

# UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ECOLE DOCTORALE PARTICULES, NOYAUX ET COSMOS  
SERVICE DE PHYSIQUE NUCLÉAIRE, IRFU, CEA SACLAY

DISCIPLINE : PHYSIQUE

## THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue le 29 septembre 2015 par

**Thibaut METIVET**

**Lattice QCD at the physical point :  
pion-pion scattering and  
structure of the nucleon**

SYNTHÈSE EN FRANÇAIS

<b>Directeur de thèse :</b>	M. Pierre GUICHON	Chercheur CEA (SPhN, IRFU, CEA Saclay)
<b>Co-directeur de thèse :</b>	M. Laurent LELLOUCH	Directeur de recherche CNRS (CPT Marseille)
<b>Composition du jury :</b>		
Président du jury :	M. Jaume CARBONELL	Directeur de recherche CNRS (IPN Orsay)
Rapporteurs :	M. Benoit BLOSSIER	Chargé de recherche CNRS (LPT Orsay)
	M. Christian HOELBLING	Senior Physicist (Wuppertal Universität)
Examineurs :	M. Samuel WALLON	Maître de conférences (UPMC Paris)

## 1 Introduction

La Chromodynamique Quantique (QCD d'après l'acronyme anglais) est la théorie de l'interaction forte, dont les degrés de liberté sont constitués par les quarks et les gluons. Les quarks sont des fermions de spin 1/2, qui interviennent comme des triplets de couleur, et les gluons, vecteurs de l'interaction, sont des bosons de spin 1, intervenant comme octets de couleur.

La QCD est une théorie de jauge du groupe de symétrie locale SU(3) de couleur, formalisée dans le cadre général des théories quantiques de champs.

Dans cette thèse, nous utilisons le formalisme de QCD sur réseau pour mener une étude non-perturbative approfondie de deux problèmes de physique hadronique : la diffusion pion-pion (dans le canal du rho) et la structure du nucléon.

## 2 QCD sur réseau

La formulation discrète de QCD sur un réseau fournit, outre une régularisation invariante de jauge de la théorie, un moyen de réaliser des simulations numériques *ab-initio*.

On souhaite calculer la valeur moyenne d'un opérateur  $O$  dans le vide, exprimée grâce à l'intégrale de chemin de Feynman comme l'intégrale fonctionnelle

$$\langle O \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}} \int DA_\mu Dq D\bar{q} O[A_\mu, q, \bar{q}] e^{-S_E[A_\mu, q, \bar{q}]} \quad (1)$$

où  $A_\mu$  est le gluon,  $q$  le quark,  $S_E[A_\mu, q, \bar{q}]$  l'action euclidienne de QCD et  $\mathcal{Z}$  la fonction de partition

$$\mathcal{Z} = \int DA_\mu Dq D\bar{q} e^{-S_E[A_\mu, q, \bar{q}]} \quad (2)$$

Afin de donner un sens à cette intégrale, et de pouvoir la calculer numériquement, on introduit un réseau d'espace-temps euclidien discret

$$\Lambda = \{x \equiv an = a(\mathbf{n}, n_0) \mid \mathbf{n}_i \in [0..L), n_0 \in [0..T)\} \quad (3)$$

de pas  $a$  et d'hypervolume  $aL \times aT$ .

Les champs spinoriels de quarks deviennent alors des variables de Grassmann (portant aussi des indices de couleur et de spineur)  $q(n)$  définies à chaque site du réseau, et les champs de gluon correspondent à des liens de jauge  $U_\mu$ , c'est-à-dire des matrices de SU(3) attachées à chaque lien du réseau :

$$U_\mu(n) \equiv U(an, an + a\hat{\mu}) \quad (4)$$

Pour définir une action discrète qui reproduit l'action de QCD dans la limite  $a \rightarrow 0$ , on introduit les différentielles covariantes discrètes

$$\nabla_\mu q(n) = \frac{1}{a} [U_\mu(n)q(n + \hat{\mu}) - q(n)] \quad (5)$$

$$\nabla_\mu^* q(n) = \frac{1}{a} [q(n) - U_\mu(n - \hat{\mu})^\dagger q(n - \hat{\mu})] \quad (6)$$

et la *plaquette*

$$P_{\mu\nu}(n) \equiv U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu(n + \hat{\nu})^\dagger U_\nu(n)^\dagger \quad (7)$$

L'action discrète – dite de *Wilson* – est alors définie par :

$$\begin{aligned} S_{\text{Wilson}}[q, \bar{q}, U_\mu] &= \frac{\beta}{3} \sum_{n, \mu < \nu} \text{Re Tr} [\mathbf{1} - P_{\mu\nu}(n)] + a^4 \sum_f \sum_n \bar{q}(n) \mathfrak{D}_W q(n) \\ &\equiv S_{\text{Wilson,G}}[U_\mu] + S_{\text{Wilson,F}}[q, \bar{q}, U_\mu] \end{aligned} \quad (8)$$

où  $\mathfrak{D}_W$  est l'opérateur de Wilson :

$$\mathfrak{D}_W \equiv D_W + m = \frac{1}{2} \sum_\mu [\gamma_\mu^E (\nabla_\mu + \nabla_\mu^*) - a \nabla_\mu^* \nabla_\mu] + m$$

et les  $\gamma$  sont les matrices de Dirac euclidiennes.

En pratique, on utilise pour nos simulations une action améliorée – dite de Sheikholeslami-Wohlert pour la partie fermionique, et de Lüscher-Weisz pour la partie gluonique – couplée à un smearing (2HEX) des liens de jauge afin de réduire les effets de discrétisation, et ainsi de faciliter la limite du continu  $a \rightarrow 0$ .

En utilisant les propriétés de l'intégration sur les variables de Grassmann, ainsi que celles de l'opérateur de Wilson, on peut montrer que l'intégrale (1) peut alors se calculer dans une approche Monte-Carlo, comme la somme

$$\langle O \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle O \rangle_{\text{F}} [U^{(i)}] + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad (9)$$

où  $\{U^{(i)}, i = 1, \dots, N\}$  est un ensemble de  $N$  configurations de jauge indépendantes, distribuées suivant la densité

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} \det(\mathfrak{D}) e^{-S_G} \quad (10)$$

et  $\langle O \rangle_{\text{F}}$  est la contraction de Wick correspondant à  $O$ , obtenue en associant toutes les paires  $q, \bar{q}$  dans  $O$  en propagateur de quarks  $\mathfrak{D}^{-1}$ .

En pratique, les configurations de jauge sont obtenues en utilisant une méthode de Monte-Carlo hybride couplant une chaîne de Markov et des évolutions de dynamique moléculaire.

En utilisant (9), on peut alors calculer les fonctions à  $n$  points de QCD, afin d'en extraire les quantités physiques d'intérêt. Dans cette thèse, on utilise ce formalisme pour étudier les problèmes fondamentaux de l'interaction forte que sont la diffusion résonante pion-pion, et la structure du nucléon.

### 3 Diffusion pion-pion : la résonance du rho

Les théories de champs quantiques, comme QCD, possèdent une propriété remarquable : elles permettent la création et l'annihilation spontanées de particules à partir du vide, ce qui rend possible la désintégration de hadrons instables sous l'interaction forte, aussi appelés résonance.

Le  $\rho$  est l'une des plus emblématiques résonances, qui se désintègre presque exclusivement en deux pions, fournissant ainsi un cas d'étude idéal pour les calculs sur réseau. Dans cette thèse, nous réalisons une étude détaillée des propriétés de cette résonance avec des simulations à petite masse de pion (et même à la masse physique). L'extraction des quantités physiques de ce processus de diffusion est réalisée grâce à la méthode de Lüscher, en utilisant une méthode variationnelle multi-canaux.

L'approche de Lüscher permet d'éviter les difficultés inhérentes à la définition des états de diffusion sur le réseau. A cette fin, on considère les particules sur le réseau comme dans une boîte de taille  $L$ , et on étudie le spectre – discret – des énergies. L'interaction éventuelle entre les particules modifie le spectre, et le décalage des énergies par rapport au cas sans interaction peut être relié aux observables physiques de la diffusion. Dans notre cas, cette modification du spectre énergétique se traduit ainsi par des effets de volume d'ordre  $1/L^3$  qui permettent de calculer les déphasages pion-pion dans le canal de la résonance du rho. Si l'on décrit cette résonance par une forme de Breit-Wigner, on peut donc extraire des simulations sur réseau le couplage  $g_{\rho\pi\pi}$  du rho aux deux pions, ainsi que la masse  $M_\rho$  du rho.

Pour cela on doit cependant calculer une partie du spectre du système pion-pion sur le réseau, afin d'avoir assez d'équations pour obtenir les quantités caractérisant la diffusion. Pour extraire les valeurs (les plus basses) des énergies du système, on utilise une méthode variationnelle appelée méthode GEVP, qui consiste à calculer une matrice de corrélateurs croisés impliquant jusqu'à cinq niveaux. La résolution d'un système aux valeurs propres généralisées de cette matrice permet d'obtenir plusieurs valeurs des énergies du spectre, qu'on utilise ensuite dans le formalisme de Lüscher.

La figure 1 montre un exemple de valeurs du déphasage pion-pion dans le canal du rho obtenues pour un ensemble de configurations à la masse physique du pion. On peut y observer le phénomène résonant en la variation rapide du déphasage lorsque celui-ci passe par  $\pi/2$ .

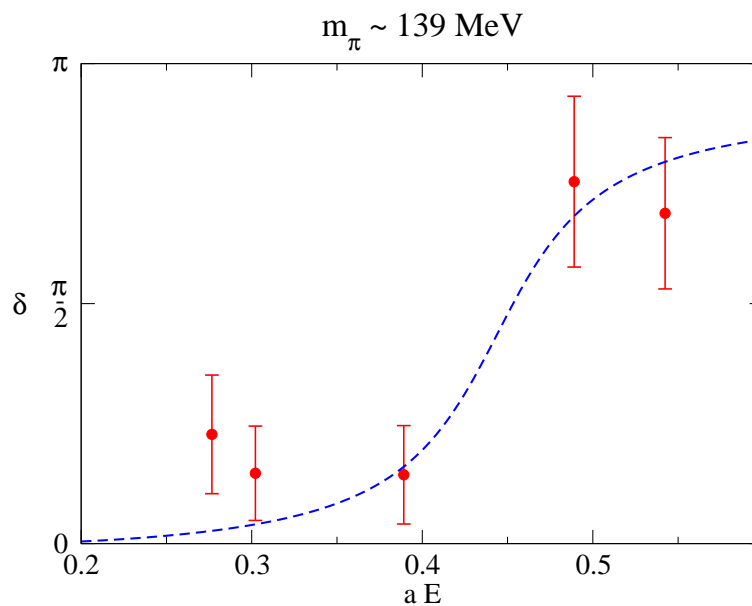


FIGURE 1 – Valeurs du déphasage  $\delta_1$  obtenues pour un ensemble à la masse de pion physique.

Les résultats que nous obtenons pour les ensembles de configurations de jauge disponibles sont montrés sur la figure 2 pour le couplage du rho aux deux pions, et sur la figure 3 pour la masse du rho. Les valeurs à petites masse de pion sont les premières obtenues à ce jour, et fournissent un aperçu important de QCD, en ce sens où elles montrent la désintégration directe du rho sur le réseau. Seules les valeurs à petite masse de pion fournissent donc une information sur la désintégration du rho, et donc sur le couplage  $g_{\rho\pi\pi}$ , ce pourquoi la figure 2 n'indique que les valeurs pour les ensembles correspondants.

La figure 3 montre aussi un fit de la masse du rho réalisé à partir d'une paramétrisation fonctionnelle que nous avons développée, et permettant d'extrapoler les résultats du réseau au point physique. Nous avons aussi mené une étude approfondie des erreurs systématiques et obtenu les valeurs des paramètres physiques de la résonance du rho :

$$M_{\rho}^{\text{phy}} = 787 \text{ MeV} \pm 8.4 \text{ MeV (stat)} \pm 18 \text{ MeV (syst)} \quad (11)$$

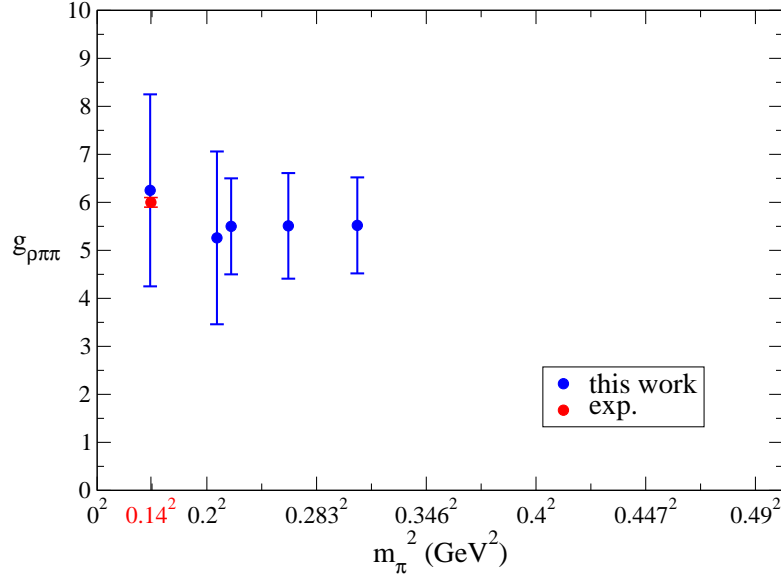


FIGURE 2 – Valeurs du couplage  $\rho\pi\pi$  obtenues pour les ensembles à petite masse de pion, tracées en fonction de  $m_\pi^2$ .

$$M_\rho(m_\pi, m_K^{\text{phy}}, a=0)$$

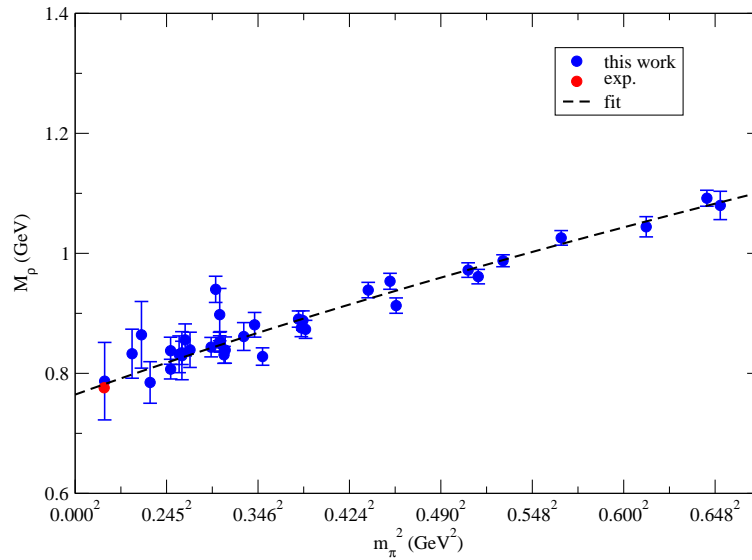


FIGURE 3 – Valeurs de la masse  $M_\rho$  obtenues après extrapolation au continu, au volume infini et à la masse physique du quark étrange, tracées en fonction de  $m_\pi^2$ .

$$g_{\rho\pi\pi}^{\text{phy}} = 5.35 \pm 0.87 \text{ (stat)} \pm 0.36 \text{ (syst)} \quad (12)$$

Nos résultats sont en excellent accord avec les valeurs expérimentales, et la précision pourrait être améliorée à moindre effort en utilisant différents référentiels pour la diffusion, et en utilisant davantage de configurations de jauge.

## 4 Facteurs de forme du nucléon

Les facteurs de forme sont des quantités importantes permettant de décrire la structure interne du nucléon, en particulier sa déviation par rapport au cas de la particule ponctuelle. De fait, ils fournissent une paramétrisation des éléments de matrice des courants électromagnétiques ou axiaux entre des états de nucléon et portent donc des informations aussi fondamentales que le rayon électrique, le moment magnétique ou encore la charge axiale du nucléon.

Dans cette thèse, nous réalisons un calcul complet des facteurs de forme électromagnétiques et axiaux isovectoriels du nucléon, ainsi qu'une étude approfondie du rayon électrique isovectoriel et de la charge axiale.

Pour cela, nous évaluons sur le réseau les fonctions à trois points du nucléon, où un courant est inséré entre deux opérateurs interpolant le nucléon. Le courant électromagnétique utilisé est le courant de Noether de l'action de QCD euclidienne discrète, afin de respecter les identités de Ward. Le courant axial n'étant pas conservé dans le continu, nous utilisons la discrétisation locale, (re-)normalisée par les constantes  $Z_A$  calculées sur le réseau dans le schéma RI/MOM.

Afin de contrôler les contaminations éventuelles de nos corrélateurs par des états excités, nous avons mis en place une méthode de dé-convolution combinant l'information des fonctions à trois points avec celle des fonctions à deux points. Nous avons aussi utilisé une technique de projection sur les deux états de nucléon afin de réduire systématiquement ces possibles contaminations, et développé un formalisme covariant pour restaurer les symétries de Lorentz du continu plus efficacement.

Les figures 4, 5, 6 et 7 montrent les facteurs de forme électromagnétiques ( $G_E^{(p-n)}$ ,  $G_M^{(p-n)}$ ) et axiaux ( $G_A$ ,  $G_P$ ) en fonction du transfert  $Q^2$  obtenus pour un ensemble à la masse physique du pion.

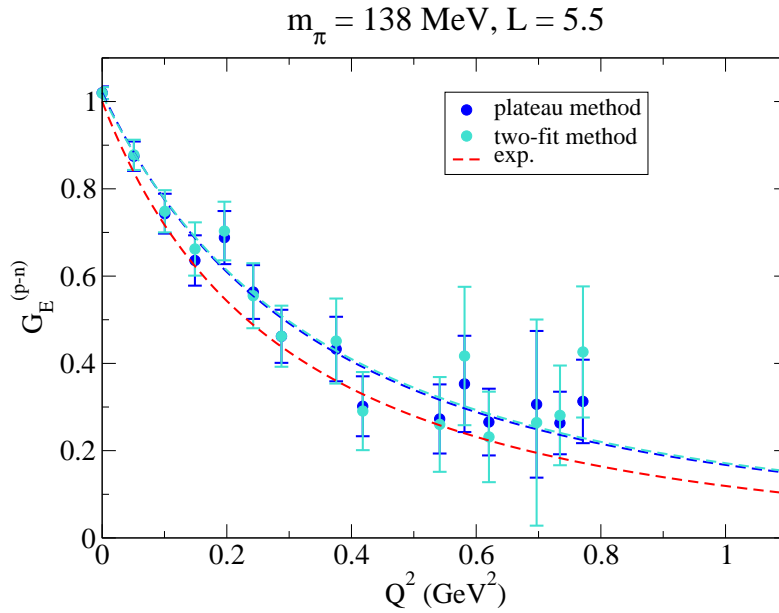


FIGURE 4 – Résultats obtenus pour le facteur de forme électrique isovectoriel  $G_E^{(p-n)}$  tracés en fonction de  $Q^2$ . Les valeurs de notre calcul sont figurées par les points bleus, et la ligne en pointillés bleue montre le fit dipolaire de nos données. La ligne en pointillés rouge montre pour référence une paramétrisation expérimentale.

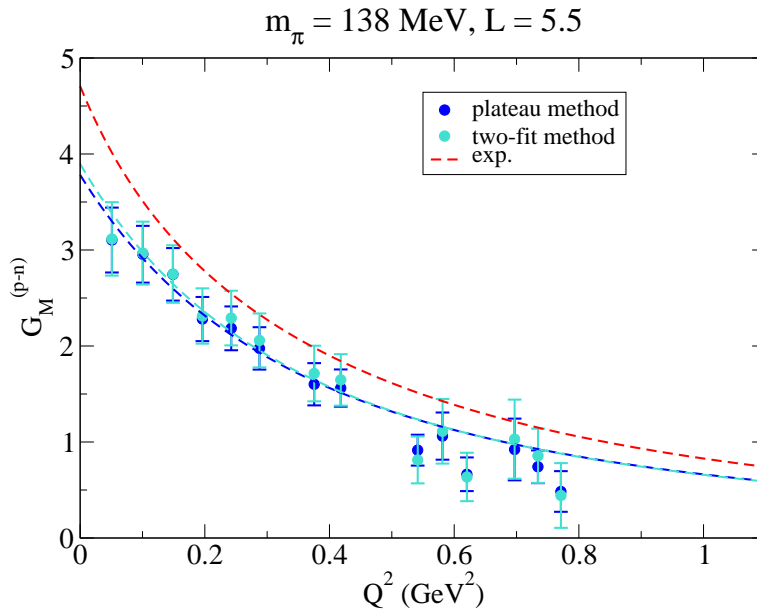


FIGURE 5 – Résultats obtenus pour le facteur de forme magnétique isovectoriel  $G_M^{(p-n)}$  tracés en fonction de  $Q^2$ . Les valeurs de notre calcul sont figurées par les points bleus, et la ligne en pointillés bleue montre le fit dipolaire de nos données. La ligne en pointillés rouge montre pour référence une paramétrisation expérimentale.



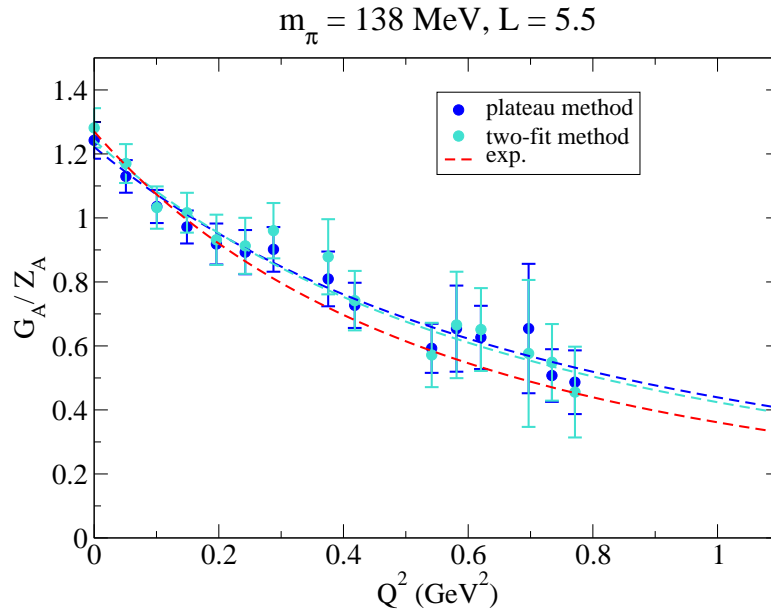


FIGURE 6 – Résultats obtenus pour le facteur de forme axial  $G_A$  tracés en fonction de  $Q^2$ . Les valeurs de notre calcul sont figurées par les points bleus, et la ligne en pointillés bleue montre le fit dipolaire de nos données. La ligne en pointillés rouge montre pour référence une paramétrisation expérimentale.

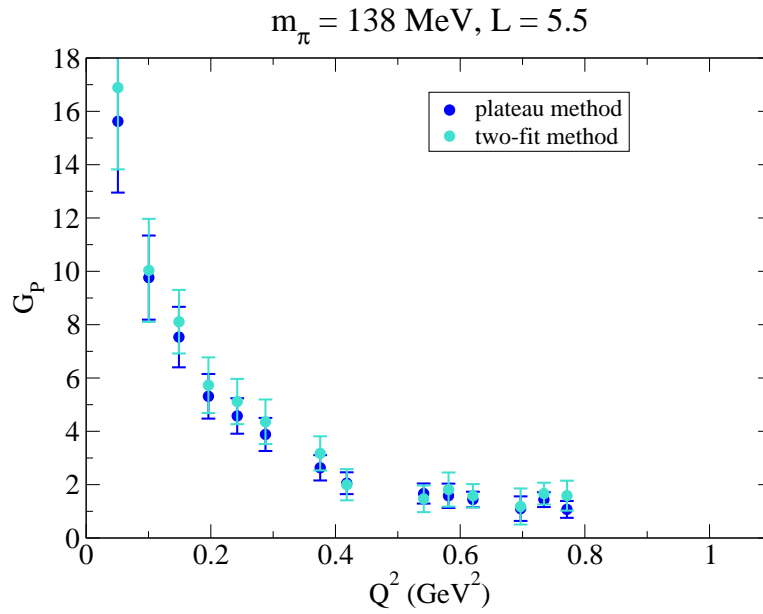


FIGURE 7 – Résultats obtenus pour le facteur de forme pseudoscalaire  $G_P$  tracés en fonction de  $Q^2$ .

Le fit du facteur de forme électrique avec un dipôle permet d'extraire le rayon de charge carré  $\langle r_E^2 \rangle$  (dans notre cas, le rayon isovectoriel, c'est-à-dire la différence entre le rayon carré du proton et celui du neutron).

De par sa nature, le rayon électrique calculé sur le réseau souffre d'importants effets de volume fini, que nous avons évalués en tenant compte de la contribution du nuage pionique du nucléon.

Nous montrons les résultats de nos calculs pour le rayon électrique carré en fonction de la masse du pion sur la figure 8.

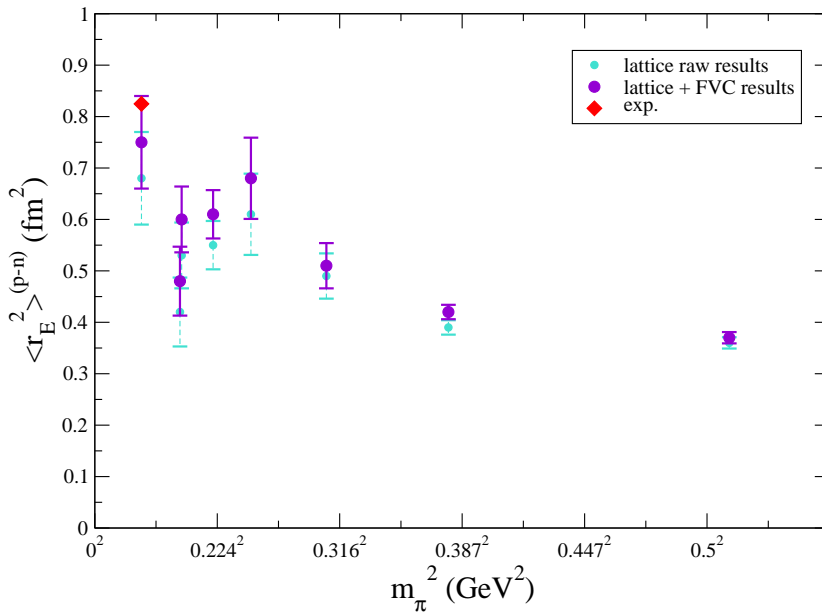


FIGURE 8 – Rayon carré de charge électrique en fonction de la masse du pion. Les points turquoise avec les barres d'erreur en pointillés sont les valeurs brutes obtenues des fits dipolaires de  $G_E^{(p-n)}(Q^2)$ . Les points violets montrent les résultats après correction des effets de volume. Le losange rouge indique la valeur expérimentale.

Nous pouvons observer sur cette figure la variation rapide du rayon carré lorsque la masse du pion approche sa valeur physique. Ce comportement est en accord avec la variation logarithmique prédite par la théorie de perturbation chirale. C'est un résultat très important de notre calcul, car cette brusque augmentation semble avoir lieu à petite masse de pion, et ne pouvait donc pas être détectée clairement sans donnée à la masse physique.

La charge axiale  $g_A$  est obtenue directement comme la valeur à transfert nul

du facteur de forme axial  $G_A$ , après renormalisation. Elle est tracée sur la figure 9 en fonction de la masse du pion.

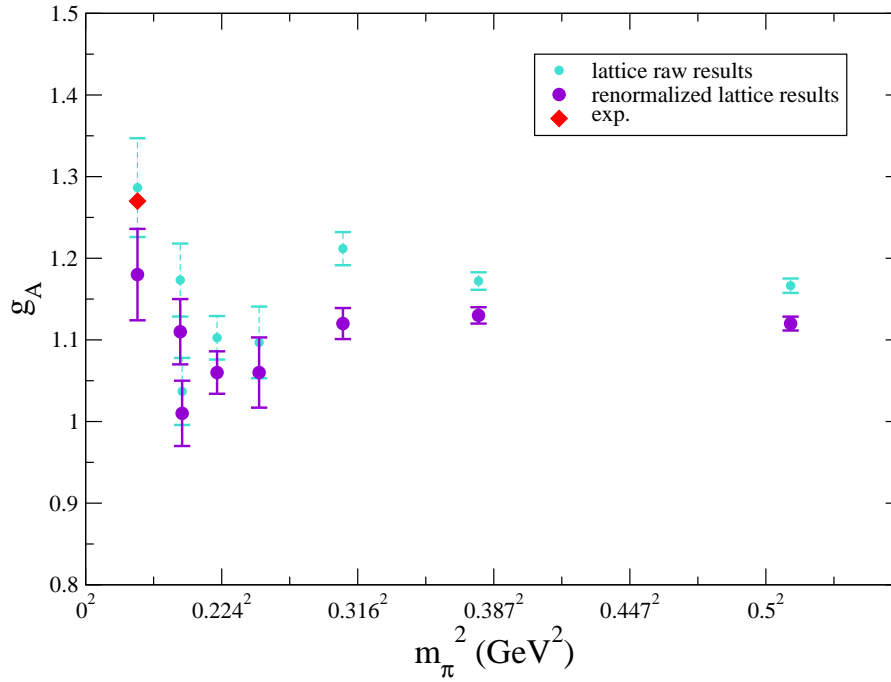


FIGURE 9 – Charge axiale en fonction de la masse du pion. Les points turquoise avec les barres d’erreur en pointillés sont les valeurs brutes. Les points violets montrent les résultats après renormalisation.

Nos résultats sont en bon accord avec l’expérience, et semblent indiquer que la contamination par des états excités est sous contrôle.