HAL
open science

# Autour de la connexité dans les graphes avec conflits

Benjamin Momège

## To cite this version:

Benjamin Momège. Autour de la connexité dans les graphes avec conflits. Autre [cs.OH]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2015. Français. NNT : 2015CLF22588 . tel-01248248

**HAL Id: tel-01248248**

**https://theses.hal.science/tel-01248248**

Submitted on 4 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'Ordre : D.U : 2588
EDSPIC : 704


Université Blaise Pascal - Clermont II
École Doctorale
Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand


# Thèse de doctorat

présentée par


**Benjamin Momège**


pour obtenir le grade de

Docteur d'Université
Discipline : Informatique

# Autour de la connexité dans les graphes avec conflits

Soutenue publiquement le 9 juillet 2015 devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| M. Pascal Berthomé | Professeur, INSA-CVL | rapporteur |
| M. David Coudert | CR HDR, INRIA | rapporteur |
| M. Mamadou M. Kanté | MCF, UBP | co-directeur |
| M. Christian Laforest | Professeur, UBP | directeur |

N° D'Ordre : D.U : 2588
EDSPIC : 704

# On the Connectivity of Graphs with Conflicts

by

**Benjamin Momège**

submitted to the Graduate School of Engineering Sciences

of the

**Blaise Pascal University - Clermont II**

in fulfilment of the requirements for the degree of

## Doctor of Philosophy

in the subject of

## Computer Science

publicly defended on July 9, 2015
before the jury :

| | | |
|---|---|---|
| M. Pascal Berthomé | Professor, INSA-CVL | Reviewer |
| M. David Coudert | CR HDR, INRIA | Reviewer |
| M. Mamadou M. Kanté | MCF, UBP | Advisor |
| M. Christian Laforest | Professor, UBP | Advisor |

# Remerciements

Je remercie tout d'abord mes directeurs de thèse, Christian Laforest et Mamadou M. Kanté, pour le sujet intéressant qu'ils m'ont donné, pour leur disponibilité, leurs conseils et leurs encouragements. Je les remercie également pour la liberté de réflexion qu'ils m'ont accordée et qui m'a permis de trouver de nombreux résultats. Je remercie mes rapporteurs Pascal Berthomé et David Coudert, pour s'être intéressés à mes travaux, pour avoir accepté de faire partie de mon jury, ainsi que pour leurs relectures attentives du manuscrit lesquelles m'ont permis de localiser certains points délicats afin d'ajouter des illustrations pour en améliorer la compréhension.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à tous ceux qui ont pris le temps de répondre à mes questions ou m'exposer des sujets que je ne connaissais pas. Je pense en particulier John Samuel, qui m'a expliqué son domaine de recherche, afin que nous puissions collaborer ensemble par la suite.

Une thèse pouvant difficilement être menée à bien dans de mauvaises conditions de travail, je m'estime privilégié d'avoir pu effectuer ma thèse au LIMOS, qui constitue un environnement très dynamique et stimulant au quotidien. Je tiens donc à avoir une pensée pour toutes les personnes (chercheurs, personnels administratifs, techniques,etc.) qui contribuent à la bonne ambiance.

Enfin, j'ai une pensée pour mes collègues de l'université de Nice Sophia Antipolis, en particulier les personnes avec lesquelles j'ai enseigné à Polytech Nice Sophia, et les membres de l'équipe COATI de l'I3S-INRIA, où il règne une ambiance agréable très propice à la réflexion.

# Résumé


## Résumé

Nous nous intéresserons aux graphes avec conflits (un conflit est une paire d'arêtes ne pouvant pas simultanément faire partie d'un même sous-graphe), dans lesquels nous étudierons différents types de problèmes liés à l'existence de sous-graphes sans conflit, de nature aussi bien algorithmique que combinatoire, notre ligne directrice étant la notion de connectivité. Nous verrons que plusieurs résultats, simples sans conflit, ne le sont plus lors de l'ajout de conflits. Nous présenterons : des algorithmes exacts (non polynomiaux), des résultats de $\mathscr{NP}$-complétude, et des conditions suffisantes assurant l'existence de certains objets (arbre couvrant, chemin et cycle hamiltonien) sans conflits.



### Mots-clefs

Graphe, Conflit, Transition Interdite, Connexité, Chemin, Parcours, Arbre, Condition Hamiltonienne, Algorithme Exact, $\mathscr{NP}$-Complétude


---

## On the Connectivity of Graphs with Conflicts


## Abstract

We will look at graphs with conflicts (conflict is a pair of edges can not simultaneously be part of the same subgraph), in which we will study different types of problems related to the existence of subgraphs without conflict. The nature of the problems is both combinatorial and algorithmic. Our guideline is the notion of connectivity. We will see several results, simple without conflict, are no longer when adding conflicts. We will present exact algorithms (not polynomial), $\mathscr{NP}$-completeness results and sufficient conditions ensuring the existence of certain objects (spanning tree, path and Hamiltonian cycle) without conflict.



### Keywords

Graph, Conflict, Forbidden Transition, Connectivity, Path, Walk, Tree, Hamiltonian Condition, Exact Algorithm, $\mathscr{NP}$-Completeness

# Table des matières

**Introduction** **9**

**1 Définitions et problèmes étudiés** **15**
1.1 Définitions . . . . . 15
1.2 Liste des acronymes . . . . . 17
1.3 Problèmes étudiés . . . . . 18

**2 Autour des parcours** **21**
2.1 Recherche de plus courts PSSTI . . . . . 21
2.2 Coupe minimum dans $L^*(G)$ . . . . . 26
2.3 Conclusion et perspectives . . . . . 29

**3 Algorithmes exacts** **31**
3.1 Graphes avec parcours interdits . . . . . 31
3.1.1 Algorithmes pour Ch.SPI et Ch.HSPI . . . . . 32
3.1.2 Algorithme pour CHSTI . . . . . 36
3.2 Transitions interdites et complexité paramétrée . . . . . 37
3.3 Conclusion et perspectives . . . . . 45

**4 Graphes planaires** **47**
4.1 $\mathscr{NP}$-complétude dans les planaires de degré au plus 8 . . . . . 47
4.2 $\mathscr{NP}$-complétude dans les planaires de degré au plus 4 . . . . . 53
4.3 $\mathscr{NP}$-complétude de Ch.STI dans les grilles . . . . . 57

**5 Arbres sans conflit** **59**
5.1 Introduction . . . . . 59
5.2 Résultats de complexité . . . . . 60
5.3 Inapproximabilité de l'arbre max sans transition interdite . . . . . 65
5.4 Résultats constructifs pour le graphe complet . . . . . 66
5.4.1 Une première condition suffisante pour avoir un ACSTI . . . . 66
5.4.2 Bornons le nombre de conflits contenant un sommet ou une arête . . . . . 68
5.5 Conclusion et perspectives . . . . . 71

**6 Conditions hamiltoniennes** **73**
6.1 Introduction . . . . . 73
6.2 Résultats "à la Dirac" . . . . . 73

6.3 Résultat “à la NASH-WILLIAMS” . . . . . 82
6.4 Résultats “à la ORE et BONDY-CHVÁTAL” . . . . . 93
6.5 Résultats “à la CHVÁTAL” . . . . . 103
6.6 Conclusion et perspectives . . . . . 106

**7 Conclusion Générale 109**

**A Le résultat de SZEIDER et quelques corollaires 111**

**B Simplification des instances d’ACSC 117**

**Bibliographie 123**

# Introduction

Les problèmes liés au transport ou à la circulation de biens, de marchandises ou d'informations sont cruciaux. Il faut organiser les réseaux de distribution de telle façon que l'écoulement ou le mouvement des éléments à transporter se passe le mieux possible, potentiellement sur les routes les plus courtes. Lorsque le réseau est donné, savoir s'il y a une route entre deux points et trouver une plus courte route est un problème connu qui peut facilement être résolu avec des algorithmes classiques de parcours de graphes, même si les tronçons sont pondérés. Cependant, en pratique, des contraintes peuvent venir s'ajouter. Le sujet de cette thèse a pour source la variante suivante : en certains points du réseau, il peut être interdit de poursuivre une route vers tel point voisin si, au pas d'avant, on est arrivé par tel ou tel point. Ceci se modélise par exemple en rendant certaines parties du réseau incompatibles. Pour cela, nous avons tout d'abord choisi de nous intéresser à des graphes dans lesquels il est interdit d'emprunter consécutivement certaines paires d'arêtes adjacentes : les graphes avec transitions interdites. Ces graphes sont particulièrement adaptés pour modéliser des problèmes issus de diverses situations pratiques. Par exemple, dans une ville, il peut être interdit de poursuivre son trajet par telle rue si l'on arrive par telle autre (comme lorsque l'on est confronté à une interdiction de tourner à gauche ou de faire demi-tour). Un certain nombre d'exemples d'algorithmes de planification de routes peuvent être trouvés dans [DSSW09]. Dans le domaine des réseaux informatiques, des réseaux connectent souvent plusieurs réseaux "privés" entre eux et on peut imaginer que les opérateurs/gestionnaires/administrateurs de certains d'eux ne veulent pas router des paquets provenant de tel réseau vers tel autre (pour des raisons de sécurité, financières, d'incompatibilité technologique, etc.). De même, dans les réseaux optiques, pour des raisons de coût, au niveau de certains nœuds des informations entrant par un port ne peuvent sortir par certains autres et on est alors amené à interdire des transitions. On pourra consulter les articles [BLGM09, CHW$^+$13, HZT$^+$12, JT14] pour des exemples d'utilisations de graphes avec transitions interdites dans ces réseaux. Terminons en citant l'article [BK06] sur le séquençage de l'ADN dans lequel les auteurs utilisent ces graphes pour interdire des transitions entre des éléments biologiques.

Deux des problèmes les plus importants en algorithmique consistent à trouver un chemin entre deux sommets d'un graphe ou un arbre couvrant dans un graphe. On connaît depuis longtemps des algorithmes efficaces permettant de construire un plus court chemin entre deux sommets (citons par exemple celui de Dijkstra en temps $O(n\log(n)+m)$ et espace linéaire et celui de Bellman-Ford en temps $O(nm)$ et espace linéaire où $n$ et $m$ sont les nombres de sommets et d'arêtes du graphe respectivement, voir par exemple l'ouvrage [CLRS09]), des arbres couvrants (algorithmes

de parcours en largeur, en profondeur, voir [CLRS09]). On sait également que sous certaines conditions (DIRAC, ORE, BONDY-CHVÁTAL, NASH-WILLIAMS, CHVÁTAL, voir par exemple [Die12]) un graphe contient toujours un chemin ou un cycle hamiltonien. Cependant, lorsque l'on ajoute des contraintes, comme par exemple les transitions interdites, nous nous sommes heurtés à des problèmes différents devenant pour certains beaucoup plus difficiles. Par exemple, un résultat de SZEIDER [Sze03], montre qu'un problème très simple sans les restrictions dues aux transitions interdites, consistant à vérifier l'existence d'un chemin entre deux sommets donnés d'un graphes, devient $\mathscr{NP}$-complet dans les graphes avec transitions interdites (voir l'annexe A pour une présentation plus détaillée de ce résultat ainsi que d'autres du même type). Dans ce qui va suivre, nous allons présenter les problèmes étudiés qui concernent principalement la connexité.

Dans le **chapitre 2** nous regardons un problème qui généralise le problème de la coupe minimum. Le problème de la coupe minimum consiste à trouver un nombre minimum d'arêtes à enlever pour déconnecter deux sommets. On montre que ce problème est polynomial avec une réduction au problème du flot maximum. Nous nous sommes intéressés à la variante qui consiste à trouver le nombre minimum de transitions à interdire pour déconnecter deux sommets non adjacents. Cette variante est intéressante car elle préserve certains chemins que l'on ne pourrait plus emprunter après la suppression des arêtes d'une coupe minimum, tout en déconnectant les sommets souhaités. Pour le traiter, nous avons été amenés à introduire une généralisation de la notion de line graphe (aussi appelé graphe adjoint), où chaque arête du graphe initial devient un sommet et chaque transition autorisée devient une arête. Cette notion semble initialement avoir été introduite dans un article de CALDWELL [Cal61]. Nous avons obtenu un algorithme polynomial permettant de localiser un ensemble de transitions non interdites de cardinal minimum et qu'il suffit d'interdire pour déconnecter deux sommets d'un graphe avec ou sans transition interdite. Pour cela, nous utilisons une bijection entre les ensembles de transitions non interdites qu'il suffit d'interdire pour déconnecter deux sommets et les coupes séparant ces sommets dans le line graphe généralisé. Ces résultats font l'objet d'une partie de notre article [KLM13a].

L'utilisation de cette notion nous a, au passage, permis d'obtenir une bijection entre les plus courts parcours (chemin pouvant emprunter plusieurs fois les mêmes sommets ou arêtes) dans un graphe avec transitions interdites et les plus courts chemins dans son line graphe généralisé, donnant alors un algorithme polynomial permettant de trouver un plus court parcours simple (chemin pouvant emprunter plusieurs fois les mêmes sommets) sans transition interdite entre deux sommets d'un graphe avec transitions interdites. Les prémices d'un tel algorithme se trouvaient déjà dans l'article de [Cal61]. Remarquons comme le montre l'exemple suivant (où la transition interdite est en pointillé) que l'existence d'un parcours simple sans transition interdite n'implique pas celle d'un chemin sans transition interdite. En effet, nous avons bien un parcours simple sans transitions interdites entre $s$ et $t$ (en prenant la boucle), mais nous n'avons pas de chemin sans transitions interdites entre $s$ et $t$.

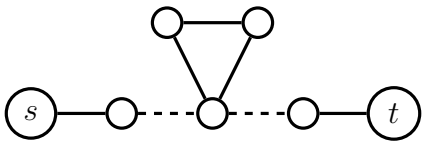



FIGURE 1 – Un parcours mais pas de chemin entre $s$ et $t$

Nous utilisons également la notion de line graphe généralisé (celui-ci est un line graphe dans lequel on ne conserve que les arêtes correspondant aux transitions autorisées) pour montrer que les problèmes de chemin et cycle eulérien sans transition interdite sont $\mathscr{NP}$-complets dans les graphes planaires avec transitions interdites. Dans le cas non planaire, ces résultats sont déjà prouvés dans [BKLBdW08]. La majorité des résultats de ce chapitre fait l'objet d'une partie de notre article [KLM13a].

Dans le **chapitre 3** nous étudions le problème de l'algorithme exact pour le problème du chemin sans transition interdite. Notons que concernant le problème du parcours sans transition interdite, deux articles [VD05] et [AL09] donnent des algorithmes polynomiaux permettant d'obtenir des parcours sans transition interdite. Cependant, personne n'a abordé la question de l'algorithme exact pour le problème du chemin sans transition interdite.

Remarquons tout d'abord qu'il est possible de trouver un algorithme en temps $O(2^n n^{O(1)})$ où $n$ est le nombre de sommets du graphe, en utilisant la programmation dynamique comme dans les algorithmes de BELLMAN [Bel60, Bel62] et HELD-KARP [HK62] pour le problème du voyageur de commerce. Cependant, les algorithmes obtenus de cette manière présentent le grave inconvénient d'avoir une complexité spatiale exponentielle, laquelle limite l'utilisation à des petites instances. Une autre piste pouvant sembler intéressante à première vue est l'adaptation d'un algorithme utilisant le principe d'inclusion-exclusion ayant le même temps d'exécution mais un espace polynomial qui permet de détecter si un graphe est hamiltonien (voir [KGK77, Kar82, Bax93]). Une application naïve de ces techniques à notre problème donne un algorithme en temps $O(3^n n^{O(1)})$. Aussi, nous avons cherché une façon plus fine d'utiliser le principe d'inclusion-exclusion afin de réduire le nombre d'opérations jusqu'à obtenir un algorithme en temps $O(2^n n^{O(1)})$ et espace polynomial. Cet algorithme a été publié dans [KLM13a]. En corollaire, nous obtenons deux algorithmes exacts de même complexité, pour vérifier l'existence d'un chemin hamiltonien et d'un cycle hamiltonien sans transition interdite.

Dans la seconde section nous avons cherché à voir si le problème du chemin sans transition interdite pouvait être résolu en temps polynomial à paramètre fixé (FPT - fixed-parameter tractable). L'une des techniques classiques permettant de construire des algorithmes FPT est l'utilisation de décompositions de graphes comme la décomposition arborescente avec la largeur arborescente comme paramètre. Cela permet de résoudre le problème initial sur chacun des sous-ensembles de la décomposition, puis de fusionner les résultats dans l'arbre à l'aide de méthodes de programmation dynamique. On pourra par exemple consulter les livres de FLUM-GROHE [FG06] et NIEDERMEIER [Nie06] pour des exemples. Concernant le problème du chemin sans transition interdite, nous montrons que le problème peut être résolu en temps poly-

nomial lorsque la largeur arborescente $\ell$ est bornée et, qu'il est FPT de paramètre $\ell + \Delta$ où $\Delta$ est le degré maximum. Ce résultat fait l'objet d'une partie de l'article [KMMN15].

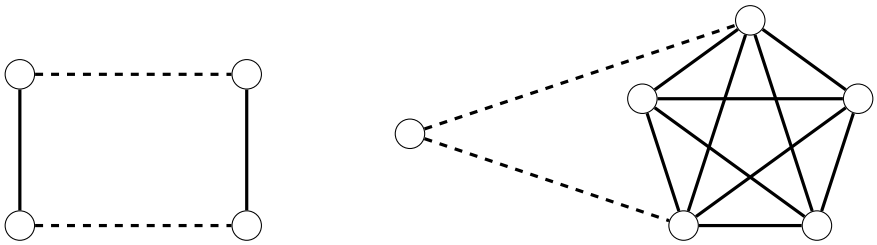
Dans le **chapitre 4**, nous nous intéresserons aux graphes planaires. Les problèmes comportant des transitions interdites ou des conflits ne semblent pas encore avoir été étudiés dans les graphes planaires, pourtant ces derniers paraissent adaptés aux situations qui ont motivé initialement nos travaux sur les transitions interdites. En effet, le plan d'une ville (sans pont) avec des interdictions de tourner n'est rien d'autre qu'un graphe planaire avec des transitions interdites. Il semble donc important d'étudier le problème du chemin sans transition interdite dans ces graphes. Nous montrons que le problème du chemin sans transition interdite est $\mathscr{NP}$-complet dans les grilles. Notre résultat améliore celui de SZEIDER, car il prouve la $\mathscr{NP}$-complétude dans une classe plus restreinte de graphes. Ces résultats font l'objet d'une partie de l'article [KMMN15].

Dans le **chapitre 5**, nous traiterons une généralisation naturelle de la notion de transitions interdites : les conflits. Ce sont des transitions dont les arêtes ne sont plus nécessairement adjacentes. Dans l'article [DPSW11], les auteurs étudient les graphes avec conflits et montrent que les problèmes d'existence d'arbre couvrant sans conflit et de couplage maximum sans conflit sont $\mathscr{NP}$-complets. Citons également des problèmes issus de la théorie des réseaux utilisant une notion proche de celle de conflits et modélisant des groupes de ressources/liens partageant un risque (*shared risk resource/link group*, SRRG/SRLG). Ces problèmes sont modélisés par des graphes dont les arêtes sont coloriées d'une ou plusieurs couleurs. Dans l'article [CDP+07] plusieurs problèmes d'optimisation consistant à trouver des "structures" (chemins, chemins disjoints, coupes) utilisant le minimum de couleurs sont traités. La notion de conflit, bien que proche de celle proposée, semble également être une bonne alternative pour modéliser de tels problèmes.

Nous avons étudié plus en détail les arbres dans les graphes avec conflits et également dans les graphes avec transitions interdites. On rappelle qu'un arbre est un graphe dans lequel il existe un unique chemin entre chaque paire de sommets. Cette structure est particulièrement intéressante car elle permet d'assurer l'existence d'un chemin entre tout couple de sommets tout en ayant un nombre minimum d'arêtes. Ce chapitre présente les résultats de l'article [KLM13b] ainsi que certains autres obtenus par la suite. En particulier, nous montrons que le problème de l'arbre couvrant sans transition interdite est $\mathscr{NP}$-complet et que le problème de l'arbre couvrant sans conflit est $\mathscr{NP}$-complet même dans les $(3, k)$-grilles. Nous montrons que le problème de l'arbre sans transition interdite de taille maximum ne peut pas être approximé avec un ratio meilleur que $n^{1/2-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ même si le graphe est une étoile où $n$ est le nombre de sommets. Nous étudions également le cas du graphe complet avec conflits ou transitions interdites et donnons des conditions suffisantes assurant l'existence d'un arbre couvrant sans conflit ou transition interdite.

Dans le **chapitre 6**, nous considérons l'existence de chemins et cycles hamiltoniens sans conflit, c'est-à-dire des chemins ou des cycles passant par tous les sommets

du graphe et sans conflit. On rappelle que ces problèmes sont $\mathscr{NP}$-complets dans les graphes et qu'il existe cependant un grand nombre de conditions suffisantes à l'existence d'un tel chemin ou cycle. Parmi les plus connues pour un graphe à $n \geq 3$ sommets on notera par exemple : la condition de DIRAC [Dir52] (si le degré de chaque sommet est d'au moins $\frac{n}{2}$), la condition de ORE [Ore60] qui généralise la précédente (si la somme de degrés de toute paire de sommets non adjacents vaut au moins $n$) ou encore la condition de BONDY-CHVÁTAL [BC76] qui généralise les deux précédentes (basée sur une notion de clôture). Nous avons cherché des conditions suffisantes analogues pour les graphes avec conflits. Pour simplifier un peu le problème, nous avons supposé que chaque sommet de nos graphes apparaissait dans au plus un conflit, et nommé ces objets les graphes 1-conflit. On peut observer qu'il n'est en général pas possible d'étendre telles quelles les conditions classiques aux graphes 1-conflit. Nous proposons de nouvelles conditions suffisantes inspirées par ces dernières pour qu'un graphe 1-conflit contienne un chemin ou cycle hamiltonien sans conflit. Par exemple, parmi les graphes 1-conflit suivant (où les conflits sont représenté par des pointillés), le premier vérifie la condition de DIRAC et le second celle de ORE mais aucun n'admet de cycle hamiltonien sans conflit.



Nous montrons également que la condition de Nash-Williams [NW69] (tout graphe $k$-régulier à $2k+1$ sommets contient un cycle hamiltonien) n'est plus valide dans les graphes 1-conflit, mais qu'elle assure en revanche l'existence d'un chemin sans conflit. Nous présentons également des conditions similaires à celle de CHVÁTAL [Chv72] (basée sur la suite des degrés des sommets du graphe) pour les graphes 1-conflit. Ces résultats font l'objet des articles [LM14] et [LM15].

# Liste des publications présentées dans ce mémoire

- [KLM13a] An Exact Algorithm to Check the Existence of (Elementary) Paths and a Generalisation of the Cut Problem in Graphs with Forbidden Transitions (avec MAMADOU MOUSTAPHA KANTÉ ET CHRISTIAN LAFOREST), SOFSEM, 2013, Lect. Notes Comput. Sci. vol. 7741, p. 257-267.
- [KLM13b] Trees in Graphs with Conflict Edges or Forbidden Transitions (avec MAMADOU MOUSTAPHA KANTÉ ET CHRISTIAN LAFOREST), TAMC, 2013, Lect. Notes Comput. Sci. vol. 7876, p. 343-354.
- [LM14] Some Hamiltonian Properties of One-Conflict Graphs (avec CHRISTIAN LAFOREST), IWOCA, 2014, Lect. Notes Comput. Sci. vol. 8986, p. 362-373.
- [LM15] Nash-Williams and Chvátal Conditions in One-Conflict Graphs (avec CHRISTIAN LAFOREST), SOFSEM, 2015, Lect. Notes Comput. Sci. vol. 8939, p. 327-338.

– [KMMN15] Finding Paths in Grids with Forbidden Transitions (avec MAMADOU MOUSTAPHA KANTÉ, FATIMA ZAHRA MOATAZ ET NICOLAS NISSE), WG, 2015, à paraître dans Lect. Notes Comput. Sci.

# Chapitre 1

# Définitions et problèmes étudiés

Dans ce chapitre, nous allons définir les principales notions utilisées dans cette thèse, donner les acronymes dont nous nous servirons par la suite et présenter les problèmes étudiés.

## 1.1 Définitions

Pour les principales notions en algorithmique et en théorie de la complexité on pourra par exemple consulter le livre [CLRS09].

Un *graphe orienté* $G = (V_G, E_G)$ est défini par la donnée d'un ensemble de sommets $V_G$ et d'un ensemble d'arcs $E_G \subseteq V_G \times V_G$. Les graphes orientés que nous considérons sont dits *simples*, *i.e.*, il n'existe aucun arc d'un sommet vers lui-même. Un *graphe* (non orienté) $G = (V_G, E_G)$ est un graphe orienté symétrique, *i.e.*, $(x, y) \in E_G \Leftrightarrow (y, x) \in E_G$. Les paires d'arcs symétriques dans ces derniers sont notés $\{x, y\}$ ou $xy$ - ou de manière équivalente $\{y, x\}$ ou $yx$ - et sont appelés arêtes. On verra alors $E_G$ comme l'ensemble des arêtes. Un graphe $H = (V_H, E_H)$ est un *sous-graphe* de $G$ si $V_H \subseteq V_G$ et $E_H \subseteq E_G$. Pour $V' \subseteq V_G$ le sous-graphe induit par $V'$ est par définition $G[V'] = (V', E_G \cap (V' \times V'))$. Dans un graphe non orienté, deux sommets extrémités d'une même arête sont dit *adjacents* ou *voisins* et deux arêtes contenant un même sommet sont dites *adjacentes*. Pour $x \in V_G$ on note $N_G(x) := \{y \in V_G \mid xy \in E_G\}$ l'ensemble des sommets adjacents à $x$. Un sommet extrémité d'une arête est dit *incident* à cette arête et l'arête *incidente* à ce sommet. Le *degré* d'un sommet $v$ d'un graphe non orienté $G$ est le nombre d'arêtes incidentes à $v$. Il est noté $deg_G(v)$. Le degré maximum de $G$ est noté $\Delta_G$ (*i.e.*, $\Delta_G = \max_{v \in V_G} deg_G(v)$). Le *line graphe* ou *graphe adjoint* d'un graphe orienté $G$ est le graphe dont chaque sommet représente une arête de $G$, et où deux sommets sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes sont adjacentes dans $G$.

Dans un graphe (orienté ou non) $G$, un *parcours* entre $x \in V_G$ et $y \in V_G$ (ou $(x, y)$-parcours) est défini par une suite finie $(v_i)_{0 \leq i \leq k}$ de sommets telle que $v_0 = x$, $v_k = y$ et $(v_i, v_{i+1}) \in E_G$ pour tout $0 \leq i \leq k - 1$. Les sommets $x$ et $y$ sont les *extrémités* du parcours. On peut également représenter un parcours par la suite des arcs ou arêtes qui le composent. Si cette dernière suite a $k$ éléments, le parcours est dit de longueur $k$. Un *plus court parcours* entre $x$ et $y$ est un parcours de longueur

minimale. Un *parcours simple* est un parcours ne passant pas deux fois par un même arc ou arête. Un *chemin* est un parcours ne passant pas deux fois par un même sommet, c'est-à-dire tous les sommets de la suite $(v_i)_{0\leq i\leq k}$ sont distincts (un chemin est un parcours simple, mais la réciproque est fausse). Une *transition* est un chemin de longueur 2. Le *centre* d'une transition est le sommet qui n'est pas une extrémité. Un *chemin hamiltonien* est un chemin passant une fois et une seule par tous les sommets du graphe. Un *cycle* dans un graphe est un chemin cyclique (c'est-à-dire que le premier terme est le successeur du dernier). Un *cycle hamiltonien* est un cycle passant par tous les sommets du graphe. Un graphe est dit *connexe* s'il existe un parcours entre tout couple de sommets. Un *arbre* dans un graphe non orienté $G$ est un sous-graphe connexe et sans cycle. Il est dit *maximum* s'il n'existe pas de tel arbre ayant strictement plus de sommets et *couvrant* si son ensemble de sommets est $V_G$. Un sommet d'un arbre est fréquemment appelé un nœud. Un arbre *enraciné* est un arbre dans lequel on a désigné un sommet quelconque. Ce sommet est appelé la *racine*. Une racine $r$ détermine alors une relation de descendance : s'il existe un chemin $r, \ldots, p, e$ le sommet $p$ est dit *parent* de $e$ et $e$ *enfant* de $p$. S'il existe un chemin $r, \ldots, p, \ldots, d$ le sommet $d$ est dit *descendant* de $p$. Un *couplage* dans un graphe non orienté $G$ est un sous-graphe où chaque sommet est de degré 1 (*i.e.*, un ensemble d'arêtes sans sommet commun).

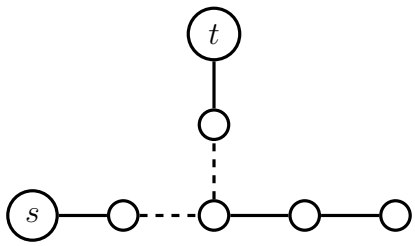
Le *graphe complet* (non orienté) $K_n$ est le graphe à $n$ sommets où tous les sommets sont adjacents et un *stable* est un graphe sans arête. Un graphe *$k$-régulier* est un graphe où tous les sommets sont de degré $k$. Pour $m \geq 1$ et $n \geq 1$, la $(m, n)$-grille est le graphe dont l'ensemble des sommets est $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ et l'ensemble des arêtes est $\{\{(i, j), (i+1, j)\} \mid i \in \{1, \ldots, m-1\}, j \in \{1, \ldots, n\}\} \cup \{\{(i, j), (i, j+1)\} \mid i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n-1\}\}$.

**Définition 1.1.** Un *graphe (orienté ou non) avec transitions interdites* est un triplet

$$G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$$

où $(V_G, E_G)$ est un graphe (orienté ou non) et $\mathcal{I}nt_G$ un sous-ensemble de l'ensemble des transitions dans ce graphe dit ensemble des transitions interdites dans $G$. Un *parcours* (resp. *parcours simple, chemin*) *sans transition interdite* dans $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ est un parcours (resp. *parcours simple, chemin*) dans $G$ tel que chaque sous-suite d'éléments **consécutifs** n'est pas dans $\mathcal{I}nt_G$. Dans un tel graphe, on note $\mathcal{A}ut_G$ (pour autorisées) l'ensemble des transitions $G$ qui ne sont pas dans $\mathcal{I}nt_G$. On définit de même, en remplaçant transition par parcours, les *graphes avec parcours interdits*.

**Exemple 1.2.** Dans l'exemple suivant, où la transition interdite est en pointillé, il n'existe pas de chemin sans transitions interdites entre $s$ et $t$.



Dans le graphe de la figure 1, il existe un parcours sans transitions interdites mais pas de chemin sans transitions interdites entre $s$ et $t$.

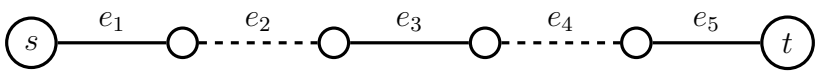
**Définition 1.3.** Dans un graphe non orienté, un *conflit* est un couple d'arêtes distinctes. On peut alors voir une transition comme un conflit dont les arêtes sont adjacentes. Un conflit dont les arêtes ne partagent pas de sommet est dit *parallèle*. Un *graphe avec conflits* est un triplet

$$G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$$

où $(V_G, E_G)$ est un graphe non orienté et $\mathcal{C}onf_G$ un ensemble de conflits dans ce graphe. On nomme *graphe* 1-*conflit* un graphe avec conflits tel que chaque sommet apparaît dans au plus un conflit. Un *parcours* (resp. *parcours simple, chemin*) *sans conflit* dans $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$ est un parcours (resp. *parcours simple, chemin*) dans $G$ tel que toute paire de ses arêtes ne forment pas un conflit de $\mathcal{I}nt_G$. Un arbre sans conflit (abrégé ASC) dans un graphe avec conflit $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$ (resp. un arbre sans transition interdite (abrégé ASTI) dans un graphe avec transitions interdites $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$) est un arbre dans $(V_G, E_G)$ tel que toute paire de ses arêtes ne forment pas un conflit (resp. une transition interdite). Les notions de *degré* et *couplage* dans un graphe avec conflits $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$ sont les mêmes que dans $(V_G, E_G)$.

**Remarque 1.4.** Contrairement aux transitions interdites, l'ordre dans lequel on prend les arêtes d'un conflit n'ayant pas d'importance, l'existence d'un parcours sans conflit implique l'existence d'un chemin sans conflit (il suffit des supprimer les boucles dans un parcours sans conflit pour obtenir un chemin sans conflit).

**Exemple 1.5.** Dans l'exemple suivant, où les deux arêtes en conflit sont en pointillés, il n'existe pas de chemin sans conflit entre $s$ et $t$.




Le graphe précédent ainsi que les graphes de l'exemple 1.2 sont des graphes 1-conflit.

Lorsque l'on prend un *sous-graphe* d'un graphe possédant des structures interdites, on conserve uniquement les interdictions contenant des sommets du sous-graphe. Un graphe complet $G$ à $n$ sommets avec transitions interdites (resp. conflits) sera noté $(K_n, \mathcal{I}nt_G)$ (resp. $(K_n, \mathcal{C}onf_G)$).

## 1.2 Liste des acronymes

Dans cette section, nous donnons les acronymes qui seront utilisés dans la suite, à la fois comme abréviations mais également pour faire référence aux problèmes correspondants. Chaque mot est représenté par sa première lettre excepté Chemin que est représenté par **Ch.** pour le différencier du cycle **C**. Le $\boldsymbol{k}$ au début d'un acronyme signifie que les parcours interdits sont de longueur bornée par $k$ (de tels parcours

seront appelés des *k-parcours*). Nous reviendrons plus en détail sur les problèmes correspondants à la section 1.3.

| | |
|---|---|
| Parcours Sans Transition Interdite | PSTI |
| Parcours Simple Sans Transition Interdite | PSSTI |
| Parcours Sans $k$-Parcours Interdit | PSPI |
| Cycle Hamiltonien Sans Transition Interdite | CHSTI |
| Chemin Sans Transition Interdite | Ch.STI |
| Chemin Hamiltonien Sans Transition Interdite | Ch.HSTI |
| Chemin Sans $k$-Parcours Interdit | Ch.SPI |
| Chemin Hamiltonien Sans $k$-Parcours Interdit | Ch.HSPI |
| Arbre Sans Conflit | ASC |
| Arbre Sans Transition Interdite | ASTI |
| Arbre Couvrant Sans Transition Interdite | ACSTI |
| Arbre Couvrant Sans Conflit | ACSC |
| Chemin Sans Conflit | Ch.SC |
| Cycle Sans Conflit | CSC |
| Chemin Hamiltonien Sans Conflit | Ch.HSC |
| Cycle Hamiltonien Sans Conflit | CHSC |
| Chemin Hamiltonien Sans Transition Interdite | Ch.HSTI |

## 1.3 Problèmes étudiés

Dans cette section, nous allons détailler les différents problèmes étudiés ainsi que les principaux résultats obtenus.

Dans le chapitre 2 nous allons étudier les parcours dans les graphes avec transitions interdites. Tout d'abord, nous verrons à la section 2.1 du chapitre 2 un algorithme polynomial utilisant la notion de line graphe généralisé permettant de construire un plus court PSTI dans un graphe avec transitions interdites, et donc résoudre le problème suivant.

**Parcours Sans Transition Interdite (PSTI)**

**Instance :** Un graphe avec transitions interdites et deux sommets $s$ et $t$.

**Question :** Le graphe contient-il un PSTI de $s$ à $t$ ?

Comme l'algorithme de la section 2.1 du chapitre 2 retourne un plus court PSTI et que ce dernier est nécessairement simple (car dans un PSTI on peut supprimer la boucle prise entre deux passages par une même arête), il résout également le problème du parcours simple sans transition interdite PSSTI.

Il est prouvé dans l'article [BKLBdW08] que les problèmes du chemin et du cycle eulérien sans transition interdite sont $\mathscr{NP}$-complets. Nous montrons à la remarque 2.6 du chapitre 2 que ces problèmes sont $\mathscr{NP}$-complets même lorsque l'on se restreint aux instances composées de graphes planaires.

Dans le chapitre 3 nous allons présenter des algorithmes exacts. Dans la section 3.1 nous recherchons des algorithmes exacts exponentiels pour les problèmes Ch.STI, Ch.HSTI et CHSTI donnés ci-dessous, et obtenons des algorithmes en temps $O(2^n n^{O(1)})$ où $n$ est le nombre de sommets du graphe et en espace polynomial.

**Chemin Sans Transition Interdite (Ch.STI)**

**Instance :** Un graphe avec transitions interdites et deux sommets $s$ et $t$.

**Question :** Le graphe contient-il un Ch.STI de $s$ à $t$ ?

**Chemin Hamiltonien Sans Transition Interdite (Ch.HSTI)**

**Instance :** Un graphe avec transitions interdites et deux sommets $s$ et $t$.

**Question :** Le graphe contient-il un Ch.HSTI de $s$ à $t$ ?

**Cycle Hamiltonien Sans Transition Interdite (CHSTI)**

**Instance :** Un graphe avec transitions interdites.

**Question :** Le graphe contient-il un CHSTI ?

Dans la section 3.2 du chapitre 3 nous montrons que le problème Ch.STI peut être résolu en temps polynomial à paramètre fixé (FPT) avec comme paramètre $\ell + \Delta$ où $\ell$ est la largeur arborescente et $\Delta$ est le degré maximum.

Dans le chapitre 4 nous étudions le problème Ch.STI et nous montrons qu'il est $\mathscr{NP}$-complet dans les grilles.

Dans le chapitre 5 nous montrons que le problème ACSTI est $\mathscr{NP}$-complet avec une dichotomie entre les instances de $\mathscr{P}$ et celles de $\mathscr{NP}$ portant sur la forme des conflits (sous réserve d'avoir $\mathscr{P} \neq \mathscr{NP}$), et que le problème ACSC est $\mathscr{NP}$-complet dans les $(3, k)$-grilles.

**Arbre couvrant sans transition interdite (ACSTI)**

**Instance :** Un graphe avec transitions interdites.

**Question :** Le graphe contient-il un ACSTI ?

**Arbre couvrant sans conflit (ACSC)**

**Instance :** Un graphe avec conflits.

**Question :** Le graphe contient-il un ACSC ?

Dans le chapitre 6, nous nous intéressons aux problèmes Ch.SC et CSC et nous présentons des conditions suffisantes à l'existence de Ch.HSC, CHSC et Ch.HSTI.

**Chemin sans conflit (Ch.SC)**

**Instance :** Un graphe avec conflits.

**Question :** Le graphe contient-il un Ch.SC ?

**Cycle sans conflit (CSC)**

**Instance :** Un graphe avec conflits.

**Question :** Le graphe contient-il un CSC ?

**Chemin Hamiltonien Sans Conflit (Ch.HSC)**

**Instance :** Un graphe avec conflits et deux sommets $s$ et $t$.

**Question :** Le graphe contient-il un Ch.HSC de $s$ à $t$ ?

**Cycle Hamiltonien Sans Conflit (CHSC)**

**Instance :** Un graphe avec conflits.

**Question :** Le graphe contient-il un CHSC ?

**Chemin Hamiltonien Sans Transition Interdite (Ch.HSTI)**

**Instance :** Un graphe avec transitions interdites et deux sommets $s$ et $t$.

**Question :** Le graphe contient-il un Ch.HSTI de $s$ à $t$ ?

# Chapitre 2

# Autour des parcours

Dans la première section, nous allons donner un algorithme polynomial permettant de trouver (s'il existe) un plus court PSSTI entre deux sommets d'un graphe avec transitions interdites. Cet algorithme utilise une généralisation de la notion de line graphe initialement introduite dans un article de Caldwell [Cal61]. Au moment où nous avons obtenu ces résultats nous n'avions pas encore pris connaissance de l'article de Caldwell. Or, même si l'article de Caldwell est très peu formel, la notion de line graphe généralisé y était déjà présente. Bien que la notion de transitions interdites n'y soit pas explicitement mentionnée, Caldwell donne des coûts aux transitions et une transition interdite peut alors être vue comme une transition avec un coût infini. Notons également que Caldwell ne donne pas d'algorithme pour que ses résultats soient utilisés en pratique. Cette première section peut donc être vue comme une tentative de formalisation des résultats de Caldwell ainsi que comme une manière simple et intuitive d'aborder les transitions interdites. Plus concrètement, nous verrons qu'il existe une bijection entre les plus courts PSTI dans un graphe avec transitions interdites et les plus courts chemins dans son line graphe généralisé.

Dans la seconde section nous allons présenter un algorithme polynomial permettant de localiser un ensemble de transitions autorisées de cardinal minimum et qu'il suffit d'interdire pour déconnecter deux sommets d'un graphe avec ou sans transitions interdites. Pour cela, nous utiliserons à nouveau la notion de line graphe généralisé avec cette fois-ci une bijection entre les ensembles de transitions non interdites qu'il suffit d'interdire pour déconnecter deux sommets et les coupes séparant ces sommets dans le line graphe généralisé. Les résultats présentés dans cette section font l'objet d'une partie de l'article [KLM13a].

## 2.1 Recherche de plus courts PSSTI

Dans cette section, nous allons donner un algorithme polynomial permettant de trouver (s'il existe) un plus court PSSTI entre deux sommets d'un graphe avec transitions interdites.

**Remarque 2.1.** Un plus court PSTI dans un graphes avec transitions interdites est toujours simple mais n'est pas toujours un chemin. En effet, si un PSTI passe deux

fois par le même arc, on peut supprimer la boucle qu'il fait entre ces deux passages pour obtenir un PSTI plus court dont les transitions sont inclues dans celles du PSTI initial. Cependant, lorsqu'un PSTI passe deux fois par le même sommet, comme par exemple le parcours $\ldots, x, y, \ldots, y, z, \ldots$, si l'on supprime la boucle qu'il fait entre les deux passages $y$, on obtient un parcours dont la transition $(x, y, z)$ peut être interdite.

Les PSTI obtenus par notre algorithme ne seront donc pas toujours de chemins mais seront toujours des PSSTI.

**Définition 2.2.** Prenons un graphe orienté avec transitions interdites

$$G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$$

et deux sommets non adjacents $s$ et $t$ de $G$. On note $L^*(G)$ le graphe orienté défini par :

$$\begin{aligned} V_{L^*(G)} &:= E_G, \\ E_{L^*(G)} &:= \mathcal{A}ut_G. \end{aligned}$$

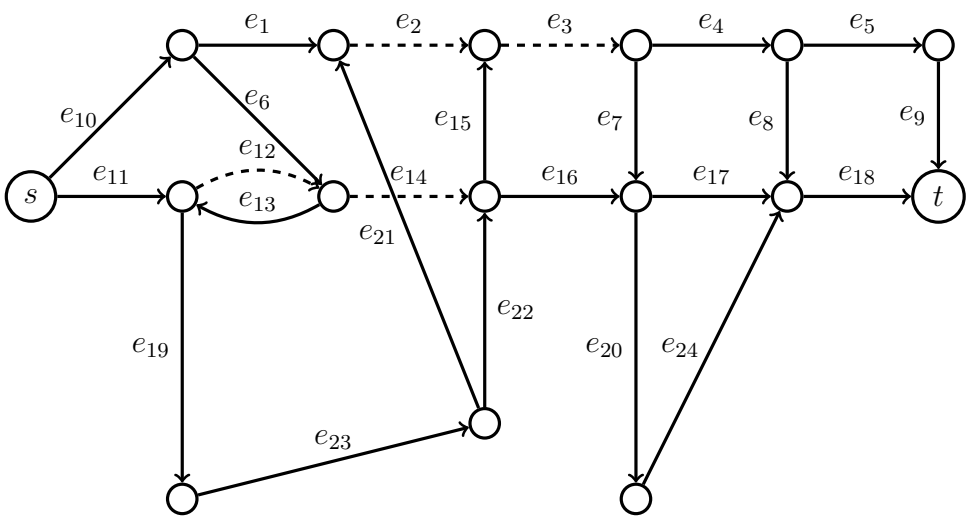
On note $G^*$ le graphe orienté défini par :

$$\begin{aligned} V_{G^*} &:= V_{L^*(G)} \cup \{s'\} \cup \{t'\}, \\ E_{G^*} &:= E_{L^*(G)} \cup \{(s', (s, v)) \mid (s, v) \in E_G\} \cup \{((v, t), t') \mid (v, t) \in E_G\}. \end{aligned}$$

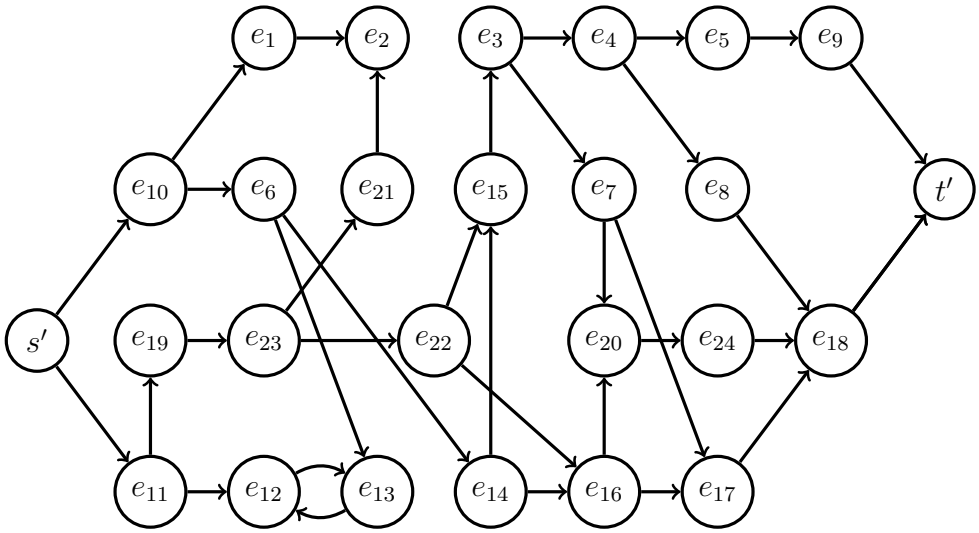
Remarquons que $G^*$ dépend des sommets $s$ et $t$ choisis initialement mais pour ne pas alourdir la notation nous choisirons de ne pas marquer cette dépendance.

**Remarque 2.3.** Le graphe $L^*(G)$ est une sorte de line graphe généralisé : il admet pour sommet les arcs de $G$ et pour arcs seulement les transitions autorisées.

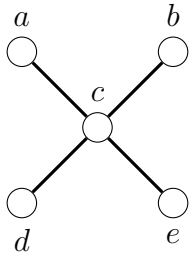
**Exemple 2.4.** Pour le graphe orienté avec transition interdite $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ où $\mathcal{I}nt_G = \{(e_2, e_3), (e_{12}, e_{14})\}$ suivant :



on obtient le graphe $G^*$ suivant :




**Remarque 2.5.** On sait que tout graphe (non orienté) n'est pas forcément un line graphe (voir par exemple [Bei70]). Cependant, contrairement à la notion de line graphe, tout graphe est le line graphe généralisé d'un graphe avec transitions interdites. En effet, prenons un graphe $Q$ à $n$ sommets et associons à chacun de ses sommets, une feuille de l'étoile $K_{1,n}$ de centre $c$. Ensuite, interdisons dans cette dernière les transitions symétriques (*i.e.*, toute transition interdite dans un sens l'est également dans le sens opposé) $\{v_ic, cv_j\}$ telles que $v_iv_j \notin E_Q$ pour obtenir une étoile avec transitions interdites $G$ telle que $L^*(G) = Q$. Par exemple, le graphe $K_{1,3}$ n'est pas un line graphe (voir [Bei70]), mais il est le line graphe généralisé du graphe $K_{1,4}$ avec les transitons interdites $\{bc, cd\}, \{bc, ce\}$ et {dc, ce } suivant :




**Remarque 2.6.** Maintenant, inspirés par la construction de la remarque 2.5 nous allons nous intéresser aux problèmes suivants dans les graphes orientés.

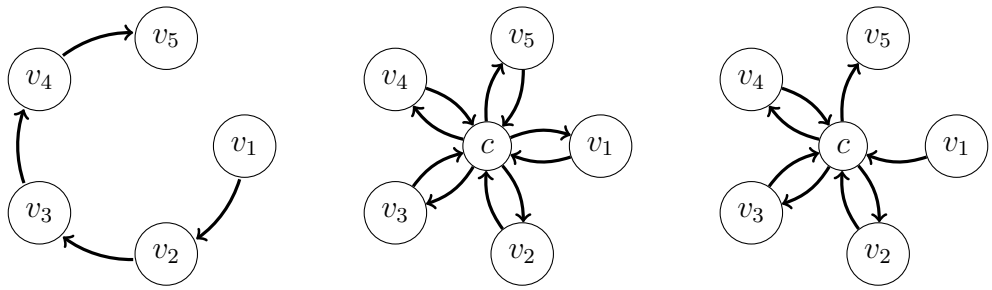
**Chemin\Cycle Eulérien Sans Transition Interdite (Ch.ESTI\CESTI)**

**Instance :** Un graphe orienté avec transitions interdites.

**Question :** Le graphe contient-il un Ch.ESTI\CESTI ?

Il est prouvé dans les articles [MN02], [Dvo04] et [BKLBdW08] que ces problèmes sont $\mathscr{NP}$-complets. Allons plus loin et montrons que ces problèmes sont $\mathscr{NP}$-complets même lorsque l'on se restreint aux instances composées de graphes

planaires. Pour cela, nous pouvons faire une réduction à partir des problèmes $\mathscr{NP}$-complets du chemin hamiltonien et du cycle hamiltonien. En effet, soit $R$ une instance à $n$ sommets de l'un de ces problèmes. Le graphe $R$ contient cycle hamiltonien $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ si et seulement si l'étoile orientée (*i.e.*, vue comme un graphe orienté possédant tous les arcs possible entre le centre et les feuilles) $K_{1,n}$ de centre $c$, de feuilles les sommets de $R$, et avec comme transitions interdites les chemins (orienté) $(v_i, c, v_j)$ tels que $v_iv_j \notin E_R$, contient un CESTI $(v_1, c, v_2, c, \ldots, c, v_n, c, v_1)$. De même, il existe un chemin hamiltonien de $v_i$ à $v_j$ dans $R$ si et seulement s'il existe un Ch.ESTI dans l'étoile avec transitions interdites précédente privée des arcs $v_jc$ et $cv_i$. Par exemple, si $R$ est le chemin à 5 sommets suivant, on obtient comme instance de CESTI le graphe du milieu où les transitions autorisées sont $(v_i, c, v_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq 4$ (instance fausse), et comme instance vraie de Ch.ESTI le graphe de droite.




**Théorème 2.7.** *Soit $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ un graphe orienté avec transitions interdites, et, $s$ et $t$ deux sommets non adjacents de $G$. L'application*

$$f : \begin{cases} \{(s,t)\text{-PSTI dans } G\} & \to \{(s',t')\text{-parcours dans } G^*\} \\ (e_1 \in E_G, \ldots, e_k \in E_G) & \mapsto (s', e_1 \in V_{G^*}, \ldots, e_k \in V_{G^*}, t') \end{cases}$$

*est bien définie et bijective.*

*Démonstration.* En effet, si $(e_1, \ldots, e_k)$ est un $(s,t)$-PSTI dans $G$ alors $s \in e_1$ et $t \in e_k$ donc $s'e_1 \in E_{G*}$ et $e_kt' \in E_{G*}$, et pour $1 \leq i \leq k-1$ on a $(e_i, e_{i+1}) \in \mathcal{A}ut_G$ et donc $e_ie_{i+1} \in E_{G*}$. Maintenant, si $(s', e_1, \ldots, e_k, t')$ est un $(s',t')$-parcours dans $G^*$ alors il admet $(e_1, \ldots, e_k)$ comme unique antécédent par $f$ et ainsi $f$ est bijective. Cela conclut la preuve. □

**Corollaire 2.8.** *Soit $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ un graphe orienté avec transitions interdites, et, $s$ et $t$ deux sommets non adjacents de $G$. Il existe un $(s,t)$-PSTI dans $G$ si et seulement s'il existe un $(s',t')$-parcours dans $G^*$.*

**Théorème 2.9.** *Soit $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ un graphe orienté avec transitions interdites, et, $s$ et $t$ deux sommets non adjacents de $G$. L'application*

$$f_{res} : \begin{cases} \{(s,t)\text{-plus courts PSTI de } G\} & \to \{(s',t')\text{-plus court chemin de } G^*\} \\ (e_1 \in E_G, \ldots, e_k \in E_G) & \mapsto (s', e_1 \in V_{G^*}, \ldots, e_k \in V_{G^*}, t') \end{cases}$$

*est bien définie et bijective.*

*Démonstration.* Soit $k \geq 1$ la longueur d'un $(s,t)$-plus court PSTI de $G$. L'application $f_{res}$ envoie un tel PSTI sur un $(s',t')$-parcours de longueur $k+1$ dans $G^*$. Maintenant, si les $(s',t')$-plus courts parcours de $G^*$ avaient une longueur strictement inférieure à $k+1$, alors ils admettraient des antécédents par $f_{res}$ de longueur strictement inférieure à $k$, ce qui contredirait le fait que les $(s,t)$-plus courts PSTI de $G$ sont de longueur $k$. Ainsi l'image par $f_{res}$ d'un $(s,t)$-plus court PSTI dans $G$ est un $(s',t')$-plus court parcours et donc un $(s',t')$-plus court chemin dans $G^*$. L'application $f_{res}$ est donc bien définie.

L'application $f$ étant une bijection, $f_{res}$ est injective. Prenons un $(s',t')$-plus court chemin $(s',e_1,\ldots,e_k,t')$ de longueur $k+1$ dans $G^*$, alors $(s',e_1,\ldots,e_k,t') = f_{res}((e_1,\ldots,e_k))$ car $(e_1,\ldots,e_k)$ est un $(s,t)$-plus courts PSTI de $G$ (en effet, sinon $(s',e_1,\ldots,e_k,t')$ ne serait pas un plus court chemin) et $f$ est donc surjective. Cela conclut la preuve. □

Nous sommes maintenant en mesure de donner un algorithme polynomial permettant de trouver un plus court PSTI (qui est un PSSTI d'après la remarque 2.1), entre deux sommets $s$ et $t$ d'un graphe orienté avec transitions interdites $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ :

**Algorithme 1 :** Plus court PSTI entre deux sommets d'un graphe orienté avec transitions interdites

**Données** : Un graphe avec transitions interdites $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ et deux sommets non adjacents $s$ et $t$.
**Résultat** : Un $(s,t)$-plus court PSTI (s'il existe).
**début**
1 Construire $G^*$ ;
2 Appliquer un algorithme polynomial de recherche de plus court chemin à $(G^*, s', t')$ pour obtenir $(s', e_1, \ldots, e_k, t')$ s'il existe, sinon **retourner** PAS DE SOLUTION ;
3 **retourner** $(e_1, ..., e_k) := f^{-1}((s', e_1, \ldots, e_k, t'))$ ;
**fin**

L'algorithme de cette section se généralise facilement aux graphes avec parcours interdits de longueur bornée par un entier $k$ fixé (notés $k$-parcours) en prenant le line graphe généralisé puis le line graphe généralisé du line graphe généralisé etc. jusqu'à ne plus avoir de parcours interdit, et nous pouvons en déduire un algorithme polynomial pour le problème PSPI suivant.

**Parcours Sans $k$-Parcours Interdit (PSPI)**

**Instance :** Un graphe avec $k$-parcours interdits et deux sommets $s$ et $t$.

**Question :** Le graphe contient-il un Parcours Sans Parcours Interdits de $s$ à $t$ ?

Cependant, alors que l'algorithme est très simple dans le cas des transitions interdites, il devient fastidieux dans le cas des parcours interdits car pour une instance à $n$ sommets, il oblige à construire $k-1$ line graphes généralisés jusqu'à obtenir un

graphe pouvant avoir $n^{O(2(k-1))}$ sommets. Deux articles récents traitent ce problème et proposent des algorithmes plus intéressants lorsque $k \geq 3$.

Le premier article, par VILLENEUVE et DESAULNIERS [VD05] donne un algorithme pour le problème du plus court parcours sans parcours interdit. Ils prétraitent l'instance $G$ en temps $O((n+L)\log(n+L)+m+\Delta_G L)$ et en espace $O(n+m+\Delta_G L)$ de sorte que le plus court parcours de $s$ à un sommet requête peut être trouvé en temps $O(n+l)$, où $n = |V_G|$, $m = |E_G|$, $\Delta_G$ le plus grand degré d'un sommet du graphe et $L$ est la taille totale de tous les parcours interdits. Ils ont d'abord construit un automate fini déterministe (DFA) à partir de l'ensemble des parcours interdits en utilisant l'idée de AHO et CORASICK [AC75] qui permet de détecter en temps linéaire si un parcours donné contient l'un des parcours interdits. Ils ont ensuite "inséré" le DFA dans $G$ en reproduisant certains sommets de $G$ de la manière introduite par Martins [dQVM84], puis ils construisent un arbre des plus courts parcours dans ce graphe modifié.

La second article, par AHMED et LUBIW [AL09] donne deux algorithmes pour calculer un plus court parcours sans parcours interdit dans le cas où tous les parcours interdits ne sont pas connus a priori. Leurs algorithmes sont strictement plus généraux que celui de VILLENEUVE et DESAULNIERS, car ils résolvent le problème en approximativement le même temps mais en espace $O(n+m+L)$. Les algorithmes en temps $O(gn\log(n)+gm)$ et $O((n+L)\log(n+L)+m+\Delta_G L)$ permettent de trouver un plus court parcours évitant les parcours interdits entre $s$ et tous les autres sommets, où $g$ est le nombre de parcours interdits. Leurs algorithmes utilisent une technique de réplication de sommets similaire à celle utilisée pour gérer les parcours non-élémentaires dans d'autres problèmes de plus court parcours [dQVM84, VD05]. Leur idée est de gérer un parcours interdit en reproduisant ses sommets et en supprimant des arêtes. Le résultat est que dans une copie du parcours interdit il manque sa première arête et dans l'autre copie sa dernière arête. Avec cette technique, ils veulent exclure le parcours interdit mais permettre tous ses sous-parcours. Au cours de leur travail, ils ont identifié le même problème que VILLENEUVE et DESAULNIERS : la réplication de sommets peut entraîner un nombre exponentiel de copies de n'importe quel parcours interdit qui recouvrent l'actuel. VILLENEUVE et DESAULNIERS résolvent ce problème en identifiant et en comprimant les chevauchements des parcours interdits ; une telle approche était impossible pour AHMED et LUBIW car ils n'ont pas eu accès à l'ensemble des parcours interdits $F_G$. Leur idée est de coupler la réplication de sommet avec la "croissance" d'un arbre des plus courts parcours. En effet, en préservant certaines structures dans l'arbre des plus court parcours, ils ont prouvé que ces copies supplémentaires produites au cours de la réplication de sommets ne sont pas significatives. Bien que cela n'ait pas été fait, leur algorithme est facile à implémenter alors que les preuves et l'analyse du temps d'exécution sont non-triviales.

## 2.2 Coupe minimum dans $L^*(G)$

Dans cette partie, nous allons présenter un algorithme polynomial permettant de localiser un ensemble de transitions non interdites de cardinal minimum et qu'il suffit d'interdire pour déconnecter deux sommets d'un graphe avec ou sans transitions

interdites.

**Définition 2.10.** Soit $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ un graphe orienté avec transitions interdites, et, $s$ et $t$ deux sommets non adjacents de $G$. Une $(s,t)$-coupe dans un graphe orienté $G$ est un ensemble d'arcs, qui une fois supprimé du graphe, assure qu'il n'y a plus de parcours de $s$ à $t$.

**Lemme 2.11.** *Soit $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ un graphe orienté avec transitions interdites, et, $s$ et $t$ deux sommets non adjacents de $G$. Il existe une $(s',t')$-coupe dans $G^*$ ne possédant aucun des arcs sortant de $s'$ ni aucun des arcs entrant en $t'$.*

*Démonstration.* Comme $s$ et $t$ ne sont pas adjacents, tout $(s,t)$-parcours dans $G$ passe par au moins une transition. Interdisons toutes les transitions de ces parcours et notons $G'$ le nouveau graphe orienté avec transitions interdites obtenu. Il n'existe alors plus de parcours de $s$ à $t$ dans $G'$. D'après le corollaire 2.8 il n'existe pas de $(s',t')$-parcours dans $G'^*$. Comme le graphe $G'^*$ est le graphe $G^*$ sans les arcs de $G^*$ correspondant aux transitions interdites pour obtenir $G'$, ceux-ci forment une $(s',t')$-coupe dans $G^*$ ne possédant aucun des arcs sortant de $s'$ ni aucun des arcs entrant en $t'$. Cela conclut la preuve. □

**Lemme 2.12.** *Soit $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ un graphe orienté avec transitions interdites, et, $s$ et $t$ deux sommets non adjacents de $G$. Dans $G^*$, les arcs d'une $(s',t')$-coupe ne possédant aucun des arcs sortant de $s'$ ni aucun des arcs entrant en $t'$ de cardinal minimum, correspondent à un ensemble de transitions autorisées dans $G$ qu'il suffit d'interdire pour que $G$ ne soit plus $(s,t)$-connexe de cardinal minimum, et réciproquement.*

*Démonstration.* Comme d'après le corollaire 2.8, il existe un $(s,t)$-parcours dans $G$ si et seulement s'il existe un $(s',t')$-parcours dans $G^*$, l'application "identité"

$$h : \begin{cases} \mathcal{A}ut_G & \to E_{G^*} \setminus (\{(s',(s,v)) \mid (s,v) \in E_G\} \cup \{((v,t),t') \mid (v,t) \in E_G\}) \\ (e_i, e_j) & \mapsto (e_i, e_j) \end{cases}$$

induit des bijections entre les $(s',t')$-coupes ne possédant aucun des arcs sortant de $s'$ ni aucun des arcs entrant en $t'$ de cardinal minimum et les ensembles de transitions autorisées dans $G$ qu'il suffit d'interdire pour que $G$ ne soit plus $(s,t)$-connexe. Ainsi, le cardinal d'une coupe est égal au cardinal de l'ensemble de transitions correspondant et si l'un est minimal, l'autre l'est également. □

**Définition 2.13.** On appelle *capacité* d'une coupe la somme des capacités de ses arcs.

**Théorème 2.14.** *Soit $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ un graphe orienté avec transitions interdites, et, $s$ et $t$ deux sommets non adjacents de $G$. Soit $m$ le nombre d'arcs de $G^*$. Attribuons à chaque arc de $G^*$ une capacité valant un sauf pour les arcs sortant de $s'$ et les arcs entrant en $t'$ pour lesquels on la prend égale à $m$. Les arcs d'une $(s',t')$-coupe de capacité minimum correspondent à un ensemble de transitions autorisées dans $G$ qu'il suffit d'interdire pour que $G$ ne soit plus $(s,t)$-connexe de cardinal minimum, et réciproquement.*

*Démonstration.* D'après le lemme 2.11, il existe une $(s', t')$-coupe dans $G^*$ ne possédant aucun des arcs sortant de $s'$ ni aucun des arcs entrant en $t'$. Cette coupe possède strictement moins de $m$ arcs (ayant chacun une capacité valant un) et admet donc une capacité strictement inférieure à $m$. Ainsi, la capacité minimum d'une $(s', t')$-coupe est strictement inférieure à $m$, et donc une $(s', t')$-coupe de capacité minimum ne contient ni d'arc sortant de $s'$ ni d'arc entrant en $t'$, car sa capacité serait alors supérieure à $m$. Maintenant, pour une telle coupe, la capacité est égale au cardinal et si son cardinal est minimum, d'après le lemme 2.12, elle correspond à un ensemble de transitions autorisées dans $G$ qu'il suffit d'interdire pour que $G$ ne soit plus $(s, t)$-connexe de cardinal minimum, et réciproquement. Cela conclut la preuve. □

Nous sommes donc maintenant en mesure de donner un algorithme qui prend en entrée un graphe orienté avec transitions interdites $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ ainsi que deux sommets non adjacents $s$ et $t$ de $G$, et retourne un ensemble de transitions autorisées dans $G$, qu'il suffit d'interdire pour que $G$ ne soit plus $(s, t)$-connexe, de cardinal minimum.

**Algorithme 2 :** Ensemble de transitions autorisées $(s, t)-$déconnectant

**Données** : Un graphe orienté avec transitions interdites $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$, et, $s$ et $t$ deux sommets non adjacents de $G$.

**Résultat** : Un ensemble de transitions autorisées dans $G$, qu'il suffit d'interdire pour que $G$ ne soit plus $(s, t)$-connexe, de cardinal minimum.

**début**

1 Construire le graphe $G^*$ ;

2 Associer à chaque arc de $G^*$ une capacité valant 1 sauf pour les arcs sortant de $s'$ et les arcs entrant en $t'$ pour lesquels on la prend égale à $|E_G|$ ;

3 Calculer une $(s', t')$-coupe de capacité minimum dans le graphe $G^*$ muni des capacités précédentes ;

4 **retourner** les transitions de $G$ associées aux arcs de cette coupe ;

**fin**

**Théorème 2.15.** *L'algorithme 2 s'exécute en temps polynomial en fonction de la taille de $G$.*

*Démonstration.* En effet, les étapes 1, 2, et 4 s'exécutent en temps $O(|E_G|^2)$ et l'étape 3 peut se faire en temps polynomial via un algorithme qui calcule une $(s', t')$-coupe de capacité minimum dans $G^*$ pour en retirer le flot max, comme l'algorithme d'EDMONDS-KARP (voir [CLRS09]). Cela conclut la preuve. □

**Exemple 2.16.** En reprenant le graphe de l'exemple 2.4 on voit que, entre autres, les arcs $\{(e_6, e_{14}), (e_{23}, e_{22})\}$ forment une coupe de capacité minimum dans $G^*$ est donc qu'il suffit d'interdire les transitions $(e_6, e_{14})$ et $(e_{23}, e_{22})$ dans $G$ pour qu'il ne soit plus $(s, t)$-connexe.

## 2.3 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons vu l'utilité de la notion de line graphe généralisé. Dans un travail en cours de réalisation avec Fatima Zahra Moataz et Nicolas Nisse, nous utilisons de nouveau cette notion pour résoudre en temps polynomial des problèmes de parcours arc-disjoints dans les graphes avec transitions interdites. On a vu à la remarque 2.5 que, contrairement à la notion de line graphe, tout graphe est le line graphe généralisé d'un graphe avec transitions interdites. L'un de mes objectifs futurs sera de mieux étudier cette propriété, d'un point de vue structurel et combinatoire. On pourra par exemple rechercher un graphe avec transitions interdites $G$ ayant un line graphe généralisé $L$ donné, et minimisant l'une des valeurs $|V_G|$, $|\mathcal{I}nt_G|$ ou $|V_G| + |\mathcal{I}nt_G|$, dont on voit facilement en considérant l'étoile $K_{1,|V_L|}$ comme à la remarque 2.5, qu'elles vérifient $|V_G| \leq |V_L|+1$, $|\mathcal{I}nt_G| \leq \frac{|V_L|(|V_L|-1)}{2} - |E_L|$ et donc $|V_G| + |\mathcal{I}nt_G| \leq \frac{|V_L|(|V_L|+1)}{2} - |E_L| + 1$ .

# Chapitre 3

# Algorithmes exacts exponentiels pour Ch.STI, Ch.HSTI et CHSTI.

Nous avons vu au chapitre précédent un algorithme polynomial utilisant le line graphe généralisé pour le problème PSSTI, et à la fin de la section 2.1 du chapitre 2, nous avons présenté deux articles donnant des algorithmes polynomiaux pour le problème PSPI (voir [VD05] et [AL09]). Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au cas des chemins. On rappelle que Szeider a prouvé que ces problèmes sont $\mathscr{NP}$-complets. Nous allons présenter des algorithmes exacts exponentiels en temps $O(2^n n^{O(1)})$ où $n$ est le nombre de sommets du graphe et en espace polynomial pour les problèmes Ch.STI, Ch.HSTI et CHSTI et même traiter les deux premiers problèmes dans les graphes avec parcours interdits. Ensuite, nous donnerons un algorithme FPT de paramètre $\ell + \Delta$ où $\ell$ est largeur arborescente et $\Delta$ est le degré maximum qui retourne un plus court Ch.STI.

## 3.1 Graphes avec parcours interdits

Dans cette section, nous allons présenter des algorithmes pour les problèmes Ch.SPI, Ch.HSPI ci-dessous, ainsi que pour CHSTI. On note *$k$-parcours* un parcours dont la longueur est bornée par un entier $k$.

**Chemin Sans Parcours Interdit (Ch.SPI)**

**Instance :** Un graphe avec $k$-parcours interdits et deux sommets $s$ et $t$.

**Question :** Le graphe contient-il un Chemin Sans Parcours Interdits de $s$ à $t$ ?

**Chemin Hamiltonien Sans Parcours Interdit (Ch.HSPI)**

**Instance :** Un graphe avec $k$-parcours interdits et deux sommets $s$ et $t$.

**Question :** Le graphe contient-il un Chemin Hamiltonien Sans Parcours Interdits de $s$ à $t$ ?

Les transitions interdites étant des 2-parcours, le problème Ch.SPI est $\mathscr{NP}$-

complet même lorsque l'on se restreint aux 2-parcours. Par contre, lorsque l'on se restreint aux 1-parcours le problème Ch.SPI est polynomial car il revient à chercher s'il existe un chemin dans un graphe. L'algorithme de DIJKSTRA permet par exemple de trouver en temps polynomial un plus court chemin entre deux sommets d'un graphe (voir [CLRS09]). Rappelons également que même dans les graphes sans parcours interdit, les problèmes consistant à vérifier si un graphe contient un chemin hamiltonien et si un graphe contient un cycle hamiltonien sont tous les deux $\mathscr{NP}$-complets (voir [BM10]).

Nous présentons trois algorithmes (où $n$ est le nombre de sommet de l'instance) :

- Un algorithme exact en temps $O(2^n n^{k+O(1)})$ et en espace $O(n^{k+O(1)})$ permettant de résoudre le problème Ch.SPI. Si un Ch.SPI existe, il retourne également la longueur du plus court. Cet algorithme généralise l'algorithme que nous avons obtenu dans [KLM13a], ce dernier ne traitant que le cas des transitions interdites.

- Un algorithme exact en temps $O(2^n n^{k+O(1)})$ et en espace $O(n^{k+O(1)})$ permettant de résoudre le problème Ch.HSPI.

- Un algorithme exact en temps $O(2^n n^{O(1)})$ et en espace $O(n^{O(1)})$ permettant de résoudre le problème CHSTI.

Restreint au cas des transitions interdites, cela donne des algorithmes exacts exponentiels en temps $O(2^n n^{O(1)})$ et en espace polynomial pour les problèmes Ch.STI, Ch.HSTI et CHSTI.

### 3.1.1 Algorithmes pour Ch.SPI et Ch.HSPI

Prenons $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ un graphe orienté à $n$ sommets avec $k$-parcours interdits, $A$ et $T$ deux sous-ensembles de $V_G$, $\ell$ un entier strictement positif, et, $s$ et $t$ deux sommets de $G$. Notons $P$ l'ensemble des PSPI de $G$.

**Lemme 3.1.** *Pour $j \geq k$, $(x_0, \ldots, x_j) \in P$ si et seulement si $(x_i, \ldots, x_{i+k}) \in P$ pour tout $i \in \{0, \ldots j-k\}$.*

*Démonstration.* Si le parcours $(x_0, \ldots, x_j)$ est dans $P$ alors toute sous-suite d'éléments consécutifs de ce parcours est dans $P$, et réciproquement si $(x_i, \ldots, x_{i+k}) \in P$ pour tout $i \in \{0, \ldots j-k\}$, comme le longueur des parcours interdits est inférieure ou égale $k$, aucun sous-parcours de $(x_0, \ldots, x_j)$ n'est interdit et donc $(x_1, \ldots, x_j) \in P$. Cela conclut la preuve. □

Notons $\mathcal{P}(A, \ell)$ le nombre de PSPI de $s$ à $t$ de longueur $\ell-1$ qui visitent seulement des sommets de $A$.

Notons $\mathcal{P}(A, \ell; v_1, v_2, ..., v_k)$ le nombre de PSPI de $s$ à $v_k$ de longueur $\ell - 1$ qui visitent seulement des sommets de $A$ et dont les $k$ derniers sommets visités sont, dans cet ordre, $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

**Lemme 3.2.** *Pour $A$ fixé, les valeurs $\mathcal{P}(A,\ell)$ pour $1 \leq \ell \leq n$ peuvent être calculées en temps $O(n^{k+O(1)})$ et en espace $O(n^{k+O(1)})$.*

*Démonstration.* Pour $\ell < k$ le résultat est clairement vrai. En effet, il suffit de tester les au plus $n^\ell$ suites de sommets possibles.

Pour $\ell \geq k$ nous avons :

$$\mathcal{P}(A,\ell) = \sum_{(v_1,\ldots,v_{k-1})\in A^{k-1}} \mathcal{P}(A,\ell;v_1,\ldots,v_{k-1},t) \tag{3.1}$$

Si $\ell = k$ :

$$\mathcal{P}(A,\ell;v_1,\ldots,v_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_1,\ldots,v_k) \in P \text{ et } v_1,\ldots,v_k \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\ell > k$ et $v_k \notin A$ on a :

$$\mathcal{P}(A,\ell;v_1,\ldots,v_k) = 0.$$

Si $\ell > k$ et $v_k \in A$, avec l'aide du lemme 3.1 on voit que $\mathcal{P}(A,\ell;v_1,\ldots,v_k)$ est égal à la somme pour tous les $v_0$ appartenant à $A$, des nombres de PSPI de $s$ à $v_{k-1}$ de longueur $\ell-2$ qui visitent seulement des sommets de $A$, dont les $k$ derniers sommets visités sont, dans cet ordre, $v_0, v_2, \ldots, v_{k-1}$, et que l'on peut prolonger en rajoutant $v_k$ à la fin, *i.e.* :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A,\ell;v_1,\ldots,v_k) &= \sum_{v_0\in A:(v_0,\ldots,v_k)\in P} \mathcal{P}(A,\ell-1;v_0,\ldots,v_{k-1}) \\ &= \sum_{v_0\in A:(v_0,\ldots,v_k)\ \textit{est bon}} \mathcal{P}(A,\ell-1;v_0,\ldots,v_{k-1}), \end{aligned}$$

où $(v_0,\ldots,v_k)$ *est bon* si et seulement si $(v_j,\ldots,v_k) \notin \mathcal{I}nt_G$ pour $0 \leq j \leq k$.

On en déduit alors :

$$\{\mathcal{P}(A,\ell;v_1,\ldots,v_k) \mid (v_1,\ldots,v_k) \in A^k\}$$
$$= \left\{ \sum_{v_0\in A:(v_0,\ldots,v_k)\ \textit{est bon}} \mathcal{P}(A,\ell-1;v_0,\ldots,v_{k-1}) \mid (v_1,\ldots,v_k) \in A^k \right\}$$

On peut donc calculer la valeur des éléments de cet ensemble à partir de la valeur des éléments de l'ensemble :

$$\{\mathcal{P}(A,\ell-1;v_0,\ldots,v_{k-1}) \mid (v_0,\ldots,v_{k-1}) \in A^k\}$$

en temps $O(n^{k+2})$ (on fait $O(n^k)$ sommes qui se font chacune en temps $O(n^2)$) et en espace $O(n^{k+O(1)})$ (espace nécessaire pour stocker l'ensemble ci-dessus) et donc par récurrence à partir de la valeur des éléments de l'ensemble :

$$\{\mathcal{P}(A,k;v_1,\ldots,v_k) \mid (v_1,\ldots,v_k) \in A^k\}$$

en temps $O(n^{k+3})$ et en espace $O(n^{k+O(1)})$. Finalement, avec la formule (3.1) on calcule $\mathcal{P}(A,\ell)$ en temps $O(n^{k+O(1)})$ et en espace $O(n^{k+O(1)})$. Cela conclut la preuve. □

**Définition 3.3.** Notons $\mathcal{C}(T)$ le nombre de Ch.HSPI de $s$ à $t$ dans $G[T]$.

En remarquant que le nombre de Ch.HSPI de $s$ à $t$ dans $G[T]$ (*i.e.*, $\mathcal{C}(T)$) est égal au nombre de PSPI de $s$ à $t$ dans $G[T]$ (*i.e.*, $\mathcal{P}(T, |T|)$) moins le nombre de PSPI de $s$ à $t$ passant deux fois (au moins) par un même sommet dans $G[T]$, le principe d'inclusion-exclusion nous donne :

**Lemme 3.4.**

$$\mathcal{C}(T) = \sum_{A \subseteq T} (-1)^{|T \setminus A|} \cdot \mathcal{P}(A, |T|).$$

*Démonstration.* Considérons un PSPI de $s$ à $t$ de longueur $|T| - 1$ qui contribue 1 pour l'un des termes de la somme $\mathcal{P}(A, |T|)$. La contribution de ce parcours à la somme $\sum_{A \subseteq T} (-1)^{|T \setminus A|} \cdot \mathcal{P}(A, |T|)$ est

$$\sum_{U \subseteq A \subseteq T} (-1)^{|T \setminus A|},$$

où $U$ est l'ensemble de sommets qu'il visite. En remplaçant $|T \setminus A|$ par $k$ la somme précédente devient

$$\sum_{k=0}^{|T \setminus U|} \binom{|T \setminus U|}{k} (-1)^k = 0^{|T \setminus U|},$$

et est donc égale à 0 si $U$ est différent de $T$ et à 1 sinon. Ainsi, la somme compte le nombre de PSPI de $s$ à $t$ de longueur $|T| - 1$ visitant tous les sommets de $T$, c'est-à-dire $\mathcal{C}(T)$. Cela conclut la preuve. □

Le nombre de Ch.SPI de longueur $\ell - 1$ allant de $s$ à $t$ est obtenu en prenant la somme des $\mathcal{C}(T)$ sur tous les sous-ensemble de sommets $T$ du graphe tels que $|T| = \ell$ :

$$\sum_{T \subseteq V_G : |T| = \ell} \mathcal{C}(T).$$

Utilisons maintenant le lemme 3.4 pour donner une expression plus facile à calculer de cette somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{T \subseteq V_G : |T| = \ell} \mathcal{C}(T) &= \sum_{T \subseteq V_G : |T| = \ell} \sum_{A \subseteq T} (-1)^{|T \setminus A|} \cdot \mathcal{P}(A, |T|) \\
&= \sum_{A \subseteq V_G : |A| \leq \ell} \sum_{A \subseteq T \subseteq V : |T| = \ell} (-1)^{\ell - |A|} \cdot \mathcal{P}(A, \ell) \\
&= \sum_{A \subseteq V_G : |A| \leq \ell} (-1)^{\ell - |A|} \cdot \mathcal{P}(A, \ell) \cdot \binom{n - |A|}{n - \ell}.
\end{aligned}$$

En remarquant qu'un chemin hamiltonien est un chemin de longueur $n - 1$ on déduit, en remplaçant $l$ par $n$ dans l'égalité précédente, que le nombre de Ch.HSPI allant de $s$ à $t$ est :

$$\sum_{A \subseteq V_G} (-1)^{n - |A|} \cdot \mathcal{P}(A, n).$$

Le nombre de Ch.SPI allant de $s$ à $t$ est quant à lui égal à la somme pour $\ell$ variant de 1 à $n$ du nombre de Ch.SPI de longueur $\ell - 1$ allant de $s$ à $t$ et vaut donc :

$$\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{A \subseteq V_G : |A| \leq \ell} (-1)^{\ell - |A|} \cdot \mathcal{P}(A, \ell) \binom{n - |A|}{n - \ell}.$$

On en déduit donc le résultat suivant.

**Théorème 3.5.** *Les algorithmes 3 et 4 sont corrects et fonctionnent en temps $O(2^n n^{k+O(1)})$ et en espace $O(n^{k+O(1)})$ pour tout graphe à $n$ sommets avec $k$-parcours interdits.*

**Algorithme 3 :** Chemin Hamiltonien Sans Parcours Interdits

**Données** : Un graphe avec parcours interdits $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ et deux sommets $s$ et $t$.
**Résultat** : Existe-t-il un Ch.HSPI de $s$ à $t$ ?

```
début
1   n := |V_G| ;
2   R := 0 ;
3   pour tous les A ⊆ V_G faire
4       R := R + (−1)^{n−|A|} · P(A, n) ;
    fin
5   si R ≥ 1 alors
6       retourner OUI ;
    fin
7   retourner NON ;
fin
```

**Algorithme 4 :** Chemin Sans Parcours Interdits

**Données** : Un graphe avec parcours interdits $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ et deux sommets $s$ et $t$.
**Résultat** : Existe-t-il un Ch.SPI de $s$ à $t$ ? Si oui, quelle est la longueur du plus court ?

```
début
1   n := |V_G| ;
2   pour ℓ ← 1 à n faire
3       R := 0 ;
4       pour tous les A ⊆ V_G tels que |A| ≤ ℓ faire
5           R := R + (−1)^{ℓ−|A|} · P(A, l) · C(n−|A|, n−ℓ);
        fin
6       si R ≥ 1 alors
7           retourner (OUI, ℓ);
        fin
    fin
8   retourner NON ;
fin
```

*Démonstration.* D'après ce qui précède, les algorithmes sont corrects et la complexité en espace est bornée par $O(n^{k+O(1)})$. La complexité en temps de l'algorithme 3 est bornée par

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot O(n^{k+O(1)}) = O(2^n n^{k+O(1)}).$$

La complexité en temps de l'algorithme 4 est bornée par

$$\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{i=1}^{\ell} \binom{n}{i} \cdot O(n^{k+O(1)}) = O(2^n n^{k+O(1)}).$$

Cela conclut la preuve. □

**Remarque 3.6.** En répétant l'algorithme 3 pour tous les couples de sommets $(s, t)$ on vérifie l'existence d'un chemin hamiltonien sans parcours interdits dans $G$ en temps $O(2^n n^{k+O(1)})$.

### 3.1.2 Algorithme pour CHSTI

Prenons un graphe orienté avec transitions interdites à $n$ sommets $G$.

**Lemme 3.7.** *Un CHSTI ne peut pas contenir les deux arcs d'une transition interdite.*

*Démonstration.* En effet, si un cycle contient les deux arcs $ab$ et $bc$ (avec possiblement $a = c$) d'une transition interdite, $bc$ ne peut pas être le successeur de $ab$ car sinon le cycle contiendrait une transition interdite. Ainsi, le sommet $b$ apparaît au moins deux fois dans le cycle. Ce qui contredit le fait qu'un sommet apparaît au plus une fois dans un cycle. Cela conclut la preuve. □

Pour chaque arc $ts \in E_G$ on définit le graphe $G_{s,t}$ comme étant le graphe avec transitions interdites construit à partir de $G$ de façon suivant :

1. On supprime de $E_G$ l'arc différent de $ts$ de chaque transition contenant $ts$,
2. On supprime de $\mathcal{I}nt_G$ toutes les transitions contenant l'arc $ts$.

i.e.

$$\begin{aligned} V_{G_{s,t}} &:= V_G, \\ E_{G_{s,t}} &:= E_G \setminus (\{vt \mid (v,t,s) \in \mathcal{I}nt_G\} \cup \{sv \mid (t,s,v) \in \mathcal{I}nt_G\}), \\ \mathcal{I}nt_{G_{s,t}} &:= \mathcal{I}nt_G \setminus \{(v,t,s),(t,s,v) \mid v \in V_G\}. \end{aligned}$$

**Théorème 3.8.** *Le graphe $G$ contient un CHSTI contenant l'arc $ts$ si et seulement si le graphe $G_{s,t}$ contient un Ch.HSTI allant de $s$ à $t$.*

*Démonstration.* Si le graphe $G$ contient un CHSTI contenant l'arc $ts$, alors d'après le lemme 3.7 le cycle ne contient pas l'arc différent de chacune des transitions contenant $ts$. Ainsi, le graphe $G_{s,t}$ contient ce cycle et contient donc un Ch.HSTI et allant de $s$ à $t$.

Réciproquement, si le graphe $G_{s,t}$ contient un Ch.HSTI allant de $s$ à $t$. Par construction, $G_{s,t}$ contient l'arc $ts$ et aucune transition de $\mathcal{I}nt_{G_{s,t}}$ ne contient cet arc. On peut donc l'ajouter au Ch.HSTI allant de $s$ à $t$ pour obtenir dans le graphe $G_{s,t}$ un CHSTI contenant l'arc $ts$. Ainsi, comme ce cycle ne contient pas les deux arcs d'une transition de $\mathcal{I}nt_G \setminus \mathcal{I}nt_{G_{s,t}}$, il est également un CHSTI dans $G$. Cela conclut la preuve. □

Le résultat suivant se déduit immédiatement du théorème 3.8 :

**Corollaire 3.9.** *Le graphe $G$ contient un CHSTI si et seulement s'il existe un arc $ts \in E_G$ tel que le graphe $G_{s,t}$ contient un Ch.HSTI allant de $s$ à $t$.*

**Algorithme 5 :** Cycle Hamiltonien Évitant les Transitions Interdites

**Données** : Un graphe avec transitions interdites $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$.
**Résultat** : Le graphe $G$ contient-il un CHSTI ?
**début**
1 **pour tous les** *arcs* $ts \in E_G$ **faire**
2 appliquer l'algorithme 3 à $G_{s,t}$ ;
3 **si** *l'algorithme 3 retourne OUI* **alors**
4 **retourner** *OUI* ;
**fin**
**fin**
5 **retourner** *NON* ;
**fin**

**Corollaire 3.10.** *L'algorithme 5 est correct et vérifie l'existence d'un CHSTI en temps $O(2^n n^{O(1)})$ et en espace polynomial pour tout graphe avec transitions interdites à $n$ sommets.*

*Démonstration.* D'après le corollaire 3.9 l'algorithme 5 est correct et en espace polynomial. D'après le théorème 3.5 et le corollaire 3.9 la complexité en temps est bornée par

$$n(n-1) \cdot O(2^n n^{2+O(1)}) = O(2^n n^{O(1)}).$$

Cela conclut la preuve. □

## 3.2 Transitions interdites et complexité paramétrée

Dans cette section, nous allons utiliser la programmation dynamique sur la décomposition arborescente d'un graphe avec transitions interdites pour montrer que le problème Ch.STI peut être résolu en temps polynomial à paramètre fixé (FPT) avec comme paramètre la somme de la largeur arborescente et du degré maximum. Plus précisément, nous montrons qu'il existe un algorithme qui résout le problème en temps $O(\Delta^2(3\Delta(\ell+1))^{2\ell+2}n))$ pour un graphe à $n$ sommets avec largeur arborescente au plus $\ell$ et degré maximum $\Delta$. Nous supposerons que les transitions sont

symétriques, *i.e.*, si $(x, y, z)$ est une transition interdite alors $(z, y, x)$ aussi, et nous noterons simplement $\{xy, yz\}$ une telle transition.

Une *décomposition arborescente* [RS86] d'un graphe $G$ est un moyen de le représenter par une famille de sous-ensembles de $V_G$ organisée en un arbre satisfaisant certaines propriétés de connexité.

Plus formellement, une décomposition arborescente de $G$ est une paire $(T, \mathcal{X})$ où $\mathcal{X} = \{X_t \mid t \in V_T\}$ est une famille de sous-ensembles de sommets de $V_G$, appelés les sacs, et $T$ est un arbre tel que :

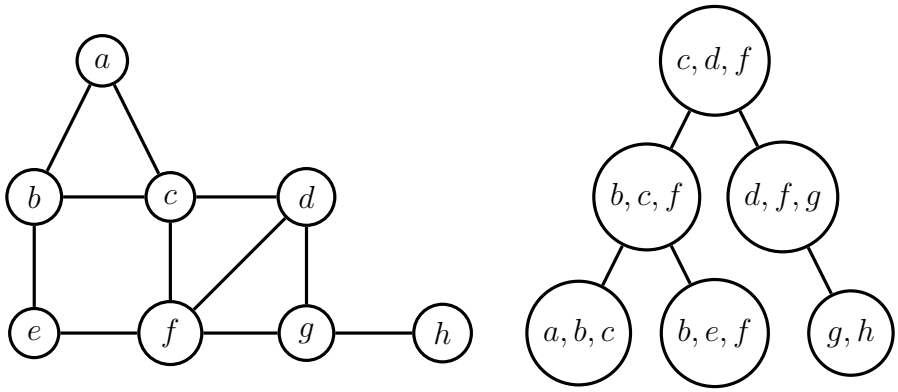
- $\bigcup_{t \in V(T)} X_t = V_G$,
- pour tout $uv \in E_G$, il existe $t \in V_T$ tel que $u$ et $v$ sont dans $X_t$,
- pour tout $v \in V_G$, l'ensemble $\{t \in V_T \mid v \in X_t\}$ induit un sous-arbre de $T$.

La *largeur* d'une décomposition arborescente $(T, \mathcal{X})$ est

$$max_{t \in V(T)} |X_t| - 1.$$

La *largeur arborescente* de $G$ est le minimum des largeurs pris sur l'ensemble des décompositions arborescentes de $G$. La largeur arborescente d'un graphe mesure une forme de "distance" du graphe à un arbre. Dans le cas d'un graphe avec transitions interdites ces notions sont définies de même en ignorant les transitions interdites.

**Exemple 3.11.** Un graphe et sa décomposition arborescente.




**Définition 3.12.** Un problème est dit *FPT* en un paramètre $p$ s'il existe un algorithme permettant de le résoudre en temps proportionnel à $f(p).n^{O(1)}$, où $n$ est la taille des données du problème et $f$ est une fonction calculable quelconque.

**Théorème 3.13.** *Le problème Ch.STI paramètré par $\ell + \Delta$ est FPT où $\ell$ est la largeur arborescente et $\Delta$ le degré maximum. En particulier, il existe un algorithme qui retourne le plus court Ch.STI (s'il existe) entre deux sommet en temps $O((k\Delta_G)^2(3k\Delta_G)^{2k}n)$.*

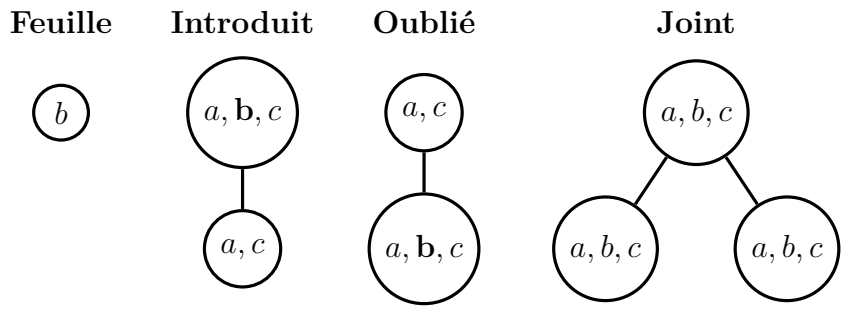
Pour prouver le théorème 3.13, commençons par donner une définition ainsi qu'un lemme.

**Définition 3.14.** [Klo94] Une décomposition arborescente munie d'un sommet racine $((T, \mathcal{X}), r)$ est dite *sympa* (nice en anglais) si tout nœud $u \in V_T$ est de l'un des types suivants :

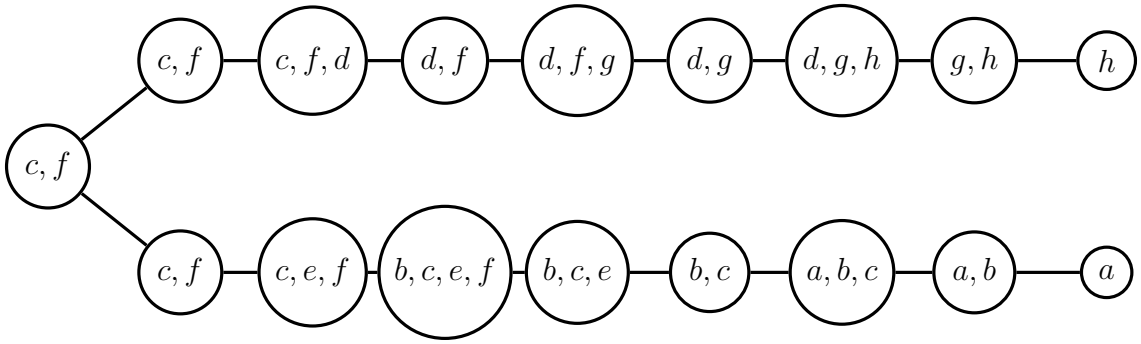
- **Feuille :** $u$ n'a pas de fils et $|X_u| = 1$

- **Introduit :** $u$ a un seul fils $v$ avec $X_v \subset X_u$ et $|X_u| = |X_v| + 1$,
- **Oublié :** $u$ a un seul fils $v$ avec $X_u \subset X_v$ et $|X_u| = |X_v| - 1$,
- **Joint :** $u$ a deux fils $v$ et $w$ avec $X_u = X_v = X_w$.

**Exemple 3.15.** Les différents types de nœuds.




Une décomposition arborescente sympa de racine $\{c, f\}$ du graphe de l'exemple 3.11.




**Lemme 3.16.** *[Klo94] Quand une décomposition arborescente de largeur $k$ d'un graphe $G$ est donnée, on peut construire en temps polynomial une décomposition arborescente sympa $(T, \mathcal{X})$ de $G$ de largeur $k$ avec $|V_T| \in O(k|V_G|)$.*

Nous allons utiliser la notion de décomposition arborescente sympa et adapter l'algorithme de programmation dynamique utilisé pour trouver un cycle hamiltonien dans les graphes de largeur arborescente bornée [Bod88] pour prouver le théorème 3.13.

*Démonstration du théorème 3.13.* Soit $G$ un graphe avec transitions interdites de largeur arborescente bornée $k$ ainsi que $s$ et $t$ deux sommets de $G$. On cherche, s'il existe, un plus court Ch.STI entre $s$ et $t$.

Pour $e$ et $f$ des arêtes incidentes à $s$ et $t$ respectivement, notons $G_{e,f}$ le sous-graphe avec transitions interdites obtenu à partir de $G$ en supprimant les arêtes incidentes à $s$ et $t$ sauf $e$ et $f$. Trouver un plus court Ch.STI entre $s$ et $t$ dans $G$ est équivalent à trouver un plus court Ch.STI entre $s$ et $t$ dans chacun des $G_{e,f}$ pour toutes les paires possibles $\{e, f\}$ et conserver l'un des plus courts d'entre eux. Dans ce qui suit, nous allons voir un algorithme permettant de trouver un plus court Ch.STI entre $s$ et $t$ dans $G_{e,f}$. Pour obtenir un plus court Ch.STI entre $s$ et $t$ dans $G$ nous aurons alors besoin de répéter notre algorithme au plus $\Delta_G^2$ fois.

Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition arborescente sympa de largeur $k$ et de taille $O(kn)$ de $G_{e,f}$ telle que $s$ apparaît dans la racine qui est un nœud introduit et que $t$ apparaît

dans deux nœuds, une feuille et son parent introduit. On peut obtenir une telle décomposition en prenant une décomposition arborescente sympa de $G[V_G \setminus \{s,t\}]$ obtenue avec le lemme 3.16 puis en ajoutant les nœuds dont on a besoin. Pour $u \in V_T$ on note $X_u$, $T_u$ et $V_u$ les sommets du sac correspondant à $u$, le sous-arbre de $T$ enraciné en $u$ formé des descendants de $u$ et les sommets des sacs correspondant aux nœuds de $T_u$ , respectivement.

S'il existe un Ch.STI noté $P$ entre $s$ et $t$, alors l'intersection de ce Ch.STI avec $G_{e,f}[V_u]$ où $u \in V_T$ est un ensemble de Ch.STI chacun ayant ses deux extrémités dans $X_u \cup \{t\}$. En ce qui concerne les parties de $P$ qui sont dans $G_{e,f}[V_u]$, les sommets de $X_u$ peuvent être partitionnés en trois sous-ensembles $X_u^0$, $X_u^1$ et $X_u^2$ qui sont les sommets de degré 0, 1 et 2 dans $P \cap G_{e,f}[V_u]$, respectivement. En outre, un couplage $M$ de $X_u^1$ si $|X_u^1|$ pair ou $X_u^1 \cup \{t\}$ si $|X_u^1|$ impair peut représenter les sommets qui sont extrémités d'un même sous-Ch.STI de $P$ et un ensemble $S$ les arêtes de $P \cap G_{e,f}[V_u]$ incidentes à un sommet de $X_u^1$.

Pour chaque nœud $u \in T$ le sous-problème $(X_u^0, X_u^1, X_u^2, M, S)$ où $(X_u^0, X_u^1, X_u^2)$ est une partition de $X_u$, $M$ est un couplage dans $X_u^1$ si $|X_u^1|$ pair ou dans $X_u^1 \cup \{t\}$ si $|X_u^1|$ impair et $S$ est un ensemble d'arêtes $G_{e,f}[V_u]$ incidente chacune à un sommet de $X_u^1$, consiste en la recherche d'un ensemble de Ch.STI dans $G_{e,f}[V_u]$ dont la somme des longueurs est la plus courte possible et tels que :

- les chemins contiennent les arêtes de $S$ et les sommets de $X_u^2$ et ils ne contiennent pas de sommet de $X_u^0$,
- les extrémités d'un même chemin forment un couple de $M$.

Pour trouver un plus court Ch.STI entre $s$ et $t$ dans $G_{e,f}$ nous avons besoin de résoudre tous les sous-problèmes $(X_u^0, X_u^1 = \{s\}, X_u^2, M = \{s,t\}, S = \{e\})$ à la racine (unique nœud contenant $s$). Pour cela, on résout à chaque nœud de $(T, \mathcal{X})$, en partant des feuilles vers la racine, tous les sous-problèmes possibles. Pour chaque nœud $u \in T$, il y a au plus $3^{k+1}$ partitions possibles des sommets de $X_u$ en trois ensembles différents, $k^k$ couplages possibles pour un ensemble à $k$ éléments et $\Delta_G$ arêtes possibles pour chaque sommet de $X_u^1$. On doit donc résoudre au plus $3^{k+1}k^k\Delta_G^k$ sous-problèmes.

Montrons comment résoudre le problème $(X_u^0, X_u^1, X_u^2, M, S)$ au nœud $u$ en supposant que tous les problèmes au niveau de ses descendants sont résolus :

- **<u>Si $u$ est une feuille</u>**, alors $X_u = \{a\}$. Le seul problème qui a une solution est $(X_u^0 = \{a\}, X_u^1 = \emptyset, X_u^2 = \emptyset, M = \emptyset, S = \emptyset)$ et sa solution est l'ensemble vide.
- **<u>Si $u$ est un nœud introduit</u>**, soit $v$ le fils de $u$. On a $X_u = X_v \cup \{a\}$ (tous les voisins de $a$ dans $V_u$ sont dans $X_u$). Notons que $a \neq t$ car $t$ apparaît dans un nœud oublié et son parent introduit. Dans ce cas, on procède comme suit.
  - Si $a \in X_u^0$, alors résoudre $(X_u^0, X_u^1, X_u^2, M, S)$ en $u$ est équivalent à résoudre $(X_u^0 \setminus \{a\}, X_u^1, X_u^2, M, S)$ en $v$. Une solution au problème en $u$ sera alors égale à une solution au problème en $v$. Voir figure 3.1.
  - Si $a \in X_u^1$, soit $ab$ l'arête incidente à $a$ dans $S$. Comme tous les voisins de $a$ dans $V_u$ sont dans $X_u$, alors $b \in X_u \cap X_v$. Nous avons les cas suivants :
    - Si $b = t$, alors $X_u = \{a, b\}$ (rappelons que $t$ apparaît dans une feuille et son parent introduit) et le seul problème qui a une solution en $u$ est $(\emptyset, \{a,t\}, \emptyset, \{at\}, \{at\})$. Sa solution est l'arête $at$. Traitons maintenant les cas où $b \neq t$.

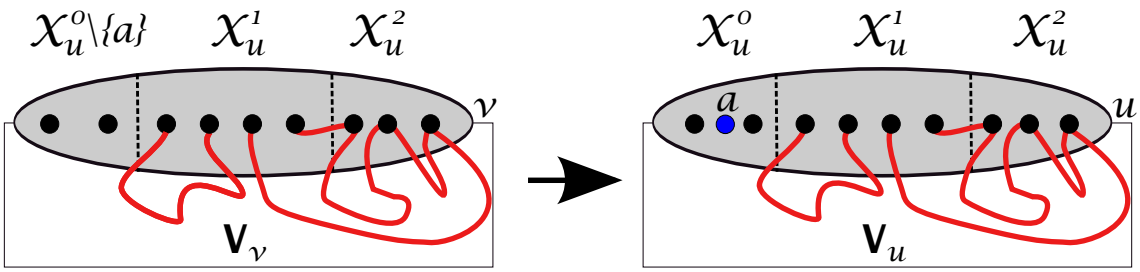



Figure 3.1 – $u$ est un nœud introduit et $a \in X_u^0$.

– Si $b \in X_u^1$ ($b \neq t$), alors le problème a une solution si et seulement si $\{ab\} \in M$, l'arête incidente à $b$ dans $S$ est $ab$ et s'il existe une solution en $v$ au problème $(X_u^0 \cup \{b\}, X_u^1 \setminus \{a, b\}, X_u^2, M', S')$ où $M' = M \setminus \{ab\}$ et $S' = S \setminus \{ab\}$. Une solution au problème en $u$ sera alors égale à une solution au problème en $v$ à laquelle on ajoute l'arête $ab$. Voir figure 3.2.

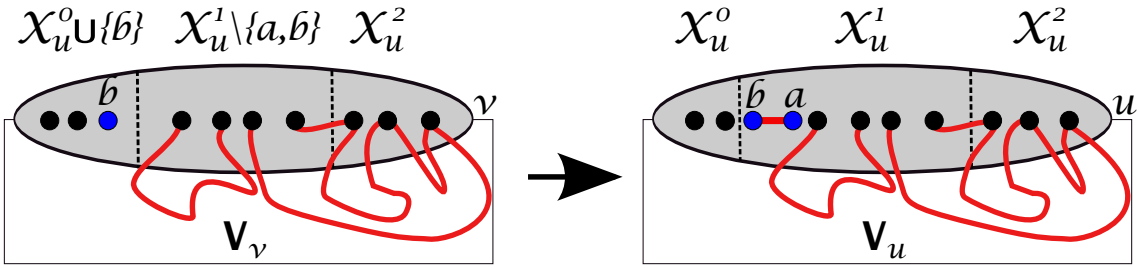



Figure 3.2 – $u$ est un nœud introduit, $a \in X_u^1$ et $b \in X_u^1$ ($b \neq t$).

– Si $b \in X_u^2$ ($b \neq t$), alors le problème a une solution si et seulement s'il existe une solution en $v$ à un des problèmes (dépendants de $c$) $(X_u^0, X_u^1 \setminus \{a\} \cup \{b\}, X_u^2 \setminus \{b\}, M', S')$ où $M' = M \setminus \{ac\} \cup \{bc\}$ et $S'$ en supprimant $ab$ de $S$ et en ajoutant une arête $bc$ avec $c \in V_v$ qui forme une transition autorisée avec $ab$. Une solution au problème en $u$ sera alors égale à une plus courte solution parmi celles aux problèmes en $v$ à laquelle on ajoute l'arête $ab$. Il y a au plus $\Delta_G$ tels problèmes. Voir figure 3.3.

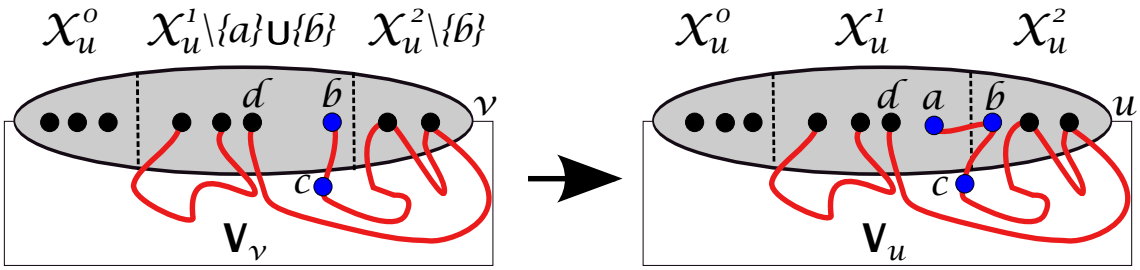



Figure 3.3 – $u$ est un nœud introduit, $a \in X_u^1$ et $b \in X_u^2$ ($b \neq t$).

– Si $a \in X_u^2$, alors pour toute paire de voisins $b$ et $c$ de $a$ dans $X_u$ telle que que $\{ba, ac\}$ est une transition autorisée on procède comme suit (le nombre de paires de voisins de $a$ est de l'ordre de $k^2$).

– Si $b \in X_u^1$ et $c \in X_u^1$, alors le problème a une solution si et seulement s'il existe une solution en $v$ au problème $(X_u^0 \cup \{b,c\}, X_u^1 \setminus \{b,c\}, X_u^2 \setminus \{a\}, M', S')$ où $M' = M \setminus \{bc\}$ et $S'$ est obtenu en supprimant $ab$ et $bc$ de $S$. Une solution au problème en $u$ sera alors égale à une solution au problème en $v$ à laquelle on ajoute les arêtes $ab$ et $ac$. Voir figure 3.4.

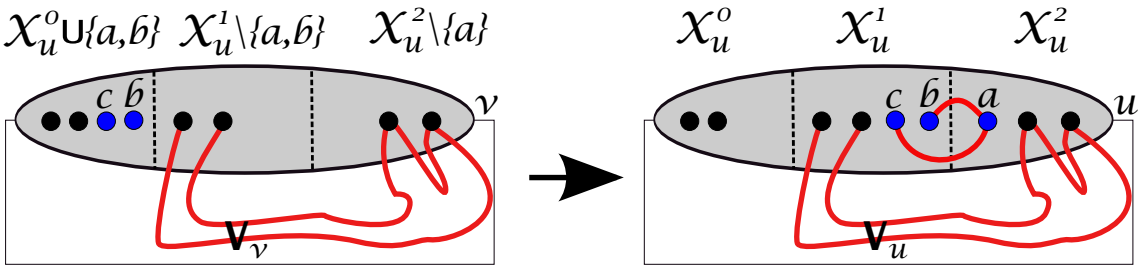



FIGURE 3.4 – $u$ est un nœud introduit, $a \in X_u^2$ et $b, c \in X_u^1$.

– Si $b \in X_u^2$ et $c \in X_u^2$, alors le problème a une solution si et seulement s'il existe une solution en $v$ à un des problèmes (dépendants de $h$, $h'$, $b'$, et $c'$) $(X_u^0, X_u^1 \cup \{b,c\}, X_u^2 \setminus \{a,b,c\}, M', S')$ où $M' = M \setminus \{hh'\} \cup \{bh, ch'\}$ ($bc$ ne doit pas être dans le couplage) et $S'$ est obtenu en ajoutant à $S$ deux arêtes $bb'$ et $cc'$ avec $b', c' \in V_v$ qui forment une transition autorisée avec $ab$ et $ac$ respectivement. Une solution au problème en $u$ sera alors égale à une plus courte solution parmi celles aux problèmes en $v$ à laquelle on ajoute les arêtes $ab$ et $ac$. Il y a au plus $k$ choix possibles pour $hh'$ et $\Delta_G^2$ choix possibles pour les deux arêtes que l'on ajoute à $S$. Voir figure 3.5.

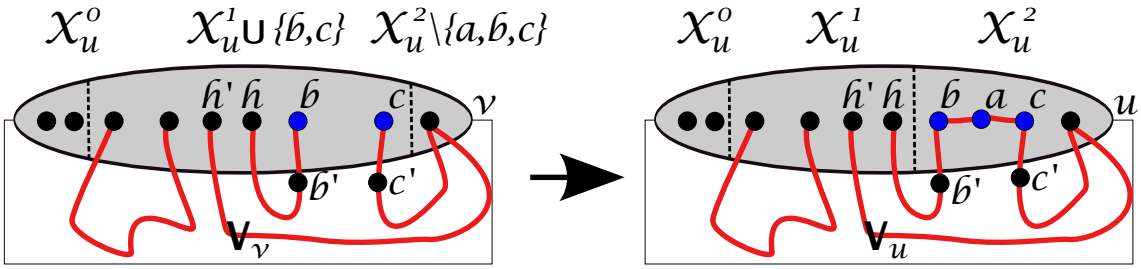



FIGURE 3.5 – $u$ est un nœud introduit, $a \in X_u^2$ et $b, c \in X_u^2$.

– Si $b \in X_u^2$ et $c \in X_u^1$, alors le problème a une solution si et seulement s'il existe une solution en $v$ à un des problèmes (dépendants de $b'$) $(X_u^0 \cup \{c\}, X_u^1 \cup \{b\} \setminus \{c\}, X_u^2 \setminus \{a,c\}, M', S')$ où $M' = M \setminus \{cd\} \cup \{bd\}$ et $S'$ est obtenu en supprimant $ac$ de $S$ et en ajoutant une arête $bb'$ avec $b' \in V_v$ qui forme une transition autorisée avec $ab$. Une solution au problème en $u$ sera alors égale à une plus courte solution parmi celles aux problèmes en $v$ à laquelle on ajoute les arêtes $ab$ et $ac$. Il y a au plus $\Delta_G$ possibilités pour $b'$. Voir figure 3.6.

– **<u>Si $u$ est un nœud oublié</u>**, soit $v$ le fils de $u$. On a $X_u = X_v \setminus a$. On distingue deux cas :
  – Si $a \neq t$, alors le problème $(X_u^0, X_u^1, X_u^2, M, S)$ a une solution si et seulement si l'un des problèmes $(X_u^0 \cup \{a\}, X_u^1, X_u^2, M, S)$ ou $(X_u^0, X_u^1, X_u^2 \cup \{a\}, M, S)$

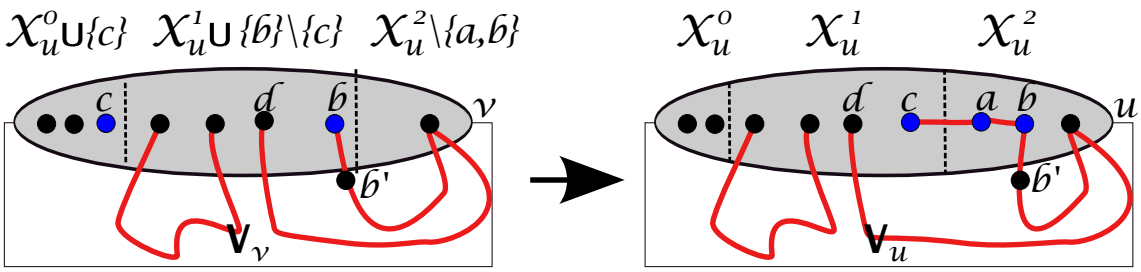



Figure 3.6 – $u$ est un nœud introduit, $a \in X_u^2$ et $b, c \in X_u^2$.

a une solution en $v$. Une solution au problème en $u$ sera alors égale à une plus courte solution parmi celles aux deux problèmes en $v$. Voir figure 3.7.

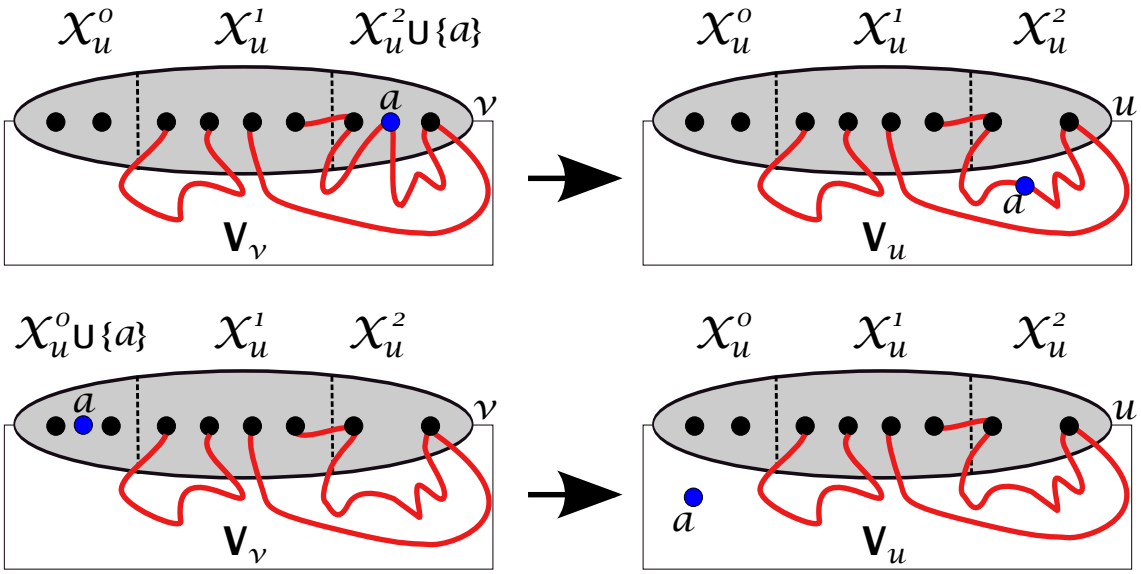



Figure 3.7 – $u$ est un nœud oublié et $a \neq t$.

– Si $a = t$, alors le problème $(X_u^0, X_u^1, X_u^2, M, S)$ a une solution si et seulement si le problème $(X_u^0, X_u^1 \cup \{a\}, X_u^2, M, S)$ a une solution en $v$. Une solution au problème en $u$ sera alors égale à une solution au problème en $v$. Voir figure 3.8.

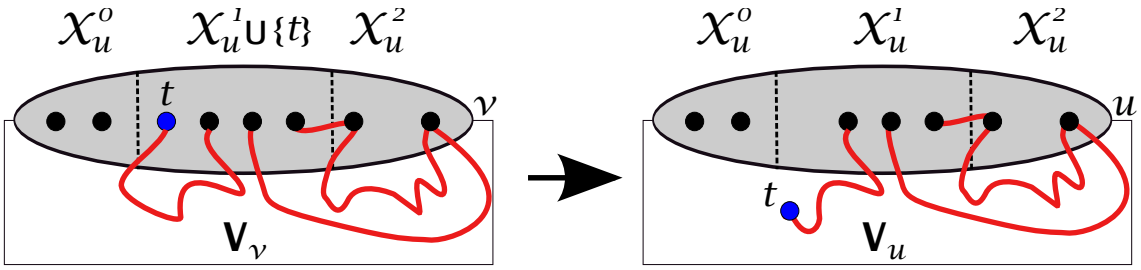



Figure 3.8 – $u$ est un nœud oublié et $a = t$.

– **Si $u$ est un nœud joint**, soient $v$ et $v'$ ses enfants. Rappelons que $X_u = X_v = X_{v'}$. Pour toute paire de sous-problèmes aux nœuds $v$ et $v'$ on vérifie

si l'union des deux solutions est une solution de $(X_u^0, X_u^1, X_u^2, M, S)$ au nœud $u$. Il y a au plus $(3^{k+1}k^k\Delta_G^k)^2$ paires de sous-problèmes aux nœuds $v$ et $v'$. Pour chacune d'elles on vérifie le degré des sommets après l'union, et si les transitions utilisées dans l'union sont autorisées. Voir figure 3.9 et 3.10.

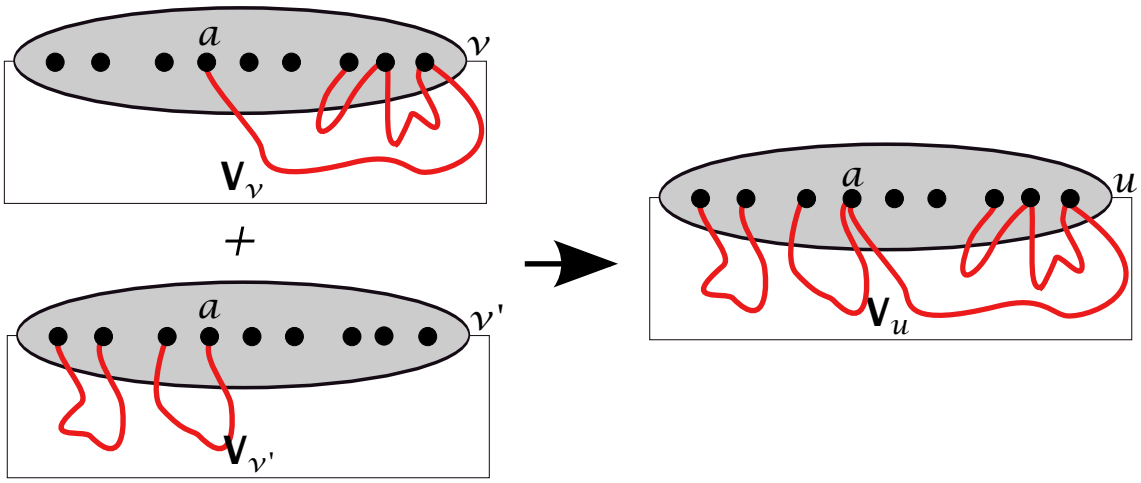



FIGURE 3.9 – $u$ est un un nœud joint - L'union des deux solutions aux nœuds $v$ et $v'$ est une solution au nœud $u$ si la transition de centre $a$ est autorisée.

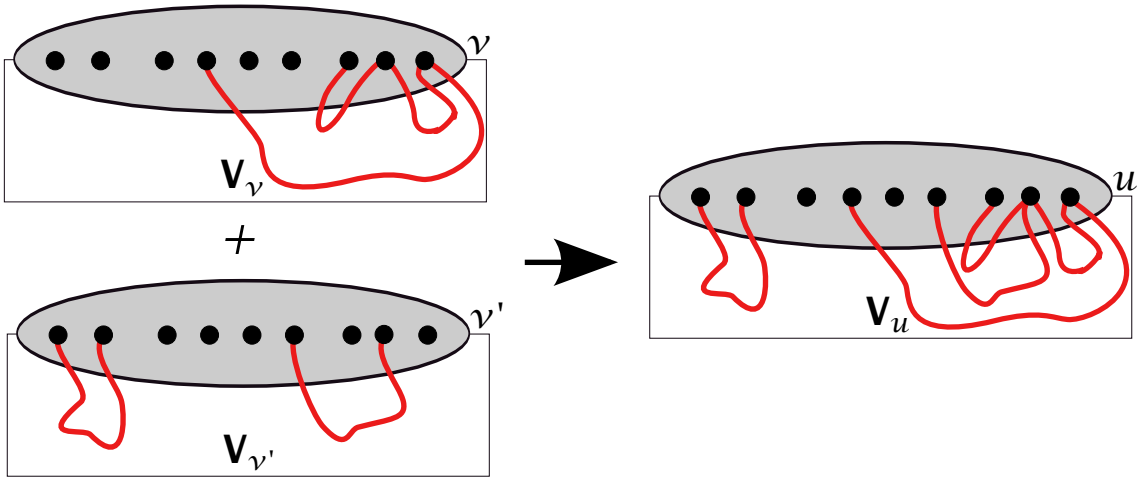



FIGURE 3.10 – $u$ est un un nœud joint - L'union des deux solutions aux nœuds $v$ et $v'$ n'est pas une solution au nœud $u$ car elle a un sommet de degré 3.

On peut donc résoudre un sous-problème en temps :
- $O(k\Delta_G^2(3k\Delta_G)^k)$ au niveau d'un nœud introduit,
- $O((3k\Delta_G)^k)$ au niveau d'un nœud oublié,
- $O(k(3k\Delta_G)^{2k})$ au niveau d'un nœud joint.

Ainsi, comme $G_{e,f}$ à $O(kn)$ nœud, on peut trouver un plus court Ch.STI entre $s$ et $t$ dans $G_{e,f}$ en temps $O(k^2(3k\Delta_G)^{2k}n)$. Finalement, en répétant cela au plus $\Delta_G^2$ fois, on peut trouver un plus court Ch.STI entre $s$ et $t$ dans $G$ (s'il existe) en temps $O((k\Delta_G)^2(3k\Delta_G)^{2k}n)$. Cela conclut la preuve. □

## 3.3 Conclusion et perspectives

Quand le nombre total de parcours interdits $p$ d'un graphe avec parcours interdits à $n$ sommets est bas et que ceux-ci sont de longueur bornée, un simple algorithme de séparation et évaluation (branch and bound) supprimant simplement une arête de chaque parcours interdit et testant toutes les possibilités permet d'obtenir un chemin sans parcours interdit dans un graphe avec parcours interdits de longueur bornée. En effet, un chemin ne prenant pas une arête de chaque parcours interdit est un Ch.SPI, et réciproquement, un Ch.SPI ne peut pas prendre toute les arêtes d'un parcours interdit, car sinon il prend, soit le parcours interdit, soit deux fois le même sommet. Lorsque $p = O(\log(n))$ cet algorithme est polynomial. Cependant, comme $p$ peut être plus grand que $n$, l'algorithme que nous proposons dans la section 3.1 est bien meilleur. Nous espérons encore pouvoir abaisser cette complexité en adaptant, par exemple, l'algorithme probabiliste de Björklund [Bjö14]. Nous souhaitons également chercher des algorithmes exacts pour les graphes ayant un degré ou degré moyen borné par une constante $d$. Nous aimerions obtenir un algorithme en temps $O(2^{(1-\varepsilon_d)n} n^{O(1)})$ où $\varepsilon_d$ dépend seulement de $d$. Voir pour cela [CP13] où le problème du voyageur de commerce est étudié dans les graphes de degré moyen borné. Enfin, toujours pour les problèmes de la section 3.1, une de nos perspectives est de regarder s'il existe des algorithmes Monte-Carlo en temps $c^{k+\Delta} n^{O(1)}$, où $k$ est la largeur arborescente, $\Delta$ le degré maximum et $c$ une constante fixée (on pourra consulter [CNP+11] pour des exemples de techniques).

Dans la section 3.2, nous avons prouvé que le problème Ch.STI peut être résolu en temps polynomial lorsque la largeur arborescente est bornée. Notons cependant que l'algorithme est XP de paramètre la largeur arborescente (*i.e.*, peut être résolu en temps $O(n^{f(p)})$ où $n$ est la taille des données du problème, $f$ une fonction calculable quelconque et $p$ le paramètre) et nous pensons que l'on ne peut pas faire mieux, c'est-à-dire qu'il est $W[1]$-difficile quand paramétré par la largeur arborescente (voir [FG06] pour plus de détails sur ces points).

# Chapitre 4

# Graphes planaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème Ch.STI dans les graphes planaires non orientés. L'idée d'étudier les graphes planaires semble tout à fait naturelle car la représentation des interdictions de tourner dans les réseaux routiers par des transitions interdites motive initialement leur utilisation. Or, de tels réseaux ne sont rien d'autre que des graphes planaires avec des transitions interdites. Les réseaux optiques planaires peuvent également être le support de transitions interdites. En effet, au niveau de certains nœuds d'un réseau optique, des informations entrant par un port ne peuvent sortir par certains autres pour des raisons de coût (voir par exemple les articles [BLGM09, CHW$^+$13]) et ce réseau peut donc être représenté par un graphe avec transitions interdites. Malgré leur utilité apparente, il semble que les graphes planaires avec transitions interdites n'aient pas encore été étudiés. Nous proposons donc dans ce chapitre, d'étudier le problème Ch.STI dans les graphes planaires non orientés. Nous prouvons que ce problème est $\mathscr{NP}$-complet y compris dans les grilles. Notre résultat améliore celui de Szeider car il prouve la $\mathscr{NP}$-complétude dans une classe plus restreinte de graphes. Pour cela, nous commençons par prouver que le problème est $\mathscr{NP}$-complet dans les graphes planaires de degré maximum au plus 8 en faisant une réduction à partir de 3-SAT. Ensuite, nous proposons des transformations pour réduire le degré des sommets et ainsi prouver que le problème est $\mathscr{NP}$-complet dans les graphes planaires de degré maximum au plus 4. Finalement, nous prouvons qu'il est $\mathscr{NP}$-complet dans les grilles. Comme Szeider, nous nous restreindrons à la classe des graphes dont les transitions sont symétriques, *i.e.*, si $(x, y, z)$ est une transition interdite alors $(z, y, x)$ aussi, et nous noterons simplement $\{xy, yz\}$ une telle transition.

## 4.1 $\mathscr{NP}$-complétude de Ch.STI dans les planaires de degré au plus 8

Commençons par montrer que le problème Ch.STI est $\mathscr{NP}$-complet dans les graphes planaires de degré maximum au plus 8. Le problème est clairement dans $\mathscr{NP}$. Montrons qu'il est complet pour cette classe en faisant une réduction à partir du problème 3-SAT. Prenons une instance $\Phi$ du problème 3-SAT ayant $n$ variables $\{v_1, \cdots, v_n\}$ et $m$ clauses $\{C_1, \cdots, C_m\}$. Nous allons construire un graphe planaire

en forme de “grille” dont les lignes correspondent aux clauses et les colonnes aux variables. Dans ce qui suit, les couleurs servent seulement à rendre la présentation plus claire. De plus, nous considérons uniquement des graphes non orientés, mais pour faciliter la présentation et bien visualiser les chemins, les figures sont représentées avec des arcs. Notons également que, par souci de simplicité, nous utiliserons des multigraphes (*i.e.*, que nous pourrons avoir plusieurs arêtes entre deux sommets donnés). Ces multigraphes peuvent facilement être transformés en graphes simples sans changer le degré maximum.

**Gadget $G_{ij}$.** Pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $1 \leq j \leq m$, on définit le gadget $G_{ij}$ décrit dans la figure 4.1 et qui consiste en 4 chemins arêtes-disjoints de $s_{ij}$ à $t_{ij}$ : deux chemins “bleus” $\mathcal{B}T_{ij}$ et $\mathcal{B}F_{ij}$ et deux chemins “rouges" $\mathcal{R}T_{ij}$ et $\mathcal{R}F_{ij}$ définis comme suit.

- $\mathcal{R}T_{ij} = (s_{ij}, \alpha_{ij}, true_{ij}, x_{ij}, true'_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, t_{ij})$ ;
- $\mathcal{B}T_{ij} = (s_{ij}, \beta_{ij}, true_{ij}, x_{ij}, true'_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, t_{ij})$ ;
- $\mathcal{R}F_{ij} = (s_{ij}, x_{ij}, y_{ij}, \gamma_{ij}, false_{ij}, z_{ij}, false'_{ij}, t_{ij})$ ;
- $\mathcal{B}F_{ij} = (s_{ij}, x_{ij}, y_{ij}, \delta_{ij}, false_{ij}, z_{ij}, false'_{ij}, t_{ij})$.

Les transitions interdites $\mathcal{F}_{ij}$ du gadget $G_{ij}$ sont définies de sorte que la seule manière d'aller de $s_{ij}$ à $t_{ij}$ soit de prendre l'un des chemins de l'ensemble

$$\{\mathcal{B}T_{ij}, \mathcal{B}F_{ij}, \mathcal{R}T_{ij}, \mathcal{R}F_{ij}\}$$

et il est interdit d'utiliser une transition composée de deux arêtes provenant de deux chemins différents de cet ensemble.

Intuitivement, affecter à la variable $v_i$ la valeur $Vrai$ sera équivalent à choisir l'un des chemins $\mathcal{B}T_{ij}$ ou $\mathcal{R}T_{ij}$ (appelés chemins *positifs*) représentés par des lignes continues dans la figure 4.1. Respectivement, affecter à la variable $v_i$ la valeur $Faux$ sera équivalent à choisir l'un des chemins $\mathcal{B}F_{ij}$ ou $\mathcal{R}F_{ij}$ (appelés chemins *négatifs*) représentés par des pointillés dans la figure 4.1.

Pour l'instant, il n'est pas possible de partir de $s_{ij}$ par un chemin et d'arriver dans $t_{ij}$ par un autre chemin. En particulier, la couleur de l'arête par laquelle $s_{ij}$ est quitté doit être la même que celle de l'arête par laquelle $t_{ij}$ est atteint. Si la variable $v_i$ apparaît à la clause $C_j$, nous ajoutons une arête à $G_{ij}$ comme suit. Si $v_i$ apparaît positivement dans $C_j$, nous ajoutons l'arête marron $\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\}$ qui crée un “pont” entre $\mathcal{B}T_{ij}$ and $\mathcal{R}T_{ij}$. De manière similaire, $v_i$ apparaît négativement dans $C_j$, nous ajoutons l'arête verte $\{\gamma_{ij}, \delta_{ij}\}$ qui crée un “pont” entre $\mathcal{B}F_{ij}$ et $\mathcal{R}F_{ij}$. Lorsque le gadget-graphe $G_{ij}$ contient l'arête marron (resp. verte) toutes les transitions contenant cette arête sont autorisées ; cela permet de passer/basculer entre les chemins positifs $\mathcal{B}T_{ij}$ et $\mathcal{R}T_{ij}$ (resp. $\mathcal{B}F_{ij}$ et $\mathcal{R}F_{ij}$) en allant de $s_{ij}$ à $t_{ij}$. Par conséquent, lorsque la variable $v_i$ apparaît à la clause $C_j$, il est alors possible de quitter $s_{ij}$ avec une arête d'une couleur et d'arriver à $t_{ij}$ avec une arête de l'autre couleur. Notons qu'à cause des transitions interdites, le type de chemin (positif ou négatif) ne peut pas être modifié entre $s_{ij}$ et $t_{ij}$.

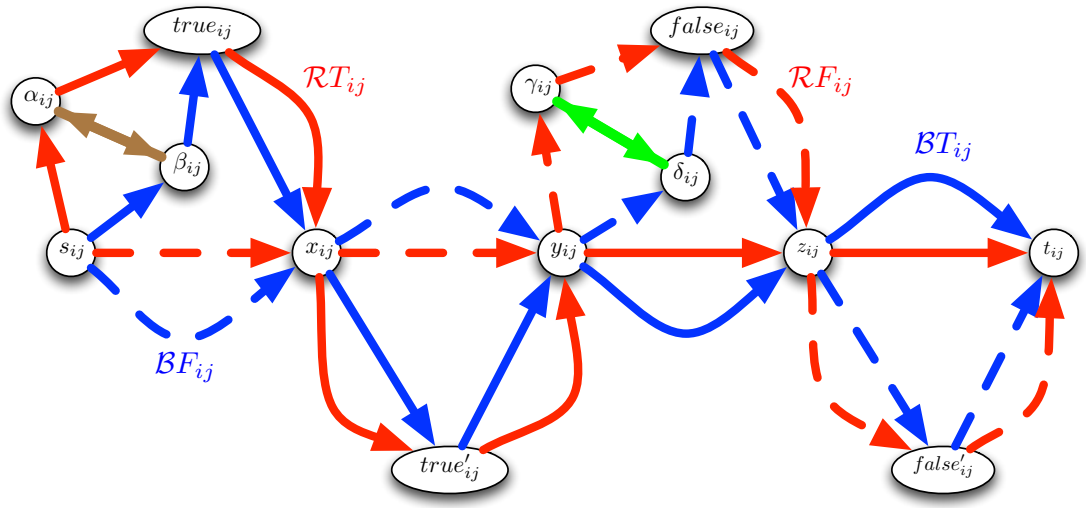



FIGURE 4.1 – Exemple de gadget $G_{ij}$ pour la variable $v_i$ et $j \leq m$. L'arête marron (resp. verte) est ajoutée si $v_i$ apparaît positivement (resp. négativement) dans $C_j$. Si $v_i \notin C_j$ aucune de ces arêtes n'est ajoutée.

Caractérisons les Ch.STI de $s_{ij}$ à $t_{ij}$ dans $G_{ij}$ :

**Affirmation 4.1.** Les Ch.STI de $s_{ij}$ à $t_{ij}$ dans $G_{ij}$ sont $\mathcal{R}T_{ij}, \mathcal{B}T_{ij}, \mathcal{R}F_{ij}, \mathcal{B}F_{ij}$ et
- si la variable $v_i$ apparaît positivement dans la clause $C_j$ :
  - le chemin $\mathcal{RB}T_{ij}$ qui commence par la première arête $\{s_{ij}, \alpha_{ij}\}$ de $\mathcal{R}T_{ij}$, suivie de l'arête marron $\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\}$ et termine par le chemin $\mathcal{B}T_{ij}$ sauf sa première arête ;
  - le chemin $\mathcal{BR}T_{ij}$ qui commence par la première arête $\{s_{ij}, \beta_{ij}\}$ de $\mathcal{B}T_{ij}$, suivie de l'arête marron $\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\}$ et termine par le chemin $\mathcal{R}T_{ij}$ sauf sa première arête ;
- si la variable $v_i$ apparaît négativement dans la clause $C_j$ :
  - le chemin $\mathcal{RB}F_{ij}$ qui commence par le sous-chemin $(s_{ij}, x_{ij}, y_{ij}, \gamma_{ij})$ de $\mathcal{R}F_{ij}$, suivi de l'arête verte $\{\gamma_{ij}, \delta_{ij}\}$ et termine par le sous-chemin de $\mathcal{B}F_{ij}$ qui commence à $\delta_{ij}$ et finit à $t_{ij}$ ;
  - le chemin $\mathcal{BR}F_{ij}$ qui commence par le sous-chemin $(s_{ij}, x_{ij}, y_{ij}, \delta_{ij})$ de $\mathcal{B}F_{ij}$, suivi de l'arête verte $\{\delta_{ij}, \gamma_{ij}\}$ et termine par le sous-chemin de $\mathcal{R}F_{ij}$ qui commence à $\gamma_{ij}$ et finit à $t_{ij}$ ;

**Affirmation 4.2.** Soit $P_{ij}$ un Ch.STI de $s_{ij}$ à $t_{ij}$ dans $G_{ij}$. Alors
- soit $P_{ij}$ passe par $true_{ij}$ et $true'_{ij}$ et ne passe ni par $false_{ij}$ ni par $false'_{ij}$,
- soit $P_{ij}$ passe par $false_{ij}$ et $false'_{ij}$ et ne passe ni par $true_{ij}$ ni par $true'_{ij}$.

**Affirmation 4.3.** Soit $P_{ij}$ un Ch.STI de $s_{ij}$ à $t_{ij}$ dans $G_{ij}$. Alors la première et la dernière arête de $P$ sont de couleurs différentes si et seulement si $P$ utilise l'arête marron ou l'arête verte, *i.e.*, si et seulement si $P_{ij} \in \{\mathcal{RB}T_{ij}, \mathcal{BR}T_{ij}, \mathcal{RB}F_{ij}, \mathcal{BR}F_{ij}\}$.

**Graphe $G_j$.** Pour $1 \leq j \leq m$, le clause-graphe $G_j$ est construit en combinant les graphes $G_{ij}$, $i \leq n$, en une "ligne" (fig. 4.2). Les sous-graphes $G_{ij}$ sont combinés

de “gauche à droite” (pour $i = 1$ à $n$) si $j$ est impair et de “droite à gauche” (pour $i = n$ à 1) si $j$ est pair. De manière plus détaillée, pour $j \leq m$, $G_j$ et obtenu à partir des gadget-graphes $G_{ij}$, $1 \leq i \leq n$, et de deux sommets additionnels $s_j$ et $t_j$ comme suit :

- Si $j$ est impair, le sous-graphe $G_j$ commence par une arête rouge $\{s_j, s_{1j}\}$ puis, pour $1 < i \leq n$, les sommets $s_{ij}$ et $t_{i-1,j}$ sont fusionnés en un seul sommet. Finalement, il y a une arête bleue $\{t_{nj}, t_j\}$.
- Si $j$ est pair, le sous-graphe $G_j$ commence par une arête bleue $\{s_j, s_{nj}\}$ puis, pour $1 < i \leq n$, les sommets $t_{ij}$ et $s_{i-1,j}$ sont fusionnés en un seul sommet. Finalement, il y a une arête rouge $\{t_{1j}, t_j\}$.

Les transitions interdites $\mathcal{I}nt_{G_j}$ comprennent, outre toutes les transitions dans $\mathcal{I}nt_{G_{ij}}$ pour $i = 1, \ldots, n$, de nouvelles transitions interdites qui sont définies de telle sorte que, lors du passage à partir d'un gadget-graphe $G_{ij}$ au suivant, la même couleur doit être utilisée. Cela signifie que si nous entrons dans un sommet $t_{ij} = s_{i,j+1}$ par une arête avec une couleur donnée, la même couleur doit être utilisée pour quitter ce sommet. Cependant, à de tels sommets, nous pouvons changer le type (positif ou négatif) du chemin.

Notons que si nous entrons dans un clause-graphe par une arête rouge (resp. bleue), nous ne pouvons le quitter qu'avec une arête bleue (resp. rouge). Cela signifie que le chemin doit changer de couleur à l'intérieur du clause-graphe, et doit donc utiliser une arête marron ou verte dans un gadget-graphe. L'utilisation d'une arête marron (resp. verte) force une variable qui apparaît positivement (resp. négativement) dans la clause à prendre la valeur Vrai (resp. Faux) et valide la clause.

Les propriétés clés de $G_j$ sont liées à la structure des Ch.STI de $s_j$ à $t_j$, que nous résumons dans les affirmations 4.4 et 4.5.

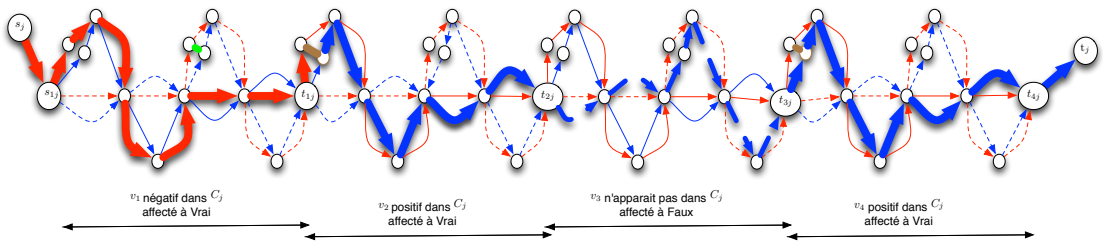



FIGURE 4.2 – Cas $j$ impair. Le clause-graphe $G_j$ pour une clause $C_j = \bar{v}_1 \vee v_2 \vee v_4$ d'une formule à 4 variables. Le chemin en gras correspond à une affectation à $Vrai$ de $v_1, v_2$ et $v_4$, et à $Faux$ de $v_3$.

**Affirmation 4.4.** Tout Ch.STI de $s_j$ à $t_j$ consiste en la concaténation de :

**Cas $j$ impair.** l'arête rouge $\{s_j, s_{1j}\}$, puis la concaténation de Ch.STI de $s_{ij}$ à $t_{ij}$ dans $G_{ij}$, pour $1 \leq i \leq n$ dans cet ordre, (de $i = 1$ à $n$), et finalement l'arête bleue $\{t_{nj}, t_j\}$ ;

**Cas $j$ pair.** l'arête bleue $\{s_j, s_{nj}\}$, puis la concaténation de Ch.STI de $s_{ij}$ à $t_{ij}$ dans $G_{ij}$, pour $1 \leq i \leq n$ dans l'ordre inverse (de $i = n$ à 1), et finalement l'arête rouge $\{t_{1j}, t_j\}$.

D'après l'affirmation précédente, tous les Ch.STI de $s_j$ à $t_j$, ont leur première et leur dernière arête de couleurs différentes. Ainsi, d'après l'affirmation 4.3 et la définition des transitions permises entre deux gadgets.

**Affirmation 4.5.** Tout Ch.STI de $s_j$ à $t_j$ doit utiliser une arête marron ou une arête verte dans un gadget $G_{ij}$ pour un certain $1 \leq i \leq n$.

**Graphe $G(\Phi)$.** Pour conclure, nous devons être sûrs que l'affectation des variables est cohérente entre les clauses. Pour ce faire, nous combinons les sous-graphes $G_j$, $1 \leq j \leq m$, comme suit (voir fig. 4.3). Tout d'abord, pour tout $1 \leq j < m$, nous identifions $t_j$ et $s_{j+1}$. Puis, certains sommets (représentés en gris dans la figure 4.3) de $G_{ij}$ sont identifiés avec des sommets de $G_{i,j+1}$ de telle manière que l'utilisation d'un chemin positif (resp. négatif) en $G_{ij}$ force l'utilisation du même type de chemin dans $G_{i,j+1}$. C'est-à-dire, le choix du chemin utilisé dans $G_{ij}$ est transféré à $G_{i,j+1}$ et donc il correspond à une même affectation de la variable $v_i$.

À savoir, pour chaque $1 \leq j < m$ et pour chaque $1 \leq i \leq n$, nous identifions les sommets $true_{i,j+1}$ et $false'_{ij}$ d'une part, et les sommets $true'_{ij}$ and $false_{i,j+1}$ d'autre part pour obtenir les sommets "gris". Enfin, les transitions interdites $\mathcal{I}nt_{G(\Phi)}$ de $G(\Phi)$, comprennent, outre toutes les transitions de $\mathcal{I}nt_{G_j}$ pour $j = 1, \ldots, m$, de nouvelles transitions qui sont définies afin d'interdire le "changement d'étage" par un sommet gris, c'est-à-dire, pour qu'il ne soit pas possible de passer de $G_{i,j}$ à $G_{i,j+1}$ via un sommet gris. Les affirmations suivantes présentent les propriétés essentielles des Ch.STI dans $G(\Phi)$.

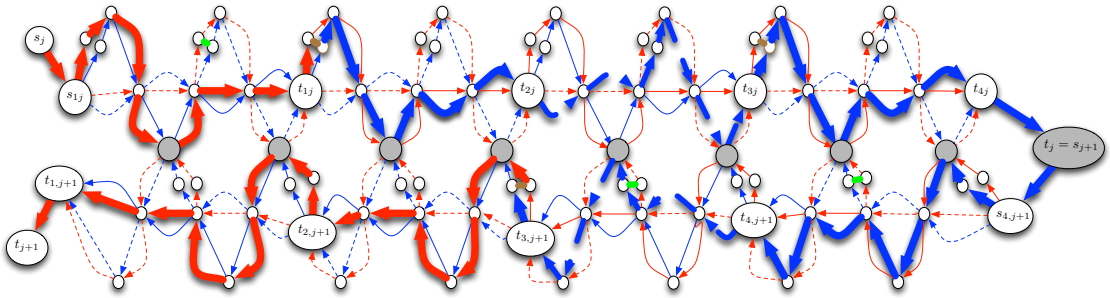



FIGURE 4.3 – Combinaison de $C_j = \bar{v}_1 \vee v_2 \vee v_4$ et $C_{j+1} = v_2 \vee \bar{v}_3 \vee \bar{v}_4$ (Cas $j$ impair).

**Affirmation 4.6.** Tout Ch.STI de $s_1$ à $t_m$ dans $G(\Phi)$ consiste en la concaténation de Ch.STI de $s_j$ de $t_j$ dans $G_j$ pour $j = 1$ à $m$.

**Affirmation 4.7.** Soit $P$ un Ch.STI de $s_1$ à $t_m$ dans $G(\Phi)$. Alors, pour $1 \leq i \leq n$

- soit pour tout $1 \leq j \leq m$, le sous-Ch.STI de $P$ entre $s_{ij}$ et $t_{ij}$ passe par $true_{ij}$ et $true'_{ij}$ et ne passe ni par $false_{ij}$ ni par $false'_{ij}$,
- soit pour tout $1 \leq j \leq m$, le sous-Ch.STI de $P$ entre $s_{ij}$ et $t_{ij}$ passe par $false_{ij}$ et $false'_{ij}$ et ne passe ni par $true_{ij}$ ni par $true'_{ij}$.

*Démonstration.* Prenons $1 \leq i \leq n$. D'après les affirmations 4.4 et 4.6, pour tout $1 \leq j \leq m$ il existe un sous-Ch.STI $P_{ij}$ de $P$ allant de $s_{ij}$ à $t_{ij}$. De plus, pour

$1 \leq j \leq m$, les Ch.STI $P_{ij}$ sont deux à deux sommet-disjoints (*i.e.*, sans sommet commun).

D'après l'affirmation 4.2, $P_{i1}$ passe, soit par $true_{i1}$ et $true'_{i1}$ et ne passe ni par $false_{i1}$ ni par $false'_{i1}$, soit par $false_{i1}$ et $false'_{i1}$ et ne passe ni par $true_{i1}$ ni par $true'_{i1}$. Supposons que nous soyons dans le premier cas (le second se traite de manière similaire). On prouve par récurrence sur $j \leq m$ que $P_{ij}$ passe par $true_{ij}$ et $true'_{ij}$ et ne passe ni par $false_{ij}$ ni par $false'_{ij}$.

En effet, si $P$ passe par $true_{ij} = false'_{i,j+1}$ et $true'_{ij} = false_{i,j+1}$, alors $P_{i,j+1}$ ne peut passer ni par $false_{i,j+1}$ ni par $false'_{i,j+1}$ car $P_{ij}$ et $P_{i,j+1}$ sont sommet-disjoints. Ainsi, d'après l'affirmation 4.2, $P_{i,j+1}$ passe par $true_{i,j+1}$ et $true'_{i,j+1}$ et ne passe ni par $false_{i,j+1}$ ni par $false'_{i,j+1}$. Cela conclut la preuve. □

Notons que $G(\Phi)$ peut être construit en temps polynomial. De plus, $G(\Phi)$ est clairement planaire et de degré maximum au plus 8. Nous pouvons maintenant montrer le résultat suivant.

**Affirmation 4.8.** $\Phi$ est satisfaisable si et seulement s'il existe un Ch.STI de $s_1$ à $t_m$ dans $G(\Phi)$.

*Démonstration.* Soit $\varphi$ une affectation des variables rendant vraie l'instance $\Phi$. Nous pouvons construire un Ch.STI de $s_1$ à $t_m$ dans $G(\Phi)$ comme suit. Pour chaque "ligne" $1 \leq j \leq m$, nous construisons un Ch.STI $P_j$ allant de $s_j$ à $t_j$ en concaténant l'arête rouge $\{s_j, s_{1j}\}$ si $j$ impair ou l'arête bleue $\{s_j, s_{nj}\}$ si $j$ pair, les Ch.STI $P_{ij}$, $1 \leq i \leq n$, dont la construction est décrite juste après, et l'arête bleue $\{t_{nj}, t_j\}$ si $j$ impair ou l'arête rouge $\{t_{1j}, t_j\}$ si $j$ pair.

Parmi les variables qui apparaissent dans $C_j$, notons $v_k$ la variable avec le plus petit indice tel satisfaisant la clause avec l'affectation $\varphi$.

- Pour $1 \leq i < k$, si $\varphi(v_i) = true$, alors $P_{ij} = \mathcal{R}T_{ij}$ si $j$ est impair, et $P_{ij} = \mathcal{B}T_{ij}$ si $j$ est pair. Si $\varphi(v_i) = false$, alors $P_{ij} = \mathcal{R}F_{ij}$ si $j$ est impair, et $P_{ij} = \mathcal{B}F_{ij}$ si $j$ est pair.
- Si $\varphi(v_k) = true$, alors $P_{ij} = \mathcal{RB}T_{ij}$ si $j$ est impair, et $P_{ij} = \mathcal{BR}T_{ij}$ si $j$ est pair. Si $\varphi(v_k) = false$, alors $P_{ij} = \mathcal{RB}F_{ij}$ si $j$ est impair, et $P_{ij} = \mathcal{BR}F_{ij}$ if $j$ est pair.
- Pour $k < i \leq n$, si $\varphi(v_i) = true$, alors $P_{ij} = \mathcal{B}T_{ij}$ si $j$ est impair, et $P_ij = \mathcal{R}T_{ij}$ if $j$ est pair. If $\varphi(v_i) = false$, alors $P_{ij} = \mathcal{B}F_{ij}$ si $j$ est impair, et $P_{ij} = \mathcal{R}F_{ij}$ si $j$ est pair.

Supposons maintenant qu'il existe un Ch.STI $P$ de $s_1$ à $t_m$. D'après l'affirmation 4.7, pour tout $1 \leq i \leq n$ on a, pour tout $1 \leq j \leq m$, $P$ passe par $true_{ij}$ et $true'_{ij}$ ou pour tout $1 \leq j \leq m$, $P$ passe par $false_{ij}$ et $false'_{ij}$. Considérons l'affectation $\varphi$ suivante définie pour $1 \leq i \leq n$ :

- Si $P$ passe par $true_{ij}$ et $true'_{ij}$ pour tout $1 \leq j \leq m$, alors $\varphi(v_i) = Vrai$.
- Si $P$ passe par $false_{ij}$ et $false'_{ij}$ pour tout $1 \leq j \leq m$, alors $\varphi(v_i) = Faux$.

D'après l'affirmation 4.7, $\varphi$ est une affectation valide. Montrons maintenant $\varphi$ satisfait $\Phi$. D'après l'affirmation 4.6, pour tout $1 \leq j \leq m$, $P$ contient un Ch.STI $P_j$ allant de $s_j$ de $t_j$. Chaque Ch.STI $P_j$ utilise une arête marron ou une arête verte comme vu à l'affirmation 4.3.

En respectant les moyens d'utiliser une arête marron ou verte vus dans l'affirmation 4.1, l'utilisation de l'arête marron dans $P_j$ force $P_j$ (et donc $P$) à utiliser, pour

une variable $v_i$ qui apparaît positivement dans $C_j$, les sommets $true_{ij}$ et $true'_{ij}$. De manière similaire, l'utilisation de l'arête verte dans $P_j$ force $P_j$ (et donc $P$) à utiliser, pour une variable $v_i$ qui apparaît négativement dans $C_j$, les sommets $false_{ij}$ et $false'_{ij}$. Cela signifie que pour chaque clause $C_j$, pour l'une des variables qui apparaît dans $C_j$ notée $v_i$, $\varphi(v_i) = Vrai$ (resp. $\varphi(v_i) = Faux$) si $v_i$ apparaît positivement (resp. négativement) dans $C_j$. Ainsi, l'affectation $\varphi$ satisfait $\Phi$. Cela conclut la preuve. □

On déduit de ce qui précède le résultat suivant :

**Lemme 4.9.** *Le problème Ch.STI est $\mathscr{N}\mathscr{P}$-complet dans les graphes planaires de degré maximum au plus* 8.

## 4.2 $\mathscr{N}\mathscr{P}$-complétude de Ch.STI dans les planaires de degré au plus 4

Dans le but de réaliser un plongement du graphe obtenu dans la réduction précédente vers une grille, nous allons montrer comment réduire à 4 le degré de $G(\Phi)$. Rappelons que par construction on a :

- $G(\Phi)$ est planaire.
- Les sommets de $G(\Phi)$ sont de degré 8, 5 ou au plus $\leq 4$. Les sommets de degré 5 peuvent être transformés en sommets de degré 3 comme suit. Pour un sommet $s_{1j}$ (resp. $t_{1j}$) avec $j$ impair, on supprime les deux arêtes bleues incidentes à $s_{1j}$ (resp. $t_{1j}$). Pour un sommet $s_{nj}$ (resp. $t_{1j}$) avec $j$ pair, on supprime les deux arêtes rouges incidentes à $s_{nj}$ (resp. $t_{1j}$). Cette transformation n'affecte pas la réduction.
- Un sommet $v$ de $G(\Phi)$ de degré 8 est de l'un des trois types suivants :

  **Type** 1 **:** Si les arêtes incidentes à $v$ sont $\omega(v) = \{e, e', f, f', g, g', h, h'\}$ et les transitions autorisées de centre $v$ sont $A(v) = \{\{e, e'\}, \{f, f'\}, \{g, g'\}, \{h, h'\}\}$. Cette situation est représentée par la figure 4.4. Dans ce cas $v$ est un sommet du type $x_{ij}$, $y_{ij}$ ou $z_{ij}$ dans le graphe $G(\Phi)$.

  **Type** 2 **:** Les arêtes incidentes à $v$ sont $\omega(v) = \{e, e', f, f', g, g', h, h'\}$ et les transitions autorisées de centre $v$ sont $A(v) = \{\{e, e'\}, \{f, f'\}, \{g, g'\}, \{h, h'\}\}$. Cette situation est représentée par la figure 4.6. Dans ce cas $v$ est un sommet du type $true_{ij}$, $true'_{ij}$, $false_{ij}$, ou $false'_{ij}$ dans le graphe $G(\Phi)$.

  **Type** 3 **:** Les arêtes incidentes à $v$ sont $\omega(v) = \{e, e', f, f', g, g', h, h'\}$ et les transitions autorisées de centre $v$ sont $A(v) = \{\{e, e'\}, \{e, f'\}, \{f, f'\}, \{f, e'\}, \{g, g'\}, \{g, h'\}, \{h, h'\}, \{h, g'\}\}$. Cette situation est représentée par la figure 4.8. Dans ce cas $v$ est un sommet du type $s_{ij}$ dans le graphe $G(\Phi)$.

Nous allons remplacer chaque sommet $v$ de degré 8 par un gadget $D_v$. Après cette opération nous obtiendrons un graphe avec transitions interdites $G'(\Phi)$ de degré maximum au plus 4 et tel que l'existence d'un Ch.STI entre $s_1$ et $t_m$ dans $G$ soit équivalente à l'existence d'un Ch.STI entre $s_1$ et $t_m$ dans $G'(\Phi)$. Soit $v$ un sommet de degré 8 dans $G$. Le gadget $D_v$ est construit suivant le type de $v$ comme suit.

**Type** 1 Le gadget $D_v$ est construit comme suit. Pour toute arête $k \in \omega(v)$, un sommet $v_k$ est créé. Pour toute transition autorisée $\{k, l\} \in A(v)$, les sommets $v_k$ and $v_l$ sont reliés par un chemin $P_{kl}$ de longueur 4 de sorte que le graphe obtenu soit planaire, que les quatre chemins $P_{kl}$ aient deux à deux 1 sommet commun et que tous ces sommets soient distincts comme illustré à la figure 4.5. Ainsi, les sommets sont de degré au plus 4. Les transitions autorisées de $D_v$ sont les transitions des chemins $P_{kl}$. Ensuite, on remplace $v$ dans $\mathcal{E}$ par le gadget $D_v$ donné à la figure 4.5 en reliant chaque arête $k \in \omega(v)$ de $G(\Phi)$ au sommet $v_k$ de $D_v$ et en autorisant les transitions contenant ces arêtes. Comme les arêtes $k \in \omega(v)$ sont reliées à $D_v$ dans le même "ordre" que celui dans lequel elles étaient reliées à $v$ dans $\mathcal{E}$ le graphe reste planaire (voir figures 4.4 et 4.5). Remarquons que le gadget $D_v$ peut être traversé si et seulement si les arêtes utilisées pour entrer et sortir forment une transition autorisée de centre $v$, et qu'il ne peut pas être traversé deux fois car sinon on passerait deux fois par un même sommet.

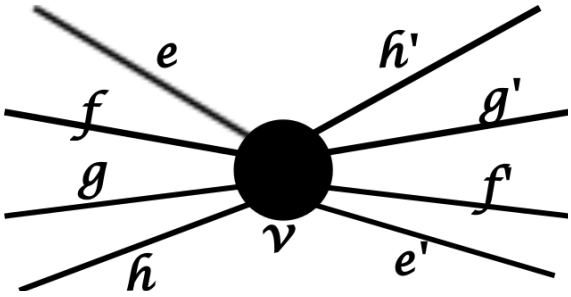



FIGURE 4.4 – Type 1 : un sommet $v$ de degré 8 centre des transitions autorisées $A(v) = \{\{e, e'\}, \{f, f'\}, \{g, g'\}, \{h, h'\}\}$ les arêtes sont ordonnées comme dans $G(\Phi)$).

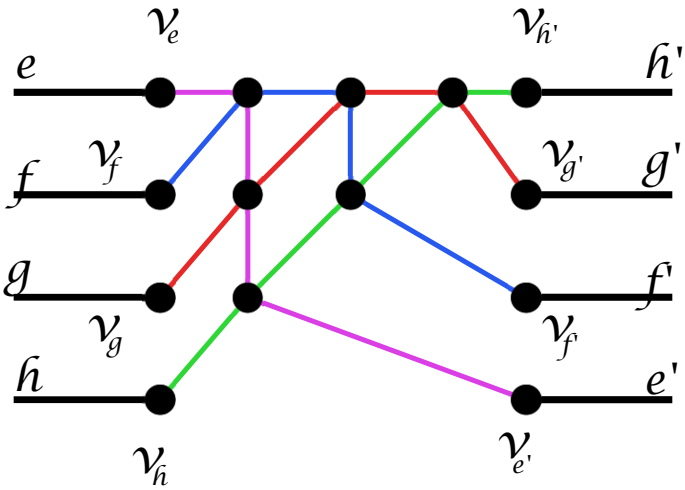



FIGURE 4.5 – Gadget $D_v$ : les chemins $P_{ee'}$, $P_{ff'}$,$P_{gg'}$ et $P_{hh'}$ sont respectivement en violet, bleu, rouge et vert. Les transitions de centre $v_k$ ainsi que celles des chemins $P_{ee'}$, $P_{ff'}$,$P_{gg'}$ et $P_{hh'}$ sont autorisées.

**Type** 2 Dans ce cas, $D_v$ est construit comme suit. Pour toute arête $k \in \omega(v)$, un sommet $v_k$ est créé. Pour toute transition autorisée $\{k, l\} \in A(v)$, les sommets $v_k$ et $v_l$ sont reliés par un chemin $P_{kl}$ de longueur 7 de sorte que le graphe obtenu soit planaire, que les quatre chemins $P_{kl}$ aient deux à deux 2 sommets communs et que tous ces sommets soient distincts comme illustré à la figure 4.7. Ainsi, les sommets sont de degré au plus 4. Les transitions autorisées de $D_v$ sont les transitions des chemins $P_{kl}$. Ensuite, on remplace $v$ par le gadget $D_v$ donné à la figure 4.5 en reliant chaque arête $k \in \omega(v)$ de $G(\Phi)$ au sommet $v_k$ de $D_v$ et en autorisant les transitions contenant ces arêtes. Comme les arêtes $k \in \omega(v)$ sont reliées à $D_v$ dans le même "ordre" que celui dans lequel elles étaient reliées à $v$ dans $\mathcal{E}$ le graphe reste planaire (voir figures 4.6 et 4.7). Remarquons que le gadget $D_v$ peut être traversé si et seulement si les arêtes utilisées pour entrer et sortir forment une transition autorisée de centre $v$, et qu'il ne peut pas être traversé deux fois car sinon on passerait deux fois par un même sommet.

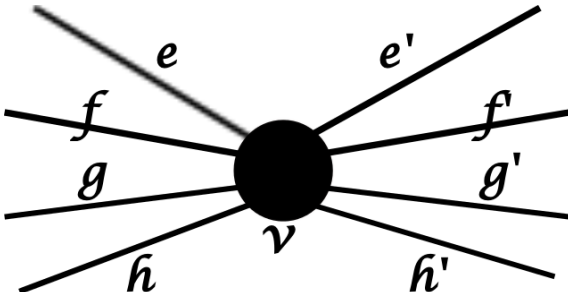



FIGURE 4.6 – Type 2 : un sommet $v$ de degré 8 centre des transitions autorisées $A(v) = \{\{e, e'\}, \{f, f'\}, \{g, g'\}, \{h, h'\}\}$ les arêtes sont ordonnées comme dans $G(\Phi)$).

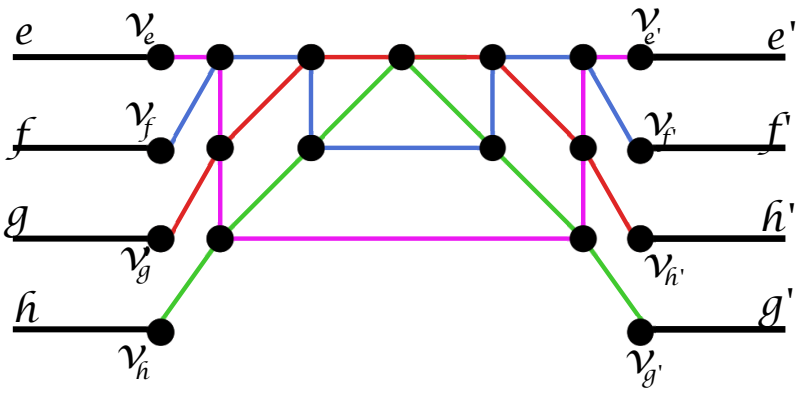



FIGURE 4.7 – Gadget $D_v$ : les chemins $P_{ee'}$, $P_{ff'}$,$P_{gg'}$ et $P_{hh'}$ sont respectivement en violet, bleu, rouge et vert. Les transitions de centre $v_k$ ainsi que celles des chemins $P_{ee'}$, $P_{ff'}$,$P_{gg'}$ et $P_{hh'}$ sont autorisées.

**Type** 3 Dans ce cas, $D_v$ est construit comme suit. Pour toute arête $k \in \omega(v)$, un sommet $v_k$ est créé. Pour toute transition autorisée $\{k, l\} \in A(v)$, les sommets $v_k$ and $v_l$ sont reliés par un chemin $P_{kl}$ de longueur 7 de sorte que le graphe obtenu soit planaire, que les quatre chemins $P_{kl}$ aient deux à deux 1 sommet commun et que tous ces sommets soient distincts. De plus, on ajoute, entre des sommets de degré 2 (qui seront alors de degré 3), deux arêtes reliant les chemins $P_{ee'}$ et $P_{ff'}$, et $P_{gg'}$ et $P_{hh'}$, respectivement comme illustré à la figure 4.9. Ainsi, les sommets de $D_v$ sont de degré au plus 4. Les transitions autorisées de $D_v$ sont les transitions des chemins $P_{kl}$ ainsi que celles contenant une des deux arêtes ajoutées entre ces chemins. Ensuite, on remplace $v$ dans $\mathcal{E}$ par le gadget $D_v$ donné à la figure 4.9 en reliant chaque arête $k \in \omega(v)$ de $G(\Phi)$ au sommet $v_k$ de $D_v$ et en autorisant les transitions contenant ces arêtes. Comme les arêtes $k \in \omega(v)$ sont reliées à $D_v$ dans le même "ordre" que celui dans lequel elles étaient reliées à $v$ dans $\mathcal{E}$ le graphe reste planaire (voir figures 4.8 et 4.9). Remarquons que le gadget $D_v$ peut être traversé si et seulement si les arêtes utilisées pour entrer et sortir forment une transition autorisée de centre $v$, et qu'il ne peut pas être traversé deux fois car sinon on passerait deux fois par un même sommet.

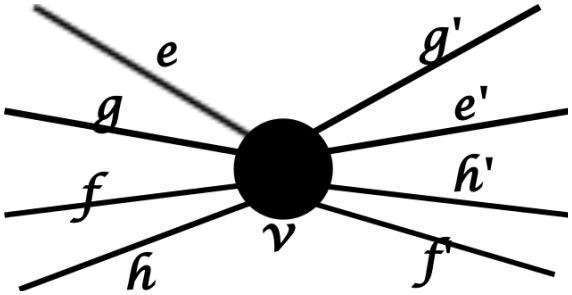



FIGURE 4.8 – Type 3 : Un sommet $v$ de degré 8 centre des transitions autorisées $A(v) = \{\{e, e'\}, \{e, f'\}, \{f, f'\}, \{f, e'\}, \{g, g'\}, \{g, h'\}, \{h, h'\}, \{h, g'\}\}$ (les arêtes sont ordonnées comme dans $G(\Phi)$).

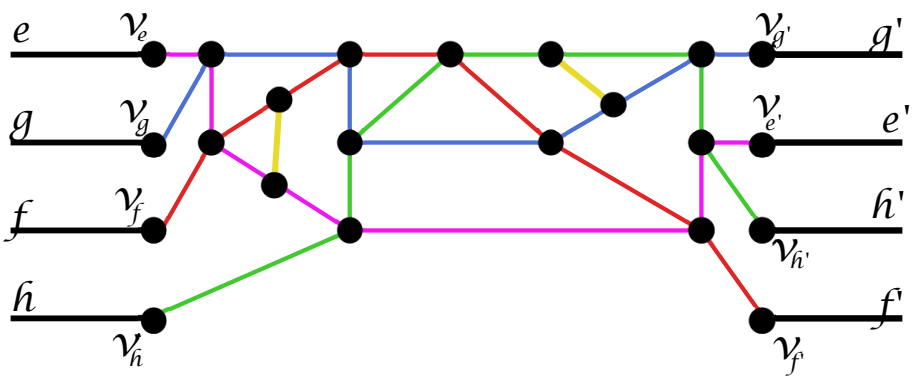



FIGURE 4.9 – Type 3 : Gadget $D_v$ : les chemins $P_{ee'}$, $P_{ff'}$,$P_{gg'}$ et $P_{hh'}$ sont respectivement en violet, bleu, rouge et vert. Les transitions de centre $v_k$, celles de chemins $P_{ee'}$, $P_{ff'}$,$P_{gg'}$ et $P_{hh'}$, ainsi que celles contenant une arête jaune sont autorisées.

Le graphe $G'(\Phi)$ est obtenu à partir de $G(\Phi)$ en remplaçant les sommets de degré 8 par les gadgets décrits ci-dessus. L'ensemble de transitions interdites de $G'(\Phi)$ est alors l'ensemble de transitions interdites de $G$ auquel on ajoute les transitions interdites de gadgets décrites ci-dessus. Le graphe $G'(\Phi)$ est planaire est de degré maximum au plus 4. Montrons que l'existence d'un Ch.STI entre $s_1$ et $t_m$ dans $G(\Phi)$ est équivalente à l'existence d'un Ch.STI entre $s_1$ et $t_m$ dans $G'(\Phi)$.

**Affirmation 4.10.** Il existe un Ch.STI de $s_1$ à $t_m$ dans $G'(\Phi)$ si et seulement s'il existe un Ch.STI de $s_1$ à $t_m$ dans $G(\Phi)$.

Supposons qu'il existe un Ch.STI $P$ entre $s_1$ et $t_m$ dans $G(\Phi)$. Alors on définit comme suit un Ch.STI $P'$ entre $s_1$ et $t_m$ dans $G'(\Phi)$. Si $P$ emprunte un sommet $v$ de degré 8 de type 1 ou 2 avec une transition de centre $v$ de la forme $\{x, x'\}$ alors $P'$ emprunte $x$, le sous-Ch.STI $P_{xx'}$ et $x'$. Si $P$ emprunte un sommet $v$ de degré 8 de type 3 avec une transition de centre $v$ de la forme $\{x, x'\}$ (resp. de la forme $\{x, y'\}$) alors $P'$ emprunte $x$, le sous-Ch.STI $P_{xx'}$ et $x'$ (resp. $x$, le sous-Ch.STI $P_{xy'}$ (qui est un concaténation d'un sous-Ch.STI de $P_{xx'}$, d'une arête jaune et d'un sous-Ch.STI de $P_{yy'}$) et $y'$).

Maintenant, supposons qu'il existe un Ch.STI $P'$ entre $s_1$ et $t_m$ dans $G'(\Phi)$. Si $P'$ emprunte seulement des sommets de $G(\Phi)$ alors $P'$ est un Ch.STI entre $s_1$ et $t_m$ dans $G'(\Phi)$. Si $P'$ emprunte des sommets qui ne sont pas dans $G(\Phi)$ alors il traverse un gadget $D_v$. Comme spécifié plus haut, les gadgets peuvent seulement être traversés d'une façon qui impose que l'arête empruntée en entrant et celle empruntée en sortant forme une transition autorisée dans $G$. Ainsi, comme $P'$ ne peut pas traverser deux fois un même gadget, pour tous les sommets $v$ tel que $P'$ traverse $D_v$, on peut supprimer les arêtes de $D_v$ de $P'$ et les remplacer par $v$ pour obtenir Ch.STI $P$ entre $s_1$ et $t_m$ dans $G(\Phi)$. Cela conclut la preuve.

## 4.3 $\mathscr{N}\mathscr{P}$-complétude de Ch.STI dans les grilles

**Théorème 4.11.** *Le problème Ch.STI est $\mathscr{N}\mathscr{P}$-complet dans les grilles avec transitions interdites.*

*Démonstration.* On sait d'après les affirmations 4.8 et 4.10 que $\Phi$ est satisfaisable si et seulement s'il existe un Ch.STI de $s_1$ à $t_m$ dans $G'(\Phi)$. Montrons comment construire à partir de $G'(\Phi)$ une grille telle qu'il existe Ch.STI de $s$ à $t$ dans $G'(\Phi)$ si et seulement s'il existe un Ch.STI entre les images de ces sommets dans la grille.

Nous allons utiliser la notion de plongement planaire dans une grille [Tam87]. Un plongement planaire d'un graphe $G$ dans une grille est une application $Q$ de $G$ dans une grille qui envoie chaque sommet de $G$ sur un sommet différent de la grille et chaque arête $e$ sur un chemin $Q(e)$ dont les extrémités sont les images des sommets de l'arête telle que pour toute paire $\{e, e'\}$ les chemins $Q(e)$ et $Q(e')$ n'ont pas de sommet commun excepté éventuellement les extrémités. Il est prouvé dans [Val81] que pour un graphe planaire à $n$ sommets de degré maximum au plus 4, on peut construire un plongement planaire dans une grille ayant au plus $9n^2$ sommets ($(3n, 3n)$-grille) en temps polynomial. De plus, quitte à multiplier la taille de la grille par 2, on peut trouver un plongement planaire tel que si deux sommets ne sont pas

adjacents dans le graphe initial, alors ils ne sont pas extrémités d'une même arête de la grille.

Soit $Q$ un plongement planaire de $(V_{G'(\Phi)}, E_{G'(\Phi)})$ ($G'(\Phi)$ où les transitions interdites sont ignorées) dans une grille $K$. L'existence d'un Ch.STI entre deux sommets $s$ et $t$ de $G$ est équivalente à l'existence d'un Ch.STI entre les sommets $Q(s)$ et $Q(t)$ la grille $K$ munie des transitions autorisées suivantes :

- Pour tout $e \in E_{G(\Phi)}$, toutes les transitions du chemin $Q(e)$ sont autorisées.
- Si $\{e, e'\}$ est une transition autorisée dans $G'(\Phi)$ alors la paire contenant une arête de $Q(e)$ et une arête de $Q(e')$ avec une sommet commun forme une transition autorisée.

En effet, comme deux sommets non adjacents de $G'(\Phi)$ sont envoyés sur des sommets à distance au moins 2, l'application $Q$ est une bijection entre de tels Ch.STI. Cela conclut la preuve.

□

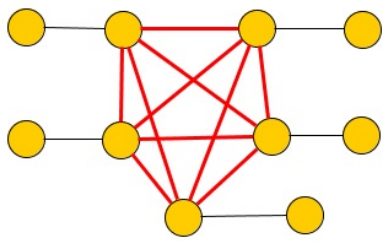
On pourrait rechercher une dichotomie similaire à celle de SZEIDER pour Ch.STI, c'est-à-dire que le problème Ch.STI où l'on se restreint aux grilles ou aux graphes planaires est $\mathscr{NP}$-complet si et seulement si les transitions interdites sont d'une certaine forme (voir le théorème A.10 de l'annexe A pour le cas de Ch.STI).

# Chapitre 5

# Arbres sans conflit

## 5.1 Introduction

Après nous être intéressés à des problèmes de chemins, intéressons-nous maintenant à un problème classique en théorie des graphes, qui généralise les chemins, et qui consiste à étudier l'existence d'arbres couvrants dans un graphe. Dans un graphe, l'existence d'un tel sous-graphe est équivalente au fait que le graphe soit connexe (voir [Die12]), mais un graphe avec transitions interdites (resp. conflits) connexe n'admet pas forcément d'ACSTI (resp. ACSC). Par exemple, pour $n \geq 3$ le graphe complet à $n$ sommets dans lequel toutes les transitions sont interdites n'admet pas d'ACSTI car tout arbre couvrant contiendrait un chemin de longueur 2 et donc une transition interdite. Le graphe suivant où toutes les arêtes en gras (ou rouge) sont en conflit deux à deux est un exemple de graphe non complet qui n'admet pas d'ACSTI.



Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux graphes avec conflits et nous étudions l'existence d'ASC et plus particulièrement d'ACSC.

Dans [DPSW11] les auteurs étudient les graphes avec conflits et montrent que les problèmes d'existence d'arbre couvrant sans conflit et de couplage maximum sans conflit sont $\mathscr{NP}$-hard. Inspirés par ces résultats nous avons étudié plus en détail les arbres dans les graphes avec conflits et également dans les graphes avec transitions interdites. Ce chapitre présente les résultats de l'article [KLM13b] ainsi que certains autres obtenus par la suite. En particulier, nous montrons que le problème de l'arbre couvrant sans transition interdite est $\mathscr{NP}$-complet et que le problème de l'arbre couvrant sans conflit est $\mathscr{NP}$-complet même dans les $(3, k)$-grilles. Nous montrons

que le problème de l'arbre sans transition interdite de taille maximum ne peut pas être approché avec un ratio meilleur que $n^{1/2-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ même si le graphe est une étoile à $n$ sommets. Nous étudions également le cas du graphe complet avec conflits ou transitions interdites et donnons dans ce cas des conditions suffisantes assurant l'existence d'un arbre couvrant sans conflit ou transition interdite.

## 5.2 Résultats de complexité

Donnons d'abord le résultat de DARMANN et. al. [DPSW11] avant de montrer la $\mathscr{NP}$-complétude des problèmes ACSTI et ACSC dans des classes plus restreintes, généralisant entre autres ce résultat.

**Définition 5.1.** Pour $k \geq 2$, un $k$-ladder est une union disjointe de chemins élémentaires de longueur $k-1$.

**Définition 5.2.** Si $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$ est un graphe avec conflits, le *graphe des conflits de* $G$ est le graphe dont les sommets sont les arêtes impliquées dans un conflit et où deux sommets sont reliés si et seulement si les arêtes correspondantes sont dans un même conflit.

**Remarque 5.3.** Une transition interdite pouvant être vue comme un conflit particulier dont les arêtes sont adjacentes, le graphe des conflits est également défini pour les graphes avec transitions interdites.

**Théorème 5.4** ([DPSW11])**.** *Le problème ACSC est $\mathscr{NP}$-complet, même si le graphe des conflits est un* 3*-ladder. Si le graphe de conflits est un* 2*-ladder le problème est polynomial.*

Concernant le problème ACSTI nous avons obtenu le résultat suivant qui généralise le théorème 5.4 puisqu'il restreint les conflits à être des transitions interdites et les graphes à être bipartis :

**Théorème 5.5.** *Le problème ACSTI est $\mathscr{NP}$-complet, même pour les graphes bipartis ayant un* 3*-ladder comme graphe des conflits. Si le graphe des conflits est un* 2*-ladder le problème est polynomial.*

*Démonstration.* Le second point s'obtient directement à partir du théorème 5.4.

Pour le premier point, remarquons tout d'abord que le problème est bien dans $\mathscr{NP}$ (on vérifie qu'on a bien un arbre couvrant puis qu'il est bien sans transition interdite en $O(n)$ opérations). Pour montrer qu'il est complet pour la classe $\mathscr{NP}$, nous allons réduire le problème $(3, B2)$-SAT au problème ACSTI dans les graphes avec conflits bipartis ayant un 3-ladder comme graphe des conflits.

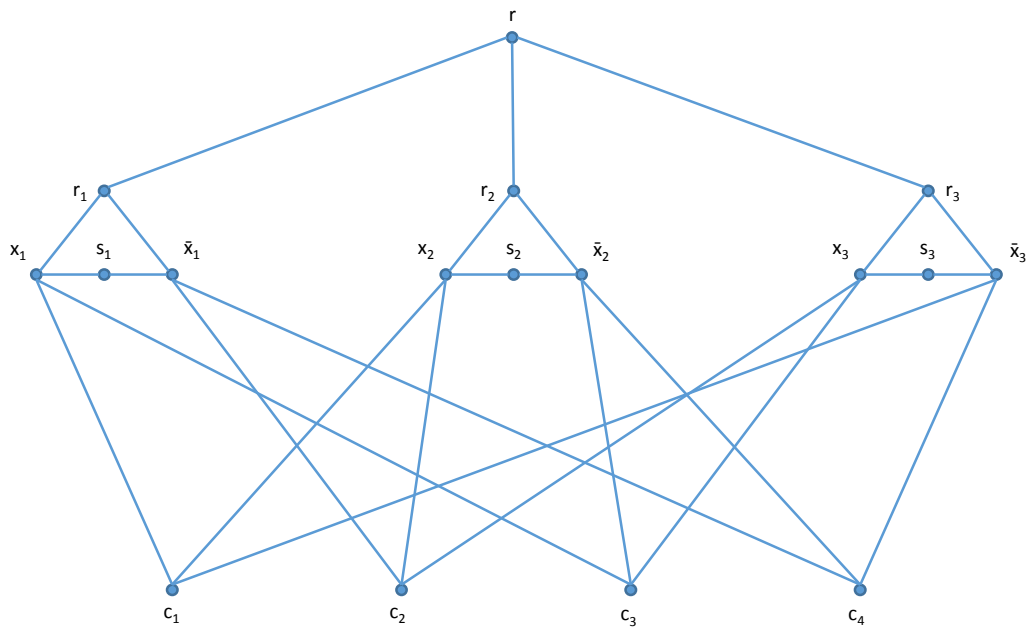
On rappelle qu'une instance de $(3, B2)$-SAT est une instance de de 3-SAT tel que chaque littéral apparaît exactement deux fois. Il est prouvé dans [BKS07] que $(3, B2)$-SAT est $\mathscr{NP}$-complet.

Soit $I$ une instance de $(3, B2)$-SAT ayant $n$ variables $X_1, \ldots, X_n$ et $m$ clauses $C_1, \ldots, C_m$. Considérons le graphe avec transitions interdites $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$

défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
V_G :=& \{r\} \cup \{c_j \mid C_j \text{ est une clause}\} \cup \{x_i, \overline{x_i}, r_i, s_i \mid X_i \text{ est une variable}\},\\
E_G :=& \{rr_i, r_ix_i, r_i\overline{x_i}, x_is_i, \overline{x_i}s_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\}\cup\\
& \{x_ic_j \mid X_i \text{ apparaît positivement dans } C_j\}\cup\\
& \{\overline{x_i}c_j \mid X_i \text{ apparaît négativement dans } C_j\}.\\
\mathcal{I}nt_G :=& \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \{\{c_jx_i, x_is_i\}, \{c_kx_i, x_is_i\} \mid c_jx_i \in E_G \text{ et } c_kx_i \in E_G\}\cup\\
& \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \{\{c_j\overline{x_i}, \overline{x_i}s_i\}, \{c_k\overline{x_i}, \overline{x_i}s_i\} \mid c_j\overline{x_i} \in E_G \text{ et } c_k\overline{x_i} \in E_G\}
\end{aligned}$$

Par exemple, pour l'instance $I = (X_1 \vee X_2 \vee \overline{X_3}) \wedge (\overline{X_1} \vee X_2 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2} \vee X_3) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_2} \vee \overline{X_3})$ nous obtenons le graphe $(V_G, E_G)$ suivant :




Le graphe $G$ est biparti : on peut colorier en "noir" les sommets $r_1, \dots, r_n$, $s_1, \dots, s_n, c_1, \dots, c_m$ qui sont indépendants (deux-à-deux non adjacents) et en "blanc" les sommets restants qui sont également indépendants. Pour $i$ donné, $x_i$ (et $\overline{x_i}$) est dans exactement 2 clauses $c_j$ et $c_k$. Donc on a exactement deux arêtes $c_jx_i$ et $c_kx_i$ dont la transition est interdite avec $x_is_i$. Ainsi, le graphes des conflits contenant $x_i$ est un chemin de longueur 2 :

- Extrémités : $c_jx_i$ et $c_kx_iS$.
- Sommet central : $x_is_i$

Cela étant, en faisant l'union pour tous les littéraux on obtient un 3-ladder.

Prouvons maintenant que $I$ est satisfaisable si et seulement si $G$ contient un ACSTI.

Supposons que $I$ soit satisfaisable. Il existe alors une application

$$\delta : \{X_1, \dots, X_n\} \to \{F, V\}$$

telle que en donnant à $X_i$ la valeur $\delta(X_i)$ chaque clause soit satisfaite (où $F$ correspond à faux et $V$ à vrai).

Soit $H$ le sous-graphe de $G$ formé par les arêtes suivantes :

$$\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \{rr_i, r_ix_i, r_i\overline{x_i}\} \cup \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \{s_ix_i \mid \delta(X_i) = F\} \cup \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \{s_i\overline{x_i} \mid \delta(X_i) = V\} \cup$$
$$\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \{x_ic_j, x_ic_k \mid \delta(X_i) = V \text{ et } X_i \text{ apparaît positivement dans } C_j \text{ et dans } C_k\} \cup$$
$$\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} \{\overline{x_i}c_j, \overline{x_i}c_k \mid \delta(X_i) = F \text{ et } X_i \text{ apparaît négativement dans } C_j \text{ et dans } C_k\}.$$

On constate que $H$ couvre $G$ ($V_H = V_G$), est connexe, et ne contient pas deux arêtes appartenant à une même transition interdite. Ainsi, $H$ admet un arbre couvrant qui est un ACSTI de $G$.

Réciproquement, supposons que $G$ ait un ACSTI. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ tel qu'exactement l'une des arêtes $x_is_i$ où $\overline{x_i}s_i$ est dans $E_T$ on définit l'affectation $\delta$ : $\{X_1, \dots, X_n\} \to \{F, V\}$ de la façon suivante :

$$\delta(X_i) := \begin{cases} F & \text{si } x_is_i \in E_T, \\ V & \text{si } \overline{x_i}s_i \in E_T, \end{cases}$$

et les autres variables $X_i$ reçoivent une affection quelconque. Montrons que cette affectation satisfait l'instance $I$. Considérons une clause $C_j$ quelconque. Il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_ic_j \in E_T$ ou $\overline{x_i}c_j \in E_T$. Si $x_ic_j \in E_T$, alors $x_is_i \notin E_T$ par définition des transitions interdites et donc $\overline{x_i}s_i \in E_T$. Par définition de $\delta$, nous avons $\delta(X_i) = 1$ et donc $C_j$ est satisfaite par $\delta(X_i)$. De manière similaire, si $\overline{x_i}c_j \in E_T$, nous avons $\overline{x_i}s_i \notin E_T$ et donc $x_is_i \in E_T$. De nouveau, par définition de $\delta$, nous avons $\delta(X_i) = 0$, et donc $C_j$ est satisfaite par $\overline{\delta(X_i)}$. Finalement, l'affectation $\delta$ satisfait l'instance $I$. Cela conclut la preuve. □

Montrons maintenant que le problème ACSTI reste $\mathscr{NP}$-complet même dans les graphes complets avec transitions interdites. Pour un graphe avec transitions interdites $G = (V_G, E_G, \mathcal{I}nt_G)$ ayant $n \geq 3$ sommets, notons $(K_n, \overline{\mathcal{F}(G)})$ le graphe avec transitions interdites complet à $n$ sommets obtenu en ajoutant les arêtes manquantes à $G$ et ayant pour ensemble de transitions interdites :

$$\overline{\mathcal{F}(G)} := \mathcal{I}nt_G \cup \{\{e, f\} \mid e \in E_{K_n} \backslash E_G, f \in E_{K_n}, e \neq f \text{ et } e \text{ et } f \text{ incidentes dans } K_n\}.$$

**Lemme 5.6.** *$T$ est un ACSTI de $G$ si et seulement si $T$ est un ACSTI de $(K_n, \overline{\mathcal{F}(G)})$.*

*Démonstration.* Il est clair que si $T$ est un ACSTI de $G$ il est également un ACSTI de $(K_n, \overline{\mathcal{F}(G)})$ car les transitions interdites ajoutées à $(K_n, \overline{\mathcal{F}(G)})$ contiennent toutes une arête qui n'est pas dans $E_G$. Réciproquement, si $T$ est un ACSTI de $(K_n, \overline{\mathcal{F}(G)})$ alors il ne contient pas d'arête qui n'est pas dans $E_G$. En effet, toute transition contenant un telle arête est interdite, et comme $n \geq 3$, l'ACSTI $T$ contiendrait forcément une telle transition. Comme les transitions interdites de $G$ sont inclues dans celles de $(K_n, \overline{\mathcal{F}(G)})$, $T$ est donc un ACSTI de $G$. Cela conclut la preuve. □

À partir du théorème 5.5 et du lemme 5.6, on obtient le résultat suivant :

**Théorème 5.7.** *Le problème ACSTI est $\mathcal{NP}$-complet dans les graphes complets avec transitions interdites.*

Le graphe complet $K_n$ avec $n \geq 3$ contient toujours plusieurs chemins ou cycles hamiltoniens. En effet, n'importe quelle suite de $n$ sommets convient. Cependant, cela n'est plus le cas lorsque l'on rajoute des transitions interdites.

**Théorème 5.8.** *Les problèmes Ch.HSTI et CHSTI sont $\mathcal{NP}$-complets dans les graphes complets avec transitions interdites.*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que ces problèmes sont bien dans $\mathcal{NP}$. Pour montrer qu'ils sont complets pour la classe $\mathcal{NP}$ nous allons faire une réduction à partir des problèmes du chemin hamiltonien et du cycle hamiltonien dans les graphes qui sont $\mathcal{NP}$-complet (voir [GJ79]). Prenons un graphe $G$ à $n \geq 3$ sommets. On peut voir $G$ comme un graphe avec transition interdite où $\mathcal{I}nt_G = \emptyset$ et donc définir le graphe avec transitions interdites $(K_n, \overline{\mathcal{F}(G)})$. On remarque que $G$ contient un chemin (resp. cycle) hamiltonien si et seulement si $(K_n, \overline{\mathcal{F}(G)})$ contient un Ch.HSTI (resp. CHSTI). Cela conclut la preuve. □

Lorsqu'un problème est $\mathcal{NP}$-complet, il est naturel de s'interroger sur sa difficulté dans des classes de graphes particulières. Dans ce qui va suivre, nous allons montrer que le problème ACSC reste $\mathcal{NP}$-complet même dans les sous-graphes des $(3, k)$-grilles avec $k$ quelconque. Comme ces grilles ainsi que les sous-graphes obtenus dans notre réduction ont une largeur linéaire [1] égale à 3, on peut en conclure que le problème ACSC est $\mathcal{NP}$-complet dans les graphes de largeur linéaire égale à 3.

**Lemme 5.9.** *Le problème 3-SAT où l'on autorise les clauses à avoir 2 ou 3 littéraux est $\mathcal{NP}$-complet même si l'on se restreint aux instances où chaque variable apparaît exactement une ou trois fois et chaque littéral une ou deux fois.*

*Démonstration.* On rappelle une nouvelle fois que 3-SAT est $\mathcal{NP}$-complet. Cela étant, notre problème est également dans $\mathcal{NP}$. Faisons une réduction à partir du problème 3-SAT. Pour ce faire, prenons une instance $I$ de 3-SAT et montrons comment la transformer en une instance $I'$ de notre nouveau problème, satisfaisable si et seulement si $I$ est satisfaisable. Considérons une variable $x$ de $I$ apparaissant $j \geq 2$ fois. Remplaçons chacune de ses répétions par $x_1, \ldots, x_j$ puis ajoutons à $I$ les clauses $(\overline{x_1} \vee x_2), (\overline{x_2} \vee x_3), \ldots, (\overline{x_j} \vee x_1)$. On remarque que $I$ est vraie si et seulement si cette nouvelle instance est vraie car les clauses à deux éléments associées à une variable $x$ imposent que tous les $x_i$ prennent la même valeur pour satisfaire $I$. Cela conclut la preuve. □

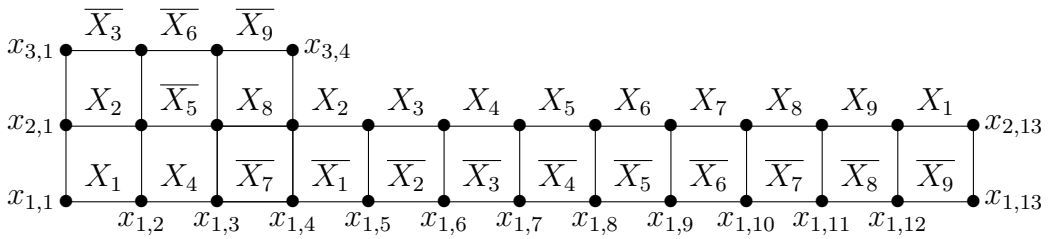
**Théorème 5.10.** *Le problème ACSC est $\mathcal{NP}$-complet, même si l'on se restreint aux instances sous-graphes des $(3, p)$-grilles avec $p$ quelconque, ayant un 3-ladder pour graphe des conflits.*

1. Une décomposition linéaire est une décomposition arborescente où l'arbre est un chemin et dans ce cas on parle non plus de largeur arborescente mais de largeur linéaire.

*Démonstration.* Notre problème étant une restriction d'un problème déjà dans $\mathscr{NP}$, il est également dans $\mathscr{NP}$. Montrons qu'il est complet pour cette classe en faisant une réduction à partir du problème présenté dans le lemme 5.9. Pour cela, prenons une instance $I$ de ce dernier composée de $p$ clauses $C_1, \ldots, C_p$ à 3 littéraux et de $\ell$ clauses $C_{p+1}, \ldots, C_{p+\ell}$ à 2 littéraux pour chacune desquelles nous ordonnons arbitrairement les littéraux. Considérons le graphe avec transitions interdites $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$ défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
V_G :=& \{x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i} \mid i \in \{1, \ldots, p+1\}\} \cup \{x_{1,i}, x_{2,i} \mid i \in \{p+2, \ldots, p+\ell+1\}\},\\
E_G :=& \{x_{1,i}x_{2,i}, x_{2,i}x_{3,i} \mid i \in \{1, \ldots, p+1\}\}\\
&\cup \{x_{1,i}x_{2,i} \mid i \in \{p+2, \ldots, p+\ell+1\}\}\\
&\cup \{x_{1,i}x_{1,i+1}, x_{2,i}x_{2,i+1}, x_{3,i}x_{3,i+1} \mid i \in \{1, \ldots, p\}\}\\
&\cup \{x_{1,i}x_{1,i+1}, x_{2,i}x_{2,i+1} \mid i \in \{p+1, \ldots, p+\ell\}\},\\
\mathcal{C}onf_G :=& \{\{x_{a,i}x_{a,i+1}, x_{b,j}x_{b,j+1}\} \mid \text{le } a^{\text{ième}} \text{ littéral de } C_i \text{ est l'opposé du } b^{\text{ième}} \text{ de } C_j\ \}.
\end{aligned}$$

Par exemple, pour l'instance $I = (X_1 \vee X_2 \vee \overline{X_3}) \wedge (X_4 \vee \overline{X_5} \vee \overline{X_6}) \wedge (\overline{X_7} \vee X_8 \vee \overline{X_9}) \wedge (\overline{X_1} \vee X_2) \wedge (\overline{X_2} \vee X_3) \wedge (\overline{X_3} \vee X_4) \wedge (\overline{X_4} \vee X_5) \wedge (\overline{X_5} \vee X_6) \wedge (\overline{X_6} \vee X_7) \wedge (\overline{X_7} \vee X_8) \wedge (\overline{X_8} \vee X_9) \wedge (\overline{X_9} \vee X_1)$, nous obtenons le graphe $G$ suivant, où les conflits sont entre les arêtes correspondant à deux littéraux opposés :




Revenons au cas général. Par construction, $(V_G, E_G)$ est isomorphe à un sous-graphe de la $(3, p+\ell+1)$-grille et comme l'instance $I$ est telle que chaque variable apparaît une ou trois fois et chaque littéral une ou deux fois, le graphe des conflits de $G$ est bien un 3-ladder. Prouvons maintenant que $I$ est satisfaisable si et seulement si $G$ admet un ACSC.

Si $I$ est satisfaisable, alors il existe une affectation des variables qui rend vraie chaque clause. Pour chaque clause $C_i$ prenons une arête $e_i = x_{a,i}x_{a,i+1}$ telle qu'avec l'affectation précédente le $a^{\text{ème}}$ littéral de la clause $C_i$ rend vraie celle-ci et notons $E' := \{e_i \mid i \in \{1, \ldots, p+\ell\}\}$. Par construction de $G$, il n'existe pas de conflit entre les arêtes de $E'$. Notons maintenant $E'' := \{x_{1,i}x_{2,i}, x_{2,i}x_{3,i} \mid i \in \{1, \ldots, p+1\}\} \cup \{x_{1,i}x_{2,i} \mid i \in \{p+2, \ldots, p+\ell+1\}\}$. Comme les arêtes de $E''$ ne font partie d'aucun conflit, il n'existe pas de conflit entre les arêtes de $E := E' \cup E''$. Le sous-graphe couvrant $T := (V_G, E)$ est donc sans conflit. On constate qu'il est connexe et sans cycle. Ainsi, $T$ est un ACSC de $G$.

Réciproquement, supposons que $G$ possède un ACSC noté $T$. Comme $T$ est couvrant et connexe, pour tout $i \in \{1, \ldots, p+\ell\}$ il existe $a \in \{1, 2, 3\}$ tel que $x_{a,i}x_{a,i+1}$ soit une arête de $T$. L'affectation qui rend vraie le $a^{\text{ième}}$ littéral de $C_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p+\ell\}$ existe et satisfait alors $I$. En effet, si elle n'existait pas, cela voudrait dire que l'on doit rendre vrai deux littéraux opposés et les arêtes correspondantes seraient alors en conflit. Cela conclut la preuve. □

On remarque que les problèmes ACSC et ACSTI sont $\mathscr{NP}$-complets même dans des classes de graphes où les problèmes classiques sont généralement faciles, et où l'on aurait pu penser qu'eux aussi le seraient a priori.

## 5.3 Inapproximabilité de l'arbre maximum sans transition interdite

Les résultats précédents montrent que construire un ACSTI est un problème difficile. Cela étant, nous allons maintenant nous intéresser au problème d'optimisation associé à l'existence d'ASTI. Donnons-nous un graphe avec transitions interdites $G$ et notons $\beta(G)$ le nombre maximum d'arêtes d'un ASTI de $G$. Comme le nombre d'arêtes d'un arbre est strictement inférieur à son nombre de sommets, on peut en déduire que $\beta(G) \leq |V_G| - 1$.

Commençons par rappeler quelques définitions. Le problème de la clique maximum est un problème d'optimisation classique. Une clique dans un graphe est un sous-ensemble de sommets tel que chaque sommet est adjacent à tous les autres. Le problème de la clique maximum consiste à trouver une clique ayant le plus grand nombre de sommets dans un graphe donné. C'est l'un des premiers problèmes dont la $\mathscr{NP}$-complétude a été établie (voir [Kar72]).

Pour un problème de maximisation, un algorithme d'approximation de ratio d'approximation $\rho \geq 1$, est un algorithme polynomial qui retourne une solution au moins égale à $1/\rho$ fois la solution optimale. Dans [Hås99] il est montré que le problème de la clique maximum ne peut pas être approché avec un ratio inférieur ou égal à $n^{1/2-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ sous l'hypothèse $\mathscr{P} \neq \mathscr{NP}$. Nous réduisons le problème de la clique maximum dans un graphe au problème dans l'arbre maximum dans les étoiles (de la forme $K_{1,k}$ pour un certain $k$) avec transitions interdites.

**Théorème 5.11.** *Soit $G$ un graphe avec transitions interdites. Alors $\beta(G)$ ne peut être approximé avec un ratio d'approximation inférieur ou égal à $n^{1/2-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, même si on considère uniquement les étoiles, sous l'hypothèse $\mathscr{P} \neq \mathscr{NP}$.*

*Démonstration.* Prenons un graphe $G'$ à $n$ sommets et notons $G$ l'étoile avec transitions interdites définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} V_G &= V_{G'} \cup \{r\}, \\ E_G &= \{ur \mid u \in V_{G'}\}, \\ \mathcal{I}nt_G &= \{\{ur, rv\} \mid uv \notin E_{G'}\}. \end{aligned}$$

Montrons que $G'$ contient une clique ayant $k$ sommets si et seulement si $G$ contient un arbre ayant $k$ arêtes.

Si $C := \{u_1, \ldots, u_k\}$ est une clique ayant $k$ sommets dans $G'$, alors pour $i \neq j$ on a $u_i u_j \in E_{G'}$ et aucune des paires d'arêtes de $\{ru_1, \ldots, ru_k\}$ n'est une transition interdite de $\mathcal{I}nt_G$. Ainsi, $C \cup \{r\}$ induit un ASTI ayant $k$ arêtes dans $G$.

Réciproquement, si $T$ est un ASTI ayant $k$ arêtes dans $G$ alors c'est une étoile $K_{1,k}$ ayant $r$ pour sommet central et $k$ feuilles appartenant à $V_{G'}$. Comme $T$ ne

contient pas de transition interdite, pour tout $u$ et tout $v$ appartenant à $V_T \setminus \{r\}$ on a $uv \in E_G$. Ainsi, $V_T \setminus \{r\}$ induit une clique ayant $k$ sommets dans $G'$.

Cela étant, si sous l'hypothèse $\mathscr{P} \neq \mathscr{NP}$ on pouvait approximer $\beta(G)$ avec un ratio d'approximation inférieur ou égal à $n^{1/2-\varepsilon}$ pour un certain $\varepsilon > 0$ alors on pourrait approximer le problème de la clique maximum avec un ratio d'approximation inférieur ou égal à $n^{1/2-\varepsilon}$ ce qui contredirait le résultat de [Hås99]. Cela conclut la preuve. □

Au vu du théorème 5.11 l'une des nos perspectives futures est de chercher un algorithme exact exponentiel permettant d'obtenir $\beta(G)$.

## 5.4 Résultats constructifs pour le graphe complet

À partir de la preuve du théorème 5.5, on déduit la $\mathscr{NP}$-complétude du problème ACSTI (dans un graphe quelconque) même si le nombre de transitions interdites contenant un sommet ou une arête est borné (par exemple, même si le nombre de transitions interdites contenant une arête est borné par 2 le problème est toujours $\mathscr{NP}$-complet). Cependant, la réduction dans la preuve du théorème 5.7 ne conserve pas cette propriété. On peut alors se poser la question de savoir pour quels types de transitions interdites (resp. conflits), l'existence d'un ACSTI (resp. ACSC) pouvant être construit en temps polynomial, est assurée dans les graphes complets avec transitions interdites. Dans cette section, nous proposons quelques conditions suffisantes.

### 5.4.1 Une première condition suffisante pour avoir un ACSTI

Dans cette partie, nous allons voir qu'à partir de certains graphes complets avec transitions interdites nous pouvons construire un sous-graphe sans transition interdite dans lequel il existe un arbre couvrant qui sera alors un ACSTI du graphe initial. Nous présentons une condition suffisante pour l'existence d'un tel sous-graphe et donc d'un ACSTI.

Prenons $G = (K_n, \mathcal{I}nt_G)$ et supprimons tout d'abord toutes les arêtes appartenant à au moins une transition interdite de $\mathcal{I}nt_G$. Nous obtenons alors $k \geq 1$ composantes connexes. Dans chacune d'elles, prenons un arbre couvrant et notons $G'$ le graphe obtenu. Si $k = 1$, alors $G'$ est un arbre couvrant qui sera également un ACSTI de $G$. Maintenant, si $k \geq 1$ notons $T_1, \ldots, T_k$ les $k$ arbres de composantes connexes $G'$. Nous appelons *Arête Entre Composantes*, notée AEC, une arête de $G$ ayant ses extrémités dans deux arbres différents. L'idée générale est la suivante : s'il est possible de connecter les $k$ arbres avec des AEC en un arbre de sorte que chaque sommet de chaque $T_i$ soit incident à au plus une AEC alors $G$ contient un ACSTI. En effet, le graphe obtenu couvre $G$, est connexe, sans cycle et ne contient pas deux arêtes d'une même transition interdite (car chaque sommet de chaque $T_i$ est incident à au plus une AEC). Le théorème 5.15 donne une condition suffisante pour qu'une telle construction soit possible et donc que $G$ admette un ACSTI. Voir

l'exemple 5.16 pour une illustration de cette construction. Avant d'aller plus loin, nous avons besoin de quelques définitions et résultats préliminaires.

**Définition 5.12.** Une suite $n_1, \ldots, n_k$ d'entiers positifs ($n_i \geq 1$) est une *Suite de Degrés d'Arbre*, notée SDA, s'il existe un arbre $T$ à $k$ sommets $u_1, \ldots, u_k$ tel que $deg_T(u_i) \leq n_i$.

Nous utiliserons le résultat suivant.

**Théorème 5.13** ([GJT07])**.** *Soient $k \geq 1$ et $n_1, \ldots, n_k$ une suite d'entiers strictement positifs. Il existe un arbre à $k$ sommets de degrés $n_1, \ldots, n_k$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{k} n_i = 2k - 2$. De plus, un tel arbre peut être construit en temps polynomial s'il existe.*

À partir du théorème 5.13 on déduit le lemme suivant :

**Lemme 5.14.** *Pour $k \geq 1$, une suite d'entiers strictement positifs $n_1, \ldots, n_k$ est une SDA si et seulement si $\sum_{i=1}^{k} n_i \geq 2k - 2$.*

*Démonstration.* Soit $k \geq 2$. Si $n_1, \ldots, n_k$ est une SDA alors il existe un arbre $T$ à $k$ sommets $u_1, \ldots, u_k$ tel que $deg_T(u_i) \leq n_i$. Comme dans un arbre, la somme de degrés des sommets vaut deux fois le nombre d'arêtes et que le nombre d'arêtes vaut le nombre de sommets moins un, on a

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \geq \sum_{i=1}^{k} deg_T(u_i) = 2(k-1) = 2k - 2.$$

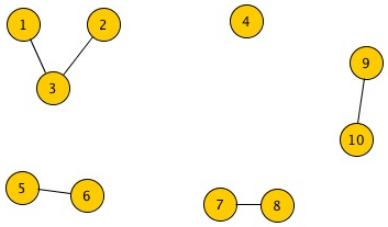
Réciproquement, s'il existe une suite d'entiers strictement positifs $n_1, \ldots, n_k$ telle que $\sum_{i=1}^{k} n_i \geq 2k-2$ alors, en diminuant la valeur de certains $n_i$ tout en les gardant strictement positifs (cette opération se fait facilement en temps polynomial), il existe une suite d'entiers strictement positifs $n'_1, \ldots, n'_k$ avec $n'_i \leq n_i$ telle que $\sum_{i=1}^{k} n'_i = 2k-2$. D'après le théorème 5.13 il existe un arbre à $k$ sommets des degrés $n'_1, \ldots, n'_k$ et donc $n_1, \ldots, n_k$ est une SDA. Cela conclut la preuve. □

**Théorème 5.15.** *Soit $G = (K_n, \mathcal{I}nt_G)$ et $k$ le nombres de composantes connexes du graphe obtenu en supprimant toutes les arêtes appartenant à au moins une transition interdite. Si $n \geq 2k-2$ alors $G$ contient un ACSTI qui peut être construit en temps polynomial.*

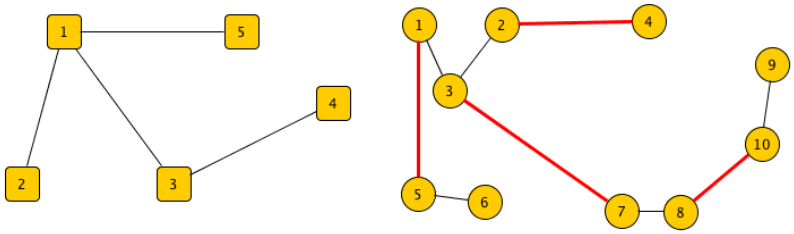
*Démonstration.* Notons $n_1, \ldots, n_k$ le nombre de sommets des composantes connexes $C_1, \ldots, C_k$ du graphe obtenu en supprimant toutes les arêtes appartenant à au moins une transition interdite. Notons $G'$ le graphe obtenu en remplaçant chacune des composantes $C_1, \ldots, C_k$ par un arbre couvrant $T_1, \ldots, T_k$. Si $\sum_{i=1}^{k} n_i = n \geq 2k - 2$ alors d'après le lemme 5.14 il existe un arbre $T$ à $k$ sommets $u_1, \ldots, u_k$ tel que $deg_T(u_i) \leq n_i$. Maintenant, remplaçons chaque sommet $u_i$ de l'arbre $T$ par l'arbre couvrant $T_i$ de $C_i$ à $n_i$ sommets. Pour chaque arête $u_iu_j$ de $T$, choisissons un sommet $u$ de $C_i$ et un sommet $v$ de $C_j$ et ajoutons l'arête $uv$ à $G'$. Comme $deg_T(u_i) \leq n_i$, ces arêtes ajoutées entre les composantes connexes de $G'$ peuvent toutes être reliées à des sommets différents. Ainsi, le graphe obtenu est connexe, sans cycle et n'a pas de transition interdite ; il s'agit donc d'un ACSTI de $G$. Remarquons

que comme les arbres $T_i$ peuvent être construits en temps polynomial à l'aide, par exemple, de l'algorithme de parcours en profondeur, que comme la technique utilisée au lemme 5.14 pour obtenir des entiers dont la somme vaut $2k-2$ est constructive et polynomiale, et qu'alors l'arbre $T$ peut être construit en temps polynomial, l'ACSTI de $G$ peut être construit en temps polynomial. □

**Exemple 5.16.** Donnons un exemple d'application de la technique présentée dans la preuve précédente. Supposons par exemple que le graphe $G'$ soit le suivant :




Nous avons $k = 5$ composantes connexes avec, par exemple, $n_1 = 3$, $n_2 = n_3 = n_4 = 2$, $n_5 = 1$. On a donc $10 = \sum_{i=1}^{k} n_i \geq 2k - 2 = 8$, et il existe alors un arbre $T$ à 5 sommets $u_1, \ldots, u_5$ tel que $deg_T(u_i) \leq n_i$ à partir duquel on obtient l'ACSTI de $G$, en remplaçant chacun de ses sommets par un arbre couvrant de la composante connexe associée, et en reliant les AEC à des sommets différents.




### 5.4.2 Bornons le nombre de conflits contenant un sommet ou une arête

Dans cette partie, nous nous intéressons aux graphes complets avec conflits ou transitions interdites pour lesquels chaque arête ou sommet est dans un nombre borné de conflits ou transitions interdites. Nous donnons tout d'abord un résultat dans le cas où cette borne vaut 1 (théorème 5.18), puis nous donnons ensuite ensuite des résultats dans le cas où cette borne est une constante fixée (théorèmes 5.17, 5.22, 5.23).

Intéressons-nous tout d'abord au problème général où chaque arête est dans au plus un nombres fixé de conflits.

**Théorème 5.17.** *Soit $k$ un entier fixé. Si chaque arête du graphe avec conflits $G = (K_n, \mathcal{C}onf_G)$ est dans au plus $k$ conflits alors $G$ contient un ASC à $n - k + 1$ sommets que l'on peut construire en temps polynomial.*

*Démonstration.* Pour $k \geq n$ le résultat est évident. Prenons donc $k < n$. Si $n \leq 3$ le résultat est évident. Prenons $n \geq 4$. Prenons un ASC à $l \leq n-k$ sommets dans $G$. Comme $n \geq 4$, toute arête de $G$ est nécessairement adjacente à au moins $n(> k)$ arêtes et on peut donc prendre un ASC avec $l \geq 2$. Chaque arête étant dans au plus $k$ conflits, les $l-1$ arêtes de cet ASC sont en conflit avec au plus $(l-1)k$ arêtes extérieures à l'ASC. Le nombre d'arêtes entre un sommet de l'ASC et un sommet extérieur vaut $l(n-l)$.
Si $l < n-k$ alors comme $l \geq 2$

$$(l-1)k < (l-1)(n-l) \leq l(n-l).$$

Si $l = n-k$ alors

$$(l-1)k = (n-k-1)k < (n-k)k = l(n-l).$$

Ainsi dans les deux cas il existe une arête entre un sommet extérieur et un sommet de l'ASC qui n'est en conflit avec aucune arête de l'ASC, et donc l'ASC peut être étendu en un ASC à $l+1$ sommets dans $G$. En répétant cette opération, on construit un ASC à $n-k+1$ sommets dans $G$ en temps polynomial. Cela conclut la preuve. □

Concernant le cas particulier où chaque arête est dans au plus une transition interdite, nous avons obtenu le résultat suivant.

**Théorème 5.18.** *Si dans un graphe avec transitions interdites $G = (K_n, \mathcal{I}nt_G)$ chaque arête du graphe est dans au plus une transition interdite alors $G$ contient un Ch.HSTI que l'on peut construire en temps polynomial.*

*Démonstration.* Construisons pas à pas un chemin hamiltonien dans $G$ en partant d'une arête de $G$ et en ajoutant un sommet à l'une de ses extrémités tout en préservant la propriété d'être sans conflit. Pour $1 \leq k < n-1$, montrons comment passer d'un chemin de longueur $k$ à un chemin de longueur $k+1$. Prenons un chemin $H$ de longueur $k$ et notons $a$ et $b$ ses extrémités et $a'$ (resp. $b'$) l'unique sommet adjacent à $a$ (resp. $b$) dans $H$ (si $k=1$ on a $a'=b$ et $b'=a$ et si $k=2$ on a $a'=b'$). Prenons également un sommet $c$ à l'extérieur de $H$.
**Cas 1.** Si $\{a'a, ac\}$ (resp. $\{b'b, bc\}$) n'est pas une transition interdite alors on peut ajouter l'arête $ac$ (resp. $bc$) à $H$ pour obtenir un chemin de longueur $k+1$ dans $G$.
**Cas 2.** Si $\{a'a, ac\}$ et $\{b'b, bc\}$ sont des transitions interdites, les arêtes $a'a$, $b'b$ et $ac$ étant dans au plus une transition interdite, cela implique $a'a \neq b'b$ (i.e. $k \geq 2$) et les transitions $\{b'b, ba\}$ et $\{ba, ac\}$ sont autorisées. Donc le chemin $a', \ldots, b', b, a, c$ est sans transtion interdite et de longueur $k+1$.

Comme le passage d'un chemin de longueur $k$ à un chemin de longueur $k+1$ se fait en temps polynomial, on peut donc construire, en répétant la construction précédente, un chemin hamiltonien en temps polynomial. Cela conclut la preuve. □

Maintenant, on s'intéresse au cas où chaque sommet est extrémité (les extrémités de la transition $\{\{a,b\},\{b,c\}\}$ sont $a$ et $c$) d'au plus un nombre fixé de transitions interdites ou dans au plus un nombre fixé de conflits.

**Lemme 5.19.** *Soit $k$ un entier fixé. Si chaque sommet du graphe avec transitions interdites $G = (K_n, \mathcal{I}nt_G)$ est extrémité d'au plus $k$ transitions interdites avec $n \geq k+1$ et si $G$ contient un ASTI à $k+1$ sommets, alors il peut être étendu en un ACSTI en temps polynomial.*

*Démonstration.* Notons $T$ l'ASTI à $k+1$ sommets de $G$. Si $n = k+1$ alors $T$ est déjà un ACSTI de $G$. Si $n > k+1$, prenons un sommet $u$ de $K_n$ à l'extérieur de $T$. Comme $u$ est l'extrémité d'au plus $k$ transitions interdites et que $T$ contient $k+1$ sommets, $T$ contient un sommet $v$ qui n'est le centre d'aucune transition interdite ayant $u$ pour extrémité. On peut donc étendre $T$ en connectant $u$ et $v$. On obtient alors un nouvel ASTI ayant $k+2$ sommets. En répétant cette opération, on construit un ACSTI en temps polynomial. Cela conclut la preuve. □

On montre de manière presque similaire :

**Lemme 5.20.** *Soit $k$ un entier fixé. Si chaque sommet du graphe avec conflits $G = (K_n, \mathcal{C}onf_G)$ est dans au plus $k$ conflits avec $n \geq k+1$ et si $G$ contient un ASC à $k+1$ sommets, alors il peut être étendu en un ACSC en temps polynomial.*

*Démonstration.* Notons $T$ l'ASC à $k+1$ sommets de $G$. Si $n = k+1$ alors $T$ est déjà un ACSC de $G$. Si $n > k+1$, prenons un sommet $u$ de $K_n$ à l'extérieur de $T$. Comme $u$ est dans au plus $k$ conflits et que $T$ contient $k+1$ sommets, $T$ contient un sommet $v$ tel que l'arête $uv$ n'est en conflit avec aucune arête de $T$. On peut donc étendre $T$ en connectant $u$ et $v$. On obtient alors un nouvel ASC ayant $k+2$ sommets. En répétant cette opération, on construit un ACSC en temps polynomial. Cela conclut la preuve. □

**Lemme 5.21.** *Soit $k$ un entier fixé. Il existe un algorithme polynomial qui vérifie s'il existe un ASC à $k+1$ sommets dans un graphe avec conflits $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$ et le construit le cas échéant.*

*Démonstration.* Appliquons la méthode "force brute". Commençons par générer tous les sous-ensembles de $V_G$ ayant $k+1$ sommets. Chaque sous-ensemble induit un sous-graphe à $k+1$ sommets de $(V_G, E_G)$. Testons dans chacun d'eux tous les arbres couvrants possibles. Si l'un d'eux ne contient pas de conflit on s'arrête et on le retourne. Si aucun ASC n'est trouvé, le procédé étant exhaustif, cela signifie qu'il n'en existe pas.

Générer tous les sous-ensemble à $k+1$ sommets peut être fait en temps $O(n^{k+1})$. Pour chaque sous-ensemble, on génère ensuite tous les arbres couvrant du sous-graphe induits par ces sommets. Cela se fait en temps $O((k(k+1))^k)$, en vérifiant pour chacun des sous-graphes induits par $k$ arêtes s'il est connexe ou sans cycle. Finalement, pour chaque arbre, on vérifie en temps $O(k(k+1))$ la présence ou non de conflits. Comme $k$ est une constante fixée, ce processus nous donne un algorithme polynomial décidant s'il existant un arbre à $k+1$ sommets dans $G$ et le construit le cas échéant. Cela conclut la preuve. □

**Théorème 5.22.** *Soit $k$ un entier fixé. Si chaque sommet de $G = (K_n, \mathcal{I}nt_G)$ est extrémité d'au plus $k$ transitions interdites (resp. si chaque sommet de $G = (K_n, \mathcal{C}onf_G)$ est dans au plus $k$ conflits), alors il existe un algorithme polynomial*

*vérifiant l'existence d'un ACSTI (resp. d'un ACSC) dans $G$ et le construit le cas échéant.*

*Démonstration.* Si $G$ contient au plus $k+1$ sommets, alors une méthode similaire à celle décrite dans la preuve du lemme 5.21 fournit un algorithme polynomial vérifiant l'existence d'ACSTI ou d'ACSC dans $G$ et le construit le cas échéant. Si $G$ contient strictement plus de $k+1$ sommets, alors si l'algorithme décrit dans la preuve du lemme 5.21 construit un ASTI (resp. un ASC) à $k+1$ sommets, les lemmes 5.19 et 5.20 permettent d'obtenir un ACSTI (resp. un ASC) dans $G$ en temps polynomial. Si l'algorithme décrit dans la preuve du lemme 5.21 dit qu'il n'existe pas d'ASTI (resp. d'ASC) à $k+1$ sommets alors il n'existe pas d'ACSTI (resp. d'ACSC) dans $G$. En effet, si $G$ contenait un tel arbre, on pourrait facilement en extraire un ASTI (resp. un ASC) à $k+1$ sommets. Cela conclut la preuve. □

**Théorème 5.23.** *Soit $k$ un entier fixé et $n \geq 2k+1$. Si chaque sommet de $G = (K_n, \mathcal{I}nt_G)$ est extrémité d'au plus $k$ transitions interdites (resp. si chaque sommet de $G = (K_n, \mathcal{C}onf_G)$ est dans au plus $k$ conflits), alors $G$ contient un ACSTI (resp. un ACSC) qui peut être construit en temps polynomial.*

*Démonstration.* L'idée générale est la suivante : tout d'abord construire un chemin à $k+1$ sommets dans $G$ et ensuite l'étendre en un ACSTI (resp. un ACSC) de $G$ en utilisant le lemme 5.19 (resp. 5.20).

Pour $u \in V_G$, notons $Ext(u)$ l'ensemble de sommets extrémité d'une transition de centre $u$ si $G = (K_n, \mathcal{I}nt_G)$ et $Ext(u)$ l'ensemble des sommets $v$ tels que l'arête $uv$ soit dans un conflit si $G = (K_n, \mathcal{C}onf_G)$. On remarque que tout chemin dans $G$ d'extrémité $u$ peut être prolongé en ajoutant une arête entre $u$ et un sommet $w$ extérieur au chemin lorsque $w \notin Ext(u)$. On a également par hypothèse $|Ext(u)| \leq k$.

Montrons maintenant comment, en partant d'un sommet de $G$, on peut construire pas à pas un chemin de longueur $k+1$ dans $G$. Plus précisément, montrons comment pour $1 \leq i \leq k$, on peut passer d'un chemin $C = u_1, \ldots, u_i$ à $i$ sommets à un chemin à $i+1$ sommets dans $G$. Comme $i \leq k$ et $n \geq 2k+1$ il y a au moins $k+1$ sommets de $G$ qui ne sont pas dans $P$. Ainsi, comme $|Ext(u_i)| \leq k$ au moins l'un d'eux n'est pas dans $Ext(u_i)$ et on peut alors ajouter ce sommet à la fin de $C$ pour obtenir un chemin à $i+1$ sommets dans $G$. On obtient donc un chemin à $k+1$ en temps $O(n^k)$.

Une fois le chemin à $k+1$ sommets dans $G$ obtenu, il ne reste donc plus qu'à appliquer le lemme 5.19 (resp. 5.20) pour obtenir un ACSTI (resp. un ACSC) dans $G$ en temps polynomial. □

## 5.5 Conclusion et perspectives

Nous avons vu que l'ajout de conflits ou de transitions interdites rendait difficiles des problèmes simples dans les graphes, y compris dans des classes de graphes aussi restreintes que les $(3, k)$-grilles. Une de nos perspectives est donc de rechercher des algorithmes exacts exponentiels pour les problèmes ACSTI et ACSC.

Comme nous avons vu que $\beta(G)$, le nombre maximum d'arêtes d'un ASTI de $G$, n'est pas approximable avec un ratio d'approximation inférieur ou égal à $n^{1/2-\varepsilon}$

pour un certain $\varepsilon > 0$ sous l'hypothèse $\mathscr{P} \neq \mathscr{NP}$, il serait également intéressant d'avoir un algorithme exact exponentiel permettant de calculer $\beta(G)$.

Pour terminer, signalons que nous décrivons dans l'annexe B un processus permettant de simplifier une instance $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}on f_G)$ du problème ACSC en supprimant des arêtes et des conflits pour obtenir une nouvelle instance $G_f = (V_{G_f} = V_G, E_{G_f}, \mathcal{C}on f_{G_f})$, plus simple que l'instance initiale et possédant un ACSC si et seulement si $G$ en possède un. Ce processus est encore en cours d'amélioration.

# Chapitre 6

# Conditions hamiltoniennes

## 6.1 Introduction

Ces dernières décennies, de nombreux travaux ont été réalisés pour obtenir des conditions suffisantes pour qu'un graphe ait un cycle hamiltonien. Plusieurs conditions suffisantes, devenues maintenant classiques, ont été obtenues pour un graphe à $n \geq 3$ sommets : la condition de Dirac [Dir52] (si le degré de chaque sommet est d'au moins $\frac{n}{2}$), la condition de Ore [Ore60] qui généralise la précédente (si la somme de degrés de toute paire de sommets non adjacents vaut au moins $n$) et enfin la condition de Bondy-Chvátal [BC76] qui généralise les deux précédentes (basée sur la notion de clôture). Pour plus de résultats dans ce domaine on peut consulter les états de l'art [Gou91, Gou03, Gou14] ainsi que [Li13]. Le travail présenté dans ce chapitre, vise à généraliser ces conditions aux graphes 1-conflit. Ce chapitre présente principalement les résultats des articles [LM14] et [LM15]. Nous montrons qu'il n'est en général pas possible d'étendre telles quelles les conditions classiques aux graphes 1-conflit, et nous proposons de nouvelles conditions suffisantes inspirées par ces dernières pour qu'un graphe 1-conflit (graphe avec conflit dans lequel chaque sommet apparaît dans les arêtes d'au plus un conflit) contienne un Ch.HSC ou un CHSC. Dans la première section, nous nous intéressons à la condition de Dirac. Dans la deuxième section, nous étudions la condition de Nash-Williams [NW69] (tout graphe $k$-régulier à $2k+1$ sommets contient un cycle hamiltonien). Dans la troisième section, nous traitons les conditions de Ore et Bondy-Chvátal. Finalement, dans la quatrième section, nous terminons par la condition de Chvátal [Chv72] (basée sur la suite des degrés des sommets du graphe).

## 6.2 Résultats "à la Dirac"

On rappelle le résultat (1952) de Dirac dans les graphes :

**Théorème 6.1.** *[Dir52]. Un graphe à $n \geq 3$ sommets $G$ tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ contient un cycle hamiltonien.*

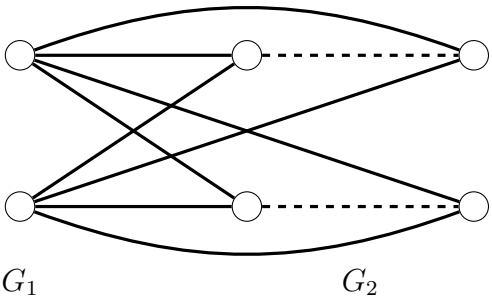
Nous avons tenté de voir si des résultats du même type existaient dans les graphes avec conflits. Par exemple, on déduit du théorème 6.1 le résultat suivant.

**Corollaire 6.2.** *Un graphe* 1*-conflit* $G$ *à* $n$ *sommets tel que* $\delta(G) \geq \frac{n}{2} + 1$ *contient un CHSC.*

*Démonstration.* Pour $n \leq 3$ aucun graphe ne vérifie la condition. Pour $n \geq 3$, il suffit de supprimer une arête de chaque conflit et de remarquer que le graphe obtenu vérifie les conditions du théorème 6.1 et admet donc un cycle hamiltonien qui est un CHSC dans $G$. □

Cependant, en général il n'est pas possible d'avoir un CHSC dans un graphe 1-conflit vérifiant la condition sur le degré du théorème 6.1 dite "condition de DIRAC". Par exemple, si $n = 4$, le cycle à 4 sommets $C_4$ où deux arêtes sont en conflit satisfait les conditions du théorème 6.3 mais ne contient pas de CHSC.

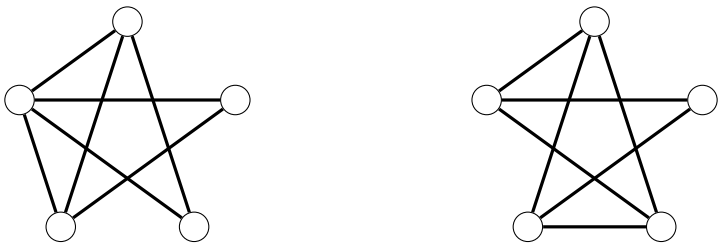
Pour $n = 6$, considérons un stable à deux sommets $G_1$ et un graphe à 4 sommets composé de deux arêtes disjointes $G_2$. Notons $G$ le graphe obtenu en faisant l'union disjointe de $G_1$ et $G_2$ et en ajoutant toutes les arêtes possibles entre les sommets de $G_1$ et ceux de $G_2$. On remarque que tout cycle hamiltonien dans $G$ passe nécessairement par les deux arêtes de $G_2$, et donc en mettant ces deux arêtes en conflit, on obtient un graphe satisfaisant les conditions du théorème 6.3 mais ne contenant pas de CHSC.




En revanche, pour $n = 5$, tous les graphes 1-conflit qui vérifient la condition de DIRAC contiennent un CHSC. En effet, les seuls graphes vérifiant la condition sur le degré (chaque sommet est de degré supérieur ou égal à 3) sont :

- Le graphe complet à 5 sommets $K_5$,
- $K_5$ privé d'une arête,
- $K_5$ privé de deux arêtes non adjacentes.

De plus, comme un conflit contient 3 (transition interdite) ou 4 (conflit parallèle) sommets , pour satisfaire la condition sur les conflits (chaque sommet est dans au plus un conflit) notre graphe peut contenir au plus un conflit. Ainsi, pour montrer que les graphes précédents auxquels on ajoute un conflit admettent chacun un CHSC, il suffit de montrer que le dernier privé d'une des arêtes du conflit, *i.e.*, $K_5$ (sans conflit) privé de trois arêtes dont deux sont non adjacentes, admet un cycle hamiltonien.



On remarque que lorsque l'on considère un cycle hamiltonien dans $K_5$, les arêtes restantes forment également un cycle hamiltonien (plus généralement, $K_{2n+1}$ est décomposable en $n$ cycles hamiltoniens arête-disjoints - Walecki 1892 - voir [Luc92]). Lorsque l'on prend dans $K_5$ trois arêtes dont deux sont non adjacentes, on peut facilement trouver un cycle hamiltonien passant par ces trois arêtes. Les arêtes restantes forment alors un cycle hamiltonien dans $K_5$ privé des trois arêtes précédentes. Ainsi, pour $n = 5$, tous les graphes 1-conflit vérifiant la condition de Dirac contiennent un CHSC.

Nous avons obtenu, pour les graphes 1-conflit, le résultat suivant qui est similaire au théorème 6.1 en remplaçant cycle hamiltonien par Ch.HSC.

**Théorème 6.3.** *Un graphe* 1*-conflit à $n$ sommets $G$ tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ contient un Ch.HSC que l'on peut construire en temps polynomial.*

Pour $n = 1, 2, 3$ ou 4 le graphe $G$ admet un Ch.HSC et une technique similaire à celle décrite dans la preuve du lemme 6.2 permet de le construire. On suppose dès maintenant que $n$ est supérieur ou égal à 5.

Nous allons montrer qu'un graphe 1-conflit à $n$ sommets $G$ tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ contient un Ch.SC de longueur $k$ supérieure ou égale à $\frac{n}{2} - 1$ (lemme 6.2). Ensuite, nous montrerons que si $k \leq n - 3$, le Ch.SC de longueur $k$ peut donner naissance à un Ch.SC de longueur $k + 1$. Cela se fera, soit en ajoutant une arête entre une des extrémités du Ch.SC de longueur $k$ et un sommet extérieur tout en restant sans conflit, soit en transformant le Ch.SC de longueur $k$ en un CSC de longueur $k + 1$ (lemme 6.5) lequel pourra à son tour donner naissance à un Ch.SC de longueur $k + 1$ (lemme 6.6). En répétant cette opération on obtiendra alors un Ch.SC de longueur $n-2$ (lemme 6.8). Enfin, on montrera qu'un tel Ch.SC peut être transformé en un Ch.HSC (lemme 6.9). Comme notre démonstration est constructive, nous obtiendrons un algorithme permettant d'obtenir un Ch.HSC dans $G$ (algorithme 6).

**Lemme 6.4.** *Un graphe* 1*-conflit $G$ à $n$ sommets tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ contient un Ch.SC de longueur supérieure ou égale à $\frac{n}{2} - 1$ que l'on peut construire en suivant la méthode décrite dans la preuve.*

*Démonstration.* On part d'un sommet quelconque de $G$ et on construit progressivement un Ch.SC de plus en plus long en ajoutant un sommet voisin d'une de ses extrémités sans ajouter de conflit (tant que cela est possible). Tant que la longueur du Ch.SC est strictement inférieur à $\frac{n}{2} - 1$, chacune de ses extrémités est voisine d'au moins deux sommets qui lui sont extérieurs, et il peut donc être prolongé tout en restant sans conflit. En procédant ainsi tant que possible, on est donc certain d'obtenir un Ch.SC de longueur supérieure ou égale à $\frac{n}{2} - 1$. Cela conclut la preuve. □

**Lemme 6.5.** *Soit $P = v_1, \ldots, v_{k+1}$ un Ch.SC de longueur $k$ dans un graphe 1-conflit $G$ à $n$ sommets tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, que l'on ne peut pas prolonger en ajoutant une arête entre une des extrémités et un sommet extérieur tout en restant sans conflit comme vu dans la preuve du lemme 6.2. Si $k \leq n-3$, il existe un CSC de longueur $k+1$ dans $G$ que l'on peut construire en suivant la méthode décrite dans la preuve.*

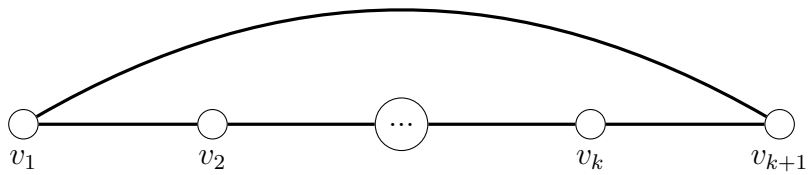
*Démonstration.* Commençons par remarquer que comme on a supposé $n \geq 5$, d'après le lemme on a $k \geq \lceil \frac{5}{2} - 1 \rceil = 2$. Supprimons une arête extérieure à $P$ de chaque conflit et notons $G'$ le graphe obtenu. Un cycle dans $G'$ est alors un CSC dans $G$. Dans $G'$ les sommets $v_1$ et $v_{k+1}$ ne sont dans aucun conflit et sont de degré supérieur ou égal à $\frac{n}{2} - 1$. Ils sont donc chacun adjacents à au moins $\frac{n}{2} - 1$ sommets de $P$ (car sinon on pourrait prolonger $P$ en utilisant la méthode décrite dans la preuve du lemme 6.2). De plus il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $v_1$ est adjacent à $v_{i+1}$ et $v_{k+1}$ est adjacent $v_i$. En effet, si pour sommet $v_{i+1}$ adjacent à $v_1$, $v_i$ n'était pas adjacent $v_{k+1}$, au moins $\frac{n}{2} - 1$ sommets de $P$ ne seraient pas adjacents à $v_{k+1}$. Ainsi, $v_{k+1}$ serait adjacent à au maximum

$$k - (\frac{n}{2} - 1)$$

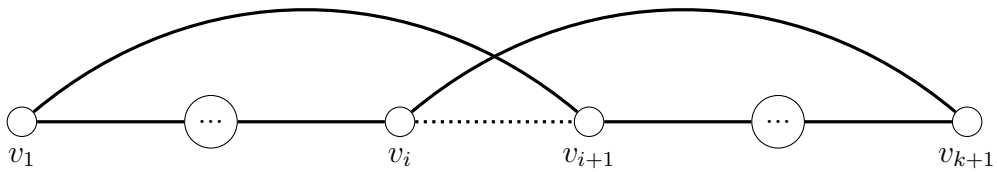
sommets de $P$, et comme

$$k - \left(\frac{n}{2} - 1\right) = k - \frac{n}{2} + 1 \leq n - 3 - \frac{n}{2} + 1 = \frac{n}{2} - 2 < \frac{n}{2} - 1,$$

cela est impossible. Finalement, si $i = 1$ ou $i = k$, $v_1, \ldots, v_{k+1}, v_1$



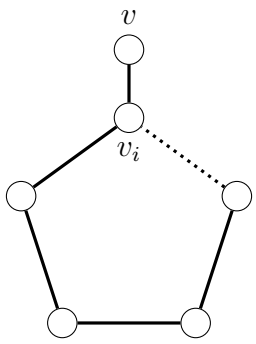

est un CSC de longueur $k+1$ dans $G$ et si $1 < i < k$, $v_1, \ldots, v_i, v_{k+1}, \ldots v_{i+1}, v_1$




est un CSC de longueur $k+1$ dans $G$. Cela conclut la preuve. □

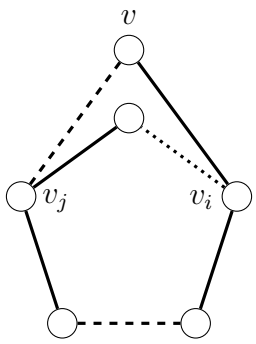
**Lemme 6.6.** *Soit $C = v_1, \ldots, v_{k+1}, v_1$ un CSC de longueur $k+1$ dans un graphe 1-conflit $G$ à $n$ sommets tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} - 1 \leq k \leq n-3$. On peut construire un Ch.SC de longueur $k+1$ dans $G$ à partir de $C$ en suivant la méthode décrite dans la preuve.*

*Démonstration.* Si $k + 1 = \frac{n}{2}$. Prenons un sommet quelconque $v_i$ de $C$. Comme $v_i$ est de degré supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$ il est adjacent à un sommet $v$ extérieur à $C$. S'il n'existe pas d'arête de $C$ en conflit avec $vv_i$ alors on ajoute cette arête à $C$ et on lui retire l'une des arêtes contenant $v_i$ pour obtenir un Ch.SC de longueur $k+1$.




Sinon, on note $ab$ l'arête du cycle en conflit avec $vv_i$. On a alors $a \neq v_i$ ou $b \neq v_i$. Par symétrie on peut supposer $a \neq v_i$. Comme $a$ ne peut pas être dans plus d'un conflit, on peut remplacer le sommet $v_i$ choisi initialement par $a$ pour exécuter l'opération ci-dessus.

Si $k > \frac{n}{2}$, prenons un sommet $v$ extérieur au cycle. Comme le degré de $v$ est supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$, il est adjacent à au moins deux sommets du cycle $v_i$ et $v_j$. Comme $v$ est dans au plus un conflit, l'une des arêtes $vv_i$ ou $vv_j$ n'est en conflit avec aucune arête de $C$. Par exemple, s'il s'agit de $vv_i$ on ajoute $vv_i$ à $C$ et on lui retire l'une des arêtes contenant $v_i$ pour obtenir un Ch.SC de longueur $k+1$. Cela conclut la preuve.




□

**Remarque 6.7.** La méthode décrite dans la preuve du lemme 6.6 fonctionne pour n'importe quel cycle de longueur $k+1$, pas forcément obtenu via le lemme 6.5.

Dans un graphe 1-conflit à $n$ sommets $G$ tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, tout Ch.SC de longueur $k \leq n-3$ peut donner naissance à une Ch.SC de longueur $k+1$ de la manière suivante :

- Si possible on applique la technique présentée dans la preuve du lemme 6.2,
- Sinon, on construit un CSC de longueur $k+1$ en utilisant les techniques présentées dans la preuve du lemme 6.5 puis on construit un Ch.SC de longueur $k+1$ à partir de ce cycle en utilisant les techniques présentée dans la preuve du lemme 6.6.

Ainsi, en répétant cette opération, on obtient le résultat suivant :

**Lemme 6.8.** *En partant d'un sommet quelconque d'un graphe* 1*-conflit* $G$ *à* $n$ *sommets tel que* $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$*, on peut construire un Ch.SC de longueur* $n-2$ *dans* $G$*.*

Voyons maintenant comment obtenir un Ch.HSC, c'est-à-dire un Ch.SC de longueur $n-1$, à partir du Ch.SC de longueur $n-2$.

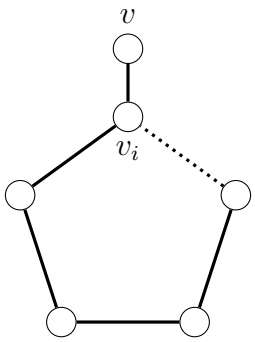
**Lemme 6.9.** *Tout Ch.SC $P = v_1, \ldots, v_{n-1}$, de longueur $n-2$ dans un graphe 1-conflit $G$ à $n$ sommets tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ peut donner naissance à un Ch.HSC dans $G$ en suivant la méthode décrite dans la preuve.*

*Démonstration.* On note $v$ le sommet extérieur à $P$. On supprime une arête extérieure à $P$ de chaque conflit pour obtenir un graphe $G'$ dans lequel tout sommet est de degré supérieur ou égal à $\frac{n}{2} - 1$. Un chemin hamiltonien dans $G'$ est alors un Ch.HSC dans $G$.

**Cas 1 :** Si $vv_1 \in E_{G'}$ ou $vv_{n-1} \in E_{G'}$ alors il existe un Ch.HSC dans $G$.

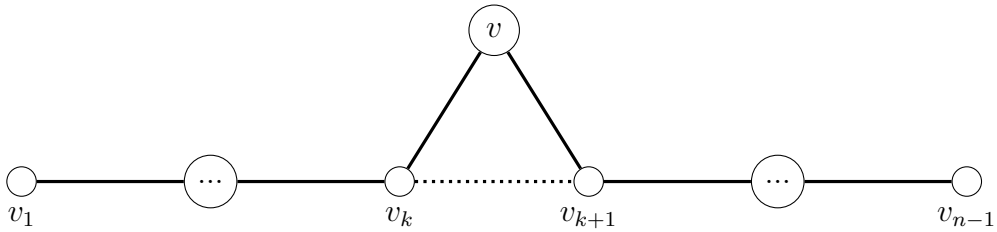
**Cas 2 :** Supposons dès maintenant que l'on a $vv_1 \notin E_{G'}$ et $vv_{n-1} \notin E_{G'}$.

**Cas 2.1 :** Si $v_1v_{n-1} \in E_{G'}$ alors ajoutons cette arête à $P$ et notons $C$ le cycle obtenu. Pour obtenir un Ch.HSC dans $G$, il suffit maintenant de prendre un sommet $v_i$ de $P$ tel que $vv_i \in E_{G'}$, d'ajouter cette arête à $C$, et de retirer de $C$ l'une des arêtes contenant $v_i$.

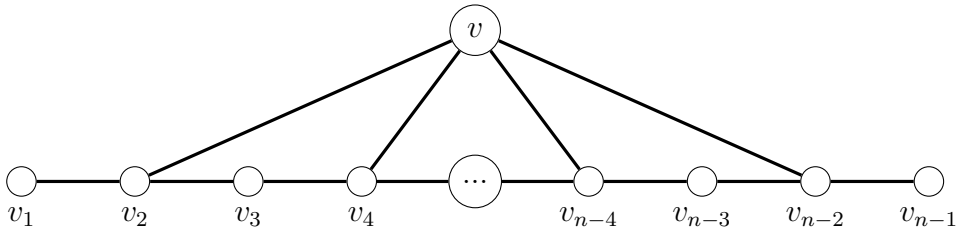



**Cas 2.2 :** Supposons dès maintenant que $v_1v_{n-1} \notin E_{G'}$.

**Cas 2.2.1 :** S'il existe $k \in \{2, \ldots, n-3\}$ tel que $vv_k \in E_{G'}$ et $vv_{k+1} \in E_{G'}$ alors on peut ajouter ces deux arêtes à $P$ et supprimer l'arête $v_kv_{k+1}$ pour obtenir un Ch.HSC dans $G$.

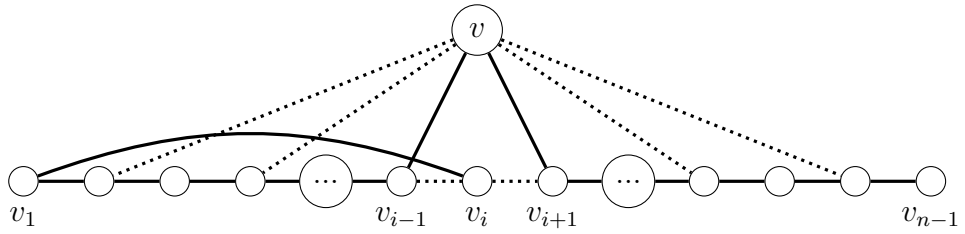



**Cas 2.2.2 :** Sinon, $n$ est pair et $v$ est adjacent aux seuls $\frac{n}{2} - 1$ sommets de $A := \{v_2, v_4, \ldots, v_{n-2}\}$.



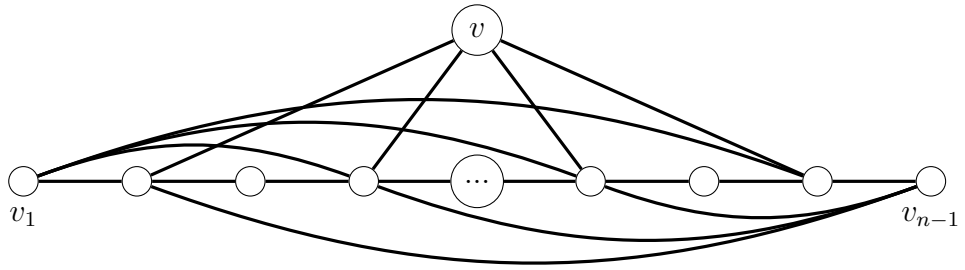
**Cas 2.2.2.1 :** Si $v_1$ (resp. $v_{n-1}$) est relié à un sommet $v_i \notin A$ alors

$$v_i, v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1} \ldots, v_{n-1}$$




(resp. $v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1} \ldots, v_{n-1}, v_i$) est un Ch.HSC dans $G$.

**Cas 2.2.2.2 :** Sinon $v_1$ et $v_{n-1}$ sont reliés aux $\frac{n}{2} - 1$ sommets de $A$.

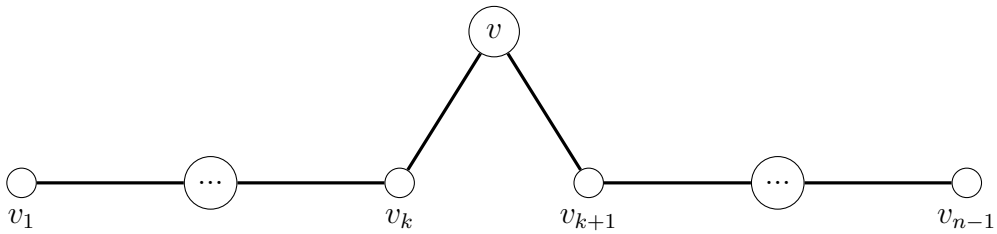



Comme $deg_{G'}(v) = \frac{n}{2} - 1$, on a supprimé une arête contenant $v$ pour obtenir $G'$. On la réintègre et on supprime l'arête avec laquelle elle est en conflit pour obtenir un nouveau graphe $G''$. Montrons que $G''$ contient un chemin hamiltonien qui sera alors un Ch.HSC dans $G$.

**Cas 2.2.2.2.1 :** Si l'arête supprimée pour obtenir $G''$ n'est pas une arête de $P$, alors $v$ étant adjacent à deux arêtes consécutives dans $G''$, il existe donc un Ch.HSC dans $G$.

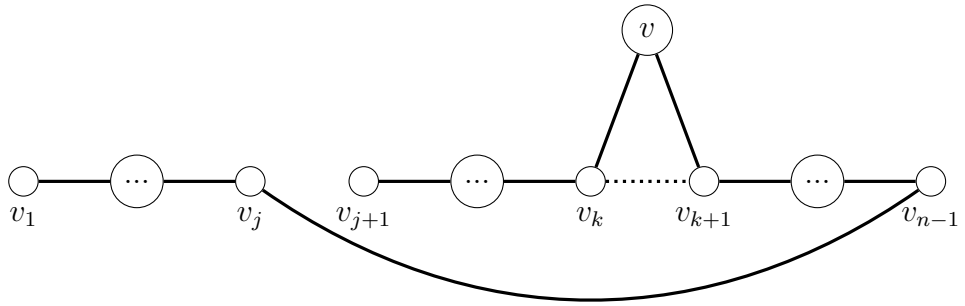
**Cas 2.2.2.2.2 :** Supposons dès maintenant que l'arête supprimée est une arête de $P$ et notons $P'$ le chemin $P$ sans cette arête. Il existe $k \in \{1, \ldots, n-2\}$ tel que $v$ soit voisin de $v_k$ et $v_{k+1}$ dans $G''$ mais il manque une arête de $P$. Notons maintenant $v_j v_{j+1}$ l'arête de $P$ supprimée pour obtenir $P'$.

**Cas 2.2.2.2.2.1 :** Si $j = k$ alors $v_1, \ldots, v_k, v, v_{k+1}, \ldots v_{n-1}$ est un Ch.HSC dans $G$.

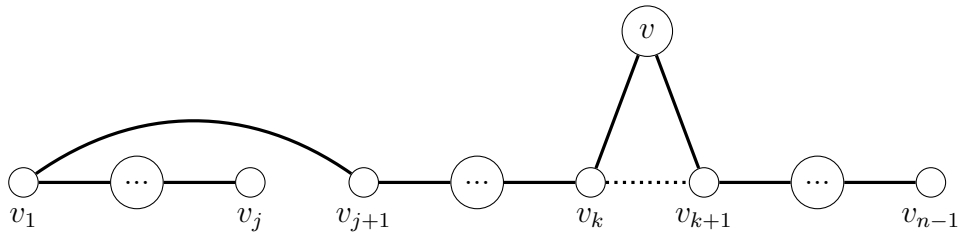



**Cas 2.2.2.2.2.2 :** Si $j < k$ :

**Cas 2.2.2.2.2.2.1 :** Si $v_j \in A$ alors $v_{j+1}, \ldots, v_k, v, v_{k+1}, \ldots v_{n-1}, v_j, \ldots, v_1$ est un Ch.HSC dans $G$.

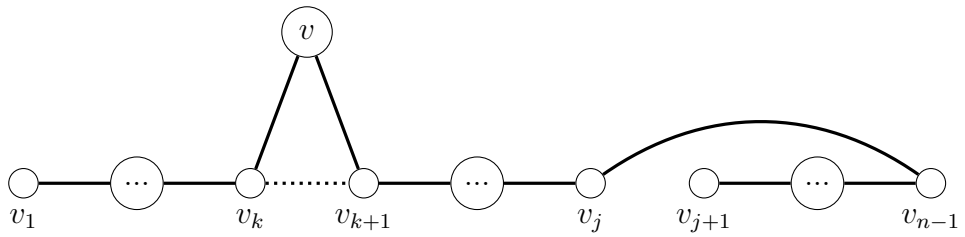



**Cas 2.2.2.2.2.2.2 :** Si $v_j \notin A$ alors $v_{j+1} \in A$ et $v_j, \ldots, v_1, v_{j+1}, \ldots, v_k, v, v_{k+1}, \ldots v_{n-1}$ est un Ch.HSC dans $G$.

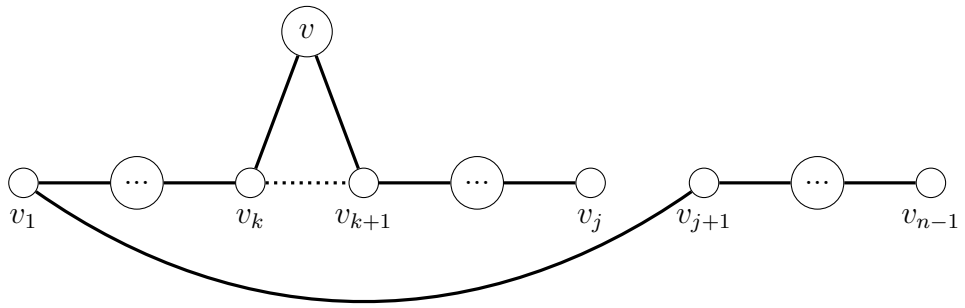



**Cas 2.2.2.2.2.3 :** Si $j > k$ :

**Cas 2.2.2.2.2.3.1 :** Si $v_j \in A$ alors $v_1, \ldots, v_k, v, v_{k+1}, \ldots, v_j, v_{n-1} \ldots, v_{j+1}$ est un Ch.HSC dans $G$.




**Cas 2.2.2.2.2.3.2 :** Si $v_j \notin A$ alors $v_{j+1} \in A$ et $v_{n-1}, \ldots, v_{j+1}, v_1, \ldots, v_k, v, v_{k+1}, \ldots, v_j$ est un Ch.HSC dans $G$.




Cela conclut la preuve. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 6.3.

*Démonstration du théorème 6.3.* Le lemme 6.8 montre comment construire un Ch.SC de longueur $n-2$ et le lemme 6.9 montre comment le transformer en un Ch.HSC. Cela conclut la preuve. □

Nous ne savons pas, si pour $n$ suffisamment grand, le résultat du théorème 6.3 est vrai lorsque l'on remplace Ch.HSC par CHSC. Par contre, en ce qui concerne les graphes avec transitions interdites, Krivelevich, Lee et Sudakov [KLS15] viennent de montrer un résultat plus général.

**Définition 6.10.** On dit qu'un graphe avec transitions interdites $G$ est *$\mu$-borné* si pour toute arête $e \in E_G$ et pour tout sommet $v \in e$ le nombre de transitions interdites de centre $v$ contenant $e$ est inférieur ou égal à $\mu$.

**Théorème 6.11.** *[KLS15]. Il existe une constante $\mu \geq 0$ telle que tout graphe avec transitions interdites à $n$ sommets $\mu n$-borné $G$ vérifiant $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ contienne un CHSTI.*

Nous verrons plus loin, au corollaire 6.41, que lorsqu'un graphe 1-conflit à $n$ sommets $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$ tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ vérifie $|\mathcal{C}onf_G| \leq \frac{n}{4} - 1$, le graphe 1-conflit $G$ contient un CHSC.

Pour conclure, on déduit du théorème 6.3 le résultat suivant qui nous donne un algorithme polynomial pour obtenir un Ch.HST dans un graphe 1-conflit à $n$ sommets $G$ tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$.

**Corollaire 6.12.** *L'algorithme 6 est correct et retourne un Ch.HSC dans $G$.*

**Algorithme 6 :** Ch.HSC sous la condition de Dirac

**Données** : Un graphe 1-conflit à $n$ sommets $G$ tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$.
**Résultat** : Un Ch.HSC dans $G$.
**début**
  $P \leftarrow$ Un sommet de $G$ ; $P' \leftarrow \emptyset$ ; **tant que** $P \neq P'$ **faire**
    **tant que** $P \neq P'$ **faire**
      $P' \leftarrow P$ ; Appliquer si possible la technique du lemme 6.2 à $P$ (qui consiste à ajouter un sommet extérieur à une extrémité de $P$) ;
    **fin**
    **si** *La longueur de $P$ est inférieure ou égale à $n-3$* **alors**
      Appliquer à $P$ la technique décrite dans la preuve du lemme 6.5 (qui permet de transformer $P$ en un CSC ayant le même nombre de sommets) puis celle décrite dans la preuve du lemme 6.6 (qui permet de transformer le CSC en un Ch.SC ayant un sommet de plus que $P$) ;
  **fin**
  **si** *$P$ est de longueur $n-1$* **alors**
    **retourner** $P$ ;
  **sinon**
    Appliquer la technique du lemme 6.9 à $P$ (qui permet de transformer un chemin sans conflit à $n-1$ sommets en un chemin à $n$ sommets) ;
    **retourner** $P$ ;
  **fin**
**fin**

## 6.3 Résultat "à la NASH-WILLIAMS"

On rappelle le résultat (1969) de NASH-WILLIAMS dans les graphes :

**Théorème 6.13.** *[NW69]. Un graphe $k$-régulier à $2k+1$ sommets contient un cycle hamiltonien.*

**Remarque 6.14.** Si $H$ est un graphe $\alpha$-régulier à $2\beta+1$ sommets, on a :

$$2|E_H| = \sum_{v \in V_H} deg_H(v) = \alpha(2\beta+1)$$

et donc $\alpha$ est nécessairement divisible par deux. Ainsi, pour un graphe $k$-régulier à $2k+1$-sommets, $k$ est divisible par deux.

**Remarque 6.15.** Le théorème 6.13 est "serré", c'est-à-dire qu'il devient faux lorsque l'on remplace $2k+1$ sommets par $2k+2$ sommets ou $k$-régulier par $(k-1)$-régulier $(k \geq 1)$.

*Démonstration.* Si l'on remplace $2k+1$ sommets par $2k+2$ sommets alors l'union disjointe de deux graphes complets à $k+1$ sommets est un graphe $k$-régulier à $2k+2$ sommets qui n'est pas connexe et donc n'admet pas de cycle hamiltonien.

Si l'on remplace $k$-régulier par $k-1$-régulier. L'union disjointe d'un graphe complet à $k+1$ sommets privé d'un couplage parfait (un tel couplage existe car $k+1$ est pair d'après la remarque 6.14) et d'un graphe complet à $k$ sommets est un graphe $(k-1)$-régulier à $2k+1$ sommets qui n'est pas connexe et donc n'admet par de cycle hamiltonien. Cela conclut la preuve. □

Comme le papier [NW69] est difficilement trouvable, nous allons donner une preuve du théorème 6.13 inspirée de l'unique preuve que nous avons vue sur internet http://vene.ro/blog/nash-williams-theorem-on-the-hamiltonian-property-of-some-regular-graphs.html

*Démonstration du théorème 6.13.* Soit $G$ un graphe $k$-régulier ayant $2k+1$ sommets. Rappelons que d'après la remarque 6.14 on a $k \geq 2$. On ajoute un sommet à $G$ que l'on relie à tous les autres sommets. Le graphe ainsi obtenu satisfait la condition du théorème 6.1 (de DIRAC) et on peut donc construire dans ce nouveau graphe un cycle hamiltonien. Le sous-graphe de ce cycle induit par les sommets de $G$ est alors un chemin hamiltonien dans $G$ :

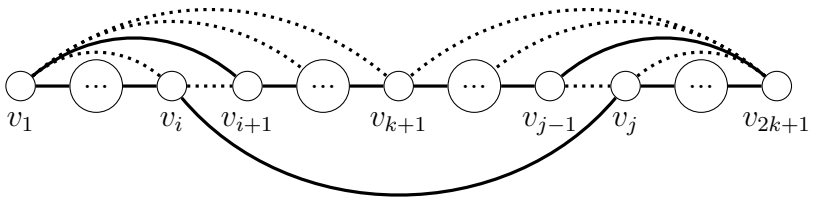
$$P = v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$$

Supposons dès maintenant que $G$ ne contienne pas de cycle hamiltonien. Parmi les sommets de $P$ différents de $v_1$, $k$ sont voisins de $v_1$ et $k$ ne le sont pas. Les prédécesseurs des voisins de $v_1$ ne sont pas voisins de $v_{2k+1}$ car sinon on aurait un cycle hamiltonien dans $G$. Comme $v_{2k+1}$ a $k$ voisins parmi les sommet de $P$, ses voisins sont les prédécesseurs des sommets qui ne sont pas voisins de $v_1$. Ainsi, pour $i \in \{2, \ldots, 2k+1\}$,

$$v_1 v_i \notin E_G \Leftrightarrow v_{i-1} v_{2k+1} \in E_G.$$

Si $v_1$ est voisin de $v_2, v_3, \ldots, v_{k+1}$ alors $v_{2k+1}$ est voisin $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{2k}$. Maintenant, comme $v_{k+1}$ est relié à $v_{k+2}$, il n'est pas relié à au moins un sommet $v_i$ de $\{v_2, \ldots, v_k\}$ et donc $v_i$ est relié à un sommet $v_j$ de $\{v_{k+2}, \ldots, v_{2k}\}$. Mais alors,

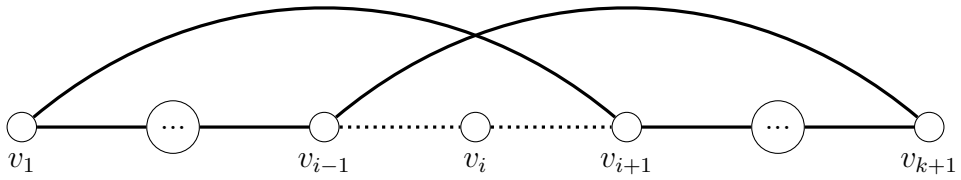
$$v_1, \ldots, v_i, v_j, v_{2k+1}, v_{j-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1$$




est un cycle hamiltonien dans $G$.

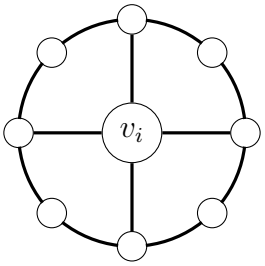
Donc il existe $i \in \{2, \ldots, 2k\}$ tel que $v_1v_i \notin E_G$ et $v_1v_{i+1} \in E_G$. Mais alors, $v_{i-1}v_{2k+1} \in E_G$ et donc

$$C = v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{2k+1}, \ldots, v_{i+1}, v_1$$

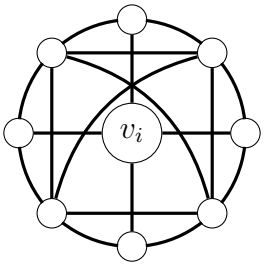



est un cycle de longueur $2k$ dans $G$.

Maintenant le sommet $v_i$ extérieur à $C$ est relié à un sommet de $C$ sur deux car sinon il serait adjacent à deux sommets consécutifs et on aurait alors un cycle hamiltonien.




En permutant $v_i$ avec l'un quelconque des $k$ sommets auxquels il n'est pas relié, on remarque que ce dernier peut jouer le rôle du sommet extérieur, et que $v_i$ peut prendre sa place pour obtenir un nouveau cycle de longueur $2k$. Le nouveau sommet extérieur ayant déjà deux voisins en commun avec $v_i$ (ses voisins dans $C$), il est relié aux mêmes sommets du nouveau cycle que $v_i$. Donc, chacun des $k$ sommets auxquels $v_i$ n'est pas relié, est relié aux voisins de $v_i$ qui sont alors de degré supérieur ou égal à $k+1$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur les degrés des sommets de $G$.




Ainsi, supposer qu'il n'existe pas de cycle hamiltonien dans $G$ aboutit à une contradiction et il existe donc un cycle hamiltonien dans $G$. Cela conclut la preuve. □

**Remarque 6.16.** En général, le théorème 6.13 est faux pour les graphes 1-conflit. Par exemple, pour $k = 2$, le cycle à 5 arêtes dont deux d'entre elles sont en conflit est un graphe $k$-régulier à $2k + 1$ sommets mais ne contient pas de CHSC.

Cela étant, nous avons tenté de voir si des résultats similaires existaient dans les graphes 1-conflit. Nous avons obtenu pour ces graphes un résultat semblable au théorème 6.13 valable pour les Ch.HSC.

**Théorème 6.17.** *Un graphe* 1*-conflit* $k$*-régulier à* $2k + 1$ *sommets contient un Ch.HSC.*

Commençons par remarquer que si $k = 0, 1$ ou 2 le résultat est évident. En effet, si $k = 0$, le graphe est réduit à 1 sommet. Si $k = 1$, il n'existe pas de graphe $k$-régulier à $2k + 1$ sommets d'après la remarque 6.14. Enfin, si $k = 2$, un graphe 1-conflit 2-régulier à 5 sommets est un cycle avec au plus deux arêtes en conflit et il suffit alors de supprimer l'une d'entre elles pour obtenir un Ch.HSC. Nous pouvons donc supposer dès maintenant que $k$ est supérieur ou égal à 3.

Nous allons montrer qu'un graphe 1-conflit $k$-régulier à $2k+1$ sommets contient un Ch.SC de longueur $i$ supérieure ou égale à $k$ (lemme 6.18). Ensuite, nous montrerons que si $i \leq 2k - 3$, le Ch.SC de longueur $i$ peut donner naissance Ch.SC de longueur $i + 1$. Cela se fera, soit en ajoutant une arête entre une des extrémités du Ch.SC de longueur $i$ et un sommet extérieur tout en restant sans conflit, soit en transformant le Ch.SC de longueur $i$ en un CSC de longueur $i + 1$ (lemme 6.20) lequel pourra à son tour donner naissance à Ch.SC de longueur $i+1$ (lemme 6.21). En répétant cette opération, on obtiendra alors un Ch.SC de longueur $2k - 2$ (lemme 6.22). Par la suite, nous montrerons qu'un tel Ch.SC peut être transformé en un Ch.SC de longueur $2k - 2$ (lemme 6.23) lequel pourra de nouveau être transformé en un Ch.HSC, ce qui prouvera le théorème 6.17.

**Lemme 6.18.** *Un graphe* 1*-conflit* $k$*-régulier à* $2k + 1$ *sommets contient un Ch.SC de longueur au moins* $k$*.*

*Démonstration.* Soit $G$ un graphe 1-conflit $k$-régulier à $2k + 1$ sommets. Supposons que la longueur $i$ du plus long Ch.SC dans $G$,

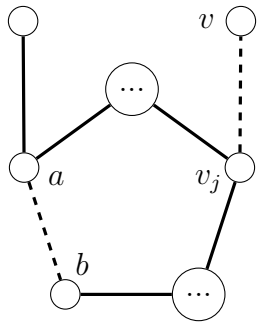
$$P = v_0, \ldots, v_i$$

soit strictement inférieure à $k$. Supprimons une arête extérieure à $P$ de chaque conflit et notons $G'$ le graphe obtenu. Un chemin dans $G'$ est alors un Ch.SC dans $G$. Ainsi, dans $G'$ les sommets $v_0$ et $v_i$ sont de degré supérieur ou égal à $k-1$ et ne sont pas adjacents à un sommet extérieur à $P$. On a donc $i \geq 2$ et $v_0v_i \in E_{G'}$. Par conséquent,

$$C = v_0, \ldots, v_i, v_0$$

est un CSC de longueur $i+1$ dans $G$.

Considérons maintenant un sommet $v_j$ de $C$. Comme $deg_G(v_j) = k$, le sommet $v_j$ est adjacent à un sommet $v$ extérieur à $C$ dans $G$. Si aucune arête de $C$ n'était en conflit avec $vv_j$, alors en ajoutant cette arête à $C$ et en lui retirant l'une des arêtes contenant $v_j$, on obtiendrait un Ch.SC de longueur $i+1$ dans $G$, ce qui contredirait la maximalité de $i$. Ainsi, il existe une arête $ab$ de $C$ telle que $\{ab, vv_j\} \in \mathcal{C}onf_G$. On a alors $a \neq v_j$ ou $b \neq v_j$. Par symétrie, on peut supposer que $a \neq v_j$. Comme $a$ ne peut pas être dans plus d'un conflit de $G$, on peut remplacer le sommet $v_j$ choisi initialement par $a$ pour obtenir un Ch.SC de longueur $i+1$ dans $G$ via l'opération précédente et de nouveau la maximalité de $i$ est contredite. Finalement, la supposition initiale est fausse et il existe un Ch.SC de longueur au moins $k$ dans $G$. Cela conclut la preuve.




□

**Remarque 6.19.** On peut également prouver l'existence et construire, dans un graphe 1-conflit $k$-régulier à $2k+1$ sommets $G$, un Ch.SC de longueur au moins $k$ à l'aide du théorème 6.3. En effet, on ajoute un sommet universel à $G$ relié à tous les autres sommets. Le graphe ainsi obtenu satisfait les conditions du théorème 6.3 et on peut donc construire dans ce nouveau graphe un Ch.HSC. Le sous-graphe de ce Ch.HSC induit par les sommets de $G$ contient au plus deux Ch.SC et donc l'un d'eux est un Ch.SC de longueur au moins $k$ dans $G$.

**Lemme 6.20.** *Si dans un graphe* 1*-conflit* $k$*-régulier à* $2k+1$ *sommets* $G$*, il existe un Ch.SC de longueur* $i$ *avec* $k \leq i \leq 2k-3$ *que l'on ne peut pas prolonger en ajoutant une arête entre une de ses extrémités et un sommet extérieur tout en restant sans conflit, alors* $G$ *contient un CSC de longueur* $i+1$.

*Démonstration.* Notons $P = v_0, \ldots, v_i$ un Ch.SC vérifiant les conditions du lemme. Supprimons une arête extérieure à $P$ de chaque conflit et notons $G'$ le graphe obtenu. Un chemin dans $G'$ est alors un Ch.SC dans $G$. Ainsi, dans $G'$ les sommets $v_0$ et $v_i$ sont de degré supérieur ou égal à $k-1$ et ne sont pas adjacents à un sommet

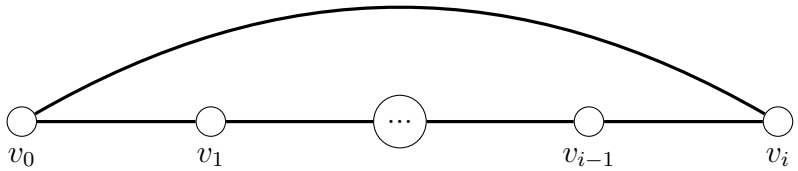
extérieur à $P$. Montrons que $G'$ contient un cycle sans conflit de longueur $i+1$ qui sera alors un Ch.SC dans $G$.

Il existe $0 \leq j \leq i-1$ tel que $v_0$ est adjacent à $v_{j+1}$ et $v_i$ est adjacent à $v_j$. En effet, si pour tout sommet $v_{j+1}$ adjacent à $v_0$, $v_j$ n'était pas $v_i$, au moins $k-1$ sommets de $P$ ne seraient pas adjacents à $v_i$. Ainsi, $v_i$ serait adjacent à au maximum $i-(k-1)$ sommets de $P$, et comme

$$i-(k-1) \leq 2k-3-(k-1) = k-2 < k-1,$$

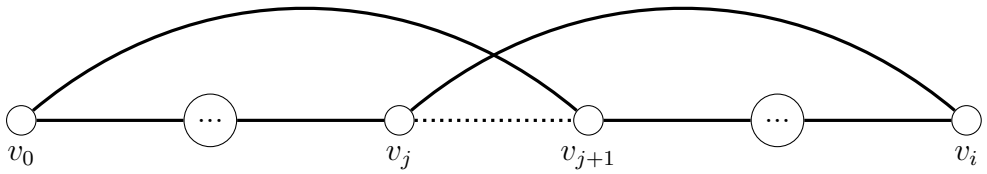
cela est impossible. Finalement, si $j=0$ ou $j=i-1$,

$$v_0, \ldots, v_p, v_0$$




est un CSC de longueur $i+1$ dans $G$ et si $0 < j < i-1$,

$$v_0, \ldots, v_j, v_i, \ldots, v_{j+1}, v_0$$

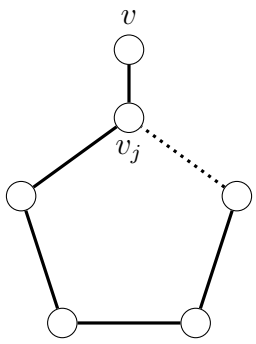



est un CSC de longueur $i+1$ dans $G$. Cela conclut la preuve. □

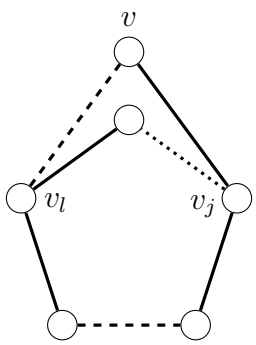
**Lemme 6.21.** *Dans un graphe* 1*-conflit* $k$*-régulier à* $2k+1$ *sommets* $G$*, un CSC de longueur* $i+1$ *avec* $k \leq i \leq 2k-3$ *peut donner naissance à un Ch.SC de longueur* $i+1$*.*

*Démonstration.* Notons $C = v_0, \ldots, v_i, v_0$ un CSC vérifiant les conditions du lemme.

Si $i = k$. Comme le degré des sommets de $G$ est égal à $k$, chacun des $k$ sommets extérieurs à $C$ est adjacent à au moins un sommet de $C$. Il y a donc au moins $k$ arêtes entre les sommets de $C$ et les sommets extérieurs. Comme $C$ à $k+1$ arêtes, au plus $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ d'entre elles sont impliquées dans des conflits. En effet, deux arêtes adjacentes de $C$ ne peuvent pas simultanément faire partie des arêtes impliquées dans des conflits car sinon on aurait un sommet présent dans au moins 2 conflits. Comme $k > \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ ($k \geq 3$), il y a une arête $v_j v$ entre un sommet $v_j$ de $C$ et un sommet $v$ extérieur à $C$ qui n'est en conflit avec aucune arête de $C$. Il suffit alors d'ajouter $vv_j$ à $C$ et de supprimer une des arêtes de $C$ contenant $v_j$ pour obtenir un Ch.SC de longueur $i+1$ dans $G$.




Si $i > k$. Prenons un sommet $v$ extérieur au cycle. Comme $deg_G(v) = k$ il est adjacent à au moins deux sommets $v_j$ et $v_l$ de $C$. Comme $v$ est dans au plus un conflit, l'une des arêtes $vv_j$ ou $vv_l$ n'est en conflit avec aucune arête de $C$. Par exemple, s'il s'agit de $vv_j$, on ajoute $vv_j$ à $C$ et on supprime une des arêtes de $C$ contenant $v_j$ pour obtenir un Ch.SC de longueur $i+1$ dans $G$. Cela conclut la preuve.




□

Dans un graphe 1-conflit $k$-régulier à $2k+1$ sommets $G$, tout Ch.SC de longueur $i$ avec $k \leq i \leq 2k-3$, peut donner naissance à un Ch.SC de longueur $i+1$ de la manière suivante :

- Si possible on ajoute un sommet à une de ses extrémités sans ajouter de conflit,
- Sinon, on construit un CSC de longueur $i+1$ en utilisant les techniques présentées dans la preuve du lemme 6.20, puis on construit un Ch.SC de longueur $i+1$ à partir de ce CSC en utilisant les techniques présentées dans la preuve du lemme 6.21.

Ainsi, comme nous avons vu au lemme 6.18 qu'un graphe 1-conflit $k$-régulier à $2k+1$ sommets contient un Ch.SC de longueur au moins $k$, en appliquant itérativement l'opération précédente à un tel chemin, on obtient le résultat suivant :

**Lemme 6.22.** *Un graphe* 1*-conflit* $k$*-régulier à* $2k+1$ *sommets contient un Ch.SC de longueur* $2k-2$.

Montrons maintenant que ce résultat reste vrai pour $2k-1$.

**Lemme 6.23.** *Un graphe* 1*-conflit* $k$*-régulier à* $2k+1$ *sommets contient un Ch.SC de longueur* $2k-1$.

*Démonstration.* Soit $G$ un graphe 1-conflit $k$-régulier à $2k+1$ sommets. D'après le lemme 6.22, il existe un Ch.SC de longueur $2k-2$ dans $G$

$$P = v_0, \ldots, v_{2k-2}$$

Notons $v$ et $v'$ les sommets de $G$ extérieurs à $P$. Supprimons une arête extérieure à $P$ de chaque conflit et notons $G'$ le graphe obtenu. Montrons qu'il existe un chemin de longueur $2k-1$ dans $G'$, lequel sera alors un Ch.SC de longueur $2k-1$ dans $G$. Pour cela, supposons le contraire, *i.e.*, qu'il n'existe pas de Ch.SC de longueur strictement supérieure à $2k-2$ dans $G$. Notons que pour tout sommet $x$ de $G'$ on a :

$$deg_{G'}(x) = k-1 \quad \text{ou} \quad deg_{G'}(x) = k.$$

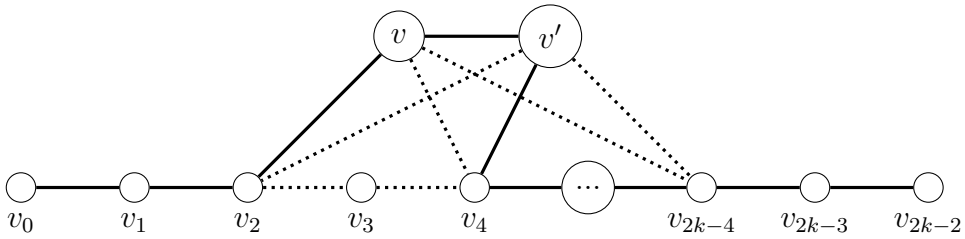
Si $vv' \in E_{G'}$, les sommets $v$ et $v'$ ne peuvent pas être adjacents à $v_0$, $v_1$, $v_{2k-3}$ et $v_{2k-2}$ dans $G'$. Ainsi, $v$ et $v'$ sont chacun adjacent à au moins $k-2$ sommets de l'ensemble

$$\{v_2, v_3, \ldots, v_{2k-4}\}$$

de $2k-5$ sommets dans $G'$. Comme $v$ ne peut pas être adjacent à deux sommets consécutifs de $P$ dans $G'$, il est adjacent aux sommets d'indice pair

$$\{v_2, v_4, \ldots, v_{2k-4}\}$$

de l'ensemble précédent. De même pour $v'$.

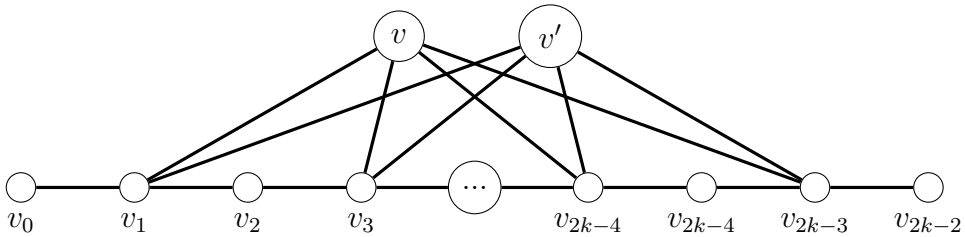



Mais alors,

$$v_0, v_1, v_2, v, v', v_4, \ldots, v_{2k-2}$$

est un Ch.SC de longueur $2k-1$ dans $G$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

On a donc $vv' \notin E_{G'}$. Dans ce cas, $v$ ne peut pas être adjacent à $v_1$, $v_{2k-2}$ ainsi qu'à deux sommets consécutifs de $P$. La seule possibilité est donc que l'on ait $deg_{G'}(v) = k-1$ et que $v$ soit adjacent uniquement aux sommets d'indice impair de $P$ dans $G'$. De même pour $v'$.



Ainsi, on peut remplacer n'importe quel sommet $x$ d'indice pair différent de 0 et $2k-2$ de $P$ par $v$ pour obtenir un nouveau chemin $P_x$ ayant pour sommets extérieurs $x$ et $v'$ avec $xv' \notin E_{G'}$. Pour les mêmes raisons que précédemment, le sommet $x$ doit être adjacent aux sommets d'indice impair de $P_x$. Or, comme cela est vrai pour tout sommet $x$ d'indice pair différent de 0 et $2k-2$ de $P$, le sommet $v_2$ est alors adjacent à $v_1$, $v$, $v'$ ainsi qu'aux $k-2$ sommets d'indice pair différent de 0 et $2k-2$ de $P$, et est donc de degré strictement supérieur à $k$ dans $G$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur le degré des sommets de $G$.

Finalement, supposer qu'il n'existe pas de Ch.SC de longueur strictement supérieure à $2k-2$ dans $G$ aboutit à une contradiction, et il existe donc un Ch.SC de longueur $2k-1$ dans $G$. Cela conclut la preuve. □

Nous allons maintenant montrer que tout graphe 1-conflit $k$-régulier à $2k+1$ sommets contient un Ch.HSC et ainsi prouver le théorème 6.17.

*Démonstration du théorème 6.17.* Soit $G$ un graphe 1-conflit $k$-régulier à $2k+1$ sommets. D'après le lemme 6.23, il existe un Ch.SC de longueur $2k-1$ dans $G$

$$P = v_0, \ldots, v_{2k-2}$$

Notons $v$ le sommet de $G$ extérieur à $P$. Supprimons une arête extérieure à $P$ de chaque conflit et notons $G'$ le graphe obtenu. Montrons qu'il existe un chemin hamiltonien de longueur $2k-1$ dans $G'$, lequel sera alors un Ch.HSC dans $G$. Pour cela, supposons le contraire. Notons que pour tout sommet $x$ de $G'$ on a :

$$deg_{G'}(x) = k-1 \quad \text{ou} \quad deg_{G'}(x) = k.$$

On rappelle que pour $x \in V_{G'}$, on note $N_{G'}(x)$ l'ensemble des sommets adjacents à un sommet $x$ de $G'$, *i.e.*, $N_{G'}(x) := \{y \in V_{G'} \mid xy \in E_{G'}\}$. Ainsi,

$$deg_{G'}(x) = |N_{G'}(x)|.$$

On a $v_0 \notin N_{G'}(v)$, $v_{2k-1} \notin N_{G'}(v)$ et $v_0 v_{2k-1} \notin E_{G'}$. En effet, si $v_0 v_{2k-1} \in E_{G'}$ on a un cycle $v_0, \ldots, v_{2k-1}, v_0$ de longueur $2k$ dans $G'$ dont au moins l'un des sommets est adjacent à $v$ et il existe alors un chemin hamiltonien dans $G'$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Si $|N_{G'}(v)| = k$, alors $v$ est adjacent à deux sommets consécutifs de $P$ et on a un chemin hamiltonien dans $G'$. Donc $|N_{G'}(v)| = k-1$ et, soit les différences entre les indices de deux sommets consécutifs de $N_{G'}(v)$ classé par indices croissants sont toutes de 2, *i.e.* :

$$N_{G'}(v) = \{v_1, v_3, \ldots, v_{2k-3}\}$$

ou

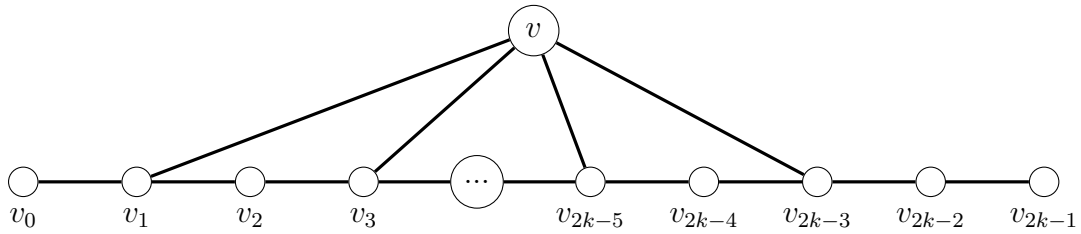
$$N_{G'}(v) = \{v_2, v_4, \ldots, v_{2k-2}\},$$

soit les différences entre les indices de deux sommets consécutifs de $N_{G'}(v)$ classé par indices croissants sont toutes de 2 sauf une qui est de 3, *i.e.*, il existe $h \in \{1, \ldots, 2k-5\}$ tel que

$$N_{G'}(v) = \{v_1, v_3, \ldots, v_h\} \cup \{v_{h+3}, v_{h+5}, \ldots, v_{2k-2}\}.$$

Si les différences entre les indices de deux sommets consécutifs de $N_{G'}(v)$ classé par indices croissants sont toutes de 2, par symétrie on peut supposer que

$$N_{G'}(v) = \{v_1, v_3, \ldots, v_{2k-3}\}.$$

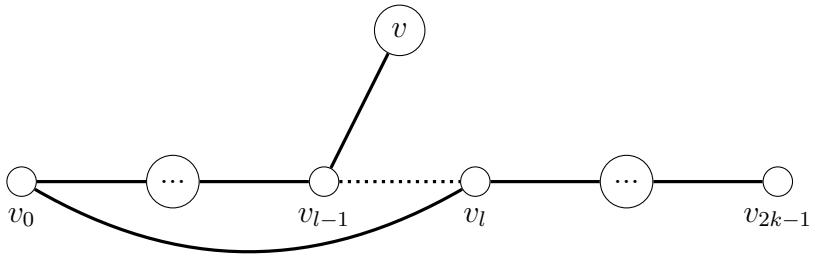



Dans ce cas

$$N_{G'}(v_0) = N_{G'}(v).$$

En effet, si $v_0$ est adjacent à $v_l \in \{v_2, v_4, \ldots, v_{2k-2}\}$ alors

$$v, v_{l-1}, \ldots, v_0, v_l, \ldots, v_{2k-1}$$

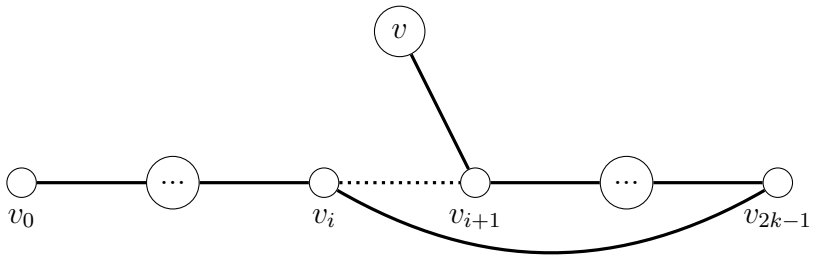



est un chemin hamiltonien dans $G'$. Maintenant, montrons qu'il existe deux sommets de

$$X := \{v_2, v_4, \ldots, v_{2k-2}\}$$

adjacents dans $G'$. Pour cela, supposons le contraire. Alors, pour tout $x$ dans $X$, on a $N_{G'}(x) \subseteq N_{G'}(v) \cup \{v_{2k-1}\}$. Soit $X' := X \setminus \{v_{2k-2}\}$. Alors, pour tout $x'$ dans $X'$, on a $N_{G'}(x') \subseteq N_{G'}(v)$. En effet, s'il existe un sommet $v_i$ de $X'$ tel que $v_i v_{2k-1} \in E_{G'}$ alors

$$v_0, \ldots, v_i, v_{2k-1}, \ldots, v_{i+1}, v$$

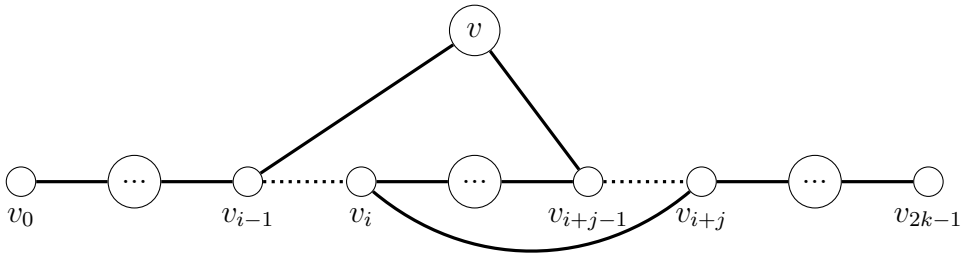



est un chemin hamiltonien dans $G'$. On a donc au moins $|X'|(k-1) = (k-2)(k-1)$ arêtes entre $X'$ et $N_{G'}(v)$, au moins $k-2$ arêtes entre $v_{2k-2}$ et $N_{G'}(v)$, au moins $|N_{G'}(v)| = k-1$ arêtes entre $v_0$ et $N_{G'}(v)$, au moins $|N_{G'}(v)| = k-1$ arêtes entre $v$ et $N_{G'}(v)$ et comme $deg_{G'}(y) \leq k$ pour tout $y \in N_{G'}(v)$ on a :

$$(k-1)k \geq \sum_{y \in N_{G'}(v)} deg_{G'}(y) \geq (k+1)(k-1) - 1 > (k-1)k.$$

D'où une contradiction et il existe donc deux sommets $v_i$ et $v_{i+j}$ de $X$ adjacents dans $G'$. Mais alors,

$$v_0, \dots v_{i-1}, v, v_{i+j-1}, \dots, v_i, v_{i+j} \dots, v_{2k-1}$$




est un chemin hamiltonien dans $G'$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Donc les différences entre les indices de deux sommets consécutifs de $N_{G'}(v)$ classé par indices croissants sont toutes de 2 sauf une qui est de 3, *i.e.*, il existe $h \in \{1, \dots, 2k-5\}$ tel que

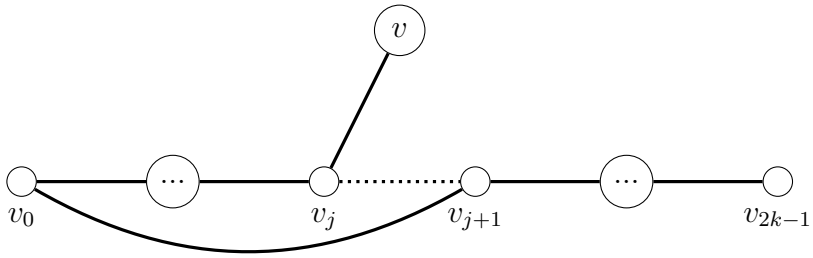
$$N_{G'}(v) = \{v_1, v_3, \dots, v_h\} \cup \{v_{h+3}, v_{h+5}, \dots, v_{2k-2}\}.$$

On a alors

$$N_{G'}(v_0) = N_{G'}(v).$$

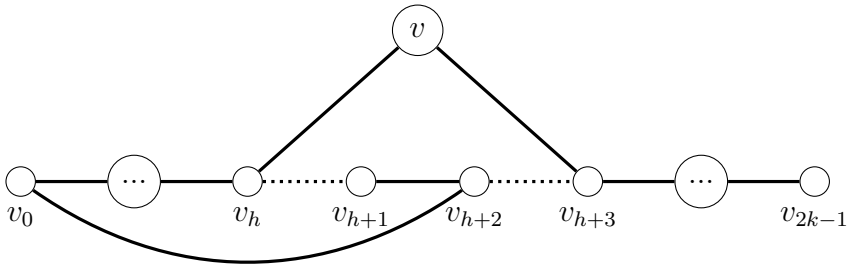
En effet, si $v_0$ est adjacent à $v_{j+1}$ pour $j \neq 2k-2$ et $v_j \in N_{G'}(v)$

$$v, v_j, \dots, v_0, v_{j+1}, \dots, v_{2k-1}$$




est un chemin hamiltonien dans $G'$, et si $v_0$ est adjacent à $v_{h+2}$, alors

$$v_{h+1}, v_{h+2}, v_0, \dots, v_h, v_{h+3}, \dots v_{2k-1}$$



est un chemin hamiltonien dans $G'$, et dans les deux cas, l'hypothèse initiale est contredite. On montre de manière similaire que

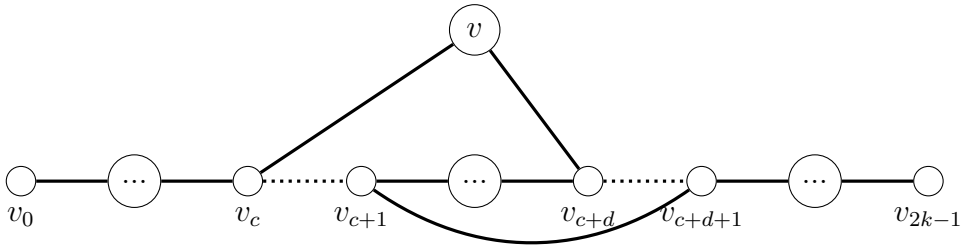
$$N_{G'}(v_{2k-1}) = N_{G'}(v).$$

Notons $S$ l'ensemble des $k-3$ sommets de $P$ situés entre deux sommets de $N_{G'}(v)$ dont les indices diffèrent de 2, *i.e.*,

$$S := \{v_1, v_2, \ldots, v_{2k-2}\} \setminus (\{v_1, v_3, \ldots, v_h\} \cup \{v_{h+3}, v_{i+5}, \ldots, v_{2k-2}\} \cup \{v_{h+1}, v_{i+2}\}).$$

Montrons que pour tout $s \in S$ on a $N_{G'}(s) = N_{G'}(v)$. En effet, si $N_{G'}(s) \neq N_{G'}(v)$ alors, quitte à retourner $P$, il existe deux sommets $v_c \in N_{G'}(v)$ et $v_{c+d} \in N_{G'}(v)$ tels que $s \in v_{c+1}v_{c+d+1} \in E_G$ et alors

$$v_0, \ldots v_c, v, v_{c+d}, \ldots, v_{c+1}, v_{c+d+1} \ldots, v_{2k-1}$$




est un chemin hamiltonien dans $G'$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.

On a donc pour tout tout $s \in S$

$$N_{G'}(s) = N_{G'}(v) = N_{G'}(v_0) = N_{G'}(v_{2k-1}).$$

Ainsi, le sommet $v_h$ est adjacent à $v$, $v_0$, $v_{h+1}$, $v_{2k-1}$ et aux $k-3$ sommets de $S$ et donc $deg_{G'}(v_i) \geq k+1$. Cela est en contradiction avec le fait que $G$ soit $k$-régulier.

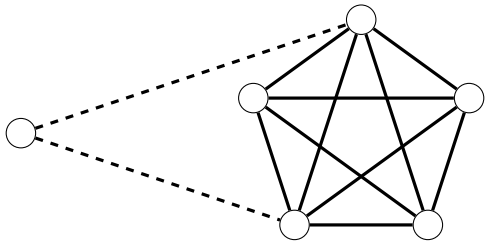
Finalement, supposer qu'il n'existe pas de chemin hamiltonien dans $G'$ aboutit à une contradiction, et il existe alors un chemin hamiltonien dans $G'$ et donc dans $G$. Cela conclut la preuve. □

## 6.4 Résultats “à la Ore et Bondy-Chvátal”

On rappelle le résultat (1960) de Ore dans les graphes :

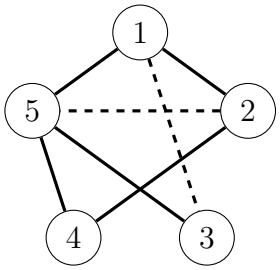
**Théorème 6.24.** *[Ore60]. Un graphe à $n \geq 3$ sommets tel que la somme des degrés de toute paire de sommets non adjacents vaut au moins $n$ admet un cycle hamiltonien.*

Ce résultat devient faux lorsque l'on considère des graphes 1-conflit. En effet, si $G$ est le graphe obtenu à partir de l'union disjointe de $K_1$ et $K_{n-1}$ en ajoutant deux arêtes entre ces graphes. Un cycle hamiltonien dans $G$ contient nécessairement ces deux arêtes, et donc en les mettant en conflit, on obtient un graphe satisfaisant les conditions du théorème 6.24 mais ne contenant pas de CHSC.

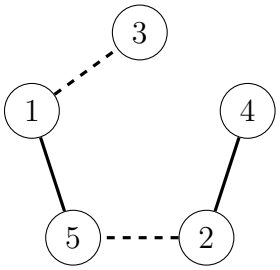


Inspirés par la preuve de Ore, nous introduisons la notion suivante.

**Définition 6.25.** Une *représentation circulaire* $C$ d'un graphe 1-conflit à $n \geq 3$ sommets $G$ et obtenue en ordonnant les sommets de $G$ dans un ordre cyclique $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ et en conservant seulement les arêtes entre deux sommets consécutifs ainsi que les conflits entre ces arêtes. On représente souvent $C$ par la suite naturelle de ses sommets $C = v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$. Les deux suites naturelles $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ et $v_n, \ldots, v_2, v_1, v_n$ dénotent la même représentation circulaire. Cependant, il est souvent utile de fixer un sens de parcours pour pouvoir parler des choses comme le successeur d'un sommet, etc. On parle de *saut* $\overline{ab}$ entre deux sommets consécutifs $a$ et $b$ s'il n'y a pas d'arête entre ces sommets. Dans un graphe $G$ (sans conflit), une représentation circulaire n'est rien d'autre qu'un cycle hamiltonien auquel il manque des arêtes, les sauts et un cycle hamiltonien est une représentation circulaire sans saut.




$G$




$C$

Donnons maintenant un lemme, qui nous permettra sous certaines conditions, de réduire le nombre de sauts d'une représentation circulaire sans augmenter le nombre de conflits.

**Lemme 6.26.** *Soit $G$ un graphe 1-conflit à $n \geq 3$ sommets. Si $C$ est une représentation circulaire de $G$ avec un saut $\overline{ab}$ tel que :*
- *$a$ et $b$ ne sont incidents à aucune arête d'un conflit de $G$ et,*
- *$deg_G(a) + deg_G(b) \geq n$.*

*Alors il existe une représentation circulaire de $G$ dont les sauts sont strictement inclus dans les sauts de $C$ (*i.e.*, au moins un saut de moins que $C$) et pas plus de conflits que $C$.*

*Démonstration.* Si $n = 3$, une représentation circulaire satisfaisant la condition sur le degré ne peut pas avoir de saut.

Si $n \geq 4$, notons

$$C = a, b, x_1, \ldots, x_{n-2}, a$$

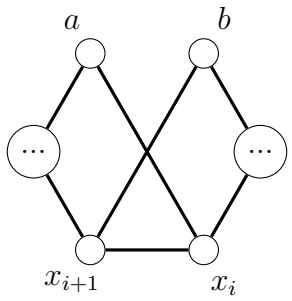
et montrons qu'il existe deux sommets consécutifs $x_i$ et $x_{i+1}$ avec $1 \leq i \leq n-3$ tels que $x_i$ soit adjacent à $a$ et $x_{i+1}$ soit adjacent à $b$. En effet, si ce n'était pas le cas, $b$ ne pourrait pas pas être adjacent aux successeurs des voisins de $a$ et on aurait

$$deg_G(b) \leq n - 1 - deg_G(a)$$

c'est-à-dire :

$$deg_G(a) + deg_G(b) \leq n - 1$$

ce qui contredirait la condition sur le degré.




Maintenant

$$C' := a, x_i, \ldots, x_1, b, x_{i+1}, \ldots, x_{n-2}, a$$

($C$ auquel on ajoute les arêtes $ax_i$ et $bx_{i+1}$ et retire $x_ix_{i+1}$) est une représentation circulaire de $G$ dont les sauts sont inclus dans ceux de $C$, et avec un saut de moins que $C$ (si $x_ix_{i+1}$ est un saut de $C$ alors $C'$ a deux sauts de moins que $C$). Comme $a$ et $b$ ne sont incidents à aucune arête d'un conflit de $G$, les conflits de $C'$ sont inclus dans ceux de $C$. De plus, comme $C'$ ne contient pas l'arête $uv$, si cette dernière est en conflit avec une arête de $C$ alors $C'$ contient un conflit de moins que $C$. Cela conclut la preuve. □

Dans le cas où les conflits sont parallèles (*i.e.*, les deux arêtes ne partagent pas de sommet) nous avons obtenu le résultat suivant :

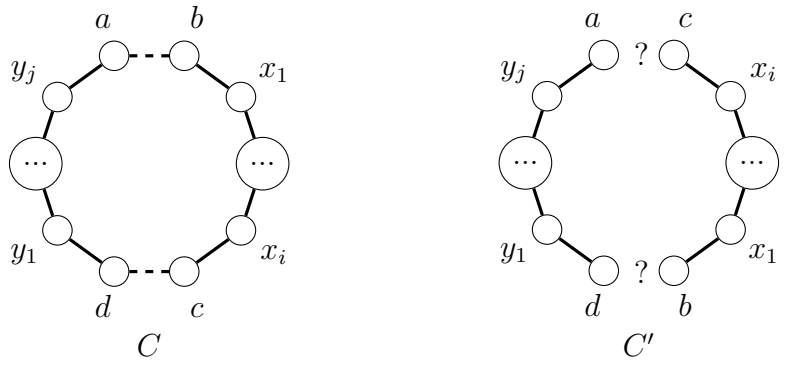
**Théorème 6.27.** *Si $G$ est un graphe 1-conflit à $n \geq 3$ sommets dont les conflits sont parallèles et vérifiant $\forall u, v \in V_G$ $(u \neq v)$ : $uv \notin E_G \Rightarrow deg_G(u) + deg_G(v) \geq n + 1$ alors il contient un CHSC.*

*Démonstration.* D'après le théorème 6.24, $G$ admet donc un cycle hamiltonien mais ce dernier peut avoir des conflits. Considérons donc un cycle hamiltonien $C$ dans $G$ ayant le nombre minimum de conflits. Supposons que $C$ ait au moins un conflit. Prenons alors un conflit $\{ab, cd\}$ ($a$, $b$, $c$ et $d$ sont deux-à-deux distincts car les conflits sont parallèles) tel que l'on ait :

$$C = a, b, x_1, \ldots, x_i, c, d, y_1, \ldots, y_j, a$$

Considérons la représentation circulaire

$$C' = a, c, x_i, \ldots, x_1, b, d, \ldots, a$$




On remarque que comme $\{ab, cd\}$ est un conflit et que chaque sommet est dans au plus un conflit, $C'$ a un conflit de moins que $\mathcal{C}$ et au plus deux sauts $\overline{ac}$ et $\overline{bd}$. La minimalité du nombre de conflits de $C$ implique que $C'$ a au moins un saut. Notons $G'$ le graphe 1-conflit $G$ auquel on supprime l'arête $ab$ ainsi que le conflit $\{ab, cd\}$. Dans ce nouveau graphe, $C'$ vérifie les conditions d'application du lemme 6.26 et donc en l'appliquant au plus deux fois, on obtient un cycle hamiltonien dans $G$ ayant strictement moins de conflits que $C$ ce qui contredit l'hypothèse initiale. Finalement, $C$ n'a pas de conflit et est donc un CHSC dans $G$. Cela conclut la preuve. □

Nous allons maintenant nous intéresser à la condition Bondy-Chvátal (voir théorème 6.32) et présenter les résultats du même type que nous avons obtenus pour les graphes 1-conflit. Cette condition utilise la notion de clôture que nous généralisons.

**Théorème 6.28.** *Pour tout entier $k \geq 0$ et tout graphe 1-conflit à $n$ sommets $G$, l'algorithme 7 construit un unique graphe $\overline{G}^k$ (peu importe l'ordre dans lequel on ajoute les arêtes). Ce graphe 1-conflit est appelé la $k$-*clôture de $G$.

*Démonstration.* Pour montrer que la $k$-clôture de $G$ est unique, peu importe l'ordre d'ajout des arêtes, nous allons montrer qu'elle est égale à l'intersection $\mathcal{H}$ de tous les graphes 1-conflit $H$ vérifiant les propriétés $(P)$ suivantes :
- $V_G = V_H$,
- $E_G \subseteq E_H$,
- $uv \notin E_H \Rightarrow deg_H(u) + deg_H(v) < n + k$ et,
- $\mathcal{C}onf_G = \mathcal{C}onf_H$.

En effet, considérons un résultat $\overline{G}^k$ de l'algorithme 7 appliqué à $G$ avec l'entier $k \geq 0$. Comme clairement $H := \overline{G}^k$ vérifie les propriétés $(P)$ nous avons $E_{\mathcal{H}} \subseteq E_{\overline{G}^k}$. Supposons que $E_{\mathcal{H}} \neq E_{\overline{G}^k}$. Soit $xy$ la première arête de $E_{\overline{G}^k} \setminus E_{\mathcal{H}}$ ajoutée par l'algorithme 7. Nous avons $deg_{\mathcal{H}}(x) + deg_{\mathcal{H}}(y) \geq deg_G(x) + deg_G(y) \geq n + k$. Comme $xy \notin E_{\mathcal{H}}$, il existe $H$ vérifiant les propriétés $(P)$ tel que $xy \notin E_H$. Cela implique $deg_H(x) + deg_H(y) < n + k$ et comme $\mathcal{H} \subseteq H$ nous avons $deg_{\mathcal{H}}(x) + deg_{\mathcal{H}}(y) < n + k$ ce qui contredit l'inégalité précédente. Finalement, nous avons $E_{\mathcal{H}} = E_{\overline{G}^k}$. Cela conclut la preuve. □

---

**Algorithme 7 :** Construction de la $k$-clôture $\overline{G}^k$ de $G$ ($k \geq 0$).

---

**Données** : Un graphe 1-conflit à $n$ sommets $G$.
**Résultat** : La $k$-clôture $\overline{G}^k$ de $G$.
**début**
  $\overline{G}^k \leftarrow G$ ;
  **tant que** *Il existe deux sommets $u$ et $v$ de $\overline{G}^k$ tels que $uv \notin E_{\overline{G}^k}$ et $deg_{\overline{G}^k}(u) + deg_{\overline{G}^k}(v) \geq n + k$* **faire**
    $E_{\overline{G}^k} \leftarrow E_{\overline{G}^k} \cup \{uv\}$ ;
  **fin**
  **retourner** $\overline{G}^k$ ;
**fin**

---

**Remarque 6.29.** Comme un graphe est un graphe 1-conflit dont l'ensemble des conflits est vide, la notion de clôture est bien définie pour les graphes.

**Exemple 6.30.** Si $G$ est un graphe 1-conflit à $n$ sommets vérifiant $\forall u, v \in V_G$ $(u \neq v)$ : $uv \notin E_G \Rightarrow deg_G(u) + deg_G(v) \geq n + k$ alors il admet comme $k$-clôture le graphe complet à $n$ sommets avec les mêmes conflits.

En particulier, si $G$ est un graphe 1-conflit à $n$ sommets vérifiant $\delta(G) \geq \frac{n+k}{2}$ alors il admet comme $k$-clôture le graphe complet à $n$ sommets avec les mêmes conflits.

**Remarque 6.31.** $G \neq \overline{G}^k \Rightarrow n \geq 4 + k$.

*Démonstration.* Comme $G \neq \overline{G}^k$ il existe deux sommets $u$ et $v$ de $G$ tels que $uv \notin E_G$ et

$$deg_G(u) + deg_G(v) \geq n + k.$$

Comme $deg_G(u) \leq n - 2$ et $deg_G(v) \leq n - 2$ on a

$$deg_G(u) + deg_G(v) \leq 2n - 4$$

d'où

$$n + k \leq 2n - 4$$

et donc

$$n \geq 4 + k.$$

□

On rappelle le résultat (1976) de Bondy et Chvátal dans les graphes :

**Théorème 6.32.** *[BC76]. Un graphe $G$ contient un cycle hamiltonien si et seulement si $\overline{G}^0$ aussi.*

**Remarque 6.33.** Comme la 0-clôture d'un graphe $G$ vérifiant $\forall u, v \in V_G$ $(u \neq v)$ : $uv \notin E_G \Rightarrow deg_G(u) + deg_G(v) \geq n$ est le graphe complet et que ce dernier contient un cycle hamiltonien dès que $n \geq 3$, le théorème 6.24 de Ore s'obtient comme corollaire du théorème 6.32 précédent.

Concernant les graphes 1-conflit, nous avons obtenu des résultats similaires pour les problèmes Ch.HSC et CHSC, mais en utilisant respectivement la 1-clôture et la 2-clôture.

**Théorème 6.34.** *Un graphe 1-conflit $G$ contient un Ch.HSC si et seulement si $\overline{G}^1$ aussi.*

*Démonstration.* Si $n < 5$ le résultat est vrai d'après la remarque 6.33. On peut donc supposer que $n \geq 5$.

Il est clair que si $G$ contient un Ch.HSC alors $\overline{G}^1$ aussi.

Réciproquement, supposons que $\overline{G}^1$ contienne un Ch.HSC et pas $G$. Prenons une suite quelconque de graphes 1-conflit commençant par $G$ et se terminant par $\overline{G}^1$, telle que l'on passe d'un graphe 1-conflit au suivant en ajoutant une arête entre deux sommets dont la somme des degrés est au moins $n + 1$ :

$$G_0 := G, \ldots, G_i, G_{i+1}, \ldots, \overline{G}^1$$

Il existe un plus petit entier $i$ tel que $G_{i+1}$ contient un Ch.HSC et pas $G_i$. Notons $x_1x_n$ l'arête ajoutée pour passer de $G_i$ à $G_{i+1}$, et notons $P = x_1, \ldots, x_n, x_1$ la représentation circulaire de $G_i$ obtenue en supprimant l'arête $x_1x_n$ au Ch.HSC dans $G_{i+1}$. Cette représentation circulaire a exactement deux sauts car sinon elle serait un Ch.HSC dans $G_i$. Notons $\overline{x_jx_{j+1}}$ le deuxième saut. On a alors

$$deg_{G_i}(x_1) + deg_{G_i}(x_n) \geq n + 1.$$

Si $x_1$ est dans un conflit, ce dernier admet (au moins) une arête extérieure à $P$. On la supprime ainsi que le conflit correspondant. De même pour $x_n$. On note $G'_i$ le graphe 1-conflit ainsi obtenu. Dans le nouveau graphe 1-conflit $G'_i$ on a

$$deg_{G'_i}(x_1) + deg_{G'_i}(x_n) \geq n - 1. \tag{6.1}$$

Maintenant, $G'_i$ n'a pas de Ch.HSC car sinon celui-ci serait un Ch.HSC dans $G_i$. Ainsi, $x_1$ n'est pas adjacent à $x_{j+1}$ et $x_n$ n'est pas adjacent à $x_j$, car sinon on aurait un Ch.HSC dans $G'_i$. De même, $x_1$ n'est pas adjacent aux successeurs des voisins de $x_n$. On en déduit donc

$$deg_{G'_i}(x_1) < n - 1 - deg_{G'_i}(x_n),$$

ce qui contredit l'équation 6.1. Finalement, si $\overline{G}^1$ contient un Ch.HSC alors $G$ en contient un également. Cela conclut la preuve. □

Du théorème 6.34 on déduit un résultat du même type que celui de ORE valable pour les Ch.HSC dans les graphes 1-conflit.

**Corollaire 6.35.** *Si $G$ est un graphe 1-conflit à $n$ sommets tel que*

$$\forall u, v \in V_G \ (u \neq v) : uv \notin E_G \Rightarrow deg_G(u) + deg_G(v) \geq n + 1$$

*alors $G$ contient un Ch.HSC.*

*Démonstration.* En effet, $\overline{G}^1$ est le graphe 1-conflit complet à $n$ sommets et il admet donc un Ch.HSC d'après le théorème 6.3. Ainsi $G$ contient un Ch.HSC d'après le théorème 6.34. Cela conclut la preuve. □

**Théorème 6.36.** *Un graphe 1-conflit $G$ contient un CHSC si et seulement si $\overline{G}^2$ aussi.*

*Démonstration.* Si $n < 6$ le résultat est vrai d'après la remarque 6.33. On peut donc supposer que $n \geq 6$.

Il est clair que si $G$ contient un cycle hamiltonien sans conflit alors $\overline{G}^2$ aussi.

Réciproquement, supposons que $\overline{G}^2$ contienne un CHSC et pas $G$. Prenons une suite quelconque de graphes 1-conflit commençant par $G$ et se terminant par $\overline{G}^2$, telle que l'on passe d'un graphe 1-conflit au suivant en ajoutant une arête dont la somme des degrés est au moins $n + 2$ :

$$G_0 := G, \ldots, G_i, G_{i+1}, \ldots, \overline{G}^2$$

Il existe un plus petit entier $i$ tel que $G_{i+1}$ contient un CHSC et pas $G_i$. Notons $ab$ l'arête ajoutée pour passer de $G_i$ à $G_{i+1}$ et $C$ le CHSC dans $G_{i+1}$. On a alors

$$deg_{G_i}(a) + deg_{G_i}(b) \geq n + 2.$$

Si $a$ est dans un conflit, ce dernier admet (au moins) une arête extérieure à $C$. On la supprime ainsi que le conflit correspondant. De même pour $b$. On note $G'_i$ le graphe 1-conflit ainsi obtenu. Dans le nouveau graphe 1-conflit $G'_i$ on a

$$deg_{G'_i}(a) + deg_{G'_i}(b) \geq n.$$

Dans $G'_i$, la représentation circulaire $C$ privée de l'arête $ab$ satisfait les conditions d'application du lemme 6.26 et $G'_i$ contient un CHSC qui ne contient pas non plus de conflit de $G_i$ et est donc un CHSC dans $G_i$. Cela contredit alors l'existence d'un entier $i$ tel que $G_{i+1}$ contient un CHSC et pas $G_i$. Finalement, si $\overline{G}^2$ contient un CHSC alors $G$ en contient un également. Cela conclut la preuve. □

Du théorème 6.36 on déduit un résultat du même type que celui de ORE valable pour les CHSC dans les graphes 1-conflit.

**Corollaire 6.37.** *Si $G$ est un graphe 1-conflit à $n \geq 4$ sommets tel que*

$$\forall u, v \in V_G \ (u \neq v) : uv \notin E_G \Rightarrow deg_G(u) + deg_G(v) \geq n + 2$$

*alors $G$ contient un CHSC.*

*Démonstration.* En effet, $\overline{G}^2$ est un graphe 1-conflit complet à $n$ sommets. A partir de $\overline{G}^2$ on construit un nouveau graphe sans conflit $H$ en supprimant une arête de chaque conflit. $\forall u \in V_H$ on a $deg_H(u) \geq n-2$ et quand $n \geq 4$ on a $deg_H(u) \geq \frac{n}{2}$. D'après le théorème 6.1, $H$ contient un cycle hamiltonien qui est alors un CHSC dans $\overline{G}^2$. Finalement, d'après le théorème 6.36, $G$ contient un CHSC. Cela conclut la preuve. □

Maintenant nous allons donner un théorème pour les graphes duquel nous allons pouvoir tirer plusieurs corollaires valables dans les graphes 1-conflit.

**Théorème 6.38.** *Soit $H$ un graphe à $n$ sommets tel que*

$$\forall u, v \in V_H \ (u \neq v) : uv \notin E_H \Rightarrow deg_H(u) + deg_H(v) \geq n.$$

*Soit $X$ un couplage dans $H$ et $k := |V_X|$ (on rappelle que $V_X$ est l'ensemble des sommets extrémités des arêtes de $X$). Si l'on peut ranger les sommets de $V_X$ dans un ordre $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ tel que pour tout $1 \leq i \leq k$ on ait $deg_H(x_i) \geq i+2$, alors $H$ privé des arêtes de $X$ contient un cycle hamiltonien.*

*Démonstration.* On note $H'$ le graphe $H$ privé des arêtes de $X$. On va montrer que $\overline{H'}^0$ est le graphe complet et utiliser le théorème 6.32 pour en déduire que $H'$ contient un cycle hamiltonien.

Comme dans $H$ la somme des degrés de toute paire de sommets non voisins vaut au moins $n$, $\overline{H'}^0$ contient toutes les arêtes entre deux sommets qui ne sont pas dans $V_X$ et ces sommets y sont donc de degré au moins $n-k-1$.

Montrons maintenant que $\overline{H'}^0$ contient toutes les arêtes entre les sommets de $V_X$ et les sommets qui ne sont pas dans $V_X$. Pour cela, supposons le contraire. Prenons alors le plus grand entier $i$ tel que le sommet $x_i$ ne soit pas relié à tous les sommets de $H$ qui ne sont pas dans $V_X$. $\overline{H'}^0$ contient donc toutes les arêtes entre les sommets de $H$ qui ne sont pas dans $V_X$ et les sommets de $V_X$ d'indice strictement supérieur à $i$. Ainsi, les sommets de $H$ qui ne sont pas dans $V_X$ ont un degré supérieur ou égal à

$$n-k-1+k-i = n-i-1.$$

Mais alors, $x_i$ étant de degré supérieur ou égal à $i+1$ (car on a supprimé une arête), il est relié à tous les sommets de $H$ qui ne sont pas dans $V_X$. Cela contredit l'hypothèse initiale et donc $\overline{H'}^0$ contient toutes les arêtes entre les sommets de $V_X$ et les sommets qui ne sont pas dans $V_X$.

Il reste à montrer que $\overline{H'}^0$ contient toutes les arêtes de $X$. Pour cela, nous allons montrer que dans $\overline{H'}^0$ tout sommet $x_j$ est relié à tous les sommets d'indice strictement supérieur à $j$. Supposons le contraire. Prenons alors le plus grand entier $j$ tel que le sommet $x_j$ ne soit pas relié à tous les sommets d'indice strictement supérieur à $j$. Les sommets de $V_X$ d'indice strictement supérieur à $j$ sont de degré supérieur ou égal à

$$n-k+k-j-1 = n-j-1.$$

Mais alors, $x_j$ étant de degré supérieur ou égal à $j+1$ (car on a supprimé une arête), il est relié à tous les sommets d'indice strictement supérieur à $j$. Cela contredit

l'hypothèse initiale et donc $x_j$ est relié à tous les sommets d'indice strictement supérieur à $j$. Ainsi, $\overline{H'}^0$ contient toutes les arêtes de $X$.

Finalement $\overline{H'}^0$ est le graphe complet, il contient donc un cycle hamiltonien et $H$ aussi d'après le théorème 6.32. Cela conclut la preuve. □

**Corollaire 6.39.** *Soit $G$ est un graphe 1-conflit à $n$ sommets tel que*

$$\forall u, v \in V_G \ (u \neq v) : uv \notin E_G \Rightarrow deg_G(u) + deg_G(v) \geq n.$$

*S'il existe un couplage $X$ dans $G$ contenant exactement une arête de chaque conflit, pour lequel on peut ranger les sommets de $V_X$ dans un ordre $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ tel que pour tout $1 \leq i \leq k$ on ait $deg_G(x_i) \geq i + 2$, alors $G$ contient un CHSC.*

*Démonstration.* Si l'on ignore les conflits de $G$ et qu'on le regarde comme un graphe, le théorème 6.38 nous assure l'existence d'une cycle hamiltonien ne contenant aucune arête de $X$. Un tel cycle est alors un CHSC dans $G$ puisqu'il contient au plus une arête de chaque conflit. □

**Corollaire 6.40.** *Si $H$ est un graphe à $n$ sommets et $X$ un couplage dans $H$ tels que :*
- *chaque sommet de $H$ est de degré supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$ et,*
- *$|X| \leq \frac{n}{4} - 1$ (c'est-à-dire $|V_X| \leq \frac{n}{2} - 2$).*

*Alors $H$ privé des arêtes de $X$ contient un cycle hamiltonien.*

*Démonstration.* Définissons l'entier $k := |V_X|$. (On rappelle que $V_X$ est l'ensemble composé des sommets extrémité d'une arête de $X$). Rangeons les sommets de $V_X$ dans un ordre quelconque $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Tout sommet $x_i$ de $V_X$ vérifie

$$deg_H(x_i) \geq \frac{n}{2} \geq k + 2 \geq i + 2$$

et donc le théorème 6.38 nous assure que $H$ privé des arêtes de $X$ contient un cycle hamiltonien. Cela conclut la preuve. □

Le résultat suivant est intéressant puisqu'il montre qu'un graphe 1-conflit vérifiant la condition de "DIRAC" contient un CHSC lorsque l'on borne le nombre de conflits.

**Corollaire 6.41.** *Soit $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$ un graphe 1-conflit à $n$ sommets tel que :*
- *$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ et,*
- *$|\mathcal{C}onf_G| \leq \frac{n}{4} - 1$.*

*Alors $G$ contient un CHSC.*

*Démonstration.* Notons $X$ un couplage ayant exactement une arête dans chaque conflit. Il suffit de montrer que $G$ vu comme un graphe, c'est-à-dire dans lequel on ignore les conflits, admet un cycle ne contenant aucune arête de $X$. Or, comme

$$|X| = |\mathcal{C}onf_G| \leq \frac{n}{4} - 1,$$

le corollaire 6.40 nous donne le résultat. Cela conclut la preuve. □

Donnons maintenant un petit lemme qui avec l'aide du théorème 6.38 nous permettra d'obtenir de nouvelles conditions suffisantes.

**Lemme 6.42.** *Soit $H$ un graphe à $n$ sommets tel que*

$$\forall u, v \in V_H \ (u \neq v) : uv \notin E_H \Rightarrow deg_H(u) + deg_H(v) \geq n.$$

*et un ensemble $A$ de $k$ sommets tel que le voisinage fermé de $A$ ($A$ ainsi que les sommets adjacents à un sommet de $A$) soit différent de $V_G$. Alors, tout sommet de $A$ est de degré supérieur ou égal à $k+1$.*

*Démonstration.* Un sommet qui n'est pas voisin d'aucun sommet de $A$ (il existe car le voisinage fermé de $A$ est différent de $V_G$) est de degré au plus $n-k-1$. Donc, comme la somme des degrés de toute paire de sommets non voisins de $H$ vaut au moins $n$, tout sommet de $A$ est de degré supérieur ou égal à $k+1$. □

**Corollaire 6.43.** *Soit $G$ est un graphe 1-conflit à $n$ sommets et $k$ conflits tel que :*
- $n \geq 8(k^2+k)+1$,
- $\forall u, v \in V_G \ (u \neq v) : uv \notin E_G \Rightarrow deg_G(u) + deg_G(v) \geq n$,
- $\delta(G) \geq 2k+1$.

*Alors $G$ contient un CHSC.*

*Démonstration.* Si $k = 0$ le résultat est vrai d'après le théorème 6.24. Pour $k \geq 1$, notons $A$ l'ensemble des sommets présents dans les conflits. Il suffit de montrer que l'un des sommets de $A$ est de degré supérieur $2k+2$ et le graphe vérifiera alors les conditions d'application du corollaire 6.39. Pour cela, supposons que tous les sommets de $A$ sont de degré $2k+1$ et montrons que cela aboutit à une contradiction. Comme nous avons $k$ conflits comprenant chacun au plus 4 sommets et que chacun de ces sommets a $2k+1$ voisins, le voisinage fermé de $A$ contient au plus

$$k \cdot 4 \cdot (2k+2) = 8(k^2+k)$$

sommets, et est donc différent de $V_G$. Mais alors, comme chaque conflit comprend au moins 3 sommets

$$|A| \geq 3k \geq 2k+1$$

et le lemme 6.42 implique que les sommets de $A$ sont de degré supérieur ou égal à $2k+2$, ce que contredit l'hypothèse initiale. Cela conclut la preuve. □

**Corollaire 6.44.** *Soit $H$ un graphe à $n$ sommets tel que*

$$\forall u, v \in V_H \ (u \neq v) : uv \notin E_H \Rightarrow deg_H(u) + deg_H(v) \geq n.$$

*S'il existe un couplage $X$ dans $H$ et un sommet $v \in V_H \setminus V_X$ tels que le voisinage fermé de $V_X \cup \{v\}$ soit différent de $V_H$, alors $H$ privé des arêtes de $X$ contient un cycle hamiltonien.*

*Démonstration.* Définissons l'entier $k := |V_X|$. D'après le lemme 6.42 (avec $A = V_X \cup \{v\}$), tout sommet de $V_X$ est de degré supérieur ou égal à $k+2$ et $H$ satisfait donc les conditions d'application du théorème 6.38. Cela conclut la preuve. □

**Corollaire 6.45.** *Soit $G$ un graphe 1-conflit à $n$ sommets tel que*

$$\forall u, v \in V_G \ (u \neq v) : uv \notin E_G \Rightarrow deg_G(u) + deg_G(v) \geq n.$$

*S'il existe un couplage $X$ dans $G$ contenant exactement une arête de chaque conflit et un sommet $v$ dans $V_G \setminus V_X$ tels que le voisinage fermé de $V_X \cup \{v\}$ soit différent de $V_G$, alors $G$ contient un CHSC.*

*Démonstration.* Si l'on ignore les conflits de $G$ et qu'on le regarde comme un graphe, le corollaire 6.44 nous assure l'existence d'une cycle hamiltonien ne contenant aucune arête de $X$. Un tel cycle est alors un CHSC dans $G$ puisqu'il contient au plus une arête de chaque conflit. Cela conclut la preuve. □

## 6.5 Résultats “à la Chvátal”

Soit $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$ un graphe 1-conflit à $n$ sommets. La suite des degrés de $G$ est la suite des degrés des $n$ sommets de G ordonnés de manière croissante, avec répétitions si besoin :

$$d_1 \leq \cdots \leq d_n.$$

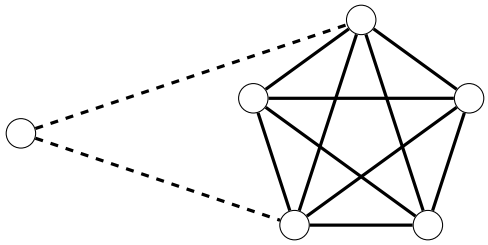
On rappelle le résultat (1972) de Chvátal dans les graphes :

**Théorème 6.46.** *[Chv72]. Si la suite des degrés d'un graphe à $n \geq 3$ sommets vérifie*

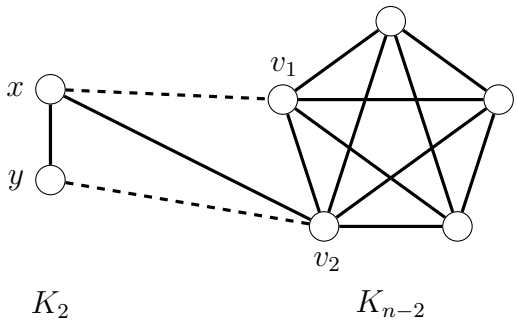
$$\forall i < \frac{n}{2},\ d_i \leq i \Rightarrow d_{n-i} \geq n - i$$

*alors il contient un cycle hamiltonien.*

Ce résultat devient faux lorsque l'on ajoute des conflits. Soit $G_1$ le graphe obtenu à partir de l'union disjointe de $K_1$ et $K_{n-1}$ en ajoutant deux arêtes entre ces graphes. Un cycle hamiltonien dans $G$ contient nécessairement ces deux arêtes et donc en mettant ces deux arêtes en conflit, on obtient un graphe satisfaisant la condition du théorème 6.46 mais ne contenant pas de CHSC.



Un second contre-exemple est le graphe $G_2$ obtenu à partir de l'union disjointe de $K_2$ (avec $V_{K_2} = \{x, y\}$) et $K_{n-2}$ (avec $V_{K_{n-2}} = \{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$) pour $n \geq 4$ en ajoutant les trois arêtes $xv_1, xv_2$ et $yv_2$ entre ces graphes. Un cycle hamiltonien dans $G_2$ contient nécessairement les deux arêtes $xv_1$ et $yv_2$ et donc en mettant ces arêtes en conflit, on obtient un graphe satisfaisant la condition du théorème 6.46 mais ne contenant pas de CHSC.




Cela étant, nous avons tenté de voir si des résultats similaires existaient dans les graphes 1-conflit. Nous avons obtenu au théorème 6.48 une condition proche. Commençons par donner un lemme.

**Lemme 6.47.** *Soit $G$ un graphe 1-conflit à $n$ sommets. La suite des degrés du graphe $G'$ obtenu en supprimant une arête de chaque conflit de $G$ vérifie*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ d_i \leq d'_i + 1.$$

*Démonstration.* Par définition on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \exists v_i \in V_{G'} = V_G \mid deg_{G'}(v_i) = d'_i.$$

Comme chaque sommet est dans au plus un conflit on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ deg_G(v_i) \leq deg_{G'}(v_i) + 1 = d'_i + 1$$

et comme

$$d'_1 \leq \cdots \leq d'_n$$

on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ deg_G(v_1), \dots, deg_G(v_i) \leq d'_i + 1$$

et donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $G$ contient au moins $i$ sommets de degré inférieur à $d'_i + 1$. Ainsi on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ d_i \leq d'_i + 1.$$

□

On déduit du théorème 6.46 et du lemme 6.47 le résultat suivant.

**Théorème 6.48.** *Si la suite des degrés d'un graphe 1-conflit $G$ à $n \geq 3$ sommets vérifie*

$$\forall i < \frac{n}{2},\ d_i \leq i + 1 \Rightarrow d_{n-i} \geq n - i + 1$$

*alors $G$ contient un CHSC.*

*Démonstration.* Supposons que $G$ vérifie la condition du théorème et montrons qu'il contient un CHSC. À cet effet, supprimons une arête de chaque conflit de $G$ pour obtenir un nouveau graphe $G'$ (sans conflit), et montrons que ce dernier contient un cycle hamiltonien qui sera donc un CHSC dans $G$. Pour cela, notons

$$d'_1 \leq \cdots \leq d'_n$$

la suite des degrés de $G'$ et montrons qu'il vérifie la condition du théorème 6.46 à savoir :

$$\forall i < \frac{n}{2},\ d'_i \leq i \Rightarrow d'_{n-i} \geq n - i$$

Supposons qu'il existe $i < \frac{n}{2}$ tel que $d'_i \leq i$. D'après le lemme 6.47, cela implique

$$d_i \leq i + 1.$$

Par définition de $G$ cela implique

$$d_{n-i} \geq n - i + 1$$

puis on utilise de nouveau le lemme 6.47 pour obtenir

$$d'_{n-i} \geq n - i$$

et finalement $G'$ satisfait la condition du théorème 6.46. □

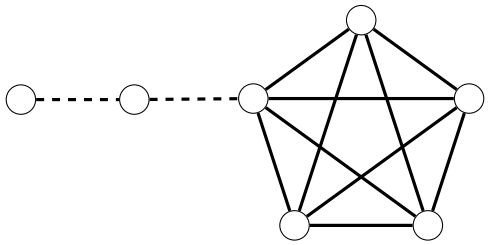
En ajoutant à un graphe un sommet universel (voisin de tous les autres) puis en appliquant le théorème 6.46, Chvátal a également montré dans son article [Chv72] le résultat suivant pour les chemins hamiltoniens.

**Théorème 6.49.** *[Chv72]. Si la suite des degrés d'un graphe à $n \geq 2$ sommets vérifie*

$$\forall i \leq \frac{n}{2}\ (i < \frac{n+1}{2}),\ d_i \leq i-1 \Rightarrow d_{n+1-i} \geq n-i$$

*alors il contient un chemin hamiltonien.*

Ce résultat devient faux lorsque l'on ajoute des conflits. En effet, prenons $G$ le graphe complet $K_{n-2}$ dont l'un des sommet est relié à un chemin de longueur 2. Un chemin hamiltonien dans $G$ contient nécessairement les deux arêtes du chemin de longueur 2 et donc en mettant ces arêtes en conflit, on obtient un graphe satisfaisant les conditions du théorème 6.49 mais ne contenant pas de Ch.HSC.



On déduit du théorème 6.49 le résultat suivant.

**Théorème 6.50.** *Si la suite des degrés d'un graphe 1-conflit $G$ à $n \geq 2$ sommets vérifie*

$$\forall i \leq \frac{n}{2},\ d_i \leq i \Rightarrow d_{n+1-i} \geq n+1-i$$

*alors $G$ contient un Ch.HSC.*

*Démonstration.* Supposons que $G$ vérifie la condition du théorème et montrons qu'il contient un Ch.HSC. À cet effet, supprimons une arête de chaque conflit de $G$ pour obtenir un nouveau graphe $G'$ (sans conflit), et montrons que ce dernier contient un chemin hamiltonien qui sera donc un CH.HSC dans $G$. Pour cela, notons

$$d'_1 \leq \cdots \leq d'_n$$

la suite des degrés de $G'$ et montrons qu'il vérifie la condition du théorème 6.49 à savoir :

$$\forall i \leq \frac{n}{2}\ (i < \frac{n+1}{2}),\ d'_i \leq i-1 \Rightarrow d'_{n+1-i} \geq n-i$$

Supposons qu'il existe $i \leq \frac{n}{2}$ tel que $d'_i \leq i-1$. D'après le lemme 6.47, cela implique

$$d_i \leq i.$$

Par définition de $G$ cela implique

$$d_{n+1-i} \geq n+1-i$$

puis on utilise de nouveau le lemme 6.47 pour obtenir

$$d'_{n+1-i} \geq n-i$$

et finalement $G'$ satisfait la condition du théorème 6.49. □

**Remarque 6.51.** Le théorème 6.50 permet de retrouver, lorsque $n$ est impair, l'existence d'un Ch.HSC dans un graphe 1-conflit à $n$ sommets $G$ vérifiant $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ prouvée pour tout $n$ au théorème 6.3. En effet, si $n = 2p+1$ et $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ on a $\delta(G) \geq p+1$ et donc la suite des degrés de $G$

$$d_1 \leq \cdots \leq d_n$$

vérifie :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ d_i \geq p+1$$

et donc :

$$\forall i \leq \frac{n}{2},\ d_i \geq p+1 > \frac{n}{2} > i.$$

## 6.6 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté des conditions suffisantes pour qu'un graphe 1-conflit possède un Ch.HSC ou un CHSC. Comme nous avons vu que les conditions classiques ne peuvent en général pas être étendues aux graphes 1-conflit, nous en avons proposées de nouvelles adaptées à ces derniers, dont la plupart sont résumées dans le tableau suivant où $G$ est un graphe 1-conflit à $n$ sommets.

| | |
|---|---|
| $\delta(G) \geq \frac{n}{2} + 1$ | CHSC |
| $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ | Ch.HSC |
| $n = 2k+1$ et $G$ $k$-régulier | Ch.HSC |
| Conflits parallèles, $n \geq 3$ et $uv \notin E_G \Rightarrow deg_G(u) + deg_G(v) \geq n+1$ | CHSC |
| $\overline{G}^1$ contient un Ch.HSC (équivalence) | Ch.HSC |
| $uv \notin E_G \Rightarrow deg_G(u) + deg_G(v) \geq n+1$ | Ch.HSC |
| $\overline{G}^2$ contient un CHSC (équivalence) | CHSC |
| $uv \notin E_G \Rightarrow deg_G(u) + deg_G(v) \geq n+2$ | CHSC |
| $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ et $\lvert\mathcal{C}on f_G\rvert \leq \frac{n}{4} - 1$ | CHSC |
| $\forall i < \frac{n}{2},\ d_i \leq i+1 \Rightarrow d_{n-i} \geq n-i+1$ | CHSC |
| $\forall i \leq \frac{n}{2},\ d_i \leq i \Rightarrow d_{n+1-i} \geq n+1-i$ | Ch.HSC |

Une de mes perspectives de recherche est de m'intéresser au cas où un sommet peut faire partie d'un nombre plus élevé de conflits. Par exemple, pour la condition de DIRAC, on peut pour chaque sommet supprimer des arêtes qui lui sont incidentes jusqu'à obtenir un graphe 1-conflit (resp. un graphe) et remarquer qu'un Ch.HSC ou un CHSC (resp. chemin ou cycle hamiltonien) dans ce graphe en est également un dans le graphe initial comme nous l'avons fait au corollaire 6.2. Ainsi, une condition suffisante dans ce nouveau graphe nous donnera une condition suffisante pour le graphe initial.

Nos contre-exemples ayant un degré minimum de 2 ou un nombre de sommet borné, nous nous posons également la question de savoir si la condition de ORE et plus généralement celle de BONDY-CHVÁTAL sont vraies dans les graphes 1-conflit de degré minimum 3 lorsque $n$ est suffisamment grand.

Une autre perspective est d'essayer d'obtenir un résultat similaire à celui du théorème 6.11 de Krivelevich, Lee et Sudakov dans le cas des conflits. À première vue, la preuve semble un peu délicate à adapter au cas des conflits, car le fait que les arêtes partagent un sommet semble important. Cependant, nous projetons d'étudier en détail cette preuve pour voir si certaines idées peuvent nous permettre d'obtenir un résultat dans le cas des conflits.

# Chapitre 7

# Conclusion Générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux graphes avec conflits, dans lesquels nous avons étudié différents types de problèmes, de nature aussi bien algorithmique que combinatoire, notre ligne directrice étant la notion de connexité. Nous nous sommes rendu compte que plusieurs résultats, simples sans conflit, ne l'étaient plus lors de l'ajout de conflits. Nous avons obtenu : des algorithmes exacts (non polynomiaux), des résultats de $\mathscr{NP}$-complétude (dont certains plus "forts" que ceux qui existaient), et des conditions suffisantes assurant l'existence de certains objets (arbre couvrant, chemin et cycle hamiltonien) sans conflits. Il semble donc que les graphes avec conflit soient intéressants à étudier, car ces derniers se comportent différemment de leurs homologues sans conflit, et sont féconds de résultats.

Pour conclure, nous allons présenter des perspectives de recherche qui nous semblent les intéressantes et prometteuses, et auxquelles nous souhaitons réfléchir plus profondément dans l'avenir.

Tout d'abord, les travaux à venir pourraient se concentrer sur l'utilisation des propriétés structurelles des graphes planaires, pour améliorer le temps d'exécution de l'algorithme pour résoudre Ch.STI dans les graphes planaires de largeur arborescente bornée. En effet, l'algorithme de la section 3.2 du chapitre 3 est XP de paramètre la largeur arborescente (*i.e.*, fonctionne en temps $O(n^{f(k)})$ où $n$ est la taille des données du problème, $f$ une fonction calculable quelconque et $k$ le paramètre) et nous pensons que l'on ne peut pas faire mieux, c'est-à-dire qu'il est $W[1]$-difficile quand le paramètre est la largeur arborescente. De plus, beaucoup de problèmes $W[1]$-difficiles quand paramétrés par la largeur arborescente $\ell$ dans les graphes sont FPT de paramètre $\ell$ dans les graphes planaires, comme par exemple le problème de l'ensemble dominant ou encore celui de l'ensemble indépendant (voir les articles [ABF$^+$02, AFN03, AFN04] ou le livre [FG06]). Il est donc judicieux de se demander si le problème Ch.STI ne serait pas FPT de paramètre $\ell$ dans les graphes planaires. Ceci pose également la question de l'existence d'un algorithme exact plus rapide dans les graphes planaires (par exemple en temps $O(2^{\sqrt{n}})$).

Dans le chapitre 4, nous avons prouvé que le problème Ch.STI est $\mathscr{NP}$-complet, même dans des graphes aussi bien structurés que les grilles. Une direction intéres-

sante dans l'étude du problème Ch.STI pourrait être de considérer le problème d'optimisation, dont l'objectif est de trouver un chemin avec le nombre minimum de transitions interdites, et d'étudier les solutions d'approximation possibles. On pourrait s'intéresser à l'existence d'un schéma d'approximation en temps polynomial (PTAS), d'un tel schéma efficace (EPTAS) ou même d'un schéma d'approximation entièrement en temps polynomial.

Nous projetons également de continuer l'étude des différents problèmes présentés au chapitre 1 dans le cas planaire. En effet, comme nous l'avons rappelé au chapitre 4, il semble qu'aucun de ces problèmes n'ait été étudié dans les graphes planaires. Il semble donc intéressant de rechercher de nouveaux algorithmes spécifiquement adaptés à ces graphes et plus rapides. De tels algorithmes pourraient s'avérer très utiles, notamment quand on sait que les problèmes de réseaux routiers qui ont motivés initialement l'introduction des transitions interdites, sont principalement composés d'instances planaires.

# Annexe A

# Le résultat de Szeider et quelques corollaires

Dans cette annexe nous allons replacer dans son contexte et détailler le résultat de Szeider ainsi que présenter quelques corollaires.

**Définition A.1.** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, un *$k$-facteur* de $G$ est un sous-graphe couvrant (un sous-graphe qui contient tous les sommets du graphe initial) $k$-régulier (chacun de ses sommets est de degré $k$).

**Définition A.2.** Pour $v \in V_G$, un *graphe de transitions* $T(v)$ de $v$ est un graphe dont les sommets sont les arêtes incidentes à (contenant) $v$. Un *système de transitions* (autorisées) $T$ de $G$ est un ensemble $T = \{T(v) \mid v \in V_G\}$.

**Définition A.3.** Un 2-facteur $F$ de $G$ est dit *compatible avec un système de transitions* $T$ si pour tout sommet $v \in V$, les deux arêtes de $F$ incidentes à $v$ sont adjacentes dans $T(v)$.

**Définition A.4.** Un graphe multiparti complet est un graphe dont on peut partitionner les sommets de manière à ce que deux sommets soient adjacents si et seulement s'ils appartiennent à deux ensembles différents de la partition.

Soit $\mathcal{A}$ une classe de graphes (fermée sous isomorphisme). Pour un graphe $G$ donné, on note $G^o$ le graphe obtenu à partir de $G$ en supprimant les sommets isolés et on définit par abus de notation $\mathcal{A}^o = \{G^o \mid G \in \mathcal{A}\}$.

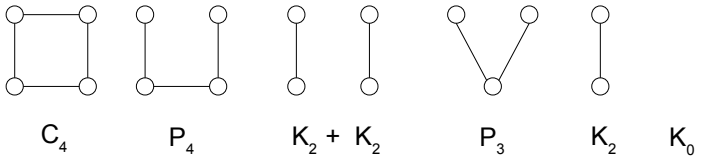
On s'intéresse maintenant au problème de décision suivant.

| **$\mathcal{A}$-compatible 2-facteur ($\mathcal{A}$-C2F)** |
|---|
| **Instance :** Un graphe $G$ avec système de transitions $T \subseteq \mathcal{A}$. |
| **Question :** $G$ contient-t-il un 2-facteur compatible avec $T$ ? |

Voici le résultat sur les 2-facteurs que l'on trouve dans [KP92] :

**Théorème A.5.** *Le problème $\mathcal{A}$-**C2F** peut être résolu en temps polynomial si au moins l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

*1) $\mathcal{A}^o$ contient seulement des graphes multipartis complets.*
*2) $\mathcal{A}^o \subset \{C_4, P_4, K_2 + K_2, P_3, K_2, K_0\}$.*
*Dans les autres cas le problème $\mathcal{A}$-C2F est $\mathcal{NP}$-complet.*




**Remarque A.6.** Dans la définition A.2 on ne donne pas de précision sur les arêtes de $T(v)$, cependant on voit qu'il est intéressant d'avoir une arête entre deux sommets correspondant à deux arêtes de $G$ dont la transition est autorisée. Ainsi en regardant si $T \subseteq \mathcal{A}$ avec $\mathcal{A}^o$ vérifiant l'une des deux conditions du théorème A.5, on voit si l'on peut vérifier en temps polynomial l'existence d'un 2-facteur de $G$ respectant les transitions interdites.

Dans [KP92], KRATOCHVÍL et POLJAK se sont également intéressés au problème suivant.

**Max-$\mathcal{A}$-C2F**

**Instance :** Un graphe $G$ avec système de transitions $T \subseteq \mathcal{A}$ et un entier positif $K$.

**Question :** $G$ contient-t-il un sous-graphe 2-régulier, compatible avec $T$ et ayant au moins $K$ sommets ?

Ils ont obtenu le résultat suivant :

**Théorème A.7.** *[KP92]. Le problème **Max-$\mathcal{A}$-C2F** peut étre résolu en temps polynomial si $\mathcal{A}^o$ contient seulement des graphes multipartis complets. Sinon il est $\mathcal{NP}$-complet.*

Par la suite, en 2002, J. MAXOVA et J. NESETRIL étudient dans [MN02] la décomposition d'un graphe en cycle et prouvent en particulier que le problème qui consiste à trouver un cycle eulérien dans un graphe (orienté ou non) avec transitions interdites est $\mathcal{NP}$-complet. Cette preuve demande que les degrés des sommets du graphe ne soient pas bornés. En 2004, Z. DVORAK montre dans [Dvo04] que le problème est également $\mathcal{NP}$-complet pour les graphes orientés dont les degrés entrants et sortants des sommets sont bornés par 4 et pour les graphes non orientés dont les degrés des sommets sont bornés par 8. Il prouve également que le problème est polynomial lorsque les degrés sont bornés par 2 dans le cas non orienté et 4 dans le cas orienté. Signalons également l'article [BKLBdW08] qui prouve de façon très simple que les problèmes du chemin eulérien et du cycle eulérien dans un graphe avec transitions interdites sont $\mathcal{NP}$-complet. À la remarque 2.6 nous montrons que ces problèmes sont $\mathcal{NP}$-complets même lorsque l'on se restreint aux instances composées de graphes planaires.

En 2009, Z. Dvorak montre également que le problème $\mathcal{A}$**-C2F** pour les graphes orientés admet une dichotomie similaire à celle trouvée par J. Kratochvíl et S. Poljak, c'est-à-dire que le problème est soit polynomial, soit $\mathscr{NP}$-complet, selon le type du système de transition du graphe, voir [Dvo09].

En 2003, Szeider publie ([Sze03]) un nouveau résultat concernant la complexité du problème qui consiste à chercher s'il existe, dans un graphe avec transitions interdites, un chemin respectant ces interdictions. Pour énoncer plus clairement notre problème, on a besoin d'une définition :

**Définition A.8.** Un chemin $C$ dans $G$ est dit $T$-compatible si chaque paire $\{uv, vw\}$ d'arêtes consécutives dans $P$ forme une arête dans $T(v)$.

Le problème pour lequel on recherche un algorithme est alors le suivant.

**Chemin $\mathcal{A}$-compatible ($\mathcal{A}$-CP).**

**Instance :** Un graphe $G = (V_G, E_G)$ avec système de transitions $T \subseteq \mathcal{A}$, deux sommets distincts $x, y \in V$.

**Question :** Existe-t-il un chemin $T$-compatible de $x$ à $y$ ?

Dans son résultat, Szeider est amené à introduire la classe suivante :

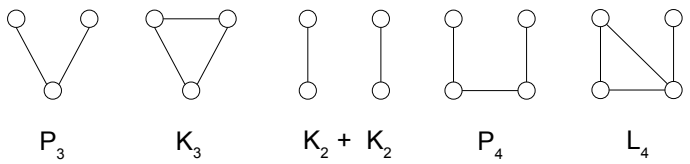
**Définition A.9.** On note $\mathcal{A}^{ind}$ la classe (fermée sous isomorphisme) engendrée par les sous-graphes induits par les sommets (sous-graphe défini par un sous-ensemble de sommets et dont l'ensemble des arêtes correspond à l'ensemble des arêtes de G incidentes à deux de ces sommets) des graphes de $\mathcal{A}$.

Il obtient alors le théorème suivant :

**Théorème A.10.** *[Sze03]. Le problème* $\mathcal{A}$***-CP*** *est* $\mathscr{NP}$*-complet si* $\mathcal{A}^{ind}$ *contient au moins l'un des ensembles*

$$\{P_3, K_2 + K_2\}, \{K_3, K_2 + K_2\}, \{P_4\}, \{L_4\}.$$

*Dans tous les autres cas, le problème peut être résolu en temps linéaire* ($O(|V_G| + |E_G|)$) *et un chemin peut être construit (s'il existe) en temps linéaire.*




En considérant la preuve de Szeider, on remarque qu'il réduit le problème $3-SAT$ au problème $\{K_3, K_2 + K_2\}$-CP et que les graphes construits sont de degré au plus 4. On en déduit que le problème suivant est $\mathscr{NP}$-complet.

**Chemin $\mathcal{A}$-compatible dans les graphes de degré au plus quatre ($\mathcal{A}$-CPB).**

**Instance :** Un graphe biparti de degré au plus 4 avec un système de transitions $T \subseteq \mathcal{A}$ et deux sommets distincts $x, y \in V_G$.

**Question :** Existe-t-il un chemin $T$-compatible de $x$ à $y$ ?

Nous nous sommes alors intéressés aux problèmes suivants.

**Chemin $\mathcal{A}$-compatible dans les graphes bipartis ($\mathcal{A}$-CPB).**

**Instance :** Un graphe biparti $G = (V_G, E_G)$ avec un système de transitions $T \subseteq \mathcal{A}$ et deux sommets distincts $x, y \in V_G$.

**Question :** Existe-t-il un chemin $T$-compatible de $x$ à $y$ ?

**Corollaire A.11.** *Le problème **$\mathcal{A}$-CPB** est $\mathscr{NP}$-complet si $\mathcal{A}^{ind}$ contient au moins l'un des ensembles*

$$\{P_3, K_2 + K_2\}, \{K_3, K_2 + K_2\}, \{P_4\}, \{L_4\}.$$

*Dans tous les autres cas, le problème peut être résolu en temps linéaire ($O(|V_G| + |E_G|)$) et un chemin peut être construit (s'il existe) en temps linéaire.*

*Démonstration.* Si $\mathcal{A}^{ind}$ ne contient aucun des ensembles

$$\{P_3, K_2 + K_2\}, \{K_3, K_2 + K_2\}, \{P_4\}, \{L_4\}$$

alors le problème **$\mathcal{A}$-CPB** peut être résolu en temps linéaire $O(|V_G| + |E_G|)$ d'après le théorème A.10. Si $\mathcal{A}^{ind}$ contient au moins l'un de ces ensembles, clairement le problème **$\mathcal{A}$-CPB** est dans $\mathscr{NP}$. Montrons alors que le problème **$\mathcal{A}$-CPB** est $\mathscr{NP}$-complet en faisant une réduction à partir du problème **$\mathcal{A}$-CP**. Considérons pour cela une instance $I$ composée d'un graphe $G = (V_G, E_G)$ avec un système de transitions $T \subseteq \mathcal{A}$ et deux sommets distincts $x, y \in V_G$, du problème **$\mathcal{A}$-CP** où $\mathcal{A}^{ind}$ contient au moins l'un des ensembles

$$\{P_3, K_2 + K_2\}, \{K_3, K_2 + K_2\}, \{P_4\}, \{L_4\}.$$

On remarque que si $\mathcal{A}^{ind}$ contient au moins l'un des ensembles précédent, il contient aussi le chemin de longueur 2 noté $P_2$. Considérons alors l'instance $I'$ du problème **$\mathcal{A}$-CPB** composée du graphe biparti $G'$ défini par :

$$\begin{aligned} V_{G'} &:= V_G \cup E_G, \\ E_{G'} &:= \{\{x, \{x, y\}\} \mid \{x, y\} \in E_G\}, \end{aligned}$$

avec le système de transition $T' := T \cup P_2$ (qui est bien un systême de transtion de $G'$) et des deux sommets distincts $x$ et $y$. Montrons que l'instance $I$ du problème

$\mathcal{A}$-**CP** est vraie si et seulement si l'instance $I'$ du problème $\mathcal{A}$-**CPB** est vraie. Pour cela, il suffit de remarquer que

$$(x_1, \ldots, x_k)$$

est un chemin $T$-compatible de $x$ à $y$ dans le graphe $G$ si et seulement si

$$(x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \ldots, x_{k-1}, \{x_{k-1}, x_k\}, x_k)$$

est un chemin $T'$-compatible de $x$ à $y$ dans le graphe $G'$. □

**Chemin compatible avec condition sur le degré (3CD).**

**Instance :** Un graphe $G = (V, E)$ avec un système de transitions $T$ tel que si $deg_G(v) \geq 4$ alors $T(v)$ est un graphe complet (avec au plus $deg_G(v)$ sommets) et deux sommets distincts $x, y \in V$.

**Question :** Existe-t-il un chemin $T$-compatible de $x$ à $y$ ?

**Corollaire A.12.** *Le problème 3CD peut être résolu en temps linéaire ($\mathcal{O}(|V_G| + |E_G|)$) et un chemin peut être construit (s'il existe) en temps linéaire.*

*Démonstration.* Prenons un sommet $v$ de $G$. Si $deg_G(x) \leq 3$ alors aucun des graphes $2K_2 + K_2, P_4$ et $L_4$ ne peut être un sous-graphe induit de $T(v)$. Si $deg_G(x) \geq 4$ alors $T(v)$ est un graphe complet et donc aucun des graphes $2K_2 + K_2, P_4$ et $L_4$ ne peut être un sous-graphe induit de $T(v)$. Ainsi, en prenant pour $\mathcal{A}$ la classe des graphes n'ayant aucun des graphes $2K_2 + K_2, P_4$ et $L_4$ comme sous-graphe induit toute instance du problème 3CD est une instance du problème $\mathcal{A}$-**CP** laquelle peut être résolue en temps linéaire ($O(|V_G| + |E_G|)$) et un chemin peut être construit en temps linéaire. □

# Annexe B

# Simplification des instances d'ACSC

Nous allons décrire un processus permettant de simplifier une instance $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$ du problème ACSC (Arbre Couvrant Sans Conflit) en supprimant des arêtes et des conflits pour d'obtenir une nouvelle instance $G_f = (V_{G_f} = V_G, E_{G_f}, \mathcal{C}onf_{G_f})$, plus simple que l'instance initiale et possédant un ACSC si et seulement si $G$ en possède un. Cette nouvelle instance $G_f$ va être construite de manière itérative.

Notons $G_0 = G$ et pour $i \geq 0$ notons $H_i$ le graphe obtenu à partir de $G_i$ en supprimant toutes les arêtes appartenant à un conflit de $\mathcal{C}onf_{G_i}$ et $G_{i+1}$ le graphe avec conflits obtenu en ajoutant à $H_i$ les arêtes de $\mathcal{C}onf_{G_i}$ ayant leurs extrémités dans deux composantes connexes différentes de $H_i$ ainsi que les conflits de $\mathcal{C}onf_{G_i}$ impliquant deux arêtes de $G_{i+1}$.

Nécessairement, ce processus converge vers un graphe avec conflits $G_f$ en un nombre d'étape ne pouvant pas dépasser le nombre d'arêtes de $G$. L'algorithme 8 décrit les différentes étapes du processus de construction de $G_f$.

**Algorithme 8 :** Simplification des instances

**Données** : Un graphe avec conflit $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$.
**Résultat** : Le graphe $G_f$.
**début**
1 $i := 0$;
2 $G_0 := G$;
3 **tant que** $i = 0 \vee G_i \neq G_{i-1}$ **faire**
4 $H_i :=$ le graphe obtenu à partir de $G_i$ en supprimant toutes les arêtes appartenant à un conflit de $\mathcal{C}onf_{G_i}$ ;
5 $G_{i+1} :=$ le graphe avec conflits obtenu en ajoutant à $H_i$ les arêtes de $\mathcal{C}onf_{G_i}$ ayant leurs extrémités dans deux composantes connexes différentes de $H_i$ ainsi que les conflits de $\mathcal{C}onf_{G_i}$ impliquant deux arêtes de $G_{i+1}$ ;
6 $i := i + 1$ ;
**fin**
7 **retourner** $G_i$ ;
**fin**

**Théorème B.1.** *$G$ contient un ACSC si et seulement si $G_f$ en contient également un.*

*Démonstration.* Tout d'abord, si $f = 0$ alors le résultat est évident. Considérons maintenant le cas $f \geq 1$. Si $G_f$ contient un ACSC $T$, alors $T$ est aussi un ACSC de $G$. En effet, $T$ est connexe, sans cycle, couvre $G$ et si deux arêtes de $T$ formaient un conflit de $\mathcal{C}onf_G$ elle formeraient aussi un conflit de $\mathcal{C}onf_{G_f}$, donc $T$ est sans conflit.

Réciproquement, si $G$ contient un ACSC $T$. Prenons une arête $uv$ de $T$ ayant ses extrémités dans deux composantes connexes différentes de $H_{f-1}$. Supposons que $uv \notin E_{G_f}$ ; alors il existe $0 \leq i \leq f-1$ tel que $uv \notin E_{G_i}$ et $uv \notin E_{G_{i+1}}$ et donc $u$ et $v$ sont dans une même composante connexe de $H_i$. Or, toute composante connexe de $H_i$ est inclue dans une composante connexe de $H_{f-1}$ ce qui contredit l'hypothèse initiale que $u$ et $v$ sont dans deux composantes connexes différentes de $H_{f-1}$. Ainsi, $uv \in E_{G_f}$.

Notons maintenant $H'_{f-1}$, le graphe $H_{f-1}$ auquel on ajoute les arêtes de $T$ ayant leurs extrémités dans deux composantes connexes différentes de $H_{f-1}$. D'après ce qui précède, $H'_{f-1}$ est un sous-graphe couvrant de $(V_{G_f}, E_{G_f})$. Montrons qu'il est connexe. Pour cela, prenons deux sommets $x$ et $y$ de $V_{H'_{f-1}}$. Ces sommets sont connectés par un chemin dans $T$ et deux sommets consécutifs de ce chemin sont, soit dans une même composante connexe de $H_{f-1}$, soit connectés par une arête de $T$ se trouvant entre deux composantes connexes de $H_{f-1}$ et donc dans $E_{H'_{f-1}}$. Donc les sommets $x$ et $y$ sont connectés dans $H'_{f-1}$. Ainsi, $H'_{f-1}$ est un sous-graphe couvrant connexe de $(V_{G_f}, E_{G_f})$ et contient donc un arbre couvrant.

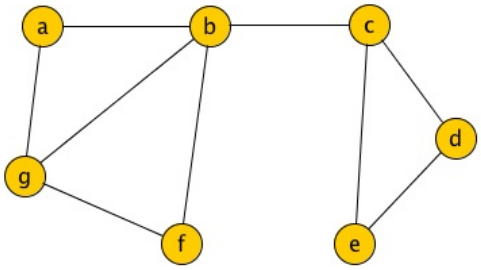
Comme $H'_{f-1}$ est un sous-graphe couvrant de $(V_{G_f}, E_{G_f})$, il suffit maintenant de montrer que deux arêtes quelconques de $H'_{f-1}$ ne font pas partie d'un même conflit de $\mathcal{C}onf_{G_f}$ pour qu'un arbre couvrant de $H'_{f-1}$ soit également un ACSC de $G_f$. Or, par construction les arêtes de $H_{f-1}$ ne sont dans aucun conflit de $\mathcal{C}onf_{G_f}$ et deux arêtes de $T$ ne peuvent être dans un même conflit de $\mathcal{C}onf_G \subset \mathcal{C}onf_{G_f}$. Cela conclut la preuve. □

**Corollaire B.2.** *Si $H_f$ est connexe alors $G$ contient un ACSC.*

*Démonstration.* En effet, si $H_f$ est connexe, il contient un arbre couvrant qui est également un ACSC de $G_f$ et donc de $G$. □

Il est facile de trouver des graphes $G$ pour lesquels $H_0$ n'est pas connexe mais $H_f$ est connexe (par exemple l'union disjointe de deux graphes complets à plus de trois sommets, entre lesquels on ajoute une arête et un conflit entre cette arête et l'une des arêtes d'un des deux graphes complets). Notre processus permet donc de transformer des instances a priori difficiles en des instances faciles à résoudre, puisqu'il s'agit de trouver un arbre couvrant dans un graphe connexe (sans conflit) pour obtenir un ACSC de $G$.

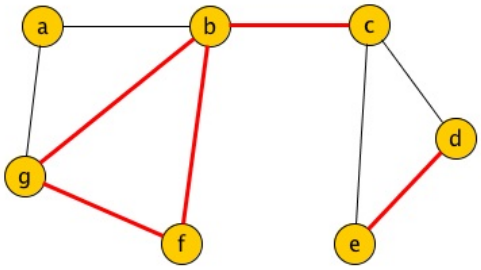
**Exemple B.3.** Donnons un exemple de simplification d'instance. Supposons que $G = (V_G, E_G, \mathcal{C}onf_G)$ soit le graphe suivant :



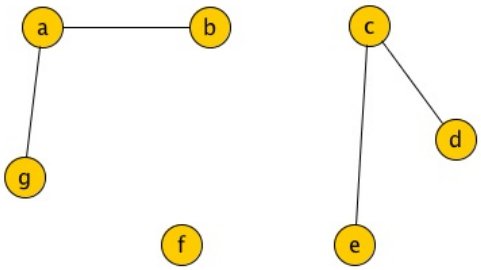

avec

$$\mathcal{C}onf_G = \{\{gb, gf\}, \{gb, bf\}, \{gf, bc\}, \{ed, bc\}\}.$$

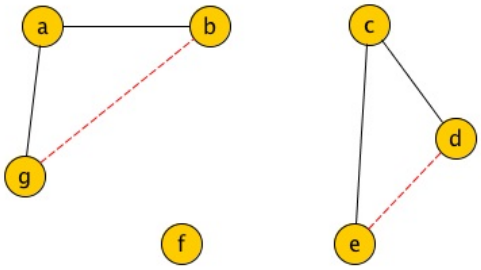
Les arêtes en gras (ou rouge) sont celles présentes dans au moins un conflit :



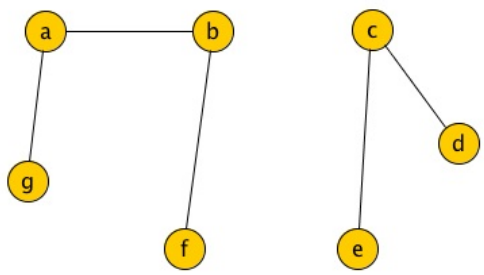

En les supprimant on obtient alors le graphe $H_0$ :



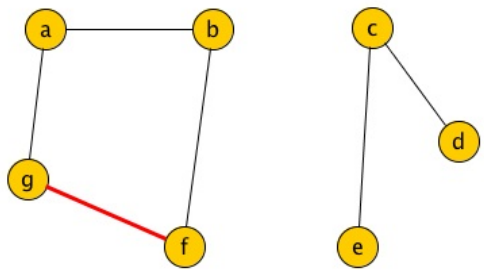

En pointillés les arêtes de $G$ ayant leurs deux extrémités dans une même composante connexe de $H_0$ et qui seront définitivement supprimées pour obtenir le graphe $G_1$ avec $\mathcal{C}onf_{G_1} = \{gf, bc\}$ :



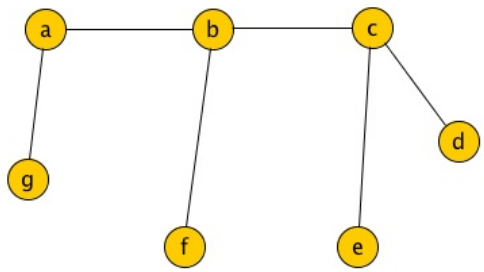
Ainsi, le graphe $H_1$ sera le suivant :



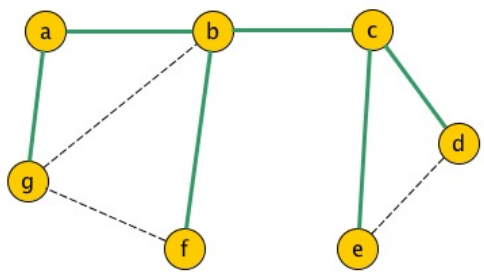

En rouge l'unique arête de $G_1$ ayant ses deux extrémités dans une même composante connexe de $H_1$,




qui sera définitivement supprimée pour obtenir le graphe $G_2$ qui n'a plus de conflits.




Il suffit alors de prendre un arbre couvrant de $G_2$ pour obtenir un arbre couvrant de $G$.



Il serait intéressant de pouvoir évaluer, à un nombre de sommets fixé, le pourcentage d'instances qui deviennent polynomiales (soit en cherchant un arbre couvrant dans $H_f$, soit un ACSC dans $G_f$) après avoir été simplifiées. Testée par Christian Laforest à l'aide de Maple, sur un petit nombre d'exemples choisis au hasard, la méthode semble porter ses fruits, mais le faible nombre de tests réalisés ne permet pas d'en dégager des résultats significatifs. Pour pouvoir déterminer le pourcentage d'instances réellement simplifiées, il faudrait étudier les manières de générer aléatoirement des graphes avec conflits et ensuite appliquer notre simplification sur un grand nombre d'entre eux pour pouvoir se faire une idée sur le pourcentage d'instances simplifiées. Cela est une perspective que nous souhaitons regarder dans l'avenir.

# Bibliographie


[ABF+02] Jochen Alber, Hans L. Bodlaender, Henning Fernau, Ton Kloks et Rolf Niedermeier : Fixed parameter algorithms for DOMINATING SET and related problems on planar graphs. *Algorithmica*, 33(4):461–493, 2002.

[AC75] Alfred V. Aho et Margaret J. Corasick : Efficient string matching : An aid to bibliographic search. *Commun. ACM*, 18(6):333–340, 1975.

[AFN03] Jochen Alber, Henning Fernau et Rolf Niedermeier : Graph separators : a parameterized view. *J. Comput. Syst. Sci.*, 67(4):808–832, 2003.

[AFN04] Jochen Alber, Henning Fernau et Rolf Niedermeier : Parameterized complexity : exponential speed-up for planar graph problems. *J. Algorithms*, 52(1):26–56, 2004.

[AL09] Mustaq Ahmed et Anna Lubiw : Shortest paths avoiding forbidden subpaths. *In STACS*, pages 63–74, 2009.

[Bax93] Eric T. Bax : Inclusion and Exclusion Algorithm for the Hamiltonian Path Problem. *Inf. Process. Lett.*, 47(4):203–207, 1993.

[BC76] John Adrian Bondy et Vasek Chvátal : A method in graph theory. *Discrete Mathematics*, (15):111–135, 1976.

[Bei70] Lowell W. Beineke : Characterizations of derived graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 9(2):129 – 135, 1970.

[Bel60] Richard Ernest Bellman : Combinatorial processes and dynamic programming. *In Proc. 10th Symp. in Apllied Mathematics*, pages 217–249, 1960.

[Bel62] Richard Bellman : Dynamic Programming Treatment of the Travelling Salesman Problem. *J. ACM*, 9(1):61–63, 1962.

[Bjö14] Andreas Björklund : Determinant sums for undirected hamiltonicity. *SIAM J. Comput.*, 43(1):280–299, 2014.

[BK06] Jacek Błażewicz et Marta Kasprzak : Computational complexity of isothermic DNA sequencing by hybridization. *Discrete Applied Mathematics*, 154(5):718–729, 2006.

[BKLBdW08] Jacek Błażewicz, Marta Kasprzak, Benjamin Leroy-Beaulieu et Dominique de Werra : Finding Hamiltonian circuits in quasi-adjoint graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 156(13):2573–2580, 2008.

[BKS07] Piotr BERMAN, Marek KARPINSKI et Alexander D. SCOTT : Computational complexity of some restricted instances of 3-SAT. *Discrete Applied Mathematics*, 155(5):649–653, 2007.

[BLGM09] Greg M. BERNSTEIN, Young LEE, Anders GAVLER et Jonas MARTENSSON : Modeling wdm wavelength switching systems for use in gmpls and automated path computation. *Optical Communications and Networking, IEEE/OSA Journal of*, 1(1):187–195, June 2009.

[BM10] John Adrian BONDY et Uppaluri Siva Ramachandra MURTY : *Graph Theory*. Springer London Ltd, 2010.

[Bod88] Hans L. BODLAENDER : Dynamic programming on graphs with bounded treewidth. *In Automata, Languages and Programming*, volume 317 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 105–118. Springer Berlin Heidelberg, 1988.

[Cal61] Tom CALDWELL : On finding minimum routes in a network with turn penalties. *Commun. ACM*, 4(2):107–108, février 1961.

[CDP+07] David COUDERT, Pallab DATTA, Stephane PÉRENNES, Hervé RIVANO et Marie-Emilie VOGE : Shared risk resource group complexity and approximability issues. *Parallel Processing Letters*, 17(2):169–184, 2007.

[Chv72] Vasek CHVÁTAL : On Hamilton's ideals. *J. Combinatorial Theory (B)*, 12:163–168, 1972.

[CHW+13] Yue CHEN, Nan HUA, Xin WAN, Hanyi ZHANG et Xiaoping ZHENG : Dynamic lightpath provisioning in optical WDM mesh networks with asymmetric nodes. *Photonic Network Communications*, 25(3):166–177, 2013.

[CLRS09] Thomas H. CORMEN, Charles E. LEISERSON, Ronald L. RIVEST et Clifford STEIN : *Introduction to Algorithms (3. ed.)*. MIT Press, 2009.

[CNP+11] Marek CYGAN, Jesper NEDERLOF, Marcin PILIPCZUK, Michal PILIPCZUK, Johan M. M. van ROOIJ et Jakub Onufry WOJTASZCZYK : Solving connectivity problems parameterized by treewidth in single exponential time. *In* Rafail OSTROVSKY, éditeur : *IEEE 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2011, Palm Springs, CA, USA, October 22-25, 2011*, pages 150–159. IEEE Computer Society, 2011.

[CP13] Marek CYGAN et Marcin PILIPCZUK : Faster exponential-time algorithms in graphs of bounded average degree. *In Automata, Languages, and Programming - 40th International Colloquium, ICALP 2013, Riga, Latvia, July 8-12, 2013, Proceedings, Part I*, pages 364–375, 2013.

[Die12] Reinhard DIESTEL : *Graph Theory, 4th Edition*, volume 173 de *Graduate texts in mathematics*. Springer, 2012.

[Dir52] Gabriel Andrew DIRAC : Some theorems on abstract graphs. *Proc. London Math. Soc. 2*, pages 69–81, 1952.

[DPSW11] Andreas DARMANN, Ulrich PFERSCHY, Joachim SCHAUER et Gerhard J. WOEGINGER : Paths, trees and matchings under disjunctive constraints. *Discrete Applied Mathematics*, 159(16):1726–1735, 2011.

[dQVM84] Ernesto de QUEIROS VIEIRA MARTINS : An algorithm for ranking paths that may contain cycles. *European Journal of Operational Research*, 18(1):123–130, 1984.

[DSSW09] Daniel DELLING, Peter SANDERS, Dominik SCHULTES et Dorothea WAGNER : Engineering route planning algorithms. *In Algorithmics of Large and Complex Networks*, volume 5515 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 117–139. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[Dvo04] Zdeněk DVOŘÁK : *Eulerian Tours in Graphs with Forbidden Transitions and Bounded Degree.* KAM-DIMATIA series. Charles Univ., 2004.

[Dvo09] Zdeněk DVOŘÁK : Two-factors in orientated graphs with forbidden transitions. *Discrete Mathematics*, 309(1):104–112, 2009.

[FG06] Jörg FLUM et Martin GROHE : *Parameterized Complexity Theory (Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series).* Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2006.

[GJ79] Michael R. GAREY et David S. JOHNSON : *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979.

[GJT07] Gautam GUPTA, Puneet JOSHI et Amitabha TRIPATHI : Graphic sequences of trees and a problem of Frobenius. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 57(1):49–52, 2007.

[Gou91] Ronald J. GOULD : Updating the Hamiltonian Problem - A survey. *Journal of Graph Theory*, 15(2):121–157, 1991.

[Gou03] Ronald J. GOULD : Advances on the Hamiltonian Problem - A survey. *Graphs and Combinatorics*, 19(1):7–52, 2003.

[Gou14] Ronald J. GOULD : Recent Advances on the Hamiltonian Problem : Survey III. *Graphs and Combinatorics*, 30(1):1–46, 2014.

[Hås99] Johan HÅSTAD : Clique is hard to approximate within $n^{1\text{-epsilon}}$. *Acta Mathematica*, 182(1):105–142, 1999.

[HK62] Michael HELD et Richard M. KARP : A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 10(1):196–210, 1962.

[HZT+12] Tomohiro HASHIGUCHI, Yi ZHU, Kazuyuki TAJIMA, Yutaka TAKITA, Takao NAITO et Jason P. JUE : Iteration-free node-disjoint paths search in WDM networks with asymmetric nodes. *In 16th International Conference on Optical Network Design and Modelling, ONDM 2012, Colchester, United Kingdom, April 17-20, 2012*, pages 1–6. IEEE, 2012.

[JT14] Brigitte JAUMARD et Kien Do TRUNG : Optimizing roadm configurations in wdm networks. *In 2014 16th International Telecommunications Network Strategy and Planning Symposium (Networks)*, pages –, Madeiras, Portugal, sep 2014.

[Kar72] Richard M. KARP : Reducibility among combinatorial problems. *In Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, held March 20-22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York.*, The IBM Research Symposia Series, pages 85–103. Plenum Press, New York, 1972.

[Kar82] Richard M. KARP : Dynamic programming meets the principle of inclusion and exclusion. *Operations Research Letters*, 1(2):49–51, 1982.

[KGK77] Samuel KOHN, Allan GOTTLIEB et Meryle KOHN : A Generating Function Approach to the Traveling Salesman Problem. *In Proceedings of the 1977 Annual Conference*, ACM '77, pages 294–300, New York, NY, USA, 1977. ACM.

[KLM13a] Mamadou Moustapha KANTÉ, Christian LAFOREST et Benjamin MOMÈGE : An exact algorithm to check the existence of (elementary) paths and a generalisation of the cut problem in graphs with forbidden transitions. *In SOFSEM 2013*, volume 7741 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 257–267. Springer, 2013.

[KLM13b] Mamadou Moustapha KANTÉ, Christian LAFOREST et Benjamin MOMÈGE : Trees in graphs with conflict edges or forbidden transitions. *In TAMC 2013*, volume 7876 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 343–354. Springer, 2013.

[Klo94] Ton KLOKS : *Treewidth, Computations and Approximations*, volume 842 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 1994.

[KLS15] Michael KRIVELEVICH, Choongbum LEE et Benny SUDAKOV : Compatible Hamilton cycles in Dirac graphs. *Combinatorica (à paraître)*, 2015.

[KMMN15] Mamadou Moustapha KANTÉ, Fatima Zahra MOATAZ, Benjamin MOMÈGE et Nicolas NISSE : Finding Paths in Grids with Forbidden Transitions. *In WG 2015*, Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2015.

[KP92] Jan KRATOCHVÍL et Svatopluk POLJAK : Compatible 2-factors. *Discrete Applied Mathematics*, 36(3):253–266, 1992.

[Li13] Hao LI : Generalizations of Dirac's theorem in Hamiltonian graph theory - a survey. *Discrete Mathematics*, 313(19):2034–2053, 2013.

[LM14] Christian LAFOREST et Benjamin MOMÈGE : Some Hamiltonian Properties of One-Conflict Graphs. *In IWOCA 2014*, volume 8986 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 262–273. Springer, 2014.

[LM15] Christian LAFOREST et Benjamin MOMÈGE : Nash-Williams-type and Chvátal-type Conditions in One-Conflict Graphs. *In SOFSEM 2015*, volume 8939 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 327–338. Springer, 2015.

[Luc92] Édouard LUCAS : *Récréations Mathématiques, Vol.* 2. Gauthier-Villars, 1892.

[MN02] Jana MAXOVÁ et Jaroslav NESETRIL : Complexity of Compatible Decompositions of Eulerian Graphs and Their Transformations. *In Algorithms - ESA 2002, 10th Annual European Symposium, Rome, Italy, September 17-21, 2002, Proceedings*, pages 711–722, 2002.

[Nie06] Rolf NIEDERMEIER : *Invitation to Fixed-Parameter Algorithms.* Oxford University Press, 2006.

[NW69] Crispin St. John Alvah NASH-WILLIAMS : Valency sequences which force graphs to have Hamiltonian circuits. *In University of Waterloo Research Report.* Waterloo, Ontario : University of Waterloo, 1969.

[Ore60] Øystein ORE : A note on Hamiltonian circuits. *American Mathematical Monthly*, (67):55, 1960.

[RS86] Neil ROBERTSON et Paul D. SEYMOUR : Graph minors. II. algorithmic aspects of tree-width. *J. Algorithms*, 7(3):309–322, 1986.

[Sze03] Stefan SZEIDER : Finding paths in graphs avoiding forbidden transitions. *Discrete Applied Mathematics*, 126(2-3):261–273, 2003.

[Tam87] Roberto TAMASSIA : On embedding a graph in the grid with the minimum number of bends. *SIAM J. Comput.*, 16(3):421–444, juin 1987.

[Val81] Leslie G. VALIANT : Universality considerations in VLSI circuits. *IEEE Transactions on Computers*, 30(2):135–140, 1981.

[VD05] Daniel VILLENEUVE et Guy DESAULNIERS : The shortest path problem with forbidden paths. *European Journal of Operational Research*, 165(1):97–107, 2005.