

# Résumé français

## 1. Introduction

Les travaux de cette thèse sont consacrés à l'analyse de la synchronisation des réseaux à grand nombre d'oscillateurs non linéaires et hétérogènes, en utilisant des outils et des méthodes issues de la théorie du contrôle. Deux modèles sont utilisés pour décrire les réseaux d'oscillateurs : le modèle de Kuramoto et le modèle de Stuart-Landau. Notre analyse se concentre sur l'effet des interactions entre les éléments du réseau sur la synchronisation du système. La thèse contient des résultats d'analyse et leurs confirmations à travers des exemples de simulation démonstratifs.

La première partie du travail porte sur l'étude du modèle de Kuramoto. Tout d'abord, nous considérons un réseau complexe arbitraire des oscillateurs de Kuramoto. Pour ce dernier, nous donnons les conditions d'existence de solutions à verrouillage de phase ainsi que l'expression analytique de la fréquence de synchronisation. Ensuite, nous proposons une nouvelle généralisation du modèle de Kuramoto avec des interactions plus hétérogènes : nous supposons que chaque oscillateur est caractérisé par ses poids d'entrée et de sortie outre sa fréquence naturelle. Pour ce modèle, nous présentons les solutions à verrouillage de phase ainsi que leur analyse de stabilité. Notre étude s'est étendue au cas où le réseau contient des pondérations négatives. Ceci permet de modéliser à la fois les interactions attractives et répulsives entre les oscillateurs. Dans ce cas, les critères d'existence de solutions à verrouillage de phase sont formulés et leur stabilité locale est analysée.

Dans la seconde partie, nous étudions le problème de synchronisation d'un réseau hétérogène d'oscillateurs de Stuart-Landau. Ainsi, nous affirmons l'existence d'un comportement de synchronisation dans le cas d'une force du couplage suffisamment grande. Ensuite, en se basant sur la notion de stabilité pratique, une analyse de la stabilité du système a été fournie et une approximation de la variété de synchronisation a été formulée.

## 2. Modèle de Kuramoto

### 2.1. Généralités

Le modèle de Kuramoto est un modèle standard pour l'étude des phénomènes de synchronisation collective dans un grand réseau d'oscillateurs à cycle limite ([9], [15]). Ce modèle et ses généralisations englobent une très large classe de phénomènes de synchronisation allant de la physique [8] à la biologie [3], [10]. Le modèle de Kuramoto décrit chaque oscillateur par une équation différentielle de phase où le couplage entre les oscillateurs est modélisé par le sinus de différence de phases. Le modèle de Kuramoto dans sa forme la plus générale est décrit comme suit :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N k_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i \in 1 \dots N, \quad (0.1)$$

où les  $\theta_i$ ,  $\dot{\theta}_i$  et  $\omega_i \in \mathbb{R}$  représentent respectivement la phase instantanée, la fréquence instantanée et la fréquence naturelle de chaque oscillateur  $i$ .  $N$  est le nombre d'oscillateurs et la matrice  $\mathcal{K} = [k_{ij}]$  est la matrice d'interconnexion des oscillateurs, dont les éléments  $k_{ij} \in \mathbb{R}$  représentent la force du couplage entre les oscillateurs  $i$  et  $j$ . Dans sa présentation la plus simple (Modèle de Kuramoto classique ou "all-to-all"), le modèle a la forme suivante :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i \in 1 \dots N.$$

Ainsi, le graphe d'interconnexion est considéré complet et la force de couplage  $K$  est identique entre tous les oscillateurs.

### Synchronisation : définitions et notions

Le modèle de Kuramoto (0.1) décrit chaque oscillateur en fonction de la phase instantanée et sa dérivée instantanée (fréquence instantanée). En conséquence, il y a deux concepts de synchronisation : la synchronisation en fréquence et la synchronisation en phase.

**Définition 1** (Fréquence d'oscillation verrouillée) – *Les oscillateurs définis par (0.1) ont une solution à verrouillage de fréquence s'il existe une constante  $\omega_s \in \mathbb{R}$  et si les conditions initiales  $\theta_o \in \mathbb{R}^N$  sont telles que pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$*

$$\dot{\theta}_i(t, \theta_o) = \omega_s, \quad \forall t \geq 0. \quad (0.2)$$

**Définition 2** (Synchronisation en fréquence) – *Les oscillateurs définis par (0.1) sont synchronisés en fréquence s’il existe une solution à verrouillage de fréquence du système et si toutes les fréquences  $\dot{\theta}_i(t)$  convergent asymptotiquement vers cette solution, c’est-à-dire :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}_i = \omega_s, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (0.3)$$

**Définition 3** (Verrouillage de phase) *Soit  $\theta_o \in \mathbb{R}^N$  et  $\theta(t, \theta_o)$ ,  $t \geq 0$  la solution du modèle de Kuramoto pour les conditions initiales  $\theta_o$ . La solution  $\theta(t, \theta_o)$  est appelée solution à verrouillage de phase si*

$$\theta_i(t, \theta_o) - \theta_j(t, \theta_o) = \theta_{i_o} - \theta_{j_o},$$

pour tout  $t \geq 0$  et tout  $i, j = 1, \dots, N$ .

**Définition 4** (Synchronisation en phase) – *Les oscillateurs définis par (0.1) sont synchronisés en phase s’il existe une solution à verrouillage de phase du système  $\theta^* \in \mathbb{R}^N$  et un ensemble  $\Theta \subset \mathbb{R}^N$  sachant qu’asymptotiquement toutes les différences de phase  $\theta_i(t, \theta_o) - \theta_j(t, \theta_o)$  convergent vers cette solution pour toutes les conditions initiales  $\theta_o \in \Theta$ , c’est-à-dire*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_i(t, \theta_o) - \theta_j(t, \theta_o) = \theta_i^* - \theta_j^*, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (0.4)$$

## 2.2. Résultats

### 2.2.1. Synchronisation dans un réseau complexe des oscillateurs de Kuramoto

Cette section résume les résultats principaux du Chapitre 3. Dans ce dernier, nous considérons le système (0.1) des oscillateurs de Kuramoto dans un réseau complexe. Ces oscillateurs sont couplés avec des gains hétérogènes. Nous caractérisons les conditions d’existence de solutions à verrouillage de fréquence et de phase.

Le théorème suivant présente le problème d’existence de solutions à verrouillage de fréquence sous la forme d’un problème d’existence de solutions pour un système non linéaire des équations algébriques. Ces conditions sont formulées en termes des fréquences naturelles d’oscillateurs et des éléments de la matrice d’adjacence  $\mathcal{K} = [k_{ij}]$ .

**Théorème 1** *Considérons les oscillateurs de Kuramoto (0.1) couplés via un graphe orienté  $G$  et une force de couplage  $\gamma > 0$  :*

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \gamma \sum_{j=1}^N k_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i \in 1 \dots N. \quad (0.5)$$

*Soit  $\tilde{\omega}_i = \omega_s - \omega_i$  et  $\omega_s \in \mathbb{R}$  une constante non définie. Le système a une solution à verrouillage de fréquence si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Le système d'équations algébriques suivant*

$$\begin{aligned} \sum_{j,j \neq i}^{N-1} \pm k_{i,j} \left( \xi_i \sqrt{1 - \xi_j^2} - \sqrt{1 - \xi_i^2} \xi_j \right) &= \frac{\tilde{\omega}_i}{\gamma}, \quad i = 1 \dots N-1 \\ \sum_{j=1}^{N-1} k_{N,j} \xi_j &= \frac{\tilde{\omega}_N}{\gamma}, \end{aligned} \quad (0.6)$$

*a au moins une solution  $[\xi_1^*, \dots, \xi_{N-1}^*, \omega_s^*]$ .*

2. *Pour tous  $i = 1 \dots N-1$ , les solutions  $\xi_i^*$  satisfont  $|\xi_i^*| \leq 1$ .*

Dans le cas des graphes d'interconnexion symétriques, il est connu que la fréquence de synchronisation est égale à la moyenne des fréquences naturelles. Toutefois, dans le cas de réseaux complexes, la fréquence de synchronisation dépend de la topologie du graphe d'interconnexion et de la force de couplage. Dans le théorème suivant, nous donnons une expression analytique de la fréquence de synchronisation limite dans le cas où la force de couplage est suffisamment grande.

**Théorème 2** *Considérons le système (0.5) avec un graphe d'interconnexion fortement couplé et un gain de couplage  $\gamma$ . Si le système est synchronisé en fréquence, alors la fréquence de synchronisation  $\omega_s$  converge vers  $\frac{w_l^\top \Omega}{w_l^\top \mathbf{1}}$  si le gain de couplage  $\gamma$  est suffisamment grand, c'est-à-dire*

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \omega_s(\gamma) = \frac{w_l^\top \Omega}{w_l^\top \mathbf{1}}. \quad (0.7)$$

*Notons que  $w_l$  est le vecteur propre gauche de la matrice Laplacienne du réseau  $L$  associé à la valeur propre  $\lambda_1(L) = 0$  et  $\Omega$  est le vecteur des fréquences naturelles.*

Dans [14] et [4], les auteurs introduisent un modèle linéaire à variables complexes et ils prouvent que ce modèle linéaire possède les mêmes propriétés asymptotiques du modèle classique de Kuramoto. Nous commençons notre analyse par la généralisation de ces résultats pour le modèle de Kuramoto avec un réseau d'interconnexion complexe, et nous montrons que le problème d'existence des solutions à verrouillage de phase pour le modèle Kuramoto (0.1) avec une matrice d'interconnexion arbitraire  $\mathcal{K} = [k_{ij}]$ , peut être ramené à un problème d'existence d'un système linéaire à variables complexes satisfaisant un ensemble de propriétés.

L'idée sous-jacente de l'approche peut être résumée comme suit. Considérons un système linéaire paramétré (en termes de  $\mu$ ) dans cette forme :

$$\dot{x}_i = (i\omega_i - \mu_i)x_i + \sum_{j=1}^N k_{ij} x_j, \quad i = \{1 \dots N\}, \quad (0.8)$$

où  $x_i \in \mathbb{C}$ ,  $\mu_i \in \mathbb{R}$  et  $k_{ij}$  sont les éléments de la matrice d'interconnexion  $\mathcal{K}$ . On peut également mettre l'équation (0.8) sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathcal{K} + i\Omega + \mathcal{M})\mathbf{x}, \quad (0.9)$$

où  $\mathcal{K} = [K_{ij}]$  est la matrice des interconnexions du modèle de Kuramoto (0.1),  $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$  et  $\mathcal{M} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ .

En utilisant les coordonnées polaires  $x_j = R_j e^{i\theta_j}$ , nous pouvons mettre le système (0.8) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}_i}{R_i} &= -\mu_i + \sum_{j=1}^N k_{ij} \frac{R_j}{R_i} \cos(\theta_j - \theta_i), \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i + \sum_{j=1}^N k_{ij} \frac{R_j}{R_i} \sin(\theta_j - \theta_i). \end{aligned}$$

Dans la dernière équation (parties imaginaires), il est possible de prouver l'existence d'une constante  $R > 0$  tel que  $\lim_{t \rightarrow \infty} R_i = R$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Ceci impliquerait que asymptotiquement, la dynamique de  $\theta$  peut être décrite par le modèle de Kuramoto (0.1).

En utilisant le modèle linéaire à variable complexe (0.8), nous proposons un cadre alternatif cohérent à travers lequel nous pouvons résoudre analytiquement des problèmes de synchronisation pour des nouveaux types d'interactions, à savoir des réseaux asymétriques, pondérés ou encore signés. Cette démarche nous permet d'étendre l'analyse du modèle de Kuramoto classique proposé dans [1].

Dans le théorème ci-dessous, nous présentons les conditions sur la matrice  $A$  du système linéaire (0.9) garantissant l'existence de solutions à verrouillage de phase pour le modèle Kuramoto (0.1).

**Théorème 3** *Considérons le modèle de Kuramoto (0.1), soit la matrice d'interconnexion  $\mathcal{K} = [k_{ij}]$  et soit  $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$  la matrice des fréquences naturelles. Pour ce système, les deux instructions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe une constante  $\omega_s \in \mathbb{R}$  et une matrice  $\mathcal{M} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  tel que la matrice  $A = \mathcal{K} + i\Omega + \mathcal{M}$  a une valeur propre  $\lambda_o(A) = i\omega_s$  d'ordre de multiplicité égal à*

un et son vecteur propre droit associé a la forme suivante :

$$v_o(A) = \text{col}(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_N}). \quad (0.10)$$

2) Le modèle Kuramoto (0.1) a une solution à verrouillage de phase.

### 2.2.2. Analyse du modèle de Kuramoto avec un graphe pondéré asymétrique

Cette section résume les résultats principaux du Chapitre 4. En premier lieu, nous proposons une généralisation du modèle de Kuramoto avec plus d'hétérogénéité au niveau des oscillateurs. Autrement dit, nous supposons que chaque élément est caractérisé à la fois par sa fréquence naturelle et par ses poids d'entrée et de sortie. Contrairement à la fréquence naturelle qui détermine la dynamique individuelle en l'absence de couplage, les deux nouvelles pondérations affectent la façon dont chaque oscillateur interagit avec l'ensemble. Ainsi, elles définissent l'hétérogénéité des interactions dans le réseau.

Avec ce choix particulier de couplage, le modèle Kuramoto (0.1) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} w_{out}^i \sum_{j=1}^N w_{in}^j \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (0.11)$$

où la force de couplage entre les paires d'oscillateurs connectés est définie par le gain de couplage  $K > 0$ , les vecteurs de pondération d'entrée  $W_{in}^\top = [w_{in}^1, \dots, w_{in}^N] \in \mathbb{R}_+^N$ , et de pondération de sortie  $W_{out}^\top = [w_{out}^1, \dots, w_{out}^N] \in \mathbb{R}_+^N$ . En utilisant ces notations, la matrice d'interconnexion  $\mathcal{K}$  peut être représentée comme suit :  $\mathcal{K} = W_{out} W_{in}^\top$ .

L'analyse de la synchronisation du modèle de Kuramoto (0.11) détaillée dans le Chapitre 4 concerne les points suivants :

- Définir les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions à verrouillage de phase.
- Donner la forme explicite des solutions à verrouillage de phase ainsi que l'expression de la fréquence de synchronisation.
- Analyser les propriétés de stabilité locale des solutions à verrouillage de phase.

#### Solutions à verrouillage de phase

Dans un premier temps, nous introduisons une hypothèse reliant les fréquences naturelles  $\omega_j$ , le gain de couplage  $K$  et la matrice d'interconnexion  $\mathcal{K} = W_{out} W_{in}^\top$ . Cette hypothèse est déduite à partir des résultats du Théorème 3.

**Hypothèse 1** *Il existe une valeur  $r_\infty \in (0;1]$  telle que*

$$r_\infty = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \pm w_{in}^j \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\omega}_j}{K_j r_\infty}\right)^2}, \quad (0.12)$$

avec  $-1 \leq \frac{\tilde{\omega}_j}{K_j r_\infty} \leq 1$  pour tous  $j = \{1, \dots, N\}$ , où  $K_j = K w_{out}^j$ ,  $\tilde{\omega}_j = \omega_j - \omega_s$  et  $\omega_s = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{w_{in}^j}{w_{out}^j} \omega_j}{\sum_{j=1}^N \frac{w_{in}^j}{w_{out}^j}}$ .

Dans la littérature sur les systèmes de Kuramoto, l'expression (0.12) avec  $W_{in} = W_{out} = \mathbb{1}_N$  est connue par la condition de consistance sur  $r_\infty$  des solutions à verrouillage de phase. Elle est introduite dans [1] et dans [13], où ils ont montré que la condition de consistance est une condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions à verrouillage de phase. Ainsi, l'Hypothèse 1 peut être considéré comme la condition pondérée analogue de la condition de consistance utilisée pour le modèle de Kuramoto classique.

Dans le théorème suivant, nous montrons que l'Hypothèse 1 est une condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions à verrouillage de phase pour le modèle de Kuramoto (0.11) et nous donnons la forme explicite des solutions à verrouillage de phase ainsi que l'expression de la fréquence de synchronisation.

**Théorème 4** *Le modèle de Kuramoto (0.11) a une solution à verrouillage de phase si et seulement si l'Hypothèse 1 est satisfaite.*

*En outre, la fréquence de synchronisation est définie par l'expression suivante*

$$\omega_s = \frac{W_{in}^\top \Omega W_{out}^{-1}}{W_{in}^\top W_{out}^{-1}} \quad (0.13)$$

*et les solutions à verrouillage de phase ont la forme  $\theta(t, \theta^*) = \theta^* + \omega_s t \mathbb{1}_n + c \mathbb{1}_n$ , où  $c \in \mathbb{R}$  est une constante arbitraire tandis que le vecteur  $\theta^*$  est défini par les équations suivantes :*

$$\cos(\theta_j^*) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\omega}_j}{K_j r_\infty}\right)^2} \quad ; \quad \sin(\theta_j^*) = \frac{\tilde{\omega}_j}{K_j r_\infty}. \quad (0.14)$$

*Le choix des signes dans les expressions des cos correspond au choix des signes dans l'équation (0.12).*

### Analyse de stabilité

Dans cette section, nous analysons les propriétés de stabilité locale des solutions à verrouillage de phase définis dans la section précédente. En particulier, nous montrons

qu'une seule solution à verrouillage de phase est stable. Cette solution correspond à la solution  $r_\infty$  de l'équation (0.12) avec un choix des signes positifs. Nous résumons les résultats de notre analyse ci-dessous.

Dans un premier temps, nous considérons le modèle de Kuramoto (0.11) avec un changement de coordonnées  $\theta_i(t) \rightarrow \theta_i(t) + \omega_s t$ , le système (0.11) peut être réécrit sous la forme :

$$\dot{\theta}_i = f_i(\theta) = \tilde{\omega}_i + \frac{K}{N} w_{out}^i \sum_{j=1}^N w_{in}^j \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i \in \{1 \dots N\}, \quad (0.15)$$

avec  $\tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega_s$  et  $\omega_s$  est la fréquence de synchronisation.

Etant donné que dans ce nouveau cadre de coordonnées la fréquence de synchronisation est égale à zéro, nous pouvons déduire donc que les solutions à verrouillage de phase du modèle de Kuramoto (0.11) correspondent aux points d'équilibre du système (0.15).

Supposons que l'ensemble d'équation (0.12) a  $m$  solutions  $r_{\infty k}$ ,  $k = \{1, \dots, m\}$ , satisfassent l'Hypothèse 1. Notons  $\theta_k^* \in \mathbb{R}^N$ ,  $k = \{1, \dots, m\}$  l'ensemble de points d'équilibre qui définissent des solutions à verrouillage de phase du système (0.15).

Puisque le système (0.15) est invariant sous les transformations de phase  $\theta \rightarrow \theta + c\mathbb{1}$ , chaque point d'équilibre  $\theta_k^* \in \mathbb{R}^N$  du système (0.15) appartient alors à une courbe  $\mathcal{D}_k^*$  de points d'équilibre définie par  $\mathcal{D}_k^* = \{\theta \in \mathbb{R}^N : \theta = \theta_k^* + c\mathbb{1}, c \in \mathbb{R}\}$ . Nous rappelons ici que chacune de ces courbes correspond à une solution à verrouillage de phase du système (0.11).

Comme il a été mentionné dans [1], la synchronisation asymptotique de phase du système (0.11) est vérifiée si les deux propriétés suivantes des solutions du système (0.15) sont satisfaites :

- la stabilité locale de chaque point d'équilibre sur la courbe  $\mathcal{D}_k^*$ .
- la stabilité locale de l'ensemble  $\mathcal{D}_k^*$ .

Les points d'équilibre du système (0.15) sont définis par l'équation (0.14). En linéarisant le système (0.15) autour de ces points d'équilibre, nous obtenons que les éléments hors-diagonale de linéarisation sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{d\theta_l} \Big|_{\theta=\theta^*} &= \frac{K}{N} w_{out}^i w_{in}^l \cos(\theta_l^* - \theta_l^*) \\ &= \frac{K}{N} w_{out}^i w_{in}^l [\cos(\theta_l^*) \cos(\theta_l^*) + \sin(\theta_l^*) \sin(\theta_l^*)] \\ &= \frac{K w_{out}^i}{N} \left[ w_{in}^l \left( \pm \sqrt{1 - \left( \frac{\tilde{\omega}_l}{w_{out}^l K r_\infty} \right)^2} \right) \left( \pm \sqrt{1 - \left( \frac{\tilde{\omega}_i}{w_{out}^i K r_\infty} \right)^2} \right) + \frac{w_{in}^l \tilde{\omega}_l \tilde{\omega}_i}{w_{out}^i w_{out}^l (K r_\infty)^2} \right], \end{aligned} \quad (0.16)$$

tandis que les éléments diagonaux sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{d\theta_i} \Big|_{\theta=\theta^*} &= -\frac{K}{N} w_{out}^i \sum_{j=1}^N w_{in}^j \cos(\theta_j^* - \theta_i^*) \\ &= \frac{w_{out}^i K}{N} \left[ -Nr_\infty \left( \pm \sqrt{1 - \left( \frac{\tilde{\omega}_i}{w_{out}^i Kr_\infty} \right)^2} \right) + w_{in}^i \sqrt{1 - \left( \frac{\tilde{\omega}_i}{w_{out}^i Kr_\infty} \right)^2} \sqrt{1 - \left( \frac{\tilde{\omega}_i}{w_{out}^i Kr_\infty} \right)^2} + \frac{w_{in}^i \tilde{\omega}_i^2}{(w_{out}^i Kr_\infty)^2} \right]. \end{aligned} \quad (0.17)$$

Ainsi, la matrice jacobienne peut être écrite sous la forme suivante :

$$J = \frac{K}{N} \Psi \Upsilon^{-1} (\Upsilon A + bb^\top + cc^\top) = \frac{K}{N} \mathcal{S} J_1 \quad (0.18)$$

avec

$$J_1 = \Upsilon A + bb^\top + cc^\top ; \mathcal{S} = \Psi \Upsilon^{-1} \quad (0.19)$$

$$\Psi = \text{diag}(w_{out}^1, \dots, w_{out}^N) ; \Upsilon = \text{diag}(w_{in}^1, \dots, w_{in}^N)$$

$$A = -\text{diag}(a_1, \dots, a_N) , a_i = \pm Nr_\infty \sqrt{1 - \left( \frac{\tilde{\omega}_i}{w_{out}^i Kr_\infty} \right)^2} \quad (0.20)$$

$$b = \begin{pmatrix} \pm w_{in}^1 \sqrt{1 - \left( \frac{\tilde{\omega}_1}{w_{out}^1 Kr_\infty} \right)^2} \\ \vdots \\ \pm w_{in}^N \sqrt{1 - \left( \frac{\tilde{\omega}_N}{w_{out}^N Kr_\infty} \right)^2} \end{pmatrix} ; c = \begin{pmatrix} w_{in}^1 \frac{\tilde{\omega}_1}{w_{out}^1 Kr_\infty} \\ \vdots \\ w_{in}^N \frac{\tilde{\omega}_N}{w_{out}^N Kr_\infty} \end{pmatrix}$$

En utilisant ces notations, le système linéarisé peut être écrit sous la forme :

$$\dot{\theta} = J \theta = \frac{K}{N} \mathcal{S} J_1 \theta, \quad (0.21)$$

où la matrice constante  $J \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est définie par les expressions (0.18 - 0.20) et la matrice  $J_1$  est symétrique.

Pour le système (0.21), nous considérons le changement de coordonnées  $y = \mathcal{S}^{-1/2} \theta$ . Ainsi, nous obtenons

$$\dot{y} = \mathcal{S}^{-1/2} \dot{\theta} = \frac{K}{N} \mathcal{S}^{1/2} J_1 \theta = \frac{K}{N} \mathcal{S}^{1/2} J_1 \mathcal{S}^{1/2} y = \frac{K}{N} \tilde{J} y, \quad (0.22)$$

où  $\tilde{J} = \mathcal{S}^{1/2} J_1 \mathcal{S}^{1/2}$ .

En utilisant le fait que la matrice  $\mathcal{S}$  est diagonale et non singulière (avec des éléments positifs) et la symétrie de la matrice  $J_1$ , nous déduisons que la matrice  $\tilde{J}$  est symétrique. En utilisant la loi de Sylvester d'inertie (voir l'annexe B), nous remarquons que les matrices  $\tilde{J}$  et  $J_1$  sont deux matrices congruentes. Donc, elles ont la même inertie. En

conséquence, il suffit d'analyser les propriétés spectrales de la matrice  $J_1$  pour étudier les propriétés de stabilité du système linéaire (0.22) ou encore le système linéarisé (0.21). Ainsi, le reste de notre démarche est consacré à l'analyse des propriétés spectrales de la matrice symétrique  $J_1$  d'une dimension arbitraire  $N$ .

Dans la suite, nous montrons qu'il n'y a qu'une seule solution qui est localement stable parmi toutes les solutions à verrouillage de phase du modèle de Kuramoto (0.11).

**Théorème 5** *Soit l'Hypothèse 1 satisfaite et soit  $\mathbb{A} = \{\theta_k^* \in \mathbb{R}^N, k = \{1, \dots, M\}\}$  l'ensemble de toutes les solutions à verrouillage de phase définies par les équations (0.12)-(0.14). Alors, les assertions suivantes sont validées :*

1) *Au plus, il existe une seule solution à verrouillage de phase  $\theta^* \in \mathbb{A}$  qui est localement stable.*

2) *Soit  $\theta^+$  est la solution à verrouillage de phase définie par l'équation (0.14) et l'équation (0.12) prise avec tous les signes positifs, à savoir*

$$r_\infty = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\omega}_j}{\sigma_j K r_\infty}\right)^2},$$

*alors l'ensemble  $\mathcal{D}^+ = \{\theta \in \mathbb{R}^N : \theta = \theta^+ + c\mathbf{1}, c \in \mathbb{R}\}$  correspondant est localement asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (1 - 2\left(\frac{\tilde{\omega}_j}{\sigma_j K r_\infty}\right)^2)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{\omega}_j}{\sigma_j K r_\infty}\right)^2}} > 0. \quad (0.23)$$

### 2.2.3. Analyse de la synchronisation du modèle de Kuramoto avec des interactions attractives et répulsives

Dans le chapitre 4, nous considérons le problème de synchronisation de phase pour le modèle de Kuramoto avec des gains de couplage positifs. Ainsi, seulement les interactions attractives entre les oscillateurs ont été prises en compte. Néanmoins, l'existence des interactions attractives et répulsives dans un réseau peut jouer un rôle important sur la dynamique du système, comme c'est le cas par exemple, dans les circuits de synthèse génétiques [5] et dans les réseaux neuronaux [6]. Récemment, l'utilisation des couplages attractives et répulsives dans le modèle de Kuramoto a été étudiée, le plus souvent numériquement, dans [7], [11], [12].

Dans le chapitre 5, nous analysons la synchronisation de phase et de fréquence du modèle de Kuramoto avec un graphe d'interconnexion pondéré et signé. La motivation de ce travail est d'étudier l'effet des gains de couplage signés sur la dynamique du système et sur la fréquence de synchronisation. Comme dans la section précédente, nous considérons un scénario où les coefficients de couplage entre chaque paire d'oscillateurs peuvent être séparés en deux facteurs : les poids d'entrée et de sortie. En plus, nous supposons que ces pondérations peuvent avoir des valeurs négatives.

En particulier, nous montrons que dans le cas d'un graphe d'interconnexion signé symétriquement, l'existence de solutions à verrouillage de phase pour le modèle de Kuramoto avec des interactions positives garantit l'existence de solutions à verrouillage de phase pour une famille du modèle de Kuramoto avec des interactions signées. Leurs matrices d'interconnexion sont générées à l'aide de transformations de jauge. Dans le cas des graphes d'interconnexion signés d'une façon arbitraire, l'analyse du modèle de Kuramoto n'est pas une tâche triviale ; c'est pourquoi nous nous concentrons sur le cas du réseau structurellement équilibré (complet et signé symétriquement).

Dans cette section, nous commençons par généraliser les conditions d'existence de solutions à verrouillage de phase pour le modèle de Kuramoto formulé dans la section précédente avec des poids d'entrées-sorties mixtes (positifs et négatifs). Ainsi, nous considérons le système suivant :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} w_{out}^i \sum_{j=1}^N w_{in}^j \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (0.24)$$

La matrice d'interconnexion  $\mathcal{K} = W_{out} W_{in}^T$  est signée symétriquement, c'est-à-dire  $k_{ij}k_{ji} > 0$ . La dernière inégalité peut être réécrite sous la forme  $k_{ij}k_{ji} = w_{in}^i w_{out}^i w_{in}^j w_{out}^j > 0$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ . Ceci peut être satisfait seulement si  $w_{in}^i$  et  $w_{out}^i$  ont le même signe pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Dans la suite de notre analyse, nous utilisons les propriétés du graphe signé structurellement équilibré et l'invariance de jauge. L'ensemble des transformations de jauge dans  $\mathbb{R}^N$  est notée par :

$$\mathcal{G} = \{G \in \mathbb{R}^{N \times N}, G = \text{diag}(\delta), \delta = [\delta_1 \dots \delta_N], \delta_i \in \{\pm 1\}\}. \quad (0.25)$$

Soit  $\overline{\mathcal{K}} = \overline{W}_{in} \overline{W}_{out}^T$  la matrice d'adjacence avec des éléments positifs. On note aussi que pour chaque graphe orienté avec des pondérations positives, il existe une famille de graphes signés et structurellement équilibrés qui possèdent les mêmes pondérations mais avec des signes différents. Toutes ces réalisations de graphes signés sont liées par les transformations de jauge. Ainsi, nous définissons l'ensemble des matrices d'adjacence

$\mathcal{K}_G$  généré par les transformations de jauge comme suit :

$$\mathcal{K}_G = \{\mathcal{K}_g = G\overline{\mathcal{K}}G, G \in \mathcal{G}\}, \quad (0.26)$$

où  $\mathcal{G}$  est l'ensemble de toutes les transformations de jauge définies dans (0.25) et l'ensemble  $\mathcal{K}_G$  contient  $2^{N-1}$  matrices distinctes .

Le théorème suivant donne la forme de solutions à verrouillage de phase pour une famille du modèle de Kuramoto avec des graphes d'interconnexion signés générés à l'aide des transformations de jauge.

**Théorème 6** Soit  $\mathcal{G} = \{G = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_N), \delta_i \in \{\pm 1\}\}$  l'ensemble de toutes les transformations de jauge dans  $\mathbb{R}^N$ . Alors, chaque modèle de Kuramoto (0.24) avec un graphe d'interconnexion signé symétriquement défini par la matrice d'adjacence  $\mathcal{K}_g = G\mathcal{K}G$ , a une solution à verrouillage de phase si et seulement si l'Hypothèse 1 est satisfaite. En plus, la fréquence de synchronisation est définie par (0.13) et les solutions à verrouillage de phase ont la forme suivante :

$$\theta_g(t, \theta_g^*) = \theta_g^* + \omega_s t \mathbf{1}_n + c \mathbf{1}_n, \quad (0.27)$$

où  $c \in \mathbb{R}$  est une constante arbitraire tandis que le vecteur  $\theta_g^*$  est défini par les relations suivantes :

$$\cos(\theta_g^*) = G \cos(\theta^*) \quad ; \quad \sin(\theta_g^*) = G \sin(\theta^*), \quad (0.28)$$

et le vecteur  $\theta^*$  est la solution à verrouillage de phase du modèle de Kuramoto (0.11), définie dans (0.14).

**Remarque 1** Le théorème ci-dessus stipule que tout modèle de Kuramoto défini par la matrice d'adjacence  $\mathcal{K}_g = G\mathcal{K}G$  avec  $G \in \mathcal{G}$ , a une solution à verrouillage de phase si et seulement si le modèle de Kuramoto (0.11) avec seulement des pondérations positives a une solution à verrouillage de phase. De plus, les angles  $\theta_g^*$  qui correspondent aux entrées négatives de la matrice de jauge  $G$ , ont un décalage de  $\pi$  par rapport aux angles du modèle (0.11), c'est à dire  $\theta_{g_j}^* = \theta_j^* + \pi$ .

La deuxième partie de chapitre 5 est consacrée à l'étude de stabilité des solutions à verrouillage de phase pour le modèle de Kuramoto avec des interactions attractives et répulsives. Dans le théorème suivant, nous démontrons que parmi toutes les solutions à verrouillage de phase pour le système (0.24), il n'y a qu'une solution localement asymptotiquement stable.

**Théorème 7** Considérons les modèles de Kuramoto (0.11), (0.24). Soit  $\mathcal{K} = \overline{W}_{out} \overline{W}_{out}^\top$  et l'Hypothèse 1 est satisfaite. Soit  $\mathcal{K}_G = \{\mathcal{K}_g = G\mathcal{K}G, G \in \mathcal{G}\}$  la famille des matrices

d'adjacence générées par la transformation de jauge. Pour une matrice de jauge donnée  $G$ , soit  $\mathbb{A}_g = \{\theta_{gk}^* \in \mathbb{R}^N, k = \{1, \dots, M\}\}$  l'ensemble de toutes les solutions à verrouillage de phase possibles pour le système (0.24) définies dans le Théorème 6. Alors les assertions suivantes sont validées :

1) Au plus, il existe une seule solution à verrouillage de phase  $\theta_g^* \in \mathbb{A}_g$  qui est localement stable.

2) Soit  $\theta^+$  la solution à verrouillage de phase définie par l'équation (0.14) et l'équation (0.12) prise avec tous les signes positifs. Soit  $\theta_g^+$  la solution à verrouillage de phase correspondante au système (0.24) définie par (0.28). Alors, l'ensemble  $\mathcal{D}_g^+ = \{\theta \in \mathbb{R}^N : \theta = \theta_g^+ + c\mathbf{1}, c \in \mathbb{R}\}$  est localement asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{j=1}^N \frac{|w_{in}^j| (1 - 2(\frac{\tilde{\omega}_j}{w_{out}^j K r_\infty})^2)}{\sqrt{1 - (\frac{\tilde{\omega}_j}{w_{out}^j K r_\infty})^2}} > 0. \quad (0.29)$$

### 3. Modèle de Stuart-Landau

Dans les chapitres précédents, nous avons utilisé un modèle de phase pour étudier le phénomène de synchronisation engendré par les interactions entre des oscillateurs périodiques dans un réseau. En fait, les modèles de phase représentent une bonne approximation de dynamique des systèmes avec des orbites à cycle limite lorsque le couplage dans le réseau est faible. Ceci est le cas du modèle de Kuramoto dans sa forme classique. Néanmoins, lorsque le couplage est assez fort, cette approximation perd de sa consistance. Il devient donc nécessaire de prendre en compte la dynamique entière de chaque élément oscillant, y compris sa phase et son amplitude. L'interaction de ces deux variables dans un réseau des oscillateurs à cycle limite permet d'analyser des nouveaux phénomènes dans l'évolution collective. Par conséquent, nous proposons dans le chapitre 6 d'étudier la synchronisation dans un réseau des oscillateurs de Stuart-Landau. Ce dernier permet de prendre en compte la dynamique des amplitudes ainsi que celle des phases.

#### 3.1. Généralités

Nous supposons que la dynamique de chaque oscillateur est décrite par l'équation Stuart-Landau

$$\dot{z}_i = -|z_i|^2 z_i + \mu_i z_i + u_i = f(z_i, \mu_i) + u_i, \quad i \in I \quad (0.30)$$

où  $z_i, u_i \in \mathbb{C}$  sont respectivement l'état et l'entrée d'oscillateur  $i$ ,  $\mu_i = \beta_i + i\omega_i \in \mathbb{C}$  est un paramètre complexe qui définit le comportement asymptotique de l'oscillateur  $i$ .

Nous supposons que les oscillateurs sont connectés via un couplage diffusif qui représente une relation statique entre les entrées et les états des oscillateurs, à savoir pour l'oscillateur  $i$ , le couplage est donné par la relation suivante :

$$u_i = -\gamma \left( d_{i1}(z_i - z_1) + d_{i2}(z_i - z_2) \dots + d_{iN}(z_i - z_N) \right), \quad (0.31)$$

où  $\gamma > 0$  est un paramètre scalaire qui correspond à la force de couplage entre les oscillateurs.

Nous supposons que le graphe d'interconnexion est non orienté, connexe et pondéré par des poids positifs. Ainsi, la matrice Laplacienne  $L$  de ce graphe a une seule valeur propre égale à zéro et les autres sont strictement positives.

La dynamique d'ensemble du réseau peut être décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\mathbf{z}} = F(\mathbf{z}) - \gamma L\mathbf{z}, \quad (0.32)$$

où  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  est le gain de couplage, la fonction  $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  est donnée par

$$F(\mathbf{z}) = [f(z_i, \mu_i)]_{i \in I}. \quad (0.33)$$

et la matrice Laplacienne est définie comme suit :

$$L = \begin{bmatrix} \sum_{i=2}^N d_{1i} & -d_{12} & \dots & -d_{1N} \\ -d_{21} & \sum_{i=1, i \neq 2}^N d_{2i} & \dots & -d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{N1} & -d_{N2} & \dots & \sum_{i=1}^{N-1} d_{Ni} \end{bmatrix} \quad (0.34)$$

Nous montrons d'abord que les trajectoires du réseau d'oscillateurs de Stuart-Landau (0.32) sont ultimement bornées (ultimately bounded). Ceci signifie que toutes les solutions vont finir dans un domaine borné. Précisément, nous prouvons la proposition suivante :

**Proposition 1** *Considérons le système (0.32) et soit le graphe d'interconnexion connexe et non orienté. Alors, les solutions du système (0.32) sont ultimement bornées et satisfont la borne suivante :*

$$|\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)| \leq \sqrt{2\mu N}. \quad (0.35)$$

Dans le cas d'un réseau des oscillateurs identiques, la synchronisation est souvent décrite en terme d'une évolution identique (asymptotique) aux éléments du réseau et par la suite formulée comme la stabilité (asymptotique) d'une variété de synchronisation

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \dots = \mathbf{z}_N\}. \quad (0.36)$$

Le comportement des réseaux avec des unités non identiques est plus complexe. En effet, la variété de synchronisation  $\mathcal{S}$  n'existe pas toujours à cause des différences de la dynamique des oscillateurs. Néanmoins, il est bien connu de la littérature que ces réseaux hétérogènes peuvent présenter un certain type de synchronisation. Une des approches possibles est de considérer la synchronisation «pratique» du réseau ; lorsque les différences entre l'évolution de la dynamique des différentes unités sont bornées et décroissent infiniment en augmentant la valeur du gain de couplage  $\gamma$ . Cette approche est adoptée dans notre travail. En particulier, nous montrons pour des grandes valeurs du gain de couplage  $\gamma$  que le comportement du réseau peut être décomposé en deux parties : une correspond à la dynamique d'un certain oscillateur "moyennisé" ("mean-field"), tandis que l'autre décrit la dynamique des unités du réseau par rapport à la dynamique "moyennisée".

### 3.2. Reformulation de la dynamique du réseau

Pour une meilleure présentation de notre approche, nous avons ensuite réécrit ce système dans un nouveau cadre de coordonnées. Ceci est plus pratique pour présenter notre analyse. Tous d'abord, nous séparons la dynamique du réseau en deux parties, une partie linéaire et l'autre non linéaire. Ainsi, le système est réécrit sous cette forme :

$$\dot{\mathbf{z}} = A_\gamma \mathbf{z} - C(\mathbf{z}) \mathbf{z}, \quad (0.37)$$

où

$$A_\gamma = \mathcal{M} - \gamma L \quad (0.38)$$

et les deux matrices diagonales  $C(\mathbf{z})$  et  $\mathcal{M}$  sont définies comme suit :

$$C(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} |\mathbf{z}_1|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{z}_2|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{z}_N|^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_N \end{bmatrix}$$

Ensuite, nous remarquons que la matrice  $A_\gamma$  peut être écrite sous la forme  $A_\gamma = \gamma(-L + \varepsilon \mathcal{M})$  où  $\varepsilon = 1/\gamma$ . Alors, pour des valeurs suffisamment petites de  $\varepsilon$  (ou encore des valeurs suffisamment grandes du gain de couplage  $\gamma$ ), la matrice  $A_\gamma$  peut être vue comme une matrice Laplacienne avec des perturbations. En utilisant des résultats de la théorie de la perturbation des matrices, nous pouvons montrer que la matrice  $A_\gamma$  a une valeur propre positive et les autres  $N - 1$  valeurs propres négatives. Précisément,

$$\lambda_1(A_\gamma) = \gamma(-\lambda_1(L) + c_1\varepsilon + o(\varepsilon)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i + O(\varepsilon),$$

et  $\lambda_j(A)$  ( $j = 2, \dots, N$ ) sont proportionnelles au  $\gamma$  :  $Real(\lambda_j(A)) \rightarrow -\infty$  quand  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Ainsi, nous assumons que la force de couplage  $\gamma$  est suffisamment grande. Donc, la matrice  $A_\gamma$  est diagonalisable. Précisément, nous proposons l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2** *Il existe une  $\gamma^* > 0$  sachant que pour tout  $\gamma \geq \gamma^*$ , la matrice  $A_\gamma$  définie dans (0.38) peut être factorisée comme le suivant :*

$$A_\gamma = V_\gamma \Lambda_\gamma V_\gamma^{-1}, \quad (0.39)$$

où  $\Lambda_\gamma \in \mathbb{C}^{N \times N}$  est une matrice diagonale et ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de  $A_\gamma$ . La matrice  $V_\gamma \in \mathbb{C}^{N \times N}$  est une matrice orthogonale ( $V_\gamma^{-1} = V_\gamma^\top$ ). En plus, il existe  $k \in \{1, \dots, N\}$  sachant que  $Re(\lambda_k) > \max_{j \in \{1, \dots, N\}, j \neq k} Re(\lambda_j)$ .

Nous assumons que les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $A_\gamma$  sont ordonnées comme suit  $Re(\lambda_1) > Re(\lambda_2) \geq \dots \geq Re(\lambda_N)$ . Ensuite, nous décomposons la matrice  $A_\gamma$  de cette façon. Nous écrivons d'abord la matrice  $\Lambda_\gamma$  sous cette forme :

$$\Lambda = \lambda_1(A_\gamma)\mathbb{I} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(A_\gamma) - \lambda_1(A_\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N(A_\gamma) - \lambda_1(A_\gamma) \end{pmatrix} = \Lambda_1 + \Lambda_2. \quad (0.40)$$

En utilisant cette notation, nous obtenons

$$A = V\Lambda_1V^\top + V\Lambda_2V^\top = \lambda_1\mathbb{I} + D, \quad (0.41)$$

où  $D = V\Lambda_2V^\top$ . Notons que si l'Hypothèse 2 est satisfaite, les  $(N - 1)$  valeurs propres non nulles de la matrice  $\Lambda_2$  ont une partie réelle négative : pour  $i = 2, \dots, N$  nous avons  $\lambda_i(\Lambda_2) \rightarrow -\infty$  quand  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Donc, nous pouvons conclure que  $D \leq 0$ .

En utilisant ces notations, nous pouvons écrire le système (0.37) sous cette forme :

$$\dot{\mathbf{z}} = (\lambda_1 \mathbb{I} - C(\mathbf{z})) \mathbf{z} + D \mathbf{z}, \quad (0.42)$$

rappelons que l'équation (0.42) n'est qu'une autre forme d'écrire les équations du réseau des oscillateurs (0.32). Ainsi, les transformations que nous avons présentées nous permettent d'interpréter le réseau d'oscillateurs hétérogènes comme un réseau où tous les éléments ont des dynamiques identiques. Aussi, ces éléments sont couplés via une matrice d'interconnexion  $D$  possédant des propriétés similaires à la matrice Laplacienne  $L$ . En utilisant le modèle (0.42) et les propriétés spectrales des matrices  $A_\gamma$  et  $D$ , nous sommes capable de décomposer explicitement la dynamique du réseau en deux parties avec des rôles très différents : la première partie correspond à l'oscillateur "moyennisé" noté par  $\mathbf{z}_m$ , tandis que la deuxième partie reflète l'erreur de synchronisation entre les oscillateurs dans le réseau notée  $\mathbf{e}$ . Ces deux parties sont définies comme suit :

$$\mathbf{z}_m = \vartheta_{\mathbf{1}}^\top \mathbf{z} \quad (0.43)$$

et

$$\mathbf{e} = \mathbf{z} - \vartheta_{\mathbf{r}_1} \mathbf{z}_m = \mathbf{z} - \vartheta_{\mathbf{r}_1} \vartheta_{\mathbf{1}}^\top \mathbf{z} = (\mathbb{I} - \vartheta_{\mathbf{r}_1} \vartheta_{\mathbf{1}}^\top) \mathbf{z} = P \mathbf{z}, \quad (0.44)$$

où les vecteurs  $\vartheta_{\mathbf{r}_1}$  et  $\vartheta_{\mathbf{1}}$  sont les vecteurs propres à gauche et à droite de la matrice  $A_\gamma$  associés à la valeur propre  $\lambda_1(A_\gamma)$ . La matrice  $P = \mathbb{I} - \vartheta_{\mathbf{r}_1} \vartheta_{\mathbf{1}}^\top$  est une matrice de projection.

### 3.3. Analyse de stabilité

Dans la section précédente, nous avons vu que dans le cas d'un réseau hétérogène avec un nombre arbitraire  $N$  d'oscillateurs et pour une valeur grande du gain de couplage  $\gamma$ , le comportement du réseau peut être décomposé en deux parties :

- l'une d'elles décrit la dynamique de l'oscillateur "moyennisé"  $\mathbf{z}_m$ .
- l'autre décrit la dynamique des oscillateurs du réseau par rapport à la dynamique moyennisée.

C'est pourquoi nous caractérisons les propriétés de synchronisation du réseau en termes de stabilité des deux ensembles compacts :

- la variété de la synchronisation  $\mathcal{S}(\gamma)$  que nous définissons sous la forme

$$\mathcal{S}(\gamma) = \{\mathbf{e} \in \mathbb{C}^N : \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \dots = \mathbf{e}_N = 0\}. \quad (0.45)$$

- l'ensemble invariant  $\mathcal{W}$  qui correspond à l'oscillateur "moyennisé". Il contient l'origine et le cycle limite de  $\mathbf{z}_m$ .

#### La dynamique de l'oscillateur moyennisé

A partir de la définition d'oscillateur moyennisé  $\mathbf{z}_m$  et après un simple calcul mais assez long, la dynamique  $\dot{\mathbf{z}}_m$  peut être écrite en fonction de  $\mathbf{z}_m$  et  $\mathbf{e}$  comme suit :

$$\dot{\mathbf{z}}_m = (\lambda_1 - c|\mathbf{z}_m|^2) \mathbf{z}_m + \mathbf{f}_2(\mathbf{z}_m, \mathbf{e}), \quad (0.46)$$

où  $c \in \mathbb{C}$  est une constante sous la forme suivante :

$$c = \sum_{i=1}^N \vartheta_{li}^* \vartheta_{ri}^* \vartheta_{ri}^2 \quad (0.47)$$

et la fonction  $\mathbf{f}_2(\mathbf{z}_m, \mathbf{e})$  est donnée par l'expression suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2(\mathbf{z}_m, \mathbf{e}) = & \\ & - \vartheta_{\mathbf{11}}^* \begin{pmatrix} |z_1|^2 + z_1^* v_{r1} z_m & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & |z_N|^2 + z_N^* v_{rN} z_m \end{pmatrix} \mathbf{e} \\ & - \vartheta_{l_1}^* \begin{pmatrix} (v_{r1} z_m)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (v_{rN} z_m)^2 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}, \end{aligned} \quad (0.48)$$

où  $v_{r_{ij}}$  correspondent aux éléments  $ij$ -th de la matrice  $V_\gamma$ .

### La dynamique des erreurs de synchronisation

A partir de la définition du vecteur des erreurs de synchronisation  $\mathbf{e}$  et les propriétés des matrices  $P$  et  $D$ , la dérivée  $\dot{\mathbf{e}}$  peut être écrite sous cette forme :

$$\dot{\mathbf{e}} = D \mathbf{e} + (\lambda_1 \mathbf{e} - P C(\mathbf{e}, z_m)(\mathbf{e} + z_m \mathbf{1})). \quad (0.49)$$

Ainsi, les équations (0.46) et (0.49) représentent les dynamiques du réseau dans les nouvelles coordonnées, c'est-à-dire en termes de  $\mathbf{z}_m$  et  $\mathbf{e}$ . Le système (0.32) peut être vu sous la forme des deux sous-systèmes suivants :

$$\dot{\mathbf{z}}_m = (\lambda_1 - c|\mathbf{z}_m|^2) \mathbf{z}_m + \mathbf{f}_2(\mathbf{z}_m, \mathbf{e}), \quad (0.50)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = D \mathbf{e} + (\lambda_1 \mathbf{e} - P C(\mathbf{e}, z_m)(\mathbf{e} + z_m \mathbf{1})). \quad (0.51)$$

Dans la section suivante, nous présentons les résultats de notre analyse de stabilité du réseau. En premier lieu, nous donnons les propriétés de stabilité du sous-système (0.51). Puis, nous analysons la stabilité du sous-système (0.50).

### 3.3.1. Synchronisation pratique d'un réseau diffusif d'oscillateurs Stuart-Landau

Dans cette section, nous analysons le système (0.51) pour des grandes valeurs du gain de couplage  $\gamma$ , c'est-à-dire, nous supposons que l'Hypothèse 2 est satisfaite. Nous présentons une analyse de la stabilité de l'ensemble  $\mathcal{S}(\gamma)$  et nous formulons les conditions qui garantissent la stabilité asymptotique globale pratique de cet ensemble. Ceci implique la synchronisation pratique du réseau. Précisément, nous montrons le théorème suivant :

**Théorème 8** *Considérons le système (0.32) et soit l'Hypothèse 2 satisfaite. Alors, l'ensemble  $\mathcal{S}(\gamma)$  est globalement pratiquement stable pour tout  $\gamma \geq \gamma^*$ . En plus, il existe  $T^* > 0$  et une constante  $c > 0$  indépendantes de  $\gamma$  sachant que l'erreur de synchronisation  $\mathbf{e}(\mathbf{t})$  satisfait la borne suivante pour tout  $t \geq T^*$*

$$|\mathbf{e}(\mathbf{t})|^2 \leq \frac{2c}{|\text{Real}(\lambda_2 - \lambda_1)|}. \quad (0.52)$$

#### Stabilité pratique de l'ensemble invariant d'oscillateur moyennisé

Dans cette section, nous présentons l'étude du comportement de  $z_m$ . Notons que la dynamique de  $z_m$  peut être vue comme un oscillateur de Stuart-Landau perturbé par une entrée qui dépend linéairement de  $|\mathbf{e}|$ , à savoir

$$\dot{z}_m = (\lambda_1 - c|z_m|^2) z_m + u, \quad (0.53)$$

où  $u = f_2(z_m, \mathbf{e})$ .

C'est pourquoi, nous allons d'abord analyser les propriétés de stabilité et de robustesse d'un oscillateur de Stuart-Landau généralisé. Ensuite, nous allons appliquer ces résultats à l'analyse du système (0.53).

L'oscillateur de Stuart-Landau généralisé a la forme suivante :

$$\dot{z} = -\nu|z|^2 z + \mu z + u \quad (0.54)$$

où  $z, u \in \mathbb{C}$  sont respectivement l'état et l'entrée de l'oscillateur.  $\nu = \nu_1 + i\nu_2 \in \mathbb{C}$  et  $\mu = \mu_1 + i\mu_2 \in \mathbb{C}$  sont des paramètres complexes et nous assumons que  $\nu_1 > 0$ .

#### L'ensemble invariant du système (0.54)

Nous considérons d'abord le système sans perturbations, c'est-à-dire  $u \equiv 0$ . L'ensemble invariant est composé de deux éléments : l'origine et le cycle limite d'amplitude  $\sqrt{\mu_1/\nu_1}$ , à savoir

$$\mathcal{W} = \{z = 0\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{\frac{\mu_1}{\nu_1}} \right\}. \quad (0.55)$$

### Analyse de stabilité de l'ensemble invariant $\mathcal{W}$

Nous prouvons le théorème suivant pour l'oscillateur de Stuart-Landau généralisé.

**Théorème 9** *Considérons l'oscillateur de Stuart-Landau (0.54) avec une entrée  $u \equiv 0$ . Les assertions suivantes sont validées :*

(1) *Si  $\operatorname{Re}(\nu) \leq 0$  alors l'origine  $z \equiv 0$  est globalement asymptotiquement stable pour le système (0.54).*

(2) *Si  $\operatorname{Re}(\nu) > 0$  alors le cycle limite  $\mathcal{W}_1 = \{z : |z| = \sqrt{\nu_1/\mu_1}\}$  est presque globalement asymptotiquement stable et l'origine est anti-stable pour le système (0.54).*

*En plus, la fréquence d'oscillation du cycle limite est définie comme suit :*

$$\omega = \mu_2 - \frac{\nu_2}{\nu_1} \mu_1$$

### Etude de robustesse d'oscillateur de Stuart-Landau : analyse de stabilité de l'ensemble invariant $\mathcal{W}$ en présence de perturbations

En se basant sur les résultats de l'article [2], nous analysons les propriétés de stabilité et de robustesse du système (0.54). Tout d'abord, nous définissons la norme  $|\cdot|_{\mathcal{W}}$  comme le suivant :

$$|z|_{\mathcal{W}} = \begin{cases} |z| & \text{if } |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\alpha} \\ \sqrt{|z|^2 - \frac{\mu_1}{\nu_1}} & \text{if } |z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\alpha} \end{cases} \quad (0.56)$$

où  $\frac{\mu_1}{\nu_1} = \alpha$ .

Le théorème suivant assure que la propriété du gain asymptotique est vérifiée pour le système (0.54). C'est-à-dire, asymptotiquement, la distance entre la trajectoire de l'oscillateur et l'ensemble  $\mathcal{W}$  est proportionnelle à la taille des perturbations  $\|d\|_{\infty}$ .

**Théorème 10** *Considérons le système (0.54) avec des conditions initiales  $z_0$  et soit l'ensemble  $\mathcal{W}$  définie par (0.55). Alors, le système (0.54) a la propriété du gain asymptotique ; à savoir la borne supérieure suivante est satisfaite*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |z(t, z_0; u)|_{\mathcal{W}} \leq \eta(\|u\|_{\infty}). \quad (0.57)$$

### Synchronisation pratique du réseau d'oscillateurs de Stuart-Landau

Considérant l'équation (0.53) qui décrit la dynamique de l'oscillateur "moyennisé" avec  $u = f_2(z_m, \mathbf{e})$  :

$$\dot{z}_m = (\lambda_1 - c|z_m|^2) z_m + u,$$

En utilisant les résultats précédents sur la robustesse de l'ensemble invariant  $\mathcal{W}$  (Théorème 10) et sur la stabilité pratique des erreurs de synchronisation (Théorème 8), nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 11** *Considérons le réseau des oscillateurs de Stuart-Landau décrit par les équations (0.32), (0.33). Considérons aussi l'oscillateur "moyennisé" du réseau défini par (0.43) et sa dynamique donnée par l'équation (0.53). Soit l'Hypothèse 2 satisfaite. Alors, le système (0.53) a la propriété du gain asymptotique. En plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un gain  $\gamma \geq \gamma^*$  sachant que la borne suivante est satisfaite*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |z_m(t, z_0)|_{\mathcal{W}} \leq \varepsilon.$$



# Bibliographie

- [1] D. Aeyels and J. A. Rogge. Existence of partial entrainment and stability of phase locking behavior of coupled oscillators. *Progress of Theoretical Physics*, 112 :921–942, 2004.
- [2] D. Angeli and D. Efimov. On input-to-state stability with respect to decomposable invariant sets. In *Decision and Control (CDC), IEEE 52nd Annual Conference on*, pages 5897–5902, 2013.
- [3] M. Breakspear, S. Heitmann, and A. Daffertshofer. Generative models of cortical oscillations : neurobiological implications of the Kuramoto model. *Frontiers in Human Neuroscience*, 4(190), 2010.
- [4] L. Contevelle and E. Panteley. Linear reformulation of the Kuramoto model : asymptotic mapping and stability properties. *IEEE International Conference on Communications, Computing and Control Applications*, 2012.
- [5] M. Fussenegger. Synthetic biology : Synchronized bacterial clocks. *Nature*, 463(7279) :301–302, 2010.
- [6] S. B. Hofer, H. Ko, B. Pichler, J. Vogelstein, H. Ros, H. Zeng, E. Lein, N. A. Lesica, and T. D. Mrsic-Flogel. Differential connectivity and response dynamics of excitatory and inhibitory neurons in visual cortex. *Nature Neuroscience*, 14(8) :1045–1052, 2011.
- [7] H. Hong and S.H. Strogatz. Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters : An example of conformist and contrarian oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :54102– 54106, 2011.
- [8] F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich. Synchronization of laser oscillators, associative memory, and optical neurocomputing. *Phys. Rev. E*, 62 :4010–4013, 2000.
- [9] Y. Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. *Lecture Notes in Physics*, 39 :420–422, 1975.

- 
- [10] Y. Kuramoto. *Chemical oscillators, waves and turbulence*. Springer, 1984.
- [11] Z. Levnajic. Emergent multistability and frustration in phase-repulsive networks of oscillators. *Phys. Rev. E*, 84 :016231, Jul 2011.
- [12] Z. Levnajić. Evolutionary design of non-frustrated networks of phase-repulsive oscillators. *Sci. Rep.*, 2, 2012.
- [13] R. E. Mirollo and S. H. Strogatz. The spectrum of the locked state for the Kuramoto model of coupled oscillators. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 205 :249 – 266, 2005.
- [14] David C. Roberts. Linear reformulation of the Kuramoto model of self-synchronizing coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 77, 2008.
- [15] H. Sakaguchi and Y. Kuramoto. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment. *Progress of Theoretical Physics*, 76(3) :576–581, 1986.