)$$

Cela va nous permettre de comparer les valeurs expérimentales trouvées.

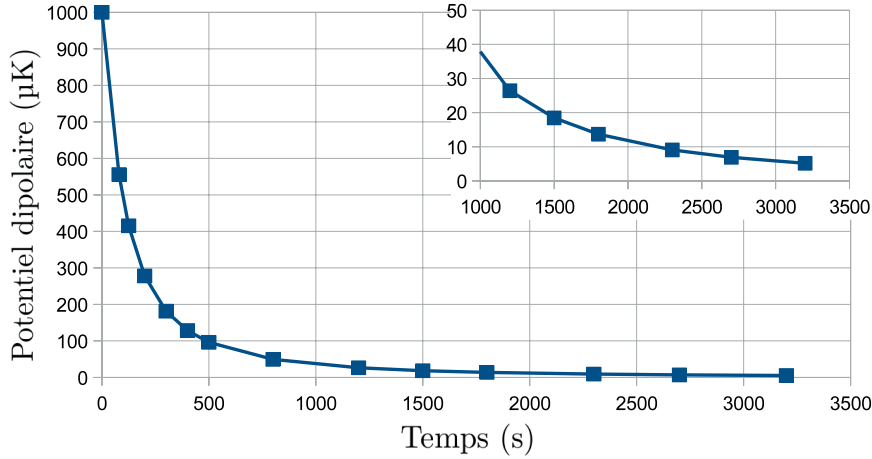
Il est possible également de montrer que le taux de collision en fonction du nombre d'atomes suit une loi de puissance qui s'écrit :

$$\frac{\gamma_{coll}}{\gamma_{coll_0}} = \left( \frac{N_{at}}{N_{at_0}} \right)^{\alpha}, \quad (3.55)$$

avec  $\alpha = \frac{\alpha_{evap} + 4}{3}$  [O'Hara et al., 2001]. Les deux équations 3.52 et 3.55 sont donc liées par le paramètre  $\alpha_{evap}$ .

---

7. Pour optimiser l'évaporation dans un piège magnétique, il est possible d'atteindre un régime dit régime d'emballlement par certaines lois d'échelle pour lesquelles le taux de collision augmente alors même que le nombre d'atomes diminue [Luiten et al., 1996].



**Figure 3.25** – Rampe d'évaporation. La diminution du potentiel dipolaire en fonction du temps suit ici l'Eq. 3.56 avec  $\tau = 180$  ms et  $\beta = 1.23$ . La rampe contient 14 parties et un échantillonnage plus fin n'améliore pas considérablement les résultats.

L'encadré est un agrandissement de 1 à 3.2 s de la fin de la rampe.

La rampe d'évaporation est choisie suivant les lois d'échelle précédentes et est définie par :

$$U_{\text{dip}} = U_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^\beta, \quad (3.56)$$

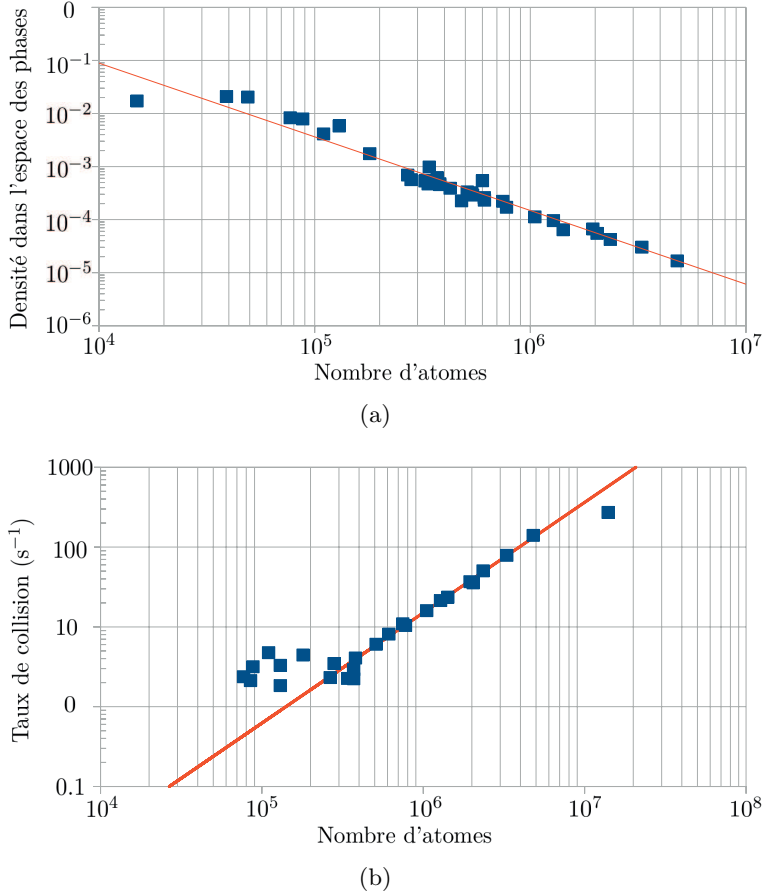
où  $U_0$  est le potentiel dipolaire avant l'évaporation. On voit que le développement de cette fonction au premier ordre est proche d'une fonction exponentielle pour  $\beta = 1$ , prenant ainsi en compte le temps de thermalisation de plus en plus long du nuage comme expliqué précédemment.

En pratique, pour diminuer la puissance du piège, on agit sur un modulateur d'amplitude électro-optique (de marque ConOptics). Ce modulateur est un interféromètre optique de Mach-Zehnder où l'un des bras est déphasé par effet Pockels dans un cristal non linéaire. Ainsi, les interférences en sortie mènent à un changement de la puissance. Ce modulateur est contrôlé par le séquenceur et la puissance en sortie dépend du signal envoyé au cristal non linéaire. Une réduction de la puissance d'un facteur 100 est réalisable, ce dont nous avons besoin pour l'évaporation.

Les paramètres  $\tau$  et  $\beta$  de l'Eq. 3.56 ont été choisis empiriquement pour obtenir la rampe la plus efficace possible. Pour  $\tau = 180$  ms et  $\beta = 1.23$ , on obtient la rampe d'évaporation représentée sur la Fig. 3.25. L'axe des abscisses est le temps, l'axe des ordonnées est le potentiel dipolaire  $U_{\text{dip}}$ , et l'encadré est un agrandissement de la fin de la rampe.

Le taux de collision initial est de  $\gamma_{\text{coll}} = 300$  s<sup>-1</sup>, ce qui théoriquement permet d'estimer le temps de la rampe à 3.3 s. Après cette rampe, on obtient une densité dans l'espace des phases de  $D = 10^{-2}$  pour  $N_{\text{at}} = 10^5$  atomes. Cela n'est pas suffisant pour obtenir un condensat de Bose-Einstein, et une solution est proposée plus loin dans cette section comme nous allons le voir plus loin.

On peut vérifier que la densité dans l'espace des phases en fonction du nombre d'atomes donne une loi de puissance comme dans l'Eq. 3.52. Pour cela, il faut calculer la densité dans



**Figure 3.26** – Loi d'échelle lors de l'évaporation atomique. (a) Densité dans l'espace des phases en fonction du nombre d'atomes. La ligne est l'ajustement de la loi d'échelle. (b) Taux de collision en fonction du nombre d'atomes. La ligne est l'ajustement de la loi d'échelle..

l'espace des phases par des mesures de temps de vol le long de la rampe pour différents temps d'évaporation. Les résultats sont données sur la Fig. 3.26(a) en échelle logarithmique. La droite est un ajustement des données selon l'Eq. 3.52, et nous donne  $\alpha_{evap} = 1.21$ . Cette valeur nous donne un ratio  $\eta = 5.1$  consistant avec le ratio de  $\eta = 4.78$  avant la rampe (avec  $U_0 = 1.1$  mK et  $T = 230$   $\mu$ K).

De même, le taux de collision en fonction du nombre d'atomes est représenté sur la Fig. 3.26(b) pour des données différentes. A partir d'un taux de collision initial de  $300$   $s^{-1}$ , on a seulement quelques collisions par seconde à la fin de la rampe. La droite est un ajustement de la loi de puissance et nous donne un ratio  $\eta = 4.7$  consistant avec les valeurs précédentes.

A partir d'une densité dans l'espace des phases de  $D_0 \simeq 10^{-5}$ , nous pouvons donc gagner 3 ordres de grandeur pour atteindre  $D \simeq 10^{-2}$ . A cette valeur, la densité reste constante même si l'on continue l'évaporation plus longtemps : c'est ce que l'on voit sur la figure pour les points autour de  $D = 10^{-2}$  et de nombre d'atomes variant de  $10^5$  à  $1.5 \cdot 10^4$ . Ces points correspondent à la fin de la rampe, où deux effets limitent alors l'évaporation :

- Le point le plus important est la chute du taux de collision, comme on l'observe sur la Fig. 3.26(b). Après 2.5 s d'évaporation, le potentiel dipolaire est en dessous de  $10$   $\mu$ K, les fréquences de piège sont de l'ordre de  $2\pi \times 10$  Hz et donc le confinement du piège est bas. Pour un nombre d'atomes d'environ  $10^5$  à une température de  $1$   $\mu$ K,

cela correspond à un taux de collision de quelques collisions par seconde.

Pour que le nuage se thermalise, il faut environ 3 collisions par seconde par atomes, donc à la fin de l'évaporation, le temps de thermalisation est très long et le processus s'arrête. C'est ce que nous observons lorsque la densité dans l'espace des phases reste constante alors que le nombre d'atomes continue de diminuer par le temps de vie limité dans le piège.

- A la fin de la rampe, le potentiel dipolaire atteint une valeur en dessous de 10  $\mu\text{K}$ . A cette valeur, la gravité influence le piège comme nous l'avons vu avant. Les atomes s'échappent alors du piège par gravité et l'on perd des atomes indépendamment du processus d'évaporation.

Il est à noter que la puissance du piège dipolaire fluctue au cours du temps. La rampe est alors difficilement reproductible, et un ajustement continu des paramètres  $\tau$  et  $\beta$  est nécessaire. Ces fluctuations sont surtout dues à des effets thermiques dans le MEO utilisé pour contrôler la puissance du piège. Un asservissement de puissance sur ce modulateur est en cours de caractérisation pour améliorer la stabilité de puissance lors de la rampe d'évaporation.

La limite du refroidissement atomique dans le piège dipolaire est atteinte pour  $N_{at} = 10^5$ ,  $T = 1 \mu\text{K}$  et  $D = 10^{-2}$ . Deux ordres de grandeur doivent encore être atteints pour arriver à la condensation ( $D \sim 1$ ) et nous allons pour cela ajouter un faisceau de piège dans le plan vertical, appelé "fossette" (ou *dimple* en anglais).

### Dimple

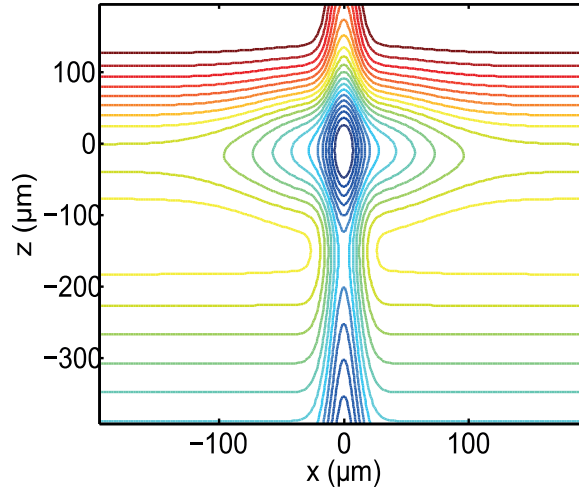
Nous avons vu que les fréquences de piège, et donc le taux de collision, chute en fin d'évaporation dans le piège dipolaire. Pour pallier à cette limitation, différents moyens sont possibles. Il a par exemple été démontré que changer la taille du faisceau de piège pendant la rampe permet de maintenir le confinement constant tout en diminuant la profondeur du piège [Kinoshita et al., 2005], ou encore que l'ajout d'un potentiel indépendant permet de séparer le confinement de la profondeur de piège pour les pièges optiques [Clément et al., 2009, Hung et al., 2008].

En vue des contraintes liées à la cavité optique, il a été choisi d'ajouter un faisceau dans le plan vertical (perpendiculaire au plan de la cavité), appelé dimple [Comparat et al., 2006, Jacob et al., 2011, Ma et al., 2004]. Le but est ici de garder une fréquence moyenne de piège de l'ordre de  $2\pi \times 100 \text{ Hz}$  pour garder un taux de collision relativement élevé.

Ce faisceau va modifier l'allure du potentiel dipolaire, ajoutant un confinement important au centre du piège dipolaire dans les directions transverses [Garrett et al., 2011, Pinkse et al., 1997, Stamper-Kurn et al., 1998]. Les lignes isopotentielles ainsi que les fréquences de piège ont été calculées et mesurées dans [Vanderbruggen, 2012]. Les fréquences transverses du dimple sont  $\omega_r = \omega_x = \omega_y = 2\pi \times 550 \text{ Hz}$ , permettant une fréquence moyenne de  $\bar{\omega} = 2\pi \times 145 \text{ Hz}$  lorsque le piège dipolaire a un potentiel de  $\omega_z = \sqrt{2}\omega_x = \sqrt{2}\omega_y = 15 \text{ Hz}$ .

Les lignes isopotentielles du piège dipolaire et du faisceau dimple sont données sur la Fig. 3.27. On voit que l'on a un fort confinement transverse dû au faisceau dimple. Le col de ce faisceau est légèrement excentré du piège dipolaire (de l'ordre d'une centaine de  $\mu\text{m}$  plus bas) pour donner un point de fuite aux atomes évaporés dans l'axe de la gravité. Ainsi on évite que les atomes rejetés du piège par évaporation ne reviennent chauffer l'ensemble.

En fin de rampe, les atomes vont être piégés dans le faisceau dimple de taille très inférieure



**Figure 3.27** – Lignes isopotentielles avec le faisceau dimple. Les lignes isopotentielles sont montrées par une coupe selon le plan vertical du potentiel. Le faisceau dimple amène un confinement supplémentaire dans les directions transverses.

au faisceau de piège dipolaire, permettant une densité atomique très forte. Durant ce processus adiabatique, le gain dans l'espace des phases n'est plus limité par le piège dipolaire intra-cavité et devrait permettre d'atteindre la condensation de Bose-Einstein.

Expérimentalement, la longueur d'onde du faisceau dimple est de 1529 nm compte tenu des lasers et éléments optiques disponibles sur l'expérience. Cette radiation est loin de résonance de la transition atomique, comme le piège dipolaire. Les fréquences précédentes ont été mesurées pour un faisceau de 200 mW et une taille au col du faisceau de 23  $\mu\text{m}$ .

L'alignement du faisceau au centre du piège est fait en deux temps. Un ajustement grossier est d'abord réalisé grâce au fort déplacement lumineux créée sur la transition d'imagerie par le faisceau à 1529 nm. En imageant le nuage alors qu'il est piégé, nous pouvons voir que le faisceau dimple crée une zone d'ombre, donnant ainsi sa position. Les deux caméras CCD dans les plans transverse et vertical nous permettent de positionner le dimple autour du centre du piège dipolaire. Ce pré-alignement nous permet aussi d'estimer la taille au col en ajustant la zone d'ombre par une gaussienne inversée : on trouve une taille proche de 26  $\mu\text{m}$ .

L'alignement fin se fait en comptant les atomes piégés dans le faisceau dimple pour une rampe d'évaporation donnée. Pour cela, on relâche les atomes du piège dipolaire tout en gardant le faisceau dimple et on image les atomes après quelques ms de temps de piège dans le faisceau dimple uniquement. En changeant l'alignement, on optimise ainsi le remplissage des atomes dans le dimple.

En pratique, la coupure du faisceau dimple se fait grâce à un MAO fibré placé juste avant la sortie du faisceau en espace libre sur les atomes. Ainsi, on peut éteindre le faisceau en un temps de quelques  $\mu\text{s}$ , pour une taux d'extinction supérieur à 23 dB<sup>8</sup>.

Pour la coupure du piège dipolaire intra-cavité, nous pourrions agir sur le MAO pour la correction de fréquence de l'asservissement PDH, mais il est placé avant l'amplificateur fibré et éteindrait ce dernier brutalement par sécurité. De plus, nous ne voulons pas perdre

8. Une extinction de 23 dB mène à une lumière parasite du faisceau dimple de quelques mW. Ce faisceau étant loin de résonance, cela ne chauffe pas les atomes avant l'imagerie.

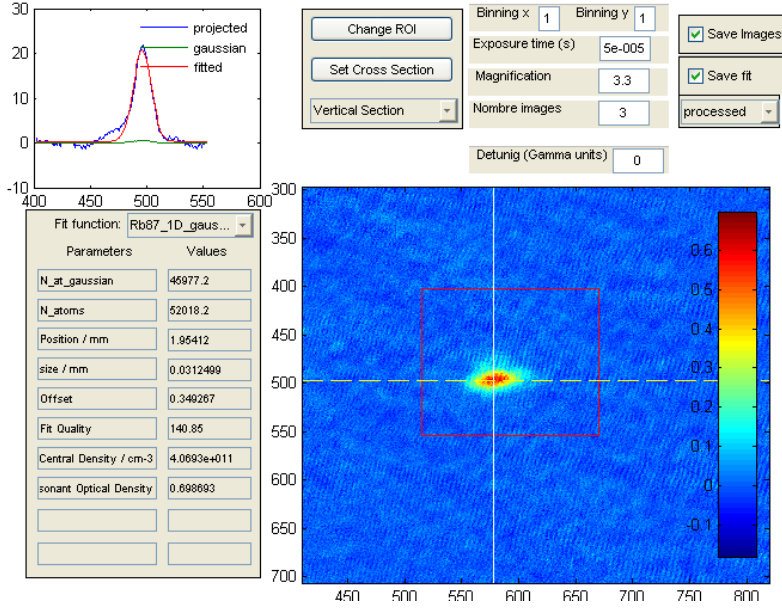


Figure 3.28 – Condensat de Bose-Einstein.

l'asservissement sur la cavité pour pouvoir enchaîner les séquences. L'idée est alors de déplacer la fréquence du laser de plusieurs dizaines de MHz pour le mettre hors de résonance de la cavité tout en court-circuitant les signaux de correction de fréquence. Ainsi, les signaux de correction de basses et hautes fréquences restent aux mêmes points et vont ré-asservir le faisceau lorsque la fréquence est remise en résonance avec la cavité, c'est-à-dire quelques ms après.

Lors de l'imagerie, il faudra faire attention à couper les deux faisceaux au même moment pour mesurer le nuage par temps de vol de manière précise.

Lors de l'évaporation le faisceau dimple reste allumé à une puissance de 200 mW. Le piège ressenti par les atomes change alors adiabatiquement de forme pour obtenir un piège confiné dans les directions transverses. Le gain en densité dans l'espace des phases est alors plus fort comme nous allons le voir dans la section suivante.

## Condensat

Avec l'ajout du faisceau dimple, nous avons atteint une température de 570 nK pour un nuage de taille initiale de 25  $\mu\text{m}$  et composé de  $4.6 \cdot 10^4$  atomes qui est représenté sur la Fig. 3.28 après un temps de vol de 8 ms. La densité dans l'espace des phases est de  $D > 2.6$  pour les données prises. On voit que l'ajustement gaussien n'est pas parfait et n'ajuste pas toutes les données. C'est peut être ici la signature de la double structure d'un condensat (voir Sec. 3.4.1). Un ajustement avec une gaussienne sur les queues de la distribution couplé à un ajustement d'une parabole inversée au centre de la distribution a récemment permis de le préciser.

Pour ce nuage, la fréquence de piège verticale est de  $\omega_z = 2\pi \times 15$  Hz, donc une fréquence moyenne de  $\bar{\omega} = 2\pi \times 145$  Hz avec le faisceau dimple. Le taux de collision est ainsi  $\gamma_{coll} = 210$  collisions par seconde et le paramètre d'évaporation nous donne  $\alpha_{evap} = 3.5$ .



## 3.5 Dynamique d'atomes ultra-froids dans les modes transverses

L'utilisation d'une cavité optique pour le piège dipolaire permet d'accroître la puissance optique sur les atomes. La cavité est de plus non dégénérée et permet de manipuler les atomes dans des modes transverses électro-magnétiques (TEM), comme nous avons commencé à l'étudier dans la Sec. 3.2.4.

En effet, le mode de cavité propage le faisceau de piège dipolaire, donc potentiel dipolaire et mode de la cavité sont étroitement liés. Si l'on injecte des modes transverses d'ordre supérieur, les atomes vont être piégés dans les différents cols du mode de la cavité et donc plusieurs ensembles atomiques vont être présents. De plus, nous pouvons changer le mode de la cavité au cours du temps, divisant par exemple un seul ensemble atomique en deux puis le recombinaison.

Dans cette section, nous allons tout d'abord donner les motivations de l'étude de la dynamique d'un ou plusieurs ensembles atomiques dans un piège dipolaire intra-cavité. Puis nous allons expliquer comment réaliser expérimentalement une telle étude, et notamment discuter les possibilités et les limitations de notre expérience. Cette étude étant en cours de réalisation, seuls des résultats préliminaires vont être montrés.

Nous allons ensuite discuter des perspectives de cette étude : de l'utilisation de plusieurs ensembles atomiques pour les horloges atomiques, à l'interférométrie de Bragg de deux condensats indépendants ou non dans un guide d'onde.

### 3.5.1 Motivations

Sur des puces atomiques, la manipulation d'atomes piégés a déjà été démontré, que ce soit l'acheminement d'atomes dans un guide d'onde [Hänsel et al., 2001a, Hinds et al., 2001], ou la séparation d'atomes pour des mesures d'interférométrie [Cassettari et al., 2000, Hänsel et al., 2001b].

Pour des ensembles atomiques à grand nombre d'atomes  $N_{at} > 10^5$ , le piégeage dans des modes a déjà été démontré de plusieurs manières. Des modes de Laguerre-Gauss d'un laser ont par exemple été utilisés [Kuga et al., 1997], et permettent entre autres d'améliorer la densité d'atomes en diminuant la divergence du flux d'atomes durant son acheminement [Carrat et al., 2014].

Des ensembles piégés à l'intérieur des modes transverses d'une cavité optique ont été également obtenus expérimentalement [Kruse et al., 2003]. Dans cet article, la cavité en anneau est composée de 3 miroirs où les atomes sont piégés au col du faisceau. Le faisceau intra-cavité ne se croise pas sur lui-même et mène à des ensembles piégés longitudinalement avec une taille beaucoup plus large le long du faisceau que transversale au faisceau.

Dans notre cavité en papillon, le mode se recroise au centre et les atomes sont alors piégés au centre dans un volume homogène spatialement. Cela nous permettrait de mesurer ou de manipuler les nuages atomiques avec notre faisceau de mesure. Nous pouvons ainsi détecter de manière non destructive les états atomiques avec un faisceau en simple passage hors de la cavité (comme expliqué dans le Chap. 2 et utilisé dans le Chap. 4 sur un seul ensemble atomique).

Un faisceau optique peut également être utilisé comme guide d'onde sur les atomes piégés dans les modes de la cavité, pour ensuite appliquer une séquence d'interférométrie sur un ou plusieurs ensembles atomiques. Dans un tel système, une séparation d'impulsion de plusieurs  $\hbar k$  a été démontré [McDonald et al., 2013], augmentant considérablement l'aire de l'interfé-

romètre et donc sa sensibilité. Si par exemple le mode  $TEM_{01}$  est injecté, les deux ensembles atomiques peuvent être piégés et manipulés dans un guide d'onde verticale, perpendiculaire au plan de la cavité.

Cette étude est d'autant plus intéressante qu'elle peut être réalisée avec des atomes ultra-froids ou des condensats de bosons. Différents effets vont apparaître alors selon le système. En séparant et recombinaison un condensat, des interférences peuvent être mesurées, démontrant qu'un condensat de bosons est cohérent et qu'il montre des corrélations à longue portée [Hall et al., 1998]. Ces interférences sont également présentes si deux condensats — initialement *indépendants* — se superposent [Andrews et al., 1997], ce qui n'apparaît pas pour deux ensembles atomiques non condensés [Dalfovo et al., 1999, Facchi et al., 2014].

L'utilisation des modes de la cavité permettrait aussi de créer des condensats de Bose-Einstein couplés, considérés comme un qubit avec un haut degré de maniabilité et avec un temps de cohérence très long. Ces condensats couplés sont souvent réalisés grâce à un réseau optique [Cataliotti et al., 2001, Salgueiro et al., 2007], et sont utilisés pour le traitement quantique de l'information [Luiz et al., 2015].

### 3.5.2 Réalisation expérimentale

La manipulation d'atomes dans différents modes de la cavité se fait en plusieurs étapes. Il faut dans un premier temps pouvoir injecter des modes supérieurs dans la cavité. Pour cela, une modification du système expérimental est nécessaire. Nous allons ensuite coupler ces modes aux atomes et voir l'effet du couplage lors d'une séquence.

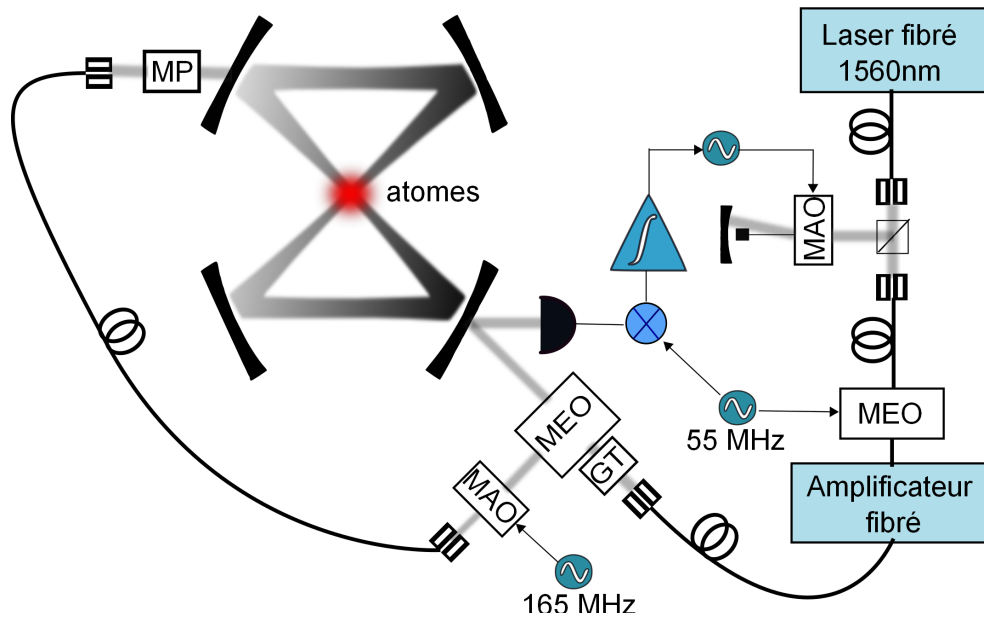
Nous avons choisi pour cette étude de manipuler les atomes dans les modes  $TEM_{00}$  et  $TEM_{01}$ . L'injection du mode  $TEM_{00}$  a été réalisée au début de l'expérience et permet d'obtenir un seul ensemble atomique ultra-froid ou un seul condensat (voir sections précédentes).

Nous avons ensuite réalisé l'injection du mode  $TEM_{01}$  sur un miroir d'entrée de cavité différent pour avoir les deux injections indépendantes. Pour cela, un masque de phase ( $0 - \pi$ ) aligné verticalement est utilisé (voir Sec. 3.2.4). Le schéma Fig. 3.29 montre l'injection des deux modes dans la cavité. Le mode fondamental  $TEM_{00}$  est initialement injecté et asservi dans la cavité. Pour cela, le faisceau d'un laser fibré est amplifié avant d'être injecté dans la cavité. L'asservissement du faisceau sur la cavité se fait par une technique PDH (Sec. 3.2.3) sur un MAO en double passage (droite de la figure).

Le faisceau pour le mode  $TEM_{01}$  provient de la lumière à 1560 nm rejetée par le MEO qui contrôle la puissance du faisceau de mode fondamental. Cette lumière est asservie sur la fréquence du mode fondamental de la cavité, donc doit être déplacée de 164.6 MHz pour injecter le mode  $TEM_{01}$  (voir le spectre d'injection de la cavité Fig. 3.5). Après ce déplacement de fréquence par un MAO, le mode  $TEM_{01}$  est créé grâce à un masque de phase ( $0 - \pi$ ) et injecté.

Ce dispositif expérimental nous permet d'injecter les modes  $TEM_{00}$  et  $TEM_{01}$  dans la cavité à partir d'une seule source laser à 1560 nm asservie sur la cavité. Le fait d'utiliser la lumière dérivée du MEO est particulièrement judicieuse pour passer d'un mode à l'autre. Ces deux faisceaux proviennent du laser à 1560 nm et sont référencés à la cavité. De plus, lors d'une rampe de puissance pour diminuer le faisceau de mode fondamental, la puissance du faisceau pour le mode  $TEM_{01}$  augmente. Une seule rampe permet alors de diminuer le faisceau  $TEM_{00}$  et d'augmenter de la même manière le faisceau  $TEM_{01}$  pour passer d'un mode à l'autre.

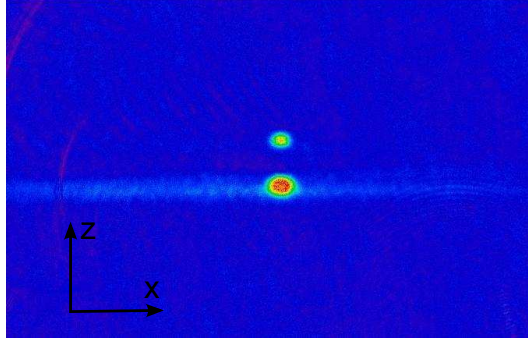
Ce dispositif a été réalisé ainsi pour changer adiabatiquement de mode et éviter de perdre



**Figure 3.29** – Réalisation expérimentale des atomes piégés dans les modes transverses de la cavité. Les traits gras représentent les parties optiques fibrées à 1560 nm et les parties en espace libres sont floutées et en couleur plus claire. Les fibres avant les injections dans la cavité maintiennent la polarisation de la lumière.

La radiation à 1560 nm provient d'un laser fibré, qui est ensuite amplifiée avant d'être injectée dans la cavité (droite de la figure). Ce faisceau donne le mode  $TEM_{00}$  et est asservi sur la cavité par un asservissement PDH sur un MAO en double passage.

Le MEO contrôle la puissance de ce faisceau en rejetant l'excès de lumière sur le côté. Cette lumière peut être utilisée pour injecter le mode  $TEM_{01}$ . Pour cela, il faut déplacer sa fréquence de 164.6 MHz par un MAO pour que le mode  $TEM_{01}$  soit résonant avec la cavité, et projeter le mode gaussien sur le mode  $TEM_{01}$  par un masque de phase ( $0 - \pi$ ) (gauche de la figure).



**Figure 3.30** – Atomes dans le mode  $TEM_{01}$  de la cavité. Les atomes sont initialement chargés dans le mode fondamental de la cavité, puis sont transférés dans le mode  $TEM_{01}$  après une rampe de 1.9 s.

ou de chauffer des atomes pendant le processus. Si l'augmentation de puissance dans le mode  $TEM_{01}$  mène toutefois à des pertes ou à un chauffage de l'ensemble atomique, une modification de la rampe peut être apportée par le MAO à 165 MHz pour ajuster la puissance du faisceau  $TEM_{01}$  au cours du temps de manière indépendante.

L'ajustement de la fréquence du MAO pour mettre en résonance le faisceau du mode  $TEM_{01}$  se fait en optimisant la transmission de la cavité. On baisse la puissance du faisceau de mode fondamental au minimum tout en conservant l'asservissement, et l'on maximise la puissance en sortie de cavité du mode  $TEM_{01}$  en changeant la fréquence du MAO. Ainsi, les deux modes sont résonants avec la cavité et nous pouvons maintenant faire interagir ces modes avec les atomes.

### 3.5.3 Résultats préliminaires

Nous avons tout d'abord manipulé un ensemble d'atomes ultra-froids dans les différents modes. Pour des raisons techniques, le contrôle du MAO à 165 MHz n'est pas relié à une entrée de rampe analogique mais à une entrée analogique sur le séquenceur faute de disponibilité. Nous ne pouvons donc pas manipuler les pentes des rampes de puissance des deux modes indépendamment, mais nous pouvons par contre changer leur valeur précisément. Par la suite, une entrée de rampe du séquenceur va être utilisée pour plus de maniabilité.

Nous avons en premier lieu chargé des atomes dans le mode  $TEM_{01}$  partant d'un ensemble dans le mode  $TEM_{00}$ . Pour cela, nous avons chargé le piège dipolaire de mode fondamental comme expliqué dans la Sec. 3.4.2, puis nous avons diminué la puissance selon une rampe de l'Eq. 3.56 pendant 1.9 s pour atteindre une profondeur de piège de  $\sim 50 \mu\text{K}$ . Au début de la rampe, le MAO contrôlant le faisceau de mode  $TEM_{01}$  est éteint. Il n'est allumé au maximum de sa puissance que 50 ms avant la fin de la rampe. Les atomes vont donc passer du mode  $TEM_{00}$  de faible puissance au mode  $TEM_{01}$  d'une puissance 100 fois plus grande. Les atomes dans le mode  $TEM_{01}$  sont présentés sur la Fig. 3.30. Le col du faisceau le plus bas piège plus d'atomes grâce à l'effet de la gravité.

Nous avons démontré ici qu'il était possible de transférer les atomes d'un mode de la cavité à un autre (ici du mode  $TEM_{00}$  au mode  $TEM_{01}$ ). La distance entre les deux cols du mode  $TEM_{01}$  est d'environ  $\sim 150 \mu\text{m}$ .

Il est intéressant de regarder la température et le nombre d'atomes après ce processus. Si le transfert est adiabatique, aucun transfert de chaleur n'est présent et la température des

atomes est conservée au cours du processus.

Nous avons mesuré le nombre d'atomes et la température avant et après le transfert dans le mode TEM<sub>01</sub>. Avant le transfert, c'est à dire à  $t = 1.85$  s après le début de la rampe, l'ensemble est constitué de  $4.55 \cdot 10^5$  atomes à une température de  $47 \mu\text{K}$ . Après le transfert, nous avons deux ensembles de nombre d'atomes total de  $1.9 \cdot 10^5$  pour une température moyenne de  $21 \mu\text{K}$ . Plus précisément, si l'on note  $\mathcal{S}_{z_1}$  et  $\mathcal{S}_{z_2}$  les deux ensembles avec  $z_1 < z_2$ ,  $\mathcal{S}_{z_1}$  est constitué de  $1.52 \cdot 10^5$  atomes à une température de  $27 \mu\text{K}$  et  $\mathcal{S}_{z_2}$  est constitué de  $3.5 \cdot 10^4$  atomes à une température de  $15 \mu\text{K}$ .

Nous observons que, durant le transfert, 58% d'atomes sont perdus, probablement à cause de la non adiabaticité du processus et de la distance entre les modes, supérieure à la taille du nuage. Les températures des deux ensembles du mode TEM<sub>01</sub> sont ainsi probablement plus basses par rethermalisation, car les atomes perdus sont les plus énergétiques.

Ainsi la mesure seule de la température n'est pas judicieuse pour vérifier l'adiabaticité du transfert. Nous pouvons par contre calculer la densité dans l'espace des phases avant et après le transfert.

Avant le transfert, la densité dans l'espace est de  $D = 2.85 \cdot 10^{-6}$ , et après le transfert l'ensemble  $\mathcal{S}_{z_1}$  a une densité de  $D = 2.79 \cdot 10^{-6}$  et l'ensemble  $\mathcal{S}_{z_2}$  de  $D = 2.44 \cdot 10^{-6}$ . La densité dans l'espace des phases ne change donc pas lors du transfert, et la forte perte d'atomes n'est pas uniquement expliquée par la non adiabaticité du transfert.

### 3.5.4 Limites et perspectives

Les résultats précédents sont des résultats préliminaires visant à comprendre le couplage entre les atomes et les différents modes de la cavité. Nous avons vu qu'un ensemble d'atomes peut être séparé en deux dans le plan vertical par l'injection du mode TEM<sub>01</sub> : c'est la première étape à une séquence d'interférométrie, où le paquet d'ondes de matières est divisé avant d'être recombéné.

La démonstration récente d'un condensat de Bose-Einstein sur l'expérience permettrait d'approfondir cette étude. En effet, après la séquence décrite suivie d'une recombinaison appliquée sur un condensat, des franges d'interférence peuvent être mesurées après le déphasage du condensat. Cette étude pourrait de plus permettre de comparer la mesure du déphasage d'un seul condensat initial séparé puis recombéné, et celle du déphasage de deux condensats indépendamment créés dans le mode TEM<sub>01</sub> qui devraient donner la même valeur [Facchi et al., 2014].

Il reste néanmoins à démontrer que ce processus n'influence pas la cohérence d'un condensat lors du passage dans les différents modes. En effet, la distance parcourue entre le col du mode TEM<sub>00</sub> et celui du mode TEM<sub>01</sub> est d'une centaine de  $\mu\text{m}$ , bien supérieure à la taille du condensat typiquement de  $20 \mu\text{m}$  pour  $10^5$  atomes.

La condensation de Bose-Einstein dans le mode TEM<sub>01</sub> est théoriquement possible et reste à démontrer. Il suffit de placer le masque de phase sur le trajet du faisceau de mode TEM<sub>00</sub>.

Mais si nous voulons manipuler les atomes dans les deux modes, le fait que les deux faisceaux proviennent de la même source peut être une limitation. En effet, l'asservissement se fait sur le faisceau de mode fondamental ; nous devons garder un minimum de puissance pour maintenir les résonances avec la cavité. Ce faible potentiel dipolaire peut être conséquent à la fin de la rampe où les fréquences de piège sont faibles et peut permettre aux atomes de s'échapper du piège de mode TEM<sub>01</sub>. De plus, les régions de pièges suivant les modes étant verticales, le faisceau dimple peut relier les différents cols de faisceau et les atomes ne seront plus piégés seulement dans le mode voulu.

Si cela limite l'évaporation dans les modes supérieurs, il faudra modifier l'expérience afin d'asservir le mode TEM<sub>01</sub> sur la cavité au lieu du mode fondamental, ou afin d'utiliser autant de source laser que de mode dans la cavité, chacune asservie sur celle-ci.

L'objectif de cette étude est double : en premier lieu c'est la création de deux condensats de Bose-Einstein dans le plan vertical, puis le transfert dans un guide d'onde pour réaliser une séquence d'interférométrie Bragg. Les faisceaux Bragg créent une onde stationnaire sur les atomes, et transfèrent  $n$  moments d'impulsion  $\hbar k$ . Les deux condensats vont ainsi se déplacer le long du guide d'onde et vont interférer lors de leur superposition.

Les faisceaux Bragg sont en cours de réalisation, et leur réalisation est inspirée du dispositif [Robert-De-Saint-Vincent et al., 2010]. La source laser est un laser commercial New Focus Vortex à 780 nm, qui est divisée en deux chemins optiques contenant chacun un MAO de même fréquence avant d'être recombinaé dans une fibre maintien de polarisation. Le faisceau sortant de la fibre est envoyé verticalement sur les atomes. Afin d'éviter des fluctuations de phase et de brouiller les franges d'interférence, les deux signaux RF contrôlant les MAO doivent être asservis en phase.

Le faisceau dimple peut être utilisé comme un guide d'onde après l'évaporation, simplifiant le montage expérimental autour de la cavité. Il est déjà dans le plan vertical et aligné sur les atomes, et sa fréquence est, de plus, loin de la résonance atomique à 780 nm. Nous pouvons changer sa puissance par le MAO fibré avant son passage en espace libre.

La création de plusieurs ensembles atomiques est également d'un grand intérêt dans le domaine des horloges atomiques. Plusieurs propositions ont été formulées afin d'améliorer la stabilité d'une horloge en utilisant plusieurs ensembles atomiques [Borregaard and Sørensen, 2013a, Rosenband and Leibbrandt, 2013]. L'idée est ici d'augmenter la stabilité des horloges limitées par les fluctuations de phase de l'oscillateur local (OL) en asservissant celui-ci sur plusieurs ensembles atomiques. Après chaque asservissement, l'OL gagne en stabilité et on peut montrer que la variance de fluctuations de fréquence diminue de  $M2^{-M}$  en utilisant  $M$  ensembles atomiques.

On constate que l'utilisation de deux ensembles atomiques (dans notre cas, l'injection du mode TEM<sub>01</sub>) n'améliore pas la variance de fréquence. Mais de la même manière, nous pouvons injecter les ordres d'ordres supérieurs TEM<sub>mn</sub>,  $m \geq 1$  et/ou  $n \geq 2$  en utilisant des masques de phases différents. Ainsi, nous pouvons créer  $M = (n + 1)(m + 1)^2$  ensembles atomiques avec le mode TEM<sub>mn</sub> de la cavité.

Dans la suite de cette thèse, nous démontrons un procédé lié à cette proposition. Au lieu d'utiliser plusieurs ensembles atomiques pour stabiliser l'OL, nous réalisons plusieurs mesures de l'OL sur le même ensemble atomique, menant à un gain de stabilité de  $N$  pour  $N$  mesures successives corrélées.

## 3.6 Conclusion du chapitre

Nous avons jusqu'ici exposé les outils pouvant être utilisés pour améliorer une horloge atomique. Le refroidissement d'atomes des PMO jusqu'au piège dipolaire intra-cavité permet un nuage atomique de  $10^5$  atomes à 50  $\mu$ K en 2 s. La préparation des états atomiques dans le même sous-niveau  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  et la compensation du déplacement lumineux par un laser à 1529 nm dans le bleu de la transition D2 permet ensuite de préparer l'échantillon atomique pour une séquence d'interférométrie où les atomes restent piégés.

La mesure non destructive exposée dans le Chap. 2 peut alors être utilisée dans la séquence d'interférométrie à la place d'une mesure destructive classique par fluorescence ou absorption. Ainsi, plusieurs mesures faibles non destructives corrélées suivies de rétroactions permettent

de maintenir la décohérence de l'état atomique [Vanderbruggen et al., 2014], ou permettent de corriger la phase de l'OL d'une horloge micro-onde comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

Notre procédé de refroidissement tout optique permet d'atteindre la condensation de Bose-Einstein. Une cavité optique pour amplifier la puissance de piège est utilisée afin de restreindre les puissances optiques en espace libre des lasers sur les tables optiques. Le piège dipolaire intra-cavité n'est néanmoins pas suffisant pour obtenir un condensat, et nous utilisons un faisceau de piège supplémentaire vertical pour maintenir des fréquences de piège suffisantes. Ainsi, un condensat de Bose-Einstein vient d'être obtenu sur l'expérience.

L'utilisation d'un résonateur optique pour piéger et refroidir un grand nombre d'atomes est assez originale dans les expériences d'atomes froids. La cavité non dégénérée permet de modifier l'allure du potentiel dipolaire par ses différents modes  $TEM_{mn}$ . Nous utilisons par défaut le mode fondamental, mais nous pouvons refroidir et manipuler les atomes dans des modes supérieurs. A partir d'un ou plusieurs ensembles atomiques, nous pouvons séparer et recombinaison les différents nuages pour réaliser des mesures d'interférométrie.

## Chapitre 4

# Boucle à verrouillage de phase atomique

La seconde, une des sept unités de bases, a été définie par divers étalons au cours du temps en fonction des technologies accessibles. Initialement décrite par la seconde solaire, une fraction d'un jour solaire lui-même défini comme la durée qui sépare deux passages successifs du Soleil au méridien, puis par la seconde des éphémérides définie par la rotation de la terre autour de son axe, elle a été fixée depuis lors de la XIII<sup>e</sup> Conférence générale des poids et mesures en 1967.

La définition actuelle est basée sur l'atome de césium grâce aux développements des horloges atomiques et se formule comme "la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins  $F=3$  et  $F=4$  de l'état fondamental  $6^2S_{1/2}$  de l'atome de césium 133". Cette seconde atomique est définie davantage sur une base liée à la loi de Planck qu'à partir de mesures de rotation de la terre, imprécises parce que la Terre ralentit autour de son axe à cause de la conversion de l'énergie cinétique du mouvement de rotation de la terre en énergie thermique par frottement des marées océaniques.

Depuis, d'importants efforts ont été réalisés pour l'amélioration des horloges atomiques, permettant dorénavant une instabilité de l'ordre de  $10^{-18}$  à long terme pour les horloges à réseaux optiques de nouvelles générations [Hinkley et al., 2013, Nicholson et al., 2015], posant la question d'une possible redéfinition [Gill, 2011].

Le développement d'oscillateurs optiques référencés à des cavités ultra-stables de haute finesse et adressés sur des atomes piégés dans un réseau optique avec un temps de cohérence très long a permis aux horloges à réseaux optiques d'accéder à une sensibilité jusqu'alors inégalée.

La seconde est par conséquent l'unité du système internationale la plus précisément mesurée et de nouveaux effets physiques peuvent alors être détectés, comme notamment le décalage gravitationnel dans le rouge (ou décalage d'Einstein) où la dilatation du temps peut être mesurée sur une élévation de moins d'un mètre par la comparaison de deux horloges optiques [Chou et al., 2010].

La comparaison de différentes horloges permet également de borner les variations temporelles des constantes fondamentales. Avec la comparaison d'horloges optiques d'atomes de H, Yb<sup>+</sup>, Dy, Sr entre elles ou avec des horloges micro-ondes Rb, Cs, Rb et des horloges à ions Al<sup>+</sup>, Hg<sup>+</sup>, il est possible de borner de manière indépendante les constantes fondamentales  $\alpha$ ,  $\mu = m_e/m_p$  et  $m_q/\Lambda_{QCD}$  [Abgrall et al., 2015, Fortier et al., 2007, Leefler et al., 2013].

Pour améliorer encore davantage les horloges, de nouvelles avancées sont faites sur la stabilisation de l'oscillateur local, permettant ainsi de comparer la fréquence atomique avec



une plus grande précision initiale. Pour les horloges optiques avec une fréquence accessible par laser, l'oscillateur local est un laser pré-stabilisé sur une cavité optique à haute finesse dans un environnement cryogénique et/ou avec de nouveaux matériaux (comme le cristal de silicium ou le verre à faible dilatation) pour limiter les variations de longueur de la cavité par fluctuations thermiques [Kessler et al., 2012].

Le développement de peignes de fréquence optiques permet de relier les différentes longueurs d'ondes optiques aux fréquences micro-ondes et ainsi de fournir des oscillateurs locaux cohérents en phase pour la comparaison d'horloges [Hume and Leibbrandt, 2015]. Il permet aussi d'améliorer certains lasers moins stables par un système laser maître/laser esclave : le battement entre les deux lasers de fréquences arbitraires, qui sont initialement comparés avec le peigne de fréquence, permet de transférer la pureté du laser maître sur le laser esclave et ainsi d'obtenir une plus grande stabilité du laser esclave. La stabilité des oscillateurs locaux est donc un enjeu majeur pour les futures générations d'horloges atomiques, afin d'obtenir une horloge à la limite ultime de la transition atomique.

Dans ce chapitre, nous proposons une approche basée sur l'asservissement de phase entre l'oscillateur local et la superposition d'états atomiques en utilisant des mesures non destructives couplées à une rétroaction sur la phase de l'oscillateur local. Cette boucle de verrouillage de phase permet de manière générale d'asservir un oscillateur classique sur un oscillateur quantique, et permet ainsi d'avoir directement accès aux oscillations des systèmes quantiques. En appliquant cette technique aux horloges atomiques, il est possible de surpasser le bruit de l'oscillateur local en corrigeant sa dérive de phase en temps réel et ainsi ne plus être limité par la stabilité de l'oscillateur local.

## 4.1 Horloges atomiques

Ce chapitre commence par la description des horloges atomiques en général, où nous allons voir que l'OL est souvent la limite de stabilité de l'horloge. Cette section se terminera par une description de l'horloge utilisée pour cette étude.

Nous proposons ici d'implémenter un asservissement de phase entre l'oscillateur local et l'ensemble atomique, contrairement aux asservissements sur la fréquence de l'oscillateur local communément utilisés.

Ce concept va être décrit puis réalisé expérimentalement sur une horloge modèle, où nous allons comparer les performances avec une horloge atomique traditionnelle.

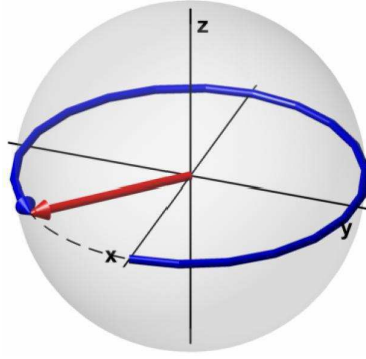
La possibilité d'implémenter ce principe à une horloge à l'état de l'art sera ensuite discuté, ainsi que les améliorations possibles du protocole.

### 4.1.1 Principe d'une horloge

Une horloge atomique repose sur la comparaison d'un oscillateur externe (ou oscillateur local OL) sur la fréquence d'une transition atomique absolue et immuable. Ces deux fréquences sont comparées après interaction et détection.

L'interaction peut se produire pendant un seul intervalle d'interaction pour une séquence de type Rabi, ou deux zones d'interactions pour une séquence de type Ramsey, cette dernière étant la plus couramment utilisée pour l'interrogation d'horloge atomique micro-onde comme nous allons le voir plus loin.

Intuitivement, plus le temps d'interrogation est long, meilleure est la résolution en fréquence et plus l'horloge sera stable. Une première limitation provient du caractère quantique du système atomique, la phase n'étant pas une observable du système, on mesure alors sa



**Figure 4.1** – Représentation de la dérive de phase hors de la région d'inversion sur la sphère de Bloch. Si le temps d'interrogation est trop long et l'oscillateur local pas assez stable, la phase a une probabilité non nulle de sortir de la région d'inversion. Par exemple on ne peut déterminer si la phase est ici  $-\pi/4$  ou  $+\pi/4$ .

projection en une différence de population, ce qui donne la fonction sinus de la phase. Pour être mesurée sans ambiguïté, la phase doit alors être bornée dans l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

En effet, si la phase sort de cet intervalle on ne peut pas connaître sa valeur exacte comme représenté sur la Fig. 4.1. Par conséquent, dépendant de la stabilité de l'OL qui donne la vitesse de dérive de la phase, il faudra limiter le temps d'interrogation — et donc la sensibilité de l'horloge — pour éviter que la phase ne sorte de la région d'inversion  $[-\pi/2; \pi/2]$ . Cette limitation est en général repoussée en améliorant la stabilité de l'OL, mais nous allons voir que nous pouvons résoudre ce problème en réalisant un asservissement de phase entre l'OL et le système atomique.

La fréquence de l'OL est fixée par la fréquence de la transition d'horloge, ainsi l'OL peut être dans le domaine des micro-ondes jusqu'au domaine des fréquences optiques. Une horloge micro-onde, comme pour l'étalon de mesure de la seconde avec des atomes de Césium, peut se réaliser avec les atomes se propageant verticalement, et passant à travers une cavité micro-onde fixe (les horloges à fontaine atomique [Kasevich et al., 1989] [Clairon et al., 1991] [Clairon et al., 1995] [Gerginov et al., 2010]). Elle peut également se réaliser dans le domaine temporel où les atomes sont piégés et interagissent avec des pulses micro-ondes de durée déterminée (comme pour cette expérience), qui peut aussi être conçu sur une puce atomique pour une horloge compacte [Szmuk et al., 2015].

Une horloge est d'autant plus stable que sa fréquence propre est grande, on cherchera donc à réaliser une horloge dans le domaine des fréquences optiques plutôt que les fréquences micro-ondes pour plus de performance. De plus, si les atomes sont piégés dans un réseau optique à une certaine longueur d'onde dite "magique" [Katori et al., 2003] [Takamoto et al., 2005], le potentiel de piège n'induit pas de déplacement de fréquence sur la transition d'horloge et l'horloge peut atteindre une meilleure stabilité. En contrôlant les divers effets systématiques (radiation de corps noir statique et dynamique, effets Stark et Zeeman, collisions et effet de densité dans le nuage atomique ... etc), les horloges atteignent désormais des stabilités de l'ordre de  $10^{-18}$  [Beloy et al., 2014] [Nicholson et al., 2015] [Ushijima et al., 2015].

D'autres propositions envisagent l'utilisation de fréquences dans le domaine des rayons gamma pour atteindre une fréquence d'horloge autour de  $10^{19}$  Hz par effet Mössbauer [Alpatov et al., 2007], ou l'utilisation de transitions nucléaires [J.Campbell et al., 2012] [J.Campbell et al., 2012] ou électroniques pour les ions hautement chargés [Derevianko et al., 2012] avec un contrôle des effets systématiques de l'ordre de  $10^{-19}$  -  $10^{-21}$ .

### 4.1.2 Stabilité et exactitude d'une horloge

La stabilité est une grandeur utilisée pour caractériser les performances d'une horloge, elle fait référence aux fluctuations de la fréquence qu'elle présente. En d'autres termes, une horloge avec une grande stabilité reproduit la même fréquence au cours du temps.

L'exactitude fait quant à elle référence à l'écart entre la valeur mesurée et la définition. Une horloge exacte est une horloge pour laquelle les effets systématiques déplaçant sa fréquence mesurée sont bien connus et corrigés. A titre d'exemple, une horloge avec une exactitude et une stabilité de l'ordre de  $10^{-18}$  à long terme équivaut à spécifier l'âge de l'univers avec une précision de moins d'une seconde.

Dépendant du bruit de l'horloge et notamment du bruit de l'oscillateur local, la stabilité à court terme et à long terme peut varier, il est alors nécessaire de caractériser l'horloge pour différents pas de temps. On utilise pour cela l'écart-type d'Allan  $\sigma_y(\tau)$  sur une durée d'estimation  $\tau$  [Allan, 1966], qui est valable de manière générale pour estimer la stabilité de tout oscillateur.

#### Variance d'Allan de la déviation relative de fréquence

En supposant l'OL parfait, de fréquence  $f_{OL}$  proche de la fréquence atomique  $f_{at}$  (qui peut varier de la fréquence de référence  $f_0$  à cause d'effets systématiques), alors l'écart de fréquence s'écrit  $\bar{y} = (f_{OL} - f_{at})/f_0$  qui est moyenné sur des durées  $\tau$ . La variance à deux échantillons (ou variance d'Allan) de la déviation relative de fréquence s'écrit donc [Allan, 1966] :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle, \quad (4.1)$$

où  $\bar{y}_{k+1}$  et  $\bar{y}_k$  sont deux échantillons successifs moyennés sur une durée d'échantillonnage  $\tau$ .

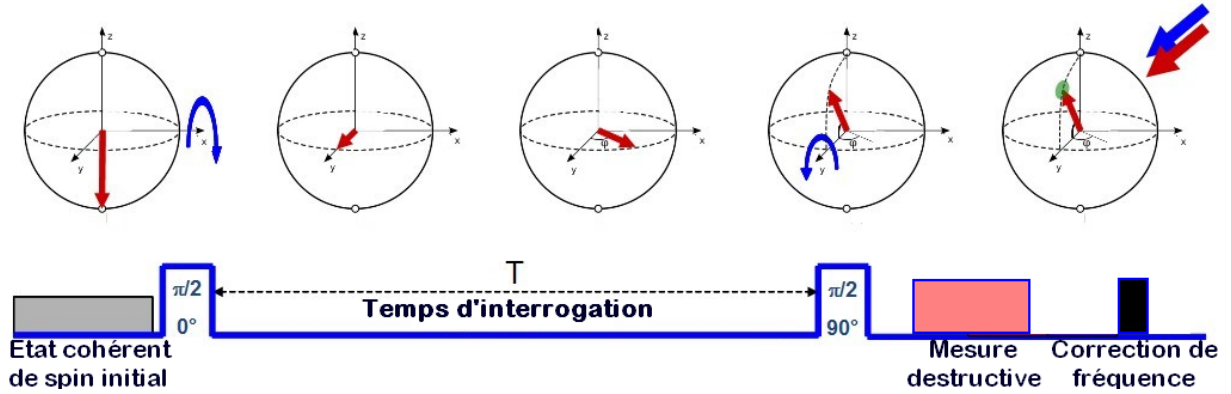
La variance d'Allan — ou plus précisément l'écart-type d'Allan  $\sigma_y(\tau)$  — estime la stabilité d'un oscillateur à différents pas de temps à partir de mesures d'erreurs de fréquences ou d'erreurs de temps. La variance d'Allan permet de comparer les fréquences mesurées sur une même horloge, et est donc un outil indispensable pour les horloges les plus stables par manque de référence absolue ou d'oscillateur de plus grande stabilité.

### 4.1.3 Interrogation Ramsey

Comme nous l'avons vu, une horloge peut fonctionner avec une séquence d'interrogation de Ramsey. Elle consiste en deux courtes zones d'interaction  $\pi/2$  entre les atomes et l'OL séparées par un temps d'interrogation  $T$ . Comparé à une séquence de Rabi à une seule interaction d'aire d'impulsion totale  $\pi$ , les atomes sont dans un état de superposition plus sensible aux fluctuations de phase de l'OL pendant un temps  $T$  qui est très grand devant le temps des impulsions. De ce fait, les atomes passent également moins de temps sous le rayonnement de l'OL pour un temps d'interrogation plus long et donc accumulent moins d'inhomogénéité.

Dans la représentation de la sphère de Bloch (voir Chap. 1), où les deux états hyperfins du système est la transition d'horloge, la séquence de Ramsey se représente comme sur la Fig. 4.2.

Les atomes sont initialement préparés dans l'état  $|F = 1\rangle$  (voir la section 3.2.6). Après un premier pulse  $\pi/2$  autour de l'axe  $x$ , la phase est initialisée, le système est dans une superposition d'états et forme un état cohérent de spins (voir Chap. 1). Après cette initialisation, la phase relative entre les atomes et l'OL va dériver à cause du bruit de fréquence de ce dernier.



**Figure 4.2** – Représentation d’une séquence de Ramsey sur la sphère de Bloch. Après la préparation de l’état cohérent de spins initial et le premier pulse  $\pi/2$  d’interaction avec l’OL, la phase relative  $\varphi$  entre les atomes et l’oscillateur local dérive et est ensuite détectée destructivement après avoir été projeté par le deuxième pulse  $\pi/2$ . On corrige ensuite la fréquence de l’OL afin de l’ajuster sur celle des atomes.

Si l’OL est stable, *i.e.* le bruit de l’OL est bas, la dérive de phase sera plus lente permettant ainsi un temps d’interrogation plus long et une meilleure stabilité de l’horloge. Par exemple, la stabilité des oscillateurs optiques est proche de  $10^{-16}$  à 1 s pour les horloges à réseaux optiques, et permet un temps d’interrogation de  $T \simeq 1$  s.

Le second pulse  $\pi/2$  autour de l’axe  $y$ , ou pulse de projection, projette la phase relative en une différence de population entre les deux niveaux hyperfins qui est ensuite détectée (typiquement par fluorescence ou absorption). La détection est destructive, *i.e.* la cohérence du système quantique est perdue, et le rapport signal à bruit est choisi pour être maximal, pour une sensibilité d’horloge maximale. Après la détection, une correction de fréquence sur l’OL est faite afin d’ajuster sa fréquence en fonction de celle de la transition atomique .

Il faut ensuite préparer de nouveau l’ensemble atomique, c’est-à-dire le refroidir puis préparer les états atomiques dans  $|F = 1\rangle$ , avant d’itérer la séquence d’interrogation. Un cycle d’horloge de temps  $T_C$  revient donc à un temps de préparation, appelé temps ”mort”  $T_D$  où aucune comparaison de l’OL avec les atomes n’est faite, suivi du temps d’interrogation Ramsey où le temps des pulses  $\pi/2$  est négligeable devant  $T$ . Le temps total d’un cycle d’horloge s’écrit donc  $T_C \simeq T_D + T$ .

L’interférométrie Ramsey mène à des franges de Ramsey en sortie lorsque l’on trace la probabilité de transition atomique en fonction du désaccord de la fréquence de l’OL par rapport à la transition atomique (voir par exemple [Clairon et al., 1991]). Ces franges ont une période  $1/T$  et l’enveloppe a une largeur à mi-hauteur proportionnelle à  $1/\tau_{\pi/2}$ , où  $\tau_{\pi/2}$  est la durée des pulses  $\pi/2$ . Le facteur  $Q_{at}$  représentant la fraction de résolution de la fréquence est défini comme :

$$Q_{at} = \frac{f_0}{\Delta f}. \quad (4.2)$$

où  $\Delta f = 1/2T$  est la pente à mi-hauteur de la frange centrale. Ce facteur peut se réécrire  $Q_{at} = 2Tf_0$  et donne la sensibilité de l’horloge. On voit donc que plus le facteur  $Q_{at}$  est grand, plus l’horloge sera sensible, on cherchera donc à utiliser des atomes avec une transition de fréquence  $f_0$  la plus grande possible, ce qui a motivé le développement des horloges optiques. Les horloges actuelles peuvent atteindre un facteur de qualité de l’ordre  $10^{11}$  ou plus [Szmuk et al., 2015].

#### 4.1.4 Limitations

Voyons maintenant les limitations actuelles des horloges, et notamment celles dues au bruit de l'oscillateur local qui nous intéressent ici.

##### Stabilité de l'oscillateur local

Comme nous l'avons vu, le temps d'interrogation est limité par le bruit de l'oscillateur local. Plus la stabilité de l'OL est grande, plus le temps d'interrogation peut être long sans que la phase relative ne dépasse la région d'inversion et ne devienne ambiguë.

Pour les horloges atomiques optiques, l'utilisation de cavités optiques en environnement cryogénique (ou avec du verre à faible dilatation ou du cristal de silicium limitant les déformations géométriques de la cavité) permet d'obtenir une largeur spectrale de l'ordre de 40 mHz [Kessler et al., 2012] ainsi qu'une stabilité de l'ordre de  $10^{-16}$  à 1 s [Jiang et al., 2011] [Amairi et al., 2013]. Le développement de l'effet de "trous brûlés spectraux" (*Spectral hole burning* en anglais) dans les raies d'absorption des terres rares permet une stabilité de l'ordre de  $6 \cdot 10^{-16}$  à 2 s à partir d'un laser pré-stabilisé [Thorpe et al., 2011].

Pour les horloges à micro-ondes, une chaîne de fréquence à partir d'un quartz bas bruit est souvent utilisée. Le signal du quartz est ensuite multiplié fréquemment et mixé pour produire le signal à la fréquence voulue : 9.192 GHz pour le  $^{133}\text{Cs}$  et 6.835 GHz pour le  $^{87}\text{Rb}$  par exemple.

Dans cette étude, nous allons voir que la limite due à la phase ambiguë peut être surpassée si l'on implémente un asservissement de phase entre l'OL et l'état atomique, maintenant cette phase à l'intérieur de la région d'inversion.

##### Effet Dick

L'effet Dick [Dick, 1987] est une limitation qui provient de l'échantillonnage du bruit de l'oscillateur local au cours du fonctionnement de l'horloge. En effet, pour une séquence d'horloge atomique de durée  $T_C$ , un important temps mort  $T_D$  est présent où aucun signal n'est mesuré. Ce temps mort se répète au cours des cycles, menant à une dégradation de la stabilité de l'horloge à cause des dérives de fréquence non détectées de l'OL.

Il est possible de calculer l'écart-type d'Allan de cette limite connaissant la fonction de sensibilité de l'horloge [Santarelli, 1996] [Santarelli et al., 1998], et supposant que le bruit de fréquence de l'oscillateur est dominé par un bruit blanc et que la durée d'un pulse  $\pi/2$  est négligeable devant le temps d'interrogation :

$$\sigma_{y,Dick} = \sqrt{\frac{h}{f_{OL}^2 \tau} \left( \frac{T_C}{T} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{h_0 T_D}{\tau T}}, \quad (4.3)$$

avec  $h_0 = h/f_{OL}^2$  la densité spectrale normalisée de puissance de bruit de fréquence de l'OL et  $\tau$  le pas d'intégration. On peut remarquer que la dépendance en  $\sim T^{-1/2}$  est aussi présente pour un bruit de fréquence en  $1/f$  [Santarelli, 1996] [Kohlhaas, 2014].

Pour les horloges à ion unique, cette limite est plus basse que le bruit de projection quantique, alors que pour les horloges utilisant un ensemble d'atomes neutres avec un temps mort important cela limite la stabilité de l'horloge [Szmuk et al., 2015]. Pour éliminer presque entièrement cet effet, il faut interroger simultanément deux ensembles atomiques avec le même oscillateur, supprimant ainsi le temps mort <sup>1</sup> [Biedermann et al., 2013]. Cette technique a été

1. Il reste néanmoins le temps mort pendant les durées finies des impulsions  $\pi/2$ .

démontrée pour une séquence de Ramsey où cinq nuages d'atomes froids sont interrogés successivement [Meunier et al., 2014], et peut être appliqué dans notre cas sur plusieurs ensembles atomiques dans les modes supérieurs de la cavité.

### Bruit de détection

En réduisant tous les bruits techniques de l'horloge, il est possible d'arriver à une stabilité limitée à un bruit blanc de fréquence. L'horloge est alors soit limitée au bruit de photons ( $\sigma_{det} \gg \sigma_J$ ), soit au bruit de projection quantique ( $\sigma_J \gg \sigma_{det}$ ), dépendant de la mesure et du nombre d'atomes interrogés. Les fluctuations de fréquence n'étant pas corrélées, la rétroaction ne peut les compenser et une limite due au bruit blanc apparaît :

$$\sigma_{y,det} = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\text{SNR}} \frac{1}{T} \sqrt{\frac{T_C}{\tau}}, \quad (4.4)$$

avec  $\omega_0 = 2\pi f_0$  la fréquence de la transition qui est également celle de l'OL, le rapport signal à bruit SNR et  $\tau$  le temps d'intégration sur lequel a été calculé les déviations relatives de fréquences.

On retrouve le bruit de fréquence ajouté par la boucle de rétroaction à chaque cycle d'interrogation d'horloge, proportionnel à  $1/(T \cdot \text{SNR})$ , où l'inverse du rapport signal à bruit est l'incertitude de mesure de la phase, multiplié par l'équivalent fréquentiel du temps d'interrogation  $1/T$ .

L'instabilité décroît comme l'inverse de la racine carrée du nombre de cycle d'horloge  $1/\sqrt{N_C}$ , comme le montre le facteur  $1/\sqrt{N_C} = \sqrt{T_C}/\tau$ , on aura donc une meilleure stabilité au cours des cycles. On constate également que pour diminuer l'instabilité de l'horloge, il faut augmenter la fréquence de la transition, le rapport signal à bruit et le temps d'interrogation. On cherche donc à augmenter ces trois paramètres pour une horloge ultra-stable.

### Effets systématiques

Les déplacements et les dérives de fréquences systématiques, s'ils ne sont pas bien connus et corrigés, vont réduire l'exactitude et la stabilité de l'horloge.

Ils peuvent se diviser en deux parties : les effets dûs à l'environnement, et les effets dûs aux instruments de l'horloge. Nous n'allons pas ici faire un bilan complet des effets systématiques de l'horloge, ce n'est pas l'objet de cette étude. Pour une vue d'ensemble précise des systématiques liées aux horloges optiques, voir [Derevianko and Katori, 2011, Ludlow et al., 2015, Margolis, 2009], et pour les horloges micro-ondes [Abgrall et al., 2015].

#### 4.1.5 Notre horloge modèle

L'horloge étudiée ici est une horloge micro-onde avec des atomes de  $^{87}\text{Rb}$  où la transition atomique est entre les deux états hyperfins  $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$  et  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$  de la ligne D2 à une fréquence de 6.835 GHz (voir Annexe. A).

Les atomes restent piégés pendant l'interrogation Ramsey, donc la séquence se fait dans le domaine temporel et non spatial comme pour les fontaines atomiques. L'exactitude et la stabilité de cette horloge est loin de l'état de l'art actuel mais permet néanmoins de démontrer le principe pour de futures applications sur les horloges les plus précises.

L'OL de cette horloge est basé sur une chaîne de fréquence [Bernon, 2011]. La source est un quartz à une fréquence de 100 MHz et avec un bruit de -113 dBc/Hz à 1 Hz. Le signal du quartz est ensuite envoyé dans un composant non linéaire (Step Recovery Diode, HP 33005C)

afin de créer un peigne d’harmoniques où l’harmonique à 7 GHz est sélectionnée et filtrée. L’oscillateur à 6.835 GHz est alors créé après la soustraction d’un signal radio-fréquence, puis amplifié à 2W et envoyé sur les atomes via une antenne radio-fréquence. La fréquence est précisément ajustée sur la transition atomique en maximisant le transfert des atomes pendant des oscillations de Rabi, et la frange centrale est sélectionnée en variant le temps d’interrogation lors d’une séquence de Ramsey.

Un bruit de fréquence est ajouté au signal micro-onde par un générateur de signal produisant un bruit blanc avec une densité spectrale de  $2.7 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}^2/\text{Hz}$  puis filtré avec un filtre passe-bas à 1.85 kHz (pour une analyse plus simple du bruit). Au final, l’oscillateur local a une dérive de phase de 430 mrad<sub>RMS</sub> sur 10 ms. Cet ajout de bruit nous permet de démontrer que notre procédé améliore la stabilité d’une horloge même avec un OL bruyant.

## 4.2 Concept du verrouillage de phase

Après avoir introduit les bases d’une horloge atomique — et surtout comment l’OL peut limiter la stabilité — nous allons proposer et démontrer un protocole basé sur l’asservissement de phase de l’OL sur les atomes pour outrepasser cette limite. De manière générale, nous démontrons également un asservissement de phase entre un oscillateur classique et une superposition d’états quantique. Ces résultats ont été mesurés avant le déménagement à Bordeaux, lorsque l’expérience était au LCF à Palaiseau.

### 4.2.1 Séquence modifiée

Il est incontestable que les boucles à verrouillage de phase ont de meilleures performances à long terme qu’un asservissement de fréquence. Elles sont notamment très souvent utilisées en électronique, pour la stabilisation de chaîne de fréquence [Jones et al., 2010] [Diddams et al., 2000], ou la radionavigation [Braasch and Dierendonck, 1999] par exemple. Cela est en partie dû au fait que la phase est l’intégrale de la fréquence, menant donc à une meilleure stabilisation au cours du temps.

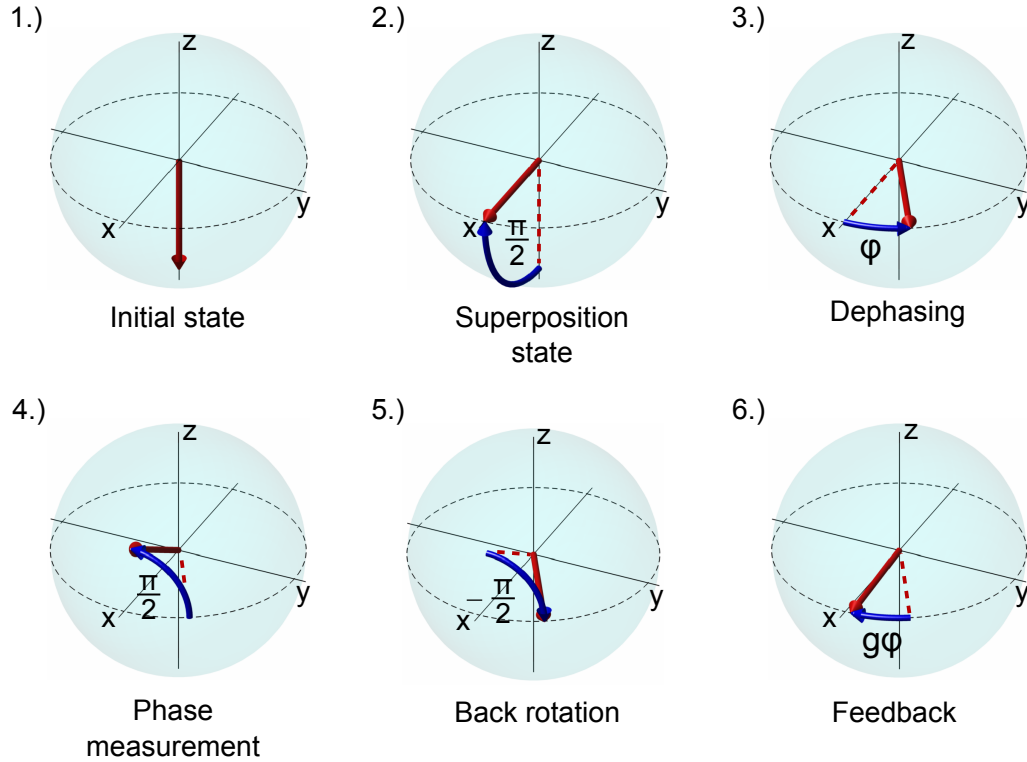
Pour les horloges atomiques, aucun asservissement de phase n’a été démontré précédemment à cause de la mesure sur le système quantique. Après la mesure, le système (et donc également la phase) est détruit et ensuite réinitialisé ; seul un asservissement de fréquence est alors possible. Par l’utilisation de mesures préservant la cohérence de l’ensemble atomique<sup>2</sup>, il est possible de suivre de manière corrélée la phase relative entre l’OL et les atomes et de la corriger en temps réel. Cette solution devrait permettre de s’affranchir de la limitation de mesure ambiguë sur la phase due au bruit de l’OL, et donc d’étendre le temps d’interrogation même avec un oscillateur peu stable.

Pour réaliser expérimentalement la boucle à verrouillage de phase atomique, il est nécessaire de modifier la séquence de Ramsey comme sur la Fig. 4.3.

Comme pour une séquence Ramsey ordinaire, le système atomique est refroidi et préparé dans le même état (étape 1), avant de former l’état cohérent de spins par le premier pulse micro-onde (étape 2). La phase relative dérive ensuite pendant le temps d’interrogation  $T$ , avec une vitesse dépendant de la stabilité de l’OL (étape 3). Avant que la phase relative ait une probabilité conséquente de sortir de la région d’inversion<sup>3</sup>, la phase est projetée en une différence de population atomique définie par l’observable  $J_z$  par le second pulse  $\pi/2$ , appelé

2. La mesure non destructive présentée dans le Chap. 2 préserve la cohérence de l’état si elle est opérée dans le régime faible. L’émission spontanée des bandes latérales doit être faible : c’est-à-dire qu’il faut une faible puissance dans le faisceau sonde, et des impulsions de mesure courtes.

3. Typiquement l’écart-type standard de la dérive de phase doit vérifier  $\sigma_\varphi < \pi/12$ .



**Figure 4.3** – Séquence de Ramsey adaptée au verrouillage de phase atomique. Après le début de séquence typique d’une séquence Ramsey (c’est-à-dire initialisation, création de l’état cohérent de spins par le premier pulse  $\pi/2$  et dérive de la phase pendant le temps  $T$ , étapes 1 à 3), la projection de la phase relative est détectée après le deuxième pulse  $\pi/2$  de manière à préserver la cohérence de l’ensemble, étape 4. D’après le résultat de la mesure et après avoir réinséré le spin atomique dans l’interféromètre par un pulse inverse  $-\pi/2$  (étape 5), une correction est appliquée sur la phase pour la rétablir proche de zéro (étape 6). La séquence peut ainsi se poursuivre (étapes 3 à 6) en mesurant et corrigeant la phase.

pulse de projection, et ensuite mesurée de manière non destructive (étape 4). La cohérence de l’état atomique est ainsi préservée, et le système peut être réutilisé de manière corrélée. Le spin atomique est donc réinséré dans l’interféromètre (étape 5), *i.e.* sur l’équateur de la sphère de Bloch, par un pulse  $\pi/2$  de réinsertion qui est l’inverse du pulse de projection. La phase relative est ensuite corrigée afin de la maintenir proche de zéro (étape 6).

La durée entre la mesure et la correction est de  $150 \mu\text{s}$  mais dépend néanmoins du temps de calcul de la correction. Les différents axes de rotation des pulses, ici selon l’axe  $x$  et  $y$ , sont déterminés par la phase du signal micro-onde et la durée des pulses  $\pi/2$  est  $\tau_{\pi/2} = 47 \mu\text{s}$ , qui est précisément paramétrée d’après la période des oscillations de Rabi.

Les mesures peuvent ainsi théoriquement se succéder (étapes 3 à 6) jusqu’à détruire complètement la cohérence atomique. En pratique, une dernière mesure précise est faite avant la décohérence totale de l’ensemble atomique pour profiter d’un rapport signal à bruit plus fort (voir Sec. 4.4).

Au total, le temps d’interrogation effectif lors d’un cycle d’horloge est de  $T_{tot} = N.T$ , avec  $N$  le nombre de mesures successives. Dans notre cas, le temps d’interrogation est de  $T = 1 \text{ ms}$ , beaucoup plus court que la cohérence de l’échantillon atomique.



Au cours d'un cycle, les mesures de phase sont corrélées entre elles et les valeurs des corrections appliquées sont sauvegardées pour connaître la dérive de phase totale à la fin du cycle. Le cycle se termine par une mesure destructive qui prend en compte la cohérence résiduelle de l'état atomique avec un plus fort rapport signal à bruit, suivi d'une correction sur la fréquence de l'OL comme pour une horloge traditionnelle.

La valeur de cette correction de fréquence à la fin du cycle est déduite de la dérive totale de phase reconstruite d'après les sauvegardes après chaque correction intermédiaire de phase. Ainsi, les erreurs éventuelles de correction dues au faible rapport signal à bruit des mesures faibles intermédiaires sont compensées par la mesure précise en fin de cycle, et l'horloge n'est pas limitée par le rapport signal à bruit des mesures faibles (SNR = 20 dans notre cas).

Nous pouvons résumer ce procédé en trois étapes. La première consiste dans l'asservissement de phase à proprement parler, en utilisant les mesures faibles et les corrections de phase. La loi de contrôle pour les mesures intermédiaires d'un cycle est :

$$\varphi_{OL}^{(i)} = \varphi_{OL}^{(i-1)} + \varphi_{FB}^{(i)}, \quad (4.5)$$

$$= \varphi_{OL}^{(i-1)} + g_\varphi \varphi^{(i)}, \quad (4.6)$$

où  $i = 1..N$  dénote la  $i$ ème mesure faible et où  $\varphi^{(i)}$  est la différence de phase estimée entre l'OL et les atomes pour la  $i$ ème mesure intermédiaire,  $\varphi_{OL}$  est la phase de l'oscillateur local. Les valeurs  $\varphi_{FB}^{(i)} = g_\varphi \varphi^{(i)}$  sont sauvegardées dans le micro-contrôleur, et un gain de  $g_\varphi = -1$  est typiquement appliqué.

La seconde partie du protocole est la détection finale. A la fin du cycle, *i.e.* après la  $N$ ème mesure faible, une mesure destructive détecte la dernière dérive de phase  $\varphi_f$  le plus précisément possible. La différence de phase totale  $\varphi_{tot}$  au cours du temps d'interrogation total  $T_{tot}$  est alors reconstruite à partir des dérivées de phase sauvegardées à l'étape précédente et de la dernière mesure précise.

Enfin, la correction de fréquence  $\omega_{FB}$  est réalisée sur l'oscillateur local :

$$\omega_{OL}^{(n)} = \omega_{OL}^{(n-1)} + \omega_{FB}^{(n)}, \quad (4.7)$$

$$= \omega_{OL}^{(n-1)} + g_\omega \frac{\varphi_{tot}^{(n)}}{T_{tot}}, \quad (4.8)$$

où

$$\varphi_{tot}^{(n)} = \varphi_f^{(n)} - \sum_{i=1..N} g_\varphi \varphi^{(i)}, \quad (4.9)$$

et où  $n$  est le cycle d'horloge considéré, avec  $i$  les mesures intermédiaires réalisées dans ce cycle. Après chaque cycle d'horloge  $n$ , la phase est réinitialisée  $\varphi_{OL}^{(n)} = \varphi_{OL}^{(0)} = 0$ , et le cycle se répète.

Le gain théorique  $\xi^{-1}$  sur la stabilité d'une horloge utilisant ce protocole par rapport à une horloge standard se déduit de l'Eq 4.4 et s'écrit :

$$\xi = \frac{\text{SNR}_0}{\text{SNR}_f} \frac{1}{N} \sqrt{\frac{T_D + NT}{T_D + T}}, \quad (4.10)$$

où  $\text{SNR}_0$  est le rapport signal à bruit d'une horloge standard,  $\text{SNR}_f$  celui de la mesure précise finale après chaque cycle de notre horloge utilisant la boucle de verrouillage de phase, et  $N$

est le nombre de mesures intermédiaires.

Dans la proposition initiale de boucle à verrouillage de phase atomique par N. Shiga et M. Takeuchi [Shiga and Takeuchi, 2012] [Shiga et al., 2012], seulement des mesures faibles sont employées lors d'un cycle d'horloge. Il faut alors remplacer dans l'Eq. 4.10 le rapport signal à bruit  $\text{SNR}_f$  par le celui d'une mesure faible considérablement plus bas<sup>4</sup>. Même pour un nombre de cycle conséquent, le faible rapport à signal tend à dégrader la stabilité de l'horloge.

Dans [Shiga et al., 2012], les chercheurs démontrent un nombre de 3 mesures partiellement projectives successives sur un ensemble d'ions piégés. Lors de ces mesures, la stabilité de l'horloge a une loi d'échelle en  $\sigma_y^{-1}$ , "accélégrant" donc le gain en stabilité pendant ces 3 mesures comparé au gain en stabilité ordinaire en  $\sigma_y^{-1/2}$  pour une horloge au bruit blanc de fréquence (voir l'Eq. 4.4). Le cycle d'horloge se terminant ensuite, le système atomique doit être réinitialisé et la stabilité a alors de nouveau une dépendance en  $\sigma_y^{-1/2}$ .

Le fait d'utiliser des mesures faibles au lieu de mesures partiellement projectives devrait augmenter le nombre de corrections de phase dans la boucle d'asservissement, mais ce procédé ne démontrera pas toute sa performance tant que le rapport signal à bruit sera faible. Dans notre cas, le rapport signal à bruit d'un cycle d'horloge est déterminé par la mesure précise finale qui peut être du même ordre de grandeur que pour une horloge sans boucle de verrouillage, ainsi le gain en stabilité théorique est proportionnel à  $N$  le nombre de mesures intermédiaires.

## 4.3 Démonstration du verrouillage de phase atomique

### 4.3.1 Montage expérimental

La boucle à verrouillage de phase atomique a été démontrée avec un ensemble atomique constitué de  $5 \cdot 10^5$  atomes de  $^{87}\text{Rb}$  à une température de 10  $\mu\text{K}$  (voir Chap. 3). Le montage expérimental pour la réalisation de la boucle à verrouillage de phase atomique est montré sur la Fig. 4.4.

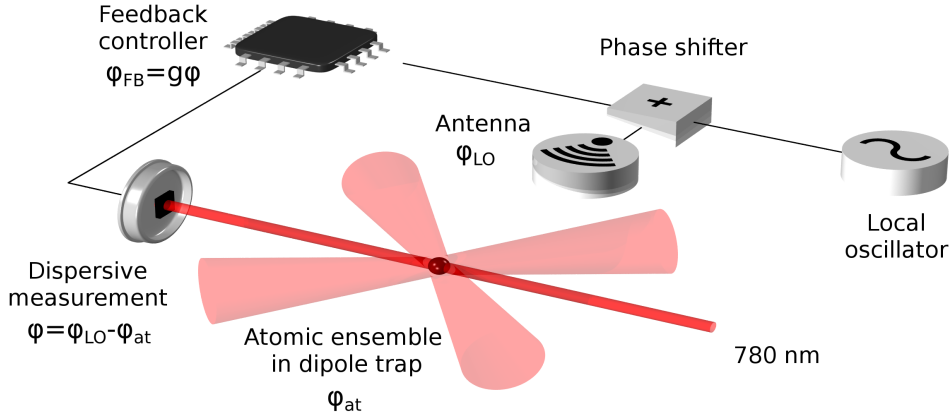
Les pulses micro-ondes sont dérivés de la chaîne de fréquence à 6.835 GHz et sont envoyés sur les atomes à l'aide d'une antenne RF. La mesure est ensuite réalisée grâce à une technique de spectroscopie par modulation de fréquence (voir Chap. 2), où les bandes latérales du faisceau de mesure à 780 nm sont déphasées par les atomes.

Après détection par une photodiode rapide (1591NF, NewFocus), deux amplifications (HMC716LP3E, Hittite), démodulation (ZX055-73C-C+, Minicircuits) et intégration électronique pendant les 60 ns de durée de pulse de mesure, le signal donne la différence de population atomique  $J_z$ . Cette tension est transformée en signal digital par un convertisseur analogue-digital à l'intérieur du micro-contrôleur (MCU, ou *feedback controller* sur la figure), où la correction est ensuite implémentée par l'unité de commande de rétroaction (aDuC841, Analog Devices). Le MCU contrôle à la fois l'actuateur de phase ("phase shifter" sur la figure), qui est un déphaseur à 6 bits de portée  $2\pi$  et de précision  $2\pi/2^6 = \pi/32$  (RFPSHT0204N6, RF-Lambda), et l'actuateur de fréquence qui est l'entrée de modulation du synthétiseur 165 MHz de la chaîne de fréquence pour la correction en fréquence à chaque fin de cycle d'horloge.

Dans un premier temps, nous allons voir l'influence de la mesure sans rétroaction, puis nous allons ajouter la correction et ainsi fermer la boucle d'asservissement de phase.

En configuration de boucle ouverte, où aucune correction de phase n'est ajoutée, la me-

4. Bien que dépendant du nombre d'atomes, une mesure par fluorescence a un rapport signal à bruit de l'ordre de 1000, alors qu'une mesure faible a typiquement un rapport signal à bruit de 20.



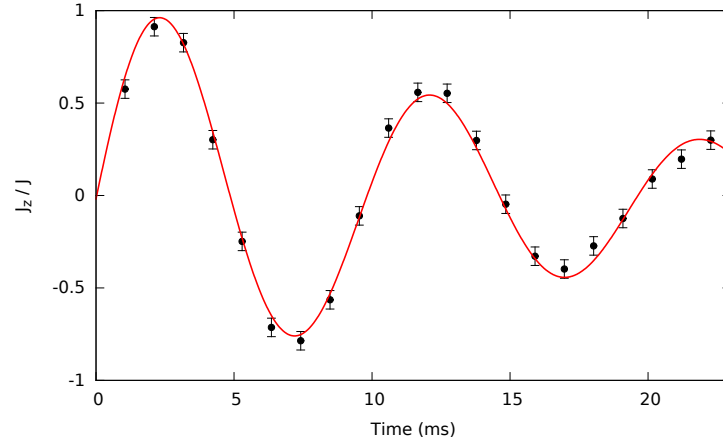
**Figure 4.4** – Montage expérimental pour la boucle à verrouillage de phase atomique. Après avoir comparé la phase de l’OL  $\varphi_{LO}$  à la phase atomique  $\varphi_{at}$ , la phase relative  $\varphi$  est mesurée de manière non destructive. La correction  $\varphi_{FB}$  est fixée par l’unité de commande de rétroaction (“feedback controller” sur la figure) en fonction du résultat de la mesure. La correction  $\varphi$  est envoyée avec un gain  $g$  sur l’OL via un déphaseur.

sure nous permet de suivre la dérive de phase en temps réel comme le montre la Fig. 4.5. Pour accentuer la dérive de phase, la fréquence micro-onde de l’OL a été déplacée de 100 Hz par rapport à la fréquence de la transition atomique. Chaque milliseconde, la phase relative est projetée en une différence de population atomique et mesurée avant d’être réinsérée dans l’interféromètre : on s’attend donc à voir des oscillations en temps réel de  $J_z$ . Après la mesure, aucune correction n’est réalisée donc la phase relative continue de dériver pour atteindre une valeur proche de  $4\pi$  après 20 ms.

On obtient bien une fonction sinus de la dérive de phase avec une période de 100 Hz, où chaque point séparé de 1 ms correspond à une mesure faible et la ligne rouge est un ajustement sinusoïdal avec amortissement. L’axe des ordonnées donne la différence de population normalisée à la longueur du spin atomique. Le rapport signal à bruit d’une mesure faible est de  $SNR = 20$  pour une cohérence maximale de l’état atomique, et chaque mesure réduit la cohérence de 2%. Cette perte de cohérence est la cause de l’amortissement observé sur la figure pour des temps inférieurs à 10 ms puis la décohérence par le déplacement lumineux inhomogène sur la transition de mesure dû au piège dipolaire devient supérieure (voir Chap. C).

Nous démontrons ensuite l’asservissement de phase direct entre un oscillateur classique et un système quantique en introduisant des corrections de phase après les mesures. La phase est alors réduite proche de zéro et reste dans la région d’inversion  $[-\pi/2; \pi/2]$ .

Pour le décalage de fréquence de 100 Hz précédent, les résultats de l’asservissement sont donnés sur la Fig. 4.6 dans la configuration de boucle ouverte (sans corrections) en rouge et de boucle fermée en bleu. Les cercles et leur ajustement (ligne rouge) représentent la dérive de phase sans correction et sont extraits des mesures précédentes. En prenant en compte



**Figure 4.5** – Évolution temporelle de la projection de la phase relative. Le graphe montre la différence de population normalisée  $J_z/J$  en fonction du temps, décrivant l'évolution du sinus de la phase relative pour un décalage de fréquence de l'OL de 100 Hz.

l'amortissement et sachant que le décalage de fréquence est de 100 Hz toujours dans la même direction, on obtient une dérive de phase constante.

En boucle fermée, la phase relative (cercles en bas) est réduite proche de zéro après chaque mesure puis correction et le signal en dent de scie (ligne bleue) est reconstruit connaissant les temps de séquence. La phase est alors maintenue dans la région d'inversion (région blanche), alors que sans correction elle sort de la région (en gris) et devient ambiguë après 2.5 ms. L'asservissement de phase permet donc d'interroger les atomes pendant un temps beaucoup plus long que la limite due au bruit de l'OL (22 ms de temps d'interrogation sont montrées ici, alors que la limite  $\pi/2$  est atteinte après 2.5 ms).

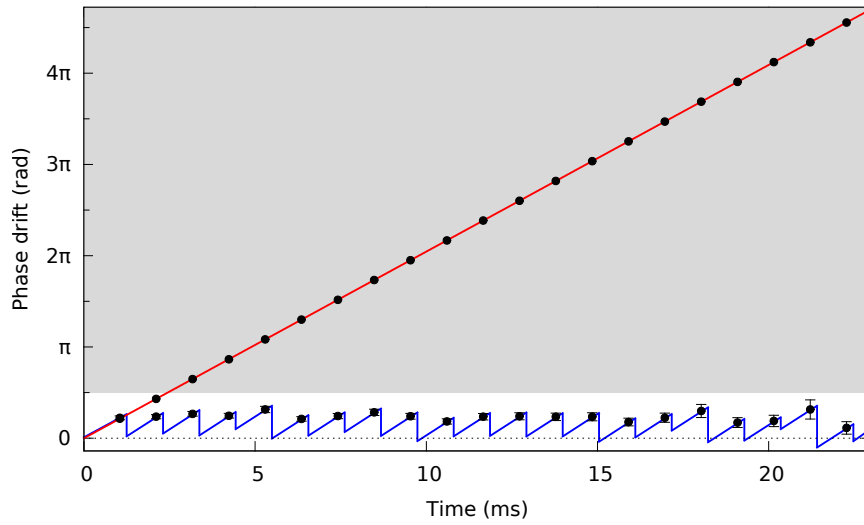
Après le décalage constant en fréquence, nous avons ajouté des sauts de phase périodiques d'amplitude  $\pi/3$  sur l'OL. Ces sauts de phase sont visibles lorsque la boucle d'asservissement est ouverte, en haut de la Fig. 4.7.

Les points correspondent aux mesures de phase sauvegardées, et l'ajustement est reconstruit connaissant les temps de la séquence et des sauts de mode. Les barres d'erreur représentant l'incertitude de la mesure faible sont plus conséquentes après 10 ms à cause de la perte de cohérence de l'ensemble. Lorsque la correction est ajoutée à l'OL, les sauts de phase sont corrigés à zéro (bas de la Fig. 4.7, en bleu) avec l'incertitude de la mesure faible et de la précision finie du déphaseur. La correction intervient 150  $\mu$ s après la mesure.

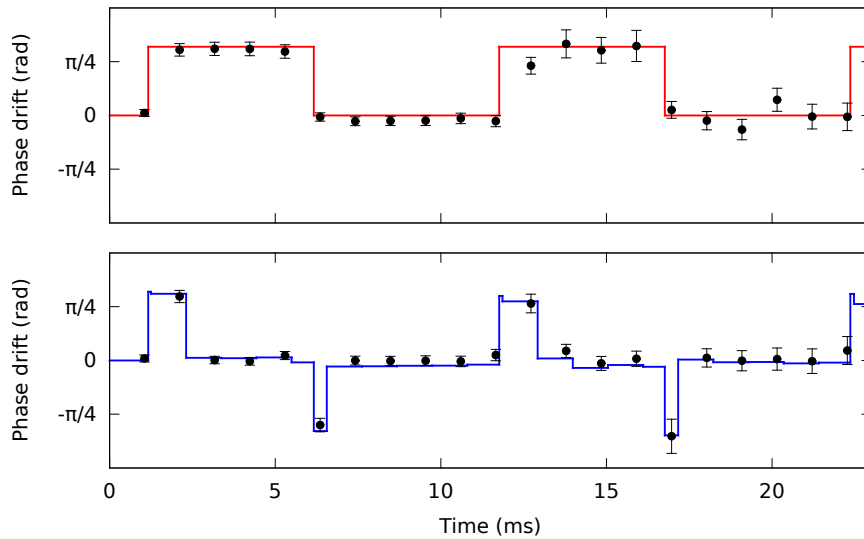
Nous avons ainsi démontré l'asservissement de la phase d'un oscillateur classique sur une superposition d'états quantiques. Après avoir suivi en temps réel la dérive de phase entre les deux oscillateurs, une correction de phase a été ajoutée, menant à une boucle à verrouillage de phase atomique.

## 4.4 Résultats appliqués aux horloges atomiques

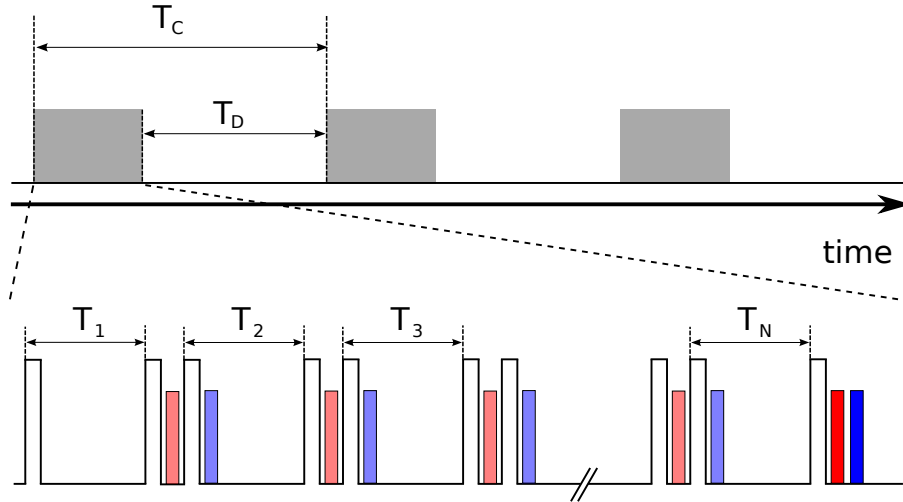
Comme vu précédemment, l'asservissement de phase entre un oscillateur local d'horloge et le système atomique fournissant une fréquence de référence permettrait de passer outre la limite du bruit de l'OL et ainsi d'augmenter le temps d'interrogation et la stabilité de l'horloge.



**Figure 4.6** – Correction de la dérive constante de phase. La ligne rouge et les cercles correspondent à la mesure de la phase sans correction, et la ligne bleue à la boucle de verrouillage de phase fermée. La phase est maintenue dans la région d'inversion (zone blanche) pour les 22 ms montrées sur le graphique, alors qu'elle devrait quitter la région après 2.5 ms sans correction ajoutée.



**Figure 4.7** – Correction des sauts de phase. (Haut) La ligne rouge et les cercles correspondent à la mesure de la phase sans correction. (Bas) La ligne bleue et les carrés correspondent à la boucle de verrouillage de phase fermée. Après chaque saut détecté, la phase est remise à zéro.



**Figure 4.8** – Séquence d’une horloge atomique utilisant une boucle à verrouillage de phase atomique. Lors d’un cycle de mesure d’horloge  $T_{tot} = T_C - T_D$ , La comparaison des deux oscillateurs se fait par une séquence Ramsey classique de deux pulses  $\pi/2$  (représentés par les pics blancs). La phase relative est ensuite mesurée de manière faible et non destructive (pics rouge clair) avant d’être réinsérée et corrigée (pics bleu clair). Cette séquence peut ainsi se prolonger jusqu’à la dernière mesure précise (pics rouge foncé), suivie d’une correction sur la fréquence de l’OL (pics bleu foncé).

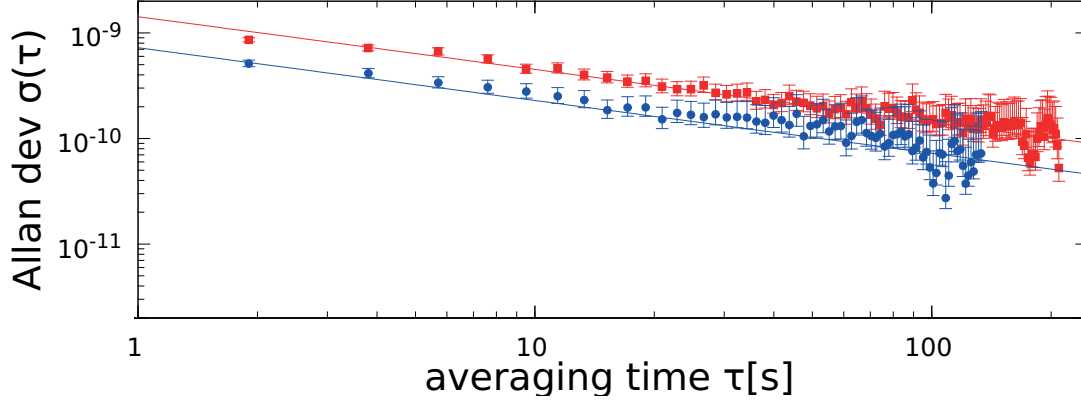
Nous allons démontrer ce procédé pour une horloge micro-onde, avec le même dispositif expérimental que précédemment. La séquence appliquée à cette horloge est basée sur la séquence Ramsey modifiée de la Sec. 4.2.1 et est représentée sur la Fig. 4.8.

Chaque cycle  $T_C$  de l’horloge contient le temps où l’OL est asservi en phase sur les atomes (partie grisée), et un temps mort  $T_D$ . Le temps où les deux oscillateurs sont comparés et asservis est représenté en détails en bas de la figure. L’asservissement comprend  $N$  séquences d’interrogation Ramsey modifiées (comme sur la Fig. 4.3), où les pulses  $\pi/2$  sont représentés par les pics blancs. Les mesures faibles (pics rouge clair) suivent le deuxième pulse  $\pi/2$  de projection, et les corrections de phase sur l’OL (pics bleu clair) suivent les pulses de réinsertion après les mesures. La séquence se termine par une mesure précise (pic rouge foncé) — de rapport signal à bruit déterminé par la cohérence résiduelle de la superposition atomique —, directement suivie par la correction sur la fréquence de l’OL (pic bleu foncé) déterminée par l’addition de toutes les corrections de phase durant les mesures intermédiaires (voir les lois de contrôle Eqs. 4.6 et 4.8). Le temps d’interrogation total est  $T_{tot} = T.N$ , où  $T = T_1 = T_2 = \dots = T_N = 1$  ms, avec  $N$  le nombre de mesures corrélées de phase.

Après le temps mort de préparation d’un nouvel ensemble atomique, le cycle se répète. Le rapport signal à bruit de la dérive totale de phase ne dépend que de la dernière mesure, détectant toute la cohérence résiduelle, alors que le rapport signal à bruit des mesures intermédiaires doit être seulement suffisant pour maintenir la phase dans la région d’inversion.

Pour démontrer l’amélioration d’une boucle à verrouillage de phase sur les horloges atomiques, nous avons comparé une horloge de séquence de Ramsey ordinaire avec une horloge utilisant la séquence de boucle de verrouillage de phase de la Fig. 4.8.

L’expérience n’ayant pas été construite à des fins de mesures précises de temps, la stabilité de l’horloge et le temps d’interrogation ne sont pas à des sensibilités de l’état de l’art actuel :



**Figure 4.9** – Comparaison d’une horloge utilisant un asservissement de phase avec  $N = 2$  mesures intermédiaires avec une horloge classique. L’écart-type à deux échantillons de la déviation relative de fréquence pour les deux horloges est représenté en fonction du temps, en rouge pour l’horloge classique, et en bleu pour l’horloge à  $N = 2$  mesures. L’instabilité est deux fois moindre pour cette dernière horloge.

nous réalisons ici la démonstration de faisabilité de l’asservissement de phase atomique et discutons de possibles gains pour les horloges actuelles. Afin de comparer de manière intuitive les deux horloges, leurs caractéristiques seront les mêmes. Ces deux horloges utiliseront le même système expérimental, le même OL et la même valeur de signal à bruit pour les mesures.

L’horloge ”classique” sans asservissement de phase est basée sur une interrogation Ramsey avec  $T = 1$  ms et un temps mort de  $T_D = 1.9$  s. Le temps d’interrogation est bien plus court que le temps de cohérence des atomes pour pouvoir itérer la séquence plusieurs fois ( $N \geq 2$ ) sans être limité par les sources de décohérence de l’expérience (voir Sec. 4.5 et Annexe C).

Les résultats pour l’horloge classique sont donnés sur les Figs. 4.9 et 4.10 en rouge (les carrés sont les données de la variance d’Allan et les lignes les ajustements.)

La stabilité atteint une loi d’échelle  $\tau^{-1/2}$  et une valeur de  $\sigma = 1.5 \cdot 10^{-9} \tau^{-1/2}$  à 1 s, consistant avec le rapport signal à bruit de  $\text{SNR} = 20$ . La limite de stabilité de l’horloge par effet Dick peut être calculée par l’Eq. 4.3 et vaut dans notre cas  $\sigma_{y,Dick} = 1.03 \cdot 10^{-9} \tau^{-1/2}$ , avec  $T_D = 1.9$  s et  $T = 1$  ms. L’horloge n’est donc pas limitée par cet effet.

Nous avons tout d’abord comparé cette horloge avec une horloge utilisant l’asservissement de phase à  $N = 2$  mesures intermédiaires, voir Fig. 4.9.

Pour simplifier, le rapport signal à bruit de la mesure précise en fin de cycle correspond à celui d’une mesure faible  $\text{SNR}_f = \text{SNR}_{\text{weak}} = 20$ , ainsi le gain théorique en stabilité (Eq. 4.10) devrait être directement proportionnel à  $N$ . Les cercles et la ligne bleue représentent la déviation d’Allan de cette horloge à  $N = 2$  mesures, et les carrés et la ligne rouge représentent la déviation d’Allan de l’horloge classique, où les barres d’erreurs sont données par le nombre limité de points expérimentaux (1000 cycles d’horloge ont été mesurés).

La stabilité de l’horloge avec  $N = 2$  mesures atteint  $\sigma_2 = 7.5 \cdot 10^{-10} \tau^{-1/2}$  à 1 s, d’un facteur 2 fois meilleur que l’horloge classique. Cela valide l’utilisation d’une boucle à verrouillage de phase atomique pour les horloges atomiques. Nous pouvons également en conclure que l’horloge avec l’asservissement de phase est toujours limitée au bruit blanc de fréquence puisqu’elle atteint une loi d’échelle en  $\tau^{-1/2}$ .

Nous avons également comparé l’horloge classique avec une horloge de  $N = 9$  mesures corrélées successives. La Fig. 4.10 (haut) montre la stabilité de ces deux horloges. L’horloge avec la boucle de verrouillage de phase atteint une stabilité de  $\sigma_9 = 3.15 \cdot 10^{-10} \tau^{-1/2}$  à 1 s, soit un facteur  $(4.76 \pm 0.25)$  fois meilleur que l’horloge classique grâce à un temps d’interrogation plus grand  $T_{tot} = 9$  ms qui n’est pas limité par la dérive de phase hors de la région d’inversion.

L’amélioration devrait théoriquement être d’un facteur 9, représenté par la ligne continue noire sur la figure. Néanmoins, le facteur d’amélioration reste supérieur à la limite théorique pour des mesures non destructives non corrélées démontrées dans [Lodewyck et al., 2009]. Dans cet article, les mesures non destructives permettent de réutiliser le système atomique, mais l’état quantique est re-préparé après chaque mesure et correction, menant à des mesures non corrélées et donc à un facteur théorique maximal proportionnel à  $\sqrt{N}$ . Pour une séquence non corrélée de 9 mesures, le facteur serait de 3 (ligne pointillée noire sur la figure). L’amélioration est encore plus visible si l’on trace le ratio de stabilité des deux horloges. Ce ratio est représenté en bas de la figure, où les lignes pleines et pointillées représentent les niveaux théoriques pour des mesures corrélées et non corrélées respectivement. On voit bien que le facteur d’amélioration se situe entre les deux lignes.

Expérimentalement, nous n’obtenons pas un facteur 9 à cause de différentes limitations. Les sources de décohérence principales sont la destructivité par le faisceau de mesure, réduisant la cohérence de 2% à chaque mesure, et diminuant ainsi le rapport signal à bruit au cours de la boucle à verrouillage de phase, et la décohérence par le piège dipolaire optique amenant un déplacement lumineux inhomogène sur la transition de mesure (voir Chap. C). La précision finie de 38 mrad du déphaseur amène également une erreur.

Nous avons donc vérifié que la boucle à verrouillage de phase atomique appliquée aux horloges atomiques augmente leur stabilité en gardant activement la phase relative à l’intérieur de la région d’inversion.

Cette amélioration a été démontrée en comparant la stabilité de l’horloge traditionnelle avec une horloge utilisant l’asservissement de phase. Pour  $N = 9$  mesures, un facteur d’amélioration de 4.76 a été démontré, et un facteur  $N$  est théoriquement possible. Ce protocole est donc validé pour une horloge modèle, avec des limitations toutefois différentes des horloges à l’état de l’art actuel. Pour l’appliquer sur des horloges plus stables, nous donnons par la suite quelques améliorations ainsi que les perspectives à suivre pour cette étude.

## 4.5 Améliorations et perspectives

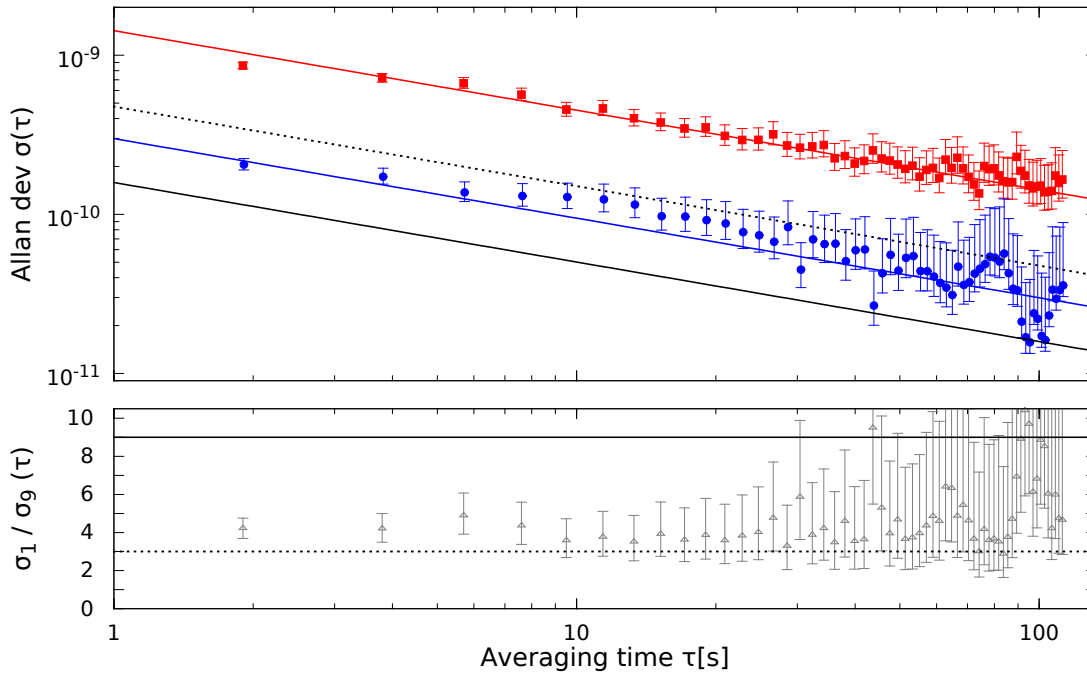
Avec le protocole décrit précédemment, les horloges n’étant plus limitées par le bruit de l’OL, le temps d’interrogation pourra être de l’ordre du temps de cohérence du système atomique.

Dans notre cas, le temps de cohérence est limité à 20 ms par le piège dipolaire, mais de récentes études montrent que le déphasage dû au piège dipolaire peut être supprimé [Radnaev et al., 2010], notamment par le rephasage induit de spin (“spin self-rephasing” en anglais) [Buning et al., 2011, Deutsch et al., 2010] pour atteindre des temps de cohérence de 20 s.

Pour les horloges optiques, l’utilisation de longueurs d’onde dites “magiques” réduisent considérablement les effets systématiques dus au déplacement lumineux [Katori et al., 2003] [Safronova et al., 2015].

Sans cette limitation sur le temps de cohérence, notre protocole permet d’atteindre la limite du bruit de projection quantique avec un temps d’interrogation allongé. En utilisant alors plus d’atomes, ou à partir d’un état comprimé de spins [Cox et al., 2015] [Louchet-Chauvet et al.,





**Figure 4.10** – Comparaison d’une horloge utilisant un asservissement de phase avec  $N = 9$  mesures intermédiaires avec une horloge classique. (Haut) L’écart-type d’Allan pour les deux horloges est représenté en fonction du temps, en rouge pour l’horloge classique, en bleu pour l’horloge à  $N = 9$  mesures. L’instabilité est d’un facteur 4.76 fois moindre pour cette dernière horloge. (Bas) Différence de stabilité des deux horloges, donnant directement le facteur d’amélioration. La ligne pleine correspond à la limite théorique d’amélioration pour  $N = 9$  mesures corrélées, et la ligne en pointillés à la limite théorique d’amélioration pour  $N = 9$  mesures non corrélées.

2010], la limite ultime de la largeur spectrale de la transition peut être atteinte, motivant ainsi l'étude de nouvelles transitions au mHz [Safronova et al., 2015] [Kozlov et al., 2013].

Pour que la boucle à verrouillage de phase soit la plus performante possible, certaines conditions doivent être remplies :

- Les rotations du spin atomique doivent être rapides et négligeables devant le temps d'interrogation.
- La précision du déphaseur pour la correction doit être grande.
- La décohérence par la mesure doit être la plus basse possible tout en obtenant suffisamment d'information pour maintenir la phase dans la région d'inversion.

Cette dernière condition peut être améliorée en réalisant la mesure faible intra-cavité, où la destructivité peut être réduite pour la même quantité d'information grâce à plusieurs interactions entre le faisceau sonde et les atomes définies par la finesse de la cavité [Lee et al., 2014] [Bohnet et al., 2014] (voir Sec. 3.3).

Cette technique permet également la création d'états comprimés de spins à l'aide d'une cavité à haute finesse, évoqués dans la Sec. 3.3, permettant de dépasser la limite quantique standard [Leroux et al., 2010a]. Achever la mesure non destructive intra-cavité est alors une perspective très intéressante pour démontrer l'asservissement de phase atomique avec moins de décohérence, à partir d'un état comprimé de spins en entrée (un gain métrologique de 10 dB a été démontré récemment [Cox et al., 2015]). Les deux améliorations sont complémentaires et les gains pourraient s'additionner sur une horloge pour améliorer sa stabilité.

Pour découpler la décohérence pendant les mesures intermédiaires au rapport signal à bruit limité de la dernière mesure précise, nous pouvons utiliser deux ensembles atomiques. Dans ce cas, une horloge optimale consisterait en l'interrogation des deux ensembles atomiques consécutivement par le même OL. Le premier ensemble serait utilisé à l'asservissement et à la reconstruction de la dérive de phase de l'OL où la phase relative resterait dans la région d'inversion pendant un temps beaucoup plus long. L'OL ainsi pré-stabilisé servira ensuite à interroger l'autre ensemble atomique dans une séquence de Ramsey classique. Ainsi, le compromis de signal à bruit pendant l'asservissement de phase et la mesure finale précise n'est plus présent. Cette proposition est équivalente à [Rosenband and Leibbrandt, 2013] [Kessler et al., 2014] avec un seul ensemble atomique additionnel et en utilisant un asservissement de phase permettant une interrogation plus longue.

Si en plus, les deux ensembles sont interrogés à la suite de telle manière qu'aucun temps mort dans l'interrogation de l'OL n'est présent, l'effet Dick est supprimé [Biedermann et al., 2013]. La limitation due à cet effet (Eq. 4.3) disparaît et l'horloge peut ainsi atteindre une limite plus fondamentale.

En pratique, de multiples ensembles atomiques peuvent être créés et piégés grâce aux modes transverses de la cavité optique (voir section 3.5 : quatre ou neuf ensembles peuvent être créés avec les modes  $TEM_{01}$  et  $TEM_{02}$  par exemple). La mesure devra s'appliquer sur un ensemble à la fois : les premiers ensembles serviront à l'asservissement de phase de l'OL et le dernier à une correction précise de sa fréquence à partir d'une mesure à fort SNR, comme une détection par fluorescence ou par absorption.

## 4.6 Conclusion du chapitre

Les outils développés précédemment dans cette thèse nous ont permis de réaliser expérimentalement un asservissement de phase entre un oscillateur classique et une superposition d'états atomiques.

L'application de mesures faibles non destructives sur l'état atomique permet d'extraire suffi-

samment d'information pour implémenter une rétroaction tout en ne projetant que négligemment l'état quantique. L'état quantique peut donc être réutilisé de manière corrélée après une mesure. Si les mesures faibles sont couplées à des corrections, il est alors possible de rétroagir sur la phase des atomes pour préserver l'état quantique contre la décohérence [Vanderbruggen et al., 2013], ou pour asservir un oscillateur local et l'ensemble atomique en phase [Kohlhaas et al., 2015], ce que nous avons démontré dans ce chapitre.

Lors d'une séquence typique Ramsey, la mesure est destructive. Si nous utilisons plutôt des mesures faibles non destructives, et que nous réitérons la séquence sans appliquer de correction, nous pouvons suivre la dérive de phase entre les deux oscillateurs en temps réel. Avec l'ajout de correction après chaque mesure, nous démontrons ainsi un asservissement de phase entre les deux oscillateurs. Cet asservissement permet de maintenir la phase relative autour de zéro sans dérive conséquente, c'est-à-dire sans dérive hors de la région d'inversion  $\left[\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ , et peut donc être appliqué aux horloges atomiques pour surpasser la limite due au bruit de l'OL.

La séquence ainsi utilisée pour améliorer les horloges est une séquence de Ramsey modifiée, incluant les mesures faibles et les corrections de phase intermédiaires et se terminant par une mesure plus précise avec une correction de fréquence. Après chaque mesure faible, la valeur de la correction de phase est sauvegardée de telle manière que la dérive de phase totale après  $N$  mesures intermédiaires peut être reconstruite et la fréquence de l'OL peut être corrigée. Ce protocole a été appliqué sur une horloge modèle où la stabilité a été mesurée avec et sans asservissement de phase. Pour un cycle de  $N = 9$  mesures, un facteur de 4.76 a été gagné en stabilité.

Cette technique peut être appliquée avec un état comprimé de spins en entrée (qui peut être créé grâce à la mesure intra-cavité). Le gain sur la stabilité des deux techniques s'additionnent alors.

La création de plusieurs ensembles atomiques ultra-froids, par exemple par l'utilisation des modes transverses de la cavité optique pour le piégeage d'atomes (voir Chap. 3), permet de pré-stabiliser l'OL par une boucle de verrouillage de phase sur un ensemble atomique avant de le comparer à un autre ensemble avec une séquence traditionnelle d'horloge. Ainsi, cette technique pourrait permettre une stabilité d'horloge à la limite ultime de la transition atomique.

## Chapitre 5

# Plate-forme laser industrielle EYLSA pour le refroidissement d'atomes

Ma thèse a été financée par l'entreprise Quantel dans le cadre d'une CIFRE. Ce financement a été motivé par la commercialisation d'une plate-forme laser pour le refroidissement d'atomes, nommé EYLSA.

Le laser EYLSA a été conçu pour des applications de recherche en atomes froids, initialement pour les atomes de  $^{87}\text{Rb}$ , et pour des applications de spectroscopie atomique en général. Ce projet a commencé en 2012 et a été motivé par le marché porteur des lasers scientifiques, notamment pour les expériences d'atomes froids. Dans le monde, on compte environ 200 laboratoires dans le domaine des atomes et molécules, avec plusieurs expériences pour chaque laboratoire et plusieurs lasers par expérience, ce qui justifie la commercialisation de tels lasers.

La plate-forme EYLSA est le premier laser commercial fibré et proposé pour ces types d'applications. Il est basé sur des composants telecom et utilise une technique de doublage de fréquence par cristaux pour générer la seconde harmonique au double de fréquence (voir plus loin Sec. 5.1.3) afin d'obtenir la longueur d'onde souhaitée (780 nm dans le cas de la ligne D2 du  $^{87}\text{Rb}$ ). Cette technologie offre beaucoup d'avantages : robustesse garantie par l'architecture fibrée qui lui assure une durée de vie sans maintenance bien plus importante que les technologies non-fibrées, les composants sont faciles à modifier, pas d'éléments optiques en espace libre donc pas d'alignement nécessaire. Cette technologie est de plus en plus commercialisée pour les nouvelles expériences d'atomes froids et apporte un gain de temps et une simplicité d'utilisation pour les scientifiques.

Un large panel de longueur d'onde a été développé de 532 nm à 1.5  $\mu\text{m}$ , pour refroidir différents types d'atomes, principalement le rubidium avec une transition fermée à 780 nm et le potassium avec une transition à 767 nm dans notre laboratoire, mais aussi l'Ytterbium à 556 nm par exemple. Les performances du laser permettent également de l'utiliser pour d'autres applications liées à la manipulation d'atomes froids, comme par exemple les réseaux optiques pour piéger les atomes à chaque ventre du réseau, souvent utilisés à 1064 nm [Tarruell et al., 2012] ou 532 nm [Jo et al., 2012] pour créer un réseau dans le rouge ou le bleu, ou les pièges dipolaires optiques, typiquement à 1560 nm ou 1064 nm nécessitant certes beaucoup de puissance<sup>1</sup> mais pouvant être modérée par l'utilisation d'une cavité optique. D'autres applications

---

1. En ajoutant des étages d'amplification supplémentaires, le laser peut délivrer 20 W pour des longueurs d'onde modulables autour de 1064 nm et de 1560 nm.

plus spécifiques comme la création d'un potentiel désordonné pour étudier la localisation des atomes à partir d'un laser à 532 nm [Jendrzejewski et al., 2012] peuvent aussi tirer profit des performances du laser.

Au delà de la manipulation d'atomes froids, cette plate-forme laser répond également à de nombreuses autres applications scientifiques telles que la spectroscopie moléculaire.

La plate-forme laser a été utilisée sur deux expériences d'atomes froids pour piéger et refroidir les atomes : sur notre expérience lorsqu'elle était au LCF à Palaiseau et sur l'expérience ICE [Geiger et al., 2011, Nyman et al., 2006]. Un piège magnéto-optique (PMO) et une mélasse optique dans un environnement exigeant ont été obtenus comme nous allons le voir après avoir développé l'architecture et les performances du laser.

## 5.1 Architecture et performances de la plate-forme EYLSA

La plate-forme laser est basée sur une architecture de type MOPFA (*Master Oscillator Power Fiber Amplifier*, en anglais) où le laser maître est amplifié sur un ou plusieurs étages d'amplification fibrés. Pour des applications à 532 ou 780 nm, comme ici pour le refroidissement du  $^{87}\text{Rb}$ , le faisceau est ensuite doublé en fréquence.

Nous allons voir dans cette section le choix et les performances des différents éléments de cette architecture.

### 5.1.1 Laser maître

Le choix de la source est crucial pour les performances du laser en termes de stabilité et de précision.

Le laser maître est à la base du comportement spectral du laser, et détermine sa longueur d'onde précise et sa capacité de désaccord. Dans le domaine des atomes froids, ces paramètres sont de première importance : la longueur d'onde doit être fixée sur la transition voulue par un asservissement en fréquence efficace du laser, le changement de désaccord doit être rapide et la capacité de désaccord large et sans saut de mode pendant la phase de compression du nuage et la phase de mélasse. Les étages d'amplification n'ayant que peu d'effet sur la fréquence, le laser maître et son électronique de commande ainsi que la qualité de son asservissement vont déterminer la stabilité et le bruit de fréquence du laser.

L'asservissement se divise typiquement en une correction des basses fréquences sur la température de la diode laser source, et une correction de haute fréquence sur le courant de la diode (jusqu'à plusieurs centaines de kHz, voire jusqu'au MHz si l'on corrige directement sur la modulation de la diode). Pour une bonne stabilité de l'asservissement, il faut que le changement du désaccord soit rapide lors de la phase de mélasse où l'on désaccorde le laser de dizaines de MHz en quelques microsecondes.

Dans les expériences d'atomes froids et pour la spectroscopie de raies atomiques en général, la largeur naturelle et l'espacement des transitions déterminent la largeur spectrale du laser utilisé. Si l'on adresse une transition en particulier, comme pour le PMO par exemple (voir Chap. 3), la largeur spectrale du laser doit être bien inférieure à l'espacement des raies entre niveaux excités de l'atome considéré pour n'adresser que la transition cyclante. Pour le  $^{87}\text{Rb}$ , l'espacement entre les raies est large par rapport à la largeur naturelle  $\Gamma_{Rb} = 6.07$  MHz alors que pour le  $^{39}\text{K}$  l'espacement est du même ordre de grandeur que  $\Gamma_K = 5.96$  MHz donc la largeur spectrale du laser est plus critique et doit être au maximum de  $\sim 100$  kHz.

Deux types de source peuvent alors être utilisés : une diode laser à rétroaction répartie (*Distributed Feedback diode laser*, *DFB* en anglais) ou une diode à cavité étendue intégrée directement sur puce semi-conductrice. La première, basée sur un réseau de diffraction de Bragg permettant à la fois la sélection en longueur d'onde et la rétroaction pour l'effet laser, permet d'avoir une large gamme de désaccord d'environ 100 GHz à 780 nm pour une largeur spectrale de 1 MHz à 1560 nm et 2 MHz après doublage de fréquence.

La seconde source permet une largeur spectrale plus fine par l'utilisation d'une cavité externe adéquate (*ECD* pour *Extended Cavity Diode* en anglais), au détriment d'une gamme de désaccord plus étroite. Avec une gamme de désaccord de 10 GHz et une largeur spectrale inférieure à 200 kHz, elle est dédiée aux expériences de spectroscopie de transition fine, et au refroidissement d'atomes comme le  $^{39}\text{K}$  ou le  $^6\text{Li}$ .

Ces deux diodes sont stables aux vibrations et à la température permettant d'obtenir une bonne stabilité et une grande robustesse pour des applications embarquées (voir Sec. 5.3), et de possibles applications spatiales.

### 5.1.2 Amplification

L'amplification doit elle aussi remplir certaines conditions, à savoir amplifier le signal monomode jusqu'à plusieurs watts sans apporter de bruit conséquent tout en maintenant polarisation et qualité du faisceau intactes. Les amplificateurs optiques à semi-conducteurs sont exclus pour cette dernière raison et l'amplification choisie est basée sur une amplification par fibre optique dopée, qui permet d'obtenir un gain de 20-40 dB en conservant la polarisation et la qualité du faisceau.

Le problème initial de ce type d'amplification est d'obtenir une bonne qualité de faisceau en sortie tout en amplifiant avec un fort gain.

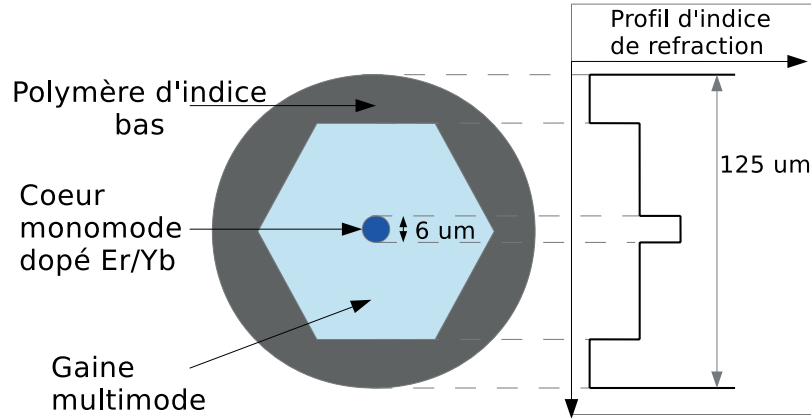
Dans le cas où la fibre est monomode pour le signal et la pompe, les deux faisceaux sont superposés et colinéaires. Pour obtenir un signal de sortie à la limite de diffraction, il faut donc utiliser des faisceaux de pompe également à la limite de diffraction, au détriment de leur puissance.

A l'inverse, dans le cas de fibres strictement multimodes, à la fois la pompe et le signal sont multimodes, et on peut donc générer davantage de puissance mais au détriment de la qualité de faisceau.

Le développement des fibres à double gaine permet d'isoler les deux problèmes en confinant la première gaine (dite de pompe) à l'intérieur d'une seconde gaine d'indice de réfraction plus bas. Le signal se propage dans le coeur monomode dopé mais la pompe est, elle, multimode. La lumière de pompe peut partiellement se propager dans le coeur de la fibre dopée aux terres rares où l'inversion de population s'établit.

Un schéma de ce type de fibre est montré sur la Fig. 5.1, où la géométrie de la gaine interne est hexagonale, forme pour laquelle le transfert d'énergie est optimisé. On peut montrer que l'absorption de la pompe par le signal commence après quelques centimètres [Leproux et al., 2002], et la longueur totale de la fibre est de 10 m.

L'amplification se fait en plusieurs étages avec plusieurs fibres à double gaine, pour un signal de sortie d'une puissance de 10 W - 20 W. L'amplification laisse la largeur spectrale quasi inchangée, et la limitation à haute puissance provient de l'effet de diffusion Brillouin stimulé. Cette limitation s'explique par la diffusion inélastique des photons par changement local de l'indice de réfraction dû aux phonons du milieu. A haute puissance, la variation du champ électrique produit des vibrations dans le milieu par électrostriction, et stimule donc la diffusion Brillouin.



**Figure 5.1** – Fibre à gaine double. Seul le cœur est dopé Erbium/Ytterbium, la gaine multimode permet la propagation de la pompe. Le profil d'indice de réfraction est montré dans le cadre à droite de la figure.

Un soin particulier a donc été donné à la conception de l'amplification, notamment pour le diamètre de la partie monomode de la fibre, la longueur et le type de fibre amplificatrice utilisée. D'autres effets non linéaires sont présents comme la diffusion Raman, l'auto-oscillation du laser dans la fibre ou l'émission spontanée amplifiée, mais peuvent être également réduits par la conception du système et sont pour la plupart filtrés par le doublage de fréquence.

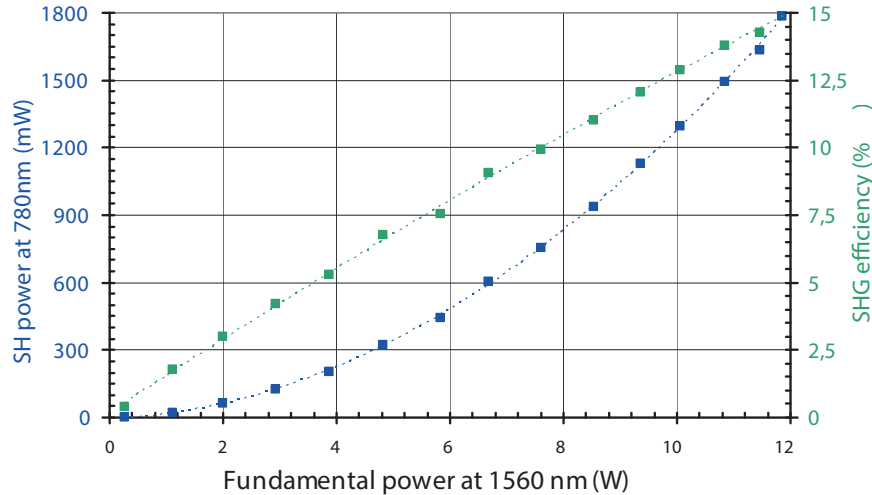
### 5.1.3 Doublage de fréquence

Pour le  $^{87}\text{Rb}$ , la transition cyclante est à 780 nm. Il est donc nécessaire, à partir d'une source à 1560 nm, de réaliser un doublage de fréquence (on remarque que c'est également le cas pour obtenir la fréquence de 532 nm à partir de 1064 nm).

Une étude théorique de l'effet de doublage de fréquence par un cristal Lithium-Niobate périodiquement polarisé est donnée dans [Lienhart, 2007] et [Carraz, 2009]. L'idée est qu'un champ électrique fort passant dans un matériau le polarise proportionnellement à un terme non linéaire du champ, et la solution de l'équation de propagation prenant en compte ce terme non linéaire peut avoir une fréquence double du champ incident : on parle de *génération de seconde harmonique*, *GSH*. La conversion est efficace si l'on remplit la condition d'accord de phase  $\Delta k = k_2 - 2k_1 = 0$  où  $k_1$  est le vecteur d'onde de l'onde convertie et  $k_2$  de l'onde générée. Pour  $\Delta k \neq 0$ , l'amplitude de la seconde harmonique s'annule périodiquement, alors que pour l'accord de phase la puissance s'accumule jusqu'à atteindre 80% de conversion dans certains cas. En pratique, cette valeur n'est atteinte que lorsque l'on opère le doublage en guide d'onde avec beaucoup de puissance. Une conversion de 10 à 50% est plutôt attendue pour des cristaux en simple passage mono-fréquence.

Le cristal utilisé ici est de type *PP – MgO – LN*, et le quasi accord de phase est obtenu par changement de la température du cristal : il est donc nécessaire d'asservir le cristal en température pour maintenir cette condition.

Le système est en simple passage connecté uniquement par fibres, et la fibre monomode de sortie délivre plus de 1 W à 780 nm pour une amplification en entrée de moins de 10 W. La Fig. 5.2 provient de [Mugnier et al., 2012] et donne l'efficacité du doublage en fonction de la puissance incidente.



**Figure 5.2** – Efficacité du doublage de fréquence. Les points bleus représentent la puissance à 780 nm en fonction de la puissance à 1560 nm, et les points verts représentent l'efficacité de la génération de seconde harmonique en pourcentage.

Après cette description de l'architecture du laser où le choix des différents composants a été discuté, nous allons maintenant voir les performances de la plate-forme laser.

#### 5.1.4 Performances

Les exigences sur les performances du laser pour le refroidissement d'atomes sont nombreuses. Nous allons ici les détailler et voir que la plate-forme EYLSA remplit ces conditions. Ainsi, les performances spectrales du laser, mais aussi sa stabilité et ses performances optiques vont être décrites dans cette section.

#### Bruit de fréquence et largeur spectrale mesurée

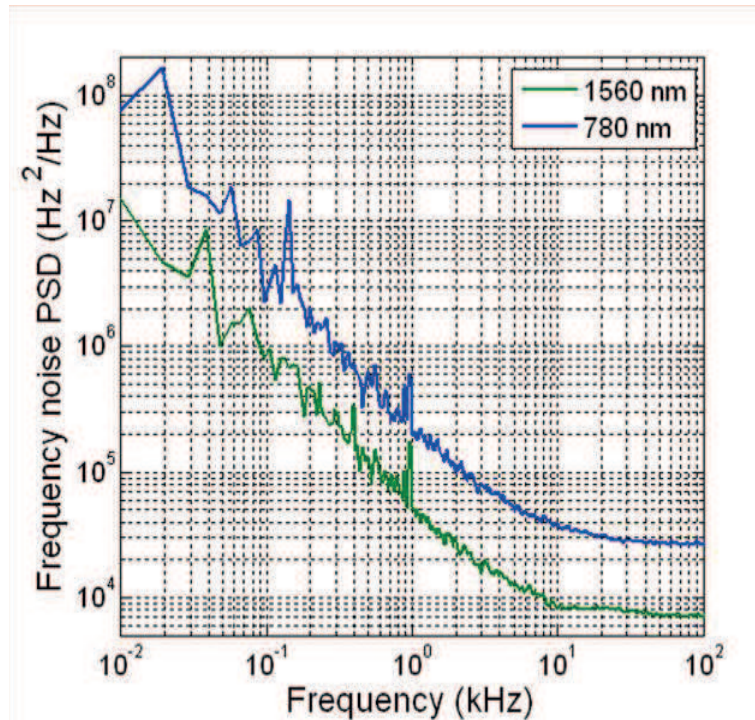
Comme nous l'avons vu précédemment, seule la source laser détermine les performances spectrales du laser ; il a en effet été vérifié que l'élargissement spectral et le bruit de fréquence apportés par l'amplification sont négligeables. Le choix des diodes DFB et ECD permet une largeur spectrale modérée à fine, et le bruit dominant dans ce type de source est le bruit de scintillation d'échelle en  $1/f$  (auss appelé bruit de *flicker* en anglais).

Les techniques habituelles de mesure de largeur spectrale par interférométrie [Okoshi, 1980] ou avec l'utilisation d'une cavité sont difficiles à évaluer lorsque le bruit dominant n'est pas blanc [Horak and Loh, 2006]. Une technique originale a été utilisée ici — d'après une étude théorique [Domenico et al., 2010] —, basée sur la relation entre bruit de fréquence et largeur spectrale.

Il est en fait possible, à partir de la densité spectrale de puissance (DSP) de bruit de fréquence du laser, d'obtenir la distribution de puissance spectrale par la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation du champ [Mugnier et al., 2012]. La DSP de bruit de fréquence du laser a été mesurée à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder tout fibré avec une fibre de retard de 10 m où l'on mesure la DSP de bruit d'intensité sur une photodiode en sortie d'interféromètre.

Le résultat converti en DSP de bruit de fréquence [Cliche et al., 2006] est donné sur la





**Figure 5.3** – Densité spectrale de puissance de bruit de fréquence à 1560 nm et 780 nm. Le bruit est dominé par le bruit en  $1/f$  en dessous de 10 Hz. Il a été vérifié qu’aucune composante de bruit n’évoluait avec la puissance du laser.

Fig. 5.3 avec un temps d’observation de 100 ms pour les deux radiations à 1560 nm et 780 nm [Mugnier et al., 2012].

Le doublage de fréquence double également toutes les composantes de bruit de fréquence, donc la DSP est 4 fois plus grande à 780 nm et le bruit est dominé par le bruit de scintillation en  $1/f$ , ce que l’on observe bien sur la figure.

La largeur spectrale reconstruite d’après ces données est représentée Fig. 5.4 pour les deux longueurs d’onde pour la source ECD. La largeur à mi-hauteur à 1560 nm est de 59 kHz pour le laser MOPFA infrarouge, et de 153 kHz pour le faisceau après la génération de seconde harmonique à 780 nm.

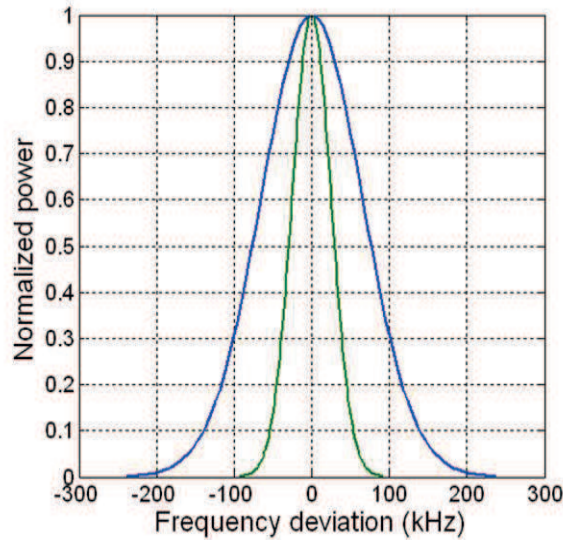
Ces valeurs sont supérieures à ce qui peut être obtenu en laboratoire, mais cela se différencie par le fait que la plate-forme est un sous-système laser complet intégrant une électronique de commande et d’alimentation, des ventilateurs, un écran tactile etc ...

### Stabilité de puissance et de longueur d’onde

Pour les expériences d’atomes froids, la stabilité en longueur d’onde est primordiale afin d’éviter des fluctuations de fréquence trop importantes qui amènent du bruit sur l’asservissement et limite la température des atomes.

De plus, une perspective du laser est d’être utilisé pour des mesures dans un environnement exigeant ou même sur le long terme pour des projets spatiaux. Ainsi, le laser a été testé dans l’avion en vol 0g affrété par Novespace pendant une campagne de vol avec l’expérience ”Interférométrie atomique à sources Cohérentes pour l’Espace” (ICE) du laboratoire LP2N à Bordeaux (voir sec. 5.3).

Lors de la préparation de l’expérience dans l’avion, la température change de 20°C, et lors



**Figure 5.4** – Largeur spectrale du laser à 1560 nm et à 780 nm. La largeur est de 153 kHz à 780 nm et est déduite de la DSP de bruit de fréquence.

du vol des vibrations importantes sont présentes ainsi que des phases de micro-gravité et d’hyper-gravité (voir Fig. 5.9).

Des mesures de stabilité de fréquence et de puissance ont été effectuées. La Fig. 5.5 montre les mesures de longueurs d’onde sur 30 min sans aucun asservissement. La longueur d’onde a une stabilité à  $10^{-5}$  nm, et peut être davantage réduite si le laser est asservi en fréquence. Cette stabilité est grandement suffisante pour manipuler les atomes.

La stabilité en puissance joue également un rôle pour les mesures de précision, puisque des fluctuations de puissance mènent à des fluctuations de nombre d’atomes importantes. Pour un interféromètre, un décalage du signal peut apparaître si la normalisation des franges n’est pas correcte et peut dégrader la mesure.

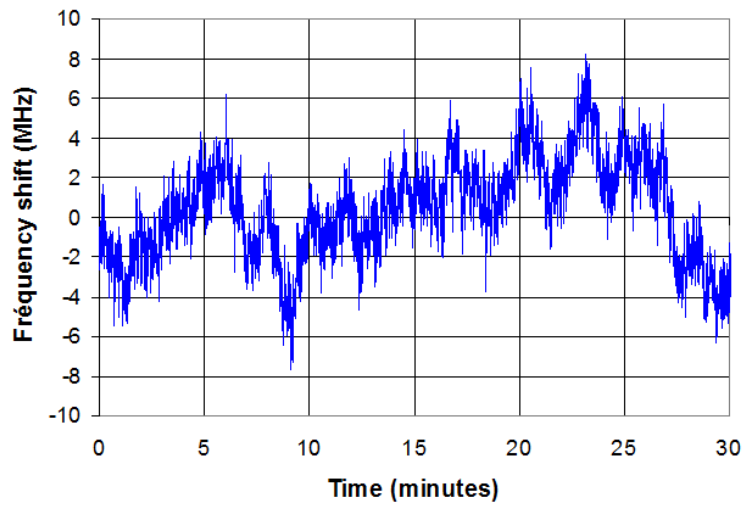
De plus, des fluctuations de puissance changent la force de friction effective pendant le PMO (Sec. 3.1) et déplacent le nuage par rapport aux faisceaux Raman et à l’imagerie, entraînant une perte de signal ou une perte de cohérence dans l’interféromètre.

La variation de puissance du laser est de l’ordre de 1% sur 12 heures comme le montre la Fig. 5.6. Les données ont été prises pendant 12 heures à température fixe et en mode de contrôle de puissance automatique APC (*Automatic Power Control* en anglais).

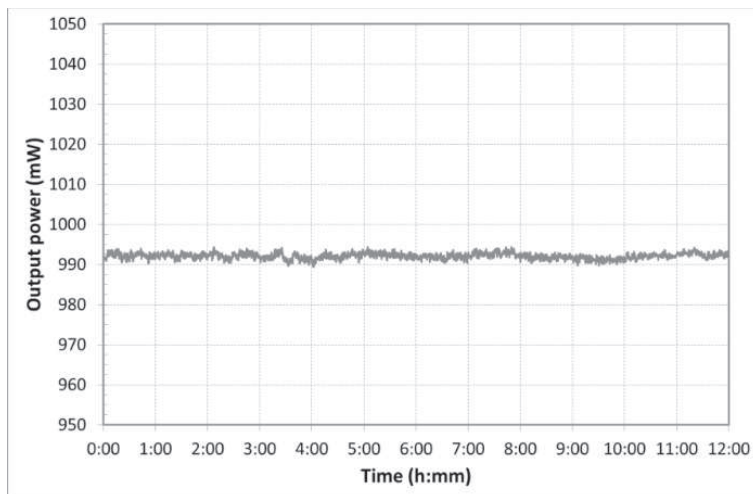
### Qualité du faisceau et polarisation de sortie

Contrairement aux amplificateurs à semi-conducteurs qui dégradent la qualité du faisceau — et après lesquels l’injection dans une fibre ne dépasse pas 50% —, l’amplification par fibre dopée laisse inchangée la qualité du faisceau dans la plupart des cas. En fait, l’utilisation d’une fibre à double gaine permet d’injecter une pompe multimode à haute puissance dans la gaine interne sans dégrader le signal initialement monomode et gaussien (comme expliqué précédemment Sec. 5.1.2)). Une telle qualité de faisceau permet de réinjecter la puissance dans une fibre optique de transport monomode à 780 nm avec de faibles pertes.

Le facteur de qualité du faisceau  $M^2$  rend compte de la divergence, la taille et le mode



**Figure 5.5** – Stabilité de longueur d’onde pendant 30 min lorsque le laser n’est pas asservi lors d’un vol 0g. Les fluctuations crête-à-crête sont de 16 MHz.



**Figure 5.6** – Stabilité de puissance. La variation est de 1% pendant 12 heures de mesure.

du faisceau. Il est mesuré à  $M^2 = 1.1$  [Mugnier et al., 2012], très proche de 1, valeur pour laquelle le faisceau est à la limite de diffraction et est purement gaussien.

Pour obtenir une polarisation linéaire et purement sur un axe en sortie du laser, il faut que toute la chaîne d’amplification soit à maintien de polarisation, depuis le laser maître jusqu’au doubleur de fréquence. C’est le cas pour la plate-forme laser EYLSA, où le ratio d’extinction de polarisation<sup>2</sup> (PER) est mesuré à PER = 17 dB en sortie de la fibre optique de transport à maintien de polarisation.

## 5.2 Démonstration sur l’expérience

### 5.2.1 Insertion du laser

Afin de démontrer l’efficacité de la plate-forme laser, nous avons inséré le laser dans notre expérience à la place des lasers actuellement utilisés pour le refroidissement Doppler pendant la phase de PMO (Sec. 3.1).

Les performances du laser EYLSA comme faisceau de refroidissement ont été développées dans la Sec. 5.1.4, et il est nécessaire pour le  $^{87}\text{Rb}$  d’avoir un laser de repompage pour éviter l’accumulation d’atomes dans l’état noir  $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$ . Il est possible avec ce laser, comme il est constitué de plusieurs étages d’amplification, d’insérer un composant entre deux de ces étages si ses pertes sont inférieures à 10 dB. On peut ainsi facilement insérer un modulateur de phase fibré fonctionnant à 1560 nm et générant des bandes latérales autour du signal principal.

En choisissant judicieusement la puissance et la fréquence de ces bandes latérales par le signal radio-fréquence envoyé au modulateur, il est alors possible d’avoir une radiation pour le repompage des atomes de  $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$  à  $|5P_{3/2}, F' = 2\rangle$ . L’autre bande latérale est alors désaccordée de 6.8 GHz dans le bleu de la transition  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$  donc la lumière n’est plus résonante avec les atomes et n’a donc aucun effet.

Le laser de repompage ainsi créé est complètement homogène avec le refroidisseur et sa puissance et son désaccord peuvent être changés indépendamment. De plus, ces deux radiations provenant de la même source, seul un asservissement sur le faisceau laser est nécessaire, au contraire des expériences utilisant deux lasers distincts [Bernon, 2011] [Brantut, 2009].

Le but est ici d’utiliser uniquement le laser EYLSA sur les atomes, donc de remplacer le refroidisseur et le repompeur sur le banc optique. Un schéma présentant l’insertion et le trajet du laser sur le banc optique est montré Fig. 5.7.

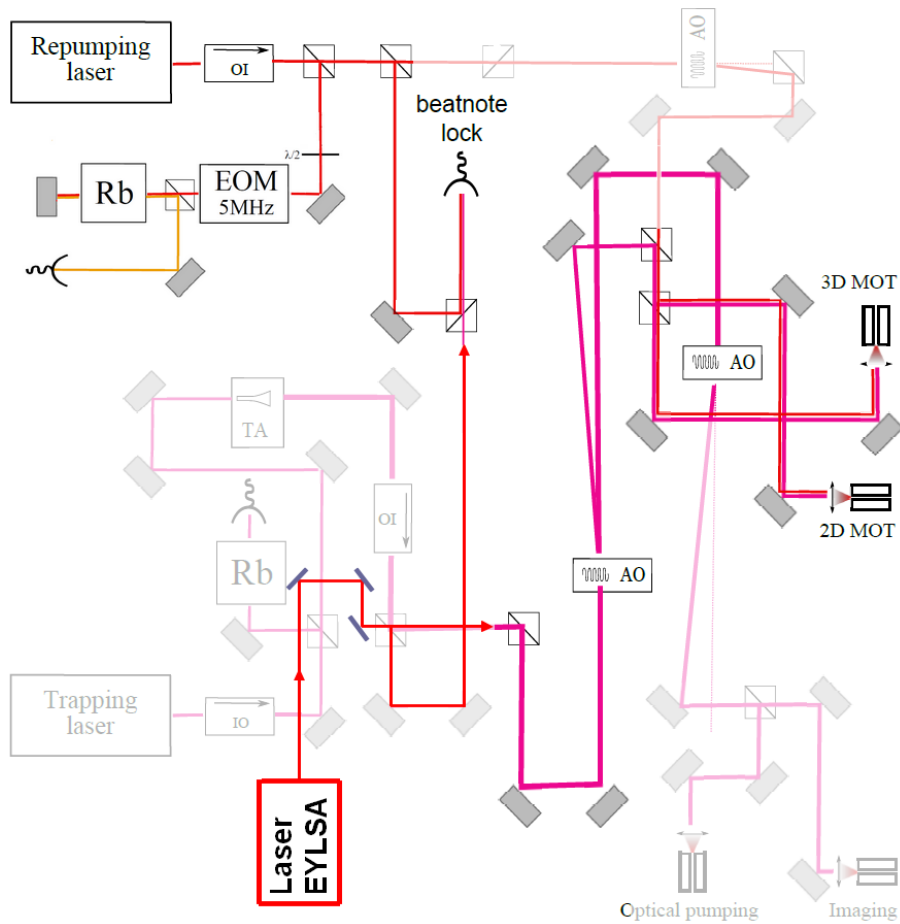
Les trajets en transparence sont éteints, et seul le laser EYLSA, fournissant plus de 1 W de puissance à 780 nm (900 mW pour le faisceau refroidisseur et 100 mW pour le faisceau repompeur), est injecté dans les fibres pour les PMO 2D et 3D. Après l’asservissement du laser, et le paramétrage du repompeur, l’obtention du PMO est direct (voir plus loin Sec. 5.2.3).

### 5.2.2 Asservissement du laser

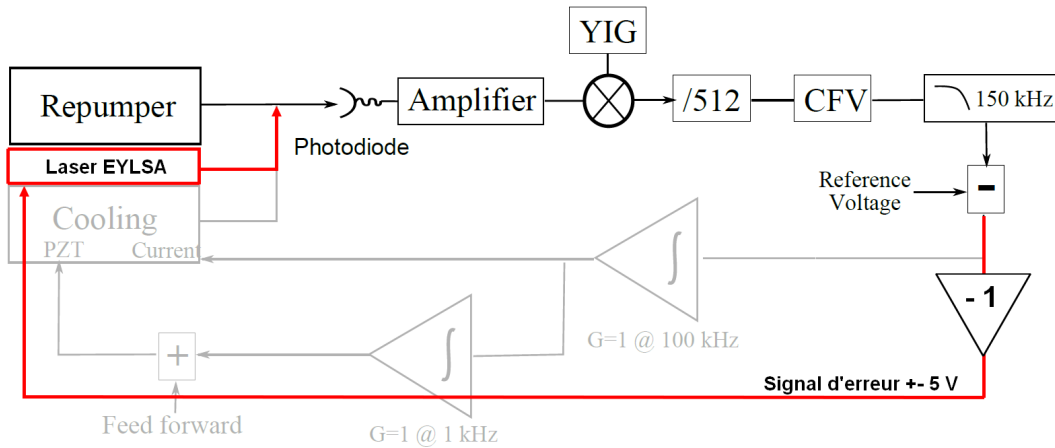
Pour obtenir des atomes dans le PMO, il faut asservir le laser sur la ligne D2 du  $^{87}\text{Rb}$ . Dans notre expérience initiale (voir Sec.3.1), le laser repompeur est le laser maître et est asservi

---

2. Le ratio d’extinction de polarisation est défini comme le logarithme de la différence entre les puissances dans les deux directions de polarisation.



**Figure 5.7** – Insertion du laser EYLSA sur le banc optique. Le trajet du laser EYLSA est représenté en rouge puis rose. Les parties en transparence représentent le banc optique initial avec le laser de refroidissement. Le trajet du repompeur après l'absorption saturée, et les faisceaux d'imagerie et de pompage optique ne sont plus utilisés dans cette partie, et sont également en transparence sur la figure. Le laser repompeur (trajet orange) est seulement utilisé pour asservir le laser EYLSA par battement.



**Figure 5.8** – Asservissement du laser EYLSA par battement. Le repompeur est initialement asservi par absorption saturée, et le laser EYLSA est ensuite asservi par battement optique avec le repompeur. L'électronique de battement donne un signal d'erreur de  $\pm 5$  V. La partie transparente est l'asservissement par battement avec le laser refroidisseur de l'expérience qui n'est pas utilisé ici.

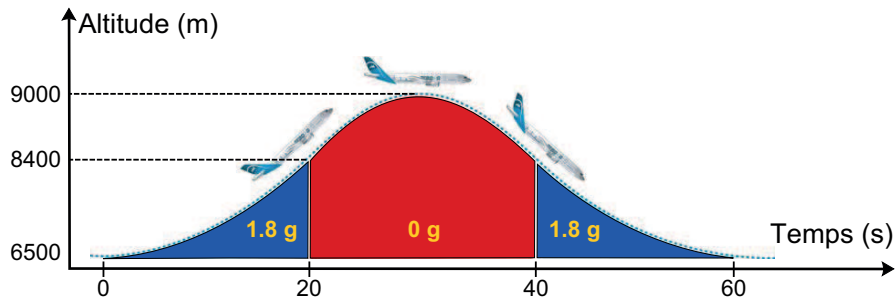
sur la résonance atomique par spectroscopie par absorption saturée. Le laser refroidisseur est le laser esclave et est asservi par battement optique avec le laser repompeur. Nous avons donc choisi d'asservir le laser EYLSA sur le laser repompeur par battement optique, pour des raisons de simplicité.

Le laser repompeur de l'expérience sera seulement utilisé ici pour l'asservissement du laser EYLSA par battement. Le trajet du laser après ce battement est éteint (partie en transparence en haut de la Fig. 5.7), et la radiation de repompage et celle de refroidissement sont cette fois fournies par le laser EYLSA uniquement.

L'asservissement par battement optique repose sur la stabilisation à la fréquence de battement voulue, qui donne directement la différence de fréquence entre les deux lasers. La différence étant à haute fréquence, proche de 6.8 GHz, il faut mixer le signal avec un générateur micro-onde ultra-stable (de technologie YIG, modèle LPO-0408) pour obtenir une fréquence entre 0 et 512 MHz (voir Fig. 5.8). Après division de la fréquence par 512, la fréquence du signal est convertie en une tension (Convertisseur Fréquence Tension, CFV) entre 0 et 10 V. Avant d'obtenir le signal d'erreur adéquat, il faut filtrer les hautes fréquences résiduelles et soustraire le signal par une tension de référence qui nous permet de fixer le désaccord du laser.

Le laser peut être asservi en utilisant comme actuateur le courant de la diode, avec une entrée de signal d'erreur à l'arrière de la plate-forme. Le gain interne de l'intégration peut être modifié, et la bande passante de l'asservissement est de 100 kHz, ce qui est suffisant puisque les hautes fréquences sont filtrées par l'électronique de battement.

Le signal d'erreur du battement est donc directement envoyé au laser, comme l'on peut voir sur la Fig. 5.8, où les parties transparentes correspondent à l'asservissement du laser refroidisseur non fibré (pas utilisé ici). Il faut néanmoins faire attention au signe du signal d'erreur puisque dans notre cas la correction est inversée par rapport au laser de refroidissement : il faut donc inverser le signal d'erreur avant d'envoyer la correction.



**Figure 5.9** – Phases de vol pendant une parabole zéro-G. La phase d'impesanteur de 22 s est comprise entre deux ressources d'une vingtaine de secondes chacune où le facteur de charge vaut environ 1.8 g. Une campagne se compose de trois jours de vol d'une trentaine de paraboles chaque jour. Image provenant de [Gominet, 2015].

### 5.2.3 Résultats

Après avoir optimisé le gain interne de l'asservissement, la puissance et la fréquence du repompeur sur le modulateur, des atomes dans le PMO 3D ont été observés.

Un jet d'atomes provenant du PMO 2D avec un flux de  $5 \times 10^8$  atomes par seconde permet de charger typiquement  $10^9$  atomes dans le PMO 3D en 3 secondes. Le nuage est donc constitué de plusieurs milliards d'atomes à une température de quelques centaines de micro-kelvins, et la température est ici limitée par la température limite de Doppler  $T_D = \hbar\Gamma/2k_B = 146 \mu\text{K}$ .

Pour plus de stabilité de fréquence, il est possible d'intégrer le signal de correction sur le laser, profitant ainsi d'un gain linéaire avec la fréquence de pente de 20 dB/décade.

Pour refroidir davantage le nuage, il faut procéder à une étape de compression puis de mélasse, charger le piège dipolaire et ensuite procéder à l'évaporation de l'échantillon. Mais cette étude approfondie n'est pas le but du projet ici qui est de démontrer le bon fonctionnement du laser sur une expérience d'atomes froids.

Cela montre que la plate-forme est adaptée aux expériences d'atomes froids en laboratoire, et simplifie grandement le système laser pour le PMO. Ce laser a également été testé sur une expérience de gravimétrie embarquée, nécessitant une meilleure stabilité que pour notre expérience comme nous allons le voir.

## 5.3 Utilisation de la plate-forme en micro-gravité sur l'expérience ICE

Pour approfondir les performances sur une expérience typique d'atomes froids, le laser a été testé sur l'expérience de gravimétrie à atomes froids ICE durant une campagne de vol en Octobre 2013 organisée par Novespace à Bordeaux.

Cela a permis de valider le fonctionnement du laser dans un environnement exigeant comportant des phases de micro-gravité et d'hyper-gravité comme le montre la Fig. 5.9 représentant les différentes phases pendant le vol. D'autre part, les vibrations des racks expérimentaux sont conséquentes au décollage et à l'atterrissage, ainsi que les fluctuations de température entre le jour et la nuit ( $20^\circ\text{C}$  en moyenne). Ces conditions d'instrumentations embarquées sont proches des conditions de conformité de projets spatiaux et de navigation inertielle.

Cette expérience vise à mesurer et tester le principe d'équivalence faible grâce à un gra-



vimètre à atomes froids double espèce rubidium/potassium [Nyman et al., 2006] [Varoquaux et al., 2009].

Pour augmenter le temps d'interrogation et s'affranchir des limites géométriques de la chambre de science, la mesure se réalise en micro-gravité, où tout le système est en chute libre, permettant de maintenir les atomes au centre de l'enceinte à vide. Cette idée de chute libre est également utilisée sur une autre expérience à Brême qui s'effectue sur une plate-forme pouvant chuter verticalement dans une tour [Müntinga et al., 2013].

Avec une gravité normale, les atomes chutent dans l'enceinte à vide, et pour obtenir des temps d'interrogation longs il faut alors avoir recours à des structures plus importantes comme une large enceinte à vide verticale de 10 m [Sugarbaker, 2014].

L'expérience s'articule autour d'une enceinte à vide en titane avec 19 accès optiques [Gominet, 2015], au sein de laquelle le PMO est réalisé. La configuration du PMO nécessite 6 faisceaux créés grâce à un séparateur commercial de marque Schäfter-Kirchhoff. La détection est faite par fluorescence où un faisceau résonant couplé à un pulse de faisceau repompeur est envoyé sur les atomes après un temps de vol des atomes. Une caméra CCD prend alors une image du nuage et permet d'analyser le nombre d'atomes et la température en mesurant la taille de celui-ci.

Un blindage magnétique est disposé autour de l'enceinte pour annuler le champ magnétique terrestre qui change d'orientation pendant le vol, et des bobines de compensation sont utilisées pour créer un champ homogène annulant le champ magnétique résiduel environnemental.

### 5.3.1 PMO embarqué

Dans un premier temps, le laser a été utilisé de manière autonome sur l'expérience, comparé à l'étude précédente où le repompeur était utilisé comme laser maître pour asservir le laser.

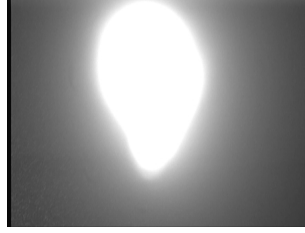
L'asservissement se fait par spectroscopie par absorption saturée, basée sur le même principe que la Fig. 3.1, utilisant un module fibré commercial développé par muQuaS. Comme pour l'expérience en question dans cette thèse, le laser est asservi sur le croisement de raie  $|5S_{1/2}, F = 1\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 2, 3\rangle$  du  $^{87}\text{Rb}$  et doit donc être déplacé ultérieurement de 110 MHz par un MAO pour être résonant avec la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  (voir Annexe A). Le laser est modulé en phase par un modulateur électro-optique (MEO) pour l'absorption saturée, le signal de la photodiode après l'absorption est démodulé et envoyé à un circuit Proportionnel Intégrateur Dérivateur (PID) avant de rétroagir sur le laser.

Le faisceau repompeur est généré par la modulation de phase de la source comme expliqué dans la Sec. 5.2.1, et le signal radio-fréquence à 6.8 GHz pour la modulation provient de la chaîne de fréquence de l'expérience.

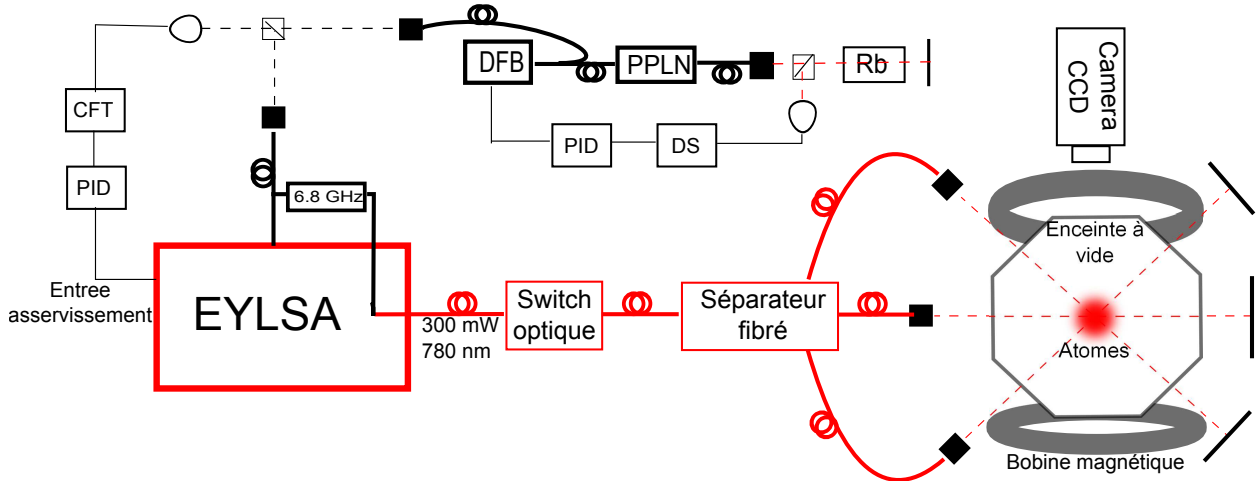
Comme le montre la Fig. 5.10, un nuage d'atomes de  $^{87}\text{Rb}$  dans le PMO a été observé, composé de  $3 \cdot 10^8$  atomes avec une température de  $T_{\text{PMO}} = 160 \mu\text{K}$  mesurée après un temps de vol de 15 ms et une durée de pulse de fluorescence de 1 ms.

Le PMO a été stable durant toutes les phases des 10 vols paraboliques successifs. La stabilité en puissance et en fréquence est donc satisfaisante pour des expériences embarquées, et le laser est robuste aux vibrations, au transport et au changement de température. Le système laser complet est monté dans un rack 19 pouces 6U, incluant le laser, le module d'absorption, le MAO et sa source RF.





**Figure 5.10** – PMO obtenu en vol. Le nombre d'atomes de  $^{87}\text{Rb}$  est d'environ  $3 \cdot 10^8$ , avec une température du nuage de  $T_{\text{PMO}} = 160 \mu\text{K}$ .



**Figure 5.11** – Schéma de l'expérience de refroidissement sub-doppler. Les parties fibrées à 1560 (resp. 780 nm) sont représentées en gras en noir (resp. rouge), et les parties en espace libre en pointillés. Après être asservi en fréquence par battement (à gauche) avec une diode DFB préalablement asservie par absorption saturée (en haut), le laser est envoyé sur l'enceinte à vide pour piéger et refroidir les atomes (à droite).

### 5.3.2 Mélasse optique

Le piège magnéto-optique est la première étape à toute expérience d'atomes froids. Pour aller plus loin et démontrer que le laser fonctionne au cours d'une séquence typique de refroidissement sub-Doppler, il faut pouvoir manipuler sa fréquence de manière précise.

Pour cela, un schéma similaire à la Sec. 5.2.1 (Fig. 5.2.1) est réalisé et montré sur la Fig. 5.11, où le laser est asservi par battement sur un laser maître.

Le laser maître est une diode laser DFB à 1560 nm doublée en fréquence par un cristal Lithium-Niobate (*Periodically Polarized Lithium Niobate*, PPLN en anglais) et est asservi sur le  $^{87}\text{Rb}$  par absorption saturée, en utilisant une détection synchrone (DS). Le laser EYLSA est asservi sur ce laser par battement où la fréquence de battement est convertie en tension (convertisseur fréquence tension, CFT) et est additionnée à une tension de référence  $V_{ref}$  permettant de changer le désaccord rapidement ( $\sim 2$  ms) sur une plage de 1 GHz.

Après la phase de PMO, le laser est désaccordé de plusieurs  $\Gamma$  et les bobines magnétiques sont éteintes pour former une mélasse optique, puis le laser est éteint pendant la détection des atomes par fluorescence.

Pour éteindre le laser rapidement, un interrupteur optique Nanospeed fibré de marque

Agiltron permet un temps de réponse inférieur à 1 micro-seconde mais une puissance d'extinction de seulement 20 dB. Il faut alors désaccorder le laser de 320 MHz pendant le temps de vol pour limiter l'émission spontanée.

Après avoir désaccordé le laser de 80 MHz et reconstruit l'expansion balistique du nuage, on obtient une température de  $T_{\text{mel}} = 60 \mu\text{K}$  pour la mélasse. Cette séquence typique de refroidissement sub-Doppler permet de valider l'utilisation du laser pour les expériences d'atomes froids.

L'accès à une température plus basse pour la mélasse n'a pas été possible en raison de limitations techniques. Par manque de matériel adapté, les puissances de refroidissement et de repompeur n'ont pu être diminuées pendant la phase de mélasse. Aussi, l'interrupteur optique a un taux d'extinction insuffisant, et laisse donc passer une partie de la lumière qui chauffe le nuage atomique avant la détection.

La température la plus basse atteinte dans une mélasse de  $^{87}\text{Rb}$  est de  $2 \mu\text{K}$ . Le but était ici de démontrer l'utilisation du laser dans une expérience d'interférométrie embarquée, et une température de  $2 \mu\text{K}$  n'est malgré tout pas suffisante pour des séquences d'interférométrie atomique avec des longs temps d'interrogation ( $T < 1\text{s}$ ) et un refroidissement par évaporation dans un piège optique ou magnétique est nécessaire. Avant l'évaporation, il faut charger les atomes dans le piège optique ou magnétique à une profondeur typique de  $100 \mu\text{K}$ . Par exemple dans notre cas, le chargement se fait à une profondeur de piège de  $110 \mu\text{K}$ . Dans l'expérience ICE, avec 28 W de puissance à 1560 nm et une largeur de faisceau de  $100 \mu\text{m}$ , la profondeur est de  $72 \mu\text{K}$ . La température atteinte ici est donc compatible au chargement du piège puis à l'évaporation de l'échantillon.

## 5.4 Conclusion du chapitre

La plate-forme laser EYLSA a été testée et validée sur deux expériences d'atomes froids, où un piège magnéto-optique et une mélasse optique ont été obtenus.

Les performances optiques et spectrales, ainsi que la stabilité en fréquence et en puissance, font de cette plate-forme laser un outil idéal pour le refroidissement, la manipulation et la mesure spectroscopique d'atomes ou de molécules. Le laser est robuste aux vibrations et aux fluctuations de température, comme le montre la mélasse optique obtenue en micro-gravité lors d'un vol parabolique.



# Conclusion

Deux études principales menées sur un ensemble d'atomes froids ont été démontrées dans cette thèse. Ces études ont été possibles grâce à l'utilisation de deux outils novateurs sur cette expérience : la cavité optique pour le piégeage des atomes et la mesure non destructive sur l'état collectif atomique.

L'une de ces études vise à augmenter le temps d'interrogation dans une séquence d'interférométrie de Ramsey par l'application de mesures adaptées.

En effet, la mesure en fin de séquence peut jouer un rôle primordial dans les performances de l'interféromètre. Une détection adaptée peut permettre d'extraire de l'information de l'état atomique avec une influence négligeable sur celui-ci. L'état est ainsi préservé après la mesure, et la séquence peut s'enchaîner. De ce fait, l'information acquise sert à la correction d'une observable de l'état et le système est asservi en temps réel.

Une telle mesure se réalise grâce à la détection indirecte du système atomique. Son interaction non destructive avec un faisceau optique nous permet de connaître la différence de population  $J_z$  entre les deux états composant le système. Un grand intérêt a été porté à l'aspect non destructif de la mesure. En ajustant la fréquence et la puissance de la mesure, nous avons ainsi considérablement diminué les sources de décohérence.

Une mesure non destructive est décrite par l'information qu'elle véhicule pour une certaine destructivité. Pour l'optimiser, il faut augmenter le rapport signal à bruit tout en conservant une décohérence fixe. A cette fin, nous avons ajusté la taille du faisceau de mesure à celle du nuage atomique, augmentant ainsi l'intensité et le nombre de photons interagissant. En conséquence, nous avons démontré une précision accrue de la mesure pour une émission spontanée donnée.

Par l'utilisation de mesures faibles non destructives suivies de corrections sur un ensemble cohérent d'atomes refroidis, nous avons asservi en temps réel la phase de l'oscillateur, fournissant une estimation du temps sur le système atomique.

Une telle horloge n'est alors plus limitée par le bruit de l'oscillateur local, puisque la phase relative est maintenue à zéro et ne peut sortir de la région d'inversion. Si, après chaque mesure faible, la valeur de la phase est sauvegardée avant d'être corrigée, alors la dérive totale peut être reconstruite pour une séquence de plusieurs mesures. Par conséquent, la différence de fréquence entre l'oscillateur local et les atomes peut être corrigée après un cycle de temps d'interrogation allongé.

De plus, si la dernière mesure de phase est précise, le cycle d'horloge profite d'un fort rapport signal à bruit comparable à une horloge classique. En effet, le rapport signal à bruit d'un cycle ne dépend que de la dernière mesure, détectant toute la cohérence résiduelle, alors que le rapport signal à bruit des mesures intermédiaires doit être seulement suffisant pour maintenir la phase dans la région d'inversion.

En appliquant ce protocole, nous avons démontré une amélioration de la stabilité d'une horloge modèle grâce à l'augmentation du temps d'interrogation.

Les résultats démontrés dans cette thèse s'appliquent sur un ensemble d'atomes froids. En effet, un nuage d'atomes refroidis permet d'obtenir un système cohérent, immuable, ce qui en fait un candidat idéal pour des mesures d'interférométrie.

Notre dispositif de refroidissement d'atomes s'articule autour d'une cavité optique qui véhicule le piège dipolaire optique. Partant de pièges magnéto-optiques en deux et trois dimensions, nous chargeons ensuite le piège pour procéder à l'évaporation de l'ensemble atomique.

A ce stade, nous avons démontré que le laser EYLSA, développé par Quantel, est parfaitement adapté à la réalisation d'une expérience d'atomes froids. Les performances du laser fibré permettent d'obtenir un nuage froid de mêmes caractéristiques qu'avec notre dispositif initial (en espace libre et donc plus encombrant), ce qui a permis de valider l'utilisation de ce laser en laboratoire. En outre, ce laser a été implanté et validé sur une expérience d'atomes froids embarquée, dont les contraintes environnementales lors d'un vol en micro-gravité sont importantes.

Enfin, la technologie de ce laser est compatible avec des niveaux de puissance plus importants et la génération de nouvelles longueurs d'onde, ce qui devrait faciliter l'exploration de certaines thématiques de recherche en physique atomique.

L'évaporation dans le piège dipolaire intra-cavité n'est pas suffisante pour obtenir une forte densité dans l'espace des phases. Nous avons donc eu recours à un faisceau vertical supplémentaire, maintenant un taux de collision élevé pour une évaporation efficace, afin d'atteindre la condensation de Bose-Einstein.

L'autre étude principale de cette thèse est liée à la dynamique de condensats de bosons, dans des modes transverses non dégénérés du résonateur optique. En effet, la cavité permet de piéger et de manipuler les atomes dans des modes transverses électro-magnétiques différents. Nous pouvons ainsi créer deux condensats par refroidissement dans deux modes indépendants, ou par la séparation d'un condensat par un changement de mode. Ces condensats peuvent ensuite interférer lors d'une séquence d'interférométrie de Bragg, s'ils sont initialement placés dans un guide d'onde.

Ces deux outils peuvent être combinés afin de créer de nouveaux aspects intéressants sur l'expérience. Notamment, la mesure non destructive peut être opérée en résonance avec la cavité, permettant une forte augmentation du rapport signal à bruit. Si elle est opérée dans le régime fort, des états comprimés de spin de variance sur  $J_z$  diminuée pourraient être obtenus. Tandis que dans le régime faible, cela permettrait de diminuer grandement la décohérence sur l'état atomique.

La mesure serait alors très adaptable. Elle pourrait permettre d'additionner les gains en sensibilité d'un état comprimé de spins, avec l'augmentation du temps d'interrogation par les mesures faibles lors d'une séquence d'interférométrie.

Les différents ensembles atomiques obtenus grâce à la cavité, appliqués à une mesure d'horloge peuvent augmenter le ratio entre le temps d'interrogation et le temps d'un cycle d'horloge. Ainsi, le temps mort deviendrait négligeable, éliminant la limite due à l'effet Dick.

Par ailleurs, nous pouvons appliquer un asservissement de phase entre l'oscillateur local commun et chaque ensemble. Le dernier ensemble serait ainsi asservi en fréquence comme pour une horloge normale. Le temps d'interrogation total effectif du cycle d'horloge en serait grandement augmenté.

Cette étude a été réalisée sur une séquence d'interférométrie liée à une horloge atomique et peut être envisagée pour tout type d'interféromètre. L'idée générale étant de corriger la phase

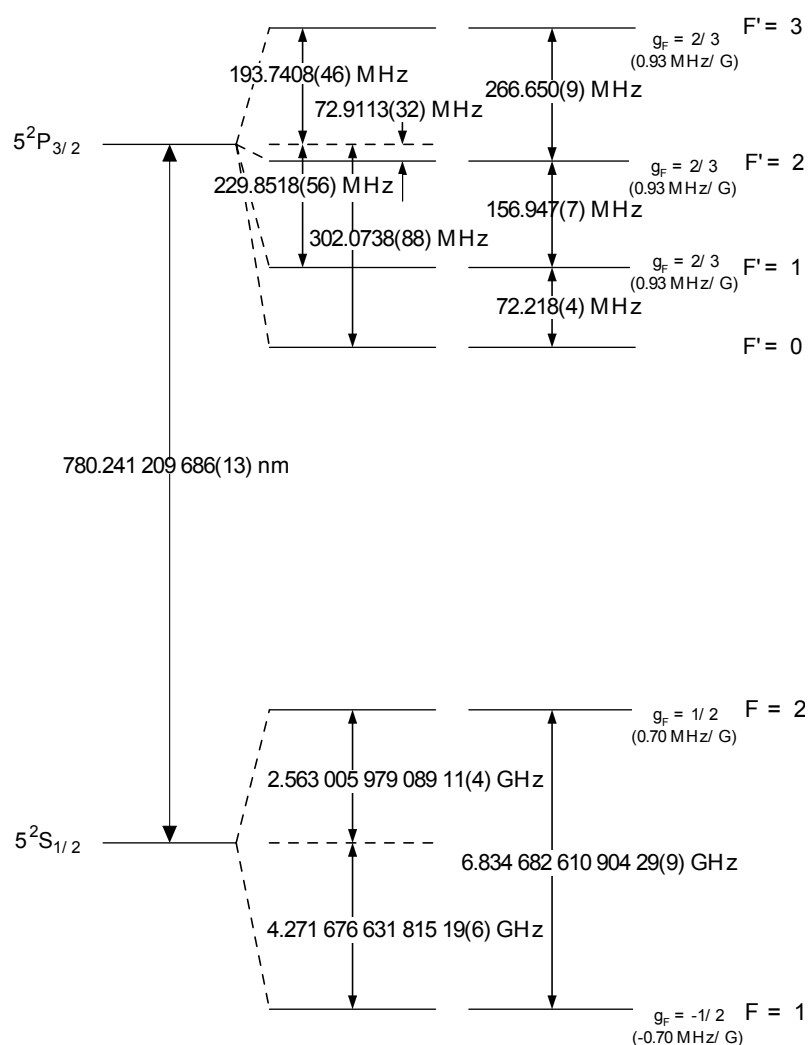
relative après sa mesure à caractère non destructive, pour prolonger le temps d'interrogation. Cette technique peut être appliquée notamment sur un gravimètre ou un gyromètre. La rétroaction se ferait alors sur les états externes des atomes.



## Annexe A

# Transitions atomiques de la ligne D2 du $^{87}\text{Rb}$

La structure de la ligne D2 est représentée sur la Fig. A.1, provenant de [Steck, 2001].



**Figure A.1** – Structure de la ligne D2 du  $^{87}\text{Rb}$ . La fréquence de chaque transition est donnée, ainsi que le facteur de Landé  $g_F$  pour chaque niveau et l'effet Zeeman correspondant entre chaque sous-niveau (en MHz/G).



---

## Annexe B

# Calcul et mesure expérimentale de la largeur au col du faisceau de mesure

Adapter la taille du faisceau de mesure au nuage atomique permet d'optimiser la détection non destructive. Avant de mesurer expérimentalement la taille du faisceau, nous calculons ici la valeur théorique d'un point de vue ondulatoire et confirmons la valeur obtenue dans l'approximation géométrique.

### B.1 Approche ondulatoire

Soit le système optique indiqué sur la Fig. 2.10 composé d'une lentille de rayon  $L$  et de distance focale  $f = 300$  mm. Le faisceau incident arrive collimaté sur cette lentille, et on cherche la largeur au col du faisceau  $w_0$  après la lentille.

Dans cette section, on résout le problème d'un point de vue ondulatoire en utilisant la méthode de la matrice ABCD et le paramètre complexe  $q$ . Le paramètre  $q$  donne les propriétés du faisceau à une certaine distance  $z$ , il est défini par son inverse :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi w(z)^2}, \quad (\text{B.1})$$

où  $R(z)$  et  $w(z)$  sont respectivement le rayon de courbure et la taille du faisceau.

On part du faisceau collimaté à une distance  $d$  avant la lentille, et calcule la largeur au col du faisceau à une distance  $D$  après la lentille. On note  $q_1$  le paramètre complexe du faisceau incident collimaté, et  $q$  celui à la largeur au col du faisceau. Pour ces deux positions du faisceau, le rayon de courbure est infini, donc le paramètre du faisceau est un imaginaire pur de la forme :

$$q = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (\text{B.2})$$

pour le paramètre  $q$  de largeur au col  $w_0$  et :

$$q_1 = i \frac{\pi w^2}{\lambda}, \quad (\text{B.3})$$

pour le paramètre de largeur de faisceau constante  $w$  ( $w = L$  sur la Fig. 2.10).

La méthode de la matrice ABCD nous donne la relation générale :

$$q = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (\text{B.4})$$

La matrice ABCD est le produit de toutes les matrices liées à chaque composant du système traversé par le faisceau. Soit ici, le faisceau part de la position de paramètre  $q_1$ , parcourt la distance  $d$ , traverse la lentille, puis parcourt la distance  $D$  où il arrive au col de taille  $w_0$ . Donc, la matrice ABCD est ici le produit de trois matrices et s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{D}{f} & d + D - \frac{dD}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

En remplaçant les valeurs de A,B,C et D dans l'Eq B.4, et en multipliant par le complexe conjugué on trouve  $q$  sous la forme complexe :

$$q = \frac{\lambda^2 f^2 \left( (d + D - \frac{dD}{f})(1 - \frac{d}{f}) - \frac{\pi^2 w^4}{\lambda^2 f} (1 - \frac{D}{f}) \right)}{\lambda^2 (f - d)^2 + \pi^2 w^4} + \quad (\text{B.7})$$

$$i \frac{\lambda f^2 \pi w^2}{\lambda^2 (f - d)^2 + \pi^2 w^4}. \quad (\text{B.8})$$

Et comme  $q$  est un imaginaire pur, nous avons le système suivant :

$$\frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{\lambda f^2 \pi w^2}{\lambda^2 (f - d)^2 + \pi^2 w^4}, \quad (\text{B.9})$$

$$0 = \frac{\lambda^2 f^2 \left( (d + D - \frac{dD}{f})(1 - \frac{d}{f}) - \frac{\pi^2 w^4}{\lambda^2 f} (1 - \frac{D}{f}) \right)}{\lambda^2 (f - d)^2 + \pi^2 w^4}. \quad (\text{B.10})$$

La taille au col du faisceau  $w_0$  est exprimé à partir de l'Eq. B.9, et l'Eq B.10 nous donne une condition sur les paramètres  $d$ ,  $D$  et  $f$ .

L'équation B.9 nous donne l'expression de la largeur au col  $w_0$  :

$$w_0 = \frac{wf\lambda}{\sqrt{\lambda^2 (f - d)^2 + w^4 \pi^2}} \quad (\text{B.11})$$

Le terme du dénominateur  $\lambda^2 (f - d)^2$  est le terme ondulatoire d'ordre supérieur par rapport à l'approximation géométrique. En effet, si par symétrie autour de la lentille on pose (*i.e.*  $d = D = f$ ), on retrouve l'approximation géométrique avec  $L = w$  ici.

En calculant les ordres de grandeur des termes, on trouve  $w^4 \pi^2 > \lambda^2 (f - d)^2$  de deux ordres de grandeur, donc le terme ondulatoire est négligeable et l'approximation géométrique est valide.

## B.2 Mesure expérimentale

Le col du faisceau est mesuré grâce à une méthode de Foucaultage avec une roue à crans. Cette roue dispose de cran à intervalles réguliers qui, lorsqu'elle tourne, laisse le faisceau se propager ou le coupe alternativement. Pour différentes positions de la roue le long de l'axe

optique on aura donc une allure de fonction d'erreur avec une pente centrale grandissante lorsqu'on se rapproche du col minimal.

On va d'abord montrer que la dérivée de cette fonction d'erreur nous donne directement le col du faisceau. La fonction d'erreur  $\text{erf}(x)$  s'écrit de manière générale :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad (\text{B.12})$$

dont la dérivée est :

$$\frac{d}{dx} (\text{erf}(x)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (\text{B.13})$$

Pour notre ajustement de fonction d'erreur, nous avons choisi :

$$\text{erf}(X) = \text{erf} \left( \frac{\sqrt{2} (x - x_0)}{\sigma} \right), \quad (\text{B.14})$$

dont la dérivée est :

$$\frac{d}{dx} (\text{erf}(X)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left( \frac{-2 \cdot (x - x_0)^2}{\sigma^2} \right). \quad (\text{B.15})$$

En comparant l'équation B.15 avec une fonction gaussienne décrivant un faisceau gaussien :

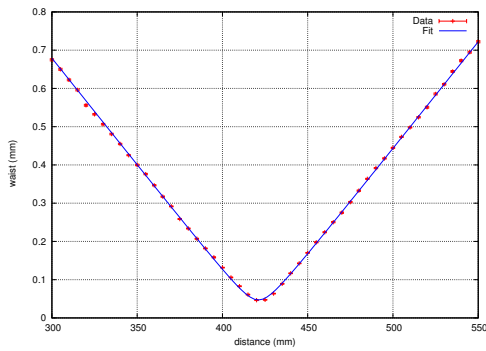
$$I(r, z) \propto \exp \left( \frac{-2r^2}{w^2(z)} \right). \quad (\text{B.16})$$

On trouve directement que notre paramètre d'ajustement  $\sigma$  est exactement égal au col du faisceau  $w(z)$ .

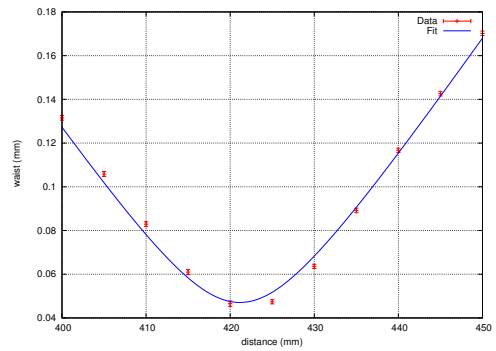
Dans un premier temps, on teste le montage pour mesurer le col du faisceau dans les plans horizontaux et verticaux. Dans un deuxième temps, on ajoutera un télescope  $\times 2$  entre le collimateur et la lentille qui permettra d'atteindre des largeurs au col plus petites et de voir les effets des aberrations sphériques. Il est en effet intéressant de regarder les aberrations pour estimer l'erreur sur la valeur du col minimal. Pour cela, en plus du télescope, on adapte le montage optique pour faire passer un deuxième faisceau à travers la même lentille. On peut changer la position horizontale de ce deuxième faisceau, ainsi il frappe donc la lentille à des endroits différents : les aberrations changent quelque peu le trajet du faisceau et le col minimal comme nous allons le voir.

On trace sur la Fig. B.1(a)(a) les mesures de la taille du faisceau dans le plan horizontal et son ajustement (Eq. B.16) en fonction de la position focale le long de l'axe optique. L'ajustement nous donne le col minimal :  $w_0 = 47 \mu\text{m} \pm 2\%$ . La Fig. B.1(b)(b) donne un zoom autour du col minimal, on voit que les données ne s'ajustent pas parfaitement. En effet, si le faisceau n'est pas bien centré sur la lentille, les aberrations géométriques déforment le col : il n'est plus circulaire donc l'approximation gaussienne du faisceau donne un décalage.

On ajoute ensuite le télescope entre le collimateur et la lentille, le faisceau frappe la lentille à une hauteur deux fois supérieure, donc la largeur au col sera deux fois plus petite. La Fig. B.2 montre le faisceau sans (en rouge) et avec télescope (en bleu) sur le même graphique. L'ajustement nous donne des valeurs minimales de  $w_0 = 47 \mu\text{m} \pm 2\%$  sans télescope et  $w_{0,\times 2} = 24.5 \mu\text{m} \pm 2\%$  avec télescope : le col minimal est environ la moitié. On peut remarquer que les minima de la taille du faisceau ne sont pas aux mêmes positions, cela s'explique

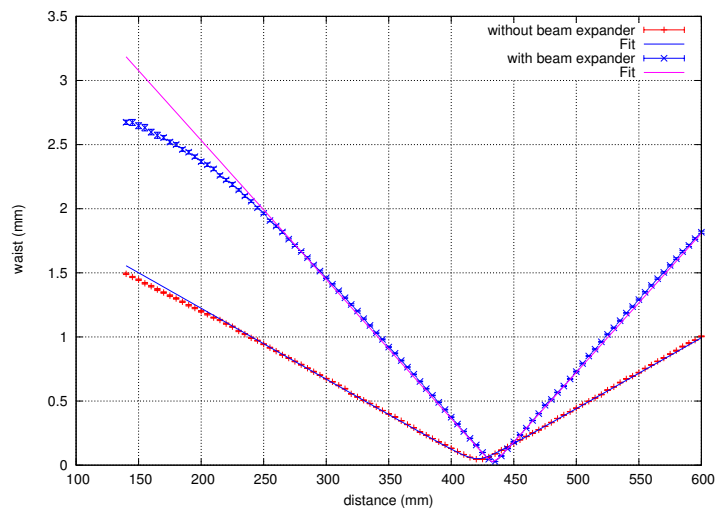


(a)

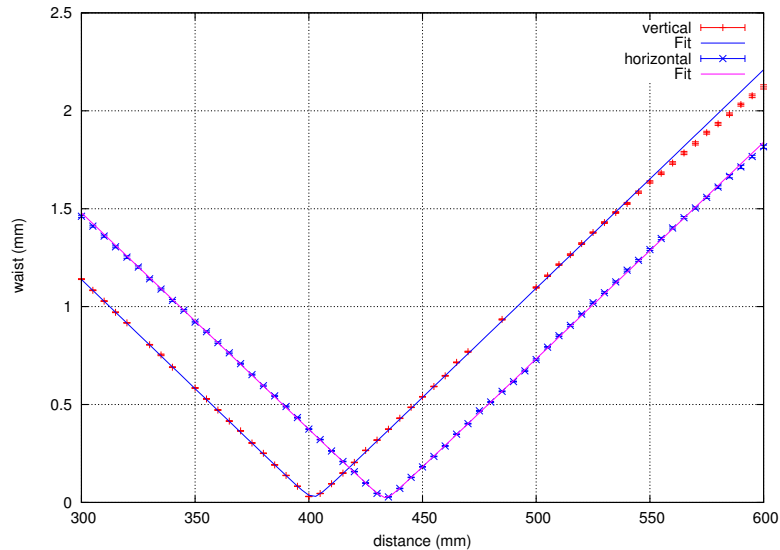


(b)

**Figure B.1** – Largeur du faisceau dans le plan horizontal après la lentille. (a) La largeur du faisceau est tracée le long de l'axe optique. (b) Agrandissement autour de la largeur au col.



**Figure B.2** – Largeur du faisceau sans (points rouges) et avec télescope (points bleus) dans le plan horizontal.



**Figure B.3** – Largeur du faisceau dans le plan vertical (en rouge) et dans le plan horizontal (en bleu).

par l'effet des aberrations sphériques dues à la lentille. En effet, comme le faisceau deux fois plus grand frappe la lentille sur une plus grande surface, le foyer est légèrement plus loin sur l'axe optique par rapport au faisceau inférieur.

On peut également tracer le trajet du faisceau dans le plan horizontal (données précédentes) comparé au faisceau dans le plan vertical avec le télescope (voir Fig. B.3). L'axe des ordonnées nous donne le col du faisceau, et l'axe des abscisses est la position sur l'axe optique comme précédemment. L'ajustement nous donne une largeur au col dans le plan vertical de  $w_{0,ver} = 24.94 \mu\text{m} \pm 2\%$  comparé à celle dans le plan horizontal de  $w_{0,hor} = 24.5 \mu\text{m} \pm 2\%$  (comme précédemment). Cette légère différence est due aux aberrations astigmatiques, la valeur du col minimal et surtout sa position sont différentes selon les plans focaux.

Les aberrations sont présentes dans toutes les mesures précédentes, elles nous donnent une erreur supplémentaire sur les mesures. Il serait alors intéressant d'avoir un ordre de grandeur de leurs effets.

Pour cela, on adapte le montage optique sans télescope pour insérer un deuxième faisceau qui passe à travers la lentille. Ce deuxième faisceau provient du même laser où on utilise un séparateur fibré pour obtenir deux fibres de sortie, et grâce à un cube séparateur et un jeu de miroirs ce deuxième faisceau vient se superposer au premier avant de frapper la lentille. On peut déplacer ce faisceau dans le plan horizontal d'une manière assez précise (de quelques dixièmes de  $mm$ ) et connaître ce déplacement en le comparant au premier faisceau qui sert de référence.

On veut savoir si le fait de déplacer le faisceau horizontalement influe sur la valeur du col minimal. Si les deux faisceaux sont bien superposés, on voit une courbe de fonction d'erreur unique, comme avant. Mais lorsqu'on décale le deuxième faisceau du premier, deux fonctions d'erreurs se distinguent. On numérise les données et on observe de quelle façon le col minimal du deuxième faisceau change selon le décalage, par rapport au faisceau de référence. Le tableau B.1 nous donne les valeurs récupérées de l'ajustement de la fonction d'erreur du deuxième

Décalage en mm par rapport au faisceau de référence	Col minimal du faisceau en $\mu\text{m}$
-1.8 mm	$42.17 \pm 0.41$
-1.35 mm	$42.28 \pm 0.71$
-0.45 mm	$42.28 \pm 0.31$
0 mm	$42.45 \pm 0.50$
0.45 mm	$42.47 \pm 0.62$
0.9 mm	$42.38 \pm 0.42$
2.25 mm	$41.78 \pm 0.69$

**Table B.1** – *Décalage horizontal et valeur du col minimal*

faisceau.

Si le décalage est inférieur à  $2.25\text{ mm}$ , qui est une valeur importante pour notre expérience, on observe que les aberrations ne changent la largeur au col qu'au dixième de  $\mu\text{m}$ . Pour un faible désalignement, les aberrations sont négligeables sur la taille du faisceau. L'objectif étant ici d'adapter la taille du faisceau à celui du nuage atomique, donc d'obtenir une précision au  $\mu\text{m}$  près.

En diminuant la largeur au col du faisceau, on sait que la mesure sera plus précise à même destructivité. Avec cette étude, le faisceau peut être diminué à son col minimal d'un facteur 5 par rapport au faisceau actuel de l'expérience.

## Annexe C

# Décohérence de l'ensemble d'atomes dans le piège dipolaire

La principale source de décohérence dans notre expérience est due au piège dipolaire. Le fort déplacement lumineux différentiel sur la transition de mesure  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  dû au piège dipolaire est compensé par un déplacement inverse grâce à un laser à 1529 nm, comme expliqué dans la Sec. 3.2.5.

Le déplacement lumineux différentiel sur la transition d'horloge  $|F = 1\rangle \rightarrow |F = 2\rangle$  n'est quant à lui pas compensé. Il induit une différence de fréquence sur l'ensemble atomique, et selon leur position certains atomes vont se déphaser. Ce déphasage est la source dominante de décohérence avec l'émission spontanée de la sonde pour l'étude du Chap. 4.

Considérant la distribution thermique gaussienne des atomes et le potentiel d'allure gaussienne (comme mesuré directement par tomographie voir Sec. 3.2.4), cette décroissance est supposée gaussienne également, on s'attend donc à obtenir un contraste en sortie d'un interféromètre de Ramsey qui décroît de la même manière. L'évolution du contraste  $\mathcal{C}$  peut être approximé par la fonction :

$$\mathcal{C}(\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\bar{\tau}}\right)^2\right), \quad (\text{C.1})$$

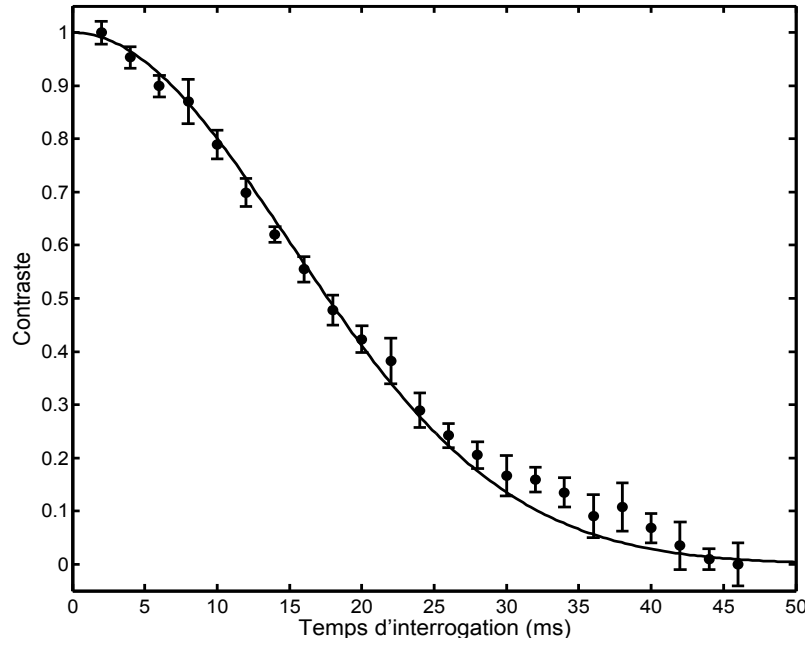
où  $\tau$  est le temps d'interrogation et  $\bar{\tau}$  est le temps caractéristique pour lequel  $\mathcal{C}(\bar{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{e}} \sim 0.6$ . Les détails de cette approximation sont expliqués dans [Vanderbruggen, 2012].

Expérimentalement, on voit ce déphasage pour des temps d'interrogation différents lors de séquences de Ramsey. Après avoir créé l'état cohérent de spin par le premier pulse  $\pi/2$ , les atomes vont progressivement se déphaser pour des temps d'interrogation de plus en plus longs. La Fig. C.1 montre l'évolution du contraste en fonction du temps d'interrogation  $\tau$ . On trouve bien une décroissance exponentielle du contraste en sortie de l'interféromètre, où le temps caractéristique est  $\bar{\tau} = 15$  ms pour une température du nuage d'atomes de 10  $\mu\text{K}$  piégé dans 10 W de puissance de piège dipolaire intra-cavité.

Le résultat de la mesure après le temps caractéristique  $\bar{\tau}$  n'est pas précis et mène à un bruit conséquent.

Pour atteindre de plus longs temps de cohérence, on peut compenser le déplacement lumineux différentiel par un autre faisceau à 780 nm placé entre les niveaux hyperfins [Kaplan et al., 2002], ou essayer de rephaser les atomes dans le régime de rephasage induit de spin





**Figure C.1** – *Décroissance du contraste en fonction du temps d'interrogation. Le contraste normalisé en sortie d'un interféromètre de Ramsey est mesuré pour différents temps d'interrogation (points). Un ajustement par une fonction gaussienne Eq. C.1 est tracé (ligne). Le temps caractéristique de la décroissance exponentielle est  $\bar{\tau} = 15$  ms.*

("spin self-rephasing" en anglais) [Buning et al., 2011].

## Annexe D

# Publications

### **Feedback control of coherent spin states using weak nondestructive measurements**

T. Vanderbruggen, R. Kohlhaas, A. Bertoldi, E. Cantin, A. Landragin, and P. Bouyer

*Physical Review A* **89**, 063619 (2014) p. 149

### **Mobile and remote inertial sensing with atom interferometers**

B. Barrett, P.-A. Gominet, E. Cantin, L. Antoni-Micollier, A. Bertoldi, B. Battelier, P. Bouyer, J. Lautier, A. Landragin

*Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, course **188** on Atom Interferometry (2014) p. 165

### **Phase locking a clock oscillator to a coherent atomic ensemble**

R. Kohlhaas, A. Bertoldi, E. Cantin, A. Aspect, A. Landragin, and P. Bouyer

*Physical Review X* **5**, 021011 (2015) p. 229

---

PHYSICAL REVIEW A **89**, 063619 (2014)**Feedback control of coherent spin states using weak nondestructive measurements**T. Vanderbruggen,<sup>1,\*</sup> R. Kohlhaas,<sup>1</sup> A. Bertoldi,<sup>2</sup> E. Cantin,<sup>2</sup> A. Landragin,<sup>3</sup> and P. Bouyer<sup>4</sup><sup>1</sup>Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique, CNRS, Université Paris-Sud, Campus Polytechnique, RD 128, 91127 Palaiseau Cedex, France<sup>2</sup>Laboratoire Photonique, Numérique et Nanosciences LP2N, Université Bordeaux–IOGS–CNRS: UMR 5298, rue F. Mitterand, Talence, France<sup>3</sup>LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS and UPMC, 61 avenue de l'Observatoire, F-75014 Paris, France<sup>4</sup>Laboratoire Photonique, Numérique et Nanosciences LP2N Université Bordeaux–IOGS–CNRS: UMR 5298, Bâtiment A30, 351 cours de la Libération, Talence, France

(Received 4 April 2014; published 25 June 2014)

We consider the decoherence of a pseudospin ensemble under collective random rotations and study, both theoretically and experimentally, how a nondestructive measurement combined with real-time feedback correction can protect the state against such a decoherence process. We theoretically characterize the feedback efficiency with different parameters—coherence, entropy, fidelity—and show that a maximum efficiency is reached in the weak measurement regime, when the projection of the state induced by the measurement is negligible. This article presents in detail the experimental results published previously [T. Vanderbruggen *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 210503 (2013)], where the feedback scheme stabilizes coherent spin states of trapped ultracold atoms and nondestructively probes them with dispersive optical detection. In addition, we study the influence of several parameters, such as atom number and rotation angle, on the performance of the method. We analyze the various decoherence sources limiting the feedback efficiency and propose a way to mitigate their effect. The results demonstrate the potential of the method for the real-time coherent control of atom interferometers.

DOI: [10.1103/PhysRevA.89.063619](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.063619)

PACS number(s): 37.25.+k, 03.67.Pp, 03.65.Yz

**I. INTRODUCTION**

Nondestructive measurements of atomic samples are finding an increasing number of applications, especially for metrological purposes, since atoms are at the heart of many sensors [1] such as clocks, magnetometers, gravimeters, and gyrometers. Nondestructive measurements show a strongly reduced heating rate compared to fluorescence or absorption probing techniques. For this reason, they are exploited, for example, to increase the cycling rate in optical lattice clocks [2], thus reducing the Dick effect, or to suppress the atom number fluctuations occurring in successive preparations of cold atomic samples [3,4].

Nondestructive measurements preserving the coherence of the atomic sample are of particular interest in atom interferometric sensors, which rely on wave-packet coherence. The coherence preserving feature has been demonstrated by the real-time observation of Rabi oscillations [5–7] and used for state tomography [8]. Moreover, when these nondestructive measurements are sensitive to the quantum fluctuations of the coherent atomic state, they prepare spin-squeezed states [9–15] and allow the operation of atomic clocks beyond the shot-noise limit [16,17].

This publication is a companion article to Ref. [18], where the real-time feedback control of a collective pseudospin is considered. As a proof of principle, we present how a feedback control based on a nondestructive measurement protects the state against decoherence induced by random rotations of the collective spin. The feedback scheme is similar to the method proposed for a single qubit in Ref. [19] and later implemented experimentally with photonic qubits [20]. It demonstrates that

weak measurements monitoring the disturbance caused by the environment can protect the coherence of collective quantum systems [21]. Our work can serve as a basis for experiments on the coherent feedback control of atomic interferometers and provides a method for estimation of the potential of such feedback systems.

The article is organized as follows. In Sec. II, a theoretical introduction to the problem is presented. After recalling the concept of collective pseudospin and the related collective unitary evolutions, we introduce the decoherence process resulting from random collective rotations (RCRs). More particularly, we present the specific case of a binary RCR, which constitutes a practical benchmark used throughout this article to understand and characterize a feedback system in a simple situation. We then model the nondestructive measurement with a Gaussian measurement operator and study the feedback controller in the weak measurement limit. To characterize the feedback efficiency, we compare three methods based on the coherence, the entropy, and the fidelity, respectively. Using a Monte Carlo simulation, we study the crossover between the weak and the strong measurement limits and show that the best efficiency is reached using a weak measurement, for the considered controller. Finally, we analyze the feedback control of a more general kind of collective decoherence, called an analog RCR.

Section III describes the experimental implementation of the feedback scheme with cold <sup>87</sup>Rb atoms and a dispersive heterodyne detection. After a brief presentation of the dipole trap and of the atomic state preparation, we explain the implementation of the RCR and the feedback controller with resonant microwave pulses. It is then shown how a nondestructive probe based on the frequency modulation spectroscopy technique can measure the pseudospin collective observable  $J_z$  and how it is possible to cancel the inhomogeneous light shift of the probe [22] and the related decoherence—a mandatory condition

\*Present address: Institut de Ciències Fotòniques (ICFO), E-08860 Castelldefels Barcelona, Spain; thomas.vanderbruggen@icfo.es

to implement the control scheme. We also characterize the decoherence resulting from the inhomogeneous differential light shift induced by the trapping beam on the clock transition and show that this is not a limitation for the experiments presented here.

Finally, in Sec. IV we present the experimental results and focus on the data acquisition and analysis. First, from the study of a binary RCR followed by a correction, we analyze the influence of the atom number and of the probe strength on the remaining coherence, using a Ramsey-like measurement. The iteration of the sequence of binary RCRs and feedbacks demonstrates how the collective state can be protected over time. To conclude, the experimental realization of an analog RCR is presented.

## II. THEORETICAL BACKGROUND

In this section, we present the decoherence of a coherent spin state (CSS) induced by the RCR noise model and its successive recovery based on a nondestructive detection combined with feedback control [Fig. 1(a)]. To quantify the correction efficiency, different criteria are defined and compared using both analytical results obtained in the weak measurement limit and numerical simulations. In particular, we analyze the efficiency versus the measurement backaction and show that the maximum efficiency is reached in the weak measurement regime for all the considered criteria.

### A. Coherent spin state and collective rotations

The system considered is an ensemble of indistinguishable  $N_{\text{at}} = 2j$  spin-1/2 particles. From the spin operators  $(\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \sigma_z^{(i)})$  related to the  $i$ th particle, the collective operators  $(J_x, J_y, J_z)$  are built according to  $J_k = \sum_i \sigma_k^{(i)}$ . They are spin operators since they satisfy the commutation relations  $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$  ( $\epsilon_{ijk}$  is the Levi-Civita tensor). The basis that codiagonalizes  $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  and  $J_z$  is called the Dicke basis  $\{|j, m\rangle, -j \leq m \leq j\}$ :

$$\mathbf{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle, \quad (1)$$

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle. \quad (2)$$

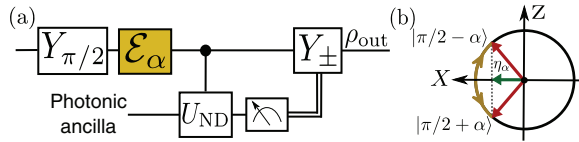


FIG. 1. (Color online) (a) Scheme of the feedback sequence for a binary RCR. An initial rotation  $Y_{\pi/2}$  prepares a coherent superposition which later undergoes a random collective rotation  $\mathcal{E}_{\alpha}$ . The system is then indirectly measured using a photonic probe that evolves according to a nondestructive interaction  $U_{\text{ND}}$ . The final rotation  $Y_{\pm}$ , implementing the correction, is conditioned to the measurement result. (b) Reduction of the collective spin coherence by the random binary rotation of angle  $\alpha$ . The coherence of the statistical mixture after the noise action is the length of the projection of the collective Bloch vector on the  $X$  axis of the sphere.

The collective spin operators are the generators of the unitary group of the collective state rotations. The rotations around each axis  $X$ ,  $Y$ , and  $Z$  of the Bloch sphere are  $X_{\gamma} = e^{i\gamma J_x}$ ,  $Y_{\theta} = e^{i\theta J_y}$ , and  $Z_{\varphi} = e^{i\varphi J_z}$ , respectively. The state  $|\theta, \varphi\rangle = Z_{\varphi} Y_{\theta} |j, -j\rangle$  is the CSS pointing in the  $(\theta, \varphi)$  direction of the Bloch sphere. To simplify the notations, when  $\varphi = 0$  the CSS is written as  $|\theta\rangle \equiv |\theta, 0\rangle$ .

The decoherence of a CSS can occur in two main ways: either the pointing direction of the state is disturbed or the state leaks out of the maximal  $J = N/2$  CSS. Here we present a method to correct the coherence loss caused by the first mechanism. The correction method relies on a measurement, which in turns induces a partial decoherence due to the second mechanism and a consecutive retroaction on the spin direction. This approach is investigated both theoretically and experimentally, and we show that, for a suitable trade-off, it can improve the state coherence.

### B. Binary RCRs and decoherence

The initial state is the CSS  $|\psi_0\rangle \equiv |\pi/2\rangle$ . The state  $|\psi_0\rangle$  experiences a *binary* RCR that consists in a rotation of angle  $\alpha$  with a random direction around the  $Y$  axis of the Bloch sphere. The map of this process  $\rho \mapsto \mathcal{E}_{\alpha}(\rho)$  is characterized by the following Kraus decomposition:

$$\mathcal{E}_{\alpha}(\rho) = \frac{1}{2} Y_{\alpha} \rho Y_{\alpha}^{\dagger} + \frac{1}{2} Y_{-\alpha} \rho Y_{-\alpha}^{\dagger}. \quad (3)$$

The RCR creates a statistical mixture of the states  $|\pi/2 + \alpha\rangle$  and  $|\pi/2 - \alpha\rangle$ , as depicted in Fig. 1(b). More precisely, the density operator generated by the process  $\mathcal{E}_{\alpha}$  is

$$\mathcal{E}_{\alpha}(\rho_0) = \frac{1}{2} \rho\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \frac{1}{2} \rho\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad (4)$$

where  $\rho_0 \equiv |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  and  $\rho(\theta) \equiv |\theta\rangle\langle\theta|$ .

### C. Evolution under the measurement

We consider a situation where the sample is probed with a far off-resonance optical probe. The detection has a finite resolution  $\sigma_{\text{det}}$  and the evolution of the system determined by the measurement is modeled by a set of Gaussian measurement operators  $\{M_{m_0}\}$  of the observable  $J_z$ :

$$M_{m_0} = (2\pi\sigma_{\text{det}}^2)^{-1/4} \exp\left[-\frac{1}{4\sigma_{\text{det}}^2} (J_z - m_0)^2\right]. \quad (5)$$

An important case is that of a shot-noise-limited detection for which  $\sigma_{\text{det}} = M^{-1} N_p^{-1/2}/2$  ( $M$  is the probe coupling strength, depending on the coupling of the atoms to the optical probe and, in particular, on the on-resonance optical depth, and  $N_p$  is the number of photons in the detection pulse [23]).

The values  $m_0$  accessible by the measurement are not bounded between  $-j$  and  $j$  since for a detection with low resolution the uncertainty may be arbitrarily large. Moreover,  $m_0 \in \mathbb{R}$  since the measurement output is a continuous parameter. Under these conditions, the measurement operator satisfies the completeness relation  $\int_{-\infty}^{+\infty} M_{m_0} M_{m_0}^{\dagger} dm_0 = 1$ , and the set  $\{E_{m_0} = M_{m_0} M_{m_0}^{\dagger}\}_{m_0 \in \mathbb{R}}$  is a continuous positive operator-valued measurement.

If the number of atoms  $N_{\text{at}}$  in the sample is large, then, by the Moivre-Laplace theorem (central-limit theorem for binomial distributions), a CSS  $|\theta, \varphi\rangle = \sum_m c_m(\theta, \varphi) |j, m\rangle$  can be approximated with a Gaussian state

$$c_m(\theta, \varphi) = \frac{e^{-i\varphi m}}{\sqrt{\sqrt{\pi} j \sin \theta}} \exp\left[-\frac{(m - j \cos \theta)^2}{2j \sin^2 \theta}\right], \quad (6)$$

and the width of this distribution is  $\sigma_{\text{at}} = N_{\text{at}}^{1/2}/2$ , which is the atomic shot noise. When a measurement is performed on this state, the probability of obtaining  $m_0$  at the output is

$$p(m_0|\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | M_{m_0}^\dagger M_{m_0} | \theta, \varphi \rangle \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\xi_\theta}{\sigma_{\text{det}}} \exp\left[-\frac{\xi_\theta^2 (m_0 - j \cos \theta)^2}{2\sigma_{\text{det}}^2}\right], \quad (8)$$

where  $\xi_\theta^2 = 1/(1 + \kappa^2 \sin^2 \theta)$  is the squeezing factor and  $\kappa^2 = \sigma_{\text{at}}^2/\sigma_{\text{det}}^2$  characterizes the projectivity of the measurement as the square of the ratio between the width of the atomic wave function and the resolution of the detection. If  $\kappa^2 \ll 1$ , the projectivity is negligible and the measurement is said to be *weak*. Conversely, in the strong measurement limit ( $\kappa^2 \gg 1$ ), the measurement operator is a projector:  $M_{m_0} = |j, m_0\rangle\langle j, m_0|$ . At the crossover between these two regimes ( $\kappa^2 \sim 1$ ), the state is partially projected and a spin-squeezed state is prepared [9,11–13]. The measurement operator, Eq. (5), thus models a nondestructive measurement with arbitrary projectivity.

#### D. Feedback controller and output state

We consider a simple feedback controller that corrects for the disturbance induced by a binary RCR. The sign of  $m_0$  determines the hemisphere where the Bloch vector lies and is then sufficient to know which rotation the system has undergone:  $Y_{-\alpha}$  if the sign is positive;  $Y_{+\alpha}$  otherwise. Once the rotation sign is determined, a rotation with the same angle and opposite sign can be applied to bring the system back into the initial state  $|\psi_0\rangle$ . Assuming that there is no other decoherence source from the probe pulse, this controller is modeled by the operator sum decomposition

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\alpha(\rho) = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_-} [p(m|\alpha) Y_{-\alpha} M_m Y_{+\alpha} \rho Y_{+\alpha}^\dagger M_m^\dagger Y_{-\alpha}^\dagger \\ & + p(m|-\alpha) Y_{-\alpha} M_m Y_{-\alpha} \rho Y_{-\alpha}^\dagger M_m^\dagger Y_{-\alpha}^\dagger] dm \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} [p(m|-\alpha) Y_{+\alpha} M_m Y_{-\alpha} \rho Y_{-\alpha}^\dagger M_m^\dagger Y_{+\alpha}^\dagger \\ & + p(m|\alpha) Y_{+\alpha} M_m Y_{+\alpha} \rho Y_{+\alpha}^\dagger M_m^\dagger Y_{+\alpha}^\dagger] dm, \quad (9) \end{aligned}$$

where  $p(m|\pm\alpha)$  is the probability of measuring  $m$  given that the state has undergone the collective rotation  $Y_{\pm\alpha}$ .

##### 1. Success probability

The success probability is defined as the probability of detecting a positive rotation sign given that the state experienced a rotation  $Y_{-\alpha}$ , and vice versa. From Eq. (8), we

find

$$p_s = \int_0^\infty p(m_0|\alpha) dm_0 \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} [1 + \text{erf}(\sqrt{j \xi_\theta^2 / 2 - \alpha^2} \sin \alpha)]. \quad (11)$$

As we will see, this quantity is the key parameter for describing the output state and thus the behavior of the feedback system in the weak measurement limit.

#### 2. Weak measurement limit

In the weak measurement limit ( $\kappa^2 \ll 1$ ), the projectivity is negligible and the measurement does not modify the state ( $M_m \sim \mathbb{1}$ ). As a consequence, the controller map, Eq. (9), becomes

$$\mathcal{C}_\alpha(\rho) \sim p_s \rho + \frac{1-p_s}{2} [Y_{2\alpha} \rho Y_{2\alpha}^\dagger + Y_{-2\alpha} \rho Y_{-2\alpha}^\dagger]. \quad (12)$$

Therefore, if the input state is the coherent superposition  $|\pi/2\rangle$ , then Eq. (12) means that either the controller made the right decision with probability  $p_s$  and the output state is  $|\pi/2\rangle$  or the decision was wrong and the output state is  $|\pi/2 \pm 2\alpha\rangle$ , depending on the initial rotation induced by the RCR. The density matrix obtained after correction is  $\rho_{\text{out}} = \mathcal{C}_\alpha(\rho_0)$ , explicitly:

$$\rho_{\text{out}} = p_s \rho \left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1-p_s}{2} \left[ \rho \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) + \rho \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \right]. \quad (13)$$

This state is fully determined from the knowledge of the success probability. For a perfect measurement with  $p_s = 1$ , the output state is  $\rho_{\text{out}} = \rho_0$ , which is the pure initial state: the feedback control thus perfectly corrects the disturbance induced by the RCR. To evaluate the controller in the case of an imperfect detection ( $p_s < 1$ ), we quantify its efficiency in protecting the initial state.

#### E. Evaluation of the feedback efficiency

After an analysis of the retroaction process consisting in an RCR, a measurement, and a feedback correction, we quantify the efficiency of the correction in terms of three parameters characterizing the state:

**Coherence** *The correction shall increase the coherence.*

The coherence is defined as the norm of the mean Bloch vector normalized to the sphere radius:  $\eta(\rho) \equiv \|\langle \mathbf{J} \rangle\|/j$ , where  $\langle \mathbf{J} \rangle = (\langle J_x \rangle, \langle J_y \rangle, \langle J_z \rangle)$  and  $\langle J_k \rangle = \text{Tr}(J_k \rho)$ .

**Entropy** *The correction shall reduce the entropy.*

The von Neumann entropy of a system with density operator  $\rho$  is  $S(\rho) \equiv -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$ .

**Fidelity** *The correction shall increase the fidelity.*

The fidelity is defined as the projection of the output state  $\rho_{\text{out}}$  on the input one  $|\psi_0\rangle$ :  $\mathcal{F}(\rho_{\text{out}}, |\psi_0\rangle) \equiv \langle \psi_0 | \rho_{\text{out}} | \psi_0 \rangle$ .

Having several parameters to measure the efficiency is useful since, depending on the experimental context, one may be easier to estimate than another. But before raising experimental considerations, we study whether these three parameters lead to equivalent definitions of the efficiency.

From the results previously obtained in the weak measurement limit, we calculate the values for the three parameters at

TABLE I. Characteristic parameters quantifying the state at the beginning ( $|\psi_0\rangle$ ), after the binary RCR [ $\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$ ], and after the correction [ $\rho_{\text{out}} = \mathcal{C}_\alpha(\rho_0)$ ]. These results were obtained in the limit of a weak measurement assuming that the binary RCR is the only decoherence source.

	$ \psi_0\rangle$	$\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$	$\mathcal{C}_\alpha(\rho_0)$
Coherence	1	$ \cos \alpha $	$p_s + (1 - p_s) \cos 2\alpha$
Entropy	0	1	$-p_s \log_2 p_s + (1 - p_s)[1 - \log_2(1 - p_s)]$
Fidelity	1	$e^{-2j\alpha^2}$	$p_s + (1 - p_s) e^{-2j\alpha^2}$

different stages of the retroaction process: when the ensemble is in the initial state ( $|\psi_0\rangle$ ), after the RCR [ $\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$ ], and after the correction [ $\mathcal{C}_\alpha(\rho_0)$ ]. The results are presented in Table I and their derivation is detailed in Appendix A.

We already saw that a perfect detection ( $p_s = 1$ ) would recover a pure state. Conversely, when the detection does not distinguish between state  $|\pi/2 + \alpha\rangle$  and state  $|\pi/2 - \alpha\rangle$ , then  $p_s = 1/2$ . In that case, the coherence of the output state reduces to  $\eta_\alpha^{\text{out}} = \eta_\alpha^2 < \eta_\alpha$  and the entropy increases to  $S(\rho_{\text{out}}) = 3/2 > 1$ . As a consequence, when the detection resolution is low the feedback action deteriorates the state instead of protecting it. We show in Fig. 2 the evolution of the coherence, the entropy, and the fidelity versus the success probability for a binary RCR with angle  $\alpha = \pi/4$ .

We now compare the different efficiency measures by introducing the critical success probability  $\tilde{p}_s$ , above which the correction improves the relative parameter. For the fidelity, the critical probability is  $\tilde{p}_s^{(f)} \approx 0$  (for  $\alpha \gg N_{\text{at}}^{-1/2}$ ) and the correction is always efficient; therefore the fidelity should be used with care when dealing with a large particle number system described by a Gaussian state. Concerning the coherence, the critical probability depends on the value of the RCR angle  $\alpha$ ; more precisely, for  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ ,  $\tilde{p}_s^{(c)}(\alpha) = (\cos \alpha - \cos 2\alpha)/(2 \sin^2 \alpha)$ . For  $\alpha = \pi/2$ ,  $\tilde{p}_s^{(c)} = 1/2$ , whereas it increases to  $\tilde{p}_s^{(c)} = 3/4$  when  $\alpha = 0$ . Finally, the critical probability related to the entropy is  $\tilde{p}_s^{(e)} \sim 0.77$ ; it is thus more constraining than the coherence-related one, even for  $\alpha = 0$ . The comparison of the different measures in the weak measurement regime is given by the strict inequalities  $\tilde{p}_s^{(f)} < \tilde{p}_s^{(c)}(\alpha) < \tilde{p}_s^{(e)}$ , therefore they are not equivalent.

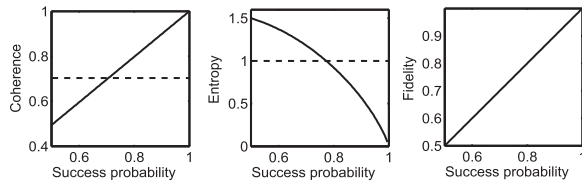


FIG. 2. Coherence, von Neumann entropy, and fidelity of the output state  $\rho_{\text{out}}$  versus success probability, for  $\alpha = \pi/4$  and in the limit of a large atom number ( $N_{\text{at}} \gg 1$ ). Dashed lines indicate reference values for the mixed state  $\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$  generated by the RCR (for the fidelity the dashed line is not visible since it is very close to 0 if the binary RCR angle satisfies  $\alpha \gg N_{\text{at}}^{-1/2}$ ) and represent the thresholds above which the correction procedure is efficient.

However, we will now see, using numerical simulations, that they present a similar behavior.

## F. Numerical simulations

To study the feedback control of a binary RCR in an arbitrary measurement regime, we numerically simulate the feedback process using a Monte Carlo analysis which generates random trajectories followed by a quantum state during the sequence RCR-measurement-correction. This allows us to verify the analytical results previously obtained in the weak measurement limit and to study the crossover between the weak and the strong measurement regime. In this simulation, the nondemolition measurement is supposed to be perfect in the sense that no decoherence (e.g., spontaneous emission or inhomogeneous light shift) is induced by the probe beam.

The simulation uses as the initial state the CSS  $|\psi_0\rangle = |\pi/2\rangle$  and applies a binary RCR to it, that is, a rotation  $Y_\alpha$  or  $Y_{-\alpha}$  with probability 1/2. The rotations of the collective spin are implemented using the Wigner  $D$  matrix [24]. From the measurement operator, Eq. (5), we compute the probability density to measure  $m_0$  and draw a value for  $m_0$  according to this distribution. The measurement operator  $M_{m_0}$  is then applied to compute the measurement backaction on the state. Then, depending on the sign of  $m_0$ , we apply the correction rotation. Examples of distributions obtained along a trajectory for different measurement strengths are presented in Fig. 3. We see that, due to the projection induced by the measurement, the distribution after the correction rotation is not Gaussian for  $\kappa^2 > 1$ .

The sequence, repeated several times starting with the same initial state, provides a statistical estimate of the success probability. The fidelity is obtained by projecting the final state on the initial one. The coherence is calculated from

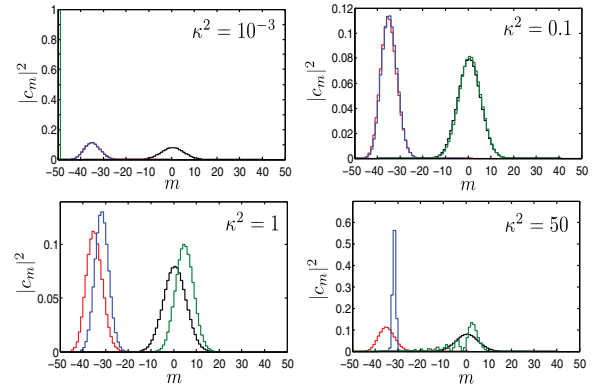


FIG. 3. (Color online) Distributions of the atomic wave function projected in the  $\{|m\rangle\}$  basis of the eigenstates of  $J_z$  and obtained for different values of  $\kappa^2$ . The RCR angle is  $\alpha = \pi/4$  and  $N_{\text{at}} = 100$ . Distributions are given for each step of a Monte Carlo trajectory simulation: the initial CSS (black line), after the RCR [leftward light-gray (red) line], after the measurement [dark-gray (blue) line], and after the correction [rightward light-gray (green) line]. Note that in the case where  $\kappa^2 = 10^{-3}$ , the controller made the wrong decision and the output state is a  $\delta$  peak centered at  $m = -j$ , meaning that the collective spin is pointing towards the south pole of the Bloch sphere.



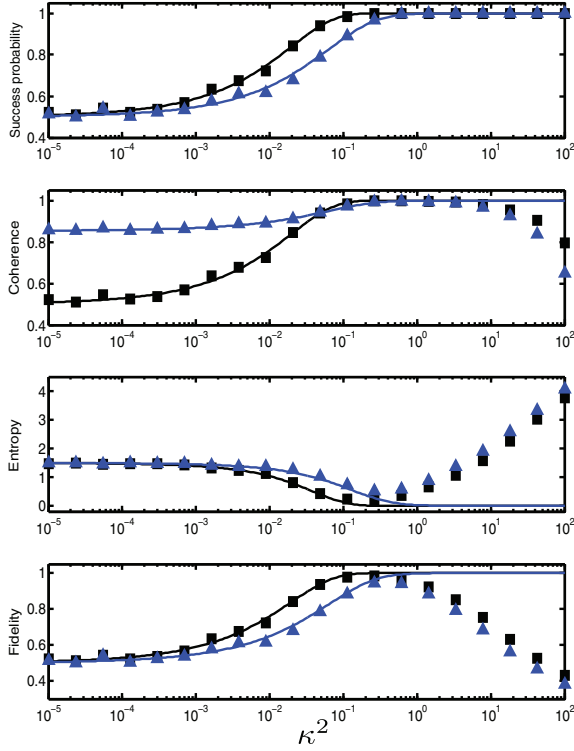


FIG. 4. (Color online) Results of the Monte Carlo simulation for 1000 trajectories, where the parameters are  $N_{\text{at}} = 100$  and  $\alpha = \pi/4$  (black squares) and  $\alpha = \pi/8$  (blue triangles). From top to bottom: the success probability, coherence, entropy, and fidelity are plotted versus  $\kappa^2$ . Solid lines are the analytical results obtained in the weak measurement limit ( $\kappa^2 \ll 1$ ).

the average over all the simulated trajectories of the norm of the output Bloch vector. Finally, the von Neumann entropy is  $S = -\text{Tr}(\overline{\rho_{\text{out}}} \log_2 \overline{\rho_{\text{out}}})$ , with

$$\overline{\rho_{\text{out}}} = \frac{1}{N_{\text{traj}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{traj}}} |\psi_{\text{out}}(k)\rangle\langle\psi_{\text{out}}(k)|, \quad (14)$$

where  $N_{\text{traj}}$  is the number of simulated trajectories and  $|\psi_{\text{out}}(k)\rangle$  is the state obtained at the end of the  $k$ th trajectory.

We run the simulation for a sample containing  $N_{\text{at}} = 100$  atoms and for different values of  $\kappa^2$ , spanning from a weak to a strong measurement. The results are presented in Fig. 4. The analytical results obtained in the weak measurement limit ( $\kappa^2 \lesssim 0.1$ ) are in good agreement with the simulations. This is not the case for the strong measurement regime, where the analytical expressions are inappropriate because they do not consider the projection of the state resulting from the measurement. The simulation correctly predicts the increase in the entropy and the decrease in the coherence and fidelity with increasing measurement strength. We see that, even if the efficiency measures are not equivalent, an optimum is reached for a similar value of  $\kappa^2$  for all three parameters. Moreover, this optimum is reached for  $\kappa^2 < 1$ , that is, for a weak measurement.

It is useful to note that, because of the state projection, it is not possible to fully recover the target state with the chosen controller, even in the case of a noise resulting from unitary Kraus operators and measured with a perfectly nondestructive detection. However, the recovered state can be arbitrarily close to the target state given that the on-resonance optical density of the sample is sufficiently high.

To conclude, fidelity, entropy, and coherence may all be used to evaluate the efficiency of a feedback system for collective spin states. However, as shown in Sec. II E, the fidelity is not strongly discriminant to characterize feedback schemes involving CSSs due to their quasiorthogonality. The coherence is the parameter adopted in the experimental part of this article, since it can be directly determined from the fringe contrast at the output of a Ramsey interferometer. In the following sections, we thus consider only the coherence.

### G. Analog RCR

The RCR decoherence model is now generalized to a rotation not only with random direction, but also with random angle. We call such a decoherence model an *analog* RCR. For this model, the choice of the correction strategy is not trivial: in the following we analyze two possible approaches and compare them considering their effect on the coherence.

#### 1. Decoherence

As a case study, we consider an RCR angle  $\alpha$  uniformly distributed in  $[-\pi/2, +\pi/2]$ . The continuous Kraus operators related to this analog RCR are  $E_\alpha = Y_\alpha/\sqrt{\pi}$ , for  $-\pi/2 \leq \alpha \leq +\pi/2$ , generating the map,

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} Y_\alpha \rho Y_\alpha^\dagger d\alpha, \quad (15)$$

and satisfying the completeness relation,  $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} E_\alpha E_\alpha^\dagger = 1$ . Therefore, this decoherence process transforms the initial state  $|\pi/2\rangle$  into  $\mathcal{E}(|\pi/2\rangle) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \rho(\pi/2 + \alpha) d\alpha/\pi$ , and the coherence of this statistical mixture is (Appendix A, Sec. 1 b)

$$\eta[\mathcal{E}(|\pi/2\rangle)] = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{i\alpha} d\alpha \right| = \frac{2}{\pi}. \quad (16)$$

The coherence is reduced to about 63% because of the specific analog RCR considered.

#### 2. Controller

The controller is described by a map that sums over all the possible RCR angles  $\alpha$  and possible measurement outcomes in the sequence noise-measurement-correction,

$$\mathcal{C}(\rho) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz p(z|\alpha) Y_{\Theta_g(z)} M_z Y_\alpha \rho Y_\alpha^\dagger M_z^\dagger Y_{\Theta_g(z)}^\dagger, \quad (17)$$

where  $z \equiv m_0/j$  is the measurement output normalized to the Bloch sphere radius, and  $\Theta_g(z)$  is the correction angle depending on the measurement result  $z$ . The conditional probability of measuring  $z$  given that the state has been rotated



at an angle  $\alpha$  around the  $Y$  axis is obtained from Eq. (8),

$$p(z|\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha^2} \exp\left[-\frac{(z - \sin\alpha)^2}{2\sigma_\alpha^2}\right], \quad (18)$$

where  $\sigma_\alpha = \sigma_{\text{det}}/\xi_{\pi/2-\alpha}$ . For a weak measurement we can have  $|z| > 1$ , hence we adopt the following strategy to define the correction angle:

$$\Theta_g(z) = \begin{cases} -g \arcsin z & \text{for } |z| \leq 1, \\ -g\pi/2 & \text{for } z > 1, \\ +g\pi/2 & \text{for } z < -1, \end{cases} \quad (19)$$

where  $g$  is the feedback gain.

### 3. Output state in the weak measurement limit

In the weak measurement limit ( $\kappa^2 \ll 1$ ),  $M_z \sim \mathbb{1}$  and the measurement resolution  $\sigma_\alpha \sim \sigma_{\text{det}}$  is independent of  $\alpha$ . If the input state is the coherent superposition  $|\pi/2\rangle$ , then the output state is

$$\rho_{\text{out}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dz p(z|\alpha) \rho\left(\frac{\pi}{2} + \Theta_g(z) + \alpha\right). \quad (20)$$

The coherence of this state can be written as (Appendix A, Sec. 1 b)

$$\eta_{\text{out}} = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dz p(z|\alpha) e^{i(\alpha + \Theta_g(z))} \right|. \quad (21)$$

We depict in Fig. 5(a) the variation of the coherence versus the measurement resolution for different feedback gains. We see that at a high resolution, a low gain does not allow a full coherence recovery. However, in a situation where the resolution is low, a reduced gain provides better performance. This is reflected in Fig. 5(b): the optimum gain is below unity for a detection with finite resolution. This results from a compromise between the strength of the correction and the effect of the detection noise mapped onto the final state through the feedback process. For example, if  $\sigma = 1/3$ , a maximum output coherence of about 0.85 is reached for  $g \sim 0.75$ .

### 4. Alternative correction strategy

We consider an alternative strategy adopting a correction angle proportional to the measurement output,  $\Theta_g(z) = -gz$ , which avoids the saturation problem for  $|z| > 1$ . Moreover, it offers a simplified experimental implementation of the controller since it consists only in a proportional gain.

A comparison of the two strategies is presented in Fig. 6 for  $\sigma = 0.14$ , corresponding to the measurement resolution in Sec. IV C. The second strategy leads to a better result: with the first strategy a coherence of 0.975 is recovered for an optimum gain  $g = 0.95$ , whereas it reaches 0.979 for  $g = 1.22$  with the second strategy.

In that case, the optimum is reached for  $g \geq 1$  since  $|z| = |\sin\alpha| \leq |\alpha|$ . The angle  $\alpha_0$  for which this gain is optimized satisfies  $\alpha_0 - gz_0 = 0$ , and since  $z_0 = \sin\alpha_0$ ,

$$g = \frac{\alpha_0}{\sin\alpha_0}. \quad (22)$$

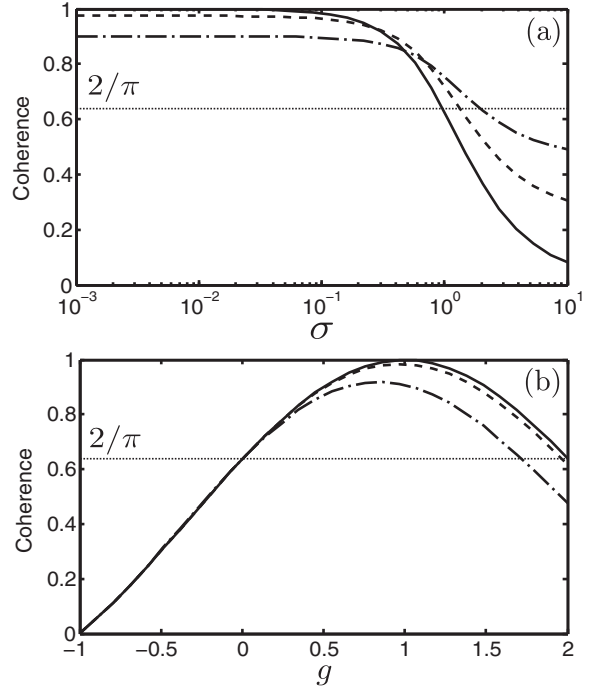


FIG. 5. (a) Coherence of the output state versus the measurement resolution  $\sigma$  for  $g = 1$  (solid line),  $g = 3/4$  (dashed line), and  $g = 1/2$  (dot-dashed line). (b) Coherence versus the feedback gain  $g$  for  $\sigma = 0$  (solid line),  $\sigma = 1/10$  (dashed line), and  $\sigma = 1/3$  (dot-dashed line). In both graphs, the dotted horizontal line is the remaining coherence after the analog RCR.

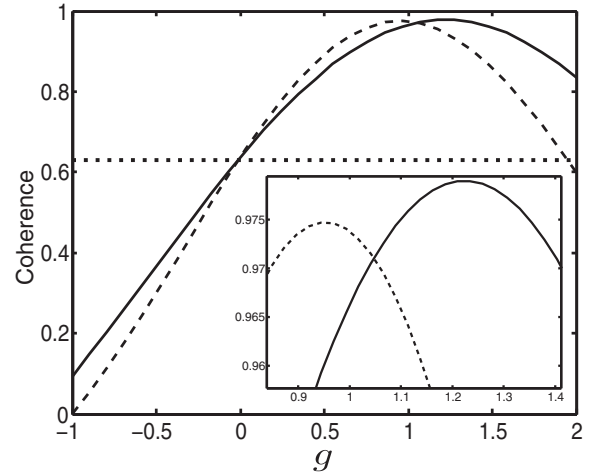


FIG. 6. Coherence of the output state versus the feedback gain for the two correction strategies with a detection resolution  $\sigma = 0.14$ . The dashed line corresponds to the case where the Bloch sphere curvature is compensated and the result is truncated for a measurement result  $|z| > 1$ . The solid line corresponds to a correction angle proportional to the measurement result  $z$ . The dotted horizontal line is the remaining coherence after the analog RCR. Inset: Zoom-in around the optimum position.

For  $g = 1.22$ , we find  $\alpha_0 \sim \pi/2.9$  and the gain can be experimentally adjusted by minimizing the angular spread after the correction applied to a CSS pointing in the direction ( $\theta = \alpha_0, \varphi = 0$ ).

The correction method can be adapted to different kinds of RCRs. In particular, the design of an optimized strategy would benefit from prior knowledge of the angular distribution produced by a given RCR.

### III. EXPERIMENTAL IMPLEMENTATION

A scheme of the experimental setup implementing the feedback control is presented in Fig. 7. A detailed description of the initial state preparation in the cavity enhanced dipole trap and of the nondestructive detection can be found in Refs. [7] and [18]. Here we focus on the features which are specific to the feedback application, mainly the implementation of the RCR and of the controller, and how the  $J_z$  observable is measured with the nondestructive probe. We also analyze the main decoherence sources: we show how the inhomogeneous light shift from the probe can be canceled and we quantify the decoherence induced by the dipole trap radiation.

#### A. Dipole trap and state preparation

The atomic sample is trapped at the center of an optical cavity in a butterfly configuration [7]. The cavity is injected with a radiation at 1550 nm to generate the optical trap. Due to the  $5^2P_{3/2} \rightarrow 4^2D_{5/2,3/2}$  transitions at 1529.3 nm, the red-detuned trapping beam induces a spatially inhomogeneous light shift on the  $D_2$  transition used for the nondestructive probing [25]. Since a precise frequency setting of the nondestructive probe detunings is required, this light shift is compensated by

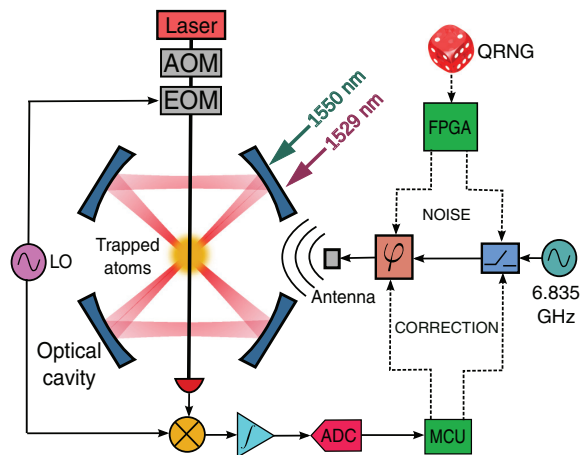


FIG. 7. (Color online) Experimental setup. The atomic sample is confined in a dipole trap at the crossing point of the two arms of an optical cavity in a butterfly configuration. A field programmable gate array (FPGA) controls the microwave field inducing the RCR. A microcontroller (MCU) computes the correction pulse from the nondestructive measurements. Quantum random number generator (QRNG); local oscillator (LO); acousto-optic modulator (AOM); electro-optic modulator (EOM); analog-to-digital converter (ADC).

injecting the cavity, using the serrodyne modulation technique [26], with a radiation at 1528.7 nm blue detuned with the  $5^2P_{3/2} \rightarrow 4^2D_{5/2,3/2}$  transitions.

After loading of the atomic ensemble in the dipole trap, the intracavity power is ramped down in 130 ms from 200 W to about 10 W per cavity arm to evaporatively cool the atomic sample down to a temperature of 10  $\mu$ K. The radius at  $1/e^2$  of the trapped cloud is 50  $\mu$ m. The atoms are initially trapped in the  $|5^2S_{1/2}, F = 1\rangle$  hyperfine state, and a bias magnetic field of 0.5 Gauss is applied in the direction parallel to the polarization of the nondestructive probe. The procedure for preparation of the sample in the  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  state begins with a microwave  $\pi$  pulse followed by a light pulse on the  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  transition to repump the residual population from the  $|F = 1\rangle$  to the  $|F = 2\rangle$  level; then about one third of the atoms are in the  $|F = 2, m_F = 0\rangle$  state. A second  $\pi$  pulse is applied to populate only the  $m_F = 0$  sublevel of the  $|F = 1\rangle$  state. The residual atoms in the  $|F = 2\rangle$  level are expelled from the trap using light tuned on the cycling transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . To increase further the purity of the sample, the whole sequence is repeated twice. We characterized the prepared state using an absorption imaging technique and we measured that the cloud contains about  $5 \times 10^5$  atoms and more than 99% of them are polarized in the  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  state.

#### B. Random rotation and controller implementation

The pseudospin is realized by the two-level system with eigenstates  $|0\rangle \equiv |5^2S_{1/2}, F = 1, m_F = 0\rangle$  and  $|1\rangle \equiv |5^2S_{1/2}, F = 2, m_F = 0\rangle$ . A resonant microwave radiation prepares an arbitrary coherent superposition of these two states. The microwave source is composed of a 7-GHz microwave oscillator mixed with a 166-MHz radio-frequency (rf) source to obtain the 6.834-GHz signal resonant with the pseudospin transition. A Rabi oscillation measurement is used to determine the  $\pi$  pulse duration:  $\tau_\pi = 151.2 \pm 0.2 \mu$ s. An rf switch placed on the rf signal produces the microwave pulses. Moreover, a phase shifter controls the phase of the microwave and thus the rotation axis of the Bloch vector. This phase shifter is designed to implement the QPSK (quadrature phase-shift keying) telecommunication protocol, allowing us to precisely set the microwave phase to the values  $0, \pi/2, \pi$ , and  $-\pi/2$  with two control bits.

The RCR is implemented using an FPGA that generates the desired probability distribution from a quantum random number generator (QRNG; Quantis, IDQuantique). The uniform distribution that generates the analog RCR and the sign of the binary RCR are provided by the QRNG output.

The detection pulse is demodulated and integrated to obtain its average value. The output of the integrator is then digitized and treated with a micro-controller unit (MCU; ADuC814 from Analog Devices) which implements the feedback controller by computing the sign and the duration of the correction microwave pulse.

#### C. Nondestructive probe

The detection uses a far-off-resonance optical probe [9, 11, 27, 28] which is phase-shifted depending on the atomic

population. Measurement of the phase shift is performed by the frequency modulation spectroscopy technique: an optical carrier is modulated to produce sidebands, and one sideband is placed close to an atomic transition so that it undergoes a phase shift proportional to the population in the probed level. The amplitude of the beat note between the sideband and the carrier, detected on a photodiode, depends on the relative phase between these two frequency components and, therefore, on the population of the probed atomic level.

In our setup (Fig. 7) an extended cavity diode laser is frequency locked to an atomic reference. The beam passes through an acousto-optic modulator (AOM) generating the probe pulses before being phase modulated with an electro-optic modulator (EOM) fed by the local oscillator (LO) at 3.4213 GHz. After passing through the atomic cloud, the probe beam is detected on a fast photodiode and demodulated with the local oscillator [7].

### 1. Measurement of the $J_z$ observable

With the two sidebands generated from the phase modulator it is possible to measure the collective pseudospin observable  $J_z$ , which is the population difference between the  $|F = 1\rangle$  and the  $|F = 2\rangle$  hyperfine levels: one sideband is placed close to the  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  transition and the other one close to the  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  transition, as depicted in Fig. 8(a). The coupling  $S_1$  ( $S_2$ ) of the first (second) sideband to the  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  ( $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ ) transition satisfies

$$S_F = \sum_{F'} \frac{\gamma \Delta_{FF'}}{\Delta_{FF'}^2 + \gamma^2 (1 + I/I_{\text{sat}})} S_{FF'}, \quad (23)$$

where  $\gamma$  is the natural line width of the transition,  $I$  the intensity in a single sideband,  $I_{\text{sat}}$  the saturation intensity of the transition, and  $S_{FF'}$  the dipolar coupling associated with the  $|F\rangle \rightarrow |F'\rangle$  transition [29]. The phase shift induced by the

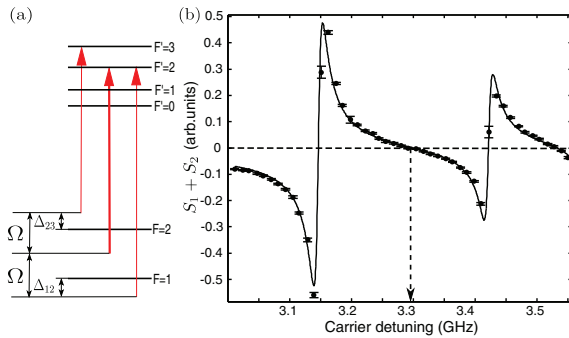


FIG. 8. (Color online) (a) Position of the frequency components of the probe relative to the hyperfine structure of the  $^{87}\text{Rb}$   $D_2$  transition. The thick line is the carrier, whereas the thin lines are the sidebands. (b) Coupling of the multifrequency probe with an ensemble of  $^{87}\text{Rb}$  atoms versus detuning of the carrier with respect to the  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  transition. The modulation frequency is set to  $\Omega = 3.4213$  GHz. Symbols with horizontal bars are experimental results and the solid line is the coupling theoretically expected where the only adjusted parameter is a scaling factor on the amplitude.

atomic sample on the probe is therefore

$$\phi_{\text{at}} \propto N_1 S_1 + N_2 S_2, \quad (24)$$

where  $N_k$  is the population in  $|F = k\rangle$ . As a consequence, if the detunings  $\Delta_{FF'}$  are adjusted so that  $S_1 = -S_2$ , then  $\phi_{\text{at}} \propto N_1 - N_2$ , and the detection measures the collective observable  $J_z$ .

To establish the detunings  $\Delta_{FF'}$ , we first set the modulation frequency to  $\Omega = 3.4213$  GHz and prepare the atoms in the coherent superposition  $|\pi/2\rangle$  so that  $N_1 = N_2$ . We then measure the demodulated signal versus the detuning of the carrier with respect to the  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  transition. The result in Fig. 8(b), which is in very good agreement with the theoretical expectation, Eq. (23), was obtained with a carrier power of  $153 \mu\text{W}$ , a power per sideband of  $7.1 \mu\text{W}$ , and a beam waist of the probe at the trap position of  $200 \mu\text{m}$ , which gives an intensity on the atomic sample of  $11.2 \text{ mW/cm}^2$ . Since a  $\pi$  transition is probed, the saturation intensity is  $I_{\text{sat}} = 2.503 \text{ mW/cm}^2$  [29]. The condition  $S_1 + S_2 = 0$  is reached when the carrier is detuned by  $3.291$  GHz from the  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  transition.

### 2. Resolution of the detection

As shown in Sec. IID, the measurement strength  $\kappa^2$  strongly influences the feedback behavior, therefore it is necessary to determine the regime in which the detection is operated. The uncertainty of the detection is obtained by performing 1000 detections of the CSS  $|\pi/2\rangle$  and the result is plotted in Fig. 9 for a probe pulse containing  $N_p = 2.8 \times 10^7$  photons per sideband. We verify that the noise is distributed according to a Gaussian distribution with a standard deviation  $\tilde{\sigma}_{\text{det}} \sim 6.8 \times 10^{-2}$  in units of the Bloch sphere radius. Since the trapped cloud contains  $N_{\text{at}} = 5 \times 10^5$  atoms after the state preparation, the noise in terms of atom number is  $\sigma_{\text{det}} = \tilde{\sigma}_{\text{det}} N_{\text{at}} = 3.4 \times 10^4$ . Moreover, the standard deviation of the atomic shot noise for the CSS  $|\pi/2\rangle$  normalized to the Bloch sphere radius is  $\tilde{\sigma}_{\text{at}} = \sqrt{N_{\text{at}}}/(2j) = 1/\sqrt{N_{\text{at}}} \sim 1.4 \times 10^{-3}$ . The measurement strength is thus  $\kappa^2 = (\tilde{\sigma}_{\text{at}}/\tilde{\sigma}_{\text{det}})^2 \sim$

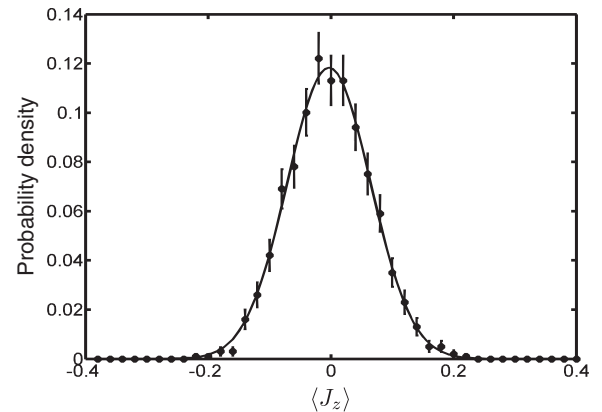


FIG. 9. Measurement of the detection resolution for  $2.8 \times 10^7$  photons per sideband in a probe pulse. Points with error bars are experimental results obtained from 1000 measurements and the solid line is a fit with a Gaussian distribution.

$4 \times 10^{-4}$ ; as a consequence,  $\kappa^2 \ll 1$  and the experiment is operated in the weak measurement limit.

### 3. Cancellation of the probe light shift

The light shift of the probe beam is often a severe limitation to the use of nondestructive methods in atom interferometry, since it induces a phase shift that rotates the CSS around the Z axis of the Bloch sphere. Moreover, a spatially inhomogeneous light shift, arising from the intensity profile of the beam, is an additional source of decoherence. The symmetry of the frequency components in the optical probe of our detection scheme allows us to cancel the light shift, which is a major advantage of the method.

Based on the facts that (i) to measure the population difference the couplings of each sideband to its probed transition are the same and (ii) each sideband is on the opposite side of the transition in comparison with the carrier position, it is possible to compensate for the light shift induced by each sideband with that induced by the carrier, as depicted in Fig. 10(a). In Fig. 10(b), we present a calculation of how much each frequency component contributes to the light shift as a function of the sideband power. We observe that the compensation of the light shift (on  $|F = 1\rangle$  and  $|F = 2\rangle$ ) for the same power ratio of about 5% between the sideband and the carrier. Moreover, since the sidebands and the carrier share the same spatial mode, the spatial compensation is perfect.

The experimental determination of the light-shift compensation is performed with a Ramsey interferometer where a nondestructive probe pulse is sent between the two  $\pi/2$  microwave pulses. If the light shift is not compensated, it induces a phase shift in the collective spin; hence it is possible to scan interference fringes by changing the power ratio between the sidebands and the carrier, as shown in Fig. 11. The observation of such Ramsey fringes provides an accurate

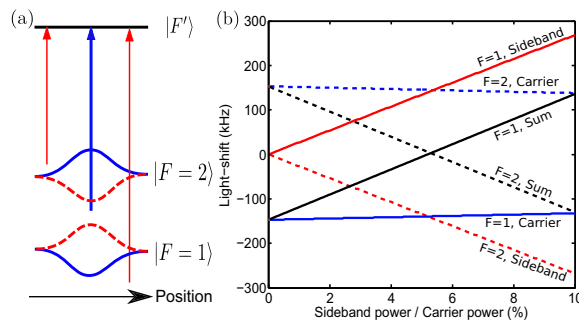


FIG. 10. (Color online) Compensation of the probe-induced light shift. (a) Light shifts induced by the carrier [dark-gray (blue) lines] and by sidebands [light-gray (red) lines]. (b) Light shifts induced by the carrier and the sidebands versus the power ratio between the sidebands and the carrier (as a percentage) for an overall power of 1 mW in the probe and a waist of 200  $\mu\text{m}$ . The modulation frequency is  $\Omega = 3.4213$  GHz and the detunings are  $\Delta_{12} = 122$  MHz and  $\Delta_{23} = 153$  MHz. Dashed lines are the light-shift induced on  $|F = 2\rangle$ ; solid lines, that on  $|F = 1\rangle$ . Blue curves are light shifts of the carrier; red curves, those of the sidebands; black curves, the resulting light shift.

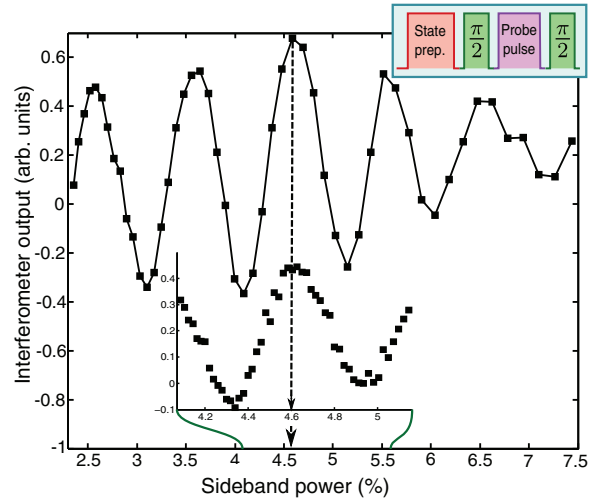


FIG. 11. (Color online) Output of the Ramsey interferometer versus the power in a single sideband as a percentage of the power in the carrier of the probe beam. A 40- $\mu\text{s}$ -long pulse is sent between the two  $\pi/2$  microwave pulses of the interferometer. Lower inset: The same measurement is performed with a 70- $\mu\text{s}$ -long pulse, providing a more precise determination of the compensation ratio. Upper inset: Sequence used for the measurement.

determination and thus a precise control of the light shift. The fringe contrast is  $< 1$  due to both the spontaneous emission induced by the probe and the inhomogeneous light shift. Moreover, the fringes are not centered around  $\langle J_z \rangle = 0$  due to the optical pumping from  $|F = 1\rangle$  to  $|F = 2\rangle$  that results from the spontaneous emission. The position of the zero phase-shift fringe, where the maximum contrast is achieved, provides the power required to cancel the light shift. We determined that, for a phase modulation at 3.4213 GHz, the power ratio fulfilling the light-shift compensation is 4.6%, in agreement with the calculation in Fig. 10(b).

### D. Dipole-trap-induced decoherence

According to [30] and [31], the coherence evolution of a trapped spin ensemble results from two main processes: the inhomogeneous frequency shift induced by the trap profile  $\Delta_T(\mathbf{r})$  and the mean-field interaction shift  $\Delta_{\text{MF}}(\mathbf{r})$ .

The dipole trap radiation at 1550 nm couples mainly to the  $D_1$  and  $D_2$  transitions, inducing a differential light shift between state  $|0\rangle$  and state  $|1\rangle$  (see inset, Fig. 12). The light-shift inhomogeneity follows the Gaussian beam profile, with an amplitude of  $\delta/2\pi \sim 54$  Hz at the trap center (see Appendix B). As explained in [30], the characteristic inhomogeneous shift is  $\Delta_T^0 = \sigma_T^2 \langle \partial_x^2 \Delta_T \rangle / 2$ , where  $\sigma_T = \sqrt{k_B T / m} / \omega$  and  $\langle \partial_x^2 \Delta_T \rangle = 4\delta / w_0^2$ , with  $\omega$  the trap frequency and  $w_0$  the trap beam waist. Thus  $\Delta_T^0 = \delta / \eta$ , where  $\eta = 2k_B T / (m\omega^2 w_0^2)$  is the ratio between the trap potential depth and the kinetic energy of an atom. Under the experimental conditions in Fig. 12,  $\eta \sim 4.6$  and  $\Delta_T^0 / 2\pi \sim 11$  Hz.

The mean-field shift satisfies  $\Delta_{\text{MF}}^0 = -\gamma \bar{n} / 4$ , where  $\bar{n}$  is the mean atomic density and  $\gamma / 2\pi = -0.48$  Hz/ $10^{12}$   $\text{cm}^{-3}$ , for a clock operated between the  $|0\rangle$  and the  $|1\rangle$  states of  $^{87}\text{Rb}$

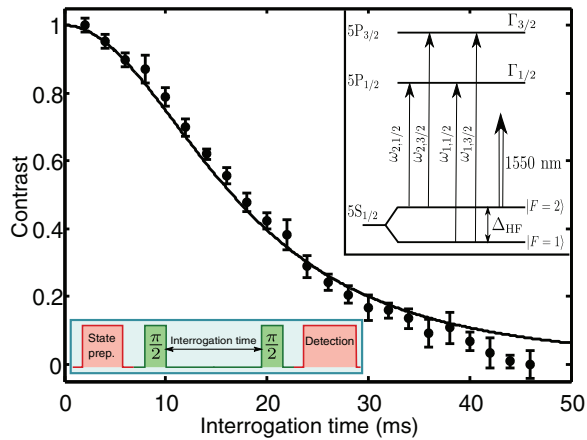


FIG. 12. (Color online) Dipole-trap-induced decoherence obtained from the contrast of the fringes at the output of a Ramsey interferometer versus the time spent by an atom in the trap. Filled circles are the experimental data obtained with an atomic sample at  $10 \mu\text{K}$  trapped with  $10 \text{ W}$  of optical power at  $1550 \text{ nm}$  in each cavity arm. The solid line is the fit described in the text. Upper inset: The main transitions responsible for the inhomogeneous light shift when coupled with a  $1550\text{-nm}$  light. Lower inset: Experimental sequence used for the measurement.

[31]. In the present situation, we have  $\bar{n} \sim 4 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ , and  $\Delta_{\text{MF}}^0/2\pi \sim 0.5 \text{ Hz}$ . Therefore  $\Delta_{\text{MF}}^0 \ll \Delta_{\text{T}}^0$ , and the decoherence is dominated by the trap shift.

The evolution of the coherence is measured from the fringe contrast at the output of a Ramsey interferometer versus the trapping time  $\tau$ , as shown in Fig. 12. Since  $\Delta_{\text{MF}}^0 \ll \Delta_{\text{T}}^0$ , we follow [30] and we fit the contrast evolution with the function  $\mathcal{C}(\tau) = [1 + (\Delta_{\text{T}}^0 \tau)^2]^{-3/2}$ . We find  $\Delta_{\text{T}}^0/2\pi = 7.3 \pm 0.3 \text{ Hz}$ , in reasonable agreement with the estimated value.

This decay time is long compared to the duration of a feedback sequence—which is mainly set by the  $\pi$  pulse duration of about  $150 \mu\text{s}$ . In the present case, this decoherence source is not a limiting factor. Nevertheless, in the perspective of realizing a trapped atomic clock it may be interesting to cancel it, which is feasible using a beam at  $780 \text{ nm}$  red detuned with the  $|F=1\rangle \rightarrow |F'\rangle$  transition and blue detuned with  $|F=2\rangle \rightarrow |F'\rangle$  [32] or using the vectorial light shift generated by an elliptical polarization [33].

#### IV. EXPERIMENTAL RESULTS

We now report the experimental results of the feedback control. These results expand on those published in [18] in two main ways: first, we explore the behavior of the method versus more parameters, namely, the atom number and the RCR angle; and second, we present the data analysis of the iterated noise-measurement-correction sequence and show that the independent determination of the different decoherence sources allows us to evaluate the coherence over a large dynamic range with a reduced number of experimental cycles.

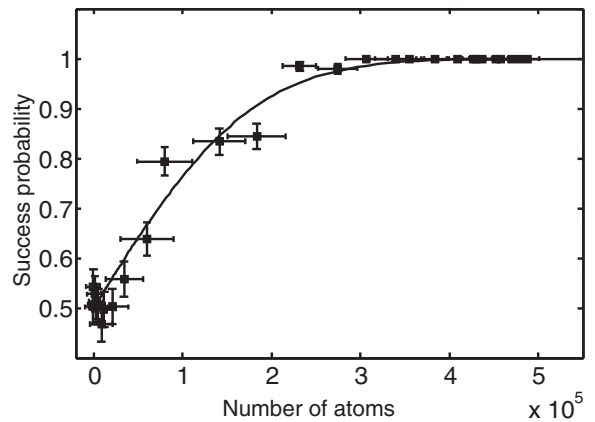


FIG. 13. Success probability versus atom number in the dipole trap. The detection uses  $1.4 \times 10^7$  photons per sideband in each pulse, the pulse duration is  $1.5 \mu\text{s}$ , and the RCR angle is  $\alpha = \pi/4$ . Filled symbols are the experimental data and the solid line is a fit to Eq. (25).

#### A. Correction of a binary RCR

##### 1. Success probability versus atom number

Here we analyze the influence of the number of probed atoms on the feedback efficiency by measuring how the success probability changes. In the weak measurement regime and for a binary RCR angle  $\alpha = \pi/4$ , the success probability [Eq. (11)] must satisfy

$$p_s = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{erf} \left( \frac{N_{\text{at}}}{4\sigma_{\text{det}}} \right) \right], \quad (25)$$

where  $\sigma_{\text{det}}$  is the detection resolution. As intuition suggests, it is easier to determine the hemisphere where the spin lies when the Bloch sphere radius is large, that is, for a high atom number compared to  $\sigma_{\text{det}}$ .

We verified this behavior by measuring the success probability versus the atom number in the dipole trap. The atom number is controlled by varying the loading interval for the MOT, while the rest of the sequence remains unchanged to maintain constant the size and the temperature of the atomic cloud. The atom number in the trap is determined using absorption imaging. The success probability is measured from the repetition of 199 nondestructive detections of a binary RCR with angle  $\alpha = \pi/4$ . To determine the detection efficiency for a given RCR, the decisions taken by the feedback controller are compared *a posteriori* with the RCR signs set by the QRNG. The result is depicted in Fig. 13. The experimental data are well fitted by Eq. (25) with  $\sigma_{\text{det}} = 4.9 \times 10^4$  atoms, in agreement with the result obtained in Sec. III C 2.

##### 2. Coherence versus photon number

A compromise has to be made between the resolution of the detection, which must be high enough to detect the RCR effect, and the coherence loss due to the detection-induced spontaneous emission. The trade-off is studied quantitatively by measuring the dependence of the remaining coherence after the correction from the photon number used in the detection pulse.



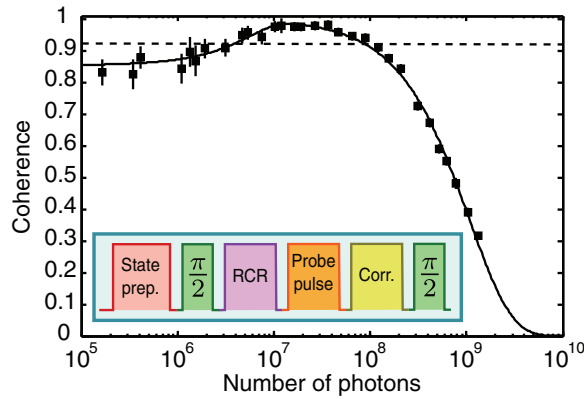


FIG. 14. (Color online) Coherence recovered after the feedback correction for an RCR angle  $\alpha = \pi/8$  versus number of photons per sideband and per detection pulse. Experimental data result from the average of 50 realizations and error bars are the  $\pm 1\sigma$  statistical uncertainty. The solid line is a fit to Eq. (26) and the dashed line is the remaining coherence after the RCR equal to  $\cos(\pi/8)$ . Inset: Scheme of the experimental sequence used to determine the coherence thanks to the final  $\pi/2$  pulse closing a Ramsey interferometer.

The output coherence is estimated by adding a  $\pi/2$  pulse after the correction pulse, which closes the Ramsey interferometer opened by the initial  $\pi/2$  pulse (see inset in Fig. 14). The value of  $J_z$  at the interferometer output, averaged over many realizations of the experimental cycle, is an estimate of the remaining coherence.

The results obtained for an RCR angle  $\alpha = \pi/8$  are presented in Fig. 14. The experimental data are fitted with the function

$$\eta_\alpha^{\text{out}} = \left[ p_s + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - p_s) \right] e^{-\gamma N_p}, \quad (26)$$

where the first factor is the coherence versus the success probability [Eq. (11)] for  $\alpha = \pi/8$  (Table I), and the exponential factor accounts for the spontaneous emission induced by  $N_p$  photons.

For a low photon number in the probe pulse, the success probability is  $p_s = 1/2$  and the remaining coherence after correction is  $\eta_{\pi/8}^{\text{out}} = (1 + 1/\sqrt{2})/2 \sim 0.85$ , in good agreement with the experimental observation. An optimal coherence of 0.985 is recovered for  $1.4 \times 10^7$  photons: this value is higher than the coherence after the RCR ( $\eta_{\pi/8} = \cos \pi/8 \sim 0.924$ ), which proves the efficiency of the feedback controller according to the coherence criterion defined in Sec. III E.

### B. Iterated feedback correction of a binary RCR

We now repeat the sequence RCR-correction to study the long-term efficiency of the feedback controller. Characterizing the coherence evolution using the previous method—adding an extra  $\pi/2$  pulse to close a Ramsey interferometer—would require a large number of experimental cycles, since the remaining coherence must be estimated after each iteration.

However, we previously verified that the coherence reduction on one iteration results from the product of two

contributions: one related to the success probability of the RCR detection and one to the spontaneous emission induced by the probe, the trap-induced phase shift being negligible in a single iteration (see Sec. III D). Therefore, we can estimate the coherence evolution from the independent determination of each process contribution. This method significantly reduces the number of experimental cycles required for the measurement. Here, we present how the data are analyzed to obtain the coherence, and we study the effect of the finite sample size on the estimation.

For each experimental realization, we record both the RCR sign and that of the correction rotation set by the feedback controller: their comparison determines whether the controller made the right decision. The results of many experimental realizations [Fig. 15(d)] are compared to those obtained in the absence of feedback [Fig. 15(a)]: during the first 20 iterations the feedback controller mostly makes the right decision, and it converges towards a success probability of  $1/2$  due to the decoherence of the sample when the number of iterations increases. It is important to note that the state can be recovered even after a wrong decision is made by the controller, therefore the feedback scheme is robust against detection and computation errors.

Since the applied RCRs and corrections are known, we can reconstruct the path followed by the pseudospin during each sequence [Figs. 15(b) and 15(e)]. This analysis performed over many experimental realizations provides an estimate of the state occupancy  $P_k(N_{it})$ , which is the probability of being in the state  $|k\rangle$  after  $N_{it}$  iterations [Figs. 15(c) and 15(f)]. We see that without feedback the system converges quickly towards equidistributed populations, whereas when feedback is applied the occupancy of the target state dominates for several tens of iterations. The feedback control damps the spin diffusion around the Bloch sphere. The state occupancy in turns allows us to estimate the density operator:  $\rho(N_{it}) = \sum_k P_k(N_{it})|k\rangle\langle k|$ . The coherence is finally calculated using Eq. (A6) and shown in Fig. 16 [(red) circles and red solid line]. Note that the spontaneous emission lowers the success probability as the number of detections increases, as shown in Fig. 15(d); this effect is thus included in the contribution of the state occupancy to the coherence.

The above evaluation of the coherence considers only the contribution resulting from the success probability. The decoherence due to the probe spontaneous emission must be added, using the decoherence rate  $\gamma$  (obtained by the analysis performed in Sec. IV A 2) and the total number of photons sent through the atomic sample. The coherence evolution, under the influence of the spontaneous emission only, is depicted in Fig. 16 (dashed blue line). Finally, the estimated coherence (Fig. 16; solid black line) is the product of the two previous contributions (state occupancy and spontaneous emission).

We must also consider the contribution of the inhomogeneous differential light shift induced by the trapping beam between  $|0\rangle$  and  $|1\rangle$  (see Sec. III D). This effect is a small correction: it reduces the coherence by about 10% since the experiment lasts 7 ms (see Fig. 12). Moreover, it influences in the same way the coherence evolutions with and without feedback, therefore it does not play a role in the understanding of the feedback efficiency.

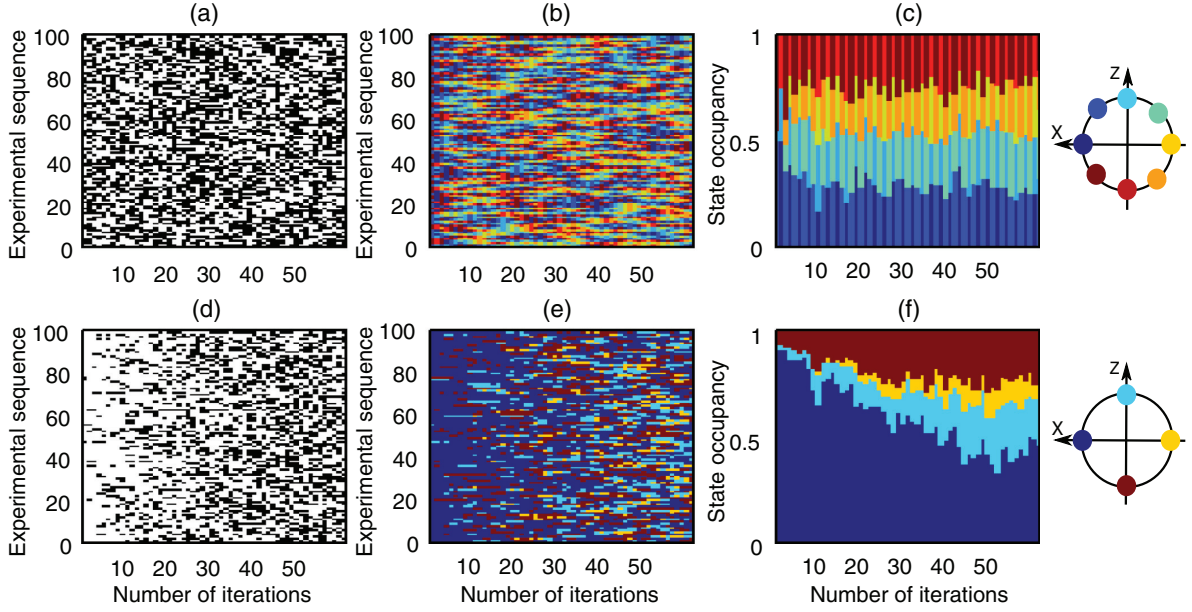


FIG. 15. (Color online) Data analysis flow for the iterated feedback correction. The RCR angle is  $\alpha = \pi/4$ , the probe contains  $1.4 \times 10^7$  photons per sideband, and each iteration lasts  $140 \mu\text{s}$ . Top: Analysis of the state evolution without feedback. (a) Sign of the binary RCR set by the random number generator (black,  $+\alpha$ ; white,  $-\alpha$ ), (b) resulting state, and (c) state occupancy. Bottom: Results with feedback correction. (d) Controller decisions (right in white, wrong in black), (e) resulting state after the correction, and (f) state occupancy. The legend at the right indicates the pointing direction of the state associated with each color.

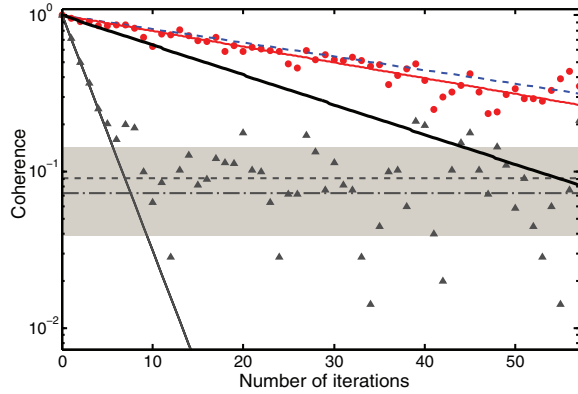


FIG. 16. (Color online) Evolution of the coherence with the number of iterations, obtained from 100 experimental measurements. The (red) circles are the coherence resulting from the state occupancy and the solid red line is an exponential fit. The dashed blue line is the coherence loss due to the spontaneous emission induced by the probe. The solid black line is the estimated coherence. The (dark-gray) triangles are the estimated coherence resulting from the state occupancy in the absence of feedback control and the solid dark-gray line is the expected coherence,  $\eta = 2^{-N_{it}/2}$ . The dashed-dotted horizontal dark-gray line is the expected limit on the coherence resolution due to the finite size of the statistical sample [Eq. (28)]. The dashed horizontal dark-gray line is the average of the experimental data for  $N_{it} > 20$  and the shaded area indicates the related standard deviation.

Figure 16 also displays the evolution of the coherence without feedback [(dark-gray) triangles] estimated from the state occupancy. We see that, while the first points follow the expected exponential decay,  $\eta = 2^{-N_{it}/2}$  (solid dark-gray line), a floor is reached for a number of iterations larger than  $\sim 10$ . This effect can be understood as a result of the finite number  $N$  of experimental realizations, which limits the dynamic range of the coherence measurement.

We now quantify this effect. The probability  $P_k$  of being in the state  $k \in [0, n-1]$  is estimated with an uncertainty whose standard deviation is

$$\delta P_k(N) = \sqrt{\frac{P_k(1-P_k)}{N}}. \quad (27)$$

As a consequence, this uncertainty in the probability translates into an uncertainty in the estimated coherence,  $\eta = \tilde{\eta}(N) + \delta\tilde{\eta}(N)$ , where  $\eta$  is the actual coherence and  $\tilde{\eta}(N)$  is the value estimated from  $N$  samples.

We consider the situation without feedback corrections, allowing us to analyze this effect on a simple and well-understood scenario. As shown in Appendix C, the variance of the estimated coherence satisfies

$$\delta\tilde{\eta}(N) = \frac{2^{1/4}n^{-3/4}\sqrt{n-1}}{\sqrt{N}}. \quad (28)$$

Note that, since  $\delta\tilde{\eta}(N) \propto N^{-1/2} \rightarrow 0$  as  $N \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{\eta}(N)$  is an estimator of  $\eta$ . Moreover, it is also interesting to observe that  $\delta\tilde{\eta} \sim n^{-1/2}$  as  $n \rightarrow \infty$ : this effect is less important when the RCR angle  $\alpha$  is smaller. This result is compared with the

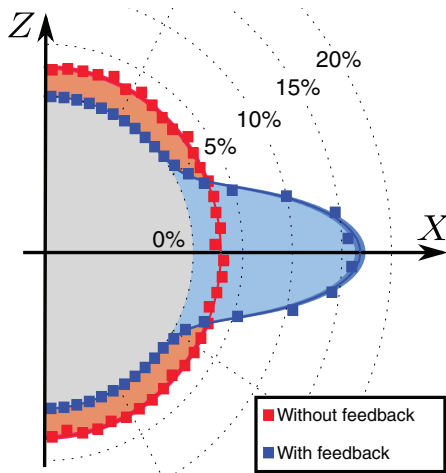


FIG. 17. (Color online) Probability distribution for the pointing direction of the state in the  $(X, Z)$  plane of the Bloch sphere, obtained from 5000 repetitions of the experimental sequence. Light-gray (red) squares show the distribution after an analog RCR uniformly distributed in  $[-\pi/2, +\pi/2]$ ; dark-gray (blue) squares, the resulting distribution after feedback correction.

experimental data in Fig. 16, where the theoretical estimation of  $\delta\tilde{\eta}$  is performed with  $n = 4$  since at each iteration only four states are populated.

### C. Correction of an analog RCR

Following Sec. II G, we experimentally demonstrate the active stabilization against an analog RCR, detailing the result stated in Ref. [18]. The sequence consists in an analog RCR uniformly distributed in  $[-\pi/2, \pi/2]$ , followed by a  $1.5\text{-}\mu\text{s}$  probe pulse containing  $2.8 \times 10^7$  photons per sideband and a correction microwave pulse. The feedback controller sets both the phase sign and the duration of the correction pulse. We adopt the control strategy where the correction angle is set to be proportional to the  $J_z$  measurement result, and the gain is optimized for a RCR angle of  $\pi/3$ . This value is adopted considering the measurement resolution  $\sigma = 14\%$  and the analysis performed in Sec. II G 4.

From the measurement of the pointing direction of the CSS after the correction versus the direction after the RCR, we determine the probability distribution of the resulting statistical mixture, shown in Fig. 17. First, we measured this distribution for an analog RCR uniformly distributed in  $[-\pi/2, +\pi/2]$  to verify that the right behavior of the FPGA program coupled to the QNRG. Second, the distribution after feedback correction was measured. We see that the distribution points along the  $X$  axis, as desired. The spin spread corresponds to a remaining coherence of 0.979. Another 0.979 factor must be considered due to the spontaneous emission from the probe, resulting in a remaining coherence of 0.958 after feedback correction.

## V. CONCLUSION

We have demonstrated, both theoretically and experimentally, that weak nondestructive measurements can be used

to control in real-time the orientation of a CSS. We have studied a benchmark scenario based on RCRs and presented its implementation with a collective atomic pseudospin. For this purpose, we developed a nondestructive probe, based on frequency modulation spectroscopy and using a single beam, able to directly probe the population difference in the clock transition of alkali-metal atoms without inducing any light shift. We showed that, for an optimal trade-off between spontaneous emission and detection resolution, the feedback control recovers the coherence of the CSS for different kinds of RCRs (binary and analog). Moreover, it can protect over time a CSS subjected to repeated RCRs.

The demonstration was performed on an ensemble of trapped alkali-metal atoms. These systems are particularly interesting since trapped ultracold-atom sensors are at the center of recent developments for long-interrogation-time embedded interferometers, such as microwave clocks [30] and gyroscopes. The present method is perfectly suited for the real-time monitoring and control of atom interferometers, paving the way towards new interferometric schemes beyond the Ramsey sequence, where interrogation and detection would be mixed. Our feedback control scheme can be used, for example, to lock the atomic state near the zero-phase-shift position, realizing sensors with an increased dynamic range and improved stability against large perturbations. In particular, the present feedback control meets the requirements to realize an atomic phase-lock loop [34], where not only the frequency but also the phase of an electromagnetic wave would be locked to an atomic reference, dramatically reducing the constraints on the local oscillator phase noise.

## ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge funding from DGA, CNES, the European Union (EU; iSENSE), EURAMET (QESOCAS), ANR (MINIATOM), and ESF Euroquam. LCFIO and SYRTE are members of the Institut Francilien de Recherche sur les Atomes Froids (IFRAF). P.B. acknowledges support from a chair of excellence of Région Aquitaine. E.C. acknowledges support from Quantel.

## APPENDIX A: DERIVATION OF THE EFFICIENCY

In this Appendix, we calculate the parameters used to quantify the feedback efficiency: coherence, von Neumann entropy, and fidelity.

### 1. Coherence

#### a. Coherence of a pure CSS

The mean Bloch vector related to a CSS  $|\theta, \varphi\rangle$  containing  $j = N_{\text{at}}/2$  atoms is the vector pointing in the  $(\theta, \varphi)$  direction:

$$\langle \mathbf{J} \rangle_{\theta, \varphi} = \begin{pmatrix} \langle J_x \rangle_{\theta, \varphi} \\ \langle J_y \rangle_{\theta, \varphi} \\ \langle J_z \rangle_{\theta, \varphi} \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A1})$$

The coherence of a CSS is thus  $\|\langle \mathbf{J} \rangle_{\theta, \varphi}\|/j = 1$ , which proves that the coherence of the initial state  $|\psi_0\rangle = |\pi/2, 0\rangle$  is unitary.



### b. Coherence of a statistical mixture of CSSs

Let  $\{|\theta_k, \varphi_k\rangle\}$  be a set of CSSs; an arbitrary statistical mixture of these states is described by a density matrix of the form  $\rho = \sum_k p_k |\theta_k, \varphi_k\rangle\langle\theta_k, \varphi_k|$ , where  $\sum_k p_k = 1$ . By the linearity of the trace, we have, for  $l = x, y, z$ ,

$$\langle J_l \rangle(\rho) = \text{Tr}(J_l \rho) \quad (\text{A2})$$

$$= \sum_k p_k \text{Tr}(J_l |\theta_k, \varphi_k\rangle\langle\theta_k, \varphi_k|) \quad (\text{A3})$$

$$= \sum_k p_k \langle J_l \rangle_{\theta_k, \varphi_k}; \quad (\text{A4})$$

therefore, the mean Bloch vector related to the density operator  $\rho$  is  $\langle \mathbf{J} \rangle(\rho) = \sum_k p_k \langle \mathbf{J} \rangle_{\theta_k, \varphi_k}$ . As a consequence, the coherence of the mixture  $\rho$ ,  $\eta(\rho) = \|\langle \mathbf{J} \rangle(\rho)\|/j$ , takes the explicit form

$$\eta(\rho) = \left[ \left( \sum_k p_k \sin \theta_k \cos \varphi_k \right)^2 + \left( \sum_k p_k \sin \theta_k \sin \varphi_k \right)^2 + \left( \sum_k p_k \cos \theta_k \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{A5})$$

Using this relation and the expressions of the density matrix  $\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$  [Eq. (4)] and  $\mathcal{C}_\alpha(\rho_0)$  [Eq. (13)], it is straightforward to obtain the values of the coherence listed in Table I.

Note that in the case  $\varphi_k = 0$ , one obtains the simple relation

$$\eta(\rho) = \left| \sum_k p_k e^{i\theta_k} \right|. \quad (\text{A6})$$

In particular, if  $\theta_k = 2\pi k/n$ , then the coherence is the modulus of the discrete Fourier transform of the probability distribution  $p_k$ .

All these results obtained for a discrete probability distribution  $p_k$  can be generalized without difficulty to a continuous distribution  $p(\theta)$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) by the replacement  $\sum_k \rightarrow \int d\theta$ .

### 2. Fidelity

The fidelity with respect to an initial state  $|\psi_0\rangle = |\theta_0, \varphi_0\rangle$  is

$$F(\rho, |\psi_0\rangle) = \langle \psi_0 | \rho | \psi_0 \rangle = \sum_k p_k |\langle \theta_0, \varphi_0 | \theta_k, \varphi_k \rangle|^2. \quad (\text{A7})$$

Expanding the CSS  $|\theta, \varphi\rangle$  in the Dicke basis  $|j, m\rangle$  provides [35]

$$|\theta, \varphi\rangle = \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}} \sin^{j+m} \frac{\theta}{2} \cos^{j-m} \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi m} |j, m\rangle. \quad (\text{A8})$$

We then obtain the overlap between two CSSs,

$$|\langle \theta, \varphi | \theta', \varphi' \rangle| = \left| \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + e^{i(\varphi - \varphi')} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} \right|^{2j}, \quad (\text{A9})$$

which can be approximated with a Gaussian distribution, for a large number of atoms ( $j \gg 1$ ),

$$|\langle \theta, \varphi | \theta', \varphi' \rangle|^2 \sim e^{-\frac{j}{2}[(\theta - \theta')^2 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta')(\varphi - \varphi')^2]}. \quad (\text{A10})$$

Finally, using Eqs. (A7) and (A10), one can evaluate the fidelity of the mixture  $\rho$ .

### 3. von Neumann entropy

From Eq. (A10), it appears that if the RCR angle is large enough so that the angles between the CSSs  $|\theta_k, \varphi_k\rangle$  in the statistical mixture are large compared to the atomic shot noise, that is, if they satisfy

$$\forall k \neq k', \quad \begin{cases} \theta_k - \theta_{k'} \gg 1/\sqrt{N_{\text{at}}} \\ \text{or} \\ \varphi_k - \varphi_{k'} \gg 1/\sqrt{N_{\text{at}}}, \end{cases} \quad (\text{A11})$$

then the states are almost orthogonal  $\langle \theta_k, \varphi_k | \theta_{k'}, \varphi_{k'} \rangle \sim \delta_{k,k'}$ , and the von Neumann entropy of  $\rho$  satisfies

$$S(\rho) \simeq - \sum_k p_k \log_2 p_k; \quad (\text{A12})$$

in other words, since here the RCR angles are larger than the atomic shot noise, only the pointing direction of the CSS matters and the von Neumann entropy turns out to be the Shannon entropy.

Once again, combining this relation and the expressions of the density matrix,  $\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$  [Eq. (4)] and  $\mathcal{C}_\alpha(\rho_0)$  [Eq. (13)], provides the values of the von Neumann entropy in Table I.

### APPENDIX B: TRAP SHIFT OF THE CLOCK TRANSITION

We estimate the differential light shift induced by the trap radiation between the two hyperfine sublevels of the  $5^2S_{1/2}$  state. The trapping radiation couples mainly the fundamental levels to the excited states  $5^2P_{1/2}$  and  $5^2P_{3/2}$ . The transitions and the notations used in the calculation are introduced in Fig. 12.

The light shift induced in the hyperfine state  $|5^2S_{1/2}, F\rangle$  is [36]

$$\frac{\Delta_F(\mathbf{r})}{I(\mathbf{r})} = \frac{\pi c^2}{2} \left[ \frac{S_{1/2}^{1/2} \Gamma_{1/2}}{\omega_{F, \frac{1}{2}}^3 (\omega - \omega_{F, \frac{1}{2}})} + \frac{S_{1/2}^{3/2} \Gamma_{3/2}}{\omega_{F, \frac{3}{2}}^3 (\omega - \omega_{F, \frac{3}{2}})} \right], \quad (\text{B1})$$

where  $\omega$  is the frequency of the trap radiation,  $S_{J'}^J = (2J' + 1)/(2J + 1)$ , and  $I(\mathbf{r})$  is the intensity profile of the trap beam.

The hyperfine splitting between the  $F = 1$  and the  $F = 2$  levels is  $\Delta_{\text{HF}} = \omega_{2, 1/2} - \omega_{1, 1/2} = \omega_{2, 3/2} - \omega_{1, 3/2}$ , and since the following hypotheses are satisfied for  $J' = 1/2, 3/2$ :  $\Delta_{\text{HF}} \ll \omega_{1, J'}, \omega_{2, J'}, \omega - \omega_{1, J'}$ , Eq. (B1) can be expanded to the first order in  $\Delta_{\text{HF}}$ . The differential shift,  $\delta(\mathbf{r}) = \Delta_2(\mathbf{r}) - \Delta_1(\mathbf{r})$ , can thus be written as

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{\pi c^2}{2} \Delta_{\text{HF}} \left[ \frac{\Gamma_{1/2}}{\omega_{1/2}^3 \delta_{1/2}} \left( \frac{1}{\delta_{1/2}} - \frac{3}{\omega_{1/2}} \right) + \frac{2\Gamma_{3/2}}{\omega_{3/2}^3 \delta_{3/2}} \left( \frac{1}{\delta_{3/2}} - \frac{3}{\omega_{3/2}} \right) \right] I(\mathbf{r}), \quad (\text{B2})$$

where  $\omega_{J'} \equiv \omega_{1, J'}$  and  $\delta_{J'} \equiv \omega - \omega_{J'}$ .

The wavelengths of the relevant transitions are  $\{\lambda_{1/2}, \lambda_{3/2}\} = \{795, 780\}$  nm, and the related line widths are  $\{\Gamma_{1/2}, \Gamma_{3/2}\} = 2\pi \times \{5.746, 6.065\}$  MHz; moreover, the hyperfine splitting is  $\Delta_{\text{HF}} = 2\pi \times 6.834$  GHz [29]. Therefore, the differential shift at the trap center for an optical power of 10 W per cavity arm and a waist of 100  $\mu\text{m}$  at 1550 nm is  $\delta \sim 54$  Hz.

### APPENDIX C: DERIVATION OF THE ESTIMATED COHERENCE UNCERTAINTY

Assuming independent processes, the variance of the estimated coherence is

$$\delta\tilde{\eta}^2(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\partial\eta}{\partial P_k} \right)^2 \delta P_k^2(N). \quad (\text{C1})$$

Using Eq. (A6) relating  $\eta$  to  $P_k$ , we obtain

$$\eta \frac{\partial\eta}{\partial P_k} = \left( \sum_{i=0}^{n-1} P_i \cos\theta_i \right) \cos\theta_k + \left( \sum_{i=0}^{n-1} P_i \sin\theta_i \right) \sin\theta_k, \quad (\text{C2})$$

where  $\theta_k = 2\pi k/n$  and  $n = 2\pi/\alpha$ , for an RCR angle  $\alpha$ .

We consider the coherence evolution without feedback correction: in this case the coherence drops rapidly with the number  $N_{\text{it}}$  of iterations, since  $\eta = (\cos\alpha)^{N_{\text{it}}} = 2^{-N_{\text{it}}/2}$  for  $\alpha = \pi/4$ . Thus for  $N_{\text{it}}$  sufficiently large, the estimated coherence is limited by the uncertainty in the estimation of the probabilities:  $\delta\tilde{\eta}(N) \gg \tilde{\eta}(N)$ . Moreover, since no feedback is applied, the state converges rapidly towards a uniformly distributed mixture of the states  $|k\rangle$ :  $P_k = 1/n$ . Under these conditions, injecting Eqs. (C2) and (27) into Eq. (C1) provides Eq. (28).

- 
- [1] J. Kitching, S. Knappe, and E. A. Donley, *IEEE Sensors J.* **11**, 1749 (2011).
- [2] J. Lodewyck, P. G. Westergaard, and P. Lemonde, *Phys. Rev. A* **79**, 061401 (2009).
- [3] B. J. Sawyer, A. B. Deb, T. McKellar, and N. Kjærgaard, *Phys. Rev. A* **86**, 065401 (2012).
- [4] M. Gajdacz, P. L. Pedersen, T. Mørch, A. J. Hiliard, J. Arlt, and J. F. Sherson, *Rev. Sci. Instrum.* **84**, 083105 (2013).
- [5] P. J. Windpassinger, D. Oblack, P. G. Petrov, M. Kubasik, M. Saffman, C. L. Garrido Alzar, J. Appel, J. H. Müller, N. Kjærgaard, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 103601 (2008).
- [6] S. Chaudhury, G. A. Smith, K. Schulz, and P. S. Jessen, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 043001 (2006).
- [7] S. Bernon, T. Vanderbruggen, R. Kohlhaas, A. Bertoldi, A. Landragin, and P. Bouyer, *New J. Phys.* **13**, 065021 (2011).
- [8] G. A. Smith, A. Silberfarb, I. H. Deutsch, and P. S. Jessen, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 180403 (2006).
- [9] J. Appel, P. J. Windpassinger, D. Oblak, U. B. Hoff, N. Kjærgaard, and E. S. Polzik, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **106**, 10960 (2009).
- [10] T. Takano, M. Fuyama, R. Namiki, and Y. Takahashi, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 033601 (2009).
- [11] M. H. Schleier-Smith, I. D. Leroux, and V. Vuletić, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 073604 (2010).
- [12] Z. Chen, J. G. Bohnet, S. R. Sankar, J. Dai, and J. K. Thompson, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 133601 (2011).
- [13] R. J. Sewell, M. Koschorreck, M. Napolitano, B. Dubost, N. Behbood, and M. W. Mitchell, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 253605 (2012).
- [14] R. Inoue, S.-I.-R. Tanaka, R. Namiki, T. Sagawa, and Y. Takahashi, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 163602 (2013).
- [15] R. J. Sewell, M. Napolitano, N. Behbood, G. Colangelo, and M. W. Mitchell, *Nat. Photon.* **7**, 517 (2013).
- [16] A. Louchet-Chauvet, J. Appel, J. J. Renema, D. Oblack, N. Kjærgaard, and E. S. Polzik, *New J. Phys.* **12**, 065032 (2010).
- [17] I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith, and V. Vuletić, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 250801 (2010).
- [18] T. Vanderbruggen, R. Kohlhaas, A. Bertoldi, S. Bernon, A. Aspect, A. Landragin, and P. Bouyer, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 210503 (2013).
- [19] A. M. Brańczyk, P. E. M. F. Mendonça, A. Gilchrist, A. C. Doherty, and S. D. Bartlett, *Phys. Rev. A* **75**, 012329 (2007).
- [20] G. G. Gillett, R. B. Dalton, B. P. Lanyon, M. P. Almeida, M. Barbieri, G. J. Pryde, J. L. O'Brien, K. J. Resch, S. D. Bartlett, and A. G. White, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 080503 (2010).
- [21] S. Lloyd and J.-J. E. Slotine, *Phys. Rev. A* **62**, 012307 (2000).
- [22] P. J. Windpassinger, D. Oblack, U. B. Hoff, J. Appel, N. Kjærgaard, and E. S. Polzik, *New J. Phys.* **10**, 053032 (2008).
- [23] T. Vanderbruggen, S. Bernon, A. Bertoldi, A. Landragin, and P. Bouyer, *Phys. Rev. A* **83**, 013821 (2011).
- [24] M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (Dover, Mineola, NY, 1995).
- [25] A. Bertoldi, S. Bernon, T. Vanderbruggen, A. Landragin, and P. Bouyer, *Opt. Lett.* **35**, 3769 (2010).
- [26] R. Kohlhaas, T. Vanderbruggen, S. Bernon, A. Bertoldi, A. Landragin, and P. Bouyer, *Opt. Lett.* **37**, 1005 (2012).
- [27] M. Koschorreck, M. Napolitano, B. Dubost, and M. W. Mitchell, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 093602 (2010).
- [28] M. Kohonen, P. G. Petrov, R. A. Nyman, and E. A. Hinds, *New J. Phys.* **13**, 085006 (2011).
- [29] D. A. Steck, Rubidium 87 d line data (2001); <http://george.ph.utexas.edu/~dsteck/alkalidata/rubidium87numbers.pdf>.
- [30] C. Deutsch, F. Ramirez-Martinez, C. Lacroûte, F. Reinhard, T. Schneider, J. N. Fuchs, F. Piéchon, F. Lalöe, J. Reichel, and P. Rosenbusch, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 020401 (2010).
- [31] G. Kleine Büning, J. Will, W. Ertmer, E. Rasel, J. Arlt, C. Klempt, F. Ramirez-Martinez, F. Piéchon, and P. Rosenbusch, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 240801 (2011).
- [32] G. Tackmann, B. Pelle, A. Hilico, Q. Beaufils, and F. Pereira dos Santos, *Phys. Rev. A* **84**, 063422 (2011).
- [33] Y. O. Dudin, R. Zhao, T. A. B. Kennedy, and A. Kuzmich, *Phys. Rev. A* **81**, 041805 (2010).
- [34] N. Shiga and M. Takeuchi, *New J. Phys.* **14**, 023034 (2012).
- [35] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore, and H. Thomas, *Phys. Rev. A* **6**, 2211 (1972).
- [36] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 95 (2000).

---

Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”  
Course 188 “Atom Interferometry”, edited by G. M. Tino and M. A. Kasevich  
(IOS, Amsterdam; SIF, Bologna) 2014  
DOI 10.3254/978-1-61499-xxx-xxx-xxx

## Mobile and remote inertial sensing with atom interferometers

B. BARRETT, P.-A. GOMINET, E. CANTIN, L. ANTONI-MICOLLIER, A. BERTOLDI,  
B. BATTELIER and P. BOUYER

*Laboratoire Photonique Numérique et Nanosciences, Institut d’Optique d’Aquitaine  
and Université de Bordeaux, rue François Mitterand, 33400 Talence, France*

J. LAUTIER and A. LANDRAGIN

*LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS and UPMC - 61 avenue de l’Observatoire  
F-75014 Paris, France*

**Summary.** — The past three decades have shown dramatic progress in the ability to manipulate and coherently control the motion of atoms. This exquisite control offers the prospect of a new generation of inertial sensors with unprecedented sensitivity and accuracy, which will be important for both fundamental and applied science. In this article, we review some of our recent results regarding the application of atom interferometry to inertial measurements using compact mobile sensors. This includes some of the first interferometer measurements with cold  $^{39}\text{K}$  atoms, which is a major step toward achieving a transportable, dual-species interferometer with rubidium and potassium for equivalence principle tests. We also discuss future applications of this technology, such as remote sensing of geophysical effects, gravitational wave detection, and precise tests of the weak equivalence principle in space.

### 1. – Introduction

In 1923, Louis de Broglie generalized the wave-particle duality of photons to material particles [1] with his famous expression,  $\lambda_{\text{dB}} = h/p$ , relating the momentum of the particle,  $p$ , to its wavelength. Shortly afterwards, the first matter-wave diffraction experiments

were carried out with electrons [2], and later with a beam of He atoms [3]. Although these experiments were instrumental to the field of matter-wave interference, they also revealed two major challenges. First, due to the relatively high temperature of most accessible particles, typical de Broglie wavelengths were much less than a nanometer (thousands of times smaller than that of visible light)—making the wave-like behavior of particles difficult to observe. For a long time, only low-mass particles such as neutrons or electrons could be coaxed to behave like waves since their small mass resulted in a relatively large de Broglie wavelength. Second, there is no natural mirror or beam splitter for matter-waves because solid matter usually scatters or absorbs atoms. Initially, diffraction from the surface of solids, and later from micro-fabricated gratings, was used as the first type of atom optic. After the development of the laser in the 1960s, it became possible to use the electric dipole interaction with near-resonance light to diffract atoms from “light gratings”.

In parallel, the coherent manipulation of internal atomic states with resonant radio frequency (rf) waves was demonstrated in experiments by Rabi [4]. Later, pioneering work by Ramsey [5] led to long-lived coherent superpositions of quantum states. The techniques developed by Ramsey would later be used to develop the first atomic clocks, which were the first matter-wave sensors to find industrial applications.

From the late 1970’s until the mid-90’s, a particular focus was placed on laser-cooling and trapping neutral atoms [6-10] which eventually led to two nobel prizes in physics [11, 12]. Heavy neutral atoms such as sodium and cesium were slowed to velocities of a few millimeters per second (corresponding to temperatures of a few hundred nano-Kelvin), thus making it possible to directly observe the wave-like nature of matter.

The concept of an atom interferometer was initially patented in 1973 by Altschuler and Franz [13]. By the late 1980s, multiple proposals had emerged regarding the experimental realization of different types of atom interferometers [14-17]. The first demonstration of cold-atom-based interferometers using stimulated Raman transitions was carried out by Chu and co-workers [18-20]. Since then, the field of atom interferometry has evolved quickly. Although the state-labeled, Raman-transition-based interferometer remains the most developed and commonly used type, a significant effort has been directed toward the exploration and development of new types of interferometers [21-37]<sup>(1)</sup>.

Atom interferometry is nowadays one of the most promising candidates for ultra-precise and ultra-accurate measurements of inertial forces and fundamental constants [39-43]. The realization of a Bose-Einstein condensation (BEC) from a dilute gas of trapped atoms [9,10] has produced the matter-wave analog of a laser in optics [44-47]. Similar to the revolution brought about by lasers in optical interferometry, BEC-based interferometry is expected to bring the field to an unprecedented level of accuracy [48].

Lastly, there remained a very promising application for the future: atomic inertial sensors. Such devices are inherently sensitive to, for example, the acceleration due to gravity, or the acceleration or rotation undergone by the interferometer when placed in a

---

<sup>(1)</sup> For a more complete history and review of atom interferometry experiments see, for example, ref. [38].

non-inertial reference frame. Apart from industrial applications, which include navigation and mineral prospecting, their ability to detect minuscule changes in inertial fields can be utilized for testing fundamental physics, such as the detection of gravitational waves or geophysical effects. Inertial sensors based on ultra-cold atoms are only expected to reach their full potential in space-based applications, where a micro-gravity environment will allow the interrogation time, and therefore the sensitivity, to increase by orders of magnitude compared to ground-based sensors.

The remainder of the article is organized as follows. In sect. 2, we briefly review the basic principles of an interferometer based on matter-waves and give some theoretical background for calculating interferometer phase shifts. Section 3 provides a detailed description of the interferometer sensitivity function, and the important role it plays in measuring phase shifts in the presence of noise. In sect. 4, we discuss various types of lab-based inertial sensors. This is followed by sect. 5 with a description of mobile sensors and recent experimental results. Section 6 reviews some applications of remote atomic sensors to geophysics and gravitational wave detection. Finally, in sect. 7, we outline the advantages of space-based atom interferometry experiments, and describe two proposals for precise tests of the weak equivalence principle. We conclude the article in sect. 8.

## 2. – Theoretical background

**2.1. Principles of a matter-wave interferometer.** – Generally, atom interferometry is performed by applying a sequence of coherent beam-splitting processes separated by an interrogation time  $T$ , to an ensemble of particles. This is followed by detection of the particles in each of the two output channels, as is illustrated in fig. 1(a). The interpretation in terms of matter-waves follows from the analogy with optical interferometry. The incoming matter-wave is separated into two different paths by the first beam splitter, and the accumulation of phase along the two paths leads to interference at the last beam splitter. This produces complementary probability amplitudes in the two channels, where the detection probability oscillates sinusoidally as a function of the total phase difference,  $\Delta\phi$ . In general, the sensitivity of the interferometer is proportional to the enclosed area between the two interfering pathways.

A well-known configuration of an atom interferometer is designed after the optical Mach-Zehnder interferometer: two splitting processes with a mirror placed at the center to close the two paths (see fig. 1(b)). Usually, a matter-wave diffraction process replaces the mirrors and the beam splitters and, in contrast with optical diffraction, these processes can be separated either in space or in time. During the interferometer sequence, the atom resides in two different internal states while following the spatially separated paths. In comparison, interferometers using diffraction gratings (which can be comprised of either light or matter) utilize atoms that have been separated spatially, but reside in the same internal state. This is the case, for example, with single-state Talbot-Lau interferometers [24, 33, 21, 34], which have also been demonstrated with heavy molecules [27].

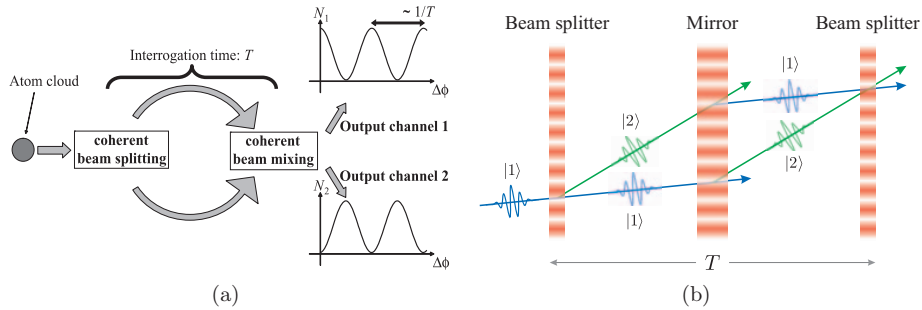


Fig. 1. – (Colour online) (a) Principle of an atom interferometer. An initial atomic wavepacket is split into two parts by a coherent beam-splitting process. The wavepackets then propagate freely along the two different paths for an interrogation time  $T$ , during which the two wavepackets can accumulate different phases. After this time, the wavepackets are coherently mixed and interference causes the number of atoms at each output port,  $N_1$  and  $N_2$ , to oscillate sinusoidally with respect to this phase difference,  $\Delta\phi$ . (b) The basic Mach-Zehnder configuration of an atom interferometer. An atom initially in a quantum state  $|1\rangle$  is coherently split into a superposition of states  $|1\rangle$  and  $|2\rangle$ . A mirror is placed at the center to close the two atomic trajectories. Interference between the two paths occurs at the second beam splitter.

Light-pulse interferometers work on the principle that, when an atom absorbs or emits a photon, momentum must be conserved between the atom and the light field. Consequently, when an atom absorbs (emits) a photon of momentum  $\hbar\mathbf{k}$ , it will receive a momentum impulse of  $\hbar\mathbf{k}$  ( $-\hbar\mathbf{k}$ ). When a resonant traveling wave is used to excite the atom, the internal state of the atom becomes correlated with its momentum: an atom in its ground state  $|1\rangle$  with momentum  $\mathbf{p}$  (labeled  $|1, \mathbf{p}\rangle$ ) is coupled to an excited state  $|2\rangle$  of momentum  $\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}$  (labeled  $|2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$ ).

The most developed type of light-pulse atom interferometer is that which utilizes two-photon velocity-selective Raman transitions to manipulate the atom between separate long-lived ground states. With the Raman method, two laser beams of frequency  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are tuned to be nearly resonant with an optical transition. Their frequency difference  $\omega_1 - \omega_2$  is chosen to be resonant with a microwave transition between two hyperfine ground states. Under appropriate conditions, the atomic population oscillates between these two states as a function of the interaction time with the lasers,  $\tau$ . The ‘‘Rabi’’ frequency associated with this oscillation,  $\Omega_{\text{eff}}$ , is proportional to the product of the two single-photon Rabi frequencies of each Raman beam, and inversely proportional to the optical detuning from a common hyperfine excited state. Thus, pulses of the Raman lasers can be tuned to coherently split (with a pulse area  $\Omega_{\text{eff}}\tau = \pi/2$ ) or reflect (with a pulse area  $\Omega_{\text{eff}}\tau = \pi$ ) the atomic wavepackets.

When the Raman beams are counter-propagating (*i.e.* when the wave vector  $\mathbf{k}_2 \approx -\mathbf{k}_1$ ), a momentum exchange of approximately twice the single photon momentum accompanies these transitions:  $\hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \approx 2\hbar\mathbf{k}_1$ . This results in a strong sensitiv-

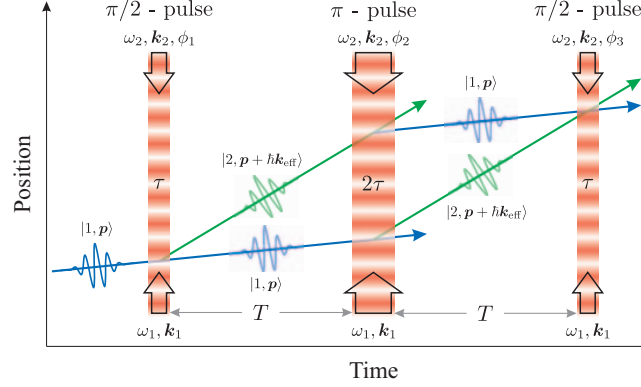


Fig. 2. – (Colour online) Three-pulse atom interferometer based on stimulated Raman transitions. Here,  $\mathbf{k}_{\text{eff}} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  is the effective wave vector for the two-photon transition, and the pulse duration  $\tau$  is defined by  $\Omega_{\text{eff}}\tau = \pi/2$ .

ity to the Doppler frequency associated with the motion of the atom<sup>(2)</sup>.

Henceforth, we shall consider only the most commonly used interferometer configuration, which is the so-called “three-pulse” or “Mach-Zehnder” configuration formed from a  $\pi/2$ - $\pi$ - $\pi/2$  pulse sequence to coherently divide, reflect and finally recombine atomic wavepackets<sup>(3)</sup>. This pulse sequence is illustrated in fig. 2. Here, the first  $\pi/2$ -pulse excites an atom initially in the  $|1, \mathbf{p}\rangle$  state into a coherent superposition of ground states  $|1, \mathbf{p}\rangle$  and  $|2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}\rangle$ , where  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  is the difference between the two Raman wave vectors. In a time  $T$ , the two parts of the wavepacket drift apart by a distance  $\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}T/M$ . Each partial wavepacket is redirected by a  $\pi$ -pulse which induces the transitions  $|1, \mathbf{p}\rangle \rightarrow |2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$  and  $|2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_{\text{eff}}\rangle \rightarrow |1, \mathbf{p}\rangle$ . After another interval  $T$  the two partial wavepackets overlap again. A final  $\pi/2$ -pulse causes the two wavepackets to recombine and interfere. The interference is detected, for example, by measuring the total number of atoms in the internal state  $|2\rangle$  at any point after the Raman pulse sequence. This allows one to easily access the interferometer transition probability, which oscillates sinusoidally with the interferometer phase  $\Phi$

$$(1) \quad P(\Phi) = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = P_0 - \frac{C}{2} \cos(\Phi).$$

<sup>(2)</sup> In contrast, when the beams are aligned to be co-propagating (*i.e.*  $\mathbf{k}_2 \approx \mathbf{k}_1$ ), these transitions have a negligible effect on the atomic momentum and the transition frequency is essentially insensitive to the Doppler shift of moving atoms.

<sup>(3)</sup> Other possible configurations include that of the Ramsey-Bordé interferometer:  $\pi/2$ - $\pi/2$ - $\pi/2$ - $\pi/2$ , or those utilizing Bloch-oscillation pulses or large momentum transfer pulses to increase the interferometer sensitivity.



Here,  $N_1$  ( $N_2$ ) represents the number of atoms detected in the state  $|1\rangle$  ( $|2\rangle$ ), the offset of the probability is usually  $P_0 \sim 0.5$ , and  $C$  is the contrast of the fringe pattern. In comparison, the detection scheme for single-state interferometers [21, 22, 34, 24, 33, 35, 49, 37] requires a near-resonant traveling wave laser to coherently backscatter off of the atomic density grating formed at  $t = 2T$ . Here, the interferometer phase can be detected by heterodyning the backscattered beam with an optical local oscillator.

Another positive feature of this type of interferometer is that the linewidth of stimulated Raman transitions can be adjusted to tune the spread of transverse velocities addressed by the pulse. This relaxes the “velocity collimation” requirements and can increase the number of atoms that contribute to the interferometer signal. In contrast, Bragg scattering from standing waves is efficient only for narrow velocity spreads, where the width is much less than the photon recoil velocity.

**2.2. Phase shifts from the classical action.** – In this section, we give a brief review of the Feynman path integral approach to computing the interferometer phase shift from the classical action. Then, in sect. 2.3, we apply this formalism to the specific example of the three-pulse interferometer in the presence of a constant acceleration. Both of these sections are largely based on ref. [50].

According to the principle of least action, the actual path,  $z(t)$ , taken by a classical particle is the one for which the action  $S$  is extremal. The action is defined as

$$(2) \quad S = \int_{t_a}^{t_b} dt \mathcal{L}[z(t), \dot{z}(t)],$$

where  $\mathcal{L}(z, \dot{z})$  is the Lagrangian of the system. The action corresponding to this path is called the classical action,  $S_{\text{cl}}$ , and it can be shown to depend on only the initial and final points  $\{z_a t_a, z_b t_b\}$  in spacetime:  $S_{\text{cl}}(z_b t_b, z_a t_a)$ .

Given the initial state of a quantum system at time  $t_a$ , the state at a later time  $t_b$  is determined through the evolution operator  $U$

$$(3) \quad |\Psi(t_b)\rangle = U(t_b, t_a) |\Psi(t_a)\rangle.$$

The projection of this state on the position basis gives the wave function at time  $t_b$

$$(4) \quad \Psi(z_b, t_b) = \int dz_a K(z_b t_b, z_a t_a) \Psi(z_a, t_a),$$

where  $K$  is called the quantum propagator, and is defined as [50]

$$(5) \quad K(z_b t_b, z_a t_a) \equiv \langle z_b | U(t_b, t_a) | z_a \rangle.$$

The quantity  $|K(z_b t_b, z_a t_a)|^2$  gives the probability of finding the particle at the spacetime position  $z_b t_b$ , provided it started from the point  $z_a t_a$ . As demonstrated by Feynman [51],

the quantum propagator can be expressed equivalently as a sum over all possible paths,  $\mathcal{P}$ , connecting point  $z_a t_a$  to  $z_b t_b$ .

$$(6) \quad K(z_b t_b, z_a t_a) \propto \sum_{\mathcal{P}} e^{iS_{\mathcal{P}}/\hbar} = \int_a^b dz(t) e^{iS_{\mathcal{P}}/\hbar}.$$

Since the action is extremal for the classical path, the phase factors  $e^{iS_{\mathcal{P}}/\hbar}$  associated with neighboring paths tend to interfere constructively. For other paths,  $S_{\mathcal{P}}$  generally varies rapidly compared to  $S_{\text{cl}}$ , thus, they interfere destructively and do not contribute to  $K(z_b t_b, z_a t_a)$ .

In the general case of a system that can be described by a Lagrangian that is, at most, quadratic in  $z(t)$  and  $\dot{z}(t)$ , the quantum propagator can be expressed in the simple form [50]

$$(7) \quad K(z_b t_b, z_a t_a) = F(t_b, t_a) e^{iS_{\text{cl}}(z_b t_b, z_a t_a)/\hbar},$$

where  $F(t_b, t_a)$  is a function that depends on only the initial and final times. Inserting this result into eq. (4) for the final wave function gives

$$(8) \quad \Psi(z_b, t_b) = F(t_b, t_a) \int dz_a e^{iS_{\text{cl}}(z_b t_b, z_a t_a)/\hbar} \Psi(z_a, t_a).$$

In the integral over  $z_a$ , the neighborhood of the positions where the phase of  $e^{iS_{\text{cl}}(z_b t_b, z_a t_a)/\hbar}$  cancels the phase of  $\phi(z_a, t_a)$  will be the most dominant. Equation (8) has a simple interpretation: the phase of the final wave function,  $\varphi_b$ , is determined by the classical action,  $S_{\text{cl}}(z_b t_b, z_a t_a)$ , and the phase of the wave function at the initial point,  $\varphi_a$ . In the case of an atom interferometer, the phase shift introduced between two arms is then simply the difference in classical action between the two closed paths.

**2.3. Application to the three-pulse interferometer.** – In this section, we will apply the formalism of the previous section to compute the phase shift of the three-pulse Mach-Zehnder atom interferometer (shown in fig. 2) in the presence of the acceleration due to gravity,  $g$ . This type of interferometer, which has the Raman lasers oriented along the vertical direction, was first demonstrated by Kasevich and Chu [18, 19] and later developed for precise measurements of  $g$  in an atomic fountain [52, 39].

To evaluate the phase of the wave function after the interferometer pulse sequence (which governs the probability of detecting the atoms in either of the two ground states), we first describe the physics of two-photon Raman transitions. Figure 3 illustrates the energy levels of the atom as a function of momentum,  $p$ . Two counter-propagating plane waves, with frequencies  $\omega_1$  and  $\omega_2$ , wave vectors  $\mathbf{k}_1$  and  $\mathbf{k}_2$ , and phase difference  $\phi$ , induce a transition between ground states  $|1\rangle$  and  $|2\rangle$  via off-resonant coupling from a common excited state  $|e\rangle$ . In the process, the atom scatters one photon from each beam for a total momentum transfer of  $\hbar\mathbf{k}_{\text{eff}} = \hbar(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ . The two-photon detuning  $\delta$ , which

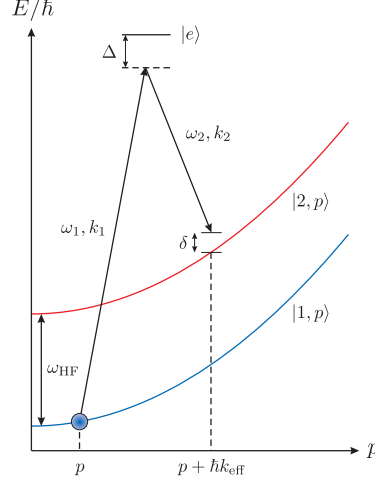


Fig. 3. – (Colour online) Raman transition energy levels. Atoms initially in the state  $|1, p\rangle$  are transferred to  $|2, p + \hbar k_{\text{eff}}\rangle$  via a two-photon transition from counter-propagating Raman beams. The hyperfine ground states are separated by  $\hbar\omega_{\text{HF}}$  in energy, the one-photon detuning of the Raman beams from the common excited state  $|e\rangle$  is  $\Delta$ , and  $\delta$  is the two-photon detuning given by eq. (9).

characterizes the resonance condition for the Raman transition, is given by

$$(9) \quad \delta = \omega_{\text{eff}} - \omega_{\text{HF}} - \frac{\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{p}}{M} - \frac{\hbar k_{\text{eff}}^2}{2M},$$

where  $\omega_{\text{eff}} \equiv \omega_1 - \omega_2$  is the frequency difference between Raman lasers,  $\omega_{\text{HF}}$  is the hyperfine splitting between the two ground states, and  $M$  is the mass of the atom<sup>(4)</sup>. The last two terms in eq. (9) are the Doppler frequency and two-photon recoil frequency, respectively.

Under certain conditions, the Schrödinger equation associated with the interaction with the Raman beams can be written as

$$(10) \quad \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} |\chi_{\text{eff}}| & \chi_{\text{eff}} e^{i(\delta t + \phi)} \\ \chi_{\text{eff}}^* e^{-i(\delta t + \phi)} & |\chi_{\text{eff}}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t_0) \\ c_2(t_0) \end{pmatrix}.$$

Here, the wave function is defined as a time-dependent superposition between the two states

$$(11) \quad |\Psi(t)\rangle \equiv c_1(t) e^{-i(p^2/2M\hbar)t} |1, p\rangle + c_2(t) e^{-i[(p + \hbar k_{\text{eff}})^2/2M\hbar + \omega_{\text{HF}}]t} |2, p + \hbar k_{\text{eff}}\rangle,$$

<sup>(4)</sup> We have ignored shifts in the atomic energy levels due to the AC Stark effect in eq. (9).

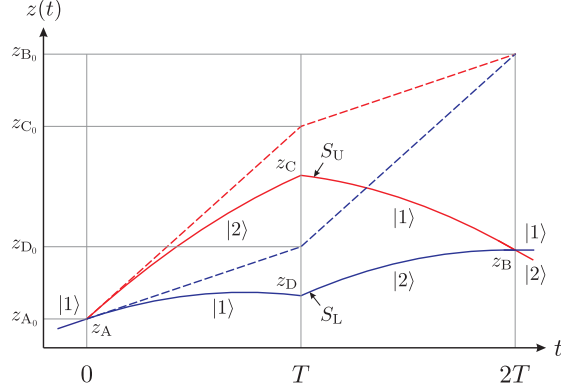


Fig. 4. – (Colour online) Center-of-mass trajectories taken by the atoms in a Mach-Zehnder interferometer with gravity (dashed lines) and without gravity (solid lines).

and  $\chi_{\text{eff}} \equiv \Omega_{\text{eff}}/2 = \Omega_1^* \Omega_2 / \Delta$  is half of the effective Rabi frequency. To arrive at eq. (10), we have made a number of assumptions. First, the two Raman frequencies,  $\omega_1$  and  $\omega_2$ , are shifted far from the excited state such that their one-photon detuning is much larger than the transition linewidth:  $|\Delta| \gg \Gamma$ . This allows us to ignore spontaneous emission effects and to eliminate the evolution of the excited state. Second, we assume the light intensity is constant, and that the two Rabi frequencies,  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ , associated with each single-photon transition are equal:  $\Omega_1 = \Omega_2 \equiv \Omega$ . Third, we assume that  $|\delta| \ll |\Omega|$  and ignore terms of order  $\delta/\Omega$ .

The solution to eq. (10) can be shown to be [53]

$$(12) \quad \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = U_{\chi, \phi}(t, t_0) \begin{pmatrix} c_1(t_0) \\ c_2(t_0) \end{pmatrix},$$

where  $U_{\chi, \phi}(t, t_0)$  is the evolution matrix from time  $t_0 \rightarrow t$  given by

$$(13) \quad U_{\chi, \phi}(t, t_0) = e^{i\chi_{\text{eff}}(t-t_0)} \begin{pmatrix} \cos \chi_{\text{eff}}(t-t_0) & i e^{i(\delta t_0 + \phi)} \sin \chi_{\text{eff}}(t-t_0) \\ i e^{-i(\delta t_0 + \phi)} \sin \chi_{\text{eff}}(t-t_0) & \cos \chi_{\text{eff}}(t-t_0) \end{pmatrix}.$$

This expression describes the time dependence of the atomic state amplitudes during a Raman pulse with phase difference  $\phi$  and effective Rabi frequency  $\Omega_{\text{eff}} = 2\chi_{\text{eff}}$ .

The total phase shift of the interferometer is equal to the difference in phase accumulated between the upper and lower pathways shown in fig. 4. It can be divided into three terms:

$$(14) \quad \Phi_{\text{total}} = \Phi_{\text{propagation}} + \Phi_{\text{light}} + \Phi_{\text{separation}},$$

the phase shift from the free propagation of the atom,  $\Phi_{\text{propagation}}$ , the phase shift from the atom-laser interaction during the Raman transitions,  $\Phi_{\text{light}}$ , and the phase shift originating from a difference in initial position of the interfering wavepackets,  $\Phi_{\text{separation}}$ . This last term is zero in this case, because the two wavepackets are initially overlapped. However, it is non-zero when considering higher-order potentials [39], such as that produced by a gravity gradient (which varies as  $z^2$ ).

First, we examine the phase due to the propagation of the atoms along the two arms of the interferometer. To do this, we use the relation

$$(15) \quad \Phi_{\text{propagation}} = (S_L - S_U)/\hbar,$$

where  $S_U$  and  $S_L$  are the classical actions evaluated along the upper and lower atomic trajectories, respectively, as shown in fig. 4. For an atom of mass  $M$  in free-fall with Earth's gravitational field, the classical action takes the form [50]

$$(16) \quad S_{\text{cl}}(z_b t_b, z_a t_a) = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ \frac{1}{2} M v(t)^2 - M g z(t) \right] \\ = \frac{M}{2} \frac{(z_b - z_a)^2}{(t_b - t_a)} - \frac{M g}{2} (z_b + z_a)(t_b - t_a) - \frac{M g^2}{24} (t_b - t_a)^3.$$

Computing the difference in action between the two classical paths we find

$$(17) \quad S_L - S_U = \frac{M}{T} (z_D - z_C)(z_C + z_D - z_A - z_B - gT^2).$$

However, from the equations of motion, it is straightforward to show that the vertices along the parabolic trajectories are related to the corresponding points along the straight-line paths in the absence of gravity (see fig. 4):

$$z_A = z_{A_0}, \quad z_C = z_{C_0} - \frac{1}{2} g T^2, \quad z_D = z_{D_0} - \frac{1}{2} g T^2, \quad z_B = z_{B_0} - 2gT^2.$$

Evaluating the last term in eq. (17), we find

$$(18) \quad z_C + z_D - z_A - z_B - gT^2 = z_{C_0} + z_{D_0} - z_{A_0} - z_{B_0} = 0,$$

since the straight-line trajectories enclose a parallelogram. Hence, the phase shift due to the propagation of the wave function vanishes:  $\Phi_{\text{propagation}} = 0$ . The interferometer phase is then completely determined by the contribution from the interaction with the Raman beams,  $\Phi_{\text{light}}$ , which we now discuss<sup>(5)</sup>.

---

<sup>(5)</sup> There is zero contribution to  $\Phi_{\text{total}}$  from the evolution of the internal atomic energies because the atom spends the same amount of time in each state.

TABLE I. – Phase contributions to the wave function for different Raman transitions.

Internal State	Momentum	Phase shift
1 → 2	$p \rightarrow p + \hbar k_{\text{eff}}$	$+ [k_{\text{eff}} z(t) - \omega_{\text{eff}} t - \phi]$
2 → 1	$p + \hbar k_{\text{eff}} \rightarrow p$	$- [k_{\text{eff}} z(t) - \omega_{\text{eff}} t - \phi]$
1 → 1	$p \rightarrow p$	0
2 → 2	$p + \hbar k_{\text{eff}} \rightarrow p + \hbar k_{\text{eff}}$	0

Similar to  $\Phi_{\text{propagation}}$ , the laser phase can be written as the difference between the phase accumulated along the upper and lower pathways

$$(19) \quad \Phi_{\text{light}} = \varphi_{\text{L}}^{\text{light}} - \varphi_{\text{U}}^{\text{light}}.$$

Table I summarizes the laser phase contributions to the wave function that result from stimulated, two-photon Raman transitions [39]. As a result of the  $\pi/2$ - $\pi$ - $\pi/2$  sequence, along the upper path the atomic state changes from  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle \rightarrow |1\rangle \rightarrow |2\rangle$ , giving

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{U}}^{\text{light}} &= [k_{\text{eff}}(z_{\text{A}_0}) - \omega_{\text{eff}}(0) - \phi_1] - \left[ k_{\text{eff}} \left( z_{\text{C}_0} - \frac{1}{2}gT^2 \right) - \omega_{\text{eff}}(T) - \phi_2 \right] \\ &\quad + [k_{\text{eff}}(z_{\text{B}_0} - 2gT^2) - \omega_{\text{eff}}(2T) - \phi_3] \\ &= k_{\text{eff}} \left( z_{\text{A}_0} + z_{\text{B}_0} - z_{\text{C}_0} - \frac{3}{2}gT^2 \right) - \omega_{\text{eff}}T - (\phi_1 - \phi_2 + \phi_3). \end{aligned}$$

Here,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  and  $\phi_3$  are the Raman phases during the first, second and third pulses, respectively. Similarly, along the lower path we have  $|1\rangle \rightarrow |1\rangle \rightarrow |2\rangle \rightarrow |2\rangle$ , thus the laser phase is

$$\varphi_{\text{L}}^{\text{light}} = \left[ k_{\text{eff}} \left( z_{\text{D}_0} - \frac{1}{2}gT^2 \right) - \omega_{\text{eff}}T - \phi_2 \right].$$

Finally, using relation (18), we find the interferometer phase to be

$$(20) \quad \Phi_{\text{total}} = \Phi_{\text{light}} = k_{\text{eff}}gT^2 + (\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3).$$

Since the phase scales as  $gT^2$ , this relation portrays the intrinsically high sensitivity of the interferometer to gravitational acceleration. One can generalize this result to show that the interferometer is sensitive to a variety of inertial effects arising from different forces.

In summary, inertial forces manifest themselves in the interferometer by changing the relative phase of the matter-waves with respect to the phase of the driving light field. The physical manifestation of the phase shift is a change in the probability of finding the atoms in, for example, the state  $|1\rangle$ , after the interferometer pulse sequence.

A complete relativistic treatment of wavepacket phase shifts in the case of an acceleration, an acceleration with a spatial gradient, or a rotation can be realized with the ABCD $\xi$  formalism [54-56], which is a generalization of ABCD matrices for light optics.

### 3. – The sensitivity function

In this section, we provide a detailed analysis of the sensitivity function,  $g(t)$ , which characterizes how the atomic transition probability, and therefore the measured interferometer phase, behaves in the presence of fluctuations in the phase difference  $\phi$  between Raman beams. Developed previously for use with atomic clocks [57], it is an extremely useful tool that can be applied, for example, to evaluate the response of the interferometer to laser phase noise [58], or to correct the interferometer phase for unwanted vibrations in the Raman beam optics [59].

Suppose there is a small, instantaneous phase jump of  $\delta\phi$  at time  $t$  during the Raman pulse sequence. This changes the transition probability  $P(\Phi)$  by a corresponding amount  $\delta P$ . The sensitivity function is a unitless quantity defined as

$$(21) \quad g(t) = 2 \lim_{\delta\phi \rightarrow 0} \frac{\delta P(\delta\phi, t)}{\delta\phi}.$$

The utility of this function can be demonstrated by considering the case of an arbitrary, time-dependent phase noise,  $\phi(t)$ , in the Raman lasers. The change in interferometer phase,  $\delta\Phi$ , induced by this noise is

$$(22) \quad \delta\Phi = \int g(t) d\phi(t) = \int g(t) \frac{d\phi(t)}{dt} dt.$$

Thus, for a sinusoidally modulated phase given by  $\phi(t) = A_\phi \cos(\omega_\phi t + \theta)$ , we find  $\delta\Phi = A_\phi \omega_\phi \text{Im}[G(\omega_\phi)] \cos\theta$ , where  $G(\omega)$  is the Fourier transform of the sensitivity function

$$(23) \quad G(\omega) = \int e^{-i\omega t} g(t) dt.$$

If we then average over a random distribution of the modulation phase  $\theta$ , the root-mean-squared (rms) value of the interferometer phase can be shown to be  $\delta\Phi_{\text{rms}} = |A_\phi \omega_\phi G(\omega_\phi)|$ . From this relation, we can deduce the weight function that transforms sinusoidal laser phase noise into interferometer phase noise (the so-called transfer function)

$$(24) \quad H(\omega) = \omega G(\omega).$$

Using the transfer function, we can tackle the more general case of broad-spectral phase noise (with power spectral density given by  $S_\phi(\omega)$ ), and compute the rms standard

deviation of the interferometric phase noise,  $\sigma_{\Phi}^{\text{rms}}$ , using the following relation:

$$(25) \quad (\sigma_{\Phi}^{\text{rms}})^2 = \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{\phi}(\omega) d\omega.$$

At this point, we need to know the exact form of the sensitivity function,  $g(t)$ , to determine the response of a given atom interferometer. For this purpose, we will use the three-pulse Mach-Zehnder configuration as an example. More specifically, we consider a pulse sequence  $\tau_R$ - $T$ - $2\tau_R$ - $T$ - $\tau_R$ , where  $\tau_R$  is the duration of the beam-splitting pulse (with a pulse area  $\Omega_{\text{eff}}\tau_R = \pi/2$ ),  $T$  is a period of free evolution,  $2\tau_R$  is the duration of the reflection pulse, and so on. This pulse sequence results in the well-known transition probability

$$(26) \quad P(\Phi) = \frac{1}{2}(1 - \cos \Phi),$$

where  $\Phi = \phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3$  is the total phase of the interferometer<sup>(6)</sup>, and  $\phi_j$  is the Raman phase difference at the time of the  $j$ -th pulse (taken at the center of the atomic wavepacket). Usually, the interferometer is operated at  $\Phi = \pi/2$ , where the transition probability is 1/2 and the sensitivity to phase fluctuations is maximized.

It is straightforward to compute  $g(t)$  if the phase jump  $\delta\phi$  occurs between Raman pulses. For instance, if the phase jump occurs between the first and second pulses, we use eq. (26) with  $\phi_1 = \phi$ ,  $\phi_2 = \phi + \delta\phi$ , and  $\phi_3 = \phi + \delta\phi + \pi/2$  to obtain  $P(\delta\phi) = (1 - \cos(\pi/2 - \delta\phi))/2$ . For small  $\delta\phi$ , it follows that

$$(27) \quad \delta P = \frac{\partial P}{\partial(\delta\phi)} \delta\phi = -\frac{1}{2} \sin(\pi/2 - \delta\phi) \delta\phi,$$

and from eq. (21) we find  $g(t) = -1$ . Similarly, it can be shown that  $g(t) = +1$  if the phase jump occurs between the second and third pulses.

In general, however,  $g(t)$  depends on the evolution of the atomic states resulting from the interaction with the Raman beams. The quantum mechanical nature of the atom plays a crucial role on the sensitivity function, particularly when a phase jump occurs *during* any of the laser pulses. To determine how  $g(t)$  behaves during these times, we must evaluate the time-dependent state amplitudes,  $c_1(t)$  and  $c_2(t)$ , of the atomic wave function (see eq. (11)). To do this, we solve the Schrödinger equation under the same conditions mentioned in sect. 2.3, and use the evolution operator,  $U_{\chi, \phi}(t, t_0)$ , given by eq. (13). This operator describes the evolution of the atomic state amplitudes from time  $t_0$  to  $t$  during i) a Raman pulse with phase  $\phi$  if  $\chi_{\text{eff}} > 0$ , or ii) during a period of free evolution if  $\chi_{\text{eff}} = 0$ . A product of these matrices in the appropriate order simulates the  $\pi/2 - \pi - \pi/2$  Raman pulse sequence, and can be used to compute the final state

---

<sup>(6)</sup> We have assumed that the Raman beams are oriented horizontally such that the interferometer is insensitive to gravity.



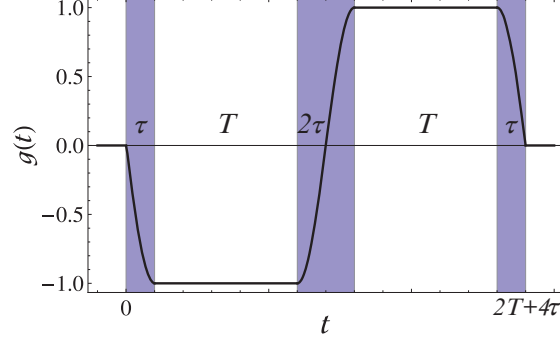


Fig. 5. – (Colour online) Plot of the sensitivity function,  $g(t)$ , for the three-pulse interferometer given by eq. (29). The pulse duration,  $\tau$ , satisfies  $\Omega_{\text{eff}}\tau = \pi/2$ .

population at the output of the interferometer. Choosing the initial wave function as  $|\Psi(0)\rangle = |1, p\rangle$  such that  $c_1(0) = 1$  and  $c_2(0) = 0$ , the transition probability is given by  $P = |c_2(t_f)|^2$ . Here,  $t_f = 2T + 4\tau_R$  and  $c_2(t_f)$  is calculated from

$$(28) \quad \begin{pmatrix} c_1(t_f) \\ c_2(t_f) \end{pmatrix} = U_{\chi, \phi_3}(2T + 4\tau_R, 2T + 3\tau_R)U_{0, \phi_2}(2T + 3\tau_R, T + 3\tau_R) \\ \times U_{\chi, \phi_2}(T + 3\tau_R, T + \tau_R)U_{0, \phi_1}(T + \tau_R, \tau_R)U_{\chi, \phi_1}(\tau_R, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Equation (26) can also be validated using this expression.

To simulate a phase jump during a Raman pulse, we replace the matrix associated with the  $j$ -th pulse,  $U_{\chi, \phi_j}(T_j + \tau_j, T_j)$ , with the product of two matrices:  $U_{\chi, \phi_j + \delta\phi}(T_j + \tau_j, T_j + t)U_{\chi, \phi_j}(T_j + t, T_j)$ . Here, the first matrix on the right evolves the wave function from time  $T_j$  to  $T_j + t$  with a Raman phase  $\phi_j$ . At this time there is a phase jump, and the second matrix carries the wave function from  $T_j + t$  to  $T_j + \tau_j$  with a phase  $\phi_j + \delta\phi$ . The times  $T_j$  and  $\tau_j$  represent the onset time and duration of the  $j$ -th pulse, respectively. Carrying out this procedure, the resulting sensitivity function can be shown to be

$$(29) \quad g(t) = \begin{cases} -\sin(\Omega_{\text{eff}}t) & 0 < t \leq \tau_R, \\ -1 & \tau_R < t \leq T + \tau_R, \\ -\sin(\Omega_{\text{eff}}(t - T)) & T + \tau_R < t \leq T + 3\tau_R, \\ 1 & T + 3\tau_R < t \leq 2T + 3\tau_R, \\ -\sin(\Omega_{\text{eff}}(t - 2T)) & 2T + 3\tau_R < t \leq 2T + 4\tau_R, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This function is illustrated in fig. 5.

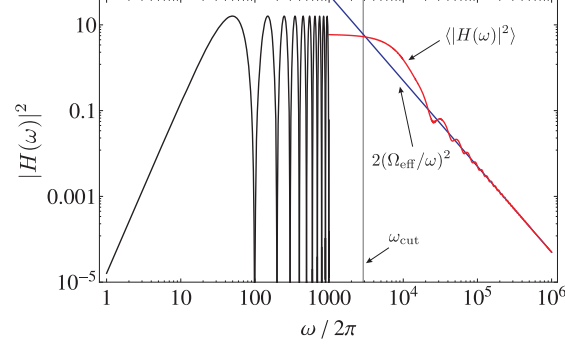


Fig. 6. – (Colour online) Plot of the phase noise weight function,  $|H(\omega)|^2$ , for the three-pulse interferometer with  $T = 10$  ms,  $\tau_R = 50 \mu\text{s}$  and  $\Omega_{\text{eff}} = \pi/2\tau_R = 2\pi \times 5$  kHz. Here, the black curve indicates  $|H(\omega)|^2$ , which has been terminated at 1 kHz. The red curve shows the average of  $|H(\omega)|^2$  over one period of oscillation,  $(T + \tau_R)^{-1}$ . In blue is the scale factor for the weight function at large frequencies,  $2(\Omega_{\text{eff}}/\omega)^2$ . The gray vertical line shows the effective cut-off frequency of  $|H(\omega)|^2$  at  $\omega_{\text{cut}} = \Omega_{\text{eff}}/\sqrt{3} \sim 2\pi \times 2.9$  kHz.

**3.1. Interferometer response to laser phase noise.** – It is interesting to understand how this interferometer responds to phase noise at a given frequency. Recall that the standard deviation of interferometer phase noise,  $\sigma_{\Phi}^{\text{rms}}$ , is composed of a sum over the laser phase noise harmonics,  $S_{\phi}(\omega)$ , weighted by  $|H(\omega)|^2$  (see eq. (25)). Thus, to investigate the interferometer response to phase noise, we first compute the transfer function,  $H(\omega)$ , using eqs. (23), (24) and (29)

$$(30) \quad H(\omega) = \frac{2i\omega\Omega_{\text{eff}}}{\omega^2 - \Omega_{\text{eff}}^2} \left[ \sin(\omega(T + 2\tau_R)) + 2\frac{\Omega_{\text{eff}}}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega(T + 2\tau_R)}{2}\right) \right].$$

An example of the weight function,  $|H(\omega)|^2$ , is displayed in fig. 6, which has two important features. First, for frequencies much less than the Rabi frequency ( $\omega \ll \Omega_{\text{eff}}$ ), the transfer function can be approximated by

$$(31) \quad H(\omega) \approx -4i \sin^2\left(\frac{\omega(T + \tau_R)}{2}\right),$$

which originates from the second term in eq. (30). In this regime, the weight function oscillates periodically, with zeroes at integer multiples of the fundamental harmonic:  $f_0 = (T + \tau_R)^{-1}$ . Thus, the interferometer is relatively insensitive to phase noise at frequencies much less than  $f_0$ , since the weight function scales as  $|H(\omega)|^2 \sim \omega^4(T + \tau_R)^4 \ll 1$ . Second, for frequencies  $\omega \gg \Omega_{\text{eff}}$ , the transfer function is dominated by the first term in eq. (30):

$$(32) \quad H(\omega) \approx 2i \frac{\Omega_{\text{eff}}}{\omega} \sin(\omega(T + 2\tau_R)).$$

This expression indicates that there is a natural low-pass filtering of the higher harmonics due to the finite duration Raman pulses. As a result, the sensitivity of the interferometer to high-frequency phase noise scales as  $(\Omega_{\text{eff}}/\omega)^2$ , with an effective cut-off frequency at  $\omega_{\text{cut}} = \Omega_{\text{eff}}/\sqrt{3}$ . These features have been confirmed experimentally in ref. [58].

In order to correctly evaluate the sensitivity of the interferometer to phase noise, it is necessary to take into account the fact that interferometer measurements are pulsed cyclically at a rate  $f_c = 1/T_c$ . A natural tool to characterize the sensitivity is the Allan variance of the atom interferometric phase fluctuations:

$$(33) \quad \sigma_{\Phi}^2(\tau_{\text{avg}}) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\langle \delta\Phi_{k+1} \rangle - \langle \delta\Phi_k \rangle)^2 \right],$$

where  $\langle \delta\Phi_k \rangle$  is the mean value of  $\delta\Phi$  over the measurement interval  $[t_k, t_{k+1} = t_k + \tau_{\text{avg}}]$  of duration  $\tau_{\text{avg}}$ , which is an integer multiple of the cycle time:  $\tau_{\text{avg}} = mT_c$ . For large enough averaging times  $\tau_{\text{avg}}$ , where the fluctuations between successive averages are not correlated, the Allan variance can be shown to be

$$(34) \quad \sigma_{\Phi}^2(\tau_{\text{avg}}) = \frac{1}{\tau_{\text{avg}}} \sum_{n=1}^{\infty} |H(2\pi n f_c)|^2 S_{\phi}(2\pi n f_c).$$

This expression indicates that the sensitivity of the interferometer is limited by an aliasing phenomenon similar to the Dick effect for atomic clocks [57]. Only the phase noise at harmonics of the cycling frequency  $f_c$  contributes to the Allan variance, and they are weighted by the square of the transfer function at these frequencies.

**3.2. Sensitivity to mirror vibrations.** – The sensitivity function can also be used to investigate the response of the interferometer to motion of the retro-reflection mirror that acts as the inertial reference frame for absolute measurements of inertial effects. In this case, the phase noise can be expressed as  $\phi(t) = \mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{r}(t)$ , where  $\mathbf{r}(t)$  represents the time-dependent position of the mirror. Using eq. (22), the change in the interferometer phase due to mirror motion is

$$(35) \quad \delta\Phi_v = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{v}(t) dt,$$

where  $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$  is the velocity of the mirror. Using the chain rule, eq. (35) can be converted to a more useful form

$$(36) \quad \delta\Phi_a = -\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \left[ f(t) \mathbf{v}(t) \right]_{-\infty}^{\infty} + \mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathbf{a}(t) dt.$$

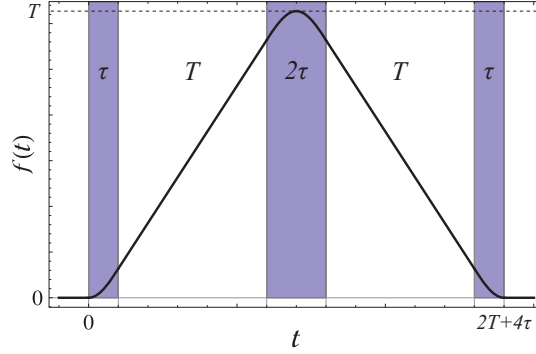


Fig. 7. – (Colour online) Plot of the response function,  $f(t)$ , given by eq. (38). Again, the pulse duration satisfies  $\Omega_{\text{eff}}\tau = \pi/2$ .

Here,  $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t)$  is the acceleration noise of the mirror and  $f(t)$  is called the response function of the interferometer, which is defined as

$$(37) \quad f(t) = - \int_0^t g(t') dt'.$$

In what follows, we will illustrate how  $f(t)$  characterizes the sensitivity of the three-pulse interferometer to mirror vibrations. Integrating the sensitivity function given by eq. (29), we find

$$(38) \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega_{\text{eff}}} (1 - \cos \Omega_{\text{eff}} t) & 0 < t \leq \tau_R, \\ t + \frac{1}{\Omega_{\text{eff}}} - \tau_R & \tau_R < t \leq T + \tau_R, \\ T + \frac{1}{\Omega_{\text{eff}}} (1 - \cos \Omega_{\text{eff}} (t - T)) & T + \tau_R < t \leq T + 3\tau_R, \\ 2T + 3\tau_R + \frac{1}{\Omega_{\text{eff}}} - t & T + 3\tau_R < t \leq 2T + 3\tau_R, \\ \frac{1}{\Omega_{\text{eff}}} (1 - \cos \Omega_{\text{eff}} (t - 2T)) & 2T + 3\tau_R < t \leq 2T + 4\tau_R, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The response function for the three-pulse interferometer is a triangle-shaped function with units of time, as shown in fig. 7. Since it is equal to zero outside of the interval  $t \in [0, 2T + 4\tau_R]$ , the first term in eq. (36) vanishes and the phase variation of the interferometer due to the acceleration noise of the mirror is

$$(39) \quad \delta\Phi_a = \mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathbf{a}(t) dt.$$

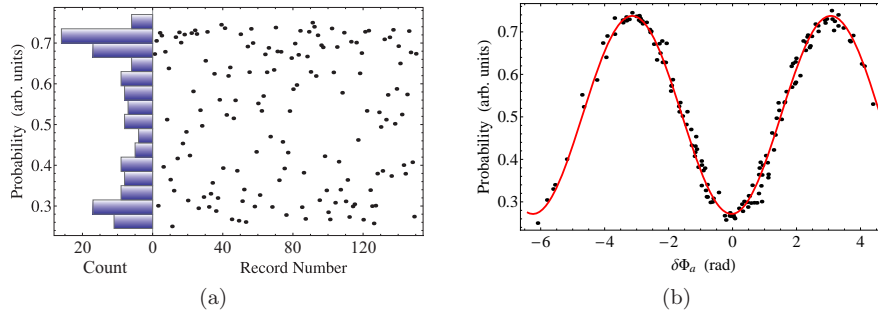


Fig. 8. – (Colour online) (a) Transition probability of a three-pulse  $^{87}\text{Rb}$  interferometer with total interrogation time  $2T = 6$  ms, measured in the presence of strong Raman mirror vibrations (standard deviation of acceleration noise:  $\sigma_a \sim 1.4 \times 10^{-3}g$ ). The data are plotted chronologically. On the left is a histogram of the measured probabilities, which resembles the probability distribution of  $\cos^{-1}(\phi)$ . The double-peaked structure indicates that the interferometer is operating normally, but the Raman phase is randomized by the mirror vibrations. (b) Same data as shown in (a) plotted as a function of the acceleration-induced phase,  $\delta\Phi_a$ , given by eq. (39). The time-dependent acceleration,  $a(t)$ , was recorded for each shot of the experiment with a mechanical accelerometer (Colibrys SF3600A) attached to the Raman mirror. These data clearly show that the interferometer fringes can be reconstructed with a high degree of accuracy even in noisy environments.

At its heart, this expression is a generalization of the phase shift  $\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{a}T^2$  produced by atoms moving in a non-inertial reference frame with a constant acceleration<sup>(7)</sup>. Here,  $f(t)$  acts as a weight function that determines how strongly the mirror acceleration at time  $t$  contributes to the interferometer phase shift. The phase contributions are smallest near  $t = 0$  and  $2T + 4\tau_R$ , where the wavepacket separation is a minimum. Similarly, the weight is strongest near the mid-point,  $t = T + 2\tau_R$ , where the separation between the interfering states is a maximum.

Equation (39) suggests that, if the acceleration of the retro-reflecting mirror is measured during the interferometer pulse sequence, one can correct for changes in the mirror position that induce parasitic phase shifts on the atoms. This principle is illustrated in fig. 8, where the initially randomized signal from a Mach-Zehnder interferometer in a noisy environment is recovered using the aforementioned analysis. Here, the fringes are effectively “scanned” by vibrations on the retro-reflecting Raman mirror. This has also been demonstrated with a mobile matter-wave interferometer in a micro-gravity environment during parabolic flights onboard a zero- $g$  aircraft [59]. We give a detailed description of this experiment and recent results in sect. 5.3.

<sup>(7)</sup> Equation (39) can be evaluated with a constant acceleration to obtain:  $\delta\Phi_a = \mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{a}(T + 2\tau_R)(T + 4\tau_R/\pi)$ , which reduces to the well-known result  $\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{a}T^2$  in the limit of short Raman pulses:  $\tau_R \ll T$ .



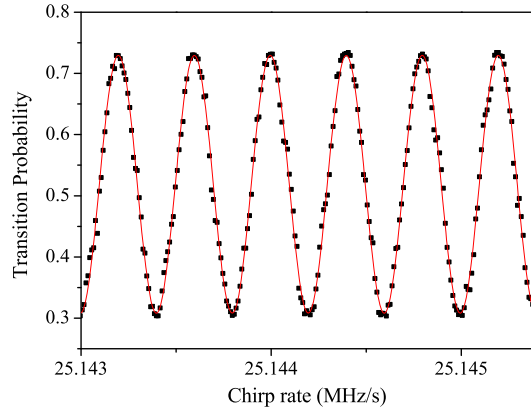


Fig. 10. – (Colour online) Transition probability as a function of the Raman beam chirp rate,  $\alpha$ , for  $T = 50$  ms. Taken from ref. [68].

Similarly, if the Raman beams are oriented along the vertical, the gravitationally induced chirp on the Raman frequency is  $-\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{g}$ . In this case, the usual procedure to measure  $g$  is to chirp the frequency of the Raman beams during the pulse sequence, such that the Doppler frequency of the atoms is canceled. The chirp rate,  $\alpha$ , that compensates the Doppler shift is determined by the relation [68]

$$(41) \quad \Phi_g = (\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{g} - \alpha)T^2 = 0.$$

This expression can be obtained from eq. (40) by setting the phases,  $\phi_j = \phi(t_j) = -\alpha t_j^2/2$ , where  $t_j$  is the onset time of each pulse. The transition probability of the interferometer then oscillates sinusoidally as a function of  $\Phi_g$ , as shown in fig. 10. The central fringe, for which  $\alpha = k_{\text{eff}}g$ , stays fixed for all values of  $T$ .

It should be noted that the phase shifts given by eqs. (40) and (41) do not depend on the initial atomic velocity or on the mass of the particle—a direct consequence of the equivalence principle. The first precision cold-atom gravimeter [39] achieved a resolution of  $20 \mu\text{Gal}$  ( $1 \mu\text{Gal} = 10^{-9} g$ ) after one measurement cycle lasting 1.3 s. When compared to the best classical devices (such as the Scintrex FG5, which is based on optical interferometry with a falling corner cube), the two values of  $g$  agreed to within  $7 \mu\text{Gal}$  after accounting for systematic effects.

Following this first demonstration, atom gravimeters are currently under development at many institutions, some of which have already demonstrated improved performances. In particular, a record short-term sensitivity of  $4.2 \mu\text{Gal}$  at 1 s was demonstrated in ref. [69], and a direct comparison between an atomic and a corner-cube gravimeter at their best level of performance, operating simultaneously in a low-noise environment, has recently confirmed the superior stability of the atomic device [70]. Also, systematic

effects have been thoroughly investigated, leading to an improved consolidated accuracy budget. An accuracy of a few  $\mu\text{Gal}$  has been claimed in ref. [71] and confirmed by the agreement found with the reference value obtained by averaging the measurements of a large ensemble of gravimeters at the last “Key Comparisons of Absolute Gravimeters” in 2009 and 2011 [72,73], where so far the LNE-SYRTE gravimeter was the first and the only atom gravimeter to have participated.

The main limitation of this kind of gravimeter on Earth is due to spurious accelerations of the reference platform. One possibility for overcoming this problem is to measure the vibration of the platform using a sensitive mechanical accelerometer and correcting for phase fluctuations either in post-analysis or in real-time, as we will discuss in sect. 5.3. Another option is to perform simultaneous measurements with two different atomic samples with the same reference platform. This offers the possibility of rejecting any common-mode vibration noise on the measurements [74,75]. Furthermore, if the two samples are spatially separated, simultaneous measurements would be sensitive to spatial gradients in  $g$ , and would also allow one to suppress a variety of systematic effects. We discuss such an apparatus in the next section.

**4.2. Gradiometers.** – Measurements of the gradient of gravitational fields have important scientific and industrial applications ranging from the measurement of the Newtonian constant of gravity,  $G$ , and tests of general relativity, to covert navigation, underground structure detection, and geodesy. Initially at Stanford University, the development of atom-interferometric gravity gradiometers has been followed by other advances either for space or fundamental physics measurements [62,41,42]. A crucial aspect of every design is its intrinsic immunity to spurious accelerations.

The gradiometer setup is illustrated in fig. 11. It measures, simultaneously, the acceleration of two separate laser-cooled ensembles of atoms. The geometry is chosen so that the measurement axis passes through both atomic samples. Since the acceleration measurements are made simultaneously at both positions, many systematic measurement errors, including the vibration of the experimental platform, are common to both measurements and can be subtracted. The relative acceleration of the two ensembles along the axis defined by the Raman beams is measured by subtracting the measured phase shifts  $\Phi(\mathbf{r}_1)$  and  $\Phi(\mathbf{r}_2)$  at the two locations  $\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{r}_2$ . The gradient is extracted by dividing the relative acceleration by the separation of the ensembles. However, this method determines only one component of the gravity gradient tensor.

This type of instrument is fundamentally different from state-of-the-art classical sensors that are designed, for example, to measure  $G$ . First, the proof-masses are individual atoms rather than precisely machined macroscopic objects. This reduces systematic effects associated with the material properties of these objects. Second, the calibration for the two accelerometers is referenced to the wavelength of a single pair of frequency-stabilized laser beams, and is identical for both accelerometers. This provides long term accuracy. Finally, large separations ( $\gg 1$  m) between accelerometers are possible, enabling the development of high-sensitivity instruments. The apparatus shown in fig. 11, with a separation of 1.4 m, has demonstrated a differential acceleration sen-



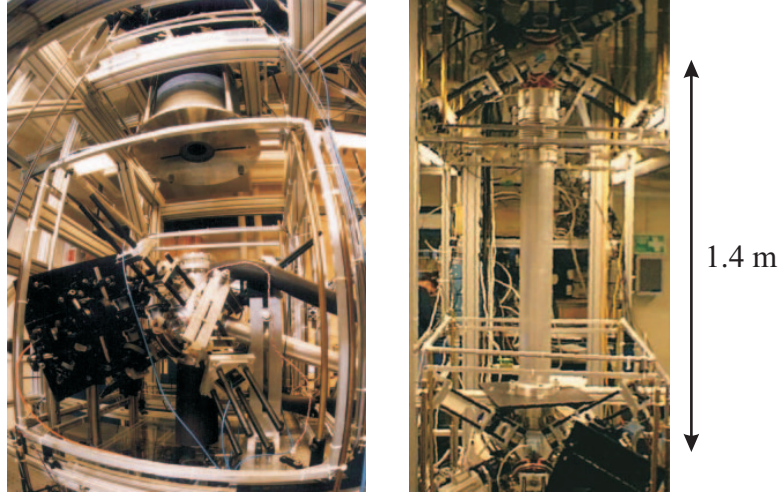


Fig. 11. – (Colour online) Gravity gradiometer developed in Stanford [64]. This system was also used for measurements of the Newtonian constant  $G$  (see ref. [41]) using a 540 kg mass shown at the top of the photo on the left. Photos courtesy of M. Kasevich.

sitivity of  $4 \times 10^{-9} g/\sqrt{\text{Hz}}$ , corresponding to gravity-gradient sensitivity of  $4 \text{ E}/\sqrt{\text{Hz}}$  ( $1\text{E} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ ) [64].

More recently, a compact gravimeter (consisting of just one atomic source) measured the vertical gravity gradient with a precision of  $4 \text{ E}$  [61]. This was done by placing the instrument on an elevator and measuring  $g$  at various heights both above and below ground level.

**4.3. Gyrometers.** – In the case of a spatial separation of the laser beams, and when the atoms have a velocity component perpendicular to  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$ , the interferometer is in a configuration similar to an optical Mach-Zehnder interferometer. Then, in addition to accelerations, the interferometer is also sensitive to rotations. This is the matter-wave analog to the optical Sagnac effect. For a Sagnac loop enclosing an area  $\mathbf{A}$ , a rotation  $\boldsymbol{\Omega}$  produces a phase shift (to first order in  $\boldsymbol{\Omega}$ ) of

$$(42) \quad \varphi_{\text{rot}} = \frac{4\pi}{\lambda_{\text{dB}} v_l} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}.$$

Here,  $\lambda_{\text{dB}}$  is the de Broglie wavelength and  $v_l$  the atom's longitudinal velocity. The area  $\mathbf{A}$  of the interferometer depends on the distance between two light pulses,  $L$ , and on the transverse velocity  $\mathbf{v}_t = \hbar \mathbf{k}_{\text{eff}}/M$

$$A = L^2 \frac{v_t}{v_l}.$$

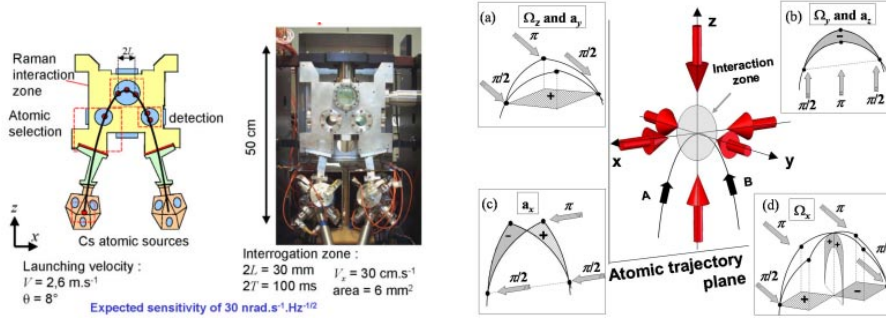


Fig. 12. – (Colour online) Six-axis inertial sensor. On the left is a schematic of the experimental setup, and typical operating parameters. On the right we illustrate the principle of operation. Here, two atomic clouds, labeled “A” and “B”, are launched on identical parabolic trajectories, but in opposite directions. The Raman lasers are pulsed on when the atoms are near the vertex of their trajectories. Four different interferometer configurations (a)–(d) give access to the 3 rotations and the 3 accelerations.

For the Mach-Zehnder atom interferometer, the phase shift due to the rotation takes the same form as that of an acceleration, except the free evolution time becomes  $T = L/v_l$  and the acceleration becomes  $\mathbf{a}_{\text{cor}} = -2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v})$  (the Coriolis acceleration)

$$(43) \quad \Phi_{\text{rot}} = \mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{a}_{\text{cor}} \left( \frac{L}{v_l} \right)^2 + (\phi_1 - \phi_2 + \phi_3).$$

By utilizing the small de Broglie wavelength of massive particles, atom interferometers can achieve a much higher sensitivity to rotations than optical interferometers with the same area. An atomic gyroscope [65, 66], using thermal caesium atomic beams (where the most-probable longitudinal velocity was  $v_l \sim 300$  m/s) and with an overall interferometer length of 2 m has demonstrated a sensitivity of  $6 \times 10^{-10}$  rad/s/ $\sqrt{\text{Hz}}$ . The apparatus consists of a double interferometer using two counter-propagating sources of atoms, sharing the same lasers. The use of the two sources facilitates the discrimination between rotation and acceleration signals.

4.4. *Six-axis sensor.* – The sensitivity axis of an interferometer is usually defined by the direction of the Raman interrogation laser with respect to the atomic trajectory. An experiment carried out in Paris [67] demonstrated sensitivity to three mutually orthogonal accelerations and rotations by launching two atomic clouds in opposite parabolic trajectories. As illustrated in fig. 12(a), with the usual  $\pi/2$ - $\pi$ - $\pi/2$  pulse sequence, a sensitivity to vertical rotation  $\Omega_z$  and to horizontal acceleration  $a_y$  can be achieved by placing the Raman lasers along the  $y$ -direction, perpendicular to the atomic trajectory. With the same sequence, using vertically oriented lasers, the horizontal rotation  $\Omega_y$  and vertical acceleration  $a_z$  can be measured, as shown in fig. 12(b). The phase shift in these

two cases can be shown to be

$$(44) \quad \Phi_{3\text{p}} = \mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot [\mathbf{a} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v})] T^2.$$

It is also possible to access the other components of acceleration and rotation which lie along the  $x$ -axis (in the plane of the atomic trajectories). By utilizing these strongly curved launch trajectories, Raman lasers can be aligned along the  $x$ -direction—producing a sensitivity to the acceleration component  $a_x$  but not to rotations [see fig. 12(c)]. Access to the horizontal rotation  $\Omega_x$  is achieved by changing the pulse sequence along the  $y$ -direction to a four-pulse “butterfly” configuration [see fig. 12(d)]. This configuration was first proposed to measure gravity gradients [64]. It involves four pulses with areas  $\pi/2-\pi-\pi-\pi/2$ , and separated by times  $T/2-T-T/2$ , respectively. The projection of the interferometer area along the  $x$ -axis gives rise to a sensitivity to the  $x$ -component of rotation,  $\Omega_x$ , described by the phase shift

$$(45) \quad \Phi_{4\text{p}} = \frac{1}{2} [\mathbf{k}_{\text{eff}} \times (\mathbf{g} + \mathbf{a})] \cdot \boldsymbol{\Omega} T^3.$$

In contrast, the  $z$ -axis projection of the area cancels out, so the interferometer is insensitive to  $\Omega_z$ .

## 5. – Compact and mobile inertial sensors

Until now, we have discussed various applications of atom interferometry in terms of lab-based inertial sensors. These experiments are typically quite large, require a dedicated laboratory, and are designed to stay in one place. Furthermore, it is normal for sensors of this kind to operate well only in environments where the temperature, humidity, acoustic noise, *etc.* is tightly constrained. In this section, we describe three different projects that are designed to be compact, robust and mobile—making them distinctly different from most laboratory experiments. The development of this technology will help create a new generation of atomic sensors that can operate “in the field” under a broad range of environmental conditions.

**5.1. *MiniAtom: A compact and portable gravimeter.*** – Here, we present the realization of a highly compact, absolute atomic gravimeter called “MiniAtom”, which was developed jointly by labs at SYRTE (Observatoire de Paris) and LP2N (Institut d’Optique d’Aquitaine). The main purpose of this work is to demonstrate that atomic interferometers can overtake the current limitations of inertial sensors based on “classical” technologies for field and on-board applications in geophysics. We show that the complexity and volume of cold-atom experimental set-ups can be drastically reduced while maintaining performances close to state-of-the-art sensors—enabling such atomic sensors to perform precision measurements outside of the laboratory. As a feasible prototype, we chose to realize an absolute gravimeter to measure the acceleration of the Earth’s gravity, which can be used to support geophysical surveys. This work has played an important role in the development of commercial cold atom gravimeters, one of which we will discuss in sect. 5.2.

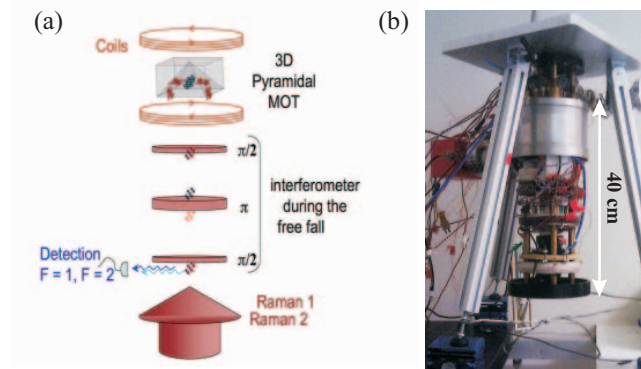


Fig. 13. – (Colour online) (a) Schematic of a compact gravimeter with only one laser beam and a pyramidal reflector. (b) The MiniAtom apparatus. The total height of the sensor head is 40 cm.

The major design features—the reduction of the sensor head size and the significant simplification of the laser module—rely on the use of an innovative hollow pyramid as the retro-reflecting mirror of quantum inertial sensors and a laser system based on telecom technologies. This design allows us to perform all the steps of the atomic measurement (laser-cooling, selection, interferometry and detection) with just a single laser beam [60]. In contrast, other atomic gravimeters require up to 9 different optical beams (six beams for the MOT, one pusher beam, one for interferometry, and one for detection) coming from multiple frequency sources. As we will show, this key component is responsible for the simplifications of both the sensor head and the laser system.

The concept of a single beam interferometer performed with a pyramidal retro-reflector (illustrated in fig. 13(a)) was validated on a previous experiment, as described in ref. [60]. In that work, approximately  $10^7$   $^{87}\text{Rb}$  atoms were loaded from a vapor in  $\sim 400$  ms. This is followed by 20 ms of molasses cooling which brings the atoms to a temperature of  $\sim 2.5 \mu\text{K}$ . A sequence of microwave and pusher-beam pulses selects the atoms in the state  $|F=1, m_F=0\rangle$  at the beginning of their free-fall. Once the cloud has fallen clear of the pyramid, the two vertically oriented, retro-reflected Raman beams are used to perform a velocity selection, followed by the usual  $\pi/2$ - $\pi$ - $\pi/2$  interferometer scheme. After the Raman pulses, the relative population between the two hyperfine ground states is obtained using fluorescence detection. With an interrogation time of  $2T = 80$  ms, we demonstrated a relative sensitivity to  $g$  of  $1.7 \times 10^{-7}$  within one second of data acquisition, and we have shown promising long-term relative stability with a noise floor below  $5 \times 10^{-9}$ .

The sensor head (shown in fig. 13(b)) consists of a 2 liter titanium vacuum chamber which is magnetically shielded by a single layer of mu-metal. The science chamber features several optical viewports to perform the atomic measurement sequence. Four

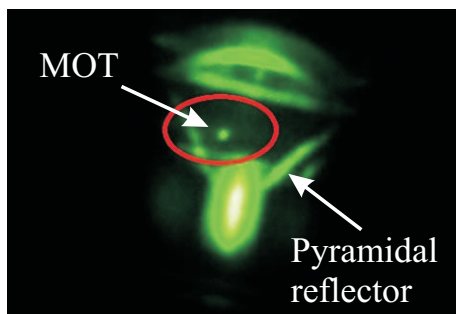


Fig. 14. – (Colour online) Image of the MiniAtom pyramidal MOT. The bright dot at the center is the fluorescence emitted by about  $10^8$  atoms of  $^{87}\text{Rb}$  loaded from a background vapor.

indium-sealed rectangular windows are designed to measure the fluorescence of the atoms at the output of the interferometer. These viewports were made 10 cm long in order to adjust the trade-off between cycling-rate and sensitivity with respect to applications or environment. A maximum interrogation time of 100 ms for the interferometer is allowed, which is limited by the 15 cm height between the bottom viewport and the pyramidal reflector. To keep the design as simple as possible, we do not use any optics for imaging in the detection. Two sets of four  $1\text{ cm}^2$  area photodiodes allow for 3% fluorescence collection efficiency for each state. The decrease in the number of optical beams has resulted in a drastic reduction of the volume of the sensor head—it fits in a cylinder 40 cm high and 20 cm in diameter, as shown in fig. 13(b). In comparison, a separate transportable absolute gravimeter developed at SYRTE [71] has a sensor head that is 80 cm high and 60 cm wide. Figure 14 shows an image of the pyramidal MOT produced in the MiniAtom chamber.

The laser system was designed such that all the frequencies necessary for the gravimeter are carried along a single optical path with one linear polarization state. A liquid crystal variable retarder plate (LCVR) from Meadowlark is used to control the polarization state of the laser field reaching the science chamber at each step of the measurement. For the trapping and cooling stages, the LCVR creates a circular polarization from the incoming linear one so that after successive reflections on the faces of the pyramid, light is in the  $\sigma^+/\sigma^-$  configuration. For the interferometer, the polarization is then changed to a linear state aligned at  $45^\circ$  to the edges of the pyramid so that the two counter-propagating Raman beam polarizations are perpendicular. Just after the third Raman pulse, the polarization is switched back to circular to perform the state detection. An important feature of the reflector is that the faces of the pyramid have a special dielectric coating that prevents the two crossed polarizations to dephase from each other after successive reflections.

For this project, we developed a compact laser architecture (see fig. 15) based on telecommunication technology with one key element: a periodically poled lithium-niobate

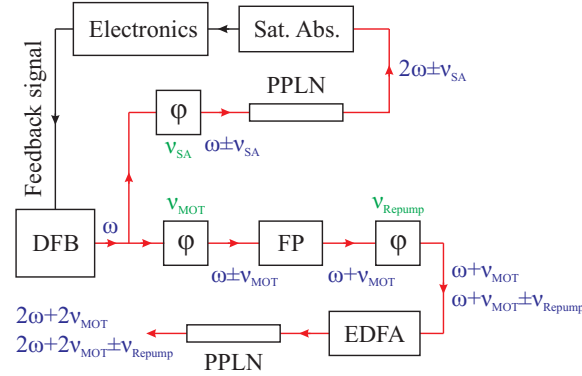


Fig. 15. – (Colour online) Architecture of the fiber-based laser system with only one laser diode. Quantities in blue represent the laser frequency at different parts of the optical chain, while quantities in green are modulation frequencies sent to the phase modulators. The modulations  $\nu_{\text{MOT}}$  and  $\nu_{\text{repump}}$  are set such that two output frequencies serve as the MOT and repump beams during the loading sequence, and they are adjusted to serve as the two Raman beams during the interferometry sequence. DFB = distributed feedback laser diode;  $\varphi$  = electro-optic phase modulator; FP = Fabry-Perot interferometer; PPLN = periodically poled lithium niobate waveguide; EDFA = erbium-doped fiber amplifier; Sat. Abs. = saturated absorption spectrometer.

(PPLN) wave-guide (from NTT Electronics, Japan), which is used to frequency-double the 1560 nm laser source to 780 nm via second-harmonic generation. This method of frequency doubling using a waveguide is particularly efficient, because the confinement of the optical mode within the guide leads to a conversion efficiency as high as 50%. The telecom laser source is a cheap and convenient distributed feedback (DFB) laser diode.

A common laser architecture adopted in cold-atom experiments is the master-slave configuration, where one fixed-frequency laser serves as a reference for multiple “slave” lasers whose frequencies are shifted relative to the “master”. In this experiment, we use only one laser with a fixed optical frequency. The light from the DFB is split into two parts. A small amount of power is diverted to an electro-optic phase modulator (EOM) that shifts the laser frequency in such a way that, after doubling, the light is resonant with the  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  transition in  $^{85}\text{Rb}$ . It is then sent to a saturated absorption cell. The locking signal is deduced from synchronous detection at 5 MHz where the modulation is created using the same EOM. The second part of the DFB output is sent through another phase modulator driven by an independent yttrium iron garnet (YIG) oscillator whose detuning will be close to the  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  transition in  $^{87}\text{Rb}$  after frequency-doubling. The light is then filtered by a fiber-based Fabry-Perot cavity such that only one sideband remains. The frequency agility is supported by the very fast response of the EOM that enables the detuning for cooling and then for the Raman transition at  $\sim 1$  GHz to the red of the transition. A third fiber-based EOM is used to create a second frequency that will be close to the  $F = 1 \rightarrow F' = 2$  transition for repumping during the trapping

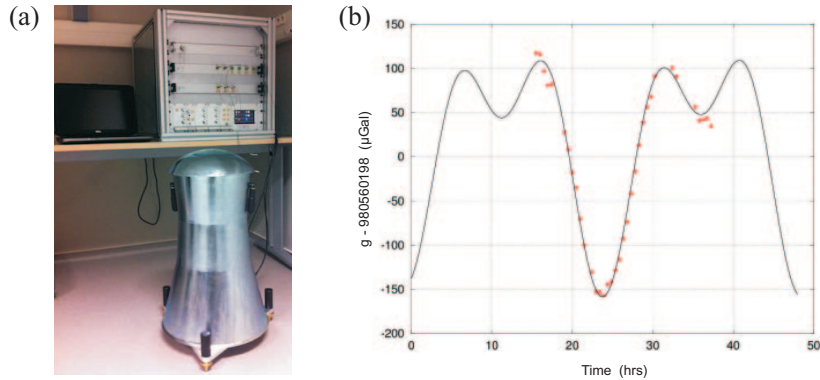


Fig. 16. – (Colour online) (a) Prototype of a commercial absolute quantum gravimeter. The laser and control electronics are shown in the 19 inch racks on the upper right. The gravimeter is surrounded by a layer of mu-metal to shield from external magnetic fields. (b) Preliminary measurements from the prototype taken over several hours (uncorrected for systematic effects). Here, the total interrogation time is  $2T = 100$  ms, and the solid line is an overlaid tidal model that includes solid Earth and ocean-loading effects. The sensitivity is currently a few  $\mu\text{Gal}$  after 1000 seconds of integration. Photo and data courtesy of  $\mu\text{QuanS}$ .

stage or for the second Raman frequency during the interferometer. The beam carrying these two frequencies is then amplified by an erbium-doped fiber amplifier (EDFA) to produce enough power to obtain a sufficient frequency-doubling conversion efficiency. With this setup, we obtain an output power of 200 mW at 780 nm after fiber-coupling. This scheme allows us to change the frequency spacing in the optical domain by adjusting the rf modulation, which is accomplished almost instantaneously. As a result, the laser frequency can be rapidly controlled without changing the current of the laser diode.

Particular efforts have been made to integrate the frequency chain used to derive the 6.835 GHz reference for both the optical Raman transitions and the microwave pulse used for the quantum state selection. Although our frequency chain fits in a 2 liter volume, it features a phase noise that limits the sensitivity to gravity only at the level of  $10^{-7}$  m/s<sup>2</sup> in one second. This is on the order of the best sensitivities achieved in the laboratory with the same interrogation time. Thus, this project has demonstrated an interesting trade-off between integration in a small package and a satisfying level of phase noise.

This prototype demonstrates that several mature pieces of technology can be gathered to produce precise measurements in a compact inertial sensor. Further work is being carried out to improve and simplify the filtering of ground vibrations. In addition, our sensor opens new doors toward the operation of an adjustable remote head gradiometer.

**5.2. Toward a commercial absolute quantum gravimeter.** – As a result of the research involved with the MiniAtom project at two French laboratories (SYRTE in Paris and LP2N in Bordeaux), a commercial absolute quantum gravimeter is currently being de-



veloped for various applications in geophysics, including volcano monitoring, hydrology, and hydrocarbon and mineral exploration. The operational requirements for these applications are extremely stringent, but modern telecom laser technology presents very attractive features for the development of a high-performance absolute gravimeter compatible with field use.

The general architecture of the instrument is very similar to the one used in the MiniAtom experiment—it relies on the utilization of a pyramidal reflector, which enables all of the operations involved in the measurement sequence (cooling, interferometry, and detection) to be performed with a single laser beam. A strong technological effort was conducted in order to integrate the laser system required for the quantum manipulation of atoms and the driving electronics. The laser system is based on the utilization of a fiber-based telecom laser operating at 1560.48 nm, which is then amplified and frequency-doubled to the required wavelength of 780.24 nm. This compact design is extremely robust and reliable. A prototype of the gravimeter is shown in fig. 16, along with some preliminary gravity measurements taken over several hours.

**5.3. ICE: A mobile apparatus for testing the weak equivalence principle.** – The ICE experiment (an acronym for Interférométrie atomique à sources Cohérentes pour l’Espace, or coherent atom interferometry for Space) is a compact and transportable dual-species atom interferometer. The main goal of ICE is to test the weak equivalence principle (WEP), also known as the universality of free-fall, which states that two massive bodies will undergo the same acceleration from the same point in space, regardless of their mass or internal structure. This principle is characterized by the Eötvös parameter,  $\eta$ , which is the difference between the acceleration of two bodies,  $a_1$  and  $a_2$ , divided by their average acceleration

$$(46) \quad \eta = 2 \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}.$$

Historically, there have been a number of experiments to test the WEP using classical bodies. The most precise tests have previously been carried out using lunar laser ranging [76], or using a rotating torsion balance [77], and have measured  $\eta$  at the level of a few parts in  $10^{13}$ . Although these previous tests are very accurate, they were both done with classical objects. Various extensions to the standard model of particle physics have made predictions that would directly violate Einstein’s equivalence principle [78], therefore it is interesting to test the WEP with “quantum bodies”.

ICE aims to measure  $\eta$  using a dual-species atom accelerometer that utilizes laser-cooled samples of  $^{87}\text{Rb}$  and  $^{39}\text{K}$  [79, 59]. By performing simultaneous measurements on the two spatially overlapped atomic clouds, the acceleration of the two species can be measured and common-mode noise can be rejected. This concept is similar to the operation principle of gradiometers, as we discussed in sect. 4.2.

The experiment is designed to perform this test in a micro-gravity environment (on-board the Novespace A300 “zero- $g$ ” aircraft) in order to extend the interrogation time, thereby increasing the sensitivity to acceleration. Similar research is being carried out



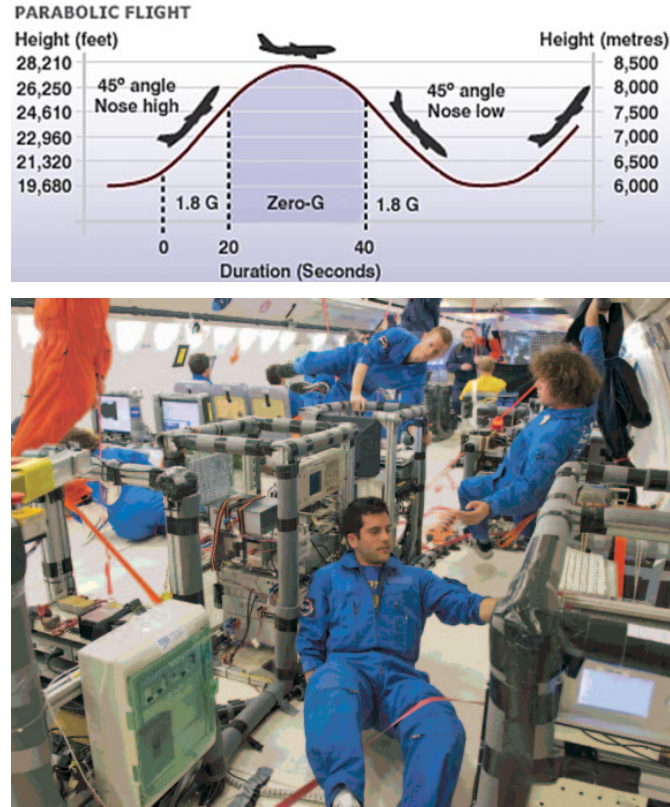


Fig. 17. – (Colour online) Top figure: schematic of a parabolic flight in the zero- $g$  Airbus, courtesy of Novespace. Bottom figure: the ICE team in micro-gravity. From top to bottom: B. Barrett, B. Battelier, and P.-A. Gominet. Photo courtesy of the ESA and Novespace.

in a lab-based experiment by a team in Paris that recently demonstrated a differential free-fall measurement at the level of  $1.2 \times 10^{-7}g$  using a dual-species accelerometer with  $^{85}\text{Rb}$  and  $^{87}\text{Rb}$  [75].

Other Earth-based atom interferometry experiments that exploit long interrogation times are taking place around the world. Two examples include the QUANTUS (Quantengase Unter Schwerelosigkeit—Quantum gases under micro-gravity) experiment [80,81] at the ZARM drop tower in Bremen, Germany, and at Stanford University in a recently constructed 10 m vacuum chamber [82,83]. However, the defining feature of interferometry experiments like ICE and QUANTUS is that the apparatus is designed to be in free fall with the atoms.

**5.3.1. Parabolic flights.** On average, ICE takes part in two parabolic flight campaigns per year, which are organized by Novespace (based out of Bordeaux-Mérignac airport), and are funded by the European Space Agency (ESA) and the French Space agency (CNES). Each campaign consists of three flights where the zero- $g$  A300 aircraft undergoes multiple parabolic trajectories, as shown in fig. 17. Each flight typically contains 31 parabolas, and each of those consists of approximately 20 s of micro-gravity when the aircraft is in free fall. This amounts to approximately 10 minutes of  $0g$  per flight, or just over 30 minutes for the entire campaign.

During one parabola, the experiment has the potential of reaching a maximum interrogation time of  $2T \sim 20$  s. In comparison, the QUANTUS experiment in the ZARM drop tower is currently limited to  $2T = 4.7$  s, with plans to extend this to  $2T = 9.4$  s when the tower is modified to accommodate a launched capsule [81]. Similarly, the 10 m fountain at Stanford has recently demonstrated  $2T = 2.3$  s [82].

One advantage of the A300 plane is that the experiment can be controlled in real-time during the flight, offering the possibility of changing experimental conditions “on the fly”. The disadvantage is that there are many constraints to working on a plane—especially one that undergoes such extreme flight paths. For example, the experiment must be able to withstand the stress of frequent trips between the lab and the airport. During the flight, strong vibrations and changes in gravity call for stringent requirements on the mechanical structure. Power restrictions on the plane require that the experiment be turned off periodically during the flight, and overnight between flights. Finally, since the aircraft is not insulated, the temperature can vary by as much as  $20^\circ\text{C}$  throughout the day. These issues have presented many technical challenges to overcome when designing the experiment, but it has led to the development of a very stable and robust setup that is capable of sensitive acceleration measurements in a noisy environment.

**5.3.2. Experimental setup.** We now give a brief description of the experimental setup and the laser system developed for the dual-species interferometer with rubidium and potassium. The setup is divided into six racks, as depicted in the bottom photo of fig. 17, one rack each for the vacuum chamber, laser system, frequency comb, power supplies, rf frequency chain, and computer control system<sup>(8)</sup>. These racks are designed to be fastened to the aircraft’s interior, and to comply with Novespace regulations to withstand  $9g$  of forward thrust in the event of an emergency landing.

The laser system is based on optical fiber and telecom technology that is very robust and well adapted for this type of environment. As light sources, we use Redfern Integrated Optics (RIO) external cavity diode lasers (ECDLs) at 1560 and 1534 nm. This light is frequency doubled using second-harmonic generation (SHG) in a PPLN to 780 and 767 nm for  $^{87}\text{Rb}$  and  $^{39}\text{K}$ , respectively. These ECDLs are extremely compact, fiber-based lasers, with a gain chip and a planar waveguide circuit that includes a Bragg grating inside a butterfly package. They have a narrow linewidth ( $\sim 15$  kHz in our case), ultra-low phase

---

<sup>(8)</sup> We utilize the control software “Cicero Word Generator” to generate all of our experimental sequences, which is designed specifically for atomic physics experiment [84].

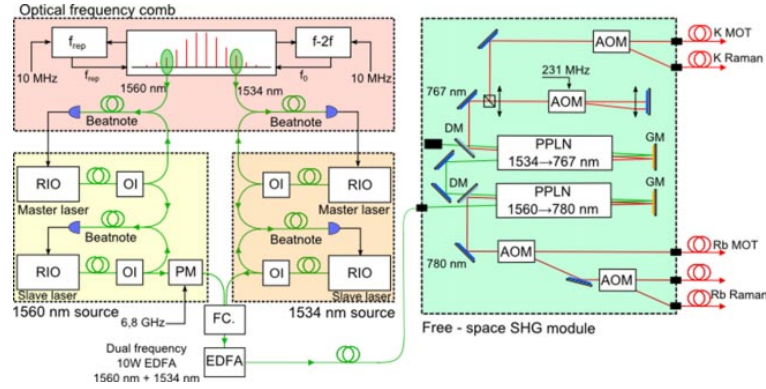


Fig. 18. – (Colour online) The ICE laser system. RIO = RIO laser diode; OI = optical isolator; PM = electro-optic phase modulator; PPLN = periodically poled lithium niobate; FC = fiber combiner; AOM = acousto-optic modulator; EDFA = erbium-doped fiber amplifier; DM = dichroic mirror; GM = gold mirror.

noise, and low sensitivity to bias current and temperature—making them highly suitable for use in noisy environments. We stabilize both rubidium and potassium diodes on a common frequency reference by using a fiber-based optical frequency comb [85], which gives us precise knowledge of the optical frequencies for both atomic sources.

A schematic of the fiber-based components of the laser system is shown in fig. 18. For each atomic species, we utilize a master-slave architecture, where the master laser diode is locked on the frequency comb, and the slave is locked to the master using an optical beat-note. The set-point of each slave laser can be adjusted over approximately 500 MHz at  $1.5\ \mu\text{m}$  (corresponding to  $\sim 1\ \text{GHz}$  at  $780\ \text{nm}$ ) within  $\sim 2\ \text{ms}$  of settling time. The output of each slave laser is coupled into a dual-wavelength EDFA, where each light source can be amplified to  $\sim 5\ \text{W}$ . For  $^{87}\text{Rb}$ , the slave light is coupled through an electro-optic phase modulator at  $6.8\ \text{GHz}$  before being amplified. This generates the sideband needed for laser-cooling and making Raman transitions in rubidium. The amplification stage is followed by a free-space SHG stage which generates approximately  $1\ \text{W}$  of  $780\ \text{nm}$  and  $767\ \text{nm}$  light. A second free-space module, composed of a series of shutters and acousto-optic modulators (AOMs), is used to split, pulse and frequency shift the light appropriately for cooling, interferometry and detection. Finally, this light is coupled into a series of single-mode, polarization-maintaining fibers and sent to the vacuum chamber.

The sensor head is composed of a non-magnetic titanium vacuum chamber<sup>(9)</sup>, as shown in fig. 19(a). This chamber has 19 view ports for extended optical access, includ-

<sup>(9)</sup> Previous experimental results [59] were performed in a stainless steel chamber, where rubidium cloud temperatures were limited to  $7\text{--}8\ \mu\text{K}$ . This was attributed to the presence of relatively large magnetic field gradients from the magnetized steel frame.

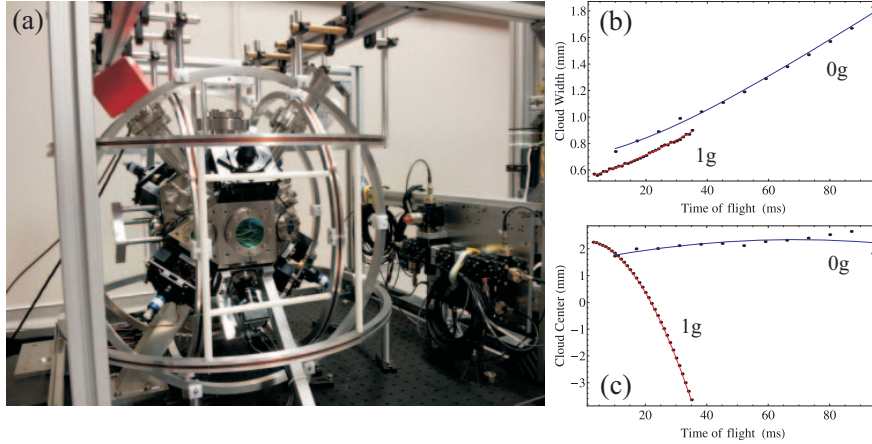


Fig. 19. – (Colour online) (a) Titanium vacuum chamber for the next generation of ICE experiments. (b,c) Recent rubidium time-of-flight data taken onboard the zero- $g$  aircraft with the titanium vacuum system. Measurements of the  $1/e$  cloud width along the axis of the Raman beams (b), and the cloud center along the vertical direction (c), were performed in  $1g$  while the plane was grounded (red curves), and in  $0g$  while in flight (blue curves). Fits to the cloud center give an acceleration  $a = (-9.85 \pm 0.03) \text{ m/s}^2$  when on ground and  $a = (-0.3 \pm 0.2) \text{ m/s}^2$  in micro-gravity. Similarly, fits to the cloud width yield temperatures of  $\mathcal{T} = (2.4 \pm 0.2) \mu\text{K}$  and  $(2.6 \pm 0.3) \mu\text{K}$  in  $1g$  and  $0g$ , respectively.

ing four that are anti-reflection coated for  $1.5 \mu\text{m}$  light (for a future dipole trap), and three mutually perpendicular pairs of large-area view ports (for a future 3-axis inertial sensor). A custom 2-6 way fiber splitter is used to combine the 780 and 767 nm light and divides it equally into six beams for laser-cooling purposes. With this system, we achieve rubidium temperatures of  $\sim 2.5 \mu\text{K}$  both in  $1g$  and in  $0g$ , as shown by the time-of-flight measurements in fig. 19(b). Here, we measured the cloud position at times as large as  $\sim 100 \text{ ms}$  while in micro-gravity. This is not possible on ground because the atoms fall outside of the field of view of the camera.

**5.3.3. Airborne interferometer with  $^{87}\text{Rb}$ .** The first airborne matter-wave interferometer was achieved in the zero- $g$  plane with rubidium [59], where we demonstrated sensitivity to the acceleration along the wings of the aircraft. The system combines a mechanical accelerometer (MA), which has a large dynamic range, and an atom interferometer, which has a high sensitivity. The MA is attached to the back of the retro-reflecting Raman mirror, which acts as the inertial reference frame for the interferometer. Since the Raman beams are aligned along the horizontal  $y$ -axis, the mean acceleration is zero in both the  $1g$  and  $0g$  phases of the flight. On the aircraft, the level of vibrations is extremely high, and the Raman mirror can move distances that correspond to phase shifts of much more than  $\pi$  over the duration of the interferometer sequence. Under these conditions, the

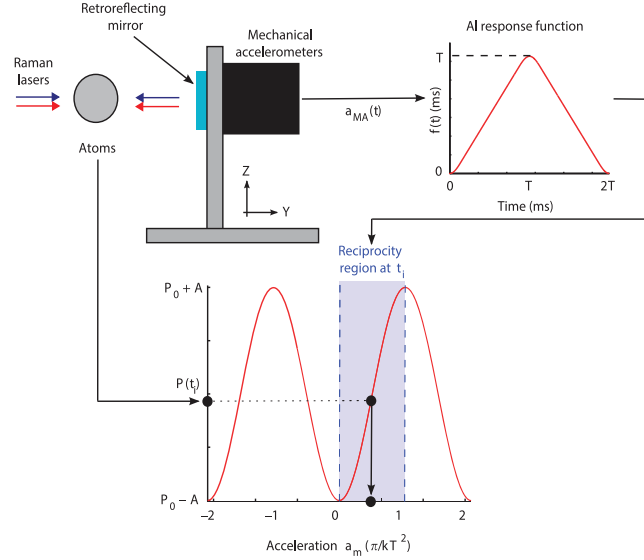


Fig. 20. – (Colour online) Schematic for reconstructing the interferometer fringe pattern using correlations with a mechanical accelerometer.

fringes are “scanned” by the vibrations, but the phase shift is random and unknown for each repetition of the experiment—which results in fringe smearing. However, by recording both the transition probability from the interferometer and the acceleration of the Raman mirror during the pulse sequence,  $a_{MA}(t)$ , it is possible to reconstruct the fringes by utilizing the sensitivity function (see sect. 3). The phase shift due to mirror vibrations during the  $i$ -th measurement is estimated using the relation

$$(47) \quad \Phi_E^{(i)} = k_{\text{eff}} \int_{t_i}^{t_i+2T} f(t-t_i) a_{MA}(t) dt,$$

where  $t_i$  is the start time corresponding to the  $i$ -th repetition of the pulse sequence, and  $f(t)$  is the interferometer response function given by eq. (38). This function is a triangle-like function with units of time that characterizes the sensitivity of the interferometer to phase shifts at any point during the pulse sequence<sup>(10)</sup>. This phase is then correlated with the measured transition probability, as depicted in fig. 20. The first results of this implementation of the experiment are shown in fig. 21.

<sup>(10)</sup> The integrand  $f(t-t_i)a_{MA}(t)$  appearing in eq. (47) can be thought of as a time-dependent velocity that must be integrated to obtain the effective displacement of the mirror at the end of the interferometer sequence,  $\Delta y_i$ . The phase shift is then  $\Phi_E^{(i)} = k_{\text{eff}} \Delta y_i$ .

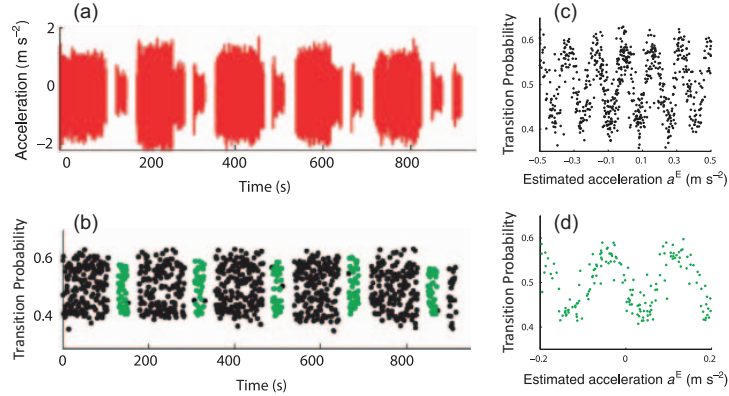


Fig. 21. – (Colour online) (a) Acceleration signal recorded by the MAs. The standard deviation  $\sigma_a$  of the acceleration signal is about  $0.5 \text{ m/s}^2$  during the  $1g$  phase of the flight and  $0.2 \text{ m/s}^2$  during  $0g$ . (b) Interferometer measurements of the transition probability corresponding to a total interrogation time of  $2T = 3 \text{ ms}$ . The black and green points correspond to the  $1g$  and  $0g$  phases, respectively. (c,d) Atomic transition probability measurements as a function of the estimated mirror acceleration,  $a_E = \Phi_E/k_{\text{eff}}T^2$ , during  $1g$  (c) and  $0g$  (d). The sinusoidal correlations show that the interferometer contains information on the acceleration of the plane.

This implementation of the mobile accelerometer demonstrated sensitivities at the level of  $2 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$  while in micro-gravity. Furthermore, during the  $1g$  phases of the flights, we detected inertial effects more than 300 times weaker than the vibration level of the plane.

**5.3.4. Toward a mobile dual-species interferometer with  $^{87}\text{Rb}$  and  $^{39}\text{K}$ .** One of the main challenges in constructing a dual-species interferometer with  $^{87}\text{Rb}$  and  $^{39}\text{K}$  is working with potassium because of, for example, its compact energy level structure (see fig. 22(a)). This makes potassium isotopes particularly difficult to cool to sub-Doppler temperatures without evaporation techniques [86]. Similarly, the depumping time between ground states is on the order of  $\sim 1 \mu\text{s}$  for near-resonant excitation light due to the proximity of excited states—making state selection and detection of  $^{39}\text{K}$  more challenging than other alkali atoms. Nevertheless, we have made encouraging progress toward a mobile interferometer with these two isotopes.

By employing techniques similar to those discussed in refs. [87, 88], we sub-Doppler cool our sample of  $^{39}\text{K}$  to temperatures around  $25 \mu\text{K}$ <sup>(11)</sup>. We have also measured optical Ramsey fringes by inducing co-propagating Raman transitions with a  $\pi/2$ - $\pi/2$  pulse

<sup>(11)</sup> This temperature corresponds to a most probable speed of just  $7.7 v_{\text{rec}} \sim 10 \text{ cm/s}$ , where  $v_{\text{rec}} \sim 1.3 \text{ cm/s}$  is the one-photon recoil velocity for  $^{39}\text{K}$ . Recent work [89] has shown efficient cooling of  $^{39}\text{K}$  to temperatures as low as  $6 \mu\text{K}$ , or  $3.8 v_{\text{rec}}$ , using a gray molasses on the D1 transition.

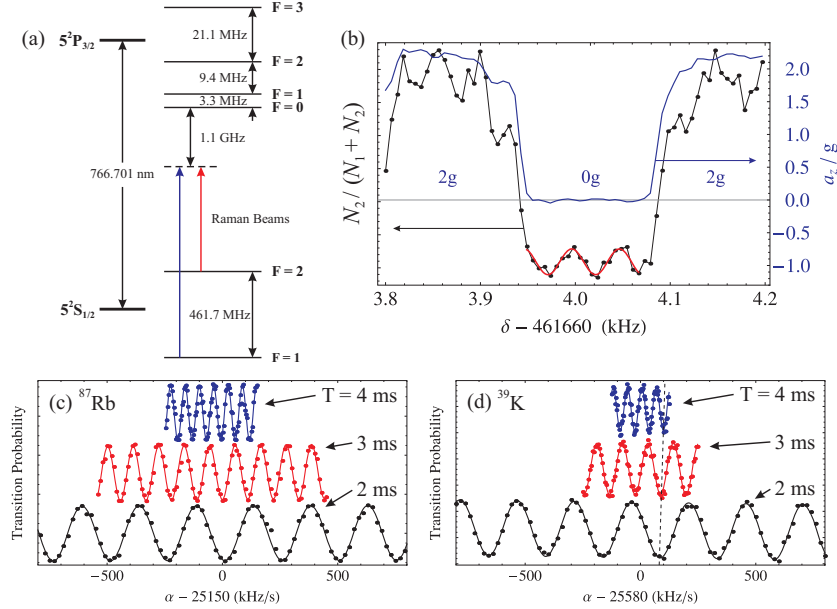


Fig. 22. – (Colour online) (a) Energy level structure of  $^{39}\text{K}$  (not to scale). The spin-structure is identical to that of  $^{87}\text{Rb}$ , but the hyperfine states are separated by a factor of 10 – 20 less in frequency. (b) Optical Ramsey fringes with  $T_{\text{Ramsey}} = 20$  ms using  $^{39}\text{K}$  in micro-gravity. Here, the black points (corresponding to the scale on the left) represent the transition probability as a function of the frequency difference,  $\delta$ , between Raman beams. The red curve is a sinusoidal fit to the data during  $0g$ . The blue curve, corresponding to the scale on the right, is a simultaneous measurement of the vertical acceleration during a single parabola. (c,d) Three-pulse interferometer fringes for  $^{87}\text{Rb}$  and  $^{39}\text{K}$  atoms, respectively, as a function of the chirp rate,  $\alpha$ , that cancels the gravity-induced Doppler shift. Interrogation times of  $2T = 4, 6$ , and  $8$  ms are shown. These data were recorded in the same titanium vacuum system, with the same laser-cooling and Raman beam optics, but at separate times.

sequence, separated by free-evolution times as large as  $T_{\text{Ramsey}} = 30$  ms. Although this configuration is essentially insensitive to the velocity of the atoms, it nonetheless shows that coherent two-photon transitions can easily be made with  $^{39}\text{K}$ , which is an important first step toward an interferometer.

Figure 22(b) shows potassium Ramsey fringes at  $T_{\text{Ramsey}} = 20$  ms measured during a parabolic flight. Here, the ratio  $N_2/(N_1 + N_2)$ , between the total number of atoms and those in the  $|F = 2, m_F = 0\rangle$  state is measured as a function of the two-photon detuning between the Raman beams,  $\delta$ . To the best of our knowledge, these are some of the first measurements of optical Ramsey fringes with  $^{39}\text{K}$ .

We have also achieved some of the first three-pulse interferometer fringes with potassium. Figures 22(c) and (d) show fringes from  $^{87}\text{Rb}$  and  $^{39}\text{K}$  samples, respectively, for



$T = 2, 3$  and  $4$  ms. These data were recorded at different times in the same laboratory setup. Here, the Raman beams were oriented along the vertical direction, and the frequency difference between the beams was chirped at various rates,  $\alpha$ , that allowed the fringes to be scanned while keeping the two-photon Raman transition on resonance. For  $^{87}\text{Rb}$ , the chirp rate that cancels the gravitationally-induced Doppler shift is  $\alpha_{\text{Rb}} = k_{\text{eff}}^{(\text{Rb})} g/2\pi = 25.138$  MHz/s. Similarly, for  $^{39}\text{K}$  it is  $\alpha_{\text{K}} = 25.581$  MHz/s—which is slightly greater than that of rubidium owing to the different atomic transition frequencies. Notice that the fringe zeroes for  $^{87}\text{Rb}$  align near  $25.150$  MHz/s for all three values of  $T$ , which indicates that each data set gives a similar measurements of  $g$ <sup>(12)</sup>. However, for  $^{39}\text{K}$ , the fringe zeroes near  $25.680$  MHz/s appear to shift to the right for successive  $T$ —showing that there is a strong systematic effect on the measurement of  $g$  as  $T$  increases, and the atoms fall and expand. This is a result of the two-photon light shift in potassium, which cannot be suppressed as easily as a rubidium interferometer due to the fact that the one-photon detuning is greater than the hyperfine splitting,  $|\Delta| > \omega_{\text{HF}}$ . A future test of the equivalence principle will require further investigation of this effect.

These results open the way toward the first mobile, dual-species interferometer, and precise tests of the WEP in the near future.

**5.4. Inertial navigation.** – The navigation problem is easily stated: How do we determine an object’s trajectory as a function of time? Nowadays, we take for granted that a hand-held global positioning system (GPS) receiver can be used to obtain meter-level position resolution. When GPS is unavailable (for example, when satellites are not in direct line of sight), position determination becomes much less accurate. In this case, stand-alone “black-box” inertial navigation systems, comprised of a combination of gyroscopes and accelerometers, are used to infer position changes by integrating the outputs of these sensors. State-of-the-art commercial navigation systems have position drift errors of kilometers over many hours of navigation time, significantly worse than the GPS solution. Yet many 21st century applications require GPS levels of accuracy everywhere and at anytime. Examples of such applications include indoor navigation for emergency responders, navigation in cities and urban environments, and autonomous vehicle control. How can we close the gap between GPS system performance and inertial sensors? One way forward is improved instrumentation: better gyroscopes and accelerometers.

Inertial sensors based on light-pulse atom interferometry appear to be well suited to this challenge. The sensor registers the time evolution of the relative distance between the mean position of the atomic wavepackets and the sensor case (defined by the opto-mechanical hardware for the laser beams) using optical telemetry. Since distances are measured in terms of the wavelength of light, and since the atom is in a benign environment, the sensors are characterized by highly stable and low-noise operation.

However, there is an additional complication in the architecture of these sensors for high accuracy navigation applications: the so-called “problem of the vertical”. Terrestrial

---

<sup>(12)</sup> Systematic effects have not been accounted for in these preliminary results.



navigation requires determining the sensor's position in Earth's gravitation field. Due to Einstein's equivalence principle, accelerometers cannot distinguish between the acceleration due to gravity and the sensor itself. So, in order to determine the sensor's trajectory in an Earth-fixed coordinate system, the local acceleration due to gravity needs to be subtracted from the accelerometer output. For example, existing navigation systems use a gravity map to make this compensation. However, in present systems, this map does not have enough resolution or accuracy for meter-level position determinations (a  $10^{-7}$  error in the knowledge of the local value of  $g$  integrates to an error of  $\sim 1$  m in 1 hour).

Two possible solutions to this issue are to obtain better maps of local gravitational acceleration with more precise surveys, or to perform simultaneous gravity field measurements. To do this, one could utilize the two outputs from a gravity gradiometer, such as those mentioned in sect. 4.2. By integrating the gravity gradient over the inferred trajectory, one can determine gravity as a function of position. In principle, such an instrument can function on a moving platform, since acceleration noise that is common to the two outputs can be rejected. The central design challenge is the realization of a mobile instrument which has very good noise performance.

Another promising application of cold-atom inertial sensors to navigation is to correct the intrinsic drift of a mechanical accelerometer in real-time. The use of such a hybrid sensor—which effectively has zero bias—is promising because even the best mechanical accelerometers have a bias that fluctuates in time (with a standard deviation on the scale of  $10^{-4}$  m/s<sup>2</sup>). This phenomena can lead to errors in positions of several hundred meters after one hour of navigation [90]. The idea is to use the high accuracy of atom-based accelerometers to measure bias variations of the mechanical accelerometers and correct them. In this way, it is possible to benefit from the high bandwidth of mechanical accelerometers (quasi-continuous sampling of the acceleration signal) while suppressing the bias drift. Numerical simulations of this type of hybrid sensor (using  $T = 4.5$  ms) have shown a reduction in the position error by a factor of  $\sim 25$  after one hour of navigation [91]. This improvement is significant, even with such a small free-evolution time.

## 6. – Application to geophysics and gravitational wave detection

**6.1. Gravity and geophysics.** – Historically, gravity has played a central role in studies of dynamic processes in the Earth's interior and is also important in the study of geophysical phenomena, geodesy and metrology. Gravity is the force responsible for the shape and structure of the Earth. The combined effect of gravitational attraction and centrifugal force acts to distribute dense material toward the innermost layers, and lighter material in the outer ones. High-precision measurements of the gravitational field and its variations (both spatial and temporal) give important information about the dynamical state of the Earth. However, the analysis of these variations in local gravity is quite challenging because the underlying theory is complex, and many perturbational corrections are necessary to isolate the small signals due to dynamic processes. With respect to determining the three-dimensional structure of Earth's interior, a disadvantage of a gravitational field (or any potential energy field), is that there is a large ambiguity in

locating the source of gravitational anomalies.

The law of gravitational attraction was formulated by Isaac Newton (1642-1727) and was first published in 1687 [92]—approximately three generations after Galileo had determined the magnitude of gravitational acceleration, and Kepler had discovered his empirical laws describing the orbits of planets. The gravitational force between any two particles with (point) masses  $M$  at position  $\mathbf{r}_0$ , and  $m$  at position  $\mathbf{r}$ , is an attraction along the line joining the particles

$$(48) \quad \mathbf{F} = -G \frac{Mm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Here,  $G$  is the universal gravitational constant:  $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N(m/kg)}^2$ , which has the same value for all pairs of particles<sup>(13)</sup>.

The value of Earth's gravitational acceleration was first determined by Galileo. Its magnitude is approximately  $g = 9.8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ Gal}$ , but it varies over the surface of Earth between  $9.78$  and  $9.82 \text{ m/s}^2$  depending on a number of factors such as latitude, elevation and local density<sup>(14)</sup>. Gravity anomalies are often expressed in  $\text{mGal}$  ( $\sim 10^{-6}g$ ) or in  $\mu\text{Gal}$  ( $\sim 10^{-9}g$ ), a level of precision that can be achieved by modern absolute gravimeters.

In general, geophysics is the quantitative study of the physics of the Earth. Nowadays, geophysicists are particularly interested in studying variations of Earth's local gravity field because they permit the detection of the anomalous distribution of masses, and the determination of geological structures such as faults, the crust-mantle boundary, and density anomalies in the mantle. Furthermore, it allows the study of dynamical processes like the movement of tectonic plate, mountain formation, convection in the Earth's mantle, and volcanic activity. All of these processes strongly affect the mass distribution within the Earth—generating large anomalies in the gravitational field. Gravity is therefore a basic tool for studies of structural geology. Some geological structures within the Earth's crust (such as faults, synclines, anticlines, or salt domes) are frequently associated with potential reservoirs for oil and gas. As a result, the study of the Earth's gravity field also plays an important role in the search for fossil fuels, as well as for geothermic activity.

**6.2. Gravity anomalies and how to use gravity data.** – In general, a gravity anomaly is the difference between an observed value of local gravitational acceleration,  $g_{\text{obs}}$ , and that predicted by a model. The combination of the gravity anomaly measurements and topographical data yield crucial information about the mechanical state of the Earth's crust and lithosphere. Both gravity and topography can be obtained by remote sensing and, in many cases, they form the basis of our knowledge of the dynamical state of

<sup>(13)</sup>  $G$  should not be confused with the gravitational acceleration,  $g$ , which is approximately given by  $g = GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2$ , where  $M_{\oplus}$  is the mass of the Earth, and  $R_{\oplus}$  is Earth's effective radius.

<sup>(14)</sup> In honor of Galileo, the unit often used in gravimetry is the Gal:  $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2 = 10^{-2} \text{ m/s}^2 \sim 10^{-3}g$ . Therefore,  $1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m/s}^2 \sim 10^{-6}g$  and  $1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ m/s}^2 \sim 10^{-9}g$ .

planets, such as Mars, and natural satellites, such as Earth's Moon. Data reduction plays an important role in gravity studies since the signal of interest (caused by variations in density) is minuscule compared to the sum of the observed field and other effects, such as the influence of the position at which the measurement is made.

The following list describes various contributions to the gravitational field, with the name of the corresponding correction in parentheses:

Observed gravity equals the attraction of the reference spheroid, *plus*:

1. Effects of elevation above sea level (free-air correction).
2. Effect of “normal” attracting mass between observation point and sea level (Bouguer and terrain correction).
3. Effect of masses that support topographic loads (isostatic correction).
4. Time-dependent changes in Earth's shape (tidal correction).
5. Changes in the rotation term due to motion of the observation point, for example, when measurements are made from a moving ship (Eötvös correction).
6. Effects of crust and mantle density anomalies (“geological” or “geodynamic” process correction).

We will now describe some of the most crucial corrections in more detail.

**6.2.1. Free-air correction.** The free-air correction to the measurement of gravitational acceleration adjusts the value of  $g$  to correct for its variation due to elevation above sea level. It assumes there is no mass between the observer and sea level, hence the name “free-air” correction. For an altitude  $h \ll R_{\oplus}$  above sea level, this correction amounts to the following shift in  $g$ :

$$(49) \quad \delta g_{\text{FA}} = -2 \frac{hg}{R_{\oplus}}.$$

The shift is  $\delta g_{\text{FA}}/h \approx -3.14 \times 10^{-7} g/\text{m}$  at the equator, where  $R_{\oplus} = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$  is the Earth's effective radius (the “geoid” effect of Earth's ellipticity is often included in a separate model). Since this level of precision can be attained by field instruments, it shows that uncertainties in elevation can be a limiting factor in the accuracy that can be achieved<sup>(15)</sup>.

---

<sup>(15)</sup> For example, a realistic error in elevation of a few meters leads to an uncertainty in  $g$  of  $\sim 1 \text{ mGal}$ .

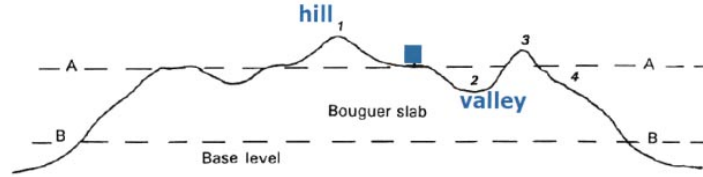


Fig. 23. – (Colour online) Bouguer and terrain corrections. The Bouguer correction refers to the gravity effect of the intervening plate between a station at elevation A and the base level B. The terrain correction takes into account the effects of topographic rises (like points 1 and 3) and depressions (like points 2 and 4). The observation point is indicated by the square between points 1 and 2.

**6.2.2. The Bouguer anomaly.** The free-air correction does not correct for any attracting mass between the observation point and sea level. However, on land, at a certain elevation there will be attracting mass (even though it is often compensated—see sect. 6.2.3). Instead of estimating the true shape of, say, a mountain on which the measurement is made, one often resorts to what is known as the “slab approximation”, where the rocks are assumed to be of infinite horizontal extent. The Bouguer correction is then given by

$$(50) \quad \delta g_B = 2\pi G \bar{\rho} h,$$

where  $\bar{\rho}$  is the mean density of crustal rock and  $h$  is, again, the height above sea level. For  $\bar{\rho} = 2700 \text{ kg/m}^3$ , we obtain a correction of  $\delta g_B/h \approx 1.15 \times 10^{-7} \text{ g}$  per meter of elevation (or  $0.113 \text{ mGal/m}$ ). If the slab approximation is not sufficient, for instance near the top of a mountain, one must apply an additional “terrain” correction. This is straightforward if one has access to topography/bathymetry data. Figure 23 illustrates a situation in which the Bouguer and terrain corrections would increase the accuracy of gravity anomaly measurements.

The Bouguer correction must be subtracted from the observed value of gravity,  $g_{\text{obs}}$ , since one wants to remove the effects of the extra attraction, and it is typically applied together with the free-air correction. Ignoring the terrain correction, the Bouguer gravity anomaly is then given by

$$(51) \quad \Delta g_B \simeq g_{\text{obs}} - g_{\text{pred}} - \delta g_{\text{FA}} - \delta g_B,$$

where  $g_{\text{pred}}$  is a model-based prediction of  $g$  that includes effects such as the aspherical shape of the Earth. In principle, these two corrections account for the attraction of all rock between the observation point and sea level. Then,  $\Delta g_B$  represents the gravitational attraction of the material below sea level. Maps of the Bouguer anomaly (see fig. 24(b)) are typically used to study gravity on continents, whereas the free-air anomaly ( $\Delta g_{\text{FA}} = g_{\text{obs}} - g_{\text{pred}} - \delta g_{\text{FA}}$ ) is more commonly used in oceanic regions.

**6.2.3. Isostatic anomalies.** If the mass between the observation point and sea level is all that contributes to  $g_{\text{obs}}$ , one would expect the free-air anomaly to be large and positive near topographical peaks (since this mass is unaccounted for) and the Bouguer anomaly to decrease to zero. This relationship between the two gravity anomalies and topography is what would be obtained in the case where the mass is completely supported by the strength of a tectonic plate (*i.e.* no isostatic compensation). In early gravity surveys, however, it was found that the Bouguer gravity anomaly over mountain ranges was, somewhat surprisingly, large and negative. Apparently, a mass deficiency remained after the mass above sea level was compensated for. In other words, the Bouguer correction subtracted too much! This observation in the 19th century led Airy and Pratt to develop the concept of isostasy. In short, isostasy means that at depths larger than a certain compensation depth, the observed variations in height above sea level no longer contribute to lateral variations in pressure.

The basic equation that describes the relationship between the topographical height and the depth of the compensating body is

$$(52) \quad H = \frac{\rho_c h}{\bar{\rho} - \rho_c},$$

where  $\rho_c$  is the density of the compensating body,  $H$  is the depth it is buried and  $H + h$  its total height. Assuming some constant density for crustal rock, one can compute a spatial grid of depths,  $H(x, y)$ , from measured topographical data,  $h(x, y)$ , and correct for the mass deficiency. This results in the isostatic anomaly—a small variation in  $g$  due to the uncompensated density variations that result from local geological, or geodynamic processes.

**6.2.4. Gravity surveying.** Figure 24(a) depicts a gravity survey—a grid of precise, spatially-separated measurements of  $g$  that are carefully corrected for local topographical variations. Data of this type can be used to detect man-made voids, variations in the depth of bedrock, geological structures or even buried resources. An example of a detailed gravity anomaly map of the New England area is shown in fig. 24(b).

The information that can be extracted from a gravity survey is highly dependent on the sensitivity of the measurement device and the size of local gravity anomalies. The source of most gravity anomalies is a change in the lateral density of the sub-surface. Since the magnitude of the gravitational force due to a subterranean mass variation (from either a local concentration or void) is superimposed on the larger force due to the total mass of the Earth, these anomalies can be challenging to detect. For engineering and environmental applications, structures of interest are generally quite small (1–10 m in size) and gravity anomalies resulting from these are at the level of a few hundred  $\mu\text{Gal}$ . Therefore, high sensitivity gravity measurements are required at the level of or below  $1 \mu\text{Gal}$  (*e.g.* micro- and nano-gravimetry) in order to detect these structures. Figure 25 illustrates the range and sensitivity required for different gravity surveying applications.

When searching for underground structures, usually one first puts some constraints on the probable geometry, depth and mean density of the structure, in order to determine

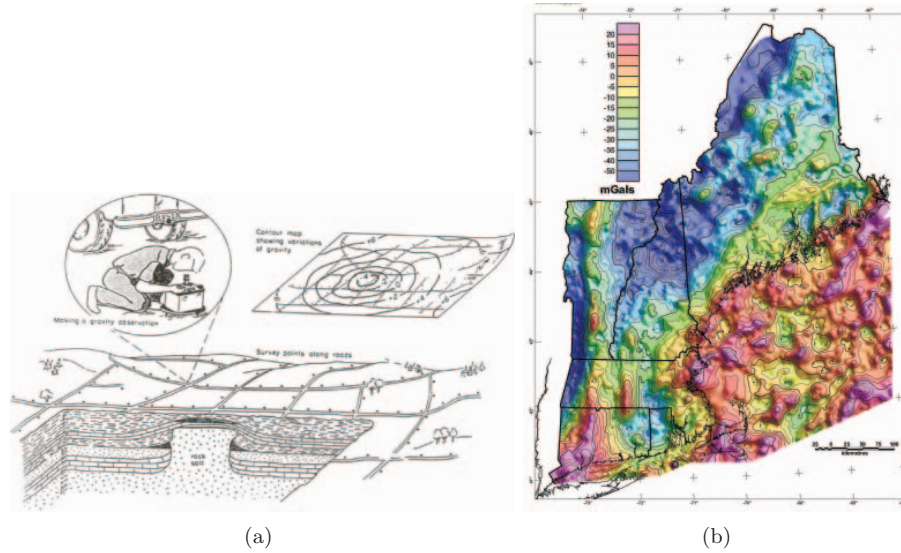


Fig. 24. – (Colour online) (a) Cartoon of a gravity survey. By performing very precise measurements of  $g$  and carefully applying the aforementioned corrections, a gravity survey can detect natural or man-made voids, variations in the depth of bedrock, and geological structures of engineering interest. (b) Free-air/Bouguer gravity anomaly map of New England and the Gulf of Maine in the United States. These data were compiled using 35 644 gravity stations on land and 27 251 sea-based measurements. Image courtesy of S. L. Snyder and the US Geological Survey. Taken from ref. [93].

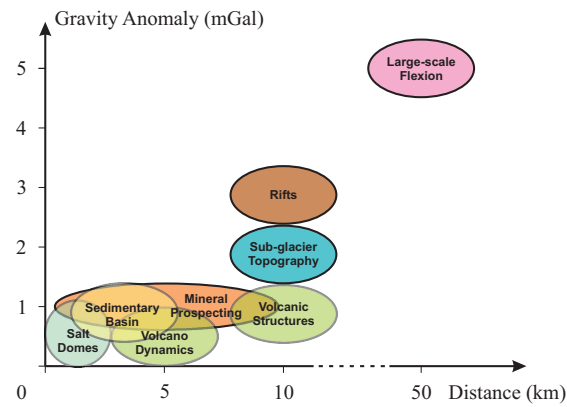


Fig. 25. – (Colour online) Range and sensitivity required for various applications in gravity surveying.

the approximate magnitude of the associated gravity anomaly. A general rule of thumb is that a body must be almost as big as it is deep. A gravity survey will measure the vertical component of the gravitational force at specific locations (*e.g.* ground-based stations, or coordinates on water). Measurements can also be carried out in an aircraft, allowing consistent regional coverage in varied topography and offering rapid acquisition time compared to ground-based gravity surveys<sup>(16)</sup>. The total area, desired resolution, station spacing and topography of the region are a few of the factors to consider when deciding between a ground or airborne gravity survey. For instance, an airborne survey may provide better coverage and resolution in areas with steep topography or challenging terrain than a ground-based survey. However, a ground-based survey enables a more detailed characterization of an area, at the price of requiring a high station density. Typically, measurements separated by 1–3 m (with relative errors in spacing of  $\sim 10\%$  and elevation of  $\sim 1$  cm) are required to map anomalous masses with a maximum dimension of  $\sim 10$  m.

At each location, gravity measurements will change with time due to ocean tides and sensor calibration drift. Ocean tides may cause changes of 0.24 mGal in the worst cases, but the effect has a period of about 12.5 hours and, generally, it can be calculated and removed. Sensor drifts will depend of the type of gravimeter. For instance, the drift of absolute gravimeters, such as those based on matter-wave interference discussed in sect. 4.1, is far below the resolution limit of the instrument. Processing all of the gravimetric data is called *gravity reduction*. It refers to the subtraction of all the corrections mentioned at the beginning of sect. 6.2 in order to obtain the residual gravity anomaly.

The size and depth of gravity anomaly sources can be interpreted using a direct comparison with the signal that is produced by simple shapes. For example, a horizontal tunnel with a rectangular cross-section can be modeled by a cylinder or a line with an infinite length, depending on the distance at which the measurements are taken. In this case, the gravity anomaly can be computed analytically

$$(53) \quad \Delta g_z = g_{\text{obs}} - g_{\text{pred}} \approx \frac{2\pi G \Delta \rho R^2 z}{x^2 + z^2}.$$

Here,  $R \ll z$  is the radius of the cylinder,  $z$  is the depth of the structure, and  $\Delta \rho$  is the difference in mean density between the inferred and the predicted mass distribution. Figure 26 illustrates the effect of infinite cylinders with different depths and radii on the gravity anomaly. Indeed, unless one is very close to the structure, its exact shape is not important. More detailed information about the source can be obtained by using inversion algorithms, but gravity surveys will always be limited by ambiguity<sup>(17)</sup> and the assumption of homogeneity. Additional geological data about the surrounding region

<sup>(16)</sup> In an airborne environment, gravity gradiometers are preferred over gravimeters, because of their enhanced sensitivity, lower noise levels and higher spatial resolution. This technique has been successfully deployed on helicopters, single-engine and multi-engine fixed-wing aircraft [94].

<sup>(17)</sup> A distribution of small masses at a shallow depth can produce the same effect as a large mass buried deeper.

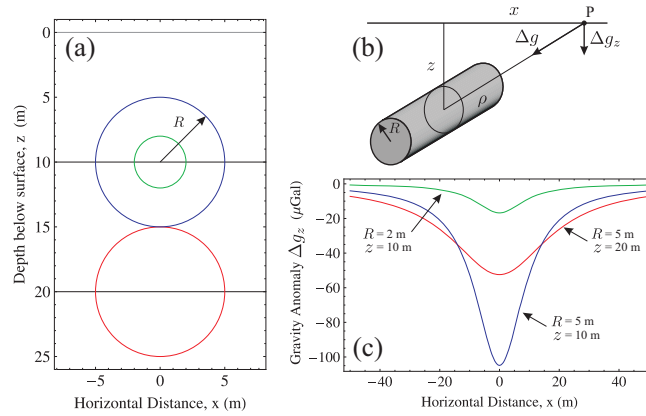


Fig. 26. – (Colour online) (a) Cross-section of three infinite cylinders at a depth,  $z$ , below ground, with radii  $R = 5$  m (red and blue) and  $R = 2$  m (green). (b) Diagram of an infinite cylinder giving rise to the gravity anomaly,  $\Delta g_z$ , given by eq. (53). Here,  $\rho$  is the mean density,  $R$  is the radius of the cylinder,  $z$  is the depth to the central axis, and  $x$  is the horizontal distance from the observation point,  $P$ . (c) Plots of the gravity anomaly as a function of  $x$  for the infinite cylinders shown in (a). The cavities are assumed to have a difference in mean density of  $\Delta\rho = -10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

(measurements of local rock densities, seismic surveys, ground-penetrating radar and core-drilling information) are usually required in order to resolve this issue.

**6.3. Gravitational waves.** – Einstein’s general theory of relativity predicts the existence of gravitational waves (GWs)—disturbances of spacetime that propagate at the speed of light and have two transverse quadrupolar polarizations [95]. Presently, the vast majority of astrophysical phenomena are observed with electro-magnetic waves, which originate from moving charges. In contrast, GWs are generated from the motion of massive (or energetic) bodies, and can therefore unveil an entirely new spectrum of information that is not possible to extract electro-magnetically. This will bring forth new possibilities to explore details about the early universe, to observe new phenomena, such as binary systems of black-holes and neutron stars, that comprise a host of unexplored territory in fundamental physics.

Gravitational waves manifest themselves as a periodic variation in the separation between two test masses—an effect on which all current GW detectors are based. A classic example is that of an astronaut’s observations while orbiting the Earth in a windowless spacecraft. Observing the slow relative drift of two objects, initially placed at separate positions and at rest with respect to one another, allows the astronaut to detect the tidal influence of the Earth on local spacetime. In the case of the LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory—shown in fig. 27) or VIRGO projects, one measures via light propagation time the influence of gravitational waves on pairs of test masses (mirrors) separated by 4 km in a large-scale optical Michelson interferometer. Gravitational





Fig. 27. – (Colour online) Aerial photographs of the LIGO observatories at Hanford, Washington (left) and Livingston, Louisiana (right). The lasers and optics are contained in the white and blue buildings. From the large corner building, evacuated beam tubes extend at right angles for 4 km in each direction which are covered by the arched, concrete enclosures. The full length of only one of the arms is shown in each image. Photos courtesy of the LIGO scientific collaboration.

radiation is likely to be detected (with a frequency of less than a few kHz) from sources with sizes comparable to the wavelength of the radiation (*i.e.*  $\lambda \gtrsim 300$  km). Hence, the signal reflects coherent motion of extremely massive objects. The primary challenge in detecting GWs is that the magnitude of these effects in the vicinity of Earth is extremely small. The strength of GWs is characterized by the unitless amplitude  $h$ , which is given by [96]

$$(54) \quad h = \frac{2\Delta L}{L}.$$

Here,  $\Delta L$  is the change in distance between the two test masses, and  $L$  is their mean separation. Even for the most violent astrophysical events, such as coalescing binary neutron stars,  $h$  is of order  $10^{-21}$  or smaller [97].

To lowest order, gravitational radiation is a quadrupolar phenomenon, which leads to polarizations that are crossed at  $45^\circ$ . In comparison, electric and magnetic dipole interactions are responsible for electromagnetic radiation, which have orthogonal polarizations (crossed at  $90^\circ$ ). In passing through ordinary matter, gravitational radiation suffers no more than a tiny absorption or scattering (although, like light, it is subject to gravitational lensing by large masses). As a result, GWs can carry coherent information about violent processes, for example, deep within stars or behind dust clouds. Even neutrinos have a large scattering cross sections compared to GWs<sup>(18)</sup>.

<sup>(18)</sup> It appears to be utterly impractical with current technology to detect man-made GWs. To borrow a classic example from Saulson [97], imagine a dumbbell consisting of two 1 ton compact masses with their centers separated by 2 meters and spinning at 1 kHz about a line bisecting and orthogonal to their symmetry axis. Setting aside the impracticality of such a fast dumbbell rotation, for an observer in the radiation zone 300 km away, one obtains an amplitude of  $h \sim 10^{-38}$ .

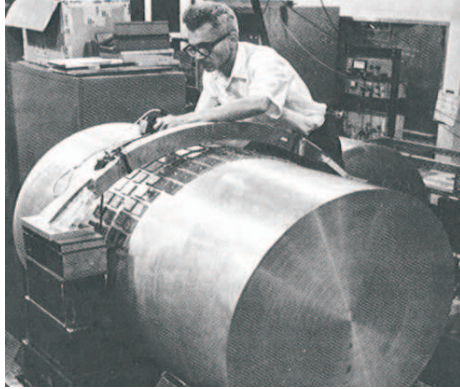


Fig. 28. – Joe Weber working on an early GW detection bar with piezo-electric transducers as strain sensors (circa 1965). Photo courtesy of the University of Maryland.

Gravitational wave sources can be classified in four broad categories [98]: i) short-lived and well-defined, for which coalescence of a compact binary system is the canonical example; ii) short-lived and *a priori* poorly known, for which a supernova explosion is the canonical example; iii) long-lived and well-defined, *e.g.* continuous waves from spinning neutron stars; and iv) long-lived and stochastic, *e.g.* primordial GWs from the Big Bang. For existing and upcoming terrestrial detectors, the most promising category is the first. Detectable event rates for compact binary coalescence (CBC) can be estimated with the greatest confidence and imply highly likely discovery by Advanced-LIGO and VIRGO detectors<sup>(19)</sup>.

Until the mid-20th century, there remained some question as to whether or not GWs were truly predicted by general relativity [101]. It was not obvious that what appeared to be a wave phenomenon could not be explained as an artifact of coordinate or gauge transformations. The reality of GW prediction was confirmed, however, by the realization that energy could be extracted from the waves, *i.e.* it was possible, in principle, to build a detector that could register their passage [101].

The earliest man-made GW detectors were based on a simple thought experiment: if two masses on a spring are momentarily stretched apart and then compressed by a GW, potential energy is imparted to the spring, independent of how coordinates are defined. If the characteristic frequency of the wave is near the resonance frequency of the mechanical system, the response to the wave is magnified (not unlike an LRC

---

<sup>(19)</sup> Since writing this article, the BICEP2 Collaboration has discovered the first direct evidence of gravitational waves. Using a radio telescope located at the South Pole, they detected primordial GWs left over from the Big Bang in the polarization of cosmic microwave background radiation. Their work [99,100] was still under review at the time of publication of this article.

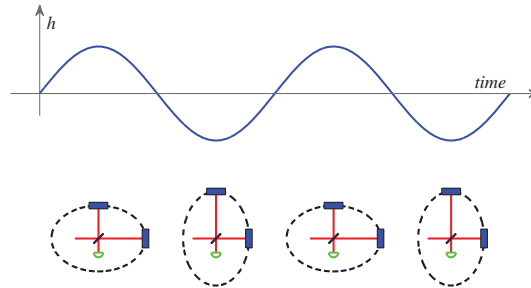


Fig. 29. – (Colour online) Illustration of the effect of a GW on the arms of a Michelson interferometer, where the readout photodiode is denoted by the green semi-circle. Taken from ref. [104].

antenna circuit’s response to a passing electromagnetic wave). One early approach was to search for excitations of vibrational modes in the Earth’s crust (sub-mHz and higher harmonics). This technique was useful for setting upper limits, but large earthquakes made it unattractive for detection purposes.

In practice, since it is the elastic energy that matters, the first GW detectors were simple metal cylinders, where the energy converted to longitudinal oscillations of the bar was measured via piezoelectric transducers near the “waist” of the bar, as shown in fig. 28. Here, the goal was to observe a sudden change in the amplitude of normal thermal motion [102]. Joe Weber of the University of Maryland pioneered this detector design and implementation. He also reported anomalies attributed to GWs, such as coincident transients in geographically separated pairs of bars [103], but subsequent experiments with comparable or more sensitive instruments failed to confirm his reported detections.

Gravitational-wave interferometers take a different approach to detection from that of resonant bars. Setting aside enhancements to be discussed below, a simple right-angle Michelson laser interferometer, as shown in the cartoon in fig. 29 is a natural GW detector. For example, a linearly polarized wave impinging normally on the interferometer with its polarization axis aligned with the arms will alternately stretch one arm while contracting the other. One common question is how this alternation is detected, given that the laser light is stretched and compressed too. The answer is that the detection is based on the phase difference between the light returning from each arm, and that phase difference increases with time, following the passage of the GW. The red-shifted light simply takes longer to complete its round-trip in the arm than the blue-shifted light. Hence, even a simple GW interferometer has a finite and frequency-dependent response time.

The basic idea for a GW interferometer was first written in 1962 and it quickly became appreciated that laser interferometers had the potential to surpass bar detectors in sensitivity. Some of the subsequent improvements to this idea included i) using Fabry-Perot cavities for the interferometer arms to increase the time of exposure of the laser light

to the GW, ii) the introduction of a “recycling” mirror between the laser and beam splitter to increase the effective laser power, and iii) the introduction of an additional mirror between the beam splitter and photo-detector to allow tuning of the interferometer’s frequency response [105].

Both bars and interferometers are better thought of as antennae than as telescopes, because their sizes are small compared to the wavelengths they are meant to detect. For example, a bar detector with a size  $s = 3$  m and a resonant frequency of 900 Hz has  $s/\lambda \sim 10^{-5}$ . Similarly, the LIGO detectors, when searching at 4 kHz, have  $s/\lambda \sim 0.05$ . These small ratios imply broad antenna lobes. As a result, a single interferometer observing a transient event has very poor directionality.

One can do substantially better by triangulating detection from multiple detectors. For a given signal-to-noise ratio (SNR), coincident timing between two detectors leads to an allowed annulus on the sky with an angular thickness that is proportional to  $1/\text{SNR}$ . Combining each coincident pair in a network of three or more detectors favors intersections of these annular rings. In principle, requiring amplitude consistency of a putative sky location, and the known relative orientations of the detectors, resolves the ambiguities resulting from multiple intersections. However, polarization effects complicate this resolution, since detected amplitudes depend on the orientation of the GW source and this is typically not known.

**6.4. MIGA: An atom interferometric gravitational wave detector.** – The MIGA (Matter-wave-laser Interferometry Gravitation Antenna) experiment [106] will implement an atom-interferometry-based infrastructure for the investigation of the space strain tensor. The device will consist of an underground “Very Long Baseline Atom Interferometer” (VLBAI) to monitor the gravity field over a broad frequency band, ranging from 0.1 Hz to a few tens of Hz, that is inaccessible to the most sensitive Earth-based optical interferometers aiming at detecting GWs. The possible applications extend from fundamental physics (associated with GW detection), to monitoring geophysical signals, such as the evolution of Earth’s gravitational field, tectonic plates or general underground mass movements, as well as studies of various effects in hydrology.

The baseline design consists of a matter-wave-laser antenna, where two or more atom interferometers are coupled to a cavity-based optical interferometer through the radiation circulating in the resonator. The optical field stored in the cavity, which has ultra-low phase noise, will be used to coherently split, reflect and recombine the matter-waves. The combined atom-laser system will monitor the motion of the cavity and the forces acting on the atoms at the same time, and with a broad frequency resolution. The laser interferometer performs best at frequencies above 10 Hz, while the atom interferometers provide sensitivity at low frequency (10 Hz and below) due to their intrinsic high accuracy. The system will operate in a gravity-gradiometer configuration, with two (or more) atom interferometers residing in the one-arm optical gravitational detector, which is coupled to a highly precise laser link. This allows the variations of optical path between the two ensembles to be measured with extreme precision. These variations can be induced by the space strain due to a passing GW, or by fluctuating gravitational forces. During

the measurement, the atoms are in free fall, hence coupled to environmental vibrations only through gravity. Together with the use of the same laser light to operate the two interferometers, this strongly mitigates the effect of vibrations. The effect of the laser phase noise on the matter-wave interferometer can be reduced using i) a pre-stabilization cavity on the probe light source, ii) a second interferometer baseline, or iii) by adopting new interrogation schemes as proposed in ref. [107].

Intuitively the experiment can be seen as a periodic measurement of the propagation time of a laser between the two ensembles. A passing gravitational wave changes the distance between the two ensembles in a way proportional to their distance, and at the frequency of the GW. The effect on an interferometer with interrogation time  $T$ , and effective wave vector  $k_{\text{eff}}$ , is a phase shift

$$(55) \quad \Delta\phi \simeq h(\omega) \cdot 2k_{\text{eff}}L \cdot \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \sin(\phi_{\text{GW}}),$$

where  $h(\omega)$  is the strain at frequency  $\omega$ , and  $\phi_{\text{GW}}$  the phase of the GW at the beginning of the interferometric sequence. To maximize the strain sensitivity, the baseline  $L$  should be as large as experimentally achievable, which will not pose constraints on the matter-wave sensors since only the cavity laser light travels between the two locations to establish the coherent optical link.

The atom-interferometer-based GW detector we want to implement will be located at *Laboratoire Souterrain à Bas Bruit* (LSBB), in Rustrel, France. This objective will be pursued in two separate phases. During the first phase, the key components of the antenna will be designed, built and tested. A dedicated test facility will be set up at LP2N in Bordeaux, where a reduced scale prototype of the final experiment will be operated. A scheme of the MIGA-prototype is shown in fig. 30. It will consist of a 10 m linear optical cavity maintained in a high vacuum environment, with the two mirrors on ultra-stable vibration isolation systems, and two regions where the atom interferometers are operated. To obtain high sensitivity, a long interrogation time of 250 ms will be adopted for the interferometers by utilizing atoms launched along vertical parabolic trajectories. The laser link between the two cavity mirrors will be implemented with a telecom laser at 1560 nm maintained on resonance with the cavity. The interrogation of the rubidium atoms will require Bragg pulses at 780 nm, obtained via frequency doubling of the telecom laser. The use of a cavity-enhanced beam splitter—a new concept in atom interferometry—will bring forward several advantages. First, it will enable coherent splitting and recombination of different atomic ensembles that are separated over hundreds of meters—thus enhancing the instruments sensitivity to gravity-gradients and spacetime variations. Second, the cavity will filter the spatial laser mode, which is one of the main limiting factors in existing interferometers for long term measurements [71]. Third, large-momentum-transfer (LMT) beam splitters [108, 109] can be implemented as a result of the optical power that will accumulate in the resonator.

The second phase (2015–16) will consist of the construction of the antenna in the underground laboratory at LSBB. All the components previously validated in the test

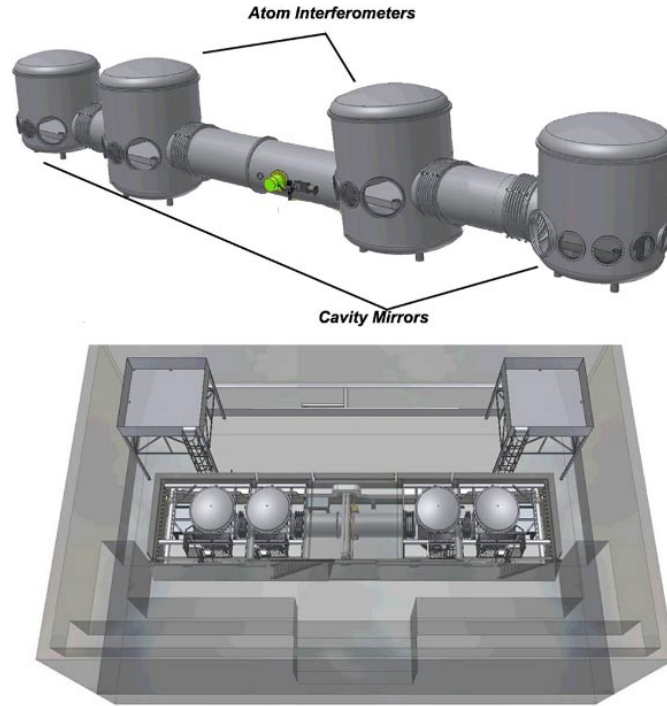


Fig. 30. – Design of the 10 m baseline MIGA-prototype at LP2N (Laboratoire Photonique Numérique et Nanosciences) in Bordeaux.

facility will be moved and installed at the final site, where the length,  $L$ , of the laser link will be 400 m. This will produce a 40-fold boost of the sensitivity when compared to the prototype, as indicated in fig. 31. The curve is also shifted to lower frequencies by a factor 2 because of a doubling of the interrogation time from  $T = 0.25$  s to 0.5 s. The projected peak strain sensitivity for the antenna will be  $\sim 10^{-16} \text{ Hz}^{-1/2}$  at 1 Hz. An important difference from the prototype will be the simultaneous use of more than two matter-wave heads distributed along the optical cavity, which will give the possibility of measuring not only the gravity gradient, but also its curvature or higher spatial moments.

Several techniques will then be investigated to push the sensitivity of MIGA toward the dashed curve in fig. 31, like the use of quantum enhanced input states to boost the sensitivity beyond the atomic shot-noise-limit [110-112], LMT beam splitters, and long interrogation times using trapped interferometric schemes.

From eq. (55) the antenna is maximally sensitive at frequencies  $\nu_n = (2n + 1)/(2T)$ , with the lowest maximally sensitive frequency of 2 Hz for the initial MIGA design, and

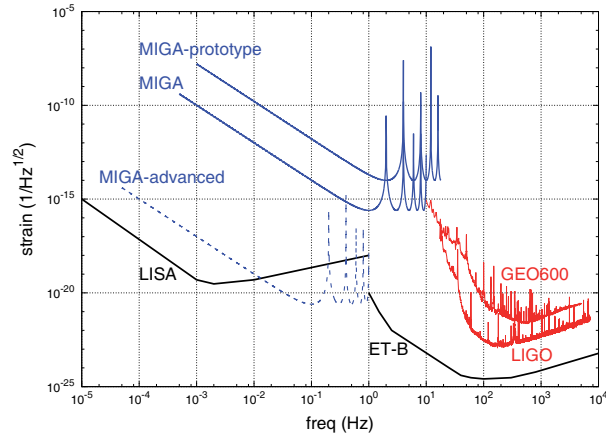


Fig. 31. – (Colour online) Comparison of strain sensitivity curves of different generations of atom-laser interferometers and their optical counterparts. The blue curves, for MIGA-prototype and MIGA, consider current technology ( $T = 0.25$  s and  $0.5$  s, respectively;  $4\hbar k$  beam splitters;  $L = 10$  m and  $400$  m, respectively; signal-to-noise ratio =  $10^{-3}$ ). The dashed MIGA-advanced curve is the projected sensitivity assuming a trapped sample ( $T = 5$  s), LMT beam splitters ( $400\hbar k$ ), and improved sensitivity from a large number of atoms and squeezed states. In red, the sensitivity curves of LIGO and GEO600—two operational Earth-based optical GW detectors. In black is the projected sensitivity of future optical GW detectors: the space-based LISA, and the underground Einstein Telescope.

potentially one order of magnitude less for an advanced version. The frequency band  $0.1$ – $100$  Hz is expected to be the host of several astrophysical phenomena producing GWs—such as binary pulsars, white dwarfs, neutron stars or black holes—that should produce gravitational radiation with a sweeping frequency as the pair of super-massive objects merge [113, 114]. At the same time, this range of frequency lies beyond the sensitive frequency band of all-optical GW detectors because of the effect of seismic and vibrational background noise. Atom interferometry could thus potentially extend the operational frequency range of existing optical interferometers.

## 7. – Atom interferometry in Space

Since the sensitivity of atom interferometers to inertial accelerations scales as the square of the time in free-fall, ground-based atom interferometric experiments are fundamentally limited. This is because an increasing time in free-fall implies an increasing path-length for the atom trajectory—making the control of systematic effects extremely challenging. An attractive alternative is the operation of an atom interferometer in a micro-gravity environment, as we discussed in sect. 5.3.

Performing Earth-based cold-atom experiments in  $0g$  requires a very compact and robust design, which is built to withstand extreme environmental conditions, such as the



vibrational noise onboard the zero- $g$  aircraft of ICE, or the  $\sim 50g$  deceleration during capsule recapture in the ZARM drop tower of QUANTUS. The micro-gravity phase of these experiments lasts between just 5 and 20 seconds, and measurements can be carried out only during these times. Between repetitions of the  $0g$  phase, the experiments can have long down times (2–3 drops per day for QUANTUS, two flight campaigns per year for ICE). Furthermore, the quality of micro-gravity in Earth-based systems is not perfect ( $\sim 0.01g$  fluctuations during parabolic flights).

In contrast, performing an experiment onboard a satellite offers the possibility of extremely long interrogation times with essentially continuous micro-gravity operation. In principle, under these conditions  $T$  would be limited only by the expansion time of the atoms out of the laser beams due to their temperature<sup>(20)</sup>. Atom interferometers in space promise sensitivities to differential accelerations on the order of  $10^{-12}g$  with  $T \sim 1$  s. This level of sensitivity is compatible with a test of the WEP on quantum objects of a few parts in  $10^{15}$  [59, 81, 115, 82]. Several developing projects within the ESA, the French space agency (CNES) and the German Aerospace Center (DLR), are today investigating the potential of cold-atom interferometry for precision measurements and fundamental tests in space.

We now review two proposed space missions to test the WEP with atom-based sensors. Other proposals involving atom-interferometric measurements in Space are discussed in refs. [116–118, 107].

**7.1. Q-WEP and STE-QUEST: Testing the equivalence principle in Space.** – The International Space Station (ISS) is a platform which is specifically designed for experiments in a continuously available micro-gravity environment. In 2011, the ESA launched the invitation to tender mission number AO/1-6763/11/NL/AF—“Atom Interferometry Test of the Weak Equivalence Principle in Space”, or Q-WEP. The main scientific objective of Q-WEP is to test the weak equivalence principle using an atom interferometer which is adapted for operation on the ISS. Additional applications, such as gravity gradiometry, have also been assessed as candidate experiments. The development of the first space-borne cold-atom sensor would make available new instruments for inertial measurements with an extremely high long-term stability, and a well-known calibration factor. Such technology is broadly applicable to a number of other interesting applications, such as inertial navigation and geodesy.

STE-QUEST (Space Time Explorer and Quantum Equivalence Space Test) was recommended by the Space Science Advisory Committee (SSAC) to be studied first internally, and afterwards with parallel industrial contracts. The primary goal of this mission is to perform a quantum test of the universality of free-fall by interferometrically tracking the propagation of two atomic species ( $^{85}\text{Rb}$  and  $^{87}\text{Rb}$ ), with a projected accuracy of  $10^{-15}$ . The concept of the mission is illustrated in fig. 32.

---

<sup>(20)</sup> For example, with ultra-cold  $^{87}\text{Rb}$  atoms at 10 nK, and a beam diameter of 2.5 cm, the most probable time for an atom to traverse one beam radius is  $\sim 9$  s in the absence of gravity.



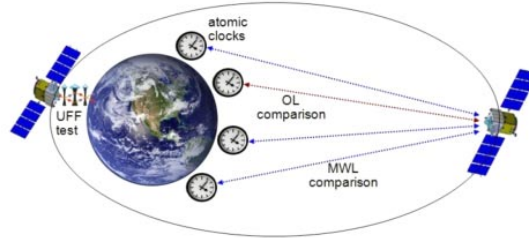


Fig. 32. – (Colour online) General concept of the STE-QUEST mission. During the perigee, the local acceleration of two rubidium isotopes is measured and compared.

The baseline design of the atom interferometry payload, the experimental scheme, and the nature of performance limits are similar for both Q-WEP and STE-QUEST. In the following sections, a general description is given which applies to both missions, unless otherwise stated. The term “spacecraft” will refer to the ISS for Q-WEP, and to the satellite for STE-QUEST.

**7.1.1. The measurement principle.** The Eötvös parameter  $\eta$  can be defined in terms of the differential acceleration between the two test bodies and their mean acceleration:  $\eta = \Delta a / \bar{a}$ , where  $\bar{a} = (a_1 + a_2)/2$ ,  $\Delta a = a_1 - a_2$ , and  $a_1$  and  $a_2$  are the accelerations of the two test objects. In the case of the atom interferometer, the two test bodies are samples of two ultra-cold atomic species. A direct readout of the differential acceleration is possible because the two species are prepared and interrogated simultaneously.

The basic operation of the interferometer is determined by the choice of atomic species. In both Q-WEP and STE-QUEST, the  $^{85}\text{Rb}$ - $^{87}\text{Rb}$  pair is chosen because of the excellent common-mode noise suppression that is achievable with these two isotopes. However, this choice requires a rather complex cooling scheme, involving a dual-isotope MOT, and a crossed optical dipole trap (ODT). The ODT is necessary to obtain Bose-condensed  $^{85}\text{Rb}$  because a Feshbach resonance is needed to modify the scattering length from a negative to a positive value. This requires several  $B$ -field generating coils and magnetic shielding to suppress the effects of external fields. The experimental apparatus will consist of a two-dimensional (2D) MOT that loads a three-dimensional (3D) MOT on a chip inside the vacuum system. The cycle time for Q-WEP is expected to be 12–18 s, depending on the duration of the atom interferometry sequence, and will be slightly longer for STE-QUEST.

A differential acceleration sensitivity of  $\eta \sim 10^{-14}$  has been projected for Q-WEP using a free evolution time  $T \sim 1$  s onboard the ISS. Similarly,  $\eta \sim 10^{-15}$  has been projected for STE-QUEST using a free-evolution time  $T \sim 5$  s on a dedicated satellite.

**7.1.2. Preparation of the ultra-cold source.** The ultra-cold dual-isotope sample is prepared in a vacuum system (shown in fig. 33 for STE-QUEST) that operates at extremely low pressures. To load the desired large number of atoms, a combination of a  $2\text{D}^+$ -MOT

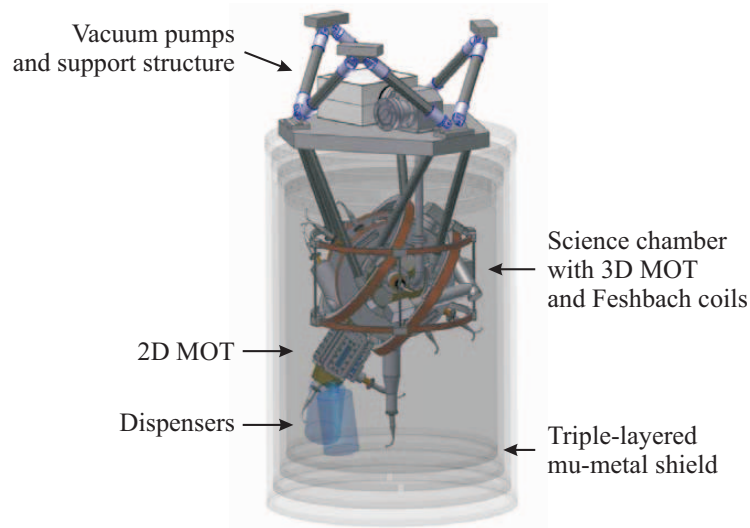


Fig. 33. – (Colour online) Design concept of the science chamber for STE-QUEST. A similar system is being constructed for Q-WEP. Image taken from ref. [119], courtesy of the German Aerospace Center (DLR).

and a 3D-MOT will be used. The  $2D^+$ -MOT produces a slow, dual-isotope atomic beam toward the main science chamber, using the continuous flow of atoms provided by an atomic dispenser. The trap consists of four magnetic coils and six laser beams carrying four wavelengths (cooling+repumping transitions for both isotopes). The slow atoms from the  $2D^+$ -MOT are captured and cooled on a chip by the combination of magnetic and light fields forming a 3D-MOT in a mirror configuration. The chip produces the magnetic gradient for 3D trapping, and provides a reflecting surface for two of the four laser beams. Three pairs of Helmholtz coils generate a uniform magnetic bias in the trapping region.

After loading  $\sim 10^9$  atoms of both isotopes in the 3D-MOT, the magnetic and optical configuration is changed into optical molasses for cooling to sub-Doppler temperatures. This is followed by a transfer to a purely magnetic trap, which pre-evaporates the ensembles and ensures a high transfer efficiency to the crossed ODT. A strong magnetic field is necessary to drive  $^{85}\text{Rb}$  through the Feshbach resonances. This allows the two species to be efficiently condensed.

After their release from the ODT, the atoms are prepared in the magnetically insensitive  $m_F = 0$  state of their lower hyperfine level via a microwave transition. This is followed by a transfer to the interferometer position, which must be at a sufficient distance from the chip. Precise positioning can be accomplished by means of coherent momentum transfer via stimulated Raman transitions.

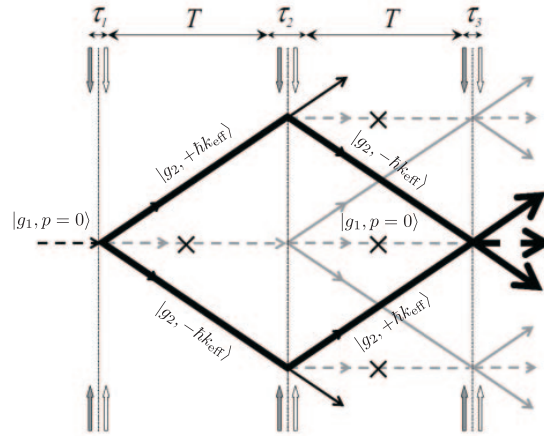


Fig. 34. – Illustration of the atomic trajectories involved in double diffraction, taken from ref. [121]. The bold lines show the states contributing to the interference at  $t = 2T + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ . The crosses indicate where the blow-away beam is applied to remove left-over population in the lower state,  $|g_1, p = 0\rangle$ .

**7.1.3. Atom interferometry sequence.** During this step, the atoms are simultaneously subjected to an interferometry pulse sequence where each pulse induces  $2\hbar k_{\text{eff}}$  of momentum to the atom (equivalent to a four-photon transition), as in the double-diffraction scheme presented in refs. [120, 121]. Double-diffraction is advantageous for an interferometer sequence in space, where the Doppler shift of the atoms is zero. Due to its symmetric momentum transfer, the center-of-mass of the atom remains in the same location throughout the entire sequence—making it an ideal choice for equivalence principle tests. This feature also makes a double-diffraction-based interferometer insensitive to a number of systematic effects and sources of noise, because they are common to both arms.

Figure 34 depicts the trajectories of the double-diffraction scheme. During the sequence, the first pulse acts as a splitter by inducing Raman transitions from  $|g_1, p = 0\rangle$  to an equal superposition of states  $|g_2, +\hbar k_{\text{eff}}\rangle$  and  $|g_2, -\hbar k_{\text{eff}}\rangle$ . The second pulse acts as a mirror by coupling each path to its opposite momentum state,  $|g_2, +\hbar k_{\text{eff}}\rangle \rightarrow |g_2, -\hbar k_{\text{eff}}\rangle$  for example. Atoms on both the momentum states  $\pm\hbar k_{\text{eff}}$  are in the same internal state,  $|g_2\rangle$ . After the first and the second pulse, a blow-away pulse removes residual atoms in the internal state  $|g_1\rangle$ . Finally, a third pulse combines the two pathways, and the population in the two internal states can be read out.

**7.1.4. Differential noise rejection.** With such a high sensitivity to acceleration, phase noise induced by vibrations of the reference mirror can span several interferometer fringe periods. A sensitive measurement of the relative phase of the two interferometers, which

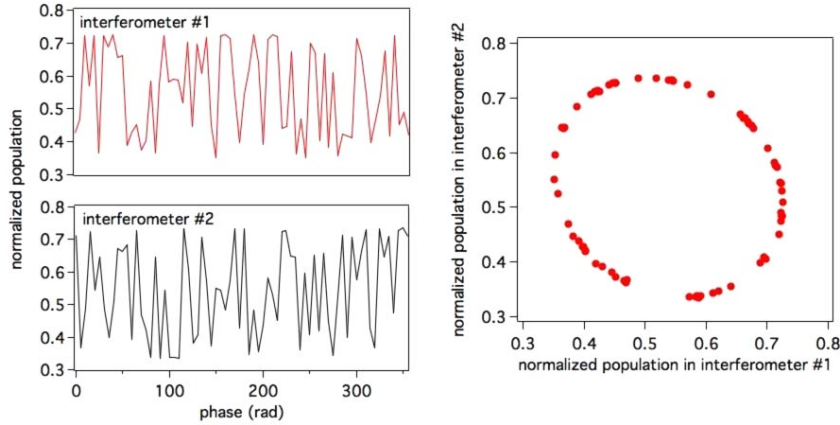


Fig. 35. – (Colour online) On the left is the signal from a pair of simultaneous interferometers, where vibrationally induced phase noise is larger than one period. On the right is Lissajous plot resulting from the composition of the two signals. The differential acceleration is determined from the ellipse rotation angle, as discussed in refs. [122, 74].

is proportional to the differential acceleration of the two atomic ensembles, can be obtained with the ellipse fitting method described in ref. [122]. This is an effective technique to suppress common-mode phase noise. Figure 35 illustrates this method, where the interference signal of one interferometer is plotted *versus* the interference signal of the other—resulting in an ellipse. The relative phase shift can be obtained from the eccentricity and rotation angle of the ellipse. A high common-mode rejection ratio requires a precise matching of the scale factor of the two atom interferometers, as has been shown in recent work by Sorrentino *et al.* [74].

**7.1.5. Mission duration.** For Q-WEP, assuming a single-shot sensitivity to differential acceleration in the range of  $4.4 \times 10^{-11} \text{ m/s}^2$ , and a cycle duration of 18 s, an integration time of  $10^7 \text{ s}$  (corresponding to  $5.6 \times 10^5$  experimental cycles) will be required to reach the target of  $\sim 6 \times 10^{-14} \text{ m/s}^2$  accuracy on differential acceleration, *i.e.* one part in  $10^{14}$  of the Eötvös parameter. Assuming a mission duty cycle of 40%, the WEP test will require about ten months, including an additional five months for the secondary objectives, and six months for commissioning and calibration, the entire mission duration is expected to be about 21 months.

For the STE-QUEST mission, the single-shot sensitivity to differential acceleration is projected to be  $\sim 3 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2$ . Since the atom interferometry measurement is only performed at the perigee passage, where the gravitational acceleration is large enough, a few thousands orbits are required to reach the targeted sensitivity of  $\sim 10^{-15} \text{ m/s}^2$  in  $\eta$ . Thus, the mission is expected to last 5 years.

**7.2. Advantages of Space-based atom interferometry.** – As mentioned above, both STE-QUEST and Q-WEP project free-evolution times of  $T \sim 1\text{--}5\text{ s}$  in order to reach their desired accuracy. In principle, these values are also possible in Earth-based systems, such as the 10 m vacuum system at Stanford [82]. However, in this case the atoms cannot simply be released out of the trap as in micro-gravity—they need to be launched in order to extend  $T$  to this scale. Due to the launch and Earth’s gravitational acceleration, the center of mass of the atomic trajectories is displaced by almost 10 m with respect to the retro-reflection mirror during the interferometer sequence. The launching process needs to be precisely controlled, because even small differential displacement or velocities of the atoms will impose non-negligible systematic errors. Additionally the apparatus needs to be carefully shielded against external magnetic fields over the launch height.

On the other hand, in micro-gravity a launch is not necessary. Both the atoms and the retro-reflection mirror are in free-fall after trap-release. Then, in the ideal case, there is no relative velocity between the atoms and the mirror, alleviating the need for a phase-continuous linear-frequency chirp that is required in ground-based gravimeters. More importantly, this also implies a compact setup since the vacuum chamber only needs to contain the splitting of atomic trajectories on the order of several centimeters. This reduces the volume over which external fields need to be suppressed.

To reach the atomic temperatures necessary for a high signal-to-noise ratio, and to reduce systematic errors, an optical dipole trap is planned for Q-WEP and STE-QUEST. Micro-gravity ensures precise localization of two different atomic species in the same dipole trap, since there is no longer a differential sag from the gravitational potential.

Relative to terrestrial matter-wave tests of the equivalence principle, Q-WEP and STE-QUEST also have the distinct advantage of a high rotation frequency of the spacecraft relative to the Earth. This makes possible the measurement of relativistic terms in the gravitational potential that scale as  $g(v/c)^2$ .

## 8. – Conclusion

In summary, we have reviewed a number of past, present and future projects in atom interferometry, with a particular focus on applications of the technology that has been developed over the last 20 years. Although this field has shown rapid growth, we have only begun to see cold-atom experiments leave the laboratory to be tested as portable field instruments during the past few years. Mobile and remote inertial sensing with cold atoms promises a new era of measurements for both applied and fundamental science. Although there are already many industrial applications of these highly sensitive devices—such as oil and mineral prospecting, remote object detection, and tidal chart correction—they may one day reach their limits in space, where current research aims to perform precise tests of the weak equivalence principle and to detect gravitational waves. In addition to advancing the development of cold-atom-based technology, these projects may reveal new and interesting physics related to, for example, our understanding of the early universe.

\* \* \*

This work is supported by the French national agencies CNES (Centre National d'Etudes Spatiales), l'Agence Nationale pour la Recherche (MiniAtom: ANR-09-BLAN-0026), the Délégation Générale de l'Armement, the European Space Agency, IFRAF (Institut Francilien de Recherche sur les Atomes Froids), action spécifique GRAM (Gravitation, Relativité, Astronomie et Métrologie) and RTRA "Triangle de la Physique". We would like to thank our partners of the MiniAtom collaboration: IXBLUE, KLOE, THALES and III-V Lab, and for the ICE project: ONERA. B. Barrett, P.-A. Gominet and L. Antoni-Micollier also thank CNES for financial support. P. Bouyer thanks Conseil Régional d'Aquitaine for the Excellence Chair. Finally, the ICE team thanks T. Rvachov of the Massachusetts Institute of Technology for his assistance with the "Cicero Word Generator" experimental control software.

## REFERENCES

- [1] DE BROGLIE L., *Compt. Rend.*, **177** (1923) 507.
- [2] DAVIDSON C. and GERMER L. H., *Phys. Rev.*, **30** (1927) 705.
- [3] ESTERMANN I. and STERN A., *Z. Phys.*, **61** (1930) 95.
- [4] RABI I., SACHARIAS J., MILLMAN S. and KUSCH P., *Phys. Rev.*, **53** (1938) 318.
- [5] RAMSEY N., *Phys. Rev.*, **76** (1949) 996.
- [6] ASHKIN A., *Phys. Rev. Lett.*, **40** (1978) 729.
- [7] PHILLIPS W. D., PRODAN J. and METCALF H., *J. Opt. Soc. Am. B*, **2** (1985) 1751.
- [8] RAAB E. L., PRENTISS M. G., CABLE A. E., CHU S. and PRITCHARD D. E., *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987) 2631.
- [9] ANDERSON M. H., ENSHER J. R., MATTHEWS M. R., WIEMAN C. E. and CORNELL E. A., *Science*, **269** (1995) 198.
- [10] DAVIS K. B., MEWES M.-O., ANDREWS M. R., DRUTEN M. J. V., DURFEE D. S., KURN D. M. and KETTERLE W., *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995) 3969.
- [11] CHU S., COHEN-TANNOUDJI C. and PHILLIPS W., *Nobel Lectures in Physics: 1996-2000* (World Scientific Pub. Co. Inc.) 2003, Ch. (1997) for development of methods to cool and trap atoms with laser light.
- [12] CORNELL E. A., KETTERLE W. and WIEMAN C. E., *Nobel Lectures in Physics: 2001-2005* (World Scientific Pub. Co. Inc.) 2008, Ch. (2001) for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates.
- [13] ALTSCHULER S. and FRANZ L. M., *Matter wave interferometric apparatus*, u.S. Patent No. 3,761,721 (1973).
- [14] CHEBOTAYEV V., DUBETSKY B., KASANTSEV A. and YAKOVLEV V., *J. Opt. Soc. Am. B*, **2** (1985) 1791.
- [15] CLAUSER J. F., *Physica B & C*, **151** (1985) 262.
- [16] PITKIN M., REID S., ROWAN S. and HOUGH J., *Phys. Lett. A*, **140** (1989) 10.
- [17] PRITCHARD D., *Matter wave optical systems in which an atomic beam intersects a diffraction grating at a grazing incidence*, u.S. Patent No. 4,886,964 (1989).
- [18] KASEVICH M. A. and CHU S., *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991) 181.
- [19] KASEVICH M. and CHU S., *Appl. Phys. B*, **54** (1992) 321.
- [20] WEISS D. S., YOUNG B. C. and CHU S., *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 2706.

- [21] CAHN S. B., KUMARAKRISHNAN A., SHIM U., SLEATOR T., BERMAN P. R. and DUBETSKY B., *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 784.
- [22] BERMAN P. R. (Ed.), *Atom Interferometry* (Academic Press, San Diego) 1997.
- [23] STREKALOV D. V., TURLAPOV A., KUMARAKRISHNAN A. and SLEATOR T., *Phys. Rev. A*, **66** (2002) 023601.
- [24] GUPTA S., DIECKMANN K., HADZIBABIC Z. and PRITCHARD D. E., *Phys. Rev. Lett.*, **89** (2002) 140401.
- [25] WEEL M. and KUMARAKRISHNAN A., *Phys. Rev. A*, **67** (2003) 061602(R).
- [26] BATTISTI R., CLADE P., GUELLATI-KHÉLIFA S., SCHWOB C., GRÉMAUD B., NEZ F., JULIEN L. and BIRABEN F., *Phys. Rev. Lett.*, **92** (2004) 253001.
- [27] GERLICH S., HACKERMULLER L., HORNBERGER K., STIBOR A., ULBRICHT H., GRING M., GOLDFARB F., SAVAS T., MURI M., MAYOR M. and ARNDT M., *Nat. Phys.*, **3** (1997) 711.
- [28] WU S., SU E. and PRENTISS M., *Phys. Rev. Lett.*, **99** (2007) 173201.
- [29] BEATTIE S., BARRETT B., CHAN I., MOK C., YAVIN I. and KUMARAKRISHNAN A., *Phys. Rev. A*, **79** (2009) 021605(R).
- [30] CLADE P., GUELLATI-KHÉLIFA S., NEZ F. and BIRABEN F., *Phys. Rev. Lett.*, **102** (2009) 240402.
- [31] TONYUSHKIN A., WU S. and PRENTISS M. G., *Phys. Rev. A*, **79** (2009) 051402(R).
- [32] ALBERTI A., FERRARI G., IVANOV V. V., CHIOFALO M. L. and TINO G. M., *New J. Phys.*, **12** (2010) 065037.
- [33] SU E. J., WU S. and PRENTISS M., *Phys. Rev. A*, **81** (2010) 043631.
- [34] BARRETT B., CHAN I., MOK C., CAREW A., YAVIN I., KUMARAKRISHNAN A., CAHN S. B. and SLEATOR T., *Time-Domain Interferometry with Laser-Cooled Atoms*, in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics, Vol. 60*, Vol. 60 (Elsevier Inc.) 2011, Ch. 3, pp. 119–199.
- [35] BARRETT B., CHAN I. and KUMARAKRISHNAN A., *Phys. Rev. A*, **84** (2011) 063623.
- [36] ANDIA M., JANNIN R., NEZ F., BIRABEN F., GUELLATI-KHÉLIFA S. and CLADÉ P., *Phys. Rev. A*, **88** (2013) 031605(R).
- [37] JAMISON A. O., PLOTKIN-SWING B. and GUPTA S., *Controlling Interactions in a Yb Bose-Einstein Condensate Interferometer*, arXiv:1404.6028v1 [cond-mat.quant-gas] (24 April 2014).
- [38] CRONIN A., SCHMIEDMAYER J. and PRITCHARD D. E., *Rev. Mod. Phys.*, **81** (2009) 1051.
- [39] PETERS A., CHUNG K. Y. and CHU S., *Metrologia*, **38** (2001) 25.
- [40] WICHT A., HENSLEY J. M., SARAJLIC E. and CHU S., *Phys. Scr. T*, **102** (2002) 82.
- [41] FIXLER J. B., FOSTER G. T., MCGUIRK J. M. and KASEVICH M. A., *Science*, **315** (2007) 74.
- [42] LAMPORESI G., BERTOLDI A., CACCIAPUOTI L., PREVEDELLI M. and TINO G., *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2008) 050801.
- [43] BOUCHENDIRA R., CLADE P., GUELLATI-KHÉLIFA S., NEZ F. and BIRABEN F., *Phys. Rev. Lett.*, **106** (2011) 080801.
- [44] MEWES M.-O., ANDREWS M. R., KURN D. M., DURFEE D. S., TOWNSEND C. G. and KETTERLE W., *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 582.
- [45] ANDERSON B. P. and KASEVICH M. A., *Science*, **282** (1998) 1682.
- [46] HAGLEY E. W., DENG L., KOZUMA M., WEN J., HELMERSON K., ROLSTON S. L. and PHILLIPS W. D., *Science*, **283** (1999) 1706.
- [47] BLOCH I., HÄNSCH T. W. and ESSLINGER T., *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999) 3008.
- [48] BOUYER P. and KASEVICH M. A., *Phys. Rev. A*, **56** (1997) R1083.
- [49] MOK C., BARRETT B., CAREW A., BERTHIAUME R., BEATTIE S. and KUMARAKRISHNAN A., *Phys. Rev. A*, **88** (2013) 023614.



- [50] STOREY P. and COHEN-TANNOUJDI C., *J. Phys. II France*, **4** (1994) 1999.
- [51] FEYNMAN R. P., *Rev. Mod. Phys.*, **20** (1948) 367.
- [52] PETERS A., CHUNG K. Y. and CHU S., *Nature*, **400** (1999) 849.
- [53] MOLER K., WEISS D. S., KASEVICH M. A. and CHU S., *Phys. Rev. A*, **45** (1992) 342.
- [54] BORDÉ C. J., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **2** (2001) 509.
- [55] BORDÉ C. J., *Metrologia*, **39** (2002) 435.
- [56] ANTOINE C. and BORDÉ C. J., *Phys. Lett. A*, **306** (2003) 277.
- [57] DICK G. J., *Local oscillator induced instabilities in trapped ion frequency standards*, in proc. of *19th Annual Precise Time and Time Interval* (U.S. Naval Observatory) 1987, pp. 133–147.
- [58] CHEINET P., CANUEL B., PEREIRA DOS SANTOS F., GAUGUET A., YVER-LEDUC F. and LANDRAGIN A., *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **57** (2008) 1141.
- [59] GEIGER R., MÉNORET V., STERN G., ZAHZAM N., CHEINET P., BATTELIER B., VILLING A., MORON F., LOURS M., BIDEL Y., BRESSON A., LANDRAGIN A. and BOUYER P., *Nature comm.*, **2** (2011) 474.
- [60] BODART Q., MERLET S., MALOSSI N., PEREIRA DOS SANTOS F., BOUYER P. and LANDRAGIN A., *Appl. Phys. Lett.*, **96** (2010) 134101.
- [61] BIDEL Y., CARRAZ O., CHARRIÈRE R., CADORET M., ZAHZAM N. and BRESSON A., *Appl. Phys. Lett.*, **102** (2013) 144107.
- [62] BERTOLDI A., LAMPORESI G., CACCIAPUOTI L., DE ANGELIS M., FATTORI M., PETELSKI T., PETERS A., PREVEDELLI M., STUHLER J. and TINO G. M., *Euro. Phys. J. D*, **40** (2006) 271.
- [63] SNADDEN M. J., MCGUIRK J. M., BOUYER P., HARITOS K. G. and KASEVICH M. A., *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 971.
- [64] MCGUIRK J. M., FOSTER G. T., FIXLER J. B., SNADDEN M. J. and KASEVICH M. A., *Phys. Rev. A*, **65** (2002) 033608.
- [65] GUSTAVSON T. L., BOUYER P. and KASEVICH M. A., *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997) 2046.
- [66] GUSTAVSON T. L., LANDRAGIN A. and KASEVICH M. A., *Class. Quantum Grav.*, **17** (2000) 2385.
- [67] CANUEL B., LEDUC F., HOLLEVILLE D., GAUGUET A., FILS J., VIRDIS A., CLAIRON A., DIMARCQ N., BORDÉ C. J., LANDRAGIN A. and BOUYER P., *Phys. Rev. Lett.*, **97** (2006) 010402.
- [68] CHEINET P., PEREIRA DOS SANTOS F., PETELSKI T., LE GOUËT J., KIM J., THERKILDSEN K. T., CLAIRON A. and LANDRAGIN A., *Appl. Phys. B*, **84** (2006) 643.
- [69] ZHONG-KUN HU, BU-LIANG SUN, XIAO-CHUN DUAN, MIN-KANG ZHOU, LE-LE CHEN, SU ZHAN, QIAO-ZHEN ZHANG and JUN LUO *Phys. Rev. A*, **88** (2013) 043610.
- [70] GILLOT P., FRANCIS O., LANDRAGIN A., PEREIRA DOS SANTOS F. and MERLET S., *Metrologia*, **51** (2014) L15.
- [71] LOUCHET-CHAUVET A., FARAH T., BODART Q., CLAIRON A., LANDRAGIN A., MERLET S. and PEREIRA DOS SANTOS F., *New J. Phys.*, **13** (2011) 065025.
- [72] JIANG Z. *et al.*, *Metrologia*, **49** (2012) 666.
- [73] FRANCIS O. *et al.*, *Metrologia*, **50** (2013) 257.
- [74] SORRENTINO F., BERTOLDI A., BODART Q., CACCIAPUOTI L., DE ANGELIS M., LIEN Y., PREVEDELLI M., ROSI G. and TINO G., *Appl. Phys. Lett.*, **101** (2012) 114106.
- [75] BONNIN A., ZAHZAM N., BIDEL Y. and BRESSON A., *Phys. Rev. A*, **88** (2013) 043615.
- [76] WILLIAMS J. G., TURYSHEV S. G. and BOGGS D. H., *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2004) 261101.
- [77] SCHLAMMINGER S., CHOI K.-Y., WAGNER T. A., GUNDLACH J. H. and ADELBERGER E. G., *Phys. Rev. Lett.*, **100** (2008) 041101.
- [78] WILL C. M., *Living Rev. Relativity*, **9** (2006) 3.



- [79] VAROQUAUX G., NYMAN R. A., GEIGER R., CHEINET P., LANDRAGIN A. and BOUYER P., *New Journal of Physics*, **11** (2009) 113010.
- [80] VOGEL A., SCHMIDT M., SENGSTOCK K., BONGS K., LEWOCZKO W., SCHULDT T., PETERS A., VAN ZOEST T., ERTMER W., RASEL E., STEINMETZ T., REICHEL J., KÖNEMANN T., BRINKMANN W., GÖKLÜ E., LÄMMERZAHL C., DITTUS H., NANDI G., SCHLEICH W. P. and WALSER R., *Appl. Phys. B*, **84** (2006) 663.
- [81] MÜNTINGA H., AHLERS H., KRUTZIK M., WENZLAWSKI A., ARNOLD S., BECKER D., BONGS K., DITTUS H., DUNCKER H., GAALLOU N., GHERASIM C., GIESE E., GRZESCHIK C., HÄNSCH T. W., HELLMIG O., HERR W., HERRMANN S., KAJARI E., KLEINERT S., LÄMMERZAHL C., LEWOCZKO-ADAMCZYK W., MALCOLM J., MEYER N., NOLTE R., PETERS A., POPP M., REICHEL J., ROURA A., RUDOLPH J., SCHIEMANGK M., SCHNEIDER M., SEIDEL S. T., SENGSTOCK K., TAMMA V., VALENZUELA T., VOGEL A., WALSER R., WENDRICH T., WINDPASSINGER P., ZELLER W., VAN ZOEST T., ERTMER W., SCHLEICH W. P. and RASEL E. M., *Phys. Rev. Lett.*, **110** (2013) 093602.
- [82] DICKERSON S. M., HOGAN J. M., SUGARBAKER A., JOHNSON D. M. S. and KASEVICH M. A., *Phys. Rev. Lett.*, **111** (2013) 083001.
- [83] SUGARBAKER A., DICKERSON S. M., HOGAN J. M., JOHNSON D. M. S. and KASEVICH M. A., *Phys. Rev. Lett.*, **111** (2013) 113002.
- [84] KESHET A. and KETTERLE W., *Rev. Sci. Instrum.*, **84** (2013) 015105.
- [85] MÉNORET V., GEIGER R., STERN G., ZAHZAM N., BATTELLIER B., BRESSON A., LANDRAGIN A. and BOUYER P., *Opt. Lett.*, **36** (2011) 4128.
- [86] CAMPBELL R., SMITH R., TAMMUZ N., BEATTIE S., MOULDER S. and HADZIBABIC Z., *Phys. Rev. A*, **82** (2010) 063611.
- [87] LANDINI M., ROY S., CARCAGNÍ L., TRYPOGEORGOS D., FATTORI M., INGUSCIO M. and MODUGNO G., *Phys. Rev. A*, **84** (2011) 043432.
- [88] GOKHROO V., RAJALAKSHMI G., KOLLENGODE EASWARAN R. and UNNIKRISHNAN C. S., *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **44** (2011) 115307.
- [89] SALOMON G., FOUCHÉ L., WANG P., ASPECT A., BOUYER P. and BOURDEL T., *EPL*, **104** (2013) 63002.
- [90] JEKELI C., *J. Inst. Nav.*, **52** (2005) 1.
- [91] MÉNORET V., *Accéléromètre à atomes froids aéroporté pour un test du principe d'équivalence*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud (2012).
- [92] NEWTON I., *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (“*Mathematical Principles of Natural Philosophy*”) (London) 1987.
- [93] US Geological Survey website: [http://pubs.usgs.gov/of/2004/1258/HTML/NE\\_grav\\_small\\_map.htm](http://pubs.usgs.gov/of/2004/1258/HTML/NE_grav_small_map.htm) (accessed November 23, 2013).
- [94] BLOMFIELD M., MULÉ S., DRANSFIELD M. and ANNISON C., *Advances in Airborne Geophysics*, in proc. of *10th SEGJ International Symposium, Kyoto, Japan 2011*, pp. 1–2.
- [95] THORNE K. S., *300 Years of Gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge, England) 1987.
- [96] PITKIN M., REID S., ROWAN S. and HOUGH J., *Living Rev. Relativity*, **14** (2011) 5.
- [97] SAULSON P. R., *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors* (World Scientific, Singapore) 1994.
- [98] LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION AND VIRGO COLLABORATION, Tech. rep., LIGO Report T1100322, Virgo Report VIR-0353A-11 (2010-2011).
- [99] BICEP2 COLLABORATION, *BICEP2 I: Detection of B-mode Polarization at Degree Angular Scales*, arXiv:1403.3985 [astro-ph] (18 March 2014).
- [100] BICEP2 COLLABORATION, *BICEP2 II: Experiment and Three-Year Data Set*, arXiv:1403.4302 [astro-ph] (3 April 2014).

- [101] SAULSON P. R., *Gen. Relativ. Gravit.*, **43** (2011) 3289.
- [102] WEBER J., *Phys. Rev.*, **117** (1960) 306.
- [103] WEBER J., *Phys. Rev. Lett.*, **22** (1969) 1320.
- [104] ABBOTT B. P., *et al.* (LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION), *Rep. Prog. Phys.*, **72** (2009) 076901.
- [105] MEERS B. J., *Phys. Rev. D*, **38** (1988) 2317.
- [106] MIGA project website: <https://sites.google.com/site/migaproject/> (accessed November 2013).
- [107] GRAHAM P. W., HOGAN J. M., KASEVICH M. A. and RAJENDRAN S., *Phys. Rev. Lett.*, **110** (2013) 171102.
- [108] CHIOU S.-W., KOVACHY T., CHIEN H.-C. and KASEVICH M. A., *Phys. Rev. Lett.*, **107** (2011) 130403.
- [109] McDONALD G. D., KUHN C. C. N., BENNETTS S., DEBS J. E., HARDMAN K. S., JOHNSON M., CLOSE J. D. and ROBINS N. P., *Phys. Rev. A*, **88** (2013) 053620.
- [110] APPEL J., WINDPASSINGER P. J., OBLAK D., HOFF U. B., KJÆRGAARD N. and POLZIK E. S., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **106** (2009) 10960.
- [111] SCHLEIER-SMITH M. H., LEROUX I. D. and VULETIĆ V., *Phys. Rev. Lett.*, **104** (2010) 073604.
- [112] BOHNET J. G., COX K. C., NORCIA M. A., WEINER J. M., CHEN Z. and THOMPSON J. K., *Reduced back-action for phase sensitivity 10 times beyond the standard quantum limit*, arXiv:1310.3177 [quant-ph] (11 October 2013).
- [113] SCHULTZ B. F., *Classical Quantum Gravity*, **16** (1999) A131.
- [114] CREIGHTON J. D. E. and ANDERSON W. G., *Gravitational-Wave Physics and Astronomy: An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis* (Wiley-VCH, Weinheim, Germany) 2011.
- [115] TINO G. M. *et al.*, *Nuc. Phys. B (Proc. Suppl.)*, **243-244** (2013) 203.
- [116] DIMOPOULOS S., GRAHAM P. W., HOGAN J. M. and KASEVICH M. A., *Phys. Rev. D*, **78** (2008) 122002.
- [117] SORRENTINO F., BONGS K., BOUYER P., CACCIAPUOTI L., ANGELIS M., DITTUS H., ERTMER W., GIORGINI A., HARTWIG J., HAUTH M., HERRMANN S., INGUSCIO M., KAJARI E., KÖNEMANN T. T., LÄMMERZAHL C., LANDRAGIN A., MODUGNO G., PEREIRA DOS SANTOS F., PETERS A., PREVEDELLI M., RASEL E. M., SCHLEICH W. P., SCHMIDT M., SENGER A., SENGSTOCK K., STERN G., TINO G. M. and WALSER R., *Microgravity Sci. Technol.*, **22** (2010) 551.
- [118] HOGAN J. M., JOHNSON D. M. S., DICKERSON S., KOVACHY T., SUGARBAKER A., CHIOU S.-W., GRAHAM P. W., KASEVICH M. A., SAIF B., RAJENDRAN S., BOUYER P., SEERY B. D., FEINBERG L. and KESKI-KUHA R., *Gen. Relativ. Gravit.*, **43** (2011) 1953.
- [119] STE-QUEST COLLABORATION, Tech. rep., Leibniz Universität Hannover, Cosmic Vision Mission: STE-QUEST Atom Interferometer Instrument Design Report (September 2013).
- [120] LÉVÈQUE T., GAUGUET A., MICHAUD F., PEREIRA DOS SANTOS F. and LANDRAGIN A., *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009) 080405.
- [121] MALOSSI N., BODART Q., MERLET S., LÉVÈQUE T., LANDRAGIN A. and PEREIRA DOS SANTOS F., *Phys. Rev. A*, **81** (2010) 013617.
- [122] FOSTER G. T., FIXLER J. B., MCGUIRK J. M. and KASEVICH M. A., *Opt. Lett.*, **27** (2002) 951.

---

## Phase Locking a Clock Oscillator to a Coherent Atomic Ensemble

R. Kohlhaas,<sup>1,2</sup> A. Bertoldi,<sup>3,\*</sup> E. Cantin,<sup>3,4</sup> A. Aspect,<sup>1</sup> A. Landragin,<sup>2</sup> and P. Bouyer<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique, CNRS, Université Paris-Sud,  
avenue Augustine Fresnel, F-91127 Palaiseau, France

<sup>2</sup>LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS and UPMC,  
61 avenue de l'Observatoire, F-75014 Paris, France

<sup>3</sup>Laboratoire Photonique, Numérique et Nanosciences—LP2N Université Bordeaux—IOGS—CNRS:  
UMR 5298, rue Mitterrand, F-33400 Talence, France

<sup>4</sup>Quantel, 4 rue Louis de Broglie, Building D, F-22300 Lannion, France

(Received 20 October 2014; revised manuscript received 19 February 2015; published 27 April 2015)

The sensitivity of an atomic interferometer increases when the phase evolution of its quantum superposition state is measured over a longer interrogation interval. In practice, a limit is set by the measurement process, which returns not the phase but its projection in terms of population difference on two energetic levels. The phase interval over which the relation can be inverted is thus limited to the interval  $[-\pi/2, \pi/2]$ ; going beyond it introduces an ambiguity in the readout, hence a sensitivity loss. Here, we extend the unambiguous interval to probe the phase evolution of an atomic ensemble using coherence-preserving measurements and phase corrections, and demonstrate the phase lock of the clock oscillator to an atomic superposition state. We propose a protocol based on the phase lock to improve atomic clocks limited by local oscillator noise, and foresee the application to other atomic interferometers such as inertial sensors.

DOI: 10.1103/PhysRevX.5.021011

Subject Areas: Atomic and Molecular Physics,  
Quantum Physics

From the first observations of Huygens on the coordinated motion of coupled nonlinear oscillators [1], phase synchronization has evolved to an indispensable tool for time and frequency metrology and starts to be investigated for quantum systems [2–4]. Phase-lock loops (PLLs) [5], where a local oscillator (LO) is phase locked to a reference signal, are widely used for the generation of atomic time scales [6,7], the synchronization in telecommunication [8], or in radio navigation [9]. In usual atomic frequency standards, however, only the frequency of the local oscillator is locked on the atomic resonance. This feature derives from the quantum nature of the reference system, i.e., the quantum superposition of two internal states of an ensemble of atoms, molecules, or ions, which is destroyed by the detection at the end of the interrogation process. A similar limitation exists for any measurement of a quantum system as in magnetometers or inertial sensors [10]. Locking the phase of the local oscillator onto the phase of the quantum superposition of the two levels of the quantum system would improve the long-term stability, as the phase is the integral of the frequency, and reduce the constraints on the

stability of the LO or of the measured signal. More in general, phase locking a classical system to a quantum system would give a direct link in metrology to the fundamental oscillations of quantum particles and could lead to enhanced sensitivities and new applications in precision measurements. Here, we demonstrate the direct phase lock of a LO to an atomic ensemble, based on repeated coherence-preserving measurements of the atomic ensemble. We also study how this technology could improve atomic clocks subject to local oscillator noise.

In an atomic clock, the frequency of a LO is repeatedly referenced to an atomic transition frequency by comparing their respective phase evolutions in an interrogation time  $T$  and applying a feedback correction. During the interrogation, the atoms are in a superposition state, and the projection of the relative phase between the LO and the atomic ensemble is measured as a population imbalance of the two clock levels. The readout is thus a sinusoidal function of the phase drift, and the latter can only be unambiguously determined if it stays within the  $[-\pi/2, \pi/2]$  interval, hereafter called the inversion region. Hence, for a given LO noise, the interrogation time of the atomic transition must be kept short enough such that phase drifts beyond the inversion region are avoided. Currently, LO noise limits the interrogation time in ion [11] and optical lattice clocks [12–15] and is expected to become a limit for microwave clocks with the recently discovered spin-self-rephasing effect [16]. The standard approach to

\*andrea.bertoldi@institutoptique.fr

Published by the American Physical Society under the terms of the Creative Commons Attribution 3.0 License. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI.

tackling this issue consists in improving the quality of local oscillators [17–21]. As an alternative, it has been recently proposed to track and stabilize the LO phase evolution using several atomic ensembles probed with increasing interrogation time [22,23] or by enhancing the Ramsey-interrogation interval by stabilizing the LO either via cascaded frequency corrections [24] or by coherence-preserving measurements on the same atomic ensemble and feedback [25,26].

In this paper, we show for the first time how the phase lock of a classical oscillator to an atomic superposition state can be exploited to keep the relative phase between the LO and the atomic system in the inversion region. In addition, we demonstrate a protocol based on this phase lock to operate an atomic clock beyond the limit set by the LO decoherence, which nowadays represents the bottleneck of the best available frequency standards. We begin with a minimally destructive measurement of the LO phase drift when it is within the inversion region; the measurement readout is then used to correct the LO phase so as to reduce its drift. The cycle is repeated using the residual atomic coherence. The result is a series of successive, phase-related measurements of the relative phase evolution, and the feedback keeps the phase in the inversion region, leading to an effectively longer interrogation time [27]. We demonstrate this approach with a trapped ensemble of neutral atoms probed on a microwave transition.

The experimental scheme shown in Fig. 1 has been described in Ref. [28]. A cloud of cold  $^{87}\text{Rb}$  atoms is trapped in an optical potential (see Appendix A), prepared with a  $\pi/2$  pulse of a resonant microwave field in a balanced superposition state of two hyperfine levels  $|\downarrow\rangle \equiv |F=1, m_F=0\rangle$  and  $|\uparrow\rangle \equiv |F=2, m_F=0\rangle$  of the electronic ground state, and probed using a nondestructive detection. Typically,  $5 \times 10^5$  atoms at a temperature of  $10 \mu\text{K}$  are used in the measurements reported here. The

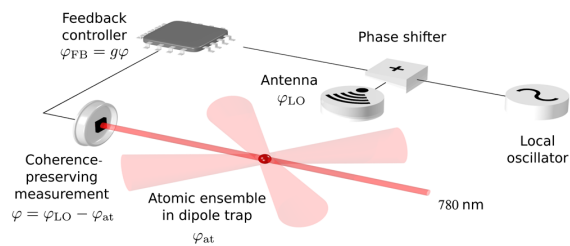


FIG. 1. Experimental scheme. The evolution of the LO phase  $\varphi_{\text{LO}}$  is compared to the phase  $\varphi_{\text{at}}$  of an atomic ensemble in a superposition state using coherence-preserving measurements in a Ramsey-spectroscopy sequence. The relative phase is obtained from the readout of the population difference and is used to implement the phase lock between the two oscillators by applying a feedback correction phase  $\varphi_{\text{FB}}$  on the LO output using a phase actuator. The light shift induced by the optical trap and by the probe has been engineered to have a homogeneous measurement of the atomic ensemble [28].

phase  $\varphi_{\text{at}}$  of the superposition state oscillates at a frequency of 6.835 GHz corresponding to the energy difference between the  $|\downarrow\rangle$  and  $|\uparrow\rangle$  atomic states, which is the fundamental reference if atoms are protected from perturbations. A microwave LO has a frequency close to the atomic frequency difference, so that the relative phase  $\varphi = \varphi_{\text{LO}} - \varphi_{\text{at}}$  between the two oscillators drifts slowly because of the LO noise.  $\varphi$  can be measured using the Ramsey-spectroscopy method (see Fig. 2): A second  $\pi/2$  microwave pulse (projection pulse) maps it onto a population difference, which we read out with a weak optical probe perturbing the atomic quantum state only negligibly and preserving the ensemble coherence [28–30]. Unlike for destructive measurements, the interrogation of  $\varphi$  can continue in a correlated way, once the action of the projection pulse is inverted using an opposite  $\pi/2$  microwave pulse (reintroduction pulse), which brings the atomic state back to the previous coherent superposition. Moreover, after each measurement and reintroduction pulse, the

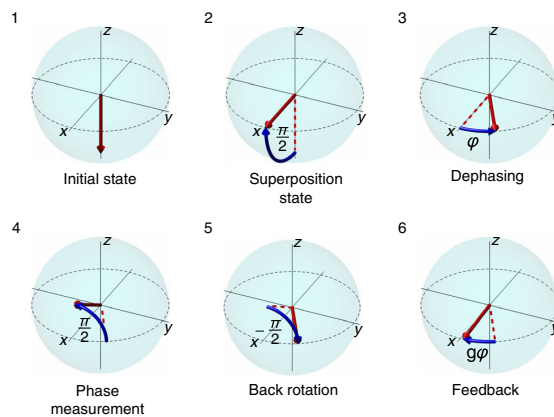


FIG. 2. Bloch-sphere representation of the phase lock between the LO and the atomic superposition state. The phase lock between the classical oscillator and the atomic spin is obtained using repeated, time-correlated Ramsey interrogations and feedback. The sequence begins by preparing the atomic CSS in the  $|\downarrow\rangle$  state via optical pumping (step 1). The measurement of the relative phase between the CSS and the LO starts when a  $\pi/2$  microwave pulse around the  $y$  axis brings the CSS into a balanced superposition of the  $|\downarrow\rangle$  and  $|\uparrow\rangle$  states, depicted as a vector on the equatorial plane of the Bloch sphere (step 2). The  $x$  axis is chosen to represent the phase of the local oscillator and  $\varphi$  the relative phase between the LO and the atomic superposition that evolves because of the LO noise (step 3). After an interrogation time  $T$ , the projection of  $\varphi$  is mapped onto a population difference by a projection  $\pi/2$  pulse around the  $x$  axis and read out with the coherence-preserving detection (step 4). The CSS is rotated back to the equatorial plane by a reintroduction  $\pi/2$  pulse around the  $x$  axis (step 5), and feedback is applied on the phase of the LO (step 6). The PLL between the LO and the atomic ensemble consists in the repetition of the steps from 3 to 6, potentially until the atomic ensemble shows a residual coherence.

phase readout can be used to correct the LO phase. The evolution and manipulation of the atomic ensemble can be illustrated using the Bloch-sphere representation (Fig. 2): The collective state of  $N_{\text{at}}$  two-level atoms in the same pure single-particle state [also called the coherent spin state (CSS)] forms a pseudospin with length  $J = N_{\text{at}}/2$ , where  $J_z$  denotes the population difference and  $\varphi = \arcsin(J_y/J_x)$  is the phase difference between the phase of the LO and that of the superposition state. A resonant microwave pulse determines the rotation of  $\mathbf{J}$  around an axis in the equatorial plane of the Bloch sphere, and the axis direction is set by the phase of the microwave signal. The repetition of the manipulation, measurement, and feedback cycle implements the phase lock of the LO on the atomic superposition state, as shown in steps 2–6 of Fig. 2.

We first show that we can reconstruct the time evolution of the relative phase between the LO and the CSS by monitoring the population difference and without applying feedback. For this purpose, we frequency offset the LO by 100 Hz from the nominal resonance and periodically measure the projection of the relative phase  $\sin(\varphi)$  with only a small reduction of the atomic ensemble coherence (Fig. 3). Every 1 ms,  $\varphi$  is mapped to a population difference via a projection  $\pi/2$  microwave pulse around the  $x$  axis, a weak measurement of  $J_z$  is performed, and the collective spin is rotated back to the equatorial plane of the Bloch sphere via a reintroduction  $\pi/2$  pulse around the  $x$  axis. The  $\pi/2$  microwave pulses are derived from an amplified version of the LO at 6.835 GHz leading to a pulse length of  $\tau_{\pi/2} = 47 \mu\text{s}$ , and the rotation axis is controlled with a quadrature phase shifter. The coherence-preserving,

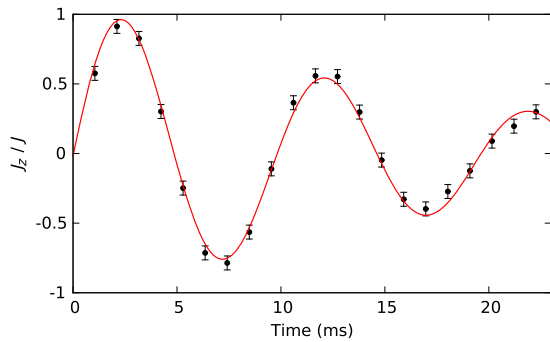


FIG. 3. Coherence-preserving measurement of the relative phase between the LO and the atomic superposition. Real-time measurement of the normalized population difference to which the relative phase  $\varphi$  between the local oscillator and the atomic superposition state is periodically mapped via microwave rotation pulses. The phase precession is induced by setting the LO frequency 100 Hz off the nominal atomic transition frequency. The experimental points are fitted with a sinusoidal evolution, damped because of the decoherence induced by the  $J_z$  measurement and the residual differential light shift on the clock transition.

dispersive measurement relies on frequency-modulation spectroscopy (see Appendix B). Figure 3 shows in a single experimental run how the spin state evolves around the equator of the Bloch sphere, with the relative phase  $\varphi$  mapped on the normalized population difference  $J_z/J$ . The signal-to-noise ratio (SNR) of the weak measurements is 20 for a full state coherence, and each readout of the relative phase drift reduces the state coherence by 2%. The destructivity from the probe is the main decoherence source until 10 ms; then, the inhomogeneous light shift of the dipole trap on the clock states becomes the dominant decoherence source.

We next introduce feedback and demonstrate that we can phase lock the LO on the atomic superposition state and increase the Ramsey-interrogation time beyond the limit set by the inversion region between  $J_z$  and the relative phase. We apply on the local oscillator two types of signals, first a frequency offset, and second periodic phase jumps, and use the output of the coherence-preserving measurements to actively minimize  $\varphi$ . The phase lock is obtained by controlling the phase of the local oscillator by means of a digital phase shifter (see Appendix D). The feedback is performed after the atomic spin is rotated back to the equatorial plane of the Bloch sphere. When the disturbance applied on the local oscillator consists of a frequency offset, there is a linear phase drift between the LO and the atomic phase (red line in Fig. 4). The phase evolution in an open loop is reconstructed from the data of Fig. 3 by taking into account the damping on the sinusoidal signal due to the decoherence sources and knowing that a constant frequency offset is applied on the LO. We remark that sudden sign inversions of the applied frequency offset when  $\varphi = \pm\pi/2$  would produce exactly the same evolution of

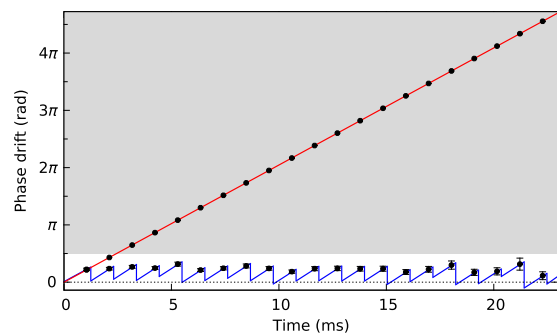


FIG. 4. Phase lock between the LO and the atomic superposition state. The evolution of the LO-atom relative phase is reconstructed from the  $J_z$  signal in Fig. 3 (solid red line) and when feedback is applied on the phase of the LO after each measurement (solid blue line). In the open-loop case, the points are reported at the values given by the fit in the previous figure. In the closed-loop case, the relative phase is always smaller than  $\pi/2$  and does not enter in the region represented in gray, where it cannot be univocally determined from the measurement.



the population difference, illustrating the need to keep  $\varphi$  in the inversion region. In a closed loop, the phase drift due to the 100-Hz frequency offset on the LO is periodically reset to 0, with a precision set by the  $\pi/32$  step size of the digital phase shifter and the uncertainty of the coherence-preserving measurements. As a consequence, the  $J_z/J$  signal shows a saw-tooth-like evolution (blue signal in Fig. 4). Without phase lock, the phase drift leaves the inversion region after 2.5 ms and rotates several times around the Bloch sphere, whereas with phase lock, it stays in the inversion region for all the 22-ms interval shown in the image. When the feedback is active, the total phase drift results as the phase measured at the end of the Ramsey interferometer, added to the correction phase shifts on the LO via the feedback controller. We next apply periodic phase jumps of  $\pi/3$  back and forth on the LO using a second phase shifter. The signal obtained in an open loop is shown at the top of Fig. 5. When the feedback controller is active, the jumps detected on the relative phase are corrected to 0, with a precision set by the resolution of the phase shifter and the uncertainty of the weak measurements (bottom of Fig. 5). The solid lines in Figs. 4 and 5 are drawn from the known timing for the applied phase signal and the feedback on the phase. For a combination of a phase drift and phase jumps, the relative phase can leave the inversion region while the noise action cannot be predicted from previous measurements. This problem affects atomic clocks and highlights the requirement of feedback on the LO phase to keep track of the relative phase drifts. Without feedback, the Ramsey-interrogation time should be kept sufficiently short to avoid ambiguities for the measured phase shift.

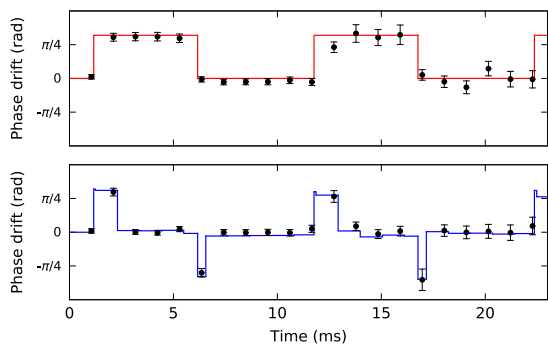


FIG. 5. Correction of phase jumps between the LO and the atomic ensemble. Evolution of the LO-CSS phase when periodic phase jumps of  $\pi/3$  are applied back and forth on the LO: The points are obtained from the measured population difference, whereas the solid line represents the LO phase measured after the correction phase actuator. The controller, implemented using coherence-preserving measurements and feedback on a phase actuator, maintains the relative phase close to 0. Above, the system is operated in an open loop, below in a closed loop. In the latter case, the phase corrections are applied 150  $\mu\text{s}$  after each measurement.

We propose now a protocol to efficiently use the phase lock to improve an atomic clock. In a conventional atomic clock, the phase drift  $\varphi$  is destructively read out after a single interrogation and feedback is performed on the LO by the addition of a feedback correction frequency  $\omega_{\text{FB}} = -\varphi/T$  considering unity gain. Our protocol of using the PLL between the LO and the atomic superposition state in an atomic clock is based on the reconstruction of the phase drift experienced by the LO over the extended interrogation time  $T_{\text{tot}} = N \times T$  ( $N$  is the number of phase coherent interrogations) by combining the phase shifts applied by feedback and the final phase readout (Fig. 6). The known phase corrections applied to the LO phase serve the dual purpose of keeping the relative phase in the inversion region and giving a coarse estimate of the phase drift during  $T_{\text{tot}}$ . The final phase measurement  $\varphi_f$ , together with the phase corrections  $\varphi_{\text{FB}}^{(i)}$ , gives a precise estimate of the phase drift during  $T_{\text{tot}}$ . The total phase drift can be computed as  $\varphi_{\text{tot}} = \varphi_f - \sum_{i=1}^N \varphi_{\text{FB}}^{(i)}$ , where the sum is over all the correction phase shifts applied by the feedback controller and stored in the microcontroller during the sequence. The feedback on the frequency is set accordingly to be  $\omega_{\text{FB}} = -\varphi_{\text{tot}}/T_{\text{tot}}$ . After the final phase readout, the phase shifter is reset to its initial position to avoid any impact of the intermediate phase shifts on the long-term clock stability. The measurement SNR of the total phase drift

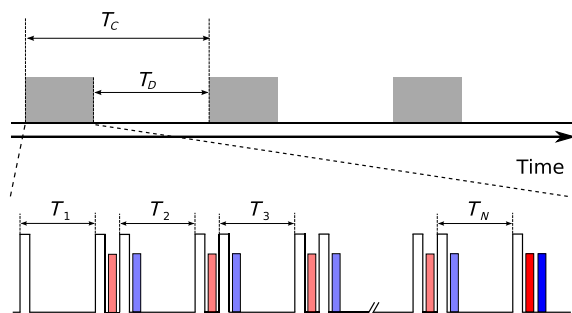


FIG. 6. Protocol for atomic clock with PLL. Operation of the clock: At each cycle of duration  $T_C$ , the relative phase is repeatedly measured in a coherence-preserving way during the phase-lock interval (above: shaded gray areas). Each interrogation, represented in the inset by a light red peak between the manipulation  $\pi/2$  pulses, is followed by a phase correction  $\varphi_{\text{FB}}^{(i)}$  on the LO, represented in the inset by a light blue peak on the right after the reintroduction of the spin on the equatorial plane of the Bloch sphere. The final phase readout  $\varphi_f$  (dark red peak in the inset), whose SNR is set by the residual coherence, together with the previously applied phase shifts on the LO, provides the total phase drift  $\varphi$  experienced during the extended interrogation interval  $T_{\text{tot}} = N \times T$ . The interrogation sequence ends with the application of a frequency correction on the LO (dark blue peak in the inset); then, a new atomic ensemble is prepared in the dead-time interval  $T_D$  for the next cycle.

depends only on the final phase measurement, since it can make use of all the residual ensemble coherence, whereas the SNR of the intermediate measurements has to be only sufficient to keep the atomic state in the inversion region. To further improve the protocol, the clock operation could be optimized by adapting the destructivity of the intermediate measurements to the varying coherence of the atomic sample or implementing an adaptive measurement protocol for the last measurement [31].

For a proof-of-concept demonstration, we run an atomic clock that exploits the PLL between the LO and the atomic superposition state, and the phase-reconstruction protocol. The LO signal is deteriorated so as to have an increased phase drift over the interrogation interval (see Appendix C). As a benchmark, we first run an atomic clock adopting a standard Ramsey-interrogation sequence, and without any feedback on the phase. In the clock operation, the dead time for the preparation of the new ensemble is  $T_D = 1.9$  s and the interrogation time is set to  $T = 1$  ms, much shorter than the measured atomic coherence lifetime. The phase measurement is performed with the coherence-preserving detection adopted for the phase lock. The two-sample Allan-frequency standard deviation is calculated from the sum of the LO noise and the correction signal applied by the feedback controller. The clock instability reaches a  $\tau^{-1/2}$  scaling after a few clock cycles (see the red line of Fig. 7) at a level consistent with an initial SNR = 20 and considering the coherence decay in the optical trap. The instability is far higher than with state-of-the-art atomic clocks since the experimental setup is not explicitly designed for the operation of an atomic clock, and the Allan-frequency standard deviation is  $1.5 \times 10^{-9}$  at 1 s. We then operate an atomic clock making use of a PLL sequence with  $N = 9$  successive interrogations, and again with  $T = 1$  ms, thus increasing the total interrogation time to 9 ms (see Fig. 6). For simplicity, the intermediate and the final phase readouts are set to have the same measurement strength. The Allan-frequency deviation shows a  $\tau^{-1/2}$  scaling as expected for atomic clocks, which demonstrates that the phase-reconstruction protocol is working properly. In the opposite case, frequency offsets would be corrected only at a short time with the phase actuator, and the stability of the clock would then diverge because of the nonzero dead-time interval. The comparison of the instability shows that the clock adopting the phase lock and reconstruction method is at a lower level by a factor ( $4.76 \pm 0.25$ ) with respect to the clock implementing the standard Ramsey interrogation, as shown in Fig. 7 (blue line). In the optimal case, the instability would decrease by a factor 9 (solid black line in Fig. 7) because of the correspondingly longer interrogation time. Experimentally, we obtain a lower value because of several detrimental effects, where the main contributions are a reduced SNR due to the cumulated destructivity from the probe and the decay from the optical dipole trap, and the finite phase-shifter accuracy, equal to

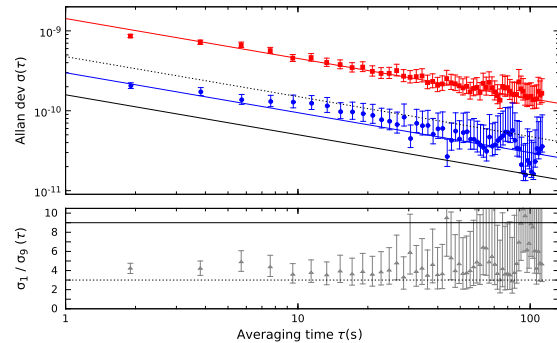


FIG. 7. Atomic clock implementing a PLL. Top: Allan-frequency standard deviation  $\sigma_1$  for a normal Ramsey clock with interrogation time  $T = 1$  ms (red line) and  $\sigma_9$  for a clock implementing the phase lock between the LO and the atomic superposition state for nine successive, correlated interrogations on the same atomic ensemble, for a total interrogation time of  $9 \times T = 9$  ms (blue line). The dead time is in both cases  $T_D = 1.9$  s. The red and blue lines are fits to the data, with a slope set to  $\tau^{-1/2}$ . The continuous black line lies a factor 9 below the red curve and represents the best achievable level of the phase-lock sequence for the same number of interrogations. The dashed black line lies a factor 3 below the red curve and is the optimum level for nine consecutive uncorrelated Ramsey measurements with duration  $T$  each and the same total cycle time. Bottom: The gray triangles represent the ratio of the Allan deviation for the two clocks; the solid and dashed lines correspond to the factors 9 and 3 from the top plot.

38 mrad. The result can be further compared to the case that the nine phase measurements would have been uncorrelated, for example, by repreparing the atomic state and starting a new Ramsey cycle after each measurement [32]. We would expect here a factor 3 (dashed black line in Fig. 7), which is clearly exceeded by the phase-lock sequence.

The phase lock can be performed as long as the coherence of the state is maintained. For integration times longer than the coherence lifetime of the trapped ensemble, the atomic phase is lost and our locking scheme becomes again a frequency lock, like when the quantum superposition is destroyed by the detection. In our experiment, the coherence lifetime is limited to 20 ms by the dephasing in the optical dipole trap. Nevertheless, trapped induced dephasing of the atomic state can be suppressed for  $^{87}\text{Rb}$  as reported in Refs. [16,33], whereas in an optical lattice, it is strongly reduced with the choice of light at the magic wavelength [34]. In the original proposal to lock the local oscillator phase on the atomic phase [25], frequency feedback on the local oscillator after each weak  $J_z$  measurement is performed. This scheme leads to a longer effective interrogation time but to a SNR given by the weak measurements, which is lower than that of a measurement at the quantum projection noise and beyond. Our protocol



can overcome this limit and reach projection-limited readout while keeping an extended interrogation time, thanks to the feedback on the LO phase.

In the phase-lock sequence, several effects must be considered to maximize the SNR of the last measurement while maintaining a high accuracy on the total phase drift over the increased interrogation time: The rotations operated on the Bloch sphere must be fast, the measurement-induced decoherence limited, and the phase shifter used for the correction accurate. The decoherence related to the repeated interrogations of the relative phase can be strongly reduced by the use of an optical cavity to enhance the probe interaction with the atomic ensemble [35–37]. An optimized clock configuration would consist in two atomic ensembles using the same LO: The first ensemble provides the information to implement the phase-feedback algorithm on the LO; the resulting corrected phase for the LO stays in the inversion region for a much longer period, and this prestabilized LO is used to interrogate the master ensemble with the standard Ramsey sequence. This scheme avoids the requirement of a tradeoff between the number of intermediate measurements and the SNR of the final measurement by separating the two problems. It also removes the systematics imposed by the intermediate coherent manipulations and measurements of the atomic state, which now affects only the first ensemble. The solution promises the same benefits foreseen for the phase-reconstruction schemes proposed in Refs. [22,23] but using only a single additional ensemble.

In an atomic clock, the phase lock between the LO and the atomic superposition state can reduce the Dick effect [38], i.e., the aliasing of the clock oscillator, thanks to the longer interrogation time. However, the most important advantage of the scheme is the reduction of the decoherence related to the local oscillator, which translates to a lower white-noise frequency for a fixed detection noise. The noise reduction can be exploited to lower the LO stability requirements to the benefit of other parameters, like portability of the experimental setup, for mobile or spatial applications, or vice versa, to remove the limitation set by the LO to reach ultimate performances.

For example, the interrogation interval in the best available optical clocks [12–15] is limited to  $\approx 1$  s by the quality of the local oscillator; this limitation is not fundamental, and our method could increase the interrogation interval and hence the sensitivity in a way at best proportional to the number of coherence-preserving interrogations. LOs with higher coherence will reduce the number of intermediate operations required to obtain a given clock-interrogation interval. The latter will then be limited by other effects: Practically, a first limit is set by the vacuum quality, which can reduce the ensemble coherence via background collisions, but extremely long trapping lifetimes have already been reached for trapped atoms [39]. Ultimately, with the combination of existing techniques and

the method presented in this paper, the 1–10-mHz excited-state lifetime expected for alkaline-earth-like atoms could be reached, which motivates the search for transitions with a lower linewidth [40–42].

Phase locking the LO to the atomic state preserves classical correlations in time against the decoherence by the local oscillator. The technique and the related enhancement factor could thus be combined with spin squeezing, which improves the clock sensitivity by introducing quantum correlations between the particles to go below the standard quantum limit [37,43]. More generally, increasing the interrogation time using minimally destructive measurements and feedback on the phase could be applied to other atomic interferometers, such as atomic inertial sensors, where, for example, the phase of the interrogation lasers could be locked to the phase evolution of matter waves.

In conclusion, using a coherence-preserving detection, we tracked the phase evolution of an atomic collective superposition, and we reproduced it on a classical replica by introducing feedback to implement a PLL. Phase locking a classical oscillator to an atomic superposition state can be a key technology to improve the sensitivity of systems where the atomic phase evolution is used to improve the quality of the classical counterpart, such as in atomic interferometers or frequency combs [44], whenever the main decoherence source is determined by the classical subsystem. This development may open new directions and possibilities in several technological fields as well as in basic science.

We acknowledge funding from Direction Générale de l'Armement, Centre National d'Etudes Spatiales, the European Metrology Research Programme (EMRP) (JRP-EXL01 QESOCAS), the European Union (EU) (iSENSE), Agence Nationale de la Recherche (MINIATOM), Laser and Photonics in Aquitaine (APLL-CLOCK, within ANR-10-IDEX-03-02), and European Science Foundation Cold Quantum Matter. The EMRP is jointly funded by the EMRP participating countries within EURAMET and the European Union. LCFIO and SYRTE are members of the Institut Francilien de Recherche sur les Atomes Froids (IFRAF). We thank T. Vanderbruggen for his contribution during the initial phase of the experiment, as well as M. Prevedelli, G. Santarelli, and T. Udem for useful discussions. P. B. acknowledges support from a Chair of Excellence of Région Aquitaine, E. C. from Quantel. Any mention of commercial products does not constitute an endorsement.

## APPENDIX A: ATOMIC SAMPLE PREPARATION

$^{87}\text{Rb}$  atoms laser cooled with a magneto-optical trap are transferred to an optical dipole trap at 1560 nm that uses a four-mirror optical resonator to enhance the laser intensity [45]. The atoms are trapped at the crossing of two cavity arms with a waist of 100  $\mu\text{m}$ . The ensemble is

evaporatively cooled by decreasing the intensity of the dipole trap until a temperature of  $10 \mu\text{K}$  is reached for  $5 \times 10^5$  atoms in a cloud with a  $1/e^2$  radius of  $50 \mu\text{m}$ . In the last operation before starting the Ramsey interrogation, the atoms are optically pumped in the  $|\downarrow\rangle$  state. The sequence to prepare the ensemble in the initial state, which corresponds to the dead time  $T_D$  in the atomic clock sequence, lasts 1.9 s.

### APPENDIX B: NONDESTRUCTIVE DISPERSIVE PROBE

The measurement of  $J_z$  is based on the dispersion caused by the trapped atoms on a far off-resonance optical probe. The probe beam has a waist of  $47 \mu\text{m}$  matched to the size of the atomic cloud. It is phase modulated at a frequency of  $3.853 \text{ GHz}$  and frequency referenced at  $3.377 \text{ GHz}$  on the red of the  $F = 1 \rightarrow F' = 2$  transition; these conditions produce a symmetric mixing of the  $|\downarrow\rangle$  and  $|\uparrow\rangle$  states because of probe-induced spontaneous emission, thus avoiding a vertical offset when the Bloch sphere contracts. In this way, each sideband mainly probes the population of one of the two levels, with the same magnitude and opposite sign for the couplings. We cancel the probe-induced light shift and the related decoherence by precisely compensating the effect of the carrier with that of the sidebands; the cancellation is obtained by setting a modulation depth of  $14.8\%$  for the phase modulation. The differential light shift on the  $D2$  line from the dipole trap at  $1560 \text{ nm}$  is compensated with light blue detuned from the  $5^2P_{3/2} \rightarrow 4^2D_{5/2,3/2}$  transitions at  $1529 \text{ nm}$ . When the total power of the probe is set to  $480 \mu\text{W}$ , it causes the decay of the atomic coherence with a lifetime of  $2.85 \mu\text{s}$ ; in the experiment here reported, the interrogation pulses, obtained using an amplitude electro-optic modulator, have been set to last  $60 \text{ ns}$ . Each pulse determines then a  $2\%$  destructivity of the ensemble coherence and a SNR of 20 for the  $J_z$  measurement on the initial sample of  $5 \times 10^5$  atoms. The population-imbalance readouts have been normalized to the signal when all atoms were repumped to the state  $F = 2$ .

### APPENDIX C: FREQUENCY CHAIN

The  $6.835\text{-GHz}$  frequency used to coherently manipulate the atomic spin is generated by a frequency chain based on a Spectra Dynamics DLR-100 system as a frequency reference. The DLR-100 relies on an ultralow-noise  $100\text{-MHz}$  quartz, locked at low frequency to the tenth harmonic of a frequency-doubled  $5\text{-MHz}$  quartz to further improve the phase noise. The  $100\text{-MHz}$  signal is multiplied to  $7 \text{ GHz}$  and then mixed with a tunable synthesizer at  $165 \text{ MHz}$  to obtain the signal resonant with the transition between the  $|\downarrow\rangle$  and  $|\uparrow\rangle$  states. The noise added by the microwave pulses to the measurement of  $J_z$  is negligible for our weak probe, and its control well below the atomic

quantum projection-noise level has already been shown in Ref. [46]. Frequency noise is added to the LO signal using a frequency-modulation port on the synthesizer, with a conversion factor set to  $200 \text{ Hz/V}_{\text{rms}}$ . The noise signal for the demonstration of the clock using the PLL sequence is generated with a signal generator, which produces white frequency noise with a spectral density of  $2.7 \times 10^{-2} \text{ Hz}^2/\text{Hz}$ ; this signal is low-pass filtered at  $1.85 \text{ kHz}$  before being added to the LO. The result is a rms phase drift of  $430 \text{ mrad}$  over  $10 \text{ ms}$  for the LO.

### APPENDIX D: FEEDBACK CONTROLLER

The atomic populations on the  $|\downarrow\rangle$  and  $|\uparrow\rangle$  states determine a differential phase shift of the probe sidebands. As a consequence, the probe beam is modulated in amplitude, and the modulation signal is detected by a photodiode (1591NF, New Focus), amplified (two HMC716LP3E, Hittite), and demodulated (ZX05-73C-C+, Minicircuits). The electronic integration of this signal during the  $60\text{-ns}$  interrogation pulse produces a voltage proportional to the average atomic population difference during the probing. Such a voltage is digitized by a  $14\text{-bit}$ -resolution analog-to-digital converter embedded in the microcontroller unit (MCU) used to control the feedback loop (ADuC841, Analog Devices). In the experiments implementing the phase lock between the LO and the atomic superposition, the MCU controls the phase actuator, a six-bit step phase shifter with a range of  $2\pi$  (RFPSHT0204N6, RF-Lambda). The total delay for the feedback is approximately  $150 \mu\text{s}$ , depending on the calculation time of the MCU. When running the clock based on the PLL technique, the MCU acts as well on a frequency actuator, which is the frequency-modulation input on the  $165\text{-MHz}$  synthesizer.

The feedback controller we propose for the clock exploiting the phase lock between the LO and the atomic superposition state consists of a cycle divided in three main steps: In the first one, successive correlated interrogations with probe interval  $T$  are realized on the same coherent atomic ensemble, and feedback on the LO phase is applied. The control law is

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{LO}}^{(i)} &= \varphi_{\text{LO}}^{(i-1)} + \varphi_{\text{FB}}^{(i)} \\ &= \varphi_{\text{LO}}^{(i-1)} + g_\varphi \varphi^{(i)},\end{aligned}$$

where  $\varphi^{(i)}$  is the estimated phase difference between the LO and the atoms at the  $i$ th cycle and  $\varphi_{\text{LO}}^{(i)}$  is the phase of the LO only. The values of  $\varphi_{\text{FB}}^{(i)} = g_\varphi \varphi^{(i)}$  are saved in the feedback controller, and typically, a gain  $g_\varphi = -1$  is chosen.

The second step consists in the final phase readout: At the end of the  $N$ th interrogation interval of duration  $T$ , a destructive measurement  $\varphi_f$  of the phase is performed, with

the highest possible precision. The saved phase shifts on the LO and  $\varphi_f$  are used to reconstruct the full phase drift between the LO and the atoms in the total interrogation time, equal to  $T_{\text{tot}} = N \times T$ .

In the third step, one then performs feedback on the frequency as in a conventional atomic clock

$$\omega_{\text{LO}}^{(n)} = \omega_{\text{LO}}^{(n-1)} + \omega_{\text{FB}}^{(n)} = \omega_{\text{LO}}^{(n-1)} + g_{\omega} \varphi_{\text{tot}}^{(n)} / T_{\text{tot}},$$

where

$$\varphi_{\text{tot}}^{(n)} = \varphi_f^{(n)} - \sum_{i \in \text{nth cycle}} \varphi_{\text{FB}}^{(i)} = \varphi_f^{(n)} - \sum_{i \in \text{nth cycle}} g_{\varphi} \varphi^{(i)}$$

and  $n$  is the clock cycle. In addition, the phase shift set by the feedback controller on the LO is reset to 0:

$$\varphi_{\text{LO}}^{(n)} = \varphi_{\text{LO}}^{(0)} = 0.$$

The cycle then repeats. The important feature of the feedback controller is that the feedback actions on the LO oscillator phase during the interrogation time are saved. They are then used with the output of the final precise measurement to determine the total phase drift. There is no drawback from the uncertainty of the weak measurements, since any feedback errors are detected with the precise final measurement at the end. As already remarked, in the experimental demonstration of the clock operation, we adopted the same probe for the intermediate and the final measurements.

- 
- [1] C. Huygens, *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens*, Vol. 15 (Nijhoff, The Hague, 1893).
  - [2] A. Mari, A. Farace, N. Didier, V. Giovannetti, and R. Fazio, *Measures of Quantum Synchronization in Continuous Variable Systems*, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 103605 (2013).
  - [3] M. Xu, D. A. Tieri, E. C. Fine, J. K. Thompson, and M. J. Holland, *Synchronization of Two Ensembles of Atoms*, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 154101 (2014).
  - [4] K. C. Cox, J. M. Weiner, and J. K. Thompson, *Phase diagram for injection locking a superradiant laser*, *Phys. Rev. A* **90**, 053845 (2014).
  - [5] H. Guan-Chyun and J. C. Hung, *Phase-locked loop techniques. A survey*, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **43**, 609 (1996).
  - [6] D. J. Jones, S. A. Diddams, J. K. Ranka, A. Stentz, R. S. Windeler, J. L. Hall, and S. T. Cundiff, *Carrier-envelope phase control of femtosecond mode-locked lasers and direct optical frequency synthesis*, *Science* **288**, 635 (2000).
  - [7] S. A. Diddams, D. J. Jones, J. Ye, S. T. Cundiff, J. L. Hall, J. K. Ranka, R. S. Windeler, R. Holzwarth, T. Udem, and T. W. Hänsch, *Direct Link between Microwave and Optical Frequencies with a 300 thz Femtosecond Laser Comb*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5102 (2000).
  - [8] R. Slavík, F. Parmigiani, J. Kakande, C. Lundström, M. Sjödin, P. A. Andrekson, R. Weerasuriya, S. Sygletos, A. D. Ellis, L. Grüner-Nielsen *et al.*, *All-optical phase and amplitude regenerator for next-generation telecommunications systems*, *Nat. Photonics* **4**, 690 (2010).
  - [9] M. S. Braasch and A. J. V. Dierendonck, *GPS receiver architectures and measurements*, *Proc. IEEE* **87**, 48 (1999).
  - [10] M. Arndt, *De Broglie's meter stick: Making measurements with matter waves*, *Phys. Today* **67**, No. 5, 30 (2014).
  - [11] C. W. Chou, D. B. Hume, J. C. J. Koelemeij, D. J. Wineland, and T. Rosenband, *Frequency Comparison of Two High-Accuracy Al<sup>+</sup> Optical Clocks*, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 070802 (2010).
  - [12] N. Hinkley, J. A. Sherman, N. B. Phillips, M. Schioppo, N. D. Lemke, K. Beloy, M. Pizzocaro, C. W. Oates, and A. D. Ludlow, *An atomic clock with 10<sup>-18</sup> instability*, *Science* **341**, 1215 (2013).
  - [13] B. J. Bloom, T. L. Nicholson, J. R. Williams, S. L. Campbell, M. B. X. Zhang, W. Zhang, S. L. Bromley, and J. Ye, *An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10<sup>-18</sup> level*, *Nature (London)* **506**, 71 (2014).
  - [14] I. Ushijima, M. Takamoto, M. Das, T. Ohkubo, and H. Katori, *Cryogenic Optical Lattice Clocks*, *Nat. Photonics* **9**, 185 (2015).
  - [15] T. L. Nicholson, S. L. Campbell, R. B. Hutson, G. E. Marti, B. J. Bloom, R. L. McNally, W. Zhang, M. D. Barrett, M. S. Safronova, G. F. Strouse, W. L. Tew, and J. Ye, *2 × 10<sup>-18</sup> Total Uncertainty in an Atomic Clock*, [arXiv:1412.8261](https://arxiv.org/abs/1412.8261).
  - [16] G. Kleine Büning, J. Will, W. Ertmer, E. Rasel, J. Arlt, C. Klempt, F. Ramirez-Martinez, F. Piéchon, and P. Rosenbusch, *Extended Coherence Time on the Clock Transition of Optically Trapped Rubidium*, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 240801 (2011).
  - [17] Y. Y. Jiang, A. D. Ludlow, N. D. Lemke, R. W. Fox, J. A. Sherman, L.-S. Ma, and C. W. Oates, *Making optical atomic clocks more stable with 10<sup>-16</sup>-level laser stabilization*, *Nat. Photonics* **5**, 158 (2011).
  - [18] T. Kessler, C. Hagemann, C. Grebing, T. Legero, U. Sterr, F. Riehle, M. J. Martin, L. Chen, and J. Ye, *A sub-40-mHz-linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity*, *Nat. Photonics* **6**, 687 (2012).
  - [19] M. J. Thorpe, L. Rippe, T. M. Fortier, M. S. Kirchner, and T. Rosenband, *Frequency stabilization to 6 × 10<sup>-16</sup> via spectral-hole burning*, *Nat. Photonics* **5**, 688 (2011).
  - [20] G. D. Cole, W. Zhang, M. J. Martin, J. Ye, and M. Aspelmeyer, *Tenfold reduction of Brownian noise in high-reflectivity optical coatings*, *Nat. Photonics* **7**, 644 (2013).
  - [21] S. Amairi, T. Legero, T. Kessler, U. Sterr, J. B. Wübbena, O. Mandel, and P. O. Schmidt, *Reducing the effect of thermal noise in optical cavities*, *Appl. Phys. B* **113**, 233 (2013).
  - [22] T. Rosenband and D. R. Leibrandt, *Exponential Scaling of Clock Stability with Atom Number*, [arXiv:1303.6357](https://arxiv.org/abs/1303.6357).
  - [23] E. M. Kessler, P. Kómár, M. Bishof, L. Jiang, A. S. Sørensen, J. Ye, and M. D. Lukin, *Heisenberg-Limited Atom Clocks Based on Entangled Qubits*, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 190403 (2014).
  - [24] J. Borregaard and A. S. Sørensen, *Efficient Atomic Clocks Operated with Several Atomic Ensembles*, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 090802 (2013).

- [25] N. Shiga and M. Takeuchi, *Locking the local oscillator phase to the atomic phase via weak measurement*, *New J. Phys.* **14**, 023034 (2012).
- [26] N. Shiga, M. Mizuno, K. Kido, P. Phoonthong, and K. Okada, *Accelerating the averaging rate of atomic ensemble clock stability using atomic phase lock*, *New J. Phys.* **16**, 073029 (2014).
- [27] We remark that an unambiguous determination of the LO phase drift beyond the inversion region could be obtained by tracking its evolution with periodic measurements of two orthogonal projections of the phase, at least when the Bloch vector is close to the borders of the inversion region. This solution does not require the phase-lock protocol but brings an increase in the number of interrogations of the atomic sample and hence of the probe-induced destructivity.
- [28] T. Vanderbruggen, R. Kohlhaas, A. Bertoldi, S. Bernon, A. Aspect, A. Landragin, and P. Bouyer, *Feedback Control of Trapped Coherent Atomic Ensembles*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 210503 (2013).
- [29] G. A. Smith, A. Silberfarb, I. H. Deutsch, and P. S. Jessen, *Efficient Quantum-State Estimation by Continuous Weak Measurement and Dynamical Control*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 180403 (2006).
- [30] S. Lloyd and J.-J. E. Slotine, *Quantum feedback with weak measurements*, *Phys. Rev. A* **62**, 012307 (2000).
- [31] J. Borregaard and A. S. Sørensen, *Near-Heisenberg-Limited Atomic Clocks in the Presence of Decoherence*, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 090801 (2013).
- [32] J. Lodewyck, P. G. Westergaard, and P. Lemonde, *Nondestructive measurement of the transition probability in a Sr optical lattice clock*, *Phys. Rev. A* **79**, 061401(R) (2009).
- [33] A. G. Radnaev, Y. O. Dudin, R. Zhao, H. H. Jen, S. D. Jenkins, A. Kuzmich, and T. A. B. Kennedy, *A quantum memory with telecom-wavelength conversion*, *Nat. Phys.* **6**, 894 (2010).
- [34] H. Katori, M. Takamoto, V. G. Pal'chikov, and V. D. Ovsinnikov, *Ultrastable Optical Clock with Neutral Atoms in an Engineered Light Shift Trap*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 173005 (2003).
- [35] J. G. Bohnet, K. C. Cox, M. A. Norcia, J. M. Weiner, Z. Chen, and J. K. Thompson, *Reduced spin measurement back-action for a phase sensitivity ten times beyond the standard quantum limit*, *Nat. Photonics* **8**, 731 (2014).
- [36] J. Lee, G. Vrijsen, I. Teper, O. Hosten, and M. A. Kasevich, *Many-atom-cavity QED system with homogeneous atom-cavity coupling*, *Opt. Lett.* **39**, 4005 (2014).
- [37] I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith, and V. Vuletić, *Implementation of Cavity Squeezing of a Collective Atomic Spin*, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 073602 (2010).
- [38] G. J. Dick, J. D. Prestage, C. A. Greenhall, and L. Maleki, in *Proceedings of the 22nd Precise Time and Time Interval (PTTI) Applications and Planning Meeting, Vienna, Virginia, USA (NASA CP-3116)* (1990), pp. 487–508.
- [39] P. A. Willems and K. G. Libbrecht, *Creating long-lived neutral-atom traps in a cryogenic environment*, *Phys. Rev. A* **51**, 1403 (1995).
- [40] C. J. Campbell, A. G. Radnaev, A. Kuzmich, V. A. Dzuba, V. V. Flambaum, and A. Derevianko, *Single-Ion Nuclear Clock for Metrology at the 19th Decimal Place*, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 120802 (2012).
- [41] A. Derevianko, V. A. Dzuba, and V. V. Flambaum, *Highly Charged Ions as a Basis of Optical Atomic Clockwork of Exceptional Accuracy*, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 180801 (2012).
- [42] A. Kozlov, V. A. Dzuba, and V. V. Flambaum, *Prospects of building optical atomic clocks using ErI and ErIII*, *Phys. Rev. A* **88**, 032509 (2013).
- [43] A. Louchet-Chauvet, J. Appel, J. J. Renema, D. Oblak, N. Kjærgaard, and E. S. Polzik, *Entanglement-assisted atomic clock beyond the projection noise limit*, *New J. Phys.* **12**, 065032 (2010).
- [44] A. Cadarso, J. Mur-Petit, and J. J. García-Ripoll, *Phase Stabilization of a Frequency Comb using Multipulse Quantum Interferometry*, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 073603 (2014).
- [45] S. Bernon, T. Vanderbruggen, R. Kohlhaas, A. Bertoldi, A. Landragin, and P. Bouyer, *Heterodyne non-demolition measurements on cold atomic samples: Towards the preparation of non-classical states for atom interferometry*, *New J. Phys.* **13**, 065021 (2011).
- [46] Z. Chen, J. G. Bohnet, J. M. Weiner, and J. K. Thompson, *A low phase noise microwave source for atomic spin squeezing experiments in  $^{87}\text{Rb}$* , *Rev. Sci. Instrum.* **83**, 044701 (2012).

---

# Bibliographie

- Abgrall, M., Chupin, B., Sarlo, L. D., Guéna, J., Laurent, P., Coq, Y. L., Targat, R. L., Lodewyck, J., Lours, M., Rosenbusch, P., Rovera, D., and Bize, S. (2015). Atomic fountains and optical clocks at SYRTE : status and perspectives. *Comptes Rendus Physique*, 16(5) :461 – 470. [Cité aux pages 97 et 103.]
- Aharonov, Y., Albert, D. Z., and Vaidman, L. (1988). How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particule can turn out to be 100. *Phys. Rev. Lett.*, 60 :1351. [Cité à la page 21.]
- Aharonov, Y. and Vaidman, L. (1990). Properties of a quantum system during the time interval between two measurements. *Phys. Rev. A*, 41 :11. [Cité à la page 21.]
- Allan, D. (1966). Statistics of atomic frequency standards. *Proc. IEEE*, 54 :221. [Cité à la page 100.]
- Alpatov, V. G., Bayukov, Y. D., Davydov, A. V., Isaev, Y. N., Kartashev, G. R., Korotkov, M. M., and Migachev, V. V. (2007). First experiments on the observation of gamma resonance of a long-lived  $^{109m}\text{Ag}$  isomer using a gravitational gamma spectrometer. *Laser Phys.*, 17 :1067. [Cité à la page 99.]
- Amairi, S., Legero, T., Kessler, T., Sterr, U., Wubbena, J. B., Mandel, O., and Schmidt, P. O. (2013). Reducing the effect of thermal noise in optical cavities. *Appl. Phys. B*, 113 :233. [Cité à la page 102.]
- Andrews, M. R., Townsend, C. G., Miesner, H.-J., Durfee, D. S., Kurn, D. M., and Ketterle, W. (1997). Observation of interference between two Bose condensates. *Science*, 275(5300) :637–641. [Cité à la page 91.]
- Appel, J., MacRae, A., and Lvovsky, A. I. (2009a). Versatile digital GHz phase lock for external cavity diode lasers. *Meas. Sci. Technol.*, 20 :055302. [Cité à la page 28.]
- Appel, J., Windpassinger, P. J., Oblak, D., Hoff, U. B., Kjaergaard, N., and Polzik, E. S. (2009b). Mesoscopic atomic entanglement for precision measurements beyond the standard quantum limit. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 106 :10960. [Cité à la page 11.]
- Arecchi, F. T., Courtens, E., Gilmore, R., and Thomas, H. (1972). Atomic coherent states in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 6 :2211. [Cité à la page 9.]
- B. Canuel, L. Amand, A. Bertoldi, W. Chaibi, R. Geiger, J. Gillot, A. Landragin, M. Merzougui, I. Riou, S.P. Schmid, and P. Bouyer (2014). The matter-wave laser interferometer gravitation antenna (MIGA) : New perspectives for fundamental physics and geosciences. *E3S Web of Conferences*, 4 :01004. [Cité à la page 71.]
- Baillard, X., Gauguier, A., Bize, S., Lemonde, P., Laurent, P., Clairon, A., and Rosenbusch, P. (2006). Interference-filter-stabilized external-cavity diode lasers. *Opt. Commun.*, 266 :609. [Cité à la page 27.]
- Basov, N. G. (1964). *Nobel Lecture : Semiconductor Lasers*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam. [Cité à la page 43.]



- Beloy, K., Hinkley, N., Phillips, N., Sherman, J., Schioppo, M., Lehman, J., Feldman, A., Hanssen, L., Oates, C., and Ludlow, A. (2014). Atomic clock with  $1 \times 10^{18}$  room-temperature blackbody Stark uncertainty. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :260801. [Cité à la page 99.]
- Bernon, S. (2011). *Piégeage et mesure non-destructive d'atomes froids dans une cavité en anneau de haute finesse*. PhD thesis, Ecole Polytechnique. [Cité aux pages 45, 46, 50, 53, 54, 61, 64, 82, 103 et 125.]
- Bernon, S., Vanderbruggen, T., Kohlhaas, R., Bertoldi, A., Landragin, A., and Bouyer, P. (2011). Heterodyne non-demolition measurements on cold atomic samples : towards the preparation of non-classical states for atom interferometry. *New J. Phys.*, 13 :065021. [Cité aux pages 23, 29 et 32.]
- Bertoldi, A., Bernon, S., Vanderbruggen, T., Landragin, A., and Bouyer, P. (2010). In-situ characterization of an optical cavity using atomic light shift. *Opt. Lett.*, 35 :3769. [Cité à la page 61.]
- Biedermann, G. W., Takase, K., Wu, X., Deslauriers, L., Roy, S., and Kasevich, M. A. (2013). Zero-dead-time operation of interleaved atomic clocks. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :170802. [Cité aux pages 102 et 115.]
- Black, E. D. (2001). An introduction to the Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization. *Am. J. Phys.*, 69 :79. [Cité à la page 56.]
- Bloch, F. (1946). Nuclear induction. *Phys. Rev.*, 70 :460. [Cité à la page 6.]
- Bohnet, J. G., Cox, K. C., Norcia, M. A., Weiner, J. M., Chen, Z., and Thompson, J. K. (2014). Reduced spin measurement back-action for a phase sensitivity ten times beyond the standard quantum limit. *Nat. Phot.*, 8 :731. [Cité à la page 115.]
- Born, M. (1964). *Nobel Lecture : The Statistical Interpretations of Quantum Mechanics*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam. [Cité à la page 18.]
- Borregaard, J. and Sørensen, A. S. (2013a). Efficient atomic clocks operated with several atomic ensembles. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :090802. [Cité à la page 95.]
- Borregaard, J. and Sørensen, A. S. (2013b). Near-heisenberg-limited atomic clocks in the presence of decoherence. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :090801. [Cité à la page 11.]
- Braasch, M. S. and Dierendonck, A. J. V. (1999). GPS receiver architectures and measurements. *Proc. IEEE*, 87 :48. [Cité à la page 104.]
- Brantut, J.-P. (2009). *Manipulation d'atomes froids dans des potentiels lumineux*. PhD thesis, Université Paris XI. [Cité à la page 125.]
- Brantut, J.-P., Clément, J.-F., Robert-De-Saint-Vincent, M., Varoquaux, G., Nyman, R. A., Aspect, A., Bourdel, T., and Bouyer, P. (2008). Light-shift tomography in an optical dipole trap for neutral atoms. *Phys. Rev. A*, 78 :031401(R). [Cité aux pages 49 et 61.]
- Brennecke, F., Donner, T., Ritter, S., Bourdel, T., Kohl, M., and Esslinger, T. (2007). Cavity QED with a Bose Einstein condensate. *Nature*, 450 :268. [Cité à la page 43.]
- Buning, G. K., Will, J., Ertmer, W., Rasel, E., Arlt, J., Klempt, C., Ramirez-Martinez, F., Piéchon, F., and Rosenbusch, P. (2011). Extended coherence time on the clock transition of optically trapped rubidium. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :240801. [Cité aux pages 113 et 146.]
- Carrat, V., Cabrera-Gutiérrez, C., Jacquy, M., Tabosa, J. W., de Lesegno, B. V., and Pruvost, L. (2014). Long-distance channeling of cold atoms exiting a 2D magneto-optical trap by a laguerre-gaussian laser beam. *Opt. Lett.*, 39(3) :719–722. [Cité à la page 90.]
- Carraz, O. (2009). *Gravimètre atomique embarquable : étude théorique et expérimentale de l'instrument*. PhD thesis, Observatoire de Paris. [Cité à la page 120.]

- Cassettari, D., Hessmo, B., Folman, R., Maier, T., and Schmiedmayer, J. (2000). Beam splitter for guided atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :5483–5487. [Cité à la page 90.]
- Cataliotti, F. S., Burger, S., Fort, C., Maddaloni, P., Minardi, F., Trombettoni, A., Smerzi, A., and Inguscio, M. (2001). Josephson junction arrays with Bose-Einstein condensates. *Science*, 293(5531) :843–846. [Cité à la page 91.]
- Chou, C. W., Hume, D. B., Rosenband, T., and Wineland, D. J. (2010). Optical clocks and relativity. *Science*, 329 (5999) :1630. [Cité aux pages 2 et 97.]
- Chu, S. (1997). *Nobel Lecture : The Manipulation of Neutral Particles*. World Scientific Publishing Co. [Cité à la page 2.]
- Clairon, A., Laurent, P., Santarelli, G., Ghezali, S., Lea, S., and Bahoura, M. (1995). A cesium fountain frequency standard : preliminary results. *instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on.*, 44 :128. [Cité à la page 99.]
- Clairon, A., Salomon, C., Guellati, S., and Phillips, W. D. (1991). Ramsey resonance in a Zacharias fountain. *Europhys. Lett.*, 16 :165. [Cité aux pages 15, 99 et 101.]
- Clément, J.-F. (2008). *Réalisation d'un condensat de Bose-Einstein dans un piège dipolaire optique à 1565 nm*. PhD thesis, Université Paris XI. [Cité à la page 49.]
- Clément, J.-F., Brantut, J.-P., de Saint-Vincent, M. R., Nyman, R. A., Aspect, A., Bourdel, T., and Bouyer, P. (2009). All-optical runaway evaporation to Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. A*, 79 :061406. [Cité à la page 87.]
- Cliche, J.-F., Allard, M., and Têtu, M. (2006). High-power and ultranarrow DFB laser : the effect of linewidth reduction systems on coherence length and interferometer noise. *Proc. SPIE Laser Source and System Technology for Defense and Security II*, 6216. [Cité à la page 121.]
- Cohen-Tannoudji, C. (1997). *Nobel Lecture : Manipulating Atoms with Photons*. World Scientific Publishing Co. [Cité à la page 2.]
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., and Laloé, F. (1973). *Mécanique quantique*. Hermann. [Cité aux pages 8 et 17.]
- Cole, G. D., Zhang, W., Martin, M. J., Ye, J., and Aspelmeyer, M. (2012). Tenfold reduction of Brownian noise in high reflectivity optical coatings. *Nature Photon.*, 7 :644. [Cité à la page 55.]
- Comparat, D., Fioretti, A., Stern, G., Dimova, E., Laburthe, B. L.-T., and Pillet, P. (2006). Optimized production of large Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 73 :043410. [Cité à la page 87.]
- Cornell, E. (2001). *Nobel Lecture : Bose-Einstein Condensation in a Dilute Gas ; The First 70 Years and Some Recent Experiments*. Nobel Foundation. [Cité à la page 2.]
- Courteille, P., Muniz, S., Magalhães, K., Kaiser, R., Marcassa, L., and Bagnato, V. (2001). Magnetic field tomography. *The Euro. Phys. Jour. D*, 15(2) :173–180. [Cité à la page 61.]
- Cox, K. C., Weiner, J. M., Greve, G. P., and Thompson, J. K. (2015). Generating entanglement between atomic spins with low-noise probing of an optical cavity. *arXiv :1504.05160*. [Cité aux pages 11, 70, 113 et 115.]
- Dalfovo, F., Giorgini, S., Pitaevskii, L. P., and Stringari, S. (1999). Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71 :463. [Cité aux pages 76, 77, 78 et 91.]
- Dalibard, J. and Cohen-Tannoudji, C. (1989). Laser cooling below the doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models. *Journal of the Optical Society of America B*, 6 :2023. [Cité à la page 46.]
- Davies, G. and Hamer, M. F. (1976). Optical studies of the 1.945 eV vibronic band in diamond. *Proc. R. Soc. A*, 348 :285. [Cité à la page 5.]



- Derevianko, A., Dzuba, V. A., and Flambaum, V. V. (2012). Highly charged ions as a basis of optical atomic clockwork of exceptional accuracy. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :180801. [Cité à la page 99.]
- Derevianko, A. and Katori, H. (2011). *Colloquium* : Physics of optical lattice clocks. *Rev. Mod. Phys.*, 83 :331–347. [Cité à la page 103.]
- Deutsch, C., Ramirez-Martinez, F., Lacroûte, C., Reinhard, F., Schneider, T., Fuchs, J. N., Piéchon, F., Lalöe, F., Reichel, J., and Rosenbusch, P. (2010). Spin self-rephasing and very long coherence times in a trapped atomic ensemble. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :020401. [Cité à la page 113.]
- Dick, G. J. (1987). Local oscillator induced instabilities in trapped ion frequency standards. *Proc. 19th Precise Time and Time Interval*, page 133. [Cité à la page 102.]
- Dicke, R. H. (1954). Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93 :99. [Cité à la page 9.]
- Diddams, S. A., Jones, D. J., Ye, J., Cundiff, S. T., Hall, J. L., Ranka, J. K., Windeler, R. S., Holzwarth, R., Udem, T., and Hänsch, T. W. (2000). Direct link between microwave and optical frequencies with a 300 THz femtosecond laser comb. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :5102. [Cité à la page 104.]
- Domenico, G. D., S.Schilt, and Thomann, P. (2010). Simple approach to the relation between laser frequency noise and laser line shape. *Applied Optics*, 49 :4801. [Cité à la page 121.]
- Drever, R. W. P., Hall, J. L., Kowalski, F. V., Hough, J., Ford, G. M., Munley, A. J., and Ward, H. (1983). Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator. *Appl. Phys. B*, 31 :97. [Cité à la page 56.]
- Einstein, A. and Infeld, L. (1983). *L'évolution des idées en physique : des premiers concepts aux théories de la relativité et des quanta*. Champ scientifique. Flammarion. [Cité à la page 2.]
- Estève, J., Gross, C., Giovanazzi, S., and Oberthaler, M. K. (2008). Squeezing and entanglement in a Bose-Einstein condensate. *Nature (London)*, 455 :1216. [Cité à la page 11.]
- Facchi, P., Nakazato, H., Pascazio, S., Pepe, F. V., A.Sekh, G., and Yuasa, K. (2014). Phase randomization and typicality in the interference of two condensates. *International Journal of Quantum Information*, 12(07n08) :1560019. [Cité aux pages 91 et 94.]
- Feynman, R. P., Jr., F. L. V., and Hellwarth, R. W. (1957). Geometrical representation of the Schrödinger equation for solving maser problems. *J. Appl. Phys.*, 28 :49. [Cité à la page 6.]
- Fleischhauer, M. (1999). Optical pumping in dense atomic media : limitations due to reabsorption of spontaneously emitted photons. *Europhys. Lett.*, 45 :659. [Cité à la page 68.]
- Fortier, T. M., Ashby, N., Bergquist, J. C., Delaney, M. J., Diddams, S. A., Heavner, T. P., Hollberg, L., Itano, W. M., Jefferts, S. R., Kim, K., Levi, F., Lorini, L., Oskay, W. H., Parker, T. E., Shirley, J., and Stalnaker, J. E. (2007). Precision atomic spectroscopy for improved limits on variation of the fine structure constant and local position invariance. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :070801. [Cité à la page 97.]
- Garrett, M., Ratnapala, A., van Ooijen, E. D., Vale, C., Weegink, K., Schnelle, S., Vainio, O., Hekkenberg, N., Rubinsztein-Dunlop, H., and Davis, M. (2011). Growth dynamics of a Bose-Einstein condensate in a dimple trap without cooling. *Phys. Rev. A*, 83 :013630. [Cité à la page 87.]
- Gehertz, M., Bjorklund, G. C., and Whittaker, E. A. (1985). Quantum-limited laser frequency modulation spectroscopy. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2 :1510. [Cité à la page 28.]
- Geiger, R., Amand, L., Bertoldi, A., Canuel, B., Chaibi, W., Danquigny, C., Dutta, I., Fang, B., Gaffet, S., Gillot, J., Holleville, D., Landragin, A., Merzougui, M., Riou, I., Savoie, D., and Bouyer, P. (2015). Matter wave laser Interferometric Gravitation Antenna (MIGA) : new perspectives for fundamental physics and geosciences. *Proceedings of the 50th Rencontres de Moriond 100 years after GR*, 2015. [Cité à la page 50.]

- Geiger, R., Ménoiret, V., Stern, G., Zahzam, N., Cheinet, P., Battelier, B., Villing, A., Moron, F., Lours, M., Bidel, Y., Bresson, A., Landragin, A., and Bouyer, P. (2011). Detecting inertial effects with airborne matter-wave interferometry. *Nature Communications*, 2 :474. [Cité à la page 118.]
- Gerginov, V., Nemitz, N., Weyers, S., Schroder, R., Griebisch, D., and Wynands, R. (2010). Uncertainty evaluation of the caesium fountain clock PTB-CSF2. *Metrologia*, 47 :65. [Cité à la page 99.]
- Gill, P. (2011). When should we change the definition of the second? *Phil. Trans. R. Soc. A*, 369 :4109. [Cité à la page 97.]
- Giovannetti, V., Lloyd, S., and Maccone, L. (2004). Quantum-enhanced measurements : beating the standard quantum limit. *Science*, 306 :1330. [Cité à la page 8.]
- Gleyzes, S., Kuhr, S., Guerlin, C., Bernu, J., Deléglise, S., Hoff, U. B., Brune, M., Raimond, J.-M., and Haroche, S. (2007). Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity. *Nature (London)*, 446 :297. [Cité aux pages 43 et 49.]
- Gominet, P. (2015). *ICE : accéléromètre à atomiques double espèce Rb/K aéroporté pour un test du principe d'équivalence*. PhD thesis, Université Bordeaux. [Cité aux pages 128 et 129.]
- Gouy, L. G. (1890). Sur une propriété nouvelle des ondes lumineuses. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 110 :1251. [Cité à la page 53.]
- Grimm, R., Weidemüller, M., and Ovchinnikov, Y. B. (2000). Optical dipole traps for neutral atoms. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 42 :95. [Cité aux pages 48, 49 et 81.]
- Gudmandsen, P., Hornby, O., and Ørsted, H. (1977). *Hans Christian Ørsted 1777-1977 : numéro spécial du "Journal danois" commémorant le centième anniversaire de la naissance du savant danois H.C. Ørsted, le 14 août 1777*. Revue Danoise. Ministère des affaires étrangères du Danemark. [Cité à la page 2.]
- Hall, D. S., Matthews, M. R., Wieman, C. E., and Cornell, E. A. (1998). Measurements of relative phase in two-component Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :1543–1546. [Cité à la page 91.]
- Hall, J. and Hänsch, T. W. (1984). External dye-laser frequency stabilizer. *Opt. Lett.*, 9 :502. [Cité aux pages 56 et 58.]
- Hamilton, P., Jaffe, M., Brown, J. M., Maisenbacher, L., Estey, B., and Müller, H. (2015). Atom interferometry in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 114 :100405. [Cité aux pages 43 et 49.]
- Hänsel, W., Reichel, J., Hommelhoff, P., and Hänsch, T. W. (2001a). Magnetic conveyor belt for transporting and merging trapped atom clouds. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :608–611. [Cité à la page 90.]
- Hänsel, W., Reichel, J., Hommelhoff, P., and Hänsch, T. W. (2001b). Trapped-atom interferometer in a magnetic microtrap. *Phys. Rev. A*, 64 :063607. [Cité à la page 90.]
- Hinds, E. A., Vale, C. J., and Boshier, M. G. (2001). Two-wire waveguide and interferometer for cold atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :1462–1465. [Cité à la page 90.]
- Hinkley, N., J. A. Sherman and, N. B. P., Schioppo, M., Lemke, N. D., Beloy, K., Pizzocaro, M., Oates, C. W., and Ludlow, A. D. (2013). An atomic clock with  $10^{18}$  instability. *Science*, 341 (6151) :1215. [Cité à la page 97.]
- Horak, P. and Loh, W. H. (2006). On the delayed self heterodyne interferometric technique for determining the linewidth of fiber lasers. *Optics Express*, 14 :3923. [Cité à la page 121.]
- Houtz, R., Chan, C., and Müller, H. (2009). Wideband, efficient optical heterodyne frequency shifting with a phase modulator and a nonlinear transmission line. *Optics Express*, 17 :19235. [Cité à la page 58.]

- Hume, D. B. and Leibbrandt, D. R. (2015). Differential clock comparisons with phase-locked local oscillators. *ArXiv e-prints*. [Cité à la page 98.]
- Hung, C., Zhang, X., Gemelke, N., and Chin, C. (2008). Accelerating evaporative cooling of atoms into Bose-Einstein condensation in optical traps. *Phys. Rev. A*, 78 :011604. [Cité aux pages 84 et 87.]
- Jacob, D., Mimoun, E., Sarlo, L. D., Weitz, M., Dalibard, J., and Gerbier, F. (2011). Production of sodium Bose-Einstein condensates in an optical dimple trap. *New Journal of Physics*, 13(6) :065022. [Cité à la page 87.]
- Jaynes, E. T. and Cummings, F. W. (1963). Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, 51 :89. [Cité à la page 13.]
- J. Campbell, C., Radnaev, A. G., Kuzmich, A., Dzuba, V. A., Flambaum, V. V., and Derevianko, A. (2012). Single-ion nuclear clock for metrology at the 19th decimal place. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :120802. [Cité à la page 99.]
- Jendrzejewski, F., Bernard, A., Müller, K., Cheinet, P., Josse, V., Piraud, M., Pezzé, L., Sanchez-Palencia, L., Aspect, A., and Bouyer, P. (2012). Three dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential. *Nature Physics*, 8 :398. [Cité à la page 118.]
- Jiang, Y. Y., Ludlow, A. D., Lemke, N. D., Fox, R. W., Sherman, J. A., Ma, L.-S., and Oates, C. W. (2011). Making optical atomic clocks more stable with  $10^{-16}$ -level laser stabilization. *Nature Photon.*, 5 :158. [Cité aux pages 55 et 102.]
- Jo, G.-B., Guzman, J., Thomas, C. K., Hosur, P., Vishwanath, A., and Stamper-Kurn, D. M. (2012). Ultracold atoms in a tunable optical Kagome lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :045305. [Cité à la page 117.]
- Johnson, D. M. S., Hogan, J. M., Chiow, S.-W., and Kasevich, M. A. (2010). Broadband optical serrodyne frequency shifting. *Opt. Lett.*, 35 :745. [Cité à la page 58.]
- Jones, D. J., Diddams, S. A., Ranka, J. K., Stentz, A., Windeler, R. S., Hall, J. L., and Cundiff, S. T. (2010). Carrier envelope phase control of femtosecond mode locked lasers and direct optical frequency synthesis. *Science*, 288 (5466) :635. [Cité à la page 104.]
- Jorland, G. (2002). La notion de révolution scientifique aujourd'hui. *Revue européenne des sciences sociales*, XL-124 Histoire, philosophie et sociologie des sciences :131–146. [Cité à la page 1.]
- Kaplan, A., Andersen, M. F., and Davidson, N. (2002). Suppression of inhomogeneous broadening in RF spectroscopy of optically trapped atoms. *Phys. Rev. A*, 66 :045401. [Cité à la page 145.]
- Kasevich, M. A., Riis, E., Chu, S., and DeVoe, R. G. (1989). RF spectroscopy in an atomic fountain. *Phys. Rev. Lett.*, 63 :612. [Cité à la page 99.]
- Kastler, A. (1933). Le bilan du moment cinétique et les règles de polarisation en spectroscopie. Application à la diffusion de la lumière et à la fluorescence. *J. Phys. Radium*, 4 :406. [Cité à la page 68.]
- Kastler, A. (1966). *Nobel Lecture : Optical Methods for Studying Hertzian Resonances*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam. [Cité à la page 68.]
- Katori, H., Takamoto, M., Pal'chikov, V. G., and Ovsiannikov, V. D. (2003). Ultrastable optical clock with neutral atoms in an engineered light shift trap. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :173005. [Cité aux pages 99 et 113.]
- Kessler, E., Komar, P., Bishof, M., Jiang, L., Sorensen, A., Ye, J., and Lukin, M. (2014). Heisenberg-limited atom clocks based on entangled qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 112 :190403. [Cité à la page 115.]

- Kessler, T., Hagermann, C., Grebing, C., Legero, T., Sterr, U., Riehle, F., Martin, M. J., Chen, L., and Ye, J. (2012). A sub-40 mHz linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity. *Nat. Phot.*, 6 :687. [Cité aux pages 98 et 102.]
- Ketterle, W. (2001). *Nobel Lecture : When Atoms Behave as Waves : Bose-Einstein Condensation and the Atom Laser*. Nobel Foundation. [Cité à la page 2.]
- Khadjavi, A., Lurio, A., and Happer, W. (1968). Stark effect in the excited states of Rb, Cs, Cd, and Hg. *Phys. Rev.*, 167 :128. [Cité à la page 49.]
- Kinoshita, T., Wenger, T., and D.S.Weiss (2005). All-optical Bose-Einstein condensation using a compressible crossed dipole trap. *Phys. Rev. A*, 71 :011602. [Cité à la page 87.]
- Kitagawa, M. and Ueda, M. (1993). Squeezed spin states. *Phys. Rev. A*, 47 :5138. [Cité à la page 11.]
- Kogelnik, H. and Li, T. (1966). Laser beams and resonators. *Appl. Opt.*, 5 :1550. [Cité à la page 51.]
- Kohlhaas, R. (2014). *Feedback Control of Collective Spin States for Atom Interferometry*. PhD thesis, Université Paris XI, Institut d'optique Graduate School. [Cité aux pages 37, 42, 50, 67 et 102.]
- Kohlhaas, R., Bertoldi, A., Cantin, E., Aspect, A., Landragin, A., and Bouyer, P. (2012). Robust laser frequency stabilization by serrodyne modulation. *Opt. Lett.*, 37 :1005. [Cité aux pages 56 et 58.]
- Kohlhaas, R., Bertoldi, A., Cantin, E., Aspect, A., Landragin, A., and Bouyer, P. (2015). Phase locking a clock oscillator to a coherent atomic ensemble. *Phys. Rev. X*, 5 :021011. [Cité aux pages 3 et 116.]
- Koyré, A. (1962). *Du monde clos à l'univers infini*. Collection Idées. Presses universitaires de France. [Cité à la page 1.]
- Kozlov, A., Dzuba, V. A., and Flambaum, V. V. (2013). Prospects of building optical atomic clocks using Er I or Er III. *Phys. Rev. A*, 88 :032509. [Cité à la page 115.]
- Kruse, D., Ruder, M., Benhelm, J., von Cube, C., Zimmermann, C., Courteille, P. W., Elsässer, T., Nagorny, B., and Hemmerich, A. (2003). Cold atoms in a high- $Q$  ring cavity. *Phys. Rev. A*, 67 :051802. [Cité à la page 90.]
- Kuga, T., Tori, Y., Shiokawa, N., Hirano, T., Shimizu, Y., and Sasada, H. (1997). Novel optical trap of atoms with a doughnut beam. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :4713–4716. [Cité à la page 90.]
- Kuhn, T. S. (1972). *La structure des révolutions scientifiques*. Flammarion, Paris. [Cité à la page 1.]
- Kuzmich, A., Bigelow, N. P., and Mandel, L. (1998). Atomic quantum non-demolition measurements and squeezing. *Europhys. Lett.*, 42 :481. [Cité à la page 22.]
- Lee, J., Vrijsen, G., Teper, I., Hosten, O., and Kasevich, M. A. (2014). Many atom cavity QED system with homogeneous atom cavity coupling. *Opt. Lett.*, 39 :4005. [Cité aux pages 50 et 115.]
- Leefer, N., Weber, C. T. M., Cingöz, A., Torgerson, J. R., and Budker, D. (2013). New limits on variation of the fine-structure constant using atomic dysprosium. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :060801. [Cité à la page 97.]
- Leproux, P., Valérie, D., Roy, P., Pagnoux, D., Mortessagne, F., and Legrand, O. (2002). Experimental study of pump power absorption along rare earth doped double clad optical fibres. *Optics Communications*, 218 :249. [Cité à la page 119.]
- Leroux, I. D., Schleier-Smith, M. H., and Vuletić, V. (2010a). Implementation of cavity squeezing of a collective atomic spin. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :073602. [Cité aux pages 11, 43, 70 et 115.]
- Leroux, I. D., Schleier-Smith, M. H., and Vuletić, V. (2010b). Orientation-dependent entanglement lifetime in a squeezed atomic clock. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :250801. [Cité aux pages 11 et 20.]

- Lett, P. D., Watts, R. N., Westbrook, C. I., Phillips, W. D., Gould, P. L., and Metcalf, H. J. (1988). Observation of atoms laser cooled below the doppler limit. *Phys. Rev. Lett.*, 61 :169. [Cité à la page 45.]
- Lienhart, F. (2007). *Etude d'un gravimètre à atomes froids embarquable*. PhD thesis, Observatoire de Paris. [Cité à la page 120.]
- Lindquist, K., Stephens, M., and Wieman, C. (1992). Experimental and theoretical study of the vapor cell Zeeman optical trap. *Phys. Rev. A*, 46 :4082. [Cité à la page 45.]
- Lodewyck, J., Westergaard, P. G., and Lemonde, P. (2009). Nondestructive measurement of the transition probability in a Sr optical lattice clock. *New J. Phys.*, 12 :065032. [Cité à la page 113.]
- Long, R., Tuchman, A. K., and Kasevich, M. A. (2007). Multiple frequency modulation for low-light atom measurements in an optical cavity. *Opt. Lett.*, 32(17) :2502. [Cité à la page 74.]
- Loubser, J. H. N. and van Wyk, J. A. (1978). Electron spin resonance in the study of diamond. *Rep. Prog. Phys.*, 41 :1201. [Cité à la page 5.]
- Louchet-Chauvet, A., Appel, J., Renema, J. J., Oblak, D., Kjaergaard, N., and Polzik, E. S. (2010). Entanglement assisted atomic clock beyond the projection noise limit. *Phys. Rev. A*, 79 :061401. [Cité aux pages 11, 20, 34 et 113.]
- Ludlow, A. D., Boyd, M. M., Ye, J., Peik, E., and Schmidt, P. (2015). Optical atomic clocks. *Rev. Mod. Phys.*, 87 :637. [Cité à la page 103.]
- Luiten, O. J., Reynolds, M. W., and Walraven, J. T. M. (1996). Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas. *Phys. Rev. A*, 53 :381–389. [Cité à la page 84.]
- Luiz, F. S., Duzzioni, E. I., and Sanz, L. (2015). Implementation of quantum logic gates using coupled Bose-Einstein condensates. *ArXiv e-prints*. [Cité à la page 91.]
- Lye, J. E., Hope, J. J., and Close, J. D. (2003). Nondestructive dynamic detectors for Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 67 :043609. [Cité aux pages 50 et 69.]
- Ma, J., Wanga, X., Suna, C., and Noria, F. (2011). Quantum spin squeezing. *Phys. Rep.*, 509 :89. [Cité à la page 11.]
- Ma, Z.-Y., Foot, C. J., and Cornish, S. (2004). Optimized evaporative cooling using a dimple potential : an efficient route to Bose-Einstein condensation. *Journal of Phys. B*, 37(15) :3187. [Cité à la page 87.]
- Margolis, H. S. (2009). Frequency metrology and clocks. *J. of Phys. B*, 42(15) :154017. [Cité à la page 103.]
- McDonald, G. D., Kuhn, C. C. N., Bennett, S., Debs, J. E., Hardman, K. S., Johnsson, M., Close, J. D., and Robins, N. P. (2013).  $80\hbar k$  momentum separation with Bloch oscillations in an optically guided atom interferometer. *Phys. Rev. A*, 88 :053620. [Cité à la page 90.]
- Meunier, M., Dutta, I., Geiger, R., Guerlin, C., Alzar, C. L. G., and Landragin, A. (2014). Stability enhancement by joint phase measurements in a single cold atomic fountain. *Phys. Rev. A*, 90 :063633. [Cité à la page 103.]
- Mugnier, A., Jacquemet, M., Mercier, E. L., Lebreff, R., and Pureur, D. (2012). High power single frequency 780 nm fiber laser source for Rb trapping and cooling applications. *Proc. SPIE, Fiber Lasers IX : Technology, Systems and Applications*, 8237. [Cité aux pages 120, 121, 122 et 125.]
- Müntinga, H., Ahlers, H., Krutzik, M., Wenzlawski, A., Arnold, S., Becker, D., Bongs, K., Dittus, H., Duncker, H., Gaaloul, N., Gherasim, C., Giese, E., Grzeschik, C., Hänsch, T. W., Hellmig, O., Herr, W., Herrmann, S., Kajari, E., Kleinert, S., Lämmerzahl, C., Lewoczko-Adamczyk, W., Malcolm, J., Meyer, N., Nolte, R., Peters, A., Popp, M., Reichel, J., Roura, A., Rudolph, J., Schiemanck,

- M., Schneider, M., Seidel, S. T., Sengstock, K., Tamma, V., Valenzuela, T., Vogel, A., Walser, R., Wendrich, T., Windpassinger, P., Zeller, W., Zoest, T., Ertmer, W., Schleich, W. P., and Rasel, E. M. (2013). Interferometry with Bose-Einstein condensates in microgravity. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :093602. [Cité à la page 129.]
- Nicholson, T., Campbell, S., Hutson, R., Marti, G., Bloom, B., McNally, R., Zhang, W., Barrett, M., Safronova, M., Strouse, G., Tew, W., and Ye, J. (2015). Systematic evaluation of an atomic clock at  $2 \times 10^{18}$  total uncertainty. *Nature Com.*, 6 :6896. [Cité aux pages 97 et 99.]
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, first edition. [Cité à la page 18.]
- Norcia, M. A. and Thompson, J. K. (2015). Strong Coupling on a Forbidden Transition in Strontium and Nondestructive Atom Counting. *ArXiv e-prints*. [Cité à la page 74.]
- Nyman, R. A., Varoquaux, G., Lienhart, F., Chambon, D., Boussen, S., Clément, J.-F., Müller, T., Santarelli, G., Santos, F. P. D., Clairon, A., Bresson, A., Landragin, A., and Bouyer, P. (2006). I.C.E. : a transportable atomic inertial sensor for test in microgravity. *App. Phys. B*, 84 :673. [Cité aux pages 118 et 129.]
- Oblak, D., Petrov, P. G., Alzar, C. L. G., Tittel, W., Vershovski, A. K., Mikkelsen, J. K., Sørensen, J. L., and Polzik, E. S. (2005). Quantum-noise-limited interferometric measurement of atomic noise : towards spin squeezing on the Cs clock transition. *Phys. Rev. A*, 71 :043807. [Cité à la page 31.]
- O'Brien, J. L. (2007). Optical quantum computing. *Science*, 318 :1567. [Cité à la page 5.]
- Ockeloen, C. F., Schmied, R., Riedel, M. F., and Treutlein, P. (2013). Quantum metrology with a scanning probe atom interferometer. *Phys. Rev. L*, 111 :143001. [Cité aux pages 11 et 20.]
- Ockeloen, C. F., Tauschinsky, A. F., Spreeuw, R. J. C., and Whitlock, S. (2010). Detection of small atom numbers through image processing. *Phys. Rev. A*, 82 :061606. [Cité à la page 79.]
- O'Hara, K. M., Gehm, M. E., Granade, S. R., and Thomas, J. E. (2001). Scaling laws for evaporative cooling in time dependent optical traps. *Phys. Rev. A*, 64 :051403. [Cité à la page 84.]
- Okoshi, T. (1980). Novel method for high resolution measurement of laser output spectrum. *Elec. Letters*, 16 :630. [Cité à la page 121.]
- Petrich, W., Anderson, M. H., Ensher, J. R., and Cornell, E. A. (1994). Behavior of atoms in a compressed magneto-optical trap. *J. Opt. Soc. Am. B*, 11 :1332. [Cité à la page 80.]
- Phillips, W. (1997). *Nobel Lecture : Laser Cooling and Trapping of Neutral Atoms*. World Scientific Publishing Co. [Cité à la page 2.]
- Pinkse, P. W. H., Mosk, A., Weidemüller, M., Reynolds, M. W., Hijmans, T. W., and Walraven, J. T. M. (1997). Adiabatically changing the phase-space density of a trapped bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :990–993. [Cité à la page 87.]
- Pound, R. V. (1946). Electronic frequency stabilization of microwave oscillators. *Rev. Sci. Instrum.*, 17 :490. [Cité à la page 56.]
- Prokhorov, A. M. (1964). *Nobel Lecture : Quantum Electronics*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam. [Cité à la page 43.]
- Raab, E. L., Prentiss, M., Cable, A., Chu, S., and Pritchard, D. E. (1987). Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :2631. [Cité à la page 43.]
- Radnaev, A. G., Dudin, Y. O., Zhao, R., Jen, H. H., Jenkins, S. D., Kuzmich, A., and Kennedy, T. A. B. (2010). A quantum memory with telecom-wavelength conversion. *Nat. Phys.*, 6 :894. [Cité à la page 113.]

- Rempe, G., Thompson, R. J., Brecha, R. J., Lee, W. D., and Kimble, H. J. (1991). Optical bistability and photon statistics in cavity quantum electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 67 :1727. [Cité à la page 49.]
- Robert-De-Saint-Vincent, M., Brantut, J.-P., Bordé, C. J., Aspect, A., Bourdel, T., and Bouyer, P. (2010). A quantum trampoline for ultra-cold atoms. *Europhys. Lett.*, 89 :1. [Cité à la page 95.]
- Robertson, H. P. (1929). The uncertainty principle. *Phys. Rev.*, 43 :163. [Cité à la page 8.]
- Romanini, D., Kachanov, A., Sadeghi, N., and Stoeckel, F. (1996). CW cavity ring down spectroscopy. *Chemical Physics Letters*, 264 :316. [Cité à la page 54.]
- Rosenband, T. and Leibbrandt, D. R. (2013). Exponential scaling of clock stability with atom number. *arXiv :1303.6357*. [Cité aux pages 95 et 115.]
- Safronova, M. S., Zuhrianda, Z., Safronova, U. I., and Clark, C. W. (2015). The magic road to precision. *arXiv :1507.06570*. [Cité aux pages 113 et 115.]
- Salgueiro, A. N., de Toledo Piza, A., Lemos, G. B., Drumond, R., M.C.Nemes, and Weidemüller, M. (2007). Quantum dynamics of bosons in a double-well potential : josephson oscillations, self-trapping and ultralong tunneling times. *The Euro. Phys. Journ. D*, 44(3) :537–540. [Cité à la page 91.]
- Santarelli, G. (1996). *Contribution à la réalisation d'une fontaine atomique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie Paris VI. [Cité à la page 102.]
- Santarelli, G., Audoin, C., Makdissi, A., Laurent, P., Dick, G., and Clairon, A. (1998). Frequency stability degradation of an oscillator slaved to a periodically interrogated atomic resonator. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 45 :887. [Cité à la page 102.]
- Schleier-Smith, M. H., Leroux, I. D., and Vuletić, V. (2010). States of an ensemble of two-level atoms with reduced quantum uncertainty. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :073604. [Cité à la page 11.]
- Shiga, N., Mizuno, M., Kido, K., Phoonthong, P., and K.Okada (2012). Accelerating the averaging rate of atomic ensemble clock stability using atomic phase lock. *New J. Phys.*, 16 :073029. [Cité à la page 107.]
- Shiga, N. and Takeuchi, M. (2012). Locking local oscillator phase to the atomic phase via weak measurement. *New J. Phys.*, 14 :023034. [Cité à la page 107.]
- Stamper-Kurn, D. M., Miesner, H.-J., Chikkatur, A. P., Inouye, S., Stenger, J., and Ketterle, W. (1998). Reversible formation of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :2194–2197. [Cité à la page 87.]
- Steck, D. A. (2001). Rubidium 87 D line data. [Cité aux pages 27, 30, 45 et 137.]
- Stellmer, S., Pasquiou, B., Grimm, R., and Schreck, F. (2013). Laser cooling to quantum degeneracy. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :263003. [Cité à la page 67.]
- Sugarbaker, A. (2014). *Atom Interferometry in a 10m fountain*. PhD thesis, Stanford University. [Cité à la page 129.]
- Szmuk, R., Dugrain, V., Maineult, W., Reichel, J., and Rosenbusch, P. (2015). Stability of a trapped atom clock on a chip. *Phys. Rev. A*, 92 :012106. [Cité aux pages 99, 101 et 102.]
- Takamoto, M., Hong, F.-L., Higishi, R., and Katori, H. (2005). An optical lattice clock. *Nature (London)*, 435 :321. [Cité à la page 99.]
- Tarruell, L., Greif, D., Uehlinger, T., Jotzu, G., and Esslinger, T. (2012). Creating, moving and merging Dirac points with a Fermi gas in a tunable honeycomb lattice. *Nature*, 483 :302. [Cité à la page 117.]

- Thompson, R. J., Rempe, G., , and Kimble, H. J. (1992). Observation of normal mode splitting for an atom in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 68 :1132. [Cité à la page 49.]
- Thorpe, M. J., Rippe, L., Fortier, T. M., Kirchner, M. S., and Rosenband, T. (2011). Frequency stabilization to  $6 \times 10^{16}$  via spectral-hole burning. *Nat. Phot.*, 5 :688. [Cité à la page 102.]
- Townes, C. H. (1964). *Nobel Lecture : Production of Coherent Radiation by Atoms and Molecules*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam. [Cité à la page 43.]
- Ushijima, I., Takamoto, M., Das, M., Ohkubo, T., and Katori, H. (2015). Cryogenic optical lattice clocks. *Nat. Photonics*, 9 :185. [Cité à la page 99.]
- van Enk, S., Kimble, H., and Mabuchi, H. (2004). Quantum information processing in cavity QED. *Quantum Information Processing*, 3 :75. [Cité à la page 43.]
- Vanderbruggen, T. (2012). *Détection non-destructive pour l'interférométrie atomique et Condensation de Bose-Einstein dans une cavité optique de haute finesse*. PhD thesis, Université Paris XI, Institut d'optique Graduate School. [Cité aux pages 15, 16, 33, 42, 50, 51, 57, 75, 83, 87 et 145.]
- Vanderbruggen, T., Bernon, S., Bertoldi, A., Landragin, A., and Bouyer, P. (2011). Spin-squeezing and Dicke-state preparation by heterodyne measurement. *Phys. Rev. A*, 83 :013821. [Cité aux pages 31 et 32.]
- Vanderbruggen, T., Kohlhaas, R., Bertoldi, A., Bernon, S., Aspect, A., Landragin, A., and Bouyer, P. (2013). Feedback control of trapped coherent atomic ensembles. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :210503. [Cité aux pages 3, 32 et 116.]
- Vanderbruggen, T., Kohlhaas, R., Bertoldi, A., Cantin, E., Landragin, A., and Bouyer, P. (2014). Feedback control of coherent spin states using weak nondestructive measurements. *Phys. Rev. A*, 89 :063619. [Cité aux pages 3, 32, 42, 70 et 96.]
- Varoquaux, G., Nyman, R. A., Geiger, R., Cheinet, P., Landragin, A., and Bouyer, P. (2009). How to estimate the differential acceleration in a two-species atom interferometer to test the equivalence principle. *New J. Phys.*, 11 :113010. [Cité à la page 129.]
- Von Neumann, J. (1955). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press. [Cité à la page 18.]
- Wheeler, M. D., Newman, S. M., Ewing, A. J. O., and Ashfold, M. N. R. (1998). Cavity ring down spectroscopy. *J. Chem. Soc. Faraday Trans.*, 94 :337. [Cité à la page 54.]
- Wieman, C. (2001). *Nobel Lecture : Bose-Einstein Condensation in a Dilute Gas ; The First 70 Years and Some Recent Experiments*. Nobel Foundation. [Cité à la page 2.]
- Wineland, D. J., Bollinger, J. J., Itano, W. M., and Heinzen, D. J. (1994). Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy. *Phys. Rev. A*, 50 :67. [Cité à la page 11.]
- Wineland, D. J., Bollinger, J. J., Itano, W. M., Moore, F. L., and Heinzen, D. J. (1992). Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy. *Phys. Rev. A*, 46 :R6797. [Cité aux pages 8 et 43.]
- Yurke, B., McCall, S. L., and Klauder, J. R. (1985). SU(2) and SU(1,1) interferometers. *Phys. Rev. A*, 33 :4033. [Cité à la page 16.]
- Zhang, W.-M., Feng, D. H., and Gilmore, R. (1990). Coherent states : theory and some applications. *Rev. Mod. Phys.*, 62 :867. [Cité à la page 9.]