HAL
open science

Gestion des actifs financiers : de l'approche Classique à la modélisation non paramétrique en estimation du DownSide Risk pour la constitution d'un portefeuille efficient

Hanene Ben Salah

To cite this version:

Hanene Ben Salah. Gestion des actifs financiers : de l'approche Classique à la modélisation non paramétrique en estimation du DownSide Risk pour la constitution d'un portefeuille efficient. Gestion et management. Université Claude Bernard - Lyon I, 2015. Français. NNT : 2015LYO10249 . tel-01242267

HAL Id: tel-01242267

https://theses.hal.science/tel-01242267

Submitted on 11 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DES
l'UNIVERSITÉS LYON 1 et TUNIS 1

Spécialité

SCIENCES DE GESTION

École Doctorale "Sciences Économiques et Gestion de l'Université de Lyon et École Doctorale de "Sciences de Gestion" de l'ISG (TUNIS) Présentée par

Hanene BEN SALAH

Pour obtenir le grade de

DOCTORAT EN SCIENCES DE GESTION

Gestion des Actifs Financiers: de l'Approche Classique à la Modélisation non Paramétrique en Estimation du DownSide Risk pour la Constitution d'un Portefeuille Efficient

soutenue le 23 novembre 2015, devant le jury composé de :

M. Ali Gannoun	Professeur, Directeur de thèse, Université de Montpellier
M. Christian de Peretti	MCF-HDR, Directeur de thèse, Ecole Centrale de Lyon
M. Abdelwahed Trabelsi	Professeur, Directeur de thèse, ISG
M. Chokri Mamoghli	Professeur Rapporteur, IHEC, Tunis
M. Jérome Saracco	Professeur, Institut polytechnique de Bordeaux
M. Pierre Ribereau	MCF, Examinateur, Lyon 1
M. Mohamed Saidane	MCF-HDR, Examinateur, Université Tunis1
Mme. Carole Siani	MCF-HDR, Examinatrice, Université Lyon 1

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD-LYON 1

Président de l'Université	**François-Noël GILLY**
Vice-président du Conseil d'Administration	M. Le Professeur Hamda BEN HADID
Vice-président du Conseil des Études et de la vie Universitaire	M. le Professeur Philippe LALLE
Vice-président du Conseil Scientifique	M. Le Professeur Germain GILLET
Directeur Général des Services	M. Alain HELLEU

COMPOSANTE SANTÉ

Faculté de Médecine Lyon Est-Claude Bernard	Directeur : M. le Professeur J. ETIENNE
Faculté de Médecine et Maieutique Lyon Sud-Charles Mérieux	Directeur : M. la Professeure C. BURILLON
Faculté d'Odontologiee Médecine Lyon Est-Claude Bernard	Directeur : M. le Professeur D. BOURGEOIS
Institut ses Sciences Pharmaceutiques et Biologiques	Directrice : M. la Professeure C. VINCIGUERRA
Institut des Sciences et Techniques de la Réadaptation	Directeur : : M. le Professeur Y. MATILLON
Département de formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine	Directrice : M. la Professeure A-M. SCHOTT

COMPOSANTES ET DÉPARTEMENTS DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Faculté des Sciences et Technologies	Directeur : M.F. DE MARCHI
Département Biologie	Directeur : M. le Professeur F. FLEURY
Département Chimie Biochimie	Directrice : Mme Caroline FELIX
Département GEP	Directeur : M. Hassan HAMMOURI
Département Informatique	Directeur : M. le Professeur S. ACCOUCHE
Département Mathémtiques	Directeur : M. le Professeur G. TOMANOV
Département Mécanique	Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID
Département Physique	Directeur : M. J-C. PLENET
UFR Sciences et Techniques des activités Physiques et Sportives	Directeur : M. Y. VANPOULLE
Observatoire des Sciences de l'Université de Lyon	Directeur : M. B. GUIDERDONI
Polytech Lyon	Directeur : M. P. FOURNIER
École Supérieure de Chimie Physique Électronique	Directrice : M. G. PIGNAULT
Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1	Directeur : M. le Professeur C. VITON
École Supérieure du Professorat et de l'Education	Directrice : M. le Professeur A. MOUGNIOTTE
Institut de Science Financière et d'Assurance	Directeur : M.N. LEBOISNE

Dédicaces

A ma mère *Fatma*

Je te rends hommage par ce modeste travail en guise de ma reconnaissance éternelle et de mon amour infini.
Merci Maman de m'avoir supportée et de m'avoir permise de me lever motivée, le cœur léger et l'esprit tranquille depuis le début de ma thèse. Très humblement, je voudrais te dire merci pour ton soutien pendant mes périodes de doutes et pour tes encouragements répétés. Tu as su mettre en musique les paroles de ma composition scientifique.

A mes frères Seif Allah et Ala Eddine .

A tous ceux et celles que j'aime et qui me sont chers.

A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

A tous ceux que je ne nomme pas, mais qui se reconnaîtront

Ce travail est dû en grande partie à vous ! Qu'il soit pour vous le témoignage de toute ma reconnaissance pour ces années de compréhension, de privations et d'efforts communs.

Remerciements

Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers par qui nos âmes sont fleuries.
Marcel Proust

Le seul moyen de se délivrer d'une tentation, c'est d'y céder paraît-il ! Alors j'y cède en disant un grand Merci aux personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Messieurs les Professeurs **Ali Gannoun**, **Christian de Peretti** et **Abdelwahed Trabelsi** qui , en plus de m'avoir fait l'honneur d'accepter la direction de cette thèse, ont su m'apporter, par leur disponibilité, leurs différences, leurs rigueurs scientifiques, leurs clairvoyances et leurs qualités humaines, tous les ingrédients nécessaires à la réalisation de cette thèse dans les meilleures conditions.

J'exprime toute ma gratitude à Messieurs les professeurs **Chokri Mamoghli** et **Jérôme Saracco**, qui ont eu la lourde tâche probablement quelque peu fastidieuse d'être les rapporteurs du présent manuscrit. Leurs remarques et leurs précieux conseils m'ont été très utiles pour améliorer ce manuscrit et aiguiller la suite de mes travaux.

Mes remerciements s'adressent aussi à Madame Le professeur **Carole Siani**, qui a bien voulu présider ce jury et à Messieurs les Professeurs **Pierre Ribereau** et **Mohamed Saidane** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres de ce jury.

Je remercie tout particulièrement **Mohamed Chaouech** et **Mathieu Ribatet** pour l'aide et le soutien dont ils m'ont fait bénéficier tout au long de ce travail. Je leur exprime ma très sincère reconnaissance pour le temps qu'ils m'ont accordé et les conseils qu'ils m'ont prodigués. **Mathieu**, tu es un Chef !

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Messieurs les professeurs **Christian Robert**, **Christian Lavergne**, **Jean-Noel Bacro**, **André Mas**, **Xavier Bry**, **Slaheddine Hallara**, **Jean-Michel Marin** et Madame **Gladys Toulemonde** pour leur aide, leur soutien et leur disponibilité.

J'exprime aussi toute mon amitié à **Catherine**, **Benoite**, **Véronique, Ludovic**, **Cyril**, **Benjamin**, **Baptiste**, **Myriam** et **Julien** pour les longues discussions culturelles à la cantine. Je n'oublierai jamais ces moments de détente et de franches rigolades.

Enfin, Je remercie tous mes ami(e)s et toutes les personnes qui m'ont aidée dans la réalisation de ce travail, et plus particulièrement Mesdames **Sophie Cazanave** et **Soundous Ghazouani** pour leur disponibilité et leur efficacité. Merci également à Monsieur **Mohamed Abbas** pour avoir facilité mon inscription en France.

Table des matières

1 La Théorie Moderne de Portefeuille : Cadre Conceptuel et État de l'Art 7

1.1 Cadre conceptuel 9

1.1.1 Le Rendement Espéré d'un Portefeuille 9

1.1.2 La Variance d'un Portefeuille 11

1.1.3 Les Contraintes Budgétaires 12

1.1.4 Le Critère de Choix en Situation d'Incertitude 14

1.1.4.1 La Notion du Risque et d'Utilité 14

1.1.4.2 Caractérisation d'une Fonction d'Utilité 15

1.1.5 L'Efficience des Marchés 16

1.2 Le Modèle Moyenne-Variance de Markowitz (1952) 17

1.2.1 Hypothèses 18

1.2.1.1 Les Hypothèses Relatives aux Actifs Financiers 18

1.2.1.2 Les Hypothèses Relatives aux Comportements des Investisseurs 18

1.2.2 Détermination du Portefeuille Optimal 19

1.2.3 Frontière et Portefeuille Efficients 21

1.2.4 Frontière Efficiente et Paramètre d'Aversion 24

1.2.5 Les Inconvénients de l'Analyse Moyenne-Variance 25

1.3 Le Modèle Moyenne-Moments d'Ordre Supérieur 28

1.3.1 Optimisation du $p^{\text{ème}}$ Moment 30

1.3.1.1 Maximisation du Skewness sous Contraintes d'Espérance et de Variance 30

1.3.1.2 Minimisation du Kurtosis sous Contraintes d'Espérance et de Variance 31

1.3.1.3 Optimisation Multi-objectif : "Polynomial Goal Programming" : 31

1.3.2 Maximisation de l'Utilité Polynomiale 34

1.4 Modèle d'Optimisation dans le Cadre du DownSide Risk 37

1.4.1 Les Modèles Moyenne-Semivariance et Moyenne-Lower Partial Moment 39

1.4.1.1 Motivation et Premières Définitions 39

1.4.1.2 Choix de Portefeuille Optimal dans le Cadre du DownSide Risk : Cas de la Semivariance 41

1.4.1.3 Choix de Portefeuille Optimal dans le Cadre du DownSide Risk : Cas du LPM 43

1.5 Les Modèles Moyenne-VaR et Moyenne-CVaR 44

1.5.1 Note Historique et Motivation 45

1.5.2 Définitions et Premières Propriétés 46

1.5.3 Estimation de la VaR et de la CVaR 48

1.5.3.1 Estimation Paramétrique 49

1.5.3.2 Estimation Non Paramétrique 49

1.5.3.3 Méthodes Semiparamétriques 50

1.5.4 La VaR et la CVaR dans l'Optimisation de Portefeuilles 50

1.5.4.1 Les Modèles 51
1.6 Conclusion 52
1.7 Bibliographie 52

2 Mean and Median-Based Nonparametric Estimation of Returns in Mean-Downside Risk Portfolio Frontier 65
2.1 Introduction 66
2.2 DSR : the traditional approach 68
2.2.1 Case of a portfolio with two assets 68
2.2.1.1 Formal framework 68
2.2.1.2 The algorithm 69
2.2.2 Case of a portfolio with *m* assets 70
2.2.2.1 The algorithm 70
2.2.2.2 The portfolio frontier 72
2.3 DSR : The kernel approach 72
2.3.1 Basic Background 72
2.3.2 Kernel mean estimation 73
2.3.2.1 Kernel mean return estimation 73
2.3.2.2 Kernel mean and DSR estimation 74
2.3.3 Kernel median estimation 74
2.3.3.1 General concept 74
2.3.3.2 Median kernel return estimation 74
2.3.3.3 Kernel median and DRS estimation 75
2.4 Nonparametric DSR minimization algorithm 75
2.4.1 Case of a portfolio with two assets 75
2.4.2 Case of a portfolio with *m* assets 76
2.4.2.1 Nonparametric methods in efficient frontier construction . . . 78
2.5 Empirical analysis 79
2.5.1 Data description 79
2.5.2 Analysis of results 81
2.5.2.1 Optimization with positive weights 81
2.5.2.2 Optimization with short selling constraint 85
2.5.2.3 Measures of Performance 89
2.6 Conclusion 90
2.7 Bibliography 91

3 A New Approach in Nonparametric Estimation of Returns in Mean-DownSide Risk Portfolio frontier 93
3.1 Introduction 94
3.2 Classical Mean-DownSide Risk Model 95
3.2.1 Formal Framework 95
3.2.2 Parametric Athayde's Algorithm 97
3.2.3 Mean DSR Frontier 98
3.3 Nonparametric Mean-Downside Risk Model 99
3.3.1 Basic Background 99
3.3.2 Kernel Mean Return Estimation 99
3.3.3 Kernel Median Return Estimation 100
3.3.3.1 General Concept 100

3.3.3.2 Kernel Median Estimators 100
3.3.3.3 The Kernel DSR Estimation 101
3.3.3.4 Kernel DSR Minimization Algorithm 102
3.4 Empirical Analysis 104
3.4.1 Data 104
3.4.2 Analysis of Results 107
3.4.2.1 Optimization without short selling 107
3.4.2.2 Optimization with short selling 111
3.4.2.3 Performance Analysis 115
3.5 Conclusion 117
3.6 Bibliography 119

4 Towards dynamical Portfolio Selection 123
4.1 Introduction 123
4.2 Nonparametric Conditional Risk 126
4.2.1 Nonparametric Regression Model 126
4.2.2 Conditional Mean-Variance Model 128
4.2.3 Conditional Mean-Semivariance Model 128
4.3 Empirical Analysis 131
4.3.1 Data 131
4.3.2 Historical statistics 131
4.3.2.1 Chinese Market 131
4.3.2.2 The Americain Market : S&P 500 133
4.3.3 Portfolio Optimisation 135
4.3.4 Another Tool to Test The Efficiency of the Proposed Methods 139
4.4 Conclusion 140
4.5 Bibliography 141

A Algorithmes 149

Table des figures

1 Frontière efficiente (Source : Pearson Addison-Wesley, 2007) 2

1.1 Frontière efficiente de Markowitz en l'absence de l'actif sans risque 22
1.2 Frontière efficiente en présence de l'actif sans risque (Tobin 1958) 23
1.3 Illustration graphique du VaR et de la $CVaR$ (Vanini et Vignola (2011)). 48

2.1 DSR curves. 69
2.2 Markowitz Mean-Variance efficient frontier. 82
2.3 Portfolio returns against CAC 40 Index. 82
2.4 Example of CV(h) 83
2.5 DSR efficient frontiers. 84
2.6 Portfolio returns against CAC 40 Index. 85
2.7 Mean-Variance efficient frontier with short-selling constraint. 86
2.8 Portfolio returns against CAC 40 Index. 87
2.9 DSR efficient frontiers. 87
2.10 DSR efficient frontiers. 88

3.1 CV(h) curve 105
3.2 French Portfolio Efficient Frontiers ($\omega_i \geq 0$) 108
3.3 Brazilian Portfolio Efficient Frontiers ($\omega_i \geq 0$) 108
3.4 Portfolio returns against CAC 40 Index 110
3.5 Portfolio returns against BOVESPA Index 110
3.6 French Portfolio Efficient Frontiers ($\omega_i \in \mathbb{R}$) 112
3.7 Brazilian Efficient Portflio Frontiers ($\omega_i \in \mathbb{R}$) 112
3.8 Portfolio returns against CAC 40 Index 114
3.9 Portfolio returns against BOVESPA Index 115
3.10 Brazilian Market Trend 117

4.1 **HangSeng index versus return of optimal portfolio** 140
4.2 **S&P500 index versus return of optimal portfolio** 140

Liste des tableaux

2.1 Market Historical Statistics 80
2.2 French correlation matrix 81
2.3 Weights for optimal Portfolios using Mean-Variance method. 82
2.4 Weights for optimal portfolios using DSR methods. 84
2.5 Optimal portfolios using Mean-Variance method. 86
2.6 Weights for optimal portfolios using DSR methods 88
2.7 Performance ratios. 90

3.1 French Market Historical Statistics 106
3.2 Brazilian Descriptive Market 106
3.3 French Correlation Matrix 107
3.4 Brazilian Correlation Matrix 107
3.5 France : Optimal portfolios without short selling 109
3.6 Brazil : Optimal portfolios without short selling 109
3.7 France : Optimal portfolios with short selling 113
3.8 Brazil : Optimal portfolios with short selling 114
3.9 Performance Sharpe and Sortino Ratios for French Stock Market 116
3.10 Performance Sharpe and Sortino Ratios for Brazilian Stock Market 117
3.11 Companies abbreviations 121

4.1 Chinese historical analysis 132
4.2 China Correlation Matrix 133
4.3 USA Historical Statistics 134
4.4 USA Correlation Matrix 135
4.5 Chinese Portfolio return (%) 137
4.6 Naive versus the other portfolio optimization methods in the Chinese Market . 137
4.7 American Portfolio return (%) 138
4.8 Naive versus the other portfolio optimization methods in the American Market . 138

Introduction générale

Le marché financier est un lieu de rencontre entre l'offre et la demande des actifs financiers où les investisseurs interviennent par la prise de positions longues et courtes dans différents actifs financiers. Dans la théorie moderne du choix de portefeuille, les préférences des investisseurs sont définies en terme de rentabilité et de risque.

Le rendement d'un portefeuille est une combinaison des rendements des actifs qui le composent, pondérés par leurs poids dans le portefeuille. Le risque est une fonction de la corrélation entre les actifs qui le composent.

Il est donc important de diversifier son portefeuille afin de ne pas subir de grandes fluctuations des cours des titres dues à la multiplication des chocs de la sphère financière et l'augmentation des incertitudes géopolitique et macroéconomique. Ces fluctuations des cours des titres sont liées aussi à la santé générale du secteur dans lequel on investit. Il est bien connu que, par exemple, les secteurs de la technologie, et de télécommunication sont marqués par de fortes fluctuations. Diversifier obéit donc au célèbre adage en gestion des portefeuilles qui dit : « il ne faut pas mettre tous les œufs dans un même panier ».

Ainsi, selon la théorie moderne de portefeuille développée par Markowitz (1952), les agents ont pour but ultime de combiner un ensemble d'actifs ayant une rentabilité maximale avec un niveau de risque donné ou ce qui revient au même un risque minimal pour un niveau donné de rentabilité. C'est le portefeuille efficient.

Les travaux de Harry Markowitz ont permis d'aboutir à une théorisation de la diversification optimale du portefeuille boursier. Ces travaux fonctionnent sur des postulats :

- l'investissement a lieu sur une période unique (par exemple 6 mois ou 1 an),
- il n'y a pas de coûts de transaction,
- les préférences de l'investisseur ne prennent en compte que 2 critères : le risque et le rendement espéré,
- les marchés sont efficients,
- les investisseurs ont une aversion au risque.

En ce qui concerne le choix de la mesure de risque, plusieurs alternatives se présentent. Par exemple, dans le modèle de gestion de portefeuille de Markowitz (1952), le risque du portefeuille est déterminé par sa variance. Ainsi, tous les écarts, négatifs ou positifs, par rapport à la rentabilité espérée sont pris en compte.

Le résultat principal de ce modèle stipule qu'à l'optimum, le portefeuille détenu par l'investisseur doit être parfaitement diversifié.

Dominant depuis plus un demi-siècle, le modèle de Markowitz (1952) reste l'un des plus utilisés par les praticiens. Il s'appuie sur l'hypothèse forte que les agents possèdent une fonction

d'utilité quadratique et utilise (l'écart-type (ou la variance)) des rendements des titres pour mesurer le risque d'un portefeuille.
Le modèle de Markowitz ne définit pas un unique portefeuille optimal mais génère une frontière efficiente comprenant l'ensemble des portefeuilles optimaux. C'est à l'investisseur de choisir son portefeuille optimal en fonction de son degré d'aversion au risque. Une illustration est présentée dans le graphique suivant :

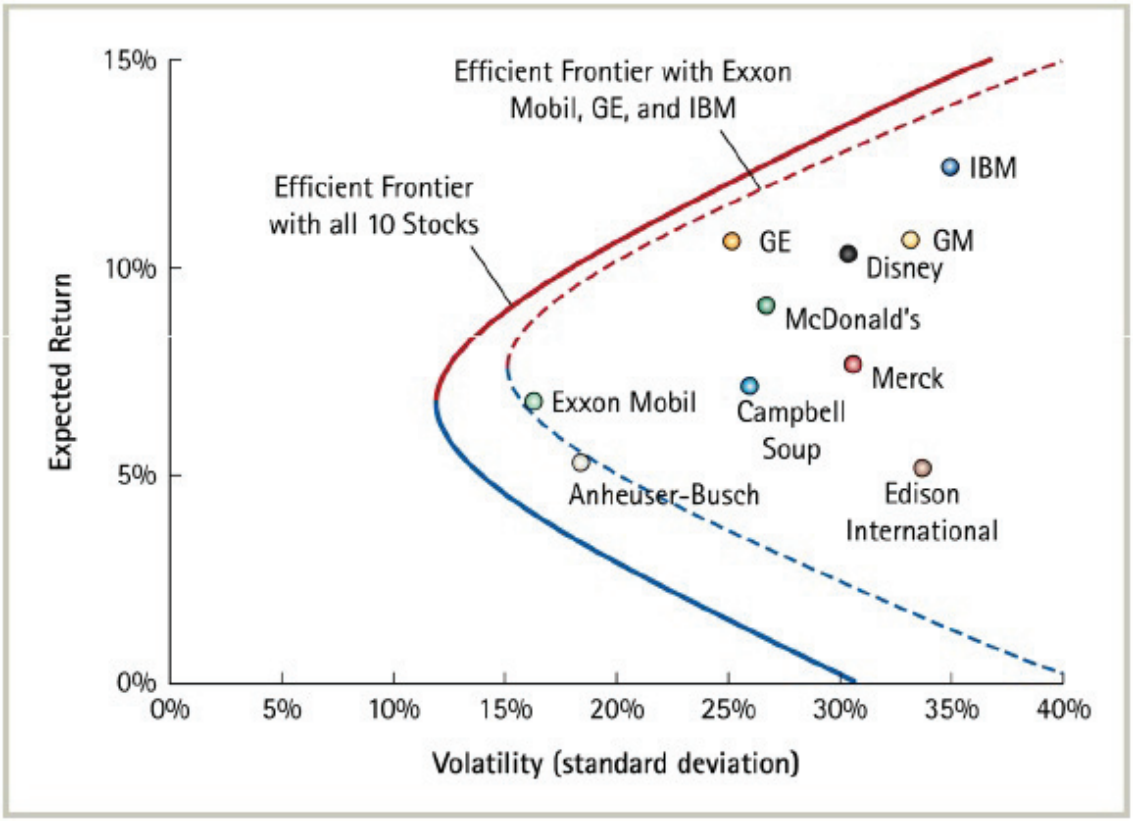

Figure 1: *Frontière efficiente (Source : Pearson Addison-Wesley, 2007)*

Les portefeuilles efficients, c'est-à-dire ceux offrant le meilleur profil possible en terme de rentabilité pour un niveau de risque donné, sont représentés par la région rouge qui est appelée la frontière efficiente pour ces actifs.

Dans le modèle Moyenne-Variance, l'hypothèse implicite est la symétrie de la distribution des rendements et plus précisément la normalité de cette distribution. Dans ce cas, l'investisseur semble n'accorder aucune importance particulière à l'asymétrie (qui fait intervenir le moment d'ordre 3) et à l'aplatissement (qui fait intervenir le moment d'ordre 4) de la distribution. Cependant, plusieurs résultats empiriques dont ceux de King (1993) ont montré que les distributions des rendements sont plutôt asymétriques. Les rendements obligataires de certains pays émergents, par exemple, sont caractérisés par un coefficient d'asymétrie (skewness) négatif (Bekaert et Harvey, 1997, Bekaert, Erb, Harvey et Viskanta, 1998 ; Burger et Warnock, 2007). L'utilisation des deux premiers moments de la distribution des rendements conformément au modèle classique de portefeuille conduit par conséquent à une allocation d'actifs sous-optimale (Bawa et Lindenberg, 1977 ; Harlow et Kao, 1989 ; Harlow, 1991).

Il est clair donc que la non normalité des distributions de rendement de certaines classes d'actifs financiers a remis en question la fiabilité de l'analyse moyenne-variance. Des études

récentes montrent qu'il est nécessaire d'introduire les moments d'ordre supérieur dans le choix des portefeuilles d'actifs financiers internationaux par exemple. Toute une panoplie de recherche est apparue dès les années 60, guidée notamment par Fama (1965), Arditti (1967), Miller et Scholes (1972), Simkowitz et Beedles (1978) et King (1993) pour contester la normalité des distributions des titres individuels. Dans le même registre, Arditti (1971), Samuelson (1970) et Rubinstein (1973) ont montré que le troisième moment est un facteur important dans l'explication des rendements des titres d'un portefeuille. Tous ces auteurs ont confirmé ainsi la pertinence des moments d'ordre supérieur dans la prise de décision de l'investisseur en vue de constituer un portefeuille optimal.

Aussi, la mesure du risque par la variance (ou l'écart-type) a le défaut de considérer l'investisseur comme indifférent devant l'évolution de la valeur du portefeuille dans le sens de la hausse ou dans le sens de la baisse. Il est supposé que pour lui, il s'agit toujours d'un risque à assumer. Mais l'attitude des investisseurs varie en fonction du domaine de la fonction d'utilité, ces derniers étant en particulier plus sensibles aux pertes subies qu'aux gains effectués (Campbell et Kraussl, 2007).

Pour remédier à ces défaillances, les travaux de Roy (1952) ont fait émerger de nouvelles différentes mesures du risque. Par conséquent, différents modèles, ont été proposés afin de tenir compte des caractéristiques des distributions de rendement des titres ainsi que du comportement des investisseurs vis-à-vis du risque, tout en préservant le cadre d'optimisation rendement-risque initial à deux dimensions (Hwang et Pedersen, 2004). Par définition, ces mesures de risque, dites DownSide Risk measures (ou mesures de risque (asymétrique) de baisse), ne prennent en compte qu'une partie de la distribution des rendements plutôt que la distribution entière. Ces mesures isolent les écarts des rendements par rapport à un rendement cible uniquement sur la partie gauche de la distribution (Harlow, 1991). Markowitz (1959) a notamment défini la Semivariance comme la mesure du risque « la plus robuste d'un point de vue théorique ». Cette dernière évalue les carrés des écarts des rendements en-dessous d'un taux de rentabilité cible (le Benchmark). La Semivariance exprime donc le fait que les investisseurs sont averses aux pertes potentielles par rapport à un seuil de rentabilité donné et choisi arbitrairement.

Cette mesure a été généralisée pour définir les moments partiels inférieurs d'ordre n (Bawa, 1975).

De manière générale, le cadre d'analyse qui utilise les moments partiels inférieurs permet de relâcher les hypothèses restrictives du modèle initial de portefeuille de Markowitz, d'une part en ce qui concerne les préférences des investisseurs et, d'autre part en ce qui concerne les propriétés des fonctions de distribution des rendements des actifs auxquels nous nous intéressons. La normalité des distributions a été largement remise en cause par plusieurs auteurs et n'est nullement exigée pour déterminer le modèle d'optimisation.

Récemment, une mesure de risque est de plus en plus utilisée dans les établissements financiers (voir par exemple Jorion (2000), Grebeck (2006) et Kuhn 2006). Elle a été adoptée par la banque JP Morgan en 1993. Cette mesure de risque est nommée Valeur exposée au risque ou risque potentiel de perte ou bien plus connue sous le nom *Value at Risk* (VaR). La VaR est l'espérance de perte maximum d'un investissement sur un horizon déterminé pour un certain niveau de confiance. Mais cette mesure souffre de certaines faiblesses que nous détaillerons plus tard. La *VaR conditionnelle* (CVaR), définie comme étant l'espérance de la perte excédant la VaR, peut être utilisée à sa place.

Dans cette thèse, nous nous intéressons essentiellement à la mesure du DownSide Risk mesurée par la Semivariance. Partant d'un article de Athayde (2001), nous développerons des méthodes non paramétriques en vue de l'obtention d'un portefeuille optimal et d'une frontière efficiente lisse comparée à celle obtenue par les méthodes classiques basées sur les modèles

Moyenne-Variance ou Moyenne-Semivariance. Ces méthodes seront basées sur l'estimation (par la méthode du noyau de convolution) des rendements par la moyenne ou la médiane conditionnelles. Cette manière de procéder permet de lisser convenablement la frontière efficiente sans avoir recours à un nombre infini d'observations (qui est réellement impossible). Elle permet aussi d'anticiper des rendements futurs qui serviront dans la détermination de portefeuilles optimaux. On montrera sur plusieurs exemples, pris dans différents marchés, que nos méthodes sont flexibles et efficientes.

La suite de la thèse est organisée comme suit :

- Chapitre 1 : **Introduction**

  Dans ce chapitre, nous donnons le vocabulaire nécessaire et les principales définitions pour comprendre la théorie moderne du choix de portefeuille, de même qu'une revue bibliographique non exhaustive des méthodes connues (dont une grande partie a été citée au dessus) pour l'optimisation d'un portefeuille en utilisant différentes mesure de risque. Ces méthodes sont présentées plus ou moins brièvement mais avec suffisamment de références pour aider le lecteur averti (ou non) à pousser les investigations en vue d'obtenir d'amples informations concernant ces méthodes ou sur des méthodes avoisinantes.

- Chapitre 2 : **Mean and Median-based Nonparametric Estimation of Returns in Mean-DownSide Risk Portfolio Frontier**

  Dans cet article, nous avons repris, corrigé et re-écrit une publication d'Athayde (2001) suggérant de remplacer, dans les programmes d'optimisation, les rendements par des moyennes conditionnelles obtenues par la méthode du noyau de convolution. Le but est d'obtenir des frontières efficientes lisses dans le cas du DownSide Risk. La publication en question souffrait de plusieurs problèmes théoriques et appliqués que nous avons résolus. Ensuite, nous avons proposé la médiane conditionnelle comme alternative "robuste" à la moyenne conditionnelle, la médiane étant moins sensible que la moyenne aux données aberrantes. Toutes ces méthodes ont été mises en œuvre sur des données boursières provenant du marché français en utilisant des algorithmes itératifs développés pour les besoins de ces méthodes, en autorisant ou pas la vente à découvert. Le développement informatique a été fait en utilisant le logiciel ®.
  L'utilisation de la médiane conditionnelle, sur ces données, semble donner un portefeuille à meilleur rendement.

- Chapitre 3 : **A New Approach in Nonparametric Estimation of Returns in Mean-DownSide Risk Portfolio frontier**

  Aussi bien dans l'approche d'Athayde (2001) que dans la notre (article 1), le rendement du portefeuille est ré-estimé à chaque itération de l'algorithme. L'estimation des rendements des différents actifs est déduite en utilisant les poids qui ont servi à l'estimation des rendements du portefeuille. Cette méthode converge lentement et nécessite souvent des tests d'arrêt pour stopper les itérations. Nous proposons dans cette nouvelle publication de remplacer tous les rendements observés des différents actifs par la moyenne ou la médiane conditionnelles des observations "voisines" de l'observation en question. L'estimation des rendements du portefeuille sera donc une combinaison linéaire des estimations

des rendements des différents actifs. L'avantage de cette méthode est de réduire le nombre des itérations pour obtenir la convergence et de limiter les erreurs dues à l'estimation du rendement du portefeuille à chaque étape de la minimisation. Il n'est plus besoin d'un test d'arrêt pour stopper les itérations dans ce cas. L'application, en autorisant ou pas la vente à découvert, a été faite sur des données provenant des marchés français et brésiliens et a montré l'efficacité et la rapidité d'exécution de notre méthode comparée aux autres méthodes d'optimisation proposées sous les mêmes contraintes. L'outil informatique utilisé dans la programmation de nos méthodes est le logiciel ®.

- Chapitre 4 : **Towards dynamical Portfolio Selection**

  Ayant constaté que, aussi bien dans le modèle Moyenne-Variance que dans le modèle Moyenne-Semivariance, les moyennes et les matrices de variance ou semivariance sont estimées avec les données observées dans le passé et sans aucune estimation des données futures, nous avons défini une mesure conditionnelle du risque. Cette nouvelle mesure donne un aspect dynamique aux différents estimateurs en anticipant les rendements futurs (horizon 1) puis en les incluant dans l'estimation des différents paramètres utilisés dans les modèles d'optimisation (classique ou utilisant le DSR). Ces valeurs futures sont obtenues à l'aide de prédicteurs non paramétriques basés sur l'estimation par la méthode du noyau de l'espérance conditionnelle. Les marchés américain et chinois ont servi de champs d'application pour nos méthodes en autorisant ou non la vente à découvert . Les premiers résultats sont encourageants et montrent l'intérêt de cet aspect "prévisionnel" dans la constitution d'un portefeuille optimal. L'accompagnement informatique s'est fait à l'aide du logiciel ®.

- Conclusion.
  Dans ce dernier chapitre, nous revenons sur les principaux résultats obtenus dans les chapitres précédents et nous pointerons leurs faiblesses et leurs forces. Nous évoquerons quelques pistes de recherche nouvelles ou dans le prolongement de nos travaux et nous donnerons un aperçu des travaux en cours de réalisation et qui ne sont pas exposés dans les précédents chapitres.

Bibliographie

- Arditti, F. (1967). *and the Required Return on Equity*, Journal of Finance, 22, 1, 19–36.

- Athayde, G. (2001). *Building a Mean-Downside Risk Portfolio Frontier, Developments in Forecast Combination and Portfolio Choice*, John Wiley and Sons.

- Bawa, V.S. (1975). *Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects*, Journal of Financial Economics, 2, 95–112.

- Bawa, V.S. and E.B. Lindenberg, E.B. (1977). *Capital Mark et Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework*, Journal of Financial Economics , 5, 2, 189-200.

- Bekaert, G., Harvey, C.R. (1997). *Emerging equity market volatility*, Journal of Financial Economics, 43, 29–78.

- Bekaert, G., Erb, C.B., Harvey, C.R., Viskanta, T.E. (1998). *Distributional characteristics of emerging market returns and asset allocation*, J. Portfolio Management. Winter, 102–116.
- Burger J.D. et F.E. Warnock (2007). *Participation in Local Currency Bond Markets*, Review of Financial Economics , 16, 3, 291-304.
- Campbell, A., Kräussl, R. (2007). *Revisiting the home bias puzzle : Downside equity risk*, Journal of International Money and Finance , 26,1239-1260.
- Copeland, T.E., Weston, J.F., Katz, J.M. , Shastri K. (2005). *Financial Theory and Corporate Policy*, Pearson Addison-Wesley edition.
- Grebeck, M.J. (2006). *Applications of Stochastic Programming to asset liability Management*, Ph. D. thesis in Statistics and Applied Probability , University of California, Santa Barbara.
- Fama E.F. (1965). *behavior of stock market prices*, Journal of Business, 38, 34-105.
- Harlow, W.V. and Rao, R.S. (1989). *Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework : Theory and Evidence*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 24,3, 285-310.
- Harlow W.V. (1991). *Allocation in a Downside Risk Framework*, Financial Analysts Journal, 47, 5, 28-40.
- Jorion, P. (2000). *Value at Risk*, McGraw-Hill, New York, 2000.
- King, A. (1993). *risk measures and tracking models for portfolio optimization under uncertainty*, Annals of Operations Research, 45, 1, 165-177.
- Kuhn, J. (2006). *Optimal Risk-Return Trade-of of Commercial Banks and the stability of Pro-Stability Measures for Loan Portfolios*, Springer, Berlin Heidelberg.
- Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7, No. 1, 77-91.
- Markowitz, H. (1959). *Selection Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Miller, M.H. and Scholes, M. S., (1982). *Dividends and Taxes : Some Empirical Evidence*, Journal of Political Economy, University of Chicago Press, 90, 6, 1118-41.
- Roy, A.D. (1952). *Safety-first and the holding of assets*, Econometrica, volume 20, pages 431-449.
- Rubinstein, M. (1973). *Fundamental Theorem of Parameter Preference Security Valuation*. Journal of Financial and Quantitative Analysis , 8, 61–69.
- Samuelson, P. (1970). *Fundamental Approximation of Theorem in Portfolio Analysis in Terms of Means, Variances and Higher Moments*, Review of Economic Studies , 37, 537–542.
- Simkowitz, M.A. and Beedles, W.L. (1978). *Diversification in a three-moment world*, Journal of Finance 33 : 288-292.

1 La Théorie Moderne de Portefeuille : Cadre Conceptuel et État de l'Art

Sommaire

1.1 Cadre conceptuel 9

1.1.1 Le Rendement Espéré d'un Portefeuille 9

1.1.2 La Variance d'un Portefeuille 11

1.1.3 Les Contraintes Budgétaires 12

1.1.4 Le Critère de Choix en Situation d'Incertitude 14

1.1.5 L'Efficience des Marchés 16

1.2 Le Modèle Moyenne-Variance de Markowitz (1952) 17

1.2.1 Hypothèses 18

1.2.2 Détermination du Portefeuille Optimal 19

1.2.3 Frontière et Portefeuille Efficients 21

1.2.4 Frontière Efficiente et Paramètre d'Aversion 24

1.2.5 Les Inconvénients de l'Analyse Moyenne-Variance 25

1.3 Le Modèle Moyenne-Moments d'Ordre Supérieur 28

1.3.1 Optimisation du $p^{\text{ème}}$ Moment 30

1.3.2 Maximisation de l'Utilité Polynomiale 34

1.4 Modèle d'Optimisation dans le Cadre du DownSide Risk 37

1.4.1 Les Modèles Moyenne-Semivariance et Moyenne-Lower Partial Moment 39

1.5 Les Modèles Moyenne-VaR et Moyenne-CVaR 44

1.5.1 Note Historique et Motivation 45

1.5.2 Définitions et Premières Propriétés 46

1.5.3 Estimation de la VaR et de la CVaR 48

1.5.4 La VaR et la CVaR dans l'Optimisation de Portefeuilles 50

1.6 Conclusion 52

1.7 Bibliographie 52

Le développement et la mise en place des marchés financiers, et la multitude des produits financiers ont poussé les chercheurs à développer des modèles permettant d'aider au mieux les investisseurs à prendre les décisions adéquates et mettre en place des stratégies efficaces, pour une meilleure allocation de leurs richesses de façon à maximiser leurs gains en minimisant le risque qu'ils encourent. Cette nécessité a donné naissance à une panoplie de travaux de recherche qui ont porté sur la gestion de portefeuille et l'évaluation des actifs financiers.

La théorie moderne de portefeuille, a été introduite sous le modèle Moyenne-Variance de Markowitz dans les années 50. Elle constitue jusqu'à maintenant le noyau de la théorie classique du portefeuille, un modèle de référence et un outil d'aide à la décision pour les gestionnaires d'une entreprise industrielle, ou d'une institution financière.

La théorie moderne de portefeuille a été développée depuis près d'un demi-siècle en s'appuyant sur plusieurs notions telles l'aversion au risque et l'espérance d'utilité qui ont été proposées par Von Neumann Morgenstern (1944), ainsi que l'efficience des marchés et la rationalité parfaite des investisseurs qui ont introduites par Eugène Fama (1965).

Sur la base de ces notions, et en partant du postulat que le risque d'un portefeuille peut être correctement mesuré par la variance de sa rentabilité, Markowitz (1952) explicite et formalise le dilemme fondamental de la finance moderne : obtenir une rentabilité faible mais certaine, ou accepter de prendre un risque dans l'espoir d'accroître cette rentabilité, l'espérance de rentabilité étant d'autant plus élevée que le risque est important.

Il formalise et quantifie également l'effet de diversification selon lequel une combinaison judicieuse de nombreux actifs dans un portefeuille permet de réduire le risque total subi pour un taux donné de rentabilité espérée.

Une dizaine d'années plus tard , et sur la base des travaux de Markowitz (1952), Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966) développèrent le modèle d'équilibre des actifs financiers (ou MEDAF) qui a abouti, sous certaines hypothèses, à la rentabilité espérée d'équilibre d'un titre quelconque.

Le modèle Moyenne-Variance de Markowitz a fait l'objet de plusieurs critiques liées essentiellement à ses hypothèses irréalistes et surtout aux difficultés au niveau de sa validation empirique. Ceci a donné lieu à de nouveaux modèles basés sur une autre perception du risque tels que les modèles Moyenne-Moments d'ordre supérieur, Moyenne-Downside risk (DSR), les modèles Moyenne-VaR, et Moyenne-CVaR. D'autres recherches se sont intéressées à l'étude des valeurs extrêmes et leur intégration dans la résolution des problèmes d'optimisation.

Certains chercheurs ont mis en question la mono-périodicité du modèle Moyenne-Variance de Markowitz et ils ont proposé des modèles de gestion dynamique de portefeuilles dit les modèles Multi-Horizons, voir par exemple Bertsekas (2012), Garleanu et Pedersen (2013) et Sivaramakrishnan et al (2015).

Dans ce chapitre, nous passons en revue quelques modèles d'optimisation de portefeuilles en nous s'inspirant des travaux fondateurs de Markowitz.
Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 1, nous présentons le cadre conceptuel du

modèle Moyenne-Variance de Markowitz (1952), nous mettons l'accent sur les caractéristiques d'un portefeuille, et les notions de base liées à la gestion de portefeuille. La section 2 est consacrée à la présentation du modèle Moyenne-Variance de Markowitz, ses avantages et ses limites. La section 3 est consacrée à la présentation du modèle alternatif Moyenne-Moments d'ordre supérieur. Le modèle Moyenne-DownSide Risk sera l'objet de la section 4 où seront exposés les modèles Moyenne-Semivariance, Moyenne-VaR et Moyenne-CVaR.

Il est à noter que, dans ce chapitre, nous ne ferons pas une présentation exhaustive de toutes les méthodes d'optimisation d'un portefeuille, mais nous passerons en revue quelques unes des plus connues qui seront à la base de nos travaux proposés pour publication dans les revues spécialisées.

1.1 Le Cadre Conceptuel de la Théorie Moderne de Portefeuille

Un portefeuille se définit comme un regroupement d'actifs qui se construit en fonction de l'aversion au risque de l'investisseur, sa fonction d'utilité et compte tenu de ses contraintes budgétaires ainsi que l'ensemble d'informations dont il dispose. Le gestionnaire d'un portefeuille est amené à faire des anticipations sur l'évolution du marché afin de classer au mieux les titres suivant différents critères après les avoir analysés. Généralement, ces critères de choix sont liés au rendement espéré, le risque mesuré généralement par la variance, et la dispersion des distributions des rendements.
Par la suite, il recourt à faire un choix d'allocation d'actifs pour la construction de son portefeuille qui constitue la première et la plus importante étape dans le processus de gestion du portefeuille. Enfin il est indispensable d'assurer le suivi du portefeuille de façon à atteindre les objectifs de rendement définis par l'investisseur tout en respectant ses contraintes et en tenant compte du risque qu'il encourt.

1.1.1 Le Rendement Espéré d'un Portefeuille

La gestion des portefeuilles d'actifs s'appuie sur la notion de rendement ou de taux de rentabilité. Cette grandeur mesure, pendant un intervalle de temps donné, l'appréciation ou la dépréciation relative de la valeur d'un actif financier ou d'un portefeuille d'actifs. Cette rentabilité réalisée par l'investisseur regroupe non seulement le *cash flow* net que lui procure cet actif mais aussi la plus-value éventuelle qu'il en retire. Il existe deux types de rentabilités :

- les rentabilités *ex post* qui sont calculées sur la base des prix et les cashs flows réalisés.
- les rentabilités *ex ante* qui se définissent comme des variables aléatoires qui peuvent prendre des valeurs possibles se caractérisant chacune par une probabilité d'occurrence.

Il est à noter que la distribution des rentabilités passées est susceptible de nous donner des indications sur la distribution de probabilité des rentabilités futures.
Pour calculer les différents moments relatifs au taux de rendement des actifs, nous sommes amenés à calculer le rendement périodique à partir des prix des titres cotés en bourse, tout en appliquant deux formules possibles :

- Le rendement arithmétique définie comme la variation relative du prix de l'actif j entre les instants $t-1$ et t :

$$R_{j,t} = \frac{P_{j,t} + C_{j,t} - P_{j,t-1}}{P_{j,t-1}}, \qquad j = 1, \ldots, m; t = 1, , \ldots, T, \tag{1.1}$$

  où : m représente le nombre d'actifs financiers et T le nombre de périodes et

  - $P_{j,t}$: le prix du titre j à la date t,
  - $P_{j,t-1}$: le prix du titre j à la date $t-1$,
  - $C_{j,t}$: le cash flow du titre j à la date t (dividende en cas d'actions).

- Le rendement logarithmique, également appelé rendement géométrique, entre les instants $t-1$ et t :

$$R_{i,t} = Ln(\frac{P_{j,t} + C_{j,t}}{P_{j,t-1}}) \tag{1.2}$$

  L'inconvénient du rendement arithmétique est qu'il n'est pas additif. En effet, son calcul privilégie les deux instants $t-1$ et t, et néglige ainsi l'évolution de la valeur. En supposant un intervalle de temps suffisamment petit, on peut définir un rendement instantané comme étant la valeur moyenne des valeurs prises par l'actif entre les instants t et δt, soit

$$R_{j,t} = Ln(\frac{P_{j,t+\delta t}}{p_t}) \tag{1.3}$$

  d'où , à partir du développement limitée à l'ordre 1 de la fonction Ln :

$$R_{j,t} = Ln(1 + \frac{\delta P_{j,t}}{p_{j,t}}) \approx \frac{\delta P_{j,t}}{p_{j,t}} \tag{1.4}$$

  L'équation (1.4) montre que quand le pas de temps est faible le rendement logarithmique égalise le rendement arithmétique.

Par ailleurs, un portefeuille est défini comme la combinaison d'un ensemble de titres qui possèdent des caractéristiques différentes en matière de valeur et de perception de cash flows. Cette combinaison se fait en des proportions différentes visant à avoir un portefeuille bien diversifié permettant de réaliser un rendement espéré bien déterminé tout en minimisant le risque couru par l'investisseur.

Le rendement d'un portefeuille P, noté R_p, au cours d'une période T n'est autre que la moyenne pondérée des rendements enregistrés pendant la période T des différents titres j qui composent ce portefeuille, sachant que les facteurs de pondération sont des proportions du portefeuille investies dans les différents titres j noté ω_j. Nous avons donc :

$$R_p = \sum_{j=1}^{m} \omega_j R_j \tag{1.5}$$

Le rendement espéré d'un portefeuille peut donc être considéré comme une somme pondérée de variables aléatoires, définies par le produit entre leurs proportions dans le portefeuille et leurs espérances des rendements respectives :

$$E(R_p) = \omega_1 E(R_1) + \omega_2 E(R_2) + \omega_3 E(R_3) + \cdots + \omega_m E(R_m) \tag{1.6}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \omega_j E(R_j) \tag{1.7}$$

En notant $\omega^\top(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ et $\mu = (E(R_1), \ldots, E(R_m))^\top$, l'expression (1.7) s'écrit matriciellement

$$E(R_p) = \omega^\top \mu \tag{1.8}$$

Remarque :
Sauf indication contraire, dans nos futures simulations, nous utiliserons la formule (1.1) pour le calcule des rendements des actions.

1.1.2 La Variance d'un Portefeuille

Markowitz (1952) a supposé que le risque d'un portefeuille est calculé en fonction de sa volatilité, cette volatilité étant définie comme la variance ou l'écart-type des rentabilités. Le choix de de la variance comme mesure de risque suppose que la distribution des rendements est symétrique.

S'agissant du risque, l'investisseur cherche toujours à évaluer le risque *ex ante*. Toutefois, la variance ne peut être calculée que sur des fluctuations passées du taux de rendement. Les études antérieures montrent que empiriquement la volatilité des variations des cours des actifs financiers est relativement stable, ceci donne la possibilité de l'estimation du risque d'un actif à partir de ses données historiques ou *ex post*.
Au centre de la théorie de Markowitz et son corollaire le MEDAF (développé par Sharp (1964)), nous trouvons le postulat suivant : chaque titre comporte un risque qu'on peut décomposer en deux catégories :

- le risque spécifique : la variance des différents actifs, ce risque est d'origine micro-économique (exemple : changement de goût du consommateur, grève dans l'entreprise, poursuite judiciaire)

- le risque systématique : il est lié au mouvement du marché. Il exprime la manière dont le titre est susceptible d'être influencé par les mouvements de l'ensemble de la bourse, et qui peut être déterminé par des corrélations. Ce risque est d'origine macro-économique (exemple : croissance économique, incertitude géopolitique, mouvement de taux d'intérêt)

Ainsi, la variance du portefeuille peut s'écrire :

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{m} \omega_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{j \neq i} \omega_i \omega_j \sigma_{i,j} \tag{1.9}$$

$$= RQ_p + RQ_s. \tag{1.10}$$

où

- $RQ_p = \sum_{j=1}^{m} \omega_j^2 \sigma_j^2$: le risque spécifique.
- $RQ_s = \sum_{j=1}^{m} \sum_{j \neq i} \omega_j \omega_i \sigma_{j,i}$: le risque systématique.

Matriciellement, l'expression (1.9) s'écrit :

$$\sigma_p^2 = \omega^\top V \omega, \tag{1.11}$$

Avec

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}$$

Cependant, par une bonne diversification du portefeuille, le risque spécifique peut être éliminé, et seul le risque systématique subsistera et peut être rémunéré par le marché, soit :

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \neq j} \omega_i \omega_j \sigma_{i,j}. \tag{1.12}$$

De manière équivalente, nous pouvons l'exprimer en fonction du coefficient de corrélation, étant donnée que :

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}.$$

La variance peut donc s'écrire sous cette forme :

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \neq j} \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{1.13}$$

L'expression (1.13) de la variance renseigne sur le lien étroit entre le risque du portefeuille et la corrélation existante entre les rendements des titres qui le constituent.

Généralement, l'écart-type est considéré comme la mesure standard du risque d'un actif financier ou d'un portefeuille et il est déterminé comme la racine carré de la variance.

1.1.3 Les Contraintes Budgétaires

Chaque agent dans l'économie est supposé disposer d'une richesse initiale G_0 qu'il doit investir dans les actifs financiers disponibles. Les caractéristiques de ceux-ci étant définies, le seul problème pour chaque agent est de déterminer les quantités de chaque actif qu'il désire acheter ou vendre. Les prix étant donnés, on peut mesurer ces ventes et ces achats soit par leurs quantités,

soit par leurs valeurs. On peut aussi les mesurer en rapportant les montants de ces opérations à la richesse initiale.

Notons I_j le montant investi dans le titre j et ω_j le ratio obtenu en rapportant I_j à la richesse initiale G_0. Si l'agent investit dans le titre j alors $I_j > 0$. ω_j correspondra alors à la proportion de richesse investie dans le titre j :

$$\omega_j = \frac{I_j}{G_0}. \tag{1.14}$$

Sur le marché financier, un gestionnaire de portefeuille est confronté à un ensemble de contraintes qui peuvent être imposées par des mouvements économiques et financiers touchant le marché boursier ou bien son client tout en exprimant ses attentes et ses attitudes vis-à-vis du risque. Celles-ci peuvent notamment autoriser ou non les ventes à découvert, c'est-à-dire la vente de titres financiers que l'on ne possède pas.

Dans le cadre abstrait de la théorie du portefeuille, où les titres financiers ne sont que des promesses de livraison de revenus futurs, la vente à découvert d'un titre revient à promettre de livrer les revenus du titre vendu.

Dans la réalité, la vente à découvert consiste à vendre un actif que l'on ne détient pas le jour où cette vente est négociée mais qu'on se met en mesure de détenir le jour où sa livraison est prévue. L'actif vendu à découvert est généralement un titre, mais on peut aussi vendre à découvert des devises ou des matières premières. Si la valeur de l'actif baisse après la vente à découvert, le vendeur peut le racheter au comptant et dégager une plus-value. Le gain potentiel est limité à la valeur de l'actif. Si la valeur de l'actif augmente, le vendeur s'expose à un risque de perte illimitée, tandis qu'un acheteur ne peut pas perdre plus que sa mise de fond. C'est une une procédure relativement rare notamment en raison de son coût. Celui-ci découle des appels de marge, et des mises en garantie exigées par les chambres de compensation pour couvrir les positions.

Dans le cadre de la théorie du portefeuille, on suppose que les marchés sont suffisamment parfaits pour permettre les ventes à découvert. La seule contrainte financière supportée par les agents est donc la contrainte budgétaire.

Pour chaque montant I_j ou pour chaque part ω_j, on peut distinguer les achats des ventes en introduisant les notations suivantes :

- les mesures des achats :

$$I_j^+ = Max(I_j, 0), \qquad \omega_j^+ = Max(\omega_j, 0)$$

- les mesures des ventes :

$$I_j^- = -Max(I_j, 0), \qquad \omega_j^- = -Max(\omega_j, 0)$$

Pour financer les achats, chaque agent peut utiliser soit sa richesse initiale, soit la recette tirée des ventes à découvert. La contrainte de valeurs s'écrit :

valeur des achats = richesse initiale + recette des ventes.

Avec les notations utilisées au dessus, on a donc :

$$\sum_j I_j^+ = G_0 + \sum_j I_j^- \quad \text{ou encore} \quad \sum_j \omega_j^+ G_0 = G_0 + \sum_j \omega_j^- G_0.$$

En éliminant G_0, on obtient :

$$\sum_j \omega_j^+ - \sum_j \omega_j^- = 1,$$

et pour chaque titre, nous avons

$$\omega_j^- - \omega_j^- = \omega_j$$

Remarques :

1. la vente à découvert freine la formation de bulle spéculative à la hausse sur un titre, elle permet aussi de profiter de nouvelles opportunités durant des périodes peu propices à l'appréciation des cours des titres boursiers. Elle est aussi considérée comme un instrument de market-maker dont le sens où elle permet aux acteurs économiques de prendre des positions sur des titres sans être contraints de les posséder, ce qui augment la liquidité du marché. Toutefois, cette pratique présente un danger dans le cas où les cours contrairement aux anticipations augmentent, l'investisseur étant obligé de racheter sa position subira des pertes énormes,

2. il existe d'autres contraintes liés à la pratique de la vente à découvert telles que les contraintes de seuil d'achat et les contraintes de cardinalité :

   - les contraintes de seuil d'achat : Ce sont des contraintes qui nous empêchent d'avoir de très petits investissements dans les actifs,
   - les contraintes de cardinalité : Ce sont des contraintes qui nous obligent à choisir un nombre limité d'actifs parmi les actifs disponibles.

     La présence de ces contraintes rend le problème d'optimisation non convexe et par conséquent très difficile à résoudre.

     Les contraintes de vente à découvert, de seuil d'achat et de cardinalité ont été largement étudiées par Eastman (1951), Chang et al (2000), Mitra et al (2001) et Fernandez et Gomez (2007). La plupart des méthodes utilisées sont basées sur des heuristiques et des algorithmes génétiques.

1.1.4 Le Critère de Choix en Situation d'Incertitude

1.1.4.1 La Notion du Risque et d'Utilité

Le risque et l'incertitude sont à l'origine d'un manque de contrôle total, dû à la présence des variables qui sont au-delà du contrôle de l'individu lors de la prise d'une décision. Cependant, l'incertitude est un fait qu'il faut apprendre à gérer. Le problème, en finance, est que lors de la réalisation d'un choix en matière d'investissement, nous ne pouvons jamais connaître les flux futurs avec certitude. Étant donné que l'investisseur opère son choix en matière de placement en situation d'incertitude, celui-ci ne va pas se contenter uniquement de critère de la maximisation de l'espérance du gain mais il va aussi tenir compte de son attitude face au risque qui aura un poids très important lors d'une décision de construction d'un portefeuille d'actifs financiers connue sous le nom de l'*aversion* vis-à-vis du risque. Afin de mieux comprendre le rôle et l'importance de l'aversion pour le risque dans les processus de décision, une attention particulière a notamment été prêtée à la théorie de l'utilité qui a pour objectif de bâtir un descriptif bien précis sur le comportement d'un agent dans le cadre d'un univers incertain. Dans

un ouvrage fondamental, Von Neumann et Morgenstern (1944) démontrèrent formellement que tout individu obéissant à quelques axiomes intuitifs de rationalité cherche à maximiser, non pas l'espérance de sa richesse, mais l'espérance de l'utilité de celle-ci. La fonction d'utilité $U(.)$ traduit les préférences de chaque individu, lui est spécifique, et dépend notamment de sa richesse initiale au moment de la décision et de son aversion au risque. Autrement dit, confronté à un ensemble d'alternatives dont les résultats sont aléatoires, l'individu choisira celle dont l'utilité espérée est la plus élevée. La forme de la fonction d'utilité des individus est de nature à refléter l'attitude envers la prise du risque. Elle permet notamment de démontrer combien d'utilités ou de "désutilités" supplémentaires une personne est susceptible d'acquérir avec la hausse ou la baisse de son revenu ou de sa richesse.

1.1.4.2 Caractérisation d'une Fonction d'Utilité

La fonction d'utilité U permet donc de mesurer la satisfaction qu'un investisseur associe à un niveau donné de sa richesse. Cette fonction préserve l'ordre entre paniers de consommation engendré par les préférences. Elle satisfait :

- si le consommateur est indifférent entre le panier X et le panier Y, alors l'utilité associée aux deux paniers est égale : $U(X) = U(Y)$,
- elle est croissante avec la richesse (on désire toujours être plus riche) : si le consommateur préfère strictement le panier X au panier Y, alors l'utilité associée au panier X est strictement plus grande que celle associée au panier Y : $U(X) > U(Y)$,
- elle est concave (le taux de croissance est de plus en plus petit à mesure que la richesse est plus grande) ; c'est cette concavité qui traduit, sur le plan mathématique, l'aversion à l'égard du risque.

On distingue trois types d'utilité :

1. **l'utilité ordinale** : une fonction d'utilité ordinale est une fonction préservant l'ordre de préférence sur les paniers de consommation par leur montant d'utilité mais ne permet aucune comparaison de la valeur relative des paniers entre eux,
2. **l'utilité cardinale** : une fonction d'utilité cardinale respecte l'ordre de préférence et impose en outre que les niveaux d'utilité permettent une évaluation relative des paniers des biens entre eux,
3. **l'utilité marginale** : une fonction d'utilité marginale d'un bien mesure l'utilité supplémentaire ressentie à la consommation d'une unité supplémentaire de ce bien. Elle est évaluée par la dérivée partielle de la fonction d'utilité par rapport à la quantité consommée de ce bien.

La construction de la fonction d'utilité d'un investisseur se base sur deux hypothèses fondamentales qui sont :

1. l'utilité marginale de la richesse est toujours positive de sorte que l'utilité est fonction monotone croissante de la richesse

$$\frac{dU(G)}{dG} > 0, \tag{1.15}$$

   où G la richesse obtenue par l'investisseur,

2. dans toutes les prises de décision, les agents économiques cherchent toujours à maximiser leur utilité espérée (principe de rationalité).

Grâce aux études de Friedmann et Savage (1948), un lien a été mis en évidence entre le comportement de l'investisseur vis-à-vis du risque et le signe de la dérivée seconde de la fonction d'utilité. Il en découle les conséquences suivantes.

1. **Neutralité vis-à-vis du risque :** Dans ce cas, la prime de risque est nulle. Il s'agit des personnes qui sont prêtes à accepter le risque aussi longtemps que la distribution de probabilité leur dit qu'ils ne vont pas perdre en moyenne.
   Ces personnes ne prêtent pas attention à l'éventail des résultats possibles mais seulement au gain et à la perte en moyenne.
   Dans ce cas, la dérivée seconde de la fonction d'utilité sera nulle $\frac{d^2U(G)}{dG^2} = 0$. La fonction d'utilité est, dans ce cas, linéaire reflétant une utilité marginale de la richesse qui est constante,

2. **Concavité et aversion pour le risque :** Si la prime de risque est supérieure à zéro, l'agent est, dans ce cas, *risquophobe* ou averse au risque. La courbe d'utilité d'un tel individu présente une concavité vers le bas. En effet, plus cet individu s'enrichit, moins il accorde de l'utilité à une unité supplémentaire de richesse. En d'autres termes, son utilité marginale de richesse est décroissante.
   Dans une telle situation, la dérivée seconde de la fonction d'utilité par rapport à la richesse sera négative $\frac{d^2U(G)}{dG^2} < 0$. La courbe de la fonction d'utilité, dans ce cas, aura sa concavité tourner vers le bas.

3. **Convexité et préférence pour le risque :** Si la prime de risque est négative , l'agent est preneur de risque. La courbe d'utilité d'un tel individu présente sa convexité vers le haut. En effet, plus cet individu s'enrichit, plus il accorde de l'utilité à une unité supplémentaire de richesse. En d'autres termes, son utilité marginale de richesse est croissante.
   Ce cas s'exprime par une dérivée seconde positive de la fonction d'utilité de l'agent par rapport à la richesse $\frac{d^2U(G)}{dG^2} > 0$. La courbe de la fonction d'utilité, dans ce cas, aura sa concavité tourner vers le haut.

1.1.5 L'Efficience des Marchés

L'hypothèse d'efficience du marché a été développée par Eugène Fama entre les années 50 et 60. Cette hypothèse part du principe que lorsqu'un marché est suffisamment développé et que les informations sur ce dernier sont connues par tous les acteurs, ces derniers, étant rationnels, réagissent presque instantanément et de façon correcte.

Conformément à la définition donnée par Fama (1970), l'efficience du marché représente une situation où les prix des actifs financiers reflètent toute l'information disponible.

En vertu de cette hypothèse, les acteurs (investisseurs et managers dans une égale mesure) seraient plutôt rationnels et les prix des actifs financiers (actions, obligations) seraient *efficients*. Ces derniers seraient donc égaux à leurs valeurs fondamentales, soit du fait de la rationalité des investisseurs, soit du fait des arbitrages qui feraient disparaître toute anomalie de prix.
Selon, Jensen (1978) : *un marché est efficient, conditionnellement à un ensemble d'informations, s'il est impossible de réaliser des profits anormaux en spéculant sur la base de cet ensemble d'informations*.
Malkiel (2003) a également défini les marchés efficients comme suit : *les marchés financiers efficients ne permettent pas aux investisseurs de réaliser des gains supérieurs à la moyenne sans accepter de prendre des risques supérieurs à la moyenne*.

Trois formes d'efficience sont traditionnellement distinguées selon l'information disponible, supposée être reflétée dans les prix des actifs :

1. **l'efficience faible** : cette forme d'efficience suppose que toute l'information peut être déduite de l'historique des prix. 0n trouve cette notion généralement dans l'analyse chartiste,

2. **l'efficience semi forte** : un marché est dit efficient sous sa forme semi forte quand les investisseurs dans leurs choix de portefeuille se basent non seulement sur l'historique des prix mais également sur les informations publiques telles les statistiques, les bilans, analyse fondamentale,. . .

3. **l'efficience forte** : un marché est dit fortement efficient, lorsque toutes les informations sont publiques.

Signalons que l'utilisation de fonctions d'utilité générale s'avère souvent complexe et ne conduit pas à des solutions analytiques. C'est la raison pour laquelle Markowitz simplifia le problème du choix dans l'incertain de l'investisseur afin de le résoudre de manière simple et explicite.
Dans ce qui suit, nous allons exposer les modèles de base de choix de portefeuille en mettant l'accent sur leurs hypothèses ainsi que sur les insuffisances qu'ils présentent.

1.2 Le Modèle Moyenne-Variance de Markowitz (1952)

La théorie moderne du portefeuille est née en 1952 avec la publication de l'article fondateur de Harry Markowitz. En partant du postulat que le risque d'un portefeuille peut être correctement mesuré par la variance de sa rentabilité, Markowitz explicite et formalise le dilemme fondamental de la finance moderne : obtenir une rentabilité faible mais certaine, ou accepter de prendre un risque dans l'espoir d'accroître cette rentabilité, l'espérance de rentabilité étant d'autant plus élevée que le risque est important. Il formalise et quantifie également l'effet de diversification selon lequel une combinaison judicieuse de nombreux actifs dans un portefeuille permet de réduire le risque total subi pour un taux de rentabilité espérée donné. Les travaux de Markowitz devaient s'avérer extrêmement importants et modifier profondément la façon de concevoir les problèmes financiers. Ils montrent, en particulier, que l'intérêt d'investir dans un titre financier ne doit pas être évalué séparément mais dans le cadre de l'ensemble du portefeuille constitué par l'investisseur et d'un marché concurrentiel où de nombreux véhicules d'épargne (actions, obligations, dépôts à terme, immobilier, foncier, etc.) sont en compétition.

L'investisseur est alors présumé prendre ses décisions en fonction seulement de deux paramètres : l'espérance de sa richesse qu'il souhaite la plus grande possible, et sa variance qu'il désire la plus faible possible. Ce portefeuille est dit *efficace*.
L'ensemble de tous les portefeuilles efficaces constitue la frontière efficace, encore appelée frontière efficiente de Markowitz.
Cette approche a offert le premier traitement systématique d'un dilemme auquel les investisseurs font face : objectifs contradictoires entre avoir des profits élevés et un risque faible. En traitant, cette question fondamentale, Markowitz a fourni un modèle d'optimisation paramétrique et quadratique , qui était à la fois général et assez simple pour une analyse théorique et une solution explicite.

Bénéficiant de l'effet de diversification du risque, ces portefeuilles dominent les titres individuels et constituent l'ensemble des choix, au sein duquel l'investisseur sélectionne finalement le portefeuille optimal, en fonction de son attitude particulière face au risque. Ainsi, un investisseur prudent choisira un portefeuille moins risqué, mais également moins rentable.

1.2.1 Hypothèses

1.2.1.1 Les Hypothèses Relatives aux Actifs Financiers

- Hypothèse 1 :
  Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque : le rendement R_j d'un actif financier j pour toute une période future est par conséquent une variable aléatoire, dont ont fait l'hypothèse qu'elle est distribuée selon une loi normale, c'est à dire une distribution symétrique stable entièrement définie par deux paramètres : l'espérance mathématique $\mu = E(R_j)$ du rendement et l'écart-type $\sigma = \sigma(R_j)$ de la distribution de probabilité du rendement.

- Hypothèse 2 :
  Les rendements des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres : ils sont corrélés (($cov(R_i, R_j) \neq 0$ ou $\rho_{ij}(R_i, R_j) = \frac{cov(R_i,R_j)}{\sigma_{R_i}\sigma_{R_j}} \neq 0$, ρ_{ij} est le coefficient de corrélation des rendements des actifs i et j).

- Hypothèse 3 :
  Les marchés sont parfaits : toutes les conditions pour que les prix correspondent à la réalité du moment sont réunies. L'entrée et la sortie sont libres et sans coût. L'information circule de manière totalement transparente. La concurrence est parfaite entre les acteur composant le marché, il y a absence totale d'impôt, ...

1.2.1.2 Les Hypothèses Relatives aux Comportements des Investisseurs

- Hypothèse 1 :
  Le comportement des investisseurs est caractérisé par un degré plus ou moins prononcé d'aversion vis-à-vis du risque. Ce dernier est mesuré par l'écart-type de la distribution de la probabilité du rendement.

- Hypothèse 2 :
  Les investisseurs sont rationnels : bien que leur fonction de préférence soit purement subjective, ils opèrent, en référence à celle-ci, des choix strictement transitifs. Autrement,

leur comportement est caractérisé par un degré plus ou moins prononcé d'aversion au risque.

- Hypothèse 3 :
  Tous les investisseurs ont le même horizon de décision, qui comporte une seule période. Cette simplification, qui peut paraitre exagérée, permet de mettre en œuvre un modèle de décision qui tient compte du caractère hautement combinatoire du portefeuille.

1.2.2 Détermination du Portefeuille Optimal

Sous ces hypothèses, un portefeuille p composé de m actifs risqués est caractérisé par une rentabilité espérée $E(R_p)$ et une variance $\sigma^2(R_p)$.

L'idée de Markowitz était de résoudre l'un des problèmes d'optimisation suivants :

$$Min_\omega \sigma^2(R_p) = Min_\omega \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \tag{1.16}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_i E(R_j) = E^* \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases} \tag{1.17}$$

ou

$$Max_\omega E(R_p) = Max_\omega \sum_{j=1}^{m} \omega_j E(R_j) \tag{1.18}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = V^* \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases} \tag{1.19}$$

E^* (respectivement V^*) est un rendement cible (respectivement un risque) donné.

Matriciellement, et en absence de contraintes de positivité, le programme d'optimisation (1.16) s'écrit comme suit :

$$Min_\omega \omega^\top M \omega \tag{1.20}$$

$$\text{sous contraintes} \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j & = & 1 \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j \mu_j & = & E^* \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème ordinaire de minimisation avec des contraintes d'égalité. Le problème se résout par la méthode de Lagrange et tenant compte du fait que la matrice de variance-covariance M est définie positive. Elle est donc non singulière et inversible.

La fonction de Lagrange se définit comme suit :

$$L(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \omega^\top M \omega - \lambda_1(E^* - \omega^\top \mu) - \lambda_2(1 - \omega^\top \mathbf{1}), \tag{1.21}$$

(λ_1, λ_2) est appelé vecteur des multiplicateurs de Lagrange.

Les conditions du second ordre sont satisfaites car la matrice M est semi définie positive. Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre entrainent :

$$\frac{\partial L(\omega, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \omega} = M\omega - \lambda_1 \mu - \lambda_2 \mathbf{1} = 0. \tag{1.22}$$

Par conséquent :

$$\omega = \lambda_1 M^{-1}\mu + \lambda_2 M^{-1}\mathbf{1}.$$

Les deux contraintes nous permettent de déterminer λ_1 et λ_2 :

$$\begin{aligned}\omega^\top \mathbf{1} &= 1 = \lambda_1 \mathbf{1}^\top M^{-1} E^* + \lambda_2 \mathbf{1}^\top M^{-1}\mathbf{1}\\ \omega^\top \mu &= E^* = \lambda_1 \mu^\top M^{-1}\mu + \lambda_2 \mu^\top M^{-1}\mathbf{1}\end{aligned}$$

Posons : $a = \mu^\top M^{-1}\mu$, $b = \mu^\top M^{-1}\mathbf{1}$ et $c = \mathbf{1}^\top M^{-1}\mathbf{1}$,

le système devient :

$$\begin{cases} \lambda_1 b + \lambda_2 c &= 1\\ \lambda_2 a + \lambda_2 b &= E^*,\end{cases}$$

En résolvant ce système d'équation à deux inconnues, on trouve

$$\lambda_1 = \frac{E^* c - b}{ac - b^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{a - E^* b}{ac - b^2}$$

En substituant (λ_1 et , λ_2), on trouve l'expression de ω :

$$\omega^* = \frac{cE^* - b}{ac - b^2} M^{-1}\mu + \frac{a - bE^*}{ac - b^2} M^{-1}\mathbf{1} \tag{1.23}$$

Le portefeuille efficient est combinaison linéaire de deux portefeuilles :

- portefeuille de variance minimale,ω_v,
- portefeuille tangent, ω_{tang} qui maximise le rendement espéré.

On démontre que

$$\omega_v = \frac{M^{-1}\mathbf{1}}{c} \qquad \omega_{tang} = \frac{M^{-1}\mu}{b},$$

il en découle que

$$\omega^* = \frac{(E^* b - b^2/c)}{d}\omega_{tang} + \frac{(a - bE^*)}{d}\omega_v, \tag{1.24}$$

où $d = a - b^2/c$.

Ainsi, la variance peut être déterminée en remplaçant l'expression (1.23) dans l'équation (1.20) :

$$\sigma^{2*} = \frac{cE^{*^2} - 2bE^* + a}{ac - b^2} \tag{1.25}$$

Remarque

En présence de contraintes d'inégalité (par exemple contrainte d'interdiction de vente à découvert : $\omega_j \geq 0$), le programme d'optimisation devient plus compliqué. En 1959, Markowitz a mis au point l'algorithme dit *de la ligne critique* pour résoudre ce problème. Cet algorithme permet de déterminer la frontière efficiente lorsque le champs de variations des ω_j est limité par des contraintes de type $l_{j,l} < \omega_j < l_{j,u}$, $l_{j,l}$ et $l_{j,u}$, étant respectivement les bornes inférieure et supérieure imposées à la proportion du titre j. C'est le cas quand on interdit la vente à découvert ou quand les ω_j ne doivent pas dépasser un certain pourcentage.

La solution comportera :

- des valeurs de ω_j qui seront égales à leur borne inférieure. Nous dirons de ces variables de décision qu'elles sont down ou qu'elles ont un *statut down*, en d'autres termes $\frac{\partial L}{\partial \omega_j} > 0$

- des valeurs de ω_j qui se situeront entre leurs bornes inférieure et supérieure, ces ω_j ont un *statut in*, ce qui signifie $\frac{\partial L}{\partial \omega_j} = 0$,

- des valeurs de ω_j qui atteindront leur borne supérieure, ces ω_j ont un *statut up*. Dans ce cas $\frac{\partial L}{\partial \omega_j} < 0$.

L'idée de l'algorithme est de rapporter des modifications dans l'équation (1.22) en fonction du statut des ω_j

- si ω_j a un statut down, il faudra remplacer dans la i ème ligne $\frac{\partial L}{\partial \omega_j}$ par $l_{j,l}$

- si ω_j a un statut up, il faudra substituer dans la i ème ligne $\frac{\partial L}{\partial \omega_j}$ par $l_{j,u}$

- si ω_j a un statut in, la ième ligne demeure inchangée

Après avoir apporté les transformations nécessaires , il suffit de résoudre le problème par la méthode de Lagrange déjà présentée. D'amples détails sur le déroulement de cette méthode se trouvent dans le livre *Gestion de portefeuille* écrit par Broquet et al (2004), Andras et Daniel Niedermayer (2010).

En définitive, la résolution de l'un des deux problèmes (1.16) et (1.18), et la variation de E^*, permettent d'identifier les différents portefeuilles efficients bénéficiant de l'effet de diversification du risque. Ceci nous permet de déterminer la frontière efficiente.

1.2.3 Frontière et Portefeuille Efficients

Les gains de diversification proviennent de la corrélation qui peut exister entre les rendements des différents actifs. Si on combine tous les titres risqués disponibles de toutes les manières possibles, on obtient l'ensemble des portefeuilles possibles caractérisés par un taux de rentabilité de moyenne $E(R_p)$ et d'écart-type $\sigma(R_P)$.
Parmi tous ces portefeuilles figure le *portefeuille de marché* qui comprend tous les titres risqués pondérés par leur capitalisation. Le portefeuille de marché a une rentabilité R_M, de moyenne $E(R_M)$ et d'écart-type $\sigma(R_M)$.
On déclare *efficients* les portefeuilles caractérisés par une espérance de rentabilité μ maximum à variance σ^2 donnée (ou par une variance minimum pour une espérance de rentabilité donnée, sachant que cette dernière doit être supérieure ou égale à celle du portefeuille ayant la plus petite variance). La *frontière efficiente* est l'ensemble de tous les portefeuilles efficients. Elle prends deux formes différentes, selon l'absence ou la présence d'un actif à rendement sans risque, typiquement un titre d'état (bon de trésor).
Deux cas sont donc à considérer :

- En l'absence d'un tel actif, l'ensemble des points représentant les portefeuilles possibles dans l'espace (σ, μ) est constitué par la surface grisée de la Figure (1.1) délimitée par une hyperbole. Cependant, seuls sont efficients les portefeuilles situés sur la branche supérieure de l'hyperbole. Cette courbe est la *frontière efficiente de Markowitz.*

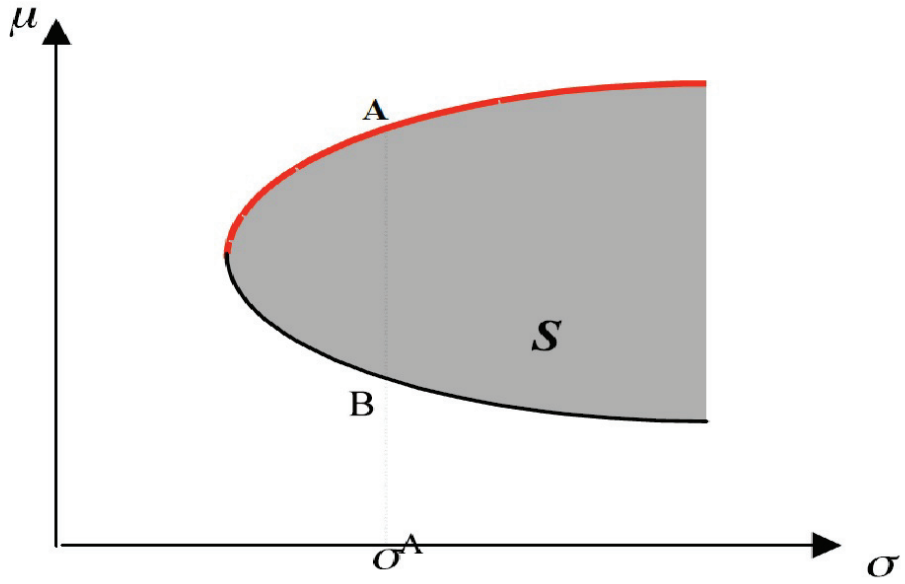

Figure 1.1: *Frontière efficiente de Markowitz en l'absence de l'actif sans risque*

Par une diversification appropriée, l'investisseur peut réduire sensiblement son risque sans sacrifice de rentabilité espérée. Toutefois, il faut malheureusement accepter de prendre plus de risque (bien diversifié tout de même) pour augmenter la rentabilité espérée du portefeuille, la relation entre ces deux grandeurs n'étant pas linéaire. Le fait qu'une augmentation d'espérance de rentabilité nécessite une prise de risque supplémentaire constitue, après la diversification, l'un des concepts les plus importants de la finance.

- En présence d'un actif sans risque, l'investisseur peut prêter (et, parfois, emprunter) au taux d'intérêt du marché. Un portefeuille investi intégralement dans cet actif est représenté sur la Figure (1.2) par le point d'abscisse nulle et d'ordonnée Risk-Free rate qu'on notera désormais r.

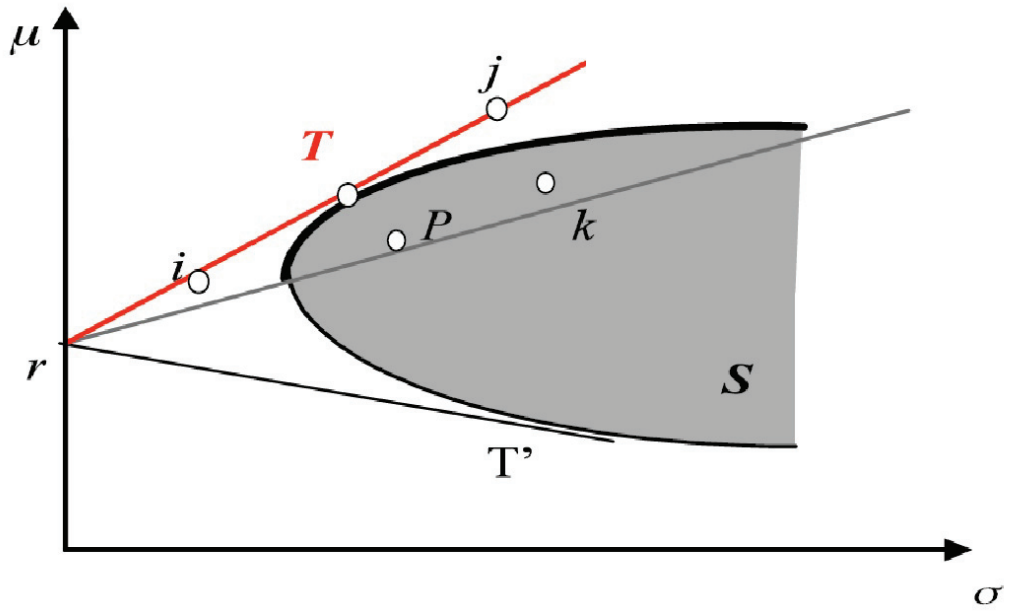

Figure 1.2: *Frontière efficiente en présence de l'actif sans risque (Tobin 1958)*

De ce qui précède, on peut extraire les résultats très importants suivants (Poncet 2004) :

- La frontière efficiente devient la demi-droite tangente à l'hyperbole de Markowitz passant par le point r. T (super efficient portfolio) est le portefeuille efficient tangent et ne comprend que des actifs risqués. L'équation de cette droite , dite *Capital Market Line* est la suivante :

$$\mu_p = r + \left(\frac{\mu_T - r}{\sigma_T}\right)\sigma_p. \tag{1.26}$$

  On note :

  - *ratio Sharp* du portefeuille l'expression $\frac{\mu_p - r}{\sigma_p}$,
  - *ratio Sharp* du titre risqué l'expression $\frac{\mu_T - r}{\sigma_T}$.

  L'équation (1.26) traduit le surplus de rentabilité obtenu par rapport à l'actif sans risque pour un niveau de risque supplémentaire donné. Les portefeuilles situés sur la Capital Market Line deviennent alors les portefeuilles efficients, dans lesquels devrait investir tout individu rationnel.

  La frontière efficiente "singulière" est donc la demi droite qui relie le titre sans risque au portefeuille d'actifs risqués ayant le ratio de Sharpe $\frac{\mu_T - r}{\sigma_T}$ le plus élevé (portefeuille tangent). L'actif sans risque se situe normalement sur l'axe des ordonnées puisque comme son nom l'indique, son risque est nul. Il présente d'ailleurs à ce titre une corrélation nulle avec l'ensemble des actifs risqués. Le portefeuille de marché est le portefeuille le mieux diversifié, et correspond au point de tangence entre la frontière de Markowitz et la Capital Market Line. Il en découle :

- tout portefeuille efficient peut être obtenu par combinaison de deux portefeuilles : l'actif sans risque (considéré comme un portefeuille) et le portefeuille tangent T. Si les poids respectifs de r et de T sont positifs, le portefeuille efficient P résultant est situé sur le segment $[r, T]$. Si le poids affecté à l'actif sans risque est négatif (caractérisant un emprunt, ce qui n'est pas toujours possible en pratique), la frontière efficiente est toute la demi-droite issue du point r,

- pour les portefeuilles efficients, c'est-à-dire bien diversifiés, la relation entre rentabilité espérée et risque est linéaire, résultat justifiant par sa simplicité l'adoption de l'écart-type plutôt que de la variance comme mesure de risque,

- De plus, cette frontière efficiente domine en tous points (sauf un, le point de tangence T) la frontière efficiente de Markowitz puisqu'elle est située au nord-ouest de l'hyperbole dans le plan (σ, μ)). Le compromis risque-rentabilité est non seulement linéaire, il est plus favorable à l'investisseur,

- le résultat fondamental selon lequel tous les portefeuilles efficients sont des combinaisons de l'actif sans risque et du portefeuille tangent est appelé théorème de séparation en deux fonds (ou Tobin) » : bien que $m + 1$ titres différents (m risqués et un sans risque) soient présents sur le marché, tous les portefeuilles efficients se construisent à partir des mêmes deux portefeuilles (r et T). Les investisseurs ayant le même horizon d'investissement et les mêmes convictions quant aux espérances, variances et covariances des titres (ils font face à la même frontière efficiente) détiennent alors tous une combinaison du même portefeuille d'actifs risqués T et de l'actif sans risque. Seuls les poids qu'ils allouent à T et à r dans cette combinaison dépendent de leur aversion au risque et de leur richesse. Un individu prudent allouera un poids faible au portefeuille d'actifs risqués T et un poids élevé à l'actif sans risque (il choisira un portefeuille tel que i sur la figure 2) alors qu'un investisseur moins craintif affectera un poids élevé à T et un poids faible à r. Il peut même choisir de s'endetter (poids négatif sur l'actif sans risque) pour investir dans T davantage que sa richesse initiale et construira un portefeuille tel que j sur la figure 2,

- ce théorème de séparation en deux fonds est très important en pratique car il justifie l'existence des SICAV et FCP : deux fonds quelconques bien gérés (dont l'un est investi intégralement dans des actifs sans risque et l'autre dans des actifs risqués bien diversifiés) suffisent à satisfaire les exigences de tous les investisseurs ayant des préférences pour les deux premiers moments et ayant le même horizon d'investissement ; ces derniers simplement les combinent différemment selon leur richesse et aversion au risque.

Pour plus de détails, le lecteur peut regarder les publications de Tobin (1958), Black (1972) et de Poncet (2004).

1.2.4 Frontière Efficiente et Paramètre d'Aversion

Il est possible de construire la frontière efficiente des actifs risqués avec un paramètre d'aversion au risque et ce à l'aide d'une formulation différente mais couramment utilisée en pratique. La frontière efficiente des actifs risqués est construite en maximisant l'utilité d'un investisseur rationnel qui sera caractérisée par un paramètre d'aversion au risque $\gamma > 0$, d'où le programme

d'optimisation suivant :

$$Max_{\omega} L(\omega) = \omega^{\top}\mu - \frac{\gamma}{2}\omega^{\top}M\omega \tag{1.27}$$

Plus l'individu est averse au risque, moins le portefeuille maximisé est risqué. La maximisation sans contraintes de cette fonction a pour solution les poids optimaux ω^* déterminés comme suit :

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = \mu - \gamma M = 0 \Leftrightarrow \omega^* = \frac{1}{\gamma}M^{-1}\mu \tag{1.28}$$

En outre,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \omega^2} = -\gamma M < 0$$

La dérivée seconde de L par rapport à ω est négative , donc la fonction L est maximale pour

$$\omega^* = \frac{1}{\gamma}M^{-1}\mu. \tag{1.29}$$

La frontière efficiente est obtenue en faisant varier le paramètre γ d'aversion au risque.

1.2.5 Les Inconvénients de l'Analyse Moyenne-Variance

Comme nous l'avons dit précédemment, la gestion quantitative des portefeuilles est née avec les travaux de Markowitz (1952) qui ont précisé et formalisé les notions de diversification et d'efficience pour donner naissance à un modèle attrayant, simple et flexible d'un point de vue théorique.

Mais, le cadre d'analyse Moyenne-Variance impose l'utilisation d'une fonction d'utilité quadratique et ne tient pas compte de l'aversion à l'égard du risque des investisseurs. Or, il n'est pas du tout évident qu'une fonction d'utilité de type quadratique modélise, au mieux, les préférences de tous les investisseurs.

En pratique, ce modèle est intensivement utilisé pour contrôler le risque et évaluer les portefeuilles. Cependant, le champ d'application du critère Moyenne-Variance est limité parce qu'il est basé sur la variance comme mesure de risque. En effet, cette dernière n'est pas constante au cours du temps puisqu'elle est fondée sur les taux de rendement qui sont plus élevés au moment des crises et faibles lorsque le marché boursier est immobile. De même qu'elle ne donne pas de l'importance aux valeurs négatives des rendements parce qu'elle analyse les pertes et les gains de la même manière.

La représentation du risque associé à une action par la variance de son rendement ou l'écart-type, prend en compte des écarts positifs et des écarts négatifs. Une variance importante correspond à la possibilité d'observer des valeurs de rendement très distantes du rendement espéré, aussi bien de très petites valeurs (gains faibles voir pertes) que de très grandes valeurs (gains importants). Or le risque financier est un risque de perte et non pas un risque de gain. Les investisseurs n'ont pas la même attitude face à leurs erreurs d'anticipations. Ils sont satisfaits des résultats meilleurs que prévus mais souhaitent éviter les résultats plus mauvais que prévus (Lee et al (2008)).

Des études récentes ont montré que les pertes sévères ne sont pas rares puisque les distributions des rendements d'actifs financiers sont asymétriques et à queue épaisse (l'hypothèse

de normalité est rejetée). De ce fait, des scénarios indésirables et des pertes catastrophiques ne peuvent pas être pris en compte seulement par la variance.

L'hypothèse de la normalité dans le modèle classique de Markowitz a été mise à mal par Mandelbrot (1963). Il a démontré que la loi normale ne correspond pas à la réalité du marché (voir plus loin), parce qu'elle sous-estime les risques extrêmes. Nassim Nicholas Taleb, philosophe du hasard et de l'incertitude et ancien trader, est allé jusqu'à traiter Markowitz de charlatan. Il a montré dans sa thèse de doctorat en 1998 que tout ce qui dépend du calcul d'inspiration gaussienne ne marche pas. Ce reproche a été confirmé dans plusieurs autres articles notamment l'hypothèse de normalité a été aussi mise en cause par Blattberg et Gonedes (1974), Kon (1984), Myer et Webb (1991), Mills (1995), Graff et Young (1996), Campbell (1997), Peiro (1999), Harvey et Siddique (1999, 2000), Premaratne et Bera (2000) et Colman et Mansour (2005).

De ce fait, ces scientifiques ont remis totalement en question la validité de la théorie de Markowitz et ses dérivées et applications comme le MEDAF de William F. Sharpe (1964) ou le modèle de Black-Scholes-Merton (1973). Ils considèrent que ces théories (très peu réalistes) issues de l'école de Chicago, si belles soient-elles en apparence et si simples dans leur application, cohérentes de point de vue mathématique, reposent sur des hypothèses néoclassiques qui simplifient à outrance la réalité au point de s'en éloigner complètement. Elles ont été plusieurs fois remises en cause lors, notamment, des différents krachs boursiers qu'elles ont été incapables de prévoir.

Le problème fondamental provient donc du fait que ces théories sont fondées sur la distribution normale (loi de Gauss), qui sous-estime très fortement les événements « improbables » comme les crises ou les krachs alors qu'ils sont finalement beaucoup moins rares que cette loi ne le prévoit, les variables financières ne se répartissant pas autour de la moyenne mais se distribuant sur les deux extrêmes. Il est vrai que l' hypothèse fonctionne extrêmement bien pour des titres très liquides comme les actions et les obligations par exemple. En revanche, la normalité des rendements est beaucoup moins évidente en matière immobilière. Il est donc préférable d'utiliser les lois de puissance, dont la loi de Pareto est un cas particulier, pour appréhender le hasard ou les valeurs extrêmes atteintes par les variables financières lors des crises.

De même, Michaud (1989), Black et Litterman(1992) et Maillet et al (2014) ont montré que les fonctions objectifs à optimiser du modèle de Markowitz maximisent les erreurs (d'estimation). En effet, les rendements espérés ainsi que les variances et les covariances sont sujets à des erreurs d'estimation puisqu'il n'existe aucune estimation exacte et correcte de ces dernières. Les fonctions objectifs de Markowitz sur-pondèrent les titres à rendements espérés élevés et corrélations négatives et sous-pondèrent ceux à rendements espérés faibles et corrélations positives. Ces titres, sont selon Michaud (1989), les plus susceptibles d'être soumis à d'importantes erreurs d'estimation.

Michaud (1989), a montré également que l'utilisation des données historiques pour calculer la moyenne de l'échantillon et estimer par la suite le rendement espéré par cette moyenne ne semble pas être efficace. En effet, il affirme que cette ligne d'action contribue largement aux erreurs de maximisation du modèle moyenne variance. Black Littermann (1992) ont prouvé également que les estimateurs historiques sont souvent de mauvais prédicteurs du comportement futur.

Best et Grauer (1991) ont constaté que le modèle Moyenne-Variance est généralement instable, ce qui signifie que le moindre changement de paramètres d'entrée du modèle pourrait changer radicalement la composition du portefeuille. Le modèle n'est pas donc robuste, ce qui constitue sa principale défaillance. Michaud (1989) a considéré que la matrice de covariance est l'élément principal responsable de la non-robustesse du modèle. La matrice de covariance est souvent estimée à partir des données, mais cette procédure d'estimation peut produire des matrices qui sont presque singulières ou singulières. Cela pose des problèmes lors de l'inversion de la matrice au cours de la procédure d'optimisation.

La diversification est souvent utilisée comme une approche raisonnable pour répartir les risques. Ajouter donc des actifs peu ou négativement corrélés aux actifs contenus dans un portefeuille, réduit la variance de ce dernier. Cependant, selon Black et Litterman (1992), l'optimisation Moyenne-Variance conduit à des portefeuilles concentrés, ce qui s'oppose à la notion de la diversification. Si les paramètres utilisés dans l'optimisation, tels que le vecteur de rendement espéré et la matrice de covariance étaient connus avec certitude, investir dans de tels portefeuilles concentrés serait justifié, sauf que les rendements espérés ne sont que des prévisions. Ce choix d'investissement semble donc être risqué.

Hanoch et Levy (1969) ont conclu que le critère Moyenne-Variance ne peut être considéré optimal que lorsque les rendements sont normalement distribués. Ainsi, en cas de distribution symétrique, l'utilisation de la variance ne pose pas de problèmes. En revanche, si tel n'est pas le cas, ce modèle tend à surestimer le risque. La variance n'est donc une bonne mesure du risque que sous certaines restrictions sur les préférences ou sur des distributions statistiques des perspectives aléatoires.

Il est à noter que le modèle classique de Markowitz ne permet pas l'ajustement du portefeuille au cours du temps. En effet, l'investisseur prend une position initiale en $t = 0$, puis ne réalise aucune transaction jusqu'à une date terminale T à laquelle il évalue les résultats de sa décision. Il s'agit donc, d'un modèle d'allocation d'actifs exclusivement « statique ». Or, cette hypothèse d'absence de révision des portefeuilles semble totalement irréaliste. En effet, les gérants de portefeuilles suivent des stratégies « dynamiques » , c'est-à-dire impliquant des révisions entre les instants 0, et T. L'investisseur arbitre donc à ($t = 0$) l'espérance de rentabilité sur toute la période et l'écart type de celle-ci.

En outre, Markowitz (1952), ne prend pas en considération l'hétérogénéité des acteurs sur le marché. Les pondérations sont déterminées à $t = 1$ indépendamment du type de trader et de son horizon d'investissement à savoir court, long ou moyen terme.

Les optimisations étudiées précédemment donnent des solutions simples mais, dans la réalité, les contraintes sur les poids sont plus nombreuses et rendent l'optimisation difficile. En effet, régulièrement, un investisseur peut vouloir mettre des limites d'achat ou de vente sur certaines classes d'actifs (on peut penser par exemple aux actions des pays émergents qui sont plus risquées et dont on peut vouloir limiter l'allocation). Les contraintes vont alors influencer fortement les allocations qui ne seront alors plus si optimales que prévues.
Il existe une diversité de produits traités sur le marché autres que les actifs classique (produits dérivés). Afin de s'adapter à ces nouveaux actifs il faut construire des modèles adaptés d'analyse de risque et prendre en compte le risque de change sur les marchés internationaux (Esch et al (1997)).

Pour pallier à ces critiques, d'autres modèles ont été développés au niveau de la gestion de portefeuille et qui ont pris en considération l'effet de l'asymétrie des rendements et la gestion dynamique. Nous allons nous focaliser sur la présentation des modèles des moments d'ordre supérieur, les modèles dans le cadre du DownSide risk ou risque de baisse qui sont basés sur la semivariance, les moments d'ordre inférieur et l'étude de la VaR, et la CVaR.

1.3 Le Modèle Moyenne-Moments d'Ordre Supérieur

L'approche classique Moyenne-Variance suppose implicitement que la distribution des rendements est gaussienne, que la fonction d'utilité des investisseurs est quadratique, dans le sens où ces derniers ne s'intéressent qu'aux deux premiers moments.
Ces hypothèses simplificatrices ne sont pas vérifiées empiriquement, ce qui a poussé plusieurs auteurs (parmi lesquels Hwang et Satchell (1999), Maringer, et Parpas,(2009), Mhiri et Prigent (2010) et Jaaman et al (2011)) à introduire des moments supérieurs pour mieux prendre en compte l'éventuel caractère non gaussien de la loi des rendements.
Pour cela, ils ont élargi la notion de risque proposée par Markowitz (où le risque est évalué par la variance des rendements) pour inclure l'asymétrie de la distribution des rendements (c'est-à-dire le Skewness des rendements, moment d'ordre 3) et les événements extrêmes (c'est-à-dire le Kurtosis des rendements, moment d'ordre 4) affectant les actifs sous-jacents.
Tobin (1958) et Rubinstein (1973) ont montré que les moments supérieurs doivent être pris en considération dans le choix de portefeuille , et que la fonction d'utilité n'est pas quadratique. voir aussi Samuelson (1970), Arditti, (1972), Rubinstein (1973), Scott et Horvath (1980), Lai (1991), Konno et Suzuki (1995), Chunhachinda et al (1997), Fang et Lai (1997), Prakash et al (2003), Lai et al (2006).
Arditti et Levy (1975), ainsi que Leland (1999) ont aussi montré que l'approche Moyenne-Variance n'est pas toujours cohérente avec la théorie de l'utilité espérée, introduite par Von Neumann-Morgenstern (1944), sauf dans le cas où les rendements des actifs financiers sont normalement distribués et que la fonction d'utilité est quadratique ou de type CARA [1].
Mais selon Levy et Sarnat (1972), l'hypothèse stipulant que la fonction d'utilité est quadratique n'est appropriée que pour les rendements relativement faibles ce qui limite son utilisation.
En outre, Arditti (1975) et Krauss et Litzenberger (1976) ont montré que l'investisseur cherche en général à avoir le Skewness strictement positif, par conséquent la fonction d'utilité de l'investisseur ne peut pas être quadratique.
Rubinstein (1973) a construit le premier modèle d'évaluation des actifs financiers en introduisant le troisième moment. Krauss et Litzenberger (1976) ont proposé une application empirique de ce modèle. Néanmoins, le quatrième moment (Kurtosis) est souvent négligé malgré son importance dans la sélection du portefeuille dans le cas où la distribution des rendements des actifs financiers présente des queues épaisses. Le Kurtosis peut en particulier modéliser la probabilité de l'occurrence des évènements extrêmes. Par conséquent, il est judicieux d'étudier la sélection du portefeuille dans un cadre Moyenne-Variance -Skewness-Kurtosis.
Machina et Müller (1987) ont analysé les relations entre les préférences des moments et l'utilité polynomiale. Ils ont trouvé une équivalence entre les préférences à n moments et l'utilité polynomiale à n degrés pour la maximisation des utilités espérées.

[1] Une fonction d'utilité de type CARA s'écrit comme $U(R) = exp(-aR)$ pour un intervalle de convergence correspondant à $\mathbb{R}$

L'introduction des moments d'ordre supérieur a été bien illustrée par Lai (1991) et Chunhachunda, Hamid et Prakach (1997). Ils ont notamment analysé en détail la préférence des investisseurs pour le Skewness.
Athayde et Florès (2004) ont trouvé une solution de maximisation du Skewness du portefeuille en cas de vente à découvert. Le portefeuille efficient est déterminé analytiquement, en supposant que l'investisseur préfère les moments impairs et a une aversion vis à vis des moments pairs.
Cependant, en absence de vente à découvert, des algorithmes numériques peuvent être mis en œuvre pour déterminer le portefeuille optimal, tel que *Goal Programming* ou *programmation à objectif*. Cette procédure est une technique à des objectifs multiples permettant d'analyser les paramètres tels que la Moyenne, la Variance et le Skewness et le Kurtosis des distributions des taux de rendement.
Il s'agit d'une confrontation entre des objectifs contradictoires, qui vise à maximiser simultanément le taux de rendement espéré, le Skewness et à minimiser le risque (Variance). Prakash et al. (2003) ont introduit le *Polynomial Goal Programming* (PGP) dans lequel les préférences de l'investisseur pour le Skewness sont incorporées. Les résultats empiriques suggèrent que l'incorporation du Skewness dans les décisions de l'investisseur causent des changements majeurs dans la composition du portefeuille optimal. En travaillant sur des actions du marché japonais et du marché américain et en utilisant la méthode de bootstrap, ces auteurs ont mis en évidence la prépondérance de la préférence des investisseurs en terme de Skewness au détriment du rendement espéré du portefeuille.
Sun et Yan (2003) ont constaté que les portefeuilles optimaux, déterminés par l'utilisation du PGP tout en considérant la préférence de l'investisseur pour le Skewness, exhibent une plus grande persistance du Skewness à travers le temps. Jurczenko et Maillet (2006a, 2006b) ont montré que les moments supérieurs des distributions des rendements sont importants pour la décision de l'investisseur et ne peuvent pas être négligés. ils ont signalé également que l'optimisation du portefeuille en utilisant les moments supérieurs est un problème plus compliqué que l'optimisation standard du modèle Moyenne-Variance. En effet, il existe un trade-off entre les différents objectifs contradictoires, c'est à dire que l'investisseur essaye de maximiser le rendement espéré et le Skewness en minimisant simultanément la Variance et le Kurtosis. Pour résoudre ce problème multi-objectif, ils ont utilisé des techniques numériques spécifiques.
Jurczenko et Maillet (2008) ont prouvé qu'une expansion en séries de Taylor de la fonction d'utilité espérée permet de se concentrer sur un certain nombre de moments d'ordre supérieur et de calculer numériquement l'allocation du portefeuille optimal.
Chung et al (2006) et Martellini et Ziemann (2010) ont précisé que la prise en compte de l'asymétrie et de l'aplatissement de la distribution des rendements boursiers offre certainement aux investisseurs une précaution contre les événements rares caractérisant de plus en plus les marchés financiers.
Athayde et Flôres (1997, 2000, 2004), Jurczenko et Maillet (2006a) et Maillet et al (2010) ont développé le CAPM d'ordre supérieur et ont prouvé que le risque ne figure pas seulement dans la volatilité et la corrélation linéaire mais également dans le Skewness et le Kurtosis. Jurczenko et Yanou (2010) et Maillet et Merlin (2015) ont eu recours aux méthodes non paramétriques pour la sélection de portefeuille par la résolution d'un programme d'optimisation robuste multi-objectif , incorporant les quatre premiers moments.
Campbel et al (2010) ont proposé une méthode bayésienne pour la détermination de portefeuille optimal et ce par la résolution d'un programme d'optimisation multi-objectif.
Mansour et Hallara (2014) ont proposé un modèle d'optimisation robuste à quatre moments qui tient compte des valeurs extrêmes.
De même Maillet et Médecin (2015) ont étudié les mesures de volatilité pour haute et basse

fréquence de données, en se focalisant sur les événements extrêmes. Les distributions ont été estimés en utilisant plusieurs techniques incorporant les moments d'ordre supérieur et la théorie des valeurs extrêmes.

1.3.1 Optimisation du $p^{\text{ème}}$ Moment

Cette approche consiste à maximiser (respectivement à minimiser) le $p^{\text{ème}}$ moment où p est impair (respectivement pair), en supposant que les autres moments sont fixes.
Notons que maximiser le rendement espéré pour un niveau de risque donné (variance fixe) est le problème classique d'optimisation Moyenne-Variance de Markowitz (1952) présenté précédemment, mais maximiser le Skewness pour un rendement espéré et une variance fixés est un problème différent.
Rappelons que le Skewness est la mesure de l'asymétrie de la distribution d'une variable aléatoire réelle. En général, l'asymétrie d'une distribution est positive si la queue de droite (à valeurs hautes) est plus longue ou grosse, et négative si la queue de gauche (à valeurs basses) est plus longue ou grosse.

1.3.1.1 Maximisation du Skewness sous Contraintes d'Espérance et de Variance

Le Skewness absolu $S^3(R_i) = S_i^3$ du taux de rendement R_i de l'actif i, $i = 1, \ldots m$, est supposé exister pour tout actif risqué. Le Skewness absolu du rendement du portefeuille est définie matriciellement par :

$$S\,p(\omega) = E[(\omega^\top(R - \bar{R}))^3] \tag{1.30}$$

et explicitement par :

$$S\,p(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i^3 S_i^3 + 3\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1,i\neq j}^{m} \omega_i^2\omega_j S_{iij} + \sum_{j=1,i\neq j}^{m} \omega_i\omega_j^2 S_{ijj}\right) \tag{1.31}$$

où S_i^3 est le Skewness de l'actif i, S_{iij} mesurent les cos-skewness (interactions curvilinéaires), qui se produisent entre les distributions jointes du R_i et du R_j, i.e.

$S_{iij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(R_{it} - \bar{R}_i)^2(R_{jt} - \bar{R}_j)$,
$S_{ijj} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)^2$,
T étant le nombre total d'observations.

Le Skewness relatif $S(\omega)$ est égal à

$$S(\omega) = \frac{S_p(\omega)}{\sigma_\omega^3}.$$

La deuxième étape consiste donc à écrire le programme de maximisation sous des contraintes bien déterminées, les ventes à découvert ne sont pas autorisées et la variance σ^{2*} et l'espérance E^* sont fixées.

$$Max_\omega \frac{E[(\omega^\top(R - \bar{R}))^3]}{\sigma(\omega)^3} \tag{1.32}$$

sous contraintes

$$\begin{cases} \omega^\top M\omega = \sigma^{2*} \\ \omega^\top \bar{R} = E^* \\ \omega^\top \mathbf{1} = 1 \\ \omega_i \geq 0 \end{cases} \tag{1.33}$$

1.3.1.2 Minimisation du Kurtosis sous Contraintes d'Espérance et de Variance

De la même façon, le Kurtosis est minimisé pour un niveau de rendement espéré et une variance fixe.
Tout d'abord, nous rappelons que le Kurtosis est le coefficient d'aplatissement de Pearson. Il correspond, comme son nom l'indique, à une mesure de l'aplatissement, ou a contrario de la pointicité, de la distribution d'une variable aléatoire réelle. Il mesure, hors effet de dispersion (donnée par l'écart type), la disposition des masses de probabilité autour de leur centre, telle que donnée par l'espérance mathématique. Le Kurtosis absolu d'un portefeuille est donnée matriciellement par cette formule :

$$Kp(\omega) = E[(\omega^\top(R - \bar{R}))^4], \tag{1.34}$$

et de manière explicite par

$$Kp(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i^4 K_i^4 + 4\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_i^3\omega_j K_{iiij} + \sum_{j=1}^{m} \omega_i\omega_j^3 K_{ijjj}\right) + 6\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1,i\neq j}^{m} \omega_i^2\omega_j^2 K_{iijj} \tag{1.35}$$

où K_i^4 est le Kurtosis de l'actif i ,K_{iiij}, K_{iijj}, et K_{ijjj} sont les Co-Kurtosis des distributions jointes R_i et R_j, i.e.

$K_{iiij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(R_{it} - \bar{R}_i)^3(R_{jt} - \bar{R}_j)$,
$K_{ijjj} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)^3$.
$K_{iijj} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(R_{it} - \bar{R}_i)^2(R_{jt} - \bar{R}_j)^2$.

Le Kurtosis relatif est donné par :

$$K(\omega) = \frac{K_p(\omega)}{\sigma_\omega^4}.$$

La deuxième étape consiste à écrire le programme de minimisation sous des contraintes bien déterminées (les ventes à découvert ne sont pas autorisées) .

$$Min_\omega \frac{E[(\omega^\top(R - \bar{R}))^4]}{\sigma(R)^4} \tag{1.36}$$

sous contraintes

$$\begin{cases} \omega^\top M\omega = \sigma^* \\ \omega^\top \bar{R} = E^* \\ \omega^\top \mathbf{1} = 1 \\ \omega_i \geq 0 \end{cases} \tag{1.37}$$

Toutefois, ce n'est pas intéressant de résoudre ces problèmes d'optimisation séparément, il vaut mieux les résoudre dans le cadre d'un problème d'optimisation multi-objectif.
Dans ce qui suit, nous présentons le modèle d'optimisation multi-objectif basé sur le "Polynomial Goal Programming".

1.3.1.3 Optimisation Multi-objectif : "Polynomial Goal Programming" :

Se référant aux travaux de Lai, Yu et Wang (2006), le Skewness et le Kurtosis peuvent être incorporés dans un modèle d'optimisation multi-objectif. Ce programme obéit aux hypothèses standards suivantes (Lai, 1991) :

- les investisseurs sont risquophobes, et ils sont rationnels dans le sens où ils cherchent à maximiser leur richesse en fin de période,
- tous les actifs sont négociables, et ils sont parfaitement divisibles,
- le marché des capitaux est parfait : il n' y a pas de taxes ni coûts de transaction,
- les ventes à découvert ne sont permises .

L'objectif est de déterminer le vecteur de poids optimaux ω qui résulte de la résolution du programme multi-objectif qui consiste, au même temps, à maximiser le taux de Rendement Espéré, minimiser la Variance, maximiser le Skewness et minimiser le Kurtosis.
Une des meilleures méthodes pour trouver une solution optimale est de rassembler les différents objectifs dans une seule fonction objectif. Pour celà, nous utiliserons le PGP qui cherche à combiner les différents objectifs cités ci-dessous.

Soient d_1, d_2, d_3 , et d_4 les variables "objectif" non négatives qui tiennent compte des déviations (respectivement) des rendements espérés, de la Variance, du Skewness et du Kurtosis par rapport à des niveaux désirés, E^*, V^*, S^*, K^*.

Ces niveaux désirés constituent le meilleur scénario pour chaque objectif sans considérer les autres objectifs. Ainsi, les niveaux désirés, E^*, V^*, S^*, K^* peuvent être déterminés en résolvant quatre sous problèmes indépendants (Q1, Q2, Q3 et Q4).

$$(Q1) : \begin{cases} Max_\omega \omega^\top \bar{R} \\ sous \quad contraintes \\ \omega^\top \mathbf{1} = 1 \\ \omega_i \geq 0 \end{cases} \tag{1.38}$$

$$(Q2) : \begin{cases} Min_\omega = \omega^\top M \omega \\ sous \quad contraintes \\ \omega^\top \mathbf{1} = 1 \\ \omega_i \geq 0 \end{cases} \tag{1.39}$$

$$(Q3) : \begin{cases} Max_\omega = \dfrac{E[(\omega^\top (R - \bar{R}))^3]}{\sigma(R)^3} \\ sous \quad contraintes \\ \omega^\top \mathbf{1} = 1 \\ \omega_i \geq 0 \end{cases} \tag{1.40}$$

$$(Q4) : \begin{cases} Min_\omega \dfrac{E[(\omega^\top (R - \bar{R}))^4]}{\sigma(R)^4} \\ sous \quad contraintes \\ \omega^\top \mathbf{1} = 1 \\ \omega_i \geq 0 \end{cases} \tag{1.41}$$

La seconde étape peut être accomplie en incorporant les préférences des investisseurs dans la construction du PGP. Par conséquent, la sélection du portefeuille avec les moments supérieurs est une solution du PGP, et les différents objectifs peuvent être achevés.
La méthode du PGP a été introduite Tayi et Leonard (1988) dans le but de faciliter la gestion bancaire. Ils ont précisé que cette fonction multi- objectif, nous aide aussi à développer

une fonction d'utilité approximative de l'investisseur. Dans ce cas, le portefeuille optimal de l'investisseur sera le point de tangence entre la frontière efficiente et sa courbe d'indifférence. Cette méthode a été utilisée par la suite par Lai (1991), Chunhachinda et al (1997), Sun et Yan (2003), et Prakash et al (2003) pour résoudre les problèmes de sélection de portefeuille impliquant un degré significatif du Skewness. Pour passer d'un problème de sélection de portefeuille Moyenne-Variance-Skewness à un problème Moyenne-Variance-Skewness-Kurtosis et tenir compte de la non-normalité des distributions de rendement, il faut augmenter la dimension du PGP.
Ainsi, le modèle PGP permettra une meilleure allocation d'actifs en solutionnant les problèmes suivants :

- Quel actif devra t-on inclure dans son portefeuille ?
- Quel part du capital doit-on alloué dans chaque actif ?

Pour minimiser la fonction "objectif", on utilise la distance généralisée de Minkowski largement utilisée dans les domaines financiers et économiques. La forme calculatoire de cette distance est donnée par

$$Z = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{d_i}{Z_i} \right|^q \right\}^{1/q}, \tag{1.42}$$

où Z_i est la normalisation de base de la i-ème variable. Pour incorporer les différentes préférences d'un investisseur (relativement à la Moyenne, la Variance, le Skewness et le Kurtosis) dans le modèle, on introduit 4 paramètres λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 où les λ_i représentent le degré subjectif de préférence : plus la valeur est grande, plus le moment correspondant est important pour l'investisseur.

Étant données les préférences de l'investisseur, le problème de sélection de portefeuille multi-objectif se transforme en un problème ayant une seule fonction objectif simple :

$$(P4) : \begin{cases} Min \quad Z = \left|\frac{d_1}{E^*}\right|^{\lambda_1} + \left|\frac{d_2}{V^*}\right|^{\lambda_2} + \left|\frac{d_3}{S^*}\right|^{\lambda_3} + \left|\frac{d_4}{K^*}\right|^{\lambda_4} \\ sous \quad contraintes \\ \omega^\top \bar{R} + d_1 = E^* \\ \omega^\top M\omega + d_2 = V^* \\ \dfrac{E[(\omega^\top(R-\bar{R}))^3]}{\sigma(R)^3} + d_3 = S^* \\ \dfrac{E[(\omega^\top(R-\bar{R}))^4]}{\sigma(R)^4} + d_4 = K^* \\ \omega^\top \mathbf{1} = 1 \\ \omega_i \geq 0 \end{cases} \tag{1.43}$$

La résolution du PGP est basée sur une procédure à deux étapes :

- premièrement, les niveaux désirés de E^*, V^*, S^*, K^* du rendement espéré, de la Variance, du Skewness et du Kurtosis, respectivement, sont déduits à partir (Q1-Q4),
- ensuite, ces valeurs désirées sont substituées dans (P4).

La valeur minimale de Z peut être trouvée étant donné un ensemble de préférences de l'investisseur λ_k tels que $k = 1 \ldots 4$, puisque les solutions des sous-problèmes (Q1-Q4) ont pratiquement

une liaison avec le problème (P4), où tous les objectifs E, M, S, et K sont simultanément pris en considération.
Les valeurs des variables "objectif" d_1, d_2, d_3 , et d_4 sont souvent strictement positives. Ces valeurs sont très proches de zéro. Elles témoignant ainsi d'une bonne optimisation multi-objectif. Ainsi, la sélection du portefeuille optimal, en tenant compte des grands moments, serait une solution du PGP.

1.3.2 Maximisation de l'Utilité Polynomiale

Comme dit précédemment et depuis longtemps, il a été montré que les rendements des actifs financiers sont non normaux.
De nombreux auteurs ont étudié comment la fonction d'utilité espérée pourrait être approchée par une fonction des moments élevés, voir par exemple Garlati et Soulakis (2011) et Grabiszewski (2012). Toutefois, les premières évaluations de l'intérêt de ces moments élevés sont plutôt mitigées. Certaines études ont comparé l'utilité espérée (obtenue par une maximisation directe) et l'utilité approchée (obtenue par le critère espérance-variance). Dans la plupart des cas, les auteurs n'ont trouvé que des petites différences entre les deux stratégies d'allocation. Toutefois, la non normalité des rendements pourrait interdire le critère espérance-variance d'approcher correctement l'utilité espérée.

Une approche intéressante pour tenir compte des moments élevés dans l'allocation d'actifs consiste à utiliser une expansion en série de Taylor pour déduire l'approximation de la fonction d'utilité espérée. Cette approche a été souvent utilisée dans les tests empiriques du Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers (MEDAF) avec moments élevés mais très peu d'études ont considéré le problème de l'allocation d'actifs à partir d'une expansion en séries de Taylor.
Plusieurs critiques ont accompagné l'utilisation de cette expansion dans un cadre d'allocation d'actifs. En particulier, l'expansion en séries de Taylor ne converge vers l'utilité espérée que sous certaines conditions (intervalle de convergence par exemple). Pour certaines fonctions d'utilité (comme la fonction exponentielle), l'expansion converge pour toutes les valeurs possibles de la richesse, alors que pour d'autres (comme la fonction puissance), la convergence n'est obtenue que pour un intervalle restreint de richesse.
En outre, la troncation des séries de Taylor soulève plusieurs difficultés, car il n'existe pas de règle, en général, pour déterminer l'ordre de la troncation. Pire encore, l'inclusion d'un moment additionnel n'améliore pas nécessairement la quantité de l'approximation.
Jondeau et Rockinger (2006) ont étudié comment la non-normalité des rendements peut affecter l'allocation de la richesse d'un investisseur maximisant son utilité. Pour contourner ce problème, ils ont considéré tout d'abord le cas d'un investisseur avec une fonction d'utilité exponentielle, qui permet de calibrer le degré d'aversion pour le risque de l'investisseur très simplement. Ils ont approché l'utilité espérée à partir d'une expansion en séries de Taylor avec deux moments ou plus. Ensuite, ils ont comparé l'allocation obtenue quand l'utilité espérée est maximisée directement avec l'allocation obtenue à partir d'une expansion jusqu'à un certain ordre. Leur conclusion, suite à l'étude empirique a été :

- qu'en cas de rendements légèrement non-normaux, les différentes stratégies d'allocation conduisent essentiellement à la même allocation, allant jusqu'à suggérer que le critère Espérance-Variance fournit une approximation correcte de l'utilité espérée.

- Dans le cas de forte non-normalité, la différence entre la maximisation de l'utilité espérée et le critère Espérance-Variance peut être très importante. Dans de tels cas, l'extension à

un critère fondé sur trois ou quatre moments permet une amélioration sensible de l'utilité espérée.

Dans ce qui suit, nous exposerons l'aspect théorique de cette approche sans encombrer le lecteur avec de fortes considérations théoriques.

Quelque soit la fonction d'utilité considérée, elle obéit à :

$$E[U(R)] = \int_{-\infty}^{+\infty} U(R)dF(R), \tag{1.44}$$

où $dF(R)$ est une mesure de probabilité.

Sous la condition d'une fonction d'utilité continument dérivable, cette dernière peut alors être exprimée comme un développement limité de Taylor d'ordre N au voisinage de l'espérance mathématique du taux de rentabilité brut de son placement :

$$U(R) = \sum_{n=0}^{N} (n!)^{-1} U^{(n)}[E(R)] \times [R - E(R)]^n + \epsilon_{N+1}(R), \tag{1.45}$$

où $E(R)$ est l'espérance du taux de rentabilité brut de l'investisseur, $U^{(n)}$ est la dérivée n-éme de la fonction d'utilité de l'investisseur et $\epsilon_{N+1}(R)$ est le reste de la Lagrange défini comme :

$$\epsilon_{N+1}(R) = [(N+1)!]^{-1} U^{(N+1)}(\xi)[R - E(R)]^{N+1} \tag{1.46}$$

Avec

- $\xi \in]R, E(R)[$ si $R < E(R)$ et $N \in \mathbb{N}^*$
- $\xi \in]R, E(R)[$ si $R > E(R)$.

En faisant tendre N vers l'infini et en supposant que la série limitée de Taylor de la fonction d'utilité en $E(R)$ converge absolument vers $U(R)$, il est alors possible d'exprimer l'utilité espérée comme suit (Rubinstein 1973) :

$$E[U(R)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (n!)^{-1} [E(R)] \times [R - E(R)]^n + \epsilon_{N+1}(R)\} dF(R) \tag{1.47}$$

Sachant que les opérateurs somme et intégrale sont interchangeables entre eux et que

$$\lim_{x\to\infty} \epsilon_{N+1} = 0,$$

on obtient donc

$$E[U(R)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U^{(n)}(E(R))}{n!} \times E\{[R - E(R)]^n\} \tag{1.48}$$

où $E\{[R - E(R)]^n\}$ est le $n$ième moment centré de la distribution de probabilité de R.

L'utilité espérée dépend ainsi de tous les moments centrés de la distribution de la probabilité.

Comme d'un point de vue proprement calculatoire, il n'est pas possible de considérer un développement limité d'un ordre très grand, il est donc utile de proposer un ordre raisonnable à ce développement. Le critère Moyenne-Variance classique suggère de s'arrêter à un ordre 2

pour ce développent. De manière plus générale, un développement à l'ordre k donne une solution exacte à l'espérance de l'utilité quand l'utilité elle même est décrite par un polynôme de degré k.
Ce résultat s'explique par le fait que que cette fonction d'utilité ne dépend que des k premiers moments de la distribution du rendement, voir à ce propos Levy (1969), Hanoch et Levy (1970) et Jurczenko et Maillet (2001) pour k=3, et Benishay (1992) et Jurczenko et Maillet (2003) pour k=4.

Cependant, il n'est pas très clair de savoir à quel ordre, il faudrait s'arrêter pour avoir la bonne approximation. Hlawitschka (1994) a donné un exemple montrant la non nécessité d'avoir un grand nombre de termes dans l'approximation. Lhabitant (1998) a décrit un exemple dans lequel ne pas faire figurer un certain nombre de termes nuit à la qualité de l'approximation. Ederington (1986), Berényi (2001), Rockinger (2006) et Jurcenko et Maillet (2001 et 2006a) expliquent cependant le cadre théorique nécessaire permettant de restreindre les préférences des investisseurs aux quatre premiers moments de la distribution des rendements des actifs financiers.

Une première restriction consiste à supposer une fonction d'utilité appartenant à la classe des fonctions d'utilité compatibles avec le critère de dominance stochastique d'ordre dénotée $D4$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$D4 = \{U(R) : U^{(1)}(R) > 0, U^{(2)}(R) < 0, U^{(3)}(R) > 0, U^{(4)}(R) < 0\}$$

où $U^{(i)}(R)$ est dérivée d'ordre i de $U(R)$ pour $i = \{1, \cdots, 4\}$.

L'expression en série de Taylor infinie de l'utilité espérée donnée par la relation (1.48) peut dans ce cas être simplement approchée par l'expression suivante :

$$E[U(R)] \approx U[E(R)] + \frac{1}{2}U^{(2)}[E(R)]\sigma^2(R) + \frac{1}{3!}U^{(3)}[E(R)]S^3(R) + \frac{1}{4!}U^{(4)}[E(R)]K^4(R) \quad (1.49)$$

où

- $\sigma^2(R) = E\{[R - E(R)]^2\}$
- $S^3(R) = E\{[R - E(R)]^3\}$
- $K^4(R) = E\{[R - E(R)]^4\}$

représentent respectivement la Variance, le Skewness et le Kurtosis de la distribution de probabilité de R.

En différentiant l'expression de l'utilité espérée (1.49) respectivement par rapport à $E(R)$, $\sigma^2(R)$, $S^3(R)$ et $K^4(R)$, on obtient

- $\dfrac{\partial[U(R)]}{\partial E(R)} = (1!)^{-1}U^{(1)}[E(R)] > 0,$
- $\dfrac{\partial[U(R)]}{\partial \sigma^2(R)} = (2!)^{-1}U^{(2)}[E(R)] < 0,$
- $\dfrac{\partial[U(R)]}{\partial S^3(R)} = (3!)^{-1}U^{(3)}[E(R)] > 0,$
- $\dfrac{\partial[U(R)]}{\partial K^4(R)} = (4!)^{-1}U^{(4)}[E(R)] < 0.$

La deuxième restriction consiste quant à elle à supposer que les distributions des rentabilités des actifs risqués appartiennent à une famille de distribution de probabilité de quatre paramètres dont les quatre premiers moments existent. C'est le cas par exemple d'une distribution de Student asymétrique (Bawens et laurent (2002), Branco et al (2001), Azzalini et Capitanio (2003) et Adcock (2010)).

Une troisième restriction est aussi nécessaire pour pouvoir se référer aux quatre premiers moments lors d'une stratégie d'investissement. Il s'agit de supposer que tous les investisseurs sont dotés de fonctions d'utilité polynomiales d'ordre quatre (Hwang et Satchell (1999), Adcock et Shutes (2002) et Adcock (2004)). Si le Kurtosis existe, les préférences des agents peuvent dans ce cas se ramener exactement à un ordre de préférence défini sur les quatre premiers moments de la distribution des rentabilités de leur investissement financier.
Les fonctions d'utilité quadratiques constituent l'exemple le plus simple vérifiant cette condition (Hung et al (2004)).

Un exemple : cas de la fonction d'utilité CARA

On considère la fonction d'utilité CARA (Constant Absolute Risk Aversion) définie par

$$U(R) = -exp(-\lambda R)$$

où λ est une mesure de l'aversion au risque de l'investisseur. L'approximation de l'espérance de cette fonction d'utilité est donnée par l'expression suivante :

$$E(U(R)) \approx -exp(-\lambda E(R))\left[1 + \frac{\lambda^2}{2}\sigma_p^2 - \frac{\lambda^3}{3!}S_p^3 + \frac{\lambda^4}{4!}K_p^4\right]. \tag{1.50}$$

Après certaine simplification et en utilisant l'expression $E(R) = \omega'\mu$, μ étant le vecteur des rendements espérés des actifs, les conditions de premier ordre d'optimisation donnent (voir Jondeau et Rockinger (2006)) :

$$\mu\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\sigma_p^2 - \frac{\lambda^3}{3!}S_p^3 + \frac{\lambda^4}{4!}K_p^4\right) = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial\omega} - \frac{\lambda^2}{3!}\frac{\partial S_p^3}{\partial\omega} + \frac{\lambda^3}{4!}\frac{\partial K_p^4}{\partial\omega} \tag{1.51}$$

Les poids optimaux peuvent être obtenus en maximisant l'une des expression (1.50) ou (1.51).

Pour conclure sur ce paragraphe, les résultats empiriques ont montré que la modélisation Moyenne-Variance est appropriée si la distribution des données est modérément normale. Cependant, pour une asymétrie prononcée, l'optimisation de l'allocation des actifs utilisant les moments d'ordre 3 et 4 (Skewness et Kurtosis) dans l'approximation de la fonction d'utilité est plus performante que le critère Moyenne-Variance.
Une alternative au programme multi-objectif, nous proposons d'étudier le second courant de recherche concernant l'approche Moyenne-DownSide risk .

1.4 Modèle d'Optimisation dans le Cadre du DownSide Risk

Comme précisé auparavant, le modèle Moyenne-Variance de Markowitz souffre de plusieurs tares. En effet, ce modèle n'est valable que si les rendements sont normalement distribués, ce qui n'est toujours pas le cas, ou si les investisseurs ont des préférences déclarées de type Moyenne–Variance.

Mais (entre autres), Ballestero (2005), Bond et Satchell (2002, 2006), Estrada (2004, 2007), Unser (2000), Jacobs et al (2005) et Lee et al (2009) ont souligné que la variance est une mesure douteuse de risque parce qu'elle traite les rendements supérieurs à la moyenne et les rendements qui lui sont inférieurs de la même manière, alors que les investisseurs associent le risque aux rendements inférieurs à une valeur cible qui peut être le rendement moyen ou un rendement donné B dit le "Benchmark".

De ce fait, les investisseurs ne veulent minimiser que les rendements inférieurs à ce rendement cible. Ainsi, le modèle Moyenne-Variance devient incapable de capturer convenablement les caractéristiques des rendements des portefeuilles et la perception des investisseurs vis-à-vis du risque. De ce fait, le recours aux mesures du *DownSide Risk* semble nécessaire afin de mieux présenter les préférences des investisseurs et tenir compte de la nature asymétrique des rendements.

Le DownSide Risk est donc un indicateur qui prend en compte exclusivement les rendements indésirables (ou négatifs). Il fournit une mesure synthétique de la fréquence et de l'intensité avec lesquelles un investissement a réalisé des performances inférieures à un rendement seuil prédéterminé.

L'objectif de ces modèles est de maximiser la probabilité que le rendement du portefeuille soit supérieur à un certain niveau minimal de rendement, souvent référé par les terminologies « seuil de Benchmark » ou « seuil de désastre ».

Parmi les mesures de « DownSide Risk » on peut citer :

1. La mesure Safety-First de Roy :
   C'est Roy (1952) qui a été le premier à montrer qu'il était possible de recourir à une autre mesure de risque qui tente à minimiser la chance de réaliser des grandes pertes lors de la construction des portefeuilles. Cette mesure de risque a servi comme base pour le développement de toutes les mesures de DownSide Risk ou mesures de risque de perte qui ont été créées par la suite. L'idée de Roy était qu'un investisseur doit :

   - tout d'abord s'assurer qu'un certain montant principal est préservé (garantit).
   - puis, choisir un rendement minimal acceptable qui assure cette préservation.

2. La Semivariance
   L'usage de la semivariance a été proposé par Markowitz (1959) pour corriger le fait que la variance pénalise à la fois la surperformance et la sous-performance.

3. Les Moments Partiels Inférieurs (Lower Partial Moment)
   C'est une généralisation de la Semivariance (moment d'ordre 2) à des moments partiels inférieurs.

4. La Value at Risk (VaR)
   Elle est l'une des deux mesures de risques les plus connues avec l'écart type (ou la variance). La valeur en risque (Value at Risk, VaR) qui a été créée par la banque américaine *JP Morgan* est mise en application à travers le programme *Risk Metrics* dans les années 80. La VaR est définie comme la perte maximale espérée à un certain horizon de temps étant donné un niveau de confiance. L'horizon temporel peut être journalier, hebdomadaire, semestriel, annuel, etc. et le niveau de confiance peut être de 90%, 95%, 99% etc.

5. La Valeur à Risque Conditionnelle (Conditional Value at Risk, CVaR)
   Les insuffisances de la VaR ont mené Artzner et al (1997,1999) à chercher des extensions

de cette mesure qui seraient plus fiables.Ils étaient les premiers à introduire la notion de mesures cohérentes de risque dont la Valeur à Risque Conditionnelle ou la CVaR est la plus importante.

Nous donnerons, dans ce qui suit, les clés pour comprendre quelques unes des méthodes énumérées la-dessus. Le lecteur peut reprendre les références de cette partie pour se familiariser davantage avec ces méthodes.

1.4.1 Les Modèles Moyenne-Semivariance et Moyenne-Lower Partial Moment

1.4.1.1 Motivation et Premières Définitions

L'approche Moyenne-Semivariance semble offrir une alternative plus attrayante que les modèles à ordre supérieur puisque la Semivariance est une mesure plus plausible du risque dans le sens où elle combine en une seule mesure la Variance et le Skewness (Estrada 2007).
Comme l'approche classique Moyenne-Variance, le fondement de l'approche Moyenne-Semivariance est dû essentiellement à Markowitz (1959).
Soient R_{it} les rendements observés au cours du temps $t = 1, \ldots, T$ des actifs $i = 1, \ldots, m$. La Semivariance du rendement de l'actif i par rapport au Benchmark B est donnée par l'expression suivante :

$$\Sigma_{iB}^2 = \Sigma_{iiB} = E\left\{[Min(R_i - B, 0)]^2\right\} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[Min(R_{it} - B, 0)]^2 , \tag{1.52}$$

et la Semicovariance :

$$\Sigma_{ijB} = \frac{1}{T}\sum_{t\in V}(R_{it} - B)(R_{jt} - B) \tag{1.53}$$

où V est l'ensemble des indices t tels que $(R_{pt} - B) < 0$.
Avec (1.52) et (1.53), nous définissons la matrice de Semicovariance suivante :

$$M = \left[\Sigma_{ijB}\right]_{i=1,m}^{j=1,m} \tag{1.54}$$

La racine de (1.52) est la Semideviation de l'actif i par rapport au Benchmark B. La matrice est symétrique et endogène, elle dépend étroitement des poids affectés aux actifs dans la composition du portefeuille.
Une série de commentaires relatifs à ces définitions se trouve dans Estrada (2006). Ces commentaires mettent en exergue leurs avantages et leurs inconvénients.

Signalons que Hogan et Warren (1974) avaient proposé une autre définition de la Semicovariance entre les actifs i et j sous la forme suivante :

$$\Sigma_{ij}^{HW} = E\left\{(R_i - R_f) \times Min(R_j - R_f, 0)\right\}, \tag{1.55}$$

où R_f est taux de rendement sans risque (Risk-Free Rate).

Mais cette définition souffre de deux handicaps :

- le Benchmark est limité au taux de rendement sans risque et ne peut être généralisé à tout autre Benchmark,
- $\Sigma_{ij}^{HW} \neq \Sigma_{ji}^{HW}$

La conséquence immédiate est que la matrice de la semicovariance ne peut être symétrique. Pour combler ces défaillances, Estrada (2002, 2007) suggère la définition suivante pour la Semicovariance entre les actifs i et j

$$\Sigma_{ij} = E\left\{Min(R_i - B, 0) \times Min(R_j - B, 0)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[Min(R_{it} - B, 0) \times Min(R_{jt} - B, 0)\right]. \tag{1.56}$$

Cette définition est généralisable à tous les Benchmarks. De plus, la matrice de Semicovariance dont les coefficients sont Σ_{ij} est exogène et symétrique ($\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$).

Nous devons à Bawa (1975) , Fishburn (1977) et Nawrocki (1991, 1992 and 1999) l'introduction et l'étude de la mesure du risque par les moments partiels inférieurs d'ordre n MPI_n, appelé aussi Lower Partial Moments LPM_n. La définition théorique du LPM_n est la suivante :

$$LPM_n(B, R) = \int_{-\infty}^{B} (B - R)^n dF(R) \tag{1.57}$$

où

B représente le taux de rendement cible ou Benchmark, $F(R)$ la distribution de probabilité du rendement R et n : l'ordre du LPM.
Si l'on dispose de T observations de R, nous pouvons estimer $LPM_n(B, R)$ par

$$LPM_n^*(B, R) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[Max(0, B - R_t)]^n \tag{1.58}$$

ou de manière équivalente :

$$LPM_n^*(B, R) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[Min(0, R_t - B)]^n \tag{1.59}$$

Ces méthodes ont été aussi abondamment étudiées par Bawa et Lindenberg (1977), Harlow et Rao (1989) et Harlow (1991).

Cependant , nous remarquons que

- pour $n = 0$ et $B = 0$ la LPM_0 correspond à la probabilité de perte,
- $n = 1$, le LPM_1 représente la déviation espérée des rendements au dessous du rendement Benchmark,
- $n = 2$, LPM_2 correspond à la Semivariance,
- si $B = E(R)$ et $n = 2$ alors LPM_2 correspond à la variance.

De manière générale, Fishburn (1977) a indiqué que le LPM_n présente une variété plus large des attitudes des investisseurs envers le DownSide Risk. Il a établi un lien entre l'ordre n du LPM et l'aversion au risque des investisseurs et a montré que cette aversion croit avec n :

- pour $n < 1$, l'investisseur possède une fonction d'utilité des rendements qui est convexe au-dessous du taux cible. Dans ce cas, l'investisseur préfère le risque et tend à augmenter celui de son portefeuille,

- pour $n > 1$, la fonction d'utilité est concave et l'investisseur est averse au risque. L'objectif de l'investisseur consiste alors à minimiser le risque de son portefeuille,
- pour $n = 1$, il s'agit du cas de neutralité face au risque.

Pour la mesure de la semicovariance entre les titres i et j dans ce modèle, Harlow (1991) propose

$$CLPM_n(B, R_i, R_j) = \int_{-\infty}^{B} \int_{-\infty}^{\infty} (B - R_i)^{n-1}(B - R_j) dF(R_i, R_j). \tag{1.60}$$

Ainsi $CLPM_n(B, R_i, R_j) \neq CLPM_n(B, R_j, R_i)$.
Pour récupérer l'égalité, Daboussi (2006) propose la définition suivante de la semicovariance entre les titres i et j :

$$CLPM_n(B, R_i, R_j) = \int_{-\infty}^{B} \int_{-\infty}^{B} (B - R_i)^{n-1}(B - R_j) dF(R_i, R_j). \tag{1.61}$$

Ainsi $CLPM_n(B, R_i, R_j) = CLPM_n(B, R_j, R_i)$, et pour $n = 2$, nous retrouvons la définition classique de la Semicovariance SCV définie par Estrada (2002) :

$$SCV(B, R_i, R_j) = E\left\{Min(R_i - B, 0) \times Min(R_j - B, 0)\right\}$$

Remarque
L'approche Moyenne-Moment Partiel Inférieur est non seulement cohérente avec l'attitude des investisseurs vis-à-vis du risque mais reste valide quelles que soient les caractéristiques des rendements (Harlow, 1991). Récemment, Jarrow et Zhao (2006) et Estrada (2007) ont montré, à ce sujet, que le portefeuille optimal Moyenne-Variance différait significativement du portefeuille optimal Moyenne–Semivariance, notamment dans le cas d'un portefeuille obligataire (Jarrow et Zhao, 2006). Selon les auteurs, le cadre Moyenne-Variance est effectivement inapproprié en ce qui concerne la gestion des risques inhérents à ce type d'actifs.

1.4.1.2 Choix de Portefeuille Optimal dans le Cadre du DownSide Risk : Cas de la Semivariance

La démarche suivie pour le choix de portefeuille est la même pour le cadre traditionnel que pour le cadre du DownSide Risk. La seule différence réside dans l'utilisation des mesures différentes du risque.
Le modèle Moyenne-Variance utilise la variance comme une mesure du risque, alors que le modèle Moyenne-DownSide Risk utilise la Semivariance ou plus généralement le LPM comme une mesure du risque.
Dans le cadre traditionnel, les investisseurs préfèrent les actifs à faible variance, alors que dans le cadre du DownSide Risk ils préfèrent les actifs à faible semivariance c'est à dire les actifs qui ont moins d'asymétrie négative. A cet égard Harlow (1991) a indiqué que l'allocation d'actif dans le cadre du DownSide Risk doit déterminer une frontière plus efficiente que celle obtenue dans le cadre Moyenne-Variance.
Pour le même niveau de risque, l'optimisation dans le cadre du DownSide Risk doit fournir un rendement meilleur ou équivalent. De même, pour le même niveau de rendement, l'optimisation dans le cadre du DownSide Risk doit fournir un risque plus faible ou équivalent. Une application récente de ce modèle sur des données issues du Down Jones se trouve dans l'article de Pla-Santamaria et Bravo (2013).

Soient (ω_1,ω_2,...,ω_t,...,ω_m) les allocations affectées aux différents actifs qui composent le portefeuille. Le rendement de ce portefeuille est une combinaison linéaire des rendements des actifs. Autrement dit si R_{pt} désigne le rendement du portefeuille P à l'instant t, $R_{pt} = \omega_1 R_{1t} + \omega_2 R_{2t} + \cdots + \omega_m R_{mt}$ où R_{jt} représente le rendement de l'actif j à l'instant t.
Utilisant le critère Moyenne-Semivariance, le portefeuille optimal est solution du programme de minimisation suivant :

$$\text{Minimiser } DSR(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[min(r_{pt} - B, 0)]^2 \tag{1.62}$$

$$\text{sous les contraintes } \sum_{j=1}^{m}\omega_j\mu_j = E^* \qquad \sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1.$$

où μ_j représente l'espérance estimée (la moyenne) du rendement de l'actif j, $j = 1, \ldots, m$ et E^* un rendement (espéré) pour le portefeuille.

Remarques

1. Si les ventes à découvert ne sont pas autorisées, une hypothèse supplémentaire est à rajouter à ce programme d'optimisation, il s'agit de $\omega_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$.

2. de même, il est possible d'encadrer les ω_j par des valeurs minimale et maximale, soit : $\omega_L \leq \omega_j \leq \omega_M$, $j = 1, \ldots, m$.

Le programme d'optimisation (3.3) peut avoir l'écriture matricielle suivante :

$$\min_{\omega} \omega^\top M\omega \tag{1.63}$$

$$\text{sous les contraintes } \omega^\top\mu = E^* \qquad \omega^\top\mathbf{1} = 1.$$

Ce programme ne peut se résoudre par les méthodes classiques du fait que la matrice M est endogène. Plusieurs auteurs ont proposé des alternatives pour contourner cette difficulté.

Hogan and Warren (1972) suggèrent l'utilisation de l'algorithme de Frank-Wolfe développé en 1959. Dans leur article, les auteurs précités avaient exposé les itérations de base puis ils avaient étayé leur travail par un exemple numérique. Ang (1975) a proposé la linéarisation de cette matrice pour transformer le problème de minimisation correspondant à un problème de minimisation linéaire (au lieu du quadratique initial). Nawrocki (1983, 1999) ont proposé une simplification de l'heuristique développée par Elton, Gruber et Padberg (1976) dans le cas d'optimisation Moyenne-Variance. Nawrocki et Staples (1989) ont généralisé l'approche de Nawrocki (1983) en prenant comme mesure de risque le LPM_n. Harlow (1991) a traité le même problème et a proposé la détermination de la frontière efficiente correspondante puis sa comparaison à celle obtenue par le modèle Moyenne-Variance, mais ses calculs sont très compliqués à suivre. C'est le cas aussi des travaux de Grootveld et Hallerbach (1999) qui se sont intéressés à la détermination des frontières efficientes dans le cas du modèle Moyenne-LPM_n. Markowitz et al (1993) ont transformé le problème Moyenne-Semivariance en un problème quadratique en rajoutant des titres fictifs. Cette modification a permis l'application du "Critical Line Algorithm" (voir une nouvelle version de cet algorithme dans Andras Niedermayer et Daniel Niedermayer (2006)) utilisé dans la résolution du problème Moyenne-Variance.
Athayde (2001, 2003) a proposé une approche non paramétrique pour calculer la semivariance du portefeuille. Son idée était de remplacer les rendements observés par des moyennes pondérées des observations voisines. Cette pondération fait appel aux noyaux de convolution. Nous

avons repris ces deux derniers articles et nous avons clarifié certains passages dedans comme nous avons repris et corrigé la construction des estimateurs proposés dans ces deux publications. L'avantage des méthodes non paramétriques est de donner des frontières efficientes très lisses et très faciles à interpréter. L'algorithme proposé par Athayde est itératif et il fait appel à la méthode de Lagrange à chacune de ses étapes. Nous proposerons, dans les chapitres suivants, une autre alternative non paramétrique qui sera basée sur le remplacement des rendements par la médiane (conditionnelle) des observations. Ballestero (2005), à son tour, a proposé une définition de la Semivariance d'un portefeuille où le Benchmark est restreint à la moyenne. Le problème d'optimisation, dans ce cas, est résolu en utilisant une méthode paramétrique quadratique. Estrada (2002, 2008) a proposé d'approcher la Semivariance du portefeuille par l'expression suivante :

$$S\,v(\omega_1, \ldots, \omega_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \omega_i \omega_j \Sigma_{ij} \tag{1.64}$$

où Σ_{ij} est définie en (1.56).
La matrice de Semicovariance, dans ce contexte, est exogène et symétrique. La recherche du portefeuille optimal utilise une approche analytique connue dans la résolution du problème Moyenne-Variance. La méthode d'Estrada transforme la restriction sur les rendements du portefeuille à celle des actifs. Par une série d'application, Estrada (2008), a montré que l'approximation proposée ne nuisait nullement à la détermination du portefeuille optimal.

1.4.1.3 Choix de Portefeuille Optimal dans le Cadre du DownSide Risk : Cas du LPM

Le problème de répartition de l'actif ou de choix de portefeuille consiste toujours à identifier la composition des portefeuilles efficients en termes de rendement anticipé et de risque.
Bawa et Lindenberg (1977) ont montré qu'un modèle de choix de portefeuille peut être dérivé selon le critère des "moments partiels inférieurs". Harlow et Rao (1989) ont généralisé les modèles développés par Bawa et Lindenberg (1977) et de Lee et Rao (1988) par un modèle de choix de portefeuille cohérent avec n'importe quel taux de rendement cible B.
Nous devons à Harlow (1991) l'écriture suivante du modèle d'optimisation dont le risque est mesuré par le LPM. Rappelons que quand $n = 2$, nous retrouvons le modèle Moyenne-Semivariance.

$$\min_{(\omega_1 \ldots, \omega_m)} LPM_n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \omega_i \omega_j CLPM_n(B, R_i, R_j) \tag{1.65}$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} \omega^\top \mu = E^* \\ \omega^\top \mathbf{1} = 1 \\ \omega_i \geq 0 \qquad pour \qquad \omega_i = 1, 2, \ldots m \end{cases} \tag{1.66}$$

L'hypothèse $\omega_i \geq 0$ est relaxée dans le cas où la vente à découvert est autorisée.

Remarques

1. Dans la formule (1.65), si on utilise le $CLPM_n(B, R_i, R_j)$ défini en (1.60), la matrice associée n'est pas symétrique et la résolution du problème n'est pas standard. Par contre si on utilise (1.61), la matrice associée devient symétrique et la résolution du problème de minimisation sera largement inspirée du cas classique Moyenne-Variance. Nous devons cette

dernière amélioration dans la construction du modèle d'optimisation à Daboussi (2006) et Daboussi et Mamoghli (2008).

2. Des études empiriques menées par Guedhami et al (1999) et Daboussi et Mamoghli (2008) sur des données réelles (Indices boursiers de différents pays provenant de la base de données de *Morgan Stanley Capital International* (MSCI) et couvrant une très longue période) ont montré que le modèle Moyenne-Variance surestime le risque à cause de l'utilisation de la variance comme une mesure de risque (car elle traite de la même manière les rendements au-dessus et au-dessous de la moyenne comme des rendements indésirables), alors que le modèle Moyenne-semivariance de Harlow (1991) sous-estime le risque à cause de l'inégalité des mesures des semicovariances utilisées par ce modèle. L'apport de Daboussi et Mamoghli (2008) constitue une réponse appropriée qui permet de trouver un compromis entre le problème d'asymétrie des rendements et la perception du risque des investisseurs d'une part et le problème d'inégalité des semicovariances de l'autre part. En effet, leur modèle permet de capturer l'asymétrie des rendements et de percevoir le risque non capturé par le modèle Moyenne-Variance tout en éliminant le problème d'inégalité des semicovariances rencontré initialement dans le modèle Moyenne-Semivariance de Harlow (1991).

Nous finissons cette section en donnant quelques recommandations (sous formes de remarques) qui concernent le choix du Benchmark qui est primordial dans la construction des programmes d'optimisation sujets de cette section.

Quelques commentaires concernant le choix du Benchmark (rendement cible)
Le taux de rendement cible ou Benchmark est une notion très importante pour les mesures du DownSide Risk. Ce taux est aussi appelé par certains financiers *le rendement minimum acceptable* (minimum acceptable return). Il correspond au point de référence qui sert à séparer les pertes et les gains. C'est le taux de rendement que les investisseurs veulent atteindre et en dessous duquel ils n'investissent pas.
Ce taux varie d'un investisseur à un autre. Les investisseurs très averses au risque associent la perte à la réduction du capital initial, c'est à dire ils fixent leur cible à la valeur zéro. Il en découle qu'ils considèrent tous les rendements négatifs comme un risque.
D'autres investisseurs se réfèrent à l'historique de l'actif lui même. Ils fixent un Benchmark égal au rendement moyen. Une autre catégorie d'investisseurs considère tout rendement inférieur au taux sans risque comme un risque. D'une manière plus générale, les investisseurs peuvent considérer n'importe quel autre taux comme une cible. Ainsi, les rendements au dessous de cette cible sont considérés comme un risque. Alors que, les rendements au dessus de cette cible ne sont pas considérés comme un risque, mais plutôt ils sont désirables.
Par ailleurs, le taux de rendement Benchmark est un facteur important dans les mesures du DownSide Risk parce qu'il a un impact sur ces mesures. En effet, plus le Benchmark est élevé, plus la mesure du DownSide Risk est élevée. L'augmentation du taux de rendement cible a comme conséquence l'augmentation des variations baissières des rendements (DownSide Risk) et la réduction des variations haussières des rendements (potentiel de hausse).

1.5 Les Modèles Moyenne-VaR et Moyenne-CVaR

Nous réservons une section spéciale aux modèles VAR et CVaR car leur traitement est différent de celui d'un DownSide risk classique qui dépend d'un Benchmark donné.

1.5.1 Note Historique et Motivation

L'effondrement du système de taux de change fixe instauré à Bretton Woods, en 1973, a entraîné des séries de krashs, un accroissement de la volatilité, et surtout le développement de produits dérivés. Ceci a crée un contexte d'aversion aux pertes. La théorie de Markowitz (1952), sur laquelle repose toute la théorie moderne de portefeuille, ne semble pas être la mieux adaptée pour expliquer correctement la rentabilité des actifs financiers (Zhu et Fukushima (2009)). Les investisseurs n'ont pas la même attitude face à leurs erreurs d'anticipations : ils sont satisfaits en cas de résultats meilleurs que prévus mais souhaitent éviter les résultats plus mauvais que prévus (Kahneman et Tversky (1979), Kaplanski et Kroll (2002) et (Ruan et Fukushima (2011)) et Maillet et al (2015).
La VaR est un " nouvel" outil de gestion des risques. Elle est souvent utilisée en pratique depuis son introduction à la banque JP Morgan au début des années 1990. C'est une nouvelle mesure de type DownSide Risk qui permet d'évaluer les pertes que l'on peut subir avec des probabilités faibles mais non négligeables. Selon Duffie et Pan (1997), la VaR désigne la perte potentielle maximale, à l'intérieur d'un intervalle de confiance donné, supporté par un investisseur sur son portefeuille, dans l'hypothèse d'un scénario défavorable de marché sur un horizon de temps t. En d'autres termes, la VaR constitue la pire perte attendue sur un horizon de temps donnée pour un certain niveau de confiance. On peut la regarder donc comme étant l'espérance de perte maximum d'un investissement sur un horizon déterminé à un certain niveau de confiance.
Regroupant à la fois la fréquence et l'impact potentiel d'un risque, cette mesure est devenue l'un des outils les plus répondus dans les marchés financiers (Grodon et Baptista (2000)).

Selon Glasserman et al. (2002), quatre événements ont concouru à l'adoption généralisée de la VaR sur le secteur financier et un autre a favorisé son développement dans les entreprises surtout américaines.

- Le premier événement date depuis 1993, quand le groupe des 30 conseille l'utilisation de la VaR pour mesurer le risque ;

- Le deuxième événement date depuis 1995. Réunis en comité à la banque des règlements internationaux à Bâle, les représentants des banques centrales de dix grandes économies de l'ouest proposent de nouvelles règles amendant l'accord de Bâle de 1988 et imposant aux établissements financiers un niveau de fonds propres proportionnels aux risques résultant de leurs engagements. Officiellement, adopté en 1996, cette proposition incite les banques à développer des modèles internes sophistiqués pour calculer leurs VaR. En effet, elles peuvent ainsi espérer une diminution des fonds propres qu'elles doivent détenir par rapport aux montants des fonds propres exigés sur les autres banques qui se fondent sur les modèles standards (édictés par les autorités de tutelle pour déterminer les besoins des banques en capitaux propres). Ainsi, dès le départ, la recherche d'un allègement des obligations règlementaires est un important facteur de la croissance de la VaR.

- Le troisième événement s'est produit sur Internet. En 1994, la banque américaine JP Morgan a mis gratuitement son système *Risk Metrics* à la disposition de tous sur Internet. Ce système fournissait les données financières et la méthodologie nécessaire au calcul de la VaR d'un portefeuille. Les autres établissements financiers et les entreprises peuvent utiliser le calculateur de VaR de Risk Metrics ou télécharger les données sur leurs propres systèmes de gestion des risques. Très vite, sont apparus de nouveaux fournisseurs de programmes de gestion des risques exploitant Risk Metrics, transformant cette méthodologie en une référence incontournable.

- Un quatrième événement a probablement moins d'impact à ce jour, mais est considéré comme un des grands facteurs d'expansion de la *VaR* parmi les entreprises américaines s'est produit aux USA en 1997. En effet à cette époque la Securities and Exchange Commission (SEC), préoccupée des risques cachés derrière les instruments hors bilan, a émis des règles de communication relatives aux produits dérivés employés par les entreprises. Celles-ci ont trois solutions pour faire état des risques associés aux instruments dérivés :

  – le tableau des valeurs de marché,

  – la mesure de sensibilité,

  – la *VaR*.

  C'est la raison pour laquelle les rapports annuels de Microsoft, de Philip Morris et de bien d'autres grandes sociétés présentent maintenant des calculs de la VaR. L'utilisation de cette mesure a été renforcée en 2004 suite aux recommandations du Bâle II.

De nombreux travaux ont été consacrés à l'application de cette nouvelle mesure du risque dans la gestion de portefeuilles créant un nouveau cadre d'analyse dit *Moyenne-VaR*, voir par exemple les publications d'Alexander et Baptista (2000, 2002), Campbell, Huisman et Koedijk (2001), Vorst (2001), Gordon J. Alexander (2003), Guy Kaplanski (2004) et Huang and Lee (2010).

1.5.2 Définitions et Premières Propriétés

Commençons par donner quelques définitions purement mathématiques.

Définition 1. Soit X une fonction perte aléatoire de fonction de répartition F_X. Soit $\alpha \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X > x) \leq 1-\alpha\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : 1 - F_X(x) \leq 1-\alpha\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

Cette mesure est devenue très populaire parmi les professionnels grâce à sa simplicité. Elle se trouve utiliser dans la plupart des organismes financiers. Cependant, en 1999, cette mesure a été critiquée violemment pour la première fois dans un article de Artzner et al. (1999) pour manque de cohérence. Ils reprochaient à cette mesure de ne pas être additive ($VaR_\alpha(X+Y) \nleq VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y)$) et donc d'exagérer le risque. De même la *VaR* suggère de réduire la diversification du portefeuille pour réduire le risque, ce qui est en contradiction avec les tests empiriques et les théories financières fondamentales.
Mais en dépit de ces inconvénients, la *VaR* est une mesure très conseillée sur le plan de la régularisation (Comité de Bâle) pour mesurer le risque du marché et du crédit. Cette mesure est largement utilisée par les gestionnaires de fonds, les trésoriers d'entreprises et les banques (Dowd, 1998 ; Saunders, 1999 et Jorion 2000) et par d'autres institutions financières ou non financières (Bodnar et al 1998).
Pour pallier aux faiblesses pointées par Artzner et al. (1999), une nouvelle mesure "académique" issue de la *VaR* a été mise au point . Elle a mis longtemps pour quitter la recherche académique et s'installer dans les établissements financiers. Il s'agit de la *Conditional Value at Risk* (*CVaR*) appelée aussi "Expected Shortfall" ou "Tail Expected Loss". Elle est définie comme étant l'espérance de la perte excédant la *VaR*. Elle a l'avantage d'être convexe et facile à calculer et à

implanter pour résoudre les problèmes d'optimisation de portefeuille.
Sa définition est la suivante.

Définition 2. Soit X une fonction aléatoire de perte ayant une fonction de répartition F_X. Soit $\alpha \in (0, 1)$,

$$CVaR_\alpha(X) = E(X|VaR_\alpha(X))$$

Cette expression peut s'écrire autrement comme suit :

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(X) &= E\left(X \mid X \geq VaR_\alpha(X)\right) \\ &= \frac{E\left(X\mathbb{I}_{[q_\alpha(X),\infty[}(X)\right)}{P\left(X \geq q_\alpha(X)\right)} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} E\left(X\mathbb{I}_{[q_\alpha(X),\infty[}(X)\right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{q_\alpha(X)}^{\infty} x dF_X(x) \end{aligned}$$

où

$$\mathbb{I}_{[q_\alpha(X),\infty[}(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq q_\alpha(X) \\ 0 & \text{si } X < q_\alpha(X) \end{cases}$$

Le $CVaR$ est compatible avec la cohérence définie au dessus et vérifie en plus les propriétés suivantes :

Propriétés

1. $CVaR_\alpha$ est équivariant par translation, i.e., pour tout $c \in \mathbb{R}$

$$CVaR_\alpha(X + c) = CVaR_\alpha(X) + c$$

2. $CVaR_\alpha(X)$ est positivement homogène, i.e., pour tout $c > 0$

$$CVaR_\alpha(cX) = cCVaR_\alpha(X)$$

3. Si X admet une densité, alors

$$E(X) = (1-\alpha)CVaR_\alpha(X) - \alpha CVaR_\alpha(-X)$$

4. $CVaR_\alpha$ est à dominance monotonique d'ordre 2, i.e.,

$$\text{si } X_1 < X_2 \text{ alors } CVaR_\alpha(X_1) \leq CVaR_\alpha(X_2)$$

5. $CVaR_\alpha$ est convexe, i.e., pour tous variables aléatoires X_1 et X_2 et pour $0 < \lambda < 1$, alors

$$CVaR_\alpha(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda CVaR_\alpha(X_1) + (1-\lambda)CVaR_\alpha(X_2)$$

Ci-joint une illustration graphique de ces deux notions :

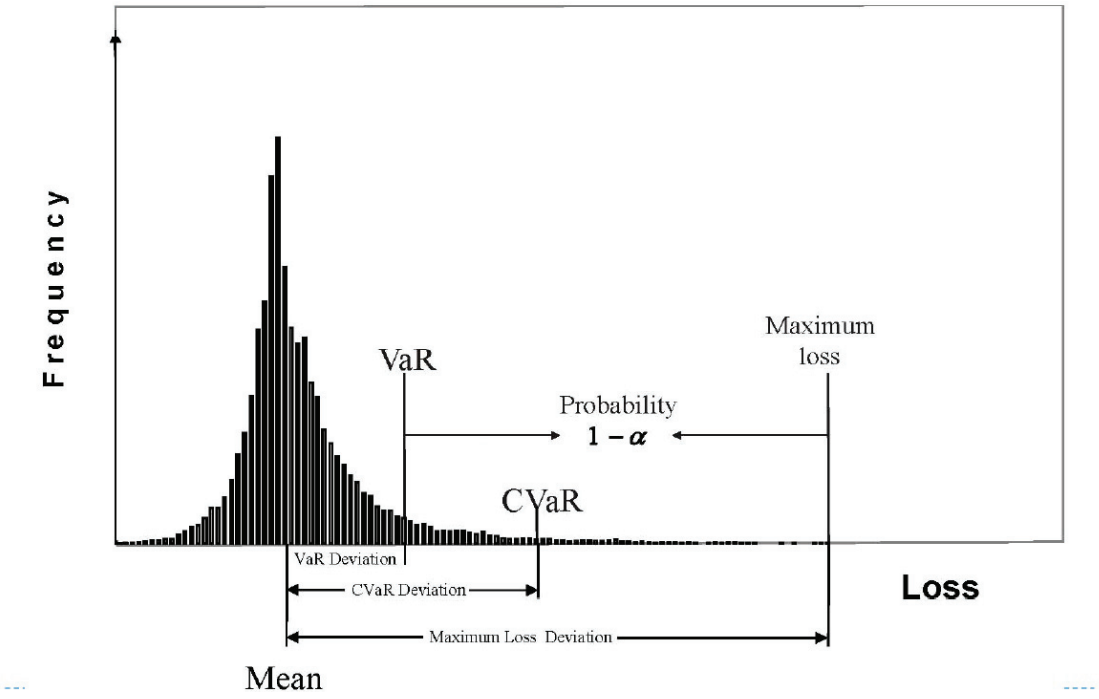

FIGURE 1.3: *Illustration graphique du VaR et de la CVaR (Vanini et Vignola (2011)).*

Une autre caractérisation de la $CVaR$, très utile pour sa détermination pratique est obtenue de la manière suivante, Uryasev et Rockafellar (2000) :

$$CVaR_\alpha(X) = \inf_{a\in\mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left(\mid X - a \mid^+\right) \right\}, \tag{1.67}$$

où $\mid z \mid^+ = max(z, 0)$.

1.5.3 Estimation de la VaR et de la CVaR

Plusieurs méthodes ont été développées pour l'estimation de la VaR et de la $CVaR$, voir par exemple Duffie et Pan (1997) et Manganelli et Engle (2001). Connaissant la répartition des rendements, il est facile de déduire la VaR et connaissant la VaR, il est facile de connaitre la $CVaR$. Ceci rend essentielle l'estimation de la répartition des données.
Trois grandes approches sont à considérer dans l'estimation de la répartition des données :

- l'approche paramétrique,
- l'approche non paramétrique,
- et l'approche semi-paramétrique.

L'approche paramétrique impose, par exemple, une hypothèse de normalité sur les données, tandis que l'approche non paramétrique "laisse les données parler d'elles mêmes".
Soit $R_p = \omega_1 R_1 + \cdots + \omega_m R_m$ la variable "rendement" d'un portefeuille composé de m actifs dont les rendements, affectés des poids ω_j, sont notés R_j, $j = 1, \ldots, m$.

1.5.3.1 Estimation Paramétrique

Le rendement est supposé suivre une loi normale. La VaR est estimée à partir des données historiques des rendements et les différentes estimations de la moyenne, variance et covariances entre les rendements R_i et R_j des actifs i et j, soit donc

$$VaR_\alpha(R) = \mu - z_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}} = \mu - z_\alpha \sigma_P \tag{1.68}$$

où ω_i et ω_j sont les poids affectés aux actifs i et j du portefeuille, z_α est le quantile d'ordre α de la loi normale centrée et réduite (exemple $z_{0.95} = 1.64$, $z_{0.99} = 2.33$), σ_{ij} est la covariance entre les actifs i et j, μ et et σ_P sont la moyenne et l'écart-type du rendement du portefeuille P.

La $CVaR_\alpha(R)$ est alors obtenue comme la moyenne des pertes du portefeuilles qui excède la $VaR_\alpha(R)$.

Mais l'hypothèse de la normalité est mal adaptée aux rendements ayant des distributions à queues lourdes et qui sont a fort potentiel de perte, voir par exemple Hendricks (1996), Danielsson et al (1977) et Goorberg et al (1999). Intuitivement, les distributions à queues lourdes signifient que les "outcomes" extrêmes sont plus fréquents que ne laissent prédire les distributions normales ce qui risque d'entrainer une sous-estimation de la VaR.

1.5.3.2 Estimation Non Paramétrique

Les données ne sont assujetties à aucune hypothèse. Le principe fondamental de l'estimation non paramétrique (voir les prochains chapitres) est de laisser les données "parler d'elle même".

- **Quantile empirique** (historical simulation)
  Cette méthode est la plus intuitive et la plus simple à utiliser. Elle suppose une stationnarité des rendements, ce qui signifie que la distribution des rendements observée à partir des données historiques se reproduira à l'avenir. Cette approche utilise des données de marché plus ou moins récentes pour déterminer la distribution des variations des facteurs de risque qui peuvent simplement être les prix des actifs dans le cas des actions. Ces variations historiques sont ensuite appliquées au portefeuille actuel dont on calcule la valeur pour chaque scénario historique. La distribution des valeurs possibles du portefeuille est ainsi estimée puis on extrait le quantile correspondant à un niveau de probabilité choisi.
  L'élément clé de cette approche reste donc la sélection de l'historique utilisé pour les calculs. Les résultats seront différents selon la fenêtre historique retenue et si l'on souhaite par exemple donner plus d'importance aux données de marché récentes ou à des périodes "agitées" (scénarii extrêmes). La simulation historique reste la méthode la plus couramment utilisée car elle est la plus facile à mettre en place malgré la nécessitée de maintenir des historiques nombreux et longs selon le nombre d'actifs pris en compte.
  Il est aussi possible de récupérer la VaR (puis la $CVaR$) en inversant un estimateur de la fonction de répartition obtenu par la méthode du noyau par exemple, voir Gannoun et al (2001).

- **Méthode de Monte Carlo**
  La méthode de simulation de Monte-Carlo reprend la démarche introduite par la simulation historique. En revanche, l'estimation de la distribution des facteurs de risque diffère. Au lieu de l'approcher par des scénarii passés, la simulation de Monte-Carlo utilise la modélisation de la distribution suivant les études et les hypothèses retenues par l'investisseur. A partir de la distribution choisie, la génération de nombres aléatoires permet

d'obtenir la valeur des facteurs de risque ; on en déduit alors la valeur du portefeuille à la fin de l'horizon de temps fixé. Cette simulation est répétée des milliers de fois pour approcher la distribution des valeurs possibles du portefeuille, de laquelle on extrait le quantile voulu, c'est-à-dire la *VaR*.
Le principal inconvénient de cette méthode est la complexité de sa mise en œuvre. Elle nécessite en effet un important effort de recherche et de développement pour la modélisation des facteurs de risque, la validation de ce modèle ainsi que sa mise en place informatique. Cependant, une fois ce temps de développement effectué, le temps de calcul de la *VaR* est sensiblement équivalent au temps de calcul nécessaire pour la simulation historique.
La possibilité de paramétrer le modèle théorique en fonction des anticipations sur les évolutions futures des facteurs de risque est à la fois un avantage et un inconvénient. En effet, mal paramétrées, les hypothèses utilisées par la méthode de Monte-Carlo peuvent être contraires à la réalité du marché.

- **Méthode du Boostrap**
  La méthode de bootstrap est une amélioration simple de la méthode de la simulation historique. Elle consiste à estimer la *VaR* à partir de données simulées par Bootstrap. Le Bootstrap consiste à ré- échantillonner les données historiques de rendements avec remise. Plus précisément, dans notre contexte, la procédure consiste à créer un grand nombre d'échantillons de rendements simulés, où chaque observation est obtenue par tirage au hasard à partir de l'échantillon original. Chaque nouvel échantillon constitué de la sorte permet d'obtenir une estimation de la *VaR* par le quantile empirique précisé au dessus, et l'on définit au final une estimation de la *VaR* en faisant la moyenne de ces estimations basées sur le ré-échantillonnage.

Récemment, Yao et al (2013) ont développé une méthode d'estimation de la *VaR* et de la *CVaR* basée sur l'estimation par la méthode du noyau de la *fonction perte*. Ils ont par ailleurs présenté des méthodes optimales pour la sélection de la fenêtre de lissage et montré que les modèles non paramétriques Moyenne-CVaR développés sont des problèmes d'optimisation convexe.

1.5.3.3 Méthodes Semiparamétriques

C'est un compromis entre les deux grandes classes des méthodes d'estimation exposées précédemment. Parmi ces méthodes figure tout d'abord l'ensemble des méthodes et approches qui relèvent de la théorie des extrêmes (TVE) qui diffère de la théorie statistique habituelle fondée pour l'essentiel sur des raisonnements de type tendance centrale. Les extrêmes sont en effet gouvernés par des théorèmes spécifiques qui permettent d'établir sous différentes hypothèses la distribution suivie par ces extrêmes. Il existe deux principales branches de la théorie des valeurs extrêmes : la théorie des valeurs extrêmes généralisée et l'approche *Peaks Over Threshold* (POT) basée sur la loi de Pareto généralisée. L'approche POT permet l'étude de la distribution des pertes excessives au dessus d'un seuil (élevé), tandis que la théorie des valeurs extrêmes généralisée permet de modéliser la loi du maximum ou du minimum d'un très grand échantillon. Pour plus de détails sur cette méthode, le lecteur peut consulter Ghorbel et Trabelsi (2008). Voir aussi Di Crescenzo et al (2012) et Maillet et Medecin (2015) pour d'autres types d'estimateurs semiparametriques.

1.5.4 La VaR et la CVaR dans l'Optimisation de Portefeuilles

Les articles concernant ce sujet foisonnent. Nous citons par exemple Rockafellar et Uryasev (2000), Uryasev (2000), Alexander (2006), Sarykalin et al (2008), Maillet et al (2009), Letmark

(2010), Xiong et Idzorek (2010), Shaw (2011) et Mausser et Romanko (2014). Dans ce qui suit, nous donnons un aperçu sur les programmes d'optimisation sans trop les détailler, le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans les articles précités. Nous nous contenterons ici d'exposer les modèle VaR et $CVaR$ de base.
On rappelle que ω désigne le vecteur poids associé aux actifs qui composent un portefeuille P et $R = (R_1, \ldots, R_m)^\top$ le vecteur des rendements des différents actifs. Le rendement du portefeuille est $R_P = \omega^\top R = \omega_1 R_1 + \cdots + \omega_m R_m$.

1.5.4.1 Les Modèles

1. Le Modèle Moyenne-VaR

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\omega} & VaR_\alpha(-\omega^\top R) \\ \text{sous} & \left\{ \begin{array}{rcr} \omega^\top \mu & = & E^* \\ \omega^\top \mathbf{1} & = & 1 \\ \omega & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{1.69}$$

2. Le Modèle Moyenne-CVaR

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\omega} & CVaR_\alpha(-\omega^\top R) \\ \text{sous} & \left\{ \begin{array}{rcr} \omega^\top \mu & = & E^* \\ \omega^\top \mathbf{1} & = & 1 \\ \omega & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{1.70}$$

3. Quelques remarques :

   - Il est possible de transformer ce programme de minimisation en un programme de maximisation. Pour le faire, il suffit pour de maximiser les fonctions objectis $VaR_{1-\alpha}(\omega^\top R)$ et $CVaR_{1-\alpha}(\omega^\top R)$.
   - Dans ces programmes, on minimise le risque pour un rendement donné. En pratique, on est tenté de maximiser le rendement en ayant un risque minimum. Ces deux problèmes peuven être tre inversés car les solutions appartiennent à la même frontière efficiente.

L'optimisation $Moyenne-VaR$ souffre d'un problème majeur : il s'agit de sa non convexité. Ceci suppose l'existence de plusieurs minimas locaux. De plus la non convexité de ce problème rend sa résolution numérique difficile à obtenir. Grâce à (1.67), on peut transformer le programme (1.70) en ce nouveau programme

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\omega, a} & a + \dfrac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}(Z) \\ \text{sous} & \left\{ \begin{array}{rcr} Z & \geq & -\omega^\top R - a \\ Z & \geq & 0 \\ \omega^\top \mu & = & E^* \\ \omega^\top \mathbf{1} & = & 1 \\ \omega & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{1.71}$$

Ce programme est linéaire. Il ne dépend pas de la nature de la distribution des variables. Sa version discrétisée (tenant compte des observations) est la suivante :

$$\min_{\omega,a} \quad a + \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t$$
$$\text{sous} \quad \begin{cases} z_t & \geq & -\omega^\top R_t - a \\ z_t & \geq & 0 \\ \omega^\top \mu & = & E^* \\ \omega^\top \mathbf{1} & = & 1 \\ \omega & \geq & 0 \end{cases} \tag{1.72}$$

où $R_t = (R_{1t}, \ldots, R_{mt})^\top$ désigne le vecteur des observations des rendements au temps t, et μ est le vecteur des moyennes des rendements des différents actifs.

Ce programme est un problème d'optimisation linéaire à dimension finie. Il peut être résolu par n'importe quel algorithme de programmation linéaire. Des variantes de ce programme se trouvent dans la littérature spécialisée mais nous n'allons pas les aborder.

1.6 Conclusion

Nous avons évoqué dans ce chapitre quelques uns des modèles d'optimisation de portefeuilles. Ces modèles plus au moins sophistiqués sont du type Moyenne-Risque. En plus de la théorie classique de Markowitz, nous avons présenté des risques autre que la variance. Ces risques tiennent compte de la non normalité des données, hypothèse très largement réaliste. Nous avons pris soin de nous focaliser sur le DownSide Risk car nous allons développer certains aspects de cette mesure dans les futurs chapitres. Ces aspects concernent l'utilisation des méthodes non paramétriques dans l'estimation de ces risques.
Nous ne prétendons pas avoir fait une revue exhaustive de toutes les méthodes d'optimisation de portefeuilles ni d'avoir réuni et exposé toutes les contraintes exigibles pour encadrer les optimisations. Cependant le lecteur trouvera une bibliographie assez riche pour se familiariser avec certaines méthodes connues ou moins connues. Il a aussi un certain support pour découvrir certaines nouveautés.
Les prochains chapitres reprendront et compléteront certaines définitions et concepts. L'introduction des méthodes non paramétriques pour la constitution de portefeuilles optimaux dans le cadre du DownSide Risk sera notre contribution majeure.

1.7 Bibliographie

- Adcock C. J., (2002). *Asset Pricing and Portfolio Selection Based on the Multivariate Skew-Student Distribution*, paper presented at the Non-linear Asset Pricing Workshop, Paris.

- Adcock, C. J. (2004). *Capital Asset Pricing in UK Stocks Under the Multivariate Skew-Normal Distribution*. Genton, M. and G., editor, *Skew-Elliptical Distributions and Their Applications : A Journey Beyond Normality*, Boca Raton, Chapman and Hall, 191–204.

- Adcock, C. J. (2010). *Asset Pricing and Portfolio Selection Based on the Multivariate Extended Skew-Student-t Distribution*, Annals of Operations Research , 176 , 221–234.

- Alexander, G.J. and Baptista, A.M. (2000). *Economic Implications of Using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection : A Comparison with Mean-Variance Analysis*, working paper, University of Minnesota.

- Alexander, G.J. and Baptista, A. M. (2002). *Economic Implications of Using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection : A Comparison with Mean-Variance Analysis*, Journal of Economic Dynamics and Control, 26, 7-8, 1159-1193 .

- Alexander, G.J. and Baptista, A.M. (2003). *Portfolio Performance Evaluation Using Value-at Risk*, Journal of Portfolio Management , 29, 4, 93-102 .

- Alexander, G.J. and Baptista, A.M. (2004). *A Comparison of VaR and CVaR Constraints on Portfolio Selection with the Mean-Variance Model*, Management Science, 50, 9, 1261-1273 .

- Alexander, S. Coleman, T.F. and Li, Y. (2006). *Minimizing CVaR and VaR for a portfolio of derivatives*, Journal of Banking and Finance, 30, 583–605.

- Ang, J.S. (1975). *A Note On The E, SL Portfolio Selection Model,* Journal of Financial and Quantitative Analysis , 10, 5, 849-857.

- Arditti, F.D. (1971). *Another Look at Mutual Fund Performance* , Journal of Financial and Quantitative Analysis, 6, 3, 909-912.

- Arditti, F.D. and Levy, H. (1972). *Distribution Moments and Equilibrium : A Comment*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 7, 1429-1433.

- Arditti F.D. and Levy, H. (1975). *Portfolio efficiency analysis in three moments : The multiperiod case*, Journal of Finance , 30, 797-809.

- Artzner, P.F., Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath, (1997). *Thinking Coherently Risk*, Journal of Mathematical Finance, 9, 3, 68–71.

- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath. (1999). *Coherent Measures of Risk,* Mathematical Finance, 9, 3,1999, 203–228.

- Athayde, G.M. and Flôres Jr, R. G. (1997). *A CAPM with Higher Moments : Theory and Econometrics*, EPGE/FGV, Ensaios Econômicos n° 317, Rio de Janeiro.

- Athayde, G.M. and Flôres Jr., R.G., (2000). *Portfolio Frontier with Higher Moments : the Undicovered Country*, Discussion Paper EPG E-FGV, May 2000.

- Athayde, G. (2001). *Building a Mean-Downside Risk Portfolio Frontier, Developments in Forecast Combination and Portfolio Choice*, John Wiley and Sons.

- Athayde, G. (2003). *The mean-downside risk portfolio frontier : a non-parametric approach*, Advances in portfolio construction and implementation.

- Athayde, G.M. and Flôres, Jr, R.G. (2004). *Finding a Maximum Skewness Portfolio - A General Solution to Three-Moments Portfolio Choice*. Journal of Economic Dynamics and Control, 28, 7, 1335-1352.

- Azzalini, A. Capitanio A. (2003). *Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t distribution*, Journal of the Royal Statistical Society B ,65, 579–602.

- Ballestero, E. and Romero, C. (1996). *Portfolio selection : A compromise rogramming solution*, Journal of Operational Research Society, 47, 1377–1386.

- Ballestero, E. (2001). *Stochastic goal programming : A mean-variance approach*, European Journal of Operational Research, 131, 476–581.

- Ballestero, E. (2005). *Mean-Semivariance Efficient Frontier : A Downside Risk Model for Portfolio Selection*, Applied Mathematical Finance Volume 12, 1, 1-15.

- Bauwens, L., Laurent, S. (2005). *A new class of multivariate skew densities, with application to GARCH models*, Journal of Business and Economic Statistics, 23, 346-354.

- Benishay, H. (1992). *The Pratt–Arrow requirement in a fourth degree polynomial utility function*. J, Acc. Audit. Finance, 7, 1, 97–112.

- Berényi, A. (2001). *Accounting for illiquidity and non normality of returns in the performance assessment* .Working Paper, University of Munich, 42 pages.

- Berlinet, A., Cadre, B., Gannoun, A. (2001). *On the conditional L1 -median and its estimation*, Journal of Nonparametric Statistics , 13, 631-645.

- D. Bertsekas, D (2012). *Dynamic Programming and Optimal Control*, Athena Scientific, Nashua, Volume I, 03061-0805.

- Best, M.J. and Grauer, R. (1991). *On the sensitivity of mean-variance efficient Portfolios to changes in asset means : Some analytical and computational results*, Review of Financial Studies , 4, 2, 315–342.

- Black, F. and Litterman, R. (1992). *Global portfolio optimization*. Financial Analysts Journal, September/October, 28-43.

- Blattberg, R.C., Gonedes, N.J. (1974). *A Comparison of the Stable and Student Distributions as statistical model for stock prices* , Journal of Business, 47, 2, 244-280.

- Bond, S.A. and Satchell, S. (2006). *Asymmetry and downside risk in foreign exchange markets*, The European Journal of Finance, 12, 4, 313-32.

- Branco, M.D. and Dey, D.K. (2001). *A general class of multivariate skew-elliptical distributions*, Journal of Multivariate Analysis, 79, 99–113.

- Broquet, C., Cobbaut, R.G. and Van Den Berg, A. (2004). *Gestion de portefeuille*, De Boeck Supérieur.

- Burton, G. M., (2003). *The efficient market hypothesis and its critics*, Journal of Economic Perspectives, 17, 1, 59-82.

- Bodnar, G.M., Hayt, G.S. and Marston, R.C. (1998). *1998 Wharton Survey of Financial Risk Management by US Non-Financial Firms*,Financial Management, 27, 4, 70 – 91.

- Bond, S.A. and Satchell, S. (2002)., *Statistical Properties of the Sample Semi-Variance, with an Application to Emerging Markets Data*, journal Applied Mathematical Finance, 9, 4, 219-39.

- Campbell, J.Y., Lo, A.W. and Mackinlay, A.G. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton.

- Campbell, R. Huisman, R. and Koedijk, K. (2001). *Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework*, Journal of Banking and Finance, 25, 9, 1789-1804.

- Campbel, R., Harvey, J., Jiechty, C., Liechty, M.W and Muller, P. (2010). *Portfolio selection with higher moments* , journal of quantitative Finance , 10, 5, 469–485.

- Chang, T.J., Meade, N., Beasley, J.E. and Sharaiha, Y.M. (2000). *For Cardinality Constrained Portfolio Optimization*, Computers and Operations Research , 27, 13, 1271-1302.

- Chung, Y., Johnson, H. and Schill, M. (2006). *Asset Pricing when Returns are Nonnormal : Fama- French factors vs Higher-Order Systematic Co-Moments*, Journal of Business , 79, 923-940.

- Chunhachinda P., Dandapani, K., Hamid, S. and Prakash, A.J. (1997). *Portfolio selection and skewness : Evidence from international stock markets*, Journal of banking and Finance , 21, 143-167.

- Coleman, M., Mansour, A. (2005). *Real Estate in the Real World : Dealing With Non-Normality and Risk in an Asset Allocation Model*, Journal of Real Estate Portfolio Management, 11, 1, 37-53.

- Daboussi, S. (2006). *L'asymétrie des rendements et l'évaluation des actifs financiers dans le cadre du downside risk*, Thèse de doctorat, Institut Supérieur de Gestion de Tunis.

- Danielsson, J. and de Vries, C.G.(1997). *Tail index and quantile estimation with very high frequency data*, Journal of Empirical Finance, 4, 241-257.

- Di Crescenzo, A. (1999). *A Probabilistic Analogue of the Mean Value Theorem and its Applications to Reliability Theory*, Journal of Applied Probability, 36, 706-719.

- Dowd, K. (1998). *Beyond Value at Risk : the New Science of Risk Management*, John Wiley and Sons, New York.

- Duffie, D. and Pan, J. (1997). *An Overview of Value-at-Risk*, Journal of Derivatives , 4, 7–49.

- Dumas, B. and Luiciano, E. (1991). *An Exact Solution to a Dynamic Portfolio Choice Problem under Transactions Costs*, Journal of Finance, XLVI, 577-595.

- Eastman, W. (1951). *Linear Programming with Pattern Constraints,* Proceedings of the American Mathematical Society II, 6.

- Ederington, L. H. (1986). *Why Split Ratings Occur*, Financial Management, 15, 1, 37-47.

- Elton, E., Martin , J., Gruber, J. and Padberg, M.W. (1976). *Simple Criteria For Optimal Portfolio Selection*, Journal of Finance , 31, 5, 1341-1357.

- Embrechts, P., Kluppelberg, S., and T. Mikosch (1997). *Extremal Events in Finance and Insurance*,

  Springer Verlag.

- Esch, L., Kieiffer, L., Lopez, T. (1997). *Value at risk : vers un risk management moderne*, DeBoeck, Bruxelles.

- Estrada, J. (2002). *Systematic Risk in Emerging Markets : The D-CAPM*, Emerging Markets Review, 3, 365-379.

- Estrada, J. (2004). *Mean Semivariance Behavior : An Alternative Behavioral Model*, Journal of Emerging Market Finance, 3, 231-248.

- Estrada, J. (2006). *Downside Risk in Practice*, Journal of Applied Corporate Finance, 18,1, 117-125.

- Estrada, J. (2007). *Mean-Semivariance Behavior : Downside Risk and Capital Asset Pricing*, International Review of Economics and Finance, 16, 2, 169-185.

- Estrada, J. (2008). *Mean- Semivariance optimisation : A heuristic approach*, Journal of Applied Finance, 18, 1, 57-72.

- Fang, H. , Lai, T. (1997). *Co-kurtosis and Capital Asset Pricing*, Financial Review, 32, 293–307.

- Fernández, A. and Gómez, S. (2007). *Portfolio selection using neural networks*, Journal of Computers and Operations Research, 34, 1177–1191.

- Fischer, B., Jensen, M.C. and Scholes, M. (1972). *The Capital Asset Pricing Model : Some Empirical Tests*, Studies in the Theory of Capital Markets . ed. New York : Praeger, 79-121.

- Fischer, B. (1972). *Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing*, Journal of Business, 45, 3, 444-454.

- Fischer, B. and Scholes, M.(1973). *The pricing of options and corporate liabilities* , The journal of political economy, 81, 3, 637-654 .

- Fama, E.F. (1970). *Efficient Capital Markets : A Review of Theory and Empirical Work*, The Journal of Finance, 25, 2, 383-417.

- Fishburn, P. C. (1977). *Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns*, American Economic Review, 6, 116-126.

- Garlappi, L., Skoulakis, G. (2011). *Taylor series approximations to expected utility and optimal portfolio choice*, Mathematics and Financial Economics, 5, 121-156.

- N. Garleanu, N. and and L.H. Pedersen, L.H.(2013). *Dynamic Trading with Predictable Returns and Transaction Costs*, Journal of Finance, 68, 6, 2309-2339.

- Ghorbel, A. and Trabelsi, A. (2008). *Predictive performance of conditional Extreme Value Theory in Value-at-Risk estimation*, International Journal of Monetary Economics and Finance, Inderscience Enterprises Ltd, 1, 2, 121-148.

- Glasserman, P. , Heidelberger, P. and Shahabuddin, P. (2002). *portfolio value-at-riskwithheavy-tailedrisk factors*, Mathematical Finance, 12, 3 , 239–26.
- Goorbergh Van den, R.W.J. (1999). *Value-at-Risk and least squares tail index estimation*, Research Memorandum WO E , Nr. 578, De Nederlandsche Bank.
- Goorbergh van den, R.W.J. and Vlaar, P. (1999). *Value-at-Risk Analysis of Stock Returns Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation ?*, De Nederlandsche Bank Staff Reports , March 1999, N. 40.
- Grabiszewski, K. (2012).*Approximating a Continuous Utility Function over a Set of Lotteries*, working paper, University of Mexico.
- Graff, R.A. et Young, M.S (1996). *Real Estate Return Correlations : Real-World Limitations on Relationships Inferred*, Journal of Real Estate Finance and Economics, 13, 121-42.
- Hanoch, G. and Levy, H. (1970). *The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk*, Review of Economic Studies, 36, 107, 335-46.
- Harlow, W.V. and Rao, R.K.S. (1989). *Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework : Theory and Evidence*, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 24, 3, 285-311.
- Harlow, W. V. (1991). *Asset Allocation in a Downside-Risk Framework*, Financial Analysts Journal, 47, 28-40.
- Harvey, C. R. and Siddique, A. (2000 a). *Conditional Skewness in Asset Pricing Tests*, Journal of Finance , 55, 1263–1295.
- Harvey, C.R. and Siddique, A. (2000 b). *Time-Varying Conditional Skewness and the Market Risk Premium,* Research in Banking and Finance , 1, 27–60.
- Hayne, E. L. (1999). *Beyond Mean-Variance : Performance Measurement in a nonsymmetrical world*, Financial analysts journal, 27-36 .
- Hwang, S., and Satchell, S. E. (1999). *Modeling emerging market risk premia using higher moments*, International Journal of Finance and Economics, 4, 271-296.
- Hendricks, D. (1996). *Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data* , Economic Policy Review, 2, 1, 39-70.
- Henk, G. and Hallerbach, W. (1999). *Variance vs. Downside Risk : Is There Really That Much Difference*, European Journal of Operational Research , 114, 304-319.
- Hlawitschka, W. (1994). *The Empirical Nature of Taylor-Series Approximations to Expected Utility*, American Economic Review , 84, 713-719.
- Hogan, W. and Warren, J. (1972). *Computation of the Efficient Boundary in the E-S Portfolio Selection Model*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 7, 4, 1881-1896.
- Hogan, W. and Warren, J. (1974). *Toward the Development of an Equilibrium Capital-Market Model Based on Semivariance*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 9, 1, 1-11.

- Huang, H. and Lee, T.-H. (2010). *To Combine Forecasts or to Combine Information ?*, Econometric Reviews , 29, 5, 534-570.
- Hung, D.C.-H., Shackleton, M., Xu, X.,(2004). *CAPM, higher comoment and factor models of UK Stock returns*, J. Bus. Finance Acc., 31, 12, 87 –112.
- Hwang, S., Satchell, S.E. (1999). *Modelling emerging market risk premia using higher moments* , International Journal of Finance and Economics, 4, 4, 271–296.
- Jaaman, S.F., Hoe, W., Isa, Z. (20011). *Higher moment portfolio management with downside risk*, Journal of Social and Management Science, 2,2, 220-224.
- Jurczenko, E. and Maillet, B. (2003). *The four-moment capital asset pricing model : some basic results*, Chambre de commerce et d'industrie.
- Jacobs, B. I., Levy, K.N., and Markowitz, H.M. (2005). *Portfolio Optimization with Factors, Scenarios, and Realistic Short Positions*, Operations Research, 53, 4, 586–599.
- Jensen, M. (1978). *Some anomalous evidence regarding market efficiency*, Journal of Financial Economics, 6, 95–101.
- Jondeau, E. and Rockinger, M. (2006). *Optimal Portfolio Allocation Under Higher Moments*, Journal of the European Financial Management Association, 12 , 29–67 .
- Jorion, P. (2000). *Value at Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk* , McGraw-Hil.
- Jurczenko E. and Maillet, B. (2001). *The Three-CAPM : Theoretical Foundations and an Asset Pricing Model Comparison in a Unified Framework* , *Developments in Forecast Combination and Portfolio Choice , C. Dunis, A. Timmermann and J. Moody (Eds), John Wiley and Sons, Ltd Chichester*, 239—273.
- Jurczenko E. and Maillet, B. (2006 a). *Theoretical Foundations of Asset Allocation and Pricing Models with Higher-order Moments* , Multi-moment Asset Allocation and Pricing Models, John Wiley and Sons , Ltd , 1-32.
- Jurczenko E. and Maillet, B. (2006 b). *The Four-moment Capital Asset Pricing Model : Between Asset Pricing and A sset Allocation*, Multi–moment Asset Allocation and Pricing Model, John Wiley and Sons, Ltd, 113-163.
- Jurczenko E., Maillet, B. and Murlin P., (2008). *Efficient Frontier for Robust Higher-order Moment Portfolio Selection*, CES Working Papers 62-70.
- Jurczenko E., Yanou, G. (2010). *Fund of Hedge Funds : A Robust Nonparametric Multi-moment Approach*, The Recent Trend of Hedge Fund Strategies, Nova Science Newyork, 36, 21-56.
- Kahneman, D. and Tversky, A. (1979). *Prospect Theory : An Analysis of Decision under Risk*, Econometrica, 47, 2, 263-291.
- Kaplanski, G. and Kroll, Y. (2002). *VAR Risk Measures Versus Traditional Risk Measures : An Analysis and Survey* , Journal of Risk, 4, 3, 1-27.

- Kaplanski, G. (2004). *Traditional Beta, Downside Risk Beta and Market Risk Premiums*, Quarterly Review of Economics and Finance, 44, 5, 636-653.

- Konno, H. and Suzuki, K. (1995). *A mean- variance-skewness portfolio optimization model*, Journal of the Operations Research Society of Japan , 38, 2, 173–187.

- Kraus, A. and Litzenberger, R. (1976). *Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets*, Journal of Finance, 33, 303-310.

- Lai, T. (1991). *Portfolio Selection with Skewness*, Review of Quantitative Finance and Accounting, 1, 293-305.

- Lai, K. K., Yu, L. and Wang, S. (2006). *Mean-Variance-Skewness-Kurtosis-based Portfolio Optimization*, Proceedings of the First International Multi-Symposiums on Computer and Computational Sciences, 2, 292 -297.

- Lee, W. Y. and Rao, R. (1988). *Mean Lower Partial Moment Valuat ion and Lognormally Distributed Returns*, Management Science, 34, 446-453.

- Lee, E., Park, Y. and Shin, J. (2009). *Large engineering project risk management using a Bayesian belief network, Expert Systems with Applications*, An International Journal, 36, 3, 5880-5887.

- Letmark, M. (2010). *Robustness of Conditional Value at Risk when Measuring Market Risk Across Different Asset Classes* , Master Thesis , Royal Institute of Technology .

- Levy, H. and Sarnat, M. (1972 a). *Investment and Portfolio Analysis* , New York, Wiley.

- Levy, H. and Sarnat, M. (1972 b). *Safety first–an expected utility principle*, Journal of finance and quantitative analysis, 9,1063-1064.

- Lhabitant, F.S. (1998). *Portfolio management and model performance evaluation with contingent claims* , Ph.D. thesis, University of Lausanne.

- Lhabitant, F.S. (1998). *Enhancing portfolio performance using options strategies : why beating the market is easy*, European Research Symposium Proceedings, Chicago Board of Trade (ed), 149-213.

- Lévy, H., and Sarnat, M. (1984). *Portfolio and Investment Selection : Theory and Practice*, Prentice Hall International,

- Lintner J., (1965). *The Value of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*, Review of Economics and Statistics, 47, 1, 13-37.

- Lioui, A. and Poncet, P. (2004). *Dynamic asset pricing with non-redundant forwards*, Journal of Economic Dynamics and Control, Elsevier, 27, 7, 1163-1180.

- Machina M. and Müller S. M. (1987). *Moment preferences and polynomial utility*, Economics Letters, 23, 349-353.

- Maillet, B., Hamidi, B., Jurczenko (2009). *A CAViaR time-varying proportion portfolio insurance*, Bankers, Market and Investors, 102, 4-21.

- Maillet, B., Hurlin, C., Kouontchou, P. (2010). *Un MEDAF à Plusieurs Moments réalisés*, Brussels Economic Review, 53, 457-480.
- Maillet, B., Boucher, C., Danielsson, J., Kouontchou, P. (2014). *Risk models-at-risk*, Journal of Banking and Finance, 44, 72-92.
- Maillet, B. and Boucher, C. (2015). *Macroéconomie-en-risque*, 17 pages – forthcoming in Revue Economique.
- Maillet, B. , Merlin, P. (2015). *Robust Higher-order Moments and Efficient Portfolio Selection*, Management Science, 64 pages.
- Maillet B., Tokpavi S. and Vaucher, B. (2015). *Global Minimum Variance Portfolio Optimisation under some Model Risk : A Robust Regression-based Approach*, European Journal of Operational Research, 244, 1, 289-299.
- Maillet, B. and Médecin, J.P. (2015). *Extreme Volatilities, Financial Crises and L-Moment Estimations of Tail -indexes*, 59 pages , the Journal of Applied Econometrics.
- Maillet, B. , Hamidi, B., Hurlin, C., Kouontchou, P. (2015), *A DARE for VaR*, Finance, 36,
- Manganelli, S. and Engle, R.F. (2001). *Value at risk models in finance*, Finance ECB working paper N°75.
- Mansour S. and Hellara, S.(2014). *The impact of higher order moments on market risk assessment*, Procedia Economics and Finance, 13, 143 – 153 .
- Mamoghli, C. and Daboussi, S. (2008). *Optimisation de portefeuille des hedge funds dans le cadre du downside risk*, SSRN Electronic Journal 11/2008.
- Maringer, D., Parpas, P. (2009). *Global optimization of higher order moments in portfolio selection*, Journal of Global Optimisation, 43, 219,-230.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments* , Cowles Foundation Monograph Wiley, New York.
- Markowitz, H., Todd, P., Xu, G., and Yamane, Y. (1993). *Computation of Mean-Semivariance Efficient Sets by the Critical Line Algorithm*, Annals of Operations Research , 45, 307–317.
- Markowitz, H. (1952). *Portfolio selection*, Journal of Finance, 7, 77–91.
- Markowitz, H. (1987). *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Basil Blackwell, Cambridge.
- Markowitz, H. (1991). *Portfolio Selection, Efficiency Diversification of Investments*, Cowles Foundation Monograph 16, Yale University Press, 2nd ed. : Basil Blackwell, Cambridge.
- Markowitz, H., Todd, P., Xu, G. and Yamane, Y. (1993). *Computation of mean-Semivariance efficient sets by the Critical Line Algorithm* , Annals of Operations Research, 45, 1, 307-317.
- Markowitz, H. (1999). *The early history of portfolio theory*, Financial Analysts Journal 55, 5–16.

- Martellini, L. and et Ziemann, V (2010). *Improved Forecasts of Higher Order Moments and Co-Moments of Asset Returns and Implications for Portfolio Selection* , Review of Financial Studies , 23, 4, 1467-1502 .
- Mausser, H. and Romanko, (2014). *CVaR proxies for minimizing scenario-based Value-at-Risk*, Journal of Industrial and Management Optimization, 10, 4, 1109-1127.
- Mandelbrot, B. (1963). *The Variation of Certain Speculative Prices*, Journal of Business, 36, 4, 394-419.
- Mhiri, M, Prigent, J.L. (2010). *International Portfolio Optimization with Higher Moments*, International Journal of Economics and Finance, 2,5, 157-169.
- Niedermayer, A. and Niedermayer, D. (2006). *Markowitz's Critical Line Algorithm*, Universitaet Bern, Departement Volkswirtschaft.
- Michaud, R. (1989). *Markowitz optimisation enigma : Is optimised Optimal ?*, Financial analysts journal, 31–42.
- Michaud, R. (1998). *Efficient Asset Management : A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization*, Oxford University Press.
- Mills, T. C. (1995). *Modelling Skewness and Kurtosis in the London Stock Exchange FT-SE Index Return Distributions,* The Statistician , 44, 3, 323–332.
- Milton, F. and Savage, L.J. (1948). *Utility Analysis of Choices Involving Risk*, Journal of Political Economy, 56, 4, 279–304.
- Myer, J., and Webb, J.R. (1991). *Are commercial Real Estate Returns Normally Distributed ?*, NCREIF White Paper.
- Nawrocki, D.N. (1983). *A Comparison of Risk Measures When Used in a Simple Portfolio Selection Heuristic.* Journal of Business Finance and Accounting , 10, 2, 183-94.
- Nawrocki, D. and Staples, K. (1989). *A Customized LPM Risk Measure for Portfolio Analysis*, Applied Economics, 21, 205-218.
- Nawrocki, D.N. (1999). *A Brief History of Downside Risk Measures*, Journal of Investing , 8,3, 9-25.
- Niedermayer, A., Niedermayer, D. (2007). *Applying Markowitz's Critical Line Algorithm*, Handdook of Portfolio construction :Contemporary Applications of Markowitz Techniques, ed John B. Guerard, Newyor, Springer, 383-401.
- Pla-Santamaria, D., Bravo, M. (2013). *Portfolio optimization based on downside risk : a mean-Semivariance efficient frontier from Dow Jones blue chips*, Annals of Operations Research, 205, 1, 189-201.
- Prakash, A., Chang, C., and Pactwa, T. (2003). *Selecting a Portfolio with Skewness : Recent Evidence from US, European, and Latin American Equity Markets*, Journal of Banking and Finance , 27, 7, 1375-1390.
- Premaratne, Bera. A.K. (2000). *Modeling asymmetry and excess kurtosis in stock return data*. Illinois Research and Reference Working Paper No. 00-123.

- Rockafellar , R.T. and Uryasev , S. (2000). *Optimization of Conditional Value-At -Risk*, The Journal of Risk, 2, 3, 21-41.
- Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2001). *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*, Research Report 2001-5. ISE Dept., University of Florida.
- Ruan, K., and Fukushima, M. (2011). *Robust portfolio selection with a combined WCVaR and factor model*, Technical report, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, Kyoto, Japan.
- Rubinstein, M.E. (1973). *A mean-variance synthesis of corporate financial theory*, The Journal of Finance, 28, 1, 167–181.
- Roy, A.D. (1952). *Safety First and the Holding of Assets*, Econometrica, 20, 3 , 431-449.
- Samuelson, P. (1970). *The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in terms of Means, Variances and Higher Moments*, The Review of Economic Studies, 37, 4 , 537-542.
- Scott, R.C., and Horvath, P. (1980). *On The Direction of Preference for Moments of Higher Order Than The Variance* , The Journal of Finance, 35, 4, 915–919.
- Saunders, A. (1999). *Credit Risk Measurement : New Approaches to Value-at-Risk and Other Paradigms*, Wiley ; 1 edition , 240 pages .
- Sarykalin, S., Serraino, G. and Uryasev, S. (2008). *Value-at-Risk vs Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization*, tutorials in operational reasearch.
- Satchell, S. and Bond, S.A. (2006). *Asymmetry, Loss Aversion and Forecasting*, Journal of Business, 79, 4, 1809-30.
- Savage, L. J. (1954). *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York second revised edition Dover, New York, 1972.
- Sharpe, W. F. (1963). *A simplified model for portfolio analysis*, Management Science 9,277–293.
- Sharpe, W.F. (1964). *Capital asset prices : A theory of market equilibrium under conditions of risk*, Journal of Finance, 19, 425–442.
- Shaw, W.T. (2011). *Risk, VaR, CVaR and their associated Portfolio Optimizations when Asset Returns have a Multivariate Student T Distribution*, working paper.
- Sivaramakrishnan, V., Jeet, I., and Vandenbussch, D. (2015). *Multi-period Portfolio Optimization With Alpha Decay*, Axioma Research Paper, No. 055, February 19.
- Stanley j. Kon (1984). *Models of Stock Returns-A Comparison*, The Journal of Finance, 39, 1, 147–165.
- Sun, Q. and Yan, Y. (2003). *Skewness persistence with optimal portfolio selection*, Journal of Banking and Finance , 27, 111-112.
- Taleb, N. N., Golstein, D. G., and Spitznagel, M. (2009). *The Six Mistakes Executives Make in Risk Management*, Harvard Business Review .

- Tayi, G. and Leonard, P. (1988). *Bank Balance -Sheet Management : An Alternative Multi-Objective Model*, Journal of the Operational Research Society, 39, 401 - 410.
- Tobin, J. (1958). *Liquidity preference as behavior towards risk*, Review of Economic Studies, 25, 65–86.
- Tobin, J. (1970). *Money and Income : Post Hoc Ergo Propter Hoc ?*,The Quarterly Journal of Economics , 84, 2. 301-317.
- Trojani, F. Vanini, P. and Vignola, P. (2002). *A Note on the Three-Portfolios Matching Problem,* European Financial Management, European Financial Management Association, 8, 4, 515-527.
- Unser, M. (2000). *Lower partial moments as measures of perceived risk : An experimental study*, Journal of Economic Psychology, 21, 3, 253-280.
- Vanini, P. and Vignola, L. (2001). *Portfolio Selection*, Lecture Notes ETH Zurich.
- Vijay, S., Bawa, Lindenber, E.B. (1977). *Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework*, Journal of Financial Economics , 5, 2, 189-200.
- Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press .
- Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947). *Theory of Games and Economic Behavior* , second edition Princeton UP, Princeton, NJ first edition.
- Vorst, T. (2001). *Optimal Portfolios under a Value at Risk Constraint*, Casacuberta, R.M. Miro-Roig, J. Verdera and S. Xambo (eds.), Proceedings of the European Congress of Mathematics, Barcelona, Birkhauser, Basel, forthcoming.
- Wolfe, P. (1959). *The Simplex Method for Quadratic Programming*, Econometrica , 27, 3, 382–398.
- Xiong, J.X., Idzorek, T. (2010). *Mean-Variance Versus Mean-Conditional Value-at-Risk Optimization : The Impact of Incorporating Fat Tails and Skewness into the Asset Allocation Decision*, Morningstar.
- Yao, H., Li, Z., Lai, Y. (2013). *Mean–CVaR portfolio selection : A nonparametric estimation framework*, Computers and Operations Research, 40, 4, 1014-1022.
- Yu, L., Wang, S. and Lai, K. K. (2008). *Neural Network -Based Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Selection*, Computers and Operations Research, 35, 34-46.
- Zhu, S., Fukushima, M. (2009). *Worst-case conditional value-at-risk with application to robust portfolio management*, Journal Operational Research, 57, 5, 1155–1168.

2 Mean and Median-Based Nonparametric Estimation of Returns in Mean-Downside Risk Portfolio Frontier

Sommaire

2.1 Introduction **66**

2.2 DSR : the traditional approach **68**

2.2.1 Case of a portfolio with two assets 68

2.2.2 Case of a portfolio with *m* assets 70

2.3 DSR : The kernel approach **72**

2.3.1 Basic Background 72

2.3.2 Kernel mean estimation 73

2.3.3 Kernel median estimation 74

2.4 Nonparametric DSR minimization algorithm **75**

2.4.1 Case of a portfolio with two assets 75

2.4.2 Case of a portfolio with *m* assets 76

2.5 Empirical analysis **79**

2.5.1 Data description 79

2.5.2 Analysis of results 81

2.6 Conclusion **90**

2.7 Bibliography **91**

Abstract : *The DownSide Risk (DSR) model for portfolio optimisation allows to overcome the drawbacks of the classical Mean-Variance model concerning the asymmetry of returns and the risk perception of investors. This model optimization deals with a positive definite matrix that is endogenous with respect to portfolio weights. This aspect makes the problem far more difficult to handle. For this purpose, Athayde (2001) developed a new recursive minimization procedure that ensures the convergence to the solution. However, when a finite number of observations is available, the portfolio frontier presents some discontinuity and is not very smooth. In order to overcome that, Athayde (2003) proposed a Mean Kernel estimation of the returns, so as to create a smoother portfolio frontier. This technique provides an effect similar to the case in*

which continuous observations are available. In this paper, Athayde model is reformulated and clarified. Then, taking advantage on the robustness of the median, another nonparametric approach based on Median Kernel returns estimation is proposed in order to construct a portfolio frontier. A new version of Athayde's algorithm will be exhibited. Finally, the properties of this improved portfolio frontier are studied and analysed on the French Stock Market.

Keywords : Risk, Kernel Method, Mean Nonparametric Estimation, Median Nonparametric Estimation, Portefolio Efficient Frontier, Semivariance.

2.1 Introduction

Optimizing asset allocation is simply defined as the process of mixing asset weights of a portfolio within the constraints of an investor's capital resources to yield the most favourable risk-return trade-off. For typical risk-averse investors, an optimal combination of investment assets that gives a lower risk and a higher return is always preferred (see Markowitz (1952)). In a complete market without riskless lending and borrowing, a whole range of efficient asset portfolios having the stochastic dominance features could be determined, which collectively delineates a convex Mean-Variance frontier.

The classical Mean-Variance (M-V) portfolio optimization model introduced by Markowitz (1952) aims at determining the proportions ω_i of a given capital to be invested in each asset i belonging to a predetermined set or market so as to minimize the risk of the return of the whole portfolio for specified expected return. The risk is measured by the variance. More precisely, suppose that m assets are available, and denote by μ_i the expected return of asset i , and σ_{ij} the Covariance of returns of assets i and j for $i, j = 1, \ldots, m$. Let E^* be the required level of return for the portfolio, the classical M-V model is the following optimization program :

$$\min_{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \tag{2.1}$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^{m} \omega_i \mu_i = E^* \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1.$$

This is a convex quadratic programming problem which can be solved by a number of efficient algorithms with a moderate computational effort even for large instance. This problem can be solved for a specific value of E^* or, alternatively, for several values of E^* thus generating the minimum variance set. Either way, it is important to notice, firstly, that the risk of the portfolio can be expressed as a function of the risk of the individual assets in the portfolio ; secondly, that all the Variances, Covariances, and Expected Returns of the individual assets are exogenous variables.

However, the use of variance as a risk measure is a questionable measure of risk for at least three reasons : (1) it makes no distinction between gains and losses, (2) it is an appropriate measure of risk only when the underlying distribution of returns is symmetric and (3) it can be applied as a risk measure only when the underlying distribution of returns is Normal.

Markowitz (1959) recognised the "asymmetrical" inefficiencies inherited in the traditional M-V model. To overcome the drawbacks of this model, he suggested to use a DownSide Risk (DSR) measured by

$$\text{DSR} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{\top} [\min(r_{pt} - B, 0)]^2, \tag{2.2}$$

where r_{pt} denotes the returns of the portfolio and B any benchmark return chosen by the investor. The benchmark can be equal to 0 (or the risk-free rate), any stock market index (CAC 40) or the mean μ of the portfolio return. Note that if $B = \mu$, the DSR is the so called Semivariance. The DSR is a more robust measure of asset risk that focuses only on the risks below a target rate of return. This measure of risk is a more plausible for several reasons. Firstly, investors obviously do not dislike upside volatility ; they only dislike downside volatility, secondly, the DSR is more useful than the variance when the underlying distribution of returns is asymmetric and just as useful when the underlying distribution is symmetric ; in other words, the DSR is at least a measure of risk as useful as the variance, and finally the DSR combines into one measure the information provided by two statistics, variance and skewness, thus making it possible to use a one-factor model to estimate required returns. Then, the optimization model can be written as follows :

$$\min_{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[\min(r_{pt} - B, 0)]^2 \tag{2.3}$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^{m} \omega_i \mu_i = E^* \qquad \sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1.$$

However, finding the portfolio with minimum DSR is not an easy task. The major obstacle to get the solution of this problem is that the Semicovariance matrix is endogenous ; that is, a change in weights affects the periods in witch the portfolio under-performs the target rate of return, which in turn affects the element of the Semicovariance matrix.
Many approaches are suggested to estimate the portfolio semivariance. For example, Markowitz (1959) suggested the following estimator :

$$\Sigma_{pB}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \omega_i \omega_j \Sigma_{ijB}, \quad \text{where} \quad \Sigma_{ijB} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{K}(r_{it} - B)(r_{jt} - B),$$

where periods 1 to K are periods in witch the portfolio under-performs the benchmark B.
The advantage of this estimator is that provides an exact estimation of the portfolio Semivariance. However, the Semicovariance matrix remains endogenous. Many authors propose different ways to resolve problem (3). Among them, Hogan and Warren (1974) proposed to use the the Frank-Wolf algorithm. Ang (1975) proposed to linearise the Semivariance so that the optimization problem can be solved using linear programming. Harlow (1991) also considered problem (3) and generated Mean-Semivariance efficient frontier, which he compares to the Mean-Variance efficient frontiers. Mamoghli and Daboussi (2008) improved Harlow approach and their model allows to overcome the problem of inequality of the Semicovariance measures which occur in the Mean-Semivariance model of Harlow. Markowitz et al. (1993) transformed the Mean-Semivariance problem into a quadratic problem by adding fictitious securities. Estrada (2008) proposed a simple and accurate heuristic approach that yields a symmetric and exogenous Semicovariance matrix, which enables the determination of Mean-Semivariance optimal portfolios by using the well known closed-form solutions of Mean-Variance problem. Athayde (2003) generalised his own iterative algorithm developed in (2001) to construct a Mean-DownSide risk portfolio frontier. The major contribution in the previous paper is to replace returns by their mean kernel estimations (nonparametric mean regressions). The great advantage of this technique is to provide an effect similar to the case in which observations are continuous. The new portfolio frontier has a smoother shape than the traditional one. Although Athayde contribution is innovative, his two papers are unstructured with no simulations and no

applications. Another neglected aspect which deserves serious attention concerns the theory : great confusion is palpable in the estimators writing.
In this paper, Athayde's work is revisited and improved. Various applications are proposed. Taking advantage on the robustness of the median, another method to optimize a portfolio is exhibited and studied. This method is based on nonparametric estimation of conditional median. Returns will be replaced by their non parametric median estimators. Additionally, the optimal portfolio will be obtained under positivity constraints (all the ω_i are positive) and Short Selling constraint ($\omega_i \in \mathbb{R}$).
The paper is organised as follows. Section 2 presents the classical concepts of the DSR and the Athayde's algorithm optimisation. A general presentation of the nonparametric estimators is given in Section 3. In Section 4, the previous algorithm is extended to incorporate nonparametric returns estimation, based on conditional mean and conditional median approaches, in the DSR measures. Section 5 is devoted to a real data analysis of the French Stock Market. Finally, some conclusions and perspectives are discussed in Section 6.

2.2 DSR : the traditional approach

Although the redaction of this Section is substantially based on Athayde' s paper (2003), some developments have been corrected, clarified and improved.

2.2.1 Case of a portfolio with two assets

2.2.1.1 Formal framework

To fix ideas, assume two risky assets a and b are available. The return of a portfolio p that has ω units of a and $(1-\omega)$ units of b, at time t can be expressed as :

$$r_{pt}(\omega) = \omega r_{at} + (1-\omega) r_{bt}, \tag{2.4}$$

where r_{it} stands for the return of asset i at time t.
Consider that observations start on date time 1 and end on date T,

$$\mathrm{DSR}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[\min(r_{pt}(\omega) - B, 0)]^2. \tag{2.5}$$

The value of ω at time t that makes the portfolio's return equal to the benchmark B is given by :

$$\omega_t = \frac{B - r_{bt}}{r_{at} - r_{bt}}. \tag{2.6}$$

If only this observation is available, assuming that $r_{at} > r_{bt}$, the DSR of this portfolio, respectively its first and second derivative with respect to ω, would be given by :

$$\begin{cases} \mathrm{DSR}(\omega) & = [\omega(r_{at} - r_{bt}) - (B - r_{bt})]^2 \text{ if } \omega < \omega_t, \\ & = 0 \text{ otherwise .} \\ \mathrm{DSR}'(\omega) & = 2[\omega(r_{at} - r_{bt}) - (B - r_{bt})] \times (r_{at} - r_{bt}) < 0 \text{ if } \omega < \omega_t, \\ & = 0 \text{ otherwise .} \\ \mathrm{DSR}''(\omega) & = 2(r_{at} - r_{bt})^2 > 0 \text{ if } \omega < \omega_t, , \\ & = 0 \text{ otherwise .} \end{cases} \tag{2.7}$$

The symmetric case, i.e when $r_{at} < r_{bt}$, is treated similarly.

Remark 1 . To compute the DSR as a function of the weight ω, the piecewise quadratic functions (when $r_{at} > r_{bt}$ and when $r_{at} < r_{bt}$) should be added . Every time, crossing points like w_t implies a change in the convexity of the curve. Including all observations, the whole DSR will be a curve as shown in Figure 2.1.

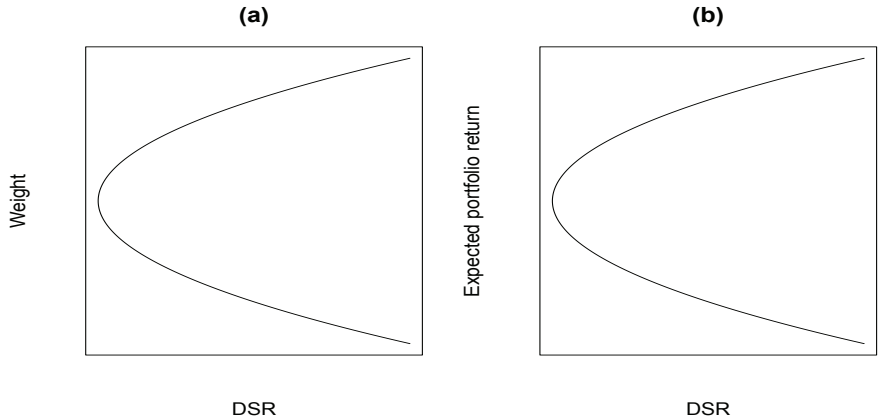

Figure 2.1: *DSR curves.*

The expected return of the portfolio will be given by :

$$E(r_p) = \omega E(r_a) + (1-\omega)E(r_b) \Leftrightarrow \frac{E(r_p) - E(r_b)}{E(r_a) - E(r_b)} = \omega. \tag{2.8}$$

From the linear relation between ω and r_p :

$$E(r_p) = \omega(E(r_a) - E(r_b)) + E(r_b),$$

the shape of the set DSR $\times$ $E(r_p)$ is drawn in Figure 2.1.

As it has been shown, this curve is a sum of segments of quadratic functions. The curve will become steeper and steeper as we move toward the extremes, in either directions. The more observations we have, the more quadratic functions will be added and smaller the segment of each will become. The changes in the convexity, when we move from one quadratic function to another will become more frequent and smoother. In the limit case, where we will have an infinite number of observations, each of these quadratic functions will degenerate to a single point, creating a continuous smooth changing in the convexity of the curve. Thus, in the bivariate case, the portfolio set and consequently the portfolio frontier will have a convex shape.

2.2.1.2 The algorithm

The goal here is to find the portfolio weights that give the minimum DSR, that is the vertex of the curve above should be determined. To this end, Athayde's algorithm, which is summarized below, is used :

step 1 : Start with an arbitrary portfolio ω_0 and compute its DSR. Then construct the set of date S_0 such that

$$S_0 = \{t | 1 \leq t \leq T \text{ and } r_{pt}(\omega_0) < B\},$$

and consider the following curve

$$\sigma_0^2(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{t\in S_0}(r_{pt}(\omega) - B)^2, \text{ where } r_{pt}(\omega) = \omega r_{at} + (1-\omega)r_{bt}.$$

Note that, to start the process, $\omega_0 = (1/2, 1/2)$ is used.

step 2 : Minimize $\sigma_0^2(\omega)$ over S_0 to get $\omega_1 = \arg\min_\omega \sigma_0^2(\omega)$. This is an ordinary quadratic problem getting a minimum at

$$\omega_1 = \frac{\sum_{t\in S_0}(r_{at} - r_{bt})(B - r_{bt})}{\sum_{t\in S_0}(r_{at} - r_{bt})^2},$$

calculate its DSR. Construct the set S_1 such that

$$S_1 = \{t|1 \leq t \leq T \text{ and } r_{pt}(\omega_1 < B\},$$

and consider the following quadratic curve

$$\sigma_1^2(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{t\in S_1}(r_{pt}(\omega) - B)^2, \text{ where } r_{pt}(\omega) = \omega r_{at} + (1-\omega)r_{bt}.$$

step 3 : Minimize $\sigma_1^2(\omega)$ over $S_1$to get $\omega_2 = \arg\min_\omega \sigma_1^2(\omega)$ which is :

$$\omega_2 = \frac{\sum_{t\in S_1}(r_{at} - r_{bt})(B - r_{bt})}{\sum_{t\in S_1}(r_{at} - r_{bt})^2},$$

calculate its DSR. Construct the set S_2 such that

$$S_2 = \{t|1 \leq t \leq T \text{ and } r_{pt}(\omega_2) < B\},$$

step 4 : Using S_2, like the previous steps, determine ω_3 that will give a new set S_3, and so on. The algorithm will stop after F iterations. It happens when $S_F = S_{F+1}$ and then the optimal portfolio weights are

$$\omega_{F,a} = \frac{\sum_{t\in S_F}(r_{at} - r_{bt})(B - r_{bt})}{\sum_{t\in S_F}(r_{at} - r_{bt})^2}, \quad \omega_{F,b} = 1 - \omega_{F,a}.$$

2.2.2 Case of a portfolio with *m* assets

In this section, the bivariate case is extrapolated to the multivariate one. The focus is only on the minimization algorithm. First, the Multivariate DownSide Risk portfolio is presented, then the portfolio frontier is exhibited.

2.2.2.1 The algorithm

Say that m assets are available, let $R_{jt} = r_{jt} - B$ the excess return of the asset j on the date t where B the chosen benchmark.

A given portfolio ω_0 is used for starting . A set S_0 of observations is selected in which the portfolio ω_0 had negative deviations. The following positive semi-definite matrix is then constructed :

$$\begin{aligned} M_0 &= \tfrac{1}{T}\textstyle\sum_{t\in S_0}\begin{bmatrix} R_{1t} \\ R_{2t} \\ \vdots \\ R_{mt} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{1t} & R_{2t} & \cdots & R_{mt} \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{T}\textstyle\sum_{t\in S_0}\begin{bmatrix} (R_{1t})^2 & R_{1t}R_{2t} & R_{1t}R_{mt} \\ R_{2t}R_{1t} & (R_{2t})^2 & R_{2t}R_{mt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{mt}R_{1t} & R_{mt}R_{2t} & (R_{mt})^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

The next step is to find the portfolio ω_1 that solves the following problem :

$$\min_{\omega} \omega^\top M_0 \omega \text{ with } \omega^\top \mathbf{1} = 1, \tag{2.10}$$

where $\mathbf{1}$ is a vector of 1s and $\omega^\top$ the transpose of the vector ω.

Using *Lagrangian Method* (see Annexe 1), the solution to the problem will be given by[1]

$$\omega_1 = \frac{M_0^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top M_0^{-1}\mathbf{1}}. \tag{2.11}$$

With the new portfolio ω_1, a set S_1 of observations that contains only negative excess returns of portfolio ω_1 is determined. A new positive semidefinite matrix M_1 is then constructed :

$$M_1 = \textstyle\sum_{t\in S_1}\begin{bmatrix} (R_{1t})^2 & R_{1t}R_{2t} & R_{1t}R_{mt} \\ R_{2t}R_{1t} & (R_{2t})^2 & R_{2t}R_{mt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{mt}R_{1t} & R_{mt}R_{2t} & (R_{mt})^2 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

The next step is to find the portfolio ω_2 that solves the following problem :

$$\min_{\omega} \omega^\top M_1 \omega \text{ such that } \omega^\top \mathbf{1} = 1. \tag{2.13}$$

As previously, the solution to the problem will be given by :

$$\omega_2 = \frac{M_1^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top M_1^{-1}\mathbf{1}}. \tag{2.14}$$

Then, the previous process is iterated to construct a sequence of matrices M_i until getting the first matrix M_F satisfying the criterion $M_F = M_{F+1}$. The optimal portfolio will be given by :

$$\omega_{F+1} = \frac{M_F^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top M_F^{-1}\mathbf{1}}. \tag{2.15}$$

This portfolio will give the minimum DSR.

Remark 2 It is clear that there are no constraints on the signs of weights $\omega_{i,1}, \omega_{i,2}, ..., \omega_{i,m}$ which make up the vector ω_i (on the step $i-1$). These constraints will be introduced in next sections. This is one of the contributions that make this work different from Athayde's one (2003).

[1]If M_0 is non-invertible, this means that we will have few observations, and that it will be possible to find a portfolio that will give us a null DSR. This is not an interesting case, it does not mean there is no DSR, it only means that the sample in question is poor, leaving us with few degrees of freedom.

2.2.2.2 The portfolio frontier

In terms of the portfolio frontier, the DSR will represent the vertex of the curve. In order to build the portfolio frontier, some other points on the efficient set should be found. Since the interest is in points with a higher expected return than the vertex, an expected return $E(r)$ a bit higher than the minimum DownSide risk portfolio above should be fixed. So the new recursive minimization procedure will take the following form :

$$\min_{\omega} \omega^\top M\omega \text{ such that } \omega^\top \mathbf{1} = 1 \text{ and } \omega^\top \mu = E^*, \tag{2.16}$$

where μ is the vector of expected returns and E^* the target return of the portfolio.

F iterations, with *the Lagrangian Method Optimisation* at each iteration, are used to achieve the convergence. The minimum DownSide Risk Portfolio weights with expected excess return E^* will be given by :

$$\omega_{F+1} = \frac{\alpha E(r) - \lambda}{\alpha\theta - \lambda^2} M_F^{-1}\mu + \frac{\theta - \lambda E^*}{\alpha\theta - \lambda^2} M_F^{-1}\mathbf{1}, \tag{2.17}$$

where $\alpha = \mathbf{1}^\top M_F^{-1}\mathbf{1}$, $\lambda = \mu^\top M_F^{-1}\mathbf{1}$ et $\theta = \mu^\top M_F^{-1}\mathbf{1}$.

The minimum DSR is obtained by pre-multiplying $\omega_F^\top M_F$ (25) :

$$DSR(\omega_{F+1}) = \frac{\alpha(E^*)^2 - 2\lambda E^* + \theta}{\alpha\theta - \lambda^2}. \tag{2.18}$$

Remark 3 The equation (2.18) shows that while the final matrix M_F does not change, DownSide risk will be a quadratic (parabola) function on the expected return, just like the bivariate case. However, if the expected return changes considerably, this leads to a new final matrix, and therefore a new quadratic function, because new values for α, λ and θ are got. The optimization algorithm given by (2.17) does not take into account the sign of the weights $\omega_{i,1}, \omega_{i,2}, ..., \omega_{i,m}$. A more efficiency analytic optimization program will be proposed.

The portfolio frontier will be described as a sequence of segments of different quadratic functions. This result is expected because the portfolio frontier is a convex combination of several bivariate cases (see above). To get a smoother frontier, more and more assets should be used, creating a similar effect as if we were adding more observations. Nonparametric technique allows to create a similar effect to those of continuous observations. Therefore, one can build a new portfolio frontier with a smoother shape, and avoid huge changes in the convexity.

2.3 DSR : The kernel approach

2.3.1 Basic Background

First meaning of nonparametric covers techniques that do not rely on data belonging to any particular distribution. In particular, they may be applied in situations where less is known about the application in question.
In the following, a return kernel density estimate is proposed. Kernel mean estimation of one point can be seen as a weighted average of the observations, in which the weight given to each observation decreases with its distance from the point in question.
First of all, some elements which will be used to define kernel estimators are introduced.

The kernel function $K(\cdot)$ **:** is a probability density function. For theoretical commodity, the following properties are supposed :

$$(a) \int zK(z)dz = 0 \qquad (b) \int z^2K(z)dz < \infty.$$

Some examples of kernels :

- Rectangular : $K(z) = \frac{1}{2}$ for $|z| < 1$, 0 otherwise.
- Triangular : $K(z) = 1 - |z|$ for $|z| < 1$, 0 otherwise.
- Biweight : $K(z) = \frac{15}{16}(1 - z^2)^2$ for $|z| < 1$, 0 otherwise.
- Epanechnikov : $K(z) = \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{5}z^2)$ for $|z| < \frac{1}{5}$, 0 otherwise.
- Gaussian : $K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{1}{2}z^2)$.

The bandwidth $h(T) := h$ **:** is a sequence of positive real numbers which decreases to 0 as T tends to infinity. It is also called the *the smoothing parameter*.

Remark 4 It has been shown in the statistical literature that the choice of the kernel does not affect a lot the nonparametric estimation procedure. However, the choice of the bandwidth is crucial.

2.3.2 Kernel mean estimation

2.3.2.1 Kernel mean return estimation

Given T return observations $r_t, t = 1, ..., T$, from a given asset or portfolio, the kernel estimator $\hat{f}(\cdot)$ of probability density return $f(\cdot)$ is defined by

$$\hat{f}(r_t) = \frac{1}{Th}\sum_{l=1}^{T} K\left(\frac{r_t - r_l}{h}\right). \tag{2.19}$$

It is characterized by the kernel K which determines the shape of the weighting function, and the bandwidth h which determines the width of the weighting function and hence the amount of smoothing. The two components determine the properties of the estimator. Theoretical (minimization of asymptotic errors) and practical (rule of thumb, cross validation, plug-in methods) researches had been carried out (and continue to be carried out) on the question of how one should select K and h in order to optimize the properties of the estimator. More details can be found in Pagan and Ullah (1999), Silverman (1986), Subramaniana (2002), Wang (2002) and Casanova and Lecompte (2015). To build a more sophisticated estimation of DSR, Athayde (2001, 2003) used the kernel estimator to replace all the observations $r_t, t = 1, ..., T$ by mean kernel estimators (mean regression) $\hat{r}_t, t = 1, ..., T$ which are a weighted *average* of the observations, in which the weight given to each observation decreases with its distance from the point in question.
The estimator $\hat{r}_t$ of some return r_t for a given asset or portfolio is then given by :

$$\hat{r}_t = \frac{\sum_{l=1}^{T} r_l K(\frac{r_t - r_l}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_t - r_l}{h})}. \tag{2.20}$$

2.3.2.2 Kernel mean and DSR estimation

Let $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...\omega_m)$ be a vector of weights, using (2.20), a new estimation of the DSR of a given portfolio with n assets, is defined as

$$\mathrm{DSR}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\min(\hat{r}_{pt} - B, 0)\right]^2, \hat{r}_{pt} = \omega\hat{r}_{1t} + \omega\hat{r}_{2t} + ... + \omega\hat{r}_{mt}, \tag{2.21}$$

where $\hat{r}_{jt}$, $j = 1 \ldots, m$, is the kernel mean estimator of the return r_{jt} of asset j on date t.
The construction of the algorithm to get the portfolio frontier with the new DSR, will be exhibited in Section 4. In the following, a new approach to estimate the DSR is proposed. This approach is based on kernel median estimation.

2.3.3 Kernel median estimation

2.3.3.1 General concept

The disadvantage of the mean regression is that it is sensitive to outliers and may be inappropriate in some cases, as when the distribution is multi-modal or highly asymmetric. This problem can be solved by using another useful descriptive statistic which is robust to heavy-tailed error distributions and outliers.
From theoretical point of view, if (X, Z) represents a random vector $\mathbb{R}^2$-valued and $F(.|X = x)$ the conditional distribution of Z given $X = x$, , the conditional median $m(x)$ of Z given $X = x$ is the solution of the following minimization problem :

$$m(x) = \arg\min_{y\in\mathbb{R}} \int |z - y| F(dz|X = x). \tag{2.22}$$

It is easy to get an estimator $\hat{m}(x)$ of $m(x)$ by replacing in (2.22) $F(dz|X = x)$ by an appropriate estimator $\hat{F}(.|X = x)$. Then

$$\hat{m}(x) = \arg\min_{y\in\mathbb{R}} \int |z - y| \hat{F}(dz|X = x). \tag{2.23}$$

More details on theoretical and applied properties of median (and more generally on quantiles) can be found in Berlinet et al (2001) or Gannoun et al (2003).

Remark 5 The conditional distribution function can be seen as a conditional expectation i.e. $E(1_{\{Z\leq z\}}|X = x) = F(z|X = x)$. Morover, if $F(.|X = x)$ is continuous and strictly increasing, the conditional median of Z given $X = x$ is obtained as follows :

$$m(x) = F(0.5|X = x). \tag{2.24}$$

2.3.3.2 Median kernel return estimation

Given T return observations $r_t, t = 1, \ldots, T$, from a given asset or portfolio, the kernel estimator $\hat{F}(z|r_t)$ of the conditional distribution function $F(z|r_t)$ is defined by

$$\hat{F}(z|r_t) = \frac{\sum_{l=1}^{T} 1_{\{r_l\leq z\}} K(\frac{r_t - r_l}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_t - r_l}{h})}. \tag{2.25}$$

Using Koenker (2005) and (2.25), a kernel median return estimation is obtained directly by :

$$\hat{\hat{r}}_t = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_l - z| K(\frac{r_t - r_l}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_t - r_l}{h})}. \tag{2.26}$$

Another way to get $\hat{\hat{r}}_t$ is to solve the following equation

$$\hat{F}(z|r_t) = \frac{\sum_{l=1}^{T} 1_{\{r_l \leq z\}} K(\frac{r_t - r_l}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_t - r_l}{h})} = \frac{1}{2}. \tag{2.27}$$

Remark 6 In the mathematical statistics literature, more complicated nonparametric estimators of conditional median exist : local polynomial method, double kernel method, L-estimator method ...(see, for instance, Gannoun et al (2002) for more details). It is well-known that the median smooths better than the mean and is less sensitive to the presence of outliers.

2.3.3.3 Kernel median and DRS estimation

Using the robustness of the median, a new estimation of DSR will be proposed. To this end, all the returns observations $r_{jt}, t = 1, \ldots, T$ and $j = 1, \ldots, m$, are replaced by their median kernel estimators (median regression) $\hat{\hat{r}}_{jt}$, which are a weighted *median* of the observations.
Let $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$. The DSR of given portfolio with m assets, is given by

$$\mathrm{DSR}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left[\min(\hat{\hat{r}}_{pt} - B, 0)\right]^2, \hat{\hat{r}}_{pt} = \omega_1 \hat{\hat{r}}_{1t} + \omega_2 \hat{\hat{r}}_{2t} + \ldots + \omega_m \hat{\hat{r}}_{mt}, \tag{2.28}$$

where $\hat{\hat{r}}_{jt}$ is the kernel median estimator of the return r_{jt} of asset j on date t.

2.4 Nonparametric DSR minimization algorithm

2.4.1 Case of a portfolio with two assets

Suppose that they are two risky assets a and b to constitute the portfolio P. Let ω_0 be a starting portfolio, $\omega_0 = (\omega_{0,a}, \omega_{0,b}) = (\omega_{0,a}, 1 - \omega_{0,a})$ where $\omega_{0,a}$ and $\omega_{0,b}$ are the proportions of the portfolio allocated to assets a and b. The return of this portfolio on date t is $r_{0,pt} = \omega_0 r_{at} + (1 - \omega_0) r_{bt}$. All this returns are replaced with a the kernel median estimators defined above :

$$\hat{\hat{r}}_{0,pt} = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{0,pl} - z| K(\frac{r_{0,pt} - r_{0,pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{0,pt} - r_{0,pl}}{h})}.$$

Then, for each single asset, the T returns are estimated following the same procedure and using the weighting given to portfolio associated to ω_0 :

$$\hat{\hat{r}}_{0,at} = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{al} - z| K(\frac{r_{0,pt} - r_{0,pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{0,pt} - r_{0,pl}}{h})}, \hat{\hat{r}}_{0,bt} = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{bl} - z| K(\frac{r_{0,pt} - r_{0,pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{0,pt} - r_{0,pl}}{h})}, \tag{2.29}$$

Consider S_0 the set of indexes such that the estimated excess portfolio returns associated to $\omega^{(0)}$ are negative

$$S_0 = \{t | 1 < t < T \text{ such that } \hat{\hat{r}}_{0,pt} < B\},$$

and solve the following problem :

$$\arg\min_{\omega} \sum_{t\in S_0} (\hat{\hat{r}}_{pt} - B)^2, \hat{\hat{r}}_{pt} = \omega\hat{\hat{r}}_{0,at} + (1-\omega)\hat{\hat{r}}_{0,bt}.$$

The solution is denoted ω_1 and the associated portfolio returns are $r_{1,pt} = \omega_1 r_{at} + (1-\omega_1)r_{bt}$. These returns are nonparametrically estimated by :

$$\hat{\hat{r}}_{1,pt} = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{1,pl} - z| K(\frac{r_{1,pt}-r_{1,pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{1,pt}-r_{1,pl}}{h})}.$$

The returns of each single asset are deduced as follows :

$$\hat{\hat{r}}_{1,at} = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{al} - z| K(\frac{r_{1,pt}-r_{1,pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{1,pt}-r_{1,pl}}{h})}, \hat{\hat{r}}_{1,bt} = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{bl} - z| K(\frac{r_{1,pt}-r_{1,pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{1,pt}-r_{1,pl}}{h})}, \tag{2.30}$$

Consider S_1 the set of indexes such that the estimated excess portfolio returns associated to $\omega^{(1)}$ are negative :

$$S_1 = \{t | 1 \leq t \leq T \text{ such that } \hat{\hat{r}}_{1,pt} < B\},$$

and resolve the following optimization problem :

$$\arg\min_{\omega} \sum_{t\in S_1} (\hat{\hat{r}}_{pt} - B)^2, \hat{\hat{r}}_{pt} = \omega\hat{\hat{r}}_{1,at} + (1-\omega)\hat{\hat{r}}_{1,bt},$$

where $\hat{\hat{r}}_{1,at}$ and $\hat{\hat{r}}_{1,bt}$ are defined in (2.29).
From here on, the same procedure is followed to get S_2, $S_3 \ldots$. Even with the same set of selected observations, iterations should be continued because using the kernel estimations will be different for every new portfolio found. Nevertheless, it should be noted that the changes in the portfolio (and consequently on DSR), will be smaller from one iteration to another. Thus, iterations should be stopped when changes become smaller than a fixed limit.

2.4.2 Case of a portfolio with m assets

Suppose that they are m assets available . We start with an arbitrary portfolio $\omega_0 = (\omega_{0,1}, \omega_{0,2}, ..., \omega_{0,m})$. For each date $t, t = 1, \ldots, T$, the return of this portfolio $r_{0,pt} = \omega_{0,1} r_{1t} + \cdots + \omega_{0,m} r_{mt}$. All these returns are replaced by median kernel estimators :

$$\hat{\hat{r}}_{0,pt} = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{0,pl} - z| K(\frac{r_{0,pt}-r_{0,pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{0,pt}-r_{0,pl}}{h})}, t = 1, \ldots, T.$$

The estimation of returns of each single asset i is given by

$$\hat{\hat{r}}_{0,it} = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{il} - z| K(\frac{r_{0,pt}-r_{0,pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{0,pt}-r_{0,pl}}{h})}; t = 1, \ldots, T, \quad i = 1, \ldots, m.$$

From the previous estimators, dates when the estimated returns of portfolio associated to ω_0 had negative excess returns are selected. This set is called S_0.

Let $\hat{R}_{0,it} = \hat{\hat{r}}_{0,it} - B$ and M_0 the following positive semidefinite matrix :

$$\begin{aligned} M_0 &= \tfrac{1}{T}\textstyle\sum_{t\in S_0} \begin{bmatrix} \hat{R}_{0,1t} \\ \hat{R}_{0,2t} \\ \vdots \\ \hat{R}_{0,mt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}_{0,1t} & \hat{R}_{0,2t} & \cdots & \hat{R}_{0,mt} \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{T}\textstyle\sum_{t\in S_0} \begin{bmatrix} (\hat{R}_{0,1t})^2 & \hat{R}_{0,1t}\hat{R}_{0,2t} & \hat{R}_{0,1t}\hat{R}_{0,mt} \\ \hat{R}_{0,2t}\hat{R}_{0,1t} & (\hat{R}_{0,2t})^2 & \hat{R}_{0,2t}\hat{R}_{0,mt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{R}_{0,mt}\hat{R}_{0,1t} & \hat{R}_{0,mt}\hat{R}_{0,2t} & (\hat{R}_{0,mt})^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

The next step is to find the portfolio weight ω_1 that solves the following problem :

$$\arg\min_{\omega} \omega^\top M_0 \omega \text{ with } \omega^\top \mathbf{1} = 1. \tag{2.32}$$

The solution is given by

$$\omega_1 = (\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, ..., \omega_{1,m}) = \frac{M_0^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top M_0^{(-1)}\mathbf{1}}. \tag{2.33}$$

The new portfolio return $r_{1,pt}$ associated to ω_1 are

$$r_{1,pt} = \omega_{1,1} r_{1t} + \omega_{1,2} r_{2t} + ...\omega_{1,m} R_{mt}.$$

The associated smooth returns are :

$$\hat{\hat{r}}_{1,pt} = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{1,pl} - z| K(\frac{r_{1,pt}-r_{1,pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{1,pt}-r_{1,pl}}{h})}, \quad t = 1, \ldots T,$$

and the smoothing returns of the assets belonging the portfolio are :

$$\hat{\hat{r}}_{1,it} = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{il} - z| K(\frac{r_{1,pt}-r_{1,pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{1,pt}-r_{1,pl}}{h})}, \quad t = 1, \ldots, T, \;\; i = 1, \ldots, m.$$

Now, let S_1 be the set of all indices such that $\hat{\hat{r}}_{1,pt} - B < 0$, i.e.

$$S_1 = \{t | 1 \leq t \leq T \text{ where } \hat{\hat{r}}_{1,pt} - B < 0\}.$$

Let $\hat{R}_{1,it} = \hat{\hat{r}}_{1,it} - B, t = 1, \ldots, T$ and $i = 1, \ldots, m$.
Using the above estimators, the following new positive definite matrix M_1 is built :

$$\begin{aligned} M_1 &= \tfrac{1}{T}\textstyle\sum_{t\in S_1} \begin{bmatrix} \hat{R}_{1,1t} \\ \hat{R}_{1,2t} \\ \vdots \\ \hat{R}_{1,nt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}_{1,1t} & \hat{R}_{1,2t} & \cdots & \hat{R}_{1,nt} \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{T}\textstyle\sum_{t\in S_1} \begin{bmatrix} (\hat{R}_{1,1t})^2 & \hat{R}_{1,1t}\hat{R}_{1,2t} & \hat{R}_{1,1t}\hat{R}_{1,mt} \\ \hat{R}_{1,2t}\hat{R}_{1,1t} & (\hat{R}_{1,2t})^2 & \hat{R}_{1,2t}\hat{R}_{1,mt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{R}_{1,mt}\hat{R}_{1,1t} & \hat{R}_{1,mt}\hat{R}_{1,2t} & (\hat{R}_{1,mt})^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Next step is to to solve the following optimization problem

$$\arg\min_{\omega} \omega^\top M_1 \omega \text{ with } \omega^\top \mathbf{1} = 1. \tag{2.35}$$

The solution is given by

$$\omega_2 = (\omega_{2,1}, \ldots, , \omega_{2,m}) = \frac{M_1^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top M_1^{-1}\mathbf{1}}. \tag{2.36}$$

Then, following the same procedure, all the returns $r_{2,pt}$ and their smoothing version $\hat{\hat{r}}_{2,pt}$ associated to ω_2 are constructed. Similarly, for each asset $i, i = 1, \ldots, m$, all its corresponding smoothing returns $\hat{\hat{r}}_{1,it}, t = 1, \ldots, T$ are derived. The iteration should stop when the changes in the portfolio become insignificant, or simply smaller than a pre-established limit.

Remark 7 From a computational point of view, the iterations are more complicated than the classical DSR because the median kernel estimators of returns change on each step. Nevertheless, the portfolio frontier will be a smoother curve than in the classical case (see below).

To solve the kernel mean DSR minimization problem described in Subsection (2.3.2.1), all the previous steps should be respected with replacing $\hat{\hat{r}}_{s,pt}$ and $\hat{\hat{r}}_{s,it}$ by $\hat{r}_{s,pt}$ and $\hat{r}_{s,it}$.

2.4.2.1 Nonparametric methods in efficient frontier construction

The idea is to mix the procedure exhibited in section 2.2.2 with an adapted optimization program. The major change is in the use of the kernel median estimators of returns (or the kernel mean estimators) instead of the observed returns. The aim is to get smooth efficient frontier compared to frontiers determined by classical models (Mean-Variance and Mean-DSR).
Let M the semidefinite semicovariance matrix with coefficients determined by

$$\Sigma_{ijB} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{K}(r_{it} - B)(r_{jt} - B),$$

where periods 1 to K are periods in witch the portfolio under-performs the benchmark B.
The problem remains the same as in (2.3) with additional constraints concerning the weights : positivity and Short-Selling constraints :

1. positivity constraint

$$\begin{array}{l} \min_\omega \omega^\top M \omega \\ \text{subjet} \quad \text{to} \end{array} \tag{2.37}$$

$$\begin{cases} \omega^\top \mathbf{1} = 1 \\ \omega^\top \mu = E^* \\ \omega_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

2. Short-Selling constraint

$$\begin{array}{l} \min_\omega \omega^\top M \omega \\ \text{subjet} \quad \text{to} \end{array} \tag{2.38}$$

$$\begin{cases} \omega^\top \mathbf{1} = 1 \\ \omega^\top \mu = E^* \end{cases}$$

Same steps as above are followed. On each step (j), until the convergence, we solve the following problem :

$$\begin{array}{l} \arg\min_{\omega} \omega^\top M_j \omega \\ \text{subjet} \quad \text{to} \end{array} \tag{2.39}$$

positivity constraint	Short-Selling
$\omega^\top \mathbf{1} = 1$	$\omega^\top \mathbf{1} = 1$
$\omega^\top \tilde{\mu}^j = E^*$	$\omega^\top \tilde{\mu}^j = E^*$
$\omega_i \geq 0, i = 1, 2 \ldots, m$	

where

$$\tilde{\mu}^j = \left[\frac{\sum_t \tilde{r}_{j,1t}}{T}, \ldots, \frac{\sum_t \tilde{r}_{j,mt}}{T} \right]^\top.$$

with $\tilde{r}$ represents the nonparametric estimated return obtained by mean or median kernel methods.
After the achievement of the convergence (in $(F+1)th$ step), the minimum DownSide Risk portfolio with expected excess return given by E^* will be given by :

$$(\omega_{F+1})^\top M_F \omega_{F+1}. \tag{2.40}$$

Remark 8 Under the Short-Selling constraint, the optimal portfolio weight is obtained by successive iterations (similar approach as (2.2.2)) which leads, thanks to the Lagrangian method, to the following explicit expression :

$$\omega_{F+1} = \frac{\hat{\alpha} E^* - \hat{\lambda}}{\hat{\alpha}\hat{\theta} - \hat{\lambda}^2} M_F^{-1} \tilde{\mu}^F + \frac{\hat{\theta} - \hat{\lambda} E^*}{\hat{\alpha}\hat{\theta} - \hat{\lambda}^2} M_F^{-1} \mathbf{1}, \tag{2.41}$$

where $\hat{\alpha} = \mathbf{1}^\top M_F^{-1} \mathbf{1}$, $\hat{\lambda} = \mathbf{1}^\top M_F^{-1} \tilde{\mu}^F$ and $\hat{\theta} = (\tilde{\mu}^F)^\top M_F^{-1} \tilde{\mu}^F$.

Then the DownSide Risk is :

$$\mathrm{DSR}(\omega_{F+1}) = \frac{\alpha (E^*)^2 - 2\lambda E^* + \theta}{\alpha\theta - \lambda^2}. \tag{2.42}$$

In the case of the positivity constraint, the Quad.Prog in R-package is adjusted and adapted to resolve each step of the minimization program.

2.5 Empirical analysis

In this section, the performance of the proposed methods are investigated. Classical and nonparametric methods are compared and tested under different kind of constraints : positivity and Short-Selling constraints. It is supposed that there is no transaction costs and no taxes.

2.5.1 Data description

A dataset, drawn from Reuters, was used for this analysis. The original Data consists in daily 9 stocks returns belonged to different sectors : banks, insurance, industry, energy, technology and telecommunication, from the French stock market :

- Nine assets from French Stock market throughout the period from April 2000 to April 2014, yielding a total of 3579 daily observations,

- The CAC 40 (the French Stock Market Index) values (observed in the same period) will provide a baseline for subsequent comparisons between the different methods.

- The one year Government French Bond for 2013 is considered as the Risk-Free Rate of Return.

- The benchmark B is supposed to be equal to zero.

Historical Price Data p_t is *adjusted for dividends*. The assets returns are calculated from stock prices observed on *Thomson Reuters Platform* as follows :

$$R_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} \tag{2.43}$$

with

- p_t : Stock price at date t,

- p_{t-1} : Stock price at date $t-1$

The historical statistics of the asset markets are summarised in Table (2.1)

Table 2.1: *Market Historical Statistics*

	Min	Mean	sd	Skewness	Kurtosis	Max
Accor	-0.1294	0.000225	0.02230	0.09481	3.0857	0.1241
Airb	-0.2632	0.000436	0.02580	-0.13740	5.5292	0.1340
Alcat	-0.1975	0.000531	0.03607	0.45715	8.4942	0.4054
BNP	-0.1724	0.000327	0.02601	0.65718	8.8503	0.2090
Carr	-0.1102	0.000157	0.01977	0.12020	2.8544	0.0995
Dano	-0.1050	0.000285	0.01571	0.09250	4.2764	0.1019
Oréal	-0.1112	0.000261	0.01745	0.21990	4.5650	0.1474
S.Gén	-0.1623	0.000251	0.02890	0.39010	6.7635	0.2389
Total	-0.0919	0.0001431	0.01716	0.22629	5.6594	0.1364

In term of the third moment of expected returns (skewness), Alcatel, BNP, Carrefour, L'Oréal and Société Générale (in the French Market) are positive skews. Accor and Danone returns are approximatively normally distributed. All the distributions have heavier tails and a higher peak than the normal. Therefore, these findings suggest the use of Downside Risk to find the optimal portfolio.
The correlation matrix is given in the Table (2.2).

Table 2.2: *French correlation matrix*

	Accor	Airb	Alcat	BNP	Carr	Dano	Oréal	S. Gén	Total
Accor	1.000	0.457	0.447	0.544	0.474	0.351	0.426	0.539	0.489
Airb	0.457	1.000	0.401	0.418	0.404	0.337	0.376	0.407	0.415
Alcat	0.447	0.401	1.000	0.465	0.422	0.28	0.383	0.476	0.404
BNP	0.544	0.418	0.465	1.000	0.522	0.367	0.469	0.803	0.554
Carr	0.474	0.404	0.422	0.522	1.000	0.454	0.518	0.508	0.527
Dano	0.351	0.337	0.28	0.367	0.454	1.000	0.488	0.347	0.455
Oréal	0.426	0.376	0.383	0.469	0.518	0.488	1.000	0.434	0.512
S. Gén	0.539	0.407	0.476	0.803	0.508	0.347	0.434	1.000	0.514
Total	0.489	0.415	0.404	0.554	0.527	0.455	0.512	0.514	1.000

This matrix shows that the assets are weakly correlated because the stocks belong to different sectors.

2.5.2 Analysis of results

In this section two strategies are investigated : optimization with positive weights and optimization with short selling. In order to ensure clear reading of our results ,from now on, the measures of risk (Variance and DSR) are multiplied by 10^4 in all the tables and graphics exhibiting our simulations.

2.5.2.1 Optimization with positive weights

Here, the optimal portfolio is obtained under positive constraints on the weights which mean that short selling is not allowed ($\omega_i \geq 0,$ for $i = 1, \ldots, m$). Four methods are used and tested to determine the optimal portfolio.

A. The Mean-Variance method

The Mean-Variance Markowitz method is used in order to get an optimal portfolio. Assets distribution is supposed to be symmetric. The initial data is divided into two parts : one for making optimization and one for testing the efficiency of the method. The test sample is used to assess performance against the CAC 40 index during one year (2013).

A.1 The efficient frontier

The efficient frontier obtained with the Markowitz method is displayed in Figure 2.2.

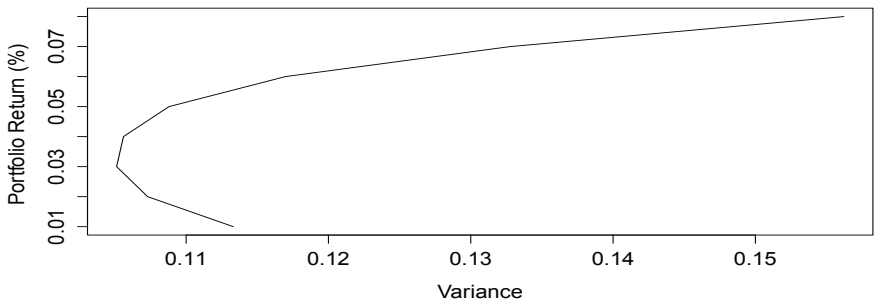

FIGURE 2.2: *Markowitz Mean-Variance efficient frontier.*

Figure 2.2 shows the efficient frontier represented by the upper leg of the hyperbola. The minimum risk portfolio is given by the vertex (0.104,0.03). To put it clearly, Table 2.3 gives the optimal portfolio for many expected returns E^*.

TABLE 2.3: *Weights for optimal Portfolios using Mean-Variance method.*

E^* (%)	Variance	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
0.04	0.1055	0	0.1024	0	0	0	0.4379	0.3454	0	0.1143
0.05	0.1087	0	0.1554	0	0	0	0.4318	0.4083	0	0.0045
0.06	0.1169	0	0.1554	0	0	0	0.3104	0.4291	0	0
0.07	0.1327	0	0.3677	0	0	0	0.1841	0.4482	0	0

One can observe that, the assets Airbus, Danone and L'Oréal are part of the optimal portfolios for all level of expected returns. It is well-known that those companies are financially strong. Total asset contributes to the optimal portfolio only for low expected returns.

A.2 Portfolio returns against CAC 40

Now, for a given expected return ($E^* = 0.05\%$), the return of the optimal portfolio is compared to the French CAC 40 index. A total of 239 portfolio returns (in working market days during 2013) are compared to 239 CAC 40 daily values. In 52% of cases, the optimal portfolio performed relatively better than the CAC40 index. The same conclusion is reached for different choices of E^*. The obtained daily returns during the test period are drawn in Figure 2.3.

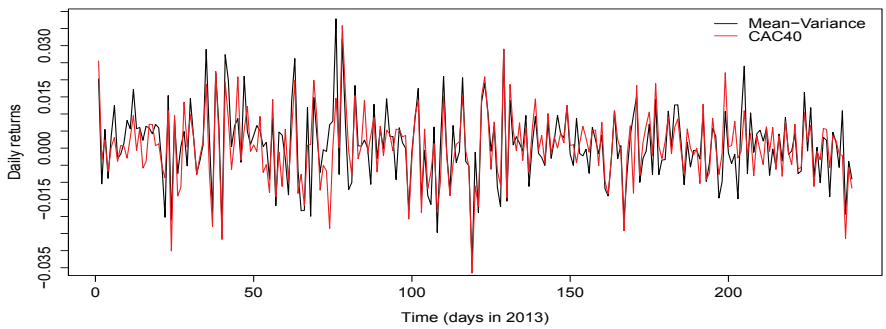

FIGURE 2.3: *Portfolio returns against CAC 40 Index.*

B. The DSR methods

Following the same principle as before, three methods are applied on the previous data (classical DSR, DSR with mean smoothing, DSR with median smoothing). For nonparametric methods, the kernel density used is the Gaussian one :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(\frac{-x^2}{2}).$$

The bandwidths are determined by the following cross-validation method.

$$h_{op} = arg \min_h CV(h) = arg \min_h \sum_{i=1}^{T} [R_{pi} - \hat{R}_{(-i,pi)}(h)]^2 \tag{2.44}$$

where

- for mean smoothing

$$\hat{R}_{(-i,pi)}(h) = \frac{\sum_{t=1,t\neq i}^{T} R_{pt} K(\frac{R_{pi}-R_{pt}}{h})}{\sum_{t=1,t\neq i}^{T} K(\frac{R_{pi}-R_{pt}}{h})}, \tag{2.45}$$

- for median smoothing

$$\hat{R}_{(-i,pi)}(h) = arg \min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{t=1,t\neq i}^{T} \mid R_{pt} - z \mid K(\frac{R_{pi}-R_{pt}}{h})}{\sum_{t=1,t\neq i}^{T} K(\frac{R_{pi}-R_{pt}}{h})}. \tag{2.46}$$

The general shape of $CV(.)$ curve is exhbited in Figure (3.1)

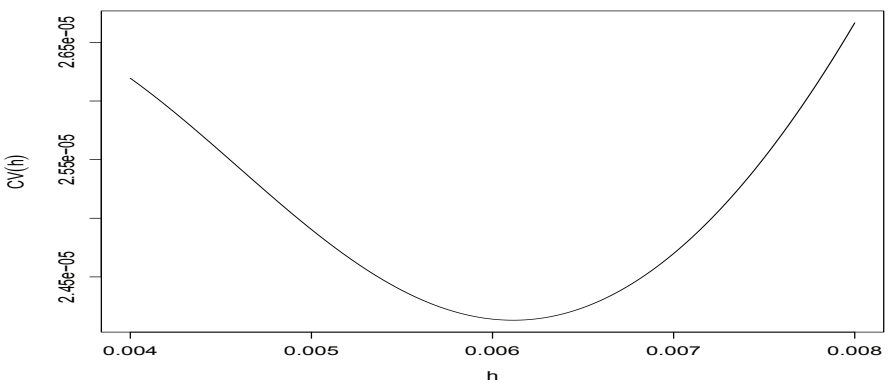

Figure 2.4: *Example of CV(h)*

B.1 The efficient frontiers

Figure 2.5 displays the efficient frontier curves. The first part of this graphic allows easy comparison between the three proposed Methods. The second part is devoted exclusively to the median method.

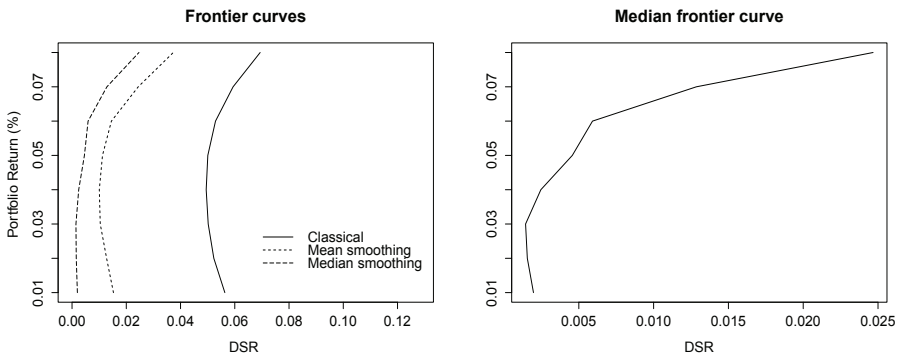

FIGURE 2.5: *DSR efficient frontiers.*

It is apparent from the graphical comparison in Figure 2.5. that nonparametric methods push the efficient frontiers outward to the left of the classical DSR curve to produce efficient portfolios that are stochastically dominant.
In terms of DSR, the nonparametric methods have the smallest values for a given expected return E^*. The method based on Median smoothing is more efficient. Table 2.4 gives an overview of optimal portfolios obtained by each method for various expected returns E^*.
From now on, the abbreviations below will be used :

- $\omega_i, i = 1, \ldots, 9$: the optimal weights,
- I : Classical DSR,
- II : DSR with mean smoothing,
- III : DSR with median smoothing.

TABLE 2.4: *Weights for optimal portfolios using DSR methods.*

Methods	E^* (%)	DSR	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
I	0.04	0.049	0	0.064	0	0	0	0.448	0.425	0	0.062
II	0.04	0.010	0	0.000	0	0	0	0.780	0.211	0	0.000
III	0.04	0.002	0	0.506	0	0	0	0.000	0.000	0	0.493
I	0.05	0.050	0	0.138	0	0	0	0.384	0.477	0	0.000
II	0.05	0.012	0	0.310	0	0	0	0.689	0.000	0	0.000
III	0.05	0.004	0	0.567	0	0	0	0.000	0.432	0	0.000
I	0.06	0.052	0	0.243	0	0	0	0.249	0.507	0	0.000
II	0.06	0.014	0	0.394	0	0	0	0.605	0.000	0	0.000
III	0.06	0.006	0	0.567	0	0	0	0.459	0.000	0	0.000
I	0.07	0.059	0	0.348	0	0	0	0.115	0.536	0	0.000
II	0.07	0.024	0	0.439	0	0	0	0.283	0.277	0	0.000
III	0.07	0.012	0	0.762	0	0	0	0.238	0.000	0	0.000

There is a specific strategy for each method. Although, for the three methods, the assets Alcatel, BNP and Carrefour do not contribute to the optimal portfolio for different level of expected return, the contribution of the other assets are different from one method to another. In term of DSR, the nonparametric methods are more efficient than the classical DSR method. The

nonparametric method based on median estimation has the smallest DSR for all the expected returns.
B.2 Portfolio returns against CAC 40

To compare the efficiency of these methods, the daily French CAC 40 index is used. The daily portfolio returns are computed using the weights obtained with the sample data deprived of 2013's observations. Results are summarized in Figure 2.6.

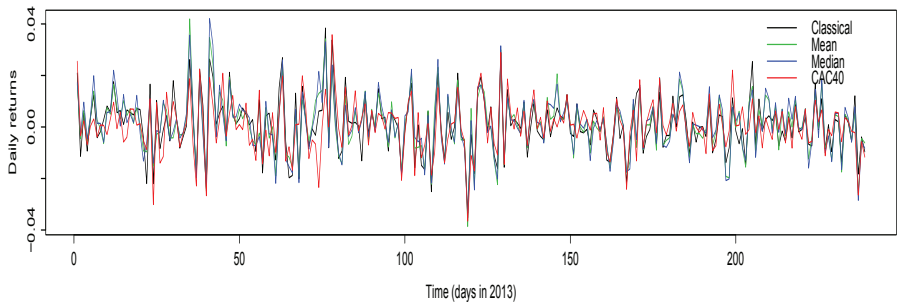

Figure 2.6: *Portfolio returns against CAC 40 Index.*

The portfolio returns obtained by nonparametric methods are equal or slightly better than the CAC 40 index. More precisely, the method using the smoothing median performs better in 54% of cases. Classical DSR method is less efficient than the CAC 40 (in 47% of days).
Other indices, mainly Sharpe and Sortino Ratios, are used here to measure numerically the performance of each method. These tools will be exhibited later in this paper.

2.5.2.2 Optimization with short selling constraint

Short-selling is an interesting strategy because it provides a way to speculate if the market's value is going to decline. This allows to add value to the portfolio even in a bear market. Short-selling could be also used to hedge long positions. Concretely, the strategy involves borrowing a stock from a broker and then selling it in the market. The stock is bought back and returned to the broker at a later date, this is called covering the short. If the stock drops, the short seller buys it back at a lower price and then he makes money.

In this section, the optimal portfolio is obtained under realistic constraints, in the sense that short selling is allowed ($\omega_i \in \mathbb{R}$, for $i = 1, \ldots, 9$). Short positions should be more than -20% fulfilling the well-known 120-20 strategy in order to limit the possible high losses. The four methods exhibited above will be used and tested to determine the optimal portfolio.

A. Mean-Variance method

The classical Mean-Variance model of Markowitz, under short selling constraints , is used in order to get an optimal portfolio. Assets return distribution is supposed to be Gaussian . As the previous section, The initial data is divided into two parts : the first one for determining optimal portfolios and the second one for testing the efficiency of the method. The last sample will be used to assess performance of the optimal portfolio returns against the CAC 40 index measured

during one year (2013).

A.1 The efficient frontier

The efficient frontier with Short-selling constraint is plotted in Figure 2.7. It is graphically presented as a branch of hyperbola, and the minimum risk portfolio is given by the vertex (0.105,0.05).

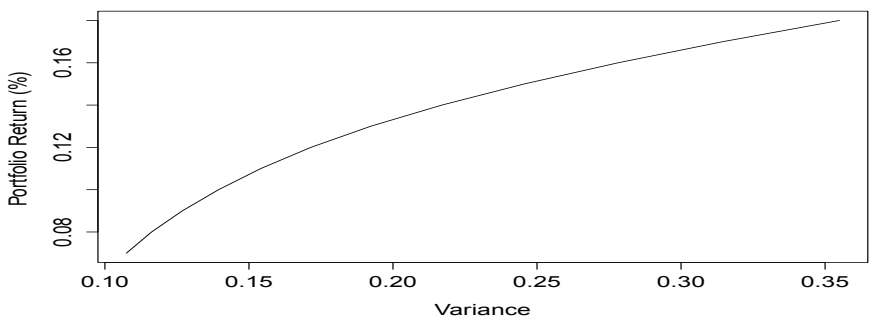

Figure 2.7: *Mean-Variance efficient frontier with short-selling constraint.*

Table 2.5 shows the optimal portfolio's weights for a given levels of expected return E^*. Since short positions are allowed, investors are exposed to higher level of risk. Therefore, high level of expected return is required.

Table 2.5: *Optimal portfolios using Mean-Variance method.*

E^* (%)	Var	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
0.17	0.314	-0.158	0.917	-0.146	-0.005	-0.20	-0.014	0.893	-0.087	-0.20
0.18	0.354	-0.175	0.996	-0.167	-0.005	-0.20	-0.014	0.893	-0.087	-0.20
0.19	0.399	-0.192	1.075	-0.188	-0.048	-0.20	-0.148	0.954	-0.096	-0.20
0.20	0.447	-0.20	1.163	-0.20	-0.011	-0.20	-0.20	0.955	-0.106	-0.20

Investors should buy the assets AIRBUS and L'OREAL and take short positions for all the other assets to construct the optimal portfolios, which means that, in that period French Stock Market was Bearish because of the launch of financial transaction taxes, also because of the economic recessions or depressions, when pessimism prevails.

A.2 Portfolio returns against CAC 40

For a given expected return ($E^* = 0.17\%$), the return of the optimal portfolio is compared to the French CAC 40 index. In Figure 2.8, a total of 239 portfolio returns (in working market days during 2013) are compared to 239 CAC 40 daily values. In 51% of cases, the optimal portfolio returns performed relatively better than the CAC 40 index. The same conclusion is reached for different choices of E^*.

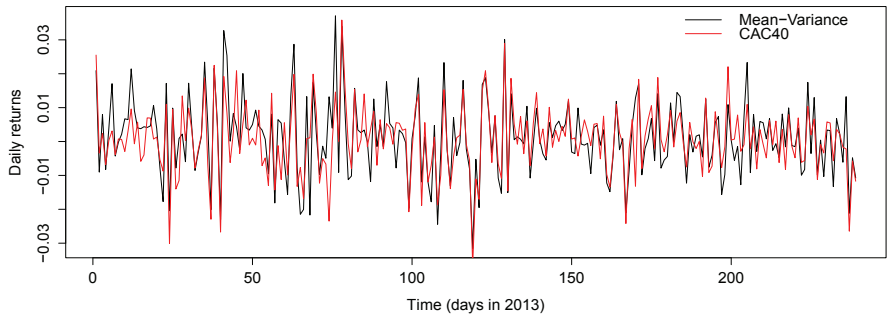

Figure 2.8: *Portfolio returns against CAC 40 Index.*

B. The DSR methods

After imposing Short-Selling constraint, the three methods (classical DSR, DSR with mean smoothing, DSR with median smoothing) are applied on the data in order to get optimal portfolios. The same procedure of the previous section is followed.

B.1 The efficient frontiers

Figure 2.9 shows the efficient frontier curves for the three proposed methods. The first part of the graphic compares the three Methods. The second part presents only the median method.

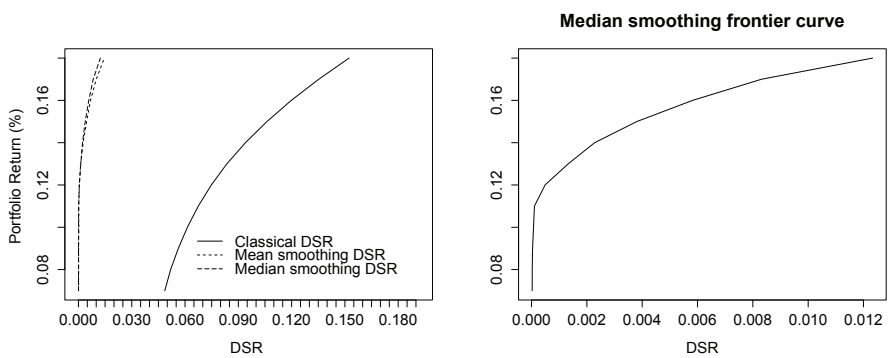

Figure 2.9: *DSR efficient frontiers.*

Compared to the classical Mean-DSR model, the nonparametric methods present low downside risk. More precisely , the nonparametric efficient frontier based on median estimation stochastically dominates the other curves for any given expected return. These analyses are confirmed by results shown in Table 2.6 which also gives the optimal portfolio weights for different expected returns E^*.

Table 2.6: *Weights for optimal portfolios using DSR methods*

Mds	$E^*(\%)$	Var	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
I	0.17	0.135	-0.162	0.893	-0.134	0.131	-0.200	-0.13	1.002	-0.200	-0.20
II	0.17	0.010	-0.200	1.460	-0.200	-0.200	0.501	-0.20	0.239	-0.200	-0.20
III	0.17	0.008	-0.020	1.353	-0.200	-0.200	-0.200	-0.20	0.823	0.024	-0.20
I	0.18	0.152	-0.179	0.975	-0.152	0.127	-0.200	-0.20	1.029	-0.200	-0.20
II	0.18	0.015	-0.200	1.571	-0.200	-0.200	0.490	-0.20	0.139	-0.20 0	0.20
III	0.18	0.012	-0.200	1.510	-0.200	-0.200	-0.200	-0.20	0.666	0.024	-0.20
I	0.19	0.171	-0.200	1.066	-0.177	0.119	-0.200	-0.20	0.992	-0.200	-0.20
II	0.19	0.021	-0.200	1.683	-0.200	-0.200	0.478	-0.20	0.039	-0.200	-0.20
III	0.19	0.025	-0.200	1.668	-0.200	-0.200	-0.200	-0.20	0.508	0.024	-0.20
I	0.20	0.191	-0.200	1.161	-0.200	0.100	-0.200	-0.20	0.939	-0.200	-0.20
II	0.20	0.028	-0.200	1.794	-0.200	-0.200	-0.466	-0.20	-0.061	-0.200	-0.20
III	0.20	0.032	-0.200	1.826	-0.200	-0.200	-0.200	-0.20	0.351	0.023	-0.20

The three methods propose different Long-Short strategies of investment. In order to take profit of the market evolution, investors should take long position on AIRBUS and L'OREAL assets, and should take short positions on the other assets. It should be noted that, for 0.2% expected return, L'OREAL asset should be sold when the method based on mean estimation is used. The difference in asset allocations, between the models, reflects the difference in the measure of risk used in the optimization programs.
It is still interesting to note that the nonparametric methods seems appealing, because they have lower risk comparing to the classical Mean-DSR model. The nonparametric method based on median estimation, clearly outperforms the other models in the total return dimension for the entire calculation period .

B.2 Portfolio returns against CAC 40 Index

One way of comparing the performance of these methods, is to investigate expost daily optimal portfolio returns . This has been done by using the minimum Semivariance determined by the classical and the nonparametric models, presented previously. The optimal portfolio return is then calculated for the entire data for 2013's keeping asset weight within the portfolios static. Figure 2.10 shows the obtained portfolio returns as well as the CAC 40 index. The optimal portfolio returns are very close de the CAC 40 index. Accurately, the method using the smoothing median outperforms the CAC 40 index in 55% of cases.

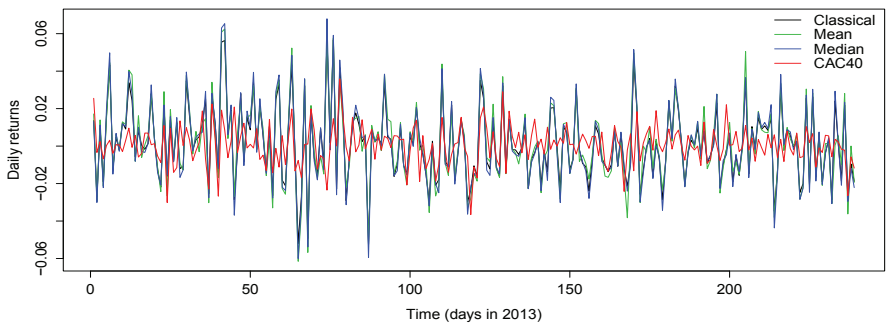

Figure 2.10: *DSR efficient frontiers.*

2.5.2.3 Measures of Performance

Another way to compare the performance of the proposed methods : the parametric and nonparametric methods, is to compute performance ratios : the Sharpe (ShR) and Sortino (SoR) ratios .

- *Sharpe Ratio* (Sharpe (1966))

  The Sharpe ratio is quite simple, which lends to its popularity. The idea of the ratio is to see how much additional return you are receiving for the additional volatility of holding the risky asset over a risk-free asset, then, higher level of Sharpe ratio implies better performance of the portfolio. The Sharpe ratio is given by this formula :

$$ShR = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma(R_p)} \tag{2.47}$$

  where $E(R_p)$ denotes the expected return of the portfolio, R_f the return on the risk-free asset and $\sigma(R_p)$ the standard deviation of the portfolio returns.

  This ratio is a relevant performance measure when returns are normally distributed. Abnormalities like kurtosis, fatter tails and higher peaks, or skewness on the distribution can be a problematic for the ratio, as standard deviation doesn't have the same effectiveness when these problems exist. That is why we propose to calculate the Sortino ratio.

- *Sortino Ratio* (Sortino (1994)) :

  Sortino ratio is a transformation of the Sharpe ratio that differentiates harmful volatility from general volatility by taking into account the downside deviation. The use of this ratio is recommended when we analyse highly volatile portfolios. A portfolio is considered as efficient one when it has high Sortino ratio. The Sortino ratio is given by this formula :

$$SoR = \frac{E(R_p) - \tau}{DSR} \tag{2.48}$$

  where $E(R_p)$ is the asset or portfolio average realized return, τ the target or required rate of return for the investment strategy under consideration (originally called the minimum acceptable return) and DSR the target semi-deviation (the square root of target Semivariance), termed downside deviation.

The obtained Sharpe and Sortino ratios for all methods are given in Table 2.7 sums up the level of Sharp and Sortino ratios for all the methods.

Table 2.7: *Performance ratios.*

$E^*(\%)$	Sharpe Ratio				Sortino Ratio			
	M-V	DSR	Mean	Median	M-V	DSR	Mean	Median
Positive weights only								
0.04	0.021	0.051	0.058	0.132	0.022	0.053	0.060	0.137
0.05	0.067	0.068	0.077	0.136	0.069	0.069	0.079	0.115
0.06	0.091	0.092	0.094	0.118	0.096	0.096	0.097	0.126
0.07	0.110	0.111	0.118	0.142	0.116	0.117	0.122	0.157
Allowing negative weights								
0.04	0.025	0.055	0.063	0.125	0.003	0.058	0.065	0.122
0.05	0.073	0.072	0.081	0.140	0.073	0.074	0.083	0.150
0.06	0.095	0.096	0.098	0.123	0.100	0.101	0.102	0.130
0.07	0.114	0.116	0.122	0.145	0.120	0.121	0.127	0.160

Based on those indices, one can observe that nonparametric methods, especially the one using DSR with median smoothing is more efficient than the classical ones. It is interesting to note that the four methods with Short-Selling constraint, except when the expected return $E^* = 0.04$, have higher Sharpe and Sortino ratios, which means that long-short strategies are more efficient then the long strategy only.

2.6 Conclusion

The classical Mean-Variance model of Markowitz is one of the most commonly used models for determining optimal portfolio weight. However, built on the strict assumption that asset returns are normally distributed, the Mean-Variance is inadequate to optimize portfolio when returns have asymmetric distribution. The traditional Mean-Variance model which treats both the above and the below target returns equally, tends to over estimate the risks .

In reality, investors are more concerned and averse about the downside movements, that is why it is better to find a more appropriate measure of risk. Our contribution consists on the introduction of nonparametric approach in the estimation of the DownSide Risk. It leads to get smoother efficient frontiers. In addition, adequate iterative algorithms were developed to resolve the optimization problems. Nonparametric methods, specially the Mean-DSR with median smoothing, provide lower portfolio risk compared to the classical Mean-Variance and Mean-Semivariance models.

The proposed DownSide Risk versions were applied to determine the optimal weights for 9 assets from the French Stock Market. The results show that the strategies of investment, in terms of asset allocation depend on the methods, and the risk measure used to optimize the portfolio. Asset allocation depends also on the kind of constraints used in the optimisation program like allowing Short-Selling or not.

In fact, The nonparametric methods present lower risk comparing to the classical Mean-Variance and Classical Mean-DSR models. In term of performance, the nonparametric methods, specially the one based on median estimation outperforms the CAC 40 in 52% for long only strategy , and in 54% for long-short strategy. They also have higher level of Sharpe and Sortino ratios than the classical methods. It is interesting to note that , long-short strategies are more efficient when we have high expected returns.

Our empirical studies were limited to the French Stock Market, it will be interesting to test our methods on other assets (Bonds, Options,...) and other markets (developed and emergent

markets). The nonparametric methods give an efficient and simple alternative approach to implement in order to determine the optimal portfolios. The method based on median estimation are precise and very important in terms of performance thanks to the robustness of the median. Nevertheless, computational time is very long. It could be reduced by another optimization algorithm which will be the subject of the ongoing paper.

2.7 Bibliography

- Ang, J. (1975). *A note on the ESL Portfolio Selection Model*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 10, 849-857.
- Athayde, G. (2001). *Building a Mean-Downside Risk Portfolio Frontier*, Developments in Forecast Combination and Portfolio Choice, John Wiley and Sons.
- Athayde, G. (2003). *Mean-downside risk portfolio frontier : a non-parametric approach*, Advances in portfolio construction and implementation.
- Berlinet, A., Cadre, B., Gannoun, A. (2001). *On the conditional L_1-median and its estimation*, Journal of Nonparametric Statistics, 13, 631-645.
- Berlinet, A., Gannoun, A., Matzner-Lober, E. (2001). *Asymptotic normality of convergent estimates of conditional quantiles*, Statistics, 35, 139-169.
- Casanova, S. and Lecompte, E. (2015). *A Nonparametric Model-Based Estimator for the Cumulative Distribution Function*, Jounal of Survey Statistics and Methodology, 3, 317 - 338.
- Estrada, J. (2004). *Mean-Semivariance Behavior : An Alternative Behavioral Model*, Journal of Emerging Market Finance, 3, 231-248.
- Estrada, J. (2008). *Semivariance Optimization : A Heuristic Approach*, Journal of Applied Finance, 57-72.
- Gannoun, A, Saracco, J., Yu, K. (2003). *time series prediction by conditional median and quantiles*, Journal of statistical Planning and inference, 117, 207-223.
- Harlow, V. (1991). *Asset allocation in a downside risk framework*, Financial Analyst Journal, 47, 28-40.
- Hogan, W. and Warren, J. (1974). *Computation of the efficient Boundary in the ES Portfolio selection*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 9, 1-11.
- Mamoghli, C. and Daboussi, S. (2008). *Optimisation de portefeuille downside risk*, Social Science Research Network, 23 pages.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7, 1, 77-9.
- Markowitz, H.M. (1959). *Selection efficient diversification of investments*, New York : John Wiley & Sons.
- Levy, H., Markowitz, M. (1979). *Approximating expected utility by a function of mean and variance*, American Economic Review, 3, 308-317.

- Markowitz, M., Peter,T., Ganlin, X. and Yuji,Y. (1993). *Computation of mean-semivariance Efficient sets by the Critical Line Algorithm*, Annals of Operations Research, 45, 307-317.
- Pagan, A.R. and Ullah, A. (1999). *Nonparametric Econometrics*, Cambridge University Press.
- Sharpe, W. (1966). *Mutual Fund Performance*, Journal of Business , 39, 119-138.
- Silverman, B.W. (1986). *Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall, New York.
- Subramania, S. (2002). *Median Regression Using Nonparametric Kernel*, Journal of Nonparametric Statistics, 14, 5, 583-605.
- Sortino, F. and Price, L. (1994). *Performance measurement in a DownSide risk framework*, Journal of Investing, 3, 59-65.
- Wang, K.Q. (2002). *Nonparametric Tests of Conditional Mean-Variance Efficiency of Benchmark Portfolio*, Journal of Empirical Finance Statistics, 9, 2, 133-169.

Annexe

Let $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)^\top$, $\mu_j = \bar{r}_j$, $j = 1, \ldots, n$ and $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)^\top$. The Lagrangian method to solve

$$Min_\omega \omega' M \omega \tag{2.49}$$

$$\text{under} \begin{cases} \sum_{j=1}^m \omega_j & = & 1 \\ \sum_{j=1}^m \omega_j \mu_j & = & E^* \end{cases}$$

is the following : Lagranian L is

$$L = \frac{1}{2}\omega^\top M \omega - \lambda(\mu^\top \omega - E^*) - \gamma(\mathbf{1}^\top \omega - 1).$$

Second order conditions are satisfied because M is definite positive. The first order conditions are

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = M\mu - \lambda\mu - \gamma\mathbf{1} = 0,$$

then

$$\gamma = \lambda M^{-1}\mu + \gamma M^{-1}\mathbf{1}.$$

By replacing in the two constraints, one get :

$$\begin{cases} \lambda A + \gamma B & = & E^* \\ \lambda B + \gamma C & = & 1, \end{cases}$$

where

$$A = \mu^\top M^{-1}\mu, B = \mu^\top M^{-1}\mathbf{1}, C = \mathbf{1}^\top M^{-1}\mathbf{1}, D = AC - B^2.$$

The optimal vector weights is then given by

$$\omega^* = \frac{CE^* - B}{D} M^{-1}\mu + \frac{A - BE^*}{D} M^{-1}\mathbf{1}.$$

3 A New Approach in Nonparametric Estimation of Returns in Mean-DownSide Risk Portfolio frontier

Sommaire

3.1 Introduction **94**

3.2 Classical Mean-DownSide Risk Model **95**

3.2.1 Formal Framework 95

3.2.2 Parametric Athayde's Algorithm 97

3.2.3 Mean DSR Frontier 98

3.3 Nonparametric Mean-Downside Risk Model **99**

3.3.1 Basic Background 99

3.3.2 Kernel Mean Return Estimation 99

3.3.3 Kernel Median Return Estimation 100

3.4 Empirical Analysis **104**

3.4.1 Data 104

3.4.2 Analysis of Results 107

3.5 Conclusion **117**

3.6 Bibliography **119**

Abstract : *The DownSide Risk (DSR) model for portfolio optimization allows to overcome the drawbacks of the classical Mean-Variance model concerning the asymmetry of returns and the risk perception of investors. This optimization model deals with a positive definite matrix that is endogenous with respect to the portfolio weights and hence yields to a non standard optimization problem. To bypass this hurdle, Athayde (2001) developed a new recursive minimization procedure that ensures the convergence to the solution. However, when a finite number of observations is available, the portfolio frontier usually exhibits some inflexion points which make this curve not very smooth. In order to overcome these points, Athayde (2003) proposed a mean kernel estimation of returns to get a smoother portfolio frontier. This technique provides an effect similar to the case in which an infinite number of observations is available. In spite of the originality of this approach, the proposed algorithm was not neatly written. Moreover, no application was presented in his paper. Ben Salah et al (2015), taking advantage on the the*

robustness of the median, replaced the mean estimator in Athayde's model by a nonparametric median estimator of the returns, and gave a tidily and comprehensive version of the former algorithm (of Athayde (2001, 2003)). In all the previous cases, the problem is computationally complex since at each iteration, the returns (for each asset and for the portfolio) need to be re-estimated. Due to the changes in the kernel weights for every time, the portfolio is altered. In this paper, a new method to reduce the number of iterations is proposed. Its principle is to start by estimating non parametrically all the returns for each asset ; then, the returns of a given portfolio will be derived from the previous estimated assets returns. Using the DSR criterion and Athayde's algorithm, a smoother portfolio frontier is obtained when short selling is or is not allowed. The proposed approach is applied on the French and Brazilian stock markets.
Keywords : DownSide Risk, Kernel Method, Nonparametric Mean Estimation, Nonparametric Median Estimation, Semivariance.

3.1 Introduction

One of the greatest contributions to the financial theory is the derivation of a formal risk-return framework by Harry Markowitz, which laid to the foundations of what we know as modern portfolio theory. Markowitz (1952) pioneered the issue of portfolio optimization with a seminal article, which was later expanded into a seminal book (Markowitz, 1959). By quantifying investment risk in the form of the variance or standard deviation of returns, Markowitz gave investors a mathematical approach to assets selection and portfolio management. Markowitz used mean return's, variances and covariances to derive an efficient frontier where each portfolio maximizes the expected return for a given variance (or minimizes variance for a given expected return). This approach is widely referred to as the Mean-Variance (M-V) criterion. While modern portfolio theory of Markowitz has revolutionized the investment world, it has also received substantial criticisms.

The main criticism concerns the use of the variance as a measure of risk since it gives the same importance and the same weights to gains and losses and supposes that returns are normally (or at least symetrically) distributed. An alternative, also suggested by Markowitz (1955), is the Semivariance which takes into consideration the asymmetry and the risk perception of investors.

In fact, normality on assets returns have been widely rejected in practice, see for example Eftekhari and Satchell (1996), Boudt et al (2009) et Boasson et al (2011). This fact justifies the use of Semivariance when the presence of skewness or any other measure of asymmetry are observed.

The Semivariance is often considered as a more plausible risk measure than the variance. However academics and practitioners are still using the Mean-Variance approach for portfolio optimization as it is easier to compute, have well-known closed-form solutions and deals with a symmetric and exogenous covariance matrix, whereas Mean-Semivariance optimal portfolios cannot be easily determined. This follows from the fact that, the Semicovariance matrix is endogenous and not symmetric (see Estrada 2004, 2008).

Athayde (2001) has developed an algorithm to construct a Mean-DSR portfolio frontier. This curve is continuous and convex. But nevertheless, this convexity presents many kinks due to the fact that the asset returns are not identically distributed. Clearly, the frontier is made on segments of parabolas (piecewise of quadratic functions), each one becoming steeper and steeper as we move to toward the extremes, in either direction. They are connected to each other producing the successive kinks. The more observations we have, the more parabolas will

appear and the smaller the segment of each will become. Otherwise, the number of kinks in the convexity will increase with the number of observations, getting closer and closer to each other, until when we reach the asymptotic limit, they will not be qualified as kinks any more, and the whole portfolio frontier will have a smooth shape. In practice they are only a finite number of observations. Thus, when computing a DSR portfolio frontier we will always be facing these kinks on the convexity, which would only disappear if an infinite number of observations is available. In this limit case, each of the parabolas will degenerate to a single point, creating a continuous smooth changing in the convexity of the curve. However, it is not realistic to have an infinite number of observations.

In order to overcome that, Athayde (2003) used nonparametric techniques to estimate smooth continuous distribution of the portfolio in question. He proposed to replace all the returns by their mean kernel estimators counterpart, and from these estimates, he optimized their DSR, constructing with this, a new portfolio frontier. Ben Salah et al (2015) rewrote and implemented meticulously Athayde's algorithm. Then, they proposed a new approach based on median kernel estimation of the returns, and compared their method to Athayde's one. One can see that results obtained by the median estimation method are better than those obtained by the mean estimation one : a smaller DSR and a smoother frontier. Nevertheless, the computing step and the convergence of the algorithm take a long time due to the construction of the estimators : the asset estimation returns are derived from the estimation of the portfolio returns and they change at each computing step. Some convergences are obtained by imposing arbitrarily a shut-off parameter.

In this paper, alternative nonparametric methods to construct portfolio frontiers are proposed. Contrary to Athayde and Ben Salah et al' s procedure, the idea is to start by estimating all the returns of each asset using kernel mean or median estimates. The portfolio returns estimates are then obtained as a linear combination of the different assets returns estimates and the convergence is ensured without the use of any shut-off criterion. Moreover, the optimization problems are resolved using long only and long-short strategies.

This article is organized into five sections. Section 3.2 presents the underlying concepts of the DownSide Risk and gives an overview on Athayde optimization algorithm to select an optimal portfolio. Section 3.3 is devoted to a new nonparametric approach which is more efficient than the previous methods from a computing point of view. Application on data are presented in Section 3.4. Conclusion and further developments are postponed to Section **??**.

3.2 Classical Mean-DownSide Risk Model

3.2.1 Formal Framework

Markowitz (1952) has introduced the M-V model in portfolio optimization. The objective of M-V model is to minimize the portfolio variance at a given level mean return. Covariance matrix of assets returns need to be calculated to compute portfolio variance. Variance measures the deviation above and below the mean return. Variance is not an appropriate risk measure because it does not only penalise the DownSide Deviation but also the upside one.

DownSide Risk (DSR) is an appropriate investment risk measure because investors are more concerned about losses below a target returns. To overcome the weaknesses of M-V model, Markowitz (1959) proposed and studied the DSR alternative model where the risk is measured

with the Semivariance (SV) rather than the Variance, i.e.,

$$\mathrm{SV} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{\top} \min(r_{pt} - \mu, 0)^2 \tag{3.1}$$

where r_{pt}, $t = 1, \ldots, T$, are T observations of the portfolio return r_p and μ the expected return estimator (arithmetic mean of the observations).

More generally, for a given benchmark value B, the DownSide Risk is a generalization of the Semivariance, i.e,

$$DSR = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{\top} \min(r_{pt} - B, 0)^2 \tag{3.2}$$

Optimizing asset allocation consists in attributing weights to each asset of a given portfolio subject to constraints of an investor's capital resources to yield the most favourable risk-return trade-off.

Let $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ the portfolio vector weights, namely, ω_i ($\in \mathbb{R}$) is the fraction of the investor's portfolio invested in the i-th asset, and $r_{pt} = r_{pt}(w) = \omega_1 r_{1t} + \cdots + \omega_m r_{mt}$ where r_{it} is the return of the asset i at time t. The expected return estimator of asset i is denoted by μ_i. Using Downside Risk criterion, the optimization model is

$$\arg\min_{\omega} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{\top} \min(r_{pt} - B, 0)^2 \qquad \text{subject to} \sum_{i=1}^{m} \omega_i \mu_i = E^* \text{ and} \sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1, \tag{3.3}$$

or

$$\underset{\omega}{Minimize} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \omega_i \omega_j \Sigma_{ijB} \qquad \text{subject to} \sum_{i=1}^{m} \omega_i \mu_i = E^* \text{ and} \sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1, \tag{3.4}$$

where Σ_{ijB}, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, m$, are the elements of the Semicovariance matrix of the portfolio.

If they are exogenous, then the optimization problem (3.3) (or (3.4)) could be formally solved. The weights that minimize the Semivariance could be then obtained in the same manner as in the Mean-Variance framework. Unfortunately, this is not the case and finding the portfolio with the minimum Downside Risk is not straightforward. The main hurdle is that the Semicovariance matrix is endogenous, that is a change in weights affects the periods in which the portfolio under-performs the target rate of return, which in turn affects the elements of the Semivariance matrix.

In order to estimate the portfolio Semivariance, Markowitz (1959) suggests the following expression for Σ_{ijB} :

$$\Sigma_{ijB} = \frac{1}{T}\sum_{t \in V} (r_{it} - B)(r_{jt} - B),$$

where V is a set of indices where the portfolio under performs the target return B.

This estimator has one advantage and one drawback. Althought it provides an exact estimation of the portfolio Semivariance, the Semicovariance matrix is still endogenous.

Many authors propose other ways to estimate the Semivariance and resolve problem (3.3). Among them, Hogan and Warren (1974) propose to use the Frank-Wolf algorithm. Ang (1975) proposes to linearize the Semivariance so that the optimization problem can be solved using linear programming. Harlow (1991) also considers problem (3.3) and generates Mean-Semivariance efficient frontier, which he compares to the Mean-Variance efficient frontier. Mamoghli and Daboussi (2010) improve Harlow approach. Their model permits to surmount the problem of

inequality of the Semicovariance measures which occur in the Mean-Semivariance model of Harlow. Markowitz et al (1993) transform the Mean-Semivariance problem into a quadratic problem by adding fictitious securities. Estrada (2008) proposes a simple and accurate heuristic approach that yields a symmetric and exogenous Semicovariance matrix, which enables the determination of Mean-Semivariance optimal portfolios by using the well-known closed-form solutions of Mean-Variance problems. Athayde (2003) generalizes his own iterative algorithm developed in (2001) to construct a Mean-DownSide Risk portfolio frontier.

The subsection hereafter deals with Athayde's algorithm (2001) that solves Problem (3.3) using an iterative procedure.

3.2.2 Parametric Athayde's Algorithm

Suppose they are m assets and that R_{jt} denotes the excess return of asset j at time t, that is $R_{jt} = r_{jt} - B$ where B is the chosen benchmark. Let M be the matrix with coefficients $\Sigma_{ijB} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{V} R_{it}R_{jt}$, where periods 1 through V are periods in which the portfolio under performs the target return B.

The optimization problem (3.3) can be matricially written

$$\arg\min_{\omega} \omega^\top M\omega \qquad \text{with } \omega^\top \mathbf{1} = 1, \tag{3.5}$$

where $\omega^\top$ is the transpose of ω and $\mathbf{1}$ is a vector of 1. The optimization algorithm is the following

Step 1 Let ω_0 be a starting portfolio vector weights where $\omega_0 = (\omega_{0,1}, \ldots, \omega_{0,m})$. S_0 is the set of observations in which this portfolio ω_0 had negative deviations. M_0 is a positive semidefinite matrix where

$$M_0 = \frac{1}{T}\sum_{t\in S_0}\begin{bmatrix} R_{1t} \\ R_{2t} \\ \vdots \\ R_{mt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{1t} & R_{2t} & \cdots & R_{mt}\end{bmatrix} = \frac{1}{T}\sum_{t\in S_0}\begin{bmatrix} R_{1t}^2 & R_{1t}R_{2t} & R_{1t}R_{mt} \\ R_{2t}R_{1t} & R_{2t}^2 & R_{2t}R_{mt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{mt}R_{1t} & R_{mt}R_{2t} & R_{mt}^2\end{bmatrix}$$

Step 2 Find the portfolio vector weights ω_1 that solves the following problem

$$\arg\min_{\omega} \omega^\top M_0\omega, \qquad \text{with } \omega^\top \mathbf{1} = 1. \tag{3.6}$$

Using *Lagrangian Method*, the solution of this problem is

$$\omega_1 = \frac{M_0^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top M_0^{-1}\mathbf{1}} \tag{3.7}$$

With the new portfolio vector weights ω_1, the set S_1 of indices of only negative excess returns is then formed.

If M_1 is non-invertible, it means that only a few observations are available, and that it will be possible to find a portfolio that will give a null DSR (for example when $R_{jt} \geq 0$). It does not mean there is no DSR, it only means that the sample in question is poor, leaving us with few degrees of freedom.

Step 3 Form a new positive semidefinite matrix M_1 where

$$M_1 = \frac{1}{T}\sum_{t\in S_1}\begin{bmatrix} R_{1t}^2 & R_{1t}R_{2t} & R_{1t}R_{mt} \\ R_{2t}R_{1t} & R_{2t}^2 & R_{2t}R_{mt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{mt}R_{1t} & R_{mt}R_{2t} & R_{mt}^2 \end{bmatrix}$$

The next step is to find the portfolio vector weights ω_2 that solves the following problem :

$$\arg\min_{\omega} \omega^\top M_1\omega, \qquad \text{such that } \omega^\top \mathbf{1} = 1. \tag{3.8}$$

As previously, the solution to this problem is

$$\omega_2 = \frac{M_1^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top M_1^{-1}\mathbf{1}} \tag{3.9}$$

Step 4 Iterate the previous process to construct a sequence of matrices M_i until getting the first matrix M_F satisfying the criterion $M_F = M_{F+1}$. Optimal portfolio vector weights is then given by :

$$\omega_F = \frac{M_F^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top M_F^{-1}\mathbf{1}}. \tag{3.10}$$

This optimal vector gives the minimum DSR.

3.2.3 Mean DSR Frontier

In order to build the portfolio frontier, other points on the efficient set should be found. Let $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ be the mean vector of the assets returns., i.e μ_j is the mean return of asset j, $j = 1, \ldots, m$ and $r_{pt} = \omega_1 r_{1t} + \cdots + \omega_{mt} r_{mt}$ where r_{jt} is the return of the asset j on time t. An expected return E^* should be fixed in order to solve the new recursive minimization problem

$$\arg\min_{\omega} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{\top} \min(r_{pt} - B, 0)^2, \qquad \text{i.e., } \arg\min_{\omega} \omega^\top M\omega,$$

subject to (A): $\omega^\top\mu = E^*$ and (B): $\omega^\top\mathbf{1} = 1$.

Remark 9 (A) requires the weighted returns of the assets to be higher than the expected portfolio return and (B) eliminates idle investment capitals by equating the total portfolio weight to one.

Following the same recursive minimization procedure and *the Lagrangian Method optimisation*, the convergence is achieved after F iterations and the optimal portfolio will be

$$\omega_{F+1} = \frac{\alpha E^* - \lambda}{\alpha\theta - \lambda^2} M_F^{-1}\mu + \frac{\theta - \lambda E^*}{\alpha\theta - \lambda^2} M_F^{-1}\mathbf{1} \tag{3.11}$$

where $\alpha = \mathbf{1}^\top M_F^{-1}\mathbf{1}$, $\lambda = \mu^\top M_F^{-1}\mathbf{1}$ et $\theta = \mu^\top M_F^{-1}\mu$.

It should be noted that for small changes in the expected return, the matrix will remain unchanged. Pre-multiplying $\omega_{F+1}^\top M_F$ by (3.11), we found

$$DSR(\omega_F) = \frac{\alpha(E^*)^2 - 2\lambda E^* + \theta}{\alpha\theta - \lambda^2} \tag{3.12}$$

Remark 10 It is clear that there are no constraints on the signs of weights $\omega_{F+1,1}, \ldots, \omega_{F+1,m}$ which make up the vector ω_{F+1}. We will introduce them in next sections. This is one of the contributions that makes our work different from Athayde's (2003).

3.3 Nonparametric Mean-Downside Risk Model

In practice, only a finite number of observations are available, and although a large number of data is available, the assumptions of asset returns being identically distributed during the whole period of the sample may not be a very realistic assumption. The idea behind this section is to make use of nonparametric techniques to estimate continuous distributions of the portfolios, and from these estimations, optimize their DSR, constructing with this, a new portfolio frontier.

The first meaning of nonparametric covers techniques that do not rely on data belonging to any particular distribution. In particular, they may be applied in situations where less is known about the application in question.

3.3.1 Basic Background

In the following, estimate of the density of the returns using kernels is proposed. A kernel estimation of one point can be seen as a weighted average of the observations, in which the weight given to each observation decreases with its distance from the point in question.

First of all, let us introduce some elements which will be used to define kernel estimators :

The kernel K It is a probability density function. For theoretical commodity, K is supposed satisfying the following properties

$$\int zK(z)dz = 0, \qquad \int z^2K(z)dz < \infty.$$

Examples :

- Rectangular : $K(z) = \frac{1}{2}$ for $|z| < 1$, 0 otherwise.
- Triangular : $K(z) = 1 - |z|$ for $|z| < 1$, 0 otherwise.
- Biweight : $K(z) = \frac{15}{16}(1 - z^2)^2$ for $|z| < 1$, 0 otherwise.
- Epanechnikov : $K(z) = \frac{3}{4}(1 - \frac{1}{5}z^2)$ for $|z| < \frac{1}{5}$, 0 otherwise.
- Gaussian : $K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2)$.

The bandwidth $h(T) =: h$ It is a positive sequence such that $h(T) \to 0$ as $T \to \infty$. It is also called the *the smoothing parameter*.

3.3.2 Kernel Mean Return Estimation

To build a more sophisticated estimation of DSR, Athayde (2001, 2003) proposed to replace all the observations r_t, $t = 1, \ldots, T$ by their Mean Kernel Estimation, *Mean Regression*, $\hat{r}_t$, $t = 1, \ldots, T$ which are a weighted *average* of the observations, in which the weight given to each observation decreases with its distance from the point in question.

The estimator $\hat{r}_t$ of the return r_t for a given asset or portfolio is then given by

$$\hat{r}_t = \frac{\sum_{l=1}^{T} r_l K(\frac{r_t - r_l}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_t - r_l}{h})}, \tag{3.13}$$

or

$$\hat{r}_t = \arg\min_{z \in \mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_l - z|^2 K(\frac{r_t - r_l}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_t - r_l}{h})}. \tag{3.14}$$

The density K determines the shape of the weighting function. The bandwidth, h determines the width of the weighting function and hence the amount of smoothing. The two components determine the properties of the estimator. Theoretical (minimization of asymptotic errors) and practical (rule of thumb, cross validation, plug-in methods) researches had been carried out (and continues to be carried out) on the question of how one should select K and h in order to optimize the properties of the estimator. More details can be found in Pagan and Ullah (1999) or in Silverman (1986).

Remark 11 In his paper, Athayde (2003) used the same weights for the estimation of portfolio returns as for the assets' ones. He started by the estimation of the portfolio returns, then, he derived the returns estimation for each asset. This paper presents another alternative.

3.3.3 Kernel Median Return Estimation

3.3.3.1 General Concept

The disadvantage of the above Mean Regression is that it is sensitive to outliers and may be inappropriate in some cases, as when the distribution is multi-modal or highly asymmetric. This problem can be solved by using another useful descriptive statistic which is robust to heavy-tailed error distributions and outliers : *the Median Regression*. It is a more complete picture of the distribution than the one given by its mean.

From a theoretical point on view, if (X, Z) represents a $\mathbb{R}^2$-valued random vector and $F(\cdot \mid X = X)$ the conditional distribution of Z given $X = x$, the conditional median $m(x)$ of Z given $X = x$ is the solution of the following minimization problem

$$m(x) = \arg\min_{y \in \mathbb{R}} \int |z - y| F(dz \mid X = x). \tag{3.15}$$

It is easy to get an estimator $\hat{m}(x)$ of $m(x)$ by replacing $F(dz \mid X = x)$ by an appropriate estimator $\hat{F}(\cdot \mid X = x)$. Then

$$\hat{q}(x) = \arg\min_{y \in \mathbb{R}} \int |z - y| F_T(dz \mid X = x). \tag{3.16}$$

More details on theoretical and applied properties of median (and more generally on quantiles) can be found in Berlinet et al (2001) or Gannoun et al (2003).

Remark 12

1. The conditional distribution function can be seen as a conditional expectation i.e. $\mathbb{E}(1_{\{Z \leq z\}} \mid X = x) = F(z \mid X = x)$.
2. If $F(\cdot \mid X = x)$ is continuous and strictly increasing, the conditional median of Z given $X = x$ is obtained by the following

$$m(x) = F^{-1}(0.5 \mid X = x). \tag{3.17}$$

3.3.3.2 Kernel Median Estimators

Given T observations r_t, $t = 1, \ldots, T$, from a given asset or portfolio, the kernel estimator $F_T(z \mid r_t)$ of the conditional distribution function $F(z \mid r_t)$ is defined by

$$\hat{F}(z \mid r_t) = \frac{\sum_{l=1}^{T} 1_{\{r_l \leq z\}} K(\frac{r_t - r_l}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_t - r_l}{h})} \tag{3.18}$$

Using Koenker (2005) and (3.16), we can get directly a kernel median return estimation as follows

$$\hat{r}_t = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{\top} |r_l - z| K(\frac{r_t - r_l}{h})}{\sum_{l=1}^{\top} K(\frac{r_t - r_l}{h})}. \tag{3.19}$$

Another way to get $\hat{r}_t$ is to solve the following equation

$$\hat{F}(z \mid r_t) = \frac{\sum_{l=1}^{\top} 1_{\{r_l \le z\}} K(\frac{r_t - r_l}{h})}{\sum_{l=1}^{\top} K(\frac{r_t - r_l}{h})} = \frac{1}{2} \tag{3.20}$$

Remark 13 1. To compute $\hat{r}_t$, the function **nlm**, from the R package stats, is considered *https ://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/nlm.html*

2. In the statistical literature, they are more complicated nonparametric estimators of conditional median : Local polynomial method, double kernel method, L-estimator method, ... (see Gannoun et al (2002) for more details).

3. Median smooths better than mean.

4. Empirically, it is less sensitive than the mean.

3.3.3.3 The Kernel DSR Estimation

The portfolio return estimators are derived from those of Kernel nonparametric assets ones. Let us recall these estimators :

mean estimator $\hat{r}_{jt} = \frac{\sum_{l=1}^{\top} r_{jl} K(\frac{r_{jt} - r_{jl}}{h})}{\sum_{l=1}^{\top} K(\frac{r_{jt} - r_{jl}}{h})}$

median estimator $\hat{\hat{r}}_{jt} = \arg\min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{\top} |r_{jl} - z| K(\frac{r_{jt} - r_{jl}}{h})}{\sum_{l=1}^{\top} K(\frac{r_{jt} - r_{jl}}{h})}$

for each asset j on time t, $j = 1, \ldots, m$ and $t = 1, \ldots, T$.

If ω_j is the percentage weight of the jth asset in the portfolio, the return on each time t is given by $r_{pt} = \omega_1 r_{1t} + \cdots + \omega_m r_{mt}$ and its estimation is given by $\tilde{r}_{pt} = \omega_1 \tilde{r}_{1t} + \cdots + \omega_m \tilde{r}_{mt}$ where $\tilde{r}_{jt} = \hat{r}_{jt}$ or $\hat{\hat{r}}_{jt}$.

To get a kernel DSR estimation, we replace in (3.2) all the observations r_{pt}, $t = 1, \ldots, T$ by their estimators $\tilde{r}_{pt}$ and, then

$$\widetilde{DSR}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{\top} \min(\tilde{r}_{pt} - B, 0)^2. \tag{3.21}$$

Suppose we have m assets and denote by $\tilde{R}_{jt}$ the excess return of asset j at time t. That is $\tilde{R}_{jt} = \tilde{r}_{jt} - B$ where B is the chosen benchmark. Let $\tilde{M}$ the matrix with coefficients $\Sigma_{ijB} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{V} \tilde{R}_{it} \tilde{R}_{jt}$ where V is the period in which the portfolio under-performs the target return B.

The optimization of assets portfolio can be modelled as follows

$$\text{minimize } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{\top} \min(\tilde{r}_{pt} - B, 0)^2, \qquad \text{i.e., minimize } \omega^\top \tilde{M} \omega,$$

subject to (A): $\omega^\top \mu = E^*$, (B): $\omega^\top \mathbf{1} = 1$ and (C): $\omega_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, m$.

The constraint (C) restricts any short selling of assets.

3.3.3.4 Kernel DSR Minimization Algorithm

The processing is similar to the classical one. The estimated returns $\tilde{r}_{jt}$ will take place of the original returns in the previous algorithm. $\tilde{\mu}_j$ denotes $\bar{\tilde{r}}_j$, $j = 1, \ldots, m$ the empirical mean of the random variable $\tilde{r}_j$and E^* is a given expected return.

1. With short sellig constraint (without the constraint (C)).

We are facing to the following ooptimization problem :

$$\text{minimize } \omega^\top \tilde{M}\omega \text{ subject to } (A)\colon \omega^\top \tilde{\mu} = E^* \text{ and } (B)\colon \omega^\top \mathbf{1} = 1.$$

Many steps are necessary to get the optimal solution.

Step 1 We start with an arbitrary portfolio $\omega_0 = (\omega_{0,1}, \ldots, \omega_{0,m})$. For each date $t, t = 1, \ldots, T$, the returns of this portfolio

$$r_{0,pt} = \omega_{0,1} r_{1t} + \ldots + \omega_{0,m} r_{mt}$$

will be replaced by

$$\tilde{r}_{0,pt} = \omega_{0,1} \tilde{r}_{1t} + \ldots + \omega_{0,m} \tilde{r}_{mt}. \tag{3.22}$$

From the previous estimators (3.22), we select the dates when the estimated returns of portfolio w_0 had negative excess returns. This set is called S_0. Let $\tilde{R}_{0,it} = \tilde{r}_{it} - B$ and $\tilde{M}_0$ the following positive semidefinite matrix

$$\tilde{M}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t \in S_0} \begin{bmatrix} \tilde{R}_{0,1t} \\ \tilde{R}_{0,2t} \\ \vdots \\ \tilde{R}_{0,mt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{R}_{0,1t} & \tilde{R}_{0,2t} & \cdots & \tilde{R}_{0,mt} \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \sum_{t \in S_0} \begin{bmatrix} \tilde{R}^2_{0,1t} & \tilde{R}_{0,1t}\tilde{R}_{0,2t} & \tilde{R}_{0,1t}\tilde{R}_{0,mt} \\ \tilde{R}_{0,2t}\tilde{R}_{0,1t} & \tilde{R}^2_{0,2t} & \tilde{R}_{0,2t}\tilde{R}_{0,mt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{R}_{0,mt}\tilde{R}_{0,1t} & \tilde{R}_{0,mt}\tilde{R}_{0,1t} & \tilde{R}^2_{0,mt} \end{bmatrix}$$

Step 2 Find the portfolio ω_1 solution of the problem

$$\text{minimize } \omega^\top \tilde{M}_0 \omega \text{ subject to (A) } \omega^\top \tilde{\mu} = E^* \text{and (B) } \omega^\top \mathbf{1} = 1$$

Using *Lagrangian method*, the solution is the following

$$\omega_1 = \frac{\alpha_0 E^* - \lambda_0}{\alpha_0 \theta - \lambda_0^2} \tilde{M}_0^{-1} \tilde{\mu} + \frac{\theta_0 - \lambda_0 E^*}{\alpha_0 \theta_0 - \lambda_0^2} \tilde{M}_0^{-1} \mathbf{1} \tag{3.23}$$

where $\alpha_0 = \mathbf{1}^\top \tilde{M}_0^{-1} \mathbf{1}$, $\lambda_0 = \tilde{\mu}^\top \tilde{M}_0^{-1} \mathbf{1}$ et $\theta_0 = \tilde{\mu}^\top \tilde{M}_0^{-1} \mu$.

Step 3 Using (3.23), we calculate the new returns of the portfolio

$$\tilde{r}_{1,pt} = \omega_{1,1} \tilde{r}_{1t} + \ldots + \omega_{1,m} \tilde{r}_{mt}, \tag{3.24}$$

and we construct S_1 the set all indices such that $\tilde{r}_{1,pt} - B < 0$, i.e., $S_1 = \{t \in \{1, \ldots, T\} \colon \tilde{r}_{1,pt} - B < 0\}$.

Using the above estimators, we built the following new positive definite matrix $\tilde{M}_1$

$$\tilde{M}_1 = \frac{1}{T}\sum_{t\in S_1}\begin{bmatrix}\tilde{R}_{1,1t}\\ \tilde{R}_{1,2t}\\ \vdots\\ \tilde{R}_{1,mt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{R}_{1,1t} & \tilde{R}_{1,2t} & \cdots & \tilde{R}_{1,mt}\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{t\in S_1}\begin{bmatrix}(\tilde{R}_{1,1t})^2 & \tilde{R}_{1,1t}\tilde{R}_{1,2t} & \tilde{R}_{1,1t}\tilde{R}_{1,mt}\\ \tilde{R}_{1,2t}\tilde{R}_{1,1t} & (\tilde{R}_{1,2t})^2 & \tilde{R}_{1,2t}\tilde{R}_{1,mt}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \tilde{R}_{1,mt}\tilde{R}_{1,1t} & \tilde{R}_{1,mt}\tilde{R}_{1,1t} & (\tilde{R}_{1,mt})^2\end{bmatrix}$$

Using *Lagrangian method*, the solution is the following

$$\omega_2 = \frac{\alpha_1 E^* - \lambda_1}{\alpha_1\theta_1 - \lambda_1^2}\tilde{M}_1^{-1}\tilde{\mu} + \frac{\theta_1 - \lambda_1 E^*}{\alpha_1\theta_1 - \lambda_1^2}\tilde{M}_1^{-1}\mathbf{1} \tag{3.25}$$

where $\alpha_1 = \mathbf{1}^\top\tilde{M}_1^{-1}\mathbf{1}$, $\lambda_1 = \tilde{\mu}^\top\tilde{M}_1^{-1}\mathbf{1}$ et $\theta_1 = \tilde{\mu}^\top\tilde{M}_1^{-1}\mu$.

Step 4 Again, find a new portfolio, select its negative observations, construct a matrix $\tilde{M}_2$, repeat the minimization with $\tilde{M}_2$, find a new portfolio, select its negative deviations, and so on. The iterations will stop when the matrix $\tilde{M}_F$ will be the same as $\tilde{M}_{F+1}$. The minimum DSR portfolio with expected return E^* is given by

$$\omega_{F+1} = \frac{\alpha_F E^* - \lambda_F}{\alpha_F\theta_F - \lambda_F^2}\tilde{M}_F^{-1}\tilde{\mu} + \frac{\theta_F - \lambda_F E^*}{\alpha_F\theta_F - \lambda_F^2}\tilde{M}_F^{-1}\mathbf{1} \tag{3.26}$$

where $\alpha_F = \mathbf{1}^\top\tilde{M}_F^{-1}\mathbf{1}$, $\lambda_F = \tilde{\mu}^\top\tilde{M}_F^{-1}\mathbf{1}$ et $\theta_F = \tilde{\mu}^\top\tilde{M}_F^{-1}\tilde{\mu}$.

The Downside Risk is then

$$DSR(\omega_{F+1}) = \frac{\alpha_F(E^*)^2 - 2\lambda_F E^* + \theta_F}{\alpha_F\theta_F - \lambda_F^2} \tag{3.27}$$

2. Without short selling constraint (with the Constraint (C)).

The optimization problem consists in

minimize $\omega^\top\tilde{M}\omega$ subject to (A): $\sum_{j=1}^{m}\omega_j\tilde{\mu}_j = E^*$, (B): $\sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1$ and (C): $\omega_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,m$

All the minimization steps are similar to the previous ones. Nevertheless, the intermediate optimized solution on each step is not explicit. To get them, we use an appropriated software located in **R Package** with adapted inputs : **quadrog** *(http ://cran.r-project.org/web/packages/quadprog/)*.

Remark 14 Two major contributions characterize this algorithm :

- From a computationally point of view, there are less iterations than in Ben Salah et al (2015) (see the previous Chapter) where , the estimation of all returns are necessary in each step. The convergence is achieved after finite number of iterations.

- In all his minimization models (parametric and nonparametric), Athayde never took into account the (C) constraint. Since this constraint is accounted for in this paper, our results are slightly different from his own.

The DSR is then given by

$$DSR(\omega_{F+1}) = \omega_{F+1}^{\top} \tilde{M}_F \omega_{F+1}. \tag{3.28}$$

In order to build the portfolio frontier, we will have to find the DSR for varied expected return E^*. For a given E^*, the same procedure as in previous paragraphs is used to determine the DSR of the optimal portfolio. The problem is computationally less complicated than in Ben Salah et al (2015) (see Chapter 1) since we have not new estimations of returns for every assets at each optimization step.

3.4 Empirical Analysis

This section is devoted to investigate the performance of the proposed methods using both the parametric and nonparametric approaches on two different stock markets (emergent and developed one). This empirical study will be made in two cases : with and without short selling constraints.

3.4.1 Data

A dataset, drawn from Reuters, was used for this analysis. The original Data consists in daily 9 stocks returns belonged to different sectors : banks, insurance, industry, energy, technology and telecommunication, from 2 markets :

- the French stock market (as a developed country) throughout the period from April 2000 to December 2013, yielding a total of 3500 daily observations,
- the Brazilian stock market (as an emergent country) throughout the period from October 2009 to December 2013, yielding a total of 1018 daily observations.

CAC 40 (the French Stock Market Index) and BOVESPA (Brasil Sao Paulo Stock Exchange Index) values (observed in the respective periods) will provide a baseline for subsequent comparisons between the different methods.

The Government French Bonds, from for January the 2nd, 2013 to April the 26th, 2014), and the one year Government Brazilian Bond (2012) are considered as the Risk-Free Rate of returns in order to compute some Indexes to measure and compare the performance of the different methods.

Historical Price Data p_t is *adjusted for dividends*. The assets returns are computed from stock prices observed on *Thomson Reuters Platform* as follows :

$$R_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}, \tag{3.29}$$

with p_t is the stock closing price at date t and p_{t-1} the stock closing price at date $t-1$.

In the optimization procedures :

- the Benchmark B is supposed to be equal to zero,
- the kernel K is the Gaussian density,
- the bandwidths h are determined by the following cross-validation method for each stock j

$$h_{j,op} = arg \min_h CV(h) = arg \min_h \sum_{i=1}^{T} [r_{ji} - \hat{R}_{(-i,ji)}(h)]^2 \tag{3.30}$$

where

  - for mean smoothing

$$\hat{r}_{(-i,pi)}(h) = \frac{\sum_{t=1,t\neq i}^{T} r_{jt} K(\frac{r_{ji}-r_{jt}}{h})}{\sum_{t=1,t\neq i}^{T} K(\frac{r_{ji}-r_{jt}}{h})}, \tag{3.31}$$

  - for median smoothing

$$\hat{r}_{(-i,ji)}(h) = arg \min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{t=1,t\neq i}^{T} \mid r_{jt} - z \mid K(\frac{r_{ji}-r_{jt}}{h})}{\sum_{t=1,t\neq i}^{T} K(\frac{r_{ji}-r_{jt}}{h})}. \tag{3.32}$$

The general shape of $CV(.)$ curve is exhbited in Figure (3.1)

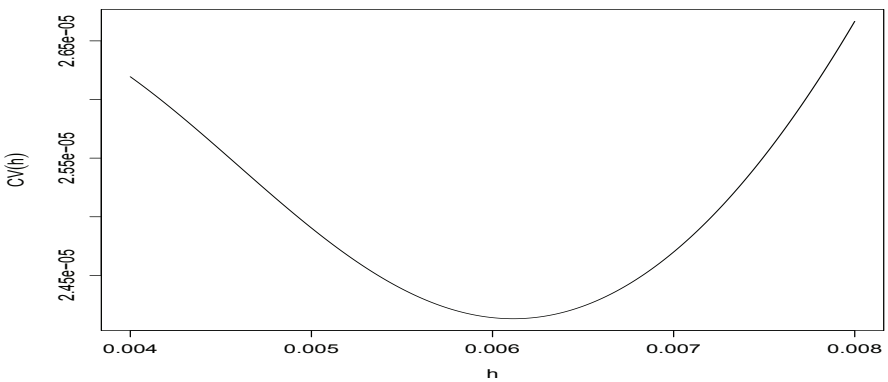

Figure 3.1: *CV(h) curve*

Remark 15 The choose of the kernel is not crucial in nonparametric estimation. Indeed, different densities give slightly the same results. However, the bandwidth selection is very important in order to improve the quality of estimation. The choose of cross validation rule to determine the bandwidth is motivated by its popularity in nonparametric literature (see Arlot and Celisse (2010)).

Historical statistics :

Table 3.1: *French Market Historical Statistics*

	Min	Mean	sd	Skewness	Kurtosis	Max
Accor	-0.1294	0.000225	0.02230	0.09481	3.0857	0.1241
Airb	-0.2632	0.000436	0.02580	-0.13740	5.5292	0.1340
Alcat	-0.1975	0.000531	0.03607	0.45715	8.4942	0.4054
BNP	-0.1724	0.000327	0.02601	0.65718	8.8503	0.2090
Carr	-0.1102	0.000157	0.01977	0.12020	2.8544	0.0995
Dano	-0.1050	0.000285	0.01571	0.09250	4.2764	0.1019
Oréal	-0.1112	0.000261	0.01745	0.21990	4.5650	0.1474
S.Gén	-0.1623	0.000251	0.02890	0.39010	6.7635	0.2389
Total	-0.0919	0.000143	0.01716	0.22629	5.6594	0.1364

Table 3.2: *Brazilian Descriptive Market*

	Min	Mean	S.D	Skewness	Kurtosis	Max
B. Ameri.	-0.2954	0.00017	0.02839	0.3754	29.479	0.2643
B..Estado	0.0882	0.00014	0.02509	1.0275	7.121	0.2052
Pet.e.Gas	-0.2533	-0.00087	0.03237	-0.9176	8.528	0.1454
Cosan.Ltd	-0.1339	-0.00132	0.02341	-0.2088	2.361	0.1025
Informatica	-0.1555	-0.00127	0.02687	-0.4985	5.901	0.1560
Ideiasnet	-0.0120	-0.00097	0.02624	0.0792	2.524	0.1357
Serv. Enge	-0.1468	-0.00027	0.03143	0.7219	9.067	0.2758
Gol.Intel.	-0.0216	0.00015	0.03171	0.1646	5.093	0.1776
Oi.SA	-0.1084	0.00000	0.02133	0.1068	1.740	0.0946

In term of the third moment of expected returns (Skewness), the returns of French assets Alcatel, BNP and Société Générale are highly positive skewed whereas the return of the Airbus asset is negative skewed. Carrefour, L'Oréal and Total returns assets are moderately skewed. However, returns distribution of the assets Accor and Danone are approximatively normal. The returns of Brazilian assets Banco Pan Americano, Banco de Estado de Sergipe, SA Ideiasnet, Estruturas e servicos de Engenharia, Gol Linhas aereas Inteligente and Oi SA have a positive skew whereas the returns of assets Petroleo e Gas, Cosan Ltd and Positivo Informatica have a negative one. For the assets Banco de Estado de Sergipe and Petroleo e Gas, the skewness is substantial and the distribution is far from symmetrical. Only the return distribution of SA Ideiasnet can be considered Gaussian. All the other distributions assets have a considerable positive skew. For the fourth moment of expected returns (Kurtosis), no relevant fat-tailed distribution is observed in French Market. All the distributions are more peaked than the Gaussian distribution. In the brazilian case, all the distributions are peaked than the Gaussian one. Significant fat-tails are observed for returns distribution of the assets Banco Pan Americano, Petroleo e Gas, Estruturas e servicos de Engenharia and Banco de Estado de Sergipe (see Table 3.1 and Table 3.2).
Therefore, these findings suggest the use of the DownSide Risk methods to find the optimal portfolio.
The correlation matrix indicates that the returns are correlated between each other in the two stock markets (see Table 3.3 and Table 3.4).

Table 3.3: *French Correlation Matrix*

	Accor	Airb	Alcat	BNP	Carr	Dano	Oréal	S. Gén	Total
Accor	1.000	0.457	0.447	0.544	0.474	0.351	0.426	0.539	0.489
Airb	0.457	1.000	0.401	0.418	0.404	0.337	0.376	0.407	0.415
Alcat	0.447	0.401	1.000	0.465	0.422	0.28	0.383	0.476	0.404
BNP	0.544	0.418	0.465	1.000	0.522	0.367	0.469	0.803	0.554
Carr	0.474	0.404	0.422	0.522	1.000	0.454	0.518	0.508	0.527
Dano	0.351	0.337	0.28	0.367	0.454	1.000	0.488	0.347	0.455
Oréal	0.426	0.376	0.383	0.469	0.518	0.488	1.000	0.434	0.512
S. Gén	0.539	0.407	0.476	0.803	0.508	0.347	0.434	1.000	0.514
Total	0.489	0.415	0.404	0.554	0.527	0.455	0.512	0.514	1.000

Table 3.4: *Brazilian Correlation Matrix*

	B.Am	B.Es	P.e.G	Co.Lt	Info	Idei	Se.Eng	Go.in	Oi.Sa
B.Am	1.000	0.031	0.196	0.039	0.134	0.113	0.149	0.203	0.030
B.Es	0.031	1.000	0.014	-0.003	-0.074	-0.026	0.007	0.014	-0.031
P. e G.	0.196	0.014	1.000	0.073	0.230	0.230	0.456	0.396	0.059
Co.Lt	0.039	-0.003	0.073	1.000	0.033	0.006	0.067	0.003	-0.055
Info.	0.134	-0.074	0.230	0.033	1.000	0.170	0.213	0.229	0.090
Idei	0.113	-0.026	0.230	0.006	0.170	1.000	0.216	0.214	0.092
Se. Eng	0.149	0.007	0.456	0.067	0.213	0.216	1.000	0.358	0.036
Go.In	0.203	0.014	0.396	0.003	0.229	0.214	0.358	1.000	0.085
Oi.SA	0.030	-0.031	0.059	-0.055	0.090	0.092	0.036	0.085	1.000

3.4.2 Analysis of Results

The sample data is divided into two parts : one for making optimization and one for testing the efficiency of the methods. The same analysis is conducted on the French and Brazilian Stock Markets. The optimisation problem will be solved under two kinds of constraints : optimization without short selling (Positive Constraints on the Weights) and optimization with short selling.

The optimal portfolio returns will compared de the CAC 40 (respectively to Brazil Sao Paulo Stock Exchange Index). The performance will be measured by Sharpe and Sortino ratios.

3.4.2.1 Optimization without short selling

In this paragraph, short selling is not allowed. The suspension of short selling is generally a response to illegal practices concerning spreading false rumours in order to lower the price of shares. Another concern is the naked short selling, where investors sell shares without first having obtained the loan and then fail the settlement. In the Frensh market sample, the first 3245×9 (respectively the 783×9 in the Brazilian Market sample) assets returns are used to make the optimal portfolios. The last 334×9 (respectively 235×9) observations will be used for backtesting and checking the consistency of each optimization method (Markowitz (I), Classical DSR (II), nonparametric Mean DSR Method (III), nonparametric Median DSR Method (IV)). For easy visual comparison, the curves corresponding to the efficient frontiers are plotted on the same figure (Figure 3.2 and Figure 3.3)

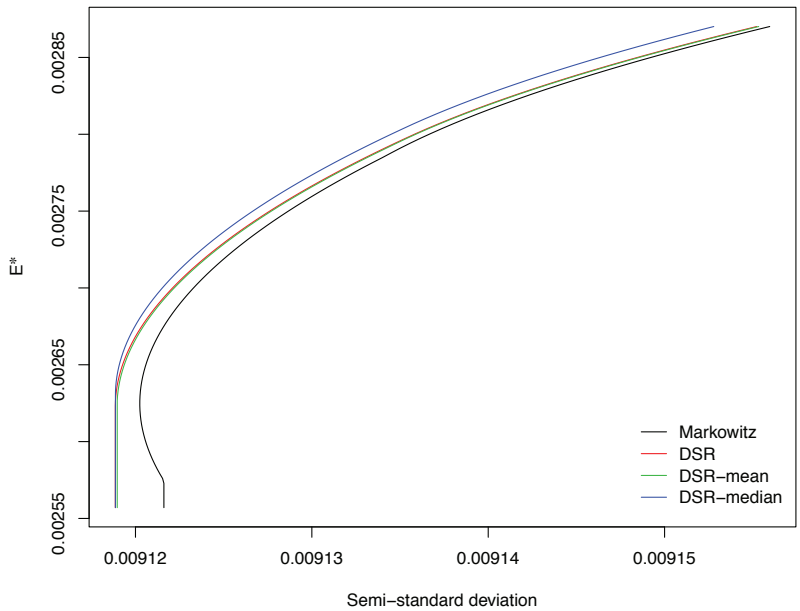

FIGURE 3.2: *French Portfolio Efficient Frontiers* ($\omega_i \geq 0$)

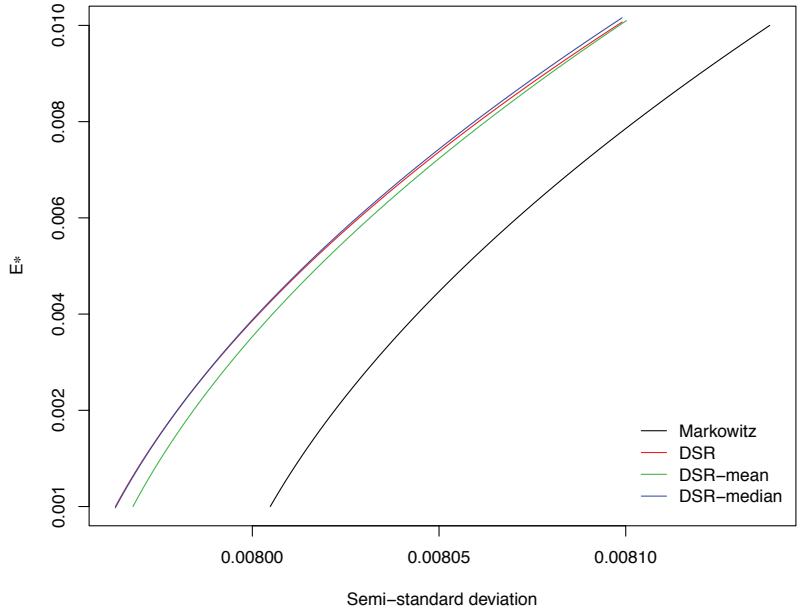

FIGURE 3.3: *Brazilian Portfolio Efficient Frontiers* ($\omega_i \geq 0$)

It is apparent from the graphical comparison in Figure 3.2 that the nonparametric and classical DSR methods push the efficient frontiers outward to the left of the classical Markowitz's Mean-Variance curve to produce efficient portfolios that are stochastically dominant.

In particular, for any given expected return level, the nonparametric median DSR method presents a lower risk (SSD) than the other methods. In the Brazilian case, the efficient frontier obtained by kernel median estimation dominates stochastically those obtained by the classical Mean-Variance, and by kernel mean estimation.

It also appears that efficient frontiers derived from classical DSR and nonparametric median DSR have close position and slope.

These findings are confirmed by the results exhibited on Table 3.5 and Table 3.6 which give the optimal portfolios (weights) for many expected returns E^*.

Table 3.5: *France : Optimal portfolios without short selling*

Mdl	$E^*(\%)$	Accor	Airb	Alcat	BNP	Carr	Dano	Oréa	S.G	Total	S.D.	Semi-S.D.
I	0.025	0.07	0.04	0.00	0.00	0.00	0.44	0.22	0.00	0.23	0.013397	0.009376
II	0.025	0.06	0.05	0.00	0.00	0.00	0.43	0.23	0.00	0.23	0.013396	0.009375
III	0.025	0.06	0.05	0.00	0.00	0.00	0.43	0.23	0.00	0.23	0.013395	0.009375
IV	0.025	0.06	0.04	0.00	0.00	0.01	0.43	0.23	0.00	0.23	0.013391	0.009373
I	0.03	0.03	0.16	0.00	0.02	0.00	0.52	0.25	0.00	0.02	0.014047	0.009792
II	0.03	0.02	0.16	0.00	0.04	0.00	0.51	0.25	0.00	0.03	0.014044	0.009789
III	0.03	0.02	0.16	0.00	0.04	0.00	0.50	0.25	0.00	0.03	0.014046	0.009790
IV	0.03	0.02	0.15	0.00	0.03	0.00	0.51	0.25	0.00	0.03	0.013999	0.009761
I	0.035	0.00	0.42	0.00	0.06	0.00	0.48	0.04	0.00	0.00	0.016346	0.011355
II	0.035	0.00	0.41	0.00	0.08	0.00	0.47	0.04	0.00	0.00	0.016341	0.011352
III	0.035	0.00	0.41	0.00	0.08	0.00	0.47	0.04	0.00	0.00	0.016341	0.011355
IV	0.035	0.00	0.40	0.00	0.06	0.00	0.50	0.03	0.00	0.00	0.016206	0.011263
I	0.04	0.00	0.75	0.00	0.03	0.00	0.22	0.00	0.00	0.00	0.021208	0.014754
II	0.04	0.00	0.75	0.00	0.05	0.00	0.21	0.00	0.00	0.00	0.021205	0.014753
III	0.04	0.00	0.75	0.00	0.04	0.00	0.21	0.00	0.00	0.00	0.021204	0.014754
IV	0.04	0.00	0.75	0.00	0.01	0.00	0.24	0.00	0.00	0.00	0.021107	0.014691

For all the used methods, Alcatel, Carrefour and Société Générale are not present in the optimal portfolios. The contribution of the Airbus and Danone assets in constitution of the optimal portfolio is significant. Accor and Total assets contribute to the optimal portfolio only for low expected return level.

Table 3.6: *Brazil : Optimal portfolios without short selling*

Mdl	$E^*(\%)$	B.Am.	B.Es.	P.Ga.	Cos	Inf	Idei	S.En	G.Int.	Oi.SA	S.D.	Semi-S.D
I	0.005	0.09	0.19	0.01	0.21	0.10	0.10	0.04	0.03	0.24	0.010780	0.007374
II	0.005	0.10	0.24	0.00	0.21	0.07	0.08	0.03	0.04	0.24	0.010780	0.007294
III	0.005	0.09	0.23	0.00	0.21	0.07	0.08	0.03	0.04	0.24	0.010774	0.007297
IV	0.005	0.10	0.23	0.00	0.21	0.07	0.08	0.03	0.04	0.24	0.010664	0.007294
I	0.010	0.09	0.19	0.00	0.22	0.09	0.10	0.04	0.03	0.24	0.010780	0.007355
II	0.010	0.10	0.24	0.00	0.21	0.07	0.08	0.03	0.04	0.24	0.010774	0.007294
III	0.010	0.09	0.23	0.00	0.21	0.07	0.08	0.03	0.04	0.24	0.010763	0.007297
IV	0.010	0.10	0.23	0.00	0.21	0.07	0.08	0.03	0.04	0.24	0.010670	0.007294
I	0.015	0.09	0.19	0.00	0.23	0.08	0.09	0.04	0.04	0.24	0.010787	0.007348
II	0.015	0.10	0.24	0.00	0.21	0.07	0.08	0.03	0.04	0.24	0.010765	0.007294
III	0.015	0.09	0.23	0.00	0.21	0.07	0.08	0.03	0.04	0.24	0.010783	0.007297
IV	0.015	0.10	0.23	0.00	0.21	0.07	0.08	0.03	0.04	0.24	0.010706	0.007294
I	0.020	0.09	0.19	0.00	0.25	0.07	0.08	0.04	0.04	0.24	0.010775	0.007367
II	0.020	0.10	0.24	0.00	0.23	0.05	0.07	0.03	0.05	0.24	0.010860	0.007309
III	0.020	0.10	0.23	0.00	0.23	0.06	0.07	0.03	0.05	0.24	0.010837	0.007313
IV	0.020	0.10	0.23	0.00	0.23	0.05	0.07	0.03	0.05	0.24	0.010857	0.007311
I	0.025	0.09	0.19	0.00	0.27	0.05	0.07	0.03	0.05	0.24	0.010976	0.007411
II	0.025	0.10	0.24	0.00	0.24	0.04	0.06	0.03	0.05	0.24	0.010962	0.007349
III	0.025	0.10	0.23	0.00	0.24	0.04	0.06	0.03	0.06	0.24	0.010963	0.007354
IV	0.025	0.10	0.23	0.00	0.24	0.04	0.06	0.03	0.05	0.24	0.010943	0.007352

Table 3.6 confirms the fact that for different expected returns E^*, the nonparametric method based on median estimation leads to low risk, in comparison to the classical and Mean-DSR

models. It is important to note that in terms of assets allocation there is no important difference for the parametric and nonparametric DSR methods.

In order to clarify whether the portfolios have been successfully optimised the results were compared with CAC 40 and Bovespa Indexes. For each method, 334 french portfolio returns are compared to 334 CAC 40 daily values. Figure 3.4 shows the daily difference between optimal portfolio and CAC 40 returns. Blue color indicates that the portfolio performs better. The comparison is made for different expected return level E^*. Figure 3.4 exhibits the results concerning the four methods for $E^* = 0.03\%$. Similarly, the daily differences between optimal Brazilian portfolio and BOVESPA Index returns for 2013's sample and for an expected return $E^* = 0.03\%$, are plotted in Figure 3.5.

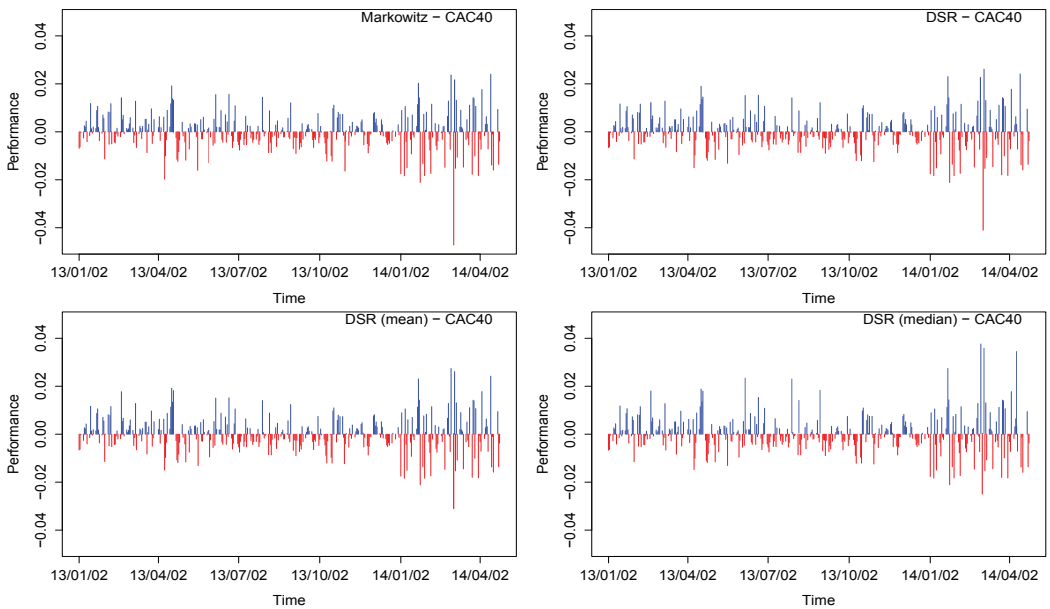

Figure 3.4: *Portfolio returns against CAC 40 Index*

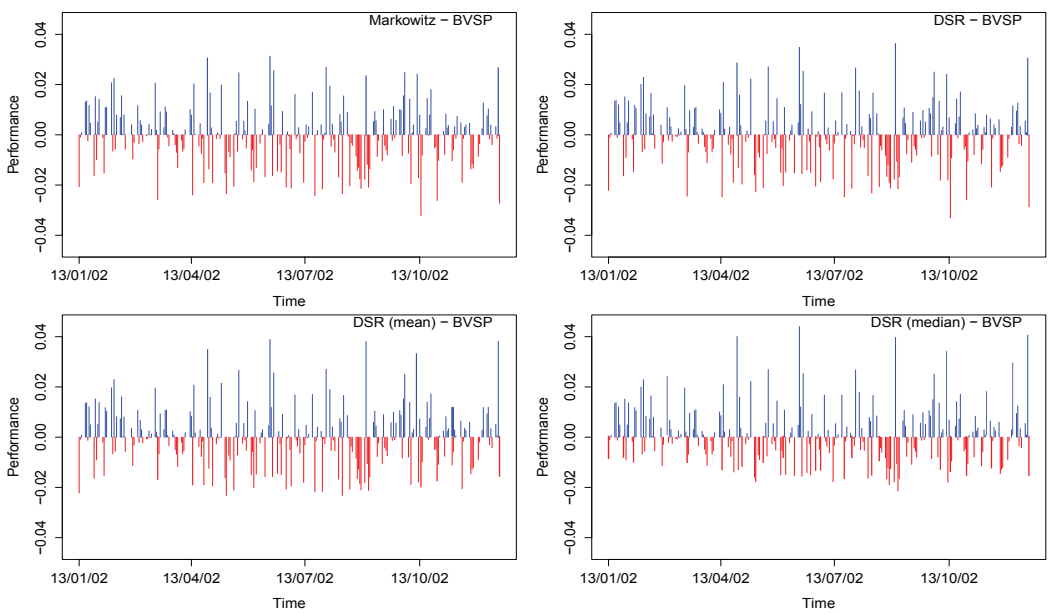

Figure 3.5: *Portfolio returns against BOVESPA Index*

In the French market, it appears that the nonparametric methods are more efficient, in term

of returns, than classical Markowitz and DSR models.
Furthermore, the method based on kernel median estimation is more appealing than the one based on kernel mean estimation (especially at the end of studied period). The same conclusion is reached for different choices of E^*.
In the Brazilian case, the portfolio returns obtained by nonparametric methods are better than BOVESPA Index. More precisely, the method using the smoothing median performs better.

These results will be confirmed later by using Sharpe and Sortino Ratios (See 3.4.2.3).

3.4.2.2 Optimization with short selling

Combining long and short positions become increasingly popular among institutions such as hedge funds and individual investors, as traditional strategies struggled in a bear market, highlighting the need for investors to consider expanding their portfolios into innovative financial solutions and take profit from market evolution.

Long-short strategy consists of buying an undervalued stock and shorting or selling an overvalued stock. the short selling involves borrowing a stock from a broker and then selling it in the market. The stock is bought back and returned to the broker at a later date, this is called covering the short. If the stock drops, the short seller buys it back at a lower price and then he makes money.

Taking short positions provides a way to speculate if you think a market's value is going to decline. This allows you to add value to your portfolio even in a bear market. It is also a tool to hedge a portfolio.

In this section, short selling constraints ($\omega_i \in \mathbb{R}$, for $i = 1, \ldots, 9$) will be incorporated to resolve the different optimization problems (Classical Mean-Variance Markowitz, Classical DSR, nonparametric Mean DSR and nonparametric Median DSR Methods).

Once more two stock markets will be investigated : The French and Brazilian Stock Markets.

As the previous section, data of the French and Brazilian markets is divided into two parts : the first one for determining optimal portfolios and the second one for testing the efficiency of the methods. The last sample will be used to assess performance of the optimal portfolio returns against the CAC 40 and BOVESPA Indexes.

After imposing short Selling constraint, the four methods (classical Mean-Variance, classical DSR, DSR with mean smoothing, and DSR with median smoothing) are applied on the data in order to get optimal portfolios, and plot the correspondent efficient frontiers.

For the French case (Figure 3.6), it is apparent from the graphical comparison that classical and nonparametric DSR methods push the efficient frontiers outward to the left of the classical Mean-Variance curve to produce efficient portfolios that are stochastically dominant. The nonparametric efficient frontier based on median estimation stochastically dominates the other curves for any given expected return E^*.

In the Brazilian case (Figure 3.7), efficient frontiers in DSR framework surpass the classical Mean-Variance one. In fact, for any given expected return, the DSR efficient frontiers dominates stochastically the Mean-Variance curve. Although, the classical DSR seems performing slightly better than the nonparametric Mean DSR model, the nonparametric Median model still the most efficient one.

Table 3.7 (French market) and Table 3.8 (Brazilian market) confirm the obtained results, and give the optimal weights for different expected returns.

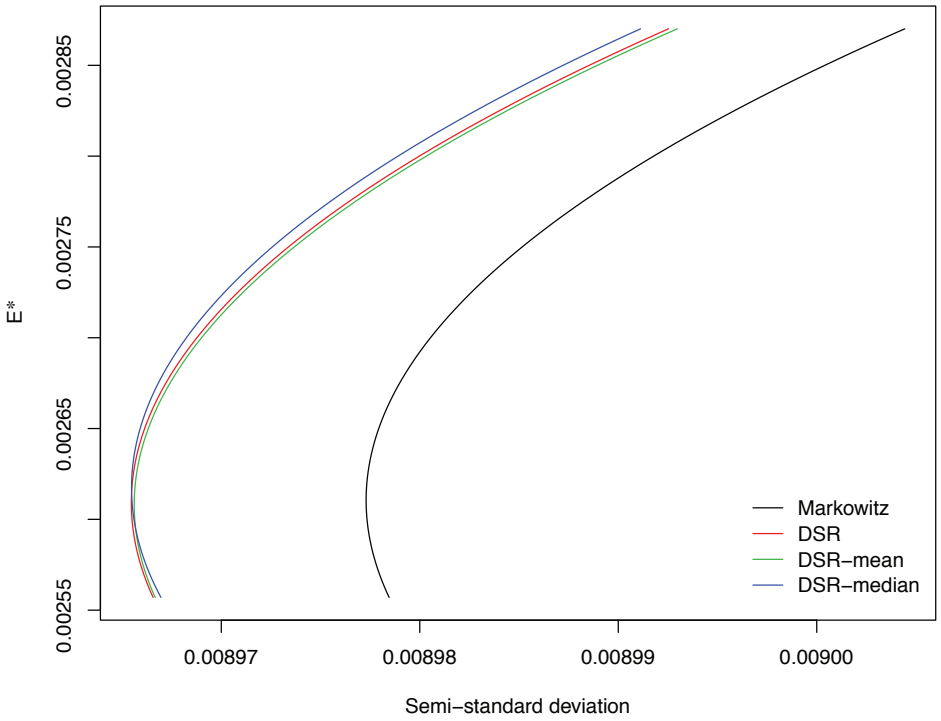

FIGURE 3.6: *French Portfolio Efficient Frontiers* ($\omega_i \in \mathbb{R}$)

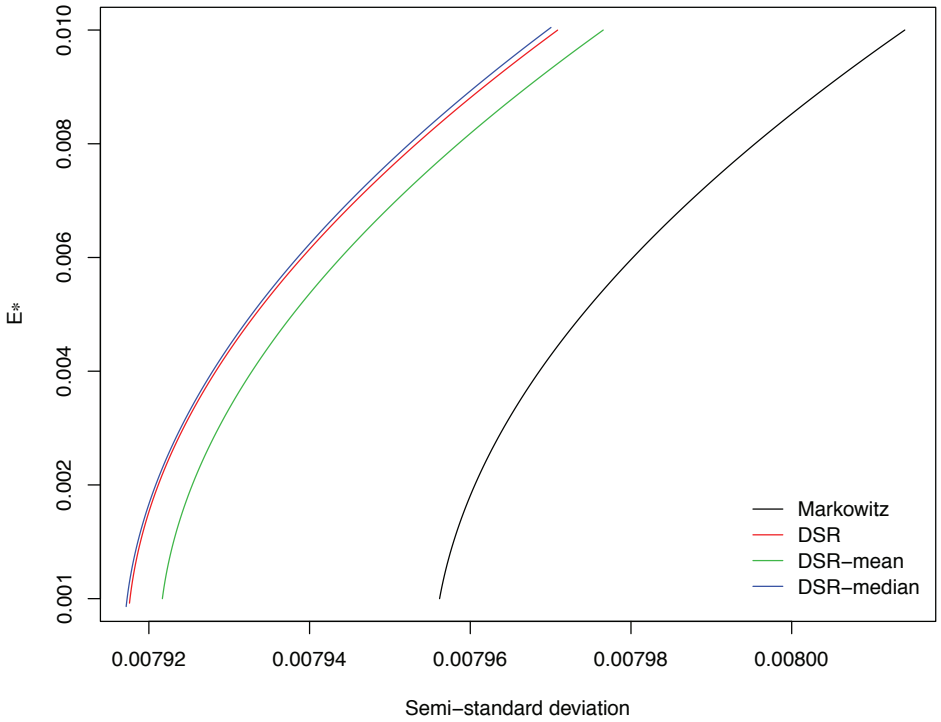

FIGURE 3.7: *Brazilian Efficient Portflio Frontiers* ($\omega_i \in \mathbb{R}$)

Table 3.7: *France : Optimal portfolios with short selling*

Mdl	$E^*(\%)$	Accor	Airb	Alcat	BNP	Carr	Dano	Oréa	S.Gle	Total	S.D.	Semi-S.D.
I	0.025	0.10	0.04	-0.05	-0.02	0.07	0.41	0.22	-0.05	0.26	0.013222	0.009196
II	0.025	0.11	0.05	-0.05	0.01	0.08	0.38	0.24	-0.08	0.26	0.013220	0.009183
III	0.025	0.11	0.05	-0.05	0.01	0.08	0.38	0.24	-0.09	0.27	0.013222	0.009183
IV	0.025	0.11	0.05	-0.05	0.01	0.08	0.38	0.24	-0.09	0.27	0.013200	0.009183
I	0.030	0.11	0.07	-0.07	0.00	0.02	0.43	0.24	-0.05	0.25	0.013318	0.009231
II	0.030	0.11	0.07	-0.08	0.04	0.03	0.41	0.25	-0.08	0.25	0.013316	0.009219
III	0.030	0.11	0.07	-0.07	0.04	0.03	0.40	0.25	-0.08	0.26	0.013310	0.009219
IV	0.030	0.11	0.07	-0.07	0.04	0.03	0.40	0.25	-0.08	0.25	0.013296	0.009216
I	0.035	0.11	0.09	-0.10	0.02	-0.03	0.45	0.26	-0.04	0.24	0.013528	0.009346
II	0.035	0.12	0.09	-0.10	0.06	-0.02	0.43	0.27	-0.08	0.24	0.013518	0.009333
III	0.035	0.12	0.09	-0.10	0.06	-0.03	0.42	0.27	-0.08	0.24	0.013531	0.009334
IV	0.035	0.12	0.09	-0.10	0.06	-0.02	0.43	0.27	-0.08	0.24	0.013508	0.009328
I	0.040	0.12	0.11	-0.13	0.04	-0.09	0.47	0.28	-0.04	0.23	0.013854	0.009538
II	0.040	0.12	0.11	-0.13	0.09	-0.08	0.45	0.28	-0.07	0.23	0.013837	0.009524
III	0.040	0.12	0.11	-0.12	0.09	-0.08	0.44	0.28	-0.07	0.23	0.013850	0.009526
IV	0.040	0.12	0.11	-0.12	0.09	-0.08	0.45	0.28	-0.07	0.23	0.013829	0.009517
I	0.045	0.13	0.13	-0.15	0.06	-0.14	0.49	0.30	-0.03	0.22	0.014280	0.009804
II	0.045	0.13	0.13	-0.15	0.11	-0.13	0.47	0.30	-0.07	0.21	0.014275	0.009789
III	0.045	0.13	0.13	-0.15	0.11	-0.14	0.46	0.30	-0.07	0.21	0.014259	0.009792
IV	0.045	0.13	0.13	-0.15	0.11	-0.13	0.47	0.30	-0.06	0.21	0.014252	0.009781

For any expected return level, investors should take short positions on the Alcatel and Société Générale assets to construct the optimal portfolio. The Carrefour asset should be shorted for a high level of expected return. This result was expected because during the studied period, the financial markets, fearing the collapse of the Euro zone associated with the European sovereign debt crisis, were severely shaken. European and French bank shares, especially the Société Générale Paris share recorded substantial falls.

In fact, the Bearish pressure, influenced by speculation but also by investor suspicion, continued to affect Société Générale's share price through to 2011 and 2012, the share losing 57.22% of its value.

During the studied period, Alcatel-Lucent has been at risk since 2006, because it missed key technological shifts. They unveiled plans to slash jobs worldwide, in order to stem years of losses, cut operating costs and consolidate resources around fewer sites as after losing 700-800 million ($1.08 billions) per year since its merger with U.S. firm Lucent Technologies in 2006.

As to Carrefour, Europe's biggest retailer, they incured a loss of 2.6% in 2012, depressed by the falling demand in recession-hit Spain and Italy. The proportions invested on Total and L'Oréal are very important compared to the other assets contributions as they represent about 50% of the optimal portfolio. It is noted that, in the DSR framework, there is no huge difference in the proportions invested on the different assets.

Table 3.8: *Brazil : Optimal portfolios with short selling*

Model	$E^*(\%)$	B.Am.	B.Es.	P.Ga.	Cos	Inf	Idei	S.En	G.Int.	Oi.SA	S.D.	Semi-S.D
I	0.010	0.09	0.19	0.00	0.22	0.09	0.10	0.04	0.03	0.24	0.010747	0.007355
II	0.010	0.09	0.23	0.00	0.19	0.08	0.09	0.03	0.04	0.24	0.010743	0.007303
III	0.010	0.09	0.23	0.00	0.20	0.08	0.09	0.03	0.04	0.24	0.010726	0.007305
IV	0.010	0.09	0.23	0.00	0.20	0.08	0.09	0.03	0.04	0.24	0.010670	0.007302
I	0.015	0.09	0.19	0.00	0.23	0.08	0.09	0.04	0.04	0.24	0.010786	0.007346
II	0.015	0.10	0.24	-0.01	0.21	0.07	0.09	0.03	0.04	0.24	0.010782	0.007291
III	0.015	0.10	0.23	-0.01	0.21	0.07	0.08	0.03	0.05	0.24	0.010764	0.007294
IV	0.015	0.10	0.23	-0.01	0.21	0.07	0.08	0.03	0.04	0.24	0.010706	0.007291
I	0.020	0.09	0.19	-0.01	0.25	0.07	0.08	0.04	0.04	0.24	0.010856	0.007360
II	0.020	0.10	0.24	-0.02	0.22	0.06	0.08	0.04	0.05	0.24	0.010852	0.007302
III	0.020	0.10	0.23	-0.01	0.23	0.06	0.07	0.03	0.05	0.24	0.010833	0.007306
IV	0.020	0.10	0.23	-0.02	0.22	0.06	0.08	0.04	0.05	0.24	0.010771	0.007303
I	0.025	0.10	0.19	-0.02	0.27	0.06	0.07	0.04	0.05	0.24	0.010957	0.007397
II	0.025	0.10	0.24	-0.02	0.24	0.05	0.07	0.04	0.06	0.24	0.010934	0.007336
III	0.025	0.10	0.23	-0.02	0.24	0.05	0.06	0.04	0.06	0.24	0.010953	0.007341
IV	0.025	0.10	0.23	-0.02	0.24	0.05	0.07	0.04	0.06	0.24	0.010866	0.007338

The results of Table 3.8 show that for different expected returns, there is no huge difference in assets allocation, specially in the DSR framework. It is found that the contribution of B.Esta, Cosan, and Oi.SA assets to optimal portfolio constitution is very important, so it represents about 67% of the long positions.

It is important to note that investors, for high expected returns, should short the Pet.e.Gas asset. For any expected return level, the nonparametric Method based on Median Estimation present lower risk than the other models.

Following the same principle as previously (optimization without short selling), the difference between optimal portfolio and the CAC 40 Index returns of the four proposed models, are made for different expected return level E^*. Figure 3.8 exhibits this difference concerning the French market for the expected return $E^* = 0.03$.

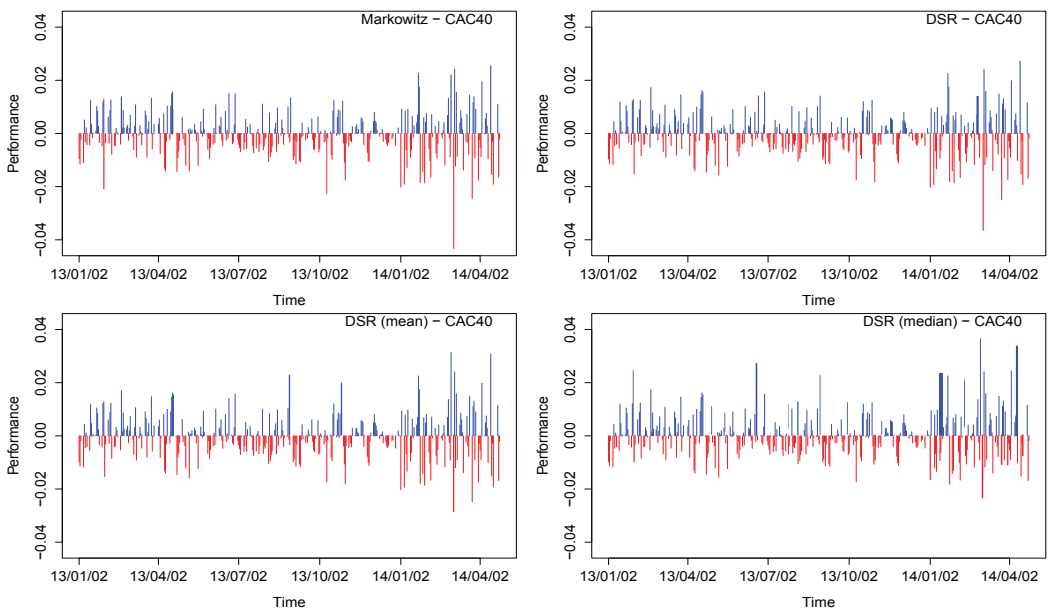

Figure 3.8: *Portfolio returns against CAC 40 Index*

Similarly, the daily differences between optimal Brazilian portfolio and BOVESPA Index returns for 2013's sample and for the expected return $E^* = 0.03\%$, are plotted in Figure 3.9.

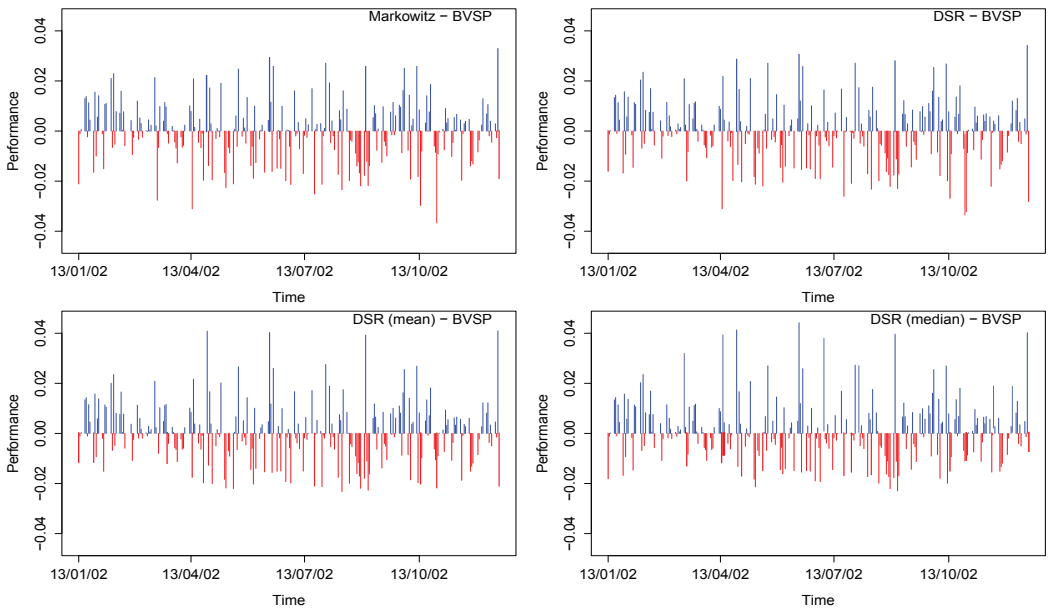

Figure 3.9: *Portfolio returns against BOVESPA Index*

For the French market (Figure 3.8), in the classical Mean-Variance framework, the portfolio returns are slightly lower than the CAC 40 returns. However in the parametric and nonparametric DSR framework, returns of the optimal portfolio are close and outperform the CAC 40 values specially at the end of the studied period. It is interesting to note that returns of optimal potfolio obtained by the Smoothing Median method are more efficient than the CAC 40 Index (returns).

In the Brazilian case, Figure 3.9 shows that, contrary to the classical Mean-Variance model, the classical DSR and nonparametric DSR based on mean estimation are slightly close to BOVESPA Index. Generally, nonparametric Median DSR performs better than BOVESPA Index.

Similar conclusions are reached for different choices of E^*.

3.4.2.3 Performance Analysis

So as to determine the performance of the proposed (parametric and nonparametric) models, adopting different strategies (only long or long-short strategies), explicit measures of performance are investigated in this section. Indeed, two performance ratios : the Sharpe (ShR) and Sortino (SoR) ratios will be exhibited and analysed.

- *Sharpe Ratio* (Sharpe (1966))

  The Sharpe ratio is the average return earned in excess of the risk-free rate per unit of volatility or total risk. Subtracting the risk-free rate from the mean return, the performance associated with risk-taking activities can be isolated. The Sharpe ratio is given by this formula

$$ShR = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma(R_p)} \tag{3.33}$$

where $E(R_p)$ denotes the expected return of the portfolio, R_f the return on the risk-free asset and $\sigma(R_p)$ the standard deviation of the portfolio returns.

This ratio is a relevant performance measure when returns are normally distributed. Abnormalities like kurtosis, fatter tails and higher peaks, or skewness on the distribution can be a problematic for the ratio, as standard deviation doesn't have the same effectiveness when these problems exist. That is why it is interesting to calculate the Sortino ratio.

- *Sortino Ratio* (Sortino (1994)) :

  Sortino Ratio is a transformation of the Sharpe ratio that takes into consideration only the downside deviations. The use of this ratio is recommended to analyse highly volatile portfolios or when the distributions are asymmetric. A portfolio is considered as efficient one when it has high Sortino Ratio. The Sortino ratio is given by this formula :

$$SoR = \frac{E(R_p) - \tau}{DSR} \tag{3.34}$$

  where $E(R_p)$ is the asset or portfolio average realized return, τ the target or required rate of return for the investment strategy under consideration (originally called the minimum acceptable return) and DSR the target semi-deviation (the square root of target semi-variance).
  Here $\tau = R_f$ is taken as the risk free rate of return given by the mean of government bonds returns.

Table 3.9 sums up the levels of Sharpe and Sortino Ratios for all the methods, for the French stock market :

Table 3.9: *Performance Sharpe and Sortino Ratios for French Stock Market*

$E^*(\%)$	Sharpe ratio				Sortino ratio			
	M-V	DSR	DSR-M	DSR-MD	M-V	DSR	DSR-M	DSR-MD
				Positive weights only				
0.025	0.020	0.021	0.021	0.022	0.030	0.031	0.031	0.032
0.030	0.003	0.003	0.003	0.004	0.005	0.005	0.005	0.006
0.035	0.013	0.014	0.014	0.015	0.019	0.019	0.019	0.020
0.040	-0.029	-0.029	-0.029	-0.026	-0.041	-0.041	-0.041	-0.040
				Allowing negative weights				
0.025	0.030	0.040	0.040	0.042	0.058	0.059	0.059	0.061
0.030	0.031	0.042	0.042	0.044	0.063	0.064	0.064	0.065
0.035	0.060	0.069	0.069	0.072	0.104	0.105	0.105	0.108
0.040	0.090	0.092	0.093	0.095	0.145	0.146	0.146	0.150

These ratios show that nonparametric methods, specially that using DSR with Median smoothing have higher Sharpe and Sortino ratios which means that they are more efficient than the classical ones. It is interesting to note that the four methods with Short-Selling constraint, have higher Sharpe and Sortino ratios, which means that long-short strategy are more efficient then the long only strategy.

Similarly, the performance Sharpe and Sortino ratios for Brazilian Stock Market are exhibited in Table 3.10

Table 3.10: *Performance Sharpe and Sortino Ratios for Brazilian Stock Market*

$E^*(\%)$	Sharpe ratio				Sortino ration			
	M-V	DSR	DSR-M	DSR-MD	M-V	DSR	DSR-M	DSR-MD
				without short selling				
0.005	-0.077	-0.074	-0.074	-0.073	-0.100	-0.097	-0.097	-0.097
0.010	-0.074	-0.073	-0.073	-0.071	-0.097	-0.096	-0.096	-0.094
0.015	-0.073	-0.073	-0.073	-0.071	-0.096	-0.095	-0.096	-0.094
0.020	-0.073	-0.072	-0.072	-0.071	-0.096	-0.095	-0.095	-0.095
0.025	-0.074	-0.072	-0.072	-0.072	-0.096	-0.095	-0.095	-0.094
				with short selling				
0.005	-0.076	-0.073	-0.073	-0.070	-0.099	-0.096	-0.096	-0.093
0.010	-0.074	-0.071	-0.072	-0.071	-0.097	-0.093	-0.094	-0.093
0.015	-0.071	-0.068	-0.069	-0.068	-0.094	-0.089	-0.090	-0.089
0.020	-0.068	-0.065	-0.066	-0.065	-0.090	-0.086	-0.086	-0.085
0.025	-0.065	-0.062	-0.062	-0.061	-0.086	-0.081	-0.082	-0.080

Although the Sharp and Sortino ratios are negative for any given expected return, they still a tool to compare the performance of all the methods. Indeed, the nonparametric methods, and more precisely the one based on median estimation, still slightly better than the classical models. Contrary to our expectations, in terms of performance, Long-short strategy does not perform significantly the only long strategy witch means that the Brazilian market in that period is bullish, and shorting assets in this context are not an appropriate way to make profit. Graphic (3.10) shows that the Brazilian Stock Market follows slightly upward trend during the testing period. However, the sample data used in the optimization step presents a flat trend.

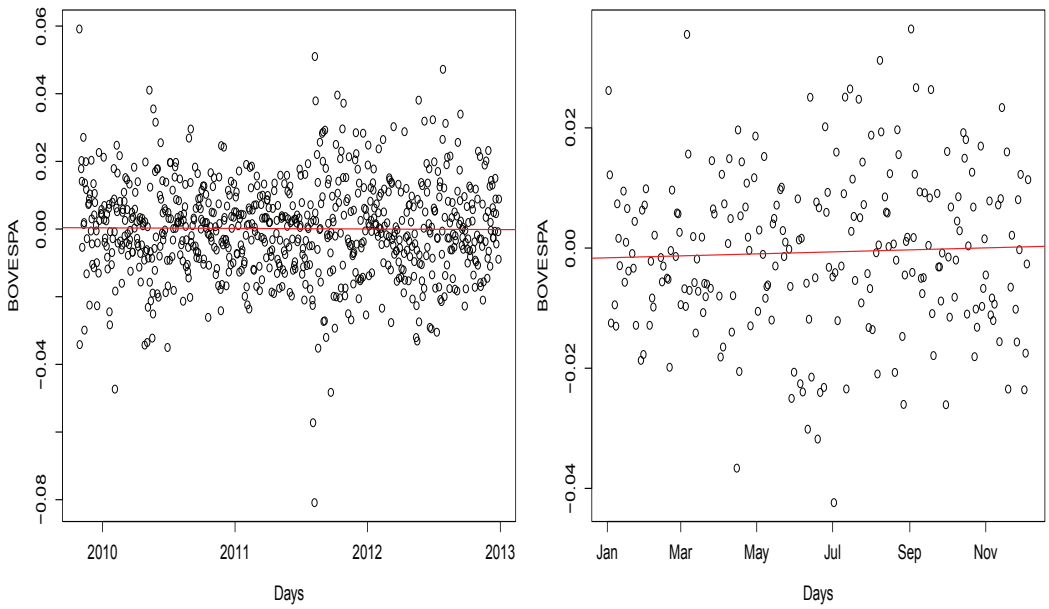

Figure 3.10: *Brazilian Market Trend*

3.5 Conclusion

The classical Mean-Variance model of Markowitz is one of the most popular used models for determining optimal portfolio weights. However, it was widely criticised because its strict as-

sumptions related to the normality or to the symmetry of returns distribution. Many proposals of new risk measures are developed in the literature in order to consider downside movements because investors are more concerned and averse about the DownSide risks.

Our contribution consists on the introduction of nonparametric approach in the estimation of the DownSide Risk. It leads to get smoother efficient frontiers. In addition, adequate iterative algorithms were developed to resolve the optimization problems. The proposed method based on median estimation is precise and very important in term of performance thanks to the robustness of the median. Also, in term of computation time, the proposed algorithms outperform the algorithm proposed by Ben Salah et al (2015).

Nonparametric methods, specially the Mean-DSR with median smoothing, provides lower portfolio risk compared to the classical Mean-Variance and Mean-Semivariance models.

The proposed DownSide Risk versions proposed in this paper were applied to determine the optimal weights in two different stock markets : Brazilian and French stock markets. The results show that the strategies of investment, in terms of asset allocation depend on the methods, and the risk measure used to optimize the portfolio. Asset allocation depends also on the kind of constraints used in the optimisation program like allowing short-selling or not.

It was pointed out that , the nonparametric methods for the French Stock Market, present lower risk comparing to the classical Mean-Variance and Classical Mean-DSR models. In term of performance, the nonparametric methods, specially the one based on median estimation, outperforms the CAC 40 Index in the two investigated strategies (long only strategy , long-short strategy). It is also interesting to note that nonparametric Methods for the French stock market have higher Sharpe and Sortino ratios.

The fact that the Sortino ratios are also much higher for Long–Short portfolios shows that, by allowing short selling, the downside risk (as measured by the target Semivariance) can be substantially reduced.

Our numerical experiments, for the Brazilian stock market, confirm the efficiency of the nonparametric Methods specially the one based on Median Estimation.

Indeed, the nonparametric Methods present lower risk than the classical one. In addition, the comparison to BOVESPA Index shows that nonparametric methods outperforms the classical ones.

Despite the negative values of Sharpe and Sortino ratios , it was clear that Median-DSR methods is more efficient than the classical DSR and Mean-DSR models.

It is believed that Long-Short portfolios are riskier than the Long only portfolios (due to potentially unlimited losses on the Short positions), consequently the Long-Short strategy have to be more efficient.

However, our findings show, for the Brazilian stock market, the Long only strategy was more efficient than the Long-Short strategy. In fact, the choice of strategies should be appropriate to the nature of the market, so shorting in bullish market is not a successful strategy.

Our empirical studies were limited to stock markets, it will be interesting to test our methods on other assets (Bonds, Options, . . .).

It is also interesting to focus on another DSR measures concerned with the left tails of distributions such as VaR and CVaR.

3.6 Bibliography

- Ang, J. (1975). *A note on the ESL Portfolio Selection Model*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 10, 849-857.
- Arlot, S., Celisse, A. (2010). *A survey of cross-validation procedures for model selection*, Statistics Surveys, 4, 40-79.
- Athayde, G. (2001). *Building a Mean-Downside Risk Portfolio Frontier, Developments in Forecast Combination and Portfolio Choice*, John Wiley and Sons.
- Athayde, G. (2003). *The mean-downside risk portfolio frontier : a non-parametric approach*, Advances in portfolio construction and implementation.
- Ben Salah, H., Chaouch, M., Gannoun, A., de Peretti, C., Trabelsi, A. (2015). *Mean and Median-based nonparametric Estimation of Returns in Mean-DownSide Risk Portfolio Frontier*, under acceptance on Annals of operational research.
- Berlinet, A., Gannoun, A., Matzner-Løber, E. (2001). *Asymptotic of convergent estimates of conditional quantiles*, Statistics, 35, 139-169.
- Boasson, V., Boasson, E., Zhou, Z. (2011). *Portfolio Optimization in a Mean Semivariance framwork*, Investment Management and Financial Innovations, 8, 3, 58-68.
- Boudt, K., Peterson, B., Croux, C. (2009). *Estimation and Decomposition of Downside Risk for Portfolios With Non Normal Returns*, The Journal of Risk, 11,2, 79-103.
- Eftekhari, B., Satchel, S. (1996). *Non-Normality of Returns in Emerging Markets*, Research in International Business and Finance, Supplement 1, 267-277.
- Estrada, J. (2004). *Mean-Semivariance Behavior : An Alternative Behavioural Model*, Journal of Emerging Market Finance, 3, 231-248.
- Estrada, J. (2008). *Semivariance Optimization : A Heuristic Approach*, Journal of Applied Finance, 57-72.
- Gannoun, A., Saracco, J., Yu, K.(2003). *Nonparametric time series prediction by conditional median and quantiles*, Journal of statistical Planning and inference, 117, 207-223.
- Harlow, V. (1991). *Asset allocation in a downside risk framework*. Financial Analyst Journal, 47, 28-40.
- Hogan, W., Warren, J. (1974). *Computation of the efficient Boundary in the ES Portfolio selection*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 9, 1-11.
- Koenker, R. (2005). *Quantile Regression, Econometric Society Monographs*, Cambridge University Press.
- Markowitz, M., Peter,T., Ganlin, X., Yuji,Y. (1993). *Computation of mean-semivariance Efficient sets by the Critical Line Algorithm*, Annals of Operationss Research, 45, 307-317.
- Mamoghli, C., Daboussi, S. (2010). *Optimisation de portefeuille downside risk* J. Emerg Market Finance, 9, no. 2, 95-130.

- Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7, 77–91.
- Markowitz, H.M. (1959). *Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments*, New York : John Wiley & Sons.
- Markowitz, H.M. (1991). *Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments*, Basil Blakwell.
- Markowitz, H. M., Todd, P., Xu, G., Yamane, Y. (1993). *Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm*, Annals of Operations Research, 45, 307-317.
- Pagan, A.R., Ullah, A. (1999). *Nonparametric Econometrics*, Cambridge University Press.
- Sharpe, W. (1966). *Mutual Fund Performance*, Journal of Business, 39, 119-138.
- Silverman, B.W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall, New York.
- Sortino, F. , L. Price.(1994). *Performance measurement in a Downside risk framework*, Journal of Investing, 3, 59-65.

Annexe

Abbreviations

Table 3.11: *Companies abbreviations*

France		Brazil	
Companies	*Abb.*	*Companies*	*Abb.*
Accor SA	Accor	Banco PanAmericano SA	B.Amer
Airbus Group NV	Airb	Banco do Estado de Sergipe SA	B.Esta
Alcatel Lucent SA	Alcat	Ogx Petroleo e Gas Participacoes SA	Pet.e.Gas
BNP Paribas SA	BNP	Cosan Ltd	Cosan
Carrefour SA	Carr	Positivo Informatica SA	Informati
Danone SA	Dano	Ideiasnet SA	Ideasnet
L'Oreal SA	Oréa	Mills Estruturas e Servicos de Engenharia SA	S.Enge
Sociéte Générale	S.Gle	Gol Linhas Aereas Inteligentes SA	G.Intel
Total SA	Total	Oi SA	Oi.SA

4 Towards dynamical Portfolio Selection

Sommaire

4.1 Introduction **123**

4.2 Nonparametric Conditional Risk **126**

4.2.1 Nonparametric Regression Model 126

4.2.2 Conditional Mean-Variance Model 128

4.2.3 Conditional Mean-Semivariance Model 128

4.3 Empirical Analysis **131**

4.3.1 Data 131

4.3.2 Historical statistics 131

4.3.3 Portfolio Optimisation 135

4.3.4 Another Tool to Test The Efficiency of the Proposed Methods 139

4.4 Conclusion **140**

4.5 Bibliography **141**

Abstract : *In this paper, we consider the problem of portfolio optimization. The risk will be measured by conditional variance or semivariance. It is known that the historical returns used to estimate expected ones provide poor guides to future returns. Consequently, the optimal portfolio asset weights are extremely sensitive to the return assumptions used. Getting informations about the future evolution of different asset returns, could help the investors to obtain more efficient portfolio. The solution will be reached under conditional mean estimation and prediction. This strategy allows us to take advantage from returns prediction which will be obtained by nonparametric univariate methods. Prediction step uses kernel estimation of conditional mean. Application on Chinese and American markets are presented and discussed.*

Keywords : Conditional Semivariance, Conditional Variance, DownSide Risk, Kernel Method, Nonparametric Mean prediction.

4.1 Introduction

Investment strategies and their profitability have always been a hot topic for people with an interest in financial assets. The modern asset allocation theory was originated from the Mean-

Variance portfolio model introduced by Markowitz (1952), see also Markowitz (1959) and Markowitz (1987). The original Markowitz model simply dealt with a static single period asset allocation problem. Variance is commonly used as a risk measure in portfolio optimisation to find the trade-off between the risk and return. Variance measures the deviation above and below the mean return. Investors wish to minimise the risk at the given return level. Variance and mean are estimated with the data observed before the portfolio optimization date.
Markowitz's portfolio optimization requires the knowledge both of the expected return and the covariance matrix of the assets. It is well known that the optimum portfolio weights are very sensitive to return expectations which are very difficult to determine. For instance, historical returns are bad predictors of the future returns (Michaud, 1989 ; Black and Littermann, 1992 and Sigel, 2007). Estimating covariance matrices is a delicate statistical challenge that required sophisticated methods (see Ledoit and Wolf, 2004). It is fair to state that, due to the large statistical errors of the input of Markowitz's portfolio optimization, its result is not reliable and should be considered very cautiously. This led Levy and Roll (2010) to turn the usual approach on its head and found that minor adjustments of the input parameter are needed , well within the statistical uncertainties.

In this paper, we propose radically different perspective by including, in the estimation step, informations about the possible future returns, obtained by nonparametric prediction. Than, we can improve the quality of portfolio optimisation. Firstly, we exhibit the classical Markowitz model developed in 1952.

Let us say that there are m assets to constitute a portfolio P and denote by r_{jt} the return of asset j on date t, $t = 1, \ldots, T$, and M the estimated variance-covariance matrix of the returns $(r_1, \ldots, r_m)$,

$$M = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\begin{bmatrix} (r_{1t}-\bar{r}_1)^2 & (r_{1t}-\bar{r}_1)(r_{2t}-\bar{r}_2) & (r_{1t}-\bar{r}_1)(r_{mt}-\bar{r}_m) \\ (r_{2t}-\bar{r}_2)(r_{1t}-\bar{r}_1) & (r_{2t}-\bar{r}_2)^2 & (r_{2t}-\bar{r}_2)(r_{mt}-\bar{r}_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (r_{mt}-\bar{r}_m)(r_{1t}-\bar{r}_1) & (r_{mt}-\bar{r}_n)(r_{2t}-\bar{r}_2) & (r_{mt}-\bar{r}_m)^2 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

The optimization program is then the following

$$\min_{\omega} \omega^\top M\omega, \text{ subject to } \omega^\top\mu = E^*, \omega^\top\mathbf{1} = 1, \tag{4.2}$$

where $\omega^\top = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ is the portfolio vector weight, $\mu^\top = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_m) = (\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{1t}, \ldots, \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{mt})$ the empirical mean returns and E^* is a target expected portfolio return.

Using Lagrangian method, the explicit solution of solution of (4.2) is :

$$\omega_* = \frac{\alpha E^* - \lambda}{\alpha\theta - \lambda^2}M^{-1}\mu + \frac{\theta - \lambda E^*}{\alpha\theta - \lambda^2}M^{-1}\mathbf{1}, \tag{4.3}$$

where $\alpha = \mathbf{1}^\top M^{-1}\mathbf{1}$, $\lambda = \mu^\top M^{-1}\mathbf{1}$ and $\theta = \mu^\top M^{-1}\mu$.

This model depends strictly on the assumptions that the assets returns follow normal distribution and investor has quadratic utility function. However, these two conditions are not satisfied. Many researchers have showed that the assets returns distribution are asymmetric and exhibit skewness, see Tobin (1958), Arditti (1971), Chunhachinda et al (1997) and Prakash et al (2003). These authors have proposed a DownSide Risk (DSR) measures such as Semivariance

(SV) and conditional value at risk (CVaR). These DSR measures are consistent with investor's perception towards risk as they focus on return dispersions below specified target return B. Below, we focus only on the Semivariance risk measure which is often considered as a more plausible risk one than the variance.
The associated optimization program is the following :

$$\min_{\omega} \omega^{\top} M_{SR} \omega \text{ subject to } \omega^{\top}\mu = E^{*}, \omega^{\top}\mathbf{1} = 1, \tag{4.4}$$

where M_{SR} is the matrix with coefficients

$$\Sigma_{ijB} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{V}(r_{it} - B)(r_{jt} - B)$$

such that V is the period in which the portfolio underperforms the target return B.

The major obstacle to get the solution of this problem is that the semicovariance matrix is endogenous (see Estrada 2004, 2008) ; that is, a change in weights affects the periods in which the portfolio underperforms the target rate of return, which in turn affects the elements of the Semivariance matrix.

Many authors propose different methods to estimate the elements of M_{SR} in order to resolve problem defined in equation (4.4). Among them, Hogan and Warren (1974) propose to use the Frank-Wolf algorithm but the main disadvantage of this algorithm is its slow convergence rate. Moreover, during early iteration, this algorithm tends to decrease the objective function. Ang (1975) proposes to linearise the Semivariance so that the optimization problem can be solved using linear programming. However, this method ignores the inter-correlations between securities. Harlow (1991) also considers problem (4.4) and generates Mean-Semivariance efficient frontier, where he compares to the Mean-Variance efficient frontier. Mamoghli and Daboussi (2010) improve Harlow approach. Their model permits to surmount the problem of inequality of the Semicovariance measures which occur in the Mean-Semivariance model of Harlow. Markowitz et al (1993) transform the Mean-Semivariance problem into a quadratic problem by adding fictitious securities. Estrada (2008) proposes a simple and accurate heuristic approach that yields a symmetric and exogenous Semicovariance matrix, which enables the determination of Mean-Semivariance optimal portfolios by using the well-known closed-form solutions of Mean-Variance problems. Athayde (2001, 2003) proposes an iterative algorithm and uses it to construct a Mean-DownSide Risk portfolio frontier. Ben Salah et al (2015a, 2015b) improve Athayde's algorithm by introducing nonparametric estimation of the returns in order to better smooth the efficient frontier.

A knowledgeable investor should have an overview on market development. For a fixed amount to invest now, he has to predict, day by day (or month by month, . . .), the optimal return that his investment could bring to him.

In this paper, we will develop a rule of decision to optimize his portfolio by reducing the risk calculated by the classical variance. A new approach, called conditional Markowitz optimization method, will be used to determine an optimal portfolio. This portfolio is obtained by minimizing the so-called *conditional risk*. This risk may in turn be broken down into two versions : Mean-Variance and Mean-Semivariance approaches. The main idea is to anticipate the

values of the assets returns on the date $T+1$ (knowing the past) and incorporate this information in the optimization model.

The rest of the article is organized as follows. Section 2 introduces the nonparametric conditional risk. We start by given a general background on nonparametric regression and prediction, as well as conditional variance and covariance definitions. The conditional Mean-Variance and the conditional Mean-Semivariance models are exhibited in this Section. Numerical studies based on Chinese and American Market dataset are presented in Section 3. The last Section is devoted to conclusion and further development.

4.2 Nonparametric Conditional Risk

Here, we start by giving some general concepts and results concerning nonparametric regression and prediction. Then, we define the Conditional Mean-Variance and Mean-Semivariance models and we exhibit the corresponding algorithms to get the optimal portfolio.

4.2.1 Nonparametric Regression Model

In the following subsection, we outline the mechanics of kernel regression estimation.

In what follows, we let $\{Y_i, X_i\}_{i=1}^N$ denote sample pairs of response and explanatory variables, where Y_i is explanatory variables, X_i is of dimension m, and T denotes the sample size. The best prediction of Y based on $X = x$ is the conditional expectation $E(Y \mid X = x) = g(x)$. The goal is to estimate the unknown mean response $g(x)$. In general, the function $g(x)$, is not necessarily linear and the conditional variance in not necessarily homoscedastic. However , we can always express the data in the form

$$Y_t = g(x) + \sigma(x)\epsilon_t, \tag{4.5}$$

where $\sigma^2(x) = Var(Y \mid X = x)$. Here ϵ_t has conditional zero mean and unit variance. The Nadaraya-Watson estimator for $g(x)$ is then :

$$\hat{g}(x) = \frac{\sum_{t=1}^{N} Y_t \mathcal{K}(\frac{X_t - x}{h})}{\sum_{t=1}^{N} \mathcal{K}(\frac{X_t - x}{h})}, \tag{4.6}$$

where $\mathcal{K}$ is a multivariate kernel function with m arguments and where h is a sequence of positive numbers tending to 0 as N tends ton infinity.

To simplify the writing and the understanding of previous predictors, we choose the following multiplicative expression for the multidimensional kernel $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}(u) = K(u_1) \times \cdots \times K(u_m)$$

where K is an univariate kernel (density) function. Then (4.6), for $x = (x_1, \ldots, x_m)$, should be writing as follows :

$$\hat{g}(x) = \frac{\sum_{t=1}^{N} Y_t K(\frac{X_{1t} - x_1}{h}) \times \cdots \times K(\frac{X_{mt} - x_m}{h})}{\sum_{t=1}^{N} K(\frac{X_{1t} - x_1}{h}) \times \cdots \times K(\frac{X_{mt} - x_m}{h})}. \tag{4.7}$$

Nonparametric smoothing techniques can be applied beyond the estimation of the autoregression function. Consider a m-multivariate stationary time series $\{(r_{1t}, \ldots, r_{mt}), t = 1, \ldots, T\}$. We consider the processes (X_t, Y_t) defined as follows

$$X_t = (r_{1t}, \ldots, r_{mt}) \qquad\qquad Y_t = r_{j(t+1)}, \tag{4.8}$$

and we are interested in predicting the return of a given asset j on time $T + 1$. This problem is equivalent to the estimation of the regression function presented above

$$g(r_{1T}, \ldots, r_{mT}) = \mathbb{E}(Y_T \mid X_T = x_T) = \mathbb{E}(r_{j(T+1)} \mid r_{1T} = r_{1T}, \ldots, r_{mT} = r_{mT}). \tag{4.9}$$

Let $N = T - 1$. Using the kernel method, we get easily the following estimators for conditional expectation, variance and covariance :

- **Conditional expectation :**

$$\bar{r}_{c,j} = \frac{\sum_{t=1}^{N} r_{j(t+1)} K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}{\sum_{t=1}^{N} K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}, \tag{4.10}$$

- **Conditional variance :**

$$\hat{\sigma}^2_{c,j}(r_{1T}, \ldots, r_{mT}) = \frac{\sum_{t=1}^{N} (r_{j(t+1)} - \bar{r}_{c,j})^2 K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}{\sum_{t=1}^{N} K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}, \tag{4.11}$$

- **Conditional covariance :**

$$\hat{\sigma}_{c,ij}(r_{1T}, \ldots, r_{mT}) = \frac{\sum_{t=1}^{N} (r_{i(t+1)} - \bar{r}_{c,i})(r_{j(t+1)} - \bar{r}_{c,j}) K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}{\sum_{t=1}^{N} K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}, \tag{4.12}$$

Comments

1. To estimate conditional expectation, variance and covariance, we supposed that the future depends on the immediate past. This hypothesis, considered as 1-Markovian condition, is natural because the future returns are strongly correlated to the recent past.

2. In Statistics literature, Many other multivariate kernels are proposed like the Spherical/radial-symmetric kernel or the multivariate Epanechnikov (spherical) one.

3. Nonparametric methods are typically indexed by a bandwidth or tuning parameter which controls the degree of complexity. The choice of bandwidth is often critical to implementation : under- or over-smoothing can substantially reduce precision. The standard approach to the bandwidth problem is to choose a bandwidth that minimizes some measure of global risk for the entire regression function, usually Mean Integrated Squared Error

(MISE), i.e. the expected squared error integrated over the entire curve. The optimal bandwidth is then estimated either using plug-in estimators of the minimizer of the asymptotic approximation to MISE or using an unbiased data-based estimator of the MISE . This is the cross-validation method. This method was analyzed in Sarda (1993). It is recommended by Altman and Leger (1995) when large samples are available. As to the estimation of the conditional covariance matrix, one may use different bandwidths for different elements of this matrix. However, the resulting estimate with different bandwidths cannot be guaranteed to be positive definite (Li et al, 2007). In practice, the positive definiteness is a desirable property. Thus, we suggest using the same bandwidth for all elements.

4.2.2 Conditional Mean-Variance Model

Our goal here is to constitute an optimal portfolio using conditional criterion. In our opinion, it is natural to use conditional informations to provide a timely and effective solution.

We suppose that they are, as in the previous section, m assets to be used for constructing a well diversified portfolio. Optimizing asset allocation is simply defined as the process of mixing asset weights of a portfolio within the constraints of an investor's capital resources to yield the most favourable risk-return trade-off. The risk here is defined by conditional variance the portfolio return.
Let $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)^\top$ be the portfolio weight vector and $r_{pt} = \omega_1 r_{1t} + \omega_2 r_{2t} + ... + w_m r_{mt}, t = 1 \ldots, T$, T-realisations of the the portfolio return R_p. Using conditional mean-variance criterion, the optimization model is

$$\min_{\omega} \omega^\top M_c \omega, \text{ subject to } \omega^\top \mu_c = E^*, \omega^\top \mathbf{1} = 1, \tag{4.13}$$

where $\mu_c = (\bar{r}_{c,1}, \ldots, \bar{r}_{c,m})^\top$, E^* is a given expected return and M_c is the conditional covariance matrix whose elements are $\hat{\sigma}_{c,ij}(r_{1T}, \ldots, r_{mT})$.

Using Lagrangian method, an explicite solution of (4.13) is given by :

$$\omega_{c,*} = \frac{\alpha_c E^* - \lambda_c}{\alpha_c \theta_c - \lambda_c^2} M_c^{-1} \mu_c + \frac{\theta_c - \lambda_c E^*}{\alpha_c \theta_c - \lambda_c^2} M_c^{-1} \mathbf{1}, \tag{4.14}$$

where $\alpha_c = \mathbf{1}^\top M_c^{-1} \mathbf{1}$, $\lambda_c = \mu_c^\top M_c^{-1} \mathbf{1}$ and $\theta_c = \mu_c^\top M_c^{-1} \mu_c$.

Then the conditional risk, CR, is given by

$$CR = (\omega_{c,*}^\top M_c \omega_{c,*}). \tag{4.15}$$

4.2.3 Conditional Mean-Semivariance Model

Let us recall that the main criticism to variance, used by Markowitz (1952) as measure of risk is, in essence, that it gives the same importance and the same weight to gains and losses, also the use of variance suppose that returns are normally distributed . That is why Markowitz (1959) argues for another more plausible measure of risk that he calls the Semivariance wich takes into consideration the assymetry and the risk perception of investors. For motivations, details and theortical result on this method, see for example Vasant et al. (2014).

Let B the Benchmark (a threshold which captured the risk perspectives from investors to investors). It is a target return which can be equal to 0. The conditional mean-Semivariance model is the following :

$$\min_{\omega} \omega^\top M_{\{c,SR\}} \omega \text{ subject to } \omega^\top \mu_c = E^*, \omega^\top \mathbf{1} = 1, \tag{4.16}$$

where $M_{\{c,SR\}}$ is the matrix with coefficients

$$\hat{\sigma}_{ijB} = \frac{\sum_{t=1}^{V}(r_{it} - B)(r_{jt} - B)K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}{\sum_{t=1}^{V} K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}, \tag{4.17}$$

such that V is the period in which the portfolio underperforms the target return B.

Remark.
The coefficients $\hat{\sigma}_{ijB}$ are computed differently of those of (4.12). To do it in the same way, we should reindex the observations (such that portfolio underperforms the target return B) in order to get a new time series process and then apply (4.12). This modification is not very helpful given the abundance of data.

Resolving this problem is not easier. Based on Athayde algorithm (2001), we develop, in the following, an iterative algorithm that could resolve the optimization problem without enormous difficulties. The principle is the use of Lagrangian method at each step.

- **Step 0 :**
  - Start with $\omega_{c,0} = (\omega_{c,0}^1, \ldots, \omega_{c,0}^m)$,
  - compute $r_{pt}^0 = \omega_{c,0}^1 r_{1t} + \cdots + \omega_{c,0}^m r_{mt}$, $t = 1, \ldots, T$,
  - select the set S_0 of time indices portfolio return observations in which this portfolio $\omega_{c,0}$ had negative deviations i.e. $r_{pt}^0 - B \leq 0$.
  - Construct the following positive $(m \times m)$ semi-definite matrix $M_{\{c,SR,0\}}$:

$$M_{\{c,SR,0\}} = \frac{1}{\sum_{t\in S_0'} K(\frac{r_{1(t-1)}-r_{1T}}{h})\times\cdots\times K(\frac{r_{m(t-1)}-r_{mT}}{h})} \times$$
$$\sum_{t\in S_0'} \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & (r_{it} - B)(r_{jt} - B)K(\frac{r_{1(t-1)}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{m(t-1)}-r_{mT}}{h}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

  where $S_0' = S_0$ or $S_0 = S_0 \setminus \{1\}$ (if $1 \in S_0$).

- **Step 1 :** find the portfolio $\omega_{c,1}$ that solves the following problem :

$$\min_{\omega} \omega^\top M_{\{c,SR,0\}}\omega \text{ subject to } \omega^\top \mu_c = E^*, \omega^\top \mathbf{1} = 1. \tag{4.19}$$

Using *Lagrangian Method* , the solution to the problem (4.19) will be given by :

$$\omega_{c,1} = \frac{\alpha_{c,1}E^* - \lambda_{c,1}}{\alpha_{c,1}\theta_{c,1} - \lambda_{c,1}^2}(M_{\{c,SR,0\}})^{-1}\mu_c + \frac{\theta_{c,1} - \lambda_{c,1}E^*}{\alpha_c\theta_{c,1} - \lambda_{c,1}^2}(M_{\{c,SR,0\}})^{-1}\mathbf{1}, \tag{4.20}$$

where $\alpha_{c,1} = \mathbf{1}^\top(M_{\{c,SR,0\}})^{-1}\mathbf{1}$, $\lambda_{c,1} = \mu_{c,1}^\top(M_{\{c,SR,0\}})^{-1}\mathbf{1}$ and $\theta_{c,1} = \mu_c^\top(M_{\{c,SR,0\}})^{-1}\mu_c$.

- **Step 2 :**
  - compute $r^1_{pt} = \omega^1_{c,1} r_{1t} + \cdots + \omega^m_{c,1} r_{mt}$, $t = 1, \ldots, T$,
  - select the set S_1 of index observations in which this portfolio $\omega_{c,1}$ had negative deviations i.e. $r^1_{pt} - B \leq 0$,
  - construct the following positive $(m \times m)$ semi-definite matrix $M_{\{c,SR,1\}}$:

$$M_{\{c,SR,1\}} = \frac{1}{\sum_{t \in S'_1} K(\frac{r_{1(t-1)} - r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{m(t-1)} - r_{mT}}{h})} \times$$
$$\sum_{t \in S_1} \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & (r_{it} - B)(r_{jt} - B) K(\frac{r_{1(t-1)} - r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{m(t-1)} - r_{mT}}{h}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

  where $S'_1 = S_1$ or $S'_1 = S_1 \setminus \{1\}$ (if $1 \in S_1$).

  - find the portfolio $\omega_{c,2}$ that solves the following problem :

$$\min_{\omega} \omega^\top M_{\{c,SR,1\}} \omega \text{ subject to } \omega^\top \mu_c = E^*, \omega^\top \mathbf{1} = 1. \tag{4.22}$$

  Using *Lagrangian Method* , the solution to the problem (4.22) will be given by :

$$\omega_{c,2} = \frac{\alpha_{c,2} E^* - \lambda_{c,2}}{\alpha_{c,2}\theta_{c,2} - \lambda^2_{c,2}} (M_{\{c,SR,1\}})^{-1} \mu_c + \frac{\theta_{c,2} - \lambda_{c,2} E^*}{\alpha_c \theta_{c,2} - \lambda^2_{c,2}} (M_{\{c,SR,1\}})^{-1} \mathbf{1}. \tag{4.23}$$

- **Step 3 :** iterate the previous process to construct a sequence of matrices $M_{\{c,SR,l\}}$ until getting the first matrix $M_{\{c,SR,F\}}$ satisfying the criterion $M_{\{c,SR,F\}} = M_{\{c,SR,F+1\}}$. The Optimal portfolio will be given by :

$$\omega_{c,F+1} = \frac{\alpha_{c,F} E^* - \lambda_{c,F}}{\alpha_{c,F}\theta_{c,F} - \lambda^2_{c,F}} (M_{\{c,SR,F\}})^{-1} \mu_c + \frac{\theta_{c,F} - \lambda_{c,F} E^*}{\alpha_c \theta_{c,F} - \lambda^2_{c,F}} (M_{\{c,SR,F\}})^{-1} \mathbf{1}. \tag{4.24}$$

  and the Conditional Semi Risk value , CSR, will be

$$CSR = \omega^\top_{c,F+1} M_{\{c,SR,F\}} \omega_{c,F+1} \tag{4.25}$$

Remarks.

1. There is a finite number of iterations to get the optimal solution.
2. In the prediction step (to get the an unobservable values of the returns), we treated separately the evolution of each asset. It is possible to make multivariate (or vectorial) prediction and get jointly the an unobservable values for all the assets.
3. Short selling is allowed in this model, i.e. the optimal portfolio can have a negative weight for some assets. To forbid short selling, the additional constraint $\omega_j \geq 0 \; for \; j = 1, \ldots, m$. is necessary.

4.3 Empirical Analysis

In this section, the performance of the proposed methods are investigated. Classical Markowitz and DownSide methods are compared to the proposed method. It is supposed that there is no transaction costs, no taxes and the Benchmark $B = 0$.

4.3.1 Data

A dataset, drawn from Reuters, was used for this analysis. The original Data consist on daily stock returns belonged to two markets :

- the Chinese market (emerging market) with 16 assets. They are 897 daily observations (returns) for each asset from November, the 14th, 2011, to July, 8th, 2015,
- the American market (developed market) with 19 assets. They are 788 daily observations (returns) for each asset from June, 18th, 2012 to July, 8th, 2015.

To compare the efficiency and the performance of the proposed methods, we use the daily values of

- the Hang Seng Index-HSI that aims to capture the leadership of the Hong Kong exchange, and covers approximately 65% of its total market capitalization,
- the S&P 500 Index that tracks 500 large U.S. companies across a wide span of industries and sectors. The stocks in the S&P 500 represent roughly 70 % of all the stocks that are publicly traded.

The assets returns are calculated from stock prices observed on Thomson Reuters Platform as follows :

$$r_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}, \tag{4.26}$$

with

- p_t : Stock price at date t,
- p_{t-1} : Stock price at date $t - 1$

The prices p_t, $t = 1, \ldots, T$; are adjusted for dividends.

The historical statistics of the asset markets are summarised below.

4.3.2 Historical statistics

4.3.2.1 Chinese Market

Let us start by the Chinese Market. Over the past two decades, the Chinese economy and financial markets have undergone a remarkable transformation and seen significant growth. More specifically, the Chinese equity market has grown from a once very rudimentary and closed market to one of the largest equity markets in the world. Although most of the Chinese equity market still remains in the hands of controlling parties and domestic investors, authorities have made significant progress in opening the market to foreign capital and increasing the tradable

float outstanding-meaning the Chinese equity market has the potential to become a top dominant force within global portfolios.

Table 4.1: *Chinese historical analysis*

	Abbreviation	Min	Mean	Sd	Skewness	Kurtosis	Max
HangSeng	HSI	-5.84	0.03	1.01	-0.22	1.86	3.80
Agricultural.Bk	A.Bk	-9.90	0.06	1.61	0.70	9.93	10.12
Bank.of.China	B.Ch	-10.98	0.09	1.78	0.69	11.31	10.14
Ind.And.Com.Bank	IACB	-9.90	0.04	1.48	0.06	9.18	9.04
Petrochina	Pet	-9.21	0.04	1.68	0.87	12.09	10.04
China.life.insurance	Ch.L.I.	-10.01	0.10	2.40	0.71	4.02	10.04
China.petroleum	Ch.P.	-10.04	0.04	1.88	0.28	6.85	10.04
Bank.of.Com.	Bk.C.	-10.00	0.08	1.97	0.74	8.88	10.10
Citic.securit	Ci.Se	-7.14	0.00	1.81	1.14	6.81	12.95
China.telecom	Ch.T.	-4.85	0.01	1.81	0.48	1.49	9.28
China.pacific	Ch.P.	-9.98	0.08	2.38	0.55	3.51	13.50
Chinarailway	Ch.R.	-10.14	0.19	2.92	2.65	20.68	26.59
Huaneng	Hua	-10.35	0.11	2.35	0.21	5.90	14.83
Greatwall	Gre	-10.00	0.18	2.63	0.19	1.38	10.63
Dong.feng	Do.F.	-6.96	-0.01	2.19	0.26	0.55	8.13
China.nat.buil	Ch.N.B	-8.96	-0.03	2.16	0.45	2.39	11.12
Tsingtao	Tsi	-10.04	0.01	1.79	0.27	6.86	12.79

Taking all assets together, we observe that

- $-10.98 \leq Min \leq -4.85$
- $3.80 \leq Max \leq 26.59$
- $-0.03 \leq Mean \leq 0.19$
- $1.01 \leq SD \leq 2.92$
- $0.55 \leq Kurtosis \leq 20.68$
- $-0.22 \leq Skwenes \leq 2.65$

It means that the behaviour of assets return is different from an asset to another. However, the returns distribution are more peaked than a Gaussian distribution (the Skewness $\neq$ 0). This statement should favour the use of the DSR methods to optimize a portfolio. As a first time, we process the data as they are normally distributed. Our first goal is to compare the efficiency of classical Markowitz Mean-Variance method versus the proposed Conditional-Mean-Variance method. The second one is to compare the Mean-DownSide Risk method to the Conditional one.

To analyse the possible correlation between the different assets, It is helpfull to know the correlation matrix. This matrix is presented in Table (4.2)

Table 4.2: *China Correlation Matrix*

	A.Bk	B.Ch	IACB	Pet	C.L.I	Ch.P.	Bk.C.	Ci.Se	Ch.T.	Ch.P.	Ch.R.	Hua	Gre	Do.F.	C.N.B	Tsi
A.Bk	1.00	0.82	0.80	0.57	0.49	0.59	0.76	0.04	0.04	0.25	0.18	0.01	-0.03	0.01	0.03	0.09
B.Ch	0.82	1.00	0.76	0.55	0.49	0.57	0.74	0.03	0.00	0.23	0.23	-0.00	-0.04	-0.01	-0.02	0.05
IACB	0.80	0.76	1.00	0.60	0.45	0.60	0.72	0.02	0.05	0.20	0.16	-0.01	-0.03	0.01	0.05	0.09
Pet	0.57	0.55	0.60	1.00	0.54	0.74	0.52	0.02	0.06	0.23	0.18	0.00	0.00	0.02	0.06	0.09
C.L.I	0.49	0.49	0.45	0.54	1.00	0.45	0.49	-0.01	0.04	0.23	0.23	0.03	-0.02	0.01	0.03	0.09
Ch.P.	0.59	0.57	0.60	0.74	0.45	1.00	0.57	0.09	0.04	0.19	0.18	0.02	-0.00	0.06	0.11	0.06
Bk.C.	0.76	0.74	0.72	0.52	0.49	0.57	1.00	0.03	0.01	0.26	0.19	-0.01	-0.03	0.00	-0.00	0.11
Ci.Se	0.04	0.03	0.02	0.02	-0.01	0.09	0.03	1.00	0.10	0.05	0.03	-0.01	-0.01	0.12	0.13	0.03
Ch.T.	0.04	0.00	0.05	0.06	0.04	0.04	0.01	0.10	1.00	0.01	0.05	-0.01	-0.02	0.12	0.40	-0.03
Ch.P.	0.25	0.23	0.20	0.23	0.23	0.19	0.26	0.05	0.01	1.00	0.15	-0.03	0.01	0.00	0.01	0.13
Ch.R.	0.18	0.23	0.16	0.18	0.23	0.18	0.19	0.03	0.05	0.15	1.00	0.05	0.00	0.01	0.01	0.16
Hua	0.01	-0.00	-0.01	0.00	0.03	0.02	-0.01	-0.01	-0.01	-0.03	0.05	1.00	0.00	0.01	0.06	0.08
Gre	-0.03	-0.04	-0.03	0.00	-0.02	-0.00	-0.03	-0.01	-0.02	0.01	0.00	0.00	1.00	0.02	0.03	0.03
Do.F.	0.01	-0.01	0.01	0.02	0.01	0.06	0.00	0.12	0.12	0.00	0.01	0.01	0.02	1.00	0.12	0.00
C.N.B	0.03	-0.02	0.05	0.06	0.03	0.11	-0.00	0.13	0.40	0.01	0.01	0.06	0.03	0.12	1.00	-0.01
Tsi	0.09	0.05	0.09	0.09	0.09	0.06	0.11	0.03	-0.03	0.13	0.16	0.08	0.03	0.00	-0.01	1.00

It appears that the returns are not correlated between each other similarly. For example, Agricultural.Bk is strongly correlated to Bank.of.China and Ind.And.Com.Bank assets, and very weakly correlated to Dong.feng and China.nat.buil assets. More generally, the correlation between two stocks is larger when they are from banking sector than when they belong to different industries. The use of Principal Component Analysis (PCA) could reduce the number of assets to constitute the optimal portfolio. This step is omitted in this paper.

Remark.
We have excluded, in this matrix, the correlation between the HangSeng Index and the other assets because we will use it as a benchmark to compare its return to the optimal portfolio one.

4.3.2.2 The Americain Market : S&P 500

The S&P 500 is designed to be a leading indicator of U.S. equities and is meant to reflect the risk/return characteristics of the large cap universe. Companies included in the index are selected by the S&P Index Committee, a team of analysts and economists at Standard & Poor's. The S&P 500 is a market value weighted index, each stock's weight is proportionate to its market value.
Similar historical statistics are done for this Market. In the beginning, we exhibit and comment the descriptive statistics, then we exhibit and comment the correlation matrix.

Table 4.3: *USA Historical Statistics*

	Abbreviation	Min	Mean	SD	Skewness	Kurtosis	Max
SP500	S&P	-2.50	0.06	0.73	-0.15	0.99	2.54
Apple	App	-12.37	0.07	1.62	-0.54	6.81	8.20
Google	Goo	-8.09	0.09	1.34	1.28	16.27	13.86
Microsoft	Mft	-11.40	0.06	1.44	-0.23	11.57	10.40
Exxon	Exx	-4.18	0.00	0.94	-0.11	1.57	3.22
Berkshire	Ber	-0.90	0.03	0.42	-1.3	14.29	9.34
Wellsfargo	Wel	-4.98	0.08	1.04	0.07	1.92	4.37
Johnson	Joh	-2.88	0.05	0.84	-0.22	0.85	2.57
General.Electric	Gel	-5.35	0.04	1.07	0.33	4.74	7.34
JP.Morgan	JPM	-5.49	0.08	1.24	-0.07	1.49	5.48
Facebook	Fbk	-12.12	0.17	2.73	2.18	21.88	29.56
Wallmart	Wal	-4.36	0.01	0.89	-0.23	2.81	4.72
Procter.and.Gramble	PaG	-6.44	0.04	0.88	-0.20	5.68	4.01
Pfizer	Pfi	-4.41	0.06	0.97	0.00	1.58	4.23
Amazon	Ama	-11.10	0.10	1.87	0.54	11.98	14.11
Walt.Disney	WDi	-8.21	0.12	1.22	0.42	10.48	9.89
Coca.Cola	CCO	-5.96	0.01	0.92	-0.08	4.65	5.44
Gilead.sciences	GiS	-14.34	0.21	1.89	-0.06	8.52	13.72
Visa	Vis	-7.14	0.11	1.27	0.59	7.33	10.29
Citi.group	CGr	-6.22	0.10	1.48	0.16	1.50	6.42

Taking all assets together, we observe that

- $-14.34 \leq Min \leq -0.90$
- $2.54 \leq Max \leq 29.56$
- $0.0 \leq Mean \leq 0.21$
- $0.73 \leq SD \leq 2.73$
- $0.85 \leq Kurtosis \leq 21.88$
- $-0.54 \leq Skwenes \leq 2.18$

The behaviour of assets return is different from an asset to another. However, Most of distributions are more peaked than a Gaussian distribution (the Skewness $\neq 0$). The SP 500 index could be considered as is normally distributed (Skewness=-0.15 , Kurtosis=0.99).

Table (4.4) is devoted to the Correlation Matrix :

Table 4.4: *USA Correlation Matrix*

	App	Goo	Mft	Exx	Ber	Wel	Joh	Gel	JPM	Fbk	Wall	PaG	Pfi	Ama	WDi	CCo	Gis	Vis	CGr
App	1.00	0.23	0.21	0.19	0.01	0.27	0.16	0.01	0.22	0.16	0.20	0.16	0.02	0.16	0.21	0.16	0.16	0.04	0.20
Goo	0.23	1.00	0.35	0.32	-0.03	0.40	0.33	0.08	0.36	0.24	0.25	0.26	0.10	0.49	0.36	0.25	0.28	0.09	0.39
Mft	0.21	0.35	1.00	0.34	0.00	0.37	0.29	0.06	0.36	0.12	0.27	0.27	0.05	0.29	0.30	0.27	0.18	0.12	0.33
Exx	0.19	0.32	0.34	1.00	0.06	0.56	0.48	-0.02	0.51	0.11	0.29	0.40	0.02	0.30	0.40	0.38	0.29	0.08	0.48
Ber	0.01	-0.03	0.00	0.06	1.00	0.04	-0.02	-0.04	-0.01	0.01	0.00	-0.03	0.01	-0.01	0.03	-0.00	0.09	0.05	0.02
Wel	0.27	0.40	0.37	0.56	0.04	1.00	0.53	0.00	0.69	0.16	0.36	0.34	0.02	0.35	0.54	0.38	0.34	0.07	0.66
Joh	0.16	0.33	0.29	0.48	-0.02	0.53	1.00	-0.00	0.44	0.15	0.41	0.50	0.01	0.29	0.43	0.44	0.37	-0.01	0.43
Gel	0.01	0.08	0.06	-0.02	-0.04	0.00	-0.00	1.00	0.01	-0.04	-0.01	-0.04	0.41	0.03	-0.03	-0.04	-0.02	0.36	0.01
JPM	0.22	0.36	0.36	0.51	-0.01	0.69	0.44	0.01	1.00	0.19	0.31	0.32	0.02	0.32	0.44	0.34	0.29	0.06	0.77
Fbk	0.16	0.24	0.12	0.11	0.01	0.16	0.15	-0.04	0.19	1.00	0.05	0.06	-0.04	0.22	0.21	0.07	0.24	-0.02	0.17
Wal	0.20	0.25	0.27	0.29	0.00	0.36	0.41	-0.01	0.31	0.05	1.00	0.43	0.02	0.20	0.41	0.38	0.20	0.02	0.31
PaGr	0.16	0.26	0.27	0.40	-0.03	0.34	0.50	-0.04	0.32	0.06	0.43	1.00	-0.05	0.17	0.34	0.49	0.26	-0.04	0.32
Pfi	0.02	0.10	0.05	0.02	0.01	0.02	0.01	0.41	0.02	-0.04	0.02	-0.05	1.00	0.04	0.01	-0.03	0.06	0.39	0.01
Ama	0.16	0.49	0.29	0.30	-0.01	0.35	0.29	0.03	0.32	0.22	0.20	0.17	0.04	1.00	0.36	0.20	0.27	0.09	0.33
WDi	0.21	0.36	0.30	0.40	0.03	0.54	0.43	-0.03	0.44	0.21	0.41	0.34	0.01	0.36	1.00	0.39	0.26	0.07	0.42
CCo	0.16	0.25	0.27	0.38	-0.00	0.38	0.44	-0.04	0.34	0.07	0.38	0.49	-0.03	0.20	0.39	1.00	0.19	0.01	0.34
Gis	0.16	0.28	0.18	0.29	0.09	0.34	0.37	-0.02	0.29	0.24	0.20	0.26	0.06	0.27	0.26	0.19	1.00	0.07	0.32
Vis	0.04	0.09	0.12	0.08	0.05	0.07	-0.01	0.36	0.06	-0.02	0.02	-0.04	0.39	0.09	0.07	0.01	0.07	1.00	0.06
CGr	0.20	0.39	0.33	0.48	0.02	0.66	0.43	0.01	0.77	0.17	0.31	0.32	0.01	0.33	0.42	0.34	0.32	0.06	1.00

The correlation between two stocks is larger when they are from similar sectors, for example Facebook, Google, Amazon and JP Morgan, City Group and Johnson are positively correlated. There is no significant negative correlation. All the correlation are low or medium.

4.3.3 Portfolio Optimisation

Using the data of the two markets, we will use the Conditional Mean-Variance and the Conditional Mean-Semivariance models to get optimal portfolios that we can invest in each market. The idea is to anticipate the future knowing the past. In the classical methods, Mean, Variance and Semivariance take no account the forthcoming data.
Our methodology consists on dividing the data into two samples : one for making the optimization (optimization sample) and the other for testing the efficiency of the methods (test sample). The optimization sample is used to determine the optimal weights for each method (classical Mean-Variance, Conditional Mean-Variance, Classical Mean-Semivariance and Conditional Mean-Semivariance). These weights are used for computing the optimal portfolio returns for each method.
In order to measure the performance of the proposed methods we use the sample test. The optimal portfolio returns are compared to the naive one and they are also used to assess performance against the HangSeng index and S&P 500 one.
The following parameters and considerations will be used throughout this section :

- Optimal portfolio is determined for one period,
- for the expected return E^*, many values are tested. We have decided to present only results with $E^* = 0.075\%$
- the Benchmark $B = 0$,

- the kernel $\mathcal{K}$ is the multivariate Gaussian density, $\mathcal{K}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} exp - (\frac{x_1^2+\cdots+x_m^2}{2})$,

- the bandwidths h are chosen by cross validation method and depend on each asset return observations (see previous chapters). This choice is motivated by its popularity in nonparametric literature (see Arlot and Celisse (2010)).

- there is no transaction cost,

- short selling is allowed.

To test our methods, we used the following procedure :

- to determine the optimal portfolio, we use all the data collected until May, 31th, 2015,

- returns collected from June, the 1st, 2015 until July, the 7th, 2015 are used to compare naive portfolio return (obtained using $\omega_i = \frac{1}{m}$) to those obtained by the other methods.

For the Chinese Market, results are summarized in Table (4.5). Table (4.7) is devoted to the American Market. From now on, the following abreviation will be used :

- M-V= Classical Mean-Varince Model

- C.M-V= Conditional Mean-Varince Model

- M-DSR= Classical Mean-Semivarince Model

- C.M-DSR= Conditional Mean-Semivarince Model

Table 4.5: *Chinese Portfolio return (%)*

Time	M-V.	C.M-V	DSR	C.M-DSR	Naive
2015-06-01	1.50	1.41	1.55	1.60	1.32
2015-06-02	0.67	0.75	0.76	0.95	0.85
2015-06-03	2.02	2.18	2.25	2.49	1.28
2015-06-04	-0.40	-0.32	-0.23	-0.20	-0.33
2015-06-05	-0.59	-0.81	-0.52	-0.64	-0.22
2015-06-08	1.07	2.95	1.76	3.07	3.79
2015-06-09	-2.22	-1.77	-1.56	-1.16	-1.87
2015-06-10	-0.66	-1.01	-0.57	-0.17	-0.87
2015-06-11	0.50	0.71	0.59	0.29	-0.49
2015-06-12	0.71	0.75	0.79	0.70	-0.21
2015-06-15	-1.94	-2.12	-1.94	-1.25	-1.50
2015-06-16	-2.47	-2.05	-2.01	-2.71	-2.62
2015-06-17	0.48	0.60	0.76	0.85	0.58
2015-06-18	-1.24	-1.15	-0.98	-1.30	-2.63
2015-06-19	-1.77	-4.09	-1.74	-4.05	-4.17
2015-06-22	2.41	3.38	2.59	3.53	1.75
2015-06-23	1.83	1.83	1.85	1.95	1.61
2015-06-24	-0.69	-0.36	-0.54	-0.25	-1.10
2015-06-25	-4.00	-2.60	-1.96	-2.04	-4.54
2015-06-26	0.90	2.90	1.96	1.73	0.17
2015-06-29	0.20	1.89	1.90	2.23	0.62
2015-06-30	-1.41	-0.40	-1.33	-2.90	-3.05
2015-07-02	1.05	1.52	1.96	1.95	1.27
2015-07-03	-0.32	-0.48	-0.17	-0.22	-3.83
2015-07-06	1.23	1.25	0.98	1.27	4.56
2015-07-07	-1.90	-1.58	-1.13	-2.36	-2.82

From Table (4.5) this table, we can extract the following comparative Table (4.6) which could inform us about the efficiency of each method compared to effective return obtained by a naive portfolio, computed day after day starting from June, the 1st, 2015. Below, the numerator of the fraction is the number of days on which methods perform better than the naive one.

Table 4.6: *Naive versus the other portfolio optimization methods in the Chinese Market*

	Naive	M-V.	C.M-V	M-DSR	C.M-DSR
Naive	26/26	16/26	20/26	21/26	**22/26**

In the same spirit and using the same conditions, the portfolio optimization processes, in the American Market, are summarized in Table (4.7)

Table 4.7: *American Portfolio return (%)*

Time	M.V.	C.M.V.	DSR	C.DSR	Naive
2015-06-01	-0.12	-0.11	-0.10	0.12	0.41
2015-06-02	-0.08	-0.02	-0.02	-0.03	-0.04
2015-06-03	-0.03	0.13	0.05	0.15	0.07
2015-06-04	-0.77	-0.60	-0.57	-0.51	-0.80
2015-06-05	-0.91	-0.68	-0.85	-0.65	-0.88
2015-06-08	0.07	-0.15	0.07	0.08	-0.58
2015-06-09	0.22	0.26	0.27	0.57	0.21
2015-06-10	0.50	0.73	0.48	0.80	0.75
2015-06-11	-0.20	-0.19	-0.24	-0.15	0.13
2015-06-12	-0.75	-0.62	-0.70	-0.55	-0.68
2015-06-15	-0.78	-0.81	-0.81	-0.67	-0.69
2015-06-16	0.67	0.81	0.78	0.85	0.63
2015-06-17	0.45	0.51	0.44	0.56	0.15
2015-06-18	0.73	0.77	0.88	0.95	1.19
2015-06-19	-0.37	-0.51	-0.37	-0.28	-0.75
2015-06-22	0.09	0.62	0.41	0.53	0.34
2015-06-23	-0.22	-0.06	-0.22	-0.04	0.44
2015-06-24	-0.38	-0.58	-0.41	-0.25	-0.50
2015-06-25	-0.65	-0.17	-0.67	-0.08	-0.49
2015-06-26	0.07	0.10	0.11	0.22	-0.03
2015-06-29	-1.17	-1.41	-1.20	-1.10	-1.98
2015-06-30	-0.45	-0.45	-0.43	-0.21	-0.55
2015-07-01	0.81	1.28	0.86	1.48	0.73
2015-07-02	0.13	0.11	0.21	0.14	-0.07
2015-07-06	-0.35	-0.28	-0.30	-0.15	-0.17
2015-07-07	1.50	1.22	1.48	1.55	1.47

To compare all the methods, we use , as in Chinese Market, the naive portfolio as the reference portfolio and the following comparative table (Table 4.8)

Table 4.8: *Naive versus the other portfolio optimization methods in the American Market*

	Naive	M-V.	C.M-V.	M-DSR	C.M-DSR
Naive	26/26	13/26	17/26	16/26	**22/26**

General comments

- Chinese Market is more volatile. The portfolio return has varied between -4.17% and 4.56% during the test period. This variation was between -1.98% and 1.47% for the American Market.
- For this two markets, all the methods perform better than the naive one.
- Conditional methods perform better than the non conditional ones.
- The conditional Markowitz method is more interesting (in term of portfolio returns) than the classical Markowitz one.

- Similarly, the conditional Mean-DownSide risk is much more efficient than the classical Mean-DownSide optimization method.

4.3.4 Another Tool to Test The Efficiency of the Proposed Methods

The HangSeng and the S&P 500 indices will contribute to test the efficiency of the classical and the new portfolio optimization methods. We will compare the daily portfolio return obtained by the weights which are solutions of different optimization programs using all the data until May, the 31th , 2015. From June, the 1st, 2015 until July, the 7th, 2015, we compute the portfolio returns and we compare them against the daily HangSeng and the S&P 500 indices. Results are exhibited in figure 4.1 (Chinese Market) and figure 4.2 (American Market).

- Red color signifies a negative difference between portfolio return and HangSeng Index (respectively S&P 500 index),

- blue color signifies a positive difference between portfolio return and HangSeng Index (respectively S&P 500 index),

- Overall performance is the sum of all the differences during the test period.

We note that the comparison is in favour of the Conditional-Mean-Variance and the Conditional-Mean-Semivariance optimization methods. The overall performance varies depending on the method of portfolio optimization and markets :

- from 0.94% (Classical Markowitz method) to 12.64% (Conditional Mean-Semivariance method) for the Chinese Market,

- from 0.09% (Classical Markowitz method) to 1.42% (Conditional Mean-Semivariance method) for the American Market.

These mouthwatering results deserve more practice and more tests over a long period of time and on different markets using different financial products.

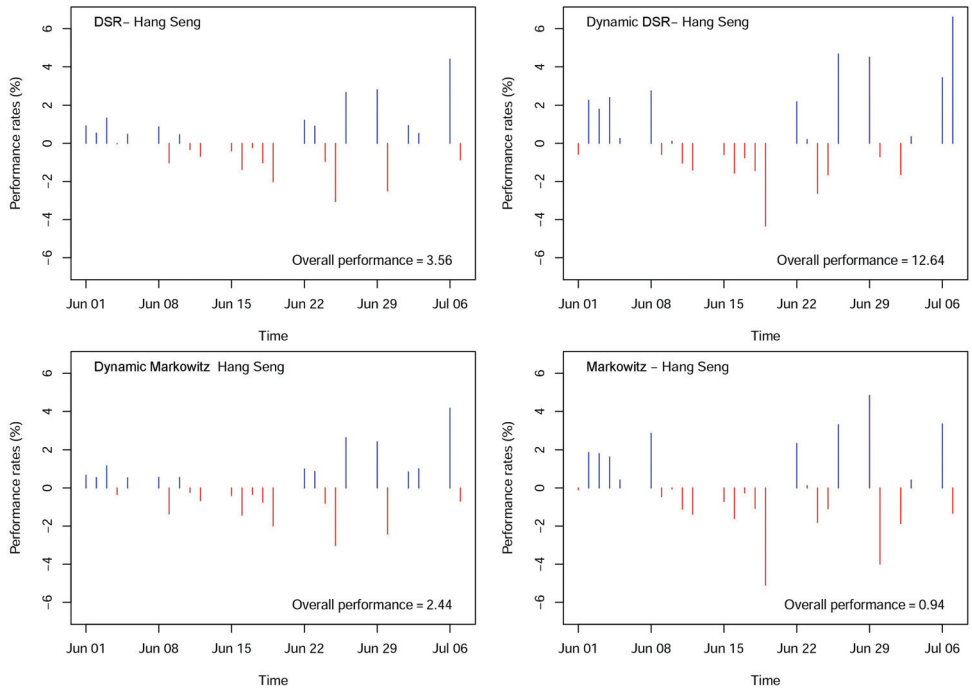

FIGURE 4.1: HangSeng index versus return of optimal portfolio

FIGURE 4.2: S&P500 index versus return of optimal portfolio

4.4 Conclusion

In this paper, we developed two new approaches in order to get an optimal portfolio minimizing two conditional risks. The first risk is based on conditional variance, and the optimization method using this risk is an extension of the classical Mean-Variance model. Mean and Variance are replaced by Conditional Mean and Conditional Variance estimators. The second one is based on Conditional Semivariance, and the optimization method using this risk is an extension of the classical Mean-Semivariance model. This novelty, using conditional risk, gives a new approach and more efficient alternative to get an optimal portfolio. In fact, all the other methods do not anticipate the future and just extrapolate to the future what the observe in the past.
In both cases, the optimization algorithm involved using the Lagrangian method. Even, our results seem interesting, the efficiency of our methods should be confirmed on other markets and with other various assets. Kernel methods, belonging to nonparametric methods, are used to estimate Conditional Mean, Variance and Semivariance. Product Gaussian densities are used as kernel. It will be very helpful to choose typical multivariate kernels. Similarly, we should develop a global method to choose the bandwidth which is crucial in nonparametic estimation.
Back to results of this paper : the Conditional Mean-Semivariance seem most appropriate to get an optimal portfolio using the data of the Chinese and the American markets. By the way, Conditional Mean-Variance is more efficient than Mean-Variance method. Similarly, the Conditionam Mean-Semivariance is better than the Mean-Semivariance method. These conclusions

are not definitive and should be confirmed or not under different hypothesis and on different markets.
Thanks to its robustness, it is also reasonable to substitute the conditional median to the conditional mean and to propose an optimization model based on Conditional Median and conditional variance or conditional Median and Conditional Semivariance. This topic will be treated a matter for future research.

4.5 Bibliography

- Altman, N., Leger, C. (1995). *Bandwidth Selection for Kernel Distribution Function Estimation*, Journal of Statistical Planning and Inference,46, 195-214.

  Arditti, F. D. (1971). *Another Look at Mutual Fund Performance*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 6, 3, 909-912.

- Athayde, G. (2001). *Building a Mean-Downside Risk Portfolio Frontier, Developments in Forecast Combination and Portfolio Choice*, John Wiley and Sons.

- Athayde, G. (2003). *The mean-downside risk portfolio frontier : a non-parametric approach*, Advances in portfolio construction and implementation.

- Ben Salah, H., Chaouch, M., Gannoun, A., de Peretti, C., Trabelsi, A. (2015). *Median-based Nonparametric Estimation of Returns in Mean-Downside Risk Portfolio frontier*, Manuscript submitted.

- Ben Salah, Gannoun, A., de Peretti, Ribatet, M., Trabelsi, A. (2015). *A New Approach in Nonparametric Estimation of Returns in Mean-Downside Risk Portfolio frontier*, Manuscript submitted.

- Black, F., Litterman, R. (1992). *Global portfolio optimization*, Financial Analysts Journal, 48,5, 28-43.

- Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., and Prakash, A.J. (1997). *Portfolio Selection and Skewness : Evidence from International Stock Markets*, Journal of Banking and Finance, 21, 143-167.

- Estrada, J. (2004). *Mean-Semivariance Behavior : An Alternative Behavioural Model*, Journal of Emerging Market Finance, 3, 231-248.

- Estrada, J. (2008). *Optimization : A Heuristic Approach*, Journal of Applied Finance, 57-72.

- Harlow, V. (1991). *Asset allocation in a downside risk framework*, Financial Analyst Journal, 47, 28-40.

- Hogan, W. and Warren, J. (1974). *Computation of the efficient Boundary in the ES Portfolio selection*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 9, 1-11.

- Ledoit, O. and Wolf, M. (2004). *Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix*, The Journal of Portfolio Management, 30, 4, 110-119.

- Levy, M., Roll, R. (2010). *The Market Portfolio May Be Mean/Variance Efficient After All*, Review of Financial Studies, 23, 6, 2464-2491.
- Li, Y., Hong, M., Tuner, N.D., Lupton, J.R, Caroll, R.J.. (2007). *estimation of correlation functions in longitudinal and spatial data, with application to colon carcinogenesis experiments* , J. Ann. Statist. 35, N, 1608-1643.
- Mamoghli, C. and Daboussi, S. (2008). *Optimisation de portefeuille downside risk*, Social Science Research Network, 23 pages.
- Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7, 77–91.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments*, New York : John Wiley & Sons.
- Markowitz, H. (1987). *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Basil Blackwell, paperback edition, Basil Blackwell, 1990.
- Markowitz, H. , Todd, P., Xu, G., and Yamane, Y. (1993). *Computation of mean-Semivariance efficient sets by the critical line algorithm*, Annals of Operations Research, 45, 307-317.
- Michaud, R. O. (1989). *The Markowitz Optimization Enigma : Is 'Optimized' Optimal ?*, Financial Analysts Journal , 45, 31-42.

  Sarda, P. (1993). *Smoothing parameter selection for smooth distribution functions*, Journal of Statistical Planning and Inference, 35, 65-75.
- Prakash, A.J., Chang, C., Pactwa, T.E. (2003). *Selecting a Portfolio with Skewness : Recent Evidence from US, European, and Latin American Equity Markets*, Journal of Banking and Finance, 27, 1375-1390.
- Pratt , J., W. (1964). *Risk Aversion in the Small and in the Large*, Econometrica, 32, 1, 122-136.
- Tobin, J. (1958). *Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables*, Econometrica, 26,1, 24-36.
- Vasant, D., Jarke, M., and Laartz, J. (2014). *Big Data*, Business & Information Systems Engineering, 6,5, 257-259.
- Yin, J., Geng, Z., Wang,H. (2010). *covariance model*, Statistica Sinica, 20, 469-479.

Conclusion générale

Depuis sa naissance en 1952, la théorie moderne de portefeuille a connu plusieurs évolutions. Cette théorie s'appuyant sur le paradigme Moyenne-Variance a été largement critiquée par plusieurs auteurs dont le père fondateur lui même de cette théorie (Markowitz , 1959). Le principal reproche qu'on lui a fait c'est l'hypothèse de la normalité des rendements. Cette hypothèse n'est vérifiée que dans des cas assez rares. L'utilisation du DownSide Risk a permis de passer outre cette contrainte et de fournir une mesure du risque mieux adoptée et plus appropriée aux investisseurs. Nous avons listé dans le chapitre 2 toute une panoplie de ces mesures et nous nous sommes focalisés dans les chapitres 3, 4 et 5 sur la Semivariance qui a donné naissance au modèle d'optimisation de portefeuille Moyenne-Semivariance.
Notre contribution se présente sous différentes formes :

1. **Introduction des méthodes non paramétriques dans la construction de portefeuilles optimaux**

   Nous nous sommes intéressés à l'utilisation des méthodes non paramétriques dans le processus de minimisation du risque en vue d'obtenir un certain rendement pour un portefeuille "bien choisi". Nous avons commencé par revisiter une publication due à Athayde (2001) que nous avons corrigée et mise à jour. Athayde suggérait dans son papier de remplacer chaque donnée (le rendement à une date fixée) par une moyenne pondérée de ses voisins obtenue par l'estimation de l'espérance conditionnelle par la méthode du noyau. Mais l'écriture des estimateurs était vague et non rigoureuse. Dans un premier temps, nous nous sommes attelés à clarifier puis corriger ces estimateurs, puis dans un second temps, nous avons proposé de remplacer l'espérance conditionnelle par la médiane conditionnelle et donc de remplacer chaque donnée par un estimateur de la médiane "pondérée" de ses voisins.
   Dans le premier article et pour les besoins du programme de minimisation, les estimations des rendements des actifs sont déduites de l'estimation des rendements du portefeuille à chaque itération et les matrices de Variance-Covariance correspondantes sont obtenues à partir de ces estimateurs (non paramétriques). Plus clairement, si à l'itération i, le poids obtenu par résolution du programme de minimisation est $\omega_i = (\omega_{i1}, \ldots, \omega_{im})$, le rendement du portefeuille associé à l'instant t est donné par l'expression suivante :

   $$r_{pt} = \omega_{i1} r_{1t} + \cdots + r_{mt}\omega_{im}$$

   et l'estimation non paramétrique de r_{pt} est donnée par les deux expressions suivantes

   $$\left\{\begin{array}{rcl} \hat{r}_{pt} & = & \dfrac{\sum_{l=1}^{T} r_{pl} K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})} = \dfrac{\sum_{l=1}^{T} (\omega_{i1} r_{1l} \ldots, r_{ml}\omega_{im}) K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})} \\ & = & \omega_{i1} \dfrac{\sum_{l=1}^{T} r_{1l} K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})} + \cdots + \omega_{im} \dfrac{\sum_{l=1}^{T} r_{ml} K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})} \end{array}\right. \tag{4.27}$$

   ou

   $$\hat{r}_{pt} = \arg min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{pl} - z| K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})}, \tag{4.28}$$

où K est un noyau univarié.
Les estimations des rendements des actifs sont déduites de (4.27) et (4.28) sous les formes suivantes :

$$\hat{r}_{jt} = \frac{\sum_{l=1}^{T} r_{jl} K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})} \tag{4.29}$$

et

$$\hat{r}_{jt} = \arg min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{jl} - z| K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{pt}-r_{pl}}{h})}. \tag{4.30}$$

Dans l'article 2, nous avons déduit l'estimation des rendements du portefeuille à partir de l'estimation des différents rendements des actifs qui le composent. Plus clairement, pour tout actif j, nous avons remplacé le rendement r_{jt} de cet actif à l'instant t par :

$$\hat{r}_{jt} = \frac{\sum_{l=1}^{T} r_{jl} K(\frac{r_{jt}-r_{jl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{jt}-r_{jl}}{h})} \tag{4.31}$$

ou

$$\hat{r}_{jt} = \arg min_{z\in\mathbb{R}} \frac{\sum_{l=1}^{T} |r_{jl} - z| K(\frac{r_{jt}-r_{jl}}{h})}{\sum_{l=1}^{T} K(\frac{r_{jt}-r_{jl}}{h})}, \tag{4.32}$$

où K est un noyau univarié.
L'estimation, à l'instant t, du rendement du portefeuille dont les actifs à l'étape i sont affectés des poids $\omega_i = \omega_{i1}, \ldots, \omega_{im}$ est :

$$\hat{r}_{pt} = \omega_{i1}\hat{r}_{1t} + \cdots + \omega_{im}\hat{r}_{mt} \tag{4.33}$$

L'introduction de ces méthodes a donné un aspect continu aux données qui a permis d'avoir des frontières efficientes plus lisses et plus rigoureuses comparées à celles obtenues par les modèles classiques Moyenne-Variance ou Moyenne-Semivariance. L'estimation des rendements du portefeuille à partir de l'estimation des rendements des actifs (article 2) nous a permis de réduire le temps de calcul pour l'obtention du portefeuille optimal. La convergence des algorithmes de minimisation ne nécessite pas un test d'arrêt comme dans le cas où les estimations des rendements des actifs étaient déduites de celles de l'estimation du rendement du portefeuille (article 2).
D'un point de vue empirique, l'application sur différents marchés d'actions de ces nouvelles approches a montré leur efficacité en vue de la construction de portefeuilles : pour un rendement espéré donné, il y a moins de risque à choisir le portefeuille optimal en adoptant nos méthodes de minimisation qu'en utilisant les méthodes classiques concurrentes. De part sa robustesse, l'utilisation de la médiane conditionnelle a permis d'obtenir des résultats avantageux en terme de risque pour des rendements espérés donnés. Toutes les comparaisons, notamment contre les performance du CAC 40, ont confirmé ce constat.

Plusieurs pistes de recherche et de futures améliorations sont à développer pour tester la solidité de nos approches. Elles sont de deux types :

(a) celles qui concernent la composition du portefeuille :

- varier les contraintes par l'introduction des coûts des transactions,
- varier la composition du portefeuille par l'introduction de valeurs mobilières, d'obligations, de warrants, des titres de créance négociables etc,

- constitution de portefeuille à partir de plusieurs marchés nationaux et internationaux,
- introduire un nouveau paramètre dans les programmes d'optimisation qui concerne le nombre d'actifs à inclure dans le portefeuille,

(b) celles qui concernent l'écriture des estimateurs et le choix des paramètres de lissage :

- définir un critère de choix approprié pour la détermination des fenêtres optimales. La cross validation est un critère global qui fait tourner les algorithmes mais qui peut surlisser les estimateurs,
- le noyau utilisé est la densité normale mais d'autres choix doivent être testés. Bien qu'en estimation non paramétrique le choix du noyau n'est pas crucial, certaines simulations ont donné des résultats très différents suivant le choix du noyau. L'utilisation de noyau à support compact nous semble une piste à explorer,
- pour mieux tenir compte des possibles corrélations entre les rendements des différents actifs, il serait utile d'utiliser la prévision multivaiée (vectorielle) pour l'estimation non paramétrique des rendements,
- le risque est mesuré par la variance ou la semivariance, le remplacer par la médiane ou la semi-médiane peut être un excellent challenge. Dans ce cas, le programme d'optimisation n'est plus quadratique et l'utilisation de la méthode de Lagrange n'est plus de rigueur.

2. **Prédiction non paramétrique en vue de la construction d'un portefeuille optimal : modèles conditionnels**

De même, nous avons aussi introduit un aspect temporel, que nous pensons novateur, dans le processus de la construction d'un portefeuille optimal et ceci dans les deux modèles d'optimisation Moyenne-Variance ou Moyenne-Semivariance. Dans l'approche classique, seules les données observées avant la période d'optimisation sont utilisées pour estimer les différentes moyennes, variance et semivariance nécessaires pour la mise au point du programme d'optimisation. Or, avoir une idée sur les valeurs futures des différents rendements peut être d'une grande utilité. Ces valeurs futures sont estimées grâce à des prédicteurs construits à partir de l'estimation non paramétrique de l'espérance, de la variance et des covariances conditionnelles. Pour obtenir, la semivariance, on utilisera juste les déviations négatives comme dans le cas classique. Ces prédicteurs sont définis comme suit :

- **Espérance conditionnelle**

$$\bar{R}_{c,j} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} R_{j(t+1)} K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}{\sum_{t=1}^{T-1} K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}, \tag{4.34}$$

- **Variance conditionnelle :**

$$\hat{\sigma}^2_{c,j}(r_{1T}, \ldots, r_{mT}) = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} (r_{j(t+1)} - \bar{R}_{c,j})^2 K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}{\sum_{t=1}^{T-1} K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h}) \times \cdots \times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}, \tag{4.35}$$

- **Covariance conditionnelle**

$$\hat{\sigma}_{c,ij}(r_{1T},\ldots,r_{mT}) = \frac{\sum_{t=1}^{T-1}(r_{i(t+1)}-\bar{R}_{c,i})(r_{j(t+1)}-\bar{R}_{c,j})K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h})\times\cdots\times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}{\sum_{t=1}^{T-1}K(\frac{r_{1t}-r_{1T}}{h})\times\cdots\times K(\frac{r_{mt}-r_{mT}}{h})}, \tag{4.36}$$

Ces écritures supposent que le futur dépend du passé immédiat et donne un aspect Markovien d'ordre 1 des données. Cet aspect peut s'expliquer aisément par le fait que l'évolution les rendements d'un jour dépendent en grande partie de leur évolution la veille.
Cette innovation nous a permis de définir les modèles conditionnels Moyenne-Variance et Moyenne-Semivariance. Les résultats empiriques obtenus à partir des rendements d'actions prises sur les marchés américain et chinois, sont très encourageants. Les tests pratiqués pour juger de l'efficacité de cette contribution ont montré des performances "nettement" en faveur des modèles conditionnels comparées aux méthodes classiques : sur un mois d'étude, le rendement global obtenu par les modèles conditionnels sont supérieurs aux rendements obtenus par les méthodes classiques correspondantes. Mais cette méthode mérite davantage d'attention et d'étude à plusieurs titres :

- est-ce bien raisonnable de se contenter du passé immédiat pour prévoir le futur ? Bien que réaliste, cette hypothèse mérite confirmation,
- pour des raisons pratiques, dans les différentes applications, nous avons utilisé comme noyau mutivarié un produit de gaussiennes. Ce choix facilite l'écriture des prédicteurs mais ne nous semble pas optimal. Dans la littérature spécialisée, on préconise le choix de noyau sphérique. Ce choix sera tenté dans les prochaines publications,
- les espérances conditionnelles ont été estimées action par action. Il est possible de mettre au point un procédé pour estimer le vecteur espérance conditionnelle en adoptant une écriture multivariée des rendements (de dimension m). Cette écriture a un avantage c'est celui de tenir compte de l'éventuelle corrélation entre tous les rendements, et un inconvénient c'est celui de la malédiction de la dimension si m (le nombre d'actifs) est grand,
- que peut nous apporter une mesure du risque par la médiane dans ce cas ?

3. Projets en cours

Pour finir cette section, nous donnons un résumé succint de deux travaux qui sont en cours et qui concernent la mise au point d'une méthode de décision pour la constitution d'un portefeuille multi-horizons. Cette méthode basée sur la prédiction des rendements futurs des différents actifs utilisent l'estimation non paramétrique de l'espérance ou de la médiane conditionnelles uni ou multivariée et mutihorizon. L'idée principale de ces travaux est de transformer l'optimisation d'un portefeuille multi-période en une optimisation de période 1. L'ensemble des données qui va servir au programme de minimisation sera constitué des données initiales jusqu'au temps T plus un ensemble de données artificielles obtenues par les différents prédicteurs conditionnels pour les instants $T+1$, $T+2$, $\ldots$, $T+H-1$, H étant l'horizon de la prédiction. Cette manière de procéder offre à l'investisseur une règle (de décision) pour choisir le moment et le marché qui lui donneront

le meilleur rendement en minimisant un risque adéquat.

- **Projet de l'Article 4**

  Semi and Nonparametric Estimation Approach in Multi-Horizon Mean-Variance and Multi-Horizon Mean-Semivariance Portfolio Selection

  Résumé : In this paper, we consider the problem of multi-period portfolio optimization over a finite horizon. We first propose nonparametric methods to predict all not available return observations for the assets, then we apply the mean-variance or semivariance method, as the case might be, to get an optimal portfolio for any given horizon. Application on various markets are presented and discussed.
  Keywords : Downside Risk, Kernel Method, Nonparametric Mean prediction, Nonparametric Median prediction, Semivariance, Variance.

- **Projet de l'Article 5**

  Nonparametric Multivariate Approach in Multi-Horizon Mean-Variance and Mean-Semivariance Portfolio Selections

  Résumé : In the previous paper, we proposed to predict separately (for each asset) the returns which do not yet exist. To construct the predictors, we used methods based on nonparametric estimation of univariate expectation and median. Nevertheless, these methods did not take into account the possible correlations between the assets returns. The use of multivariate methods allows us to counteract this weaknesses.
  Keywords : Downside Risk, Kernel Method, Multivariate Nonparametric Mean prediction, Multivariate Nonparametric Median prediction, Semivariance, Variance.

Ces deux articles sont au stade des simulations et de l'application sur des données réelles provenant des marchés français et brésilien.

Pour conclure, notons que tous les articles sont accompagnés d'un support informatique sous la forme de programmes écrits sous R. En Annexe seront exposés les codes qui ont servi dans le chapitres puis dans les chapitres 3 et 4. Le premier code détaille pas à pas toute la démarche que nous avons suivie pour obtenir les poids optimaux et les frontières efficientes.

Bibliographie

- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments* , Cowles Foundation Monograph Wiley, New York.
- Athayde, G. (2001). *Building a Mean-Downside Risk Portfolio Frontier, Developments in Forecast Combination and Portfolio Choice*, John Wiley and Sons.

A Algorithmes

Code R pour calculer les poids optimaux et les différentes frontières efficientes pour l'article 1 (Chapitre 2)

```
1. Algorithme pour faire le lissage avec la mediane conditionnelle:


RG.median <- function(z,x,Y,X){
# x the point where the regression function is estimated
# Y the vector response variable
# X the vaector of covariable

n <- length(X)
Num <- c()
Den <- c()
pp <- c()

#h <- ifelse(length(Y)<=1,1,h.select(Y, method="cv"))
h=.03
for(j in 1:n){

    Num[j]= (Gauss((x-X[j])/h))*abs(Y[j]-z)
    Den[j] = Gauss((x-X[j])/h)
                }

     num=sum(Num)
     den=sum(Den)
     pp <- Den/den
     write.table(pp, file='pp.txt', dec='.', sep=' ', row.names=FALSE, col.names=FALSE)

     RG.median=ifelse(num/den=="NaN",0,num/den)

     RG.median

}

2. Algorithme pour le lissage avec la function de regression

RG <- function(x,Y,X){
# x the point where the regression function is estimated
# Y the vector response variable
# X the vaector of covariable

n <- length(X)
Num <- c()
Den <- c()
poidsw <- c()

#h <- ifelse(length(Y)<=1,1,h.select(Y, method="cv"))
h=.03
for(j in 1:n){

    Num[j]= (Gauss((x-X[j])/h))*Y[j]
    Den[j] = Gauss((x-X[j])/h)
```

```
                }

     num=sum(Num)
     den=sum(Den)
     poidsw <- Den/den
     RG=ifelse(num/den=="NaN",0,num/den)

     RG <- list(RG=RG,poidsw=poidsw)

}



3. Algorithme de calcul des poids optimaux

data <- read.table('Bank.txt', header=FALSE)  #Xmed_Gauss_comb_temp
ech <- sample(1:ncol(data),4)
X <- as.matrix(data[,ech]*100)
#colnames(X) <- c('BNP','SGP', 'CA', 'Natixis')



ER=0.018
mu=0
w <- matrix(rep(1/4,4), ncol=1)
CSV <- algorithm.front(mu,w, X, ER)
 CSV$w
 CSV$dsr
w <- CSV$w

efficient.portfolio(er=c(mean(X[,1]), mean(X[,2]), mean(X[,3]), mean(X[,4])), cov.mat=cov(X), target.return=0.018)

BNP <- X[,1]
SG <- X[,2]
CA <- X[,3]
Nat <- X[,4]

BNP.med <- rep(0,length(X[,1]))
SG.med <- rep(0,length(X[,2]))
CA.med <- rep(0,length(X[,3]))
Nat.med <- rep(0,length(X[,4]))

BNP.mean <- rep(0,length(X[,1]))
SG.mean <- rep(0,length(X[,2]))
CA.mean <- rep(0,length(X[,3]))
Nat.mean <- rep(0,length(X[,4]))

for(i in 1:length(BNP.med)){

BNP.med[i] <- optimize(RG.median, c(min(BNP), max(BNP)), x=BNP[i],Y=BNP,X=BNP, lower=min(BNP),upper=max(BNP))$minimum

SG.med[i] <- optimize(RG.median, c(min(SG), max(SG)), x=SG[i],Y=SG,X=SG, lower=min(SG),upper=max(SG))$minimum

CA.med[i] <- optimize(RG.median, c(min(CA), max(CA)), x=CA[i],Y=CA,X=CA, lower=min(CA),upper=max(CA))$minimum

Nat.med[i] <- optimize(RG.median, c(min(Nat), max(Nat)), x=Nat[i],Y=Nat,X=Nat, lower=min(Nat),upper=max(Nat))$minimum


BNP.mean[i] <- RG(x=BNP[i],Y=BNP,X=BNP)

SG.mean[i] <- RG(x=SG[i],Y=SG,X=SG)

CA.mean[i] <- RG(x=CA[i],Y=CA,X=CA)

Nat.mean[i] <- RG(x=Nat[i],Y=Nat,X=Nat)

}

X.mean <- cbind(BNP.mean, SG.mean, CA.mean, Nat.mean)

write.table(X.mean, file='comb_mean.txt',sep=' ', eol='\n', dec='.', row.names=FALSE, col.names=FALSE)

#colnames(X.mean) <- c('BNP','SGP', 'CA', 'Natixis')
```

```
ER=0.018
mu=0
w <- matrix(rep(1/4,4), ncol=1)
CSV <- algorithm.front(mu,w, X.mean, ER)
 CSV$w
 CSV$dsr
w <- CSV$w


X.med <- cbind(BNP.med, SG.med, CA.med, Nat.med)

write.table(X.med, file='comb_med.txt',sep=' ', eol='\n', dec='.', row.names=FALSE, col.names=FALSE)
#colnames(X.mean) <- c('BNP','SGP', 'CA', 'Natixis')
ER=0.01
mu=0
w <- matrix(rep(1/4,4), ncol=1)
CSV <- algorithm.front(mu,w, X.med, ER)
 CSV$w
 CSV$dsr
w <- CSV$w


4. Algorithmes pour calculer les courbes de frontiers

DSR classique


algorithm.front <- function(mu, w, X, ER){


rp <- X%*%w
#dif <- rp-mu
E <- matrix(apply(X,2,mean), ncol=1)

#dsr <- sum((dif[rp < mu])^2)/length(rp)   #  mean(min(rp-mu,0)^2)
S <- which(rp < mu)

Xsample <- X[S,]
M <- matrix(0, nrow=ncol(X), ncol=ncol(X))

for(i in 1:length(S)){

mm <- Xsample[i,]%*%t(Xsample[i,])
M <- M + mm
}

N=9

dvec = array(0, dim = c(N,1))
Amat <- t(rbind(rep(1,9),apply(X,2,mean), diag(1,9))) #, diag(1,9)))

bvec=matrix(c(1,ER, rep(0,9)), ncol=1)

w1 <- round(solve.QP(Dmat=M, dvec, Amat, bvec,meq=2)$solution,4)


inv.M <- solve(M/nrow(X))
identity <- matrix(1,nrow=nrow(M), ncol=1)
#alpha <- t(identity)%*%inv.M%*%identity
#lambda <- t(E)%*%inv.M%*%identity
#theta <- t(E)%*%inv.M%*%E

#alpha <- alpha[1,1]
#lambda <- lambda[1,1]
#theta <- theta[1,1]

#w1 <- ((alpha*ER-lambda)/(theta*alpha-lambda^2)*(inv.M%*%E)) + ((theta-lambda*ER)/(alpha*theta-lambda^2))*(inv.M%*%identi
#num.w1 <- inv.M %*% identity
#den.w1 <- t(identity) %*% inv.M %*% identity
#w1 <- num.w1/den.w1[1,1]
#dsr <- sqrt(((alpha*(ER^2))-(2*lambda*ER)+theta)/((theta*alpha)-((lambda)^2)))
dsr <- t(w1)%*%M%*%w1
return(list(w=w1, dsr=dsr, S=S, M=M, invM=inv.M))
```

```
}


DSR avec lissage regression

algorithm.front.2 <- function(mu, w, X, ER){
X1 <- X[,1]
X2 <- X[,2]
X3 <- X[,3]
X4 <- X[,4]
X5 <- X[,5]
X6 <- X[,6]
X7 <- X[,7]
X8 <- X[,8]
X9 <- X[,9]

rp.mean <- rep(0,length(X1))


  X1.mean <- rep(0,length(X1))
    X2.mean <- rep(0,length(X2))
    X3.mean <- rep(0,length(X3))
    X4.mean <- rep(0,length(X4))
  X5.mean <- rep(0,length(X5))
  X6.mean <- rep(0,length(X6))
  X7.mean <- rep(0,length(X7))
  X8.mean <- rep(0,length(X8))
  X9.mean <- rep(0,length(X9))


rp <- X%*%w

   for(i in 1:length(rp)){
rp.me <- RG(x=rp[i],Y=rp[-i],X=rp[-i])
rp.mean[i] <- rp.me$RG
poidsw <- rp.me$poidsw



  X1.mean[i] <- sum(poidsw*X1[-i])
    X2.mean[i] <- sum(poidsw*X2[-i])
    X3.mean[i] <- sum(poidsw*X3[-i])
    X4.mean[i] <- sum(poidsw*X4[-i])
  X5.mean[i] <- sum(poidsw*X5[-i])
   X6.mean[i] <- sum(poidsw*X6[-i])
  X7.mean[i] <- sum(poidsw*X7[-i])
   X8.mean[i] <- sum(poidsw*X8[-i])
   X9.mean[i] <- sum(poidsw*X9[-i])

}

XX <- cbind(X1.mean, X2.mean, X3.mean, X4.mean, X5.mean,X6.mean,X7.mean,X8.mean,X9.mean)
#dif <- rp-mu
E <- matrix(apply(XX,2,mean), ncol=1)

#dsr <- sum((dif[rp < mu])^2)/length(rp)   #  mean(min(rp-mu,0)^2)
S <- which(rp.mean < mu)

Xsample <- XX[S,]
M <- matrix(0, nrow=ncol(XX), ncol=ncol(XX))

for(i in 1:length(S)){

mm <- Xsample[i,]%*%t(Xsample[i,])
M <- M + mm
}


N=ncol(M)

dvec = array(0, dim = c(N,1))
Amat <- t(rbind(rep(1,9),apply(XX,2,mean), diag(1,9))) #
```

```
#bvec=matrix(c(1,ER), ncol=1)
bvec=matrix(c(1,ER, rep(0,9)), ncol=1)
w1 <- round(solve.QP(Dmat=M, dvec, Amat, bvec, meq=2)$solution,4)

inv.M <- solve(M/length(S))
identity <- matrix(1,nrow=nrow(M), ncol=1)
#alpha <- t(identity)%*%inv.M%*%identity
#lambda <- t(E)%*%inv.M%*%identity
#theta <- t(E)%*%inv.M%*%E

#alpha <- alpha[1,1]
#lambda <- lambda[1,1]
#theta <- theta[1,1]

#w1 <- ((alpha*ER-lambda)/(theta*alpha-lambda^2)*(inv.M%*%E)) + ((theta-lambda*ER)/(alpha*theta-lambda^2))*(inv.M%*%identi
#num.w1 <- inv.M %*% identity
#den.w1 <- t(identity) %*% inv.M %*% identity
#w1 <- num.w1/den.w1[1,1]
#dsr <- sqrt(((alpha*(ER^2))-(2*lambda*ER)+theta)/((theta*alpha)-((lambda)^2)))
 dsr <- t(w1)%*%M%*%w1
return(list(w=w1, dsr=dsr, S=S, M=M))
}


DSR avec lissage mediane


algorithm.front.3 <- function(mu, w, X, ER){
X1 <- X[,1]
X2 <- X[,2]
X3 <- X[,3]
X4 <- X[,4]
X5 <- X[,5]
X6 <- X[,6]
X7 <- X[,7]
X8 <- X[,8]
X9 <- X[,9]

rp.mean <- rep(0,length(X1))


  X1.mean <- rep(0,length(X1))
    X2.mean <- rep(0,length(X2))
    X3.mean <- rep(0,length(X3))
    X4.mean <- rep(0,length(X4))
  X5.mean <- rep(0,length(X5))
  X6.mean <- rep(0,length(X6))
  X7.mean <- rep(0,length(X7))
  X8.mean <- rep(0,length(X8))
  X9.mean <- rep(0,length(X9))


rp <- X%*%w
rp <- c(rp)

   for(i in 1:length(rp)){

rp.mean[i] <- optimize(RG.median,c(min(rp),max(rp)),x=rp[i],Y=rp,X=rp,lower=min(rp),upper=max(rp))$minimum

#rp.me <- RG(x=rp[i],Y=rp[-i],X=rp[-i])

poidsw <- as.matrix(read.table('pp.txt', header=FALSE))
poidsw <- c(poidsw)



 X1.mean[i] <- optimize(RG.median.A, c(min(X1), max(X1)), x=X1[i],Y=X1,X=X1, poidsw,lower=min(X1),upper=max(X1))$minimum

    X2.mean[i] <- optimize(RG.median.A, c(min(X2), max(X2)), x=X2[i],Y=X2,X=X2, poidsw,lower=min(X2),upper=max(X2))$minimu

    X3.mean[i] <- optimize(RG.median.A, c(min(X3), max(X3)), x=X3[i],Y=X3,X=X3, poidsw,lower=min(X3),upper=max(X3))$minimu

    X4.mean[i] <- optimize(RG.median.A, c(min(X4), max(X4)), x=X4[i],Y=X4,X=X4, poidsw,lower=min(X4),upper=max(X4))$minimu
```

```
    X5.mean[i] <- optimize(RG.median.A, c(min(X5), max(X5)), x=X5[i],Y=X5,X=X5, poidsw,lower=min(X5),upper=max(X5))$minimum
    X6.mean[i] <- optimize(RG.median.A, c(min(X6), max(X6)), x=X6[i],Y=X6,X=X6, poidsw,lower=min(X6),upper=max(X6))$minimum
    X7.mean[i] <- optimize(RG.median.A, c(min(X7), max(X7)), x=X7[i],Y=X7,X=X7, poidsw,lower=min(X7),upper=max(X7))$minimum
    X8.mean[i] <- optimize(RG.median.A, c(min(X8), max(X8)), x=X8[i],Y=X8,X=X8, poidsw,lower=min(X8),upper=max(X8))$minimum
    X9.mean[i] <- optimize(RG.median.A, c(min(X9), max(X9)), x=X9[i],Y=X9,X=X9, poidsw,lower=min(X9),upper=max(X9))$minimum

}

XX <- cbind(X1.mean, X2.mean, X3.mean, X4.mean, X5.mean,X6.mean,X7.mean,X8.mean,X9.mean)
#dif <- rp-mu
E <- matrix(apply(XX,2,mean), ncol=1)

#dsr <- sum((dif[rp < mu])^2)/length(rp)   #  mean(min(rp-mu,0)^2)
S <- which(rp.mean < mu)

Xsample <- XX[S,]
M <- matrix(0, nrow=ncol(XX), ncol=ncol(XX))

for(i in 1:length(S)){

mm <- Xsample[i,]%*%t(Xsample[i,])
M <- M + mm
}


N=ncol(M)

dvec = array(0, dim = c(N,1))
Amat <- t(rbind(rep(1,9),apply(XX,2,mean), diag(1,9)))  #, diag(1,9)))

bvec=matrix(c(1,ER, rep(0,9)), ncol=1)

w1 <- round(solve.QP(Dmat=M, dvec, Amat, bvec, meq=2)$solution,4)

inv.M <- solve(M/length(S))
identity <- matrix(1,nrow=nrow(M), ncol=1)
#alpha <- t(identity)%*%inv.M%*%identity
#lambda <- t(E)%*%inv.M%*%identity
#theta <- t(E)%*%inv.M%*%E

#alpha <- alpha[1,1]
#lambda <- lambda[1,1]
#theta <- theta[1,1]

#w1 <- ((alpha*ER-lambda)/(theta*alpha-lambda^2)*(inv.M%*%E)) + ((theta-lambda*ER)/(alpha*theta-lambda^2))*(inv.M%*%identity)
#num.w1 <- inv.M %*% identity
#den.w1 <- t(identity) %*% inv.M %*% identity
#w1 <- num.w1/den.w1[1,1]
#dsr <- sqrt(((alpha*(ER^2))-(2*lambda*ER)+theta)/((theta*alpha)-((lambda)^2)))
dsr <- t(w1)%*%M%*%w1
return(list(w=w1, dsr=dsr, S=S, M=M))
}
```

Code en R pour calculer les différentes frontières efficientes pour les articles 2 et 3 Chapitre 3 et 4)

```
dyn.load("CodeR/smoothing.so")
require(quadprog)

markowitz <- function(data, targetRate = 0.01, positive.weights = FALSE){
    n.assets <- ncol(data)
    varcov <- cov(data)
    mu <- colMeans(data)

    if (positive.weights) {
        ## consider only positive weights
        d <- rep(0, n.assets)
        A <- rbind(rep(1, n.assets), mu, diag(1, n.assets))
        b <- c(1, targetRate, rep(0, n.assets))
        meq <- 1
```

```
        opt <- try(solve.QP(2 * varcov, d, t(A), b, meq = meq), silent = TRUE)

        if (class(opt) == "try-error") {
            weights <- rep(NA, n.assets)
            risk <- NA
        } else {
            weights <- opt$solution
            risk <- var(data %*% weights)
        }
    } else {
        ivarcov <- solve(varcov)
        alpha <- as.numeric(rep(1, n.assets) %*% ivarcov %*% rep(1, n.assets))
        lambda <- as.numeric(t(mu) %*% ivarcov %*% rep(1, n.assets))
        theta <- as.numeric(t(mu) %*% ivarcov %*% mu)

        weights <- (alpha * targetRate - lambda) / (alpha * theta - lambda^2) * ivarcov %*% mu +
            (theta - lambda * targetRate) / (alpha * theta - lambda^2) * ivarcov %*% rep(1, n.assets)
        weights <- as.numeric(weights)

        risk <- (alpha * targetRate^2 - 2 * lambda * targetRate + theta) / (alpha * theta - lambda^2)
    }

    names(weights) <- colnames(data)

    return(list(weights = weights, risk = risk))
}

varPort <- function(data, weights)
    return(var(data %*% weights))

semivar <- function(data, weights, bench = 0, negative = TRUE){
    rp <- data %*% weights
    n.obs <- nrow(data)

    if (negative == TRUE) {
        colSums(pmin(rp - bench, 0)^2) / n.obs
    } else {
        colSums(pmax(rp - bench, 0)^2) / n.obs
    }
}

dsr <- function(data, bench = 0, targetRate = NA, tol = 10^-10, positive.weights = FALSE,
                mu = colMeans(data)){

    n.assets <- ncol(data)
    n.obs <- nrow(data)
    one <- rep(1, n.assets)

    iMold <- diag(10, n.assets)
    weights.old <- one / n.assets

    weights <- one / n.assets
    ##weights <- markowitz(data, targetRate, positive.weights)$weights

    iter <- 1
    if (positive.weights == TRUE){
        d <- rep(0, n.assets)
        A <- rbind(rep(1, n.assets), mu, diag(1, n.assets))
        b <- c(1, targetRate, rep(0, n.assets))
        meq <- 1

        repeat {
            portReturns <- as.numeric(data %*% weights)
            idx <- which(portReturns < bench)
            M <- matrix(0, n.assets, n.assets)
            for (i in idx)
                M <- M + (data[i,] - bench) %*% t(data[i,] - bench)

            M <- M / n.obs
            iM <- solve(M)
            opt <- try(solve.QP(2 * M, d, t(A), b, meq = meq), silent = TRUE)

            if (class(opt) == "try-error") {
```

```
            weights <- rep(NA, n.assets)
            risk.semiVar <- NA
            break
        } else {
            weights <- opt$solution
        }

        if (sum(abs(M %*% iMold - diag(n.assets))) < tol){
            ## Compute one last time all required quantities to compute the DSR
            portReturns <- as.numeric(data %*% weights)
            idx <- which(portReturns < bench)
            M <- matrix(0, n.assets, n.assets)
            for (i in idx)
                M <- M + (data[i,] - bench) %*% t(data[i,] - bench)

            M <- M / n.obs

            opt <- try(solve.QP(2 * M, d, t(A), b, meq = meq), silent = TRUE)

            if (class(opt) == "try-error") {
                weights <- rep(NA, n.assets)
                risk.semiVar <- NA
                break
            } else {
                weights <- opt$solution
                risk.semiVar <- semivar(data, weights, bench = bench)
            }

            ## Jump outside of the repeat loop
            break
        }

        iMold <- iM
        iter <- iter + 1
    }
} else {
    repeat {
        returns <- as.numeric(data %*% weights)

        idx <- which(returns < bench)
        M <- matrix(0, n.assets, n.assets)
        for (i in idx)
            M <- M + (data[i,] - bench) %*% t(data[i,] - bench)

        M <- M / n.obs
        iM <- solve(M)

        alpha <- as.numeric(one %*% iM %*% one)
        lambda <- as.numeric(t(mu) %*% iM %*% one)
        theta <- as.numeric(t(mu) %*% iM %*% mu)

        if (is.na(targetRate))
            weights <- iM %*% one / as.numeric(one %*% iM %*% one)
        else
            weights <- (alpha * targetRate - lambda) / (alpha * theta - lambda^2) *
                iM %*% mu + (theta - lambda * targetRate) / (alpha * theta - lambda^2) *
                iM %*% one

        ## The stopping criterion depends on the way (or not!)
        ## with smooth portfolio returns so...
        delta <- sum(abs(M %*% iMold - diag(n.assets)))
        names(weights) <- NULL


        if ((delta < tol) || (iter > 50)){
            ## Compute one last time all required quantities to compute the DSR
            returns <- as.numeric(data %*% weights)

            idx <- which(returns < bench)
            M <- matrix(0, n.assets, n.assets)
            for (i in idx)
                M <- M + (data[i,] - bench) %*% t(data[i,] - bench)
```

```
                M <- M / n.obs
                iM <- solve(M)

                alpha <- as.numeric(one %*% iM %*% one)
                lambda <- as.numeric(t(mu) %*% iM %*% one)
                theta <- as.numeric(t(mu) %*% iM %*% mu)

                ## Jump outside of the repeat loop
                break
            }

            weights.old <- weights
            iMold <- iM
            iter <- iter + 1

        }

        risk.semiVar <- (alpha * targetRate^2 - 2 * lambda * targetRate + theta) / (alpha * theta - lambda^2)
    }

    risk.var <- as.numeric(as.numeric(weights) %*% cov(data) %*% as.numeric(weights))

    return(list(weights = weights, risk.semiVar = risk.semiVar, risk.var = risk.var, M = M))
}


meanEstimator <- function(data, h = bw.SJ(data), return.weights = FALSE){
    tmp <- .C("meanSmoothing", as.integer(length(data)), as.double(data), as.double(h), est = double(length(data)),
              weights = double(length(data)^2))

    if (return.weights){
        smoothing.weights <- matrix(tmp$weights, length(data))
        smoothing.weights <- smoothing.weights / rowSums(smoothing.weights)
        return(list(est = tmp$est, weights = smoothing.weights))
    } else return(tmp$est)
}



medianEstimator <- function(data, h = 0.5 * bw.SJ(data)){
    est <- data
    for (i in 1:length(data)){
        fun <- function(z)
            sum(abs(data - z) * exp(-0.5 * ((data - data[i]) / h)^2))

        est[i] <- optimize(fun, range(data))$minimum
    }

    return(est)
}
```

Code en C pour le lissage par la moyenne

```
#include <R.h>
#include <Rmath.h>

void meanSmoothing(int *n, double *data, double *bandwidth, double *estimates,
   double *weights){
  double ih2 = 1 / (*bandwidth * *bandwidth);

  for (int i=0;i<*n; i++){
    estimates[i] = 0;
    double scalingCst = 0;
    for (int j=0; j<*n; j++){
      double kernel = exp(-0.5 * (data[j] - data[i]) * (data[j] - data[i]) * ih2);
      weights[i + j * *n] = kernel;
      estimates[i] += data[j] * kernel;
      scalingCst += kernel;
    }

    estimates[i] /= scalingCst;
  }
}
```

Gestion des Actifs Financiers : de l'Approche Classique à la Modélisation Non Paramétrique en Estimation du DownSide Risk pour la Constitution d'un Portefeuille Efficient

Résumé : La méthode d'optimisation d'un portefeuille issue de la minimisation du DownSide Risk a été mise au point pour suppléer les carences de la méthode classique de Markowitz dont l'hypothèse de la normalité de la distribution des rendements se trouve défaillante très souvent. Dans cette thèse, nous proposons d'introduire des estimateurs non paramétriques de la moyenne ou de la médiane conditionnelle pour remplacer les rendements observés d'un portefeuille ou des actifs constituant un portefeuille dans le cas du DownSide Risk. Ces estimateurs nous permettent d'obtenir des frontières efficientes lisses et facilement interprétables. Nous développons des algorithmes itératifs pour résoudre les différents problèmes d'optimisation permettant d'obtenir des portefeuilles optimaux. Nous proposons aussi une nouvelle mesure de risque dit risque conditionnel qui tient compte des anticipations des valeurs futures des différents rendements. Pour le définir nous avons fait appel aux prédicteurs non paramétriques basés sur l'estimation de la moyenne conditionnelle. Enfin, nous avons testé et validé toutes nos méthodes sur des données issues de différents marchés et nous avons montré leur performance et leur efficacité comparées aux méthodes classiques.

Mots clés : Risque Conditionnel, DownSide Risk, Noyau, Estimation non paramétrique de la moyenne, Estimation non paramétrique de lamédiane, Semivariance.

The Management of financial assets: From Classical Approach to the Nonparametric Modelling in the DownSide Risk Estimation in Order to Get an Optimal Portfolio

Abstract: The DownSide Risk (DSR) model for portfolio optimization allows to overcome the drawbacks of the classical Mean-Variance model concerning the asymmetry of returns and the risk perception of investors. This optimization model deals with a positive definite matrix that is endogenous with respect to the portfolio weights and hence leads to a non standard optimization problem. To bypass this hurdle, we developed a new recursive minimization procedure that ensures the convergence to the solution and gives a smooth portfolio efficient frontier. Our method consists in replacing all the returns by their nonparametric estimators counterpart using kernel mean or median regressions. This technique provides an effect similar to the case where an infinite number of observations is available. We also develop a new portfolio optimization model where the risks are measured through conditional variance or semivariance. This strategy allows us to take advantage from returns prediction which are obtained by nonparametric univariate methods. The prediction step uses kernel estimation of the conditional mean. Data from different markets are used to test and validate the proposed approaches, and results indicate better overall performance.

Keywords: Conditional Risk, DownSide Risk, Kernel Predictors, Nonparametric Mean Estimation, Nonparametric Median Estimation, Semivariance.