Limites hydrodynamiques et applications Habilitation à diriger des recherches

Julian Tugaut

▶ **To cite this version:**

Julian Tugaut. Limites hydrodynamiques et applications Habilitation à diriger des recherches. Probabilités [math.PR]. Université Jean Monnet, 2015. tel-01245109

HAL Id: tel-01245109
https://theses.hal.science/tel-01245109

Submitted on 16 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Jean Monnet
École doctorale **SIS**
Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Limites hydrodynamiques et applications

Habilitation à diriger des recherches

Soutenue publiquement le 01 décembre 2015 par

Julian Tugaut

devant le Jury composé de :

M. Olivier Alata	Université Jean Monnet	Examinateur
M. François Delarue	Université Nice-Sophia Antipolis	Examinateur
M. Ivan Gentil	Université Claude Bernard	Coordinateur
M. Arnaud Guillin	Université Blaise Pascal	Rapporteur
M. Samuel Herrmann	Université de Bourgogne	Examinateur
M. Peter Imkeller	Université de Berlin	Rapporteur
M. Tony Lelièvre	ENPC	Rapporteur
Mme Elisabeth Mironescu	École Centrale de Lyon	Examinatrice

Remerciements

J'ai certes écrit le présent manuscrit seul mais ce dernier est le fruit d'un certain nombre de contributions émanant d'autres personnes que moi. Par ces quelques remerciements, je tiens à rendre hommage à tous ceux qui ont - de près comme de loin voire de très loin - participé (souvent sans le savoir) à la rédaction de ce manuscrit puis à la soutenance d'HDR qui en a découlé.

En tout premier lieu, je tiens à remercier le professeur Ivan Gentil qui a accepté d'être le coordinateur de mon habilitation à diriger des recherches. En effet, je n'oublie pas son mél de janvier 2015 où il me dit grosso modo : "c'est d'accord, tu peux soutenir d'ici la fin de l'année". J'avoue ne pas savoir comment se comportent les autres coordinateurs vis à vis de la personne qu'ils soutiennent mais je tiens à préciser qu'Ivan Gentil a toujours été présent. Du début à la fin. Plus qu'une simple signature sur une lettre de soutien envoyée à un conseil scientifique, il participa grandement au succès de mon HDR. En particulier, je lui suis reconnaissant de m'avoir fait répéter un mois avant et de m'avoir fait de nombreuses suggestions.

Que dire sur le professeur Arnaud Guillin ? Notre première rencontre fut le vendredi 13 mai 2011. Il me reprocha ce jour-là de ne pas me souvenir de la date exacte où nous avons échangé par message électronique pour la première fois. (C'était le 21 décembre 2010). Je le connaissais toutefois déjà - de nom - de part son article en collaboration avec Patrick Cattiaux et Florent Malrieu. Arnaud Guillin n'est pas seulement le premier de mes rapporteurs pour l'ordre alphabétique. Il l'est également par ordre chronologique. En fait, je savais que je le voulais rapporteur de mon HDR bien avant d'avoir contacté Ivan Gentil. En effet, le dimanche 15 mai 2011, Arnaud me fit quelques suggestions en étant si direct et je dois le dire si peu diplomate que j'ai été instantanément séduit. À vrai dire, je n'aurais pas pris le même plaisir à soutenir si Arnaud n'avait pas été là. Je lui suis donc extrêmement reconnaissant d'avoir accepté.

Peter Imkeller fit bien plus qu'écrire un rapport pour mon habilitation. Pour moi, il a surtout écrit un article (en collaboration avec Samuel Herrmann et Dierk Peithmann). En fait il en a écrit beaucoup d'autres... Cet article est l'un de ceux que je cite à chaque fois tellement je le trouve essentiel. Il s'agit d'un papier qui traite du problème de sortie de la diffusion de McKean-Vlasov en paysage uniformément strictement convexe. C'est le premier article que j'ai étudié. Au-delà de ça, le professeur Peter Imkeller est une personne que je sais occupée. Malgré cela, il prit le temps de s'intéresser à mon travail, il m'invita à Berlin et complimenta mon exposé. Et aussi, il écrivit un rapport. S'il ne put se déplacer pour le jour de la soutenance, il était présent par le rayonnement qui est le sien à travers le rapport qu'il a écrit sur mon manuscrit.

Tony Lelièvre est l'un des rares membres de mon jury que je tutoie. Je ne développerai pas ce point puisque je serais bien incapable de comprendre ce qui peut amener un vouvoyeur fou comme moi à dire "tu" à un professeur. Tony est une personne qui a beaucoup compté dans ma recherche (même si à l'époque,

il ne savait probablement même pas que j'existais). En effet, j'avais un résultat intéressant de convergence en temps long depuis le jeudi 25 mars 2010 mais il me manquait la volonté pour l'écrire. Puis, il vint donner un exposé à Nancy le jeudi 8 avril 2010. Ce jour-là, mon directeur de thèse Samuel Herrmann me dit que Tony Lelièvre prévoyait de s'atteler au problème. Je pris peur. Un brouillon fut achevé huit jours plus tard. Je lui racontai cette histoire en octobre 2014 ce qui le fit beaucoup rire. J'ai ensuite eu l'honneur et le plaisir de mieux le connaître à Bonn où nous avons passé cinq jours mémorables avec Max Fathi, Gabriel Stoltz, Julien Reygnier et William Minvielle. Je retiens en particulier ses compliments sur mon exposé au workshop. Bref, je suis très reconnaissant à Tony d'avoir accepté de rapporter mon mémoire. Mieux, j'éprouve une profonde gratitude pour la quantité impressionnante (d'après ce que l'on m'a raconté) de questions posées. Pour ma part, lors de cet échange, je n'ai pas vu le temps passer.

Elisabeth Mironescu m'a fait chaud au cœur en acceptant d'être examinatrice et encore plus d'être présidente du jury. Si je lui suis reconnaissant, ce n'est d'ailleurs pas pour ça. En effet, je retiens avant toute autre chose qu'elle a joué un rôle dans mon recrutement à Télécom Saint-Étienne et je lui suis gré de m'avoir fait confiance. En fait, je n'oublie pas non plus qu'elle s'inquiétait pour moi et qu'elle craignait que ma délocalisation puisse porter atteinte à mon travail de recherche. En d'autres termes, je suis très reconnaissant envers Elisabeth Mironescu pour tout. Je lui dois bien plus que ce que j'ai énoncé dans ce paragraphe.

François Delarue a porté un certain intérêt pour moi en août/septembre 2010 (je donne la date car je sais que le lecteur l'attend : le vendredi 3 septembre 2010) en souhaitant en effet que j'aille à Nice pour y être ATER. Ceci ne s'est pas concrétisé (de mon fait). Mais ça m'avait touché. Il me semblait donc normal qu'il ait un rôle à jouer dans mon habilitation. Au-delà de ça, je tiens à souligner qu'il est l'auteur (avec Sylvain Rubenthaler, James Ingliss et Etienne Tanré) d'un très joli papier qui m'inspire un respect des plus profonds quant à la qualité de l'introduction. De plus, ce même article m'inspire dans ma recherche et je serais ravi que ce premier échange concret entre nous mène à une collaboration.

Plus qu'un examinateur de mon HDR, Samuel Herrmann est avant tout mon directeur de thèse. Je suis son padawan et je lui dois donc éternellement le respect et la reconnaissance. Je ne dirai rien sur tout ce qui s'est passé avant le mardi 6 juillet 2010 (date de ma soutenance de thèse). En effet, j'invite le lecteur à lire mes remerciements de thèse. Nous sommes restés en contact et n'avons jamais cessé de travailler ensemble. J'avoue apprécier son côté terre à terre là où je suis un peu la tête dans la Lune. Et j'avoue aussi que j'aime bien taquiner le professeur Herrmann. Par exemple, un rapporteur m'a demandé à propos d'un article récent quelle était ma motivation profonde. Comment lui répondre que je voulais juste "faire mieux que mon maître" ? Il m'a donc semblé naturel de critiquer respectueusement l'article qu'il a écrit avec Peter Imkeller et Dierk Peithmann lors de la soutenance. Et j'ai particulièrement adoré sa réponse : "je ne suis pas d'accord avec toi sur tous les points, ma preuve est très jolie".

Olivier Alata... J'avais prévu de faire un petit discours sur le professeur Alata

après que le jury a lu le rapport de soutenance. Malheureusement j'ai oublié de le faire. Je compte donc me rattraper ici. Olivier Alata est une personne exceptionnelle. Je lui dois énormément. Le vendredi 30 août 2013 avait lieu une première réunion d'enseignement. J'appris alors ce que "Bases indispensables des mathématiques" était comme cours. Il s'agit d'une mise à niveau des étudiants issus du cycle préparatoire propre à TSE et des étudiants de DUT par rapport aux étudiants issus de MP. La mission qui était la mienne : voir tous les enseignants utilisant des maths, faire la liste de ce dont ils ont besoin, élaborer un programme cohérent avec le reste des enseignements, faire un polycopié, faire des exercices, faire des cours magistraux... Et tout ça, en moins de deux semaines. Heureusement, Franck Licini m'a amené à Olivier Alata. Et Olivier Alata m'a donné tout ce qu'il avait : polycopié, exercices, cours, encouragements... Sans Olivier, j'aurais été la tête dans l'eau dès la première semaine. Ainsi, Olivier Alata a non seulement été l'une des personnes à qui je dois ma place à Sainté mais je lui dois surtout d'avoir survécu à l'enseignement. Mieux, je devais normalement reprendre la direction de la DEP (Décision et Évolution des Programmes) Mathématiques. Mais, Olivier Alata s'y était opposé puisque c'était une charge de travail énorme. À nouveau, il m'a ainsi sauvé d'être la tête sous l'eau. Sans lui, je n'aurais pas pu faire de recherche et une chose est sûre : je n'aurais pas passé l'HDR. De plus, j'apprécie nos nombreuses discussions sur Game of Thrones. Il a sans doute été le seul à remarquer la référence à l'épée valyrienne pendant la soutenance...

J'ai passé trois années à Bielefeld en tant que postdoc aussi une grande partie de la recherche présentée dans ce manuscrit fut élaborée là-bas. Je suis donc reconnaissant au CRC 701 de m'y avoir hébergé pendant trois ans. Je tiens également à remercier tous les gens intéressants que j'ai pu y rencontrer.

D'abord, je remercie Ante Mimica pour tous les bons moments passés dans notre bureau, "the download center" que ce soit à parler de mathématiques ou de Game of Thrones. Je le remercie d'ailleurs pour être celui qui m'a convaincu de regarder Game of Thrones. Je le remercie pour avoir joué avec moi à qui arriverait le premier dans le bureau tous les matins. Je me souviens aussi de la fois où nous avons nettoyé notre bureau, en février 2011. Je mentionne également ces deux semaines où chaque jour, je déplaçais son bureau de 1cm vers le mur pour voir s'il s'en rendrait compte. Et enfin, je le remercie pour m'avoir présenté Bartlomiej Dyda et surtout Marina.

Je remercie également Bartlomiej Dyda qui avait toujours du temps pour que je vienne discuter dans son bureau et qui nous a invités plus d'une fois chez lui. De même, j'ai une pensée pour Kilian Raschel qui n'a pas hésité à me téléphoner le jeudi 5 septembre 2013 pour qu'on discute de tout et de rien. Je remercie également Anna pour le bon temps passé avec. Enfin, je salue Felipe, Diana 1, Diana 2, Daniel, Tolulope, Mykola, Viktor, Andrea, Yuhua, Thomas et tous ceux que j'oublie.

Comme je l'ai déjà dit, si j'avais dû faire tout ce qui était prévu en enseigne-

ment, jamais je n'aurais pu passer l'HDR dans un temps raisonnable. Je remercie donc maintenant le professeur Didier Vincent pour ne pas s'être déchargé du cours de probabilité la première année. Ainsi ai-je eu le temps de préparer un polycopié, des exercices et des cours en un temps raisonnable. Je lui suis de plus reconnaissant d'être venu à ma soutenance, tout comme Franck Licini. Franck est un formidable enseignant dont la culture, la curiosité et la compétence me font toujours me sentir un peu faible à côté. Je tiens également à remercier Stéphane Capraro d'être venu à ma soutenance alors que c'est à l'autre bout de la ville. J'éprouve ensuite de la gratitude envers le docteur Hubert Konik pour toutes ces discussions intéressantes et pour m'avoir fait confiance pour intervenir dans la filière par alternance. Merci aussi au docteur Kamal Singh pour m'avoir fait répéter la soutenance avec Olivier Alata. Je mentionne également Charlotte pour toutes ces discussions autour de Game of Thrones même si je ne partage pas son engouement pour Daenerys Targaryen... Enfin, je salue Gérard, Alain, Christian, Riadh, Stéphane R, Jacques Fayolle, Isabelle Proust Sauviac, Eric, Bruno Sauviac...

J'ai également un bureau à la FST de Saint-Etienne et j'y cotoie bon nombre de gens intéressants. Je vais commencer par remercier ceux qui sont à la banlieue nord de la branche stéphanoise de l'ICJ. Je remercie Frédéric Chardard qui est toujours présent pour moi quand j'ai envie de discuter de tout et de rien et aussi de Game of Thrones. Je le remercie pour avoir été présent à ma soutenance mais aussi pour avoir aidé mon amie à mettre en place le pot d'HDR. Je précise que Frédéric est toujours de bon conseil (par exemple, je comptais attendre d'avoir écrit, relu et corrigé mon manuscrit d'HDR avant de dire à Ivan Gentil : "j'aimerais passer l'HDR dans quelques mois") et sa culture mathématique et non mathématique n'a d'égal que sa modestie. J'ai évidemment une pensée pour Mathieu Sart qui est toujours partant pour faire une pause avec moi. Enfin, presque toujours. Et je le remercie pour sa politesse quand il me demande de quitter son bureau pour qu'il travaille. Je remercie également Eric Canon de toujours m'écouter raconter des bêtises à chaque fois qu'il est là et d'être venu à ma soutenance. En revanche, je tiens à souligner ma désapprobation de ses goûts en matière de personnages de Game of Thrones. Pour le simple plaisir d'écrire son nom : je remercie Filippo Alberto Edoardo Nuccio Mortarino Majno di Capriglio. Je salue également Olivier, Georges, Marie-Claude, François... Je passe maintenant aux quartiers sud. Je tiens à remercier Olivier Marchal pour son bon goût en matière de personnages de Game of Thrones. Je salue également Michael, Laetitia, Mahdi, Valentina, Laurence, Olivier G, Mario, Anne, Sylvie, Driss...

Comme je suis en fait trilocalisé, il m'arrive également de me rendre à la maison-mère à Lyon où j'ai rencontré des gens formidables. C'est le cas par exemple de Louis Dupaigne dont le travail pour la revue de presse du site Image des maths est colossal. Il me remercie régulièrement de mon implication et d'y travailler presque chaque mois. Mais, je tiens à dire que Louis y travaille chaque mois et doit sans doute abattre beaucoup plus de boulot que moi. Je remercie

également Yoann Dabrowski pour son idée permettant la régularisation de l'information de Fisher. Enfin, je souhaite remercier Thibault Espinasse pour toutes ces discussions bizarres que l'on a parfois. Je pense à celle où l'on est parti de l'opposition continu/discret pour aboutir à l'existence ou non de Dieu. Je pense aussi à celle plus récente sur Game of Thrones.

Je souhaite également remercier tous ceux qui participent activement au groupe de travail APSSE et que je n'ai pas encore cités : Xavier Bay, Nicolas Durrande, Rémi Emonet et Olivier Roustant. Et plus spécialement, je remercie Victor Rabiet pour avoir su faire émerger un thème porteur sur lequel le groupe va pouvoir travailler et aussi pour être une véritable machine de guerre en terme de travail.

On oublie souvent de remercier les étudiants quand ça se passe bien (la réciproque est vraie d'ailleurs mais comme j'ai récemment reçu pas mal de remerciements venant d'eux, je les remercie). En effet, si ça se passe mal, la recherche en pâtie sans doute. Comme tout se passe bien, je tiens à les remercier. De plus, nos discussions hors cours sont toujours intéressantes et enrichissantes à tout point de vue, et je ne parle pas seulement des discussions sur Game of Thrones. Je ne vais pas remercier chacun des étudiants des trois promotions que j'ai eus bien sûr. Je vais quand même en citer quelques uns : Violette d'abord pour son enthousiasme permanent et communicatif, Haidar pour le message électronique de remerciement qu'il m'a envoyé, Romain et la "lame pédagogique qui pourfend l'ignorance" dont il me crédite. Comment ne pas citer William après toutes les petites taquineries dont il fut ma victime et qui pourtant choisit mon option en deuxième année ? Et enfin, je mentionne Florian qui m'a convaincu de redonner une chance à The Walking Dead.

Si la recherche solitaire est le mythe par excellence à la télévision et au cinéma, tous les chercheurs savent bien que dans la réalité, la recherche doit être solidaire. Je tiens donc à remercier très chaleureusement Pierre Del Moral pour s'être intéressé à moi depuis le jeudi 3 novembre 2011. Qu'un chercheur aussi conséquent puisse vouloir travailler avec moi est une occasion inespérée. De plus, j'apprécie et même j'admire son côté pragmatique. Florent Malrieu n'était pas dans mon jury mais c'est uniquement car j'avais trop peur d'avoir un jury trop grand. Je me dois donc de dire que je lui suis très reconnaissant de toujours être présent par mél. Je voudrais aussi mentionner Hong Duong qui est un jeune et brillant chercheur et avec qui il est plaisant de travailler. De la même manière, je tiens à citer Oana Lupascu ainsi que Peter Friz et Wolfgang Dreyer.

La recherche peut parfois être ingrate. La vie de chercheur est donc parfois ingrate. Et, je tiens donc à remercier tous ceux qui m'ont aidé à ce que ma vie soit plus plaisante qu'elle ne l'aurait été sans eux. En tout premier lieu, merci à Georges R.R. Martin pour avoir créé Game of Thrones. Je ne sais pas ce que serait ma vie sans cette saga. Je tiens à remercier Stannis Baratheon et Melissandre pour avoir mis fin au règne despotique de Joffrey "Baratheon" Lannister quand

bien même certains pensent que l'on doit ce miracle à Peter Baelish et Olenna Tyrell. Je remercie également Oberyn Martell pour me servir d'exemple auprès des étudiants qui ont trop tendance à se précipiter. Dans le même ordre d'idée, je tiens à remercier Gordon Ramsay à qui je dois cette phrase que j'aime dire aux étudiants : "la simplicité est la plus grande qualité en cuisine.. euh je veux dire en mathématiques". Toujours dans le même esprit, je tiens à remercier chaleureusement Alexandre Astier pour la pédagogie du roi Arthur (dans Kaamelott) vis à vis de Perceval et qui eut un écho non négligeable quant à ma façon de faire des exposés.

Bien sûr, ma famille a joué un grand rôle dans cet accomplissement et des phrases ne sauraient traduire la reconnaissance que j'éprouve pour elle. Je me contenterai donc d'une anecdote : je remercie mon cousin pour m'avoir offert le cinquième livre de Game of Thrones.

Si j'ai pu passer mon HDR et ma thèse, c'est en grande partie grâce à ma meilleure amie : Manue. Par ces quelques mots, je tiens à la remercier pour tout. Je lui dédie naturellement ce manuscrit.

De la même manière, j'éprouve une gratitude immense envers Sandra pour être ce qu'elle est. Sandra est ma deuxième meilleure amie et elle est aujourd'hui aussi ma compagne. Je souhaite la remercier de tout ce qu'elle m'apporte. Je lui dédie également ce manuscrit.

On me demande parfois pourquoi je porte un béret et ma réponse étonne toujours : car je ne peux pas porter de chapeau. En effet, je portais autrefois un chapeau et j'ai donné celui-ci à Marina, ma troisième meilleure amie, pour qu'elle sache que je lui suis éternellement reconnaissant pour tout ce qu'elle a fait pour moi. Et, en symbole de mon amitié pour elle, je ne m'achèterai plus jamais de chapeau car dès lors, je ne lui aurais pas donné mon chapeau mais un chapeau. Bref, je remercie Marina et ce manuscrit lui est dédié.

Comment ne pas citer Virginie ? Je sais que son apport est immense et qu'aucun des mots que je pourrai écrire ne sera à la hauteur de ce qu'elle a fait pour moi. Par ces mots, je tiens à lui dire combien elle compte pour moi aujourd'hui. Elle est sans doute l'une des meilleures choses qui me soit arivée. Je lui dédie donc naturellement ce manuscrit à elle aussi.

Je dédie cette thèse à Manue, à Sandra, à Marina et à Virginie

Table des matières

Introduction **3**
Convergence en temps long . . . 5
Problème de sortie . . . 6
Système de particules . . . 6
Bibliographie personnelle . . . 7
Articles issus de ma thèse . . . 7
Articles subséquents à ma thèse . . . 7
Articles soumis . . . 8
Articles en préparation . . . 9

1 Convergence en temps long **11**
1.1 Introduction . . . 11
1.1.1 Diffusions de Kolmogorov . . . 11
1.1.2 Diffusions de McKean-Vlasov avec V et F convexes . . . 12
1.1.3 Diffusions de McKean-Vlasov avec V non-convexe . . . 13
1.2 Probabilités invariantes . . . 14
1.2.1 Existence . . . 14
1.2.2 Transition de phase . . . 15
1.2.3 Puits et probabilités invariantes . . . 18
1.2.4 Unicité à grand bruit . . . 19
1.2.5 Simulations . . . 20
1.3 Description des valeurs d'adhérence . . . 21
1.3.1 À grand bruit . . . 21
1.3.2 Cas de la dimension un . . . 21
1.3.3 Cas de la dimension quelconque . . . 23
1.3.4 Bassins d'attraction . . . 24
1.4 Régularisation de l'entropie . . . 24
1.4.1 Motivation . . . 24
1.4.2 Cas réversible . . . 25
1.4.3 Inégalités fonctionnelles . . . 26
1.5 Ouvertures, perspectives . . . 27
1.5.1 Bassins d'attraction . . . 28
1.5.2 Vitesse de convergence . . . 28
1.5.3 Régularisation de la loi . . . 28

1.5.4 Vlasov-Fokker-Planck 29

2 Grandes déviations, problèmes de sortie **31**
2.1 Introduction 31
2.1.1 De la loi des grands nombres aux grandes déviations . . . 31
2.1.2 Grandes déviations pour des processus 32
2.1.3 Problème de sortie 34
2.1.4 Nouveau théorème 35
2.2 Calcul du coût de sortie 37
2.2.1 Motivation 37
2.2.2 Échange des limites 39
2.2.3 Problème de sortie du système de particules 40
2.3 Problème de sortie si V est convexe 41
2.3.1 Première méthode 42
2.3.2 Seconde méthode 43
2.4 Problème de sortie si V est non-convexe 45
2.4.1 Première méthode 46
2.4.2 Seconde méthode 47
2.5 Ouvertures, perspectives 49
2.5.1 Diffusions inhomogènes plus générales 49
2.5.2 Algorithme stochastique 49
2.5.3 Autres diffusions non-linéaires 50

3 Systèmes de particules **51**
3.1 Introduction 51
3.1.1 Propagation du chaos et couplage 52
3.1.2 Propagation du chaos uniforme 53
3.1.3 Inégalités fonctionnelles 53
3.2 Géométrie du potentiel et diffusion 56
3.2.1 Géométrie du potentiel 56
3.2.2 Captivité 59
3.2.3 Non captivité dans des domaines 60
3.3 Création du chaos 62
3.4 Propagation du chaos uniforme 64
3.4.1 Résultat 64
3.4.2 Autres implications 65
3.5 Ouvertures, perspectives 67
3.5.1 Inégalités fonctionnelles 67
3.5.2 Propagation du chaos uniforme et création du chaos 67
3.5.3 Temps de sortie 67

Introduction

Pourquoi passer l'habilitation ? C'est une question qu'il faut savoir se poser au moment où l'on attaque l'écriture du mémoire de celle-ci. Il y a bien sûr les réponses évidentes : pour pouvoir accéder à la fonction de Professeur et pour pouvoir encadrer un ou des doctorants et ainsi mettre en œuvre un programme de recherche plus audacieux et de plus longue haleine. Pour ma part, j'ai choisi d'écrire une synthèse sur des travaux qui m'occupent depuis le quasi début de mon activité de recherche. L'heure est en effet venue de faire le point mais aussi de tourner une page. Effectivement, il est temps pour moi de passer à d'autres domaines tout aussi difficiles et passionnants. Ainsi, dans cet ouvrage, je me pose et je pose à l'écrit mes travaux de recherche les plus importants.

Ce qui est écrit dans ce mémoire correspond à mes résultats des cinq dernières années, c'est-à-dire ceux que j'ai effectués subséquemment à mon mémoire de doctorat, soutenu le 06 juillet 2010.

Mon doctorat fut pour moi l'occasion d'entrer dans le monde de la recherche et je le fis par la porte des diffusions auto-stabilisantes. Il s'agit de diffusions non-linéaires au sens de McKean et dont le comportement n'était pas bien connu jusqu'à peu de temps. Dans ces diffusions, la propre loi du processus intervient dans la dérive ce qui rend l'étude plus délicate que celle des diffusions de Kolmogorov. Les questions que l'on se pose sont principalement le comportement en temps long et l'établissement d'une loi de type Kramers. Ma première étude portait sur la description de l'ensemble des probabilités invariantes et j'ai notamment passé deux années à chercher à prouver l'unicité de la mesure stationnaire... Puis, j'ai démontré qu'il y avait plusieurs probabilités invariantes sous des conditions simples à vérifier. Ce fut le résultat principal de ma thèse.

Suite à celle-ci, j'ai poursuivi l'effort commencé. En particulier, je me suis intéressé à une description exhaustive de l'ensemble des probabilités invariantes et la convergence en temps long a été établie. Au cours de mon postdoctorat, j'ai commencé à étudier sérieusement les grandes déviations pour le processus auto-stabilisant dans un cadre déjà connu. En outre, plusieurs changements d'optique pour mener à bien cette mission ont été menés. Ainsi ai-je regardé le système de particules en interaction de type champ moyen. De même, je me suis intéressé aux inégalités fonctionnelles et aux résultats de Freidlin et Wentzell.

La diffusion de McKean-Vlasov a été regardée sous différents aspects et pour différentes questions.

Ainsi, mes premiers travaux - ceux ayant porté sur la description de l'ensemble

des probabilités invariantes - correspondaient à des questions de type analyse fonctionnelle et méthode de Laplace.

La deuxième question abordée - à savoir la convergence en temps long - correspondait à un travail sur la fonctionnelle d'énergie-libre et à un contrôle sur la dissipation d'entropie.

On a également établi une loi de type Kramers pour la diffusion de McKean-Vlasov dans le cas où son potentiel de confinement est convexe (résultat déjà obtenu précédemment par Herrmann, Imkeller et Peithmann) et pour ce faire, j'ai choisi de regarder ce problème sous le prisme de la propagation du chaos (le lien entre la diffusion de McKean-Vlasov et le système de particules en interaction de type champ moyen).

Enfin, la propagation du chaos a été regardée avec un regard neuf en utilisant les résultats récents de Bolley, Gentil et Guillin sur les inégalités de type WJ.

En outre, les résultats obtenus peuvent s'étendre à d'autres modèles, celui des diffusions de McKean-Vlasov m'ayant servi de « toy-model ». Notamment, suite à mon doctorat, j'ai regardé les systèmes lents/rapides, les équations différentielles stochastiques à délai, les équations aux dérivées partielles stochastiques, les diffusions auto-interagissantes et le calcul de Malliavin.

Toutefois, dans ce mémoire, seuls les travaux aboutis sont présentés. Les travaux en cours sont mentionnés dans les perspectives.

Présentons maintenant brièvement ce qu'est la diffusion de McKean-Vlasov puis les questions auxquelles on répond dans cette synthèse. Soient une variable aléatoire réelle X_0 de loi de probabilité μ_0 sur $\mathbb{R}^d$ et deux potentiels : V correspond à un terme de friction et F correspond à un terme d'interaction entre les trajectoires de la diffusion (ce qui explique le terme « auto-stabilisant »). On s'intéresse alors à

$$X_t = X_0 + \sigma B_t - \int_0^t \nabla V(X_s)ds - \int_0^t \nabla F * \mu_s(X_s)ds\,,$$

où $\mu_t := \mathcal{L}(X_t)$. On peut réécrire l'équation comme suit :

$$\begin{aligned} X_t(\omega_0) =& X_0(\omega_0) + \sigma B_t(\omega_0) - \int_0^t \nabla V(X_s(\omega_0))ds \\ &- \int_0^t \int_\Omega \nabla F\left(X_s(\omega_0) - X_s(\omega)\right)\mathbb{P}(d\omega)ds\,, \end{aligned}$$

où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'espace mesurable sous-jacent.

Cette équation peut être vue comme la limite hydrodynamique du système de particules en interaction de type champ moyen :

$$X_t^i = X_0^i + \sigma B_t^i - \int_0^t \nabla V(X_s^i)ds - \int_0^t \nabla F * \eta_s^N(X_s^i)ds\,, \tag{1}$$

où $(X_0^i)_i$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi commune μ_0, où $(B^i)_i$ sont des mouvements Browniens indépendants et indépendants des variables aléatoires initiales. Et, $\eta_t^N := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{X_t^j}$ est

la mesure empirique du système. Lorsque N est grand, chaque particule tend à se comporter comme une diffusion de McKean-Vlasov.

L'Équation (1) a été introduite par Kac en 1959 comme une simplification de l'équation cinétique de Vlasov sur les plasmas. Lorsque N tend vers l'infini, chaque particule se comporte comme une particule marquée dans un gaz à infinité de particules. Cette équation peut aussi être vue comme un modèle de la contraction des cellules musculaires, voir [53]. Également, les systèmes à champ moyen servent à modéliser les systèmes économiques comptant une multitude d'agents ou de manière plus générale les relations sociales, voir [19].

McKean a été le premier à étudier la limite hydrodynamique d'un point de vue mathématique, voir [47, 48]. En particulier, il a résolu l'existence mais il a aussi montré que la diffusion auto-stabilisante peut être vue comme l'interprétation probabiliste de l'équation des milieux granulaires :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu = \nabla.\left\{\frac{\sigma^2}{2}\nabla\mu + (\nabla V + \nabla F * \mu)\,\mu\right\}.$$

Stroock et Varadhan l'ont étudiée avec une interaction locale, lorsque $F = \delta_0$. Ils obtiennent alors l'équation dite de Burger, voir [54]. Oelschläger a regardé ce qu'il se passe avec $F = \delta_0'$, voir [50].

L'équation de McKean-Vlasov peut être utilisée pour étudier des équations aux dérivées partielles stochastiques, voir [21].

L'équation de McKean-Vlasov a été beaucoup étudiée depuis les années 80, par notamment Funaki ([33]), Tamura ([57, 58]), Dawson et Gärtner ([22]). Graham a étudié l'équation avec l'ajout de sauts et une évolution du potentiel de confinement V ([35, 36]). La propagation du chaos a été regardée par Sznitman ([56]) et Méléard ([49]).

Benachour, Roynette, Talay et Vallois ont regardé l'équation auto-stabilisante lorsque le potentiel de confinement est nul ([6, 7]) : l'existence, les mesures stationnaires et la convergence en temps long.

Benedetto, Caglioti, Carrillo et Pulvirenti ont regardé le cas où V est uniformément strictement convexe, voir [9]. Le cas uniformément strictement convexe a été étendu à l'équation de Boltzmann dans [17]. Le cas convexe non uniformément strictement convexe a été abordé par Cattiaux, Guillin et Malrieu dans [18].

Enfin, des grandes déviations et le problème de sortie furent étudiés par Herrmann, Imkeller et Peithmann dans [38] dans le cas où le potentiel de confinement est uniformément strictement convexe.

Chapitre un : Convergence en temps long

La première question abordée dans ce mémoire est la convergence en temps long de la loi de la diffusion X. Dans le cas d'une diffusion classique, on sait que l'on a une convergence avec vitesse exponentielle. L'idée utilisée pour obtenir la convergence en temps long de la diffusion de McKean-Vlasov est l'utilisation de

la fonctionnelle d'énergie-libre. Toutefois, il a d'abord fallu décrire avec soin l'ensemble des probabilités invariantes. Puis, j'ai également montré la régularisation de l'entropie en temps fini à partir de techniques liées aux inégalités fonctionnelles.

Chapitre deux : Problème de sortie

La deuxième question qui a été résolue est le problème de sortie de la diffusion de McKean-Vlasov. Il s'agit d'un résultat classique pour des diffusions de Kolmogorov. Il suffit en effet d'appliquer les résultats de Freidlin et Wentzell ([25, 32]). Pour des diffusions non-linéaires au sens de McKean, une bonne connaissance de la loi de la diffusion est nécessaire ce qui empêche d'appliquer simplement les résultats classiques. Toutefois, il existe un résultat par Herrmann, Imkeller et Peithmann, voir [38]. Le défaut de celui-ci est qu'il nécessite la convexité des potentiels de confinement et d'interaction. J'ai d'abord étudié ce résultat connu pour le redémontrer de deux manières différentes, en utilisant un résultat de propagation du chaos uniforme puis en utilisant un couplage avec une diffusion homogène. Puis, ces méthodes sont tractées dans le cas non-convexe.

Chapitre trois : Système de particules

Le système de particules était d'abord un simple outil. C'est devenu par la suite un véritable objet d'étude. J'ai décrit l'ensemble des points stables à petits bruits et celui des points stables à grand nombre de particules. En particulier, ces ensembles ne coïncident pas. Puis, les conditions sous lesquelles un système non chaotique (dont les particules ne sont pas indépendantes) à temps $t = 0$ le devient pour t grand et N grand ont été abordées. Il s'agit d'un résultat de création du chaos. Également, je me suis intéressé à prouver qu'il y a une propagation du chaos uniforme en temps pour la distance de Wasserstein.

Bibliographie personnelle

Articles issus de ma thèse

T1 « Non uniqueness of stationary measures for self-stabilizing diffusions », avec S. Herrmann. Stochastic Processes and Their Applications.
http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2010.03.009

T2 « Stationary measures for self-stabilizing diffusions : asymptotic analysis in the small noise limit », avec S. Herrmann. Electronic Journal of Probability.
http://ejp.ejpecp.org/article/view/842/1062

T3 « Self-stabilizing processes : uniqueness problem for stationary measures and convergence rate in the small noise limit », avec S. Herrmann.
ESAIM Probability and statistics.
http://dx.doi.org/10.1051/ps/2011152

T4 « McKean-Vlasov diffusions : from the synchronization to the asynchronization ». Comptes Rendus Mathématiques.
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2011.08.002

Articles subséquents à ma thèse

T5 « Convergence to the equilibria for self-stabilizing processes in double-well landscape ». The Annals of Probability.
http://projecteuclid.org/euclid.aop/1367241503

T6 « Self-stabilizing processes in multi-wells landscape in $\mathbb{R}^d$ - Invariant probabilities ». Journal of Theoretical Probability.
http://link.springer.com/article/10.1007/s10959-012-0435-2

T7 « Exit problem of McKean-Vlasov diffusions in convex landscape ».
Electronic Journal of Probability.
http://ejp.ejpecp.org/article/view/1914

T8 « Phase transitions of McKean-Vlasov processes in symmetric and asymmetric multi-wells landscape ». Stochastics.
http://dx.doi.org/10.1080/17442508.2013.775287

T9 « Self-stabilizing processes in multi-wells landscape in $\mathbb{R}^d$ - Convergence ».
Stochastic Processes and their Applications.
http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2012.12.003

T10 « Captivity of mean-field systems ».
Accepté pour publication dans Probability and Mathematical Statistics.
http://tugaut.perso.math.cnrs.fr/pdf/preprints/Captivity.pdf

T11 « Stationary measures of the Vlasov-Fokker-Planck equation : existence, characterization and phase-transition », avec H. Duong.
Accepté pour publication dans Applied Mathematics Letters.
http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2015.08.003

Articles soumis

T12 « Uniform propagation of chaos and creation of chaos for a class of nonlinear diffusions », avec P. Del Moral. Soumis.
http://tugaut.perso.math.cnrs.fr/pdf/preprints/Fusion.pdf

T13 « Exit-time of an inhomogeneous diffusions ». Soumis.
http://tugaut.perso.math.cnrs.fr/pdf/preprints/ETID.pdf

T14 « Exit problem of particles interacting with their empirical law ».
Soumis.
http://tugaut.perso.math.cnrs.fr/pdf/preprints/EPPIS.pdf

T15 « A simple proof of a Kramers'type law for self-stabilizing diffusions ».
Soumis.
http://tugaut.perso.math.cnrs.fr/pdf/preprints/ASPSSD.pdf

T16 « Mean-Field limit versus small-noise limit for some interacting particle systems », avec S. Herrmann. Soumis.
http://tugaut.perso.math.cnrs.fr/pdf/preprints/MFvSN.pdf

T17 « Exponential rate of convergence independent from the dimension in a mean-field system of particles », avec B. Dyda. Soumis.
http://tugaut.perso.math.cnrs.fr/pdf/preprints/EROCI.pdf

T18 « Exit problem of McKean-Vlasov diffusion in double-wells landscape ». Soumis.
http://tugaut.perso.math.cnrs.fr/pdf/preprints/EPMVDWL.pdf

T19 « Finiteness of entropy for granular media equations ». Soumis.
http://tugaut.perso.math.cnrs.fr/pdf/preprints/FoEGME.pdf

Articles en préparation

T20 « A stochastic algorithm based on repulsion », avec A. Kurtzmann et P. Del Moral.

T21 « A Kramers'type law for self-stabilizing diffusions without convexity assumption ».

T22 « Exponential rate of convergence for self-stabilizing diffusions ».

T23 « Exit problem of periodic inhomogeneous diffusions », avec S. Herrmann.

T24 « Exit-time of McKean-Vlasov diffusions starting in a local minimum ».

T25 « A Kramers'type law for self-interacting diffusions », avec A. Kurtzmann et P. Del Moral.

T26 « Regularization of Fisher information for inhomogeneous diffusions », avec Y. Dabrowski.

T27 « Vlasov-Fokker-Planck equation : convergence », avec H. Duong.

Chapitre 1

Convergence en temps long

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la convergence en temps long des processus auto-stabilisants au sens de McKean. Commençons déjà par rappeler des résultats connus sur ces processus. Pour ce faire, nous présentons tout d'abord l'étude du comportement à temps long des diffusions de Kolmogorov.

1.1.1 Diffusions de Kolmogorov

Une diffusion de Kolmogorov est un cas particulier de diffusion de McKean-Vlasov dans lequel le potentiel d'interaction est constant, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une diffusion réversible classique :

$$X_t = X_0 + \sigma B_t - \int_0^t \nabla V\left(X_s\right) ds\,. \tag{1.1}$$

Ici, X_0 est une variable aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ et V est le potentiel dit de confinement. Le mouvement Brownien $\{B_t\,;\, t \geq 0\}$ est supposé indépendant de la variable X_0.

Un premier résultat essentiel nous dit que la Diffusion (1.1) admet une unique probabilité invariante :

$$\mu_\infty(dx) := \frac{\exp\left[-\frac{2}{\sigma^2}V(x)\right]}{\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left[-\frac{2}{\sigma^2}V(y)\right]dy}\,dx\,.$$

Remarque 1.1.1. *La probabilité invariante est notée μ_∞ car elle est unique et car elle correspond - comme on va le rappeler - à la limite en temps long de $\mathcal{L}\left(X_t\right) =: \mu_t$.*

Par ailleurs, si l'on note $\mu_t := \mathcal{L}(X_t)$ la loi de la diffusion X au temps t, on dispose de la convergence de μ_t vers μ_∞. Cette convergence peut être obtenue par différents outils :

- La mesure de probabilité μ_∞ satisfait une inégalité de type Poincaré. En effet :
  - ☐ Si le potentiel de confinement V est uniformément strictement convexe, on peut appliquer le résultat de Bakry-Émery, voir [3, 5].
  - ☐ En dimension 1, si le potentiel V n'est pas convexe, on peut appliquer le théorème de Muckenhoupt, voir [2].
  - ☐ En dimension quelconque, si le potentiel V n'est pas convexe, on peut appliquer les résultats récents de [4].
- En dimension 1, μ_∞ satisfait une inégalité de type log-sobolev. Dans le cas où le potentiel V est uniformément strictement convexe, le résultat est immédiat (y compris en dimension quelconque). Et, si le potentiel V n'est pas convexe, on peut appliquer les résultats de Bobkov et Götze, voir [12].
- On peut utiliser la décroissance de l'énergie-libre $\Upsilon_\sigma(\mu) := \frac{\sigma^2}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\mu\log(\mu) + \int_{\mathbb{R}^d} V\mu$ le long des lignes de trajectoire ainsi que l'unicité du minimiseur de Υ_σ pour obtenir la convergence faible de μ_t vers μ_∞.

Avec les deux premiers outils, on dispose de plus d'une vitesse de convergence exponentielle.

Il est alors naturel de transposer ces trois outils au cas des diffusions de McKean-Vlasov.

1.1.2 Diffusions de McKean-Vlasov avec V et F convexes

On s'intéresse d'abord au cas où les potentiels de confinement et d'interaction sont convexes. Ici, l'équation considérée est

$$X_t = X_0 + \sigma B_t - \int_0^t \nabla V(X_s)\,ds - \int_0^t \nabla F * \mu_s(X_s)\,ds\,, \tag{1.2}$$

où l'on rappelle que μ_t est la loi de la diffusion au temps t et où l'étoile dénote la convolution.

Ces modèles ont été étudiés dans [6]. Les auteurs ont notamment montré qu'il existait une solution à cette équation lorsque le potentiel de confinement est constant, sous certaines hypothèses que l'on ne mentionne pas ici. Ils ont également prouvé qu'il y a une unique probabilité invariante d'espérance nulle, μ_∞ qui satisfait l'équation implicite

$$\mu_\infty(dx) := \frac{1}{Z_\infty}\exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}F*\mu_\infty(x)\right\}dx$$

Dans un article subséquent, voir [7], Benachour, Roynette et Vallois ont établi la convergence en temps long de μ_t vers l'unique probabilité invariante μ_∞. Pour

ce faire, ils utilisent l'inégalité de Poincaré ainsi qu'un lemme de comparaison stochastique. Ils déduisent également une vitesse de convergence polynômiale.

Cattiaux, Guillin et Malrieu ont prouvé un résultat similaire lorsque le potentiel de confinement est strictement convexe mais non uniformément strictement convexe, voir [18]. Ainsi, sous leur jeu d'hypothèses, il y a unicité de la probabilité invariante et de plus, on a la convergence exponentielle vers l'unique état stable.

Au cours de ma thèse, voir [60], j'ai étendu la méthode de Benachour, Roynette et Vallois au cas où le potentiel V est convexe ainsi qu'au cas où la convexité de F permet de compenser la non-convexité de V (il faut toutefois que μ_0 soit symétrique).

Dans [17], les auteurs ont eux-aussi établi l'unicité de la probabilité invariante si le potentiel de confinement V est convexe. Puis, ils ont montré la convergence en temps long, à vitesse exponentielle vers l'unique probabilité invariante. Leur méthode repose sur l'utilisation de l'énergie-libre ainsi que sur la dissipation de l'entropie.

Plus récemment, voir [14], Bolley, Gentil et Guillin ont prouvé la convergence exponentielle en distance de Wasserstein dans le cas où le potentiel de confinement V est strictement convexe mais non uniformément strictement convexe. L'outil principal de leur article est l'inégalité de type WJ, qui relie la distance de Wasserstein à sa dérivée temporelle.

1.1.3 Diffusions de McKean-Vlasov avec V non-convexe

Durant ma thèse ([60]), j'ai étudié le cas d'une diffusion de McKean-Vlasov lorsque le potentiel de confinement V est à double-puits, donc non-convexe.

L'un des résultats les plus surprenants est la perte d'unicité de la probabilité invariante dès que le coefficient de diffusion est suffisamment petit, voir [39, 40, 41]. Plus précisément, dans le cas du potentiel à double-puits, on dispose d'au moins trois états stables. Précisons que l'on parle des probabilités invariantes et non pas des probabilités invariantes extrêmales. Ceci est dû à la non-convexité du potentiel de confinement, laquelle implique la non-convexité de l'ensemble des probabilités invariantes.

On peut même obtenir un meilleur résultat sous diverses hypothèses. Donnons plutôt un exemple précis. On suppose $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ et $F(x) := \frac{\alpha}{2}x^2$ avec $\alpha > 0$. Alors, l'Équation (1.2) devient

$$X_t = X_0 + \sigma B_t - \int_0^t \left(X_s^3 + (\alpha - 1)X_s - \alpha \mathbb{E}[X_s]\right) ds \,. \tag{1.3}$$

On peut remarquer que la convolution est désormais une « simple » espérance. Alors, si le coefficient de diffusion σ est assez petit, il y a exactement trois états stables.

Une question naturelle se pose alors : vers quelle mesure converge-t-on ?

En fait, une autre question doit d'abord être résolue : converge-t-on ?

C'est cette dernière question qui justifie l'existence de ce chapitre dans le mémoire. Celui-ci est organisé comme suit. On s'intéresse d'abord aux probabilités invariantes, à petit bruit mais aussi à grand bruit. En effet, ces dernières sont les candidates naturelles à être les valeurs d'adhérence de la famille $\{\mu_t\,;\,t\geq 0\}$. Ensuite, on décrit les dites valeurs d'adhérence. Dans une quatrième section, on discute des hypothèses utilisées. En particulier, on montre que l'on peut se passer de la finitude de l'entropie initiale (ce qui autorise donc à considérer des mesures de Dirac comme mesures initiales). Puis, on étudie la question des bassins d'attraction. Enfin, on parle des ouvertures et des perspectives.

1.2 Probabilités invariantes

1.2.1 Existence

Après le mémoire de doctorat, j'ai étudié les diffusions de McKean-Vlasov en dimension quelconque pour des potentiels de confinement qui ont plus de deux puits.

Supposons pour commencer que l'Équation (1.2) admette une probabilité invariante μ^σ.

Remarque 1.2.1. *À partir de maintenant, on ne note plus la probabilité invariante par μ_∞ mais par μ^σ. En effet, il peut - comme cela a été démontré au cours de ma thèse - y avoir plusieurs probabilités invariantes. De plus, on souhaite accentuer la dépendance en σ de la (ou des) probabilité(s) invariante(s).*

Dans l'article [66], la forme générale d'une mesure stationnaire a été obtenue. Ainsi, si μ^σ existe, on a l'équation implicite suivante :

$$\mu^\sigma(dx)=\frac{\exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left[V(x)+F*\mu^\sigma(x)\right]\right\}}{\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left[V(y)+F*\mu^\sigma(y)\right]\right\}dy}\,dx\,. \tag{1.4}$$

La recherche d'une probabilité invariante revient donc *in fine* à la recherche d'un point fixe en dimension infinie.

Théorème 1.2.2 (T6)**.** *On se donne les hypothèses suivantes :*

- *V est une fonction smooth et il existe $m\in\mathbb{N}^*$ et $C_{2m}>0$ tel que*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{V(x)}{||x||^{2m}}=C_{2m}\,.$$

- *L'équation $\nabla V(x)=0$ admet un nombre fini de solutions.*
- *$V(x)\geq C_4||x||^4-C_2||x||^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ où $C_2,C_4>0$.*
- *$\lim\limits_{||x||\to+\infty}\nabla^2V(x)=+\infty$ et $\nabla^2V(x)>0$ pour tout $x\notin\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$.*
- *Il existe une fonction réelle polynômiale paire G telle que $F(x)=G(||x||)$.*

– *G et G'' sont convexes.*

Alors, il existe toujours au moins une probabilité invariante.

Donnons maintenant quelques éléments de la preuve.

Démonstration. On se donne une variable aléatoire X_0 de loi μ_0 telle que l'Équation (1.2) est bien posée. Ensuite, on utilise des arguments proches de ceux développés dans [9].

1. On considère la fonction
$$\xi(t) := \frac{\sigma^2}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \mu_t(x)\log(\mu_t(x))dx + \int_{\mathbb{R}^d} V(x)\mu_t(x)dx + \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} F(x-y)\mu_t(x)\mu_t(y)dxdy\,.$$
2. Cette fonction est décroissante et minorée donc il existe une suite $(t_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini telle que $\xi'(t_p)$ tend vers 0.
3. La famille $\{\mu_t\,;\, t\geq 0\}$ est tendue d'après le Théorème 2.13 dans [38]. Grâce au théorème de Prohorov, il s'ensuit qu'une sous-suite de $(\mu_{t_p})_p$ (que l'on désigne encore par $(\mu_{t_p})_p$ pour le confort de la lecture) converge faiblement vers une mesure de probabilité μ_∞.
4. La convergence vers 0 de $\sqrt{-\xi'(t_p)}$ implique l'égalité
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\nabla W_\infty\mu_\infty - \frac{\sigma^2}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\nabla\varphi\mu_\infty = 0$$
pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact φ. Ici, on a $W_\infty := V + F * \mu_\infty$.
5. Le lemme de Weyl et le théorème de Liouville achèvent de prouver que μ_∞ satisfait l'Équation (1.4) et donc que μ_∞ est une probabilité invariante de l'Équation (1.2).

□

La preuve complète se trouve dans [63] (pour la dimension un) et dans [66] (pour la dimension quelconque).

Remarque 1.2.3. *On a en fait prouvé plus que la simple existence d'une probabilité invariante. En effet, on a obtenu l'existence d'une probabilité invariante qui appartient à l'ensemble des valeurs d'adhérence de la famille $\{\mu_t\,;\, t\geq 0\}$.*

1.2.2 Transition de phase

Dans ces travaux, nous supposons que le potentiel d'interaction F (voir Équation (1.2)) est une fonction polynômiale. Immédiatement, l'Équation implicite (1.4) équivaut à un problème de point fixe en dimension finie. Illustrons ce phénomène

par le cas le plus simple, lorsque $d = 1$ et lorsque F est quadratique. Il s'agit ainsi d'étudier les probabilités invariantes de la diffusion

$$X_t = X_0 + \sigma B_t - \int_0^t \nabla V(X_s) ds - \alpha \int_0^t (X_s - \mathbb{E}[X_s])\, ds\,,$$

où $\alpha := F''(0)$, voir Équation (1.3).

Alors, l'Équation implicite (1.4) devient

$$\mu^\sigma(dx) = \frac{\exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left[V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2 - \alpha m^\sigma x\right]\right\}}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left[V(y) + \frac{\alpha}{2}y^2 - \alpha m^\sigma y\right]\right\}}\, dx\,, \tag{1.5}$$

avec $m^\sigma := \int_{\mathbb{R}} x\mu^\sigma(dx)$. Conséquemment, l'Équation (1.5) (et donc (1.4)) est équivalente au problème de point fixe en dimension un :

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} x \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left[V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2 - \alpha m x\right]\right\}}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left[V(x) + \frac{\alpha}{2}x^2 - \alpha m x\right]\right\}} = m\,. \tag{1.6}$$

Nous avons pu obtenir un résultat précis de transition de phase (voir [65]) que l'on présente maintenant lorsque $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$.

Théorème 1.2.4 (T8)**.** *On suppose que le potentiel de confinement est $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ et que le potentiel d'interaction est $F(x) := \frac{\alpha}{2}x^2$. Alors, il existe $\sigma_c(\alpha) > 0$ tel que*

- *Pour tout $\sigma \geq \sigma_c(\alpha)$, la Diffusion* (1.2) *admet exactement une probabilité invariante μ_0^σ. De plus, μ_0^σ est symétrique.*
- *Pour tout $\sigma < \sigma_c(\alpha)$, la Diffusion* (1.2) *admet exactement trois probabilités invariantes : μ_0^σ, μ_-^σ et μ_+^σ. De plus, μ_0^σ est symétrique et l'on a $\pm \int_{\mathbb{R}} x\mu_\pm(dx) > 0$.*

Par ailleurs, $\sigma_c(\alpha)$ est l'unique solution de l'équation (en σ) :

$$\int_0^{+\infty} \left(y^2 - \frac{1}{2\alpha}\right) \exp\left\{(1-\alpha)y^2 - \frac{\sigma^2}{2}y^4\right\} dy = 0\,. \tag{1.7}$$

Remarque 1.2.5. *En fait, le Théorème 1.2.4 est valable pour tout potentiel de confinement V qui est symétrique et dont les dérivées d'ordre $2n$ ($n \geq 1$) sont convexes.*

Donnons quelques éléments de la preuve pour $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$.

Démonstration. On se donne la fonction ξ_σ définie sur $\mathbb{R}$ par $\xi_\sigma(m) := \int_{\mathbb{R}}(x - m) \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{\alpha-1}{2}x^2 - \alpha m x\right]\right\} dx$. On note qu'à tout zéro de ξ_σ correspond une - et une seule - probabilité invariante pour la Diffusion (1.2).

On procède à un développement en série entière de la fonction ξ_σ et l'on obtient

$$\xi_\sigma(m) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_\sigma(2n)}{(2n)!} \left(\frac{2\alpha m}{\sigma^2}\right)^{2n+1} \left[\frac{I_\sigma(2n+2)}{(2n+1)I_\sigma(2n)} - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right],$$

avec

$$I_\sigma(z) := \int_0^{+\infty} x^z \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{\alpha-1}{2}x^2\right]\right\} dx\,.$$

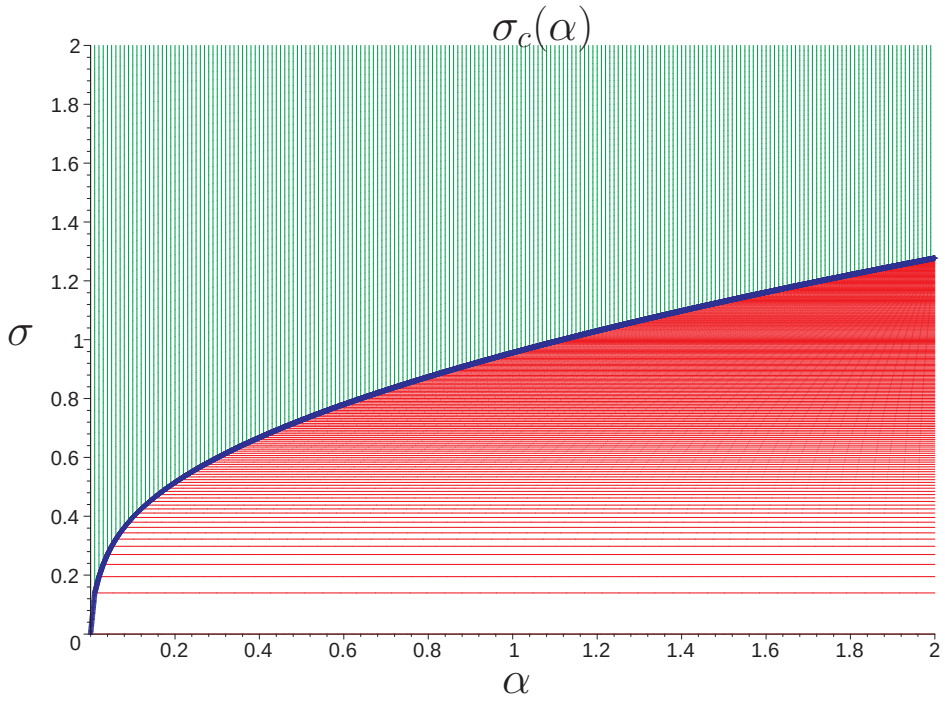
Ensuite, on démontre que la suite de terme général $\gamma_n(\sigma) := \frac{I_\sigma(2n+2)}{(2n+1)I_\sigma(2n)} - \frac{\sigma^2}{2\alpha}$ est décroissante strictement. Puis, comme $\xi_\sigma(1)$ est négatif pour tout $\sigma > 0$, il s'ensuit l'existence de n_σ tel que $\gamma_n(\sigma) \geq 0$ si et seulement si $n \geq n_\sigma$. On peut alors écrire

$$\xi_\sigma(m) = m^{2n_\sigma+1}\left\{\sum_{n=0}^{n_\sigma-1} \frac{\left|\xi_\sigma^{(2n+1)}(0)\right|}{(2n+1)!} m^{2n-2n_\sigma} - \sum_{n=n_\sigma}^{\infty} \frac{\left|\xi_\sigma^{(2n+1)}(0)\right|}{(2n+1)!} m^{2n-2n_\sigma}\right\}.$$

Conséquemment, ξ_σ s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\xi'_\sigma(0) > 0$. Par ailleurs, le cas échéant, la fonction ξ_σ est croissante sur $[0;\lambda]$ et décroissante sur $[\lambda;+\infty[$ où $\lambda > 0$. Ainsi, si $\xi'_\sigma(0)$ est strictement positif, la fonction ξ_σ admet un unique zéro sur $\mathbb{R}_+^*$. Par symétrie, il en admet un unique sur $\mathbb{R}_-^*$ et il en admet un à $m = 0$.

L'équation $\xi'_\sigma(0) = 0$ sépare les deux états (l'unicité de la probabilité invariante et la tiercéïté des probabilités invariantes). Or, après manipulation, cette équation est équivalente à (1.7). □

On donne l'image :



La partie rouge (avec les traits horizontaux) correspond à la tiercéïté des probabilités invariantes tandis que la partie verte (avec les traits verticaux) correspond à l'unicité de la probabilité invariante.

1.2.3 Puits et probabilités invariantes

Une question qui est souvent posée à propos de la tiercéïté des mesures est le pourquoi. En fait, pour faire simple, il y a une mesure stationnaire autour de chacun des deux puits du potentiel de confinement V.

Toutefois, lorsque le potentiel de confinement possède plus de deux puits ou s'il n'est pas invariant par rotation, on ne peut pas conclure immédiatement. C'est pourquoi l'existence d'une probabilité invariante autour de chacun des puits a été étudiée et le résultat suivant a été prouvé dans [66] :

Théorème 1.2.6 (T6)**.** *On se place sous les hypothèses du Théorème 1.2.2. Soit a_0 un point où le potentiel de confinement V admet un minimum local tel que*

$$V(x) + F(x - a_0) > V(a_0) \quad \forall x \neq a_0 \,. \tag{1.8}$$

Alors, pour tout $\kappa > 0$ assez petit, il existe $\sigma_0 > 0$ tel que pour tout $\sigma \in]0; \sigma_0[$, la Diffusion (1.2) *admet une probabilité invariante μ_σ satisfaisant*

$$\int_{\mathbb{R}^d} ||x - a_0||^{2n} \, \mu_\sigma(dx) \leq \kappa^{2n} \,,$$

où $2n := \max\{4; \deg(G)\}$.

Démonstration. L'idée globale est de montrer la convexité locale de la fonctionnelle d'énergie-libre Υ_σ autour de δ_{a_0}. Ainsi, on prouve qu'il existe un ensemble (non-vide) $\mathcal{M}$ de mesures de probabilité absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et $\sigma > 0$ suffisamment petit tel que

$$\inf_{\mu \in \partial\mathcal{M}} \Upsilon_\sigma(\mu) > \inf_{\mu \in \mathcal{M}} \Upsilon_\sigma(\mu) \,.$$

On considère ensuite un élément μ_0 de $\mathcal{M}$ dont l'énergie-libre est inférieure strictement à $\inf_{\mu \in \partial\mathcal{M}} \Upsilon_\sigma(\mu)$. On sait ensuite qu'une valeur d'adhérence de la famille $\{\mu_t \,;\, t \geq 0\}$ est une probabilité invariante. Or, l'énergie-libre est décroissante le long des lignes de trajectoire. Par conséquent, cette probabilité invariante ne peut qu'être dans $\mathcal{M}$. Il suffit ensuite de prendre un ensemble $\mathcal{M}$ qui ne contient que des éléments proches de δ_{a_0}. □

Remarque 1.2.7. *On a démontré la réciproque à savoir que la mesure de Dirac en a_0 est la limite à petit bruit d'une suite de probabilités invariantes seulement si l'Inégalité* (1.8) *est vérifiée. Pour faire simple, si μ^σ est une probabilité invariante proche de δ_{a_0}, elle est proche de $\frac{1}{Z^\sigma} \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left[V(x) + F(x - a_0)\right]\right\} dx$ d'après l'Équation* (1.4)*. Or, si a_0 n'est pas l'unique argument du minimum global de $V + F(. - a_0)$, la mesure $\frac{1}{Z^\sigma} \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left[V(x) + F(x - a_0)\right]\right\} dx$ n'est pas proche de δ_{a_0}. Voir [66].*

1.2.4 Unicité à grand bruit

Prouver la convergence lorsqu'il y a plusieurs probabilités invariantes n'est pas aisé. Aussi, on se ramène autant que faire se peut au cas où l'on a une unique probabilité invariante. On a donc démontré que l'ensemble des probabilités invariantes était réduit à un singleton sous différentes conditions pour peu que le coefficient de diffusion soit assez grand.

Proposition 1.2.8 (T8)**.** *On se place en dimension un. On se donne les hypothèses suivantes :*

- *V est une fonction polynômiale de degré supérieur ou égal à 4.*
- *V a trois points critiques, $a_1 < a_2 < a_3$. De plus $V''(a_1) > 0$, $V''(a_2) < 0$ et $V''(a_3) > 0$.*
- *La dérivée seconde de V tend vers l'infini en l'infini. De plus, V'' est positif strictement en dehors du compact $[a_1; a_3]$.*
- *$F(x) = \frac{\alpha}{2}x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ici, $\alpha > 0$.*
- *Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et une fonction paire $\widehat{V}$ dont les dérivées paires sont toutes convexes telle que $V(x) = \widehat{V}(x) + \mu x$.*

Alors, pourvu que σ soit plus grand qu'une valeur $\sigma(\alpha)$, il y a une unique probabilité invariante.

La preuve est technique et peut être trouvée dans [65].

Avec Pierre Del Moral, nous avons obtenu un résultat plus général - voir [24] - en dimension quelconque :

Théorème 1.2.9 (T12)**.** *On se donne les hypothèses suivantes :*

- *V est de classe $\mathcal{C}^2$.*
- *Pour tout $\lambda > 0$, il existe $R_\lambda > 0$ tel que $\nabla^2 V(x) \geq \lambda$ pour tout $||x|| \geq R_\lambda$.*
- *Le gradient ∇V est à croissance lente : il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tels que $||\nabla V(x)|| \leq C\left(1 + ||x||^{2m-1}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
- *Il existe une fonction polynômiale paire G telle que $F(x) = G(||x||)$.*
- *$\lim_{r \to +\infty} G''(r) = +\infty$.*
- *Il existe une fonction strictement convexe Θ telle que $\Theta(y) > \Theta(0) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ $(y \neq 0)$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lim_{r \to +\infty} \dfrac{V(y)}{r^{2p}} = \Theta(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$.*
- *On a l'inégalité : $p > \deg(G)$.*

Alors, il existe $\sigma_c > 0$ tel que pour tout $\sigma > \sigma_c$, la Diffusion (1.2) *admet une unique probabilité invariante.*

Démonstration. L'idée globale repose sur le travail récent de Bolley, Gentil et Guillin, voir [13, 14]. D'abord, on rappelle qu'il y a toujours au moins une probabilité invariante μ^σ. Ensuite, en suivant scrupuleusement la preuve de la Proposition 3.5 dans [13], on obtient une inégalité de la forme

$$J_{V,F}\left(\mu_t \mid \mu^\sigma\right) \geq \mathcal{C}_\sigma \mathbb{W}_2^2\left(\mu_t; \mu^\sigma\right) , \tag{1.9}$$

où $\mathbb{W}_2$ désigne la distance de Wasserstein et $J_{V,F}\left(\mu_t \,|\, \mu^\sigma\right)$ est l'opposé d'un majorant de la dérivée temporelle de $t \mapsto \frac{1}{2}\mathbb{W}_2^2\left(\mu_t; \mu^\sigma\right)$. Ensuite, des calculs nous permettent de démontrer la positivité stricte de $\mathcal{C}_\sigma$ si bien que l'on a convergence exponentielle en distance de Wasserstein vers la probabilité invariante μ^σ. Cette convergence étant indépendante du point de départ, on en déduit immédiatement l'unicité de la probabilité invariante. □

Remarque 1.2.10. *À première vue, on pourrait croire que l'on dispose alors d'une méthode pour simuler σ_c de telle sorte que pour tout $\sigma > \sigma_c$, il y ait une unique probabilité invariante. Toutefois, le calcul de la constante $\mathcal{C}_\sigma$ (voir Équation* (1.9)*) est difficilement tractable. Conséquemment, on n'utilisera pas ce résultat pour avoir une méthode de simulation.*

1.2.5 Simulations

Je me suis aussi intéressé à la simulation des valeurs critiques en-deça desquelles il y a plusieurs probabilités invariantes.

Les idées développées dans [65] peuvent être appliquées pour des potentiels de confinement et d'interaction généraux. La seule restriction que l'on se donne est la parité de V. Expliquons ces idées avec $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ et $F(x) := \frac{\beta}{4}x^4$, où $\beta > 0$.

La première méthode consiste à chercher une mesure μ_0 dont l'énergie-libre est strictement plus petite que l'énergie-libre de la probabilité invariante symétrique μ_0^σ (on sait d'après [39] qu'il y a toujours une probabilité invariante symétrique lorsque V est symétrique). En effet, si une telle mesure existe, alors il existe une probabilité invariante μ^σ dont l'énergie-libre est inférieure ou égale à celle de μ_0 donc strictement inférieure à celle de μ_0^σ. Conséquemment, il y a au moins deux probabilités invariantes. La mesure que l'on teste est ici

$$\nu^\sigma(dx) := Z_\sigma^{-1} \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left[V(x) + F(x-1)\right]\right\} dx\,.$$

En effet, cette mesure converge vers δ_1 quand σ tend vers 0. Or, la mesure δ_1 est la limite à petit bruit d'une probabilité invariante non symétrique.

On calcule l'énergie-libre de la probabilité invariante symétrique (dont on peut montrer qu'elle est unique) puis l'on calcule l'énergie-libre de la mesure ν^σ. Si $\Upsilon_\sigma(\nu^\sigma) < \Upsilon_\sigma(\mu_0^\sigma)$, on sait que σ est tel qu'il y ait plusieurs probabilités invariantes. On note $\sigma_c^2(\beta)$ la valeur obtenue par cette méthode.

La seconde méthode repose sur la convexité locale de l'énergie-libre. En effet, si l'une des valeurs propres de l'énergie-libre à la mesure μ_0^σ est négative, on peut montrer qu'il existe une probabilité invariante autre que μ_0^σ. On note $\widehat{\sigma_c^2(\beta)}$ la valeur obtenue par cette méthode. A priori, la seconde méthode est meilleure que la première puisqu'elle est locale.

Les calculs pour ces deux méthodes ne sont pas détaillés. On donne une image pour $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ et $F(x) := \frac{\beta}{4}x^4$:

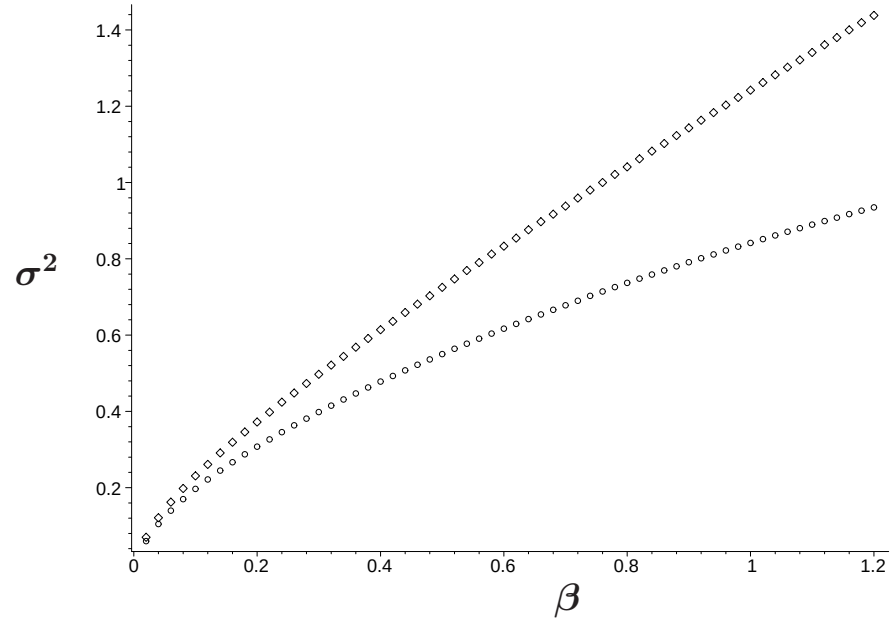


FIGURE 1.1 – Valeurs critiques, $\boldsymbol{\sigma_c^2(\beta)}$ (cercles) et $\widehat{\boldsymbol{\sigma_c^2}}\boldsymbol{(\beta)}$ (diamants).

On peut constater que la seconde méthode fonctionne mieux que la première pour le cas présent.

1.3 Description des valeurs d'adhérence

1.3.1 À grand bruit

Sous certaines hypothèses, on a vu qu'il y avait une unique probabilité invariante, voir Théorème 1.2.9.

En fait, dans [24], on a démontré plus que l'unicité de la probabilité invariante. En effet, on a de plus

Théorème 1.3.1 (T12)**.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.2.9, il existe* $\sigma_c > 0$ *tel que pour tout* $\sigma > \sigma_c$*,* μ_t *converge exponentiellement vite en distance de Wasserstein vers l'unique probabilité invariante* μ^σ *de la Diffusion* (1.2)*.*

1.3.2 Cas de la dimension un

On ne suppose maintenant plus rien sur σ.

On introduit les deux définitions suivantes :

Définition 1.3.2. *Pour tout* $\sigma > 0$*, pour tout* $\mu_0 \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$*, on note* $\mathcal{A}_\sigma$ *l'ensemble des valeurs d'adhérence de la famille* $\{\mu_t\,;\, t \geq 0\}$*. On note* $\mathcal{A}_\sigma$ *au lieu de* $\mathcal{A}_\sigma(\mu_0)$ *pour ne pas surcharger la notation.*

Définition 1.3.3. *Pour tout* $\sigma > 0$*, on note* $\mathcal{S}_\sigma$ *l'ensemble des probabilités invariantes de la Diffusion* (1.2)*.*

Remarque 1.3.4. *On sait sous certaines hypothèses que l'on a* $\#\mathcal{S}_\sigma > 1$ *et sous d'autres, on sait que l'on dispose de l'égalité* $\#\mathcal{S}_\sigma = 1$.

Hypothèse 1.3.5. *Dans ce paragraphe, on suppose que* $\mathcal{S}_\sigma$ *est discret et que* d *est égal à* 1.

Typiquement, en dimension un, si $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ et si $F(x) := \frac{\alpha}{2}x^2$, on sait que pour tout $\sigma > 0$, $\#\mathcal{S}_\sigma \in \{1; 3\}$ d'où $\mathcal{S}_\sigma$ est discret.

Hypothèse 1.3.6. *On suppose que* V *et* F *sont des fonctions polynômiales de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On note* $2q := \max\{\deg(V); \deg(F)\}$. *On se donne trois hypothèses sur la mesure initiale* μ_0 *:*

- *Le moment d'ordre* $8q^2$ *de* μ_0 *est fini :* $\int_{\mathbb{R}} x^{8q^2}\mu_0(dx) < \infty$.
- *La mesure* μ_0 *est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On note* u_0 *sa densité.*
- *L'entropie de* μ_0 *est finie :* $-\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\log\left(u_0(x)\right)dx > -\infty$.

Théorème 1.3.7 (T5)**.** *On se donne les hypothèses suivantes :*

- V *est une fonction polynômiale paire.*
- *L'équation* $V'(x) = 0$ *admet trois solutions :* a, $-a$ *et* 0. *De plus,* $V''(a) > 0$ *et* $V''(0) < 0$.
- $V(x) \geq C_4x^4 - C_2x^2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *avec* $C_2, C_4 > 0$.
- $\lim_{x\to\pm\infty} V''(x) = +\infty$ *et* $V''(x) > 0$ *pour tout* $x \geq a$.
- V'' *est convexe.*
- F *est une fonction polynômiale paire.*
- F *et* F'' *sont convexes.*

Sous les Hypothèses 1.3.5 et 1.3.6, la probabilité μ_t *converge faiblement en temps long vers une probabilité invariante* $\mu_\infty \in \mathcal{S}_\sigma$.

La preuve de ce théorème peut être trouvée dans [63]. Elle n'est pas donnée car le Théorème 1.3.7 peut être vu comme un corollaire du théorème que nous donnons dans le prochain paragraphe.

En revanche, on va discuter des trois conditions dans l'Hypothèse 1.3.6. La première est la finitude du moment d'ordre $8q^2$. Elle est utilisée pour justifier l'existence d'une solution forte à l'Équation (1.2). Conséquemment, cette hypothèses ne peut pas être supprimée.

La deuxième hypothèse est l'absolue continuïté de μ_0 par rapport à la mesure de Lebesgue. Néanmoins, quel que soit μ_0 (de moment d'ordre $8q^2$ fini), on sait d'après [47, 48] que le mouvement Brownien va régulariser la loi de X_t. En d'autres termes, μ_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout $t > 0$. Il semblerait donc que l'on puisse supprimer la deuxième condition.

Toutefois, la finitude de l'entropie est nécessaire et cette finitude de l'entropie présuppose que la loi de X_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On verra dans la section quatre que l'on pourra s'en passer mais en attendant, on suppose que μ_0 satisfait les trois conditions de l'Hypothèse 1.3.6.

1.3.3 Cas de la dimension quelconque

On ne suppose plus $d = 1$. De plus, on ne suppose plus non plus que l'ensemble des probabilités invariantes de la Diffusion (1.2), $\mathcal{S}_\sigma$, est discret.

Malgré ces restrictions, on a des résultats. Donnons en effet le Théorème A dans [64] :

Théorème 1.3.8 (T9)**.** *On se donne les hypothèses suivantes :*

- *V est une fonction smooth sur $\mathbb{R}^d$.*
- *Il existe un compact $\mathcal{K}$ tel que $\nabla^2 V(x) > 0$ pour tout $x \notin \mathcal{K}$. De plus, $\lim_{||x||\to+\infty} \nabla^2 V(x) = +\infty$.*
- *Le gradient ∇V est à croissance lente : il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $C > 0$ et une fonction $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ tels que $\nabla V(x) = C||x||^{2m-2}x + \mathcal{R}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Ici, la fonction $\mathcal{R}$ satisfait $\lim_{||x||\to+\infty} \mathcal{R}(x)||x||^{-(2m-1)} = 0$.*
- *Il existe une fonction réelle polynômiale paire G telle que $F(x) = G(||x||)$. De plus, $\deg(G) = 2n$.*
- *La fonction G est convexe.*
- *Le moment d'ordre $8q^2$ de la mesure initiale μ_0 est fini avec $q := \max\{m; n\}$.*
- *La mesure initiale μ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On note u_0 sa densité. Et, l'entropie*

$$S(\mu_0) := -\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\log(u_0(x))dx$$

est finie.

On dispose alors de trois résultats fondamentaux nous permettant de décrire l'ensemble $\mathcal{A}_\sigma$ des valeurs d'adhérence :

1. *$\mathcal{A}_\sigma \subset \mathcal{S}_\sigma$.*
2. *$\mathcal{A}_\sigma$ est connexe par arc.*
3. *L'énergie-libre Υ_σ est constante sur $\mathcal{A}_\sigma$.*

Démonstration. Donnons l'idée générale permettant de prouver la première assertion. On procède à un raisonnement par l'absurde. On suppose l'existence de $\nu \in \mathcal{A}_\sigma$ tel que $\nu \notin \mathcal{S}_\sigma$. On peut alors prouver qu'il existe un ensemble fermé $\mathcal{H}$ d'intérieur non vide qui contient ν et qui est d'intersection vide avec $\mathcal{S}_\sigma$.

Comme ν est une valeur d'adhérence de la famille $\{\mu_t\,;\, t \geq 0\}$, il existe deux suites croissantes $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $r_k < s_k$ et pour tout $t \in [r_k; s_k]$, on a $\mu_t \in \mathcal{H}$. En procédant comme dans [9], on peut alors construire une probabilité invariante ν^σ qui soit une valeur d'adhérence de la famille de mesures $\{\mu_t\,;\, t \in [r_k; s_k]\,, k \in \mathbb{N}\}$. Or, $\overline{\{\mu_t\,;\, t \in [r_k; s_k]\,, k \in \mathbb{N}\}} \subset \mathcal{H}$. C'est une absurdité.

On utilise des arguments similaires pour prouver la deuxième assertion ainsi que la troisième.

La preuve détaillée se trouve dans [64]. □

Corollaire 1.3.9 (T9)**.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.8, si $\mathcal{S}_\sigma$ est discret, on retrouve le résultat de convergence en temps long. En effet, les sous-ensembles connexes par arc d'un ensemble discret sont des singletons.*

1.3.4 Bassins d'attraction

Maintenant que l'on dispose de la convergence, une question naturelle se pose : vers quelle mesure converge-t-on ?

Des résultats partiels quant à la caractérisation des bassins d'attraction ont été obtenus. On se place ici dans le cadre du Théorème 1.2.4 lorsqu'il y a soit une soit trois probabilités invariantes. Le cas où il n'y a qu'une seule probabilité invariante étant trivial, on suppose qu'il y en a trois : μ_0^σ (qui est symétrique), μ_+^σ et μ_-^σ avec $\pm\mathbb{E}[\mu_\pm^\sigma] > 0$.

Proposition 1.3.10 (T5)**.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.7, si la mesure μ_0 est symétrique, alors μ_t converge faiblement vers l'unique probabilité invariante symétrique, μ_0^σ.*

La preuve est dans [63].

Proposition 1.3.11 (T5)**.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.7, si $\mathbb{E}[\mu_0] > 0$ et si $\Upsilon_\sigma(\mu_0) < \inf_{\mu\,:\,\mathbb{E}[\mu]=0} \Upsilon_\sigma(\mu)$, alors μ_t converge vers μ_+^σ.*

Démonstration. Si $\Upsilon_\sigma(\mu_0) < \inf_{\mu\,:\,\mathbb{E}[\mu]=0} \Upsilon_\sigma(\mu)$, comme l'énergie-libre est décroissante le long des lignes de trajectoire, il s'ensuit que l'espérance de μ_t ne devient jamais nulle. On en déduit immédiatement le résultat. □

Les détails de la preuve sont dans [63].

1.4 Régularisation de l'entropie

1.4.1 Motivation

Pour obtenir les Théorèmes 1.3.7 et 1.3.8, on a eu besoin de supposer la finitude du moment d'ordre $8q^2$ ainsi que la finitude de l'entropie initiale. Comme on l'a dit, la première hypothèse est nécessaire pour l'existence de la solution à l'Équation (1.2).

Dans cette section, on souhaite supprimer la seconde hypothèse (laquelle présuppose que la loi initiale est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue).

Plus précisément, on souhaite montrer que si μ_0 est une mesure de probabilité quelconque telle que $\int_{\mathbb{R}^d} ||x||^{8q^2} \mu_0(dx) < \infty$, alors l'entropie de μ_t est finie pour tout $t > 0$.

Cette assertion est *a priori* vraie car on sait que le mouvement Brownien a tendance à régulariser la loi. En particulier, on sait que μ_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Un des premiers résultats obtenus après la thèse a été le suivant :

Théorème 1.4.1 (T5,T9)**.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.7 ou du Théorème 1.3.8, si μ_0 est une mesure de probabilité telle que son moment d'ordre $8q^2$ est fini, alors pour tout $t > 0$, μ_t admet des moments finis de tout ordre. Plus précisément, pour tout $t_0 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{\mathbb{R}^d} ||x||^n \, \mu_0(dx) < \infty \, .$$

La preuve de ce théorème se trouve dans [63] (cas de la dimension un) et dans [64] (cas de la dimension quelconque).

1.4.2 Cas réversible

La bonne idée pour montrer la finitude de l'entropie en tout $t > 0$ est de regarder ce qui a été fait précédemment dans le cas où il n'y a pas de potentiel d'interaction.

Présentons brièvement les idées développées par Bobkov, Gentil et Ledoux dans [11] pour obtenir un résultat similaire dans le cas d'une diffusion réversible (c'est-à-dire avec F constant).

On suppose que l'on dispose de l'égalité $\nabla^2 V \geq c$ où c est un réel non nécessairement positif. Alors, pour tout $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \mu_t(x) \log(\mu_t(x)) dx + \frac{2}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}^d} V(x) \mu_t(x) dx \\ &\leq \left(\frac{c}{1 - e^{-2ct}} - c \right) \mathbb{W}_2 \left(\mu_0 \, ; \, \frac{e^{-\frac{2}{\sigma^2} V}}{Z_\sigma} \mathcal{L} \right) \, , \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}$ est la mesure de Lebesgue.

On utilisera ici la notation $P_t \mu_0 := \mu_t$.

Pour obtenir ce résultat, Bobkov, Gentil et Ledoux utilisent la réversibilité de la mesure $\frac{e^{-\frac{2}{\sigma^2} V}}{Z_\sigma} \mathcal{L}$. Puis, ils considèrent un chemin - qui joue le rôle d'une géodésique - reliant $\log \left(P_{2t} f(y) \right)$ à $P_t \left(\log \left(P_t f \right) \right) (x)$ pour tout y et pour tout x. Ils obtiennent alors une inégalité de log-Harnack :

$$P_t \left(\log P_t f \right) (x) \leq \log P_{2t} f(y) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{1 - e^{-2cT}} - c \right) ||x - y||^2$$

En prenant l'infimum en y puis en utilisant la dualité de Monge-Kantorovitch, ils obtiennent le résultat annoncé, lequel implique la finitude de

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu_t(x) \log(\mu_t(x)) dx + \frac{2}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}^d} V(x) \mu_t(x) dx \, .$$

1.4.3 Inégalités fonctionnelles

Dans un papier récent, le travail de [11] a été adapté au cas des diffusions de McKean-Vlasov.

Présentons les idées de ce résultat. Les détails se trouvent dans [71].

D'abord, pour tout $t > 0$, μ_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue donc il existe une fonction f_t telle que

- $f_t \geq 0$,
- $\int_{\mathbb{R}^d} f_t(x)dx = 1$,
- et $\mu_t(dx) = f_t(x)dx$.

Soit g_0 une fonction positive d'intégrale égale à 1. On pose $g_t := P_t g_0$ où le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ est généré par $L_t := \frac{\sigma^2}{2}\Delta - \nabla.(\nabla V + \nabla F * \mu_t)$.

Il suffit de prouver $\int g_t \log(g_t) < \infty$ pour tout $t > 0$.

Pour ce faire, on utilise l'existence d'une probabilité invariante

$$\mu^\sigma := \frac{1}{Z_\sigma} \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\left(V + F * \mu^\sigma\right)\right\}\mathcal{L}$$

à la Diffusion (1.2). En utilisant la bornitude des moments de μ_t, il s'avère donc qu'il est suffisant de prouver la finitude de l'entropie relative de μ_t par rapport à μ^σ.

Ensuite, pour toute variable aléatoire X_0 qui suit la loi μ^σ, pour tout $t \geq 0$ et pour toutes les fonctions f et g, on a $\mathbb{E}\left[f\left(X_t\right)g\left(X_0\right)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X_0\right)g\left(X_t\right)\right]$. En d'autres termes, la mesure de probabilité μ^σ est réversible par rapport à $(P_t)_t$.

On se donne x et y dans $\mathbb{R}^d$. On pose $x(s) := y + \frac{s}{t}(x - y)$ pour tout $s \in [0; t]$. On considère alors une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0; t]$ dans $[0; t]$ telle que $h(0) = 0$ et $h(t) = t$. On pose alors la trajectoire $\gamma(s) := x(h(s))$. Cette fonction jouera le rôle d'une géodésique entre x et y. On introduit ensuite

$$\xi(s) := \left(P_s \log\left(P_{2t-s}f\right)\right)\left(\gamma(s)\right) .$$

En utilisant la propriété de diffusion et après quelques calculs, on obtient

$$\frac{d}{ds}\xi(s) = -P_s\frac{\left|\nabla P_{2t-s}f\right|^2}{\left(P_{2t-s}f\right)^2}\left(\gamma(s)\right) + \frac{h'(s)}{t}\left\langle \nabla P_s \log\left(P_{2t-s}f\right)\left(\gamma(s)\right) ; x - y\right\rangle$$

Il vient immédiatement

$$\frac{d}{ds}\xi(s) \leq -P_s\frac{\left|\nabla P_{2t-s}f\right|^2}{\left(P_{2t-s}f\right)^2}\left(\gamma(s)\right) + \frac{|h'(s)|}{t}||x - y||\left|\nabla P_s \log\left(P_{2t-s}f\right)\left(\gamma(s)\right)\right|$$

Puis, on donne l'inégalité suivante :

$$\left|\nabla P_s \log\left(P_{2t-s}f\right)\right| \leq e^{Ks}P_s\frac{\left|\nabla P_{2t-s}f\right|}{P_{2t-s}f} ,$$

où $K := -\inf_{\mathbb{R}^d} \nabla^2 V > 0$. Cette inégalité peut s'obtenir comme une simple adaptation du Lemme 1.3 dans [46]. C'est également un cas particulier de l'article de Collet et Malrieu, voir [20, Lemme 3.7].

Il s'ensuit l'inégalité de log-Harnack :

$$P_t \log P_t f(x) \leq \log P_{2t} f(y) + \frac{||x-y||^2}{4t^2} \int_0^t |h'(s)|^2 e^{2Ks} ds \,.$$

De cette inégalité, on peut obtenir directement la finitude de l'entropie relative par rapport à la probabilité invariante μ^σ. On va toutefois plus loin.

On prend $h(s) := t\frac{e^{-2Ks}-1}{e^{-2Kt}-1}$. On prend l'infimum pour $y \in \mathbb{R}^d$ et l'on obtient

$$P_t \log P_t f(x) \leq \frac{1}{S(t)} \min_{y \in \mathbb{R}^d} \left\{ S(t)\varphi(y) + \frac{1}{2}||x-y||^2 \right\} ,$$

où $\varphi(y) := \log P_{2t} f(y)$ et $\frac{1}{S(t)} = K\left[1 - \frac{1}{1-e^{2Kt}}\right]$. L'inégalité de Jensen, puis la dualité de Monge-Kantorovitch permettent d'achever la preuve du théorème :

Théorème 1.4.2 (T19)**.** *On se donne les hypothèses :*

- *Le potentiel V est une fonction smooth.*
- *Il existe un compact $\mathcal{K}$ tel que $\nabla^2 V(x) > 0$ pour tout $x \notin \mathcal{K}$. De plus, $\lim_{||x|| \to +\infty} \nabla^2 V(x) = +\infty$.*
- *Le gradient ∇V est à croissance lente : il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $C > 0$ et une fonction $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ tels que $\nabla V(x) = C||x||^{2m-2}x + \mathcal{R}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Ici, la fonction $\mathcal{R}$ satisfait $\lim_{||x|| \to +\infty} \mathcal{R}(x)||x||^{-(2m-1)} = 0$.*
- *Il existe une fonction réelle polynômiale paire G telle que $F(x) = G(||x||)$. De plus, $\deg(G) = 2n$.*
- *La fonction G est convexe.*
- *Le moment d'ordre $8q^2$ de la mesure initiale μ_0 est fini avec $q := \max\{m; n\}$.*

Pour tout $t > 0$, on a la finitude de l'entropie pour la loi $\mu_t = \mathcal{L}(X_t)$. En d'autres termes, pour tout $t > 0$, $\mathcal{L}(X_t)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et sa densité u_t satisfait la condition

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_t(x) \log(u_t(x))\, dx < +\infty \,.$$

1.5 Ouvertures, perspectives

Cette étude du comportement en temps long des diffusions non-linéaires au sens de McKean est passionnante car les méthodes habituelles ne fonctionnent pas lorsque le potentiel de confinement V est non convexe. De plus, elle balaie un large évantail de techniques : des inégalités fonctionnelles à la propagation du chaos en passant par l'analyse et la fonctionnelle d'énergie-libre...

Notons que les articles T1 et T2 sont respectivement cités dans [59] et [34]. Et, les articles T5, T6 et T7 sont cités par [14].

Il reste néanmoins de nombreuses questions en suspens.

1.5.1 Bassins d'attraction

On a prouvé sous certaines hypothèses simples à vérifier que la diffusion autostabilisante convergeait vers une probabilité invariante quand le temps tend vers l'infini. Une question que l'on se pose naturellement est la suivante : vers quelle mesure converge-t-on ?

Des réponses partielles ont été apportées précédemment. On peut regarder un problème plus particulier : lorsque la mesure initiale est une masse de Dirac. Si μ_0 est une mesure de Dirac en un point du domaine d'attraction d'un puits a_0 de V, ne peut-on pas prouver que μ_t converge vers une probabilité invariante proche de δ_{a_0} ? Notons que l'on peut se poser cette question grâce au résultat de régularisation de l'entropie.

Une réponse à cette question est amenée dans un travail en cours d'écriture, T21. L'idée générale est de marier les grandes déviations avec le résultat de Tamura, voir [57].

On cherche de manière plus générale à caractériser les bassins d'attraction, à petit bruit. Pour ce faire, on devrait pouvoir utiliser la théorie du potentiel et ceci peut être l'objet d'une thèse de doctorat.

1.5.2 Vitesse de convergence

Après que l'on a obtenu la convergence en temps long, une autre question naturelle demeure : celle de la vitesse à laquelle on converge.

Dans un article en cours d'écriture, T23, on fournit une vitesse de convergence exponentielle. Notons μ_t la loi de la diffusion de McKean-Vlasov au temps t. Alors, on parvient à montrer que $\mathbb{W}_2\left(\mu_t; \Pi(\mu_t)\right)$ tend exponentiellement vite vers 0 où $\mathbb{W}_2$ est la distance de Wasserstein et où Π est une fonctionnelle telle que $\mu = \Pi(\mu)$ si et seulement si μ est une probabilité invariante.

On arrive à aller plus loin et à obtenir une vitesse de convergence exponentielle vers une probabilité invariante dans le cas où F est quadratique.

Il reste toutefois à traiter le cas général.

1.5.3 Régularisation de la loi

On a vu que les moments de tout ordre ainsi que l'entropie de la loi de la diffusion de McKean-Vlasov sont finis dès que t est strictement positif. On peut alors se demander ce qu'il en est de la production d'entropie.

Par ailleurs, on souhaite montrer la finitude de l'entropie pour tout $t > 0$ par une autre méthode, n'utilisant pas les techniques liées aux inégalités fonctionnelles.

Ceci est l'objet d'un travail en cours avec Yoann Dabrowski, T27. Nous sommes en train de prouver un résultat précédemment deviné par Otto et Villani, voir [51]. Il s'agit de la finitude de la production d'entropie pour tout $t > 0$. L'idée pour obtenir ce résultat est d'utiliser le calcul de Malliavin.

1.5.4 Vlasov-Fokker-Planck

L'équation de McKean-Vlasov peut être vue comme dérivant de l'équation cinétique dite de Vlasov-Fokker-Planck.

Il y a quelques mois, j'ai rencontré Hong Duong qui étudie celle-ci et nous avons entamé une collaboration. Nous avons à ce sujet écrit un article, T11. Dans celui-ci, nous établissons des résultats sur les probabilités invariantes et notamment leur non-unicité sous des conditions qui rappellent celles de T1.

Il reste toutefois à étudier la convergence en temps long ainsi que l'étude des bassins d'attraction, de la vitesse de convergence et la régularisation de la loi, ce qui est l'objet de l'article en cours de rédaction, T27.

Chapitre 2

Grandes déviations, problèmes de sortie

2.1 Introduction

2.1.1 De la loi des grands nombres aux grandes déviations

Dans le domaine de la convergence des processus stochastiques, la théorie des grandes déviations joue un rôle essentiel pour décrire le taux avec lequel la probabilité de certains évènements rares décroit. Ainsi, chaque résultat de convergence amène à trouver le taux de grandes déviations associé. Dans de bons cas, la connaissance d'un principe de grandes déviations permet même d'obtenir des informations à propos de la convergence elle-même (voir le théorème central limite [16]).

Introduisons la théorie des grandes déviations par des arguments simples. On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On dispose de plusieurs résultats de convergence classiques : la loi forte des grands nombres indique que la moyenne arithmétique $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ converge presque sûrement vers l'espérance mathématique $\mathbb{E}[X_1]$ quand n tend vers l'infini. Le théorème central de la limite va plus loin en fournissant la loi autour de cette valeur limite. En effet, la variable aléatoire $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\right)$ converge en loi vers la gaussienne centrée et de variance $\mathrm{Var}(X_1)$. Précisons que nous ne donnons pas les hypothèses requises pour que ces deux résultats soient vrais. L'idée des grandes déviations est d'aller encore plus loin en estimant la probabilité des évènements rares : typiquement, la probabilité que la moyenne empirique $\overline{X}_n$ soit loin de $\mathbb{E}[X_1]$ ou la probabilité que la mesure empirique $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{X_k}$ soit loin de $\mathbb{P}_{X_1}$, la mesure de probabilité de X_1.

Afin de mesurer combien la probabilité d'un évènement rare est petite, il est pratique de décrire la loi du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ et de prouver que cette loi est concentrée autour d'un ensemble "petit" de valeurs typiques avec grande probabilité (voir [25] pour des assertions précises).

Illustrons ceci par un exemple. On suppose que X_1 prend ses valeurs dans

un ensemble fini : $\#X_1(\Omega) = d > 0$. Sans perte de généralité, on pose $X_1(\Omega) = M := \{1, \dots, d\}$. On écrit $p_i := \mathbb{P}(X_1 = i)$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Conséquemment, M^n correspond à la famille des suites (messages) de taille n. L'intérêt principal de l'étude des évènements rares est de définir l'entropie des messages "typiques" et l'on dispose de la remarque surprenante suivante : la probabilité d'être un message typique converge vers 1 quand n tend vers l'infini bien que le nombre de ces messages typiques soit négligeable devant le nombre $d^n = \#M^n$ de toutes les suites possibles.

Définissons l'entropie de la distribution de probabilité $(p_1, \dots, p_d)$ comme suit

$$H(p) := H(p_1, \dots, p_d) := -\sum_{k=1}^{d} p_k \log(p_k) .$$

Soit $\epsilon > 0$. On introduit l'ensemble des *messages ϵ-typiques* :

$$\mathcal{T}_n^\epsilon := \left\{ (i_1, \dots, i_n) \in M^n \ : \ e^{-n(H(p)+\epsilon)} \leq p_{i_1} \times \dots \times p_{i_n} \leq e^{-n(H(p)-\epsilon)} \right\} .$$

En utilisant la loi des grands nombres appliquée à la famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(\log p_{X_i})_{1 \leq i \leq n}$, il s'ensuit la propriété suivante

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left((X_1, \cdots, X_n) \in \mathcal{T}_n^\epsilon \right) = 1 \quad \text{and} \quad \#\mathcal{T}_n^\epsilon \leq e^{n(H(p)+\epsilon)} .$$

Ces deux résultats sont vrais pour tout $\epsilon > 0$. En particulier, si $H(p) < \log(d)$, on a mis en évidence un ensemble de messages $\mathcal{T}_n^\epsilon$ dont la probabilité est proche de 1 pour de grandes valeurs de n tandis que sa taille est petite en comparaison de tout l'espace : $\#\mathcal{T}_n^\epsilon = o(d^n) = o(\#M^n)$. En d'autres termes, la trajectoire $(X_1, \cdots, X_n)$ a une faible probabilité d'être en dehors d'une petite portion de l'espace des phases M^n.

2.1.2 Grandes déviations pour des processus

Dans ce mémoire, le cadre de travail concerne les processus à temps continu dépendant d'un paramètre σ et l'on décrit le comportement de cette famille lorsque le paramètre σ est petit. Si l'espace des phases est infini, l'idée est similaire à la discussion précédente, on a besoin de trouver la fonction de taux (entropie) qui décrit la probabilité qu'une trajectoire soit loin des chemins typiques.

On considère une famille de processus stochastiques $X^\sigma := (X_t^\sigma)_{t \in [0,T]}$ avec $T < \infty$. Dans la suite, on dit que la famille de processus $(X^\sigma)_{\sigma > 0}$ satisfait un *principe de grandes déviations* s'il existe une fonction semi-continue inférieurement (appelée *fonction de taux*) I allant de $\mathcal{C}\left([0,T]; \mathbb{R}^d\right)$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\limsup_{\sigma \to 0} \frac{\sigma^2}{2} \log\left[\mathbb{P}\left\{X^\sigma \in \mathbb{F}\right\}\right] \leq -\inf_{\varphi \in \mathbb{F}} I(\varphi)$$

pour tout sous-ensemble fermé $\mathbb{F} \subset \mathcal{C}\left([0,T];\mathbb{R}^d\right)$ muni de la topologie uniforme et

$$\liminf_{\sigma\to 0} \frac{\sigma^2}{2} \log\left[\mathbb{P}\left\{X^\sigma \in \mathbb{G}\right\}\right] \geq -\inf_{\varphi\in\mathbb{G}} I(\varphi)$$

pour tout sous-ensemble ouvert $\mathbb{G} \subset \mathcal{C}\left([0,T];\mathbb{R}^d\right)$. I est une *bonne* fonction de taux si ses ensembles de niveaux sont des ensembles compacts de $\mathcal{C}\left([0,T];\mathbb{R}^d\right)$. On s'intéresse plus particulièrement aux équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien. Le théorème de Schilder donne un principe de grandes déviations de $X^\sigma := (\sigma B_t)_{t\in[0,T]}$, où B est un processus de Wiener en dimension d (voir le Théorème 5.2.3 dans [25]). La bonne fonction de taux associée est donnée par

$$I_0(\varphi) := \frac{1}{4}\int_0^T \|\dot{\varphi}(t)\|^2 dt\,,$$

si φ appartient à l'ensemble $\mathcal{H}_0$ des fonctions absolument continues et partant de 0. Si $\varphi \notin \mathcal{H}_0$, on pose $I_0(\varphi) := +\infty$. Ici, $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. L'étude élaborée par Schilder permet d'aller plus loin dans la description des principes de grandes déviations pour les diffusions comme présenté par Freidlin et Wentzell. Si X^σ satisfait l'équation différentielle stochastique :

$$X_t^\sigma = x + \sigma B_t - \int_0^t b(s, X_s^\sigma) ds\,,$$

où le terme de dérive $b(t,x)$ est une fonction continue par rapport à la variable temporelle et localement Lipschitz par rapport à la variable d'espace. Alors la famille $(X^\sigma)_{\sigma>0}$ admet un principe de grandes déviations avec la bonne fonction de taux

$$I_b(\varphi) := \frac{1}{4}\int_0^T \|\dot{\varphi}(t) + b(t,\varphi(t))\|^2\, dt$$

pour $\varphi \in \mathcal{H}_x$ (l'ensemble des fonctions absolument continues partant de x). Pour $\varphi \notin \mathcal{H}_x$, $I_b(\varphi) := +\infty$. On focalise notre attention sur les *chemins typiques* d'une telle diffusion. En fait, comme l'équation déterministe

$$\Psi_t(x) = x - \int_0^t b(s, \Psi_s(x))\, ds \tag{2.1}$$

admet une unique solution, la diffusion X^σ partant de x converge en probabilité vers la trajectoire déterministe $\Psi(x)$ quand le coefficient de diffusion tend vers 0. Le principe de grandes déviations de Freidlin-Wentzell estime le taux de convergence : en introduisant

$$\mathbb{F} := \left\{\varphi \in \mathcal{C}\left([0,T];\mathbb{R}^d\right) :\ \|\varphi - \Psi(x)\|_\infty \geq \delta\right\},$$

où $\|\cdot\|_\infty$ est utilisée pour représenter la norme uniforme, on obtient

$$\limsup_{\sigma\to 0} \frac{\sigma^2}{2} \log \mathbb{P}\left(X^\sigma \in \mathbb{F}\right) \leq -\inf_{\varphi\in\mathbb{F}} I_b(\varphi) < 0\,.$$

2.1.3 Problème de sortie

On note finalement que la description précise des phénomènes de grandes déviations permet de résoudre l'étude à petit bruit du temps de sortie $\tau_{\mathcal{D}}$ d'un domaine d'attraction $\mathcal{D}$. Notamment, si le terme de dérive est homogène et correspond à un gradient, c'est-à-dire si $b(t,x) = \nabla V(x)$, si de plus V atteint un minimum local pour $x = a$ et si $\mathcal{D}$ est un domaine d'attraction borné associé à a, alors une loi de type Kramers peut être observée. Une version faible de ce résultat est la limite suivante :

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{\sigma^2}{2} \log \mathbb{E}[\tau_{\mathcal{D}}] = \inf_{T>0} \inf_{\substack{\varphi(0)=a,\\ \varphi(T)\in\partial\mathcal{D}}} I_{\nabla V}(\varphi) = \inf_{y\in\partial\mathcal{D}} V(y) - V(a) =: \overline{Q}\,.$$

Décrivons le résultat global obtenu par Freidlin et Wentzell, pour la dimension 1.

On introduit $\Psi_t(x)$ la solution du système dynamique

$$\Psi_0(x) = x \quad \text{et} \quad \dot{\Psi}_t\,(x) = -U'\,(\Psi_t(x))\ . \tag{2.2}$$

On considère un intervalle borné $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient l'élément x. Deux conditions sont exigées sur le potentiel V et sur l'ouvert $\mathcal{O}$:

Hypothèse 2.1.1. *L'unique équilibre stable dans l'intervalle $\mathcal{O}$ du système dynamique (2.2) est $a \in \mathcal{O}$. De plus, pour tout $\Psi_0 \in \mathcal{O}$, quel que soit $t > 0$, $\Psi_t \in \mathcal{O}$ et Ψ_t converge vers a quand t tend vers $+\infty$.*

Hypothèse 2.1.2. *Quel que soit $\Psi_0 \in \partial\mathcal{O}$, Ψ_t converge vers a.*

Cette condition supplémentaire invite à s'éloigner de $\partial\mathcal{D}$ si la frontière du domaine d'attraction de a est d'intersection non vide avec le domaine d'attraction d'un autre point de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.1.3. *Pour tout $x \in \mathcal{O}$, on note*

$$\tau_\sigma(x) := \inf\{t > 0 \mid\ X_t^\sigma \in \partial\mathcal{O}\} \tag{2.3}$$

le premier temps de sortie de l'intervalle $\mathcal{O}$ du processus X^σ.

Le théorème suivant n'est pas *stricto sensu* celui de Freidlin et Wentzell décrit dans [25]. La dérive n'est pas uniformément lipschitzienne.

Théorème 2.1.4. *Soit $x \in \mathcal{O}$. Quel que soit $\delta > 0$ arbitrairement petit, on a les résultats asymptotiques suivants :*

$$\lim_{\sigma\longrightarrow 0} \mathbb{P}\left\{e^{\frac{2}{\sigma^2}(\overline{Q}-\delta)} < \tau_\sigma(x) < e^{\frac{2}{\sigma}(\overline{Q}+\delta)}\right\} = 1 \tag{2.4}$$

où $\overline{Q} := \inf_{\partial\mathcal{O}} V - V\,(a)$. De plus, on peut connaître le lieu de sortie. Si $\mathcal{N} \subset \partial\mathcal{O}$ est tel que $\inf_{\mathcal{N}} V - V(a) > \overline{Q}$, on a :

$$\lim_{\sigma\longrightarrow 0} \mathbb{P}\left[X^\sigma_{\tau_\sigma(x)} \in \mathcal{N}\right] = 0\,. \tag{2.5}$$

2.1.4 Nouveau théorème

Introduisons, pour commencer, une définition.

Définition 2.1.5. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit U un potentiel de $\mathbb{R}^k$ et soit $\mathcal{D}$ un domaine ouvert de $\mathbb{R}^k$. On dit que $\mathcal{D}$ est stable par $-\nabla U$ si $\varphi_t(x) \in \mathcal{D}$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$. Ici, on a*

$$\varphi_t(x) = x - \int_0^t \nabla U\left(\varphi_s(x)\right) ds\,.$$

Les hypothèses pour appliquer la théorie de Freidlin-Wentzell concernent des comportements dynamiques et ne sont pas simples à prouver. En particulier, l'invariance du domaine pour le potentiel est généralement difficile à obtenir, voir [62]. Ici, nous souhaitons établir des conditions suffisantes pour obtenir les résultats classiques des grandes déviations, qui ne concernent que la géométrie du domaine $\mathcal{G}$.

Justifions brièvement dans quel sens l'invariance du domaine est difficile à obtenir. Dans [62], le problème de sortie de la première particule d'un système à champ moyen du domaine $\mathcal{D}$ a été résolu. C'est équivalent à résoudre le problème de sortie de tout le système de particules du domaine $\mathcal{D} \times \left(\mathbb{R}^d\right)^{N-1}$. Toutefois, ce domaine n'est pas invariant par le potentiel sous-jacent. Conséquemment, on a dû considérer l'intersection entre ce domaine et la boule de centre $(a, \cdots, a)$ et de rayon κ petit. Ce nouveau domaine est positivement invariant. Pour le prouver, on a besoin de prouver que la boule est positivement invariante. De plus, il faut prouver que le coût de sortie de la boule est plus grand que le coût de sortie du domaine $\mathcal{D} \times \left(\mathbb{R}^d\right)^{N-1}$.

Toutefois, ce calcul n'est faisable que par l'utilisation de la convexité du potentiel de confinement V. C'est pourquoi il faut circonvenir à la difficulté de l'invariance.

Le but de ce paragraphe est de donner un « nouveau » résultat de grandes déviations dans $\mathbb{R}^k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé

On commence par donner quelques définitions.

Définition 2.1.6. *Soit k un entier strictement positif et U un potentiel sur $\mathbb{R}^k$. Pour tout $H \in \mathbb{R}$, on définit*

$$\Lambda_H := \left\{x \in \mathbb{R}^k \ : \ U(x) < H\right\}\,.$$

On observe : $\Lambda_{H_1} \subset \Lambda_{H_2}$ pour tous $-\infty \leq H_1 \leq H_2 \leq +\infty$. De plus, $\Lambda_{+\infty} = \mathbb{R}^k$.

Par ailleurs, si le potentiel U est convexe, l'ensemble Λ_H est connexe par arcs. Mais, si U n'est pas convexe, Λ_H peut ne pas être connexe par arcs. Toutefois, on s'intéresse à des processus continus donc les seuls ensembles qui nous intéressent sont connexes par arcs.

Définition 2.1.7. *Soit k un entier strictement positif et U un potentiel sur $\mathbb{R}^k$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^k$. À partir de maintenant, $\mathcal{L}_H(x_0)$ dénote le sous-ensemble connexe par arcs de l'ensemble Λ_H qui contient x_0.*

On note que $\mathcal{L}_H(x_0)$ est un ensemble ouvert si U est continu d'après la définition de Λ_H.

On appliquera maintenant la théorie de Freidlin et Wentzell à ce domaine.

Théorème 2.1.8 (T14)**.** *Soit k un entier positif. On considère un potentiel U sur $\mathbb{R}^k$. On suppose que U est de classe $\mathcal{C}^2$. On considère la diffusion x^σ définie par*

$$x_t^\sigma = x_0 + \sigma \mathcal{B}_t - \int_0^t \nabla U\left(x_s^\sigma\right) ds\,.$$

Soit $a \in \mathbb{R}^k$ un puits du potentiel U. Sans perte de généralité, on suppose $U(a) = 0$. On se donne un domaine ouvert $\mathcal{G}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

- *Le point a est dans $\mathcal{G}$.*
- *La quantité $H := \inf_{z \in \partial\mathcal{G}} U(z)$ est finie.*
- *L'ensemble $\partial\mathcal{G} \cap \partial\mathcal{L}_H(a)$ est non vide.*
- *Il existe $\kappa_0 > 0$ tel que le potentiel U admet un unique point critique dans $\mathcal{L}_{H+\kappa_0}(a)$.*

Par $\tau_{\mathcal{G}}(\sigma, k)$, on dénote le premier temps de sortie de la diffusion x^σ du domaine $\mathcal{G}$. Alors, les trois résultats suivants sont vrais.

i) *Pour tout $\delta > 0$, on a*

$$\lim_{\sigma \to 0} \mathbb{P}\left\{ e^{\frac{2}{\sigma^2}(H-\delta)} \leq \tau_{\mathcal{G}}(\sigma, k) \right\} = 1\,.$$

ii) *Pour tout $\delta > 0$, on a*

$$\lim_{\sigma \to 0} \mathbb{P}\left\{ \tau_{\mathcal{G}}(\sigma, k) \leq e^{\frac{2}{\sigma^2}(H+\delta)} \right\} = 1\,.$$

iii) *Si $\mathcal{N} \subset \partial\mathcal{G}$ est tel que $\inf_{z \in \mathcal{N}} U(z) > \inf_{z \in \partial\mathcal{G}} U(z)$ alors, on a :*

$$\lim_{\sigma \to 0} \mathbb{P}\left\{ x^\sigma_{\tau_{\mathcal{G}}(\sigma,k)} \in \mathcal{N} \right\} = 0\,.$$

En d'autres termes, on retrouve les mêmes résultats que ceux de la théorie de Freidlin et Wentzell.

Preuve du lieu de sortie

La preuve du second point du Théorème 2.1.8 est délicate et technique donc elle n'est pas fournie. Elle est toutefois disponible dans [69]. Les preuves du premier et du troisième point sont plus intuitives. On va en présenter une, celle du troisième point, le lieu de sortie.

Soit $\mathcal{N} \subset \partial\mathcal{G}$ tel que $\inf_{z\in\mathcal{N}} U(z) > H$. Soit $\kappa > 0$ tel que $\inf_{z\in\mathcal{N}} U(z) = H + 3\kappa$. On observe :

$$\mathcal{N} \cap \mathcal{L}_{H+2\kappa}(a) = \emptyset\,.$$

Conséquemment, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{x^{\sigma}_{\tau_{\mathcal{G}}(\sigma,k)} \in \mathcal{N}\right\} \leq & \mathbb{P}\left\{x^{\sigma}_{\tau_{\mathcal{G}}(\sigma,k)} \notin \mathcal{L}_{H+2\kappa}(a)\right\} \\ \leq & \mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{G}}(\sigma,k) > \tau_{\mathcal{L}_{H+2\kappa}(a)}(\sigma,k)\right\} \\ \leq & \mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{G}}(\sigma,k) > e^{\frac{2}{\sigma^2}(H+\kappa)}\right\} \\ & + \mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{L}_{H+2\kappa}(a)}(\sigma,k) < e^{\frac{2}{\sigma^2}(H+\kappa)}\right\}\,.\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 quand σ tend vers 0 d'après le premier point du Théorème 2.1.8. Le second terme converge vers 0 quand σ tend vers 0. On en déduit que $\mathbb{P}\left\{x^{\sigma}_{\tau_{\mathcal{G}}(\sigma,k)} \in \mathcal{N}\right\}$ converge vers 0 quand σ tend vers 0.

2.2 Calcul du coût de sortie

2.2.1 Motivation

Suite au Théorème 2.1.8, le coût de sortie devient la seule difficulté dans l'établissement d'une loi de type Kramers pour une diffusion *homogène*. Or, nous sommes intéressés par les temps de sortie de particules dans un système de particules en interaction de type champ moyen :

$$X^{i,N}_t = X^i_0 + \sigma B^i_t - \int_0^t \nabla V\left(X^{i,N}_s\right) ds - \int_0^t \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \nabla F\left(X^{i,N}_s - X^{j,N}_s\right) ds\,,$$

Ici, $(X^i_0)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi μ_0 sur $\mathbb{R}^d$. Et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\{B^i_t \,:\, t \in \mathbb{R}_+\}$ est un mouvement Brownien sur $\mathbb{R}^d$ que l'on suppose indépendant de la suite $(X^i_0)_i$. Les mouvements Browniens sont par ailleurs indépendants.

Ici, N est un entier positif supposé de valeur élevée.

Soit $\mathcal{G}_N \subset \left(\mathbb{R}^d\right)^N$ un domaine ouvert qui satisfait les hypothèses du Théorème 2.1.8. On a alors la loi de Kramers avec le coût de sortie :

$$H_N := \inf_{Z\in\mathcal{G}_N} N\Upsilon^N_0\left(Z\right)$$

où le potentiel Υ^N_0 est défini par

$$\Upsilon^N_0\left(X_1,\cdots,X_n\right) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V(X_i) + \frac{1}{2N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} F(X_i - X_j)\,,$$

pour tout $(X_1,\cdots,X_N) \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N$.

On a considéré le cas « simple » où $\mathcal{G}_N$ n'est rien d'autre que $\mathcal{O} \times \left(\mathbb{R}^d\right)^{N-1}$, ce qui donne alors le premier temps de sortie de la première particule $X^{1,N}$ du domaine $\mathcal{O}$.

On a effectué ce calcul dans [62] lorsque V et F sont uniformément strictement convexes :

Proposition 2.2.1 (T7)**.** *Soit $\mathcal{O}$ un domaine borné qui contient a. On a :*

$$\lim_{N\to\infty} \inf_{Z\in\partial\mathcal{O}\times\mathbb{R}^{d(N-1)}} N\Upsilon_0^N(Z) = \inf_{z\in\partial\mathcal{O}} \left(V(z) + F(z-a)\right) ,$$

où a est l'argument du minimum global de V.

En d'autres termes, le coût de sortie converge vers $\inf_{z\in\partial\mathcal{O}} (V(z) + F(z-a))$, ce qui est exactement le coût de sortie de la limite hydrodynamique comme montré dans [38] dans le cas où V et F sont tous les deux uniformément strictement convexes.

Démonstration. On étudie la fonction ξ_z de $\mathbb{R}^{d(N-1)}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\xi_z(x_2, \cdots, x_N) := \Upsilon_0^N (z, x_2, \cdots, x_N) .$$

ξ_z est convexe sur $\mathbb{R}^{d(N-1)}$ et son unique puits est $\left(x_0^N(z), \cdots, x_0^N(z)\right) \in \mathbb{R}^{d(N-1)}$ où $x_0^N(z)$ satisfait

$$\nabla V\left(x_0^N(z)\right) + \frac{1}{N}\nabla F\left(x_0^N(z) - z\right) = 0 .$$

Ceci implique l'existence d'une fonction continue f_1^N satisfaisant $\lim_{N\to\infty} f_1^N(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ et

$$x_0^N(z) = a + \frac{1}{N}\left(\nabla^2 V(0)\right)^{-1} \nabla F(z-a) + \frac{f_1^N(z)}{N} .$$

Des calculs simples impliquent

$$\Upsilon_0^N \left(z, x_0^N(z), \cdots, x_0^N(z)\right) = \frac{1}{N}\left\{V(z) + F(z-a)\right\} + \frac{f_2^N(z)}{N}$$

où f_2^N est une fonction continue qui satisfait $\lim_{N\to\infty} f_2^N(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^d$. Alors :

$$N\Upsilon_0^N(z, x_0^N(z), \cdots, x_0^N(z)) = V(z) + F(z-a) + f_2^N(z) .$$

On note que $\lim_{N\to\infty} \sup_{z\in\partial\mathcal{O}} f_2^N(z) = 0$ car $\partial\mathcal{O}$ est borné. □

Dans le cas où V et F ne sont pas convexes, les calculs sont plus délicats. De plus, le domaine à considérer est lui-même plus compliqué. Ainsi, on souhaite montrer, autrement, la convergence du coût de sortie de la première particule vers celui de la limite hydrodynamique.

2.2.2 Échange des limites

C'est l'objet du travail effectué avec Samuel Herrmann dans [42]. Plus exactement, on a montré la convergence de la bonne fonction de taux associée à la première particule vers la bonne fonction de taux associée à la limite hydrodynamique.

La bonne fonction de taux, associée à la topologie uniforme, de tout le système de particules est une fonctionnelle définie par

$$I^N(\Phi) := \frac{1}{4}\int_0^T \|\dot{\Phi}(t) + N\nabla\Upsilon_0^N(\Phi(t))\|^2 dt,$$

si $\Phi : [0,T] \to \left(\mathbb{R}^d\right)^N$ est une fonction absolument continue avec la condition initiale $\Phi(0) = \overline{x} := (x,\dots,x)$ et $I^N(\Phi) := +\infty$ sinon. La fonction de taux I^N peut alors être réécrite de cette manière : si $\Phi := (f_1,\cdots,f_N)$, on obtient

$$I^N(\Phi) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^N \int_0^T \|\dot{f}_i(t) + \nabla V(f_i(t)) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \nabla F(f_i(t) - f_k(t))\|^2 dt \quad (2.6)$$

si $f_i \in \mathcal{H}_x$ pour tout $1 \le i \le N$. Si l'une des fonctions de la famille $(f_i)_{1\le i\le N}$ n'appartient pas à $\mathcal{H}_x$, on pose $I^N(f_1,\cdots,f_N) := +\infty$.

Comme un principe de grandes déviations est satisfait par le système complet de particules, un principe de grandes déviations est satisfait pour la première particule $(X^{1,N})$ avec la bonne fonction de taux J_N obtenue par projection :

$$J_N(f) := \inf_{f_2,\cdots,f_N\in\mathcal{H}_x} I^N(f,f_2,\cdots,f_N). \quad (2.7)$$

Comme $X^{1,N}$ est proche du processus auto-stabilisant X, on s'attend à ce que la fonctionnelle J_N converge vers la fonctionnelle J_∞, l'entropie du processus auto-stabilisant, quand N devient grand :

$$J_\infty(f) := \frac{1}{4}\int_0^T \|\dot{f}(t) + \nabla V(f(t)) + \nabla F(f(t) - \Psi_\infty^x(t))\|^2 dt,$$

En d'autres termes, on s'attend à ce qu'il soit possible d'échanger les limites entre le petit bruit σ et la limite hydrodynamique.

Théorème 2.2.2 (T16)**.** *On se donne les hypothèses suivantes :*
- *V est de classe $\mathcal{C}^2$.*
- *$\nabla V^2(x) > 0$ pour tout $x \notin \mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est un compact.*
- *Il existe une fonction G de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $F(x) = G(||x||)$.*
- *G est une fonction polynômiale paire de degré supérieur ou égal à 2.*
- *La propriété asymptotique suivante est vérifiée : $\lim_{r\to+\infty} G(r) = +\infty$.*

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. La bonne fonction de taux J_N converge vers J_∞, quand N tend vers l'infini. Soit f une fonction absolument continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d$ telle que $f(0) = x$, alors

$$\lim_{N\to+\infty} J_N(f) = J_\infty(f).$$

De plus, la convergence est uniforme sur n'importe quel sous-ensemble compact de $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ *muni de la topologie uniforme.*

On ne va pas donner la preuve - qui est longue et technique et peut être trouvée dans [42] - mais on va expliquer pourquoi ce résultat nous a semblé vrai. On va ainsi prouver l'inégalité :

$$\limsup_{N\to+\infty} J_N(f) \leq J_\infty(f)\,.$$

Démonstration. Par définition, $J_N(f) \leq I^N(f, f_2, \cdots, f_N)$ pour tout $f_2, \cdots, f_N \in \mathcal{H}_x$ où I^N est définie plus haut. Ainsi, on peut choisir $f_k := \Psi^x_\infty$ pour tout $2 \leq k \leq N$ où Ψ^x_∞ est la solution de $\Psi^x_\infty(t) = x - \int_0^t \nabla V\left(\Psi^x_\infty(s)\right) ds$. Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} J_N(f) &\leq I^N(f, \Psi^x_\infty, \cdots, \Psi^x_\infty) \\ &\leq \frac{1}{4}\int_0^T \|\dot f(t) + \nabla V(f(t)) + \Big(1-\frac{1}{N}\Big)\nabla F\left(f(t) - \Psi^x_\infty(t)\right)\|^2 dt \\ &+ \frac{N-1}{4}\int_0^T \|\dot\Psi^x_\infty(t) + \nabla V\left(\Psi^x_\infty(t)\right) + \frac{1}{N}\nabla F\left(\Psi^x_\infty(t) - f(t)\right)\|^2 dt\,. \end{aligned}$$

Par définition de Ψ^x_∞, on a $\dot\Psi^x_\infty + \nabla V\left(\Psi^x_\infty\right) = 0$. L'inégalité précédente implique :

$$\begin{aligned} J_N(f) \leq \frac{1}{4}\int_0^T &\|\dot f(t) + \nabla V(f(t)) + \Big(1-\frac{1}{N}\Big)\nabla F\left(f(t) - \Psi^x_\infty(t)\right)\|^2 dt \\ &+ \frac{1}{4N}\int_0^T \|\nabla F\left(\Psi^x_\infty(t) - f(t)\right)\|^2 dt. \end{aligned}$$

Prendre la limite quand N tend vers l'infini dans l'inégalité précédente amène à la limite $\limsup_{N\to+\infty} J_N(f) \leq J_\infty(f)$.

Notons que la propriété de Lipschitz locale de la fonction d'interaction ∇F entraîne l'uniformité de cette convergence sur tout compact. □

2.2.3 Problème de sortie du système de particules

La convergence de la bonne fonction de taux de la première particule vers la bonne fonction de taux de la diffusion de McKean-Vlasov (la limite hydrodynamique) implique la convergence du coût de sortie de la diffusion $X^{1,N}$ d'un domaine $\mathcal{O}$ vers le coût de sortie de la diffusion X du domaine $\mathcal{O}$.

On a alors le théorème suivant, dont la preuve est disponible dans [69] :

Théorème 2.2.3 (T14)**.** *On se donne les hypothèses :*
- *V est de classe $\mathcal{C}^2$.*
- *Pour tout $\lambda > 0$, il existe $R_\lambda > 0$ tel que $\nabla^2 V(x) > \lambda$ pour tout $||x|| > R_\lambda$.*
- *Le gradient ∇V est à croissance lente : il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tels que $||\nabla V(x)|| \leq C\left(1 + ||x||^{2m-1}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

– *Il existe une fonction* G *de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $F(x) = G(||x||)$.

– G *est une fonction polynômiale paire de degré supérieur ou égal à* 2.

Soit $a \in \mathbb{R}^d$ *un puits de* V. *Soit* $\mathcal{D}$ *un domaine ouvert qui contient* a *et sur lequel le potentiel* $V + \frac{\alpha}{2}(x-a)^2$ *est uniformément strictement convexe.*

Par $\tau_{\mathcal{D}}(\sigma, N)$, *on dénote le premier temps de sortie de la diffusion* $X^{1,N}$ *du domaine* $\mathcal{D}$. *Si* N *est assez grand, on a :*

i) *Pour tout* $\delta > 0$, *on a la limite suivante pour* σ *tendant vers* 0 *:*

$$\mathbb{P}\left\{e^{\frac{2}{\sigma^2}(H_N-\delta)} \leq \tau_{\mathcal{D}}(\sigma, N) \leq e^{\frac{2}{\sigma^2}(H_N+\delta)}\right\} \longrightarrow 1\,,$$

avec $\lim_{N\to\infty} H_N = H := \inf_{z\in\partial\mathcal{D}} V(z) + F(z-a)$.

ii) *Si* $\mathcal{N} \subset \partial\mathcal{D}$ *est tel que* $\inf_{\mathcal{N}} V + F(.-a) > H$, *on a le résultat suivant sur le lieu de sortie :*

$$\lim_{\sigma\to 0} \mathbb{P}\left\{X^{1,N}_{\tau_{\mathcal{D}}(\sigma,N)} \in \mathcal{N}\right\} = 0\,.$$

Par ailleurs, toujours dans [69], on a également fourni un résultat similaire concernant le premier temps de sortie de n'importe quelle particule.

2.3 Problème de sortie si V est convexe

À partir de maintenant, on s'intéresse au problème de sortie de la diffusion de McKean-Vlasov. On s'intéresse d'abord au cas où les potentiels de confinement et d'interaction sont convexes. Ici, l'équation considérée est

$$X_t = X_0 + \sigma B_t - \int_0^t \nabla V\left(X_s\right) ds - \int_0^t \nabla F * \mu_s\left(X_s\right) ds\,, \tag{2.8}$$

où l'on rappelle que μ_t est la loi de la diffusion au temps t et où l'étoile dénote la convolution.

Le problème de sortie dans le cas convexe avait déjà été résolu par Herrmann, Imkeller et Peithmann, voir [38]. Donnons ici leur résultat :

Proposition 2.3.1. *On suppose que les potentiels* F *et* V *sont uniformément strictement convexes. On note* a_0 *l'unique puits de* V. *On se donne un ouvert* $\mathcal{D}$ *stable par* $-\nabla V$ *et stable par* $-\nabla V - \nabla F(.-a_0)$. *On considère* $X_0 \in \mathcal{D}$. *Soit* $\tau_{\mathcal{D}}(\sigma)$ *le premier temps de sortie de la diffusion* (2.8) *du domaine* $\mathcal{D}$. *Alors, pour tout* $\delta > 0$, *on a :*

$$\lim_{\sigma\to 0} \mathbb{P}\left\{\exp\left[\frac{2}{\sigma^2}\left(H-\delta\right)\right] \leq \tau_{\mathcal{D}}(\sigma) \leq \exp\left[\frac{2}{\sigma^2}\left(H+\delta\right)\right]\right\} = 1\,.$$

Ici, $H := \inf_{z\in\partial\mathcal{D}} V(z) + F(z-a_0) - V(a_0)$. *De plus, si* $\mathcal{N} \subset \partial\mathcal{D}$ *est tel que* $\inf_{z\in\mathcal{N}} V(z) + F(z-a_0) - V(a_0) > H$, *alors on a l'information suivante sur le lieu de sortie :*

$$\lim_{\sigma\to 0} \mathbb{P}\left\{X_{\tau_{\mathcal{D}}(\sigma)} \in \mathcal{N}\right\} = 0\,.$$

Pour démontrer ce théorème, les auteurs ont reconstruit la théorie de Freidlin et Wentzell pour la diffusion inhomogène (2.8).

J'ai d'abord bien étudié leur travail pour voir si l'on pouvait l'étendre au cas où V est non-convexe mais leur méthode repose fondamentalement sur la convexité de V. D'autres méthodes ont donc été cherchées en commençant par éprouver celles-ci dans le cas où le potentiel de confinement est uniformément strictement convexe.

Nous avons ainsi retrouvé leur résultat avec deux autres méthodes, l'une publiée dans [62] et l'autre soumise, voir [70]. Par ailleurs, les hypothèses ont pu être réduites.

Ainsi, voici le théorème obtenu :

Théorème 2.3.2 (T7,T15)**.** *On se donne les hypothèses suivantes :*
- *V est une fonction smooth.*
- *V est uniformément strictement convexe : $\nabla^2 V \geq \theta > 0$.*
- *Il existe une fonction réelle polynômiale paire et convexe G telle que $F(x) = G(||x||)$.*

On note a_0 l'unique puits de V. On se donne un ouvert $\mathcal{D}$ stable par $-\nabla V - \nabla F(. - a_0)$. On considère $X_0 \in \mathcal{D}$. On suppose également que $\psi_t(x_0) \in \mathcal{D}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ où $\psi_t(x_0) = x_0 - \int_0^t \nabla V(\psi_s(x_0))\, ds$. Soit $\tau_{\mathcal{D}}(\sigma)$ le premier temps de sortie de la Diffusion (2.8) du domaine $\mathcal{D}$. Alors, pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\lim_{\sigma \to 0} \mathbb{P}\left\{ \exp\left[\frac{2}{\sigma^2}(H - \delta)\right] \leq \tau_{\mathcal{D}}(\sigma) \leq \exp\left[\frac{2}{\sigma^2}(H + \delta)\right] \right\} = 1\,.$$

Ici, $H := \inf_{z \in \partial\mathcal{D}} V(z) + F(z - a_0) - V(a_0)$. De plus, si $\mathcal{N} \subset \partial\mathcal{D}$ est tel que $\inf_{z \in \mathcal{N}} V(z) + F(z - a_0) - V(a_0) > H$, alors on a l'information suivante sur le lieu de sortie :

$$\lim_{\sigma \to 0} \mathbb{P}\left\{ X_{\tau_{\mathcal{D}}(\sigma)} \in \mathcal{N} \right\} = 0\,.$$

2.3.1 Première méthode

La première technique que l'on a mise en place est fondée sur le système de particules. L'idée est donc la suivante : le temps de sortie de X du domaine $\mathcal{D}$ est « proche » de celui de la première particule $X^{1,N}$ du domaine $\mathcal{D}$ quand N est grand.

Cette idée est intuitive car on dispose de la propagation du chaos uniforme suivante (voir [18]) :

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}\left\{ \left|\left| X_t - X_t^{1,N} \right|\right|^2 \right\} = 0\,.$$

Toutefois, pour que les deux temps de sortie soient proches, il nous faut une inégalité plus forte, où le supremum est dans l'espérance.

C'est l'objet du théorème qui va suivre. On introduit d'abord un temps de sortie.

Définition 2.3.3. *On note $\tau(\sigma)$ (respectivement $\tau^{1,N}(\sigma)$) le premier temps de sortie de la diffusion X (respectivement $X^{1,N}$) d'un ensemble compact $\mathcal{K}$ qui cointient $\overline{\mathcal{D}}$ dans son intérieur. Le premier temps de sortie de tout le système $\left(X^{1,N}, \cdots, X^{N,N}\right)$ de la boule de centre $(a_0, \cdots, a_0)$ et de rayon $\kappa > 0$ est noté $\tau_\kappa^N(\sigma)$.*

On introduit alors

$$\mathcal{T}_\kappa^N(\sigma) := \inf\left\{\tau(\sigma)\,;\,\tau^{1,N}(\sigma)\,;\,\tau_\kappa^N(\sigma)\right\}\,. \tag{2.9}$$

Cette définition est naturelle. En effet, comme V et F sont convexes, le système de particules tend à se concentrer autour de $(a_0, \cdots, a_0)$. Ainsi, la dérive pour chaque particule est proche de $\nabla V + \nabla F * \delta_{a_0}$.

On donne maintenant le théorème :

Théorème 2.3.4 (T7)**.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.3.2, il existe κ_0 tel que pour tout $\kappa < \kappa_0$, il existe $N_0(\kappa) \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_0(\kappa) > 0$ qui satisfont*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le \mathcal{T}_\kappa^N(\sigma)} \left|\left|X_t - X_t^{1,N}\right|\right| \ge r(\kappa)\right\} \le r(\kappa)\,,$$

pour tout $N \ge N_0(\kappa)$ et pour tout $\sigma < \sigma_0(\kappa)$. Ici, r est une fonction positive, croissante et nulle en 0.

On est ainsi en mesure d'établir le Théorème 2.3.2. La preuve étant technique, les détails ne sont pas donnés. L'idée générale est toutefois la suivante pour l'inégalité supérieure :

- La probabilité que la diffusion $X^{1,N}$ sorte d'un domaine contenant $\overline{\mathcal{D}}$ dans son intérieur après un temps $e^{\frac{2}{\sigma^2}(H+\xi)}$ tend vers 0 quand σ tend vers 0.
- La probabilité que le temps $\mathcal{T}_\kappa^N(\sigma)$ soit égal au temps $\tau_\kappa^N(\sigma)$ tend vers 0 quand σ tend vers 0.
- La probabilité pour que les deux diffusions $X^{1,N}$ et X s'éloignent tend vers 0 quand σ tend vers 0.

On aboutit ainsi au Théorème 2.3.2.

2.3.2 Seconde méthode

Plus récemment, j'ai mis en place une seconde méthode, tout aussi intuitive mais moins technique. Voir [70]. Cette preuve fait seulement sept pages et nous allons donc en donner les ingrédients essentiels.

On rappelle que l'on suppose l'uniforme stricte convexité sur V : $\nabla^2 V \ge K_V$. En fait, dans cet article, on se place dans un cadre plus général, non nécessairement gradient.

Proposition 2.3.5 (T15)**.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.3.2, on a :*
1. *Le moment d'ordre $2n$ est uniformément borné :*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathbb{E}\left\{||X_t||^{2n}\right\} \le \max\left\{||X_0||^{2n}\,;\,\left(\frac{2n-1}{2K_V}\right)^n \sigma^{2n}\right\}\,. \tag{2.10}$$

2. *Pour tout $\kappa > 0$ et $\sigma > 0$, on introduit le temps* déterministe

$$T_\kappa(\sigma) := \min\left\{ t \geq 0 \;\middle|\; \mathbb{E}\left\{ ||X_t||^{2n} \right\} \leq \kappa^{2n} \right\}.$$

Pour $\sigma < \sqrt{\frac{\kappa^2 K_V}{2n-1}}$, on a l'inégalité : $T_\kappa(\sigma) \leq \frac{1}{nK_V\kappa^{2n}} ||X_0||^{2n}$.
3. *De plus, pour tout $t \geq T_\kappa(\sigma)$, $\mathbb{E}\left\{ ||X_t||^{2n} \right\} \leq \kappa^{2n}$.*

La preuve est élémentaire et l'on ne la donne pas.

Ensuite, comme $T_\kappa(\sigma)$ peut être majoré uniformément par rapport à σ, on a la limite : $\lim_{\sigma \to 0} \mathbb{P}\left(\tau_{\mathcal{D}}(\sigma) < T_\kappa(\sigma)\right) = 0$ pour tout $\kappa > 0$.

Puis, on se donne un compact $\mathcal{K}$ qui contient $\overline{\mathcal{D}}$ dans son intérieur.

On a prouvé que la diffusion ne sortait pas du domaine $\mathcal{D}$ avant le temps $T_\kappa(\sigma)$. Maintenant, on étudie la sortie de la diffusion du domaine après le temps déterministe $T_\kappa(\sigma)$. Pour ce faire, on utilise le fait suivant : $\sup_{t \geq T_\kappa(\sigma)} \mathbb{E}\left\{ ||X_t||^{2n} \right\} \leq \kappa^{2n}$. Comme cette inégalité est satisfaite pour tout $\kappa > 0$, on en déduit que la dérive $-\nabla V - \nabla F * \mu_t$ est proche de la dérive $-\nabla V - \nabla F * \delta_{a_0}$. Conséquemment, on considère la diffusion suivante définie pour $t \geq T_\kappa(\sigma)$:

$$Y_t = X_{T_\kappa(\sigma)} + \sigma\left(W_t - W_{T_\kappa(\sigma)}\right) - \int_{T_\kappa(\sigma)}^t \nabla V(Y_s) ds - \int_{T_\kappa(\sigma)}^t \nabla F\left(Y_s - a_0\right) ds\,, \quad (2.11)$$

si $X_{T_\kappa(\sigma)} \in \mathcal{K}$ et $Y_t := X_t$ sinon. On introduit les deux temps de sortie suivants : $\tau_{\mathcal{K}}(\sigma) := \inf\left\{ t > T_\kappa(\sigma) \;:\; X_t \notin \mathcal{K} \right\}$ et $\tau'_{\mathcal{K},\kappa}(\epsilon) := \inf\left\{ t > T_\kappa(\sigma) \;:\; Y_t \notin \mathcal{K} \right\}$.

On se donne le temps d'arrêt : $\mathcal{T}_{\mathcal{K},\kappa}(\sigma) := \min\left\{ \tau_{\mathcal{K}}(\sigma); \tau'_{\mathcal{K}}(\sigma) \right\}$. Le résultat suivant nous dit que les deux diffusions sont proches sur l'intervalle $[T_\kappa(\sigma)\,;\, \mathcal{T}_{\mathcal{K},\kappa}(\sigma)]$.

Théorème 2.3.6 (T15)**.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.3.2, il existe κ_0 tel que pour tout $\kappa < \kappa_0$, il existe $\sigma_0(\kappa) > 0$ satisfaisant*

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{T_\kappa(\sigma) \leq t \leq \mathcal{T}_{\mathcal{K},\kappa}(\sigma)} ||X_t - Y_t|| \geq r(\kappa) \right\} \leq r(\kappa)$$

pour tout $\sigma < \sigma_0(\kappa)$. Ici, r est une fonction positive et croissante telle que $r(0) = 0$.

On peut maintenant donner la preuve du Théorème 2.3.2.

Démonstration. **Étape 1.** Soit $\kappa > 0$. On peut prouver facilement qu'il existe deux familles de domaines $\left(\mathcal{D}_{i,\kappa}\right)_{\kappa>0}$ et $\left(\mathcal{D}_{e,\kappa}\right)_{\kappa>0}$ tels que

- $\mathcal{D}_{i,\kappa} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{e,\kappa}$.
- $\mathcal{D}_{i,\kappa}$ et $\mathcal{D}_{e,\kappa}$ sont stables par $-\nabla V - \nabla F(. - a_0)$.
- $\sup_{z \in \partial\mathcal{D}_{i,\kappa}} \mathrm{d}\left(z\,;\,\mathcal{D}^c\right) + \sup_{z \in \partial\mathcal{D}_{e,\kappa}} \mathrm{d}\left(z\,;\,\mathcal{D}\right)$ tend vers 0 quand κ converge vers 0.
- $\inf_{z \in \partial\mathcal{D}_{i,\kappa}} \mathrm{d}\left(z\,;\,\mathcal{D}^c\right) = \inf_{z \in \partial\mathcal{D}_{e,\kappa}} \mathrm{d}\left(z\,;\,\mathcal{D}\right) = r(\kappa)$.

Étape 2. On note $\tau_{i,\kappa}(\sigma)$ (respectivement $\tau_{e,\kappa}(\sigma)$) le premier temps de sortie de Y du domaine $\mathcal{D}_{i,\kappa}$ (respectivement $\mathcal{D}_{e,\kappa}$).
Étape 3. On prouve ici l'inégalité supérieure :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{D}}(\sigma) \geq e^{\frac{2H+\xi}{\sigma^2}}\right\} =& \mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{D}}(\sigma) \geq e^{\frac{2H+\xi}{\sigma^2}} \,;\, \tau_{e,\kappa}(\sigma) \geq e^{\frac{2H+\xi}{\sigma^2}}\right\} \\ &+ \mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{D}}(\sigma) \geq e^{\frac{2H+\xi}{\sigma^2}} \,;\, \tau_{e,\kappa}(\sigma) < e^{\frac{2H+\xi}{\sigma^2}}\right\} \\ \leq& \mathbb{P}\left\{\tau_{e,\kappa}(\sigma) \geq e^{\frac{2H+\xi}{\sigma^2}}\right\} \\ &+ \mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{D}}(\sigma) \geq e^{\frac{2H+\xi}{\sigma^2}} \,;\, \tau_{e,\kappa}(\sigma) < e^{\frac{2H+\xi}{\sigma^2}}\right\} \\ =:& \, a_\kappa(\sigma) + b_\kappa(\sigma)\,.\end{aligned}$$

Étape 3.1. Par des résultats classiques en théorie de Freidlin et Wentzell, il existe $\kappa_1 > 0$ tel que pour tout $0 < \kappa < \kappa_1$: $\lim_{\sigma\to 0} \mathbb{P}\left\{\tau_{e,\kappa}(\sigma) < \exp\left[\frac{1}{\sigma^2}(2H+\xi)\right]\right\} = 0.$
Ainsi, le premier terme $a_\kappa(\sigma)$ tend vers 0 quand σ converge vers 0.
Étape 3.2. Regardons le second terme $b_\kappa(\sigma)$. Pour κ assez petit, on a $\mathcal{D}_{e,\kappa} \subset \mathcal{K}$. Conséquemment, on a :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{\tau(\sigma) \geq e^{\frac{2H+\xi}{\sigma^2}} \,;\, \tau_{e,\kappa}(\sigma) \leq e^{\frac{2H+\xi}{\sigma^2}}\right\} \\ &\leq \mathbb{P}\left\{\left|\left|X_{\tau_{e,\kappa}(\sigma)} - Y_{\tau_{e,\kappa}(\sigma)}\right|\right| \geq r(\kappa)\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\sup_{T_\kappa(\sigma)\leq t\leq \mathcal{T}_{\mathcal{K},\kappa}(\sigma)} ||X_t - Y_t|| \geq r(\kappa)\right\}.\end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.3.4, il existe $\sigma_0 > 0$ tel que le terme précédent est inférieur à $r(\kappa)$ pour tout $\sigma < \sigma_0$.
Étape 3.3. Soit $\xi > 0$. En prenant κ arbitrairement petit, on obtient l'inégalité supérieure $\lim_{\sigma\to 0} \mathbb{P}\left\{\tau(\sigma) \geq \exp\left[\frac{2H+\xi}{\sigma^2}\right]\right\} = 0.$
Étape 4. Des arguments analogues montrent que l'on a :

$$\lim_{\sigma\to 0} \mathbb{P}\left\{T_\kappa(\sigma) \leq \tau(\sigma) \leq e^{\frac{2H-\xi}{\sigma^2}}\right\} = 0\,.$$

Toutefois, on a $\lim_{\sigma\to 0} \mathbb{P}\{\tau(\sigma) \leq T_\kappa(\sigma)\} = 0$. Ceci achève la preuve. □

2.4 Problème de sortie si V est non-convexe

Après avoir étudié le problème de sortie de la diffusion de McKean-Vlasov avec un potentiel de confinement V convexe, on regarde le cas où le potentiel V est non-convexe.

On a mené cette étude dans les deux articles [68, 72] et des résultats partiels ont été obtenus.

2.4.1 Première méthode

La méthode développée dans ce paragraphe est mise en place pour F de degré deux :

$$X_t = X_0 + \sigma B_t - \int_0^t \nabla V\left(X_s\right) ds - \alpha \int_0^t \left(X_s - \mathbb{E}\left[X_s\right]\right) ds \tag{2.12}$$

Dans le papier [68], l'idée repose entièrement sur un couplage entre la Diffusion (2.12) et une autre diffusion de McKean-Vlasov,

$$Y_t = X_0 + \sigma B_t - \int_0^t \nabla V_0\left(Y_s^\sigma\right) ds - \alpha \int_0^t \left(Y_s^\sigma - \mathbb{E}\left[Y_s^\sigma\right]\right) ds$$

où le potentiel de confinement V_0 est uniformément strictement convexe et est égal au potentiel V sauf sur un domaine compact $\mathcal{K}$. Par la suite, les domaines $\mathcal{D}$ dont on cherche à étudier la sortie sont inclus dans le complémentaire de $\mathcal{K}$: $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}^c$. Si les deux diffusions étaient homogènes en temps, on pourrait écrire

$$\nabla V\left(X_s\right) \mathbb{1}_{s \leq \tau_{X,\mathcal{D}}} = \nabla V_0\left(Y_s\right) \mathbb{1}_{s \leq \tau_{X,\mathcal{D}}}$$

si bien que l'on aurait $\tau_{X,\mathcal{D}} = \tau_{Y,\mathcal{D}}$. Ici, $\tau_{X,\mathcal{D}}$ (respectivement $\tau_{Y,\mathcal{D}}$) désigne le premier temps de sortie de la diffusion X (respectivement Y) du domaine $\mathcal{D}$. Toutefois, ces deux diffusions sont inhomogènes.

Intuitivement, les diffusions X et Y sont proches si X n'a pas atteint le compact $\mathcal{K}$. Toutefois, on ne peut pas écrire $X_t \mathbb{1}_{t \leq \tau_{X,\mathcal{K}^c}} = Y_t \mathbb{1}_{t \leq \tau_{X,\mathcal{K}^c}}$. En effet, l'espérance de X_t intervient dans la dérive et l'on a $\mathbb{P}\left(t \leq \tau_{X,\mathcal{K}^c}\right) < 1$ pour tout $t > 0$.

Conséquemment, le temps d'atteinte du domaine $\mathcal{K}$ de la diffusion X joue un grand rôle dans la méthode développée ici.

Définition 2.4.1. *À partir de maintenant, $\mathcal{T}_0 := \tau_{X,\mathcal{K}^c}$ désigne le premier temps d'atteinte du compact $\mathcal{K}$ par la diffusion de McKean-Vlasov X.*

Par des calculs élémentaires, on parvient à prouver le lemme suivant, lequel établit un couplage entre X et Y :

Lemme 2.4.2 (T13)**.** *On se donne les hypothèses suivantes :*
- *V est de classe $\mathcal{C}^2$.*
- *Pour tout $\lambda > 0$, il existe R_λ tel que $\nabla^2 V(x) > \lambda$ pour tout $||x|| \geq R_\lambda$.*
- *Il existe un potentiel V_0 uniformément strictement convexe et un compact $\mathcal{K}$ tel que $V(x) = V_0(x)$ pour tout $x \notin \mathcal{K}$.*
- *∇V est à croissance lente.*
- *$F(x) = \frac{\alpha}{2} x^2$ avec $\alpha + \inf_{\mathbb{R}^d} \nabla^2 V_0 > 0$.*

Pour tout t strictement positif, on a :

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t \leq \mathcal{T}_0} ||X_t - Y_t||^2 \mathbb{1}_{\mathcal{T}_0 \leq e^{\frac{2\Lambda}{\sigma^2}}}\right\} \leq \left(\frac{M\alpha}{\theta(\alpha+\theta)}\right)^2 \mathbb{P}\left(\mathcal{T}_0 \leq e^{\frac{2\Lambda}{\sigma^2}}\right),$$

pour tout $\Lambda > 0$. Ici, θ est tel que $\nabla^2 V_0 \geq \theta > 0$.

Puis, sous certaines hypothèses techniques que l'on ne détaille pas, on prouve l'existence de $\Lambda_0 > 0$ tel que

$$\lim_{\sigma \to 0} \mathbb{P}\left(\mathcal{T}_0 \leq e^{\frac{2\Lambda_0}{\sigma^2}}\right) = 0\,.$$

On en déduit immédiatement

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t \leq \mathcal{T}_0} ||X_t^\sigma - Y_t^\sigma||^2 \mathbb{1}_{\mathcal{T}_0 \leq e^{\frac{2\Lambda_0}{\sigma^2}}}\right\} \longrightarrow 0$$

et

$$\sup_{t \leq e^{\frac{2\Lambda_0}{\sigma^2}}} \mathbb{E}\left[||X_t^\sigma - Y_t^\sigma||^2\right] \longrightarrow 0\,.$$

Théorème 2.4.3 (T13)**.** *On se place sous les hypothèses du Lemme 2.4.2. Soit $\mathcal{D}$ un ouvert satisfaisant les conditions suivantes :*

- *Le domaine $\mathcal{D}$ est inclus dans $\mathcal{K}^c$.*
- *Pour tout $t \geq 0$, on a $\varphi_t(X_0) \in \mathcal{D}$ avec $\varphi_t(X_0) = X_0 - \int_0^t \nabla V\left(\varphi_s(X_0)\right) ds$.*
- *Pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $\psi_t(x) \in \mathcal{D}$ avec $\psi_t(x) = x - \int_0^t \left[\nabla V\left(\psi_s(x)\right) + \nabla F\left(\psi_s(x) - a_0\right)\right] ds$.*

On suppose aussi que son coût de sortie,

$$H := \inf_{z \in \partial\mathcal{D}} \left[V(z) - V(a_0)\right] = \inf_{z \in \partial\mathcal{D}} \left[V_0(z) - V_0(a_0)\right]$$

satisfait $H < \Lambda_0$.

Alors, on a une loi de type Kramers. En d'autres termes, pour tout $\delta > 0$, on a la limite suivante quand σ tend vers 0 :

$$\mathbb{P}\left\{\exp\left[\frac{2(H-\delta)}{\sigma^2}\right] \leq \tau_{X,\mathcal{D}} \leq \exp\left[\frac{2(H+\delta)}{\sigma^2}\right]\right\} \longrightarrow 1$$

Le défaut de cette méthode est donc qu'elle suppose que le coût de sortie est assez petit. Or, le paramètre Λ_0 au-dessus duquel le théorème ne s'applique pas dépend beaucoup de la géométrie du potentiel V.

2.4.2 Seconde méthode

Nous nous sommes intéressés au temps de sortie de la diffusion de McKean-Vlasov dans un cas non-convexe avec une autre idée, écrite dans [72].

La méthode développée dans ce paragraphe est mise en place pour F de degré deux :

$$X_t = X_0 + \sigma B_t - \int_0^t \nabla V\left(X_s\right) ds - \alpha \int_0^t \left(X_s - \mathbb{E}\left[X_s\right]\right) ds$$

L'idée est ici de faire un couplage entre la diffusion X et la diffusion homogène

$$Z_t = X_0 + \sigma B_t - \int_0^t \nabla V(Z_s) ds - \alpha \int_0^t (Z_s - a_0) ds\,,$$

a_0 étant l'unique puits du potentiel V dans le domaine considéré $\mathcal{D}$.

En effet, comme σ est petit, la Diffusion (2.12) a tendance à se concentrer autour de a_0 si bien que la dérive est proche de $\nabla F * \delta_{a_0}(.) = \alpha(. - a_0)$.

Toutefois, on a besoin de contrôler le premier temps où la loi de X s'éloigne de δ_{a_0}.

On ne va pas donner les hypothèses exactes portant sur V mais on va donner celles sur le domaine $\mathcal{D}$:

1. On considère le système dynamique φ défini par $\varphi_t = X_0 - \int_0^t \nabla V(\varphi_s)ds$. L'orbite $\{\varphi_t\,;\, t \geq 0\}$ est incluse dans le domaine $\mathcal{D}$. De plus, $\varphi_\infty = a_0$.
2. On considère le système dynamique

$$\psi_t(x) = x - \int_0^t \nabla V(\psi_s(x))ds - \int_0^t \nabla F\left(\psi_s(x) - a_0\right) ds\,.$$

   Pour tout $x \in \mathcal{D}$, pour tout $t \geq 0$, $\psi_t(x) \in \mathcal{D}$. De plus, $\nabla^2 V + \alpha$ est uniformément positif sur $\mathcal{D}$.
3. Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $\langle x - a_0\,;\, \nabla V(x)\rangle \geq \rho\,||x - a_0||^2$.

On pose $H := \inf_{z\in\partial\mathcal{D}} \left(V(z) + \frac{\alpha}{2}(z - a_0)^2 - V(a_0)\right)$ le coût de sortie du domaine $\mathcal{D}$.

Sous les hypothèses précédentes, on a les deux résultats suivants pour tout $\delta > 0$:

$$\lim_{\sigma\to 0} \mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{D}}(\sigma) \leq \exp\left[\frac{2}{\sigma^2}\,(H - \delta)\right]\right\} = 0$$

et

$$\lim_{\sigma\to 0} \mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{D}}(\sigma) \leq \exp\left[\frac{2}{\sigma^2}\,(H + \delta)\right]\right\} > 0\,.$$

On voit ici que la méthode ne permet pas de fournir une loi de type Kramers. En effet, la probabilité précédente ne tend pas nécessairement vers 1.

En supposant de plus que V est uniformément strictement convexe sur $\mathcal{D}$, alors on peut combiner les résultats de [68] à ceux que l'on a exposés dans ce paragraphe et l'on obtient

$$\lim_{\sigma\to 0} \mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{D}}(\sigma) \leq \exp\left[\frac{2}{\sigma^2}\,(H + \delta)\right]\right\} = 1\,.$$

si bien que l'on en déduit

$$\lim_{\sigma\to 0} \mathbb{P}\left\{\exp\left[\frac{2}{\sigma^2}\,(H + \delta)\right] \leq \tau_{\mathcal{D}}(\sigma) \leq \exp\left[\frac{2}{\sigma^2}\,(H + \delta)\right]\right\} = 1\,.$$

2.5 Ouvertures, perspectives

Cette étude du problème de sortie est passionnante car la théorie de Freidlin et Wentzell ne peut pas être appliquée directement soit car il faut travailler en grande dimension soit parce que la diffusion étudiée est non-linéaire. De plus, elle fournit des idées d'applications concrètes.

Notons que l'article T16 sert actuellement de fondement pour un travail en cours de M. Fathi et U. Sharma.

2.5.1 Diffusions inhomogènes plus générales

Les méthodes présentées dans cette synthèse et qui concernent la diffusion de McKean-Vlasov ont pour vocation à s'appliquer dans des situations plus générales. En ce moment, je travaille avec Samuel Herrmann sur des diffusions inhomogènes plus générales de la forme

$$X_t = X_0 + \sigma B_t + \int_0^t b\left(\frac{s}{T_\sigma}; X_s\right) ds\,,$$

où la fonction $t \mapsto b(t,x)$ est périodique et où $T_\sigma \longrightarrow +\infty$ quand σ tend vers 0.

La perspective naturelle est d'étudier les cas pour lesquels les méthodes développées précédemment se sont révélées infructeuses puis de regarder la résonance stochastique.

2.5.2 Algorithme stochastique

Mes travaux sur le temps de sortie des diffusions non-linéaires ont une application directe dans des algorithmes stochastiques.

Typiquement, on se donne une fonction V dont on cherche le minimum global ainsi que les points où ce minimum est atteint. Une méthode naïve consisterait à regarder le système dynamique $(x(t))_{t\geq 0}$ avec $\frac{d}{dt}x(t) = -\nabla V(x(t))$. On sait que ce système déterministe converge vers un point critique de V. Toutefois, rien ne nous assure que ce point correspond à un minimum du potentiel ni même qu'il s'agit de l'argument du minimum global. En revanche, l'ajout d'un bruit additif de faible amplitude,

$$dx_\sigma(t) = \sigma dB_t - \nabla V(x(t))dt\,,$$

permet au système dynamique de s'échapper du domaine d'attraction pour visiter le reste de l'espace et ainsi de trouver en un temps fini le minimum global de V. La vitesse pour que le système atteigne le minimum global dépend du coefficient de diffusion σ. Si celui-ci est trop grand, le mouvement brownien tend le système éloigné des puits de potentiel (ce qui devient problématique en dimension deux ou plus). S'il est trop petit, le temps pour s'échapper du domaine d'attraction d'un minimum local est trop élevé.

Pierre Del Moral et moi-même avons regardé ce qu'il se passe si l'on considère un système de particules en interaction de type champ moyen. On considère

une répulsion en guise d'interaction : $F(x) := -\frac{\alpha}{2}||x||^2$. L'idée est que le temps pour quitter un minimum local sera plus court. Toutefois, cette méthode ne fonctionne pas car rien ne nous garantit que le système dynamique aura tendance à s'approcher des autres puits de V.

On travaille actuellement sur cette question avec Aline Kurtzmann et Pierre Del Moral, voir T20. L'idée générale est de considérer un système qui soit purement répulsif sur un domaine judicieux contenant le minimum local.

Avec Pierre Del Moral, nous comptons aussi travailler sur le problème de Wang-Landau, voir [31].

2.5.3 Autres diffusions non-linéaires

La question du problème de sortie est encore ouverte pour un certain nombre de diffusions présentant une non-linéarité ou un caractère non-Markovien, voir par exemple [23].

En particulier, il reste à regarder le cas des diffusions auto-interagissantes, déjà étudiées par Aline Kurtzmann, voir [43, 44, 45]. Il s'agit d'ailleurs d'un travail en préparation avec Aline Kurtzmann et Pierre Del Moral, T26. Également, je souhaite étudier ces diffusions avec une interaction qui soit à courte portée.

De même, on peut s'intéresser au modèle de Dreyer et Huth, voir [26, 27]. Leur équation modélise la charge et la décharge de la cathode dans une batterie de lithium-ion.

De façon générale, le problème de sortie de divers modèles non-linéaires ont pour vocation à être l'objet d'une thèse de doctorat.

Chapitre 3

Systèmes de particules

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons l'étude d'un système de particules en interaction de type champ moyen. Présentons brièvement ce modèle. On considère une suite $(X_0^i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi μ_0 sur $\mathbb{R}^d$. Aussi, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\{B_t^i \ : \ t \in \mathbb{R}_+\}$ est un mouvement Brownien sur $\mathbb{R}^d$ qui est indépendant de la suite $(X_0^i)_i$. Les mouvements Browniens sont de plus supposés indépendants.

Chacune des particules évolue dans un potentiel non-convexe V, le potentiel dit de confinement. De plus, les particules interagissent entre elles. On suppose que l'interaction ne dépend que de la distance entre les particules. On ne suppose pas qu'il s'agit d'une attraction ni d'une répulsion.

In fine, le système d'équations auquel on s'intéresse est le suivant :

$$X_t^{i,N} = X_0^i + \sigma B_t^i - \int_0^t \nabla V\left(X_s^{i,N}\right) ds - \int_0^t \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \nabla F\left(X_s^{i,N} - X_s^{j,N}\right) ds\,, \quad (3.1)$$

N étant un entier qui a pour vocation à être grand par la suite et σ est un réel strictement positif.

On peut voir les N particules dans $\mathbb{R}^d$ comme une « grosse » particule dans $\mathbb{R}^{dN}$. En effet, écrivons $\mathcal{X}_t^N := \left(X_t^{1,N}, \cdots, X_t^{N,N}\right)$ et $\mathcal{B}_t^N := \left(B_t^1, \cdots, B_t^N\right)$. Le processus $\mathcal{B}^N$ est donc un processus de Wiener en dimension dN. L'Équation (3.1) peut alors être réécrite comme suit :

$$\mathcal{X}_t^N = \mathcal{X}_0^N + \sigma\mathcal{B}_t^N - N\int_0^t \nabla\Upsilon_0^N\left(\mathcal{X}_s^N\right) ds\,. \quad (3.2)$$

Ici, le potentiel sur $\mathbb{R}^{dN}$ est défini par

$$\Upsilon_0^N\left(X_1, \cdots, X_N\right) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N V\left(X_i\right) + \frac{1}{2N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N F\left(X_i - X_j\right)$$

pour tout $(X_1, \cdots, X_N) \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N$.

Conséquemment, le système complet de particules, $\{\mathcal{X}_t^N \ : \ t \in \mathbb{R}_+\}$, est simplement une diffusion homogène et réversible sur $\mathbb{R}^{dN}$ puisqu'elle évolue selon le gradient du potentiel $N\Upsilon_0^N$.

On peut se demander pourquoi on a défini Υ_0^N sans intégrer le paramètre N. En fait, le potentiel Υ_0^N a un sens lorsque N tend vers l'infini. En effet, pour toute suite de variables aléatoires $(X_k)_k$ indépendantes et identiquement distribuées de loi μ, quand N tend vers l'infini, la quantité $\Upsilon_0^N(X_1, \cdots, X_N)$ converge presque sûrement vers

$$\Upsilon_0^\infty(\mu) := \int_{\mathbb{R}^d} V(x)\mu(dx) + \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} F(x-y)\mu(dx)\mu(dy)\,.$$

La quantité ci-dessus correspond à l'énergie de la mesure μ. Elle apparaît naturellement quand on étudie la limite hydrodynamique du système de particules en interaction.

3.1.1 Propagation du chaos et couplage

Regardons intuitivement le système de particules. On peut remarquer que l'influence de la particule numéro j sur la particule numéro i est divisée par N. De plus, les deux particules sont indépendantes à l'instant initial $t = 0$. Conséquemment, il est intuitif d'espérer que les trajectoires des deux particules deviennent indépendantes quand N grandit.

Comme les particules ont des trajectoires « indépendantes » et échangeables, la mesure empirique du système de particules au temps t, c'est-à-dire $\eta_t^N := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{X_t^{j,N}}$, convergerait vers la loi de la première particule, $\mathcal{L}\left(X_t^{1,N}\right)$.

Or, l'équation qui dirige la première particule dans l'Équation (3.1) peut être réécrite comme suit :

$$X_t^{1,N} = X_0^1 + \sigma B_t^1 - \int_0^t \nabla V\left(X_s^{1,N}\right) ds - \int_0^t \nabla F * \eta_t^N\left(X_s^{1,N}\right) ds\,. \tag{3.3}$$

Et, comme η_t^N converge vers $\mathcal{L}\left(X_t^{1,N}\right)$, pour comprendre le comportement de la diffusion $X^{1,N}$ quand N est grand, il est intuitif de regarder la diffusion limite (1.2) c'est-à-dire

$$\begin{cases} X_t^{1,\infty} = X_0^1 + \sigma B_t^1 - \int_0^t \nabla V\left(X_s^{1,\infty}\right) ds - \int_0^t \nabla F * \mu_t^\infty\left(X_s^{1,\infty}\right) ds \\ \mu_t^\infty = \mathcal{L}\left(X_t^{1,\infty}\right) \end{cases}. \tag{3.4}$$

L'indépendance entre les particules est un phénomène appelé « propagation du chaos ». Il a été étudié dans [56, 49]. Cette propagation du chaos est aussi équivalente à un résultat de couplage :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\left\{\sup_{t\in[0;T]} \left|\left|X_t^{1,N} - X_t^{1,\infty}\right|\right|^2\right\} = 0\,,$$

pour tout $T > 0$. Ici, on n'a pas le supremum sur tout l'ensemble $\mathbb{R}_+$.

Dans [8], les auteurs ont étudié la propagation du chaos, c'est-à-dire l'indépendance des particules. Ils obtiennent un meilleur résultat que celui donné plus haut. En effet, la propagation du chaos classique nous dit qu'un nombre fini de particules deviennent indépendantes les unes des autres quand N devient grand. Dans [8], les auteurs vont plus loin en montrant l'indépendance de $\kappa(N)$ particules où $\kappa(N)$ est négligeable devant N.

3.1.2 Propagation du chaos uniforme

Le couplage que l'on a obtenu plus haut n'est pas uniforme en temps. Toutefois, si l'on suppose de plus que le potentiel V est uniformément strictement convexe, c'est-à-dire que l'on a $\nabla^2 V \geq \theta > 0$, alors on dispose d'une propagation du chaos uniforme en temps :

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left\{ \left|\left| X_t^{1,N} - X_t^{1,\infty} \right|\right|^2 \right\} = 0\,.$$

Plus précisément, on a même

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left\{ \left|\left| X_t^{1,N} - X_t^{1,\infty} \right|\right|^2 \right\} \leq \frac{K}{N}\,.$$

Dans [18], sans supposer la stricte uniforme convexité mais seulement la convexité stricte sur les potentiels V et F, les auteurs ont obtenu un résultat de couplage sur tout l'ensemble $\mathbb{R}_+$:

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left\{ \left|\left| X_t^{1,N} - X_t^{1,\infty} \right|\right|^2 \right\} = 0\,.$$

Plus précisément, Cattiaux, Guillin et Malrieu aboutissent à

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left\{ \left|\left| X_t^{1,N} - X_t^{1,\infty} \right|\right|^2 \right\} \leq \frac{K}{N^\rho}\,,$$

où $\rho < 1$.

Dans la suite de ce chapitre, nous fournirons un résultat avec Pierre Del Moral qui améliore la convergence de $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left\{ \left|\left| X_t^{1,N} - X_t^{1,\infty} \right|\right|^2 \right\}$ vers 0.

3.1.3 Inégalités fonctionnelles

Comme la Diffusion (3.2) est une diffusion de Kolmogorov, il est naturel de s'intéresser à la convergence en temps long, et à la vitesse de convergence. Pour ce faire, on regarde des inégalités fonctionnelles.

D'abord, il y a une unique probabilité invariante $\mu^{\sigma,N}$ sur $\mathbb{R}^{dN}$ pour la Diffusion (3.2) :

$$\mu^{\sigma,N}(d\mathcal{X}) := Z_{\sigma,N}^{-1} \exp\left\{-\frac{2N}{\sigma^2}\Upsilon_0^N(\mathcal{X})\right\} d\mathcal{X}\,.$$

On peut observer qu'il y a un N en facteur si bien que la convergence en temps long peut dépendre de N.

D'après [4], la mesure de probabilité $\mu^{\sigma,N}$ satisfait une inégalité de Poincaré :

$$\mathrm{Var}_{\mu^{\sigma,N}}(f) \leq \frac{1}{C_\sigma(N)} \int_{\mathbb{R}^{dN}} ||\nabla f||^2 \, d\mu^{\sigma,N}$$

pour toute fonction smooth f de $\mathbb{R}^{dN}$ dans $\mathbb{R}$. Cette inégalité est équivalente à l'inégalité de convergence

$$\left|\left|\mathcal{P}_t^N f - \mathbb{E}_{\mu^{\sigma,N}}(f)\right|\right|_2^2 \leq \exp\left\{-\frac{2}{C_\sigma(N)}t\right\} \mathrm{Var}_{\mu^{\sigma,N}}(f)\,,$$

où l'on a posé $\mathcal{P}_t^N f(x) := \mathbb{E}_x\left\{f\left(\mathcal{X}_t^N\right)\right\}$.

Insistons sur le fait que la constante $C_\sigma(N)$ qui intervient dans l'inégalité n'a aucune raison d'être indépendante du nombre de particules, c'est-à-dire de la dimension de l'espace dans lequel évolue $\mathcal{X}^N$.

Rappelons un résultat classique sur les inégalités fonctionnelles.

Lemme 3.1.1. *Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que chacune des deux mesures satisfait une inégalité de Poincaré avec constante C. Alors la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $\mu_1 \otimes \mu_2$, satisfait une inégalité de Poincaré avec constante C.*

En utilisant ce résultat de tensorisation, on peut prouver que la mesure

$$\exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\sum_{k=1}^N V(x_k)\right\} dx_1 \cdots dx_N$$

satisfait une inégalité de Poincaré avec une constante qui ne dépend pas de la dimension N.

Remarquons que l'on peut écrire

$$N\Upsilon_0^N(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{k=1}^N \left(V(x_k) + F * \eta^{\mathcal{X}}(x_k)\right)\,,$$

où $\eta^{\mathcal{X}} := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \delta_{x_k}$. Toutefois, on ne peut pas utiliser le résultat de tensorisation. Intuitivement, la propagation du chaos signifie que les particules deviennent indépendantes si bien que l'on peut s'attendre à une inégalité de Poincaré avec une constante qui ne dépend pas de la dimension.

Avec Bartlomiej Dyda, nous sommes parvenus à prouver qu'un autre type d'inégalité fonctionnelle avait lieu, une inégalité de type WJ. Présentons brièvement ce qu'on appelle une inégalité de type WJ.

Pour toutes les mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$, μ et ν, la distance de Wasserstein entre μ et ν est

$$\mathbb{W}_2(\mu\,;\,\nu) := \sqrt{\inf\ \mathbb{E}\left\{||X-Y||^2\right\}},$$

où l'infimum est pris sur toutes les variables aléatoires X et Y de loi μ et ν respectivement.

La distance de Wasserstein peut être caractérisée par le théorème de Brenier, voir [15] :

Proposition 3.1.2. *Soient μ et ν deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. Si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une fonction convexe τ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour toute fonction test g :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} g\left(\nabla\tau(x)\right)\mu(dx)\,.$$

On écrit alors $\nu = \nabla\tau\#\mu$ et l'égalité suivante est vérifiée :

$$\mathbb{W}_2(\mu\,;\,\nu) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} ||x-\nabla\tau(x)||^2\,\mu(dx)}\,.$$

Nous présentons maintenant l'expression notée $J_{V,F}(\nu\,|\,\mu)$ si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\begin{aligned} &J_{V,F}(\nu\,|\,\mu) := J_{V,0}(\nu\,|\,\mu)\\ &+\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^{2d}} \langle \nabla F\left(\xi(x,y)\right) - \nabla F(x-y)\,;\,\xi(x,y)-(x-y)\rangle\,\mu(dx)\mu(dy)\,, \end{aligned}$$

avec $\xi(x,y) := \nabla\tau(x) - \nabla\tau(y)$ et

$$\begin{aligned} J_{V,0}(\nu\,|\,\mu) &:= \frac{\sigma^2}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\Delta\tau(x) + \Delta\tau^*\left(\nabla\tau(x)\right) - 2d\Big)\mu(dx)\\ &+\int_{\mathbb{R}^d}\langle\nabla V\left(\nabla\tau(x)\right) - \nabla V(x)\,;\,\nabla\tau(x)-x\rangle\,\mu(dx)\,, \end{aligned}$$

où τ^* est la transformée de Legendre de τ. Ici, on a $\nu = \nabla\tau\#\mu$. On présente maintenant l'inégalité de transport, déjà utilisée dans [1, 13, 14, 55]. On dit qu'une inégalité de type WJ est satisfaite pour μ si l'on a

$$C\mathbb{W}_2^2(\nu\,;\,\mu) \le J_{V,F}(\nu\,|\,\mu)$$

pour toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}^d$.

Notre résultat est le suivant.

Théorème 3.1.3 (T17). *On se donne les hypothèses suivantes :*
- *V est une fonction smooth.*
- *Pour tout $\lambda > 0$, il existe R_λ tel que $\nabla^2 V(x) > \lambda$ pour tout $||x|| \geq R_\lambda$.*
- *Il existe une fonction convexe positive V_0 telle que $\nabla^2 V(0) = 0$ et $V(x) = V_0(x) - \frac{\theta}{2}||x||^2$ avec $\theta > 0$.*
- *∇V est à croissance lente.*
- *Pour tout $||x|| \leq 1$, on a $|V(x)| \leq c||x||^2$.*
- *$F(x) = G(||x||) - \frac{\alpha}{2}||x||^2$, où G est une fonction polynômiale paire et $G(0) = 0$.*

Il existe σ_c tel que la mesure de probabilité $\mu^{\sigma,N}$ satisfait une inégalité de type WJ avec une constante indépendante de N, pour tout $\sigma \geq \sigma_c$.

3.2 Géométrie du potentiel et diffusion

3.2.1 Géométrie du potentiel

On a mené l'étude de la géométrie du potentiel Υ_0^N dans l'article [67]. Ici, $\inf \nabla^2 F \geq 0$.

Chaque point de la forme $(a_0, \cdots, a_0)$ où a_0 est un point critique de V est un point critique de Υ_0^N. Ils sont les seuls sous l'hypothèse de synchronisation.

Proposition 3.2.1 (T10). *On se donne les hypothèses suivantes :*
- *V est une fonction smooth. De plus, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tels que $\lim_{||x||\to+\infty} V(x)||x||^{-2m} = C$.*
- *Il existe un compact $\mathcal{K}$ tel que $\nabla^2 V(x) > 0$ pour tout $x \notin \mathcal{K}$. De plus, $\lim_{||x||\to+\infty} \nabla^2 V(x) = +\infty$.*
- *Le gradient ∇V est à croissance lente.*
- *Il existe une fonction réelle polynômiale paire et convexe telle que $F(x) = G(||x||)$. De plus, $\deg(G) \geq 2$.*

On suppose que la synchronisation a lieu, c'est-à-dire que l'on a

$$\inf \nabla^2 F + \inf \nabla^2 V > 0\,.$$

Alors, $(X_1, \cdots, X_N) \in \mathbb{R}^{dN}$ est un point critique de Υ_0^N si et seulement s'il existe un point critique a du potentiel V tel que $(X_1, \cdots, X_N) = (a, \cdots, a)$. De plus, si la signature de la matrice Hessienne $\nabla^2 V(a)$ est (p, q) alors la signature de la matrice Hessienne $\nabla^2 \Upsilon_0^N(a, \cdots, a)$ est $((N-1)d + p, q)$.

Sous des hypothèses simples, le Théorème 4.5 dans [39] et la Proposition 3.7 dans [40] établissent que la Diffusion (1.2) admet une probabilité invariante arbitrairement proche de la mesure de Dirac d'un argument d'un maximum local a du potentiel de confinement V. Toutefois, le vecteur $(a, \cdots, a) \in \mathbb{R}^{dN}$ n'est *jamais* un puits de Υ_0^N si $\inf \nabla^2 F + \inf \nabla^2 V > 0$. *Ceci montre l'importance de l'entropie*

et de σ car il n'y a pas de correspondance entre les puits de Υ_0^N et les probabilités invariantes de la Diffusion (1.2).

On montre maintenant sous des hypothèses simples que le nombre de puits du potentiel Υ_0^N tend vers l'infini quand N tend vers l'infini.

Théorème 3.2.2 (T10)**.** *On se place sous les hypothèses de la Proposition 3.2.1. On suppose l'existence d'un point critique a de V et de $b \neq a$ tels que $\nabla^2 V(a) > 0$, $\nabla V(b) + \nabla F(b-a) = 0$ et $\nabla^2 V(b) + \nabla^2 F(b-a) > 0$. Alors le nombre de puits du potentiel Υ_0^N converge vers l'infini quand N tend vers l'infini.*

Démonstration. D'abord, on note que les potentiels Υ_0^N et $N\Upsilon_0^N$ ont les mêmes puits. Ainsi, on étudie $N\Upsilon_0^N$. Par la suite, on dit que $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{dN}$ est un vecteur de la forme (a_1, a_2, p) s'il existe $\tau \in \mathcal{S}_N$ tel que $Z_{\tau(i)} = a_1$ pour tout $1 \leq i \leq \mathcal{E}(pN)$ et $Z_{\tau(i)} = a_2$ pour tout $\mathcal{E}(pN) + 1 \leq i \leq N$.

Étape 1. Un vecteur de la forme (a_1, a_2, p) est un point critique de $N\Upsilon_0^N$ si et seulement si le triplet (a_1, a_2, p) est une solution des deux équations

$$\Psi_1(a_1, a_2) := \nabla V(a_1) - \nabla V(a_2) - \nabla F(a_2 - a_1) = 0\,, \tag{3.5}$$

et

$$p\nabla V(a_1) + (1-p)\nabla V(a_2) = 0\,. \tag{3.6}$$

Par définition de a et b, on a $\Psi_1(a,b) = 0$ et $\nabla V(a) = 0$. Conséquemment, le triplet $(a, b, 1)$ vérifie les Équations (3.5)–(3.6). Comme $\nabla^2 V(a) > 0$, on en déduit $\nabla^2 V(a) + \nabla^2 F(b-a) > 0$. Ceci implique que la matrice $\frac{\partial}{\partial a_1}\Psi_1(a,b)$ est définie positive. On applique le théorème des fonctions implicites et l'on obtient l'existence de deux ouverts connexes $I \ni a$ et $J \ni b$ et d'une bijection ξ de I dans J tel que $\Psi_1(a_1, \xi(a_1)) = 0$ pour tout $a_1 \in I$. De plus, $\xi(a) = b$.

Étape 2. Maintenant, on regarde l'Équation (3.6). Introduisons

$$\Psi_2(p, a_1) := p\nabla V(a_1) + (1-p)\nabla V(\xi(a_1))\,,$$

pour tout $a_1 \in I$ et $p \in [0;1]$. On sait déjà que $\Psi_2(1, a) = 0$. De plus, à partir de l'Équation (3.5) avec a et b, on a $\nabla V(a) - \nabla V(b) = \nabla F(b-a)$. Toutefois, $b \neq a$ donc la dérivée $\frac{\partial}{\partial p}\Psi_2(p,a) = \nabla V(a) - \nabla V(b)$ est non nulle. En appliquant de nouveau le théorème des fonctions implicites, on en déduit l'existence de $\rho > 0$, d'un ouvert $L \subset I$ qui contient a et d'une bijection φ_1 de $]1-\rho; 1]$ dans L telle que $\Psi_2(p, \varphi_1(p)) = 0$ pour tout $p \in]1-\rho; 1]$. On définit $\varphi_2 := \xi \circ \varphi_1$. Cette fonction est une bijection de $]1-\rho; 1]$ dans un ouvert $K \subset J$. Ainsi, pour tout $p \in]1-\rho; 1]$, tout vecteur de la forme $(\varphi_1(p), \varphi_2(p), p)$ est un point critique de $N\Upsilon_0^N$.

Étape 3. Maintenant, on étudie $N\nabla^2 \Upsilon_0^N(\varphi_1(p), \varphi_2(p), p)$. En faisant des calculs d'algèbre linéaire classiques, on peut montrer que les valeurs propres sont celles de quatre matrices $\lambda_1(N,\rho)$, $\lambda_2(N,\rho)$, $\lambda_3(N,\rho)$ et $\lambda_4(N,\rho)$ satisfaisant

$$\begin{aligned}
&\lim_{\rho\to 0}\lim_{N\to\infty} \lambda_1(N,\rho) = \nabla^2 V(a) + \nabla^2 F(0) =: \lambda_1\,,\\
&\lim_{\rho\to 0}\lim_{N\to\infty} \lambda_2(N,\rho) = \lim_{\rho\to 0}\lim_{N\to\infty} \lambda_3(N,\rho) = \nabla^2 V(b) + \nabla^2 F(b-a) =: \lambda_2\\
\text{and}\quad &\lim_{\rho\to 0}\lim_{N\to\infty} \lambda_4(N,\rho) = \nabla^2 V(a) =: \lambda_3\,.
\end{aligned}$$

Comme $\nabla^2 V(b)+\nabla^2 F(b-a)$ et $\nabla^2 V(a)$ sont définies positives, λ_1, λ_2 et λ_3 sont définies positives. On procède comme dans les précédentes étapes en appliquant le théorème des fonctions implicites. Ainsi, il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $1-\rho_0 < \rho \leq 1$ et pour N assez grand, chaque vecteur de la forme $(\varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho), \rho)$ est un puits de $N\Upsilon_0^N$ et donc un puits de Υ_0^N.

Étape 4. Maintenant, on remarque que le nombre de vecteurs de la forme

$$(\varphi_1(k/N), \varphi_2(k/N), k/N)$$

est égal à $\frac{N!}{k!(N-k)!}$. Conséquemment, le nombre de puits construits au cours de l'Étape 3 est

$$\sum_{k=\mathcal{E}((1-\rho_0)N)}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!},$$

qui converge vers l'infini quand N tend vers l'infini. □

Ce théorème nous donne un résultat qui avait précédemment été établi dans [10] pour un système de particules en interaction de type plus proche voisin.

Le Théorème 3.2.2 montre aussi que le nombre de points stables à petit bruit est arbitrairement grand quand N est grand.

Remarque 3.2.3. *Dans la preuve du Théorème 3.2.2, on retrouve la famille d'équations (3.11) dans [40]. Comme on se restreint aux vecteurs de la forme (a_1, a_2, p) avec a_1 proche de $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\nabla^2 V(a) > 0$, avec a_2 proche de b tel que $\nabla V(b) + \nabla F(b-a) = 0$ et avec $\nabla^2 V(b) + \nabla^2 F(b-a) > 0$ et p proche de 1, les puits que l'on a construits satisfont les deux inégalités*

$$\nabla^2 V(a_1) + p\nabla^2 F(0) + (1-p)\nabla^2 F(a_2 - a_1) > 0$$

et

$$\nabla^2 V(a_2) + p\nabla^2 F(a_2 - a_1) + (1-p)\nabla^2 F(0) > 0,$$

c'est-à-dire la famille d'inéquations (3.13) dans [40]. Toutefois, il n'y a pas de correspondance entre les puits de Υ_0^N et les probabilités invariantes de la diffusion non-linéaire car la famille d'équations (3.12) dans [40], c'est-à-dire,

$$\frac{\nabla F(a_2 - a_1)}{F(a_2 - a_1)} = \frac{\nabla V(a_2) + \nabla V(a_1)}{V(a_2) - V(a_1)}$$

n'est pas a priori *satisfaite. Toutefois, une mesure discrète est la limite à petit bruit d'une suite de probabilités invariantes si et seulement si elle satisfait (3.11)–(3.13) dans [40].*

En revanche, bien que le nombre de puits de Υ_0^N converge vers l'infini, on justifie par la suite qu'il n'y a pas de correspondance entre les états stables du système à champ moyen et ces puits, quand N tend vers l'infini.

3.2.2 Captivité

Toujours dans [67], on a montré que certains domaines de $\left(\mathbb{R}^d\right)^N$ étaient stables et que d'autres étaient instables.

L'idée principale est d'utiliser la propagation du chaos sous sa forme de couplage ainsi que la convergence en temps long de la loi de la diffusion de McKean-Vlasov.

Théorème 3.2.4 (T10)**.** *On se place sous les hypothèses de la Proposition 3.2.1. On se donne de plus les hypothèses suivantes :*

- *Le moment d'ordre $8q^2$ de la mesure initial μ_0 est finie avec $q := \max\{m; n\}$.*
- *La mesure initiale μ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On note u_0 sa densité. De plus, l'entropie $\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\log(u_0(x))dx$ est finie.*

Pour tout $r > 0$, il existe $T_r \geq 0$ tel que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left\{\left(X_t^{1,N},\cdots,X_t^{N,N}\right) \in \bigcup_{\mu\in\mathcal{A}_\sigma} \mathbb{S}_r^N(\mu) \;;\; \forall\, T_r \leq t \leq T_r + T\right\} = 1\,, \quad (3.7)$$

l'ensemble $\mathbb{S}_r^N(\mu)$ étant défini par

$$\mathbb{S}_r^N(\mu) := \left\{\mathcal{Z}\in\mathbb{R}^{dN} : \mathrm{Var}(\mu) - r \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N ||Z_i - \mathbb{E}\{\mu\}||^2 \leq \mathrm{Var}(\mu) + r\right\},$$

et $\mathcal{A}_\sigma$ étant l'ensemble des valeurs d'adhérences de la famille $\{\mu_t\,;\, t\geq 0\}$. Ici, la Limite (3.7) *est vraie pour tout $T \geq 0$.*

Ce résultat signifie que pour tout $T \geq 0$, $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\{\tau_N^r \leq T\} = 0$, τ_N^r étant le premier temps de sortie du domaine

$$\bigcup_{\mu\in\mathcal{A}_\sigma} \mathbb{B}^N_{\sqrt{\mathrm{Var}(\mu)+r}}\left(\mathbb{E}\left[\mu\right],\cdots,\mathbb{E}\left[\mu\right]\right) \bigcap \left(\mathbb{B}^N_{\sqrt{\mathrm{Var}(\mu)-r}}\left(\mathbb{E}\left[\mu\right],\cdots,\mathbb{E}\left[\mu\right]\right)\right)^c.$$

Exemple 3.2.5. *On suppose ici $d := 1$, $V(x) := \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ et $F(x) := \frac{\alpha}{2}x^2$ avec $\alpha > 1$. Soit μ_0 une mesure de probabilité dont le moment d'ordre 32 est fini. Alors, pour tout $r > 0$, en prenant σ assez petit, il existe $T_r > 0$ et $m \in \{-1\,;\,0\,;1\}$ tels que*

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left\{\left(X_t^{1,N},\cdots,X_t^{N,N}\right) \in \mathbb{B}_r^N\left(m,\cdots,m\right) \;;\; \forall\, T_r \leq t \leq T_r + T\right\} = 1\,,$$

pour tout $T \geq 0$.

On donne maintenant une condition suffisante pour interdire de traverser l'hyperplan $\left\{\mathcal{Z}\in\mathbb{R}^{dN} : \frac{Z_1+\cdots+Z_N}{N} = m\right\}$, $m \in \mathbb{R}^d$.

Théorème 3.2.6 (T10)**.** *On suppose les hypothèses du Théorème 3.2.4. On suppose qu'il existe $m_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que*

$$\Upsilon_\sigma(\mu_0) < \inf\left\{\Upsilon_\sigma(\mu) : \int_{\mathbb{R}^d} x\mu(dx) = m_0\right\}.$$

Alors, pour tout $T \geq 0$, la limite suivante est satisfaite :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_t^{i,N} \neq m_0 \ ; \ 0 \leq t \leq T\right\} = 1\,.$$

3.2.3 Non captivité dans des domaines

À la méthode précédente, on peut reprocher que l'on est passé par la limite hydrodynamique au lieu d'étudier le temps de sortie directement.

C'est l'objet d'un travail mené dans [69].

On commence par introduire un potentiel lié au potentiel de confinement V.

Définition 3.2.7. *Soit $a \in \mathbb{R}$ un point critique de V. On introduit le potentiel W^a défini par*

$$W^a(x) := V(x) + F(x-a)\,.$$

Ce potentiel W^a est d'un intérêt crucial dans l'étude des probabilités invariantes de la diffusion de McKean-Vlasov, c'est-à-dire de la limite hydrodynamique du système de particules en interaction de type champ moyen. En effet, d'après le Théorème 2.3 dans [66] et la Proposition 1.2 dans [65], on sait que δ_a est la limite à petit bruit d'une suite de probabilités invariantes si et seulement si on a l'inégalité

$$W^a(b) > W^a(a)\,,$$

pour tout $b \neq a$.

Pour tout point critique a de V, on note $\mathcal{D}_N(\overline{a})$ le domaine d'attraction de $\overline{a} := (a, \cdots, a)$ pour le système dynamique

$$\varphi_t(\mathcal{X}) = \mathcal{X} - N\int_0^t \nabla\Upsilon_0^N\left(\varphi_s(\mathcal{X})\right) ds\,.$$

On fournit maintenant un résultat selon lequel un puits de Υ_0^N ne correspond pas à la limite à petit bruit d'une suite de probabilités invariantes de la diffusion de McKean-Vlasov.

Théorème 3.2.8 (T14)**.** *On se donne les hypothèses :*

- *V est de classe $\mathcal{C}^2$.*
- *Pour tout $\lambda > 0$, il existe $R_\lambda > 0$ tel que $\nabla^2 V(x) > \lambda$ pour tout $||x|| > R_\lambda$.*
- *Le gradient ∇V est à croissance lente : il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tels que $||\nabla V(x)|| \leq C\left(1 + ||x||^{2m-1}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
- *Il existe une fonction G de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F(x) = G(||x||)$.*

– *G est une fonction polynômiale paire de degré supérieur ou égal à 2.*

Soit a dans $\mathbb{R}^d$ tel que $\nabla V(a) = 0$. On suppose qu'il existe $b \neq a$ tel que $W^a(b) < W^a(a)$. Soit x_0 tel que $(x_0, \cdots, x_0) =: \overline{x_0} \in \mathcal{D}_n(\overline{a})$.

Soit $\mathcal{G}$ un domaine ouvert inclus dans $\mathcal{D}_N(\overline{a})$. On suppose que ce domaine est stable par $-\nabla N\Upsilon_0^N$. On suppose aussi $\overline{\mathcal{G}} \subset \mathcal{D}_N(\overline{a})$.

Alors, il existe $H > 0$ tel que, pour N assez grand :

$$\mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{G}}(\sigma, N) \leq e^{\frac{2H}{\sigma^2}}\right\} \longrightarrow 1\,,$$

quand σ tend vers 0.

La preuve est simple aussi on la donne.

Démonstration. Si N est assez grand, un calcul simple nous donne

$$N\Upsilon_0^N\,(b; a; \cdots; a) - N\Upsilon_0^N\,(a; \cdots; a) = W^a(b) - W^a(a) + o(1) < 0\,.$$

Conséquemment, le système déterministe $(\varphi_t\,(b; a; \cdots; a))_{t\geq 0}$ ne converge pas vers $(a, \cdots, a)$ quand t tend vers l'infini. Il s'ensuit que $(b, a, \cdots, a)$ n'est pas dans $\mathcal{D}_N(\overline{a})$.

On considère maintenant la fonction de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}^N$, $\xi_{a\to b}$, définie par

$$\xi_{a\to b}(t) := (a + t(b - a); a \cdots; a)\ .$$

On observe : $\xi_{a\to b}(0) = \overline{a} \in \mathcal{G}$. Et, $\xi_{a\to b}(1) = (b; a; \cdots; a) \notin \mathcal{D}_N(\overline{a})$ si bien que $\xi_{a\to b}(1) \notin \mathcal{G}$. Conséquemment, le chemin $\xi_{a\to b}$ a au moins une intersection avec $\partial\mathcal{G}$ sur un point de la forme

$$(x_N; a; \cdots; a)\ .$$

Et, pour N assez grand, on a

$$N\Upsilon_0^N\,(x_N; a; \cdots; a) - N\Upsilon_0^N\,(a; \cdots; a) = W^a(x_N) - W^a(a) + o(1)\,.$$

Toutefois, $x_N \in [a; b]$. On pose :

$$H := \sup_{x\in[a;b]} W^a(x) + 1 - W^a(a)\,.$$

En appliquant des résultats classiques de type Freidlin-Wentzell, on obtient pour tout $N \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{G}}(\sigma, N) \leq e^{\frac{2H_N}{\sigma^2}}\right\} \longrightarrow 1$$

quand σ tend vers 0. Ici, $H_N := \inf_{\mathcal{Z}\in\partial\mathcal{G}} N\Upsilon_0^N\,(\mathcal{Z}) - N\Upsilon_0^N\,(\overline{a})$. Ainsi, pour N assez grand, on a

$$\begin{aligned} H_N &\leq N\Upsilon_0^N\,(x_N; a; \cdots; a) - N\Upsilon_0^N\,(a; \cdots; a) \\ &\leq W^a(x_N) - W^a(a) + o(1) \\ &< H\,, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Cela signifie que la diffusion n'est pas captive du domaine d'attraction de $\overline{a}$ pour N grand. En effet, le temps pour s'échapper est indépendant du nombre de particules.

Remarque 3.2.9. *On considère maintenant un puits de Υ_0^N de la forme*

$$\mathcal{X}_0 := (a_1; \cdots; a_1; \cdots; a_k; \cdots; a_k)$$

où il y a Nr_i éléments a_i pour tout $1 \leq i \leq k$. On pose :

$$W^{\mathcal{X}_0}(x) := V(x) + r_1 F(x - a_1) + \cdots + r_k F(x - a_k)\,.$$

On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}^d$ et $i \in [\![1; k]\!]$ tel que

$$W^{\mathcal{X}_0}(b) < W^{\mathcal{X}_0}(a_i)\,.$$

Alors, on a un résultat similaire au précédent. Soit $\mathcal{G}$ un ouvert inclus dans $\mathcal{D}_N(\mathcal{X}_0)$. On suppose qu'il est stable par $-\nabla N \Upsilon_0^N$ et que $\overline{\mathcal{G}} \subset \mathcal{D}_N(\mathcal{X}_0)$.

Alors, il existe $H > 0$ tel que pour N assez grand :

$$\mathbb{P}\left\{\tau_{\mathcal{G}}(\sigma, N) \leq e^{\frac{2H}{\sigma^2}}\right\} \longrightarrow 1$$

quand σ tend vers 0.

En particulier, s'il existe $i \neq j$ tel que $W^{\mathcal{X}_0}(a_i) \neq W^{\mathcal{X}_0}(a_j)$, la mesure de probabilité qui est associée au point $\mathcal{X}_0$ c'est-à-dire $r_1\delta_{a_1} + \cdots + r_k\delta_{a_k}$ ne correspond pas à la limite à petit bruit d'une suite de probabilités invariantes de la diffusion de McKean-Vlasov. Conséquemment, on trouve à nouveau les équations (3.12) dans [40].

3.3 Création du chaos

Dans cette section, le modèle considéré est subtilement différent. En effet, on suppose $X_0^1 = \cdots = X_0^N =: X_0$. Par ailleurs, X_0 n'est pas nécessairement une constante. Conséquemment, à $t = 0$, les particules ne sont pas indépendantes. Les résultats de cette section (voir [24]) s'étendent au cas où les variables aléatoires initiales ne sont pas nécessairement égales.

Le résultat principal est la décorrélation des particules lorsque N est grand avec le temps t. Pour ce faire, on a besoin de supposer que σ est assez grand pour qu'il y ait une unique probabilité invariante μ^σ pour la diffusion de McKean-Vlasov associée à V et F.

Théorème 3.3.1 (T12)**.** *On se donne les hypothèses suivantes :*

- *V est de classe $\mathcal{C}^2$.*
- *Pour tout $\lambda > 0$, il existe $R_\lambda > 0$ tel que $\nabla^2 V(x) \geq \lambda$ pour tout $||x|| \geq R_\lambda$.*

- *Le gradient* ∇V *est à croissance lente : il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $C > 0$ *tels que* $||\nabla V(x)|| \leq C\,(1 + ||x||^{2m-1})$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
- *Il existe une fonction polynômiale paire* G *telle que* $F(x) = G(||x||)$.
- $\lim_{r\to+\infty} G''(r) = +\infty$.
- *Il existe une fonction strictement convexe* Θ *telle que* $\Theta(y) > \Theta(0) = 0$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}^d$ *(*$y \neq 0$*) et il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\lim_{r\to+\infty} \dfrac{V(y)}{r^{2p}} = \Theta(y)$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}^d$.
- *On a l'inégalité :* $p > \deg(G)$.

Soient f_1 *et* f_2 *deux fonctions continues et lipschitziennes. Pour tout* $\epsilon > 0$, *pour tout* $T > 0$, *il existe* $t_0(\epsilon)$ *et* $N_0(\epsilon)$ *tels que*

$$\sup_{N\geq N_0(\epsilon)} \sup_{t\in[t_0(\epsilon);t_0(\epsilon)+T]} \left|\mathrm{Cov}\left[f_1\left(X_t^{1,N}\right)\,;\, f_2\left(X_t^{2,N}\right)\right]\right| \leq \epsilon\,.$$

On peut remarquer qu'une petite covariance implique un phénomène de propagation du chaos. Conséquemment, il y a une création du chaos après un temps $t_0(\epsilon)$. Et, il y a propagation du chaos sur un intervalle de temps de durée T.

L'idée de la preuve est assez simple :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on considère la diffusion de McKean-Vlasov $\overline{X}^{1,x}$ partant de $x \in \mathbb{R}^d$ et dirigée par le mouvement Brownien B^1. Puis, on introduit la diffusion Y^1 par $Y_t^1(\omega) := \overline{X}_t^{1,X_0(\omega)}(\omega)$.
2. En utilisant des résultats de convergence en temps long, on montre que $\mathbb{E}\left\{f_1\left(Y_t^1\right) f_2\left(Y_t^2\right)\right\}$ converge vers $\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x)\mu^\sigma(dx) \int_{\mathbb{R}^d} f_2(x)\mu^\sigma(dx)$.
3. On en déduit que la covariance entre Y_t^1 et Y_t^2 tend vers 0 quand t tend vers l'infini.
4. Puis, un résultat de couplage entre Y^1 et $X^{1,N}$ ainsi qu'entre Y^2 et $X^{2,N}$ achève la preuve.

Théorème 3.3.2 (T12)**.** *On suppose les hypothèses du Théorème 3.3.1. On suppose maintenant que* V *et* F *sont convexes. Alors, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $t_0(\epsilon)$ *et* $N_0(\epsilon)$ *tels que*

$$\sup_{N\geq N_0(\epsilon)} \sup_{t\geq t_0(\epsilon)} \left|\mathrm{Cov}\left[f_1\left(X_t^{1,N}\right)\,;\, f_2\left(X_t^{2,N}\right)\right]\right| \leq \epsilon\,.$$

Ici, la convexité des potentiels de confinement et d'interaction implique une propagation du chaos uniforme après la création du chaos.

On peut remarquer que dans les Théorèmes 3.3.1 et 3.3.2, on ne considère que deux particules mais l'on a le même résultat en considérant un nombre $k \geq 2$ de particules.

Théorème 3.3.3 (T12)**.** *On suppose les hypothèses du Théorème 3.3.1. Soient* $f_1, \cdots, f_k$ *des fonctions continues et lipschitziennes. Pour tout* $\epsilon > 0$, *pour tout*

$T > 0$, il existe $t_0(\epsilon)$ et $N_0(\epsilon)$ tels que

$$\sup_{N \geq N_0(\epsilon)} \sup_{t \in [t_0(\epsilon); t_0(\epsilon)+T]} \left| \mathbb{E}\left\{ \prod_{i=1}^{k} f_i\left(X_t^{i,N}\right) \right\} - \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left\{ f_i\left(X_t^{i,N}\right) \right\} \right| \leq \epsilon \,.$$

Si de plus V et F sont convexes, on a

$$\sup_{N \geq N_0(\epsilon)} \sup_{t \geq t_0(\epsilon)} \left| \mathbb{E}\left\{ \prod_{i=1}^{k} f_i\left(X_t^{i,N}\right) \right\} - \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left\{ f_i\left(X_t^{i,N}\right) \right\} \right| \leq \epsilon \,.$$

On a aussi des résultats concernant la mesure empirique du système. En cas de « chaos », elle est proche d'une mesure de la forme $\nu^{\otimes N}$.

Théorème 3.3.4 (T12)**.** *On suppose les hypothèses du Théorème 3.3.1. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues et lipschitziennes. Pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $T > 0$, il existe $t_1(\epsilon)$ et $N_1(\epsilon)$ tels que*

$$\sup_{N \geq N_1(\epsilon)} \sup_{t \in [t_1(\epsilon); t_1(\epsilon)+T]} \left| \mathrm{Cov}\left[\eta_t^N(f_1) \,;\, \eta_t^N(f_2) \right] \right| \leq \epsilon$$

avec $\eta_t^N(f) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i\left(X_t^{i,N}\right)$. Si de plus V et F sont tous les deux convexes, on a

$$\sup_{N \geq N_1(\epsilon)} \sup_{t \geq t_1(\epsilon)} \left| \mathrm{Cov}\left[\eta_t^N(f_1) \,;\, \eta_t^N(f_2) \right] \right| \leq \epsilon$$

3.4 Propagation du chaos uniforme

Comme on l'a dit précédemment, si V est uniformément strictement convexe, il y a une propagation du chaos uniforme, dans le sens où le couplage est uniforme sur tout le temps.

Et, si V est seulement strictement convexe mais non uniformément strictement convexe, Cattiaux, Guillin et Malrieu obtiennent un résultat similaire. Ils se servent de cette propagation du chaos uniforme pour obtenir l'unicité de la probabilité invariante de la diffusion de McKean-Vlasov ainsi que sa convergence en temps long.

Or, on a vu dans le chapitre un que sous certaines hypothèses (typiquement, le bruit est assez petit), il y a plusieurs probabilités invariantes. On ne peut ainsi pas obtenir de résultat de propagation du chaos uniforme si le bruit est petit. Toutefois, si le bruit est assez grand, il y a une unique probabilité invariante. On se demande alors s'il y a propagation du chaos uniforme. Ceci est l'objet d'un article avec Pierre Del Moral, voir [24]. On répond positivement à la question.

3.4.1 Résultat

Théorème 3.4.1 (T12)**.** *On suppose les hypothèses du Théorème 3.3.1. Il existe $\sigma_c > 0$ tel que pour tout $\sigma \geq \sigma_c$, on a la propagation du chaos uniforme. En*

d'autres termes, on a la limite

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \mathbb{W}_2\left(\mu_t\,;\,\mu_t^{1,N}\right) = 0\,.$$

Ici, μ_t est la loi de la diffusion de McKean-Vlasov (1.2) *et $\mu_t^{1,N}$ est la loi de la première particule $X_t^{1,N}$.*

De plus, on peut calculer le taux de convergence en fonction d'une certaine quantité $\psi(t)$ dont on ne donne pas la définition ici. On se sert également de $C(\sigma)$, une constante qui intervient dans une inégalité de type WJ et qui dépend des potentiels V et F ainsi que de l'intensité du bruit σ.

Premier cas : *La quantité $\frac{C(\sigma)t}{\psi(t)}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \bigcup \{+\infty\}$ quand t tend vers l'infini. Alors, pour tout $0 < \delta < 1$, on a :*

$$\lim_{N\to+\infty} N^{\frac{1}{2(1+1/\lambda)}-\delta} \sup_{t\geq 0} \mathbb{W}_2\left(\mu_t\,;\,\mu_t^{1,N}\right) = 0\,.$$

Second cas : *La quantité $\frac{C(\sigma)t}{\psi(t)}$ converge vers 0 quand t tend vers l'infini. Alors, pour tout $\delta > 0$, on a :*

$$\lim_{N\to+\infty} \exp\left\{C(\sigma)\psi^{-1}\left[\frac{1}{2}(1-\delta)\log(N)\right]\right\} \sup_{t\geq 0} \mathbb{W}_2\left(\mu_t\,;\,\mu_t^{1,N}\right) = 0\,.$$

Remarque 3.4.2. *Le second cas n'est jamais satisfait quand on travaille avec un système de particules en interaction de type champ moyen et avec une diffusion de McKean-Vlasov.*

Toutefois, notre théorème s'étend à des diffusions en interaction plus générales.

L'idée principale du théorème est d'utiliser la convergence exponentielle vers 0 de la quantité $\mathbb{W}_2\left(\mu_t;\mu^\infty\right)$. Ainsi, les erreurs que l'on commet en faisant une propagation simple du chaos sont diminuées au cours du temps.

3.4.2 Autres implications

Dans [18, Théorème 3.2], les auteurs obtiennent une propagation du chaos uniforme de la forme

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left\{\left|\left|X_t - X_t^1\right|\right|^2\right\} \leq \frac{K}{N^{-\rho}}\,,$$

avec $0 < \rho < 1$. Toutefois, en utilisant une méthode similaire à celle de la preuve du Théorème 3.4.1, on obtient une meilleure inégalité avec la distance de Wasserstein

Corollaire 3.4.3 (T12)**.** *On suppose les hypothèses du Théorème 3.3.1. On suppose que V et F sont convexes sans pour autant être strictement uniformément convexes. Pour tout $\sigma > 0$, on a le résultat de couplage uniforme suivant :*

$$\lim_{N\to\infty} N^{1-\delta} \sup_{t\geq 0} \mathbb{W}_2^2\left(\mu_t\,;\,\mu_t^{1,N}\right) = 0$$

pour tout $0 < \delta < 1$.

Démonstration. En procédant comme dans [6, Lemma 5.4], il existe $K > 0$ tel que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}\left\{ \left|\left| X_t - X_t^1 \right|\right|^2 \right\} \le \frac{KT^2}{N} \tag{3.8}$$

pour tout $T > 0$. Ici, il y a deux différences avec la preuve dans [6]. D'abord, ici, il y a présence d'un potentiel de confinement non constant mais comme il est convexe, on procède de façon similaire. Et, dans [6], les variables aléatoires initiales sont supposées indépendantes. Toutefois, on a besoin de nous passer de cette hypothèse (comme dans la preuve du Théorème 3.4.1). On obtient alors

$$\sup_{0\le t\le T} \mathbb{W}_2\left(\mu_t\,;\mu_t^{1,N}\right) \le \frac{\exp\left[\psi(T)\right]}{\sqrt{N}}$$

avec $\psi(T) := \frac{1}{2}\log(K) + \log(T)$.

La convexité de V et celle de F impliquent que l'unique probabilité invariante μ^σ satisfait une inégalité de type WJ avec une constante $C(\sigma) > 0$. Conséquemment, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{C(\sigma)t}{\psi(t)} = +\infty\,.$$

Appliquer le Théorème 3.4.1 suffit pour achever la preuve. □

On peut remarquer que la vitesse de convergence vers l'unique probabilité invariante joue un rôle particulier. Conséquemment, on peut obtenir un meilleur résultat si l'on part de $\mu_0 = \mu^\sigma$, l'unique probabilité invariante.

Corollaire 3.4.4 (T12)**.** *On suppose les hypothèses du Théorème 3.3.1. Si $\sigma \ge \sigma_c$, on a le résultat de propagation du chaos uniforme suivant en partant de $\mu_0 = \mu^\sigma$:*

$$\sup_{t\ge0} \mathbb{W}_2\left(\mu_t\,;\,\mu_t^{1,N}\right) = \sup_{t\ge0} \mathbb{W}_2\left(\mu^\sigma\,;\,\mu_t^{1,N}\right) \le \frac{K}{N}\,,$$

K étant une constante positive.

Démonstration. Dans la preuve du Théorème 3.4.1, on a établi l'inégalité suivante :

$$\sup_{t\ge0} \mathbb{W}_2\left(\mu_t\,;\,\mu_t^{1,N}\right) \le \frac{\exp\left[\psi(T)\right]}{1-e^{-CT}}\frac{1}{N} + \gamma e^{-CT}\,,$$

avec $\gamma = 2\mathbb{W}_2\left(\mu_0\,;\,\mu^\sigma\right) = 0$. Par conséquent, on obtient immédiatement

$$\sup_{t\ge0} \mathbb{W}_2\left(\mu^\sigma\,;\,\mu_t^{1,N}\right) \le \frac{\exp\left[\psi(T)\right]}{1-e^{-CT}}\frac{1}{N}\,,$$

pour tout $T > 0$. □

3.5 Ouvertures, perspectives

Un des charmes de cette étude est qu'elle permet de jongler entre des équations linéaires (bien qu'en grande dimension) et des équations en dimension petite (bien que non-linéaires). De plus, elle recouvre un large spectre des probabilités.

Notons que l'article T12 est cité dans [52].

Certaines questions restent toutefois en suspens.

3.5.1 Inégalités fonctionnelles

On travaille à obtenir des inégalités fonctionnelles dont les constantes sont indépendantes de la dimension. Nous avons obtenu un tel résultat pour les inégalités de type WJ.

On souhaite fournir un résultat similaire avec les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique.

3.5.2 Propagation du chaos uniforme et création du chaos

Les résultats obtenus avec Pierre Del Moral s'étendent à d'autres modèles que celui des systèmes en interaction de type champ moyen.

Nous travaillons actuellement sur d'autres modèles et pour ce faire, nous exploitons aussi sur des articles qui reprennent notre travail, comme [52].

3.5.3 Temps de sortie

On cherche à établir des temps de sortie du système de particules. Une question naturelle est celui de la première particule d'un domaine $\mathcal{D}$. Il faudra ainsi utiliser le temps de sortie de la limite hydrodynamique puis un couplage.

Également, on a pour cela besoin de contrôler le temps que met le système de particules pour sortir d'une boule centrée en $\overline{a_0} := (a_0; \cdots; a_0)$ où a_0 est un argument d'un minimum local du potentiel de confinement V.

On souhaite aussi étudier le temps que met la diffusion pour quitter le domaine d'attraction de $\overline{a_0}$. À cet effet, la théorie du potentiel pourrait être utilisée, ce qui peut être l'objet d'une thèse de doctorat.

Bibliographie

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures.* Lectures in Math. ETH Zürich. Birkhäuser, Bassel, 2008

[2] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2000. With a preface by Dominique Bakry and Michel Ledoux.

[3] D. Bakry. L'hypercontractivités et son utilisation en théorie des semigroupes. *École d'été de Saint-Flour XXII.*, Lecture notes in Math., vol 1581. Springer, Berlin, pp. 1–112. 1992

[4] D. Bakry, F. Barthe, P. Cattiaux, and A. Guillin. A simple proof of the Poincaré inequality for a large class of probability measures including the log-concave case. *Electronic Communications in Probability.*, 13 :60–66, 2008.

[5] D. Bakry, and M. Emery. Diffusions hypercontractives. *Séminaire de Probabilités XIX*, Lecture notes in Math., vol 1123. Springer, Berlin, pp. 177–206. 1985

[6] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay, and P. Vallois. Nonlinear self-stabilizing processes. I. Existence, invariant probability, propagation of chaos. *Stochastic Process. Appl.*, 75(2) :173–201, 1998.

[7] S. Benachour, B. Roynette, and P. Vallois. Nonlinear self-stabilizing processes. II. Convergence to invariant probability. *Stochastic Process. Appl.*, 75(2) :203–224, 1998.

[8] G. Ben Arous and O. Zeitouni. Increasing propagation of chaos for mean fields models. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 35(1) :85–102, 1999.

[9] D. Benedetto, E. Caglioti, J. A. Carrillo, and M. Pulvirenti. A non-Maxwellian steady distribution for one-dimensional granular media. *J. Statist. Phys.*, 91(5-6) :979–990, 1998.

[10] N. Berglund, B. Fernandez and B. Gentz. *Metastability in interacting nonlinear stochastic differential equations. II. Large-N behaviour,* Nonlinearity, 20(11) :2583–2614, 2007.

[11] S. Bobkov, I. Gentil, and M. Ledoux. Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations. *J. Math. Pures Appl. (9) 80 (2001), no. 7, 669–696.*

[12] S. Bobkov, and F. Götze Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.*, 163 (1999), no. 1, 1–28.

[13] F. Bolley, I. Gentil and A. Guillin Convergence to equilibrium in Wasserstein distance for Fokker-Planck equations *Journal of Functional Analysis*, 263, 8, pp. 2430–2457 (2012)

[14] F. Bolley, I. Gentil and A. Guillin Uniform convergence to equilibrium for granular media Archive for Rational Mechanics and Analysis, 208, 2, pp. 429–445 (2013)

[15] Y. Brenier. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44 : 375–417,1991.

[16] W. Bryc. A remark on the connection between the large deviation principle and the central limit theorem. *Statist. Probab. Lett.*, 18(4) :253–256, 1993.

[17] J. A. Carrillo, R. J. McCann, and C. Villani. Kinetic equilibration rates for granular media and related equations : entropy dissipation and mass transportation estimates. *Rev. Mat. Iberoamericana* 19 (2003), no. 3, 971–1018.

[18] P. Cattiaux, A. Guillin, and F. Malrieu. Probabilistic approach for granular media equations in the non-uniformly convex case. *Probab. Theory Related Fields*, 140(1-2) :19–40, 2008.

[19] F. Collet, P. Dai Pra and E. Sartori A simple mean field model for social interactions : dynamics, fluctuations, criticality, *J. Stat. Phys.*, 139(5) :820–858, 2010.

[20] J.-F. Collet , and F. Malrieu. Logarithmic Sobolev Inequalities for Inhomogeneous Semigroups. *ESAIM Probability and Statistics (2008) Vol. 12, 492–504.*

[21] D. Crisan and J. Xiong Approximate McKean-Vlasov representations for a class of SPDEs, *Stochastics*, 82(1-3) :53–68, 2010.

[22] D. A. Dawson and J. Gärtner. Large deviations from the McKean-Vlasov limit for weakly interacting diffusions. *Stochastics*, 20(4) :247–308, 1987.

[23] F. Delarue, J. Inglis, S. Rubenthaler, and E.Tanré . Global solvability of a networked integrate-and-fire model of McKean-Vlasov type. *Ann. Appl. Probab.*, 25 (2015), no. 4, 2096–2133.

[24] P. Del Moral and J. Tugaut. Uniform propagation of chaos and creation of chaos for a class of nonlinear diffusions.

[25] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2010. Corrected reprint of the second (1998) edition.

[26] W. Dreyer, M. Gaberscek, C. Guhlke, R. Huth and J. Jamnik Phase transition and hysteresis in a rechargeable lithium battery revisited. *To appear in European J. Appl. Math.*, 22

[27] W. Dreyer, C. Guhlke and R. Huth The behavior of a many particle cathode in a lithium-ion battery *Phys. D*, 240 (2011) pp. 1008–1019.

[28] H. Duong, and J. Tugaut Stationary measures of the Vlasov-Fokker-Planck equation : existence, characterization and phase-transition. Accepted for publication in *Applied Mathematics Letters*.

[29] H. Duong, and J. Tugaut Vlasov-Fokker-Planck equation : convergence.

[30] B. Dyda, and J. Tugaut Exponential rate of convergence independent from the dimension in a mean-field system of particles https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01119526

[31] G. Fort, B. Jourdain, E. Kuhn, T. Lelièvre, and G. Stoltz. Convergence of the Wang-Landau algorithm. *Math. Comp.* 84 (2015), no. 295, 2297–2327.

[32] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell : *Random perturbations of dynamical systems*, volume 260 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998. Translated from the 1979 Russian original by Joseph Szücs.

[33] T. Funaki. A certain class of diffusion processes associated with nonlinear parabolic equations. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 67(3) :331–348, 1984.

[34] S. Gadat, F. Panloup, and C. Pellegrini Large deviation principle for invariant distributions of memory gradient diffusions. *Electron. J. Probab.* 18 (2013), no. 81, 34 pp.

[35] C. Graham. Nonlinear limit for a system of diffusing particles which alternate between two states. *Appl. Math. Optim.*, 22(1) :75–90, 1990.

[36] C. Graham. McKean-Vlasov Itô-Skorohod equations, and nonlinear diffusions with discrete jump sets. *Stochastic Process. Appl.*, 40(1) :69–82, 1992.

[37] S. Herrmann, P. Imkeller, and D. Peithmann. Transition times and stochastic resonance for multidimensional diffusions with time periodic drift : a large deviations approach. *Ann. Appl. Probab.*, 16(4) :1851–1892, 2006.

[38] S. Herrmann, P. Imkeller, and D. Peithmann. Large deviations and a Kramers' type law for self-stabilizing diffusions. *Ann. Appl. Probab.*, 18(4) :1379–1423, 2008.

[39] S. Herrmann and J. Tugaut. Non-uniqueness of stationary measures for self-stabilizing processes. *Stochastic Process. Appl.*, 120(7) :1215–1246, 2010.

[40] S. Herrmann and J. Tugaut : Stationary measures for self-stabilizing processes : asymptotic analysis in the small noise limit. *Electron. J. Probab.*, 15 :2087–2116, 2010.

[41] S. Herrmann and J. Tugaut : Self-stabilizing processes : uniqueness problem for stationary measures and convergence rate in the small noise limit. *ESAIM Probability and statistics*, 2012.

[42] S. Herrmann and J. Tugaut. Mean-field limit versus small-noise limit for some interacting particle systems. Available on
http ://arxiv.org/abs/1409.1159

[43] V. Kleptsyn, and A. Kurtzmann. Ergodicity of self-attracting motion. *Electron. J. Probab.* 17 (2012), no. 50, 37 pp.

[44] A. Kurtzmann. The ODE method for some self-interacting diffusions on $\mathbb{R}^d$. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 46 (2010), no. 3, 618–643.

[45] A. Kurtzmann. Some particular self-interacting diffusions : ergodic behaviour and almost sure convergence. *Bernoulli* 17 (2011), no. 4, 1248–1267.

[46] M. Ledoux. The geometry of Markov diffusion generators *Annales de la faculté des sciences de Toulouse 9.2 (2000) : 305–366*

[47] H. P. McKean, Jr. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 56 :1907–1911, 1966.

[48] H. P. McKean, Jr. Propagation of chaos for a class of nonlinear parabolic equations. In *Stochastic Differential Equations (Lecture Series in Differential Equations, Session 7, Catholic Univ., 1967)*, pages 41–57. Air Force Office Sci. Res., Arlington, Va., 1967.

[49] S. Méléard, *Asymptotic behaviour of some interacting particle systems ; McKean-Vlasov and Boltzmann models,* In *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations (Montecatini Terme, 1995)*, volume 1627 of *Lecture Notes in Math.*, pages 42–95. Springer, Berlin, 1996.

[50] K. Oelschläger. A law of large numbers for moderately interacting diffusion processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69(2) :279–322, 1985.

[51] F. Otto and C. Villani. Comment on : "Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations" by S. G. Bobkov, I. Gentil and M. Ledoux. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 80(7) :697–700, 2001.

[52] J. Salhi, and J. MacLaurin. On Uniform Propagation of Chaos. available at http ://arxiv.org/abs/1503.07807

[53] Smith, and Mijailovich. Toward a unified theory of muscle contraction. II : predictions with the mean-field approximation Ann Biomed Eng. 2008 Aug ;36(8) :1353-71. doi : 10.1007/s10439-008-9514-z.

[54] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*, volume 233 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[55] K.-T. Sturm, and M.-K. von Renesse. Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 68 :923–940, 2005.

[56] A.-S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX—1989*, volume 1464 of *Lecture Notes in Math.*, pages 165–251. Springer, Berlin, 1991.

[57] Y. Tamura. On asymptotic behaviors of the solution of a nonlinear diffusion equation. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 31(1) :195–221, 1984.

[58] Y. Tamura. Free energy and the convergence of distributions of diffusion processes of McKean type. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34(2) :443–484, 1987.

[59] J. Touboul, G. Hermann, and Olivier Faugeras. Noise-induced behaviors in neural mean field dynamics. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 11 (2012), no. 1, 49–81.

[60] J. Tugaut. *Processus autostabilisants dans un paysage multi-puits. available on http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00573044/fr/* PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy, 2010.

[61] J. Tugaut. McKean-Vlasov diffusions : from the asymchronization to the synchronization. *Comptes Rendus Mathématiques*, Volume 349, Issues 17–18, pp. 983–986, 2011.

[62] J. Tugaut. Exit problem of McKean-Vlasov diffusions in convex landscapes. *Electronic Journal of Probability*, Vol. 17 (2012), no. 76, 1–26.

[63] J. Tugaut. Convergence to the equilibria for self-stabilizing processes in double-well landscape. *Ann. Probab. 41 (2013), no. 3A, 1427–1460*

[64] J. Tugaut. Self-stabilizing processes in multi-wells landscape in $\mathbb{R}^d$ - Convergence. *Stochastic Processes and Their Applications*
http ://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2012.12.003, 2013.

[65] J. Tugaut. Phase transitions of McKean-Vlasov processes in double-wells landscape. *Stochastics 86 (2014), no. 2, 257–284*

[66] J. Tugaut. Self-stabilizing processes in multi-wells landscape in $\mathbb{R}^d$ - Invariant probabilities. *J. Theoret. Probab. 27 (2014), no. 1, 57–79*

[67] J. Tugaut. Captivity of mean-field systems. To appear in *Probability and Mathematical Statistics*

[68] J. Tugaut. Exit-time of an inhomogeneous diffusion.
Available on https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00987805

[69] J. Tugaut. Exit-problem of particles interacting via their empirical law. Available on https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00988384

[70] J. Tugaut. A simple proof of a Kramers'type law for self-stabilizing diffusions. Available on https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01123841

[71] J. Tugaut. Finiteness of entropy for granular media equations. Available on https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01147006

[72] J. Tugaut. Exit problem of McKean-Vlasov diffusion in double-wells landscape. https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01150092

[73] J. Tugaut A Kramers'type law for self-stabilizing diffusions without convexity assumption.

[74] J. Tugaut Exponential rate of convergence for self-stabilizing diffusions.