L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur.

Aline Robert

▶ **To cite this version:**

Aline Robert. L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. . Mathématiques [math]. Université Paris VII, 1982. Français. NNT : . tel-01250393

HAL Id: tel-01250393
https://theses.hal.science/tel-01250393

Submitted on 4 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS VII

THESE de DOCTORAT D'ETAT

SPECIALITE: DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

PRESENTEE PAR: Madame Aline ROBERT

SUJET de la THESE L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur. Divers articles de Mathématiques.

soutenue le 25juin 1982 **devant la commission d'examen**

JURY:
M. A.REVUZ
M. C. HOUZEL
M. G.VERGNAUD
M. A.DOUADY
M. D. LACOMBE
M. P.MARONI
M. G. GLAESER

UNIVERSITE PARIS VII

THESE de DOCTORAT D'ETAT

SPECIALITE: DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

PRESENTEE PAR: Madame Aline ROBERT

SUJET de la THESE L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur. Divers articles de Mathématiques.

soutenue le 25juin 1982 **devant la commission d'examen**

JURY:
M. A.REVUZ
M. C. HOUZEL
M. G.VERGNAUD
M. A.DOUADY
M. D. LACOMBE
M. P.MARONI
M. G. GLAESER

INTRODUCTION GENERALE

Ce travail comprend deux parties totalement disjointes.

Dans la première partie, nous avons rassemblé les articles de mathématiques que nous avons écrits de 1975 à 1980.
Ces articles sont très divers; cependant, on y utilise des techniques essentiellement issues de l'analyse, et ils ont pour origine des problèmes extra-mathématiques. Ainsi, le premier groupe d'articles (Γ et $d\Gamma$, le produit tensoriel) est-il issu de réflexions sur la théorie de champs et le second (autour de l'équation de Heun) de besoins de chimistes ayant rencontré des équations encore inconnues d'eux. Dans le dernier article, nous avons essayé de faire le lien entre ces équations biconfluentes de Heun et les groupes de Lie.

Dans la deuxième partie, nous avons rédigé un travail d'un seul tenant de didactique des mathématiques dont l'objectif est d'apporter des informations nouvelles sur l'acquisition de la notion de convergence des suites par les étudiants du supérieur suite à l'enseignement de la notion. Si nous avons déjà effectivement mis à jour le déroulement de l'acquisition et l'importance des représentations mentales de la convergence, nous pouvons aussi proposer des hypothèses précises permettant des investigations ultérieures sur le rapport effectif entre l'enseignement et l'acquisition qui s'ensuit.

L'ACQUISITION DE LA NOTION DE CONVERGENCE DES SUITES NUMERIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR.

TABLE DES MATIERES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1. Sur la convergence des suites numériques et sur l'enseignement supérieur long scientifique.	9
1.1. Où il est question de la convergence des suites numériques	10
1.1.1. L'enseignement de la convergence des suites numériques	10
1.1.2. La convergence des suites en mathématiques: réflexion sur un "objet de connaissance"	18
1.1.3. La transposition didactique dans les cours	27
1.2. L'enseignement supérieur universitaire (long)	28
1.2.1. Description sociologique	30
1.2.2. La forme des enseignements dans les filières de l'Enseignement Supérieur	40
CHAPITRE 2. Problématique et Méthodologie de notre travail.	44
2.1. Cadre théorique	45
2.1.1. Axiomatique et problématique du travail	45
2.1.2. Autres problématiques possibles et prolongements	50
2.1.3. Retour sur les hypothèses constructivistes	53
2.1.4. Les approches socio-psychologiques	54
2.2. La Méthodologie - Le questionnaire	56
2.2.1. Méthodologie	57
2.2.2. La genèse du questionnaire	60
2.2.3. Description du questionnaire : les variantes	61
2.2.4. Description du questionnaire : les tâches	62
2.2.5. Description des conditions de passage du questionnaire	67
2.2.6. Description de la population ayant répondu au questionnaire	69
2.2.7. Le dépouillement du questionnaire Méthodes statistiques utilisées	76
2.2.8. Critiques de la méthodologie	78

Page

CHAPITRE 3. Les modèles exprimés. Les exemples. 80

Première partie : Les modèles

3.1. Méthodologie 82
3.1.1. La genèse. Les variantes. 82
3.1.2. L'objet d'étude 84
3.1.3. Les autres commentaires 92
3.1.4. Les représentations graphiques 93

3.2. Les modèles exprimés 101
3.2.1. Les modèles primitifs (stationnaire, barrière, monotone) 101
3.2.2. Les modèles dynamiques (dynamique, dynamique monotone, "tend vers") 105
3.2.3. Les modèles statiques (statique, préstatique) 112
3.2.4. Le modèle mixte 115
3.2.5. Les copies sans modèle exprimé (tautologie, définition, pas de modèle exprimé) 120

3.3. Retour sur le mode de questionnement et la lecture des réponses 123
3.3.1. Stabilité des réponses dans les variantes 123
3.3.2. Les commentaires sur la limite 127
3.3.3. Les réponses sur la divergence 130
3.3.4. Les modèles dessinés et le genre du dessin, par modèles exprimés 135
3.3.5. Les erreurs dans les questions 1 et 2 140

3.4. Répartition. Evolution des modèles exprimés 141
3.4.1. Répartition des modèles exprimés par les 1 057 étudiants ayant répondu au texte V_1 dans les conditions standard (par niveaux et par classes) 141
3.4.2. Stabilité de la répartition: comparaison des 662 copies normales et des 1 057 copies M_1 146
3.4.3. En guise de bilan : conjectures sur l'origine des modèles 153

Deuxième partie : les exemples 157

Page

Présentation des chapitres 4, 5, 6. 166

CHAPITRE 4. L'exercice 5. 169

4.0. Présentation de l'étude 169

4.1. Les procédures à l'exercice 5 170

4.1.1. Les réponses sans démonstration 171

4.1.2. Les contre-exemples corrects 171

4.1.3. Les contre-exemples ambigüs 172

4.1.4. Les procédures erronées 174

4.1.5. Les variantes à l'exercice 5 176

4.1.6. Retour sur les dessins dans l'exercice 5 185

4.2. Reflexions sur les résultats cliniques 185

4.3. Répartition des procédures à l'exercice 5 188

4.3.0. Etude de l'abord de la question 188

4.3.1. La répartition des procédures par modèle exprimé 188

4.3.2. La répartition des procédures par modèle dessiné 196

4.3.3. La nature des exemples et les procédures 198

4.3.4. La répartition des procédures par niveau 200

4.3.5. Analyse factorielle (procédures x modèles exprimés, modèles dessinés et exemples) 205

CHAPITRE 5. L'exercice 7 et l'exercice 9c. 212

Première partie : l'exercice 7 212

5.0. Présentation de l'étude 213

5.1. Les procédures à l'exercice 7 214

5.1.1. Les procédures les plus utilisées: procédures en "ε,N" 216

5.1.2. Les procédures algébriques erronées (scalaire et produit) 224

5.1.3. Les procédures correctes ou erronées peu utilisées 226

5.1.4. Les procédures obtenues dans les variantes : stabilité et différences 231

Page

5.2. Les erreurs 234

5.3. Répartition des procédures à l'exercice 7 238
5.3.1. Répartition des procédures par modèle exprimé 238
5.3.2. Répartition des procédures par niveaux 244
5.3.3. Evaluation et performances 248

5.4. Comparaison des exercices 5 et 7 250

5.5. Les analyses factorielles (exercice 7 x modèles; exercice 5 et 7 x modèles) 254

5.6. Conclusions et interprétations 256

Deuxième partie : l'exercice 9c 258
5.7.0. Présentation de l'étude 260
5.7.1. Les procédures à l'exercice 9c 262
5.7.2. Les variantes à l'exercice 9c 269
5.7.3. L'erreur $(u_n < 1) \Rightarrow (u_n^n \rightarrow 0)$ 271

5.8. Répartition des procédures par niveaux et par modèles 273

CHAPITRE 6. Les exercices 6, 8, 10. 278

Première partie : L'exercice 6 280
6.0. Présentation des copies où l'exercice 6 est abordé 282

6.1. Les procédures utilisées 284
6.1.1. Les procédures à l'exercice 6 (texte V_1) 284
6.1.2. Les procédures à l'exercice 6 dans les variantes 288
6.1.3. Les erreurs dans l'exercice 6 290

6.2. Répartition des procédures à l'exercice 6 291
6.2.1. Répartition des procédures par niveaux 291
6.2.2. Répartition des procédures par modèles exprimés 295

6.3. Comparaison des exercices 6 et 7 298

Page

Deuxième partie : l'exercice 8 302

6.4.0. Présentation des copies où l'exercice 8 est abordé 302
6.4.1. Les procédures à l'exercice 8 304
6.4.2. Les variantes à l'exercice 8 307

6.5. Répartition des procédures à l'exercice 8 312
6.5.1. Répartition des procédures par niveaux 312
6.5.2. Répartition des procédures par modèles exprimés 316

6.6. Comparaison des exercices 8 et 7 319

Troisième partie : l'exercice 10 323

6.7.0. Présentation des copies où l'exercice 10 est abordé 323
6.7.1. Les procédures à l'exercice 10 325
6.7.2. Les variantes à l'exercice 10 327

6.8. Répartition des procédures à l'exercice 10 329
6.8.1. Répartition des procédures par niveaux 329
6.8.2. Répartitions des procédures par modèles exprimés 332

6.9. Comparaison des exercices 10 et 8 335

Présentation des chapitres 7 et 8 340

CHAPITRE 7. Etude globale des procédures en relation avec les tâches, les modèles exprimés et les niveaux. 341

7.1. Etude globale des procédures et de leur relation avec la tâche par modèles exprimés et par niveaux 341
7.1.1. Etude sur les tris croisés précédents 342
7.1.2. La cohérence des copies 376
7.1.3. Analyses factorielles et classement hiérarchique 391

7.2. Pertinence des choix méthodologiques, données sociologiques, retour sur les variantes 401
7.2.1. Pertinence du choix des variables principales 401
7.2.2. Les données sociologiques 404
7.2.3. Les variantes 406

Page

7.3. Conclusions 409
7.3.1. Le déroulement de l'acquisition 409
7.3.2. Relations modèles/procédures : les types de comportement 412

CHAPITRE 8. Les erreurs. 416

8.1. Classification des erreurs dans les procédures et les modèles exprimés 417
8.1.1. Les étudiants qui sèchent 417
8.1.2. Les procédures erronées et les erreurs dans les modèles exprimés 419

8.2. Disparition des types d'erreurs par niveaux 426

8.3. Où l'on rêve à la correction des erreurs 430

8.4. Retour sur le schéma initial d'acquisition des connaissances 433

CONCLUSION 435

Bibliographie 441

Table des tableaux 443

Table des matières 447

Liste des Annexes 452

Annexes

INTRODUCTION.

Comme beaucoup de collègues exerçant depuis 1968, nous avons été très sensibles à une certaine dévalorisation (idéologique ? réelle ?) de l'enseignement supérieur universitaire ; ce malaise a accentué notre questionnement individuel sur les pratiques de l'enseignement. Est-ce à cause de notre enseignement que les connaissances que nous enseignons ne sont pas souvent complètement appropriées ? Cette insatisfaction quant aux résultats de notre enseignement est d'ailleurs renforcée par les préjugés sur l'Université en vogue dans le grand public et non suffisamment démentis, comme le montre l'étude récente de Baudelot et al. (1). En effet, l'analyse serrée des faits (c'est-à-dire ici des chiffres) montre qu'en réalité "la crise de l'enseignement supérieur relève surtout de l'imaginaire social. L'accroissement des effectifs n'a pas engendré de bouleversements des structures... Parallèle à l'extension du nombre des cadres, la multiplication des diplômes n'a entraîné ni prolétarisation, ni chômage : aucune dévaluation" (2). Cependant les auteurs soulignent la différenciation croissante entre les filières, opposant celles qui conduisent à la direction des entreprises et au secteur privé (grandes écoles, médecine) et qui se sont progressivement valorisées à celles qui mènent à la fonction publique. Or ce sont essentiellement les universités de lettres et de sciences qui ont fait les frais de cette hiérarchisation croissante, dans la mesure où c'est là que l'orientation vers le secteur public allant de pair avec la féminisation et la démocratisation relative ont été les plus fortes. Voilà de quoi fonder le malaise actuel, même si les causes n'en sont pas toujours clairement perçues - seul le public auquel nous enseignons a éventuellement changé (en tout cas en ce qui concerne les deux premières années d'université) - pas notre enseignement. Peut-on donc mettre en cause cet enseignement et apporter des amélio-

---

(1) Les étudiants, l'emploi, la crise Baudelot Benoliel Cukrowicz Establet PCM [1]

(2) Ibid. p. 201

rations de l'intérieur à un système qui, s'il n'a pas toujours,de notre point de vue, un bon "rendement" , n'est pas vraiment en défaut par rapport aux objectifs sociaux qu'il est censé remplir ? Il est, en tout état de cause,au moins un domaine où notre inquiétude a certainement lieu de se manifester - c'est celui de la formation des maîtres (1) où notre responsabilité est importante. Par ailleurs, ce questionnement sur notre activité s'accompagne d'une curiosité plus intellectuelle qui nous a toujours habitée - comment, pourquoi apprend-on ? Avec, en toile de fond, les interrogations angoissantes sur l'origine des mécanismes qu'induisent les relations entre échecs scolaires et origines socio-culturelles... S'il y a loin entre ce dernier problème et des recherches sur l'enseignement supérieur où la sélection est déjà presque faite (2), il n'est pas cependant à exclure qu'un progrès sur la compréhension des phénomènes d'acquisition des connaissances, même dans un enseignement aussi spécialisé, ne puisse s'intégrer dans un ensemble de résultats valables plus généralement. Et réciproquement, les concepts élaborés par les didacticiens travaillant sur l'enseignement obligatoire nous ont souvent permis une meilleure approche théorique de nos objectifs. Ainsi la nécessité de s'intéresser dans notre travail à certaines notions enseignées au début de l'analyse sur $\mathbb{R}$ peut permettre de clarifier mieux qu'ailleurs certaines difficultés rencontrées par les élèves. En effet ces notions sont enseignées "complètement" pour la première fois en première année d'université, avant(en seconde, première et surtout terminale) il en est fait une présentation partielle, sans beaucoup de démonstrations ni d'occasions de manipulations. Inversement la différence entre la forme "objet de connaissance" et la forme "objet d'enseignement" d'une même notion, dont l'importance a été démontrée dans des travaux sur l'enseignement obligatoire nous a permis de mieux cerner notre objet d'étude.

---

(1) Instituteurs et PEGC non compris.

(2) Etude citée P. 58.

D'autres exemples apparaîtront au cours de ce travail. Cela étant, si les recherches en didactique des mathématiques ont progressé depuis 10 ans de manière exponentielle, bien des interrogations demeurent ; on peut même affirmer que l'enseignement des mathématiques est un domaine où règne encore largement une pratique empirique ce qui n'est pas nécessairement négatif, mais où la proportion d'échecs est très importante, ce qui est plus préoccupant. Certes il y a eu aussi de grands éducateurs, mais il y a souvent loin entre leurs théories générales et la création quotidienne que constitue chaque cours élaboré avec l'objectif d'enseigner telle notion précise à telle classe. Il en résulte un investissement personnel journalier, empirique, intuitif des enseignants et cela rend les discussions sur ces sujets très délicates, voire passionnelles. Certains collègues de l'enseignement supérieur estiment même que des travaux portant sur le dit enseignement sont sinon nuisibles, du moins inutiles. Ils pensent en effet qu'il ne faut pas rationaliser les phénomènes d'ordre psychologique qui ont lieu entre le maître et les élèves et allèguent que, pour ce qu'il est possible de décrire scientifiquement, tout a déjà été dit. Cela souligne entre autres qu'ils n'envisagent pas que la diversité des contenus de ce qui est enseigné et du recrutement de ceux à qui on enseigne, puisse engendrer des différences susceptibles d'une analyse scientifique. Or si nous apprécions, comme eux, l'apport général des grands éducateurs, nous nous sommes demandés, comme les autres chercheurs en didactique des mathématiques, si des investigations au niveau du contenu même de ce qui est enseigné ne pourraient pas enrichir nos connaissances, en particulier dans le domaine de l'enseignement supérieur en mathématiques et apporter aux enseignants des éléments d'information supplémentaires qui leur manquent encore. C'est ainsi que dans le travail que nous présentons ici, qui est le début de recherches encore à développer, nous étudions l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur . Notre objectif est le suivant : nous décrivons le déroulement de cette acquisition, en associant production régulière de procédures erronées et difficultés spécifiques,

tout en mettant en évidence les images mentales que les étudiants ont de la convergence des suite et le rôle qu'elles jouent dans la production de ces procédures mises en œuvre pour résoudre des exercices portant sur la convergence des suites numériques. Pour autant, nous ne sommes pas encore en mesure d'établir des relations entre l'enseignement de la notion et son acquisition ; nous ne ferons que proposer certaines hypothèses de recherches à ce sujet. Cela souligne la nécessité de recherches spécifiques sur l'enseignement supérieur en mathématiques que les collègues enseignant-chercheurs en mathématiques "pures" ne peuvent entreprendre - sans s'y investir complètement. En effet le travail présenté ici n'a pas encore permis de donner les éléments d'information que réclament les enseignants ; ces éléments seront dégagés après d'autres recherches qui peuvent être encore très longues ; or, nous n'avons envisagé qu'une petite notion, qui occupe une à deux semaines de cours de première année, qui est un cas particulier du concept de limite de fonctions qui n'est lui-même qu'une composante du champ conceptuel caractéristique du début de l'analyse sur R - comportant au moins R, les fonctions, leurs limites.
Et c'est sur ce champ conceptuel qu'il serait le plus significatif de travailler tant tous ses éléments sont liés sur le plan de la connaissance !... Cependant si donc des recherches spécifiques nous semblent indispensables, nous ne saurions négliger l'expérience irremplaçable accumulée "sur le tas" par nos collègues. Il y a là une information "brute" sur laquelle nous pouvons travailler et c'est ce que nous avons fait au début de ce travail en interrogeant quelques collègues[1] sur les erreurs commises par leurs étudiants. Cela explique d'ailleurs, entre autres, le choix de la notion de convergence de suites numériques - parmi toutes les autres - comme premier objet d'étude. En effet les collègues concernés avec qui nous discutions étaient frappés, au moment de l'année où nous en étions, de la persistance des erreurs qu'ils relevaient dans des exercices sur les suites, malgré toutes les corrections orales ou écrites qu'ils avaient pu fournir à maintes reprises à certains de leurs élèves. Par ailleurs, cette notion occupe une place importante dans l'enseignement de l'analyse : elle est partiellement enseignée en terminale C, D, E et

---

(1) Professeurs en Math. Sup ou en Math. Sup C (Mme et Mr. Azra, Bour, Milhas).

traditionnellement "reprise" en détail en première année de premier cycle universitaire et en classe préparatoire (Math. Sup) ; elle intervient très longtemps, éventuellement sous une forme plus générale et/ou par l'intermédiaire des séries. De plus si les suites numériques sont définies comme des fonctions u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, elles sont néanmoins traitées dans le cours de façon spécifique: la notation (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leur est propre, leur convergence, qui nécessite la mise en place implicite du filtre de Fréchet sur $\mathbb{N}$, est exposée spécifiquement (que la convergence des fonctions ait été traitée avant ou après). L'étude détaillée de l'organisation et de la présentation de cette notion fait précisément l'objet du premier paragraphe du chapitre I de ce travail et s'il apparaît peu de différences entre les cours, il n'en est pas de même pour les exercices. Nous y étudions, en outre, la notion de convergence de suites en tant qu'objet de connaissance mathématique et la différence entre les différentes présentations de cette notion (lorsqu'il s'agit de l'enseigner ou de l'exposer à la communauté mathématique) nous permet d'étudier la transposition didactique [1] qui apparaît là. Le second paragraphe du chapitre fait très rapidement le point sur l'enseignement supérieur universitaire (long) où il est enseigné majoritairement des mathématiques - tel qu'il se présente ces dernières années. Les deux premières années de cet enseignement sont réparties suivant deux filières différentes: les classes préparatoires d'une part, le cursus universitaire du DEUG d'autre part ; c'est par une rapide comparaison de l'enseignement dans ces deux filières que nous terminons le premier chapitre qui joue dans ce travail le rôle d'une introduction très détaillée. Dans la première partie du chapitre II, nous exposons notre problématique : pour cerner l'acquisition de la notion, nous repèrons à la fois les procédures des étudiants en train de résoudre des exercices sur les suites et leurs représentations mentales de la convergence des suites (ou du moins un aspect, exprimable, de celles-ci) ; nous étudions l'évolution de ces caractères et de leurs relations sur les quatre années du supérieur. Nous présentons en même temps le cadre théorique (issu des théories constructives de la connaissance) au sein duquel notre proble-

---

(1) Cf. Chevallard [1] .

matique prend son sens. Dans la deuxième partie du chapitre II, nous exposons notre méthodologie : nous avons effectué l'analyse de ces productions des étudiants sur des réponses écrites à un questionnaire mis au point préalablement à cet effet. Nous décrivons le questionnaire, les 1 389 étudiants qui ont rendu une copie, leur répartition en "niveaux" et les conditions de production de leurs réponses. De celles-ci, nous avons d'abord dégagé les différents modèles de la convergence des suites exprimés par les étudiants - c'est l'objet du chapitre III où nous expliquons successivement notre méthode pour déterminer ces modèles exprimés, les différentes catégories auxquelles nous nous sommes arrêtées, la répartition des modèles par niveaux, et où nous décrivons aussi les dessins des étudiants et leurs exemples. Puis nous étudions dans les chapitres IV, V et VI les réponses à chaque exercice du questionnaire en privilégiant, pour toutes les tâches, les procédures et leur relation avec la tâche, et en analysant leur répartition par niveau et par modèle. Ces analyses ainsi que différentes analyses factorielles (ou classements hiérarchiques) de nos données nous permettent de présenter dans les chapitres VII et VIII des conclusions globales, valables pour tous les exercices sur la relation entre les procédures et les niveaux (caractéristique du déroulement de l'acquisition de la notion), la relation entre les procédures et les modèles exprimés, la cohérence entre modèles exprimés et procédures dans chaque copie et la disparition des différents types d'erreurs : nous soulignons à chaque fois tout ce qui parait spécifique de la notion concernée. Cela nous amène à proposer des hypothèses qui sont à vérifier dans des recherches ultérieures dont les résultats pourraient déboucher sur une amélioration éventuelle de l'enseignement de cette notion. La conclusion résume tous les résultats acquis dans ce travail en insistant sur toutes les interrogations que ces résultats suscitent ; un bilan méthodologique nous permet de dégager les points positifs de ceux qui le sont moins dans notre méthode. Un certain nombre d'annexes sont jointes: le texte du questionnaire (et ses variantes), le mode d'emploi qui était donné, un texte de MC. Bour sur l'élaboration historique de la notion , notre recueil préliminaire d'erreurs, le texte d'une enquête auprès d'enseignants de classes préparatoires

et autres. Toutes ces annexes sont annoncées dans le texte au moment où on y fait référence.

Une bibliographie succinte termine ce travail.

Remerciements.

Je tiens d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Revuz, sans les encouragements duquel ce travail n'aurait même pas été commencé.
Je ne peux pas ne pas remercier ensuite les quelques 70 collègues qui ont fait passer mon questionnaire dans leur classe ou groupe de T.D., et cela n'était pas toujours facile. Je veux tout particulièrement citer les noms de Mesdames et Monsieur Azra, Bour et Milhas qui ont de plus travaillé un an avec moi sur les premières erreurs que nous avions relevées, au moment le plus ingrat du travail.

Je remercie aussi chaleureusement Janine Rogalski et Régine Douady, qui m'ont à la fois permis une intégration rapide au courant de pensée original que représente la didactique des mathématiques française, et qui m'ont aussi donné maints conseils très utiles, tant sur la forme que le contenu de ce travail.

Dans la mesure où une partie de ce travail a donné lieu à une recherche collective (recherche sur les manuels de Madame Boschet, recherche historique de Madame Bour, analyses statistiques de Madame Mac Aleese), je dois aussi remercier vivement ces trois collègues avec qui, malgré les aléas que toute collaboration scientifique implique, le travail a été extrêmement agréable et fructueux.

Enfin, que Madame Boillat qui a fort bien tapé ces pages, tout en supportant vaillamment mon angoisse des délais, en soit encore remerciée ici, ainsi que Monsieur Peyrabout qui a tiré ce travail.

CHAPITRE 1 - SUR LA CONVERGENCE DES SUITES NUMERIQUES ET SUR L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR LONG SCIENTIFIQUE.

Dans toute cette étude, il est question de convergence des suites numériques et d'enseignement supérieur. Aussi, dans ce premier chapitre, introductif, avons-nous réuni une présentation de la notion mathématique qui nous intéresse, et quelques informations sur le cadre institutionnel au sein duquel nous nous sommes placée .

Nous analyserons d'abord la notion de convergence des suites numériques -en tant qu'objet d'enseignement et en tant qu'objet de connaissance, ce qui nous permettra de dégager les différences entre les deux points de vue. Puis, nous rappellerons brièvement quelques caractéristiques de l'enseignement supérieur long, en comparant, pour terminer, les deux filières de premier cycle où sont le plus enseignées les mathématiques, à savoir, les classes préparatoires aux grandes écoles, et le premier cycle universitaire correspondant au DEUG SSM.

1.1. Où il est question de la convergence des suites numériques.

1.1.1. L'enseignement de la convergence des suites numériques (classes terminales C et D , premier cycle universitaire).

Dans ce paragraphe, nous allons donc dégager des informations sur le contenu de cet enseignement, essentiellement à partir de l'étude de Madame Boschet sur les manuels de premier cycle universitaire.

Nous ne nous sommes pas donné les moyens, par contre, d'analyser ici les rapports entre l'enseignement dispensé par le professeur, et ce qui en a résulté pour chaque élève. Nous n'avons donc pas étudié en détail la forme des divers enseignements sur les suites numériques, par des chroniques de cours par exemple .Toutefois, après l'analyse du contenu des cours et des exercices sur la convergence des suites numériques dans les manuels de première année d'université, puis dans les cours (plus sommairement), puis en terminale, nous présenterons une comparaison du déroulement d'un cours (avec les exercices) en Math. Sup. et en DEUG 1; et dans la dernière partie du paragraphe, nous résumerons les conclusions de l'étude de Madame Boschet sur l'analyse linguistique des différents discours à la disposition des étudiants sur la convergence des suites -manuels, cours écrits, polycopiés, énoncés d'exercices, et dans un cas, cours oral. Précisons tout de suite qu'il y a pratiquement identité entre "cours sur les suites numériques" et "cours sur la convergence des suites numériques" -l'objet d'un tel cours étant effectivement toujours l'étude de la convergence de ces suites.

a) Contenu des cours et des exercices dans les manuels actuels de premier cycle universitaire.

L'étude de Madame F. Boschet[1] montre d'abord que si le contenu des paragraphes consacrés aux suites numériques varie très peu -dans les manuels les plus récents(1)

---

(1) Elle a étudié les manuels de premier cycle des auteurs suivants: Pisot-Zamansky, Cagnac-Ramis, Dieudonné, Chambadal-Ovaert, Dixmier, Couty-Ezra, Exbrayat-Mazet, Lelong-Ferrand-Arnaudiès, Calvo-Boschet-Doyen, Donnedu, Ramis-Odoul-Deschamps.

la présentation, au contraire, en est très diversifiée, depuis les manuels où il existe un chapitre sur les suites à ceux où les divers paragraphes sur les suites sont disséminés dans deux, voire trois chapitres. On peut énumérer ce qui est enseigné sur les suites numériques en le reclassant par paquets: le paquet des définitions (suite, convergence et limite, éventuellement divergence, éventuellement unicité de la limite, propriété pour toute suite convergente d'être bornée, suites de Cauchy, suites extraites, éventuellement valeurs d'adhérences), le théorème de Cauchy (qui peut être repris s'il figure un chapitre sur les espaces métriques complets), le paquet des propriétés algébriques des suites convergentes (qui figure aussi dans le paragraphe sur les limites de fonctions), le paquet des propriétés liées à l'ordre sur $\mathbb{R}$ (définition des suites tendant vers $\mp\infty$, exploitation de $u_n \leqslant v_n$ si (u_n) et (v_n) convergent -propriétés généralisables à un corps commutatif totalement ordonné- et, ce qui est spécifique de $\mathbb{R}$, théorème des suites monotones bornées, suites "adjacentes", Bolzano-Weierstrass sur $\mathbb{R}$ -qui peut être repris dans un chapitre sur les espaces métriques compacts), le paquet des exemples (avec ou non les suites récurrentes). Quelques propositions supplémentaires peuvent figurer dans certains manuels - dans le texte ou sous forme de thèmes d'études. Il n'y a généralement aucun dessin dans ces paragraphes. La proposition qui exprime que si f est une fonction continue et si la suite (u_n) tend vers 1, alors la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(1)$ figure dans les paragraphes sur les suites ou dans ceux consacrés aux fonctions continues suivant l'ordre d'exposition du cours. Il apparaît ainsi déjà plusieurs classements possibles d'un tel contenu -il faut remarquer cependant que ces questions de choix dans la présentation, le cas échéant, ou de degré de généralisation éventuelle ne sont que très rarement évoqués-. On pourrait justement s'intéresser dans la présentation du cours au degré de généralisation potentielle des notions introduites en signalant tout particulièrement les propriétés spécifiques à $\mathbb{R}$. On peut aussi (et ce n'est pas contradictoire) suivre une présentation du début de l'analyse, en faisant intervenir les suites dans la construction de $\mathbb{R}$ et en éparpillant au fur et à mesure des "besoins" les paragraphes sur les suites, quitte à se répéter.

Le dernier choix évoqué pose précisément le

.../...

problème du "rôle" de cette notion de convergence des suites numériques dans l'analyse. On peut estimer que cette intervention a lieu à deux niveaux au moins [1]: d'une part sous la forme particulière des séries numériques qui fonctionnent comme instrument d'approximation, dans des calculs numériques ou des estimations, d'autre part, sous une forme éventuellement plus générale (suites d'éléments d'un espace métrique, d'un espace vectoriel normé et autres espaces topologiques munis du premier axiome de dénombrabilité) comme outil servant à établir et/ou à énoncer des théorèmes d'analyse puissants (théorème du point fixe, théorème de Bolzano-Weierstrass, etc ...). Lorsque les suites interviennent en tant que séries numériques, ce sont surtout les propriétés liées à $\mathbb{R}$ qui sont mobilisées, ainsi que les propriétés algébriques, plus que les définitions générales, avec en plus, l'introduction de la notion de "vitesse de convergence" totalement ignorée dans les cours sur les suites numériques. Au contraire, lorsqu'on établit des théorèmes structurels d'analyse, ce sont les définitions (éventuellement exprimées sous une forme plus générale) et le théorème de Cauchy qui fonctionnent le plus. Or, en général, on constate que la présentation des cours n'a pas de rapport explicite avec le fonctionnement de la notion -sauf dans le livre cité dans la note (1).

On retrouve évidemment cette différence entre nos "paquets" au niveau de ce qui est mobilisé dans les exercices portant sur les suites numériques. Madame Boschet a établi pour cette analyse une grille [2] des tâches proposées aux étudiants dans les exercices [3]. L'étude détaillée qui en résulte a permis de confirmer que les connaissances exposées dans le corps des manuels ne fonctionnent pas toutes et que, dans celles qui sont mobilisées, ce sont toujours les mêmes et dans des mesures -variables selon la connaissance- mais presque fixes selon les manuels. Ainsi les propriétés liées à $\mathbb{R}$ (encadrement, calculs dans R, théorèmes sur les suites monotones) sont-elles majoritairement mobilisées alors que les définitions le sont

(1) Le livre de Messieurs Ovaert et Verley [1] éclaire en détail et parfaitement bien cette question.

(2) Cf. Annexe ⑧ .

(3) Elle a étudié les exercices des manuels suivants: Lelong-Ferrand-Arnaudiès (Cours et exercices corrigés), Ramis-Odoul-Deschamps, Ramis (Exercices corrigés) Calvo-Doyen-Boschet (Cours et exercices corrigés).

nettement moins, ainsi que la divergence. Les théorèmes de Cauchy et de Bolzano-Weierstrass, par contre, ne sont pratiquement jamais mobilisés dans les exercices sur les suites. On peut aussi remarquer que la forme des exercices n'est pas très variée. Il y a peu d'exercices réellement ouverts (c'est-à-dire dont on ne donne aucune idée, ni de la solution, ni de la marche à suivre); en fait, lorsqu'un exercice s'intitule "étudier la suite ...", comme tous les exercices de ce type sont identiques (suites récurrentes essentiellement), le contrat implicite qui s'est établi lève le questionnement qui aurait pu résulter d'un énoncé si vague en apparence. Madame Boschet a même pu dégager quelques types d'exercices largement majoritaires sur l'ensemble des manuels:
étudier une suite récurrente, étudier une suite explicite à partir d'une suite convergente, montrer qu'une autre suite (construite à partir de la première) converge et enfin, à partir d'une suite caractérisée par une propriété de majoration de ses termes, montrer qu'elle (ou une autre suite qui s'en déduit) converge. On comprend dans ces conditions que les deux premiers types d'exercices mobilisent principalement les propriétés des suites réelles (y compris les propriétés algébriques), alors que les deux derniers font appel à toutes les sortes de tâches (y compris la définition en (ε,N)).

b) Les vieux manuels de premier cycle, les cours et manuels de Terminale C, les cours de classes préparatoires et de premier cycle universitaire.

Notre étude est plus sommaire en ce qui concerne ces divers cours.

i) Pour ce qui est des "vieux" manuels, quelques sondages effectués par Madame Boschet [1] permettent de repérer des évolutions essentiellement au niveau du langage et des abus de langage dont nous allons reparler.

ii) En Terminale C, de brefs entretiens avec quelques collègues enseignant dans ces classes et l'étude des manuels et annales du bac correspondant ont permis à Madame Boschet de montrer que le contenu des cours est encore peu différent d'une classe à l'autre. Il s'agit, en faisant le parallèle avec le cours sur les fonctions pour introduire la notion de limite, de faire ensuite étudier

---

(1) Elle a regardé les manuels de Pisot-Zamansky (1959), et Cagnac-Ramis (1961), et des cours de Math. Sup. et Math. Spé. des années 60.

et surtout fonctionner les suites géométriques et les suites arithmétiques. Pour cela, on donne en général la définition en (ε,N) qui est peu ou pas utilisée; mais on ne donne ni les propriétés algébriques, ni les propriétés liées à $\mathbb{R}$, ni, à plus forte raison, les définitions des suites extraites ou des suites de Cauchy. Dans de nombreux cours, on ne parle pas de l'unicité de la limite. Dans d'autres, on définit les suites "finies" comme application d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, sans toujours préciser que la convergence n'a de sens que si l'ensemble de départ est un sous ensemble infini de $\mathbb{N}$!

iii) Quant aux cours effectivement reçus par les étudiants, nous n'avons à notre disposition que des notes des enseignants (1) sauf dans un cas où nous avons effectivement enregistré le cours oral (en première année de premier cycle à l'université). Il apparaît de nouveau que les contenus de ces cours varient peu par rapport à ceux des manuels, que ce soit en Sup., en Sup. C ou en première année de premier cycle (SSM). Par contre, la quantité d'exercices proposée aux étudiants de Sup. et à ceux de DEUG 1 n'est pas la même, au moment du cours et dans sa répartition dans l'année. Aussi avons-nous comparé, à titre indicatif, les exercices et problèmes proposés sur les suites numériques dans une classe de Sup. et la même année dans un groupe de TD de DEUG 1 et c'est l'objet du paragraphe suivant.

c) Comparaison des cours de DEUG et de Math. Sup. sur les suites numériques.

Cette comparaison s'est avérée très difficile à faire sans déployer de grands moyens -c'est-à-dire sans aller observer soi-même le déroulement effectif des cours et exercices. Nous nous sommes contentés de comparer les documents écrits que nous ont remis divers collègues de Sup., Sup. C et DEUG (plans de cours ou polycopiés, feuilles d'exercices, textes de problèmes, éventuellement notes d'étudiants (2)). Ces documents ne révèlent qu'une partie de la réalité

---

(1) 2 cours de Sup., 1 cours de Sup. C, 1 cours enregistré (DEUG 1 Paris VII), 1 polycopié de cours (DEUG 1 Paris VI).

(2) Que soient ici remercié pour cela M^{rs} et M^{mes} Azra, Bour, F. Decomps, Douady, Jarraud, Merle, Milhas, Piquard, Verley.

dans la mesure où aucun collègue ne lit son cours et dans la mesure où nous ne savons pas si tous les exercices proposés dans les feuilles d'exercices (par exemple) sont effectivement cherchés et/ou corrigés -pas plus que nous n'avons d'idée du temps passé sur chaque tâche. En fait, la seule comparaison valable serait celle d'enregistrements de cours effectifs -nous ne l'avons pas fait car nos objectifs ne le nécessitaient pas, dans un premier temps.

Cependant, nous pouvons dégager des caractères généraux des documents que nous avons réunis. Ainsi, les cours et TD de DEUG sont plus variés que les cours de Sup -tel enseignant insiste beaucoup sur l'heuristique, tel autre sur les exemples physiques et les propriétés asymptotiques correspondant aux limites de suites (aspect approximation), un troisième développe des exemples géométriques originaux, un quatrième insiste beaucoup dans ses TD sur les suites géométriques et les suites qui s'étudient par comparaison avec elles. Cela éventuellement aux dépens de certaines propriétés usuelles souvent survolées. Les cours et exercices de Sup. au contraire se ressemblent plus, et ressemblent plus aux manuels; en particulier tout y est dit et les propriétés topologiques sont développées entièrement -même si on ne les fait pas fonctionner dans les exercices sur les suites. Quant aux exercices[1] justement, on peut constater qu'un certain nombre d'entre eux sont proposés dans tous les cours ou presque (convergence au sens de Cesaro, suites récurrentes -plus ou moins systématiquement- suites $\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, problèmes issus de problèmes simples sur les séries, etc...); toutefois, suivant les filières, il y a plus ou moins de suites explicites, de paramètres, de suites quelconques et de manipulations de la définition en (ε,N) sur des exemples plus ou moins simples. Les exercices proposés aux étudiants de Math. Sup. semblent nécessiter souvent plus de calculs; les problèmes qui leur sont imposés semblent plus difficiles que ceux de DEUG, plus longs, avec plus de calculs et allant souvent plus loin et nécessitant donc une rapidité certaine. En première analyse, on peut estimer que si les contenus des cours sont assez peu différents non compte-tenu de l'originalité éventuelle des uns et du caractère systématiquement complet des autres, les différences entre les enseignements des deux filières portent

---

(1) Le détail de cette étude figure dans le travail de F. Boschet.

* d'une part, sur la quantité, sinon des exercices, du moins des problèmes à faire à la maison ou en classe (et qui sont obligatoirement à rendre en Math. Sup.) -cette quantité s'accompagnant nécessairement d'une certaine diversité et vraisemblablement d'une plus grande rapidité dans le déroulement du cours et des exercices;

* d'autre part, sur la répartition dans le temps de toutes ces activités.

En effet, les 15 à 20 heures[1] de cours et exercices sur les suites sont réparties sur une semaine à une semaine et demie en Math. Sup. contre trois à quatre semaines -voire cinq- en DEUG 1 (une à deux semaines de cours, trois ou quatre semaines de TD débutant une semaine après le cours) et cette dernière différence nous semble importante. Elle tient à une organisation globale des enseignements très différente -en particulier si le nombre d'heures de présence à la faculté est inférieur à celui de Math.Sup (21h.en DEUG 1 contre 29 heures en Sup.), cette présence à l'Université se caractérise par une dispersion des enseignements responsable de cet étalement des activités sur un même thème. Quant au décalage d'une semaine entre cours et début des TD, il est dû à ce que ce ne sont pas les mêmes enseignants qui "font" cours et TD, et à la nécessité d'une information des uns par les autres qui entraîne ce retard. Des recherches plus précises (avec observations dans les groupes de TD) devraient permettre de juger des défauts ou des qualités éventuels d'un tel système en ce qui concerne l'acquisition des connaissances d'étudiants de "niveau" moyen.

d) Vocabulaire et notations.

La notation des suites est un peu particulière dans la mesure où on remplace la notation

---

(1) Ceci est une moyenne: En Sup. C, il y a plutôt 9 heures de cours et exercices occupant une semaine (les suites de Cauchy ne sont pas au programme). Dans une section de DEUG, on nous a annoncé 13 heures de cours et TD sur les suites, dans une autre, 19 heures, et 23 heures dans deux autres, dont 20 heures de TD.

usuelle d'une fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où, d'une part seules les images de l'application sous-jacente u sont représentées et où d'autre part, ces images sont indexées au lieu d'être écrites u(n) .

Cette notation amène des abus de langage -ainsi, trouve-t-on même dans les manuels "la suite (u_n)" sans qu'il ait été précisé au préalable que l'omission du "$n \in \mathbb{N}$" est un abus de langage dans la mesure où la variable n n'est plus "mutifiée". D'autre part, cette notation ne préserve pas toujours suffisament de la confusion entre $\{u_n\}$ (ensemble des valeurs prises par u) et (u_n) (application u). Cela étant, cette notation semble remonter à une époque plus ancienne et il n'est pas exclu qu'on puisse y voir un rapport avec les représentations des suites qui avaient alors cours (avec en particulier précisément la confusion entre l'ensemble des images et l'application). En tout cas, l'étude de Françoise Boschet sur quelques manuels anciens confirme ce type d'hypothèses. Pour ce qui est du vocabulaire et des notations sur la convergence des suites, F. Boschet a mis en évidence plusieurs "registres" de discours -et en conséquence de notations- à savoir le discours écrit des manuels dans les chapitres consacrés aux cours, le discours oral des enseignants en cours (magistral)[1], le discours utilisé dans les textes d'exercices (que ce soit dans les manuels complets ou dans les livres d'exercices corrigés). Dans les chapitres des manuels consacrés aux cours, ce sont les mots dérivés du verbe "converger vers" qui dominent; la notation fonctionnelle "$\lim_{n\to\infty}$" est la seule utilisée, au moins dans un contexte algébrique et avec une fréquence inférieure à celle des mots du langage courant. Dans le cours oral étudié, par contre, le mot "tend vers" accompagné éventuellement d'un geste dans l'espace ou d'une flêche sur le tableau est utilisé plus d'une fois sur deux -alors qu'aucune occurence de ce verbe ne figure dans le polycopié correspondant à ce cours, polycopié où le discours relève du premier registre décrit. Enfin, dans les textes d'exercices, ce sont les mots "limite" et la notation "$\lim_{n\to\infty}$" qui apparaissent le plus fréquemment.

On peut se demander en conséquence si ce triple registre engendre une richesse chez les étudiants ou, au contraire, est source d'ambigüités.

---

(1) Pour le discours oral, une seule observation a été menée et les résultats correspondants sont à confirmer.

1.1.2. La convergence des suites en mathématiques: réflexion sur un "objet de connaissance".

> Converger ... Math. : en parlant d'une grandeur variable, se rapprocher d'une grandeur fixe sans pouvoir l'atteindre.
>
> (Larousse du XX^{e}s. en 10 vol.)

L'étude de Madame BOUR [1] (1) nous permet d'avoir quelques idées sur l'histoire de l'élaboration de la notion jusqu'à la conception formalisée de la convergence des suites que les mathématiciens utilisent aujourd'hui. Pendant longtemps, en effet, les suites ne sont pas apparues comme telles mais à l'occasion de calculs sur des séries (formelles ou non), ou encore de calculs numériques. En fait, d'après l'étude citée, dont je donne de larges extraits intégralement, il se dégage schématiquement les étapes suivantes:

Au 16^{e} et au 17^{e} siècle, il y a utilisation des suites (comme outil intermédiaire) sans qu'aucune théorisation intervienne. Ainsi Newton dans son ouvrage intitulé Méthode des fluxions et des suites infinies (1664-1671) donne-t-il des méthodes de développement en séries entières et des méthodes d'approximation de solutions d'équation du 3^{e} degré sous forme de somme partielle de série, mais le concept de limite n'est pas encore formulé. Voici comment le problème est abordé à propos de la définition des "derniers rapports" :

> " Les derniers rapports dans lesquels se trouvent des quantités ne sont pas à proprement parler des rapports de dernières quantités, mais des limites dont les rapports de ces quantités, décroissant sans limite, se rapprochent et que, bien qu'elles s'en approchent de plus près que toute différence donnée, elles ne peuvent ni dépasser ni atteindre avant que ces quantités aient diminué indéfiniment". On voit que, pour Newton, qui étudie le mouvement des corps, le langage est celui de la cinématique.

---

(1) Nous avons eu connaissance après avoir écrit ce paragraphe de l'étude de B. Cornu [2] sur la notion de limite qui confirme largement ce que nous avons décrit.

Au XVIII^{e} siècle, l'utilisation des séries est de plus en plus répandue -y compris celle des séries divergentes-. Mais la convergence de ces suites (des sommes partielles) n'est toujours pas formalisée -et pour cause, on n'en a pas encore les moyens-.

Ainsi, d'Alembert, dans l'Encyclopédie méthodique (T. III,p.29-32, 1784) donne d'une série ou suite la définition suivante : "Se dit d'un ordre ou d'une progression de quantités qui croissent ou décroissent suivant quelque loi: lorsque la suite ou série va toujours en approchant de plus en plus de quelque quantité finie, et que, par conséquent, les termes de cette série ou les quantités dont elle est composée, vont toujours en diminuant, on l'appelle suite convergente, et si on la continue à l'infini, elle devient égale à cette quantité". Quant à une série divergente, c'est une série où "les termes vont toujours en augmentant".

Et encore le même auteur, sur la notion de limite, écrit :

" Une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut s'approcher de la première plus près que la quantité donnée, si petite qu'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui s'approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle s'approche, en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable".

et encore :

" A proprement parler, la limite ne coïncide jamais ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite, mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus et peut en différer aussi peu qu'on veut".

Par contre, dès le début du 19^{e} siècle, on voit apparaître simultanément les premières définitions des suites, et les premières définitions de la convergence des suites. Ainsi, pour Gauss, une suite est - (vers 1800) - "un ensemble ayant un nombre quelconque d'éléments, l'ensemble des valeurs d'une fonction d'une variable".

De même, après avoir défini les notions de limites supérieure et inférieure, il

définit la limite d'une suite comme valeur commune aux limites supérieure et inférieure lorsque celles-ci coïncident" (Inédit: Notion fondamentale sur la théorie des suites Werke T.X).

En 1817, Bolzano a la notion moderne de convergence des suites (définition fonctionnelle à l'ordre des voisinages) et il énonce la condition de convergence des suites connue sous le nom de critère de Cauchy.

Cauchy, lui-même, dans son Cours d'Analyse (1823) énonce la condition nécessaire et suffisante de convergence d'une suite de réels (critère de Cauchy) et donne la définition suivante de la convergence d'une série: "Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite convergente, et la limite en question s'appellera somme de la série. Au contraire, si, tandis que n croit indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixée, la série sera divergente et n'aura plus jamais de somme". Puis il démontre qu'une condition nécessaire de convergence de la série est que "le terme général u_n décroisse indéfiniment tandis que n augmente". Certes, pour Cauchy, cela signifie que le terme général u_n tend vers zéro, et il ne se limite pas à l'étude des suites monotones; mais l'utilisation du terme "décroit" nous semble devoir être souligné. De même, si avec Cauchy, la notion de limite est enfin claire et dénuée d'ambiguïté, le mot lui-même n'est pas totalement dégagé de sa signification dans le langage courant (barrière infranchissable) puisque Cauchy parle de "limite fixe" et ailleurs, dans l'énoncé d'une règle célèbre sur les séries "Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croit indéfiniment, l'expression $(u_n)^{1/n}$ et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit, la série est convergente pour $k < 1$, divergente pour $k > 1$".

Il faut attendre la fin du XIX^e siècle -tout particulièrement la construction de $\mathbb{R}$- pour en arriver à la définition de la convergence des suites "en ε, N" que nous utilisons couramment.

Ainsi, dans l'encyclopédie allemande des sciences mathématiques pures et appliquées du début du siècle (1) :

16. Critère pour l'existence d'une limite. Suites convergentes. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de nombres[172]

$$a_1, a_2, \cdots, a_\nu, \cdots,$$

admette une *limite* est que à chaque nombre positif ε, fixé aussi petit qu'on veut, on puisse faire correspondre un entier n, tel que, pour tout entier $\nu \geqq n$, et pour tout entier positif ϱ, la différence $a_{\nu+\varrho} - a_\nu$ soit plus petite que ε en valeur absolue. En d'autres termes (n° 6), la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de nombres admette une limite est que cette suite (la *variante*) soit *convergente*[180]).

Lorsqu'une suite infinie $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ est convergente et que sa limite est a on écrit[181])

$$\lim_{\nu=+\infty} a_\nu = a.$$

Et encore:

Les suites non croissantes et les suites non décroissantes sont parfois désignées sous le nom de *suites monotones*[186]). Les suites monotones comprennent les suites à termes égaux, les suites *monotones croissantes* (qui sont les suites non décroissantes à l'exclusion des suites à termes égaux) et les suites *monotones décroissantes* (qui sont les suites non croissantes à l'exclusion des suites à termes égaux). Les *fractions continues ascendantes* sont des suites monotones décroissantes.

Pour qu'une suite monotone $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ soit *convergente*, il suffit que chacun de ses termes a_ν soit plus petit, en valeur absolue, qu'un nombre fini et déterminé indépendant de ν:

Et plus loin :

Si l'on appelle *points d'accumulation* d'une suite: soit le nombre qui figurerait une infinité de fois dans cette suite, soit un point d'accumulation de l'ensemble formé par les termes distincts de cette suite, on démontre que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite ait une limite est que cette suite soit bornée et n'admette qu'un point d'accumulation.*

On retrouve un exposé moderne de notre notion.

Mais le développement des connaissances ne s'est pas arrêté là.

En effet, à partir des travaux de Riemann, et surtout de Cantor, on commence à introduire les espaces topologiques généraux (2) -alors la notion de convergence des suites numériques ne va plus représenter qu'un cas particulier de la notion plus générale de "valeurs limites d'une fonction suivant un filtre"; voici pour illustrer cette généralisation le paragraphe de Bourbaki consacré aux suites numériques : la notion qui nous intéresse apparaît dans le chapitre I de Topologie générale au § 7 n° 3 "Valeur limite et valeur d'adhérence d'une fonction" comme

---

(1) Paris Gauthier-Villars, Leip-zig Teubner (1902-1912).

(2) cf. Notice historique in Bourbaki Topologie générale , chapitre I.

premier exemple après la définition des valeurs limites et d'adhérence et une proposition donnant des critères pour que des points soient valeur limite ou valeur d'adhérence d'une fonction. En voici la reproduction :

> *Exemples.* — 1) Une suite de points $(x_n)_{n\in N}$ d'un espace topologique X est une application $n \longmapsto x_n$ de N dans X. On a souvent à considérer, en Analyse, la notion de valeur limite ou de valeur d'adhérence d'une telle application *suivant le filtre de Fréchet* (§ 6, n° 1) sur N ; si y est limite de $n \longmapsto x_n$ suivant le filtre de Fréchet, on dit que y est *limite de la suite* (x_n) *lorsque* n *croît indéfiniment* (ou que x_n *tend vers* y *lorsque* n *croît indéfiniment*) et l'on écrit $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. On appelle de même valeur *d'adhérence de la suite* (x_n) toute valeur d'adhérence de l'application $n \longmapsto x_n$ suivant le filtre de Fréchet.
>
> On peut encore dire que $y \in X$ est valeur limite (resp. valeur d'adhérence) d'une suite (x_n) de points de X s'il est point limite du *filtre élémentaire associé à* (x_n) (§ 6, n° 8) (resp. point adhérent à ce filtre).
>
> Pour que y soit limite d'une suite (x_n) dans X, il faut et il suffit que, pour *tout* voisinage V de y dans X, *tous les termes de la suite* (x_n) *à l'exception d'un nombre fini appartiennent à* V, autrement dit qu'il existe un entier n_0 tel que $x_n \in V$ pour $n \geqslant n_0$. De même pour que y soit valeur d'adhérence de la suite (x_n), il faut et il suffit que pour *tout* voisinage V de y et *tout* entier n_0, il existe un entier $n \geqslant n_0$ tel que $x_n \in V$.
>
> 2 Il importe de distinguer soigneusement la notion de *valeur d'adhérence d'une suite* de celle de *point adhérent à l'ensemble des points de la suite* ; toute valeur d'adhérence est un point adhérent à l'ensemble des points de la suite, mais la réciproque est inexacte.

La majorité des ouvrages que nous avons cité (que ce soit le cours de Cauchy ,les encyclopédies ou Bourbaki) ne sont pas des manuels scolaires au sens de livres respectant un certain programme. Ce ne sont pas non plus des ouvrages exposant les résultats de recherches encore inconnues de la communauté des mathématiciens. Ce sont des ouvrages de synthèse, destinés à des lecteurs déjà avertis en la matière. Peut-on alors considérer que les connaissances qui y sont exposées correspondent aux "objets de connaissance" que nous voulions décrire ?

Pour essayer d'avancer dans cette question, nous avons analysé dans quelques autres

ouvrages modernes ayant des statuts "comparables" l'existence éventuelle et, le cas échéant, le contenu des paragraphes consacrés aux suites numériques.
Nous avons choisi le traité de Bourbaki (déjà partiellement utilisé), l'encyclopédia Universalis, et deux ouvrages[1] fréquemment utilisés en licence (si ce n'est en Math. Spé.) par les étudiants. Là encore, pour les deux premiers volumes cités, il s'agit d'ouvrages de synthèse qu'on ne peut qualifier de manuels "scolaires", mais qui ne sont pas des traités de mathématiques exposant le résultat de recherches. Par contre le livre de G. Choquet s'ouvre par un extrait du programme du certificat de Topologie, "mais il s'agit d'un programme européen destiné à l'harmonisation de l'enseignement des mathématiques en Europe et notablement plus détaillé que le programme officiel français correspondant[2]" et le livre de L. Schwarz -qui n'a pas d'introduction et qui traite à peu près du même programme- correspond au contenu d'un cours professé de longues années à l'école polytechnique ... comme le cours de Cauchy ! Donc les quatre ouvrages ont bien -mais pour des raisons différentes- un statut comparable à celui des ouvrages étudiés auparavant.

Cela étant, si nous avons cité à nouveau Bourbaki, c'est qu'il y a un autre endroit où l'on y traite -apparemment- de suites numériques. Ainsi, dans le chapitre 4 (Nombres réels) du même livre III "Topologie générale", un paragraphe entier (§ 7) est consacré aux sommes et produits infinis de nombres réels et là, on commence par étudier les "suites sommables". Mais il s'agit là d'une utilisation restrictive du mot suite -désignant, sans autre précision, la famille des sommes partielles correspondantes- utilisation qui ne correspond pas à notre notion .. Dans le dernier numéro de ce paragraphe, réservé aux séries et produits infinis de nombres réels, on trouve explicitée cette restriction :
"Autrement dit, si (u_n) est une suite de nombres réels finis, il revient au même de dire que la série de terme général u_n est commutativement convergente ou qu'elle est absolument convergente ou que la suite (u_n) est sommable dans $\mathbb{R}$ ..."

---

(1) Analyse - Topologie générale et analyse fonctionnelle (L. Schwarz).
Cours d'analyse - Topologie (G. Choquet).

(2) Cf. le livre p. 1.

Ce qui nous semble intéressant, c'est d'une part l'introduction de cette utilisation restrictive du mot qui serait comme un souvenir du temps où seules les séries étaient prises en considération; d'autre part, nous voulons souligner le fait que le chapitre que nous évoquons suit le chapitre 3 consacré aux groupes topologiques (théorie élémentaire), et dont le paragraphe 5 "sommes infinies dans les groupes commutatifs" contient déjà toutes les propriétés réutilisées dans le chapitre 4 ne concernant pas spécifiquement $\mathbb{R}$ -c'est-à-dire le caractère totalement ordonné de $\mathbb{R}$. Dans le cas des séries et seulement dans ce cas, donc, on a éprouvé le besoin de traiter le cas particulier de manière spécifique, avec tous les enrichissements dûs à la structure de $\mathbb{R}$. Les cours sur les suites correspondent à un souci analogue mais qui intervient dans un déroulement inverse (du particulier au général).

Dans l'Encyclopédia Universalis, on ne trouve aux mots suites et convergence (math.) qu'une liste de corrélats. Ce qui nous intéresse n'apparaît ainsi qu'indirectement dans l'article sur l'infini mathématique[1] que nous ne citons pas ici dans la mesure où on y trouve essentiellement l'histoire des difficultés de mise en place de la notion de "Passage à la limite"; cet exposé est fait à la lumière des connaissances actuelles, mais celles-ci ne sont pas rappelées.

Nous avons aussi regardé le livre de L. Schwartz intitulé Analyse - Topologie générale et analyse fonctionnelle et le livre de G. Choquet (Cours d'analyse - Topologie). Ce sont deux ouvrages d'enseignement supérieur (post-DEUG) qui diffèrent sur leur abord des suites numériques justement. Dans le premier, on trouve un chapitre intitulé "suites-limites-convergences" (le chapitre V), où est donnée essentiellement la définition de la convergence des suites d'éléments d'un espace topologique, puis d'un espace métrique comme cas particulier. Suit la propriété d'unicité de la limite si E est séparé et 2 théorèmes sur les points adhérents et l'image des suites par les applications continues. Le cas de $\mathbb{R}$ n'est pas évoqué. Un chapitre ultérieur (XIV) est consacré aux séries dans les e.v.n.

Autrement dit, dans ce cours à Polytechnique des années 70-80, il n'apparaît plus

---

(1) Dieudonné, Vol. 8, p. 894.

que la convergence des suites d'un espace topologique général (ce qui est tout de même plus particulier que chez Bourbaki !) et les propriétés particulières aux suites numériques non explicitées spécifiquement ne se retrouvent qu'implicitement dans le chapitre sur les séries d'éléments dans un e.v.n. (par l'intermédiaire des séries des normes). Dans l'ouvrage de G. Choquet, les suites numériques réelles sont l'objet du paragraphe 2 de la première partie du premier chapitre -mais on ne cite pas toutes les propriétés possibles-. Sont rappelés en effet le théorème sur les suites monotones bornées (comme illustration des propriétés de l'ordre sur $\mathbb{R}$) et le critère de Cauchy (comme illustration des propriétés de groupe de $\mathbb{R}$).

Après quoi, comme dans Bourbaki, la définition de la convergence d'une suite de points d'un espace topologique est prise comme premier exemple d'application de la définition de la convergence d'une fonction d'un espace muni d'une base de filtre dans un espace topologique; puis les suites apparaissent comme "outil" dans divers paragraphes (espaces compacts, espaces métriques, espaces complets).

Nous voyons apparaître ainsi deux sortes de généralisations (éventuellement conjointes) des notions en cause. La seconde consiste à utiliser la notion (ou une des généralisations) comme "outil" dans un paragraphe dont le contenu vise à introduire une autre connaissance.

La première consiste à généraliser quelque chose dans la notion -mais il faut remarquer que les différents paragraphes des cours sur les suites numériques que nous avons analysé auparavant ne sont pas susceptibles des mêmes généralisations.

Ainsi les paragraphes concernant la définition, le critère de Cauchy, les suites extraites se généralisent aux applications de $\mathbb{N}$ dans des espaces topologiques ou uniformes; il y a plus: la notion même de "suite" -comme application de $\mathbb{N}$ dans un tel espace peut être considérée comme cas particulier d'applications d'espaces munis d'une base de filtre dans un espace topologique. Il s'agit de propriétés structurelles de convergences. Les paragraphes concernant les propriétés algébriques des suites

ne peuvent se généraliser qu'à des espaces topologiques munis de structures algébriques compatibles (groupe, anneau, algèbre ou corps)- mais ne sont pas spécifiques des suites et sont aussi vrais pour des fonctions d'un espace topologique dans un autre. Il s'agit de propriétés liées à la compatibilité des structures algébriques de l'espace d'arrivée avec sa structure topologique.

Enfin, les paragraphes utilisant la structure de corps commutatif totalement ordonné de $\mathbb{R}$ ne se généralisent pratiquement pas. En effet, les corps commutatifs totalement ordonnés qui ne sont pas de type dénombrable sont de peu d'intérêt (cf. Chambadal et Ovaert[1] p. 356) et les autres ont comme complété un corps isomorphe à $\mathbb{R}$ dans lequel on peut donc travailler tout de suite. Il s'agit donc de propriétés spécifiques aux seules suites réelles (convergentes).

On constate ainsi que les paragraphes "mis sur le même pied" dans l'enseignement du premier cycle n'apparaissent en général dans les ouvrages "de niveau supérieur" que sous l'une ou l'autre des formes généralisées, alors que chez Cauchy, seules les suites réelles peuvent être abordées. On pourrait postuler que les suites numériques réelles sont bien des "objets de connaissance" pour les mathématiciens de l'époque de Cauchy dans la mesure où elles apparaissent, bien que dans un cours, comme objet "ultime" non susceptible d'une quelconque généralisation dans l'état des connaissances de l'époque. Ce n'est plus le cas aujourd'hui. N'étant ni philosophe, ni épistémologue, nous ne sommes pas qualifiée pour creuser plus loin dans cette direction -cette approche des objets de connaissance nous permet, en tout état de cause, d'avancer dans notre description et notre compréhension de l'enseignement de la notion-.

De cette étude sommaire, nous pouvons déduire deux types de conclusions. D'une part, il apparaît clairement que la notion s'est mise en place lentement, l'uti-

---

(1) Cours de Mathématiques-Notions fondamentales d'algèbre et d'analyse. (Gauthiers-Villars).

lisation des sommes de séries ayant largement devancé la formalisation parfaite de la notion de convergence; les explications des savants sur la convergence étaient longtemps restées imprécises, empruntes d'images cinématiques et/ou monotones. D'autre part, à l'heure actuelle, on constate que ce n'est plus la convergence des suites numériques qui constitue l'objet de connaissance retenu par la communauté des mathématiciens, mais que c'est la notion de valeur limite d'une fonction dont notre notion est un cas particulier (n'apparaissant plus qu'en tant que tel).

1.1.3. La transposition didactique dans les cours sur les suites numériques du premier cycle universitaire.

Nous empruntons à Y. Chevallard ce concept qui permet de caractériser en quelque sorte la différence entre l'exposition d'un objet de connaissance et l'exposition d'un objet de savoir au sein d'un enseignement. Tout ce qui précède illustre sans conteste l'existence de cette différence. En effet, de nos jours, l'objet de connaissance le plus proche de la notion de convergence des suites numériques semble être la notion de valeur limite d'une fonction (pour le moins...). Or, nous voyons encore enseigner -et il n'y a là, à priori, rien de choquant, au contraire!- les suites réelles (ou numériques) telles que Cauchy, avec un vocabulaire plus lourd et une formalisation "moins bonne", les introduisait dans la communauté mathématique au 19^{e} siècle. D'autre part, un certain nombre de paragraphes des cours ne correspondent qu'à la nécessité "didactique" de faire fonctionner les nouvelles notions introduites. Cela permet aux étudiants d'avoir une gamme plus importante de propositions (ou théorèmes) à utiliser directement, sans démonstrations préalables. Il en est ainsi de tous les théorèmes de comparaison, d'encadrement, du théorème des suites extraites, des éventuelles propositions sur les suites adjacentes, et sur les suites récurrentes également. En fait, le contenu primaire irréductible du cours sur les suites numériques se réduit à la définition en (ε, N) et au critère de Cauchy, la définition des suites extraites et, éventuellement, le théorème sur les suites monotones bornées -qui est une

conséquence des propriétés de $\mathbb{R}$. On voit ainsi qu'il y a là aussi des transpositions didactiques de plusieurs espèces. Une des formes de cette transposition consiste à remplacer un contenu irréductible minimal par un contenu plus développé, non indispensable, mais permettant la manipulation au sein du cours des nouvelles notions et permettant aussi de transformer des exercices qui ne seraient pas élémentaires autrement en simples applications du cours.

Une autre forme de la transposition consiste à enseigner un objet "intermédiaire" que les mathématiciens actuels n'envisagent plus sous cette forme particulière, mais exclusivement sous sa forme générale (du moins au moment de l'exposition des connaissances !).

Une troisième forme de la transposition didactique (conséquence des autres) a pour résultat une exposition homogène de connaissances dont le degré de généralisation potentiel est différent. Ainsi, les propriétés spécifiques de convergence des suites réelles liées aux propriétés de $\mathbb{R}$ ne se généralisent guère qu'aux fonctions réelles; par contre si l'"essence" même de la notion de convergence ne varie pas, on peut largement généraliser et l'espace d'arrivée et l'espace de départ des applications dont on peut définir la convergence; or, aucune différence n'apparaît, dans les cours concernés, dans l'exposition des paragraphes correspondants.

De manière générale, on peut remarquer que quelles que soient les notions introduites, leur histoire, leurs difficultés, leurs applications, le déroulement des cours est très homogène et rares sont les occasions où on consacre "plus de temps" à des exercices ou sur un paragraphe particulier. Or, le moins qu'on puisse dire, c'est qu'historiquement, on constate une évolution différente, avec des "périodes de rupture" dont l'enseignement ne reproduit jamais-au plus-que le résultat.

Il nous apparaît une contradiction liée à la nécessité d'effectuer une transposition didactique dès qu'on enseigne. En effet, plus l'objet d'enseignement est séparé des autres notions mathématiques, plus les tâches qu'on donne aux étudiants sont élémentaires et fermées (ce qui est conséquence de ce qu'on a développé le cours et

ajouté des paragraphes non indispensables à un contenu irréductible), plus les étudiants "démarrent" les exercices, apprennent leurs théorèmes (assimilent au sens de Piaget), etc... mais, dans le même temps, leur travail est un simple travail d'application de règles, ils ne sont pas confrontés à des problèmes de signification, d'imagination, ils ne réorganisent pas leur connaissance, ils n'accomodent pas -ils ne font pas de mathématiques (à la limite). Cela étant, si au contraire, on ne donne qu'un cours minimum, des tâches complexes et des exercices ouverts, les étudiants ne font rien du tout. Une des solutions à cette contradiction est la pratique des classes préparatoires où la quantité et la diversité des exercices et problèmes permettent de se situer dans une large moyenne, avec un cours très développé, et des tâches graduées mais rarement complexes, rarement ouvertes et faisant rarement intervenir des notions de différents chapitres à la fois. Je me demande si la séquence classique "cours - exercices - cours ..." n'est pas à remettre en cause car la transposition didactique qu'elle engendre automatiquement (exercices sur le cours) exclut des exercices de réorganisation, du moins pendant un certain temps. On peut se demander si à une formation de connaissances qui ne paraît pas homogène, on ne pourrait pas faire correspondre un enseignement qui ne serait pas nécessairement homogène non plus.

1.2. L'enseignement supérieur universitaire scientifique (long).

Toutes nos copies proviennent en effet d'etudiants engagés dans cet enseignement -mis à part les 10 collègues qui en sont tout de même issus ...

Il n'est évidemment pas question dans les quelques lignes qui suivent de décrire l'enseignement supérieur scientifique long français tel qu'il fonctionne ces dernières années.

Nous voulons seulement en aborder brièvement deux aspects. Le premier, sociologique, concerne la population estudiantine -ce n'est pas tant l'origine sociale des étudiants (déjà bien connue) qui nous intéresse que leur "carrière" dans l'enseignement

supérieur- c'est-à-dire la répartition des étudiants, la durée des études, les éliminations successives, etc... Ceci a pour but de justifier les comparaisons éventuelles que nous serons amenée à faire entre des productions d'étudiants de diverses années du cursus universitaire.

Le deuxième aspect que nous survolerons concerne la forme des enseignements dispensés dans les deux filières actuelles du premier cycle universitaire, le DEUG et les classes préparatoires aux grandes écoles. Deux possibilités d'enseignement long scientifique sont en effet offertes aux bacheliers :

- ou bien les C.P.G.E. (Classes préparatoires aux grandes écoles) qui comportent les Math. Sup. (Math. Sup. C, ou "Agro", les Math. Sup. T, les Veto ...) en première année et les Math. Spé. (M, M', P, P') en deuxième année -ce sont des classes installées dans un lycée.
- ou bien les DEUG, SSM, SNV, et MASS (1) à l'Université en 2 ans.

Ceci a pour but d'éclairer certaines différences qui seront constatées dans la suite.

Avant de citer les chiffres annoncés, il faut tout de suite rappeler ce qui n'apparaît pas dans les données quantitatives, à savoir que la répartition des étudiants dans les deux filières n'a rien d'aléatoire : je ne choquerais personne en affirmant que, schématiquement, les "meilleurs" vont en Math Sup. et les "moins bons" se répartissent entre les deux filières.

1.2.1. Description sociologique.

On distingue dans l'enseignement supérieur

+ L'enseignement supérieur long : il comporte l'enseignement universitaire long (les CPGE -classes préparatoires aux grandes écoles- publiques ou privées, les

---

(1) SSM : sciences des structures de la matière.
SNV : sciences de la nature et de la vie.
MASS : mathématiques appliquées aux sciences sociales.

Universités Publiques) et les autres établissements d'enseignement supérieur (Universités Privées, ENS, ENI, Ecoles commerciales, juridiques, CREPS, Ecoles vétérinaires, Ecoles à caractère littéraire, artistique, scientifique et technique, etc...)
+ L'enseignement supérieur court: il comporte l'enseignement universitaire court (I.U.T. et S.T.S. -formation en deux ans) et les autres établissements (E.N., écoles d'infirmières, etc...).

Nous ne nous occuperons dorénavant que de l'enseignement universitaire long -secteur scientifique- sauf exceptions.

Cela étant, l'étude longitudinale de "cohortes" d'étudiants s'avère si délicate qu'aucune recherche publiée dans les documents officiels n'en fait état. Signalons à ce sujet, l'étude originale de H. Cukrowicz [1], enquête sur les étudiants Lillois, qui s'est attachée à rechercher le devenir socio-professionnel des anciens étudiants des Universités de Lille (mais qui n'a pas pu nous servir ici). Nous sommes obligés de nous contenter de 3 sortes de données -insuffisantes, mais indicatives:
+ Les données recueillies dans les Universités de Paris VI et Paris VII en DEUG SSM et en second cycle de mathématiques, par nos propres moyens grâce à la gentillesse de nos secrétaires (1);
+ Le travail de C. Dufrasne[2] sur Paris VII (première année de 1er cycle);
+ Les données par années fournies dans les documents officiels du Ministère -éventuellement obtenues par Universités [3] mais jamais par discipline (seulement sur les sciences, par exemple); il s'agit des documents n° 277 sur l'accession des bacheliers à l'enseignement supérieur, du document n° 5061 sur les statistiques des étudiants inscrits en 1979-80 dans les Universités, et du document intitulé l'enseignement supérieur en France -étude statistique et évolution de 1959-60 à 1977-78 .

---

(1) Madame Noether en DEUG 2, Mesdames Nicolas et Marie en 2ème cycle.
(2) "La première année d'Université-une année clef" (Université Paris VII).
(3) Grâce à M. Peano qui m'a permis de consulter les listings détaillés -non publiés.

Ces documents donnent des séries de chiffres pour des années différentes (1978 pour les baccalauréats, 1976 pour le flux de sortie de l'Université, 1979-80 pour les études sociologiques des étudiants). Mais les diverses études de stabilité présentées dans ces mêmes documents montrent toutes que les tendances révélées par ces chiffres sont valables pendant quelques années (depuis 1977 en particulier): il n'y a jamais de modifications brutales. Nous nous sommes donc sentie autorisée à donner des statistiques ne portant que sur une ou deux années -pas toujours les mêmes, pas toujours consécutives et la plus proche possible des années qui nous intéressent- cela à titre indicatif.

a) Quelques données générales.

i) le Baccalauréat.

Pour s'inscrire à l'Université ou dans une CPGE, il faut être titulaire du baccalauréat (ou d'une équivalence).

Voici, pour l'année 1978 ,la répartition des bacheliers 78 C, D, E, F inscrits à la rentrée 78 en DEUG scientifiques et en C.P.G.E., ainsi que les chiffres globaux (1) de répartition des bacheliers dans l'enseignement supérieur :

Série Bac	Bacheliers 78 (effectifs)	Enseignement Universitaire		C.P.G.E. (public+privé)	Université : Sciences	I.U.T.
		Total	Long			
C	32 294			11 479	9633	
D,D'	49 918			2 376	9084	
E	5700			1941	1211	
F	24 630			315	1305	
Total A,B,C,D,E	157 227	167 371	121347			
Total	218 263			20 728	21 820	20 492

Répartition des bacheliers inscrits dans l'enseignement supérieur

(1) Document n° 216.

Les étudiants de CPGE inscrits à l'Université sont comptés deux fois (et représentent à peu près la moitié des effectifs totaux de CPGE).
Il apparaît clairement que,dans les CPGE, la proportion des baccalauréats C est écrasante par rapport à celle des baccalauréats D -pourtant plus nombreux...
Dans les DEUG scientifiques par contre, les proportions sont proches.
Une autre partie de l'étude révèle aussi que les Universités scientifiques restent le domaine privilégié des bacheliers C , mais le deviennent aussi pour les bacheliers D,D' à cause de la difficulté des études médicales.

Enfin, nous n'avons pas éclairci du tout le problème des équivalences qui concerne les étudiants étrangers dont nous avons fort peu de copies.

ii) <u>les répartitions des étudiants (ou des étudiants en sciences) par sexe, âge, origine géographique</u>.

Annonçons tout de suite que 34% des étudiants recensés en 79-80 sont inscrits dans une université de la région parisienne -avec 12% d'entre eux à Paris VII et 11% à Paris VI ;nous n'avons pas la répartition correspondante pour les seuls étudiants en sciences(largement majoritaires à Paris VI).
De plus 72% des étudiants français sont inscrits dans l'académie où habitent leurs parents, ce qui témoigne d'une assez faible mobilité.
Cela étant, en 79-80, on recense 130 336 étudiants inscrits à l'Université en sciences,plus 6 645 étudiants ayant une double inscription (en sciences et ailleurs) sur les 848 124 étudiants totaux. Parmi eux, 17 379 sont inscrits à Paris VI, et 8 645 à Paris VII. Voici la répartition des 130 336 étudiants en sciences par sexe et par cycle d'enseignement supérieur -nous y avons joint ceux de ces effectifs globaux que nous connaissions pour l'année 76-77- :

Répartition des étudiants en sciences selon le sexe et le cycle

cursus (Sciences) / Sexe	effectifs 1er cycle	effectifs 2ème cycle	effectifs Concours	effectifs 3ème cycle	Indét.	Total
Hommes	36 914	27 288	2103	18 408	138	85351
Femmes	19 971	14 771	2443	6 774	42	44001
Sexe inconnu	428	294	5	257	0	984
Total 79-80	57313	42 853	4551	25 439	180	130336

On remarque la faible proportion de femmes (1/3 par cycle) qui va en diminuant sauf en ce qui concerne les concours (CAPES-AGREG); l'élimination globale entre le 1er et le 2ème cycle est de 25%; elle est de 40% entre le 2ème et le 3ème cycle. Ces caractéristiques nous semblent encore accentuées en mathématiques, comme nous le verrons tout-à-l'heure.

Pour ce qui est de la répartition par âge des étudiants, voici le tableau pour la totalité des étudiants inscrits en 79-80 et en 77-78 :

(les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants inscrits par année)

année / âge	17-19 ans	20 à 22 ans	23 à 25 ans	plus de 25 ans
79-80	25%	32,7%	18,6%	9,8%
77-78	22,1%	31,2%	20,6%	11,6%

Notons que, si 37,5% des étudiants s'inscrivant pour la première fois en 1979 sont âgés de 19 et 20 ans, la classe d'âge la plus nombreuse reste celle des 18 ans avec 36% de l'ensemble des 1ères inscriptions (pour l'année 79-80).

La répartition des étudiants (français et étrangers) selon la catégorie socio-professionnelle des parents est résumée dans le tableau suivant (les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes) :

Répartition des étudiants (en sciences) selon la catégorie socio-professionnelle des parents (*)

Répartitions sur les étudiants ayant répondu / Profession parents	% Population active en 1975	Répartition des étudiants en 77-78 en %	Répartition des étudiants en 79-80 en %	Répartition des étudiants en Sciences en 79-80 en %
Sans profession	0	2,8	2,8	2
Exploitants agricoles	7,6	5,4	5,3	6,5
Patrons	7,5	10,9	10,4	9,2
Prof. libérales et Cadres sup.	6,7	33,7	33,7	31,7
Cadres moyens	12,7	17,5	17,7	19,6
Employés	17,6	9,1	9	9
Ouvriers, Ouvriers agricoles	39,4	13,3	13,8	14,7
Personnel de service	5,7	0,9	0,9	0,8
Autres	2,4	6,4	6,1	6,2

((*) Nous avons indiqué les pourcentages colonnes.)

Indiquons ici que, pour les Sciences, qui sont parmi les disciplines les moins inégalitaires -après les IUT- , on constate une réduction des inégalités d'accès suivant la catégorie socio-professionnelle puisque, par exemple, l'écart entre les représentativités de la CSP ouvriers et la CSP professions libérales et cadres supérieurs était de 1 à 29 en 1962, 1 à 17 en 1968, 1 à 11 en 1975. Il n'en demeure pas moins qu'on retrouve là comme ailleurs les "héritiers" en bonne place (1) ...

Pour conclure ces données très générales, nous devons encore signaler que la part des étudiants en sciences chute très régulièrement depuis 1959.

Les effectifs n'ont été que multipliés par 2 pour la période considérée, ce qui est très peu. Cette branche , la 1ère en 1959, est maintenant la 4ème; dans le même temps, le bac. C est passé de 25,6% des bacheliers en 1959 à 14% en 1978 .Enfin les CPGE sont passées de 18 856 élèves au total en 1959-60 à 39 059 en 1977-78, et les

(1) Cf. étude de Baudelot et Al. [1] .

IUT de 0 à 47 398 de 1959-60 à 1977-78.

iii) Le déroulement des études.

On peut remarquer d'abord que 79% des nouveaux inscrits à l'Université en Sciences -en 1979-80- viennent d'avoir leur bac : il y a peu de "trous" dans les études à ce niveau-là. Cela a donc un sens de faire référence à l'enseignement de terminale. Pour ce qui est du DEUG, en 1976-77, sur 29 128 inscrits en 1ère année, il y a 13 809 inscrits en 2ème année, et 7 466 reçus au DEUG, soit 26% des effectifs de 1ère année ... Cela semble contradictoire avec les évolutions d'effectifs entre le 1er et le 2ème cycle notées précédemment -cela peut s'expliquer par le flux d'étudiants s'inscrivant en 2ème cycle et ne venant pas du 1er cycle. Nous en concluons qu'il serait dangereux de comparer des performances de DEUG et de second cycle de mathématiques -ce ne sont pas les mêmes étudiants... N'oublions pas à ce sujet que moins de la moitié des étudiants de DEUG SSM s'inscrivent en mathématiques en second cycle.
En ce qui concerne les autres "débouchés", nous ne sommes pas en mesure de comparer les "entrants" et les "sortants". Nous donnons le tableau de la répartition des sortants de l'Université en 1976(en effectifs):

Total des sorties de l'Enseignement Supérieur	170 800
Total des sorties universitaires	110 400
Enseignements médicaux (post DEUG)	14 700
Enseignements non médicaux (post DEUG)	39 700
DEUG (ou BAC+2) et formations para-médicales	6 100
D.U.T.	15 400
Abandons (au cours des 2 premières années)	34 500
Total des sorties hors universités	60 400
Ingénieurs et autres écoles	17 900

Quant à l'évolution du nombre des diplômes délivrés, on peut la résumer dans le tableau suivant (incomplet) :

Diplôme délivré / année	DEUG Sciences (Effectifs)	DEUG MASS (Effectifs)	Licences Sciences (Effectifs)	Maîtrises Sciences (Effectifs)	Effectifs 1er cycle Sciences	Effectifs 2ème cycle Sciences	Total Sciences (Effectifs)
1968	11 010		8 801	6677			114 382
1970	10 362		7860	7320			122 825
1976	7475	220	7220	6690			123 715
1977	7466	285	6821	6679	42 937	31 972	128 856

Répartition des diplomes délivrés en sciences (par année)

Il y a donc, en 1977, 42% des étudiants inscrits en 2ème cycle qui ont décroché un diplôme. On constate, par ailleurs, une légère baisse du nombre des diplômes délivrés.

Pour conclure ce bref survol des études (supérieures) scientifiques à l'Université, on peut dire qu'il y a une élimination importante à la fin du DEUG 2ème année par rapport aux inscriptions en 1ère année, qu'en 3ème année, de nouveaux inscrits "complètent" les effectifs et que les diplômes délivrés ne sont pas en augmentation. Nous allons compléter cette vision par le résumé d'une étude portant sur la 1ère année de 1er cycle, et par des données spécifiques aux mathématiques à Paris VI et Paris VII.

b) Les données sur les mathématiques à Paris VI et Paris VII.

i) DEUG Paris VI (SSM).

En 1976-77, il y a 2 656 inscrits en DEUG 1ère année, 646 inscrits en DEUG 2ème année, 371 reçus (57% des effectifs de 2ème année, 24% des effectifs de 1ère année).

En 1977-78, sur 737 inscrits en DEUG 2ème année, il y a 386 reçus (52% des effectifs de 2ème année).

En 1979-80, sur 2 253 inscrits en DEUG 1ère année, 1 012 sont reçus (45% des effectifs 883 étudiants s'inscriront en DEUG 2ème année, 456 seront reçus (52% des effectifs de 2ème année, 20% des effectifs de 1ère année).

Par ailleurs, les relevés individuels effectués par la secrétaire du DEUG 2ème année [1] montrent que sur les étudiants des facultés reçus en 1ère année, très peu ne s'inscrivent pas en 2ème année au même endroit (20 cas seulement à la rentrée 1980). La différence entre 1012 et 883, signalée par les chiffres, doit provenir des reçus extérieurs à la faculté (suivant des classes préparatoires en même temps). Quant aux "nouveaux" inscrits en 2ème année, très peu nombreux, ils sont constitués essentiellement de D.U.T ou d'élèves d'I.U.T. , d'étrangers et de quelques étudiants de Math. Spé. De plus, les éliminations en 1ère année sont de deux sortes: il y a les abandons en cours d'année, et les échecs à la fin de l'année.

Or, il est fréquent que les abandons en cours d'année correspondent à des étudiants qui ne suivent pas régulièrement les T.D. Il en résulte que la population "active" de DEUG 1ère et 2ème année est assez stable malgré les apparences; en particulier, on peut estimer que presque tous les étudiants de DEUG 2ème année étaient l'année précédente en DEUG 1ère année (nous précisons ceci plus loin).

ii) DEUG SSM (Paris VII)

Avec le système des U.V. on ne peut découper ce DEUG en 2 ans comme à Paris VI. Nous avons pu consulter les procès-verbaux des principales U.V. [2] de mathématiques présentées par les étudiants de DEUG (Paris VII), P.V. de février, juin, septembre 1979 pour les U.V. de première année, et de février, juin, septembre 1980 pour celles de deuxième année. Cela ne représente qu'un élément parmi d'autres pour reconstituer l'évolution du flux des étudiants inscrits en première année de DEUG en octobre 1979. On constate sur ces données qu'en première année, 19% des inscrits à chaque U.V. ne se présentent pas aux examens -ce pourcentage (calculé sur les non cummulatifs) s'élève à 20% en février, et 24% en juin de la deuxième année. On peut estimer que sur les deux ans, il y a une "perte" globale de 35 à 40%. D'autre part,

---

(1) M^me Noether - qu'elle en soit encore remerciée ici.

(2) U.V.: unités de valeur (1/2 certificat); NN 121-122; NN 123-124 (1ère année); NN 221-222; NN 223-224 (2ème année).

on trouve à la fois que le nombre d'inscrits aux U.V. de deuxième année est inférieur à celui de première année, que le nombre d'inscrits aux U.V. du premier semestre est supérieur à celui du deuxième semestre, et que le pourcentage de reçus (calculé sur le total des présents) est plus élevé en juin qu'en février (les deux années). Cela semble indiquer qu'il y a des vagues d'abandons successives -au premier semestre, et entre les deux années-. Cependant, nous ferons l'hypothèse que ces abandons sont plutôt le fait d'étudiants ne suivant pas les travaux dirigés et considérerons notre population de DEUG comme une seule population.

iii) Licences et maîtrises de mathématiques - Paris VI et Paris VII.

Voici les effectifs que j'ai relevé sur les fiches individuelles des étudiants déposées dans les secrétariats de second cycle:

En 1980-81, sur 600 étudiants inscrits à des U.V. de licence ou de maîtrise de mathématiques à Paris VI (en vue de la session de février), 223 étaient passés par une Math. Sup. au moins, 175 une Math. Sup. et une Math. Spé. dont 66 une Math. Spé. M'.

A Paris VII, la même année, sur les fiches, j'ai relevé 580 inscriptions en licence et maîtrise, 175 étudiants ayant fait au moins une classe préparatoire. Cela porte à un tiers (plus ou moins) la proportion de ces "nouveaux inscrits" en deuxième cycle -cela nous semble confirmer notre hypothèse que les populations de second cycle et de premier cycle sont non comparables. Il faut ajouter un nombre important de "redoublements" en second cycle -dont les statistiques ne tiennent pas compte.

c) L'enquête de C. Dufrasne sur la première année universitaire.

Cette enquête se place sur un terrain socio-psychologique et essaie de décider des raisons extra-mathématiques, sous-estimées jusqu'à maintenant, d'abandons et d'échecs en 1ère année de 1er cycle. Ces explications confirment pleinement -a contrario- les avis des enseignants de Math. Sup. comme on va le voir au paragraphe suivant -puisque le principal malaise qui apparaît chez les nouveaux étudiants est le manque d'encadrement personnalisé ["On ne sait pas pourquoi ça ne va pas"]. La liberté complète dans l'organisation du travail est difficile à assumer d'autant plus qu'on entre dans un univers dont on a l'impression de ne pas contrôler les règles -peur de "se mouvoir dans l'inconnu". Enfin, ce qui est préconisé par ces étudiants malheureux,ce sont des contacts individualisés préliminaires avec des

habitués de l'Université (éventuellement initialisés en Terminale) -il est remarquable que les étudiants les moins désorientés et les moins désespérés sont majoritairement ceux qui ont eu un contact familial avec l'Université (parents, famille, ...). En somme, il faudrait une préparation à l'enseignement universitaire -information préliminaire et prise en charge les premiers mois.
Cette étude insiste sur la part importante des abandons en 1ère année -qui ne sont pas des "échecs" sur le plan cognitif et qui n'apparaissent pas spécifiquement dans nos chiffres (sauf en b) ii)).

1.2.2. La forme des enseignements dans les filières de l'Enseignement Supérieur.

a) Les classes préparatoires sont donc des classes de lycée, avec une organisation de type "scolaire" des emplois du temps, et un enseignant unique pour les mathématiques qui élabore à la fois, le cours, les exercices, et les problèmes (avec 11 à 16h par semaine). De plus, les étudiants doivent passer une fois par semaine des "colles" de mathématiques -interrogation orale d'une vingtaine de minutes avec un colleur parmi la demi-douzaine affectée à la classe. Ils ont des problèmes très réguliers à rendre et ils ont la perspective des concours à la fin de la 2ème année. Les étudiants en DEUG sont organisés en sections -chaque section a un enseignant "magistral" ou deux (en mathématiques) et les étudiants écoutent un cours en amphi (3h à 4h par semaine). De plus, les étudiants sont regroupés par 20 à 30 en groupe de T.D. dans lesquels il font des exercices sur le cours avec un assitant ou maître-assistant (4h 30 à 6h par semaine). Ils ont un problème régulier qu'ils peuvent rendre et qui est corrigé par leur assistant. La note intervient dans le "contrôle continu" et complète les notes des partiels et d'examens (écrits) et d'oral.
Enfin, les étudiants de DEUG passent 21 heures par semaine à la faculté -contre 29 heures par semaine pour ceux de Math. Sup. sans les colles- comme nous l'avons déjà dit, en évoquant aussi la dispersion des enseignements à l'Université.

b) Pour analyser les différences entre ces deux filières, j'ai demandé à une dizaine de collègues ayant enseigné successivement en faculté et en CPGE d'évaluer les facteurs les plus importants fondant ces différences dans les résultats de l'enseignement.

Voici les résultats de cette enquête :

Nous avons travaillé sur les réponses de cinq collègues (2). Nous présenterons successivement les facteurs qui font l'unanimité (ou quasiment), ceux qui sont considérés par tous comme moins importants, et au contraire, les caractéristiques que chaque enseignant estime essentielles -que cela ait ou non l'accord des autres.

Il s'avère, en premier lieu, que tous les collègues concernés ont retenus comme facteurs très importants de la différence entre les résultats de l'enseignement en DEUG et en Sup. les facteurs suivants : la quantité de travail journalière en classe et à la maison, la quantité de problèmes à rédiger, la fréquence des contrôles, les colles, l'apprentissage régulier du cours, et l'adaptation du cours aux exercices et aux problèmes. Il s'agit donc de la différence de quantité de travail individuel, différence peut-être accrue par la cohérence interne des cours et exercices résultant de l'unicité de l'enseignant.

Aucun autre facteur n'a obtenu cette unanimité; cependant, quatre collègues sur cinq ont retenus les facteurs suivants comme très importants: le "niveau" antérieur des élèves, la présence obligatoire, le caractère individuel des contrôles, les corrections individuelles et fréquentes des problèmes et la quantité d'exercices.

Par contre, aucun de ces collègues n'a jugé très important comme fondement de la différence les facteurs suivants: les conditions matérielles, l'importance des autres matières, le travail en commun, les programmes.

---

(1) Voir le texte en annexe ⑤ .

(2) M^mes Azra, Exbrayat, Monasse, Morel, Royer.

Enfin, voici les cinq appréciations personnelles sur les causes essentielles de cette différence dans les résultats de l'enseignement que j'ai énumérées de 1) à 5) et que j'ai résumées :

1) L'organisation du travail en Math. Sup. convient mieux à la grande majorité des élèves -qui sont, par ailleurs, en général plus motivés (débouchés assurés).

2) Le recrutement est de plus haut niveau; l'unicité de l'enseignant assure une meilleure efficacité et le travail des élèves est très soutenu.

3) Les étudiants sont sélectionnés, travaillent beaucoup, sont motivés par des buts réels et précis.

4) Les élèves sont parmi les meilleurs, ils sont motivés, leur avenir est quasiment assuré, l'encadrement est nettement supérieur en quantité, et les élèves sont prêts à assurer un gros travail (confiance en eux).

5) Le rôle de la classe et de l'enseignant (unique) est très important sur le plan psychologique. La quantité de travail, la nécessité de la rapidité, les contrôles jouent aussi un rôle positif. Peut-être le "surcroît" quantitatif peut amener une certaine superficialité.

On constate ainsi que ces appréciations ne coïncident pas exactement, sans être contradictoires. Cependant, nous retrouvons ici, en grande partie, des différences que nous avions relevées entre les cours et exercices de DEUG et de Math. Sup. sur les seules suites numériques. Cela étant, nous pouvons peu conclure de cette comparaison trop limitée. Nous allons vérifier que les conditions de travail en Math. Sup. s'avèrent suffisantes pour assurer un certain apprentissage à la grande majorité des élèves. Or, un des objectifs de nos investigations est précisément d'arriver à définir, si ce n'est dans ce travail, en tous cas, à l'aide de ses résultats, en ce qui concerne les suites, des

conditions nécessaires et suffisantes d'acquisition de la notion, applicables y compris en faculté -et c'est dans le caractère nécessaire que se trouve toute la difficulté.

Il apparaît ainsi à la fois des points communs et de grandes différences dans l'enseignement des suites numériques en première année du supérieur. Le strict contenu des cours varie peu, par contre, l'ordre d'exposition de ce contenu dépend beaucoup des choix de l'enseignant; la quantité (et la diversité) des exercices dépend et de l'enseignant et de la filière d'enseignement supérieur considéré (classe préparatoire ou DEUG universitaire) -les deux filières se distinguant aussi par la forme de l'enseignement (et le recrutement). Enfin, l'élimination des étudiants au cours de leur cursus universitaire nous amènera à distinguer les populations de DEUG et celles de troisième et quatrième année de mathématiques à l'université. Les autres données sociologiques ou universitaires nous permettront de vérifier que notre échantillon d'étudiants (ceux qui ont répondu au questionnaire) n'est pas aberrant.

CHAPITRE 2 - PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE DE NOTRE TRAVAIL.

Nous présentons dans ce chapitre le cadre théorique que nous avons retenu pour donner un sens à nos travaux et, en son sein, notre propre problématique -nous avons choisi, en effet, une investigation liée au contenu même de la notion enseignée. Nous expliquons pourquoi c'est à partir de productions d'étudiants que nous cherchons à caractériser l'acquisition de la notion:productions de procédures lors de résolutions d'exercices ou expressions de la représentation mentale de la convergence. Nous éclairons notre choix d'effectuer cette analyse sur des réponses écrites d'étudiants des 4 années universitaires à un même questionnaire. Nous terminons par la description précise du questionnaire et de la population estudiantine y ayant répondu.

2.1. Le cadre théorique.

2.1.1. Axiomatique et problématique du travail.

Lorsqu'on se penche sur le problème complexe de l'acquisition des connaissances qui résulte d'un enseignement, on a le choix entre plusieurs niveaux d'analyse. Un certain nombre de règles générales ont déjà pu être établies et cela pour tout enseignement, quelle que soit la discipline enseignée et à plus forte raison la notion particulière considérée dans une discipline donnée. Ainsi, dès qu'il y a enseignement, il y a transposition didactique (c'est-à-dire transformation d'un objet de savoir en objet d'enseignement) -il y a aussi création de jeux de relations complexes inter-individuelles entre enseignants et enseignés, il y a contrat didactique, il y a ou non acquisition, etc ... Or, notre objectif n'est pas de vérifier -à l'occasion de la notion de convergence des suites- que,si l'enseignant est plus ou moins directif, l'acquisition est plus ou moins rapide ou qu'il y a, à peu près, "autant" de transposition didactique dans les cours des classes préparatoires qu'à l'Université, ou que l'apprentissage résulte d'actions du sujet, d'imitations du sujet, de conditionnement du sujet, etc... Notre objectif est au contraire de nous servir des connaissances générales sur l'apprentissage qui nous paraissent adéquates à dégager les facteurs spécifiques de l'acquisition d'une notion particulière, précise et limitée (enseignée en l'occurence en première année d'université). Nous voulons chercher pourquoi la convergence des suites numériques n'est pas appropriée par tous les étudiants après quelques mois de cours et d'exercices. Nous ne pensons pas que la réponse provienne uniquement de facteurs généraux -comme la mauvaise qualité des relations et de la communication entre les enseignants et les enseignés, ou comme le manque de travail des étudiants d'Université (qui intervient quand même) etc...; au contraire, nous estimons qu'il existe des causes spécifiques dans la notion elle-même, à travers son enseignement [1], qui sont

---

(1) Nous avons déjà évoqué la question des rapports entre objet d'enseignement et objet de connaissance.

à prendre en compte et que les difficultés correspondantes sont renforcées par les facteurs généraux évoqués précédemment (ou aplanies par leurs inverses). Notre démarche a donc été d'étudier l'acquisition de la notion pour en dégager les caractères spécifiques, avec la perspective d'une étude ultérieure qui serait de "tester" les diverses formes d'enseignement possibles, compte tenu des résultats obtenus. Il s'agissait donc de choisir un cadre théorique au sein duquel des observations sur cette acquisition pouvaient nous conduire à des interprétations et à des explications au niveau de notre notion particulière.

Il s'agissait aussi de choisir quelles observations nous allions faire, et comment, tant il est vrai qu'une observation est nécessairement précédée et suivie d'un choix. Ainsi observons-nous des copies, mais nous n'observons pas tout dans nos copies, pas plus que notre questionnaire n'est quelconque. Nous allons donc dégager les critères qui ont présidé à nos choix, c'est-à-dire notre cadre théorique[1], puis notre problématique en son sein. Il nous est d'abord apparu que si les théories générales[2] sur l'acquisition des connaissances ne manquent pas, leur généralité même exclut souvent de les appliquer autrement que pour les vérifier sur des cas particuliers; autrement dit, elles fournissent des cadres trop généraux pour être opératoires sur un problème comme le nôtre, où le contenu joue un rôle déterminant; il n'en est pas de même des théories cognitives issues de l'école piagétienne qui nous ont effectivement servi à mettre en place notre problématique à un niveau prenant en compte les contenus. En effet, nous pensons, à la suite de Piaget et de ses disciples, que l'apprentissage de nouvelles connaissances correspond -aussi bien dans l'enseignement supérieur que dans l'enseignement secondaire et primaire- à une modification de l'ensemble des acquis antérieurs qui est le résultat d'élaborations (mentales) du sujet; ces "constructions" résultent des

---

(1) Notre axiomatique, pourrait-on dire.

(2) Cf. Not L. in Les pédagogies de la connaissance (Privat 1979)

objets mathématiques,[1] de l'activité du sujet sur ces objets et des autres personnes engagées avec le sujet dans l'apprentissage, et elles ont pour résultat de nouvelles activités du sujet. Les "objets mathématiques" désignent ici -dans notre conception propre- ce qui remplace le "monde des objets matériels" qui était chez Piaget le support de la construction des premières structures logicomathématiques de l'enfant; ils ont un rôle de "signifiés" dans la construction des connaissances.

Quant à l'introduction du troisième terme -les autres personnes- nous l'empruntons aux thèses de la psychologie sociale [2]. Ces thèses, si elles sont issues de l'école de psychologie cognitive piagétienne, s'en démarquent par l'importance épistémologique qu'elles accordent à l'élaboration collective des nouvelles régulations qui permettent la réorganisation et la coordination des acquis antérieurs si toutefois ce travail collectif intervient à certains moments bien choisis de l'apprentissage et entre des partenaires bien choisis.

A ce bref résumé, beaucoup trop sommaire, des hypothèses [3] piagétiennes que nous avons retenu, nous en avons ajouté une, qui n'apparaît jamais explicitement chez Piaget -et qui est de taille-:nous avons admis que les théories cognitives établies pour l'apprentissage jusqu'à 14 ans restent valables ensuite . Nous reviendrons plus loin sur les problèmes que cela pose, mais avant, nous allons exposer notre problématique.

Il peut sembler que nous sommes en train de faire ce que nous voulions éviter -nous placer dans une perspective concernant l'acquisition des connaissances dans toute sa généralité ; nous n'empruntons en effet à la théorie constructiviste que ses enseignements les plus généraux, même si nous y ajoutons quelques acquis -tout aussi généraux- de recherches postérieures. Il n'en est rien, et ceci pour quatre raisons au moins. La première raison, c'est que ces hypothèses [3] -qui sont extrêmement fortes en réalité- nous permettent de savoir qu' observer pour détecter quelque chose à un niveau particulier.

En effet, dans une telle conception, un apprentissage n'est ni un conditionnement,

---

(1) On pourrait encore dire "être mathématique", étant entendu que ces êtres ou objets ne peuvent se concevoir dissociés de l'activité des sujets; c'est cette activité et elle seule qui leur donne leur sens.

(2) Cf. Willem Doise et Gabriel Mugny [1] ou A.N. Perret-Clermont [1] .

(3) Il s'agit ici d'hypothèses admises dans ce travail (axiomes) et non d'hypothèses à tester !

ni le résultat d'imitations puisqu'il y a élaboration mentale du sujet ; pour saisir cet apprentissage, c'est le sujet en train d'agir[1] qu'il faut observer, c'est au moment de la mise en oeuvre des connaissances du sujet qu'on va "estimer" ces connaissances. On aurait très bien pu imaginer, a contrario, l'observation d'étudiants en train de réciter un cours, de faire un exposé sur un thème proche du cours préparé par eux à l'avance, etc...

Nous avons délibéremment choisi d'observer des étudiants en train de résoudre des exercices, car nous pensons que c'est dans ces solutions d'exercices qu'on peut le mieux appréhender l'acquisition de la notion particulière qui nous intéresse. C'est précisément sur cette hypothèse qu'un apprentissage n'est pas une simple juxtaposition de connaissances, mais bien une réorganisation conceptuelle permanente qui ne prend effet que dans et par l'action que nous nous sommes fondée. Cela étant, nous avons choisi d'étudier des copies plutôt que des étudiants interrogés à l'oral pour des raisons tout-à-fait différentes sur lesquelles nous reviendrons plus loin et qui affaiblissent dans une certaine mesure la certitude d'observer l'action (directe) de l'étudiant.

La deuxième raison qui illustre l'adéquation de ces hypothèses générales à l'étude d'une notion particulière, c'est qu'elles nous ont permis de déterminer ce que nous allions observer dans nos solutions de problèmes. En effet, dans cette conception, c'est l'analyse des procédures de résolution (et non des seules performances par exemple) qui s'avère un bon moyen de repérer des étapes dans l'apprentissage ; dans ce travail, les procédures de résolution de problèmes désignent les méthodes mises en oeuvre pour résoudre une tâche donnée, englobant les erreurs qu'elles peuvent engendrer, et les performances auxquelles elles sont associées.

Mais, et c'est la troisième raison que nous évoquions, adoptant le point de vue explicité par G. Vergnaud [2] à propos des mathématiques à l'école primaire, nous faisons l'hypothèse qu'au fur et à mesure que s'élabore une nouvelle connaissance, il se crée chez l'étudiant une représentation (ou un modèle) de la notion concernée; et cette représentation conditionne les procédures mises en oeuvre lors de la résolution des problèmes mettant cette notion en jeu; cette représentation résulte du "reflet" des objets mathématiques et de l'activité de l'étudiant sur ces objets. La prise en compte de cette représentation s'est avérée indispensable

---

(1) c'est à dire faire fonctionner ses connaissances,donc résoudre des problèmes.

(2) cf. Vergnaud [1]

dans notre travail; nous avions en effet constaté au début de nos recherches [1] que l'analyse des seules procédures (menée dans 6 exercices sur les suites) est insuffisante pour comprendre la cause de certaines erreurs ou de certains obstacles. Aussi avons-nous cherché à cerner au moins certains aspects de ce modèle des étudiants.

On voit bien ici que nous sommes arrivée au niveau où nous voulions nous placer, tant il est vrai que le modèle des étudiants sur la convergence des suites numériques ne peut concerner que cette notion particulière même s'il n'est pas sans rapport avec leur modèle sur la convergence des fonctions (que nous n'avons pas cherché à mettre en évidence dans le présent travail). En fait, nous n'avons étudié qu'une expression partielle -et écrite- de la représentation de la convergence des suites numériques des étudiants (que nous analyserons au chapitre 3 : ce que nous appellerons dans ce travail le "modèle exprimé"), mais qui s'est avérée déjà intéressante.

Enfin, si l'acquisition de la notion résulte de l'activité spécifique sur les suites en 1ère année universitaire, elle doit se prolonger et s'approfondir avec le développement des autres connaissances et la réorganisation qui s'ensuit; c'est la quatrième raison qui justifie l'intervention des hypothèses piagétiennes dans notre problématique, puisque nous avons choisi d'observer nos étudiants en train de résoudre leurs problèmes sur les suites tout au long de la scolarité universitaire. Voici pourquoi, devant l'ampleur du public que nous voulions observer, nous avons élaboré un unique questionnaire (à de légères variantes près) que nous avons proposé à 1 380 étudiants répartis de la 1ère à la 4ème année d'université (classes préparatoires comprises).

Au paragraphe 2.2., nous reviendrons sur notre méthodologie.

Une partie de notre problématique vient donc d'être exposée au fil de la présentation du "cadre théorique" dont on a bien vu le rôle axiomatique.

Un des objectifs essentiels de ce travail est d'analyser, dans chaque exercice (c'est-à-dire pour chaque tâche) du questionnaire, les procédures utilisées par les étudiants, de mettre par ailleurs en évidence les modèles exprimés par les étudiants, et de préciser les relations éventuelles entre procédures et modèles

---

(1) Cf. relevé d'erreurs réalisé en 1978-79 (annexe ④).

exprimés. Il s'agit ainsi de dégager les caractères spécifiques de l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques ; ce qui est acquis rapidement, ce qui fait obstacle, en quoi les modèles exprimés sont à l'origine de certaines erreurs, ce qui se modifie au fur et à mesure du développement des connaissances, etc... Nous devons encore préciser que dans une telle étude nous nous attachons évidemment à dégager des régularités qui servent à établir les caractères spécifiques que nous recherchons. Cependant, nous ne négligeons pas les descriptions des cas isolés qui sont des témoignages de l'existence de certaines formes d'apprentissage - tant en ce qui concerne les procédures, que les modèles exprimés ou la relation entre les deux. Cela explique que nous ayons mené simultanément une étude "clinique" (description qualitative des caractères observés) et une étude "statistique" (répartition et évolution de ces caractères).

2.1.2. Autres problématiques possibles et prolongements.

i) Nous voulons maintenant aborder une deuxième problématique possible pour de telles recherches. En effet, puisqu'un apprentissage résulte toujours de l'activité du sujet en situation d'enseignement, on peut se proposer d'étudier directement le rapport entre les facteurs qui déterminent l'activité du sujet et la construction des connaissances qui en résulte. Les implications pédagogiques d'une telle démarche sont évidemment beaucoup plus directement évidentes que dans notre propre projet. Si nous n'avons pratiquement pas exploré cette problématique, c'est qu'il nous est apparu des difficultés plus grandes au démarrage qu'avec notre vision plus banale des choses. En effet, une des difficultés majeures de ce genre de recherche est que, comme un apprentissage est conditionné par les connaissances antérieures du sujet, il est pratiquement impossible de mettre en correspondance complète l'enseignement reçu l'année où s'effectuent les observations et, par exemple, les représentations qu'on peut détecter. N'oublions pas que les suites numériques sont déjà partiellement enseignées en Terminale.
Une autre difficulté de cette recherche tient à la nature même de l'enseignement

supérieur universitaire: les étudiants sont extrêmement dispersés et il est très délicat, si ce n'est impossible, de contrôler pour un même étudiant toutes les activités auxquelles il a pu se livrer pendant sa semaine (y compris son travail personnel). Que dire des 1 380 que nous avons interrogés !
Par contre, on peut imaginer des recherches plus limitées portant sur les situations-problèmes proposées aux étudiants à tel ou tel moment de l'apprentissage ou sur le mode de travail des étudiants pour résoudre une tâche bien particulière (comparer travail individuel, travail en petits groupes, travail en classe, travail en travaux dirigés ...). Nous avons estimé, pour notre part, que pour "évaluer" les effets de telle situation-problème ou de tel conflit socio-cognitif, nous préférions avoir d'abord à notre disposition un certain nombre de repères sur le déroulement de l'acquisition de la notion, et nous pensons placer de telles investigations après la recherche présentée dans ce travail.
Le point de vue contraire serait certainement défendable, et la confrontation des deux démarches pourrait enrichir notablement nos perspectives de recherches sur l'enseignement supérieur.

ii) Il existe un autre éclairage encore des travaux sur l'acquisition des connaissances que nous aurions pu exploiter pour construire une troisième problématique un peu différente de la précédente et de la nôtre, mais à laquelle nous n'avons pas entièrement renoncé .
Nous avions commencé notre recherche, en effet, en 1978 par l'étude des erreurs commises par les étudiants dans des exercices sur les suites. Nous avons constaté que ces erreurs n'étaient pas aléatoires mais très régulières : que ce soit à Tours, à Lille, à Grenoble ou à Paris, les mêmes exercices "produisaient", chez certains étudiants, les mêmes erreurs. De plus, et c'est le plus important, ces erreurs s'avéraient persistantes: des étudiants de 4ème année, interrogés par moi, réitéraient les erreurs commises par leurs condisciples de 1ère année, et ceci malgré des corrections de multiples natures.

C'est d'ailleurs à ce problème du statut de l'erreur dans la construction des connaissances que s'attaque M. H. Salins dans son D.E.A. (1) qui a guidé précisément nos toutes premières investigations. Or, si certaines représentations expliquent certaines erreurs, ce n'est pas le cas pour toutes les erreurs, comme nous le constaterons. De plus, on peut se demander s'il n'est pas nécessaire de commettre des erreurs à certains moments de l'apprentissage, et si ce n'est pas justement apprendre que de corriger ses erreurs (2). Ainsi un étudiant qui ne ferait qu'écouter des cours en amphithéâtre, et recopier les solutions des exercices dès qu'il ne saurait pas les faire en T.D., pourrait-il apprendre quelque chose ? L'erreur semble difficilement dissociable de l'activité elle-même . De plus, il est indéniable que des facteurs individuels interviennent, comme la rapidité, le goût pour telle ou telle forme d'exercices, qui modifient la nature des erreurs commises par les uns et les autres. Ainsi aurions-nous pu décider de continuer à centrer nos observations sur les erreurs commises par les étudiants en détectant les rapports individuels entre la véritable correction de ces erreurs et l'apprentissage; en effet, dans cette conception la persistance des erreurs est l'indice de la contradiction entre la conception antérieure de l'élève et la nouvelle conception qu'il n'arrive pas encore à faire fonctionner. Cela nous aurait conduit plus directement à dégager la nature spécifique des difficultés de la notion et, comme dans le cas précédent, cela aurait des implications pédagogiques directes. Nous n'avons pas réussi à mener à bien cette voie de recherche qui nécessitait

---

(1) Bordeaux, 1976 "le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire".

(2) Citons, à ce sujet, G. Brousseau: "l'apprentissage est une adaptation de l'élève à une situation-problème nouvelle. Les difficultés qu'il rencontre sont donc fondamentales pour provoquer cette adaptation. De plus, elles peuvent être constitutives du nouveau savoir, c'est-à-dire être indispensables à sa compréhension ( ). ... La nouvelle conception apparaît parce qu'elle est une solution à ces difficultés. Elle est une rééquilibration des systèmes de réponse de l'élève ( ) ...". [in "Recherches en didactique des mathématiques" Vol 1,]

une intervention directe dans les situations-problèmes proposées aux étudiants et qui, dans l'enseignement supérieur tel qu'il se présente, n'aurait pu être entreprise qu'à une très petite échelle. Cependant, le dernier chapitre de ce travail est consacré à l'étude spécifique des erreurs commises par les étudiants et nous envisageons de prolonger nos recherches par des investigations en ce sens.

2.1.3. Retour sur les hypothèses constructivistes.

Notre propos, dans ce travail, n'était pas théorique; toutefois, il faut souligner que la présentation schématique des hypothèses piagetiennes que nous avons adoptée soulève de nombreux problèmes que nous allons évoquer maintenant, sans y apporter la lueur d'une solution. Nous estimons que c'est seulement quand plusieurs travaux sur l'enseignement supérieur seront menés et avec des problématiques différentes qu'on pourra raisonnablement commencer à travailler sur ces questions.

Il y a une première interrogation qui vient à l'esprit sur les représentations des étudiants. Pourrait-on parler de la même façon de modèles, ou images mentales, ou représentations pour éclairer l'acquisition de la notion de distribution, par exemple ?

Autrement dit, et c'est bien le fond du problème qui se pose, dans quelle mesure les hypothèses de Piaget sont-elles généralisables à un enseignement post-obligatoire auquel il ne s'est pas intéressé?

Ainsi, Piaget détermine chez l'enfant des schèmes à partir desquels, par des transformations et des coordinations (provoquées par des perturbations), on arrive à une équilibration et à l'élaboration de structures plus développées, et c'est ce qui lui permet de parler de réorganisation par exemple. Or, nous ne pouvons pas parler de structures "primitives" chez nos étudiants; nous ne savons même pas si on pourrait déterminer une telle catégorie dans les explications cognitives et, au cas où la réponse serait oui, nous ne savons évidemment pas les identifier. Pourtant, nous utilisons la notion de réorganisation.

De même, Piaget détaille la théorie de l'équilibration en introduisant les

régulations cognitives qui permettent d'intégrer -par exemple- deux centrations différentes (éventuellement contradictoires) dans un seul système composant les différences; or, nous n'avons retenu de ce modèle que l'idée générale,qui n'est même pas essentielle dans notre problématique,de l'importance des conflits (des contradictions, des obstacles) dans la dynamique du développement cognitif.
Dans le même ordre d'idées, peut-on parler du "monde des objets mathématiques" au même titre que "du monde des objets matériels" (évoqué par exemple dans Vergnaud [1]) ?
Il apparaît que notre démarche a quelque chose d'empirique. Nous faisons l'hypothèse que les "lignes de force" des théories constructivistes restent valables dans l'enseignement supérieur, et nous vérifions leur caractère opératoire dans la mise en place de notre problématique. C'est ce qui nous autorise à les appliquer. Encore une fois, tous ces problèmes restent ouverts.

2.1.4. Les approches socio-psychologiques.

J'ai déjà évoqué les problèmes généraux de communication enseignant-enseignés, de conflits socio-cognitifs, etc... dont j'ai indiqué que dans la problématique présentée ici, ils étaient conçus comme renforçant dans un sens ou dans un autre les difficultés d'acquisition spécifique à la notion envisagée, et non comme les créant.
Là encore, les phénomènes ne sont certainement pas aussi simples, et j'en veux pour preuve le problème des étudiants qui "sèchent" sur des exercices de mathématiques. Il s'agit bien d'une erreur au sens large, mais tous ceux qui ont enseigné savent bien que les facteurs individuels peuvent être au moins aussi importants que les facteurs mathématiques internes pour expliquer une telle attitude. Il suffit de présenter le même exercice en disant "il est très difficile" ou "il est facile" pour provoquer chez les uns ou les autres un blocage complet qui ne correspond pas à une difficulté mathématique. Là encore, ce sont d'autres travaux, peut-être même des investigations psychanalytiques, qui pourront éclaircir nos connaissances sur le sujet qui, s'il n'a rien de spécifique à la notion de

convergence des suites, concerne beaucoup d'étudiants du supérieur, et tous les champs conceptuels abordés.

En conclusion, nous présentons ici un travail qui ne prendra tout son sens que s'il est suivi de beaucoup d'autres investigations dans des directions très variées, et où cependant, grâce à une problématique issue des théories constructivistes, nous sommes arrivée à dégager quelques régularités concernant l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur.

2.2. La méthodologie - Le questionnaire

Voici le plan de ce paragraphe, un peu technique par endroits .

2.2.1. Méthodologie.

2.2.2. La genèse du questionnaire.

2.2.3. Description du questionnaire : les variantes.

2.2.4. Description du questionnaire : les tâches.

2.2.5. Description des conditions de passage du questionnaire.

2.2.6. Description de la "population" ayant répondu au questionnaire.

a) Description universitaire.

b) Description sociologique.

2.2.7. Le dépouillement des copies. Les méthodes statistiques utilisées.

2.2.8. Critiques de la méthodologie.

a) Le choix du matériel (copies, interrogations orales).

b) Les problèmes d'une analyse synchronique.

c) Les difficultés pratiques (respect du mode d'emploi, attitude des étudiants ..., lourdeur du dépouillement).

2.2.1. Méthodologie.

Comment étudier ces procédures et ces représentations sur la convergence des suites ? Nous avons opté pour une analyse de copies rédigées en réponse à un questionnaire élaboré préalablement et présentant des questions sur les représentations et des textes d'exercices sur les suites. Nous n'avons donc pas mené, à cet endroit de notre travail, d'interrogations orales. Ce choix a été dicté par le besoin d'avoir un grand nombre d'observations échelonnées sur toute la scolarité universitaire pour cerner le déroulement de l'acquisition après l'enseignement de la notion. Ici se pose par conséquent une question d'adéquation entre notre problématique et notre méthode ; en effet, nous voulons étudier les "actions" des étudiants, et nous ne nous donnons les moyens d'observer que le résultat écrit de ces actions.

De plus, nous ne pouvons même pas être sûre que les exercices proposés n'avaient pas déjà été faits ; nous avons vérifié (en posant la question à chaque enseignant) qu'en moyenne ce n'était pas le cas, des exercices très voisins avaient cependant souvent été déjà traités. Il y a là une restriction indéniable provoquée par le besoin (contradictoire) d'observer beaucoup d'étudiants à des moments différents. Nous avons conduit cependant quelques entretiens (dont nous reparlerons) qui confirment largement nos observations faites à l'écrit. De plus, pour vérifier que ce matériel d'observation ne dépend pas trop de facteurs liés à la forme du questionnaire, mais bien de l'activité des étudiants, nous avons utilisé la technique des variantes, ainsi le questionnaire se présente-t-il sous une forme initiale V_1 et sous d'autres formes légèrement différentes (ou variantes V_i (i=2 à 11). Nous avons testé dans ces variantes la stabilité de la répartition des réponses des étudiants lors de variations de vocabulaire (utilisation de mots synonymes), de notations et d'ordre relatif des différents exercices pour vérifier que les procédures dépendent bien de la tâche et pas de sa présentation. Certes, tous les étudiants ne font pas tous les exercices dans l'ordre dans lequel ils se présentent, mais la lecture des copies confirme que c'est le cas pour la grande majorité d'entre eux. Cela a donc un sens de "changer de place" un exercice dans le texte ! De plus, comme on ne peut distinguer la tâche effective d'un exercice, de la conception qu'en a l'étudiant (conception qui provient non seulement de la tâche, mais des habitudes et de l'intériorisation de l'attente

du professeur vis-à-vis de cette tâche), nous avons aussi fait varier, dans une petite mesure, certaines tâches pour cerner précisément quelques effets de "contrat". Ces précautions nous permettront et de confirmer que les représentations exprimées (modèles exprimés) sont bien des indices pertinents des modèles des étudiants, et de vérifier la stabilité des procédures quelles que soient les variantes; elles valideront ainsi notre méthodologie. Cela n'est vrai que pour cette partie "exploratoire" du travail, et il est clair que dans d'autres recherches ultérieures, nous pourrons être amenée à n'utiliser que des entretiens, par exemple.

Il reste à préciser, dans ces généralités, que nous nous sommes limitée à des exercices classiques sur les suites, auxquels les étudiants sont préparés en général (cf. étude de Madame Boschet). Autrement dit, nous étudions l'acquisition de ce qui est censé être acquis par les étudiants,de l'avis des enseignants eux-mêmes. Ainsi, notre questionnaire a-t-il pu être proposé comme devoir sur table, et noté dans certaines classes. Il s'agira donc, soit de démontrer des convergences (ou des divergences), soit de déduire de la convergence d'autres propriétés de suites en utilisant l'arsenal des propositions et exemples figurant dans les cours. Nous appelons "tâche" d'un exercice l'objectif global de ce qu'il y a à faire dans cet exercice, c'est-à-dire, étant donné telle(s) hypothèse(s), établir telle(s) propriété(s).

Notre questionnaire comprend 7 exercices dont nous verrons que les tâches qui leur correspondent forment un échantillon relativement représentatif des tâches proposées aux étudiants (cf. étude de Madame Boschet). Cependant, nous n'avons pas joint à ce travail l'analyse des deux derniers exercices qui n'ont pas toujours été proposés et qui ont été peu abordés. C'est précisément à une analyse soigneuse du questionnaire, du profil sociologique et universitaire des étudiants y ayant répondu,et des conditions de production des réponses que sont consacrés les paragraphes suivants.

Nous joignons ici le texte du questionnaire,également présenté en annexe.

QUESTIONNAIRE V_1

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous?

2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune? Ensuite définir une suite divergente.

3) Donner 4 exemples de suites convergentes.

4) Donner 4 exemples de suites divergentes.

5) Vrai ou faux: toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante.

6) Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}\cos(n\theta)$, θ fixé, pour $n > 0$.

7) Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$$

est convergente.

8) Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel. Montrer que si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l, alors la suite (u_n) converge vers l.

9) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$, pour tout x réel.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur R^+ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{2}{3}$ et croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est la racine positive de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad .$$

10) Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite converge?

11) Soit f une application continue de $[0\ 1]$ dans $[0\ 1]$, dérivable et telle que $f'(x) > 0$ sur $[0\ 1]$. Etudier la suite définie par $u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n > 0$.

12) Vrai ou faux : une suite dont l'ensemble des valeurs est fini converge si et seulement si elle est stationnaire.

2.2.2. La genèse du questionnaire.

Dans un premier temps, une dizaine de collègues enseignant en première année universitaire (en Sup. et en DEUG) ont relevé dans leur classe des textes d'exercices sur les suites et les solutions erronées que certains de leurs étudiants leur avaient soumises. Dans le même temps, ces exercices étaient posés à des étudiants en entretien individuel (à l'oral) ; nous y reviendrons au chapitre 3. Un travail préliminaire sur les erreurs ainsi collectées a permis de vérifier leur régularité et a même donné lieu (dans ce sens) à un classement (1) ; cependant, la réflexion sur l'origine de ces erreurs n'a pu aboutir, faute d'observations suffisantes. Nous avons alors décidé d'élaborer un questionnaire comportant des exercices classiques et d'autres questions susceptibles d'éclairer les représentations des étudiants (cf. 3.1.). Pour ce qui est des exercices, nous avons choisi, parmi tous les textes à notre disposition, des énoncés qui donnaient lieu à des erreurs apparemment persistantes et qui couvraient un certain nombre de tâches différentes sur les suites ; nous y reviendrons au paragraphe 2.2.4. Nous n'avons retenu que des textes portant sur les suites numériques et privilégié, en vue de notre analyse, les exercices comportant une seule question (5 sur 8). Après avoir amélioré ce choix avec nos collègues (2), nous avons "testé" le questionnaire dans 2 classes de Math. Sup. C en mai 1979. Des modifications en résultèrent encore ; une dernière réunion avec nos collègues nous a permis de mettre au point les modalités de passage du questionnaire, précisées sur un "mode d'emploi" envoyé dans toutes les classes concernées, et sur lequel nous reviendrons au chapitre 2.2.5.

---

(1) Cf. relevé d'erreurs 1978-79, annexe ④ .

(2) Il s'agit de M^{mes} et M^{r} Azra, Bour, Boschet, Milhas.

2.2.3. Description du questionnaire : les variantes.

Tout au long de ce travail va se poser la question de la fiabilité des régularités ou des tendances que nous mettons en évidence. Une des façons de tester au moins une certaine stabilité des caractères observés,pour une tâche fixée, est de faire varier un petit peu un seul paramètre (dont nous estimons qu'il est peu important) dans ce qui est à notre disposition et de comparer les résultats avec ou sans ce changement. A cet effet, nous avons utilisé la technique des "variantes" : nous avons élaboré 10 variantes (numérotées de V_2 à V_{11}) du texte initial V_1 (1), et dans chaque classe (ou groupe de T.D.), nous avons fait distribuer moitié-moitié V_1 et V_i (i=2 à 11) (en demandant d'alterner d'un élève à son voisin) (2).

Ces variantes portent: - sur le vocabulaire utilisé -ainsi dans V_2 les mots "convergent" et "divergent" sont systématiquement remplacés par "a une limite" ou "tend vers" et "n'a pas de limite".

- sur certaines notations -ainsi dans V_3 les suites s'appellent (z_n) au lieu de (u_n); dans la suite $(\frac{1}{n} \cos n\theta)$ devient $(\frac{1}{n} \cos nA)$ ...

- sur l'ordre dans lequel les exercices sont posés.

- sur l'énoncé même de certains exercices, dans la mesure où la tâche proposée ne subissait aucune modification ou une modification légère (cf. paragraphe suivant).

Pour comparer des répartitions de procédures, performances, erreurs ... associées à 2 variantes V_1 , V_j (4), nous calculons le χ^2 du tableau de contingences à 2 lignes correspondant, en regroupant éventuellement des colonnes (pour ne pas avoir d'effectifs théoriques inférieurs à 5); si ce nombre est supérieur au χ^2_{lu} pour 0,10 (3) (avec le degré de liberté correct), nous concluons que les distributions sont différentes -il y a donc influence de la variante. Nous dégageons alors les

---

(1) Le texte V_1 et les variantes figurent en annexe ① .

(2) Cf. tableau II_1 pour la répartition.

(3) lu sur les tables de χ^2 .

(4) dans les seules classes concernées par un tel couple.

tendances significatives qui se manifestent lors de la comparaison des pourcentages-colonnes de chaque colonne à ceux de la colonne "Total"; si ce nombre est inférieur au χ^2_{1u} pour 0,40 (avec le degré de liberté correct), nous concluons que les distributions sont semblables: la variante n'a pas apporté de changement.
Entre ces 2 seuils, nous ne pouvons pas affirmer que les distributions sont significativement différentes mais, le cas échéant, nous dégagerons des tendances qui n'auront qu'une valeur indicative hypothétique.
Nous reviendrons sur les résultats obtenus avec ce procédé au cours du compte-rendu sur chaque exercice et globalement au chapitre 7 .

Nous pouvons préciser que, dans ces conditions, il y a 662 étudiants qui ont répondu au questionnaire V_1, dans des conditions "standard" que nous décrirons au paragraphe 5 ;(ces 662 copies constitueront le corpus N (comme normal)).

2.2.4. Description du questionnaire : les tâches.

Très brièvement, nous nous sommes efforcée de retenir des exercices mobilisant au moins une des connaissances suivantes sur les suites :

. La définition de la convergence en (ε,N) (exercice 8, le cas échéant exercice 7, exercice 12) et éventuellement la caractérisation en termes de suite de Cauchy.

. La réserve d'exemples (exercice 5, exercice 10) soit disponibles, soit à construir

. Les procédés de comparaison (exercice 6, le cas échéant exercice 7, exercice 9c).

. Le théorème sur les suites monotones bornées (exercice 9b, exercice 11).

. Les propriétés algébriques des limites (le cas échéant exercice 7, exercice 6 et exercice 9c).

Signalons dès maintenant que seuls les exercices 5, 6, 7, 8, 9c, 10 seront l'objet d'une analyse détaillée. Voici l'analyse des tâches dans chacun de ces exercices que nous décrivons.

Les tâches dans l'exercice 5.

Il s'agit d'une suite générale, convergente, avec une propriété de positivité sur

les termes. La question porte sur la décroissance de la suite, avec un énoncé semi-ouvert.

Il suffit d'exhiber un contre exemple -soit construit pour les besoins de l'exercice, soit reconnu dans les exemples déjà rencontrés comme pouvant convenir.

Les tâches dans l'exercice 6.

Il s'agit d'une suite numérique explicite avec un paramètre

On demande de l'étudier (exercice faussement ouvert).

Il suffit d'encadrer u_n ou $|u_n|$ par deux suites convergeant vers 0. Les seules connaissances "antérieures" mobilisées sont $-1 \leq \cos n\theta \leq 1$ ...

Les tâches dans l'exercice 7.

Il s'agit d'une suite générale; on ajoute une propriété de convergence (avec limite numérique donnée) sur une suite construite à partir de la première; on demande de montrer que la première suite converge, sans préciser la limite.

Il suffit d'encadrer u_n par deux suites convergeant vers 0 ; pour cela il suffit d'appliquer la définition en (ε, N) à la suite dont la convergence est supposée dans l'énoncé.

On peut aussi reconnaître un théorème algébrique $\left(u_n = nu_n \times \frac{1}{n}\right)$, ou appliquer le théorème sur les équivalents, tous les deux suffisants. Les seules connaissances antérieures mobilisées sont des techniques de calcul sur $\mathbb{R}$.

Les tâches dans l'exercice 8.

Il s'agit d'une suite générale; on ajoute une propriété de convergence (avec limite donnée non explicitée) de deux suites extraites particularisées; on demande de montrer que la première suite converge vers une limite précisée (non explicitée).

Il suffit de constater que la définition en (ε, N) s'applique à (u_n) en l'appliquant successivement à (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Il n'y a pratiquement pas de connaissances

antérieures mobilisées -si ce n'est l'utilisation de la borne supérieure de deux entiers.

Les tâches dans l'exercice 10.

Il s'agit d'une suite générale; on ajoute une propriété de convergence de deux suites extraites non précisées (limite donnée non explicitée); on demande si la suite converge (exercice semi-ouvert).

Il suffit d'exhiber un contre exemple, soit construit pour les besoins de l'exercice, soit reconnu dans les exemples déjà rencontrés comme pouvant convenir

Les tâches dans l'exercice 9c.

Il s'agit d'une suite dont le terme général intervient dans une relation implicite qui n'est pas une relation de récurrence. On a démontré que la suite est convergente. On demande de trouver une propriété de la limite.

Il suffit d'utiliser les propriétés additives des limites et d'encadrer u_n puis u_n^n par les termes généraux de deux suites convergeant vers 0 .

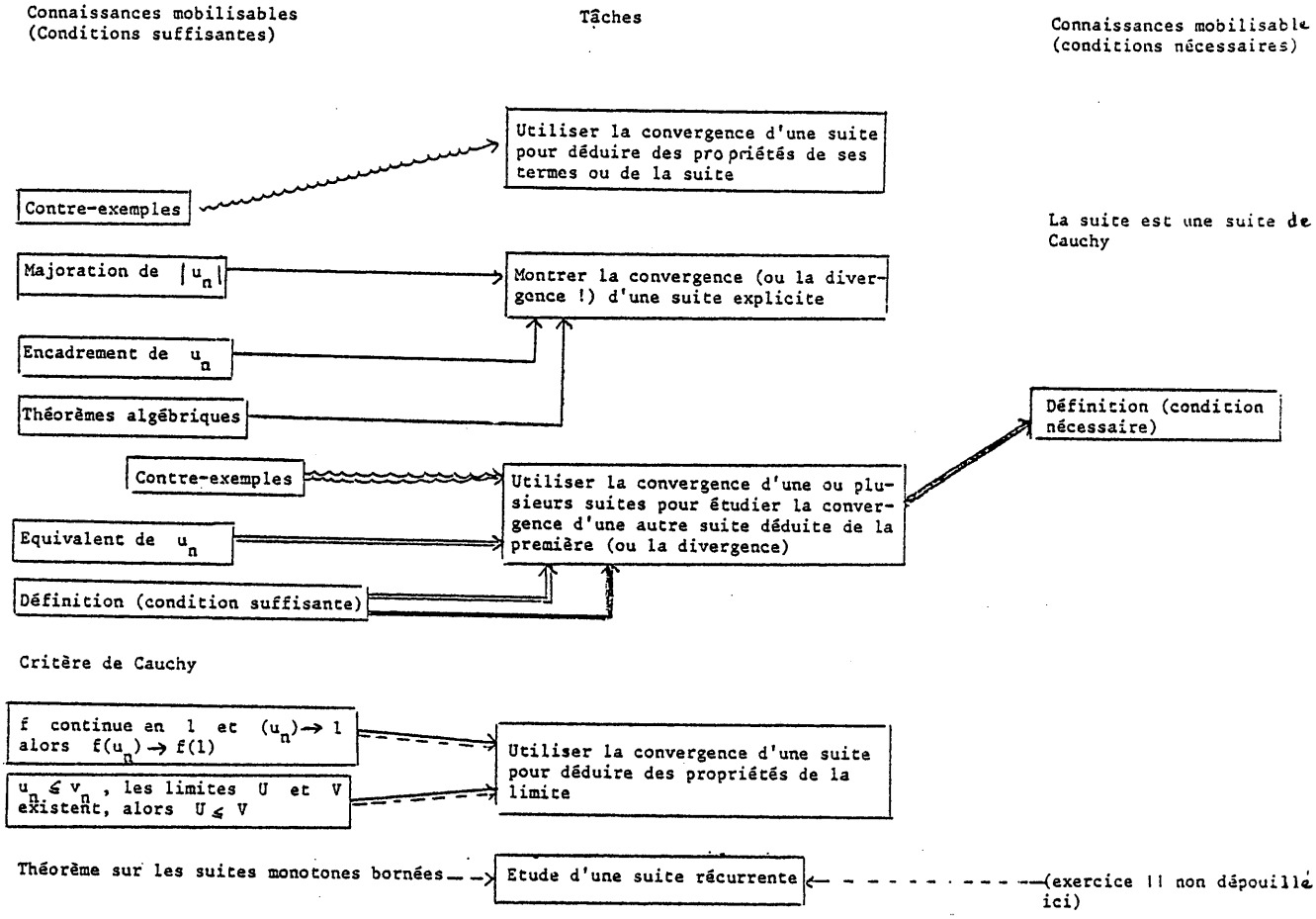
Il y a une connaissance intermédiaire mobilisée : $\lim_{n\to\infty}\left(2/3\right)^n=0$.

Nous avons dressé le tableau résumé des tâches et des connaissances pouvant être mobilisées pour les résoudre. Tous nos exercices en effet, comme nous l'avons vu, ont pour objectif, soit de montrer qu'une suite est convergente (la limite étant ou non indiquée) ou divergente , soit d'utiliser la convergence d'une suite pour montrer une propriété de la suite ou d'une autre, ou de la limite.

Ces suites sont soit explicites, soit générales (quelconques), ou intervenant dans la convergence d'une suite définie à partir d'elles.

Le tableau met en évidence qu'une même connaissance (la définition en (ε,N), les encadrements ou majorations) peut être mobilisée dans deux tâches différentes ou, pour la définition, sous sa forme nécessaire et sous sa forme suffisante. Cela nous permettra de comparer dans les exercices correspondants et suivant la tâche, la disponibilité de certaines connaissances, et d'esquisser ainsi une "hiérarchie" des tâches et de l'acquisition des connaissances. Cependant, toutes les connaissances

Tableau résumé des tâches et des connaissances pouvant être mobilisées dans nos tâches.



Exercice 5. ⟿ Exercice ouvert, suite générale.

Exercice 6. ⟶ Suite explicite numérique, la limite n'est pas indiquée, la tâche est élémentaire, l'exercice est "faussement" ouvert.

Exercice 7. ⟹ Suite générale, la limite n'est pas indiquée, on se donne une autre suite convergente (limite connue), l'exercice est fermé, la tâche nécessite éventuellement une organisation.

Exercice 8. ⟹ Suite générale, la limite est indiquée, la tâche est élémentaire, l'exercice est fermé.

Exercice 10. ⟿ Exercice ouvert, suite générale.

Exercice 9c. ⇢ Suite générale.

Ce qui n'est pas encadré correspond à des connaissances non mobilisables dans nos tâches (dans une procédure correcte !)

ne sont pas mobilisées dans notre questionnaire et les "combinaisons" sont trop peu nombreuses pour attacher une signification autre qu'indicative à ce classement. Les conclusions de Madame Boschet sur les relations entre tâches et connaissances mobilisées dans les exercices posés dans les manuels montrent tout de même que nous avons abordé la plupart des "types" d'exercices classiques qui sont proposés aux étudiants, aussi bien pour ce qui est des tâches que de la forme des exercices. En fait, la seule lacune importante dans les tâches proposées est un exercice portant sur l'étude des suites récurrentes ; c'était l'objet de l'exercice 11 du questionnaire, mais il a été trop peu abordé pour que nous en ayons retenu l'étude. Il en résulte aussi que le théorème sur les suites monotones bornées n'est jamais mobilisable, du moins pour résoudre correctement un exercice.

2.2.5. Description des conditions de passage du questionnaire (Définition des conditions standard).

Nous avions pour objectif de recueillir des copies d'étudiants de la première année à la quatrième année d'enseignement supérieur comprise (classes préparatoires comprises). Or, la notion de convergence des suites numériques n'est plus "au programme" à partir de la deuxième année, et, d'autre part, en classe préparatoire, on n'a plus beaucoup de temps à consacrer à des expériences ; autant de difficultés pour nos collègues vis-à-vis de leurs étudiants. Nous avons donc choisi la formule la plus souple possible en n'imposant ni le temps imparti pour répondre au questionnaire, ni le fait que les copies soient notées ou non, anonymes ou non; j'ai indiqué que je préfer~~a~~is que le travail soit fait en classe -sans y mettre d'exclusive. Nous avons seulement demandé de nous communiquer toutes les informations sur les conditions de passage [1]. Il se trouve que presque toutes les copies ont été rédigées en classe et nous avons, de ce fait, mis à part celles qui ont été rédigées à la maison. Nous parlerons ainsi de "conditions standard de production " pour des copies qui ont été rédigées "en classe" dans un temps connu (compris entre 3h et 3/4h en maîtrise), que le nom y figure ou non (804 copies sont anonymes), que les copies aient été ou non notées (336 copies ont eu une note), et par des étudiants de la première à la quatrième année d'université. Cela représente 1 253 copies "standard" ou "S"; les 139 copies restantes comportent, outre les 63 copies faites à la maison, 10 "copies" rendues par des collègues, 21 copies d'élèves de Math. Sup. avant le cours sur les suites, 23 copies d'étudiants de DEA, 9 copies de DEUG première année pour lesquelles le texte avait été dicté et 13 copies de DEUG première année incomplètes et dont je n'ai pas réussi à connaître les conditions de passage.

---

(1) Cf. "mode d'emploi", annexe ② et tableau II_1.

II$_1$ Répartition de nos effectifs par conditions de passage (temps imparti-noté, anonyme, avec le nom mais non noté), par classe ou groupe de TD -avec indication des variantes.

+ Les classes non standard sont "grisées".

Copies T	DEUG cour de suite après	DEUG après cours et exercices	DEUG 1 à 3 mois après	DEUG plus de 3 mois après	DEUG 2	SUP C après cours et exercices (moins 1 mois)	SUP C plus de 3 mois après le cours et exercices	SUP entre 1 et 3 mois après le cours et exercices	SPE.	Licence	Maîtrise	DEA, collègues etc ...
V_1, V_2				1,5 * (30) 11-(5) P_7		3 + (10) 46-(23) P.		2,5 * (20) 24-(12)	1,5 * (40) 28-(13) P.	1,5 * (50) 11-(5) G.	2 * (60) 9-(4) P_7	
V_1, V_3	2 * (01) 17-(9) P_7	2 * (11) 22-(12) G.	* (21) 17-(14) P_7	2 * (31)					2 • (41) 46-(20) P.		M (61) 14-(7) P_6	
V_1, V_4		2 * 19-(12 bis) P_6 ; 2 • 30-(12) P_{11}			1 * (42) 14+2M P_6		2,5 • (32) 29-(14) P					
V_1, V_5	2,5 * (03) 29-(12) P_7		2,5 * (23 bis) 8-(4) P_7					3 • (23) 33-(16) Li	1 * (43) 42-(6) P.	2 * (53) 13-(2) P_6		
V_1, V_6	2 * (04) 23-(12) P_7			2 * (34) 11-(11) P_7	2 * (44) 23-(8) T.			3 • (24) 38-(13) Li		2 * (54) 12-(6) T.	1 * (64) 11-(6) P_7	
V_1, V_7									1,5 * (45) 44-(18) P.	2 * (55) 23-(11) P_7		
V_1, V_8		2 • (16) 15-(6) P_7	2 * (26 bis) 22-(13) P_2		2 * (46) 12-(6) P_7			2 * (26) 30-(12) P.		M 2 copies P_2	3/4 h * (66) 40-(26)	
V_1, V_9		1,5 * (17) 16-(12) P_2		2,5 • (37) 21-(11) P_6	2 * (47) 81-(42) Li			2 * (27) 31-(16) P.			2 * (67) 18-(16) P_2	
V_1, V_{10}				2 * (38) 51-(35) On+P_6	1,5 * (48) 12-(P_7	2,5 19h½ (18 bis) P. • ; 2,5 31-(13) P.					1 copie	
V_1, V_{11}		1,5 * (19) 12-(8) P_7			2 * (49) 29-(14) G		2,5 • (39) 28-(12) P	2 * (29) 29-(15) P		1,5 * (59) 16-(5) P_6	3/4 h * (69) 40-(10) P_6	(79) 13-(3)
V_1 seul	2 * (05) 28 P_7	2 * (06) 13 G						M (80) 36+1 P.				(70) (90) (84) (91) 21+10+10+9
TOTAUX	97	127	47	135	173	96	57	222	160	77	135	63

1389

Légende. X signifie X heures, M à cet endroit-là veut dire "à la maison".

X Y
(XX)
Z-(Z') K

Y: * signifie non noté, • signifie noté, + signifie non anonyme et non noté.

K: initiales de la ville ou de l'Université de passage (P_i : Université Paris i, G : Grenoble, Li : Lille, T : Tours, Or : Orl

Z: effectifs ; (Z'): effectifs de la variante.

(XX) Les numéros indiquent les numéros affectés à chaque classe ou groupe de TD.

L'influence des conditions de passage [1] sur les réponses est suffisamment peu significative pour qu'on n'en tienne pas compte, nous ne pourrons le vérifier qu'au chapitre 7. Par contre, les enseignements tirés des copies non standard seront intégrés au fur et à mesure mais s'avèreront peu importants.

2.2.6. Description de la population ayant répondu au questionnaire (définition des trois groupes de niveaux).

a) Description universitaire [2].

Nous n'avons pas entièrement rempli nos objectifs quant à la répartition des copies pour des raisons souvent exclusivement conjoncturelles; cependant, nous avons réussi à faire passer le questionnaire aux différents "niveaux" suivants :

- en 4ème année (maîtrise) (y compris à des agrégatifs (40), des normaliens (40) et à des étudiants préparant le CAPES (32)). Cela concerne 113 étudiants S + 22 non standard.
- en 3ème année (licence) (y compris à des normaliennes (16)). Cela concerne 75 étudiants S + 2 non standard.
- en 2ème année en classes de Math. Spé. (M', P, P'). Cela concerne 2 classes de M' une classe de P et une classe de P', soit 160 étudiants standard -et en DEUG II^{ème} année (175 copies standard + 2 non standard).
- en 1ère année. i) en classes de Math. Sup. entre 1 et 3 mois après le cours. Cela concerne 185 étudiants S + 58 non standard.

ii) en classes de Math. Sup. C [3] moins de 1 mois après le cours (tout de suite après les exercices). Cela concerne 96 copies S. Il y a 57 autres copies S relevées plus de 3 mois après le cours.

---

(1) Cf. Tableau II_1 .

(2) Cf. Tableau II_1 .

(3) ou "Agro".

iii) en DEUG première année aux trois moments suivants :

. Tout de suite après le cours, sans que les exercices aient été faits. Cela concerne 97 étudiants S qui constituent une section complète (répartie en 4 groupes de T.D.).

. Moins de 3 mois après le cours sur les suites (et après les exercices). Cela concerne 161 étudiants S + 13 non standard, divisés le cas échéant en 2 niveaux, moins d'un mois après le cours et les exercices, et entre un et trois mois après.(1)

. Plus de 3 mois après le cours sur les suites. Cela concerne 135 étudiants S .

Chacun de ces "niveaux" est ainsi caractérisé par le temps qui sépare l'audition du cours sur les suites et le passage du questionnaire, et par la filière d'enseignement (université-classe préparatoire).

Le cas échéant, nous nous intéresserons aux classes constituant chaque niveau pour vérifier s'il y a homogénéité ou non dans nos résultats. De plus, au vu des considérations du paragraphe L2, il serait vain de comparer des observations tirées de copies de DEUG 1 et de Math. Sup. par exemple, étant donné les différences de recrutement et d'enseignement. Par contre, cela a un sens entre le DEUG 1 et le DEUG 2, les Math. Sup. et les Math. Spé. ... Cela nous a amené à grouper les niveaux en 3 groupes au sein desquels nous nous autoriserons à faire des comparaisons.

Groupe I : DEUG 1ère année et DEUG 2ème année.

Groupe II : Math. Sup. C.

Groupe III : Math. Sup. , Math. Spé. , licence , maîtrise.

b) Description "sociologique".

Chaque étudiant était censé indiquer sur sa copie un certain nombre de renseignement sociologiques : son sexe, son âge, l'année et la série de son baccalauréat, le lieu où il étudie, la profession de ses parents, et son cursus universitaire le cas échéant. Ces renseignements n'ont pas été correctement fournis dans beaucoup de copies. Nous allons cependant donner ceux que nous possédons - c'est encore au

---

(1) Les effectifs N des étudiants interrogés entre un et trois mois étant très faibles.

chapitre 7 que nous allons mettre en relation ces données sociologiques (incomplètes) et les autres observations. Nous vérifierons au moins sur notre corpus les réalités bien connues de la discrimination sociale ...

i) les répartitions géographiques.

Nous avons essayé d'atteindre des classes susceptibles d'être différentes, de par leur éloignement de Paris, sans aucune systématisation. Ainsi, en Math. Sup., il y a deux classes du lycée Faidherbe à Lille, 3 classes du lycée Charlemagne à Paris, et une classe de Balzac ; par contre, les Math. Sup. C et les Math. Spé. sont parisiennes. En DEUG 2ème année, 4 académies sont représentées, en DEUG 1ère année, 3.

Cependant, nous ne chercherons absolument pas à comparer les copies suivant l'origine géographique ; au contraire, c'est un enrichissement de notre corpus que nous visons. Ce sont quand même les Universités de Paris VI et Paris VII qui sont les plus représentées (avec 194 et 331 copies).

Il_2 . Répartition des effectifs S par niveau et localisation géographique (effectifs standards).

	DEUG tout de suite après le cours	DEUG entre 1 et 3 mois après le cours	DEUG plus de 3 mois après le cours	DEUG deuxième année	Licence	Maîtrise	Math.Sup. entre 1 et 3 mois après le cours	Math.Sup. C moins d'1 mois après le cours	Math.Sup. C plus de 3 mois après le cours	Math.Spé.
Total	97	161	135	171	75	116	185	96	57	160
Composition	4 groupes de TD d'une même section parisienne de DEUG Paris VII	. 1 groupe TD de Grenoble . 1 groupe TD de Paris VI . 1 groupe TD de Paris XI . 3 groupes TD d'une même section DEUG de Paris VII . 3 groupes TD DEUG de Paris VII	. 2 groupes TD de DEUG de Paris VII . 3 groupes d'une même section à Orléans . 2 groupes d'une même section de Paris VI	. 1 groupe de Tours . 3 groupes de Lille . 1 groupe de Grenoble . 1 groupe de Paris VI . 2 groupes de Paris VII	. 1 groupe de Grenoble . 1 groupe de Paris VI . 1 groupe de Tours . 1 groupe de Paris VII . 1 groupe de Fontenaisiennes 1ère année	. Capésiens de Paris VII . 1 groupe de Paris VII . 1 groupe de Paris VI . Agrégatifs de Paris VI . Ensae +Sèvres	. 2 classes de Lille . 3 classes de Charlemagne (Paris) . 1 classe de Balzac	. 3 classes parisiennes (Lavoisier, Janson, Valéry)	. 2 classes parisiennes (St Louis)	. 2 classes M' (Charlemagne Ginette) . 1 classe P (Charlemagne) . 1 classe P' (Charlemagne)

ii) Le sexe des étudiants.

Nous avons 409 copies de filles, 881 copies de garçons, et 98 copies d'étudiants de sexe non précisé. Ceci donne 32% de filles sur le total des étudiants ayant donné l'indication. Or, la moyenne en science est de 34%; notre échantillon est, pour cette variable, représentatif : D'autant plus que nous ne connaissons pas la répartition correspondante en CPGE -mais nous pensons que le pourcentage de filles n'y monte pas ...

A titre indicatif, nous placerons les points "Filles" et "Garçons" sur les analyses globales de nos données du chapitre 7. Nous n'avons à ce sujet aucune interprétation à proposer.

iii) le baccalauréat.

Il y a 262 étudiants qui n'ont pas indiqué la série de leur bac. Parmi les 1 127 restant , 71% ont eu un bac C , 17% un bac D, 4% un bac E, 7% un bac F et 1% un bac d'une autre série. Voici le détail de cette répartition par groupe de niveaux:

(les pourcentages sont calculés sur le total de la ligne)

Série du bac. / Niveau	Série C	Série D	Série E	Total partiel	Autres (y compris inconnus)	Total
DEUG I	171 - 55%	114	24	309	84	393
DEUG II	58 - 64%	22	11	91	80	171
Sup. C	103 - 71%	42	0	145	8	153
Sup.	176 - 98%	1	2	179	6	185
Spé.	104 - 100%	0	0	104	56	160
Licence	66 - 93%	3	2	71	4	75
Maîtrise	39 - 87%	5	1	45	71	116
Total	717 - 76%	187 - 20%	40 - 4%	944	309	1253

Là encore, nous retrouvons des répartitions proches de celles que nous avons indiqué lorsque nous les reconnaissions globalement.

Il n'est intéressant d'étudier la série du bac que dans le cas des DEUG et des licences et maîtrises ; en classes préparatoires le "phénomène" Bac C est trop massif car statutaire (Bac C exigé à l'inscription) .

Nous placerons donc en points supplémentaires sur les analyses globales de nos données les séries de baccalauréat (cf. ch. 7).

iv) L'origine sociale des parents.

Ces renseignements sont trop partiels (58% des étudiants S ont indiqué la CSP[1] de leur père et 34% de leur mère) pour que nous les utilisions, si ce n'est à titre indicatif. Voici les répartitions de nos effectifs par CSP[1] :

catégorie socio-profess.	Père	Mère	Global Pop. Active (rappel)	Global Sciences (rappel)
Sans profession	37	132		
Exploitants Agricoles	20 - 3%	9 - 2%		
Patrons	60 - 14%	26 - 6%	7,5%	9,2%
Prof. libérales et Cadres Sup.	322 - 44%	77 - 18%	6,7%	31,7 %
Cadres moyens	116 - 16%	87 - 21%	12,7%	19,6%
Employés	52 - 7%	64 - 15%	17,6%	9 %
Ouvriers et ouvriers agricoles	81 - 11%	20 - 5%	39,4%	14,7%
Personnel de service	3	1		
Autre	39	6		
Total	730	422		
	523	831		

Les pourcentages sont calculés sur le total de la colonne (total de ceux qui ont répondu).

Nous avons cherché si des différences notables se faisaient jour par niveaux :

---

(1) Catégorie socio-professionnelle .

Répartitions par CSP et par niveau (profession du père).

Catégorie socio-professionnelle / Niveau	Total	Expl. Agr.	Patrons	Prof.Lib. et Cad.Sup.	Cadres Moyens	Empl.	Ouv.	Autres	Sans Prof.
DEUG I	235	6	19	87 - 37%	36	26	27	22	12
DEUG II	106	5	14	18 - 17%	20	6	25	4	14
Sup., Sup. C	230	4	17	124 - 54%	44	9	17	8	4
Spé.	55	1	2	37 - 67%	6	2	3	2	2
Licence	51	0	6	22 - 43%	3	5	7	4	4
Maîtrise	53	1	2	34 - 64%	7	4	2	2	1
Total	730	20	60	322 - 44%	116	52	81	42	37

Les pourcentages sont calculés sur le total de la ligne.

On ne peut pas en déduire grand-chose vu que la moitié des étudiants n'ont pas répondu. Il semble tout de même que l'origine sociale des étudiants des classes préparatoires et des étudiants arrivés en maîtrise soit plus "élevée" que celle des étudiants de DEUG et de licence. Ceci pourrait expliquer les différences constatées entre nos effectifs et les effectifs des étudiants en Sciences,en général, qui ne comportent pas les étudiants en classes préparatoires. Dans notre échantillon, en effet, il y a encore plus d'enfants d'origine "professions libérales et cadres supérieurs" que dans les universités scientifiques, et encore moins de fils et de filles d'ouvriers ... Il n'est pas exclu que des raisons géographiques (Paris par rapport au reste de la France) soient intervenues dans ce sens.

v) Le déroulement des études.

Nous avions demandé, à chaque étudiant, son âge (année de naissance), l'année où il a passé le baccalauréat, et une brève description de son cursus universitaire. Les réponses sur le cursus ont été très incomplètes ; nous n'avons pas pu déterminer ce qui nous intéressait le plus en second cycle, à savoir si l'étudiant était ou non passé par une classe préparatoire. Nous n'avons donc retenu que deux modalités : cursus normal ou non.

Un cursus est "normal" si 79=année du bac + 0 (resp. 1, 2, 3) suivant que l'étudiant est en 1ère (resp. 2ème, 3ème ou 4ème) année d'université. Dans les autres cas (y compris les cas "inconnus"), le cursus est anormal.
De plus, nous avons créé la variable "âge du bac" (année du bac– année de naissance). Voici les répartitions de ces variables par groupes de niveaux :

Age du bac. / Niveau	Inconnu	17 ans + 16 ans	18 ans	19 ans	20 ans	+ 20 ans	Total	Cursus Normal
DEUG I	53	30 + 1-9%	164-48%	90-26%	29	26	393	217 55%
DEUG II	17	24 - 16%	73-47%	40. 26%	11	6	171	27 16%
Sup., Sup. C	18	101 + 6-33%	179-56%	30 - 9%	4	0	338	320 96%
Spé.	12	45+5-34%	91 - 61%	6 - 4%	1	0	160	106 66%
Licence	1	22 - 30%	37 - 50%	12 - 16%	2	1	75	31 41%
Maîtrise	78	15+1. 42%	14 -37%	6 - 16%	2	0	116	6 5%
Total	179	237 +13-25%	558 - 52%	184 -17%	49	33	1253	707 56%

(Dans le tableau "âge du bac", les pourcentages sont des pourcentages lignes calculés sur le nombre total d'étudiants par ligne ayant indiqué "l'âge du bac" sur sa copie; dans la colonne "cursus normal", le pourcentage est calculé sur le total de la ligne).
Nous retrouvons que la classe d'âge majoritaire est la classe des bac à 18 ans, ce qui apparaissait déjà dans les données générales. Nous observons de plus qu'il y a une relation entre la filière et l'âge du bac, et la durée des études et l'âge du bac. Ainsi y-a-t-il plus de "jeunes" bacheliers (17 ans et moins) dans les classes préparatoires, en licence et en maîtrise. Il y a également, et corrélativement moins de "vieux bacheliers" (19 ans et plus) dans ces mêmes niveaux, le phénomène étant plus nuancé en licence et en maîtrise. Il est compréhensible qu'un élève ayant passé son baccalauréat tardivement ne se lance pas dans des études longues et aléatoires, d'autant plus que ce "retard" n'est peut-être pas indépendant de certains échecs antérieurs témoignant de difficultés.

Les classes dont le recrutement semble le plus "jeune" -pour ce qui est de l'âge du bac- sont les Math. Spé., puis les Math. Sup., suivies par les "licence" et les "maîtrise" (à égalité globalement, mais avec plus de bacheliers de 17 ans en maîtrise qu'en licence). Les DEUG I,II sont très proches l'un de l'autre et manifestent un recrutement plus hétérogène quant à cet "âge du bac".
Quant au"cursus", malheureusement, nos données sont insuffisantes; il est clair par exemple qu'en maîtrise, trop peu d'étudiants ont répondu pour que nous puissions donner un sens au pourcentage obtenu. Il apparaît tout de même que les étudiants de Sup. ont passé leur bac l'année précédente pour 96% d'entre eux (au moins) alors que ce n'est le cas que pour 55% des étudiants de DEUG I. Même si ces chiffres doivent être un peu majorés, la différence nous semble suffisamment importante pour traduire une réalité. Nous n'avons pas assez d'éléments, par contre, pour interpréter les autres pourcentages ; en tout cas vraisemblablement beaucoup de "redoublements" interviennent au cours d'une carrière universitaire standard...

En résumé

Notre population nous semble non pas représentative des étudiants en mathématiques français, mais non aberrante par rapport à leur ensemble.

2.2.7. Le dépouillement du questionnaire. Méthodes statistiques utilisées.

Nous avons effectué l'analyse "clinique" de chaque copie en établissant, au fur et à mesure, un code (1) permettant de repérer par des numéros la présence éventuelle sur chaque copie d'un certain nombre de traits caractéristiques des modèles exprimés et dessinés, des exemples de procédures, des performances et des erreurs rencontrés dans les exercices. Nous reviendrons dans les chapitres 3 à 6 sur les deux aspects que nous pouvons ainsi observer: la collection des réponses, la répartition des caractères retenus. Cette répartition apparaît sous forme de tableau d'effectifs

---

(1) Cf. Annexe ⑥ .

(tableaux de contingence) : globaux, par niveau, ou croisant deux caractères (répartition par modèle exprimé, par exemple). Des calculs de pourcentages[1] éventuellement suivis de tests de statistique descriptive nous permettent d'utiliser ces tableaux croisés pour faire des comparaisons et des rapprochements; par contre, si plus de deux caractères interviennent, ce qui est très fréquent, nous avons utilisé, pour repérer les ressemblances et des dissemblances, les analyses factorielles et les classements hiérarchiques que notre collègue J. Mac Aleese[2] s'est chargée de réaliser dans le cadre de son propre travail.
Ces analyses non classiques nous ont également permis de tester la pertinence de nos choix méthodologiques (par exemple, nous avons retenu tel caractère et pas tel autre dans les caractéristiques des modèles exprimés : est-ce pertinent au vu des relations des deux caractères avec les procédures ?) (Cf. ch. 7).

Enfin, nous avons aussi étudié la cohérence de chaque copie, par l'intermédiaire d'un"indice"de réussite et de l'indice d'implication mis au point par Monsieur Régis Gras[3]. Cela nous a permis de confirmer les hiérarchies établies cliniquement et dans les analyses factorielles, et de présenter les "types de comportements" qui se dégagent de nos copies.

---

(1) Lignes ou colonnes -pour les intervalles de confiance sur les pourcentages, cf. Annexe ⑦.

(2) Cf. Mac Aleese [2]

(3) Cf. Gras [1]

2.2.8. Critiques de la méthodologie.

a) Nous avons choisi de travailler sur des copies et non sur des interrogations orales. Ceci présente, outre les inconvénients théoriques déjà évoqués, l'inconvénient pratique de laisser en suspens certaines questions que nous nous posons. Ainsi, dans les exercices où l'énoncé est en "vrai" ou "faux", nous n'avons aucun renseignement sur l'origine des réponses sans aucune justification. A l'oral, il est plus facile, par une suite de questions bien posées, de cerner les idées des étudiants. Cependant, nos expériences en "entretien individuel" ne s'étaient pas avérées si concluantes sur ce point (à une exception près, évoquée en 3.1.1.). D'autre part, les relevés d'interrogations orales (magnétophone; magnétoscope) sont d'un dépouillement extrêmement long et fastidieux : nous n'aurions pas pu travailler sur 1 389 interviews. Encore une fois, nous pensons que dans un travail de "défrichement" comme le nôtre, il est bon d'utiliser toutes les formes d'observations suivant les moments.

b) Dans le même ordre d'idées, du fait de notre choix de relever des copies la même année 1979-80, notre étude présente aussi tous les inconvénients d'une analyse synchronique (transversale) par rapport à une analyse diachronique (longitudinale). Nous ne pouvons nous livrer qu'à des comparaisons "statistiques", c'est-à-dire que nos conclusions sur l'évolution des procédures ou des modèles exprimés ne sont que des tendances, mais fortement indicatives, de ce qui se passe effectivement chez chaque individu. Nous avons estimé qu'une observation des étudiants tout au long de leurs études serait particulièrement difficile à réaliser dans l'enseignement supérieur.

c) Enfin, nous devons revenir sur les difficultés propres au déroulement de ce travail. Il est délicat, comme nous l'avons signalé, de faire respecter un mode d'emploi; de plus je n'étais pas présente la plupart du temps lors des présentations du questionnaire, et souvent les contacts entre les collègues et moi ne se sont faits que par écrit. Ainsi, la distribution des variantes dans une même classe n'a-t-elle

pas été toujours aléatoire, comme je le souhaitais. Dans d'autres classes (maîtrise) le temps imparti a été un peu trop court. Nous n'avons pas toujours eu tous les renseignements que nous avions demandés sur la place du cours sur les suites, le moment de passage du questionnaire ...

Enfin, dans certaines classes, les étudiants n'ont pas apprécié d'être des "cobayes" et en particulier ont trouvé bien "naïves" les premières questions. Cela ne les a pas empêché dans l'ensemble de révéler leur modèle exprimé ...

En conclusion , cette méthodologie est assez lourde, mais, moyennant quelques améliorations dans les contacts avec les enseignants et les étudiants concernés et dans la conception des variantes, elle me semble adéquate au travail de défrichement dont nous allons maintenant exposer les résultats.

CHAPITRE 3 - LES MODELES EXPRIMES - LES EXEMPLES.

Dans une première partie, nous étudions les descriptions fournies par les étudiant en réponse aux questions 1) et 2) suivantes du texte V_1 :

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous, et quels dessins feriez-vous ?
2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune ?
Ensuite, définir une suite divergente.

Nous allons expliquer comment nous avons été amenée à poser ces questions, et comment nous avons "décrypté" les réponses des étudiants avant de donnner les résultats que nous déduisons de ces réponses, c'est-à-dire les types de modèles exprimés, leur répartition, une analyse critique de nos divers choix et quelques conjectures sur l'élaboration de ces modèles.
Dans la deuxième partie du chapitre, nous analysons les exemples fournis par les étudiants en réponse aux questions 3) et 4), et indiquons leurs rapports avec les modèles exprimés. Voici le plan de ce chapitre :

1ère partie: 3.1. Méthodologie.
- 3.1.1. Genèse. Variantes.
- 3.1.2. L'objet d'étude. a) le syntagme verbal.
  b) les "règles du jeu".
- 3.1.3. Les autres commentaires (sur la limite, sur la divergence, sur les suites).
- 3.1.4. Les représentations graphiques.

3.2. Les modèles.
- 3.2.1. Les modèles primitifs.
- 3.2.2. Les modèles dynamiques.

3.2.3. Les modèles statiques.

3.2.4. Le modèle mixte.

3.2.5. Pas de modèle.

3.3. Retour sur le mode de questionnement et la lecture des réponses

3.3.1. Stabilité des réponses.

3.3.2. Les commentaires sur la limite.

3.3.3. La divergence.

3.3.4. Le genre du dessin et le modèle dessiné.

3.3.5. Les erreurs.

3.4. Répartition des modèles.

3.4.1. Par niveau et par classe.

3.4.2. Stabilité.

3.4.3. Conjectures sur l'origine des modèles.

2ème partie. Les exemples.

3.1. Méthodologie.

3.1.1. La genèse. Les variantes.

Ces questions sont nées d'une partie des expériences "pré-test" que nous avons menées en 1978-1979. Nous avions alors organisé des "groupes d'entretien": c'étaient des groupes de 3 étudiants chacun, comportant un interrogateur, un interrogé (au tableau), et un observateur chargé de noter tout ce qu'il pouvait sur l'interrogation. Deux à trois groupes, à composition systématiquement variable parmi une dizaine d'étudiants fixés, ont ainsi fonctionné une fois par semaine pendant six mois; j'étais moi-même interrogateur dans un groupe. De plus, c'est moi qui proposais au début de la séance une même feuille d'exercices pour tous les groupes. Ces exercices étaient choisis parmi ceux que les collègues de Math. Sup. (avec qui je travaillais par ailleurs - Cf. Ch. 2) avaient relevés comme sources d'erreurs à l'écrit ou en colles -les erreurs étaient relevées en même temps. Si je n'ai pas exploité systématiquement le matériel obtenu (1), je me suis rendue compte que toutes les erreurs signalées par les collègues étaient refaites dans les différents groupes. Or, la plupart des étudiants étaient en quatrième année d'université, et c'est précisément cette persistance des erreurs qui, soulignée dans cette expérience de groupes d'entretien, est à l'origine de ce travail. Mais, de plus, comme une étudiante,qui préparait d'ailleurs le CAPES,(interrogée par moi) venait de commetre une de ces erreurs "attendues", j'ai essayé (légèrement irritée ...) d'en savoir plus sur la cause de cette erreur . Je lui ai donc posé diverses questions jusqu'à ce que je lui demande précisément d'imaginer ce qu'elle dirait pour expliquer à un élève plus jeune ce que c'est qu'une suite convergente. C'est cette question qui a déclenché les réponses les plus intéressantes, en mettant en évidence chez l'étudiante une représentation mentale de la convergence des suites numériques partiellement à l'origine de sa réponse erronée.

---

(1) Les observations ont donné lieu à un travail dans le C_4 "Enseignement des Mathématiques" (Monsieur Revuz- U.E.R. de Mathématiques, Université Paris VII)

Autrement dit, c'est le fait d'expliquer à un élève presque ignorant (ou de s'imaginer en train de le faire) qui l'avait amené à rechercher les images mentales qu'elle avait de la notion; c'est ce qui nous a amené à constater l'intérêt de l'explicitation de ces représentations par rapport aux procédures utilisées. Bien entendu, une telle explicitation, que nous obtiendrons par écrit rappelons-le, peut ne représenter qu'un aspect du modèle de convergence que s'est créé l'étudiant. D'autres aspects, éventuellement contradictoires, implicites, ou mobilisés par d'autres questions, peuvent ne pas apparaître ici. Cependant, dans le millier de copies où figurent des réponses à ces questions, nous avons trouvé suffisamment de régularités pour permettre une analyse constructive de cet aspect de la représentation de la convergence (que nous appelons dans la suite de ce travail "modèle exprimé").

Nous reviendrons ultérieurement sur ce mode de questionnement.

Indiquons dès maintenant que c'est pour tester la fiabilité des réponses que nous avons posé les questions sous la forme suivante (V_4 , V_7) :

" 1) Que vous évoque l'expression "suite convergente" ? Quelle représentation en avez-vous ? Que vous évoque l'expression "suite divergente" ? "

En effet, on peut craindre que le souci "pédagogique" soit plus important que le souci "introspectif" -il n'en est rien car lorsque l'on pose la question en "éliminant" la variable pédagogique, on obtient des réponses du même ordre. Nous étudierons les différences de répartition au paragraphe 3.3.1.

Nous vérifierons aussi que ni le vocabulaire utilisé, ni l'endroit du texte où se placent les questions n'ont d'importance significative sur la répartition des réponses au moyen des variantes V_2 et V_{11} suivantes :

V_2 : " 1) Si vous aviez à expliquer ce qu'est une suite ayant une limite à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous ?

2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune.

Ensuite définir une suite n'ayant pas de limites. "

V_{11} : le texte initial est placé après les exercices classiques constituant le reste du questionnaire.

Ainsi aurons-nous à notre disposition pour étudier les modèles exprimés

- toutes les copies"standard" [1] (1 253) (corpus S) ;
- toutes les copies standard où le texte posé est identique à celui de V_1 (corpus M_1).
- les lots V_2, $V_4 \cup V_7$ et V_{11} des copies correspondant aux classes où la variante proposée à la moitié des effectifs est V_2, V_4 ou V_7, V_{11} (corpus V_2, $V_4 \cup V_7, V_{11}$);
- éventuellement toutes les copies (1 389) (corpus T).
- toutes les copies"normales" [1] (662) (corpus N);

3.1.2. L'objet d'étude.

Précisons maintenant ce que nous avons étudié, et comment.

Rappelons, pour cela, le choix méthodologique que nous avons fait: nous déterminons des "catégories" de modèles exprimés exclusivement à partir des réponses à ces questions 1) et 2) (sans même retenir systématiquement toutes les informations contenues dans ces réponses comme nous allons le voir), nous confrontons ensuite ces catégories aux exemples, procédures et erreurs trouvés dans les copies correspondantes. Une autre décision aurait pu intervenir: déterminer des catégories de modèles à partir des descriptions et des exemples, ou des descriptions et des procédures, etc ... Notre choix a été effectué à la suite d'une rapide étude préalable ayant révélé qu'il n'y avait pas d'autres relations simples et intéressantes, susceptibles d'enrichir notre classement. Toutefois, nous avons testé la pertinence de nos catégories et de notre choix dans une étude postérieure présentée au chapitre 7. Nous vérifierons, à ce moment là, que notre méthode a révélé un maximum de relations intéressantes.

En général, dans une copie, nous trouvons une ou plusieurs phrases de description de la convergence d'une suite, utilisant au moins un syntagme verbal remplaçant en l'illustrant le verbe "converger", que ce soit dans une phrase concernant une

---

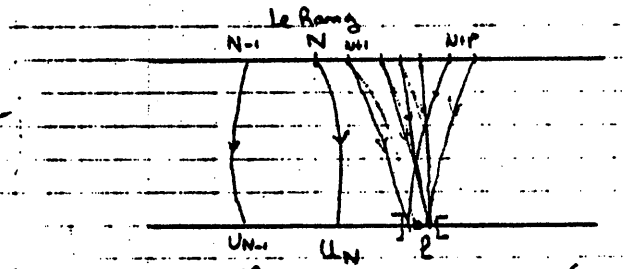
(1) Cf. Ch. 2.

suite quelconque, ou dans un exemple particulier. De plus, dans bon nombre de copies, figurent une définition des suites, et/ou un (ou plusieurs) dessin, et/ou un commentaire sur la limite de la suite convergente, et/ou une formule mathématique, et/ou un (ou plusieurs) exemples, et souvent une définition de la divergence. Ces éléments de réponses sont en général répartis sur deux questions.

En voici quelques exemples :

1) Explication d'une suite convergente : [2418]

C'est une application de l'ensemble des entiers naturels IN, dans un corps (par exemple IR), associant à chaque entier de IN un élément du corps, et telle qu'à partir d'un certain rang (d'un nombre assez grand) dans IN, mais N, l'image des entiers naturels supérieurs à IN est pratiquement semblable.
C'est donc une suite telle qu'à partir d'un certain nombre N, l'image des nombres entiers supérieurs à N tende vers un élément du corps, qui sera la limite de cette suite.



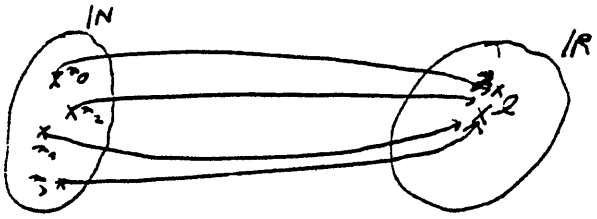
Il existe N.
Si un intervalle très petit centré en l, tel que les images des entiers supérieurs à N appartiennent à cet intervalle.

2) Définition pour un élève plus jeune.

On ne peut plus parler de corps.
On peut tout de même conserver le dessin et donner l'explication d'une suite convergente à partir du dessin.

- Définition d'une suite divergente :
Une suite est divergente si elle n'est pas convergente, c'est à dire que quel que soit le rang que l'on se donne, il n'existe aucun intervalle très petit tel que les images des entiers supérieurs au rang que l'on se donne appartiennent à un tel intervalle.
La suite n'admet pas de limite finie.

[2905] 1°) Une suite convergente est une application qui fait correspondre à un entier n un nombre réel et telle qu'à partir que pour un n_0 assez grand, l'image de tout entier supérieur à n_0 se "rapproche" d'un certain nombre fixé qui sera appelé la limite l.



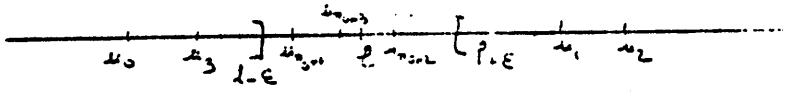
Définition : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| < \varepsilon.$

2°) Une suite divergente est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle que quel que soit un entier n_0, on puisse trouver un $n \geq n_0$ tel que son image ne soit pas proche de l'image de n_0. Suite qui ne converge pas.

[2706] 1) Suite : application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longmapsto f(n) = u_n$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l si pour tout intervalle de $\mathbb{R}$ d'amplitude ε et de centre l $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ on peut trouver une valeur n_0 de n, valeur à partir duquel tous les éléments de la suite se trouvent dans l'intervalle.
On peut rendre ε de plus en plus petit : la suite tend donc vers la valeur n



2) Une suite convergente est une suite de termes indexés par des valeurs entières. (termes de la forme u_n) qui à partir d'une certaine valeur de n, sont de plus en plus proches d'une certaine valeur l appelée limite de la suite.

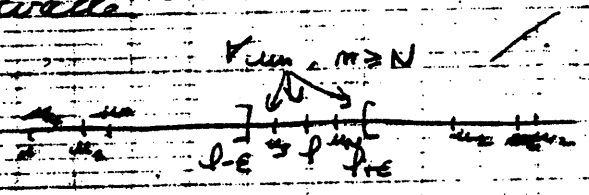
Une suite divergente est une suite qui ne converge pas.

[2404] variante V1

1) (u_n) : application de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

2) soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que (u_n) est convergente si $(\exists \ell \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)$ $(|u_n - \ell| < \varepsilon)$.

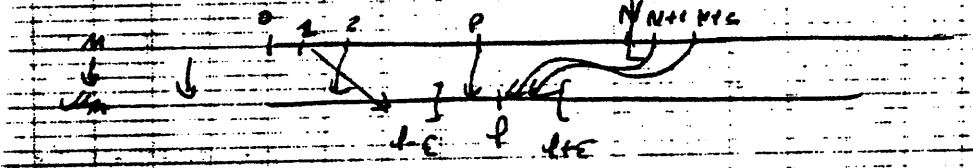
c'est une suite telle que pour tout intervalle ouvert de centre ℓ, on puisse trouver un $N \in \mathbb{N}$, t.q tous les termes de la suite à partir de ce rang N, c.ad pour $\forall n \geq N$, se retrouvent à l'intérieur de cet intervalle



tous les termes de (u_n) avant $n = N$, peuvent se trouver ou à l'extérieur de l'intervalle ou à l'intérieur, mais à partir de N ils sont tous à l'intérieur, c.ad que qd $n \to +\infty$ $(u_n) \to \ell$

3)

2)



Il s'agit de dégager de ces réponses des éléments qui donnent des indications sur la représentation de la convergence qu'ont les étudiants.
Nous avons choisi d'étudier successivement, pour ce faire, la (ou les) phrases où la convergence est évoquée, puis les commentaires supplémentaires éventuels, puis les dessins, le cas échéant, en précisant en cours d'étude les "règles du jeu" dans les cas où l'"attribution" d'un modèle exprimé n'est pas évidente.

a) L'objet d'étude : le syntagme verbal.

Nous commençons, dans chaque copie, par "décrypter" la (ou les) phrases consacrées à la convergence d'une suite (particulière ou générale). Or, il nous est apparu que les descriptions en langage naturel des étudiants relèvent de plusieurs choix implicites préalables dans l'appréhension des suites numériques, choix qui conditionnent la représentation de la convergence elle-même. Ces choix n'ont par ailleurs rien à voir avec les définitions des suites qui peuvent avoir été données. Ils portent

1- sur le caractère synchronique ou diachronique de la description de l'ensemble des u_n. Dans le premier cas, on considère tous les u_n "simultanément", on en a (ou on en donne) une représentation globale. Tout se passe comme si on décrivait l'ensemble des u_n en "compréhension". D'une façon ou d'une autre $\mathbb{R}$ intervient. Dans le second cas, on prend connaissance (ou on fait prendre connaissance) des u_n successivement -par exemple, on lit $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ Tout se passe comme si on décrivait l'ensemble des u_n en exhaustion -du moins "au début". Le temps intervient donc, plus ou moins explicitement.
2- sur l'interprétation des $u_n = f(n)$ comme valeur numérique ou comme point sur une droite réelle -conception "numérique" ou "géométrique".

Mais, d'autre part, ces choix sont rarement effectués complètement; le plus souvent les descriptions oscillent entre les deux pôles de chacun des choix -peut-être est-ce un essai (inconscient ?) de compléter chaque vision par l'autre.
D'autre part, grâce à ces différences initiales, on a pu rencontrer des

descriptions de la convergence aussi différentes que "tout intervalle autour de 1 contient tous les u_n, sauf un nombre fini" (utilisation d'une description synchronique géométrique) et "plus n augmente, plus la valeur de u_n se rapproche d'un nombre 1 " (utilisation d'une description diachronique numérique). Aussi avons-nous étudié, plutôt que ces différents choix, comment sur les images des suites correspondantes les étudiants se représentaient la convergence. Notre étude a donc porté essentiellement sur l'indicateur qui traduit "ce qui se passe" lorsqu'une suite numérique est convergente -et ce, quels que soient les choix précédents- à savoir le syntagme verbal utilisé. Nous nous intéressons précisément à - son sens (état, mouvement ou évolution dans le temps)

- son mode (singulier, pluriel)
- son temps (futur ou non)
- ses liens avec l'indice, le temps, etc ... dans tout ce qui est écrit (exemple ou description générale).

Par contre, les substantifs utilisés (u_n, f(n), valeur, terme, point, élément, objet, ...) n'ont pas servi à notre classification.

En effet, pour ce qui est des groupes sujets de ces différents syntagmes verbaux, la première constatation, outre leur grande variété, est le caractère aléatoire de leur distribution. Ainsi, avec le verbe "se rapprocher de" utilisé (lui ou un de ses synonymes) par plus du tiers des étudiants, on trouve des sujets aussi divers que la suite, le ou les terme(s), l' ou les élément(s), la ou les valeur(s), l'image, le ou les point(s), je, on, u_n, (u_n), la position, l'écart, la distance, sujets que l'on retrouve dans des proportions semblables devant un verbe comme "être accumulé" (ou un synonyme) qui sera classé dans un autre modèle exprimé. De plus, on trouve aussi des phrases comme "tout intervalle contient tous les (u_n) sauf un nombre fini" où le syntagme nominal qui nous intéresse devient groupe objet. En outre, il y a souvent deux phrases d'explication où les verbes sont éventuellement différents et les sujets aussi, ce qui aurait encore multiplié (artificiellement à notre avis) les "catégories" de modèles exprimés.

Enfin, il faudrait aussi tenir compte des expressions traduisant la limite. Or, les images véhiculées par des phrases comme "le point se rapproche de la valeur limite" ou "les termes se rapprochent du point limite" qui sont très fréquentes, ne sont ni exclusivement "géométriques", ni exclusivement "numériques". Donc, faire intervenir les groupes objets (limite, point, valeur ...) introduirait des distinctions encore plus compliquées et ne traduisant pas une réalité géométrique ou numérique de la représentation.

Dans un premier temps, en conséquence, nous n'avons tenu compte ni du sujet, ni du mot utilisé pour désigner la limite. Cela étant, nous avons vérifié par la suite, que les répartitions des procédures produites par des étudiants ayant exprimé un modèle utilisant le verbe "se rapprocher de" (ou un synonyme) précédé d'un sujet au singulier (terme général),au pluriel (les éléments), ou au singulier collectif (la suite, on, ...) sont identiques.

b) "Règles du jeu" pour l'attribution d'un modèle.

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le signaler, ces descriptions de la convergence peuvent intervenir en première question et/ou en deuxième question, dans des phrases à portée générale, ou dans les exemples. Nous devons donc préciser comment nous avons éventuellement choisi la ou les phrases dont les verbes fourniront le modèle exprimé de la copie.

Nous allons donc simultanément exposer les différents cas possibles et nos "conventions" dans le cadre des deux principes généraux suivants:

. En cas de conflit:

Lorsque deux modèles non "compatibles" (un erroné, un plus correct par exemple) co-existent, que ce soit dans une des deux questions ou dans les deux, nous avons généralement choisi la description la "meilleure", la plus riche, en privilégiant toutefois tout ce qui est écrit en langue naturelle sur les expressions en langage formel quelles qu'elles soient.

. Lorsque seuls des exemples sont produits dans 1) et/ou 2), si un modèle général se dégage, on en tient compte dans la mesure du principe précédent; si non, on met la copie dans le lot des copies "sans modèle exprimé" (qui sont distinguées des copies où les questions 1) et 2) ne sont pas abordées).
Cela étant, la deuxième question a eu plusieurs effets possibles.
Certains étudiants n'en ont pas tenu compte, ou ont répété sans modification leur description précédente -le modèle exprimé a donc été déterminé par la réponse à la première question. (Cela concerne 30% des étudiants ayant eu les deux questions sous les yeux, et les ayant abordées).

D'autres étudiants ont indiqué que pour les plus jeunes, il fallait surtout "donner des exemples", ou "donner des exemples concrets", ou "faire des expériences de dichotomie"; que ces considérations métamathématiques, qui concernent 42% des 747 étudiants M_1 ayant répondu aux deux questions soient ou non effectivement accompagnées d'exemples, elles ne sont pas intervenues comme telles dans notre interprétation de la réponse, c'est-à-dire que seule la question 1) a été prise en compte. Il en est de même pour les 4 étudiants M_1 qui préconisent en 2) de "supprimer tous les dessins", et pour les 38 autres qui, au contraire, sont favorables à "ne faire qu'un dessin"; ou encore pour certains étudiants qui indiquent qu'il faut "changer de vocabulaire" sans autre commentaire. Par contre, dans un certain nombre de copies, on trouve -et c'était même la raison d'être de cette deuxième question- une description différente dans les deux questions. On a alors tenu compte, dans le cadre des principes du début, des deux réponses, sans distinction particulière d'antériorité, pour attribuer un modèle à la copie. A priori, il est donc impossible de savoir si le modèle a été exprimé en 1) ou s'il résulte des deux questions.
Pour les 34 copies où la réponse à la question 2) était fausse, on n'a examiné que la question 1).

Précisons encore que seule une minorité d'étudiants donnent effectivement des exemples à cet endroit là. Il s'agit alors

- de suites particulières examinées quant à "la suite des valeurs prises" : suites arithmétiques, géométriques, suite $\frac{1}{n}$ (avec ou sans dessin commenté), suite $u_n = \frac{1}{2^n}$ ...
- du cas "concret" de la dichotomie (on coupe en 2, puis en 2, ...) ramené à "à la fin il ne reste rien", ou "à la fin il reste un petit bout mais indiscernable" ... appliqué soit à un gâteau, soit à une distance fixe.

En général, les exemples sont simplistes et souvent ne représentent même pas des suites, mais des restrictions à $[1,N]$ d'une fonction. Nous reviendrons au paragraphe 3.3.5 sur ce genre d'erreurs.

3.1.3. Les autres commentaires.

D'autres commentaires figurent dans un certain nombre de copies. En général, ils n'ont pas été considérés comme caractéristiques de l'image mentale recherchée -même les diverses "définitions" de la divergence, demandées dans le texte, n'ont rien apporté, sauf exception, à l'image de la convergence. Il n'y a eu que quelques copies dans lesquelles le verbe utilisé pour définir la divergence a éclairé le modèle exprimé par l'étudiant.

En effet, ces commentaires, pour certains, concernaient trop peu de copies; c'est le cas des exemples inclus dans les réponses aux questions 1) et 2); c'est le cas des commentaires sur la limite d'une suite qui ne sont ajoutés que par un tiers des étudiants. Dans le cas des définitions de la divergence, les réponses obtenues étaient beaucoup moins variées que les descriptions de la convergence et peu imagées. Ainsi, 57% des copies (1) où la divergence est abordée présentent une des phrases suivantes :
"une suite divergente est une suite non-convergente"
"une suite divergente n'a pas de limite (resp. limite finie)"
ou encore la négation de la phrase utilisée pour la convergence.
De même la définition des suites, que 61% des étudiants donnent en préliminaire à leurs explications sur la convergence, lorsqu'elle consiste en "une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$" n'éclaire pas l'image de la convergence que s'est créé l'étudiant. Or, plus de la moitié des étudiants qui définissent une

---

(1) Le pourcentage est le même dans tous les corpus.

suite en donnent précisément cette définition. Les autres se répartissent à peu près dans les mêmes proportions en ceux qui expliquent qu'on a "des nombres en relation entre eux", et ceux qui évoquent "des nombres définis les uns par rapport aux autres en fonction d'un nombre qui varie", ou "des éléments rangés", ou "ordonnés", ou encore "des éléments indexés", ou "numérotés".

Nous reviendrons sur ces commentaires pour les mettre en relation avec le modèle exprimé et enrichir ainsi nos catégories.

3.1.4. Les représentations graphiques.

Dans la mesure où nous reviendrons peu sur le détail de ces représentations nous les présentons dès maintenant.

a) Bien que seulement 3/4 des étudiants aient fait un dessin, et que les caractères distinctifs retenus sur ces dessins soient fort peu variés, l'apport des dessins à une étude des représentations mentales nous a semblé si important que nous l'avons retenu dans notre recherche de modèles.

Nous avons donc systématiquement étudié les dessins joints à chaque modèle exprimé. De plus, comme le modèle "dessiné", s'il n'est jamais contradictoire avec le modèle exprimé correspondant ne lui est pas identique, nous avons également étudié les rapports du premier avec certaines procédures, les exemples et des erreurs.

Or, les descriptions graphiques, elles aussi, relèvent de choix préalables qui concernent à la fois la représentation des suites et celle de leur convergence. Mais ces choix sont différents des précédents.

En effet, si la réalisation d'un dessin est diachronique (on place les éléments l'un après l'autre), la représentation graphique une fois terminée donne une vision synchronique (il n'y a pas l'équivalent du premier choix des modèles exprimés); de même, la plupart du temps, les "u_n" sont conçus comme des points sur une droite ou dans le plan (il n'y a pas l'équivalent du deuxième choix des modèles exprimés). Par contre, les choix portent sur le fait de présenter la suite * comme une fonction particulière (donc $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ figurent sur des axes orthogonaux(ou non) et on peut encore choisir de considérer la suite comme application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou comme restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui est réducteur).

* comme un ensemble de valeurs (u_n) réparties sur une droite (seul $\mathbb{R}$ figure).

* comme un ensemble de points (u_n) disposés (sans repérage) dans le plan.

Or ces choix conditionnent très fortement la représentation de la convergence. En effet, on ne peut représenter sur une épure l'infiniment petit ou l'infiniment grand [1]. Ainsi, ne peut-on qu'indiquer ce qui se passe (par extrapolation) quand n tend vers l'infini. De plus, il est difficile de représenter des fonctions non monotones ayant une limite autrement que sinusoïdales amorties dans le premier mode fonctionnel de représentation ou alternées dans le deuxième mode linéaire de représentation. Enfin, sur un dessin, on peut être tenté de représenter un cas simple, illustrant de façon immédiate et particulière un concept.
Plus précisément, nous avons trouvé les 4 genres suivants de représentations graphiques -numérotés de 1 à 4 et illustrés dans les figures 1 à 4 .

Genre 1 (Figure 1) - Représentation de la suite comme graphe de la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En général, les indices sont portés en abscisses plus ou moins explicitement, les "u_n" sont soit portés en ordonnées, soit directement indiqués sur la courbe, soit pas indiqués du tout; les"points" (n,u_n) sont placés de manière discrète dans le plan, ou reliés par le graphe de la fonction (cas a), b), c), e), f)). Cependant, dans certains cas, seul est représenté le graphe de la fonction (cas d) Dans tous ces dessins, la convergence se marque, soit par l'existence d'un asymptote, soit par une oscillation de plus en plus faible autour d'une droite, soit par l'existence d'un point fixe $f(x)=x$ (escalier-graphe). figures 1.1., 1.2., 1.3., 1.4. .

Genre 2 (Figure 2) - Représentation de la suite comme application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont représentés par deux droites parallèles ou deux patatoïdes voisins, et l'application est symbolisée par des flèches.
La convergence se marque alors par le rapprochement des flèches à un certain endroit. Toutes les dispositions respectives possibles ont été rencontrées (deux droites horizontales, verticales, $\mathbb{N}$ au-dessus ou au-dessous, etc...). Les indications d'indices ou de valeurs u_n peuvent ou non être omises.

Genre 3 (Figure 3) - Représentation "linéaire".

Seules les valeurs u_n figurent sur une droite. On a trouvé les u_n figurés par des traits se rapprochant de plus en plus, soit de part et d'autre, soit d'un même côté de la limite (3.1., 3.2.); quelquefois les u_n sont marqués avec des croix

---

(1) Cf. J. Rogalski, exposé au séminaire de Didactique des Mathématiques. Oct. 1981

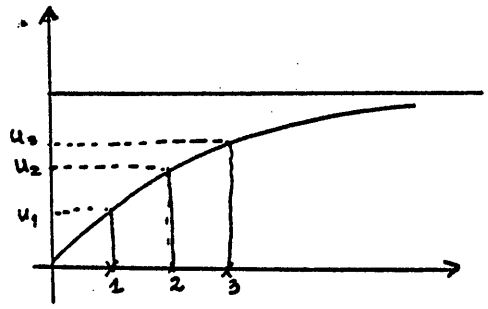
Genre 1

Représentation "Fonctionnelle"

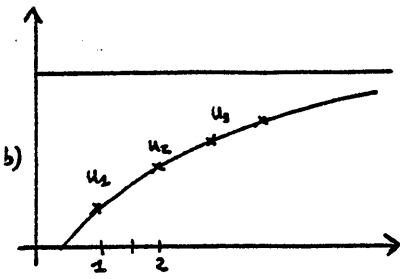
Les mêmes dessins existent avec une fonction décroissante.

Figure 1.

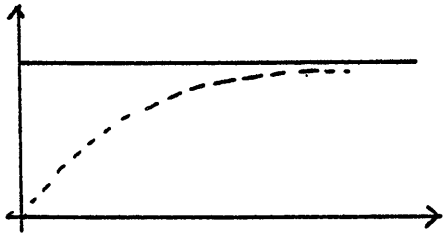
1.1 a)



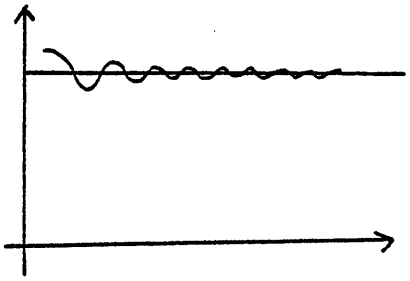
1.1 b)



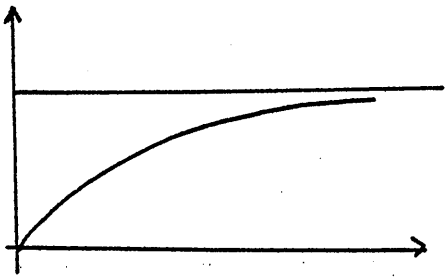
1.1 c)



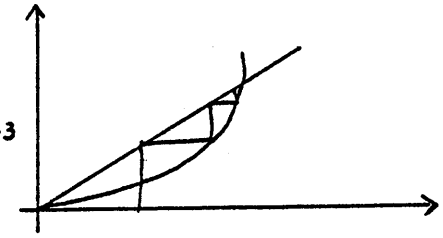
1.2



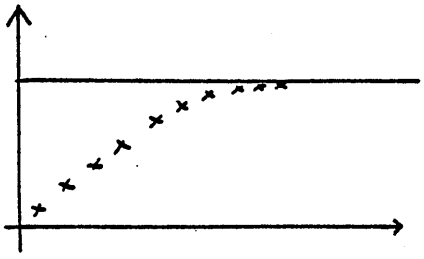
1.1 d)



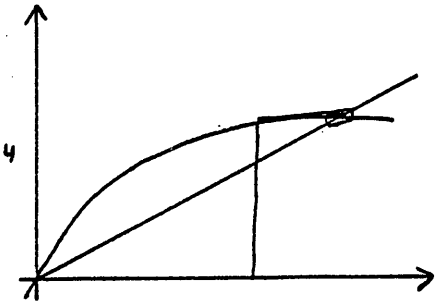
1.3



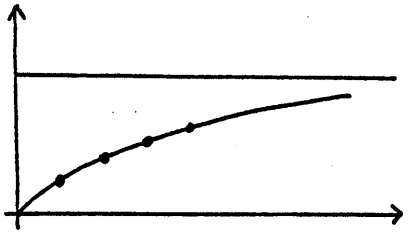
1.1 e)



1.4



1.1 f)

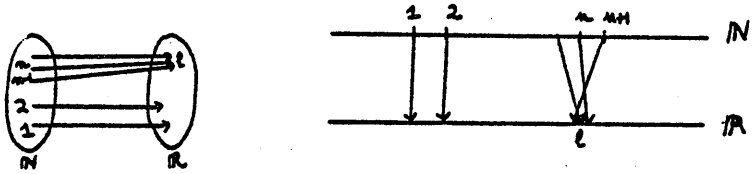


(3.3). Enfin, il se trouve des copies où ne figure qu'un intervalle autour de 1 , avec une ou deux valeurs de u_n représentées à l'intérieur (3.4).
Là encore, les indications explicites sont plus ou moins omises.

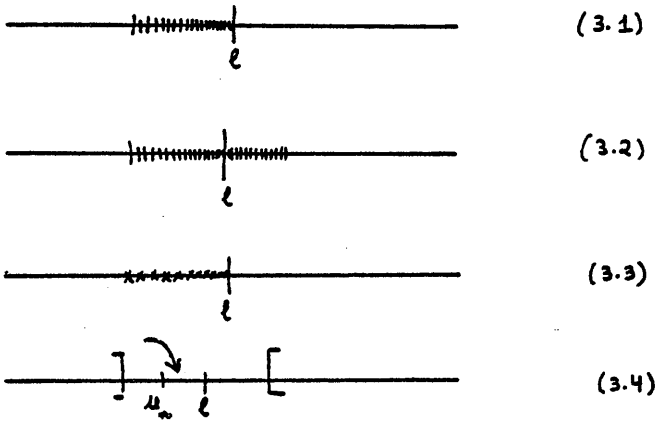
Genre 4 (Figure 4) - Représentation de la suite comme ensemble de points du plan dessinés sur une trajectoire souvent en spirale se rapprochant d'un point.

Nous n'avons pas tenu compte ici des dessins d'objets matériels de taille décroissante □ □ □ ... symbolisant une suite décroissante et dont nous parlerons au paragraphe 3.3.5.

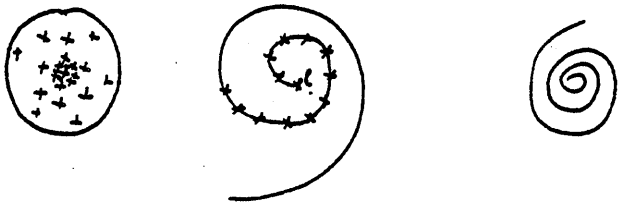
Genre 2
Figure 2.



Genre 3
Figure 3.



Genre 4
Figure 4.



b) En étudiant la répartition des genres des représentations graphiques par classes dans un même niveau, nous avons constaté que les choix préalables correspondants sont très différents d'une classe à l'autre-à niveau égal. Ainsi, sur les 4 groupes de T.D. constituant l'ensemble des étudiants[1] d'un même "amphi" de DEUG 1ère année, voici ce qu'on a trouvé :

Genre du dessin (Pourcentages calculés sur le total des dessins) par groupe (copies S)	Genre 1	Genre 2	Genre 3	Genre 4
Groupe 1	31%	23%	46%	0
Groupe 2	65%	18%	18%	0
Groupe 3	44%	0	56%	0
Groupe 4	94%	0	6%	0

L'influence de l'enseignant de T. D. s'avère vraisemblablement très importante au niveau du dessin. On ne trouve pas une telle hétérogénéité[2] dans la répartition des modèles exprimés dans ces groupes (cf. 3.4.1.).

La même étude en Math. Sup. (6 classes dont 3 d'un même lycée parisien et 2 d'un même lycée lillois) révèle une diversité analogue , mais, suivant les classes, on trouve deux fois le genre 1 utilisé majoritairement, une fois le genre 2 , et trois fois le genre 3 (et ce ne sont pas les classes d'un même établissement qui sont regroupées).

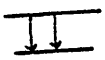
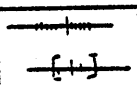
Genre du dessin (Pourcentages calculés sur le total des dessins) copies S	Genre 1	Genre 2	Genre 3	Genre 4
Classe Lille	8%	54%	36%	3%
Classe Lille	19%	16%	58%	6%
Classe Paris	52%	9%	26%	13%
Classe Paris	38%	17%	17%	29%
Classe Paris	26%	7%	52%	14%
Classe isolée	30%	5%	45%	20%

(1) Ces étudiants constituent notre premier niveau de DEUG après le cours.

(2) Les répartitions des modèles exprimés ne seront cependant pas homogènes par groupes de TD ou classes d'un même niveau.

D'autre part, certains types de représentations disparaissent au fur et à mesure des études, remplacées par d'autres, sans que les caractères propres à la convergenre des suites qu'on veut représenter soient nécessairement différents.

Ainsi, pour quelques niveaux, on a établi le tableau suivant :

Genre du dessin (Les pourcentages sont calculés sur le total des dessins du niveau (copies S))	Genre 1	 Genre 2	 Genre 3	Genre 4	Total des dessins étudiés
DEUG tout de suite après le cours - sans exercices	63%	11%	27%	0	56
DEUG moins de 3 mois après le cours	38%	9%	43%	9%	85
DEUG plus de 3 mois après le cours	31%	10%	54%	4%	70
DEUG II	36%	3%	47%	14%	100
Math. Sup.	26%	21%	40%	13%	164
Math. Spé.	36%	2%	41%	21%	129
Licence	29%	4%	48%	20%	56
Maîtrise	29%	0	63%	9%	56

On constate que le genre 1 -à part en DEUG tout de suite après le cours- concerne environ 30% des copies (à 5% près); la représentation du genre 2 diminue au cours des années, par contre (et corrélativement) le genre 3 concerne entre 40 et 60% des étudiants et se trouve en augmentation. Les représentations dans le plan (genre 4), moins usuelles, sont adoptées par au plus 20% des étudiants.

Cela étant, à part en DEUG tout de suite après le cours et en maîtrise, la répartition n'est pas si différente d'un niveau à l'autre et les différences par classes sont quelquefois plus importantes au sein d'un même niveau que les différences par niveau. Ceci renforce notre hypothèse de l'importance de l'enseignement actuel et antérieur sur le mode de représentation graphique et nous a

amené à ne pas tenir compte dans le modèle dessiné du genre de dessin.

Il en résulte que nous avons regardé sur les dessins exclusivement ce qui concerne la convergence. Il y a deux éléments qui interviennent à priori: la monotonie de la représentation, le caractère de la limite (atteint, dépassé, etc...). Mais l'estimation de ce dernier trait sur le dessin s'est avérée si souvent ambigüe que nous ne l'avons pas retenu -après avoir vérifié cependant qu'il n'y avait pas de contradiction entre le commentaire sur la limite et le dessin (un seul cas sur 1253).

Nous avons donc retenu des dessins leur seul caractère monotone ou non; celui-ci a été confronté au modèle exprimé (et s'est avéré non contradictoire), mais également aux exemples, et à certaines procédures et erreurs des étudiants.

Ce"modèle dessiné" à deux modalités concerne 3/4 des étudiants ayant abordé les questions 1) et 2) dans les conditions standard. Il est attribué indépendamment de la question (1 ou 2) où figure le dessin; si deux dessins dont un non monotone figurent, c'est celuidque l'on retient;

Voici l'étude de la répartition de ces modèles dessinés par niveaux (copies S).

On va voir que la répartition est très différente d'un niveau à l'autre. Nous étudierons plus loin la répartition des dessins (genres et monotonie) par modèles exprimés.

c) Les modèles dessinés par niveaux (copies S). (Tableau III.1)

Sur les 1 253 copies, il y en a 459 qui ne présentent pas de dessin "concluant", pas de dessin du tout, ou bien un dessin dont on ne peut décider s'il est ou non monotone.

Sur les 794 restantes, on trouve 373 copies où la représentation graphique accompagnant les questions 1) et 2) est non monotone (soit 47% des copies), et 421 où, au contraire, le dessin est monotone -avec 226 copies où le dessin est monotone croissant (un peu plus de la moitié des copies monotones), 146 copies où le dessin est monotone décroissant et 49 copies où il y a au moins 2 représentations monotones -une de chaque sens.

On constate qu'en DEUG 1ère et 2ème année, il y a plus de dessins monotones (dans chaque niveau); dans le troisième groupe au contraire, il y a plus de dessins non

monotones -surtout en Math. Sup. et en maîtrise; et dans le deuxième groupe, si un mois après le cours les dessins monotones sont plus représentés, plus de 3 mois après le cours, la tendance s'est inversée, et ce sont les dessins non monotones qui dominent !

Enfin, en ce qui concerne la part des représentations monotones croissantes parmi les représentations monotones, elle a tendance à décroître dans le premier groupe de 73% en DEUG tout de suite après le cours à 42% en DEUG II; dans le troisième groupe, elle se situe entre 40 et 50% à peu près, et dans le deuxième groupe, entre 60 et 55% -on oscille entre plus de la moitié et un peu moins de la moitié.

Répartition des modèles dessinés par niveaux (copies S). (Tableau III,1)

Dessins	Absent	Non Monotone	Monotone↗	Monotone↘	Monotone, non précisé	Total Monotone	Total
DEUG tout de suite après le cours	44	16 - 30%	27 - (73%)	4	6	37 - 70%	97
DEUG moins de 3 mois après le cours	74	30 - 34%	30 - (53%)	18	9	57 - 66%	161
DEUG plus de 3 mois après le cours	52	26 - 31%	37 - (65%)	14	6	57 - 69%	135
DEUG II	78	27 - 29%	28 - (42%)	31	4	66 - 71%	171
Sup.	33	96 - 63%	25 - (45%)	27	4	56 - 37%	185
Spé.	48	56 - 50%	30 - (53%)	21	5	56 - 50%	160
Licence	36	22 - 56%	7 - (41%)	10	0	17 - 44%	75
Maîtrise	47	53 - 77%	7 - (44%)	8	1	16 - 23%	116
Sup. C	24	24 - 33%	29 (60%)	10	9	48 - 67%	96
Sup C	23	23 - 68%	6 (55%)	3	2	11 - 32%	57
Total	459	373 - 47%	226 - (54%)	146	49	421 - 53%	1253

Les chiffres indiqués sont des effectifs -les pourcentages des dessins non monotones et monotones sont calculés sur le total des dessins produits par niveaux.
Les pourcentages de dessins monotones croissants (%) sont calculés sur le total des dessins monotones par niveau.

Les analyses que nous ferons de la répartition des dessins par modèles exprimés et par procédures vont confirmer ce qui se dessine ici: autant le genre du dessin s'avèrera peu discriminant dans la conduite des étudiants, autant le caractère, monotone ou non, de la représentation graphique sera lié à l'expression de modèles, erronés ou non, et à la production de procédures, erronées ou non.

3.2. Les modèles exprimés.

Voici donc maintenant l'étude des catégories de modèles exprimés.

Cette étude a été réalisée sur les 1 253 copies standard (copies S). Toutefois, dans certains cas, seules les 1 057 copies standard réponses au seul texte V_1 (corpus M_1) sont prises en compte dans les calculs de pourcentages pour ne pas introduire dans nos estimations quantitatives de paramètre quant à la forme des questions posées -(alors, la précision en est explicitement donnée).

Indiquons d'entrée que 1 199 étudiants S (resp. 1 005 M) sur 1 253 S (resp. 1 057 M_1) (96% (resp. 95%)) abordent -ne serait-ce qu'en une ligne- les questions 1) et 2) et que c'est évidemment ces copies-là dont nous essayons ici d'analyser les descriptions. Les pourcentages sont donc toujours calculés par rapport à ces totaux-là.

Dans toutes les citations extraites de copies, nous recopions des phrases ou morceaux de phrases concernant les suites convergentes; l désigne la limite, u_n le terme général d'une telle suite. Le numéro entre crochets est le numéro affecté à la copie.

3.2.1. Les modèles primitifs (stationnaire, barrière, monotone).

Nous avons regroupé dans ce paragraphe un certain nombre de descriptions incomplètes de la convergence des suites, mais qui relèvent tout de même de représentations mentales exprimées d'une notion effectivement difficile à saisir.

a) Le modèle "stationnaire" (38 copies S).

Dans 20 copies, une suite convergente est décrite par des phrases du type suivant:

"Les termes sont les mêmes à partir d'un certain rang" [3920] ; ou encore

"Les derniers termes ont toujours la même valeur..." [4722] .

L'ambiguité de la dernière citation est bien plus présente dans les descriptions suivantes -qui concernent 18 autres copies- d'une suite convergente :

"Le terme le plus grand prend une valeur finie" [4738] .

"Le dernier terme est calculable" [4779] .

"La suite se termine ..." [3146] .

Il y a là une confusion entre les indices n qui décrivent $\mathbb{N}$ et les valeurs u_n de la suite qui peuvent être en nombre fini.

Cependant, toutes ces descriptions témoignent d'une conception simpliste de la convergence tentant de résoudre la "contradiction" entre l'infinité des indices et l'accumulation autour de la limite des valeurs de la suite.

Dans la première tentative, on rend tous les termes égaux, dans la seconde, on ne tient pas compte du caractère infini de $\mathbb{N}$ grâce à la confusion entre indices et valeurs.

b) Le modèle "barrière" (26 copies S).

C'est d'un autre esprit que procèdent les descriptions suivantes d'une suite convergente qui concernent 26 copies:

"Ses valeurs ne peuvent dépasser 1" [2604] , ou

"Ses valeurs restent inférieures à 1 et ne le dépassent jamais" [2607] .

Autrement dit, la convergence d'une suite, dans ces réponses, est assimilée au fait qu'un certain nombre (la limite 1) n'est pas dépassée.

On retrouve là la conception d'une limite "barrière infranchissable", peut-être héritée du sens du mot limite en français courant (comme le suggèrent les travaux de B. Cornu).

On a d'ailleurs trouvé dans une copie [3614] le même modèle exprimé ainsi:

"Une suite convergente est une suite telle qu'elle n'atteigne pas une certaine limite" avec le dessin

c) Les modèles intermédiaires (2 copies S).

Il y a 2 copies où sont développées des descriptions de la convergence qui nous semblent relever des deux modèles précédents, du type suivant:

"Une suite convergente est une suite qui admet un terme plus grand que tous les autres" [1612] .

Nous regrouperons ces copies avec les modèles stationnaires.

Les représentations graphiques qui se trouvent dans 45 des copies S concernées par les modèles précédents (soit 69%) sont monotones dans 34 copies sur 45, et d'autre part, réparties en 37% de représentations fonctionnelles, 33% linéaires et 26% de dessins non classiques dans le plan. Par contre, si on distingue les modèles a) et c) d'une part, b) d'autre part, il apparaît que le modèle stationnaire est plus souvent associé à une représentation fonctionnelle et le modèle barrière à une représentation du genre 2 . Ceci concerne trop peu de copies pour y voir autre chose qu'une indication plausible d'un lien causal.
Des recherches ultérieures pourraient permettre de repérer s'il y a effectivement certains modes de représentations plus susceptibles que d'autres d'être associés à des modèles erronés.

d) Le modèle monotone (36 copies S).

Il y a 36 copies (de 1ère et 2ème année) où figurent des descriptions du type suivant:

"Une suite est convergente si elle est croissante majorée (ou décroissante minorée)" [113];

" Une suite convergente est une suite croissante qui ne peut dépasser sa limite" [2205] .

De plus, ces descriptions sont accompagnées dans 56% de ces copies (soit 20) d'une représentation graphique, qui est monotone dans 16 copies sur 20 (et même croissante dans 10 copies), et dont on ne peut rien dire dans les 4 copies restantes. C'est le seul cas où il n'y ait aucun dessin "franchement" non monotone associé à quelques copies au moins d'un modèle donné. Par ailleurs, 14 de ces dessins sont "linéaires". Dans l'expression de ce modèle se manifestent de façon certaine les traces de l'enseignement -avant lequel le théorème sur les suites monotones bornées est inconnu des élèves. Rappelons ici, en outre, l'importance de ce théorème dans les exercices d'application du cours sur les suites numériques
Cela étant, dans la mesure où nous vérifierons que ce modèle est associé à des procédures erronées, peut-on parler d'insuffisance de l'enseignement ? Doit-on penser, au contraire, que la conception simplifiée de la convergence correspondant à ce modèle est indispensable chez certains et précède l'installation d'une représentation plus exacte -comme l'Histoire peut nous le suggérer ?
En tout cas, on peut constater que seuls les étudiants d'université (35 sur 36) produisent ce modèle -ce qui n'avance à rien pour la réponse aux questions

précédentes vu: les différences de recrutement soulignées par nous entre les filières de premier cycle.

Plus généralement, il est intéressant de chercher à cerner si la disparition des modèles "primitifs" précédents est aléatoire ou correspond à la disparition des causes que nous avons envisagées pour la genèse de ces modèles. Les effectifs que nous avons à notre disposition sont trop faibles pour que nous puissions affirmer autre chose que le caractère non contradictoire de la répartition des modèles par niveau et de l'origine de leur production (c'est-à-dire sens français du mot limite, paradoxe de l'infini, enseignement mal "digéré"). Voici cette répartition.

Modèles primitifs Copies S (Effectifs)	Modèle barrière	Stationnaire	Monotone
DEUG après le cours sans exercices	5	1	9
DEUG moins de 3 mois après le cours	4	4	11
DEUG plus de 3 mois après le cours	4	10	4
DEUG 2ème année	6	12	11
Math. Sup. C moins d'1 mois après	3	4	0
Math. Sup. C plus de 3 mois après	1	6	0
Math. Sup. entre 1 et 3 mois	2	0	1
Math. Spé.	1	3	0
Total	26	40	36

Nous constatons que le modèle monotone disparaît en Math. Spé.; le modèle "barrière" est plus important que le modèle "stationnaire" en DEUG tout de suite après le cours et en Math. Sup.; par contre, c'est en deuxième année, et trois mois après le cours, que, dans toutes les filières, le modèle stationnaire est

plus exprimé que le modèle barrière et le modèle monotone moins exprimé que le modèle stationnaire. On peut donc confirmer que les difficultés de conception de la notion dûes au sens "usuel" des mots et à une mauvaise assimilation du cours disparaissent avant celles qui relèvent du paradoxe de l'infini.

Dans la suite de ce travail, nous regroupons tous ces modèles en une même catégorie "modèles primitifs" (sauf cas particuliers).

3.2.2. Les modèles dynamiques (dynamique - dynamique monotone - "Tend vers"). Plusieurs modèles sont répertoriés ici -ainsi figurent dans cette catégorie les copies où l'on trouve des représentations plus diachroniques que synchroniques comme dans les phrases suivantes:

"Plus n augmente, plus u_n se rapproche d'un nombre" [0303] ;

"Les images se rapprochent d'un nombre de plus en plus près" [0324];

"Plus n augmente, plus la distance de u_n à 1 est petite" [4319] .

Mais aussi :

"u_n tend vers 1" ou "les valeurs de u_n tendent vers 1" et

"u_{n+1} est plus près de 1 que u_n" .

a) Description du modèle "tend vers".

Nous avons distingué les copies où le seul verbe utilisé dans la description est le verbe "tendre vers" (une limite) -au singulier ou au pluriel. Nous avons estimé que le sens français de verbe de mouvement de "tendre vers" a été trop banalisé par son utilisation mathématique pour que nous puissions ranger ces descriptions dans celles où le syntagme verbal indique réellement un mouvement ou une évolution dans le temps. Nous avons donc attribué aux 84 copies S concernées le modèle "tend vers". Nous estimons qu'une interprétation dynamique ne peut être exclue -ainsi c'est ce modèle qui est attribué (et non un autre modèle ne prenant en compte que les tautologies) si les explications produites sont les suivantes: "une suite convergente a une limite vers laquelle elle tend". De plus, si dans une même copie coexistent un modèle primitif et une description de ce type, c'est le modèle "tend vers" qui est"attribué". Ainsi, pour la copie suivante: "tous les termes de la suite qui viennent après ce rang seront égaux à la valeur ou tendront vers la valeur".

Quant aux représentations graphiques, 47 copies sur les 71 copies du corpus M_1 ayant le modèle "tend vers" -soit les 2/3- en présentent une; mais 66% de ces dessins représentent des suites monotones (dont 45% sont croissantes).

Nous verrons que seulement la moitié (53%) des dessins associés à des expressions de modèles dynamiques sont monotones, ce qui est un premier élément justifiant notre distinction.

b) Description du modèle dynamique (36% des copies S).

Il s'agit des perceptions (ou des communications) de la convergence en termes d'évolution. Il y a l'indication d'un processus (interne à la suite), "quelque chose lié à la suite" bouge, quelque chose de la suite change, soit dans le temps, soit avec l'indice, soit avec une autre variable éventuellement implicite.

* Ainsi les syntagmes verbaux utilisés peuvent-ils marquer une évolution dans l'espace -il s'agit des formes actives d'un verbe de mouvement comme "se rapprocher de, s'écraser, se resserrer, se tasser, se masser, s'agglutiner, s'accumuler, augmenter ou diminuer (pour une distance), se regrouper, se concentrer, aboutir à, ou être de plus en plus proche, de plus en plus rapprochés, être de plus en plus voisin (près)".

On classe aussi les formes actives des syntagmes verbaux qui indiquent une évolution dans le temps comme: "devenir, tendre à (se rapprocher)".

Souvent le futur renforce l'idée de changement, de perception diachronique.

Toutefois, si c'est la seule marque d'évolution, on ne la prend pas en compte.

(Ainsi, la description: "tous les u_n seront proches de 1 " n'est pas classée comme dynamique).

De même, toutes les formes passives ou substantivées des verbes cités plus haut, utilisés sans marque d'évolution, ne sont pas classées ici.

Ainsi, "on peut rendre u_n et 1 aussi proches qu'on veut"

"les u_n à partir d'un certain rang sont agglutinés (groupés) autour d'un point" ...

"Il y a un rassemblement autour de 1 "

ne sont pas considérées comme des descriptions dynamiques.

Dans la première, c'est l'intervention possible du mathématicien "devant la suite" qui est prise en compte, et non la suite qui change, dans la seconde, il n'y a que le résultat d'une éventuelle évolution que nous ne prenons pas en compte.

* Le sujet du syntagme verbal peut être

au singulier (u_n , la valeur (de) u_n , le terme, la position de la valeur, l'écart, la distance);

au singulier "collectif" (la suite, la fonction, l'application, on, elle)

au pluriel (les éléments, les u_n , les valeurs, les termes, les points ...).

On a même trouvé "je me rapproche de 1 ...".

Cela étant dans plusieurs copies, coexistent une phrase au singulier et une autre au pluriel. Dans d'autres, où c'est un exemple qui a permis de dégager un modèle plus général, le singulier ou le pluriel est beaucoup moins indicatif que dans les copies où figurent une phrase générale.

En attribuant DYL aux sujets singuliers, DYGLaux singuliers collectifs, aux exemples, aux coexistences des deux modes, DYG aux sujets pluriels, nous avons constaté, pour les copies S , les répartitions suivantes du modèle dynamique:

(effectifs) Genre des copies S dynamiques	genre DYL	genre DYG	genre DYGL
DEUG 1 après le cours sans exercices	8	3	5
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	4	9	4
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	7	3	4
DEUG 2ème année	7	24	7
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	7	9	2
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	5	3	2
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	12	19	6
MATH. SPE.	12	17	9
LICENCE (3ème année)	6	8	3
(4ème année) MAITRISE	4	11	5
TOTAL (effectifs)	72	112	47

Cependant, comme nous avons centré notre intérêt sur la seule existence d'une indication de mouvement ou d'évolution dans le temps, nous avons opté de ne pas faire cette distinction. C'est au chapitre 7 que sera testée la pertinence de cette décision.

* Les facteurs déterminant le "processus" peuvent être l'indice (plus n augmente, quand n devient infini, au fur et à mesure que n croît), le temps (au bout, après un certain temps, petit à petit, de plus en plus, sans cesse, finit par se rapprocher), ou ne pas être précisés -c'est ce qui nous a fait parler d'une représentation implicite de u_n comme un petit mobile se déplaçant sur une droite vers sa limite (en extrapolant les phrases présentées).
Beaucoup d'exemples d'ailleurs font état de trains, voitures, vélos, billes et autres mobiles et véhiculent ainsi des idées fausses quant à la nature même des suites (applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ et non de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

* On n'a pas attaché d'importance au fait que soit précisé ou non que u_n se rapproche de plus en plus près -car cette précision nous semble toujours au moins implicite.

* Les termes de la suite sont plutôt visualisés comme des points sur une droite, mais pas nécessairement, ni exclusivement. On a trouvé :
"Les valeurs se ressemblent de plus en plus ..."
"La valeur de u_n se rapproche de plus en plus d'un point donné ..."
"Ces nombres vont se rapprocher d'une valeur ..."
"L'écart entre u_n et 1 diminue ..."

c) Elargissement de la classification.

Cela étant, nous avons encore attribué ce modèle à des descriptions correspondant à des déformations de ce qui précède que nous jugeons mineures par rapport

à ce que nous cherchons à caractériser (l'image mentale). En effet, nous admettons des imprécisions sur les facteurs déterminant l'évolution comme

+ confusions ou ambiguïtés entre n et u_n .

+ intervention du temps à la place de l'indice.

Ainsi dans les copies suivantes, les descriptions des suites convergentes sont considérées comme dynamiques :
" Les points se rapprochent en même temps que la position des nombres devient de plus en plus grande"
" Tous les n croissants se rapprochent ..."
" Plus un nombre est éloigné, plus ils se rapprochent ..."
Et la même conclusion avec comme préliminaire :
" Les images de points de plus en plus grands ..."
" Plus on avance dans la suite ..."
" Plus on s'éloigne du second terme ..."
" Au fur et à mesure qu'on lit les nombres, ..."
Quant aux commentaires sur la limite, ils n'ont pas été pris en compte pour l'attribution du modèle.
On a rencontré des suites se rapprochant de leur limite sans l'atteindre, ou sans la dépasser ... Nous y voyons encore une fois l'indice d'une éventuelle confusion entre les indices et les valeurs prises par la suite. Cette erreur est flagrante dans les dernières copies suivantes, encore rangées dans le modèle dynamique; une suite convergente est ainsi décrite :
" Le dernier terme s'approche de sa limite" [4736]
" Les derniers éléments s'approchent d'une certaine valeur" [0314]
Nous reviendrons globalement sur ce genre d'erreurs que nous avons déjà rencontrées dans les modèles primitifs.

Nous allons maintenant aborder la "déformation" que nous n'avons pas admise:

l'expression d'un rapprochement explicitement monotone.

d) Le modèle dynamique et la monotonie - Le cas particulier du modèle "dynamique monotone".

Il est important de remarquer en premier lieu que le verbe "se rapprocher de" peut être substitué -apparemment- à l'expression en langage courant "diminuer la distance". Ainsi, pourrait-on traduire l'expression "quand n augmente, u_n se rapproche de 1 " par "la distance de u_n à 1 est une fonction décroissante de n ". Il nous semble qu'une telle traduction est fausse et que l'image "réelle" associée aux mots "se rapprocher de" n'est pas nécessairement monotone.
Rappelons-nous le vocabulaire utilisé par Cauchy lui-même qui savait très bien que les suites convergentes ne sont pas nécessairement monotones: "u_n décroisse indéfiniment ...". De même, notre propre utilisation "non contrôlée" du mot et

même certains manuels nous semblent aller dans le même sens. Un étudiant questionné "à chaud" par une collègue lui a expliqué qu'il faut comprendre ce rapprochement globalement, "en gros" ... Enfin, presqu'un dessin sur deux associés à ces représentations n'est précisément pas monotone.

En effet, des représentations graphiques sont associées à 80% des copies M_1 où un modèle dynamique est exprimé et 38% des dessins ne sont pas monotones, 53% sont monotones et le reste est ambigü.

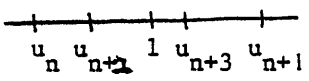
Cela étant, dans un certain nombre de copies, par contre, une image monotone est explicitement associée à la description de la convergence. Mais, on rencontre deux"genres" de monotonie :

i) La monotonie usuelle. Ainsi dans cette copie [0321]

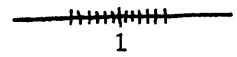
"C'est une suite qui croit toujours; de plus elle s'approche d'une certaine valeur plus elle croit, sans jamais y parvenir."

ii) La monotonie "de deuxième espèce". Deux sous-suites monotones alternent de part et d'autre de la limite.

Ainsi, a-t-on relevé dans une copie le commentaire

" u_{n+1} est plus près de 1 que u_n " accompagné du dessin 

ou encore dans la copie [4724]

"La suite se rapproche d'un nombre, i.e. $|u_n-1|$ se rapproche de 0 , i.e. $0<|u_{n+1}-1|<|u_n-1|$ " accompagné du dessin 

Cela rend particulièrement lifficile l'interprétation de phrases du type :

[6910] "La distance des points à la limite décroit" ou bien

"Chaque valeur est plus proche que la précédente (de 1)," ou encore

[4112] "Pour chaque valeur (n+1) la distance entre u_{n+1} et 1 est inférieure à celle entre u_n et 1 ".

Nous avons décidé de ne particulariser que les copies où une monotonie usuelle

est explicitement exprimée.

Ainsi, lorsqu'un dessin accompagne l'explication, il est toujours monotone (sans exception). Nous avons attribué à ces copies le modèle "dynamique monotone". Cela concerne 38 copies S .

Signalons cette copie où l'expression de la divergence a encore validé notre choix. Une suite convergente y est ainsi décrite :

"Les termes se rapprochent de plus en plus en croissant ..." et pour la divergence "Une suite qui oscille est divergente ..." [1806].

Il faut retenir de cette étude qu'il peut y avoir une ambiguïté quant au caractère monotone ou non des représentations dynamiques même si la monotonie n'est pas explicitée.

3.2.3. Les modèles statiques. (statique-préstatique)

Dans cette catégorie figurent des copies où l'on trouve des représentations plus synchroniques que diachroniques de la convergence.

a) Le modèle statique.

On a attribué ce modèle aux 89 copies S où figurent des descriptions du type "Tout intervalle contenant 1 contient tous les u_n sauf un nombre fini" [6106].

Il s'agit donc de traductions en langage naturel de la définition en (ε, N) de la convergence des suites.

Nous considérons donc les descriptions où les mots "voisins", "très proches", "intervalles", ... sont associés à des verbes d'état comme appartenir, être, rester, se trouver, être enfermé ... Mouvement et évolution dans le temps doivent être exclus du sens du syntagme verbal utilisé. Sont encore considérés dans ce modèle des exemples où le verbe utilisé n'est pas dans la liste ci-dessus comme: [2003] "Tout intervalle contenant 1 contient tous les u_n à partir d'un certain rang".

La phrase est "tournée" autrement dans les descriptions statiques suivantes:

[3018] "Aussi petit que soit l'intervalle autour de 1 , à partir d'un certain rang, tous les u_n sont dedans".

Cependant, certaines descriptions que nous jugeons encore statiques présentent des imprécisions. Ainsi se peut-il que l'idée correspondant à "Quel que soit ϵ " -n'importe quel intervalle- n'apparaisse pas explicitement comme dans la description suivante :

"Si on prend un intervalle autour de 1 , il existe un rang à partir duquel tous les points sont dans l'intervalle".

Dans d'autres copies, c'est le rapport entre ϵ et N qui est ambigü : il n'apparaît pas que c'est au choix de l'intervalle qu'est associé un rang à partir duquel les éléments appartiennent à cet intervalle. Ainsi dans les descriptions suivantes :

"A partir d'un certain rang, les termes doivent rester dans un voisinage aussi petit qu'on veut de 1 ";

ou bien, "Les éléments de la suite peuvent être rendus aussi voisins de 1 que l'on veut".

Quelquefois, c'est le "il existe N " qui est ignoré -tous les termes de la suite sont pris ensemble- par exemple :

"Dans un intervalle, aussi petit soit-il , les termes sont dedans", ou encore cette phrase,incorrecte et ambigüe ,

"Tous les éléments sont aussi près que l'on veut de 1 , pourvu que n soit assez grand".

* Le sujet du syntagme verbal peut être au singulier -en particulier c'est le cas dans les descriptions portant sur la distance de 1 à u_n —ou au pluriel:

"L'écart entre 1 et u_n est plus petit que ϵ dès que n est plus grand n_o";
ou encore
"La distance des éléments à 1 est infiniment proche de 0".

* Les facteurs déterminant sont ici l'indice ou éventuellement le temps par l'intermédiaire d'expressions comme "vient un moment où" à la place de "à partir d'un certain rang".

* Abordons les dessins et commentaires sur la limite accompagnant ces expressions statiques. Il est remarquable que 66 étudiants sur les 68 étudiants M_1 ayant exprimé le modèle statique ne font aucun commentaire sur la limite, et qu'un seul des deux commentaires produits soit erroné. Ceci renforce le caractère "image statique" de la convergence, 1 étant un point dans l'intervalle considéré, sans plus. Quant aux représentations graphiques, elles sont surtout du genre 3 (linéaires), et concernent 85% des copies M_1; de plus, seulement 12% des 58 dessins correspondant à des modèles statiques sont monotones, ce qui représente le plus faible pourcentage de dessins monotones par modèle exprimé.
Cependant, il y a une déformation de ces descriptions statiques que nous avons exclue de ces modèles :

b) Le modèle préstatique.

On attribue ce modèle aux 105 copies S où figure une description de la convergence du type suivant :
"Les éléments de la suite finissent par se trouver dans un voisinage de 1 ";
ou encore
"Pour n assez grand, les nombres u_n restent dans un intervalle autour de 1 ".
Il s'agit de la déformation du modèle statique qui consiste à ne plus tenir compte du tout du "pour tout ε " -la question du rapport entre N et ε ne se posant plus.
On trouve aussi
"A partir d'un certain rang, les u_n sont très proches de 1 ",
(ou "u_n est très proche de 1 "); et encore

"A partir d'un certain rang, les termes sont tous concentrés autour de 1- à l'intérieur d'un intervalle très petit, -dans une boule- dans une petite bande ... La description est plus souvent synchronique que diachronique, les u_n sont considérés aussi bien numériquement que géométriquement.

Les verbes utilisés sont à peu près les mêmes que pour le modèle statique, avec quelques autres :

"se bousculer, piétiner sur place, varier peu, ne pas différer beaucoup, se stabiliser, tourner autour d'une valeur".

Dans certaines copies, l'idée de "rester dans un intervalle très petit" est transformée en "prendre des valeurs très proches" ou "prendre presque la même valeur".

Ainsi, a-t-on attribué ce modèle préstatique aux descriptions suivantes :

"Au-delà d'un certain point, tous les f(n) prennent approximativement la même valeur"[.0507]; ou encore

"A partir d'un certain rang, u_n va pratiquement rester constante" [0105].

Il n'y a que 16% des copies M_1 où est exprimé un modèle préstatique sans aucun dessin, mais parmi les dessins, 34% sont monotones. Par contre, comme dans le cas du modèle statique, il n'y a que deux commentaires sur la limite erronés dans les copies où est exprimé un modèle préstatique -les copies où des commentaires sur la limite figurent ne représentant que 14% des copies préstatiques.

3.2.4. Le modèle mixte.

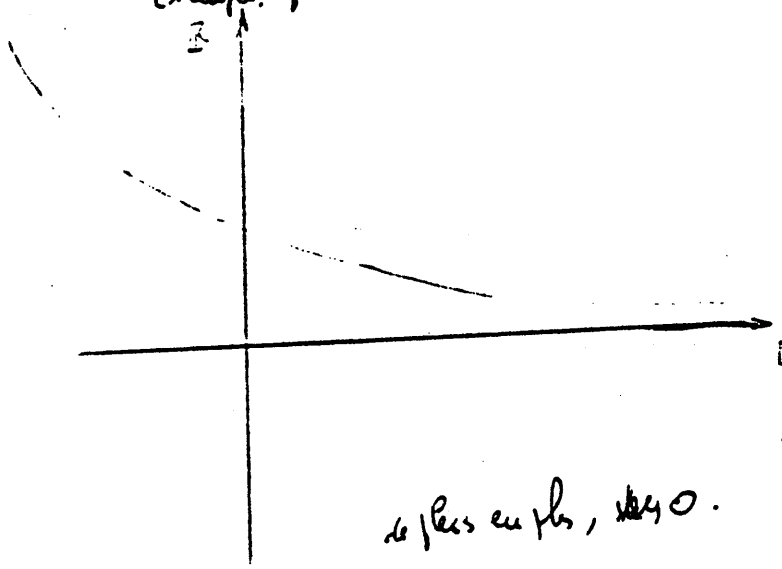
Il est attribué aux 196 copies S où sont juxtaposées ou imbriquées une description statique ou préstatique et une description dynamique (à l'exclusion de "tend vers"). On n'a jamais rencontré de description dynamique monotone associée à une description statique ou préstatique.

Nous devons encore préciser que si les deux descriptions (statique et dynamique) coexistent dans un exemple monotone, nous avons attribué un modèle dynamique.

Nous joignons deux extraits photocopiés de copies présentant un modèle mixte.

2603

1) Une suite est une fonction à variable dans $\mathbb{N}$ et à valeur dans E, E ensemble non vide.
On dit qu'elle est convergente si, à partir d'un rang certain rang, elle s'approche d'une valeur x_0 de E à $\varepsilon > 0$ près, ε tendant vers 0, c'est à dire en choisissant ε aussi petit qu'on veut.
Exemple: prenons le dessins d'une suite dans $\mathbb{R}$:



Cette suite à variable dans $\mathbb{N}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$, tend converge vers 0,
Le graphique semble nous indiquer que la suite s'approche "immédiatement", de plus en plus, vers 0.

2) Pour un élève plus jeune, la notion mathématique de la fonction n'est pas vraiment assimilée. On peut comparer la fonction à une machine qui transforme les éléments d'un ensemble de départ, les éléments d'un ensemble d'arrivée, d'où la complexité d'introduire la représentation graphique d'une fonction.

On peut plus simplement dire, qu'une suite convergente est une fonction (Machine) numérique (c.à.d qui transforme des chiffres), qui à partir d'un nombre donné, semble avoir sensiblement la même image, à un écart excessivement petit

Variante V₁

1) On dit qu'une suite est convergente si à partir d'un certain rang tous ses termes soient dans un intervalle de l de plus en plus petit

dessin

Soit

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ (|u_n - l| < \varepsilon).$$

2) une suite qu'une suite converge vers l si ses termes s'approchent de plus en plus de l jusqu'à ce que la distance entre ses termes et l devient impossible.

on dit qu'une suite diverge si elle n'a pas une limite finie dans un corps commutatif totalement ordonné où elle est définie qui est souvent $\mathbb{R}$.

Ces exemples conduisent à se demander s'il ne faut pas tenir compte de la distribution des descriptions dynamiques et statiques dans les questions 1) et 2). Peut-on penser que si l'image dynamique n'est produite qu'en réponse aux plus jeunes, c'est un indice que cette image, devenue familière, est "dépassée" par la représentation statique ? Y a-t-il coexistence, au contraire, des deux représentations ? De la même façon, on peut chercher s'il y a une différence entre une expression statique ou préstatique associées à un modèle dynamique. Cela nous a amené à distinguer parmi les modèles mixtes les genres suivants (cf. tableau III_2):

* Modèle dynamique en 1) , statique ou préstatique en 2) (D_1) -ce sont les plus rares (12 sur 190 modèles mixtes exprimés dans les copies S).

* Préstatique en 1) , dynamique en 2) (P_1 D_2). Ils sont également peu fréquents (19 sur 190).

* Statique en 1) , dynamique en 2) (S_1 D_2). Ce genre concerne 24% des modèles mixtes exprimés dans les copies S .

* Dans la même question préstatique et dynamique (PD). Ce genre concerne également 25% des modèles mixtes exprimés dans les copies S .

* Dans la même question statique et dynamique (SD). Ce sont les plus nombreux avec 35% des modèles mixtes.

* Enfin, il y a 6 copies où nous n'avons pu attribuer le genre du modèle.

Si on étudie la répartition par niveaux de ces genres du modèle mixte, on constate que les modèles mixtes à composante statique dominent en Math. Sup. , Math. Spé. , Maîtrise, Math. Sup. plus de trois mois après le cours, sont à égalité avec ceux à composante préstatique en Licence, Math. Sup. C moins d'un mois après le cours, DEUG moins de trois mois après le cours, et DEUG II, et sont moins nombreux en DEUG tout de suite après le cours et DEUG plus de trois mois après le cours. Nous utiliserons ces remarques lorsque nous comparerons, au chapitre 7, les procédures associées à ces différents genres du modèle mixte .

Enfin, seules 13% des copies M_1 où est exprimé un modèle mixte ne présentent pas de dessin, et sur les 150 autres copies, 86 dessins (57%) ne sont pas monotones, 35% sont monotones, le reste est ambigü.

Répartition des genres du modèle mixte par niveaux. (III_2)

Copies S : Effectifs — genre du mixte / Niveau — sigle	1) Prédstatique 2) Dynamique	Dynamique en 1ère question	Dynamique + Statique dans la même question	Dynamique + Prédstatique	1) Statique 2) Dynamique	Inconnus (non totalisés)	Total
	P_1D_2	D_1	SD	PD	S_1D_2	Inc	
DEUG 1 après le cours sans exercices	0	0	1	3	0		4
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	4	0	3	3	4		14
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	2	3	0	6	0		11
DEUG 2ème année	2	0	4	4	1		11
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	4	3	3	2	2		14
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	0	0	5	1	4		10
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	2	5	24	9	14		54
MATH. SPE.	3	0	11	7	9		30
LICENCE (3ème année)	2	0	5	8	2		17
MAITRISE (4ème année)	0	1	10	5	9		25
TOTAL	19	12	66	48	45	6	190

3.2.5. Les copies sans modèle exprimé. (tautologie - définition - pas de modèle)

Nous abordons maintenant les descriptions effectives desquelles nous n'avons pas pu dégager de modèle exprimé.

a) Le modèle "Tautologie"

Ce n'est pas un véritable modèle de convergence, mais l'expression d'une tautologie du type

"Une suite convergente est une suite qui a une limite (finie)" ou

"Une suite est convergente si sa limite est finie".

Cependant, il est à remarquer que si la question est posée sous la forme V_2(d.p. on ne rencontre jamais la tautologie correspondante (qui serait une suite ayant une limite est une suite convergente), il y a peut-être une antériorité dans l'utilisation du vocabulaire ("a une limite" est plus porteur de sens que "converge"), ceci explique que nous ayons tout de même distingué les 44 copies (sur 1 253) qui ont exprimé cette représentation.

De plus, 14 copies donnent la définition en (ε,N) en même temps que cette expression, ce qui peut témoigner aussi d'une difficulté à maîtriser suffisamment le concept pour "sortir" de toutes les définitions du cours.

Il y a 40% des copies où se trouve un dessin et ces dessins sont monotones pour la majorité d'entre eux.

b) Le modèle "Définition"

Dans 16 copies S , les étudiants nous livrent exclusivement la définition mathématique

Ceci, avec quelques mots en français, éventuellement, du type "pour tout ε il existe N tel que pour tout $n > N$ $|u_n - 1| < \varepsilon$".

Nous attribuons à ces copies le "modèle" "Définition" -ce n'est évidemment pas un modèle au sens où nous le recherchions.

Les 10 dessins associés aux 13 copies M_1 où ne figure que la définition sont

ambigüs pour 7 d'entre eux.

c) Pas de modèle exprimé

Dans les autres copies S (8%), on n'a pas attribué de modèle pour les différentes raisons suivantes :

Dans certaines copies, l'exemple donné en exclusivité est trop particulier pour permettre d'en déduire une quelconque représentation.

Ainsi, dans la copie [1 108] ci-jointe.

Dans d'autres copies, il y a confusion entre valeur d'adhérence et point d'accumulation. Ainsi, les descriptions suivantes ne se sont pas vues attribuer de modèle:

"Pour tout intervalle, il existe un élément de la suite dedans" , ou encore "Beaucoup de points (une infinité) sont proches ..."

Quelquefois, le critère de convergence porte sur $(u_{n+1}-u_n)$: ainsi sont déclarées convergentes les suites telles que :

"La différence entre deux termes devient si petite qu'on peut l'assimiler à 0" [0310] .

Dans certaines copies, suite et fonction sont confondues au point que le critère d'existence de la limite est l'existence d'une asymptote.

Enfin, certaines explications sont trop sommaires et/ou trop confuses pour qu'on puisse attribuer un modèle exprimé aux descriptions correspondantes. C'est le cas lorsqu'on ne trouve qu'un commentaire métamathématique par exemple. En voici deux autres exemples :

"On choisit un de ces éléments qui est supposé parmi les plus extrêmes (c'est-à-dire à l'infini), et on dit que la suite converge vers cet élément" [3805] ou encore "Elle a une limite si tous les points convergent" [3030] .

Les dessins, associés à 44% des copies M_1 sans modèle exprimé sont moitié monotones et moitié non monotones.

V/

1087] Si j'avais à expliquer à expliquer à un élève ce qu'est une suite convergente je commencerai par expliquer ce qu'est une suite et en suite j'expliquerais la convergence.
Je donnerais un exemple de suite tel que $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ et j'expliquerais que ma suite possède n termes n étant un entier naturel. Les termes de la suite sont rangés par indice croissant.
Le terme général de la suite est noté u_n si $n=0$ a aussi donc $a_0 = a_0$ si $n=1$ $u_1 = a_1$ etc.

La notion de limite n'étant pas définie en pensé un élève de 14-15 ans pour expliquer la convergence j'expliquerais que l'on étudie le terme u_n qd n est très grand et on regarde sa valeur.
Si la valeur de ce terme est aussi très grand on dit que la suite diverge, mais si sa valeur n'est pas trop grande on dirait que la suite converge.

Pour prendre un exemple concret la croissance d'un homme en fonction du temps. Pour cet exemple le nombre n représente les années pour $n=0$ l'homme a une taille très petite il vient de naître pour $n=1$ le bébé a 1 an il a grandit etc...
Il continue de grandir jusqu'à 18 ou 19 ans donc pour $n=18$ ou $n=19$ mais si n est plus grand que 19 soit 20, 21, ..., 40, ..., 60 etc la taille de l'homme ne bouge plus à 60 ans il aura la même taille qu'à 19 ans. Ici on dira que la taille de l'homme converge vers sa taille à 19 ans. Ici on ne peut pas faire varier n indéfiniment puisque la durée de vie est limitée on doit donc imaginer que l'homme peut vivre aussi longtemps que l'on peut l'imaginer à 200 ans il aura donc toujours sa taille.

Pour un exemple de suite divergente on imagine des mineurs creusant une galerie et l'on mesure tous les jours la longueur du tunnel creusé. On admettant que les mineurs creusent chaque jour et parcourant la même distance a.
à la fin du premier jour ils auront creusé $a = 1 \times a$.
" " deux " " $a + a = 2 \times a$
" " trois " " $a + a + a = 3 \times a$
⋮
" " $30 \times a$.
30 jours

Si on imagine qu'ils creusent un nbre de jours très

3.3. Retour sur le mode de questionnement et la lecture des réponses.

Nous allons d'abord étudier dans ce paragraphe les répartitions des modèles obtenues en réponse aux trois textes qui diffèrent du texte initial. La stabilité des réponses qui sera ainsi mise en évidence est une première confirmation de la validité de notre mode de questionnement. Nous étudions ensuite la répartition des commentaires sur la limite et des réponses sur la divergence par niveaux et modèles; cela nous permet en particulier d'enrichir nos catégories de modèles exprimés.

Dans la quatrième partie de ce paragraphe, nous dégageons parmi les caractères suivants relevés dans les copies : genre du dessin, modèle dessiné, niveau et modèle exprimé, les facteurs les plus"importants". Ces résultats seront d'ailleurs confirmés et enrichis dans le chapitre 7 où nous croiserons tous les caractères précédemment évoqués avec les procédures aux exercices.

Enfin, dans la dernière partie du paragraphe, nous revenons sur les erreurs rencontrées dans les copies au cours des questions 1) et 2) .

3.3.1. Stabilité des réponses dans les variantes.

Dans cette étude, étant donné les effectifs, nous avons choisi de comparer les modèles exprimés dans les copies des seules classes où une moitié des élèves a effectivement eu entre les mains les textes des variantes concernées.

La variante V_2 .

Dans l'énoncé des deux premières questions de cette variante, le qualificatif "convergente" est remplacé par l'expression "ayant une limite".
Voici la répartition des modèles exprimés dans les classes concernées par les textes V_1 et V_2 par moitié (il s'agit des classes standard) :

(Copies S) Modèle exprimé / Variante	Non abordé (0)	Primitif (1)	Dynamique Monotone (2)	Pas de modèle +Définition +Tautologie (3)	"Tend vers" (4)	Dynamique (5)	Mixte (6)	Statique + Préstatique (7)	Total abordés	Total
V_1	4	1	2	6	4	27	14	9	63	67
V_2	1	3	3	11	3	18	11	12	61	62
Total	5	4	5	17	7	45	25	21	124	129

Pour étudier les distributions des deux lignes du tableau, nous avons regroupé les colonnes (1), (2) et (4) et enlevé la colonne (0). Un calcul classique donne $\chi^2=4,2$ $(v=4)$.
Autrement dit, suivant le mot utilisé (pour désigner la même "qualité" de la suite), la répartition des modèles exprimés ne varie pas de façon significative. Il s'avère pourtant qu'il y a relativement plus de modèles dynamiques associés aux mots du texte initial -au contraire, on trouve plus de modèles statiques et préstatiques lorsque l'énoncé présente les mots "ayant une limite". Il est impossible de dégager autre chose de cette répartition que la tendance précédente -les effectifs sont trop faibles et les différences non significatives au seuil de 0,10. Par ailleurs, l'étude de Mme Boschet avait déjà montré que l'usage des mots "convergent" et "a une limite" -aussi bien dans les manuels qu'à l'oral- n'est pas aléatoire. Ainsi est-il possible que l'expression "suite convergente" ait une résonnance plus dynamique, au niveau des représentations mentales qu'elle engendre, que l'expression "suite ayant une limite". L'usage des deux mots -dans des contextes différents- en langue naturelle n'est pas contradictoire avec cette résonnance. Ceci pourrait expliquer que les étudiants interrogés aient spontanément en tête une image plus ou moins "dynamique" suivant le vocabulaire utilisé. Cela étant, encore une fois, la répartition des modèles dans le texte V_2 ne diffère pas de façon significative de celle qu'on a obtenu globalement ce qui justifie notre mode de questionnement.

Modèle exprimé / Variante	Primitif	Dynamique Monotone	Pas de modèle	Tautologie	Définition	"Tend vers"	Dynamique	Mixte	Statique	Préstatique
V_2	5%	5%	16%	2%	0	5%	30%	18%	13%	7%
V_1 Global	9%	3%	7%	3%	1%	7%	36%	17%	7%	9%

La variante V_{11} .

Les questions 1), 2), 3) et 4) du texte initial sont posées à la fin du questionnaire -après les exercices classiques sur les suites.
Voivi la répartition des modèles exprimés dans les classes concernées par moitié par les textes V_1 et V_{11} (classes standard) :

(Copies S) Modèle exprimé / Variante	Non abordé (0)	Primitif (1)	Définition (2)	Tautologie (3)	Pas de modèle (4)	"Tend vers" (5)	Dynamique Monotone (7)	Dynamique (8)	Mixte (9)	Statique (10)	Préstatique (11)	Total abordés	Total
V_1	11	6	0	3	4	2	1	33	12	9	9	79	90
V_{11}	13	6	0	3	4	4	2	20	4	6	2	51	64
Total	24	12	0	6	8	6	3	53	16	15	11	130	154

Pour étudier les distributions des deux lignes du tableau, nous avons regroupé les colonnes (2), (3), (4) d'une part, (5), (7), (8) d'autre part, et enfin (10) et (11). Un calcul classique montre que $\chi^2=5,297$ (v=5). En enlevant la colonne (0), on trouve $\chi^2=3,626$ (v=4).
Autrement dit, outre le fait que la question est de façon non significative moins abordé lorsque le texte est posé à la fin (ce qui est normal), on repère des différences non significatives dans la répartition des modèles. Il y a deux tendances: plus de modèles primitifs et de copies sans modèles exprimés, et moins de modèles mixtes et préstatiques lorsque le texte est posé à la fin. On peut attribuer cette répartition plus "mauvaise" à des effets de fatigue -les étudiants exprimant un modèle statique étant suffisamment "bons" pour résister à n'importe quel questionnaire ...
Cela étant, encore une fois, la répartition des modèles exprimés dans le texte V_{11} n'est pas significativement différente de celle qu'on a obtenu globalement et donc cela ne remet pas en question notre mode de questionnement.

Modèle exprimé / Variante	Primitif	Dynamique Monotone	Pas de modèle	Tautologie	Définition	"Tend vers"	Dynamique	Mixte	Statique	Préstatique
V_{11}	12%	4%	8%	6%	0	8%	39%	8%	12%	4%
V_1 Global	9%	3%	7%	3%	1%	7%	36%	17%	7%	9%

Les variantes V_4 et V_7 .

Dans ces deux textes (identiques entre eux) les deux questions 1) et 2) du texte initial sont concentrées en une seule dont voici l'énoncé :
"1) Que vous évoque l'expression "suite convergente" ? Quelle représentation en avez-vous ? Que vous évoque l'expression "suite divergente" ?
Il s'agit donc d'un questionnement direct sur la représentation des étudiants sans faire appel à l'explication aux plus jeunes.
Voici la répartition des modèles exprimés dans les classes concernées par moitié par les textes (V_1,V_4) et (V_1,V_7) (classes standard).

(Copies S) Modèle exprimé / Variante	Non abordé (0)	Primitif (1)	Dynamique Monotone (2)	Pas de modèle (3)	Tautologie (4)	Définition (5)	"Tend vers" (6)	Dynamique (7)	Mixte (8)	Statique (9)	Préstatique (10)	Total abordés	Total
V_1	2	2	1	8	1	1	7	35	17	2	13	87	89
V_4 u V_7	1	2	0	4	9	3	6	22	8	7	8	69	70
Total	3	4	1	12	10	4	13	57	25	9	21	156	159

On voit que ce texte entraîne moins de "modèles exprimés" au sens où nous l'avons défini avant (38% de copies sans modèles exprimés -éventuellement autres qu'une tautologie ou que la définition- pour le texte V_1, alors que ces copies V_1 représentent 56% des copies en jeu ici). Cela correspond bien à notre expérience "prétest". De même l'expression d'un modèle mixte est plus rare dans les copies (V_4 V_7), vraisemblablement parce qu'il n'y a pas les deux questions qui ont obligé un certain nombre d'étudiants à juxtaposer deux images mentales. Par contre, la répartition des modèles dynamiques (61% pour les copies V_1) et statiques (au sens large) (50% pour les copies V_1) n'est pas significativement différente d'un texte à l'autre. Tout se passe comme si, au niveau de nos très faibles effectifs, les expressions "mixtes" du texte V_1 correspondent à une partie des expressions simplement statiques dans le texte V_4 -le reste des distributions, non compte-tenu des copies sans modèles exprimés, s'avérant du même ordre.
Cela étant, un calcul de χ^2 montre que les deux répartitions ne sont pas significativement différentes (χ^2=5,833, v=4). Cela confirme la valeur universelle de notre mode de questionnement.

En conclusion, quelle que soit la variante, il n'y a pas de différences significatives (à 0,1% près) entre les répartitions de modèles (effectivement) exprimés obtenus.

3.3.2. Les commentaires sur la limite.

La question de la limite d'une suite convergente n'est pas explicitement abordée dans l'énoncé qui en suppose simplement l'existence.

Cependant, si 717 étudiants parmi ceux du corpus M_1 ayant abordé les questions 1 et2 n'en disent effectivement pas plus, les 29% restants ajoutent à leur description un commentaire sur la limite: pour 70 d'entre eux (24%) la limite ne peut être atteinte; elle doit être atteinte pour 27 autres (9%); elle ne peut être dépassée pour 64 étudiants (22%), et si 21 donnent encore d'autres caractères (erronés), les 99 restants (34%) écrivent que cette limite peut être atteinte. Globalement, les textes V_2 et V_{11} témoignent du même pourcentage de copies abordant la question qui n'est évoquée que dans 10% des copies $V_4 \cup V_7$.

Il aurait pu être intéressant de comparer ces commentaires à ce qui figure dans les dessins quant à la limite (atteinte, dépassée, etc ...). Nous n'avons pu le réaliser, car la plupart du temps ce caractère est trop ambigü sur le dessin. Soulignons qu'en tous cas il n'y a qu'un cas de contradiction nette entre les deux (une limite dont il est affirmé qu'elle ne peut être atteinte et qui est représentée atteinte sur le dessin).

Si on regarde la répartition par niveau de ces commentaires (cf. tableau L_N), il est d'abord frappant de constater que si presque la moitié des étudiants de DEUG tout de suite après le cours (47%) font des commentaires, ce pourcentage baisse à 1/3 environ ensuite en DEUG après le cours et les exercices et ceci jusqu'en DEUG 2; mais c'est seulement 1/5e au plus des étudiants qui rajoutent un tel commentaire en Sup., Spé., Licence et Maîtrîse (6%). Ceci témoigne d'une évolution, comme si plus leur connaissance de la convergence est assurée, moins les étudiants éprouvent le besoin d'exprimer un renseignement inutile à la compréhension de la notion.

De plus, la répartition des commentaires varie, elle aussi. Les commentaires justes (la limite peut être atteinte) augmentent notablement entre le DEUG tout de suite après le cours (1/5e des commentaires exprimés), et le DEUG moins de 3 mois après le cours où ils occupent autour de 40% des commentaires et ceci reste vrai jusqu'en maîtrise à quelques variations près.

Tableau L_N

Commentaires sur la limite (par niveaux). (corpus M_1)

Commentaires sur la limite / Niveau	Ne peut être atteinte	Peut être atteinte	Doit être atteinte	Ne peut être dépassée	Non abordé	Total (questions 1) et 2) abordées)
DEUG 1 après le cours sans exercices	15 33%	7 15%	4 9%	11 24%	46 53%	87
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	8 21%	16 41%	3 8%	9 23%	84 68%	123
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	13 31%	15 36%	3 7%	9 21%	87 67%	129
DEUG 2ème année	7 12,5%	21 37,5%	6 11%	13 23%	94 63%	150
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	14 42%	7 21%	3 9%	8 24%	35 51%	68
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	1 12,5%	3 37,5%	3 37,5%	1 12,5%	21 72%	29
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	6 19%	16 52%	0	8 26%	124 80%	155
MATH. SPE.	5 28%	9 50%	3 17%	1 6%	108 86%	126
LICENCE (3ème année)	1 9%	3 27%	1 9%	2 18%	39 80%	50
MAITRISE (4ème année)	0	2 22%	1 11%	2 22%	79 94%	88
TOTAL	70 24%	99 34%	27 9%	64 22%	717 71%	1005

Dans la cinquième colonne, les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant abordé les questions 1) et 2) .
Dans les quatre premières colonnes, les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants de la ligne ayant donné des commentaires sur la limite.

Tableau
L_M

Commentaires sur la limite (par modèle exprimé) (Corpus M_1)

Commentaires (copies M_1)	Ne peut être atteinte	Peut être atteinte	Doit être atteinte	Ne peut être dépassée	Question 1) et 2) abordée et pas de commentaire	Total
MONOTONE (ni stationnaire ni barrière	7 - 10%	14 - 14%	15 - 56%	18 - 28%	34 - 5%	91 - 9%
TEND VERS	5 - 7%	5	0	1	58 - 8%	71 - 7%
DYNAMIQUE MONOTONE	6 - 8,5%	3	0	11	12 - 2%	33 - 3%
PAS DE MODELE EXPRIME	0	12 - 12%	3	0	48 - 7%	68 - 7%
TAUTOLOGIE	0	2	0	0	28 - 4%	31 - 3%
DEFINITION	0	2	0	0	10 - 1%	13 - 1%
DYNAMIQUE	38 - 54%	36 - 36%	6 - 22%	30 - 47%	244 - 34%	366 - 36%
PRESTATIQUE	0	10	1	1	78 - 11%	91 - 9%
MIXTE	13 - 18,5%	14 - 14%	2	3	139 - 19%	173 - 17%
STATIQUE	1	1	0	0	66 - 9%	68 - 7%
TOTAL	70	99	27	64	717	1005

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

Quant aux expressions fausses, l'idée que la limite ne peut être atteinte, voisine 37% des commentaires exprimés, aussi bien en DEUG tout de suite après le cours qu'en Math. Sup. C moins d'un mois après le cours, puis diminue lentement jusqu'à disparaître en Maîtrise. Par contre, l'idée que "la limite doit être atteinte" et celle qu'"elle ne peut être dépassée" restent respectivement autour de 10% et 25% des commentaires. On peut alors chercher si ce sont à des modèles bien particuliers qu'elles sont associées, ce qui expliquerait cette stabilité (cf. Tableau L_M) Or, il est absolument remarquable que les modèles statiques et préstatiques ne sont pratiquement pas accompagnés de commentaires (autres que justes) sur la limite comme nous l'avons déjà dit. Par contre une rapide comparaison entre les pourcentages colonne de la répartition des modèles et de celle des commentaires erronés montre que c'est bien les modèles primitifs (stationnaires en particulier) qui sont de loin le plus associés au commentaire "limite atteinte", et dans une moindre mesure à l'idée que la limite ne peut être dépassée dont les modèles dynamiques et dynamiques monotones restent aussi "responsables". C'est enfin le seul modèle dynamique qui est le plus associé à l'idée que la limite ne peut être atteinte. Cela renforce notre hypothèse que les perceptions dynamiques et statiques de la convergence sont réellement différentes. Ainsi, les unes se "préoccupent"-elles plus de la limite (l'objectif, le but du processus) que les autres dans lesquelles la limite est presque un point comme un autre.

3.3.3. Les réponses sur la divergence.

Sur les étudiants S ayant eu le texte V_1 (pour les questions 1) et 2)), 79% donnent une définition des suites divergentes -dont le texte ne précisait pas, d'ailleurs, à qui elle était destinée.

Globalement, sur ces 830 copies, on trouve 47% de réponses du type "une suite divergente est une suite qui ne converge pas"; ce peut être aussi la négation de la phrase précédemment utilisée par l'étudiant pour définir la convergence; il y a encore 11% de réponses du type "une suite divergente est une suite qui n'a pas de limite (resp. pas de limite finie)"). Cela réduit à 349 les copies où une réponse

précise (et positive) de la divergence est donnée; on distingue un premier lot de 113 copies où, en d'autres termes, est précisé qu'une suite divergente a plusieurs valeurs d'adhérence (soit sur des exemples différents, soit en explicitant plusieurs cas possibles); enfin, les copies restantes présentent une définition fausse de la divergence de type "une suite divergente est une suite qui tend vers l'infini (resp. $+\infty$, $\pm\infty$)" (cela concerne 64% des réponses fausses) ou encore "une suite divergente est une suite qui ne finit jamais" et un certain nombre d'autres réponses plus ou moins aberrantes.

Ce sont les étudiants de DEUG tout de suite après le cours et ceux de maîtrise qui, avec 34% et 37% de non-réponse à la question de la divergence, détiennent les plus forts taux "d'abstention" -les premiers vraisemblablement par manque de connaissances, et les derniers plutôt par manque de temps. Dans les autres niveaux, il y a entre 1/5e et 1/4 des étudiants qui n'abordent pas la question, sauf en Math. Sup. où le taux baisse à 9%.

Venons-en à la répartition des réponses par niveau (Tableau D_N).

Rappelons la composition de nos trois groupes de niveau: le groupe I est formé de tous les DEUG, le groupe III des Math. Sup., Math. Spé., licence et maîtrise, et le groupe II des Math. Sup. C (le niveau "Math. Sup. C" trois mois après le cours est peu rempli, et les pourcentages correspondants non fiables).

Or, globalement, si on note une différence sensible entre les réponses des groupes I et III, les évolutions au sein de chaque groupe sont très différentes. Pour ce qui est des réponses fausses, dans le troisième groupe, il y en a à peu près 1/5e à chaque niveau. Par contre, 47% des étudiants de DEUG tout de suite après le cours donnent une définition fausse de la divergence (et 3/4 d'entre eux expriment qu'une suite divergente tend vers l'infini). De plus, si ce pourcentage baisse à 30% en DEUG après le cours et les exercices, il remonte à 47% en DEUG deuxième année (avec de nouveau 3/4 de réponses du type "une suite divergente tend vers l'infini").

Tout se passe comme si, pour certains étudiants, l'image de la divergence se stabilisait en deuxième année à la première image fausse créée après le cours. Les Math. Sup. C sont intermédiaires entre les deux groupes.

Tableau D_N

Expression de la divergence par niveau. (Corpus M_1)

Copies M_1	Divergent = Non convergent	Pas de limite	Précisent	Faux	Non abordé	Total niveau
DEUG 1 après le cours sans exercices	24 37,5%	4 6%	6 9%	30 47%	33 34%	97
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	48 44%	13 12%	15 14%	32 30%	20 16%	128
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	39 40%	19 19%	13 13%	27 28%	32 25%	130
DEUG 2ème année	32 25%	18 14%	19 15%	60 47%	28 18%	157
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	19 32%	10 17%	12 20%	19 32%	13 18%	73
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	12 44%	6 22%	8 30%	1 4%	4 13%	31
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	93 65%	8 6%	16 11%	27 19%	14 9%	158
MATH. SPE.	66 69%	6 6%	3 3%	21 22%	32 25%	128
LICENCE (3ème année)	18 45%	5 12,5%	9 22,5%	8 20%	13 24,5%	53
MAITRISE (4ème année)	39 61%	2 3%	12 19%	11 17%	38 37%	102
TOTAL Effectifs	390 47%	91 11%	113 14%	236 28%	227 21%	1057

Les pourcentages des quatre premières colonnes sont calculés sur le total des étudiants de la ligne ayant abordé la question de la divergence.
Dans la cinquième colonne, les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants de la ligne.

Tableau
D_M

Expression de la divergence par modèle exprimé (Corpus M_1)

Copies M_1	Divergent = non convergent	N'a pas de limite (finie)	Précisent	Faux	Non abordé (+52 pas de modèles -2)	Total Modèle	Pourcentage colonne des modèles exprimés
MONOTONE	26 - 34%	12 - 16%	4 - 5%	34 - 48%	15 - 16%	91	9%
TEND VERS	21 - 34%	10 - 16%	8 - 13%	22 - 36%	10 - 14%	71	7%
DYNAMIQUE MONOTONE	9 - 39%	2 - 9%	6 - 26%	6 - 26%	10 - 30%	33	3%
PAS DE MODELE EXPRIME	17 - 40%	2 - 5%	4 - 10%	20 - 47%	25 - 37%	68	7%
TAUTOLOGIE	8 - 30%	7 - 26%	4 - 15%	8 - 30%	4 - 13%	31	3%
DEFINITION	5	1	4	1	2	13	1%
DYNAMIQUE	148 - 42%	34 - 10%	49 - 14%	80 - 23%	55 - 15%	366	36%
PRESTATIQUE	35 - 47%	6 - 8%	11 - 15%	22 - 30%	17 - 19%	91	9%
MIXTE	82 - 54%	14 - 9%	18 - 12%	37 - 25%	22 - 13%	173	17%
STATIQUE	39 - 76%	2 - 4%	4 - 8%	6 - 12%	17 - 25%	68	7%
TOTAL	390 - 47%	90 - 11%	112 - 13%	236 - 28%	227 - 21%	1057	

Les pourcentages lignes sont calculés sur les abordés.

Si, globalement, presque la moitié des étudiants exprime qu'une suite divergente est une suite non convergente, ce pourcentage s'élève à 65% en Math. Sup., Math. Spé. et presqu'autant en Maîtrise, témoignant d'une réponse en quelque sorte "automatique", et ne révélant rien sur les modèles. Quant à la réponse équivalente "une suite divergente n'a pas de limite", c'est surtout dans le premier groupe qu'elle est utilisée -peut-être est-ce 1' indice d'une gêne avec le mot "non convergent" remplacé par une expression plus usuelle ... Les précisions sur la divergence sont données par plus de 20% des étudiants de Math. Sup. C, ce qui est original -les Math. Spé., eux, ne sont que 3% à en fournir.

La répartition des réponses sur la divergence par modèle exprimé (tableau D_M) permet de constater que ce sont les copies sans modèle exprimé (mais qui ont répondu à la question) qui abordent le moins la question de la divergence (37% de non réponses), ce qui est cohérent. De même, seulement deux copies (sur 52) donnent une définition de la divergence, alors que rien n'est écrit sur les modèles. On vérifie aussi que c'est aux modèles primitifs que sont le plus associées les réponses fausses (48% des réponses pour ce modèle), ainsi qu'aux copies sans modèle exprimé (46%) Toutefois, les réponses fausses en DEUG tout de suite après le cours ne sont pas plus associées aux modèles primitifs qu'aux autres modèles (7 copies sur les 15 concernées donnent une définition fausse de la divergence, soit 47%, i.e. le même pourcentage que le pourcentage de réponses fausses sur le niveau). Par contre, le modèle statique, s'il est très peu associé aux réponses fausses (12%) est très associé aux réponses "automatiques" - "une suite divergente est non convergente". Ainsi, 76% des étudiants ayant le modèle statique écrivent cette phrase (sans intérêt pour nous !), alors que globalement 47% des étudiants l'ont produite .. Or, la réponse équivalente avec le mot "limite" est nettement moins associée au modèle statique qu'aux autres (en particulier qu'au modèle "tautologie", ce qui est très cohérent). Tout ceci semble confirmer que plus le concept est maîtrisé, et cela d'autant plus que la représentation en est statique, moins d'efforts sont faits pour éclairer la divergence par autre chose qu'une sorte de tautologie. Au contraire, les modèles primitifs entraînent une explication -fausse- de la divergence.

Signalons, pour terminer, que ce sont les copies où figure exclusivement la définition en (ε,N) de la convergence où l'on trouve relativement le plus de précision sur la divergence (4 sur 11 abordés). Peut-être est-ce une façon d'équilibrer les réponses !

3.3.4. Les modèles dessinés et le genre du dessin, par modèles exprimés.

Ces trois caractères (monotonie du modèle dessiné, genre du dessin, modèle exprimé) vont s'avérer ne pas être indépendants -ce qui n'est pas étonnant d'ailleurs. Pour étudier leurs relations respectives, nous avons étudié séparément sur les copies S

* les modèles dessinés par modèles exprimés;
* le genre du dessin et les modèles dessinés;
* le genre du dessin par modèles exprimés.

Puis, à titre expérimental, Mme Mac Aleese a effectué une analyse factorielle nous permettant de "croiser simultanément" ces trois facteurs, en y rajoutant le quatrième facteur qui intervient et qui a déjà étudié au début:le niveau.

a) Les modèles dessinés par modèles exprimés.

La relation entre l'expression d'un modèle et le modèle dessiné est bien évidente sur le tableau ci-dessous: Répartition des modèles dessinés par modèles exprimés.
(effectifs copies S)

Modèle exprimé \ Modèle dessiné	Non monotone	Monotone	Total	Absent
Primitif	10	50	60	42
Tend vers	12	32	44	40
Dyn. Monot.	0	31	31	7
Pas de mod.	25	37	62	84
Dynamique	128	178	306	120
Préstatique	45	25	70	35
Mixte	99	57	156	40
Statique	54	11	65	24
Total	373	421	794	392

Dans ce tableau résumé, on a réuni les copies sans modèles exprimés (tautologie, définition, pas de modèles) et on n'a pas fait figurer les copies où les questions 1) et 2) ne sont pas abordées.

On constate que cette répartition est très différente suivant les modèles exprimés. Les dessins monotones sont largement majoritaires pour les modèles primitif et dynamique monotone (nous en avons déjà parlé).

De même, pour les modèles dynamique, "tend vers" et les copies sans modèles exprimés (y compris tautologie et définition), on trouve plus de représentations graphiques monotones (resp. 58%, 73%, 60% des dessins); au contraire, lorsque c'est un modèle mixte, préstatique ou statique qui est exprimé, les représentations graphiques associées sont plutôt non monotones (resp. 63%, 64%, 83% des dessins). Le modèle statique s'avère de nouveau très "pur" -particulièrement peu associé à des représentations monotones. On retrouve ici ce que nous pouvions déjà noter pour les modèles dessinés par niveaux: les modèles qui s'avèreront plus associés à des bonnes performances sont aussi plus associés à des représentations graphiques non monotones dans les questions 1) et 2).

6) Genre du dessin et modèles dessinés.

Sur les 770 copies où le genre du dessin ainsi que son caractère monotone peuvent être étudiés, on obtient 364 dessins non monotones et 406 monotones. On constate que la répartition suivant le genre du dessin est assez stable -les seules tendances qui se marquent ne concernent que les dessins du genre 1 (fonctionnel), légèrement plus associés à des représentations monotones (surtout décroissantes) et du genre 2 (applicationnel), légèrement plus associés à des représentations non monotones. Il y a proportionnellement autant de dessins monotones (surtout croissants) que de dessins non monotones du genre 3 (linéaire), qui est le plus utilisé par ailleurs.

Voici le tableau indiquant cette répartition:

Répartition du genre du dessin par modèles dessinés (copies S)- (effectifs).

Genre du dessin \ Modèle dessiné	Pas de dessin ou pas concluant	Non monotone	Monotone croissant	Monotone décroissant	Monotone non précisé	Monotone	Total
Pas de dessin ou pas concluant	313	9	10	2	3	15	337
Genre 1	28	98 27%	80	75	15	170 42%	296 32
Genre 2	24	45 12%	6	4	4	14 3%	83 9%
Genre 3	60	168 46%	120	39	23	182 43%	410 4
Genre 4	25	47 13%	6	19	2	27 6%	99 11%
Inconnu	9	6	4	7	2	13	28
Total	459	373	226	146	49	421	1253

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes calculés sur le total des dessins concluants par colonne.

c) Genre du dessin et modèles exprimés.

Il y a 67 copies S où les questions 1) et 2) ne sont pas abordées -dans quatre d'entre elles, on trouve un dessin dont nous n'avons pas tenu compte.

Dans les 1 186 copies S restantes, 277 (23%) abordent les questions 1) et 2) sans faire de dessin -de plus, il y a 28 copies où nous n'avons pu déterminer le genre car elles ne sont plus en notre possession depuis quelques mois. Il reste donc environ 900 copies S où nous pouvons chercher s'il y a un rapport entre le genre du dessin et le modèle exprimé.

On constate des répartitions légèrement différentes selon les modèles sans qu'il se manifeste de réels contrastes. Ainsi, il y a peu de rapport entre le genre du dessin et l'expression d'un modèle primitif, préstatique, dynamique monotone, dynamique, ou la production d'une copie sans modèle exprimé. Par contre, le modèle "tend vers" est plus associé au genre 1, le modèle statique au genre 2, et le modèle mixte au genre 3.

Voici le tableau de la répartition des genres du dessin par modèles exprimés (copies S).
(Nous avons regroupé les copies sans modèles exprimés comme précédemment).

Genre du dessin / Modèle exprimé	Genre 1	Genre 2	Genre 3	Genre 4	Inconnu	Total abordé
Primitif	21 - 31%	6 - 9%	32 - 48%	8 - 12%		67
Tend vers	24 - 43%	6 - 11%	19 - 34%	4 - 7%	3	56
Dynamique Monotone	10 - 31%	1 - 3%	17 - 53%	3 - 9%	1	32
Pas de modèle	30 - 34%	6 - 7%	37 - 42%	13 - 15%	2	88
Dynamique	123 - 37%	19 - 6%	141 - 42%	41 - 12%	9	333
Préstatique	24 - 26%	11 - 12%	43 - 47%	9 - 10%	4	91
Mixte	45 - 26%	16 - 9%	95 - 55%	15 - 9%	3	174
Statique	18 - 26%	18 - 26%	25 - 37%	4 - 6%	3	68
Total	295 - 32%	83 - 9%	409 - 45%	97 - 11%	25	909

Les pourcentages indiqués sont les pourcentages lignes.

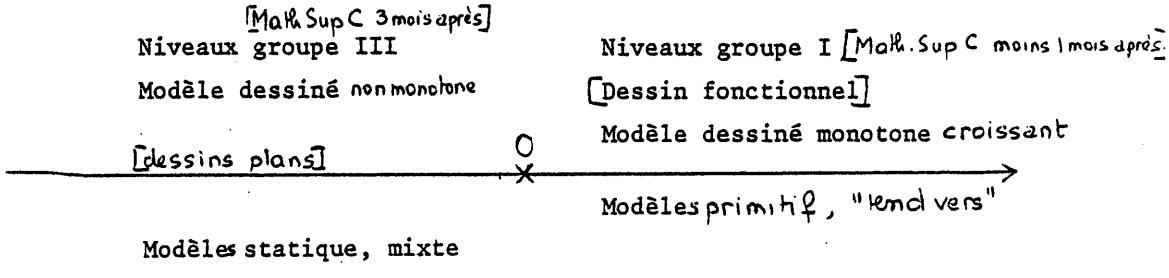
En conclusion de ces trois analyses, nous voyons que modèles dessinés et modèles exprimés sont sans doute bien mieux corrélés entre eux que le genre du dessin avec l'un ou l'autre de ces facteurs. Nous avions aussi remarqué le même genre de conclusions par niveaux. Venons-en donc à une analyse factorielle "croisant" niveaux, modèles exprimés, modèles dessinés, et genre du dessin (dans les copies où c'est possible).

d) Analyse factorielle: (Modèles exprimés, modèles dessinés, genre du dessin) x niveaux.

Cette analyse permet d'établir une hiérarchie des modèles et modèles dessinés suivant les niveaux. Ainsi, sur l'axe 1 -qui explique à lui seul 51% de l'inertie totale du nuage- se présentent de part et d'autre de l'origine les points Sup., Maîtrise, Spé., Licence, Sup. C trois mois après le cours et les modèles mixtes et statiques ainsi que les modèles dessinés non monotones d'un côté, les points DEUG et Sup. C moins d'un mois après le cours et les modèles primitifs, dynamiques-monotones, ainsi que les modèles tautologie, tend vers et absent de l'autre côté et les modèles dessinés monotones croissant ; autour de l'origine, on trouve les modèles préstatiques, dynamiques et "définition" -modèles où s'expriment des idées moins précises sur la convergence.

Par contre, le genre du dessin n'intervient pas dans la construction de cet axe alors que ce sont des modèles et des modèles dessinés qui le construisent (mixte, statique, primitif, "tend vers" et modèles dessinés non monotones et monotones croissant).

On peut toutefois remarquer que les dessins du genre fonctionnel sont relativement bien corrélés à l'axe et se projettent du côté des modèles erronés et des niveaux du premier groupe, alors que c'est le contraire pour les dessins "plans" -les dessins linéaires, eux, mal corrélés, se projettent au centre. Voici un "graphique" (1) résumé de ces résultats -les points entre crochets sont seulement bien corrélés à l'axe sans le construire.



(1) Voir le nuage correspondant en annexe ⑨1.

Nous pouvons donc confirmer les résultats obtenus par les tris croisés en précisant que les facteurs essentiels sont les modèles exprimés et les modèles dessinés et non le genre du dessin et en retrouvant les hiérarchies qui s'esquissaient.

Comparaison des tris croisés et de l'analyse factorielle (niveaux, modèles exprimés modèles dessinés, genre du dessin).

1) Les points représentant des variables qu'on a associées par les tris croisés ont des projections proches sur l'axe 1 . Autrement dit, les principaux résultats de ces tris apparaissent sur l'axe 1 mais certaines variables intervenant dans ces résultats sont mal corrélées à cet axe.

2) En fait, seule contribue à la construction de l'axe une partie des variables représentant les modèles exprimés et les niveaux -parmi celles dont les valeurs "s'écartent" le plus des valeurs moyennes des tableaux.

3) En guise de conclusion, nous pouvons dégager de ces analyses deux constatations. D'une part, les résultats des tris croisés et des analyses factorielles sont non contradictoires et complémentaires; d'autre part, les variables principales "niveaux" "modèles exprimés" et "modèles dessinés" sont susceptibles d'une classification simultanée dans laquelle s'opposent le groupe trois, les modèles mixte et statique et les modèles dessinés non monotones et le groupe un les modèles primitif et "tend vers" et les modèles dessinés monotones.
Nous aurons l'occasion d'enrichir cette classification.

3.3.5. Les erreurs dans les questions 1) et 2).

Les erreurs dans les questions 1) et 2) sont de deux sortes: il y a les expressions qui traduisent des représentations erronées de la convergence (modèles primitifs et dynamiques monotones) ou de la divergence (oubli de cas), etc ... ; il y a aussi, indépendamment du contenu des représentations exprimées un certain nombre d'erreurs dont nous n'avons d'ailleurs pas généralement tenu compte dans notre classement. Ainsi, certains étudiants illustrent-ils leurs propos par des exemples qui ne peuvent pas représenter des suites -ce ne sont que des restrictions à $[1,N]$ d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Cela souligne la nécessité de faire attention à la

simplification éventuellement falsificatrice du retour au "concret" -nous n'en avons pas tiré d'autres enseignements. Plusieurs autres étudiants dessinent des fonctions continues pour illustrer la convergence des suites- nous ne pouvons pas déterminer si c'est réellement une erreur ou si c'est le manque de temps qui a entraîné cette transformation d'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ en une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il y aurait une étude à part à réaliser grace à des entretiens pour s'en assurer. Comme nous l'avons évoqué dans des paragraphes précédents, un certain nombre d'étudiants remplacent l'indice n par le temps et ceci dans l'expression de plusieurs types de modèles, mais principalement dans les modèles dynamiques qui s'y prêtent bien. Enfin, beaucoup de discours sur la convergence ne sont pas "corrects" quant à leur rédaction, ou s'avèrent embrouillés, confus, si ce n'est obscur. Nous n'en avons pas tenu compte ... dans la limite de notre compréhension. Ainsi, là encore, avons-nous choisi de privilégier l'image de la convergence véhiculée dans le discours sans nous attacher aux erreurs de formes ou à des erreurs annexes.

3.4. Répartition - Evolution des modèles exprimés.

3.4.1. Répartition des modèles exprimés par les 1 057 étudiants ayant répondu au texte V_1 dans des conditions standard par niveau. (Tableau III_3)

Nous voyons apparaître sur ce tableau des régularités intéressantes.

a) Etude de l'abord de la question.

Il y a 5% d'étudiants seulement qui n'écrivent rien sur les questions 1) et 2) -ce sont des"maîtrises" qui n'ont pas eu assez de temps et des "DEUG tout de suite après le cours" qui, avec 14% et 10% du total de leur niveau, représentent les plus forts taux d'"abstention". Dans toute la suite, nous travaillons sur les 1 005 copies où sont abordées les questions 1 et 2 où se révèlent les modèles exprimés. Il apparaît que les effectifs de Math. Sup. C(plus de trois mois après le cours)sont très faibles -les pourcentages correspondants ne seront donc pas très fiables. Tous nos pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant

abordé la question par niveau.

Rappelons la composition de nos trois groupes de niveaux:

Premier groupe = DEUG.

Deuxième groupe = Math. Sup. C.

Troisième groupe = Math. Sup. , Math. Spé., Licence, Maîtrise.

b) Etude par modèle et par niveau.

* Les modèles PRIMITIFS disparaissent donc des copies en troisième année. Par contre, en DEUG 1 et 2, ils se maintiennent autour de 15% sans diminution en deuxième année.

* Le modèle DYNAMIQUE s'avère très équi-réparti dans chaque niveau autour de 36%. Le modèle DYNAMIQUE MONOTONE disparaît en Maîtrise, et ne concerne vraiment que les DEUG 1ère année (5%) et les Math. Sup. C moins d'un mois après le cours.

* Le modèle MIXTE est en augmentation sensible ainsi que le modèle STATIQUE: le modèle Mixte, lui, passe de 9% environ en moyenne en DEUG 1ère année à 30% en moyenne dans le troisième groupe (constitué des Math. Sup. , Math. Spé. , Licence, Maîtrise).

Cependant, le modèle statique ne commence à apparaître vraiment qu'en Sup. et ne concerne véritablement que le troisième groupe (Math. Sup. , Math. Spé. , Licence, Maîtrise).

* Le modèle PRESTATIQUE lui, apparaît déjà en DEUG moins de trois mois après le cours (10%), se maintient en DEUG 2 au même pourcentage, et reste ensuite stable dans le troisième groupe (autour de 12%).

* Les TAUTOLOGIES disparaissent des copies en licence; de toute manière dans chaque niveau, elles ne concernent guère plus de 4% des étudiants en général.

* Le modèle "TEND VERS" reste autour de 10% dans le premier groupe (DEUG), et s'il n'est jamais exprimé en Math. Sup., concerne en moyenne 5% des copies du troisième groupe.

Corpus M_1 Les 1 057 copies ayant répondu au texte V_1 pour les questions 1) et 2) dans des conditions standard. III$_3$

Modèle exprimé / Niveau	Total (effectifs)	Abordés (effectifs)	Pourcentage de non abordés	Primitifs	"Tend vers"	Dynamique Monotone	Définition	Tautologie	Pas de modèle exprimé	Dynamique	Prédatrique	Mixte	Graphique
DEUG 1 après le cours sans exercices	97	87	10%	17%	11%	5%	1%	3%	17%	36%	3%	5%	1%
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	128	123	4%	15%	11%	4%	2%	4%	9%	28%	12%	11%	3%
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	130	129	1%	14%	9%	5%	0	4%	12%	37%	8%	8%	3%
DEUG 2ème année	157	150	4%	17%	10%	2%	1%	5%	4%	40%	10%	6%	4%
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	73	68	7%	6%	7%	12%	1%	3%	4%	44%	4%	18%	0
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	31	29	6%	10%	0	0	0	14%	0	34%	7%	28%	7%
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	158	155	2%	1%	0	1%	1%	1%	1%	34%	12%	34%	15%
MATH. SPE.	128	126	2%	3%	8%	2%	2%	2%	6%	39%	8%	21%	9%
LICENCE (3ème année)	53	50	6%	0	6%	2%	2%	0	6%	38%	14%	28%	4%
MAITRISE (4ème année)	102	88	14%	0	2%	0	2%	0	7%	36%	9%	27%	16%
TOTAL Effectifs	1057	1005	5%	91	71	33	13	31	68	366	91	173	68
pourcentage				9%	7%	3%	1%	3%	7%	36%	9%	17%	7%

Les pourcentages sont calculés sur le total des abordés par niveau.

Quant aux copies sans modèle exprimé, elles diminuent progressivement: de 17% en DEUG tout de suite après le cours, elles passent à 10% dans le reste du DEUG 1ère année, 4% en DEUG 2ème année, et concernent à peu près 6% des copies du troisième groupe. Les Math. Sup. doivent encore être mises à part puisque seulement 1% de leurs copies ne présentent pas de modèle.

Les grandes caractéristiques de cette évolution par niveau et par groupe nous semblent être la disparition des modèles primitifs et dynamiques monotones, l'équirépartition du modèle dynamique et l'augmentation des modèles mixtes et statiques, avec le maintien à partir d'un certain niveau du modèle préstatique.

Si on regarde précisément la répartition des modèles par niveau, on constate que, dans le premier groupe, il n'y a pas de différence accusée entre les quatres niveaux, les copies de DEUG (deuxième année) ne sont pas en rupture nette avec les copies de DEUG (première année). Les différences entre le DEUG tout de suite après le cours et le DEUG entre un et trois mois après le cours portent sur l'expression des modèles Mixte et Préstatique -qui passe de 5% et 3% à 11% et 12%, accompagnée d'une diminution du modèle dynamique. Ensuite, à part le rétablissement du taux du modèle dynamique, on ne peut noter aucune évolution sensible entre les copies de DEUG plus d'un mois après le cours (première année), plus de trois mois après le cours (première année) et deuxième année . Tout se passe comme si après le cours et les exercices, rien ne change vraiment dans les représentations que peuvent exprimer les étudiants.

Dans le troisième groupe, les différences, peu importantes également, portent sur la répartition des copies entre les modèles mixtes, statiques et préstatiques d'une part, "tend vers" et sans modèle d'autre part.

En Math. Sup. , en effet, ces dernières copies étant presque inexistantes, on obtient les pourcentages les plus élevés de modèles mixtes (34%), avec 12% de

modèles préstatiques (comparables aux 14% de modèles préstatiques en Licence), et 15% de modèles statiques (on en remarque 16% en Maîtrise).
Dans les autres niveaux du groupe, il y a entre 13 et 9% de copies sans modèle ou exprimant seulement un modèle "tend vers" -les répartitions entre mixte, statique et préstatique sont variables, mais semblables à une "homothétie" près à celle de Math. Sup. (en gros). Encore une fois, les représentations se mettent rapidement en place et n'évoluent pas beaucoup.
Nous n'évoquons que rapidement le deuxième groupe ; il apparaît tout-à-fait comme intermédiaire entre le premier et le troisième -les modèles primitifs ont baissé sans avoir disparu, le modèle statique n'est pas encore exprimé; les pourcentages de Math. Sup. C plus de trois mois après le cours sont trop peu fiables pour que nous en disions davantage si ce n'est que la répartition apparaît un peu "moins bonne" dans ce dernier niveau que dans le groupe trois, alors que la répartition dans le premier niveau de Sup. C est comparable à celle du groupe un.

En conclusion, malgré de légères évolutions au sein des premiers et troisièmes groupes, les répartitions des modèles qu'on y trouve s'avèrent opposées en ce qui concerne les modèles "erronés" (primitifs, tend vers, dynamique monotone) -entre 30 et 40% dans les niveaux du premier groupe, moins de 15% dans ceux du troisième groupe- et les modèles mixtes et statiques -entre 50 et 31% dans les niveaux du troisième groupe, moins de 16% dans ceux du premier groupe. Par contre, les modèles préstatiques et dynamiques ont des répartitions comparables dans presque tous les niveaux. Enfin, si les répartitions des groupes un et trois se "mettent en place" rapidement, le deuxième groupe est intermédiaire -dans la mesure où c'est le groupe où on note le plus d'évolutions entre les niveaux et où les répartitions de chaque niveau se trouvent précisément entre celles des premier et troisième groupes (proche du premier groupe pour le premier niveau).

c) Etude par classe. (Tableaux III_4, III_5, III_6).

Nous avons établi les tableaux traduisant la répartition des modèles par classes et classes non standard du même niveau (lorsque cela a un sens). Il s'agit de toutes les classes de Math. Sup. (deux classes non standard), des classes de Math. Spé. , des quatre groupes de TD de l'amphi de DEUG dont les étudiants ont répondu au questionnaire tout de suite après le cours et des groupes de Maîtrise (un groupe non standard).

Il est alors frappant de constater que les répartitions par classes ne sont pas semblables. Seules les régularités que nous avons annoncées pour le niveau se retrouvent -les autres pourcentages varient assez largement.

Il nous semble ici qu'on ne peut négliger ni le rôle de l'enseignant (et du modèle qu'iltransmet , consciemment ou non) ni la constitution de chaque classe.On aperçoit donc les limites de nos données;il serait vain de chercher à étudier les classes séparément et d'en tirer des conclusions dans la mesure où nous ne nous sommes pas donné les moyens de connaître l'enseignement dispensé dans chaque classe ni la spécificité de la composition de chaque classe.
Cela confirme notre idée de travailler sur des effectifs plus nombreux, d'autant plus que,par contre, entre 662 et 1 057 individus répartis en niveaux, nous trouvons des résultats comparables (cf. 3.4.2).
Quant aux classes non standard, dans la mesure où, précisément, ce sont des classes et qu'il apparaît que les résultats par classes ne sont pas fiables, nous nous contenterons de vérifier, dans les trois cas envisagés, que leurs caractéristiques ne sont pas contradictoires avec celles des individus de leur niveau.

3.4.2. Stabilité de la répartition: comparaison des 662 copies *normales* et des 1 057 copies M_1. (Tableaux III_3, III_7)

Rappelons que les 662 copies N correspondent aux textes V_1 intégraux, et sont réparties sur toutes les classes (à peu près la moitié des copies de chaque classe).

III 4 Répartition des modèles par classe. (DEUG I premier niveau, Math. Spé.)

(copies S) groupes de DEUG / Modèle exprimé	DEUG-01	tout de 03	suite après les cours 04	05	Globalement corpus %	Classes Mathématiques Spéciales 40	41	43	45	Cycle Ingénieur M1
PRIMITIF	18%	3%	17%	21%	17%	0	9%	0	0	3%
TEND VERS	6%	17%	4%	4%	11%	4%	17%	5%	5%	8%
DYNAMIQUE MONOTONE	0	3%	9%	4%	5%	0	4%	2%	0	2%
PAS DE MODELE EXPRIMÉ et NON ABORDÉ	29%	21%	43%	35%	27%	7%	2%	10%	9%	8%
TAUTOLOGIE	0	3%	0	0	3%	0	2%	2%	9%	2%
DEFINITION	0	3%	0	7%	1%	4%	4%	0	4%	2%
DYNAMIQUE	35%	38%	26%	28%	36%	32%	36%	45%	41%	39%
PRESTATIQUE	6%	3%	0	4%	3%	4%	9%	10%	9%	8%
MIXTE	0	7%	0	7%	5%	36%	20%	10%	20%	21%
STATIQUE	6%	0	0	0	1%	14%	2%	17%	5%	9%

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

III$_5$ Répartition des modèles par classe. (Math. Sup.)

Classes de Sup. / Copies S / Modèle exprimé	23	Mathématiques supérieures 24	26	27	28	20	Non standard 80	Non standard 84	Corpus M_1 Global
PRIMITIF	0	0	7%	0	3%	0	0	0	1%
TEND VERS	0	0	0	0	3%	0	0	10%	0
DYNAMIQUE MONOTONE	0	0	0	3%	0	12,5%	0	0	1%
PAS DE MODELE EXPRIMÉ et NON ABORDÉ	3%	0	10%	3%	0	4%	6%	0	3%
TAUTOLOGIE	0	0	0	3%	3%	0	0	0	1%
DEFINITION	0	0	3%	0	0	0	0	5%	1%
DYNAMIQUE	24%	13%	33%	40%	76%	42%	36%	67%	34%
PRESTATIQUE	6%	18%	10%	13%	7%	4%	6%	10%	12%
MIXTE	52%	39%	27%	33%	3%	17%	39%	0	34%
STATIQUE	15%	29%	10%	3%	3%	21%	11%	10%	15%

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

III 6 Répartition des modèles par classe. (Maîtrise)

Copies S / Groupes de Maîtrise / Modèle exprimé	67	69	66	Non standard 61	(*) Global Ensemble (M1)
PRIMITIF	0	0	0	0	0
TEND VERS	0	2,5%	0	0	2%
DYNAMIQUE MONOTONE	0	0	0	0	0
PAS DE MODELE EXPRIME et NON ABORDÉ	11%	42,5%	8%	7%	7%
TAUTOLOGIE	0	0	0	0	0
DEFINITION	0	0	2,5%	0	2%
DYNAMIQUE	44%	25%	35%	29%	36%
PRESTATIQUE	11%	7,5%	5%	0	9%
MIXTE	28%	12,5%	35%	36%	27%
STATIQUE	6%	12,5%	15%	28%	16%

(*) Dans cette colonne, on ne tient compte que des copies où les questions 1) et 2) sont abordées.

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

On constate une similarité indiscutable entre les deux distributions (Tableaux $\overline{III}_3$ et $\overline{III}_7$):

+ Globalement, les distributions sont identiques à 1% près.

+ Par niveau, si on constate de légères fluctuations, toutes les tendances indiquées au paragraphe 4.1.2 sont respectées intégralement.

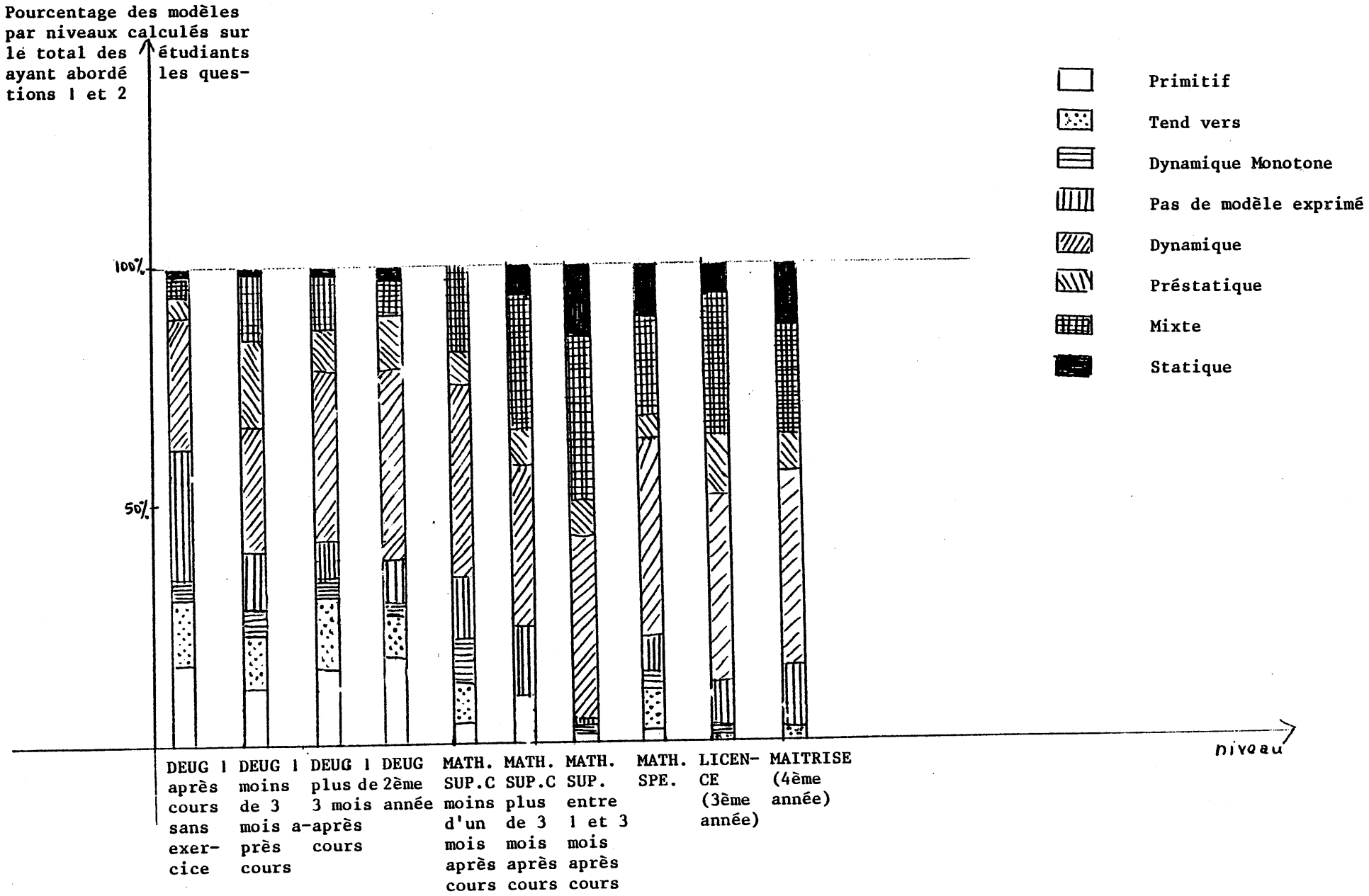
Cela nous semble extrêmement important -et cela s'oppose à ce que nous venons de voir par classes. Il y a dans cette répartition une stabilité qui lui donne toute sa valeur, mais il fallait travailler sur des effectifs suffisamment nombreux pour que le phénomène "classe" ne soit justement plus prépondérant.
La répartition des modèles par niveaux apparaît sur la courbe en bâtons ($M, N\overline{III}$) ci-jointe.

Corpus N Les 662 copies ayant répondu au texte V_1 intégral ÷ dans des conditions standard. III$_7$

Modèle exprimé / Niveau	Total effectifs	Abordés effectifs	Pourcentage non abordés	Primitifs	Tend vers	Dynamique Monotone	Définition	Tautologie	Pas de modèle exprimé	Dynamique	Prédatique	Mixte	Statique
DEUG I après le cours sans exercices	64	59	8%	17%	14%	5%	2%	5%	19%	27%	5%	5%	2%
DEUG I moins de 3 mois après le cours	66	65	2%	12%	11%	5%	3%	2%	8%	26%	18%	14%	2%
DEUG I plus de 3 mois après le cours	55	55	0	16%	15%	4%	0	4%	4%	36%	9%	11%	2%
DEUG 2ème année	101	97	4%	20%	9%	2%	1%	4%	5%	39%	10%	6%	3%
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	48	45	6%	4%	9%	9%	2%	4%	7%	40%	7%	18%	0
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	31	29	6%	10%	0	0	0	14%	0	34%	7%	28%	7%
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	97	95	2%	2%	0	2%	0	1%	1%	39%	6%	34%	10%
MATH. SPE.	92	91	1%	3%	8%	3%	2%	2%	4%	42%	4%	21%	10%
LICENCE (3ème année)	45	42	7%	0	2%	2%	2%	0	7%	40%	12%	29%	5%
MAITRISE (4ème année)	63	50	21%	0	4%	0	4%	0	8%	40%	8%	22%	14%
TOTAL Effectifs	662	628	5%	56 9%	46 7%	20 3%	10 2%	18 3%	38 6%	231 37%	54 9%	114 18%	41 7%

Les pourcentages sont calculés sur le total des abordés par niveau.

(P.M. III) MODELES x NIVEAUX Corpus *N*



3.4.3. En guise de bilan : conjectures sur l'origine des modèles.

Ainsi, suite aux cours et aux exercices (ainsi qu'aux cours des années précédentes) s'est forgé, chez chaque étudiant, un modèle dont nous avons recueilli une expression écrite qui n'évolue pas tellement au fur et à mesure des études ultérieures. Ce modèle peut avoir, selon les étudiants, des origines bien différentes, semble-t-il.

En DEUG, certains modèles (archaïques) semblent être issus du sens français des mots utilisés, comme si l'influence du cours restait très faible; les modèles primitifs pourraient être issus du théorème sur les suites monotones bornées -condition pourtant suffisante de convergence , mais d'application immédiate et fréquente. Les représentations dynamiques correspondent plus, d'après l'étude du premier paragraphe du chapitre I, à des cours oraux où le mot "tend vers" est utilisé plus volontiers que le mot "converge" et où l'idée de rapprochement est plus facilement évoquée, ne serait-ce que par des gestes, au tableau. Cela peut expliquer que ces modèles concernent uniformément plus du tiers des étudiants de tous les niveaux. Les représentations statiques sont complètement différentes dans la mesure où elles correspondent à une transformation individuelle de la définition mathématique (peu parlante) en une image. On peut supposer que ce n'est pas à la simple audition de la définition pendant le cours que le modèle s'élabore, mais bien suite à une utilisation de cette définition. On pourrait même se demander si, indépendamment du reste, lorsque les exercices suivent immédiatement le cours et font mobiliser rapidement la définition dans des tâches où c'est la seule méthode "qui marche", il n'y a pas plus de chances de voir s'installer un modèle statique que lorsqu'une semaine s'écoule entre l'audition du cours et sa mise en application. L'exemple des Sup. C ne confirme pas cette dernière hypothèse dans la mesure où le modèle statique n'apparaît pas encore après le cours et les premiers exercices (deux semaines). Au contraire, cet exemple renforce l'hypothèse que c'est bien le fonctionnement et même un fonctionnement assez prolongé (avec rédaction de problèmes sur les suites par exemple) qui est susceptible d'entraîner l'élaboration de modèles statiques (ou mixtes).

Cela n'est en contradiction ni avec le cas des Math. Sup. (ayant répondu au questionnaire entre un et deux mois après le cours et les exercices), ni avec celui des DEUG (où souvent il ne s'est rien passé, mais où on n'a pas nécessairement proposé de problèmes que les étudiants aient su faire et où l'utilisation de la définition ait été indispensable). Cependant, avant d'affirmer que les modèles s'installent lorsqu'ils deviennent nécessaires à la résolution de problèmes où les anciens modèles échouent, il faudrait une étude expérimentale sur le terrain qui fait partie de nos projets ultérieurs. En tout cas, on peut aussi souligner que, en DEUG, on est amené à multiplier les exercices d'application immédiate du cours, sans beaucoup de calculs, dans lesquels fonctionne massivement le théorème sur les suites monotones bornées et que cela n'est peut-être pas sans rapport avec la fréquence des modèles monotones. Tout se passe comme si on avait renforcé, par un fonctionnement trop limité, un modèle erroné. La question qui se pose ici concerne la transposition didactique; comme nous l'avons déjà évoqué, plus l'objet d'enseignement est "coupé" de l'objet de savoir, plus les petits exercices que l'on peut poser sont accessibles aux étudiants -moins peut-être parviennent-ils à élaborer un modèle correct de la notion; au contraire, plus l'on se rapproche du fonctionnement réel d'une notion, plus les exercices sont ardus et échappent aux étudiants -plus facile aussi serait l'élaboration de modèles corrects ... Il y a peut-être là une limite à ne pas dépasser dans la transposition didactique, tout comme un certain "seuil" quantitatif de fonctionnement est peut-être nécessaire à tout apprentissage ... Pour conclure, soulignons enfin que cette gamme assez étendue de représentations de la convergence, dont bon nombre ne sont pas assez précises, peut consister à soi seul une difficulté dans l'apprentissage de la notion. Il apparaît clairement à ce point de notre étude que la suite de ce travail doit aborder précisément les rapports entre l'enseignement et l'élaboration des modèles, qui a lieu de toutes façons ...

En conclusion de cette première partie, si nous revenons sur nos catégories de modèles, nous pouvons constater qu'il y a des modèles traduisant effectivement un aspect de la convergence des suites -ce sont le modèle statique (description atemporelle), le modèle dynamique (description cinématique), et donc les modèles mixtes; il y a des modèles traduisant une image erronée de la convergence des suites -ce sont les modèles primitifs et dynamiques monotones; il y a des modèles traduisant de manière imprécise une image éventuellement correcte de la convergence des suites - ce sont les modèles "tend vers" et préstatique ; enfin, il y a les "modèles" qui n'en sont pas -ne traduisant rien du tout- ce sont les modèles absents (tautologie, définition, pas de modèles exprimés).

Toute cette première partie montre que ces catégories correspondent bien aux différentes façons dont les étudiants se représentent la convergence des suites. Il s'agit maintenant de chercher le rapport entre ces représentations (et leurs indices exprimés que nous avons mis en évidence) et la façon dont les étudiants font fonctionner la notion. Il restera à chercher (mais nous ne l'avons pas encore fait) le rapport entre l'enseignement et l'établissement de ces modèles -en n'oubliant pas que la notion est déjà survolée en terminale.

Deuxième partie : Les exemples.

Les questions 1) et 2) dont nous venons de parler sont suivies des questions 3) et 4) suivantes (du moins dans le texte V_1) :

3) Donner quatre exemples de suites convergentes.

4) Donner quatre exemples de suites divergentes.

Ces exemples sont fournis par les étudiants en général sans démonstration, et souvent la limite des exemples convergents n'est pas citée. Voici quelques exemples tirés des copies :

[2706] 3) suites convergentes $u_n = \frac{1}{n}$ $\forall n$
$u_n =$ constante
$u_n = \frac{1}{n^2}$
$u_n = \frac{1-n}{1+n}$

4) Suites divergentes $u_n = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$u_n = n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$u_n = n^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\begin{cases} u_n = 0 \text{ pour } n \text{ pair} \\ u_n = 3 \text{ pour } n \text{ impair} \end{cases}$

[2905] 3°) La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ; la suite $n \longmapsto e^{-n}$ converge car ~~exponentielle~~ $\lim_n e^n = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $e^n > 0$ (donc $e^n \neq 0$) ;
~~inverse~~ donc $\lim_n \frac{1}{2^n} = \lim_n e^{-n} = 0$.
soit $x \in \mathbb{R}^+$. $n \longmapsto \sqrt[n]{x}$ converge vers 1 : $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$; $\lim_n \frac{1}{n} = 0$; donc $\lim_n e^{\frac{1}{n}\ln x} = 1$.

4°) $n \longmapsto n^2$ est divergente. $\lim_n n^2 = +\infty$
$n \longmapsto 2^n$ ——— $\lim_n 2^n = +\infty$
$n \longmapsto \log n$ ——— $\lim_n \log n = +\infty$
$n \longmapsto \sin n$ ——— pas de limite à l'infini en vitesse.

Il n'y a que 28 étudiants sur 1 253 qui n'abordent pas ces questions, dont un n'avait donné que des dessins comme exemples.

L'étude des exemples et leur répartition dans diverses classes est assez délicate. Ainsi, lorsqu'un étudiant donne comme exemple convergent $u_n = \frac{n+1}{n+2}$, peut-on ranger cet exemple dans la catégorie des exemples convergents monotones ?

Nous avons pris à ce sujet la décision (arbitraire) de ne pas considérer comme monotones des exemples où la monotonie n'était pas en évidence sur la forme de l'exemple écrite dans la réponse.

Ces considérations (et d'autres analogues) nous ont amenée à retenir les caractères suivants dans les exemples :

Pour les exemples convergents, nous avons regardé si la suite $u_n = \frac{1}{n}$; ou d'autres du même type ($u_n = \frac{1}{n+1}$, $u_n = c + \frac{a}{dn+b}$) figurent -ceci pour repérer le lien entre les exemples cités dans le questionnaire et le cours. Nous avions en effet vérifié que cet exemple figure dans la majorité des cours . Nous avons ensuite étudié la monotonie des exemples convergents donnés (avec la convention ci-dessus).

Pour les exemples divergents, nous avons regardé si la suite $u_n = n$ (ou d'autres du même type, $u_n = n+1$, $u_n = an+b$) figure pour des raisons analogues aux précédentes pour la suite $\frac{1}{n}$. Nous avons ensuite étudié si toutes les suites divergentes citées étaient non majorées, si il y avait une suite contenant un sinus (respectivement une suite du genre $(-1)^n$) à l'exclusion d'autres suites majorées divergentes, et s'il y en avait une en sinus et une en $(-1)^n$.

Ensuite, pour étudier la "richesse" des exemples cités, nous avons repéré la nature des fonctions intervenant dans ces exemples (logarithme et exponentielle, racines, fractions), et la variété des exemples (plusieurs du même type ou non).

Pour "mesurer" la trace de l'enseignement de terminale (concentré autour des suites géométriques), nous avons étudié précisément la fréquence des suites géométriques parmi les exemples. Enfin, nous avons noté le nombre d'erreurs ou d'omissions dans chaque copie. Nous commençons par l'étude de tout ce qui concerne la

Corpus M_1

Utilisation des suites géométriques dans les exemples.

Copies M_1 Exemples / Niveau	Au moins une suite géométrique	une suite géométrique convergente	une suite géométrique divergente	Aucune suite géométrique	Questions 3) et 4) non abordées	Abordés
DEUG 1 après le cours sans exercices	22 (24%)	5	10	70	5	92
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	42 (34%)	8	24	81	5	123
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	46 (37%)	14	17	79	5	125
DEUG 2ème année	62 (40%)	12	17	92	3	154
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	45 (62%)	10	9	28	0	73
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	17 (55%)	4	3	14	0	31
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	68 (43%)	20	19	90	0	158
MATH. SPE.	34 (27%)	12	13	94	0	128
LICENCE (3ème année)	26 (49%)	7	3	27	0	53
MAITRISE (4ème année)	39 (38%)	15	7	63	0	102
TOTAL	401 (38%)	107	122	638	18	1039

Les pourcentages sont calculés sur le total des abordés par niveau.

nature des exemples -indépendamment de leur caractère monotone ou non.

a) Les traces de l'enseignement de terminale -(Etude par niveaux).

Dans la mesure où les premiers exemples de suites numériques (en terminale) sont constitués de suites géométriques, nous nous sommes d'abord demandée quelle est la part de ces suites géométriques dans les exemples restitués par les étudiants à cette occasion (Tableau $S.G._N$). Nous avons constaté que seulement 38% des étudiants en produisent au moins une -43% des suites géométriques sont données à la fois comme exemple de suite convergente et comme exemple de suite divergente. D'autre part, en DEUG tout de suite après le cours, il n'y a que 24% des étudiants qui font appel à ces souvenirs. Par contre, en Math. Sup. C moins d'un mois après le cours, 62% des exemples contiennent au moins une suite géométrique. Cela suggère de mettre en rapport les exemples avec le cours qui vient d'être entendu beaucoup plus qu'avec les souvenirs antérieurs. Nous n'avons pu reconstituer tous les cours entendus par les étudiants interrogés, mais suffisamment pour avancer l'hypothèse suivante: les exemples que les étudiants donnent en 3) et 4) correspondent à une mobilisation de leur mémoire à court terme si le cours est proche; par contre, si le cours est lointain, on peut se demander si des connaissances plus solides sur les suites sont mobilisées. Or, le pourcentage d'étudiants faisant appel dans leurs exemples à des suites géométriques à partir de trois mois après le cours et jusqu'en maîtrise varie entre 30 et 50%; ceci confirme que les connaissances construites à partir de la première année universitaire sont plus importantes que les premiers éléments de Terminale, revus ensuite d'ailleurs.

b) La richesse des exemples -(Par niveaux). (Tableau $\bar{F}_N$).

On ne constate pas de contrastes très réguliers; il y a cependant des différences d'utilisation des fonctions, citées plus haut, dans les exemples. Ainsi, si globalement, 40% des exemples (convergents et divergents) contiennent des fonctions Log ou Exp, ce taux est dépassé en Math. Spé. et en Maîtrise, et il est beaucoup plus bas dans les Math. Sup. C , ou en Math. Sup. et en DEUG plus de trois mois

F_N

Répartition des fonctions utilisées dans les exemples. (corpus M_1)

Fonctions utilisées dans les exemples (corpus M_1) Niveau	Logarithme Exponentielle	Racines à l'exclusion des Logarithmes et Exponentielles	Fractions à l'exclusion des racines, Log. et exponentielles	Abordés	Pas d'erreurs et le bon nombre d'exemples CORPUS N
DEUG 1 après le cours sans exercices	31 - 34%	9 - 10%	35 - 38%	92	20 - 31%
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	55 - 45%	18 - 15%	38 - 34%	123	29 - 45%
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	36 - 29%	24 - 19%	51 - 41%	125	27 - 49%
DEUG 2ème année	67 - 44%	21 - 14%	42 - 27%	154	43 - 43%
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	15 - 21%	18 - 25%	25 - 34%	73	28 - 58%
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	5 - 16%	9 - 29%	15 - 48%	31	20 - 65%
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	49 - 31%	22 - 14%	84 - 53%	158	70 - 72%
MATH. SPE.	73 - 57%	6 - 5%	19 - 15%	128	68 - 74%
LICENCE (3ème année)	23 - 43%	3 - 6%	17 - 32%	53	31 - 69%
MAITRISE (4ème année)	59 - 58%	6 - 6%	13 - 13%	102	45 - 71%
TOTAL	413 - 40%	136 - 13%	339 - 33%	1039	

Les pourcentages sont calculés sur le total des abordés du niveau.

après le cours. Dans trois de ces quatre niveaux (Math. Sup. C moins d'un mois après le cours exclus), on trouve par contre entre 41 et 53% d'exemples utilisant des fractions (exemples plus simples), alors que globalement il n'y a que 33% des exemples ainsi construits. Dans la mesure où ces différences ne sont pas caractéristiques du moment où l'on interroge les étudiants (contre exemple du DEUG après le cours), nous pensons qu'elles correspondent à des différences dans le dernier enseignement qui a été entendu à ce sujet (problème, cours, exercice). Autrement dit, nous estimons que la "récitation par écrit" de ces exemples n'a pas nécessairement mobilisée l'imagination des étudiants mais plutôt leur mémoire à plus court terme possible; dans cette mesure, ces exemples ne devraient pas être très discriminants par rapport aux modèles et aux procédures. En particulier, l'évolution de la nature des fonctions utilisées dans les exemples des étudiants du groupe trois (Math. Sup. , Math. Spé. , Licence, Maîtrise) traduit vraisemblablement l'évolution globale des exemples rencontrés au cours d'exercices sur les suites et sur d'autres sujets au cours des études.

Par contre, en ce qui concerne le pourcentage des exemples corrects (et au nombre de 8) par niveaux (calculé sur le corpus N) on voit apparaître une splendide régularité -on obtient presque une fonction croissante du niveau; ce pourcentage passe de 30% en DEUG tout de suite après le cours à 45% environ jusqu'en DEUG 2 compris, monte de 58% à 65% en Math. Sup. C et reste autour de 71% dans le troisième groupe.

c) Les exemples $\frac{1}{n}$ et n. (Tableau E_N).

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, on constate que c'est en Math. Spé. , en licence et en maîtrise (donc un an après le cours au moins) que les étudiants - pour la moitié (ou un peu moins de la moitié) d'entre eux-donnent comme exemples (parmi les autres) $\frac{1}{n}$ et n . Ailleurs, l'exemple de suite divergente $(u_n = n)$ est moins souvent relevé que l'exemple de suite convergente $(u_n = \frac{1}{n})$ qui lui-même concerne entre 22% et 44% des copies suivant les niveaux. Il n'y a qu'en DEUG 1 tout de suite après le cours et en Math. Sup. que l'on rencontre plus de 40% des

Exemples $\frac{1}{n}$ et n (corpus N). E_N

Exemples $\frac{1}{n}$ et n / Niveau	Pas d'exemples du type $\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	Pas d'exemples du type n	n
DEUG 1 après le cours sans exercices	28 - 44%	14 - 22%	9 - 14%	14 - 22%
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	14 - 36%	29 - 44%	15 - 23%	19 - 29%
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	10 - 18%	25 - 38%	17 - 26%	7 - 11%
DEUG 2ème année	26 - 26%	29 - 29%	22 - 22%	23 - 23%
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	11 - 23%	16 - 33%	20 - 42%	5 - 10%
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	12 - 39%	10 - 32%	9 - 29%	8 - 26%
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	17 - 48%	38 - 39%	30 - 31%	35 - 36%
MATH. SPE.	30 - 33%	44 - 48%	25 - 27%	40 - 43%
LICENCE (3ème année)	7 - 16%	24 - 53%	15 - 33%	22 - 49%
MAITRISE (4ème année)	18 - 29%	26 - 41%	14 - 22%	31 - 49%
TOTAL	173 - 21%	255 - 32%	176 - 23%	204 - 25%

les pourcentages indiqués sont des pourcentages lignes calculés sur le total de chaque niveau, mais les catégories envisagées ne sont pas disjonctives.

des copies où ne figure aucun exemple du type $\frac{1}{n}$ et en Math. Sup. C un mois après le cours, il y a 42% des copies où ne figure aucun exemple du type n. Cela indique que le rapport entre les exemples fournis par les étudiants et les cours qu'ils ont entendu n'est pas immédiat -tous les professeurs de Math. Sup. contactés ont confirmé qu'ils donnaient l'exemple $u_n=\frac{1}{n}$ ou $u_n=\frac{1}{n+1}$ dans leur cours. Il est possible qu'il y ait un rapport entre les exemples donnés et les toutes dernières activités sur les suites - le cas échéant - alors que, lorsque l'enseignement sur les suites est éloigné, il reste des exemples plus typiques, qui ont servi, et qui correspondent moins à la mémoire à très court terme.
Ces différentes analyses de la répartition des exemples renforcent entre elles et confirment notre hypothèse d'indépendance relative des connaissances (et donc des modèles exprimés et des procédures), et de la nature des exemples, exception faite de leur caractère monotone. Au lieu de multiplier les "tris croisés" de ce type, nous terminons par l'analyse factorielle du tableau de contingence des exemples croisés aux modèles exprimés, modèles dessinés et divers commentaires exprimés dans les questions 1) et 2) (divergence, définition des suites, commentaires sur la limite) pour déterminer les caractères prédominants dans ces exemples.

d) L'analyse factorielle (Modèles exprimés, modèles dessinés, commentaires) x Exempl

Dans cette analyse,[1] les niveaux ont été mis en supplémentaires.
Cette fois-ci, l'axe 1 ne porte que 28% de l'inertie -on constate que ce sont les modèles qui construisent cet axe, dans l'ordre déjà trouvé antérieurement, ainsi que les modèles dessinés non monotones; de plus, les points représentant les explications justes de la notion de suite ainsi que la définition triviale de la divergence (non convergence) construisent aussi le premier axe, et se projettent du côté des modèles mixtes et statiques; ces points s'opposent à ceux

---

(1) cf. annexe ⑨ 2

qui représentent la définition erronée de la divergence (qui consiste à oublier que les suites divergentes ne tendent pas toutes vers $+\infty$), et aux explications fausses ou insuffisantes de la notion de suite; les explications aux plus jeunes, justes et erronées, s'opposent aussi avec la même répartition.

Quant aux exemples, on constate que les fonctions utilisées dans les exemples n'interviennent, à une exception près, qu'à partir du deuxième axe, et les suites géométriques qu'à partir du quatrième axe (et avec une mauvaise qualité). Par contre, contribuent à la construction du premier axe, les exemples convergents non monotones et les exemples divergents alternés ou en sinus (projetés du côté des modèles statiques et mixtes) qui s'opposent aux exemples convergents monotones et surtout aux exemples divergents non majorés (du côté des modèles primitifs).

Du côté des modèles primitifs, on trouve aussi les exemples peu variés -par exemple ceux où deux exemples du type $(\frac{1}{n})$ sont donnés parmi les quatre exemples convergents, ou ceux où deux suites du même type sont données et dans les exemples convergents et dans les exemples divergents -alors qu'aucune suite géométrique n'est produite.

Par contre, du côté des modèles statiques et mixtes, on trouve les points représentant la donnée de la suite (n) et les copies où $(\frac{1}{n})$ n'est pas donné comme exemple de suite convergente.

Autrement dit, on retrouve sur ce premier axe deux groupes qui s'opposent -les modèles exprimés et dessinés non monotones, les exemples non monotones, les commentaires corrects sur les suites et aux plus jeunes et de l'autre côté, les modèles erronés (ou absents), les modèles dessinés et exemples monotones, les commentaires erronés, les exemples assez pauvres- avec, proches du centre de gravité, les modèles non erronés, mais pas très précis (pas très bien correlés).

Tout cela conforte évidemment notre choix méthodologique de garder comme variables pertinentes les modèles exprimés et les modèles dessinés; cela souligne simultanément la cohérence qui apparaît dans des réponses pourtant très rapides et très spontanées; il s'avère que la monotonie des modèles, des dessins, des exemples (pris sur le vif, sans réflexion approfondie préalable) n'est pas dûe au hasard

mais relève bien d'une conception globale erronée (mais non contradictoire), associée à des réserves d'exemples souvent peu fournies. On voit bien l'intérêt qu'il y a à croiser ces modèles exprimés, indices de ces conceptions, et les procédures produites par leurs auteurs dans des exercices sur les suites.
Par contre, pour ce qui est de la forme des exemples (fonctions utilisées), on constate qu'elle n'intervient pas de façon déterminante dans ce classement; de même, le recours à des suites géométriques, pourtant enseignées massivement en Terminale n'est pas spécialement associée aux premiers niveaux, DEUG ou Sup., comme nous l'avions déjà noté. Il est possible qu'on enregistre les exemples dans la mémoire "à court terme" et que dans la mesure où ils n'ont eu d'autre rôle à jouer dans un fonctionnement ultérieur, leur mobilisation un an après s'avère peu fréquente.

CHAPITRES 4 , 5 , 6 .

Présentation des procédures à divers exercices et premières relations avec les modèles exprimés.

Dans ces trois chapitres, nous présentons les réponses des étudiants à divers exercices du questionnaire. Dans ces exercices, il s'agit, soit de montrer qu'une suite est (ou n'est pas) convergente (exercices 6,7,8,10), soit de déduire une propriété du fait de la convergence d'une suite (propriété de la suite dans l'exercice 5, de la limite dans l'exercice 9c). Cependant, ni les connaissances mobilisées par ces tâches, ni la forme des exercices ne sont exactement les mêmes; nous essayons donc de dégager, dans chaque cas, les relations entre les procédures rencontrées et la tâche proposée, ainsi que celles entre procédures et modèles exprimés, tout en étudiant les procédures en fonction du temps des études.
Dans l'exercice analysé au chapitre 4 (exercice 5), il s'agit de décider si une suite convergeant vers 0 et à termes positifs décroit (en justifiant éventuellement cette décision). Cette tâche semble en rapport étroit avec la représentation mentale de la convergence des suites (et c'est le seul cas dans ce questionnaire); nous étudierons donc tout particulièrement les relations entre les procédures et les modèles exprimés, les modèles dessinés et même les exemples, dans la mesure où c'est un contre-exemple qui constitue la justification correcte.
Dans le premier exercice analysé au chapitre 5 (exercice 7), il s'agit de vérifier la convergence d'une suite (u_n) sachant qu'une autre suite (nu_n) converge vers 1 ; là, les procédures (correctes ou erronées) s'avèrent très nombreuses et très diverses, sans qu'intervienne explicitement la représentation mentale de la convergence.
C'est toute cette complexité que nous mettons en évidence, avec l'évolution dans le temps des procédures choisies par les étudiants. La relation des procédures et des modèles exprimés est intéressante, d'autant plus que l'on peut chercher si on retrouve le même type de corrélation que dans l'exercice précédent, alors que l'image mentale de la convergence n'est pas directement sollicitée. Nous terminons

ce chapitre par une présentation plus rapide d'un exercice ayant été fort peu abordé -la question c) de l'exercice 9). Cet exercice se caractérise aussi par une grande diversité de procédures et nous en profitons pour dégager, sur ces deux cas, le type de procédures qui s'installent bien après l'enseignement sur les suites (dans la mesure où plusieurs stratégies sont possibles).

Dans le chapitre 6, nous présentons d'abord un exercice élémentaire sous une forme très classique (exercice 6). Nous pouvons ainsi vérifier que l'exercice est mieux réussi que les précédents, mais surtout comparer les procédures utilisées à celles que nous avions analysées dans l'exercice 7. En effet, si les objectifs des deux exercices sont semblables -montrer qu'une suite est convergente sans en connaître la limite- dans l'exercice 6, la suite est explicite (avec seulement un paramètre) alors que dans l'exercice 7, elle intervient implicitement -par l'intermédiaire de la suite (nu_n) ; par suite, si ce sont les mêmes procédures qui peuvent intervenir (théorèmes algébriques, encadrement ou majoration de (u_n)) leur mobilisation est immédiate dans l'exercice 6, alors que dans l'exercice 7 un travail préliminaire est nécessaire. Il devient donc intéressant de comparer la disponibilité de ces procédures. Si c'est encore la même tâche (montrer qu'une suite est convergente) qui est proposée dans l'exercice 8,[1] cette fois-ci, c'est l'utilisation de la définition en (ε,N) qui doit être utilisée -comme condition nécessaire d'abord pour (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et comme condition suffisante ensuite pour (u_n) . Il se pose donc la question de la mobilisation de la définition dans une tâche très simple; nous avons donc comparé les procédures de cet exercice et celles de l'exercice 7 (encore !) où un départ possible de la démonstration est aussi l'utilisation de la définition en (ε,N) comme condition nécessaire de la convergence. Mais l'exercice 8 est aussi le "revers" de l'exercice 10[2] -dans la mesure où dans ces deux exercices on donne deux suites extraites d'une même suite

---

(1) présenté en deuxième partie du chapitre 6

(2) présenté en troisième partie du chapitre 6

qui convergent toutes les deux vers la même limite et on s'intéresse à la convergence de la suite. Seulement, dans l'exercice 8, les deux suites extraites sont (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et on démontre une convergence alors que dans l'exercice 10 on n'a pas de convergence qu'on justifie par un contre-exemple. Il y a là une connaissance "unique" sollicitée de deux façons différentes qu'il est donc intéressant de comparer.

CHAPITRE 4 . L'EXERCICE 5

Le texte (initial) de cet exercice est le suivant:

5) Vrai ou faux: toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante.

Il s'agit donc de réaliser (et de justifier) que la réponse "Faux" est ... la bonne réponse à cette question; il suffit d'exhiber à cet effet un contre-exemple, c'est-à-dire une suite à termes positifs qui converge vers 0 et qui ne soit pas décroissante. Cette tâche paraît donc mobiliser simultanément le modèle de convergence des suites et la "réserve" potentielle d'exemples -l'exemple dont il peut être fait usage ici n'est d'ailleurs pas nécessairement un des exemples du cours ou des exercices; il peut être construit pour les besoins de l'exercice. Ainsi est-il vraisemblable qu'une démarche possible est de se représenter une suite à termes positifs convergent vers 0 -pour se donner une idée- et de choisir ensuite, suivant l'"intuition" qu'on en a retiré, l'exemple ou la démonstration adéquats. C'est pour tester cette hypothèse que nous mettrons en relation les procédures mises en oeuvre dans la résolution de l'exercice avec les quelques dessins qui les accompagnent et les modèles exprimés, les modèles dessinés et les exemples convergents donnés en réponse à la question 3). Mais avant, nous commençons par étudier les procédures, puis nous en exposons la répartition et l'évolution qu'on peut constater par groupes de niveaux, sans oublier de vérifier l'effet des variantes.

4.0. Présentation de l'étude.

L'exercice 5 est posé dans toutes les variantes, mais le texte V_1 ne concerne que 796 copies. Pour ne pas multiplier les "corpus", nous donnerons les répartitions des procédures et des performances sur le corpus N des 662 copies correspondant au texte V_1 intégral (paragraphe 4.3). Nous vérifierons la stabilité de ces répartitions dans les copies des classes ayant eu une variante présentant

le même énoncé pour l'exercice 5 que V_1 et étudierons dans le paragraphe 2 les répartitions obtenues dans des classes où la variante présentait une modification de l'énoncé de l'exercice 5 (paragraphe 4.4.2).

Cela étant, sur les 662 copies N , il y en a 19 (3%) où l'exercice n'est pas abordé -c'est-à-dire entre 0 et 4 par niveau.

Indiquons aussi que sur les 1 293 copies S, il y en a 47 (4%) où l'exercice n'est pas abordé (soit entre 0 et 10 par niveau).

Dorénavant, nous étudions donc les 1 206 copies S ou, suivant les cas, les 643 copies N, où l'exercice 5 est abordé.

Attention ! La réponse "Vrai" à l'exercice 5 posé sous sa forme V_1 est la réponse fausse ...

Cela étant, nous présentons successivement :

4.1. Les procédures à l'exercice 5 (texte V_1 et les autres textes)

4.2. Une réflexion sur les résultats "cliniques".

4.3. La répartition des procédures. Evolution (lien avec les modèles exprimés, dessinés et les exemples).

4.4. Les performances. Evolution des copies.

4.5. Conclusions et interprétations.

4.1. Les procédures à l'exercice 5 (texte V_1 et les autres textes).

4.1.1. Les réponses sans démonstration.

4.1.2. Les contre-exemples corrects.

4.1.3. Les contre-exemples ambigüs.

4.1.4. Les procédures erronées.

4.1.5. Les procédures dans les variantes. Stabilités et différences. Répartition par classes.

4.1.6. Les dessins.

4.1.1. Les réponses sans démonstration.

Il s'agit des copies où l'on trouve, sans autre commentaire ni dessin, les mots "vrai" ou bien "faux". Certes, la justification de la réponse à l'exercice n'était pas explicitement demandée; de brefs sondages oraux renforcent cependant notre idée initiale que, si un étudiant peut justifier sa réponse, il le fait. Il ne faut tout de même pas exclure que certaines réponses sans démonstration auraient pu en présenter une si le texte en avait précisé la necessité. Cela explique que, dans certains cas, nous regroupons ces copies avec les copies erronées ou avec les copies justes selon la réponse fournie. La réponse "vrai" (1) concerne 200 étudiants N (soit 31% de ceux qui ont abordé l'exercice) et la réponse "faux" -102 - (soit 16% de ceux qui ont abordé l'exercice). Ces procédures sont baptisées respectivement 5 FSD et 5 SSD.
Autrement dit, presque la moitié des étudiants N ayant abordé l'exercice sont dans ce cas.

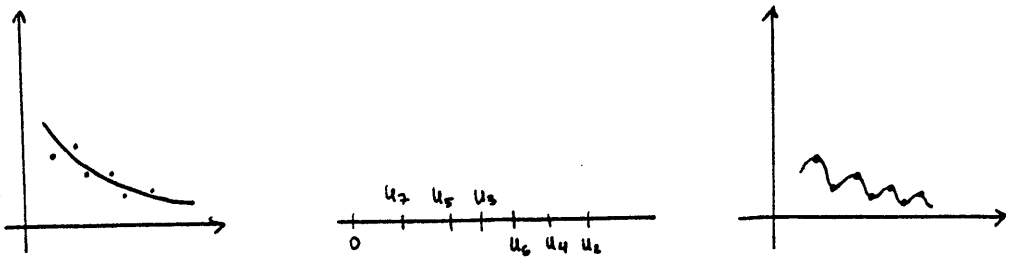
4.1.2. Les contre-exemples corrects.

Nous qualifions de "correcte" une solution où figure la réponse "faux" suivie d'une justification non erronée. Ces réponses se présentent d'ailleurs presque toutes de la même façon: la justification est constituée par la donnée d'un contre-exemple -la non-décroissance de cette suite n'est pas plus démontrée que sa convergence vers 0 ni sa positivité (souvent évidente). Dans la grande majorité de ces copies, la suite contre-exemple est formée de deux sous-suites $(u_{2n}\ ,\ u_{2n+1})$ décroissant chacune vers 0 et vérifiant $u_{2n} < u_{2n+1}$ $(\forall\ n)$.
Ainsi, avons-nous trouvé, entre autres, les couples $(\frac{1}{2n+1}\ ,\ \frac{1}{n})$,

$(\frac{1}{a_n^2}\ ,\ \frac{1}{a_n}$ -avec $a_n > 1)$, $(\frac{1}{a_n+k}\ ,\ \frac{1}{a_n})$, $(a^n\ ,\ \frac{1}{n}$ -avec $|a| < 1)$.

Quelquefois un dessin accompagne la formule; dans d'autres copies on ne trouve qu'un dessin du contre-exemple mais suffisamment explicite pour qu'on range encore la procédure utilisée avec les précédentes (Cf. croquis ci-joint). Toutes ces copies, où un contre-exemple du type précédent est exhibé, accompagné de la bonne réponse relèvent de la procédure baptisée "5.CEX".

(1) inexacte !



Nous avons distingué le cas particulier où l'une des deux sous-suites est nulle, l'autre étant décroissante ($u_{2n}=0$, $u_{2n+1}=\frac{1}{n}$) -ceci parce que si nous avions posé la même question pour une suite à termes strictement positifs (Cf. Variante V_5), ce contre-exemple ne conviendrait plus, contrairement aux précédents. Cette procédure s'appelle 5.STA.

Quelques copies citent un contre-exemple utilisant une fonction sinus ou inspiré de la suite ($u_n = \frac{1}{n}\cos n\theta$) qui figure dans l'exercice 6)-posé juste après celui que nous étudions. Cette procédure reçoit le sigle 5.SIN.

Enfin, on a trouvé quelques réponses originales, où il est expliqué que les hypothèses sur la suite n'ont aucune "influence" sur son caractère monotone, ou indiquant sur un dessin ou dans un discours métamathématique comment on peut construire un contre-exemple (procédure 5.DIV).

Toutes ces procédures correctes concernent 154 copies N (24% des copies où l'exercice est abordé).

Si la suite fournie comme contre-exemple n'est pas à termes positifs ($\frac{\sin n}{n}$) , ou ne converge pas vers 0, il est bien clair que la réponse n'est pas correcte et sera traitée dans le paragraphe 4.1.3. De plus, la procédure correspondante n'est pas appelée 5.CEX. Cela étant, il existe une autre grande catégorie de contre-exemples -mais qui sont pour certains associés aux deux réponses possibles à la question posée dans l'exercice - :

4.1.3.Les contre-exemples ambigüs.

Dans un certain nombre de copies, les exemples fournis à l'appui de la réponse "Faux" sont de l'un des types suivants :

i) . une suite décroissante à partir d'un certain rang;

ii) . un dessin représentant une suite du type précedent;

iii) . une suite décroissante dont l'un des termes se voit attribuer une valeur supérieure au suivant, les autres étant inchangés (comme $u_n = \frac{1}{n}$, $\forall\, n \neq n_o$, avec $u_{n_o} = 100$);

iv) . un énoncé mathématique du type

"il suffit que la suite soit décroissante à partir d'un certain rang";

v) . une suite nulle à partir d'un certain rang ("effective" ou évoquée dans un énoncé mathématique).

Dans ce dernier cas, on voit qu'une conception stricte de la décroissance est implicite -et erronée. Cette interprétation est confirmée, d'ailleurs, par la copie suivante [2 111] :

"Si les termes sont $>$ 0 : Vrai

Si les termes sont $\geqslant$ 0 : Faux. (contre-exemple: la suite stationnaire nulle)".

Mais il y a plus; on peut se demander si, dans ce type de réponses, n'est pas sous-entendue la nécessité de la propriété des suites qui est en cause (décroissance à partir d'un certain rang, nullité à partir d'un certain rang).

Dans la mesure, en effet, où il suffit d'évoquer l'existence d'une suite décroissant à partir d'un certain rang pour justifier la réponse "faux", rien ne nous permet d'être sûr que l'auteur du contre-exemple n'attribue pas nécessairement la même propriété à toute suite à termes positifs convergeant vers 0 .

Ce doute est d'autant plus fondé que nous avons pu lire dans certaines copies (qui, elles, présentent clairement une procédure erronée) :

"l'énoncé est vrai car toute suite convergeant vers 0 à termes positifs est décroissante à partir d'un certain rang" -cela concerne cinq copies S. Nous avons attribué aux procédures correspondant aux types i) , iii) et iv) le sigle 5-RAN, au seul dessin ü le sigle 5-DES et au dernier type v) 5-NUL , et ceci quelle que soit la conclusion qui est accolée à ces exemples.

Ainsi, trois types de performances sont associées à chacune de ces procédures :

"juste-ambigü" s'il s'agit d'un contre-exemple accompagnant la réponse "faux" (cela concerne 73% des copies S ayant utilisé une procédure 5-RAN ou 5-NUL).

"Juste-démonstration fausse" s'il s'agit d'un contre-exemple traduisant une propriété générale nécessaire des suites concernées justifiant la réponse "faux" (cela concerne 22% des copies S ayant utilisé une procédure 5-RAN ou 5-NUL).
"Faux-démonstration fausse" si cette même propriété est évoquée pour démontrer la réponse "vrai".
Mais nous avons légèrement anticipé sur notre dernier paragraphe.

4.1.4. Les procédures erronées.

Ce qui précède illustre déjà que ces procédures concernent les deux réponses possibles -soit en justifiant de manière erronée la bonne réponse, soit en "démontrant" l'autre réponse.

a) Mauvaises justifications d'une réponse juste.

On les a déjà évoquées en partie; on en trouve d'autres comme
"la suite n'est pas décroissante parce qu'il faut qu'elle soit bornée ..."
Les procédures correspondant à des contre-exemples incorrects (ne convergeant pas vers 0, à termes non positifs, etc...) sont regroupées sous le sigle 5-FAU (quelle que soit d'ailleurs la réponse qui en est déduite); les autres, qui ne relèvent pas des procédures évoquées au paragraphe précédent, sont aussi regroupées sous le sigle 5-FAU. Là encore, des procédures identiques associées à des conclusions différentes ne sont distinguées que par les performances qui leur sont associées (juste, juste avec démonstration, faux , et même éventuellement non terminé, noté 5NTE).

b) Les "démonstrations" de la décroissance de la suite.

Elles sont peu nombreuses, mais révèlent quelquefois des erreurs assez étonnantes. On a déjà évoqué le caractère nécessairement décroissant à partir d'un certain rang de ces suites -"démontré" de manière aberrante ou affirmé comme une évidence (procédure 5-RAN).

On a aussi trouvé les démonstrations suivantes de la décroissance de la suite:

. " $u_n < \varepsilon$ et $u_{n+1} < \varepsilon$; on retranche et on obtient $u_{n+1} - u_n < 0$ ".

C'est une erreur sur les nombres réels plus que sur les suites. (procédure 5-DYN).

De même l'erreur suivante concerne plus la croissance des fonctions que les suites :

. "Comme la suite (u_n) n'est pas croissante, elle est décroissante".

(procédure 5-MON).

Enfin, deux dernières démonstrations de la décroissance qui ne sont pas sans évoquer des modèles exprimés:

" Toute suite convergente est monotone, donc ici, la suite ne peut être que décroissante".

Cette procédure (peu fréquente) est regroupée avec la précédente en 5-MON.

Et encore, regroupée par contre avec la procédure 5-DYN :

"Comme u_{n+1} s'approche de plus en plus de 0 , $u_{n+1} < u_n$ ...".

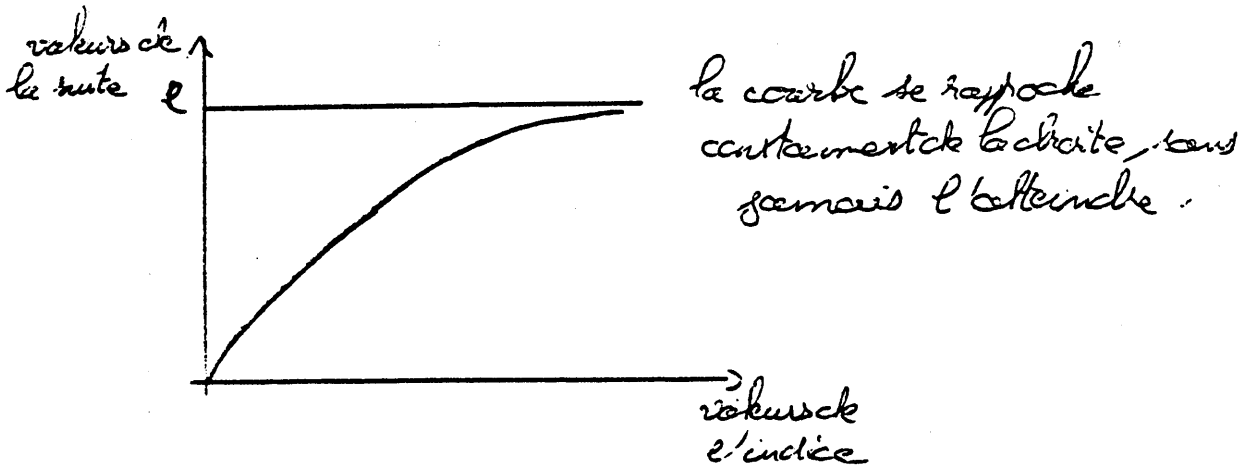
Les six copies où se trouve cet argument ont un modèle exprimé dynamique pour quatre d'entre elles, une n'a pas de modèle exprimé et la dernière a un modèle exprimé statique.

Citons la copie suivante [2002] -modèle dynamique:

exercice 5) vrai: si elle tend vers 0 par valeurs positives cela signifie que le terme U_{n+1} est plus près de 0 que le terme U_n cela signifie bien $U_{n+1} < U_n$ et la suite est bien décroissante

vrai

modèle exprimé Une suite est une succession de nombres définis les uns par rapport aux autres en fonction d'un nombre qui varie (indice) si cette suite admet une limite, cela signifie que même si l'indice devient très grand, les valeurs prises par les termes de la suite n'atteindront jamais une certaine valeur (appelée limite) ces valeurs seront de plus en plus proches de cette limite, sans jamais la dépasser.



2) Une suite est alors une succession de nombres de plus en plus grands (dans le cas de la suite croissante) mais qui ne devant jamais ni égaux ni plus grands qu'un certain nombre appelé limite.

Une suite n'ayant pas de limite est une suite dont les termes peuvent prendre toutes les valeurs et doit être considérés comme infiniment grands ou petit

Cette copie nous semble intéressante car elle atteste de l'influence directe d'un certain aspect du modèle de convergence sur la conduite de résolution de problème. Il est vraisemblable qu'un cas aussi "pur" n'est pas fréquent, mais son existence même est pour nous l'indication qu'une telle influence peut exister et nous semble à ce titre essentielle.

4.1.5. Les variantes à l'exercice 5 (Stabilités et différences dans les procédures). Répartition par classes .

Nous allons étudier le changement introduit dans la répartition des procédures par certaines variations dans la manière de poser l'exercice 5) -concernant l'ordre des différents exercices, le vocabulaire utilisé, la tâche elle-même.

Mais avant, nous allons chercher dans quelle mesure, dans les classes standard concernées par les textes (V_1,V_3) et (V_1,V_6) où il n'existe aucun changement ni dans l'exercice 5, ni dans ce qui précède, les répartitions des procédures sont semblables.

a) Les variantes qui n'en sont pas : (V_1,V_3) et (V_1,V_6) .

Nous avons été amenée à regrouper certaines procédures pour faire un calcul de χ^2 pertinent. Voici les tableaux de répartition des procédures à l'exercice 5 pour les classes S ayant eu V_1 et V_3 :

Procédures (Copies S) Variante	5 JSD juste sans démonstrat.	erronées 5 FSD + 5 FAU + 5 DYN + 5 MON	correctes 5 CEX + 5 SIN + 5 STA + 5 DIV	ambiguës 5 RAN + 5 NUL + 5 DES	non abordé 5 NAB (o)	Total abordés	Total
	31%	57%	39%	55%		49%	
V_1	8	35	7	12	4	66	70
V_3	18	26	11	10	4	69	73
Total	26	61	18	22	8	135	143

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

En enlevant la colonne (o), on trouve $\chi^2=6,156$ (v=3) -autrement dit, les répartitions ne sont pas significativement différentes.

Nous pensons que les différences de pourcentages observées en première et troisième colonne sont dûes à une répartition non aléatoire des copies en classe 31.

De la même façon, voici le tableau de répartition des procédures à l'exercice 5 pour les classes S ayant eu V_1 et V_6 :

Procédures Copies S Variante	juste sans 5 JSD démonstration	erronées 5 FSD + 5 FAU + 5 DYN + 5 MON	correctes 5 CEX + 5 SIN + 5 STA + 5 DIV	ambiguës 5 RAN + 5 NUL + 5 DES	Total abordés	non abordées 5 NAB (o)
	41%	42%	57%	43%	48%	
V_1	7	14	24	10	55	2
V_6	10	19	18	13	60	1
Total	17	33	42	23	115	3

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

On trouve $\chi^2 = 2,304$ (v=3) -donc ces répartitions sont semblables- ce qui est bien normal.

Il est donc raisonnable de comparer maintenant les répartitions des procédures lorsque les énoncés de l'exercice 5 sont différents.

b) Le texte des questions 1) et 2) est différent : les variantes V_4 et V_7 .

Là, l'exercice 5 est inchangé, mais les questions qui précèdent sont différentes (cf. chapitre 3). Voici le tableau de répartition des procédures (avec des regroupements):

Procédures Copies S variante	5 JSD juste sans démonstration	5 FSD faux sans démonstration	5 CEX + 5 SIN + 5 STA + 5 DIV correctes	5 RAN + 5 DES + 5 NUL ambigües	5 FAU + S DYN + S MON erronées (dém)	Total abordés	NAB (o) non abordées
V_1	44% 15	52% 25	56% 19	66% 19	50% 9	55% 87	2
$V_4 \sqcup V_7$	19	17	15	10	9	70	0
Total	34	42	34	29	18	157	

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

On trouve $\chi^2 = 3,400$ (v=4); il n'y a pas de différences significatives. Tendenciellement tout se passe comme si, dans le texte V_4, les étudiants affirment que l'énoncé est faux sans démonstration au lieu de fournir un contre-exemple "ambigü" -peut-être plus présent à l'esprit de ceux qui ont plus développé leur représentation de la convergence des suites ?

c) Changement dans l'ordre de présentation des exercices: la variante V_8.

Dans ce texte, l'exercice 5 est posé en dernier -donc l'exercice 6 le précède (posé en 5). On peut constater immédiatement qu'il n'y a relativement pas plus de contre-exemples en sinus ou cosinus (inspiré du 6 en particulier) -2 pour V_1 , 1 pour V_8 ... Voici le tableau de répartition des procédures (avec des regroupements):

Procédures (Copies S) Variante	5 JSD juste sans démonstration	5 FSD + 5 FAU + 5 DYN + 5 MON erronées	Correctes 5 CEX + 5 SIN + 5 STA + 5 DIV	ambiguës 5 RAN + 5 DES 5 NUL	Total abordés	NAB (0) non abordés
V_1	12	23	14	7	54	0
V_8	13	15	24	5	54	6
Total	25	38	38	12	108	6

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

On trouve $\chi^2=4,689$ (v=3).

Il n'y a pas de différence significative. Il se dégage tout de même une tendance -l'exercice 5 semble un peu plus "réussi" lorsque le texte est posé à la fin. Nous y voyons la possibilité d'un effet de "chauffe" -l'esprit est mieux "réveillé" à la fin pour les exercices- pour les modèles nous avions noté la tendance inverse, aussi peu significative d'ailleurs à notre seuil.

d) Changement de vocabulaire (sans modification du sens) (variante V_2).

Il s'agit de l'énoncé de l'exercice 5 dans la variante V_2 où le mot "convergente" est remplacé par "qui tend vers 0".

Voici le tableau de répartition des procédures (avec des regroupements) :

Procédures (Copies S) Variante	juste sans dém. 5 JSD	faux sans dém 5 FSD	Correctes 5 CEX + 5 SIN + 5 STA + 5 DIV	ambiguës 5 RAN + 5 DES + 5 NUL	erronées 5 MON + 5 DYN + 5 FAU	Total abordés	non abordés 5 NAB (0)
V_1	53% 9	61% 8	46% 17	54% 15	48% 15	51% 64	3
V_2	8	5	20	13	16	62	0
Total	17	13	37	28	31	126	3

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

On trouve $\chi^2=1,146$ (v=4).

Il n'y a donc aucune différence significative dans ces deux répartitions -ce qui n'a rien d'étonnant.

e) Modification de la tâche : "positifs" est remplacé par "strictement positifs".

Il s'agit de la variante V_5 .

On ne peut plus utiliser ni la procédure 5-STA (deux sous-suites dont l'une est nulle) ni la procédure 5-NUL (suite nulle à partir d'un certain rang). Il est donc intéressant d'étudier la nouvelle répartition des procédures -que voici:

Procédures (Copies S) Variante	juste sans 5 JSD démonstration	faux sans 5 FSD démonstration	correctes 5 CEX + 5 SIN + 5 STA + 5 DIV	ambigües 5 RAN + 5 DES + 5 NUL	erronées 5 FAU + 5 DVN + 5 MON (démontrées)	Total abordés	non abordés 5 NAB (°)
V_1	62% 13	50% 17	83% 20	54% 19	54% 6	60% 75	0
V_5	8	17	4	16	5	50	0
Total	21	34	24	35	11	125	0

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

Il s'avère que les deux répartitions ne sont pas différentes de façon significative. ($\chi^2=7,505$; $v=4$) -pourtant on relève des tendances différentes qui s'expliquent par la disparition des deux procédures ci-dessus. Cela signifie que, ou bien "positifs est compris comme "strictement positifs" par un certain nombre d'étudiants, ou bien, dans le cas contraire, ce n'est pas la possibilité d'exhiber une suite ou une sous-suite nulle qui est déterminante dans la résolution de la question.

f) Modification dans la tâche : suppression de l'interrogation "vrai ou faux" (V_{11}).

Dans cette variante, l'énoncé de l'exercice 5 (posé en 2) est le suivant: "Trouver une suite numérique (u_n) à termes positifs qui converge vers 0 et qui n'est pas décroissante". De plus, l'exercice 6 n'est pas posé et les questions destinées à l'expression des modèles sont posées à la fin.

On pourrait s'attendre à obtenir les seules procédures 5 CEX ou 5 RAN. Il n'en est rien, comme le montre le tableau suivant de répartition des procédures (la procédure "juste sans démonstration" a évidemment disparu !) -il y a même deux étudiants qui pensent que cet énoncé est faux...

Procédures (Copies S) / Variante	juste sans 5 JSD démonstrat.	Faux sans 5 FSD démonstrat.	Contre-ex. 5 CEX correct	contre ex. 5 SIN ensinus	sous-suite 5 STA + 5 DIV nulle - divers	ambigües 5 RAN	ambigües 5 NUL +SDES	erronées 5 FAU+ 5 DYN + 5 MON	Total abordés	non abor NA (0)
V_1	22	38% 17	60% 24	50% 9	38% 5	56% 5	43% 6	50% 9	61% 87	3
V_{11}	0	2	16	9	8	4	8	9	56	8
Total	22	9	40	18	13	9	14	18	143	11

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

On s'aperçoit que les procédures qui "remplacent" 5 JSD sont essentiellement 5 STA -appel à la sous-suite nulle- ainsi que 5 NUL -appel à la suite nulle-et pas du tout l'exhibition d'un contre-exemple formé de deux sous-suites "décalées" convergeant vers 0. Tout se passe comme si même la donnée de la solution à la question "vrai ou faux" n'était pas suffisante à mobiliser un contre-exemple correct et général. On peut se demander alors si ce contre-exemple est ou non "disponible" chez certains étudiants. Enfin, la suppression de l'exercice 6 n'a pas d'incidence significative sur la production de la procédure 5 SIN ...

g) Modifications dans la tâche : l'interrogation "vrai ou faux" est remplacée par "que peut-on dire" ...(V_9 et V_{10}).

La différence entre ces deux textes est que dans V_{10} on a laissé "Que peut-on dire d'une suite à termes positifs convergent vers 0 ?" alors que dans V_9 on a remplacé en plus "positifs" par "strictement positifs". Dans les deux textes l'exercice 6 n'est pas posé et l'exercice 5 figure en question 7 dans V_{10} et 6 dans V_9.

On peut remarquer que la question est interprétée par presque tous les étudiants comme "est-ce que la suite est monotone[1] ou non ?", ce qui témoigne de la force de

---

[1] et même décroissante ou non

l'association "convergence-problème de monotonie" dans notre enseignement. La procédure 5 JSD dans les variantes V_9 et V_{10} correspond aux réponses du type "rien du tout" ou "elle n'est pas nécessairement décroissante". La procédure 5 FSD aux réponses du type "la suite est décroissante".

Voici la répartition des procédures dans les classes S concernées par les textes V_1 et V_{10} par moitié :

Procédures (Copies S) / Variante	Juste sans 5 JSD démonstrat. (1)	Faux sans 5 FSD démonstrat. (2)	Correctes 5 CEX + 5 SIN + 5 STA + 5 DIV (3)	ambiguës 5 RAN + 5 DES + 5 NUL (4)	erronées 5 MON + 5 DYN + 5 FAU (5)	Total abordés	non abordés NAB (o)
V_1	4	49% 28	4	55% 6	35% 11	43% 53	1
V_{10}	1	29	1	5	20	56	4
Total	5	57	5	11	31	109	5

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

Il apparaît que ces distributions ne sont significativement pas différentes. En groupant les colonnes (1) , (3) , (4) , on trouve $\chi^2=4,929$ (v=2)[1]. Il y a, tendanciellement, encore moins de réponses justes avec le texte V_{10} qu'avec le texte V_1 . Il est possible que le fait de savoir qu'un énoncé est soit vrai, soit faux, est plus indicatif que la question absolument neutre "Que peut-on dire ? ..."

Quant aux classes S concernées par V_1 et V_9 , voici leur répartition de procédures :

Procédures (Copies S) / Variante	Juste sans 5 JSD démonstrat.	Faux sans 5 FSD démonstrat (2)	Correctes 5 CEX + 5 SIN + 5 STA + 5 DIV	ambiguës 5 RAN + 5 DES + 5 NUL	erronées 5 FAU + 5 DYN + 5 MON (5)	Total abordés	non abordés 5 NAB
V_1	61% 11	46% 44	69% 11	55% 6	4	47% 76	2
V_9	7	51	5	5	18	86	5
Total	18	95	16	11	22	162	7

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

[1] Nous sommes à la limite de la non-ressemblance.

En regroupant (2) et (5), on trouve $\chi^2=6,451$ (v=3) -autrement dit, les distributions ne sont pas significativement différentes avec, tout de même, la même tendance que précédemment- moins de réponses justes avec V_9 .Nous sommes à la limite de la non-ressemblance.

h) Quelques éléments sur les répartitions des procédures par classes.(Tableau IV.)

L'analyse du tableau indiquant la répartition des résultats à l'exercice 5 par classes (niveau Math. Sup.) confirme ce que nous avions observé sur les modèles. Les résultats varient grandement d'une classe à l'autre. Toutefois, on observe dans toutes les classes au plus 20% de réponses sans démonstrations (des deux types) et de réponses fausses (avec des explications). Or, c'est une des régularités sur laquelle nous allons insister. La part des réponses correctes va de 16% à 81% (dans la classe 80 où les copies ont été rédigées à la maison), et celles des réponses ambigües de 52 à 5%. On peut seulement dire qu'il y a au moins 40% de réponses correctes et ambigües dans chaque classe -le résultat global est beaucoup plus fort.

En conclusion, il apparaît qu'aucune des variantes introduites ne modifie significativement les répartitions des procédures utilisées par les étudiants. Par contre, on ne peut se fier à la répartition par classes; on ne peut en effet négliger, comme il fallait s'y attendre, l'influence des enseignants et de la composition des classes.

Tableau IV_c

Répartition des procédures à l'exercice 5 par classes (Math. Sup. + deux classes non standard).

Procédures \ classes de Math. Sup	23	24	26	27	29	20	non standard 80	non standard 84
5 CEX	12%	47%	27%	13%	38%	21%	56%	29%
5 STA	12%	21%	10%	0	3%	4%	19%	5%
5 SIN	0	3%	3%	3%	10%	7%	6%	0
Justes	24%	71%	40%	16%	52%	38%	81%	33%
5 NUL	0	0	0	3%	0	0	3%	0
5 RAN + 5 DES	52%	10,5%	17%	23%	20,5%	21%	3%	5%
Ambigües	52%	10,5%	17%	26%	20,5%	21%	6%	5%
5 JSD	3%	8%	20%	13%	0	21%	6%	38%
5 FSD	0	0	20%	19%	3%	17%	6%	24%
5 FAU + 5 DYN + SMON	21%	10,5%	3%	26%	24%	4%	3%	0

Les pourcentages indiqués sont les pourcentages colonnes calculés sur le total d'étudiants de chaque classe ayant abordé l'exercice

4.1.6. Retour sur les dessins dans l'exercice 5 .

Ils sont très peu nombreux (63 sur les 1 206 copies S correspondant à des étudiants ayant abordé l'exercice 5).

Il se trouve que l'utilisation d'un dessin dans cet exercice correspond, dans 85% des cas, à des copies où déjà les questions 1) et 2) étaient accompagnées d'une représentation graphique. Cependant, seulement 1/3 des dessins sont du même genre dans la question 5) et dans celles du début; en particulier, presque quatre dessins sur cinq sont du genre 1 -représentation fonctionnelle- dans la question 5. Cela étant, dans 37 copies sur 63, le dessin est la seule justification à la réponse -ces copies se répartissant à peu près par moitié en une procédure 5 CEX (dessin remplaçant un contre-exemple du type "deux sous-suites décroissantes" et une procédure 5 DES (dessin représentant une suite qui "finit" par décroître vers 0). Dans les autres copies, le dessin accompagne une justification (dans 9 cas, ce sont des procédures correctes avec exhibition d'un contre-exemple des différents types possibles et dans 12 cas, il s'agit de la procédure 5 RAN). Les trois dernières copies où il y a un dessin présentent des "démonstrations" fausses de la réponse "vrai" à la question posée dans l'exercice 5. Cela nous permet de confirmer que les étudiants n'ont pas l'habitude d'utiliser les dessins -ce qui paraît être une conséquence des enseignements antérieurs. On constate de plus, sur le petit nombre de copies concernées, que les dessins sont surtout associés à des procédures correctes ou ambigües (à peu près dans les mêmes proportions), ce qui nuance une conclusion hâtive affirmant la "supériorité" de procédures utilisant un graphique.

4.2. Réflexions sur les résultats cliniques.

Ces procédures que nous avons mis en évidence et qui se caractérisent donc par une stabilité certaine vis-à-vis des variantes amènent à se poser diverses questions. On peut se demander comment interpréter les réponses sans démonstration. Nous avons travaillé en admettant qu'une telle réponse n'est pas aléatoire et traduit effectivement le sentiment spontané de l'étudiant interrogé même s'il ne sait pas justifier cette réponse. Nous avons déjà éclairci notre position sur les contre-exemples

ambigüs -la différence entre les réponses accompagnant cette justification apparaît dans les performances (juste, erronée, etc...). Cela étant, il demeure une interrogation fondamentale sur la signification de toutes les réponses. Peut-on déterminer pourquoi une telle réponse est correcte ? Que s'est-il passé chez l'étudiant au moment de la résolution de l'exercice ? Il nous semble d'abord clair qu'à la question "vrai ou faux : toute suite convergente est-elle monotone ?", la grande majorité des étudiants aurait répondu "Faux". Autrement dit, une même connaissance (à savoir le fait qu'une suite convergente n'est pas nécessairement monotone) ne se trouve pas mobilisée de la même façon dans les deux énoncés. Or, l'énoncé de l'exercice 5 ne modifiait pas -de fait- les conditions d'application de cette connaissance. En effet, l'hypothèse qu'on a rajouté -les termes de la suite sont supérieurs à leur limite- n'a pas d'incidence sur la monotonie et c'est ce point précis qui n'a pas été reconnu par les étudiants ayant fourni une réponse fausse ou éventuellement même ambigüe. Nous laissons ici de côté le cas des étudiants très "faibles" qui -sans aucune réflexion, nous semble-t-il-, et par une sorte de jonglage avec les mots, écrivent qu'une suite convergente bornée est monotone (puisqu'une suite monotone bornée est convergente). D'autre part, l'étude des variantes V_9 et V_{10} confirme que la décroissance de la suite est bien la question fondamentale que se posent les étudiants -même si le texte ne le précise pas. Il s'agit donc de savoir si une suite convergente dont les termes sont supérieurs à la limite décroît -nous ne pensons pas que 0 joue un rôle si particulier qu'il change la nature de la difficulté.

Or, il nous semble qu'on peut mettre en rapport ici la représentation de cette suite et le diagnostic qu'en tire l'étudiant. Ainsi, dans une représentation dynamique de la convergence, le problème peut se "traduire" de la façon suivante: la suite doit"passer" de valeurs positives à la valeur zéro (à la limite) -ou encore, le terme général de la suite doit se rapprocher -en partant d'une valeur positive- d'une valeur (presque) nulle -il est alors facile d'imaginer "la trajectoire" décroissante de ce terme général, et beaucoup plus difficile de concevoir que même

si "globalement" la trajectoire décroît, il n'en est pas de même des positions "individuelles" et non pas successives de chaque u_n . On peut prévoir qu'une représentation mentale dynamique de la convergence, accompagnée qui plus est de dessins monotones, soit facilement associée à des procédures 5-RAN par exemple -étant entendu qu'assez vite les étudiants ont compris que ce qui se passe "au début" est sans importance sur la convergence.

Au contraire, dans une représentation statique, comme rien n'évolue, il faut imaginer simultanément tous les termes de la suite, sans que u_{n+1} soit le "successeur" de u_n au terme d'un mouvement -il y a peut-être moins de risques de se représenter que, comme u_n doit se rapprocher de 0 , u_{n+1} doit être plus petit que u_n et ainsi de suite.

On voit que dans cet exercice la relation entre les modèles exprimés, les modèles dessinés et les procédures peut nous éclairer sur l'origine des réponses des étudiants en confirmant ou non les hypothèses ci-dessus.

De plus, on peut se demander s'il y a un rapport entre le contre-exemple exhibé par les étudiants et l'herbier d'exemples dont il a tiré quatre suites convergentes et quatre suites divergentes dans les questions précédentes. Lorsque le contre-exemple est formé de deux sous-suites "décalées", il est clair que ce n'est pas un exemple immédiatement issu du cours, mais bien construit pour "les besoins de la cause". Est-ce que les étudiants ayant beaucoup d'exemples à leur disposition sont "favorisés" dans une telle construction ?

Nous avons tenté d'approcher ces diverses interrogations dans les paragraphes suivants en étudiant la répartition des procédures par modèle exprimé, modèle dessiné, exemples et niveaux.

4.3. Répartition des procédures à l'exercice 5. Evolution.

Comme nous l'avons déjà expliqué, pour ne pas multiplier les "corpus" différents, nous avons décidé de donner la répartition des procédures pour les copies N ; nous en avons déjà vérifié au paragraphe 4.2, pour des classes où la variante V_i présentait le même texte que V_1, la stabilité. Nous joignons la liste des procédures avec le sigle que nous leur avons affecté dans le tableau IV_o .

4.3.0. Etude de l'abord de la question.

Il n'y a que 47 étudiants sur 1 253 S (4%) qui n'abordent pas l'exercice 5 et il n'y a pas de commentaires particuliers à faire sur leur répartition par niveau -il y en a 19 sur les 662 N qui n'abordent pas l'exercice 5 (3%).

Dans ce qui suit, les pourcentages sont toujours calculés sur le total correspondant de copies où l'exercice est abordé.

4.3.1. La répartition des procédures par modèle exprimé (corpus N)

(Tableaux IV_1 et IV_2).

Pour étudier cette répartition, nous travaillons simultanément sur deux tableaux: un tableau résumé (IV_2) où sont regroupées les procédures correctes (5 CEX, 5 SIN, 5 STA, 5 DIV), les procédures ambigües (5 RAN, 5 DES, 5 NUL) et les procédures fausses particularisées (5 DYN, 5 MON)[1], ainsi que les copies sans modèle exprimé, avec la définition exclusivement et une tautologie; un tableau détaillé (IV_1) que nous n'utilisons que pour préciser éventuellement les tendances dégagées sur le premier tableau. Il apparaît en effet des relations entre les différents modèles exprimés et les procédures (relations que nous allons décrire par modèle, puis par procédure).

Les modèles primitifs s'avèrent associés majoritairement aux procédures fausses-sans démonstration (5 FSD), et avec démonstration (surtout 5 NUL et 5 DYN).

Ainsi, la moitié des étudiants ayant exprimé un modèle primitif donnent-ils une procédure fausse sans démonstration, alors qu'une telle procédure concerne globalement 31% des étudiants.

---

(1) A l'exclusion de 5 FAU car nous avons jugé insuffisante la précision de ce type de procédures.

(IV$_0$) Exercice 5.

Tâche	Procédures rencontrées	Pourcentage sur le total des étudiants N ayant abordé l'exercice	Sigle
Décider si une suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante	DEMONSTRATIONS ERRONEES 11%		
	. u_n non croissante $\Rightarrow$ u_n décroissante u_n convergente $\Rightarrow$ u_n monotone $\Rightarrow$ u_n décroissante	3%	SMON
Si la décision est "non". exhiber un contre-exemple ou justifier	comme u_{n+1} s'approche de plus en plus de zéro, u_n décroît. $u_{n+1} < \varepsilon$ et $u_n < \varepsilon \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$	5%	SDYN
Sinon démontrer la proposition	. autres (y compris non terminés)	3%	SFAU
	CONTRE-EXEMPLES AMBIGÜS 19%		
D'une propriété concernant tous les termes d'une suite convergente, déduire ou non une autre propriété de la suite (générale)	. Contre-exemple formé d'une suite décroissant à partir d'un certain rang.	9%	S·RAN
	. Dessin (seul) représentant une suite décroissant à partir d'un certain rang.	2%	S·DES
	. Contre-exemple formé d'une suite nulle à partir d'un certain rang.	7%	S·NUL
	CONTRE-EXEMPLES OU JUSTIFICATIONS CORRECTES 24%		
	. Contre-exemple "ad hoc" formé de deux sous-suites décalées.	15%	S·CEX
	. Contre-exemple formé d'une sous-suite nulle et d'une autre décroissante.	5%	S·STA
	. Contre-exemple utilisant une suite $\frac{1}{n}$ sin n ou $\frac{1}{n}$ cos n.	4%	S·SIN
	. Bonne réponse "métamathématique"	0,5%	S·DIV
	REPONSES SANS DEMONSTRATIONS 47%		
	. Bonne réponse non justifiée	16%	S·JSD
	. Mauvaise réponse non justifiée.	31%	S·FSD
	NON ABORDES 3% (du total)		

Abordés: 643 étudiants N .

Par contre, ces modèles sont très peu associés aux procédures correctes -deux fois sur 56 modèles primitifs ...-. Cela confirme notre hypothèse du lien entre la représentation et les procédures à cet exercice. Une représentation monotone ne peut engendrer -ou du moins être associée à-une procédure correcte.
On constate aussi que les étudiants ayant ces modèles ne possèdent éventuellement pas bien leurs cours antérieurs -je pense à la procédure 5.DYN où on retranche des inégalités de sens contraire.

Les modèles dynamique monotone et "tend vers" sont également caractérisés essentiellement par leur association plus marquée à des procédures fausses sans démonstration -les effectifs sont trop faibles pour voir d'autres tendances.
On peut noter que la seule différence entre ces trois modèles est le pourcentage de procédures justes sans démonstrations qui leur sont associées -pourcentage plus élevé avec les modèles primitifs (ceci est dû aux modèles archaïques).

Le modèle dynamique, s'il est moins associé aux procédures 5 FSD, est exprimé de façon à peu près identique dans les copies où on a relevé des procédures correctes, ambigües, et certaines procédures fausses (cf. IV_1). Plus précisément, il y a une relation forte entre l'expression d'un modèle dynamique et la production du dessin d'une suite décroissante à partir d'un certain rang (5.DES).
Ainsi, sur les 14 copies où on relève une procédure 5.DES, 10 ont exprimé un modèle dynamique, alors que ce modèle concerne 35% des étudiants. Cependant, nous devons nuancer notre affirmation vu les effectifs.
Nous voyons là la confirmation de notre analyse précédente, que nous retrouvons dans la relation (moins marquée, mais privilégiée) entre l'expression de ce modèle et les procédures 5.RAN et 5.SIN. Enfin, c'est surtout avec la procédure erronée 5.MON que l'on rencontre des expressions dynamiques -nous l'avions déjà remarqué.

Le modèle mixte, lui, est plus associé aux procédures correctes (5.CEX, 5.SIN, 5.STA) -et moins associé à toutes les procédures sans démonstration.

Procédures x Modèles exprimés (IV_1) Exercice 5 Corpus N

Procédure à l'exercice 5 / Modèle exprimé		Procédures erronées				Procédures ambigües			Procédures correctes				Exercices non abordé	Effectifs modèles
	5 FSD	5 DYN	5 MON	5 FAUTE	5 JSD	5 RAN	5 DES	5 NUL	5 CEX	5 SIN	5 STA	5 DIV		
PRIMITIF	27 13,5%	3 17%	2	4	9	1	0	6 14%	1	0	1	0	2	56 8%
TEND VERS	26 13%	1	0	5	2	3	0	4	2	0	0	0	3	46 7%
DYNAMIQUE MONOTONE	14 7%	1	1	0	0	3	0	0	1	0	0	0	0	20 3%
PAS DE MODELE EXPRIME	17 8,5%	1	1	1	7	3	0	3	2	2	0	0	1	38 6%
TAUTOLOGIE	9 4,5%	0	2	1	3	1	0	1	1	0	0	0	0	18 3%
DEFINITION	3	0	0	1	2	0	0	1	3	0	0	0	0	10 2%
DYNAMIQUE	52 26%	7	12	2	38	25 42%	10 37%	15	37	13 41%	10	3	7	231 35%
PRESTATIQUE	16 8%	1	2	3	14	6	1	2	5	2	1	1	0	54 8%
MIXTE	24 12%	3	5	4	11	13	2	7	24 26%	8	10 38%	0	3	114 17%
STATIQUE	5 2,5%	0	2	1	8	3	0	2	13 14%	4	2	0	1	41 6%
NON ABORDE	7	1	2	0	8	2	1	3	5	1	2	0	2	34 5%
TOTAL	200	18	29	22	102	60	14	44	94	30	26	4	19	662

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

Procédures x modèles exprimés. (IV_2) Exercice 5 Corpus N

Procédures à l'exercice 5[1] / Modèles	Faux sans démonstration	Procédures erronées	Juste sans démonstration	Procédures ambigües	Procédures correctes	Non abordé	Total modèle (pourcentage colonne)
Copies N	5 FSD	5 DYN + 5 MON	5 JSD	5 RAN + 5 DES + 5 NUL	5 CEX + 5 SIN + 5 STA + 5 DIV		
PRIMITIF	14% 27 50%	11% 5 9%	9% 9 17%	6% 7 13%	1% 2 4%	2	8%
TEND VERS	13% 26 60%	2% 1 2%	2% 2 5%	6% 7 16%	1% 2 5%	3	7%
DYNAMIQUE MONOTONE	7% 14 70%	2% 2 10%	0	3% 3 15%	1 5%	0	3%
PAS DE MODELE EXPRIME + DEFINITION + TAUTOLOGIE	15% 29 45%	9% 4 6%	12% 12 18%	8% 9 14%	5% 8 12%	1	6%
DYNAMIQUE	26% 52 23%	40% 19 3%	37% 38 17%	42% 50 22%	41% 63 28%	7	35%
PRESTATIQUE	8% 16 30%	6% 3 6%	14% 14 26%	8% 9 17%	6% 9 17%	0	8%
MIXTE	12% 24 22%	17% 8 7%	11% 11 10%	19% 22 20%	27% 42 38%	3	17%
STATIQUE	3% 5 12,5%	4% 2 5%	8% 8 20%	4% 5 12,5%	12% 19 47,5%	1	6%
MODELE NON ABORDE	4% 7 22%	6% 3 9%	8% 8 25%	5% 6 19%	5% 8 25%	2	5%
TOTAL	200 31%	47 7%	102 16%	118 18%	154 24%	19	

Les pourcentages de gauche sont des pourcentages colonnes, les pourcentages de droite des pourcentages lignes calculés sur le total des abordés et les effectifs sont indiqués au milieu.

(1) Nous n'avons pas fait figurer les procédures 5 FAU et 5 NTE .

Tableau résumé

Ainsi, 38% des étudiants ayant exprimé un modèle mixte donnent-ils une procédure correcte, alors que ces procédures concernent globalement 24% des étudiants. On peut aussi noter que parmi les 26 étudiants ayant utilisé une procédure correcte du type 5.STA (une des deux sous-suites nulles), 10 (38%) ont exprimé un modèle mixte, alors que ce modèle concerne 17% des étudiants.

Les modèles statique et préstatique ne sont pas ici associés prioritairement au même genre de procédures. C'est aux réponses justes sans démonstration qu'est plus associé le modèle préstatique alors que le modèle statique est largement associé aux procédures correctes, 5.CEX et 5.SIN essentiellement .

Ainsi, 47,5% des étudiants ayant exprimé un modèle statique donnent-ils une procédure correcte (contre 24% globalement), 68% de ces procédures étant du type 5.CEX; par contre, 26% des étudiants ayant exprimé un modèle préstatique ne répondent que "faux" sans justification -alors que la procédure 5.JSD correspondante concerne 16% des étudiants.

Si on cherche enfin à caractériser les différences entre les procédures incorrectes associées à ces quatre derniers modèles, on constate que ces différences ne portent pas sur les procédures erronées (5.MON, 5.DYN), mais sur les répartitions des procédures sans démonstration et ambigües.

Cependant, on ne peut dégager de régularités car les écarts ne sont pas significatifs, on peut tout de même relever que les procédures fausses sans démonstration sont moins utilisées dans les copies à modèle statique.

Quant aux copies auxquelles on n'a pas pu attribuer de modèle (tautologie, modèle absent), elles sont associées aux mêmes profils de répartitions de procédures que les copies où est exprimé un modèle erroné. Cela ne paraît pas vérifié toutefois pour les 10 copies "Définition", mais leur faible effectif nous empêche d'en tirer un enseignement. Cela peut indiquer que les auteurs des copies sans modèle exprimé n'avaient pas effectivement de modèles corrects à proposer. Par contre, les copies où les questions 1) et 2) ne sont pas abordées (et dont une bonne partie provient d'étudiants de maîtrise pressés par le temps) présentent des procédures plus proches de celles des copies où sont exprimés des modèles non erronés. Nous aurons l'occasion de vérifier les mêmes tendances dans chaque exercice, ce qui nous autorise à tenir compte de ces copies.

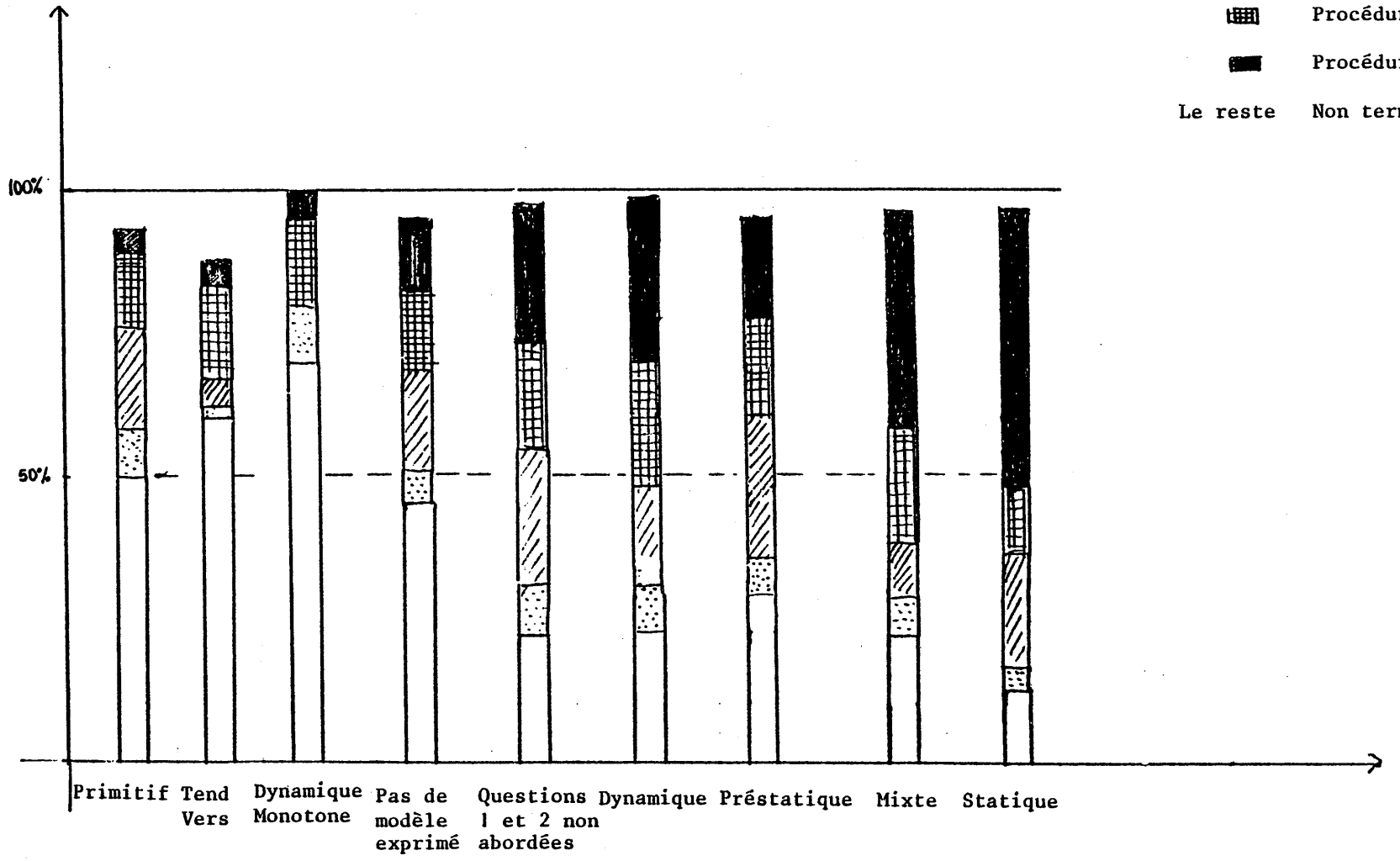
Dans l'autre sens, les procédures correctes sont plus associées aux modèles mixtes surtout, statiques et dynamiques ensuite; les procédures ambigües sont, par contre,

(P.M.IV). PROCEDURES x MODELES EXPRIMES

Exercice 5

Corpus N

Pourcentage des procédures à l'exercice 5 par modèles exprimés (sur le total des abordés par exercice)



distribuées comme les modèles, avec une relation plus importante avec les modèles dynamiques; il en est de même des procédures erronées (5MON et 5 DYN) plus associées et aux modèles dynamiques et aux modèles primitifs.
Il est enfin intéressant de constater que ce sont les copies sans modèle exprimé (au sens large),à modèles primitif ou dynamique monotone, à modèle "tend vers" qui fournissent plus de la moitié des réponses "5 FSD", alors qu'elles ne représentent qu'un tiers des copies totales, et de souligner l'association privilégiée des réponses "5 JSD" et des modèles préstatiques.

En résumé , on peut noter les associations suivantes :

+ Pas de modèle, tautologie, définition, primitif, dynamique monotone avec "faux sans démonstration" ;
+ Préstatique avec "juste sans démonstration" ;
+ Mixte et statique avec procédures correctes;
+ Dans une moindre mesure, dynamique avec procédures correctes et ambigües particulières (5.SIN, 5.DES, 5.RAN) et procédure 5.MON;
+ Modèle primitif avec procédure erronée 5.DYN.

On peut constater après cette étude que les juxtapositions à l'origine du modèle mixte (dynamique+statique ou dynamique+préstatique) créent un comportement particulier (proche de celui qui est associé au modèle statique) qui sera détaillé , par genre du mixte, dans un paragraphe suivant.

Les différents modèles sont donc associés à des répartitions de procédures non comparables. Le premier groupe de modèles (statique, mixte, dynamique et préstatique) est plus associé à des procédures correctes, ambigües ou justes dans démonstration (avec des différences au sein du groupe). Le deuxième groupe de modèles (primitif, "tend vers", dynamique monotone, pas de modèles) est plus associé à des procédures erronées, essentiellement sans démonstration.
Ces résultats figurent sur la courbe en bâton P.M. IV ci-jointe.

4.3.2. La répartition des procédures par modèles dessinés (corpus N) (Tableau IV_3)

Là encore, nous travaillons sur un tableau résumé et le tableau détaillé qui nous permet de préciser certaines relations. Nous rappelons qu'il s'agit du modèle dessiné dans les questions 1) et 2) et pas à l'occasion de l'exercice 5 .

On constate les tendances suivantes:

* Les procédures "Faux sans démonstration" sont plus associées à des dessins monotones et particulièrement monotones croissant.

Ainsi, il y a 43,5% de ces procédures associées à une représentation graphique monotone, alors que, globalement, il y a 35% de représentations graphiques qui sont monotones.

Corrélativement, ces procédures "Faux sans démonstration" figurent moins dans les copies où le dessin n'est pas monotone.

Ainsi, il n'y a que 33 copies sur les 200 ayant affiché cette procédure (soit 16,5%) où figure une représentation graphique non monotone, alors que, globalement, il y en a 196 (soit 31% des copies où l'exercice est abordé) qui présentent un dessin non monotone.

Les procédures erronées, surtout 5.DYN, elles aussi, se trouvent plus dans les copies à dessin monotone, et curieusement moins dans les copies sans dessin du tout.

* La tendance inverse se marque (dans une moindre mesure) pour les procédures justes sans démonstration et surtout pour les procédures correctes. Les contre-exemples corrects (5.CEX) sont nettement plus associés à des dessins non monotones.

Ainsi, 48% des procédures 5.CEX se trouvent dans des copies où figure un dessin non monotone, alors que ces copies représentent 31% des copies totales.

On peut remarquer, par contre, qu'il y a une association entre les représentations monotones décroissantes et les contre-exemples en sinus et cosinus (5.SIN), ainsi que le contre-exemple 5.STA (deux sous-suites dont l'une est nulle).

Corrélativement, alors que 35% des dessins sont monotones, il n'y a que 27% des procédures correctes (surtout 5.CEX) dans les copies correspondantes.

* Globalement, on ne note pas d'associations particulières entre les procédures ambigües et les dessins. On constate toutefois sur le tableau détaillé que la procédure 5.RAN (suite décroissante à partir d'un certain rang) est plus associée à des dessins non monotones.

Modèle dessiné x Procédures. (IV_3) Exercice 5 Corpus N

Modèle dessiné \ Procédure à l'exercice 5	5 NAB	5 JSD	5 FSD	5 CEX + 5 SIN + 5 STA + 5 DIV	5 RAN + 5 NUL + 5 DES	5 MON + 5 DYN	Autres faux ou NTE	Total
Absent	6	34	80	46	41	12	6	225
Non monotone	6	38	33	66	37	16	9	205
Monotone ↗ ou monotone	2	18	59	21	30	15	5	150
Monotone ↘	5	12	28	21	10	4	2	82
Somme des dessins Monotones	7	30	87	42	40	19	7	232
Total	19	102	200	154	118	47	22	662

Tableau résumé

Modèle dessiné \ Procédure à l'exercice 5	5 NAB	NTE-Faux	5 JSD	5 FSD	5 CEX	5 SIN	5 STA	5 DIV	5 NUL	5 RAN	5 DES	5 DYN	5 MON	Total
Absent	6	6	34	80	31	9	6	0	17	18	6	4	8	225
Non monotone	6	9	38	33	45	9	10	2	8	23	6	6	10	205
Monotone ↗	2	3	16	48	10	5	3	1	11	13	1	4	8	121
Monotone ↘	5	2	12	28	6	7	7	1	6	3	1	1	3	82
Monotone	0	2	2	11	2	0	0	0	2	3	0	3	0	29
Somme des dessins Monotones	7	7	30	87	18	12	10	4	19	19	2	8	11	232
Total	19	22	102	200	94	30	26	4	44	60	14	18	29	662

Tableau détaillé

* En résumé, on note les associations suivantes :

- dessins monotones plus associés aux procédures F.S.D. et erronées et nettement moins associées aux procédures correctes.

- dessins non monotones plus associés aux procédures correctes (surtout 5. CEX), moins associés aux procédures F.S.D.

- dans les copies sans dessins, on trouve un peu plus de procédures F.S.D. et un peu moins de procédures erronées.

Les résultats renforcent donc les précédents, dans la mesure où on retrouve l'association d'une expression graphique monotone et d'une réponse erronée (sans démonstration). Nous avions déjà par ailleurs constaté l'association des modèles erronés et des dessins monotones, qui rendait prévisible ce type de résultats.

4.3.3. La nature des exemples fournis en 3)(4) et les procédures à l'exercice 5. Tableau IV_4).

Les tableaux croisant les procédures et la nature des exemples ne font pas apparaître de contrastes frappant, mais révèlent tout de même certaines tendances. Ainsi, si on étudie la répartition des procédures (regroupées en 5 JSD, 5 FSD, correctes, ambigües, erronées) suivant la nature des exemples convergents (tous monotones ou non), on constate que les exemples tous monotones sont plus associés aux procédures 5 FSD et moins associées aux procédures correctes -le calcul du χ^2 indique qu'on est à la limite de la différence significative (χ^2=7,76 , v=4). De même, si on étudie la répartition des procédures (regroupées de la même façon) suivant la nature des exemples divergents (tous non majorés, un seul non majoré en sinus, un seul non majoré en $(-1)^n$, deux au moins non majorés en sinus et $(-1)^n$, on constate que les exemples non majorés-sauf un en sinus-sont plus associés à des procédures FSD et moins associés à des procédures correctes, les exemples avec $(-1)^n$ seulement sont plus associés à des procédures erronées et les exemples avec

Exemples convergents x Procédures. (IV_4) Exercice 5 Corpus N

Procédures à l'exercice 5 / Nature des exemples convergents	Total	5 JSD	5 FSD	5 CEX + 5 SIN + 5 STA + 5 DIV	5 RAN + 5 NUL + 5 DES	5 MON + 5 DYN	5- FAu
Exemples tous monotones	248	41	85	45	43	19	8
Non tous monotones	414	61	115	109	75	28	14

Tableau résumé

Procédures à l'exercice 5 / Nature des exemples convergents	Total	5 JSD	5 FSD	5 CEX	5 SIN	5 STA	5 DES	5 NUL	5 RAN	5 MON	5 DYN	5 DIV
Exemples tous monotones	248	41	85	26	11	7	4	16	23	9	10	1
non tous monotones	414	61	115	68	19	19	10	28	37	20	8	3
Total	662	102	200	94	30	26	14	44	60	29	18	4

Tableau détaillé

procédures à l'exercice 5 / Exemples divergents	JSD	FSD	Correctes	Ambigües	Erronées
Tous non majorés	17%	39%	16%	21%	6%
En sinus	15%	36%	21%	25%	3%
Alternés	17%	26%	29%	14%	15%
Alternés et sinus	18%	22%	35%	19%	6%
Exemples convergents Tous monotones	18%	36%	19%	18%	8%
Non tous monotones	16%	30%	28%	19%	7%

Exemples divergents et convergents - Tableau de pourcentages lignes calculés sur les abordés

$(-1)^n$ et un en sinus sont plus associés à des procédures correctes et moins associés à des procéudres FSD. Toutes ces tendances ne sont pas des marques d'opposition importante et on ne peut en déduire de conclusions nettes, dans la mesure où les résultats vont dans le même sens que les précédents. On avait noté en effet dans la deuxième partie du chapitre III l'association des modèles erronés et des exemples convergents tous monotones et divergents tous non majorés.

A ce niveau de nos analyses, on commence à s'apercevoir du problème que pose l'étude de ces tableaux croisant deux facteurs seulement. En effet, par exemple, comme les exemples tous monotones sont plus associés aux dessins monotones que les autres (comme nous l'avons déjà vu), ajoute-t-on une information nouvelle -et dans quelle mesure- dans le paragraphe 4.3.3. par rapport au paragraphe précédent ? C'est pour pallier à ces inconvénients très graves de croisement deux à deux, successifs, de facteurs non indépendants, que nous avons estimé indispensable d'avoir recours à des analyses de données où toutes les données figurent à la fois.

Cependant, avant d'aborder sur l'exercice 5 les résultats de cette analyse factorielle, nous donnons la dernière répartition intéressante.

4.3.4. Répartition des procédures par niveau. Evolution au sein des trois groupes. (corpus N) . (Tableaux IV_5 et IV_6).

Nous travaillons sur le tableau résumé et le tableau détaillé.

Il apparaît non seulement des différences marquées entre les trois groupes, mais aussi des évolutions qui se font jour au sein de chaque groupe.

Le premier groupe (DEUG première et deuxième année) se caractérise par la contribution très élevée des procédures "faux sans démonstration" et, corrélativement, la contribution remarquablement faible des procédures correctes (présentes dans 2 à 10% des copies ...). Au sein du groupe, les copies de DEUG tout de suite après le cours présentent plus de procédures ambigües que les autres -surtout 5.RAN- alors que, dans les copies de DEUG en fin de première et en deuxième année, presque deux-tiers des procédures sont des procédures FSD -contre 41% et 46% au début du DEUG. Tout se passe comme si l'image mentale spontanée de la suite évoquée dans

Procédures x Niveaux (IV_5) Exercice 5 Corpus N

Copies N	5 FSD	5 DYN	5 MON	5 FAU ou NTE	5 NUL	5 RAN	5 DES	5 ISD.	5 SIN	5 STA	5 CEX	5 DIV	ABORDS
DEUG 1 après le cours sans exercices	25 41%	2	1	0	3	13 21%	5 8%	11	0	0	1	0	61
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	30 46%	2	5	6	6	1	1	8	2	0	3	1	65
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	37 68,5%	2	1	0	0	3	2	8	0	1	0	0	54
DEUG 2ème année	61 62%	0	3	0	3	1	4	16	4	0	6	0	98
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	9 20%	8	7	5	5	5	0	1	2	0	2	0	44
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	3 10%	2	5	4	2	6	0	1	2	2	3	0	30
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	11 12%	1	4	1	6	14	2	9 10%	5	11	28 30%	2	94
MATH. SPE.	12 15%	1	1	4	9	15	0	18 20%	7	2	21 23%	0	90
LICENCE (3ème année)	9 20%	0	2	0	4	1	0	9 20%	5	5	9 20%	1	45
MAITRISE (4ème année)	3 5%	0	0	2	6	2	0	21 34%	3	5	21 34%	0	62
TOTAL	200 31%	18 3%	29 5%	22	44 7%	60 9%	14 2%	102 16%	30 5%	26 4%	94 15%	4	643

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages lignes, calculés sur le total des abordés par niveaux.

Procédures x Niveaux. (IV_6) Exercice 5 Corpus N

Niveau / Procédures à l'exercice 5 (1)	5 FSD Faux sans démonstration	Erronées	5 JSD juste sans démonstration	Ambigües	Correctes	Abordés
DEUG 1 après le cours sans exercices	25 41%	3 5%	11 18%	21 34%	1 2%	61
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	30 46%	7 11%	8 12%	8 12%	6 9%	65
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	37 68%	3 6%	8 15%	5 9%	1 2%	54
DEUG 2ème année	61 62%	3 3%	16 16%	8 8%	10 10%	98
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	9 20%	15 34%	1 2%	10 23%	4 9%	44
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	3 10%	7 23%	1 3%	8 27%	7 23%	30
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	11 12%	5 5%	9 10%	22 23%	46 49%	94
MATH. SPE.	12 13%	2 2%	18 20%	24 27%	30 33%	90
LICENCE (3ème année)	9 20%	2 4%	9 20%	5 11%	20 44%	45
MAITRISE (4ème année)	3 5%	0	21 34%	7 11%	29 47%	62
TOTAL	200 31%	47 7%	102 16%	118 18%	154 24%	643

Tableau résumé

Les pourcentages indiqués sont les pourcentages lignes, calculés sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice.

(1) Nous n'avons pas fait figurer les procédures 5 FAU et 5 NTE.

l'énoncé de l'exercice 5 se fixait à partir de la fin de l'année de DEUG en une image erronée.

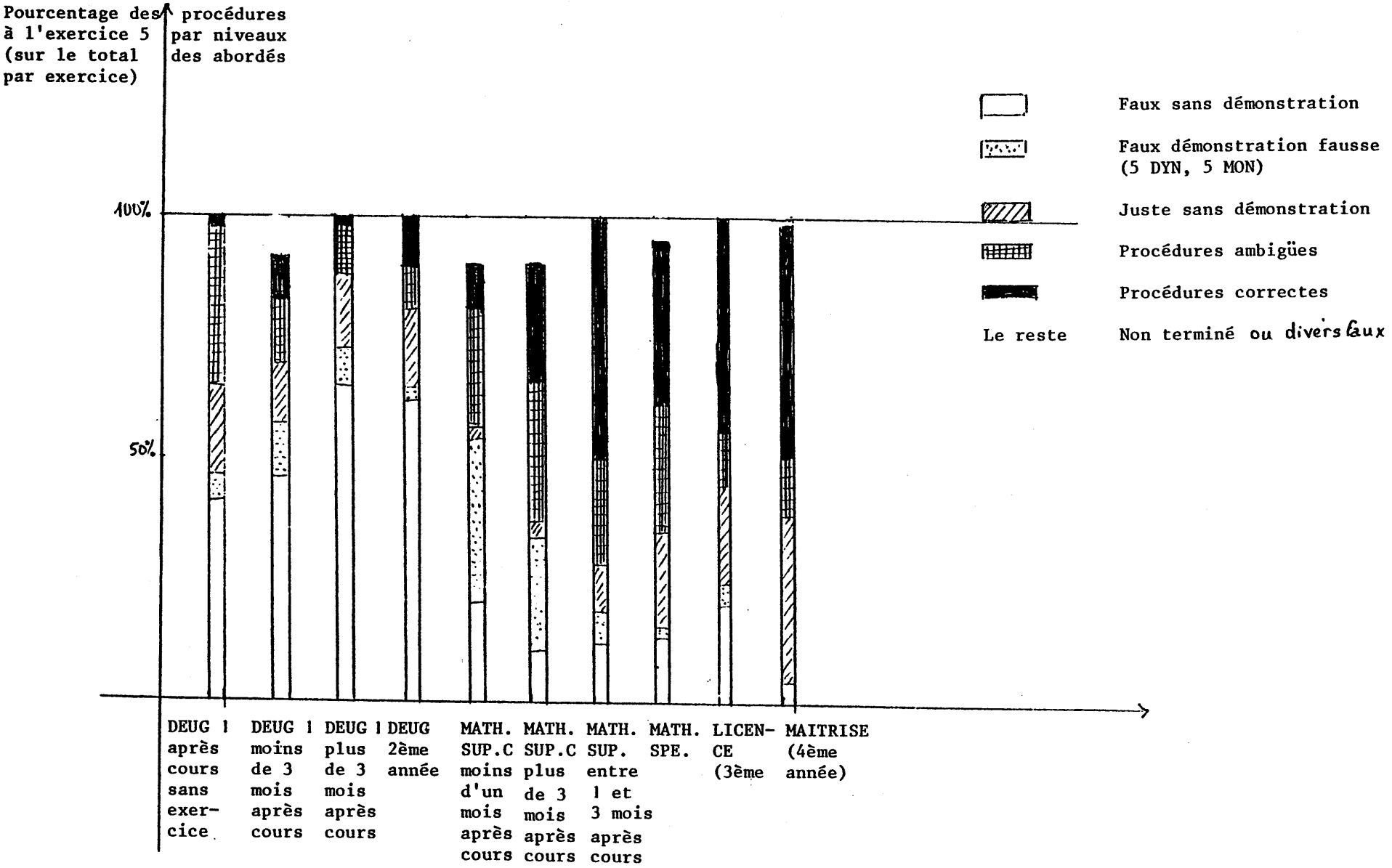
Le troisième groupe (SUP. , SPE. , Licence , Maîtrise) est presque moins homogène que le premier. Les procédures correctes sont présentes dans 45 à 50% des copies- sauf en SPE où elles ne figurent que dans un tiers des copies. Les procédures ambigües baissent de un quart des copies environ en SUP. et SPE. à 12% environ les deux dernières années. Les procédures erronées identifiées ont diparu en maîtrise. Quant aux procédures sans démonstrations, leur part est remarquablement faible en SUP. (10% des copies JSD, 12% FSD) et on note une évolution contrastée: les procédures "juste sans démonstration" augmentent -de 20% en deuxième et troisième année à 34% en maîtrise; au contraire les procédures "Faux sans démonstration" diminuent à 5% en maîtrise avec une légère hausse en licence où cette procédure est relevée dans 20% des copies.
Tout se passe comme si les images mentales spontanées se fixaient de façon de plus en plus correcte...

Enfin, le deuxième groupe (SUP. C) s'avère bien intermédiaire entre les deux premiers, mais les effectifs y sont trop faibles pour accorder une valeur définitive aux tendances que nous relevons. Les procédures correctes y occupent entre 10 et 20% des copies, les procédures ambigües autour d'un quart, les procédures justes sans démonstration sont presque absentes, et les procédures fausses sans démonstration baissent de 20 à 10%. On peut noter un pourcentage élevé (presque le plus élevé) de procédures erronées identifiées .
Tout se passe comme si le chemin vers les procédures justes passait par le remplacement des procédures erronées sans démonstration par les procédures erronées avec démonstration fausse. Il est peut-être plus facile de corriger les erreurs qui s'expriment explicitement qu'une erreur dans une image mentale dont l'enseignement jusque là ne tient pas compte.

(P.N.IV). PROCEDURES x NIVEAUX

Exercice 5

Corpus N



En résumé, en DEUG, cet exercice n'est pas réussi, que ce soit explicitement ou sans démonstration ; la plus grande partie des étudiants donnant une réponse erronée.

En Sup. , Spé. , licence et maîtrise, l'exercice est "réussi" par plus de la moitié des effectifs si on accepte les réponses sans démonstrations; la part des réponses fausses (avec ou sans démonstration) diminue jusqu'à 5% des réponses en maîtrise -ce qui est satisfaisant !

Ces deux groupes présentent ainsi des profils opposés, non comparables, même le "meilleur" niveau du premier groupe (DEUG 2) ne peut être rapproché du "moins bon" niveau du troisième groupe (licence).

Ces résultats figurent sur la courbe en bâton (P.N. IV) ci-jointe.

4.3.5. Analyse factorielle du tableau de contingence croisant les procédures à l'exercice 5 et les modèles exprimés, les modèles dessinés et les exemples.

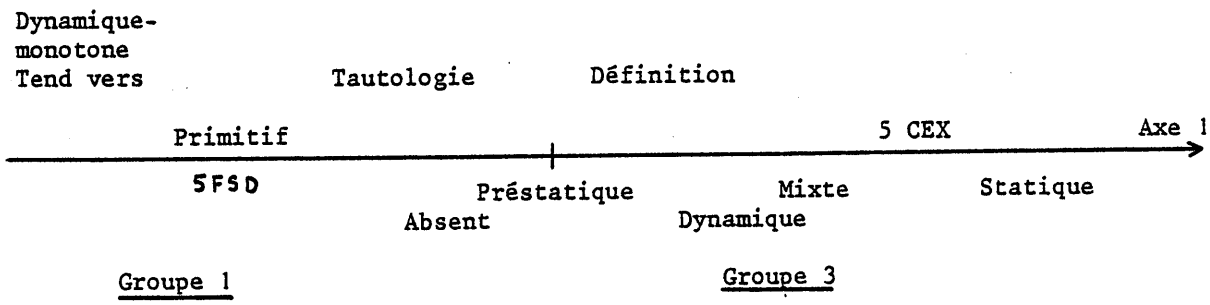
Cette analyse révèle un premier axe qui porte 51% de l'inertie totale du nuage ce qui correspond à la moitié de l'information et qui rend cet axe très intéressant. Cet axe peut s'interpréter sans hésitation comme un axe "réussite-échec". Il est construit par une partie des procédures à l'exercice 5 : les procédures 5.CEX (contre-exemple correct) et 5.FSD (faux sans démonstration) s'opposent en effet de part et d'autre de l'origine avec des contributions importantes. D'autre part, on trouve également du côté de la procédure 5.CEX et construisant l'axe, les modèles mixtes et statiques, les modèles dessinés non monotones et les exemples divergents alternés et en sinus -du côté 5·FSD on trouve les modèles primitifs dynamique monotone et "tend vers" avec des exemples divergents divers. Les niveaux (mis en points supplémentaires)[1] sont bien corrélés à cet axe -ceux du groupe 1 (DEUG) du côté des modèles erronés, et ceux du groupe 3 de l'autre côté. Les performances (mises en supplémentaires)[1] sont aussi bien corrélées à l'axe et en confirment l'interprétation en réussite-échec . Les modèles Définition et

---

(1) Il s'agit de variables supplémentaires que l'on place "après coup" sur l' axe un.

Préstatique ne sont pas bien corrélés à cet axe, mais se projettent au milieu entre 5.FSD et 5.CEX. Le modèle dynamique se projette aussi au milieu, plus du côté des bons modèles. Nous avons placés sur cet axe (en supplémentaire) les points correspondant aux différents genres du mixte. Il apparaît que les modèles mixtes résultant d'un modèle statique et d'un modèle dynamique exprimés dans la même question sont plus performants encore que les modèles statiques; par contre, ceux qui résultent d'un modèle préstatique s'avèrent intermédiaires entre dynamique et statique. Il y a bien un caractère spécifique à ces modèles mixtes et l'association de deux modèles semble engendrer une amélioration des performances du "meilleur" des deux, comme si la double vision amenait effectivement un enrichissement.

Voici l'allure du nuage de nos données[1] le long du premier axe :



Les axes suivants n'apportent pas d'information que nous puissions utiliser (avec 16 et 10% d'inertie).

Ainsi donc, les caractères déterminants dans les associations qui existent entre les procédures à l'exercice 5 et les caractères retenus dans les quatre premières questions sont certains modèles exprimés, certains modèles dessinés, et certains exemples; ceci confirme et précise à la fois nos résultats précédents. On peut caractériser les réponses à l'exercice 5 par cette opposition entre les étudiants qui donnent un contre-exemple correct, appartenant au groupe trois et ayant exprimé un modèle statique ou un modèle mixte et les étudiants qui donnent une réponse fausse sans démonstration, ayant exprimé un modèle primitif ou dynamique monotone

---

(1) cf. annexe ⑨3.

ou "tend vers", et appartenant au groupe un.

Nous retrouvons le caractère intermédiaire des étudiants ayant fourni une procédure ambigüe ou juste sans démonstration, et de ceux qui ont exprimé un modèle dynamique ou préstatique .

4.4. Les performances. Evaluation des copies (Tableau IV_7) .

Nous avions signalé dans le premier paragraphe que les procédures ambigües pouvaient être associées à trois types de réponses -justes, justes avec démonstration fausse, fausses avec démonstration fausse. Il est donc intéressant dans ce cas d'étudier aussi les performances que l'on peut ainsi attribuer aux copies. Cette évaluation entraîne évidemment la perte d'une partie de l'information et s'accompagne d'une certaine marge d'arbitraire comme l'ont déjà amplement prouvé toutes les études de docimologie. Nous aurons recours à ces performances le moins souvent possible et pour dégager (ou confirmer) des grandes tendances de nos copies. Nous avons donc choisi un nombre restreint de performances; les voici :

5 JUS — correspond aux procédures correctes et ambigües avec une réponse juste et une justification non erronée.

5 JDF (resp. 5 FDF) — correspond aux procédures erronées accompagnant une réponse juste (resp. fausse).

5 JSD (resp. 5 FSD) — correspond aux procédures sans démonstration justes (resp. fausses)

5 NAB — désigne l'absence de toute procédure (exercice non abordé).

5 NTE — est affecté aux copies non terminées (auxquelles une procédure a pu être affectée si elle avait été initialisée).

Le tableau IV_7 met en évidence l'évolution des performances par modèles.

On retrouve facilement deux catégories de modèles qui sont associés à des types de procédures opposées -ceux qui sont associés à plus de 60% de procédures erronées (avec ou sans démonstration) et ceux qui sont associés à moins de 35% de procédures erronées. Ces derniers (dynamique, préstatique, mixte, statique) se distinguent par

(IV_7) Performances x modèles à l'exercice 5 (corpus N)

Performances à l'exercice 5 / Modèle exprimé	résultat juste, démonstration non fausse 5 JUS	résultat juste démonstration fausse 5 JDF	résultat faux démonstration fausse 5 FDF	résultat juste sans démonstration 5 JSD	résultat faux sans démonstration 5 FSD	résultat faux (total)
Primitif	15%	4%	11%	17%	50%	61%
Tend vers	19%	7%	7%	5%	60%	67%
Dynamique monotone	10%	10%	10%	0	70%	80%
Pas de modèle exprimé	23%	3%	8%	18%	45%	52%
Questions 1) 2) non abordées	28%	6%	9%	25%	22%	31%
Dynamique	45%	4%	11%	17%	23%	34%
Préstatique	28%	7%	7%	26%	30%	33%
Mixte	55%	6 %	7%	10%	22%	29%
Statique	52,5%	10%	5%	20%	12,5%	17,5%

Les pourcentages sont les pourcentages lignes calculés sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice (par modèle exprimé).

exemple par le pourcentage de réponses "justes" auxquelles ils sont associés (plus de 52% pour mixte et statique, 45% pour dynamique, 28% pour préstatique).
Cette étude des performances permet ainsi de confirmer notre premier classement en différenciant dynamique et préstatique (ce dernier s'avérant plus associé à des procédures justes sans démonstration ou justes à démonstration fausse). Les premiers modèles cités (primitif , tend vers", dynamique monotone) se distinguent par le pourcentage de réponses fausses sans démonstration auxquelles ils sont associés (50%, 60%, 70%). Nos conclusions pour les copies sans modèle exprimé sont identiques à celles du paragraphe précédent.

Conclusion et interprétation.

Nous avons donc mis en évidence un rapport entre certains modèles exprimés et dessins et certaines procédures, que ce soit grâce à nos tris croisés ou à l'analyse factorielle. Les modèles erronés (primitif, dynamique monotone, "tend vers") sont associés surtout à des réponses erronées sans justification.
Tout se passe comme si les étudiants ayant exprimé ces modèles avaient effectivement une image décroissante des suites à termes positifs convergeant vers 0 -cette intuition étant suffisamment forte pour donner lieu à une réponse sans démonstration (sans hésitation pourrait-on dire). Il en est de même des étudiants n'ayant pas exprimé de modèle dans une moindre mesure. Les modèles statique et mixte, eux, qui correspondent à une "intimisation" de la définition en (ε,N) sont associés essentiellement à des réponses correctes ou ambigües (avec ou sans démonstration). Le modèle dynamique,par contre, qui correspond à une représentation cinématique non formelle de la notion,représentation disjointe de la définition mathématique, s'avère peu discriminant; il est associé à toutes les procédures possibles sans différence très importante. Il en est presque de même du modèle préstatique qui, s'il correspond à une représentation traduisant la définition mathématique, est beaucoup moins précis que le modèle statique, et s'avère assez peu discriminant -sauf en ce qui concerne les procédures justes sans démonstration-.

Pour interpréter ces résultats en essayant de revenir à notre hypothèse de l'existence d'un rapport entre la représentation mentale de la convergence et la résolution de cet exercice, on peut remarquer qu'il suffit d'avoir exprimé un modèle non monotone pour avoir 60 chances sur 100 au moins de donner une réponse juste -accompagnée de justifications correctes, erronées ou sans justification. Réciproquement il suffit d'avoir exprimé un modèle monotone (ou archaïque), de ne pas avoir exprimé de modèle ("définition" mis à part) ou d'avoir exprimé un modèle "tend vers" pour avoir 60 chances sur 100 au moins de donner une réponse fausse -accompagnée de justifications ou non. Mais, il y a une grande différence entre les modèles statique et mixte d'une part, les modèles dynamique et préstatique d'autre part. Ces deux derniers, en effet, sont d'une part beaucoup moins associés que les deux premiers à des procédures correctes et d'autre part plus associés à certaines procédures ambigües ou erronées pour le modèle dynamique, sans justification pour le modèle préstatique. On peut supposer que le modèle dynamique même si son expression n'est pas explicitement monotone peut engendrer des représentations monotones et que le modèle préstatique témoigne d'un manque de précision qui se retrouve lors des procédures. En outre, lorsque le modèle dynamique est associé à un modèle préstatique (mixte), le "glissement" monotone semble moins fréquent .. On peut enfin supposer que l'expression d'un modèle "tend vers" est l'indice non seulement d'un manque de précision, mais aussi d'une représentation monotone (non explicite). Cela étant, on constate que les modèles statique et mixte qui correspondent à une représentation traduisant au moins partiellement la définition en (ϵ, N) sont nettement plus associés aux meilleures procédures ... dans un exercice qui ne mobilise pas cette définition. Tout se passe comme si, même dans un tel exercice, pour exhiber un contre-exemple correct, il ne suffisait pas d'avoir l'intuition du résultat (modèle non monotone), mais qu'une pratique de la définition ayant conduit à l'installation d'un tel modèle[1] (avec les autres qualités qu'elle entraîne) s'avérait, elle, suffisante.

---

(1) non monotone

Cette interprétation de nos résultats, en accord avec notre axiomatique, confirme l'hypothèse du paragraphe 4.2. en la nuançant. Il va sans dire que dans l'état actuel du travail, ces interprétations sont des hypothèses qui pourront être encore affinées et confirmées par de nouvelles expériences. Rien ne garantit en effet qu'il n'y ait pas à prendre en compte autre chose qui n'apparaît pas dans nos données.

Il faut tout de même encore souligner, avant de passer à l'étude d'un autre exercice, la classification des étudiants en groupes non comparables. On a, en effet, pu diviser aussi bien les modèles exprimés que les niveaux en deux types correspondant à des procédures opposées non comparables, même en considérant les "meilleurs des mauvais" et les "moins bons des bons". Une seule exception : le deuxième groupe qui apparaît comme intermédiaire entre le groupe un et le groupe trois avec en plus une évolution entre ses deux niveaux.

Au sein de chaque groupe de niveaux ou de modèles, par contre, des évolutions se font jour permettant d'esquisser une "hiérarchie" sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir.

Chapitre 5. LES EXERCICES 7 et 9c) .

Dans la première partie, nous étudierons l'exercice 7 dont voici le texte initial:
Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie $\lim_{n\to\infty} nu_n = 1$ est convergente.
Il s'agit donc de justifier un résultat -une certaine suite (u_n) est convergente- annoncé dans l'énoncé de l'exercice, en disposant d'une information de même nature et encore plus complète -la suite (nu_n) converge vers 1- exprimée toutefois dans un formalisme différent de celui utilisé pour poser la question.
Pour démontrer une convergence, on a le choix, a priori, entre plusieurs méthodes. Il y a les méthodes centrées sur l'existence de la limite où on n'a pas besoin d'exprimer la valeur numérique de celle-ci -montrer qu'une suite est de Cauchy (mal adapté ici), montrer qu'une suite est équivalente à une suite convergente connue, ou encadrée par deux suites convergentes de même limite, utiliser les théorèmes sur les opérations algébriques (ici $u_n = \frac{1}{n} \times nu_n$) , utiliser les théorèmes sur les suites monotones bornées (pas ici !), raisonner par l'absurde (pas adapté ici). Il y a d'autre part l'idée d'exhiber un nombre dont on justifie qu'il est la limite de (u_n) soit grâce à la définition, soit grâce à des théorèmes généraux appliqués à une expression explicite de u_n .
On remarque que toutes ces méthodes ont pour point de départ le terme général u_n qui n'est pas explicite dans l'hypothèse de l'exercice 7 ou la valeur de la limite qui n'est pas fournie.
On peut aussi estimer que dans cet exercice, il n'y a pas, à première vue, un support de "représentation" qui permettrait de se faire une idée "imagée" de la conduite à adopter pour le résoudre.
Par contre, beaucoup des méthodes précédemment énumérées (sauf celle des suites monotones bornées) s'appliquent ou semblent s'appliquer à la suite (nu_n) , en ce sens que l'hypothèse $\lim nu_n = 1$ est susceptible "d'exploitation" immédiate.
C'est précisément la multiplicité de ces exploitations et donc des procédures que nous avons rencontrées dans les copies qui nous a amenée d'une part à tester l'hypothèse d'une relation entre la possibilité de changer de stratégie au cours

d'une démonstration et l'acquisition de la notion, d'autre part à étudier spécifiquement les erreurs relevées dans les procédures.

C'est dans ce but que nous avons soigneusement analysé la répartition des différentes procédures par niveau, et que nous avons réservé un paragraphe à l'étude des erreurs. D'autre part, il est intéressant d'étudier la répartition de ces procédures par modèle; dans la mesure où la représentation mentale ne semble pas mobilisée directement dans l'exercice, va-t-on ou non retrouver les mêmes résultats que pour l'exercice précédent ? Enfin, c'est précisément par la comparaison avec l'exercice précédent que nous terminons en montrant le rapport entre les résolutions des tâches correspondantes !

5.0. Présentation de l'étude.

L'exercice 7 est posé dans toutes les variantes, mais le texte V_1 ne concerne que 979 copies. Pour ne pas multiplier les "corpus", nous donnerons les répartitions de procédures sur le corpus N des 662 copies correspondant au texte V_1 intégral. Nous vérifierons la stabilité de ces répartitions dans les copies des classes ayant eu une variante présentant le même énoncé pour l'exercice 7 que V_1 et étudierons dans le même paragraphe les répartitions obtenues dans les classes où la variante présentait une modification de l'énoncé.

Cela étant, sur les 662 copies N , 74 (11% du total) ne comportent rien sur l'exercice 7 -elles sont réparties à peu près régulièrement sur les 10 niveaux (avec un minimum atteint par les copies provenant des classes de spéciales dont seulement 5% des étudiants n'ont pas abordé l'exercice 7).

Indiquons aussi que sur les 1 253 copies S , il y en a 157 (12,5%) où l'exercice 7 n'est pas abordé. Dorénavant, nous étudions, suivant les cas, les 588 (resp. 1096) copies N (resp. copies S) où l'exercice est abordé.

Voici le plan de cette étude:

5.1. Les procédures à l'exercice 7

Stabilité des répartitions dans les variantes (copies S).

5.2. Les erreurs.

5.3. Répartition des procédures par modèle exprimé et par niveau (corpus N).

5.4. Croisement des procédures aux exercices 5 et 7.

5.5. Conclusions. Interprétations.

5.1. Les procédures à l'exercice 7.

5.1.1. Les procédures correctes très utilisées et leur répartition par niveaux (copies N).

5.1.2. Les procédures algébriques erronées et leur répartition par niveaux

5.1.3. Les procédures correctes ou erronées peu utilisées.

5.1.4. Les variantes: stabilité et différences des répartitions.

Avant de commencer, signalons que, lorsque des étudiants utilisent successivement deux procédures différentes avant de conclure, leurs copies sont retenues dans les deux catégories correspondantes. Cela concerne une dizaine d'étudiants qui, ayant utilisé la procédure (ε,N) ont conclu avec une procédure peu utilisée incorrecte. Cela explique que le total des copies classées en DEUG I plus de trois mois après le cours et en maîtrise soit supérieur au total réel des copies du niveau. Si, par contre, deux démonstrations complètes différentes ont été proposées, on n'a retenu que la meilleure.

Enfin, si pratiquement tous les étudiants recopient l'indication "$n \to \infty$" en dessous du symbole "$\lim u_n$" quand ils l'utilisent, pour notre part, nous écrirons $\lim u_n$ pour $\lim_{n\to\infty} u_n$.

La liste des procédures avec le sigle que nous leur avons affecté est jointe dans le tableau V_0.

V. Exercice 7

Tâche	Procédures rencontrées	Pourcentage sur le total des étudiants N ayant abordé l'exercice 7	Sigle
	DEMONSTRATIONS ERRONEES 46%		
	. Procédures algébriques erronées		7 PSO
	+ type scalaire $\lim nu_n = n \lim u_n$	15%	7 PSC
	+ type produit $\lim nu_n = \lim n . \lim u_n$	11%	7 PLI
	. procédures minoritaires erronées	19%	
Montrer qu'une suite (générale) est convergente, étant donnée une propriété de convergence d'une autre suite construite à partir de la première -la limite n'est pas indiquée	+ par l'absurde	4%	7 DVG
	+ Cauchy	1%	7 CAU
	+ confusions suites-séries et erreurs sur les réels	6%	7 SSR
	+ étourderies ($nu_n = u_n$)	2%	7 ETO
	+ ambigües $u_n \simeq \frac{1}{n}$	2%	7 PEG
	+ $u_n = \frac{1}{n}$	3%	7 EGA
	DEMONSTRATIONS CORRECTES 34%		
Montrer que si la suite (nu_n) converge vers l , la suite (u_n) converge.	. Procédures en (ε, N) avec changement de stratégie	22%	7 DEC
	. Utilisation des équivalents $u_n \sim \frac{1}{n}$	7%	7 EQU
	. Utilisation correcte du théorème produit $u_n = (nu_n) \times \frac{1}{n}$	5%	7 PRO
	DEMONSTRATIONS CORRECTES OU AMBIGÜES 18%		
	. Procédures en (ε, N) sans changement de stratégie	18%	7 DEF
	NON TERMINEES OU INCLASSABLES	2%	7 NTE
		Pourcentage sur le total	
	NON ABORDES	11%	7 NAB

Abordés : 588 étudiants N.

5.1.1. Les procédures les plus utilisées: procédures en "ε,N" (Tableau V_1).

a) Description.

Nous développerons particulièrement ces procédures car il nous semble intéressant d'exhiber, à cette occasion, les divers cheminements possibles des étudiants si tant est qu'on puisse les reconstituer.

C'est la méthode la plus utilisée pour débuter l'exercice: 40% des étudiants N commencent en effet leur solution en traduisant l'hypothèse "$\lim nu_n = 1$" en

$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists N \quad \forall n > N \qquad | nu_n - 1 | < \varepsilon$, (d'où le nom que j'ai attribué à ces procédures). L'inégalité est large ou stricte.

La définition ainsi utilisée, on trouve à la ligne suivante ou à côté,

(**) $\qquad \left| u_n - \frac{1}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{n}$

sans que les préliminaires donnant les précisions sur ε et N soient nécessairement recopiés.

Nous avons classé les conduites observées à partir de là en trois types (qui apparaissent dans le tableau V_1) décrits en i), ii) et iii):

* conduites "sans changement de stratégie" avec quatre cheminements possibles;
* conduites "avec changement de stratégie intermédiaire" avec trois cheminements possibles;
* conduites "avec changement de stratégie" avec trois cheminements possibles.

Nous développerons surtout le premier groupe où se rencontrent des erreurs très "instructives" à notre avis.

i) Conduites "sans changement de stratégie" (sigle 7-DEF).

Il s'agit des 106 copies où on "tire" le résultat de la seule inégalité (**) sous sa forme initiale ou sous la même forme "déguisée" suivante:

(**)' $\qquad \left| u_n - \frac{1}{n} \right| < \varepsilon'$

qu'on rencontre dans un certain nombre de copies où figure un "soit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{n}$

-comme si le fait de nommer autrement ε/n permettait de se débar asser réellement de ce n gênant et de retrouver "n'importe quel nombre positif..." (ε' peut s'appeler ε_1 ou ε) .

Mais comme $\frac{\varepsilon}{n}$ est inférieur ou égal à ε dès que n est supérieur ou égal à 1- ce que remarquent d'autres copies d'ailleurs -le raisonnement qui suit pourrait ne pas être faussé par cet "exorcisme" ! Cette erreur -que j'appelle "muette" pour la raison ci-dessus- subsiste longtemps, et on n'a pas relevé de relations entre sa présence ou son absence et la production des autres erreurs qui vont suivre que nous abordons maintenant.

1) La "reconnaissance de formes"

Dans un premier lot de copies -une vingtaine, dont on trouve un représentant (au moins) dans tous les niveaux du DEUG (sauf le premier) jusqu'en licence- figurent après (**) des explications du type suivant:

"on pose $l = \frac{1}{n}$ et on a $|u_n - l| < \varepsilon$ donc u_n converge" (copie[2 031]) ;

"donc il existe l tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ $\forall n > N$ $|u_n - l| < \varepsilon$ "(copie [2 910]);

"donc la limite de u_n quand $n \to \infty$ est $\frac{1}{n}$ soit 0" (copie[3 109]) etc...

Tout se passe comme s'il y avait utilisation de la forme de la définition avec décalque des différents éléments qui interviennent -d'où le nom que j'ai attribué à cette procédure- (on remplace ε/n par ε si ce n'est déjà fait, on remplace l par $\frac{1}{n}$; u_n, lui, est bien placé).

2) Passage à la limite dans la limite et le théorème en acte "limite partielle".

D'autres copies présentent après l'inégalité (**) :

"donc u_n converge vers 0 car $\frac{1}{n}$ converge vers 0" (copie [2 413]);

ou "$|u_n - \frac{1}{n}| < \varepsilon'$, $\to 0$ donc $|u_n| < \varepsilon'$ et $\lim u_n = 0$ " (copie[2 614]);

ou encore "donc $|u_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow u_n \to 0$ " (copie [2 904]) .

Tout se passe comme si on pouvait passer à la limite dans un des termes seulement

de $u_n - \frac{1}{n}$ indépendamment de l'autre [1]; le nom que nous avons donné vient aussi d'une procédure qu'on a jugé du même type et que nous rencontrerons plus loin.

Ce théorème en acte concerne une quinzaine de copies.

3) Les changements de formalisme et le théorème en acte "somme de limites".

On rencontre aussi des procédures formellement identiques aux précédentes, mais où interviennent . soit pour réénoncer l'inégalité (**),

. soit pour énoncer la conclusion, des changements de formalisme.

Peut-être est-ce l'indice d'une tentative de changement de stratégie ?

Ainsi, trouve-t-on après l'inégalité (**)' l'un des quatre changements de formalisme suivants :

α) "donc $\lim_{n\to\infty} (u_n - \frac{1}{n}) = 0$ et $\lim u_n = \lim \frac{1}{n}$ " [2] -(0 est indiqué ou non), (copies [2 408], [2412], etc ...).

On reconnait l'application d'un "théorème en actes" -somme de limites-

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n - \lim_{n\to\infty} v_n$$

β) "donc u_n et $\frac{1}{n}$ ont même limite" -(0 indiqué ou non); (et certaines copies parlent même ici de suites adjacentes), (copies [4 006], [6 921], etc ...).

Tout se passe comme si le même théorème en actes était appliqué. Cela nous semble être encore le cas dans le troisième cas —avec une certaine ambiguïté :

γ) "donc $(u_n - \frac{1}{n}) \to 0$ donc $\lim u_n = 0$ " [3] (ou $u_n \to 0$) (copie [4122]).

On trouve encore un dernier changement de formalisme également ambigü :

δ) "donc u_n tend vers $\frac{1}{n}$ qui tend vers 0" (copie 3 116);

---

(1) On pourrait parler du théorème en acte de "passage à la limite partiel":

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to\infty} (u_n - \lim_{n\to\infty} v_n)$$

(2) On rencontre une forme plus ambigüe de i) "$\lim_{n\to\infty} (u_n - \frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$" qui rejoint iii).

(3) ou bien "donc $(u_n - \frac{1}{n})$ tend vers 0 et u_n tend vers 0" avec le formalisme tend vers à la place de la flèche $\to$.

ou "donc la suite u_n tend vers la suite $\frac{1}{n}$ qui converge, donc u_n converge" (copie [4 31]).

Là se marque une émergence dynamique de la conception de la convergence des suites -avec une conotation transitive "si u_n se rapproche de v_n qui se rapproche de 0, u_n se rapproche de 0 ". Cela peut faire penser au "passage à la limite dans la limite" rencontré en b) : la limite est conçue comme une approximation de la valeur du terme général dont on a oublié que c'est une fonction de n et que c'est n qui varie ...

Dans le même ordre d'idées, on trouve la notation $\lim_{n\to\infty} u_n \longrightarrow 0$.

Il faut bien noter que la marge est très étroite avec de tels formalismes entre un théorème correctement appliqué et un théorème incorrect.

Ainsi, une copie (n° [2 709]) présente ces lignes, après avoir posé $\varepsilon = \varepsilon/n$: $|u_n - \frac{1}{n}| < \varepsilon$ donc $\lim (u_n - \frac{1}{n}) = 0$; or $\lim \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim u_n = 0$ ", ce qui peut provenir d'un raisonnement correct implicite appliqué à $u_n = (u_n - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}$;

Or, dans le même paquet, on trouve (n° [2 715]) :

"$(u_n - \frac{1}{n}) < \varepsilon / n < \varepsilon$ donc $\lim (u_n - \frac{1}{n}) = \lim (u_n) = 0$ car $\frac{1}{n} \to 0$ "

-il est alors très difficile de décider s'il y a eu application du théorème avec présupposition de l'existence de limite u_n ou non. Il n'en reste pas moins qu'une trentaine de copies est à classer ici.

4) Passage direct à la conclusion et divers.

Enfin, un certain nombre de copies (une trentaine) se présentent ainsi : après l'inégalité (**)' on a seulement une phrase de conclusion :

"la suite est convergente" (limite 0 indiquée ou non).

On ne peut pas alors expliciter les processus qui sont intervenus. A mon avis, plusieurs processus parmi ceux décrits ci-dessus se mélangent en une estimation du résultat. Toutefois, il me semble que la présence du ε (rebaptisé) est l'indice de la présence plus ou moins implicite et non exclusive d'une tentative de reconnaissance de forme de la définition en(ε ,N). Rappelons qu'ici sont aussi classées les copies qui utilisent une procédure peu fréquente pour conclure après l'inégalité (**).

ii) Les changements de stratégie "intermédiaires" (sigle 7-DEC).

Nous allons aborder maintenant les 20 conduites correctes sans changement de stratégie "globale" mais où il est nécessaire d'introduire un intermédiaire après l'inégalité (**).

1) Décomposition de u_n en somme.

On écrit $u_n = \frac{1}{n} + (u_n - \frac{1}{n})$ et on majore séparément $\frac{1}{n}$ et $(u_n - \frac{1}{n})$ ce qui permet de trouver, pour tout ε , un nouveau rang à partir duquel $|u_n| < \varepsilon$; en général, ceci est bien fait.

2) Majoration de $|u_n|$ à partir de $(u_n - \frac{1}{n})$.

On remarque, par des relations entre inégalités, que $|u_n| \leq \frac{1}{n} + |u_n - \frac{1}{n}|$, la conclusion étant identique -mais là, on peut rencontrer des inégalités fantaisistes ($|a-b| \geqslant |a|+|b|$, etc ...).

3) Majoration directe de $|u_n|$.

Enfin, dans un petit nombre de copies, on déduit de l'inégalité (**) l'implication $\frac{1-\varepsilon}{n} < u_n < \frac{1+\varepsilon}{n} \Rightarrow |u_n| < \frac{1+\varepsilon}{n}$
et, souvent, on pose alors $\varepsilon' = \frac{1+\varepsilon}{n}$ (!) pour obtenir l'inégalité $|u_n| < \varepsilon'$, de laquelle on déduit que (u_n) converge (vers 0 , indiqué ou non).

iii) Les changements de stratégie (sigle 7 DEC).

Nous étudions ici les 108 copies où se marque un changement de stratégie: on n'essaie plus d'appliquer la définition de la convergence à (u_n) pour conclure. Encore une fois, plusieurs sous-cas sont observés, le premier cheminement étant de loin le plus fréquent :

1) Encadrement de u_n par des suites fonctions de ε .

On remarque que

(***) $\quad \frac{1-\varepsilon}{n} < u_n < \frac{1+\varepsilon}{n}$ (inégalités larges ou non)

et on conclue -en citant ou non la limite de (u_n)- grâce à l'encadrement de (u_n) par deux suites convergeant vers 0 ; la justification est explicite ou non (dans une classe, presque tous les étudiants concernés évoquent le théorème du "pincement " ...).

Il est extrêmement rare qu'un commentaire indique que l'inégalité (***) n'est vraie qu'à partir d'un certain rang, mais que cela ne change rien.

2) Encadrement de u_n par des suites particulières.

Dans certaines copies, on choisit $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = 2$ et des encadrements " $0 < u_n < \frac{2}{n}$ ", ou $-\frac{1}{n} < u_n < \frac{3}{n}$ on déduit le résultat (avec ou sans justification explicite).

Dans les deux cas, il y a un certain nombre de copies qui présentent l'application erronée du théorème de "passage à la limite dans les inégalités" suivantes :

" $\frac{1-\varepsilon}{n} < u_n < \frac{1+\varepsilon}{n} \Rightarrow 0 < \lim u_n < 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$ " (inégalités strictes).

Là encore, il s'agit d'une erreur "muette" qui n'a pas de conséquence sur la conclusion.

3) Le "semi-encadrement".

On trouve enfin, dans une douzaine de copies, un "raisonnement" du type suivant :

" $u_n < \frac{1}{n}$ donc u_n tend vers 0 " (copie [4 126]).

" $u_n < \frac{1+\varepsilon}{n}$ donc u_n tend vers 0 " (copie [1 212]).

Tout se passe comme si on appliquait le théorème en actes de semi-encadrement (1) suivant :

$$u_n \leqslant v_n \ , \ v_n \text{ converge vers 0 donc } u_n \text{ converge vers 0}$$

---

(1) On a aussi trouvé dans une copie "$u_n \sim \frac{1}{n}$ donc u_n décroît vers 0".

b) Répartition par niveaux de ces procédures (Tableau V_1).

On constate une répartition très contrastée, dans la mesure où ces procédures ne sont utilisées que par deux étudiants de DEUG tout de suite après le cours (sur 54), et par 72% des étudiants de maîtrise. Moins de trois mois après le cours en DEUG, il n'y a encore que quatre étudiants sur 56 qui utilisent une procédure en (ε,N) (dont trois sans changement de stratégie d'ailleurs). Plus de trois mois après le cours et en DEUG 2, cette utilisation de la définition concerne resp. 20% et 24% des étudiants ayant abordé l'exercice. Il faut noter qu'en deuxième année un peu plus de la moitié ne change pas de stratégie contre 80% en DEUG 1 trois mois après le cours. Ainsi, dans le premier groupe, il y a simultanément une augmentation de la procédure (qui ne dépasse cependant pas 25%) et en deuxième année seulement une augmentation relative des procédures avec changements de stratégie. Dans le troisième groupe, on note surtout en maîtrise, l'augmentation relative des procédures avec changements de stratégie qui passent de 62% des procédures en (ε,N) en Math. Sup., Math. Spé., et seulement 48% en licence) à 79% en maîtrise. L'utilisation des procédures en (ε,N), elle, concerne plus de la moitié des étudiants de ce groupe, mais baisse de 65% en Math. Sup. à 50% en licence pour remonter à 72% en maîtrise. Il y a un "décrochement" en maîtrise qui peut, s'il se confirme, témoigner d'un nouveau degré dans l'acquisition de la notion -dont l'origine est à chercher et dans la sélection maximale des étudiants en quatrième année, et dans la réorganisation de la notion consécutive à l'apprentissage d'autres connaissances.

Le deuxième groupe, enfin, s'avère une fois de plus, intermédiaire entre les deux autres, avec à peu près la moitié de procédures en (ε,N) dont au moins 60% sans changement de stratégie. Il n'y a pas de différence assez nette entre les deux niveaux, pour que, vu les effectifs, nous puissions l'interpréter. Il y a là une différence avec l'exercice 5: les DEUG sont très en-dessous du premier niveau de Math. Sup. C dans l'utilisation de la définition en (ε,N).

Répartition des Procédures en (ε,N). Exercice 7 (corpus N) Tableau V1

Procédures à l'exercice 7 en (ε,N) / Niveau	Sans changement de stratégie 7 DEF	Changements intermédiaire de stratégie 7 DEC	Changements de stratégie 7DEC	Total des procédures en (ε,N).	Pourcentage des procédures en (ε,N) sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice	Pourcentage des procédures sans changement de stratégie sur le total des procédures en (ε,N).
DEUG 1 après le cours sans exercices	0	1	1	2	4%	0
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	3	1	0	4	7%	75%
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	8	1	1	10	20%	80%
DEUG 2ème année	12	1	8	21	24%	57%
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	15	0	5	20	45%	75%
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	8	0	5	13	50%	61%
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	22	3	33	58	65%	38%
MATH. SPE.	19	6	22	47	54%	40%
LICENCE (3ème année)	11	0	10	21	50%	52%
MAITRISE (4ème année)	8	7	23	38	72%	21%
TOTAL	106	20	108	234	40%	45%

Les pourcentages sont calculés par niveaux sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice.

5.1.2. Les procédures algébriques erronées (scalaire et produit) (Tableau V_2) .

a) Description.

Il y a 26% des étudiants qui utilisent des procédures différentes -tout en partant de l'hypothèse-. Il s'agit des applications des deux"théorèmes en acte" suivants -qui exploitent des propriétés "algébriques" de la limite (mal dominées) :

$\lim nu_n = n \lim u_n$ (procédure scalaire)

$\lim nu_n = \lim n \times \lim u_n$ (procédure produit).

On estime que ces procédures sont erronées ($\overline{\mathbb{R}}$ n'est en plus pas utilisé dans les cours de première année ...).

i) Etude de la procédure scalaire (?PSC et ?PSO, utilisée par 15% des étudiants).

Si on trouve dans quelques copies des justifications de cette procédure ("lim" est un morphisme d'algèbre, ou "d'après les théorèmes algébriques sur les suites" ...), la plupart du temps, on voit figurer sans aucune explication [1], des égalités du type :

1) "$\lim nu_n = n \lim u_n \Rightarrow \lim u_n = \frac{1}{n}$ " -(ceci dans 23% des copies utilisant la procédure scalaire) - procédure ?-PSC ;

2) "$\lim nu_n = n \lim u_n \Rightarrow \lim u_n = \frac{1}{n} = 0$ " ; il faut préciser que nous résumons ici car cette dernière égalité figure en réalité sous les diverses formes suivantes:

* "$\lim u_n = \frac{1}{n} \to 0$ donc u_n converge vers 0 " ;

* "$\lim u_n = \frac{1}{n}$ donc u_n converge vers 0 " ;

(ou) alors $u_n \to 0$ "

(ou) or $\frac{1}{n}$ est convergente et tend vers 0 donc u_n converge ..."

---

(1) On a même trouvé directement "$\lim u_n = \frac{1}{n}$ " ou "$\lim u_n = \frac{1}{n} = 0$ ".

+ "$nu_n \to 1 \Rightarrow u_n \to \frac{1}{n}$ et quand $n \to \infty$ $\frac{1}{n} \to 0$ donc u_n converge vers 0 " (1)
Cette procédure est baptisée 7-PSO.
On trouve la même procédure scalaire dans les copies qui présentent les implications suivantes : "$\lim n(u_n - \frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow \lim (u_n - \frac{1}{n}) = 0$ "; (on a même vu l'expression "après simplification par n " dans une copie !).

Enfin, dans tous les cas, le passage de la valeur $\frac{1}{n}$ à la valeur 0 pour la limite n'est jamais justifié; il nous semble pouvoir provenir soit de l'utilisation du passage à la limite partiel -la limite est une approximation, on peut encore passer à la limite dans la limite-, soit de l'intuition du résultat (sans que ces facteurs s'excluent l'un l'autre).

ü) Etude de la procédure produit (utilisée par 11% des étudiants) (7-PU).

Il y a un certain nombre de copies (42 sur les 65 considérées) où figure explicitement (mais la plupart du temps sans justification) l'implication :

" $\lim nu_n = \lim n \times \lim u_n \Rightarrow \lim u_n = \frac{1}{\lim n} = 0$ " .

Les justifications sont, comme dans le premier cas , des références aux "théorèmes algébriques sur les suites" (ou sur les limites).

Mais on a aussi eu à considérer des copies où figurent, sans autres intermédiaires, les égalités : "$\lim u_n = \lim \frac{1}{n} = 0$" .

Nous avons aussi trouvé de temps en temps :

"$\lim n \times \lim u_n = 1 \Rightarrow \lim u_n = \frac{1}{\lim n} = \lim \frac{1}{n}$ " ,

ou bien "on peut diviser par n des deux côtés donc $\lim u_n = \lim \frac{1}{n}$ " . (2)

Nous avons estimé qu'une procédure produit était utilisée dans toutes ces copies.

---

(1) On retrouve une émergence du théorème de passage à la limite dans la limite.

(2) Il y a là comme une superposition des procédures scalaire et produit.

b) Répartition de ces procédures par niveaux (Tableau V_2).

Là encore, la répartition est très contrastée dans le sens inverse.
Dans le premier groupe, en effet, les deux premiers niveaux sont de nouveau assez proches, avec une utilisation des procédures algébriques erronées par plus de la moitié des étudiants ayant abordé l'exercice (resp. 56% et 61%). Ce pourcentage diminue en DEUG plus de trois mois après le cours à 46% et diminue encore en DEUG 2 (33%). Par contre, on n'observe pas globalement de diminution de la part relative des procédures scalaires sur l'ensemble des procédures algébriques erronées -sauf en DEUG moins de trois mois après le cours. Tout se passe donc comme si c'était les procédures produit seulement qui diminuaient ce qui nuance grandement l'impression de progrès qui se dégageait des chiffres globaux.
Dans le troisième groupe, les procédures algébriques erronées ne concernent que 12% des copies au plus (en licence) -avec un taux minimum de 4% en maîtrise, seul niveau où on n'a de plus relevé aucune procédure scalaire. On ne peut parler cependant ici de décrochement de ce dernier niveau, mais plutôt de l'aboutissement d'un processus d'élimination bien engagé en Sup. Il y a là un fossé entre les deux groupes dans la mesure où le meilleur niveau du premier est qualitativement encore très inférieur au moins bon niveau du troisième. Par contre, au milieu, on retrouve les Math. Sup. C -avec, moins d'un mois après le cours, 29% de procédures algébriques erronées dont 61% de procédures scalaires (chiffres proches de ceux du DEUG 2) contre, plus de trois mois après le cours, 19% de procédures algébriques erronées dont 40% de procédures scalaires (chiffres plus proches de ceux du troisième groupe).

5.1.3. Les procédures correctes ou erronées peu utilisées. (Tableau V_3).

Chaque procédure de ce groupe est utilisée par moins de 10% des étudiants ayant abordé l'exercice. Nous en résumons ici les traits importants.

Répartition des procédures "algébriques". Exercice 7 (corpus N) Tableau V_2

Procédure à l'exercice 7 / Niveau	Lim $nu_n=l \Rightarrow$ lim $u_n=\frac{l}{n}$ 7 PSC	Lim $nu_n=l \Rightarrow$ lim $u_n\frac{1}{n}=0$ 7·PSO	Total Procédures Scalaires	Produit lim nu_n = lim n × lim u_n 7·PLI	Total des procédures algébriques	Pourcentage des procédures algébriques sur abordés	Pourcentage des procédures scalaires sur total des procédures algébriques
DEUG I après le cours sans exercices	2	18	20	10	30	56%	67%
DEUG I moins de 3 mois après le cours	4	13	17	17	34	61%	50%
DEUG I plus de 3 mois après le cours	3	12	16	8	23	46%	69%
DEUG 2ème année	5	16	21	8	29	33%	72%
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	4	4	8	5	13	29%	61%
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	0	2	2	3	5	19%	40%
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	1	2	3	6	9	10%	33%
MATH. SPE.	2	1	3	2	5	6%	60%
LICENCE (3ème année)	0	1	1	4	5	12%	20%
MAITRISE (4ème année)	0	0	0	2	2	4%	0
TOTAL	21	69	90	65	155		
Pourcentage global	4%	11%	15%	11%	26%		58%

Les pourcentages sont calculés par niveaux sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice.

a) Les procédures correctes et ambigües.

i) L'utilisation correcte du théorème sur les équivalents (7 EQU) concerne 7% des étudiants, surtout en classe de spéciales (11%), licence (14%) et maîtrise (19%). En voici une illustration : "lim $nu_n = 1$, $u_n \sim \frac{1}{n}$ donc u_n converge" (copie [4 902]).

ii) L'utilisation correcte du théorème sur les produits de suites (7 PRO) concerne 5% des étudiants, essentiellement de spéciales (13%) et de licence (10%). Ainsi, la copie [3 908] : "Posons $\forall\ n > n_o$ $nu_n = v_n$; donc $u_n = \frac{v_n}{n}$; (v_n) est convergente de limite 1 , $\frac{1}{n}$ est convergente de limite 0 donc (u_n) converge et lim $(u_n) = 0$ ".

iii) Une procédure "intermédiaire" ne concernant que cinq étudiants (1%) est caractérisée : par une utilisation ambigüe des équivalents et rencontrée surtout en spéciales. Il s'agit d'une procédure qui pourrait être correcte mais qui, sans plus ample justification, nous semble insuffisante :

On écrit $nu_n = (n-1)u_n + u_n$

puis $nu_n \sim (n-1)u_n \Rightarrow (n-1)u_n \to 1 \Rightarrow u_n \to 0$.

Cette procédure est réunifiée avec la procédure 7-CAU (8.5).

b) Les procédures erronées.

Elles disparaissent (sauf exceptions) des copies à partir de la troisième année.

i) Ainsi, 4% des copies (provenant surtout des classes de Math. Sup.) présentent-elles une tentative de raisonnement par l'absurde plus ou moins explicite rendue erronée par des conceptions restrictives de la divergence : en résumé

* ou bien on écrit que, si u_n diverge (ou n'a pas de limite), nu_n diverge (ou n'a pas de limite) ;
* ou bien on explicite la divergence de u_n par la seule clause $u_n \to \pm\infty$, ou par deux clauses, $u_n \to \pm\infty$ ou u_n bornée et sans limite finie,

etc ... en oubliant des possibilités.

Dans tous les cas, il s'ensuit que (u_n) est convergente et que la limite (calculée ou non) ne peut être que 0 .

Cette procédure disparaît à partir de la licence (sigle ? DVG).

ii) Il n'y a guère que 1% des étudiants (provenant surtout de deuxième année) qui essaient de démontrer que (u_n) est une suite de Cauchy -ces démonstrations présentent des erreurs dans quatre cas sur cinq; ce sont essentiellement des erreurs de conception des suites de Cauchy (on part de $(n+1)u_{n+1} - nu_n$ pour montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0 et conclure) - procédure ? CAU .

iii) Dans 12 copies -(2%)- les suites (nu_n) et (u_n) ne sont pas distinguées -étourderie ?- (il s'agit essentiellement de copies de DEUG 1, trois mois après le cours) - procédure ? ETO .

iv) Dans 20 copies -(3%)- (provenant essentiellement de DEUG 1 et 2), il est écrit, pour affirmer la convergence, que $u_n = \frac{1}{n}$ ou $u_n = \frac{k}{n}$ ou $u_n = \frac{1}{a+n}$. Dans certains cas, la confusion entre condition nécessaire et suffisante est soulignée par une phrase du type "u_n est nécessairement de la forme ..." . Cette procédure disparaît dès la troisième année (procédure ? EGA).

v) On trouve jusqu'en licence les phrases ambigües du type "u_n se comporte comme $\frac{1}{n}$ " , "u_n est semblable à $\frac{1}{n}$" , "$u_n \simeq \frac{1}{n}$ " -on conduit alors à la convergence de (u_n) (dans 14 copies, soit 2%) - procédure ? PEG.

vi) Enfin, nous avons trouvé diverses procédures isolées (utilisées par deux ou trois étudiants) que nous avons regroupées avec la quinzaine de copies dans lesquelles nous avons été incapables de distinguer une quelconque procédure. Citons la confusion entre suites et séries qui conduit au calcul de $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$, l'affirmation que toute suite bornée est convergente, ou qu'une suite minorée par 1 tend vers 1

Les procédures minoritaires. Exercice 7 (Tableau V_3) (Corpus N)

	Total abordés	Raisonnement par l'absurde 7-DYG	Cauchy 7-CAU	$u_n = \frac{1}{n}$ 7-EGA	$u_n \geq \frac{1}{n}$ 7-PEG	u_n et nu_n confondus 7-ETO	7-55R Confusions suite/séries ou autres	Non terminé	$nu_n=(n-1)u_n+u_n$ 7-CAU	$u_n \sim \frac{1}{n}$ 7-EQU	$u_n=nu_n \times \frac{1}{n}$ 7-PRO
DEUG I après le cours sans exercices	54	2	0	3	0	2	1	7	1	5	0
DEUG I moins de 3 mois après le cours	56	1	0	6	2	1	1	9	0	2	0
DEUG I plus de 3 mois après le cours	50	1	0	3	4	7	4	6	0	2	1
DEUG 2ème année	87	2	4	6	5	1	13	16	0	3	2
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	44	5	0	0	1	0	3	2	0	0	2
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	26	2	0	0	0	0	2	5	0	0	3
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	33	3	1	1	0	1	4	4	1	2	4
MATH. SPE.	37	3	1	1	0	0	3	5	3	10	11
LICENCE (3ème année)	42	0	0	0	2	0	3	5	0	6	4
MAITRISE (4ème année)	53	0	0	0	0	0	4	3	0	10	1
TOTAL	388	24	6	20	14	12	36	62	5	40	28
Pourcentage calculé sur les abordés		4%	1%	3%	2%	2%	6%	10%	1%	7%	5%

Les pourcentages sont calculés par niveaux sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice.

ou que (nu_n) est une suite géométrique ou reste inférieur à 1 puisque tendant vers 1 ... Nous avons ainsi décrit la dernière catégorie (6%) de procédures minoritaires (38 copies) (7-SSR).

c) Procédures incomplètes et inclassables.

Il reste à examiner les copies non terminées (10%) -il y a parmi elles les copies où une procédure a été commencée (45 copies, dont plus de 15 présentent le début de la procédure en (ε,N) dont nous allons parler), et les autres (17)- où, soit le résultat est affirmé sans démonstration, soit la procédure n'a pas été analysable. Toutefois, les copies non terminées où une procédure est démarrée sont comptabilisées avec les copies utilisant la procédure en question.
Toutes ces procédures sont trop rares pour qu'on voit des différences significatives dans l'évolution de leur répartition par niveaux, nous retiendrons l'ensemble des procédures minoritaires erronées et les deux procédures correctes 7EQU et 7PRO (éventuellement regroupées) dans notre étude de la répartition des procédures.

5.1.4 Les procédures obtenues dans les variantes à l'exercice 7: stabilité et différences.

Dans cette étude, nous comparons les procédures des étudiants des classes concernées (qui ont abordé l'exercice 7). De plus, nous avons été amenée à regrouper les procédures 7 DEC, 7 EQU et 7 PRO d'une part, 7 PSC, 7 PSO et 7 PLI d'autre part, et enfin les procédures "minoritaires" erronées étudiées au paragraphe précédent.
Nous n'avons pas tenu compte pour la comparaison des procédures non terminées inclassable(1)
a) Il n'y a pas de variantes où l'énoncé ne subit aucun changement jusqu'à l'exercice 7 compris. Par contre, dans V_4, seules les questions 1) et 2) sont modifiées jusqu'à l'exercice 7 compris.
Voici la répartition des procédures obtenues dans les classes concernées par (V_1,V_4) :

Procédures (Copies S) Variante	7 DEF définition sans change	corrects 7 PRC + 7 DEC + 7 EQU	Procédures algébriques 7PSC + 7PSO + 7PLI	Procédures minoritaires erronées	Total partiel	Non abordés
V_1	6	5	20	9	40	9
V_4	10	4	12	6	32	5
Total	16	9	32	15	72	

(1) Le total partiel des procédures par variantes peut ainsi être inférieur au total des abordés par variantes, mais aussi lui être supérieur si certaines procédures relèvent des deux catégories.

χ^2=2,874 (v=3) ; donc pas de changement significatif.
Dans V_8,V_9,V_{10} et V_{11}, les seuls changements concernant l'exercice 7 qui interviennent sont des changements dans l'ordre respectif des exercices.
Dans V_8, l'exercice 7 est posé en question10.Voici ce que l'on obtient:

Procédures (Copies S) Variante	définition 7 DEF sans changem. de stratégie	Correctes 7 DEC +7EQU +7PRO	Procédures algébriques 7PSC+7PSO+7PLI	Procédures minoritaires erronées	Total partiel	Non abordés
V_1	13	11	11	9	44	7
V_8	16	7	9	10	42	14
Total	29	18	20	19	86	

On obtient χ^2=1,399 (v=3): aucun changement dans les répartitions. Toutefois, il y a moins d'étudiants ayant abordé l'exercice dans V_8.
Dans V_9, l'exercice 7 est posé en dernier. Voici ce que l'on obtient:

Procédures (Copies S) Variante	définition 7 DEF sans changt de stratégie	correctes 7 DEC +7PRO +7EQU	Procédures algébriques 7PSC+7PSO+7PLI	Procédures minoritaires erronées	Total partiel	Non abordés
V_1	10	15	28	17	70	10
V_9	19	13	23	14	69	26
Total	29	28	51	31	139	

χ^2=3,702 (v=3): pas de changement significatif. Cependant, il y a moins d'étudiants ayant abordé l'exercice dans V_9, ce qui est facilement interprétable: l'exercice est en dernier.
Dans V_{10}, c'est tout de suite après les questions 1), 2), 3), 4) qu'est posé l'exercice 7.
On obtient les répartitions suivantes (on regroupe les deux premières colonnes):

Procédures (Copies S) Variante	Procédures correctes 7DEF+7DEC+7EQU+7PRO	Procédures algébriques 7PSC+7PSO+7PLI	Procédures minoritaires erronées	Total partiel	Non abordés
V_1	13	18	19	50	4
V_{10}	9	23	10	42	11
Total	22	41	29	92	

χ^2= 3,425 (v=2): pas de changement significatif.

Enfin, dans V_{11}, l'exercice est posé en troisième question (après l'exercice 9), et les questions 1), 2), 3), 4) sont, elles, posées à la fin du texte.

Procédures (copies S) Variante	définition sans 7 DEF changt de stratégie	Correctes 7DEC +7PRO +7EQU	Procédures algébriques 7PSC+7PSO+7PLI	Procédures minoritaires erronées	Total partiel	Non abordés
V_1	13	49	8	13	83	8
V_{11}	8	29	10	7	54	4
Total	21	78	18	20	137	

$\chi^2=2,299$ (v=3). Les deux répartitions ne sont pas significativement différentes.

En résumé, mis à part le fait que moins d'étudiants abordent l'exercice lorsqu'il est posé en dernier ou "plus tard" dans le texte, aucun changement significatif dans la répartition des procédures n'intervient par suite des changements d'ordre envisagés ici.

b) Le changement de vocabulaire: la variante V_2.

Voici la répartition des procédures dans les classes concernées par (V_1,V_2):

Procédures (copies S) variante	7 DEF définition sans chang!	corrects 7 DEC + 7 EQU + 7 PRO	Procédures algébriques 7PSC + 7PSO + 7PLI	Procédures minoritaires erronées	Total partiel	Non abordés
V_1	16	24	11	11	62	7
V_2	20	16	12	14	62	7
Total	36	40	23	25	124	

On trouve $\chi^2=2,445$ (v=3).

Les répartitions ne sont donc pas significativement différentes.

c) Le changement de notation: la variante V_3.

Procédures (copies S) variante	7 DEF définition sans chang!	7 DEC + 7 EQU + 7 PRO correctes	Procédures algébriques 7PSC+7PSO+7PLI	Procédures minoritaires erronées	Total partiel	Non abordés
V_1	11	12	22	17	62	9
V_3	7	13	19	13	52	10
Total	18	25	41	30	114	

On obtient $\chi^2=0,810$ (v=3): aucune différence.

d) Le changement dans la tâche.

i) La limite est précisée dans l'énoncé.

Dans la variante V_5, on précise "montrer que (u_n) a une limite nulle".
Voici la répartition des procédures obtenues dans les classes concernées par (V_1,V_5)

Procédures (copies S) variante	7 DEF définition sans chang!	corrects 7 DEC + 7 EQU + 7 PRO	Procédures algébriques 7PSC + 7PSO + 7PLI	Procédures minoritaires erronées	Total partiel	Non abordés
V_1	19	24	12	10	65	9
V_5	5	15	13	11	44	3
Total	24	39	25	21	109	

χ^2=6,507 (v=3). Il n'y a pas de différence significative. Toutefois, il y a plus de procédures 7 DEF, et moins de procédures erronées avec le texte V_1, ce qui est le contraire de ce qu'on pourrait attendre. Ici, la donnée de la limite ne simplifie absolument pas l'exercice; par contre, plus d'étudiants abordent l'exercice -sans que la répartition des procédures en soit affectée.

Dans la variante V_6, on précise "montrer que (u_n) tend vers 0 ".
Voici la répartition des procédures obtenues dans les classes concernées par (V_1, V_6)

Procédures (copies S) Variante	7 DEF définition sans changt	7 DEC + 7 PRO + 7 EQU corrects	7PSO+7PSC+7PLI Procédures algébriques	Procédures erronées minoritaires	Total partiel	Non abordés
V_1	8	26	4	7	45	8
V_6	6	26	13	5	50	3
Total	14	52	17	12	95	

On calcule χ^2=5,242 (v=3).

ii) Au contraire, l'énoncé est encore moins précis que l'énoncé initial, puisque la question est posée sous la forme ouverte suivante :
"Que peut-on dire des procédures obtenues dans les classes concernées par (V_1, V_7) :

Procédures (copies S) Variante	7 DEF + 7 DEC Utilisation de la définition	7 PRO + 7 EQU Un = Un+1 Un ≠ l/n	Procédures erronées (algébriques et minoritaires)	Total partiel	Non abordés
V_1	15	9	7	31	1
V_7	6	11	6	23	0
Total	21	20	13	54	

On obtient χ^2=2,998 (v=2).

En résumé, aucun de ces changements dans la tâche ne provoque de différences dans les répartitions des procédures.

5.2. Les erreurs.

Elles ont des origines diverses et non exclusives.

a) Oubli d'un présupposé d'existence de limite.

Deux des théorèmes en acte -"somme de limite" et "procédure produit"- sont des utilisations erronées de théorèmes justes. Plus précisément, l'hypothèse d'existence d'une limite nécessaire à l'application des théorèmes n'est pas prise en compte. Autrement dit, si on savait que la suite u_n a une limite -mais toute la question est là !- les théorèmes seraient correctement utilisés. Or, si l'existence des limites en cause est explicite dans l'énoncé complet des théorèmes en question, elle est présupposée au contraire dans la formulation résumée qui suit généralement cet énoncé. Or, c'est précisément la "formule" qui est retenue par les

étudiants qui oublient la nécessité d'existence des limites présupposées dans ce qu'ils utilisent.

b). Oubli total ou partiel du caractère variable de n .

* La "procédure scalaire" avec limite $\frac{1}{n}$ en est une bonne illustration -l'oubli signalé en a) intervenant en plus.

Citons ici, pour illustrer ce point que les copies suivantes où n est explicitement considéré comme constant. Qu(est-ce qui varie ?

"$\lim u_1 = 2 \lim u_2 = \ldots = n \lim u_n = 1$ " (copie 4 806).

Et dans une autre, "u_n est égal à nu_n à un facteur près ..." (copie 0501).

Ou encore "n est constant donc le produit de la suite u_n par n ..."

Cette erreur a disparu en maîtrise.

* Le"passage à la limite partiel" relève aussi d'un oubli partiel de la nature de n ; plus précisément, alors que n intervient simultanément dans deux expressions (u_n et $\frac{1}{n}$ par exemple), on ne passe à la limite que dans une des deux (u_n ou $\frac{1}{n}$ suivant les cas), et éventuellement dans l'autre ensuite de manière indépendante. De plus, ce n'est pas systématiquement u_n dont on prend d'abord la limite, ce peut être, suivant les copies, u_n ou $\frac{1}{n}$, pour reprendre notre exemple.

Ce type d'erreurs subsiste en maîtrise.

* La "reconnaissance des formes" procède aussi de l'oubli de la nature de n : on calque la forme de la définition écrite correctement, mais on fait "jouer" le rôle d'une constante à $\frac{1}{n}$.

Cette erreur disparaît en maîtrise. On peut y voir l'oubli une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

c) Les "télescopages".

Le théorème en acte "toute suite bornée est convergente" semble réunir une confusion entre "toute suite convergente est bornée" et "toute suite monotone bornée est convergente".

Ceci disparaît en maîtrise.

d) Sur le traitement des encadrements.

On a relevé deux sortes d'erreurs qui ne sont probablement pas spécifiques aux suites :

La première (le semi-encadrement) consiste à oublier qu'il faut comparer "des deux côtés" pour conclure.

Dans la seconde, qui conduit en général à une "erreur muette", il y a maintient des inégalités strictes dans un passage à la limite qui devrait conduire à des inégalités larges.

Ce type d'erreurs subsiste (ou persiste) en maîtrise .

e) Les erreurs muettes.

Il s'agit là d'erreurs plus "formelles" dans la mesure où elles ne changent pas le déroulement de la procédure ni sa conclusion.-dans cet exercice exclusivement. Ainsi, est-ce le cas pour les étudiants ayant posé $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{n}$ par exemple.

Nous avons étudié la répartition de ces erreurs par niveaux (tableau ci-joint).

Effect. - Pourc.°	
1 - 2%	1er groupe
2 - 4%	
4 - 8%	
11 - 13%	
12 - 27%	2e groupe
9 - 33%	
43 - 54%	
26 30%	3e groupe
11 - 26%	
15 - 28%	
133 - 24%	

Il est amusant de constater la faible part (croissante) de ces erreurs dans le groupe (moins de 13%) et l'évolution inverse dans le groupe où ces erreurs figurent dans 54% des copies de SUP., puis dans 26 à 30% des copies des autres niveaux. Ce sont, en fait, des erreurs qui accompagnent les procédures correctes, et qui diminuent au fur et à mesure du perfectionnement de ces procédures correctes. Le taux d'environ 30% dans les niveaux de SUP. C correspond à un pourcentage intermédiaire de procédures correctes.

Il est indispensable de continuer cette reflexion incomplète par une étude de ce qui dans l'enseignement peut produire ou renforcer ces erreurs. Nous nous sommes

( ) Pourcentage calculé sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice par niveaux.

seulement demandé à ce propos si certains formalismes étaient plus associés que d'autres à la production de certaines erreurs

F) L'erreur "$\lim u_n = \frac{1}{n}$"

Nous avons cherché comment cette erreur, qui manifeste d'un oubli du caractère variable de n (non mutification de la variable), apparaît dans les copies, quelles que soient les procédures qui y ont conduit.

Nous avons trouvé les répartitions suivantes -les expressions entre crochets figurent ou non. L'étude porte sur les copies S.

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{n}$ ([=0])	$\lim u_n \to \frac{1}{n}$	u_n a pour limite $\frac{1}{n}$, ... de limite $\frac{1}{n}$,... la limite est $\frac{1}{n}$.	$1 = \frac{1}{n}$	u_n converge vers $\frac{1}{n}$	u_n tend vers $\frac{1}{n}$ (quand $n \to \infty$)	$u_n \to \frac{1}{n}$ quand $n \to \infty$
97	1	8	9	2	8	9

Ce tableau fait apparaître que l'oubli de la mutification n'est pas liée -au moment de la production de l'erreur- au formalisme puisque le "$n \to \infty$" figure la plupart du temps. Il se peut que les étudiants n'accordent pas de sens à cette expression "$n \to \infty$" qu'ils écrivent automatiquement, et qu'initialement des formalismes où la variable n'est pas mutifiée, comme la "suite (u_n)", aient joué un rôle dans une mise en place erronée de la conception de n dans la convergence. Le tableau souligne aussi la relation privilégiée entre le formalisme algébrique "lim" et la production de l'erreur. On a d'autre part constaté qu'une bonne partie des procédures conduisant à cette erreur était algébrique. Il y a peut-être là aussi"une reponsabilité" dûe à ce type de formalisme; en effet, ces signifiants ont déjà été utilisés et pourraient être associés à leurs anciennes significations correspondant à des pratiques bien acquises sans que le remplacement par les signifiés "actuels" différents n'arrive à se faire. Il y a là des hypothèses sur lesquelles de nouvelles recherches beaucoup plus précises pourraient se construire.

Cette étude des erreurs sera reprise dans le chapitre 8 globalement, et complétée par l'analyse de l'ordre dans lequel les types d'erreurs qui se sont dégagés "disparaissent".

5.3. Etude de la répartition des procédures, par modèles exprimés et par niveaux. Les performances.

Dans chaque cas, nous avons étudié ces répartitions sur deux tableaux -le tableau détaillé et le tableau résumé où nous avons regroupé d'une part les procédures algébriques erronées (en indiquant la part des procédures scalaires parmi elles), les procédures minoritaires erronées, les procédures correctes -regroupant les procédures minoritaires correctes (7 EQU, 7 PRO) et les procédures utilisant la définition en (ε,N)- (en indiquant la part des procédures minoritaires et des procédures 7 DEF) et les copies sans modèles exprimés d'autre part (dans la répartition par modèles exprimés). Nous avons rangé les procédures "7 DEF" qui sont pourtant associées à de nombreuses erreurs dans les procédures correctes dans la mesure où la conduite de la démonstration a comme point de départ une procédure qui peut être correcte. Nous distinguerons donc à chaque fois la "part" de ces procédures, des procédures 7 DEC et des procédures correctes minoritaires (7 EQU et 7 PRO) en recherchant éventuellement des relations privilégiées encore plus détaillées mises en évidence par le tableau détaillé justement.

Enfin, dans la mesure où nos types de procédures ne sont pas tout-à-fait disjonctifs comme nous l'avons déjà signalé, nous calculons les pourcentages dans chaque ligne sur le total de la ligne (qui correspond au total des abordés de la ligne).

5.3.1. Répartition des procédures à l'exercice 7 par modèle exprimé (Tableaux V_4 et V_5)

On distingue deux groupes de modèles qui s'opposent, mais les contrastes sont moins accentués que pour l'exercice 5, et il y a plus d'intermédiaires.
Dans le premier groupe, les procédures "correctes" (y compris 7 DEF) sont utilisées par plus de la moitié des étudiants ayant exprimé le modèle -il s'agit des modèles

PROCEDURES x MODELES EXPRIMES à l'exercice 7. Corpus N ($\mathbb{N}_4$)

Procédures à l'exercice 7 / Modèles exprimés	7 DEF	7 DEC	7 EQU	7 PRO	7 PSC	7 PSO	7 PLI	7 CAU	7 DVG	7 EGA	7 SSR	7 ETO	7 PEG	7 NAB	Total Modèle
PRIMITIF	5	4	1	0	3	9	12	2	0	4	5	2	4	14	56
TEND VERS	4	1	4	2	3	5	3	2	1	3	3	1	0	9	46
DYNAMIQUE MONOTONE	3	3	0	0	1	1	4	1	2	3	0	0	0	2	20
PAS DE MODELE EXPRIME	4	4	7	1	0	2	4	0	3	2	1	2	2	4	38
TAUTOLOGIE	4	1	0	0	0	4	1	0	1	1	1	0	0	3	18
DEFINITION	1	1	1	0	1	1	2	0	0	2	0	0	0	0	10
DYNAMIQUE	45	45	15	16	9	29	19	4	7	3	13	5	4	22	231
PRESTATIQUE	11	11	2	2	1	9	9	0	1	1	6	2	1	3	54
MIXTE	18	34	8	3	3	7	10	1	5	1	5	0	2	11	114
STATIQUE	9	13	2	4	0	2	1	0	3	0	2	0	0	2	41
NON ABORDE	2	11	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0	1	14	34
Totaux	106	128	40	28	21	69	65	11	24	20	38	12	14	94	662

PROCEDURES x MODELES EXPRIMES à l'exercice 7. Tableau résumé V_5 Corpus N

Procédures à l'exercice 7 / Modèles exprimés	Procédures correctes 7 DEF + 7 DEC + 7 EQU + 7 PRO	Procédures algébriques 7 PSO + 7 PSC	7 PLI	Procédures minoritaires erronées	Total
PRIMITIF	10 - 20%	12 - 23,5%	12-23,5%	17 - 33%	51.
TEND VERS	11 - 34%	8 - 25 %	3-9%	10. - 31 %	32
DYNAMIQUE MONOTONE	6 - 33%	2 - 11 %	4-22%	6 - 33 %	18
PAS DE MODELE EXPRIME	24 - 44%	8 - 15 %	7-13%	15 - 28 %	54
DYNAMIQUE	121 - 56 %	38 - 18 %	19-9%	36 - 17 %	214
PRESTATIQUE	26 - 46 %	10 - 18%	9-16%	11 - 20%	56
MIXTE	63 - 65 %	10 - 10%	10-10%	14 - 14%	97
STATIQUE	28 - 78 %	2 - 6 %	1-3%	5 - 14%	36
NON ABORDE	13 - 72%	0	0	5 - 28%	18
TOTAL	302 - 52%	90	65	119	576

Les pourcentages indiqués sont les pourcentages lignes calculés sur le total de la ligne.

Ce total peut être supérieur au total des abordés par modèles au cas où une procédure relève de deux types de procédures; il peut être inférieur à ce total au cas où des procédures non terminées n'ont pas été retenues.

statique, mixte, dynamique, et à la limite, préstatique. Plus précisément, le modèle statique est associé à 78% de procédures correctes- et c'est le "meilleur" ... avec-relativement aux autres modèles de ce groupe-plus de procédures 7 PRC et 7 DEC. Il n'y a aucune procédure 7 PSC,ni 7 EGA, ni 7 PEG.

Il y a 65% des étudiants ayant exprimé un modèle mixte qui ont produit une procédure correcte; ce sont les procédures 7 DEC et dans une moindre mesure, 7 EQU qui sont relativement plus utilisées avec ce modèle qu'avec les autres.

Les procédures algébriques produites par 20% des étudiants ayant exprimé ce modèle sont pratiquement équi-réparties et les autres procédures erronées,qui en concernent 14%, sont surtout 7 DVG (par l'absurde) et 7 PEG; il n'y a aucune confusion entre u_n, et un étudiant sur 114 écrit que $u_n = \frac{1}{n}$ (7 EGA).

De même, 56% des étudiants qui ont exprimé un modèle dynamique ont produit une procédure correcte -mais ce sont les procédures 7PRO , et dans une moindre mesure 7 DEF, qui sont relativement plus utilisées comme procédures correctes avec le modèle dynamique qu'avec les deux modèles précédents, ce qui distingue déjà le modèle dynamique comme moins performant.

Pour ce qui est des procédures algébriques, que 27% des étudiants ayant un modèle dynamique utilisent, ce sont plutôt les procédures scalaires qui apparaissent.

Enfin, les autres procédures erronées qui concernent 17% de ces étudiants se trouvent surtout réparties entre 7 CAU, 7 SSR et 7 ETO.

La procédure 7 EGA est la moins représentée.

Le modèle préstatique présente un peu moins de la moitié de procédures correctes (46%), les autres procédures sont algébriques (34%) -surtout 7 PSO et 7 PLI- ou erronées (20%) -surtout 7 SSR et 7 ETO-.

Ainsi, ces quatre modèles, bien que plus associés à des procédures correctes ne se ressemblent pas complètement. On peut caractériser leurs différences en remarquant que la moitié (au moins) des procédures des étudiants ayant exprimé des modèles mixte ou statique sont des procédures 7 DEC, 7 EQU ou 7 PRO -il faut y rajouter la procédure ambigüe 7 DEF pour reconstituer la moitié des procédures des étudiants ayant exprimé les modèles dynamique et préstatique. Ces deux derniers

modèles sont en fait intermédiaires. On trouve également dans le premier groupe les copies où les questions 1) et 2) n'ont pas été abordées (72% de procédures correctes sur les 18 étudiants concernés). En fait, ce sont les étudiants de maîtrise n'ayant pas abordé, faute de temps, les questions 1) et 2) qui ont écrit ces copies -les autres correspondent aux 16 étudiants n'ayant ni abordé les questions 1) et 2), ni abordé l'exercice 7.

Si nous analysons maintenant l'autre groupe de modèles, pour chacun desquels moins de 34% des procédures utilisées sont correctes (y compris utilisation de 7 DEF), on trouve les modèles primitif, "tend vers", dynamique monotone.

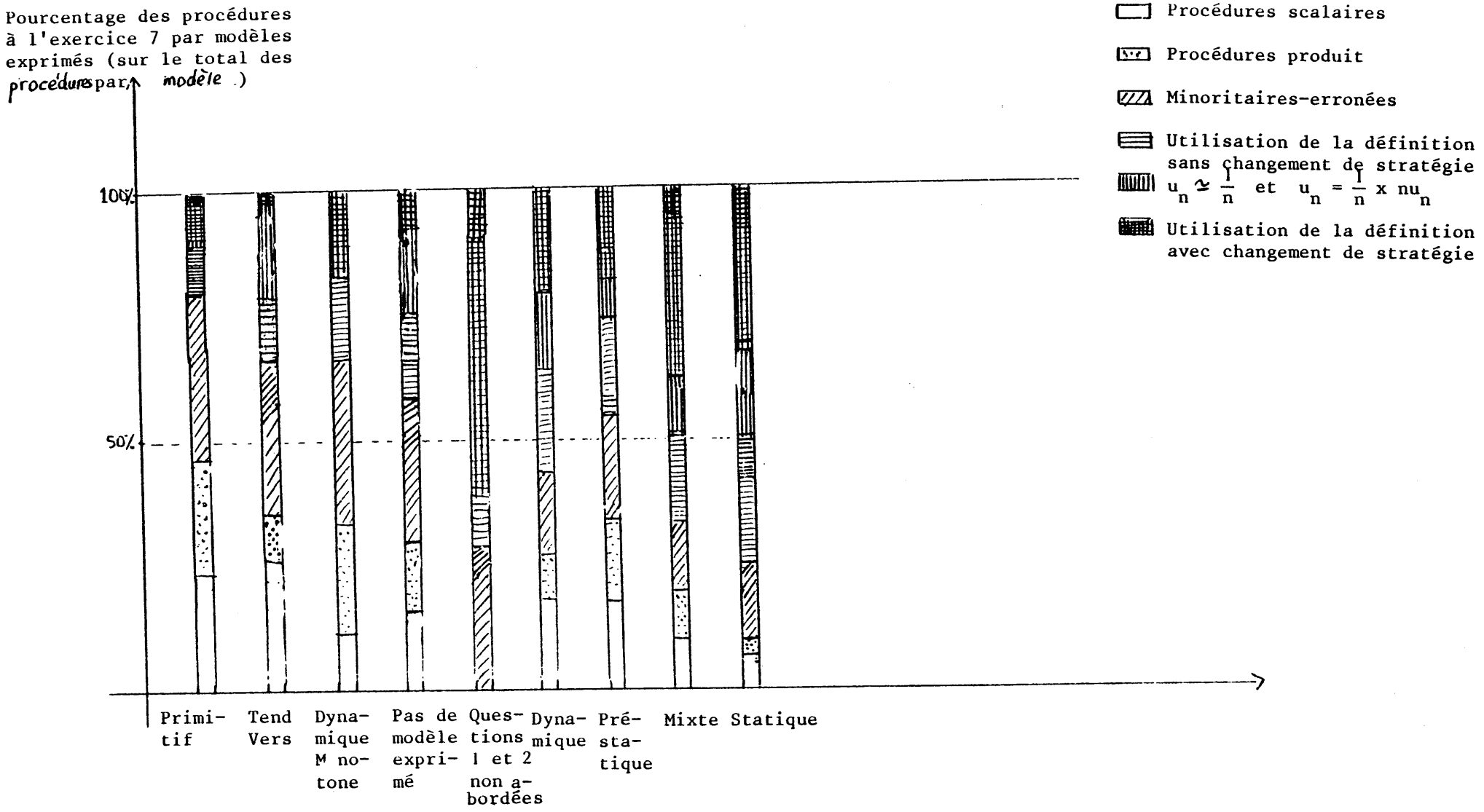
Plus précisément, il n'y a plus que 20% des étudiants ayant exprimé un modèle primitif et ayant abordé l'exercice qui ont produit une procédure correcte -surtout 7 DEF. Par contre, presque la moitié d'entre eux (47%) utilisent une procédure algébrique (les deux types étant équi-répartis) et 33% d'entre eux une procédure erronée -surtout $u_n = \frac{1}{n}$ (7 EGA), $u_n \simeq \frac{1}{n}$ (7 PEG ou 7 SSR).

Les modèle dynamique monotone et "tend vers" ont le même type de répartition que le précédent modèle -avec plus de procédures correctes (33% et 34% respectivement), plus de procédures scalaires (surtout 7 PSC relativement) avec le modèle "tend vers",et plus de procédures produit (7 PLI) avec le modèle dynamique monotone.

Par ailleurs, les différences entre ces trois modèles portent surtout sur l'utilisation des procédures minoritaires correctes. C'est particulièrement net pour le modèle "tend vers" et les procédures 7 EQU (utilisées par 12,5% de "ces" étudiants) sans qu'on puisse dégager de régularités sur les autres variations des répartitions. Enfin, les copies sans modèles exprimés ont un profil encore un peu différent avec 44% de procédures correctes (parmi ceux qui ont abordé l'exercice) et à peu près autant de procédures algébriques -équi-réparties- que de procédures erronées, ce qui donne un profil proche de celui des copies où est exprimé un modèle préstatique -sauf pour les procédures 7 DEC.

Si on lit nos tableaux dans l'autre sens en s'intéressant à chaque groupe de

(P.M.V) **PROCEDURES x MODELES EXPRIMES** Exercice 7 Corpus N



procédures, il apparaît que la part des procédures "7 DEF" (en (ε,N) sans changement de stratégie) varie assez peu -en particulier, ce n'est pas un facteur d'opposition des deux groupes de modèles. Par contre, ce sont les procédures 7 DEC et les procédures algébriques erronées et minoritaires erronées qui présentent les plus grandes variations dans des sens opposés déjà évoqués, avec seulement des procédures minoritaires 7 EGA, 7 PEG, 7 ETO pour les autres.

En résumé, les modèles "mixte" et"statique" se caractérisent par leur association aux procédures correctes en (ε,N) avec changement de stratégie, et aux procédures minoritaires correctes qui figurent dans plus de la moitié des copies correspondantes.

Les modèles "primitif" , "tend vers" , "dynamique monotone" se caractérisent par leur association -opposée à la précédente- aux procédures algébriques erronées et minoritaires erronées qui figurent dans plus de la moitié des copies correspondantes.

Les modèles "dynamique" et "préstatique" s'avèrent intermédiaires et la procédure en (ε,N) sans changement de stratégie elle aussi se trouve dans des proportions assez constantes dans toutes les copies.

Ces résultats figurent sur la courbe en bâtons (P.M. V) ci-jointe.

5.3.2. Répartition des procédures par niveaux. (Tableau V6)

Les groupes un et trois s'opposent, là encore, mais des évolutions apparaissent au sein de chaque groupe.

Dans le groupe un, il n'y a pas plus de 30% de procédures correctes par niveaux (y compris 7 DEF). Les procédures erronées (algébriques et minoritaires -surtout 7 EGA, 7 PEG, 7 ETD et 7 SSR) évoluent dans le sens d'une diminution relative des procédures algébriques, parmi lesquelles les procédures scalaires restent majoritaires, et d'une augmentation relative des autres procédures erronées. Les confusions suites/séries en DEUG 2 représentent 45% des procédures erronées rencontrées dans ce niveau, les "étourderies" ($u_n = nu_n$) 37% des procédures erronées rencontrées en DEUG 1 trois mois après le cours ... Mais, globalement, on ne peut pas affirmer que ces procédures erronées ont diminué de façon déterminante.

Les procédures 7 DEF sont largement majoritaires parmi les procédures en (ε,N) à partir du DEUG un mois après le cours. Cependant, en DEUG 2, les procédures correctes (y compris 7 DEF) atteignent 30% des copies, grâce à une augmentation relative de la part des procédures 7 DEC (procédure en (ε,N) avec changement de stratégie). On ne peut rien dire des procédures minoritaires correctes.

Dans le groupe trois, il n'y a pas plus de 28% de procédures erronées par niveaux; de plus, ce pourcentage baisse à 12% en maîtrise; et cette baisse est dûe à une diminution des procédures algébriques avec une diminution simultanée de la part des procédures scalaires parmi elles -toujours inférieure à 60%- et à une diminution des autres procédures erronées minoritaires qui ne sont d'ailleurs pas les mêmes que dans le groupe un -essentiellement 7 SSR-.

Parmi les procédures correctes, la part des procédures 7 DEF varie peu dans chaque niveau, bien que ces procédures ne représentent plus que 20% des procédures en (ε,N) en maîtrise, contre 40% au moins avant.

Par contre, il y a augmentation des procédures minoritaires correctes (d'abord les deux, puis seulement 7 EQU avec disparition de 7 PRO) et en maîtrise augmentation des procédures 7 DEC.

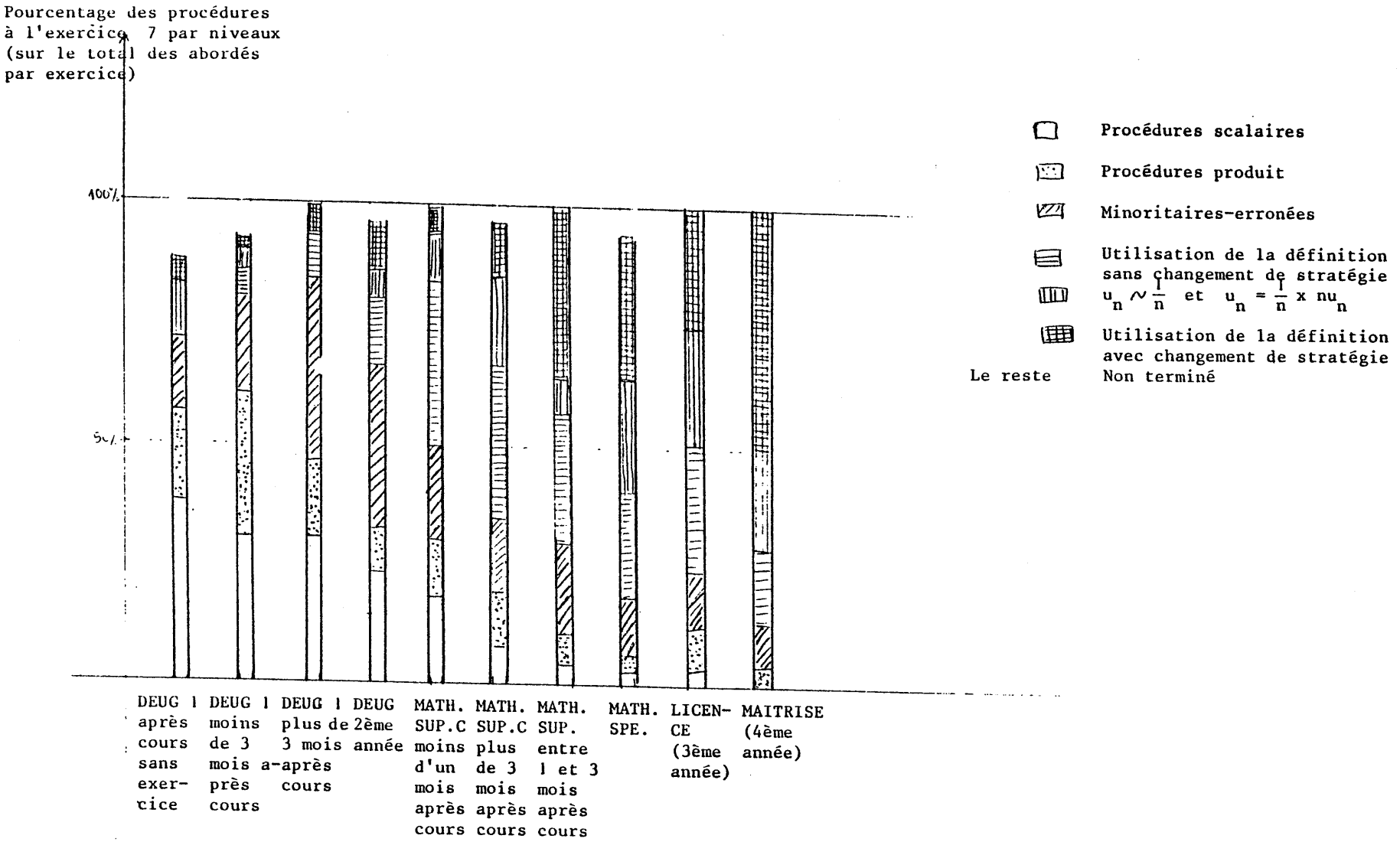
Enfin, le groupe deux dénote des profils intermédiaires -avec une évolution entre les deux niveaux. Le premier niveau de Sup. C est "meilleur que tous les niveaux de DEUG (50% de procédures correctes). Le second niveau, plus de trois mois après le cours, se distingue du premier par la baisse de toutes les procédures erronées (avec passage du pourcentage des procédures scalaires parmi les procédures algébriques de 61% à 40%) et par l'augmentation des procédures 7 DEC et de la procédure minoritaire correcte 7 PRO. Les procédures correctes représentent avec 7 DEF 62% des procédures utilisées dans ce niveau qui se rapproche ainsi sans l'atteindre des niveaux du groupe trois. Tout se passe comme si le "progrès" passait par la baisse des procédures algébriques et l'augmentation des procédures 7 DEC et 7 PRO.

Répartition des procédures par niveaux. Exercice 7 (Corpus N) Tableau V6

Procédure à l'exercice 7 / Niveau	Traduction de la définition en (ε,N) 7DEF	7DEC	Procédures minoritaires erronées	Equivalents ou produits justes 7PRO + 7EQU	Procédures algébriques (dont pourcentage de procédures scalaires parmi elles) 7PLI + 7SO + 7PSC	
DEUG 1 après le cours sans exercices	0	2 4%	9 17%	5 9%	30 56%	(67%)
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	3 5%	1 2%	11 20%	2 - 4%	34 61%	(50%)
DEUG 1 plus (*) de 3 mois après le cours	8 16%	2 4%	19 38%	3 - 6%	23 46%	(69%)
DEUG 2ème année	12 14%	9 10%	31 36%	5 6%	29 33%	(72%)
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	15 34%	5 11%	9 20%	2 5%	13 29%	(61%)
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	8 31%	5 19%	4 15%	3 12%	5 19%	(40%)
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	22 25%	36 40%	16 18%	6 7%	9 10%	(33%)
MATH. SPE.	19 22%	28 32%	11 12%	21 24%	5 6%	(60%)
LICENCE (3ème année)	11 26%	10 24%	5 12%	10 24%	5 12%	(20%)
MAITRISE (4ème année)	8 15%	30 57%	4 8%	11 21%	2 4%	(0)
TOTAL	106	128	119	68	155	

Les pourcentages sont calculés par niveaux sur le total des étudiants de la ligne ayant abordé l'exercice.

( ) Dans ce niveau, quelques procédures ont été comptées deux fois, ce qui explique qu'on arrive à un total supérieur au total des abordés du niveau.


Pourcentage des procédures à l'exercice 7 par niveaux (sur le total des abordés par exercice)
100%
50%
Procédures scalaires
Procédures produit
Minoritaires-erronées
Utilisation de la définition sans changement de stratégie $u_n \sim \frac{1}{n}$ et $u_n = \frac{1}{n} \times nu_n$
Utilisation de la définition avec changement de stratégie
Le reste
Non terminé
DEUG 1 après cours sans exercice
DEUG 1 moins de 3 mois après cours
DEUG 1 plus de 3 mois après cours
DEUG 2ème année
MATH. SUP.C moins d'un mois après cours
MATH. SUP.C plus de 3 mois après cours
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après cours
MATH. SPE.
LICENCE (3ème année)
MAITRISE (4ème année)

En résumé, en DEUG, l'exercice 7 n'est pas réussi par plus de 30% des étudiants, alors que dans le groupe trois la moitié des étudiants au moins donne une procédure correcte (à l'exclusion de 7 DEF). Ces deux groupes présentent des profils opposés non comparables.

Ces résultats apparaissent sur la courbe en bâton ci-jointe (P.N V).

5.3.3. Evaluation et "performances".

Nous nous sommes posé, au cours du codage des copies, le problème de l'évaluation des réponses à l'exercice 7. Il est clair, là encore, que sans choix préalable, il ne peut y avoir de frontière nette entre les démonstrations justes ou trop rapides, insuffisantes ou non satisfaisantes. Nous nous sommes déjà expliquée sur ce point dans le chapitre 4. Nous indiquons donc rapidement comment nous avons évalué les copies en ce qui concerne l'exercice 7 sans utiliser—en dehors des analyses factorielles—ces performances.

Nous avons attribué les qualificatifs "justes", "faux", aux copies de la manière suivante :

+ "faux" est attribué aux copies où l'exercice 7 est terminé et présente un résultat exact précédé d'une démonstration fausse ou un résultat faux. Ainsi, les copies présentant les procédures incorrectes minoritaires sont-elles mises dans ce groupe, ainsi que celles où on a diagnostiqué une reconnaissance des formes, un semi-encadrement, une procédure algébrique erronée.

+ "juste" est attribué aux copies où l'exercice 7 est terminé, et présente un résultat exact précédé d'une démonstration exacte -même si elle est jugée éventuellement trop rapide ou trop compliquée. Ainsi, les procédures 7 DEC, 7 PR , 7 EQU, une partie des procédures 7 DEF sont-elles mises dans ce groupe. Elles peuvent présenter des erreurs "muettes", ou l'application des théorèmes en acte "limite partielle" "somme de limites" , ou bien encore d'une démonstration insuffisante -ainsi que les copies où figure "$\left|u_n - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{n} \Rightarrow$

u_n converge vers 0" sont dans cette catégorie- (qui comprend donc la catégorie précédente).

+ Les copies sans démonstration sont ici considérées comme non terminées.

+ Par ailleurs, nous avons attribué un "sans erreurs" aux copies ne présentant pas d'erreurs. Cela nous permet de "recouper" les évaluations précédentes dans les analyses factorielles.

5.4. Comparaison des exercices 5 et 7 (Tableau V_3)

Le tableau croisant les procédures aux exercices 5 et 7 révèle que, si 82% des étudiants ayant produit une procédure correcte à l'exercice 5 et ayant abordé l'exercice 7 ont aussi proposé une procédure correcte à l'exercice 7, par contre, il n'y a que 39% des étudiants qui ont produit une procédure correcte à l'exercice 7 et abordé l'exercice 5 qui en ont donné une justification correcte, les autres se répartissent en 17% de réponses justes sans démonstration, 14% de réponses fausses sans démonstration, 21% de réponses ambigües et 6% de réponses erronées. Or, la répartition globale correspondante[1] est de 25%, 17%, 33%, 19% et 8%: cela indique simplement que ces étudiants-là[2] fournissent plus de réponses correctes que l'ensemble, sans que la tendance soit massive. On constate donc que si un étudiant réussit l'exercice 5, c'est qu'il avait réussi (à 80%) à l'exercice 7, la réciproque n'étant pas vérifiée du tout. Autrement dit, la réussite à la tâche de l'exercice 5 est acquise après celle de l'exercice 7; on peut très bien manipuler correctement la définition en (ε,N) sans pour autant avoir une représentation suffisante de la convergence des suites pour réussir à l'exercice 5. Cela nous semble très important, d'autant plus que nous montrerons que le "meilleur" modèle est celui qui correspond à l'intériorisation de cette définition en (ε,N) . Cela pourrait suggérer que cette intériorisation ne se fait pas seulement à travers la manipulation "abstraite" et donc renforcer l'idée de la nécessité d'un travail explicite sur les images mentales. Regardons de plus près. On constate les répartitions suivantes : (les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant produit une procédure correcte à l'exercice 7 et la procédure indiqu en colonne).

Exercice 5 / Exercice 7	Procédures correctes à l'exercice 5	Total des procéd. à l'exer. 5	5 CEX contre-exemple	5 JSD juste sans démonstrat.	Procédures ambigües à l'exercice 5	5 FSD Faux sans démonstration
7 DEF définition	25%	34%	26%	34%	31%	48%
7 DEC définition	50%	43%	54%	50%	39%	29%
7 PRO produit	14%	13%	11%	10%	16%	21%
7 EQU équivalent	11%	9%	9%	8%	15%	2%
Total des procédures correctes 7	100%	100%	100%	100%	100%	100%

(1) Calculée sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice 5.
(2) Ceux qui ont produit une procédure correcte à l'exercice 7.

Exo 5 x Exo 7 (Tableau V7) (Corpus N)

Exo 7 \ Exo 5	Non abordé	Procédures correctes	dont 5 CEX contre-exemple correct	5 JSD juste sans démonstration	Procédures ambigües	dont 5 RAN suite ↑∿→	FSD Faux sans démonstr.	Procédures erronées autres	NTE non terminé	Total	Total abordé
Non abordé	7	13	5	12	8	4	29	4	0	74	
Procédures correctes	6	116	76	50	62	37	42	17	3	302	296
dont 7 DEF	5	29	20	17	19	14	20	12	3	106	101
7 DEC	1	58	41	25	24	14	12	2	0	128	127
7 EQU	0	16	8	5	10	3	9	1	0	40	40
7 PRO	0	13	7	3	9	6	1	2	0	28	28
Procédures algébriques	4	7	4	24	26	13	73	14	2	155	151
dont Procédures scalaires	3	3	2	16	17	9	40	7	1	90	87
Procédures produit	1	4	2	8	9	4	33	7	1	65	64
Procédures erronées minoritaires	1	10	4	18	20	7	52	10	1	113	117
Procédures erronées	5	17	8	42	46	20	129	24	3	274	268
NTE	1	9	7	9	8	4	23	7	1	61	60
FOR	3	61	37	19	24	20	18	9	2	141	138
Total	19	154	94	102	118	60	200	47	6		
Total abordé		141	89	90	110	52	171	43	6		

Détail des procédures erronées minoritaires

Exo 7 \ Exo 5	Procédures correctes	JSD juste sans d.	Procédures ambigües	FSD Faux sans d.	Autres erreurs	Total
CAU Cauchy	2	1	4	2	0	9
DVG absurde	3	3	5	6	5	22
EGA $u_n = \frac{1}{n}$	1	1	0	14	1	17
SSR suites/séries	1	11	10	13	2	37
ETO $n u_n = u_n$	2	1	0	8	1	12
PEG $u_n \geq \frac{1}{n}$	1	1	1	9	1	13
Total	10	18	20	22	10	110

Il s'avère donc qu'il y a une différenciation entre les diverses procédures correctes à l'exercice 7 dans leur association aux procédures à l'exercice 5. On trouve que la procédure 7 DEC est la plus associée aux meilleures procédures (5 CEX en particulier), ainsi que la procédure 7 EQU; corrélativement, ces procédures sont fort peu associées à des procédures FSD. Par contre, les procédures 7 DEF et 7 PRO sont plus associées à ces dernières et moins associées -essentiellement en ce qui concerne 7 DEF- aux procédures correctes. Nous avions constaté que cette procédure,qui utilise la définition sans changement de stratégie,était plus associée à des erreurs que les autres -il y en a là une confirmation; nous pouvons ajouter que la procédure 7 PRO (correcte mais non généralisable,plus particulière) s'avère aussi moins "bonne", ce que nous ne pouvions pas prévoir à priori.

Si nous analysons maintenant les procédures sans démonstration et les procédures ambigües à l'exercice 5, nous constatons que la répartition des procédures justes sans démonstration et ambigües est la même: elles sont associées à plus de 50% de procédures correctes (56%) et entre 40 et 50% de procédures erronées; de plus, au sein des procédures erronées (algébriques ou minoritaires) la répartition est aussi identique. Il y a là une tendance suffisamment forte pour suggérer qu'effectivement un grand nombre de raisonnements sous-tendant la réponse juste sans démonstration serait du type ambigü. Par contre, si on regarde la répartition des procédures ambigües et justes sans démonstration entre les diverses procédures correctes à l'exercice 7, on constate qu'elle diffère -en particulier il y a plus de procédures 7 DEC associées à 5 JSD qu'aux procédures ambigües. Il y a là l'indice de ce que les raisonnements implicites sous-tendant ces réponses sans justification seraient peut-être corrects s'ils proviennent de copies où figure 7 DEC.

Enfin, la répartition des procédures 5 FSD (fausses sans démonstration) accuse le profil inverse: ces réponses sont associées à 25% de procédures correctes (dont la moitié de 7 DEF), et à 75% de procédures erronées (dont 57% de procédures algébriques, réparties en un peu plus de la moitié de type scalaire et le reste du type produit). Ces réponses fausses ne doivent pas être le résultat

d'un "pile ou face", mais bien le résultat d'une image fausse, allant de pair avec la production de procédures insuffisantes ou erronées. Les autres procédures erronées sont associées à 40% de procédures correctes (dont 71% de 7DEF !) et 56% de procédures erronées (dont 58% de procédures algébriques, équiréparties entre celles de type scalaire et celles de type produit).

Si on analyse le détail de la répartition des procédures minoritaires erronées, on constate une opposition entre les procédures 7 PEG, 7 ETO, 7EGA d'une part, associées à 75% au moins de procédures FSD ou erronées, les procédures 7 SSR et 7 DVG qui sont associées à 40% et 50% de procédures FSD ou erronées, 27% et 23% de procédures ambigües et 30% et 14% de procédures JSD, et enfin la procédure 7 CAU (qui pourrait d'ailleurs être exacte) associée à 22% seulement de procédures FSD ou erronées, 44% d'ambigües, 11% de procédures JSD et 22% de procédures JSD. Les trois premières se confirment donc, et nous pouvions le prévoir, comme les "plus" erronées.

L'ensemble de cette étude permet de dégager deux types de conclusions: d'une part, la différence entre les tâches de l'exercice 5 et de l'exercice 7 -cette dernière apparaissant plus "facile" que la première-; d'autre part, la cohérence remarquable dans les copies, cohérence qui "respecte" même la catégorisation fine au sein des procédures erronées ou correctes que nous avions esquissé et qui se trouve du même coup confirmée.

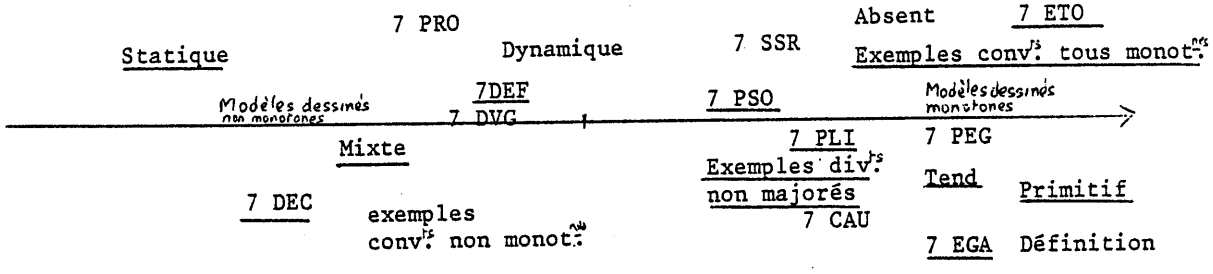
Il apparaît en effet que les réponses sans démonstration à l'exercice 5 ne sont pas aléatoires, au moins pour la majorité d'entre elles; les procédures minoritaires erronées à l'exercice 7 ne sont pas associées aux mêmes types de procédures à l'exercice 5, et les "plus erronées" sont 7 ETO, 7 PEG et 7 EGA; enfin, la procédure 7 DEF (utilisation de la définition en (ε,N) sans changement de stratégie et avec toute la gamme d'erreurs possibles) est bel et bien associée à de moins bonnes procédures à l'exercice 5.

5.5. Les analyses factorielles des tableaux croisant l'exercice 7 et les modèles et les exercices 5 et 7 et les modèles.

La première de ces analyses révèle un premier axe porteur de 39% de l'information, les oppositions ou ressemblances correspondantes sont donc moins importantes que celles que l'analyse factorielle du tableau analogue sur l'exercice 5 mettait en évidence (avec 51% de l'inertie sur le premier axe). Le premier axe est encore un axe "réussite-échec" et il oppose les procédures 7 DEC (utilisation de la définition en (ε,N) avec changement de stratégie), 7 DEF avec une plus petite contribution) et les modèles mixte et statique d'un côté aux modèles primitifs et tend vers" et aux procédures algébriques erronées (7 PLI) et erronées (7 EGA, 7 ETO) de l'autre .

Plus précisément, en tenant compte des bonnes corrélations avec le premier axe, on trouve du côté des modèles mixte et statique, les procédures 7 DEC, 7 DEF, 7 PRO et 7 DVG (procédure minoritaire absente en DEUG), de l'autre côté les procédures erronées 7 PLI, 7 EGA, 7 ETO, 7 ISO, 7 SSR, 7 CAU.
Les points supplémentaires correspondant aux performances (7 JUS et 7 FAU) se projettent de part et d'autre de l'axe (avec des corrélations de 877/1000 et 823/1000), ce qui confirme notre interprétation. Les procédures 7 EQU et 7PSC sont mal corrélées à cet axe.

On peut aussi constater que la procédure 7 PEG ($u_n \simeq \frac{1}{n}$, u_n se comporte comme $\frac{1}{n}$) dont on pouvait se demander, a priori, la nature, se projette du côté des procédures erronées. Nous avions constaté la même chose en croisant les exercices 5 et 7. Voici une représentation de ces projections sur le premier axe[1] -on a aussi placé les modèles; on peut noter que, par rapport à l'analyse sur l'exercice 5, le modèle "Définition" se déplace vers les modèles erronés, ce qui justifie, a postériori, notre décision de le regrouper avec les modèles "absents". Si on pouvait en effet accorder une valeur quelconque de modèle au fait d'écrire la définition, l'effet de ce modèle devrait justement se marquer dans l'exercice 7, or nous voyons le contraire. Il est bien raisonnable de regrouper les copies correspondantes avec celles où ne figure pas de modèle exprimé.



(1) cf. annexe ③ 4.

Quant aux niveaux, ils se placent comme on peut s'y attendre: le groupe un du côté des échecs et le groupe trois de l'autre côté, avec chaque niveau de Sup. C de part et d'autre.

Enfin, on peut faire une remarque sur les commentaires sur la limite relevés dans l'exercice 7 . On a en effet distingué les étudiants qui ne citent pas la limite, ceux qui la citent en même temps qu'ils annoncent la convergence, et ceux dont les discours traduisent une dissociation entre l'affirmation de la convergence et la citation de la limite. Ces "discours" (qui peuvent être d'une demi-ligne, comme dans l'exemple suivant "lim u_n=0 , donc la suite converge et sa limite est zéro") nous semblaient le fait d'étudiants peu assurés et nous avons pu placer les points correspondants en supplémentaire dans l'analyse factorielle pour vérifier cette impression. Il s'avère que précisément les limites citées dissociées (7 LCI) se projettent sur le premier axe -avec les limites non citées- du côté des procédures erronées et des "mauvais" modèles, s'opposant au point "7 LCI" -limite citée qui se projette de l'autre côté. Il y a donc là l'indice d'une gêne dans le langage utilisé qui traduit, peut-être, en fait, une gêne conceptuelle pour nombre d'étudiants.

La deuxième analyse (exercices 5 et 7)[1] révèle un premier axe porteur de 42% de l'information et qui correspond presque intégralement à l'union des premiers axes des deux analyses séparées de chaque exercice. Cela confirme qu'il s'agit bien des mêmes étudiants qui réussissent ou ratent séparément l'exercice 5 et 7. Les procédures qui construisent le premier axe sont en effet 5 CEX et 7 DEC du côté de la réussite, et 5 FSD du côté des échecs -et de façon moins importante 7 PLI, 7 ETO, 7 EGA. Quant aux modèles, on retrouve mixte et statique opposés à primitif et "tend vers".

(1) cf. annexe ⑨ 5.

5.6. Conclusions et interprétations.

a) Nous pouvons constater que les "meilleures" procédures qui, d'ailleurs, s'imposent en maîtrise comme les procédures correctes les plus utilisées, sont bien les procédures "7 DEC" qui utilisent la définition en (ε,N) avec changements de stratégie; les procédures correctes "7 PRO" disparaissent, vraisemblablement parce qu'elles sont plus particulières aux suites réelles (ou complexes).

b) Si on revient sur les oppositions que nous avons constatées entre les modèles et entre les groupes un et trois, il apparaît que ce sont les mêmes oppositions. On peut en déduire l'hypothèse suivante: les facteurs de "progrès", qui caractérisent l'acquisition, pourraient bien être la possibilité de "changer de stratégie" dans la procédure (ε,N) (passage à la procédure 7 DEC), et l'élimination des procédures algébriques erronées et d'un certain nombre de procédures minoritaires erronées (surtout $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n \simeq \frac{1}{n}$) .

c) En ce qui concerne la relation entre les modèles exprimés et les procédures, on retrouve exactement le même type de relations que dans l'exercice 5 -un peu moins accentuées cependant. Les modèles erronés sont là encore associés largement à des procédures erronées, les modèles statique et mixte largement associés à des procédures correctes, et les modèles dynamique et préstatique s'avèrent intermédiaires. Cela souligne le rapport étroit entre l'établissement de ces représentations mentales (dont nous avons des indices par les modèles exprimés), et la possibilité de faire fonctionner correctement la "notion" -la définition en (ε,N) ou les autres théorèmes. Il s'avère de nouveau que les représentations les plus proches de la définition mathématique sont associées aux meilleures procédures.

d) Nous pouvons revenir sur notre interrogation initiale portant sur la comparaison des tâches à l'exercice 5 et à l'exercice 7. Toutes les analyses confirment que si le fait de manipuler correctement la définition en (ε,N) -dans l'exercice

7, en tous cas- n'entraîne pas toujours une réponse correcte à l'exercice 5, la réciproque par contre a lieu. En extrapolant, tout se passe donc comme si une "condition" nécessaire à l'établissement d'une représentation correcte était la maîtrise de la définition, condition non suffisante pour bon nombre d'étudiants. Cela expliquerait en tous cas que les modèles les plus associés aux procédures correctes à l'exercice 5 n'étaient pas tous les modèles non monotones, mais seulement ceux qui traduisent cette maîtrise de la définition. Il y a là un phénomène "à creuser", d'autant plus que ces représentations s'établissent rapidement.

Nous proposons, à titre expérimental, d'associer aux exercices classiques (y compris ceux qui mobilisent la définition) un travail explicite sur les représentations.

2ème partie : l'exercice 9 c)

Cet exercice 9 comporte en réalité trois questions. Voici son texte :

"Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$, pour tout x réel.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur R^+ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2/3 et croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

Nous ne nous sommes intéressée qu'à la dernière question 9 c) qui faisait intervenir des tâches spécifiques aux suites alors que les deux premières questions mobilisaient plutôt des connaissances sur les fonctions. Si cet exercice avait été très largement abordé, nous aurions pu comparer précisément ces diverses connaissances. Dans la mesure où, au contraire, l'exercice est très peu abordé (385 copies S sur 1 253), nous nous sommes contentée d'étudier "cliniquement" la question sur les suites. Sachant que $f_n(u_n) = 0$ (à partir de $n = 2$) et que la suite (u_n) a une limite 1, il s'agissait de montrer que cette limite 1 était la racine positive de l'équation $x^2+x-1=0$.
A cet effet, il y a plusieurs démonstrations possibles.

On peut écrire très simplement :

$$0 < u_n < \frac{2}{3} \Rightarrow \lim u_n^n = \lim u_n^{n-1} = 0,$$

par suite $\lim_{n\to\infty} f_n(u_n) = 0 = 1^2 + 1 - 1$,

et comme 1 est positive, le résultat annoncé est ainsi démontré.

On peut aussi remarquer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, \frac{2}{3}]$ grâce à la majoration suivante: $x^n + x^{n-1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Ceci permet d'écrire

(1) $\forall \varepsilon$, $\exists$ N , $\forall$ n > N $\quad |f_n(u_n) - f(1)| < \varepsilon$ soit $|f(1)| < \varepsilon$,

et d'en déduire le résultat $f(1) = 0$.

En effet, on décompose $|f_n(u_n) - f(1)|$ en introduisant $f(u_n)$:

$|f_n(u_n) - f(1)| \leq |f_n(u_n) - f(u_n)| + |f(u_n) - f(1)|$

La continuité de f en 1 se traduit par

$\forall \varepsilon \ \exists \alpha \ |u_n - 1| < \alpha \Rightarrow |f(u_n) - f(1)| < \varepsilon/2$.

Or, comme 1 est la limite de u_n , à α on associe un rang N_1 tel que si $n > N_1$, $|u_n - 1| < \alpha$.

La convergence uniforme de f_n vers f sur $[0, 2/3]$ permet d'autre part d'écrire : $\forall \varepsilon \ \exists \ N_2$, $\forall$ n > N_2 $\forall$ $u_n \in [0,2/3]$ $|f_n(u_n) - f(u_n)| < \varepsilon/2$;

il est alors clair qu'en associant à ε $N = \sup (N_1, N_2)$, on a obtenu (1).

Enfin, on peut encore démontrer, et c'est une troisième méthode, que la famille (f_n) est équicontinue en 1 grâce à la majoration des dérivées f_n' , et ceci permet d'écrire, d'une autre façon,

(1) $\forall \varepsilon \ \exists$ N , $\forall$ n > N $\quad |f_n(u_n) - f(1)| < \varepsilon$ soit $|f(1)| < \varepsilon$.

En effet, on décompose $f_n(u_n) - f(1)$ en introduisant $f_n(1)$:

$|f_n(u_n) - f(1)| \leq |f_n(u_n) - f_n(1)| + |f_n(1) - f(1)|$.

La convergence simple de f_n en 1 (dont on sait qu'il est inférieur à 2/3) permet d'écrire

$\forall \varepsilon \ \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad |f_n(1) - f(1)| < \varepsilon/2$

et l'équicontinuité des (f_n) en 1 se traduit par

$\forall \varepsilon \ \exists \alpha \quad \forall n \ \forall u_n \quad |u_n - 1| < \alpha \Rightarrow |f_n(u_n) - f_n(1)| < \varepsilon/2$.

Comme (u_n) converge vers 1 , à α on peut associer N_2 tel que $\forall$ n > N_2 $|u_n - 1| < \alpha$; et il est alors clair que $N = \sup (N_1, N_2)$ convient.

Or, pratiquement tous ceux qui sont arrivés à démontrer que $f(1) = 0$ ont choisi la première méthode -les essais correspondant aux deux autres méthodes ont conduit à des procédures erronées.

De plus, ce n'est jamais sur le fait que 1 soit racine positive de l'équation f(1)=0 qu'on a trouvé des erreurs, mais bien sur la démonstration de f(1)=0 à laquelle nous nous intéressons exclusivement.

Enfin, dans ces trois démonstrations, la majoration par une constante " a " inférieure strictement à 1 est indispensable que ce soit 2/3 ou une autre.

Or, dans un certain nombre de variantes, dans la question b), c'est 1 qui était proposé comme majorant. Ceci permet de tester l'initiative des étudiants à "remplacer" le cas échéant 1 par une constante strictement inférieure à 1 ...

Nous verrons à ce propos la différence entre une connaissance mobilisable et une connaissance disponible .

Les autres variantes sont de plusieurs types. Outre les changements de place et de vocabulaire habituels, il y a une variante où aucun majorant explicite n'est proposé en b), et une autre où le texte (plus difficile) suivant est proposé :

7) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note f_n la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$.

a) Montrer que f_n a une unique racine positive u_n .

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge et que sa limite est la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

5.7.0. Présentation de l'étude.

Cette question est donc peu abordée par les étudiants, et peu réussie lorsqu'elle est abordée, comme nous le verrons. Nous avons donc choisi d'en faire une étude clinique en nous basant exclusivement sur le troisième groupe pour ce qui est des répartitions détaillées des procédures. En effet, ce sont les seuls niveaux où au moins la moitié des étudiants ont abordé la question (54% en SUP., 63% en SPE., 47% et 48% en licence et en maîtrise), et où, par conséquent, il y a des effectifs à comparer réellement.

Les démonstrations que nous avons relevées dans les copies mettent en jeu plusieurs stratégies assez différentes. De plus, dans toutes les méthodes, il y a toujours à justifier le fait qu'une expression du type u_n^n ou 1^n ou x^n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et cette justification peut être correcte ou erronée, ceci indépendamment de la stratégie. Nous avons décidé, comme dans l'exercice précédent, de tenir compte en premier lieu de cette stratégie générale qui guide la démonstration, en distinguant ensuite les erreurs rencontrées (sans l'affecter) au sein de chaque méthode. En effet, il s'agit pour nous de déterminer si le choix d'une telle stratégie est aléatoire, et le cas échéant, de trouver des liens avec le modèle exprimé, ceci en relation avec la difficulté de la tâche.

Nous avons classé les raisonnements des étudiants suivant l'expression dont ils étudient la limite. Certains partent de $(u_n^n + u_n^{n-1} + u_n^2 + u_n - 1)$ (raisonnements directs), d'autres de $f_n(1) = 0$ ou de $\lim f_n(1) = 0$ (raisonnements comportant un intermédiaire initial explicite), d'autres utilisent d'abord la convergence de $f_n(x)$ vers $f(x)$ sur un intervalle (raisonnements utilisant une formalisation), d'autres enfin escamotent purement et simplement leurs cheminements (raisonnements elliptiques). Comme les raisonnements elliptiques empruntent leur début et leur fin à des raisonnements des autres types, nous les présenterons de façon dispersée à la suite du raisonnement dont ils sont le plus vraisemblablement l'ellipse. Nous présenterons ainsi cette étude des procédures en trois parties, en joignant à chaque fois l'étude des erreurs occasionnées par chaque stratégie, et en terminant par les raisonnements erronés différents des précédents; puis nous envisagerons les variantes et la répartition des procédures par niveau et par modèle pour le troisième groupe (copies N), avant de conclure.

5.7.1. Les procédures à l'exercice 9 c.

a) Les raisonnements directs - divers cas, erreurs et ellipses (212 copies S).

i) Il s'agit des démonstrations où on cherche la limite des deux membres de l'égalité

(*) $\quad u_n^n + u_n^{n-1} + u_n^2 + u_n - 1 = 0$

Comme nous l'avons déjà évoqué, à moins de 5 exceptions près, c'est le seul raisonnement correct que nous ayons rencontré (lorsqu'il est mené à bien). Il y a en effet 3 copies S qui évoquent, sans vraiment terminer, la convergence uniforme de f_n vers f sur $[0,2/3]$, sur les 135 copies S utilisant ce raisonnement correct (baptisé 9 BIE).

Cela étant, la justification du fait que u_n^n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini est loin d'être toujours correcte.

Ainsi, trouve-t-on, dans 35 copies S,

$u_n < 1 \Rightarrow u_n^n \to 0$, (raisonnement appelé 9 R D 1)

ou même, dans 15 copies S,

$u_n \leqslant 1 \Rightarrow u_n^n \to 0$,

ou bien des inégalités non démontrées comme $u_n < 1 < 1$ en guise de justification ou bien pas de justification du tout (raisonnements appelés 9 RD2).

En outre, dans un certain nombre de copies, on trouve des "explications" du type suivant (cela concerne 27 copies S parmi les 212 copies relevant de cette catégorie):

"Comme u_n^n et u_n^{n-1} tendent vers 0 (avec ou sans justification), la limite de (u_n) est racine de l'équation $x^2+x-1=0$ ..." ou encore

"$u_n^n+u_n^{n-1}+u_n^2+u_n-1 \to 1^2+1-1$, donc 1 est racine de 1^2+1-1 ".

Nous considérons qu'une telle "ellipse" relève de la catégorie étudiée parce que c'est sur u_n^n que porte le seul élément de démonstration qui figure et non x^n ou 1^n . On note une telle procédure 9 EL0 ou 9 EL1 suivant que la justification de $\lim u_n^n=0$ est correcte ou non.

ii) Il existe une déformation de ce raisonnement direct, accompagné ou non d'erreurs sur la démonstration du fait que u_n^n et u_n^{n-1} ont pour limite 0 , qui consiste à faire intervenir de façon intermédiaire (et erronée !) $(u_n^2+u_n-1)$. Ainsi, lorsqu'on cherche la limite des deux membres de l'égalité (*) , on obtient comme limite du premier membre $(u_n^2+u_n-1)$ au lieu de (1^2+1-1) -en "oubliant" que, lorsque l'exposant n tend vers l'infini dans u_n^n , l'indice n de u_n tend "en même temps" vers l'infini. Il y a des présentations différentes de cette déformation, comme l'utilisation d'un signe peu défini $\simeq$ entre $(u_n^n+u_n^{n-1}+u_n-1)$ et $(u_n^2+u_n-1)$. De plus, après avoir obtenu cet intermédiaire $(u_n^2+u_n-1)$ égal à 0 ,certains déduisent que u_n est racine de $u_n^2+u_n-1$ -ce qui est logique en ne considérant que leur dernière équation, mais complètement faux; or, les étudiants concernés ne réalisent pas que ce n'est pas le résultat demandé et pensent avoir démontré ce qu'on leur demandait; d'autres concluent que u_n est racine de $x^2+x-1=0$ sans justification supplémentaire (il y a 14 étudiants S qui concluent d'une façon ou d'une autre que u_n est racine : procédure 9 RS3).
On voit bien, dans ces démonstrations, que ce qui est en cause est la prise en compte simultanée de n variable dans les exposants, dans les indices, et dans u_n considérée comme variable. On a déjà rencontré cette non reconnaissance du caractère variable de n dans des tâches simples chez des étudiants de DEUG -ici la tâche est plus complexe et l'erreur va concerner plus d'étudiants.
Certains étudiants, après avoir obtenu $u_n^2+u_n-1$ comme limite intermédiaire concluent que $(\lim u_n)$ est racine de $(u_n^2+u_n-1=0)$ ou de $(x^2+x-1=0)$ selon les cas (cela concerne 21 étudiants S), toujours sans démonstration supplémentaire (procédure 9 RS0 ou 9RS1 suivant que la justification de $\lim u_n^n=0$ est correcte ou non).
Enfin, 8 étudiants S ayant obtenu $u_n^2+u_n-1$ comme limite intermédiaire explicite terminent leur raisonnement par une justification du type suivant: "par continuité, $u_n^2+u_n-1$ tend vers 1^2+1-1 et comme $f_n(u_n)=0$, $1^2+1-1=0$ (par unicité de la limite)" (procédure 9 RS4). L'unicité de la limite n'est pas nécessairement évoquée. Ce cheminement aurait pu être transformé en une

démonstration juste ... avec un argument de convergence uniforme et en supprimant le caractère de limite de l'intermédiaire $(u_n^2+u_n-1)$.

iii) Comme nous l'avons déjà signalé, ces raisonnements sont ou non accompagnés d'erreurs sur la justification de $\lim u_n^n=0$. Nous avons distingué les deux types d'erreurs suivants : $u_n < 1 \Rightarrow u_n^n \to 0$

et $u_n \leq 1 \Rightarrow u_n^n \to 0$ ou autres, ou non justifiés.

Quelquefois, nous n'avons pas tenu compte cependant de la présence de ces erreurs lorsque les effectifs concernés étaient vraiment trop faibles ou les erreurs de raisonnement vraiment trop grosses !

Voici le résumé de la répartition des raisonnements directs :

Procédures à l'exercice 9c) (copies S)	Ellipses		Juste			Intermédiaire $u_n^2+u_n-1$			
	Sans erreur	Erreur	$u_n<1$	$u_n\leq 1$	Sans justification	$\lim u_n$ racine, bien justifié	$\lim u_n$ racine $u_n<1$ ou autre just.	u_n racine	$u_n^2+u_n-1 \to x^2+x-1$ justifié
Sigle	9 EL0	9 EL1	9 BIE	9RD1	9RD2	9 RS0	9 RS1	9 RS3	9 RS4
Effectifs	9	18	85	35	15	7	21	14	8
Pourcentage des raisonnements erronés sur le total de chaque type de raisonnements		67%		37%			75%		

Globalement, sur les 212 copies S concernées par un des raisonnements précédents et où on a relevé explicitement ce type d'erreurs, 111 justifient mal ou pas que $\lim u_n^n=0$ (soit 52%).

b) Les raisonnements indirects - divers cas, erreurs et ellipses (76 copies S).

i) Le point de départ est l'équation $1^n + 1^{n-1} + 1^2 + 1 - 1 = 0$.

Un certain nombre de copies, en effet,(62 copies S), présentent des démonstrations qui démarrent de cette égalité, éventuellement écrite $f_n(1)=0$. Dans la plupart des copies (43), cette égalité n'est pas justifiée, étant simplement précédée de "on doit avoir ..." ou "on peut écrire ..." ou "on a ..." .

Dans quelques copies (19 copies S), on a cependant trouvé une justification (erronée) du type "comme f_n est continue, $f_n(1)=0$ ...", le raisonnement s'enclanchant alors sur $(1^n+1^{n-1}+1^2+1-1=0)$. Cela renforce notre hypothèse (déjà énoncée) de non-reconnaissance du caractère variable simultanée de n dans ces deux occurences -comme indice et comme exposant . Tout se passe comme si on avait $F(u_n)=0$ d'où $F(1)=0$ (procédure 9 RL4). On devine la suite du raisonnement: comme $1 \leqslant 2/3$ (ou éventuellement $1 < 1$), 1^n et 1^{n-1} tendent vers 0 et donc on obtient $1^2+1-1=0$.

Très peu d'étudiants sont gênés par la coexistence des deux égalités $1^n+1^{n-1}+1^2+1-1=0$ et $1^2+1-1=0$. Toutefois, quelques-uns écrivent des phrases restrictives devant la dernière équation,comme "on obtient uniquement $1^2+1-1=0$ ".

Cela étant, ce raisonnement peut être ou non (procédure 9 RL0) accompagnée des erreurs suivantes:

soit $(1 \leqslant 1)$ entraîne $(\lim 1^n=0)$

soit $(u_n < 1)$ entraîne $(1 < 1)$ et $(\lim 1^n=0)$

ou ne pas être accompagné de justification sur la nullité de $\lim 1^n$.

Ces diverses erreurs figurent dans 19 copies sur les 43 copies S où l'égalité de départ n'est pas justifiée (procédure 9 RL1).

Enfin, on trouve le raisonnement elliptique suivant, qui nous semble correspondre au raisonnement ci-dessus:

"comme u_n tend vers 1 , que 1 est inférieur à 2/3 , 1^n tend vers 0, donc $f(1)=0=1^2+1-1$ car f est continue".

Cela concerne très peu de copies, et pour cette raison, ces copies sont comptées avec les précédentes.

ii) Le point de départ est l'équation $\lim f_n(1)=0$.

Dans certaines copies (14 copies S), on part de l'égalité $\lim f_n(1)=0$, sans y reconnaître nécessairement un intermédiaire. Il y a non-reconnaissance du passage de $\lim f_n(u_n)=0$ à $\lim f_n(1)=0$. Tout se passe comme si, par continuité de f_n , $f_n(u_n)$ avait même limite que $f_n(1)$ ..., ce qui serait vrai si f_n ne dépendait pas précisément de n . Signalons,à ce propos, les copies où figurent les lignes suivantes :

$\lim f(u_n) = \lim f(1) = \lim (1^n+1^{n-1}+1^2+1-1) = 1^2+1-1 = 0$

Le "n" gênant est omis !

La suite du raisonnement est, de nouveau,

$\lim f_n(1) = 0 = 1^2+1-1$ car $\lim 1^n=0$.

Cette procédure est notée 9 RL5.

c) Les raisonnements utilisant la suite de fonctions f_n - divers cas, erreurs et ellipses.

Il s'agit des démonstrations où intervient explicitement la convergence simple de la suite f_n vers f sur un intervalle inclus dans $[0,1]$. Autrement dit, on étudie cette fois-ci la limite de x^n et x^{n-1} lorsque n tend vers l'infini. Ceci concerne 28 copies S et les raisonnements incomplets de ce type concernent 38 copies S.

i) Convergence simple en 1 .

Dasn 7 copies S, on trouve la démonstration suivante:

En premier lieu, $f_n(u_n)$ tend vers $f_n(1)$ par continuité de f_n (oubli de n variable en exposant).

En second lieu, comme $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ sur $[0,1]$, en particulier $f_n(1)$ tend vers $f(1)$; donc comme $f_n(u_n)$ est nul, $f_n(1)$ aussi, et $f(1)$ aussi.

Le "chemin" de cette stratégie est le suivant:

$f_n(u_n) \longrightarrow f_n(\lim u_n) \longrightarrow (\lim f_n)(1)$.

Autrement dit, c'est la nécessité de démontrer une équi continuité des f_n en 1 qui n'est pas perçue, outre le fait que $f_n(1)$ n'est pas conçu comme un intermédiaire de calcul, mais comme une limite (même "provisoire") (procédure 9 RF4).

Dans 5 copies S, on a seulement le cheminement suivant:
$f_n(1)=0$ (sans justification), $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, donc $f_n(1)$ converge vers $f(1)$, donc $f(1)=0$.
Là, comme dans b) i), l'égalité initiale est considérée comme allant de soi, il y a une non-reconnaissance du passage de $f_n(u_n)$ à $f_n(1)$ (procédure 9 RF1).

ii) Convergence simple en u_n.

Dans 5 copies S, on trouve cette démonstration:
comme $f_n(x)$ tend vers $f(x)$, $u_n^n+u_n^{n-1}+u_n^2+u_n-1$ tend vers $u_n^2+u_n-1$ et donc $(\lim u_n)$ est racine de x^2+x-1.
Le "chemin" de cette stratégie est le suivant:
$f_n(u_n) \longrightarrow (\lim f_n)(u_n) \longrightarrow (\lim f_n)(\lim u_n)$
mais le "$f(u_n)$" intermédiaire est présenté comme une limite. Cette fois-ci, c'est le n indice de u_n qui n'est pas pris en compte comme variable en même temps que le n exposant ! De plus, la nécessité de démontrer la convergence uniforme de (f_n) vers f pour le premier intermédiaire n'est pas perçue. Quand au passage de $f(u_n)$ à $f(1)$ il est purement et simplement "escamoté".
Il y a même une copie où l'on s'est arrêté à $f(u_n)$ pour justifier le résultat. (procédure 9 RF3).

iii) Double passage à la limite.

Dans 11 copies S, on a rencontré la démonstration suivante:
Comme $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, $\lim \left[f_n(u_n)\right]=(\lim f_n)(\lim u_n)=f(1)=0$.
Certains écrivent aussi que comme u_n annule f_n, à la limite, $\lim u_n$ annule $\lim f_n$. Là, la prise en compte simultanée de n indice et exposant est

parfaitement réalisée, mais ce sont les finesses d'un double passage à la limite qui ne sont pas perçues. Cette procédure est notée 9 RF2.

iv) Ellipses.

Dans 38 copies S ne figure qu'une partie de l'un des raisonnements précédents, c'est-à-dire qu'on écrit la convergence simple de $f_n(x)$ vers $f(x)$ en justifiant correctement dans 24 copies (procédure 9 EL6) et incorrectement dans les 14 autres (procédure 9 EL2), et qu'on conclut, sans autre forme de démonstration $1^2+1-1=0$.

v) Les erreurs dans la justification de la convergence simple de (f_n) vers f.

Curieusement, les justifications erronées de la convergence simple de (f_n) vers f sur $[0,1]$ ne concernent que les ellipses (cf. iv), et quelques copies utilisant le double passage à la limite. Dans les autres raisonnements, c'est correct. Cela étant, ici, l'égalité $(x < 1)$ suffit à établir la proposition et il n'y a plus le "piège" de la nécessité de coincer un nombre (constant) entre u_n et 1 pour établir le résultat analogue pour u_n^n.

d) Autres raisonnements.

i) Les résultats sans démonstration (ou les copies non terminées).

Ils n'ont pas été pris en compte dans notre analyse et sont rangés dans les "non abordés".

ii) Confusion avec l'application du théorème du point fixe.

Dans 11 copies S, on a trouvé les égalités

$1=f_n(1)$ ou $1=f(1)$

qui attestent d'une fausse assimilation de la situation de l'exercice à celle des exercices où $u_n=f(u_n)$ avec f continue. Il y a là comme une "reconnaissance de formes" erronée (procédure 9 FAU).

iii) Enfin, dans 20 copies S, figurent des raisonnements totalement erronés dans lesquels nous n'avons pu discerner une quelconque stratégie (procédure 9 DIV).

5.7.2. Les variantes à l'exercice 9c.

Là encore, nous allons vérifier qu'aucune des variantes n'introduit de changement significatif.

a) Les variantes qui n'en sont pas: V_5, V_6, V_{11}.

Voici la répartition des procédures[1] obtenues dans les classes concernées par (V_1, V_5), y compris les effectifs des copies où l'exercice n'est pas abordé (9 NAB).

Procédures à l'exercice 9 (copies S) / Variante	9 NAB non abordé (*)	Raisonnements directs	Raisonnements semi-directs	Raisonnements avec intermédiaires	Raisonnements formalisés	Ellipses	Divers	Total (*)
V_1	61% 54	2	2	8	2	4	3	59% 75
V_5	34	7	4	1	0	4	0	50
Total	88	9	6	9	2	8	3	

Les effectifs sont trop faibles pour effectuer un calcul de χ^2 sur ce tableau. (Les regroupements possibles n'améliorent pas les choses).
Nous constatons que les copies non abordées se répartissent comme les copies totales entre les deux variantes.

De même pour (V_1, V_6) :

Procédures à l'exercice 9 (copies S) / variante	9 NAB non abordé (*)	Raisonnements directs	Raisonnements semi-directs	Raisonnements avec intermédiaires	Raisonnements formalisés	Ellipses	Divers	Total (*)
V_1	44% 32	9	3	7	4	2	0	49% 57
V_6	40	3	2	8	3	2	3	61
Total	72	12	5	15	7	4	3	118

On peut regrouper ici directs et semi-directs et ellipses, intermédiaires, formalisés et divers. On obtient $\chi^2 = 3,531$ (v=2). Les répartitions ne diffèrent pas de façon significative.
Dans la variante V_{11}, le texte (inchangé) est posé en première question.

---

(1) Cf. Tableau V_8 pour le détail des procédures concernées.

(*) Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

Procédure / Variante	9 NAB non abordé	Directs (2)	Semi-directs (3)	Intermédiaires (4)	Ellipses (5)	Formalisés (6)	Divers (7)	Total
V_1	54	13	3	9	4	6	1	90
V_{11}	34	14	2	3	4	4	3	64
Total	88	27	5	12	8	10	4	154

Il est frappant de constater qu'il n'y a pas plus de copies où l'exercice est abordé. Un calcul de χ^2 après regroupement des effectifs des colonnes (2) et (3), (4) et (5), (6) et (7) donne $\chi^2=2,026$ (v=3). De nouveau, pas de différences significatives.

b) Les variantes où la constante de majoration de (u_n) introduite en b) est 1 à la place de 2/3 : V_9, V_{10} et V_7, puis V_2 et V_3, puis V_4.

Voici la répartition obtenue dans les classes concernées par (V_1, V_{10}) où l'exercice est posé en 9 et où simplement les suites sont notées $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

Procédures (copies) / Variante	9 NAB non abordé	Directs	Semi-directs	Intermédiaires	Ellipses	Formalisés	Divers	Total
V_1	42	3	1	1	4	2	1	54
V_{10}	46	3	2	2	2	5	0	60
Total	88	6	3	3	6	7	1	114

Là encore, les effectifs sont trop faibles pour que ça ait un sens de faire un calcul de χ^2. Il n'y a de différences notables "à l'oeil nu", en particulier le pourcentage des copies où l'exercice est abordé est le même.
Pour (V_1, V_9), où l'exercice est posé en 5), on a obtenu:

Procédures (copies) / Variante	9 NAB non abordé	Directs	Semi-directs	Intermédiaires	Ellipses	Formalisés	Divers	Total
V_1	65	5	2	1	4	1	0	78
V_9	72	4	7	4	2	1	1	91
Total	137	9	9	5	6	2	1	169

En regroupant directs et semi-directs, et les autres, on obtient $\chi^2=0,545$ (v=2). Pas de différences significatives.

Dans V_7, le texte des questions 1 et 2 a été modifié, mais on a déjà vu que ça n'a pas de répercussions sur les autres exercices.

Procédures / Variante	9 NAB non abordé	Directs	Semi-directs	Intermédiaires	Ellipses	Formalisés	Divers	Total
V_1	9	11	3	6	7	0	0	36
V_7	10	5	4	3	7	0	1	31
Total	19	17	7	9	14	0	1	67

Pas de changements significatifs encore une fois.

Dans la variante V_2, on a en plus le changement de vocabulaire (convergent) remplacé par (a une limite).
Voivi la répartition correspondante:

Procédures / Variante	non abordés	Directs	Semi-directs	Intermédiaires	Ellipses	Formalisés	Divers	Total
V_1	40	11	4	4	1	3	4	67
V_2	40	8	4	6	3	1	0	62
Total	80	19	8	10	4	4	4	119

Il est clair qu'il n'y a pas de différences significatives dans cette répartition des procédures.

De même, dans la variante V_3, où on a en plus le changement de notation (u_n) remplacé par (z_n) :

Procédures / variante	non abordés	Directs	Semi-directs	Intermédiaire	Ellipses	Formalisés	Divers	Total
V_1	52	6	1	3	7	1	0	70
V_3	56	4	2	4	2	3	2	73
Total	108	10	3	7	9	4	2	143

Enfin, dans V_4, aucune constante n'est indiquée en b, mais comme seulement deux étudiants sur 39, ayant eu le texte V_4, abordent la question 9c (contre 7 sur 53 dans les classes concernées par (V_1, V_4), et ayant eu V_1, il est difficile de faire quelque commentaire que ce soit !

c) La dernière variante: la question b est supprimée du texte, dans lequel l'exercice 9 est posé en septième question.

Procédures / Variante	non abordés	Directs	Semi-directs	Intermédiaires	Ellipses	Formalisés	Divers	Total
V_1	34	12	4	3	1	0	0	54
V_8	47	8	0	1	2	1	1	60
Total	81	20	4	4	3	1	1	114

Pas plus que les autres, on ne constate de changements significatifs.

5.7.3. Etude à part de l'erreur $(u_n < 1) \Rightarrow (u_n^n \longrightarrow 0)$.

Il est particulièrement intéressant d'étudier si cette erreur dépend (et dans quelle mesure) du fait qu'on ait majoré (u_n) par 1 ou par 2/3 dans la question 9) b).

Voici la répartition des raisonnements directs, semi-directs et elliptiques associés, suivant la présence ou l'absence des erreurs $(u_n < 1 \Rightarrow u_n^n \to 0)$ et $(u_n \leq 1 \Rightarrow u_n^n \to 0)$, et suivant la constante de majoration donnée en b).

Procédures / Texte question 6)	Raisonnements directs			Raisonnements semi-directs		Raisonnements elliptiques	
	Sans erreur	Avec erreur $u_n < 1$	Avec erreur $u_n \leq 1$	Sans erreur	Avec erreur	Sans erreur	Avec erreur
Montrer que u_n est majoré par 2/3	74	23	7	7	12	8	10
Montrer que u_n est majoré par 1	6	11	8	0	9	2	7

On constate que si la constante de majoration de (u_n) indiquée en 9b) était 2/3, 29% des étudiants ayant usé d'un raisonnement direct produisent l'une des erreurs $(u_n < 1 \Rightarrow u_n^n \to 0)$ ou $(u_n \leq 1 \Rightarrow u_n^n \to 0)$; si, au contraire, cette constante était 1, alors 76% des étudiants ayant usé d'un raisonnement direct produisent l'une de ces deux erreurs. En ce qui concerne les raisonnements semi-directs et elliptiques, les résultats vont dans le même sens, mais les écarts sont nettement plus faibles.

La production de l'erreur étudiée ici dépend donc fondamentalement de la façon dont le texte est posé, ce qui nous semble très important.

5.8. Etude de la répartition des procédures par niveaux et par modèles. (Tableaux V8 et V9

Comme nous pouvons le constater instantanément, les effectifs par niveaux ne permettent une étude un peu sérieuse de l'évolution que pour le troisième groupe. Nous ne tiendrons compte, à titre indicatif, que des résultats globaux des premiers et deuxièmes groupes.

Il apparaît ainsi que la répartition des procédures entre raisonnements directs, semi-directs, indirects ou formalisés évolue sensiblement entre les groupes et au sein du troisième groupe.

En premier lieu, la part des raisonnements directs augmente, de 20% des raisonnements parmi les copies où l'exercice est abordé dans le premier groupe à 30% dans le deuxième groupe, et même 40% dans le troisième groupe. Dans ce dernier groupe, on constate de même que si 30% des étudiants de Math. Sup. ayant abordé l'exercice produisent un raisonnement direct, cela passe à 40% en Math. Spé. et Licence, et 57% en Maîtrise. Là, c'est la stratégie la plus directe et la plus simple qui, peu à peu, s'impose. Dans le même temps, les raisonnements formalisés disparaissent (leur part passe de 15% dans le premier groupe à 25% dans le deuxième groupe, et 7% dans le troisième groupe). Dans le troisième groupe, ils ne sont produits que par 3% des étudiants de maîtrise; de même, les raisonnements elliptiques, plutôt ellipses de raisonnements formalisés que de raisonnements directs d'ailleurs, tout au moins en Sup. et en Spé., diminuent aussi, mais dans une proportion moindre: produits par 37% des étudiants du premier groupe, et 5% de ceux du deuxième groupe, ils restent autour de 10% en Sup., en Maîtrise et Licence, avec une part importante en Spé. (25%).

Par contre, les raisonnements semi-directs et indirects sont plus stables, autour de 10% et de 17% respectivement dans les trois groupes. Dans le troisième groupe, ce sont les Sup. et les "licence" qui utilisent plutôt soit un raisonnement semi-direct, soit un raisonnement indirect, les étudiants de maîtrise, dans une moindre mesure, un raisonnement indirect, et les Spé. utilisent moins ces deux types de raisonnements (et plus des raisonnements elliptiques, comme nous l'avons vu).

Les procédures à l'exercice 9c) x niveaux. Tableau V_8 (Corpus N)

Procédures à l'exercice 9c) / Niveau	Raisonts. directs (Bien + RD1 + RD2)	Raisonnements semi-directs RS1 + RS2 + RS3 + RS4	Raisonnements indirects RL0 + RL1 + RL2 + RL5	Ellipses EL0 + EL1 + EL2 + EL6	Raisonnements formalisés RF1 + RF2 + RF3 + RF4	Faux DIV + FAU	Total abordés	Total niveau
SUP.	16 (29%) 9 + 4 + 3	10 (18%) 3 + 3 + 2 + 2	16 (29%) 8 + 3 + 4 + 1	6 (11%) 0 + 1 + 3 + 2	4 (7%) 1 + 0 + 1 + 2	4	56	97
SPE.	24 (44%) 20 + 4	4 (7%) 2 + 0 + 0 + 2	7 (13%) 1 + 3 + 1 + 2	14 (25%) 5 + 1 + 4 + 4	5 (9%) 1 + 4 + 0 + 0	1	55	92
Licence	9 (41%) 8 + 1 + 0	2 (9%) 0 + 0 + 1 + 1	6 (27%) 0 + 4 + 0 + 2	3 (14%) 0 + 1 + 1 + 1	1 (5%) 0 + 0 + 0 + 1	1	22	45
Maîtrise	17 (57%) 13 + 3 + 1	2 (7%) 0 + 2 + 0 + 0	6 (20%) 1 + 0 + 2 + 3	3 (10%) 1 + 1 + 0 + 1	1 (3%) 0 + 1 + 0 + 0	1	30	63
Troisième groupe	66 40%	18 11%	35 21%	26 16%	11 7%	7 4%	163	297
Premier groupe	5 18,5%	2 7%	6 22%	10 37%	4 15%	0	27	
Deuxième groupe	6 30%	3 15%	3 15%	1 5%	5 25%	2 10%	20	
Total	77 37%	23 11%	44 21%	37 18%	20 9,5%	9 4%	210	

Les pourcentages indiqués sont les pourcentages lignes calculés sur les abordés par niveau.

Si nous étudions maintenant le détail de la répartition de chacun de ces types de raisonnements dans chaque groupe, nous pouvons d'abord souligner que l'erreur (notée RD1) qui consiste à écrire "$(u_n < 1)$ entraîne $(\lim_{n\to\infty} u_n^n=0)$" (dans un raisonnement direct) ne disparaît pas en maîtrise où trois étudiants, sur les 17 ayant produit un raisonnement direct, l'affichent encore. Certes, en Math. Sup., c'est un quart des étudiants ayant produit un tel raisonnement qui la commettent mais ensuite le pourcentage oscille entre 11% et 18%. Par contre, la production du même résultat sur $(\lim_{n\to\infty} u_n^n)$ déduit de $(u_n \leq 1)$ disparaît.
Cela étant, le pourcentage de raisonnements corrects (et directs) augmente régulièrement au sein du troisième groupe, puisqu'il passe de 16% des étudiants de Math. Sup. ayant abordé la question à 36% des étudiants correspondants de Math. Spé. et licence pour atteindre 43% (pas tout à fait la moitié !) des étudiants correspondants de maîtrise.
La même analyse détaillée des procédures semi-directes permet de confirmer que l'erreur déjà étudiée ci-dessus ne disparaît pas en maîtrise, où elle concerne les deux étudiants ayant fourni un raisonnement semi-direct avec comme résultat "$(\lim u_n)$ racine de $x^2+x-1=0$". Il est difficile d'en dire plus, vu les effectifs, si ce n'est qu'encore trois étudiants sur 18 confondent dans leur résultat u_n et $\lim (u_n)$ et que, par contre, 5 étudiants sur 18 justifient par un argument de continuité que leur "intermédiaire" $(u_n^2+u_n-1)$ converge vers 1^2+1-1.

La répartition des raisonnements indirects révèle enfin que de plus en plus d'étudiants parmi ceux qui un point de départ indirect "démarrent" de $\lim f_n(1)=0$ et non de $f_n(1)=0$.

L'étude de la répartition des procédures par modèle est rendue difficile par la faiblesse des effectifs des deux premiers groupes ayant abordé l'exercice, ce qui peut contribuer à fausser les totaux.

Procédures à l'exercice 9 c) x modèles exprimés. Tableau V_9 (Corpus N)

Procédures à l'exercice 9c / Modèle exprimé	Raisonts dirds BIEN sans erreurs	Raisonts Directs Total	Semi-directs	Intermédiaires	Ellipses	Formalisés	Divers et Faux	Abordés	Total modèle
PRIMITIF	2 33%	2	1	0	2	1	0	6	56
TEND VERS	3 33%	4	1	3	1	0	0	9	46
DYNAMIQUE MONOTONE	0 0	1	1	0	2	1	0	5	20
PAS DE MODELE EXPRIME	0 0	1	0	0	4	1	0	6	38
TAUTOLOGIE	4 44%	4	1	2	1	1	0	9	18
DEFINITION	2 67%	2	1	0	0	0	0	3	10
DYNAMIQUE	23 30%	32 42%	3 4%	17 22%	14 18%	5 6%	6 8%	77	231
PRESTATIQUE	4 29%	4 29%	5 36%	2 14%	1 7%	2 14%	0 0%	14	54
MIXTE	13 26%	17 35%	7 14%	9 18%	8 16%	6 12%	2 4%	49	114
STATIQUE	3 14%	7 32%	3 7%	8 19%	2 5%	2 5%	0 0%	22	41
NON ABORDE	2	3 30%	0	3	2	1	1	10	34
TOTAL	56	77 37%	23 11%	44 21%	37 18%	20 9,5%	9 %	210	662

(Les pourcentages indiqués sont des pourcentages lignes, calculés sur les abordés par modèles).

On constate d'abord qu'il y a plus de la moitié des étudiants ayant exprimé un modèle statique qui ont abordé l'exercice 9c)(22 sur 41), alors que pour tous les autres modèles, on n'atteint jamais plus de 43% d'étudiants ayant exprimé un modèle et abordant l'exercice (c'est le cas du modèle mixte); le même pourcentage baisse à 33% pour le modèle dynamique, et à moins de 30% pour les autres modèles. D'autre part, les répartitions des procédures pour les modèles dynamique, mixte et statique ne sont pas très différenciés:

il y a respectivement entre 32% et 42% de raisonnements directs, entre 4% et 14% de raisonnements semi-directs, entre 18% et 22% de raisonnements à intermédiaires, entre 5% et 18% d'ellipses, et entre 5% et 12% de raisonnements formalisés.

On peut tout de même remarquer la fréquence élevée de l'erreur $(u_n < 1) \Rightarrow (u_n^n \rightarrow 0)$ avec le modèle statique (traduite par la différence des effectifs entre les raisonnements directs et les raisonnements directs sans erreur). Nous avions noté que cette erreur ne disparaît pas en maîtrise; de même, elle peut accompagner l'expression du modèle statique.

En conclusion, l'étude partielle que nous venons de faire permet de confirmer un des résultats de la première partie du chapitre: les étudiants de maîtrise adoptent ici en majorité la stratégie la plus directe et c'est le niveau où ce choix est le plus développé. Cependant, la relation avec les modèles exprimés n'est pas la même que dans les deux exercices précédents; elle révèle peu de différences entre les trois principaux modèles pour lesquels l'exercice est suffisamment abordé pour donner un sens à l'étude (dynamique, mixte et statique); mais comme les effectifs sont mal répartis par modèles (à cause des faibles apports des deux premiers groupes de niveaux), nous ne pouvons interpréter ces résultats valablement. Peut-être y a-t-il de nouveau un effet dû à la faiblesse des effectifs, effet comparable à ce que nous avons remarqué par classes ? Enfin, nous devons souligner que l'erreur $\left[(u_n < 1) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} u_n^n = 0 \right]$ ne disparaît pas en maîtrise, et accompagne massivement l'expression d'un modèle statique: c'est une erreur très tenace, produite y compris par des étudiants qui, par ailleurs, ont de très bonnes performances.

CHAPITRE 6 - LES EXERCICES 6), 8) et 10).

Dans ce chapitre, nous étudions successivement les exercices 6, 8, et 10: après avoir présenté chaque exercice et expliqué l'objectif de son analyse spécifique, nous faisons figurer la description des procédures que nous avons effectivement relevées, puis cherchons la stabilité de la répartition des procédures en fonction de la manière dont l'exercice a été posé (étude des variantes). Ensuite, nous analysons la répartition des procédures par niveau et par modèle; pour cette analyse, nous avons procédé de la manière suivante: nous avons établi les tableaux croisés des effectifs correspondants (sur le corpus N), et à partir de ces tableaux, nous avons établi un tableau résumé en regroupant lignes ou colonnes suivant les cas (1). Les pourcentages lignes des tableaux résumés nous ont permis de voir certaines caractéristiques que nous avons nuancé ou complété, grâce à l'analyse des pourcentages colonnes du tableau détaillé, et au calcul éventuel du χ^2. Les tableaux sont numérotés en chiffres romains, par exercice et indexés, comme précédemment. Une liste (sous forme de feuilles volantes) des procédures avec leur définition et leur sigle est jointe à chaque exercice et peut être déplacée pendant la lecture des résultats sur cet exercice. Nous avons décidé de ne pas nous livrer dans ces exercices à une analyse des performances des étudiants. Il faut rappeler que nous perdons un peu d'information ce faisant -une même procédure (comme nous l'avons déjà vu) peut figurer dans une solution juste, fausse ou non terminée. Aussi, avons-nous tout de même attribué une évaluation sommaire aux copies que nous avons étudié -ces appréciations sont précisées pour chaque exercice et figurent sur la liste des procédures déjà évoquée.

Mais nous n'utiliserons ces données que dans les analyses factorielles et en les plaçant en "points supplémentaires" (cf. ch. 2.6.). Cette décision méthodologique a pour but de ne pas alourdir l'exposé par des informations plus ou moins redondantes; dans la majorité des cas, une procédure est liée univoquement à la réussite

---

(1) En ce qui concerne les modèles, nous avons toujours regroupé dans le tableau résumé les copies sans modèle exprimé, avec la simple définition ou avec une tautologie.

ou à l'échec. De plus, dans toute cette étude, les méthodes nous intéressent plus que les performances dont nous estimons qu'elles ne sont que des conséquences des premières.

Les paragraphes suivants sont éventuellement différents suivant les exercices puisqu'on y revient sur les hypothèses que les résultats sur les procédures permettent de vérifier. L'analyse factorielle "exercice par exercice" n'a pas été faite systématiquement; c'est au chapitre suivant que nous verrons apparaître, dans des analyses plus globales, les procédures mises en évidence dans ce chapitre (ainsi que les performances).

Nous avons réservé une partie à chaque exercice et nous donnerons séparément les plans de chaque partie.

Première partie: l'exercice 6.

L'exercice 6. Texte: "Etudier la suite $u_n = \frac{1}{n} \cos n\theta$".

Dans cet exercice, la tâche ne paraît pas précisée (exercice ouvert). Pourtant, étant donné ce qui précède, et étant donné que les questions sur la représentation de la convergence précèdent toujours l'énoncé de cet exercice [1], les étudiants transforment instantanément la question en "étudier la convergence de la suite u_n" avec éventuellement en question subsidiaire "étudier les variations de la suite u_n", question que se posent de temps en temps des étudiants ayant résolu la question de la convergence (et correctement). L'étude de Françoise Boschet a confirmé que "l'habitude" est d'utiliser ces mots dans ce sens, dans ce contexte. Le terme général u_n de la suite est explicite, on peut donc appliquer ici à priori toutes les méthodes pour démontrer la convergence de (u_n). Le théorème des suites monotones bornées ne convient évidemment pas, pas plus qu'un raisonnement par l'absurde ou une tentative de démontrer que (u_n) est une suite de Cauchy. En outre, la tâche de l'exercice 6 est une tâche simple à laquelle les étudiants sont très bien préparés (cf. chapitre 2). Nous vérifierons les effets de ce fait didactique . On peut encore remarquer que s'il est assez facile de se représenter la suite (u_n) -par exemple, comme suite des affixes des points $(n, \frac{1}{n} \cos n\theta)$- il n'y a guère qu'une dizaine de copies où figure une représentation graphique, que celle-ci concerne dans tous les cas le graphe de la seule fonction $f(x) = \frac{1}{x} \cos x\theta$ (ou $f(\frac{1}{x})$) , mais que ce graphe figure à la fin de l'exercice et jamais au début.

Il apparaît que ce n'est pas à cette représentation que les étudiants font appel explicitement pour résoudre l'exercice, bien que dans l'exercice posé juste avant [2] c'est vraisemblablement une représentation de (u_n) qui était mobilisée pour répondre dans un certain nombre de copies [3].

---

(1) L'exercice 6 n'est pas posé en V_9 , V_{10} , V_{11} en effet.

(2) Pour le texte V_1 en tous cas.

(3) D'où l'intérêt de l'étude de la variante V_8 (où l'exercice ne figure pas) pour confirmation.

Il y a probablement là un phénomène lié à l'enseignement tel qu'il est reçu par les étudiants.

Comme c'est bien exclusivement à une résolution analytique de l'exercice 6 que les étudiants sont préparés, cela prend tout son sens de comparer les procédures mises en oeuvre lors de la résolution de cette tâche simple et de celle de la tâche plus difficile de l'exercice 7. En effet, les mêmes connaissances sont mobilisables (en particulier, encadrement ou majoration du terme général, procédures algébriques correctes ou erronées) et il s'agit de déterminer s'il y a un rapport (et lequel) entre la tâche et la mobilisation de ces procédures. C'est l'objet du dernier paragraphe de cette première partie.

6.0. Présentation des copies où l'exercice 6 est abordé.

L'exercice 6 n'est pas posé dans trois variantes (V_9, V_{10}, V_{11}) et concerne donc 1 048 copies S. Il y a 93 copies S sur 1 048 (9%) dans lesquelles l'exercice 6 n'est pas abordé, et 57 copies N (soit 8%). Comme pour les autres exercices, nous étudierons les répartitions des procédures sur les copies N. La répartition des copies où l'exercice n'est pas abordé révèle un taux de non-abord plus élevé que la moyenne en Math. Sup. C (11 copies N sur 48, moins d'un mois après le cours et 5 copies N sur 31, plus de trois mois après le cours), en DEUG 1 tout de suite après le cours (9 copies N sur 64 N) et encore en DEUG 1 moins de trois mois après le cours (11 copies N sur 66). Dans les autres niveaux, ce taux oscille entre 7% et 2% des copies.

Parmi les 955 copies S (resp. 607 copies N) où l'exercice est abordé, un certain nombre ne sont pas terminées. Sont considérés comme ayant terminé l'exercice 6 les étudiants qui livrent une conclusion de l'une des trois formes suivantes:

- ou bien "... la suite (u_n) est convergente [(1)]" -sans que la limite soit citée.
- ou bien "la suite (u_n) converge vers 0 [(2)]" -la limite est citée (que ce soit 0 ou une autre bien entendu !).
- ou bien "la suite (u_n) est convergente et converge vers 0" , ou encore

"$\lim u_n = 0$ donc la suite (u_n) est convergente "...

c'est-à-dire des phrases où il y a un témoignage d'une dissociation, dans le discours écrit, de la question de la convergence et de la valeur de la limite -limite citée dissociée (cf. exercice 7).

Cependant, notre étude des procédures concerne toutes les copies, même non terminées.

---

(1) ou converge, ou a une limite ...

(2) ou tend vers 0, ou $\lim u_n = 0$, ou a une limite nulle ...

Exercice 6 ($\overline{VI_0}$)

Tâche	Procédures rencontrées	Pourcentage calculé sur le total des étudiants N ayant abordé l'exercice (605)	Code
Etude de la convergence d'une suite donnée explicitement ($u_n = \frac{1}{n} \cos n$); on ne sait pas si la suite converge ou non; en particulier, la valeur limite n'est pas indiquée.	ERRONEES 18%		
	. Application du théorème des suites monotones bornées	3%	6 MON
	. Etude de la fonction $f(\ ) = \frac{1}{x} \cos x\theta$	2%	6 DIF
	. Confusions entre suite et série	3%	6 CSS
	. Etude de la suite pour des valeurs particulières de	2%	6 PAR
	. Application du théorème algébrique $\lim u_n = \lim \frac{1}{n} \times \lim \cos n\theta \rightarrow$ convergence / divergence	8%	6 PLI
	AMBIGÜES 15%		
	. Application ambigüe du théorème algébrique produit	8%	6 PRA
	. Sans démonstrations, résultat juste	5%	6 JSD
	résultat faux	1%	6 FSD
Etude de la convergence d'une suite numérique explicite.	CORRECTES 60%		
	. Application du théorème du produit d'une suite bornée par une suite convergente	13%	6 PRO
	. Encadrement de (u_n) par les deux suites convergents vers 0 $(\frac{1}{n})$ et $(-\frac{1}{n})$	22%	6 ENC
	. Majoration de u_n par $\frac{1}{n}$	26%	6 VAL
	NON TERMINEES 8%	8%	6 NTE
		Pourcentage calculé sur le total 12 (N)	
	NON ABORDEES	5%	6 NAB

Ainsi, nous présentons successivement :

6.1. Les procédures utilisées.

6.1.1. (Texte V_1).

6.1.2. Les variantes (stabilités, différences).

6.1.3. Les erreurs.

6.2. Une analyse de la répartition des procédures par niveau, par modèle.

6.3. Comparaison avec l'exercice 7.

Conclusion.

La liste des procédures à l'exercice 6 avec le sigle que nous leur avons affecté est jointe en VI_0

6.1 Les procédures utilisées.

6.1.1. Les procédures à l'exercice 6. (Texte V_1)

La répartition globale des procédures à l'exercice 6 ne présentant pas de "distorsions" entre telle ou telle procédure, nous les présentons toutes successivement en allant "du plus faux au plus juste". Nos indications quantitatives portent sur les 605 copies N où l'exercice 6 est abordé.

a) Notons d'abord que 6% des étudiants N livrent le résultat sans démonstration (32 sur les 39 concernées concluent à la convergence de (u_n)).

Ces procédures sont baptisées 6 JSD et 6 FSD.

b) Il y a 16 étudiants N (3%) qui s'escriment à démontrer que la suite (u_n) est monotone; comme elle est bornée, ils en déduisent, pour une partie d'entre eux, qu'elle converge et souvent vers 0 .

Il y a deux sortes de tentatives: ou bien, on essaie d'affecter un signe à $(u_{n+1} - u_n)$, ou même seulement à $(u_2 - u_1)$, en considérant que $(u_{n+1} - u_n)$ a le même signe que $(u_2 - u_1)$, ou bien on étudie le signe de $f'(n)$ ou de $f'(x)$ avec $f(x) = \frac{1}{x} \cos x\theta$. En général, la fin justifiant les moyens, les signes sont affectés indépendamment des justifications (et pour cause !).

Cette procédure est baptisée 6 MON.

c) Remarquons que parmi les étudiants qui ne terminent pas l'exercice - ils sont 38, soit 6% du total - plus de la moitié (concentrés dans les premiers niveaux)

commencent une étude de $(u_{n+1} - u_n)$ ou de $f(n)$ et n'aboutissant pas, laissent tomber. De telles procédures sont baptisées 6 NTE .

d) Certains utilisent la fonction $f(x) = \frac{1}{x} \cos \theta x$ autrement: ils en cherchent la limite quand $x \to +\infty$, soit directement (ainsi a-t-on trouvé $f(x) = x \cos \frac{\theta}{x} = \frac{\theta}{x} \cdot \frac{x \cos \theta / x}{\theta / x}$), soit avec une développement limité plus ou moins fantaisiste (procédure 6·DIF) ... D'autres confondent suites et séries (procédure 6 CSS), pensent que $\frac{1}{n}$ diverge, écrivent $u_n = u_1 + \ldots + u_n$, ce qui amène à des procédures confuses et erronées -quelquefois non terminées (o). Certains ne réussissent à conclure que dans des cas particuliers pour θ (procédure 6 PAR), ou bien découpent des intervalles pour θ au sein desquels ils concluent soit par monotonie, soit par étude directe de u_n sans réaliser que les valeurs de θ n'interviennent pas, ni que lorsque n varie, leur "$n\theta$" ne reste pas dans l'intervalle initial ! etc ... Toutes ces diverses procédures erronées, ou pour le moins insuffisantes, concernent 45 copies N (ayant livré une conclusion(1)) -soit 7% des effectifs N-.

e) Il y a 49 étudiants N (8%) qui appliquent le théorème en acte suivant :

$$\lim u_n = \lim \frac{1}{n} \times \lim \cos n\theta$$

(procédure produit baptisée 6 PLI).

Nous n'avons rangé ici que les copies où nous étions"sûre" de l'utilisation de cette procédure, soit par la présence d'une justification explicite ("d'après le théorème sur les produits", ou autre), soit par l'écriture précédente, soit au moins par l'écriture du terme "lim cos $n\theta$" ou "limite de cos $n\theta$".

(o) Alors, non comptabilisées dans les 45 de cette catégorie.

(1) Si on trouve : si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, (u_n) converge, on considère que l'exercice est "terminé" et relève de la procédure 6 PAR.

Parmi ces étudiants, 16 concluent à la divergence de la suite.
Ainsi, a-t-on trouvé:
+ "cos $n\theta$ n'a pas de limite, donc (u_n) diverge" ou
"lim cos $n\theta$ diverge, donc (u_n) diverge" (3 106)
+"lim u_n = lim $\frac{1}{n} \times \cos n\theta$ " (1 211) non définissable puisque le cosinus prend des valeurs entre -1 et +1; cette limite n'existe pas. Donc lim u_n n'existe pas.
Les autres, au contraire, affirment que (u_n) converge vers 0 par des arguments du type suivant :
"lim cos $n\theta = \alpha$, $-1 \leq \alpha \leq 1$ lim u_n = lim $\frac{\alpha}{n}$ = 0 " (0 313)
ou "lim u_n = 0 x lim cos $n\theta$ = 0 (2 206)
ou "cos $n \to \pm 1 \Rightarrow$ lim u_n = 0"
ou "lim cos $n\theta$ = 1 , lim $\frac{1}{n}$ = 0 $\Rightarrow$ lim u_n = 0" (0 517) et (3 616)
ou "$-1 \leq$ lim cos $n\theta \leq 1$ et lim $u_n = 0 \times$ lim cos $n\theta = 0$" (0301)
Citons, pour mémoire, la copie où se superposent la procédure précédente et la confusion suite-série sur $\frac{1}{n}$: comme $\frac{1}{n}$ diverge, et que cos $n\theta$ diverge, alors, il est bien clair que u_n diverge ! ...

f) Il y a tout de même plus d'étudiants (78, soit 13%) qui utilisent correctement le théorème précédent en remarquant que (u_n) est le produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0 (procédure 6 PRO). Nous n'avons, ici aussi, rangé une copie dans cette catégorie, que si le théorème était cité ou au moins si une phrase du type "la suite (cos $n\theta$) étant bornée ..." figurait explicitement.

Ainsi, les copies des trois types suivants :
"$1/n \to 0$, cos $n\theta \in [-1,1] \Rightarrow u_n \to 0$" (1) (3 302)
"$1/n \to 0$, $-1 \leq$ cos $n\theta \leq 1 \Rightarrow u_n \to 0$" (0 527, 2 601) ...
"$1/n \to 0$, cos $n\theta$ oscille entre -1 et +1 $\Rightarrow u_n \to 0$" (1 802)
ne sont-elles pas considérées comme relevant de cette procédure.

g) C'est précisément à des copies "ambigües" comme les trois citées juste au-dessus, que nous avons attribué la procédure "ambigüe" (notée 6 PRA), qui concerne 51 étudiants (8%). Il est à noter que cette procédure conduit exclusivement à la convergence de (u_n) (vers 0).
Outre les copies des types cités, relèvent de cette procédure toutes les autres copies où un indice manque pour attribuer avec certitude la démarche de l'étudiant à un raisonnement du type e), f) ou h), g) qu'on verra après:

---

(1) ou $|\cos n\theta| \leq 1$.

Ainsi, a-t-on classé en outre ici les justifications des types qui suivent:
. "$\lim u_n = 0$ car $1/n \to 0$ et $-1 \leq \cos n \leq 1$ (valeur finie ou reste fini)" ou
"$\lim u_n = 0$ car $1/n \to 0 \Rightarrow A/n \to 0$ $-1 < A < 1$" (2 044).
. "$u_n \to 0$ car $1/n \to 0$ et cos nθ est une fonction continue" (1) (4 714)
. "lorsque $n \to \infty$ cos nθ prend une valeur finie; comme $\lim r/n = 0$, nous avons $\lim u_n = 0$"
et encore:
. "$u_n \to 0$ car $1/n \to 0$ " (ou "u_n converge car $1/n$ converge")
. "$\lim u_n = \lim 1/n$ car cos $n \in [-1,1]$" (2 615) ... ou
"$\lim u_n = 0$ car $|\cos n\theta| \leq 1$" (4 529) ...

h) La procédure d'encadrement. (6 ENC)

Dans 22% des copies N (131) figurent explicitement les inégalités (2)

(*) $$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

déduites souvent explicitement des inégalités (2) $-1 \leq \cos n\theta \leq 1$.

La convergence de (u_n) vers 0 en est déduite soit sans justification, soit avec un schéma

$$\begin{array}{ccccc} -1/n & \leq & u_n & \leq & 1/n \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array} \Rightarrow u_n \to 0$$

soit avec des phrases du type
" $-1/n$ et $1/n$ tendent vers 0, donc (u_n) converge vers 0"
" u_n est encadrée par deux suites qui tendent vers 0, donc (u_n) converge vers 0"
" comme $1/n$ est convergente (resp. tend vers 0) , u_n converge (resp. tend vers 0".

On trouve aussi, après (*), avec ou sans justification, par un "théorème de passage à la limite",

$n \to \infty$ $\quad 0 \leq u_n \leq 0 \Rightarrow u_n \to 0$.

et très rarement, lorsque l'inégalité (*) est stricte, $0 < \lim u_n < 0$.

Enfin, dans certaines copies, des inégalités (*), on déduit

comme $u_n \leq \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow u_n \to 0$ (théorème en acte de semi-encadrement).

i) La procédure "majoration". (6 VAL)

Enfin, dans 155 copies (26%), figure l'inégalité

(**) $$|u_n| \leq \frac{1}{n}$$

---

(1) Nous nous sommes demandés s'il n'y avait pas ici une utilisation implicite d'une procédure scalaire : $\lim u_n = \cos n\theta \times \lim \frac{1}{n}$.

(2) Larges ou strictes.

d'où est déduit -la plupart du temps sans autre justification-

$\lim u_n = 0$ (ou $\lim |u_n| = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$).

En résumé, on voit apparaître des procédures correctes (6 VAL, 6 ENC, 6 PRO) qui concernent 60% des copies, des procédures ambigües (6 PRA, procédures sans démonstration) et des procédures erronées (6 MON, 6 PAR, 6CSS, 6 PLI et 6 DIF).

L'évaluation des copies correspondantes se trouve ne présenter aucune ambigüité. Les procédures correctes et ambigües sont toujours associées au résultat juste (6 JUS), et les autres -suivant qu'elles accompagnent le résultat juste ou un autre- sont regroupées en 6 JDF ou 6 FDF.

6.1.2. Les procédures à l'exercice 6 dans les variantes. Stabilités et différences.

Nous étudierons les répartitions des procédures correspondant aux copies où l'exercice a été abordé dans les classes concernées par les textes (V_1, V_i) -et celles-là seules au moment de l'étude de V_i (cf. ch. 2). Nous avons regroupé les procédures erronées 6 PLI, 6 MON, 6 CSS, et 6 PAR (trop petits effectifs), 6 PRA et 6 JSD (en donnant un sens extensif aux procédures ambigües) et éventuellement, seulement si les effectifs sont trop faibles, 6 VAL et 6 PRO. Nous n'avons pas tenu compte pour la comparaison des procédures non identifiées (6 DIF ou 6 NTE), ce qui explique les différences entre "Total partiel", le "Total des abordés", et le total que nous faisons figurer à titre indicatif.

a) Les variantes qui n'en sont pas: V_5, V_6, V_2, V_4.

* Dans les variantes V_5, V_6, aucun changement n'est à noter ni dans le texte de l'exercice, ni dans ce qui précède. Nous obtenons les répartitions suivantes de procédures pour les classes concernées par (V_1,V_5), puis (V_1,V_6).

Procédures (Copies S) Variantes	6 ENC encadrement de u_n	6 VAL majoration de $\|u_n\|$	6 PRO produit correct	6 PRA + 6 JSD ambigües	6 PLI + 6 MON + 6 CSS + 6 PAR erronées	Total partiel	Total abordés	Total
V_1	13	20	16	9	9	67	70	75
V_5	8	8	14	14	7	51	46	50
Total	21	28	30	23	16	118		

Copies S	6ENC	6VAL	6PRO	6PRA + 6JSD	6PLI + 6MON +6CSS+6PAR	Total partiel	Total abordés	Total
V_1	10	7	24	3	6	50	54	57
V_6	7	7	17	10	4	45	56	61
Total	17	14	41	13	10	95		

Le calcul du χ^2 donne pour v=4 χ^2=5,901 et χ^2=5,544.

Il en résulte que, comme il se devait, les répartitions ne sont pas significativement différentes.

* Dans les variantes V_2, V_4, il y a respectivement un changement de vocabulaire affectant les questions précédentes, et un changement dans le texte des questions 1) et 2) avec la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à la place de (u_n).

(V_1, V_4) :

Procédures (copies S) Variante	6 ENC encadrement de u_n	6 VAL + 6 PRO autres correctes	6 PRA + 6 JSD ambigues	6 PLI + 6 MON + 6 CSS + 6 PAR erronées	Total partiel	Total abordés	Total
V_1	14	22	7	10	53	60	67
V_2	15	16	13	4	48	56	62
Total	29	38	20	14	101		

On obtient $\chi^2 = 5,207$ (v=3) -pas de différences significatives.

Procédures Variante	encadrem. 6 ENC	correctes 6VAL+6PRO	ambigues 6PRA+6JSD	erronées 6PLI+6MON...	Total partiel	Total abor	Total
V_1	10	9	12	7	38	41	53
V_4	7	8	11	8	34	37	39
Total	17	17	23	15	72		

On obtient $\chi^2 = 0,454$ (v=3) -pas de différences significatives- sauf dans les non abordés.

b) Changements de notation: la variante V_3 ((z_n) remplace (u_n)) et les variantes V_7 et V_8 (A remplace θ dans l'expression explicite de la suite).
Pour la variante V_3, on obtient la répartition suivante (les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes).

Procédures (copies S) Variante	6 ENC encadrement de u_n	6 VAL majoration de $\lvert u_n \rvert$	6 PRO produit correct	6 PRA + 6 JSD ambigü	6 PLI + 6 MON + 6 CSS + 6 PAR erronées	Total partiel	Total abordés	Total
V_1	54% 14	27% 6	56% 10	10	57% 12	45% 52	64	70
V_3	12	16	8	19	9	64	67	73
Total	26	22	18	29	21	116		

Le calcul donne $\chi^2 = 6,982$ (pour v=4): pas de changement significatif, mais une tendance à une répartition des procédures correctes différentes selon le texte (plus de 6 VAL avec V_3), et moins de procédures erronées également avec V_3.
Pour la variante V_8, on obtient la répartition suivante:

Procédures (copies S) / Variante	6 ENC	6 VAL + 6 PRO	6 PRA + 6 JSD	6 PLI + 6 MON + 6 CSS + 6 PAR	Total partiel	Total à bordés	Total
V_1	12	16	12	8	48	51	54
V_8	9	26	9	7	51	55	60
Total	21	42	21	15	99		

On obtient $\chi^2 = 3,211$ (pour v=3): pas de changements significatifs.

Nous n'avons pas joint les résultats pour la variante V_7 qui concernent trop peu d'étudiants.

Il apparaît donc qu'aucun des changements envisagés dans ces variantes n'apporte une modification significative de la répartition des procédures.

6.1.3. Les erreurs dans l'exercice 6.

Outre les procédures erronées que nous avons déjà évoquées, on trouve un certain nombre d'erreurs "muettes" associées à des procédures correctes.

a) Citons d'abord les inégalités suivantes:

$-1 < \cos n\theta < 1$

ou $0 < |\cos n\theta| < 1$ ou $|\cos n\theta| < 1$ (notée 6 STR)

Elles accompagnent les procédures 6 VAL ou 6 ENC.

Ces erreurs, qui concernent 62 étudiants N, ne disparaissent pas en maîtrise ; elles sont même plutôt le fait d'étudiants du troisième groupe , puisqu'elles sont commises par 9% d'étudiants de licence, 12% d'étudiants de Sup., 17% d'étudiants de Spé. et 18% d'étudiants de maîtrise (étudiants N, ayant abordé l'exercice).

b) Au contraire, l'inégalité suivante

$0 < \cos n\theta < 1$ (baptisée 6 COP) ne concerne pratiquement que des étudiants du premier groupe (14 sur 19 au total). Elle ne disparaît pas en DEUG 2, où 9% des étudiants l'écrivent encore.

c) Nous avons déjà évoqué le théorème de "passage à la limite" qui conduit à écrire (sans justifier l'existence de la limite de u_n) :

$$0 \leq u_n \leq 0 \Rightarrow u_n \to 0 .$$

Cela concerne 22 étudiants, surtout du premier groupe (13 sur 22). Cette erreur n'est plus relevée en maîtrise. Elle n'a pas reçu de sigle particulier.

d) De même, le théorème de "semi-encadrement" qui consiste à déduire d'une seule inégalité $(u_n \leq \frac{1}{n})$ le résultat $(u_n \to 0)$ est utilisé dans 23 copies, dont 17 du premier groupe, et est peu représenté dans le troisième groupe.

6.2. Répartitions des procédures à l'exercice 6 (corpus N).

Pour analyser ces répartitions, nous allons,dans les tableaux résumés, faire apparaître les procédures correctes (6 VAL, 6 ENC, 6 PRO), et les autres -en étudiant dans le deuxième temps la répartition des différentes procédures correctes entre elles. Parmi les autres procédures, nous distinguons les procédures ambigües (6 PRA), les procédures sans démonstration avec le bon résultat (6 JSD), et les procédures erronées (6 PLI, 6 MON, 6 CSS, 6 PAR), et regroupons ensemble les procédures 6 DIF et 6 NTE dans une colonne reste.

6.2.1. La répartition des procédures à l'exercice 6 par niveaux. (Tableaux VI_1 et VI_2)

On voit que les trois groupes se distinguent tout de suite quant à leur contribution aux procédures correctes.

Dans le premier groupe, celles-ci concernent moins de la moitié des copies où l'exercice est abordé, avec augmentation de la procédure 6 VAL et peu de procédures 6 PRO; en effet on peut souligner une évolution, puisque de 29% de procédures correctes produites en DEUG moins de trois mois après le cours, on arrive à 44% en DEUG 2.

Cette augmentation de procédures correctes ne s'accompagne pas d'une baisse des procédures erronées -celles-ci sont relevées en effet dans 30% environ des copies

de DEUG (sauf tout de suite après le cours où elles ne concernent que 16% des copies). Ce sont plutôt les procédures sans démonstrations et les procédures ambigües qui diminuent relativement en DEUG 2. Cela étant, toutes les procédures fausses sans démonstrations proviennent de ce goupe.

Dans le deuxième groupe, les procédures correctes concernent de 80% à 90% des copies sans qu'on puisse parler d'évolution. On peut noter que très peu de procédures erronées sont relevées en Sup. et en maîtrise (2 sur 94, et 1 sur 59), et que, tout spécialement, les procédures 6 PLI et 6 MONdisparaissent pratiquement dans ce groupe. Parmi les procédures correctes, on peut, par contre, relever une évolution sensible de la répartition de la procédure 6 VAL: en effet, alors que 23% des étudiants de Sup. ayant une procédure correcte majorent précisément (u_n), à partir de Math. Spé., la proportion devient supérieure à la moitié, avec 60% en Spé. et licence, et 86% en maîtrise. Autrement dit, il y a là un changement dans le choix des procédures correctes possibles -en Math. Sup. les étudiants utilisent surtout (à 49%) le théorème du produit (correctement), puis l'encadrement de u_n et la majoration de (u_n) presque dans les mêmes proportions; ensuite, il y a de moins en moins d'utilisation du théorème du produit -qui est peut-être un peu artificiel ici, de moins en moins de procédures d'encadrement (plus nombreuses que les précédentes à partir de la troisième année), de plus en plus de procédures de majoration de (u_n). Or, la dernière méthode est la seule qui se généralise à des suites dans des espaces plus généraux. Son augmentation témoigne peut-être de l'influence du reste des connaissances d'analyse sur les techniques utilisées dans des exercices sur les suites numériques après d'autres apprentissages.

Le deuxième groupe est intermédiaire entre les deux autres -30% de procédures correctes moins d'un mois après le cours, 73% après.

Procédures à l'exercice 6 x niveaux. Tableau résumé (Corpus N) VI$_1$

Procédures à l'exercice 6 / Niveau	Procédures correctes 6 VAL entre parenthèses	Ambigües 6 PRA + 6 JSD	Erronées 6 MON + 6 PLI 6 CSS + 6 PAR	Reste 6 DIF 6 NTE divers	Total abordés
DEUG I après le cours sans exercices	17 (3) 31%	5 + 4 16%	9 16%	20	55
DEUG I moins de 3 mois après le cours	15 (2) 28%	8 + 8 30%	16 30%	7	54
DEUG I plus de 3 mois après le cours	19 (5) 37%	8 + 5 25%	11 22%	8	51
DEUG 2ème année	42 (14) 44%	8 + 4 13%	34 36%	7	95
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	14 (3) 38%	3 + 1 11%	10 27%	9	37
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	19 (2) 73%	1 4%	3 11%	3	26
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	79 (18) 84%	5 + 2 7%	2 2%	6	94
MATH. SPE.	71 (43) 79%	8 + 2 11%	9 10%	0	90
LICENCE (3ème année)	39 (23) 89%	1 + 1 4%	3 7%	0	44
MAITRISE (4ème année)	49 (42) 83%	4 + 5 15%	1 2%	0	59
TOTAL	364	51 + 32	98	60	605

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages lignes, et calculés sur le total des abordés par niveaux.

(VI_2) Procédures x niveaux à l'exercice 6. Corpus N

Procédures à l'exercice 6 / Niveau	6 JSD+ (6 FSD) sans élim.	6 NTE 6 DIF divers	Procédures correctes: 6 ENC encadrement de un	VAL majoration de (un)	PRO produit correct	ambiguës: PRA produit ambigü	erronnées: P.Li produit erroné	MON monotone	CSS confusion suites/séries	PAR cas particuliers	NAB non abordé
DEUG 1 après le cours sans exercices	4+(2)		9 7%	3 2%	5 6%	5	5	4	0	0	9
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	8		11 8%	2 1%	2 3%	8	9	3	4	0	12
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	5+(2)		9 7%	5 3%	5 6%	8	9	1	1	0	4
DEUG 2ème année	4+(3)		24 18%	14 9%	4 5%	8	16	3	8	7	6
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	1		10 8%	3 2%	1 1%	3	6	1	0	3	11
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	0		15 11%	2 1%	2 3%	1	2	0	0	1	5
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	2		22 17%	18 12%	39 50%	5	1	0	0	1	3
MATH. SPE.	2		14 11%	43 28%	14 18%	8	0	4	5	0	2
LICENCE (3ème année)	1		12 9%	23 15%	4 5%	1	1	0	2	0	1
MAITRISE (4ème année)	5		5 4%	42 27%	2 3%	4	0	0	1	0	4
TOTAL	32+(7)	53	131	155	78	51	49	16	21	12	57

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

6.2.2. Répartition des procédures à l'exercice 6 par modèles exprimés. Corpus N. (Tableaux VI_3, VI_4).

Notons, en premier lieu, qu'on peut classer les modèles en deux paquets: ceux tels que plus de la moitié des étudiants concernés produisent des procédures correctes (6 ENC, 6 VAL, 6 PRO), et les autres.

Dans la première catégorie, on trouve les modèles dynamique, mixte, statique, préstatique, et les copies où les questions 1) et 2) ne sont pas abordées.

Au sein de ces modèles, on remarque que la procédure 6 PRO (utilisation correcte du théorème sur le produit des suites) est plus particulièrement produite par les étudiants ayant le modèle statique, dans une moindre mesure par les étudiants ayant le modèle mixte; par contre, la procédure 6 VAL (majoration de (u_n)) qui est toujours la plus utilisée des procédures correctes, sauf dans le cas statique, est plus particulièrement associée à l'expression d'un modèle mixte. On peut encore noter qu'aucune procédure 6 PLI, ni 6 MON (produit de limites, majorations) ne se trouvent dans les 40 copies où le modèle exprimé est statique et où l'exercice est abordé -36 copies sur 40 présentent une procédure correcte ! Il y a là une belle différence avec le modèle préstatique où 23 copies sur les 48 copies où l'exercice est abordé ne présentent pas une procédure correcte. Les modèles dynamique et mixte sont intermédiaires. Le modèle dynamique, comme le modèle préstatique, est plus associé aux procédures ambigües 6 PRA (produit), mais le modèle préstatique,lui,est aussi plus associé à la procédure 6 PLI (produit de limites). Le modèle dynamique monotone, avec ses 11 copies correctes sur 20 copies où l'exercice est abordé, est intermédiaire entre les deux catégories.

Dans la deuxième catégorie de modèles, on trouve les modèles primitifs -associés aux procédures 6 MON (essai d'application du théorème des suites monotones bornées) et 6 PLI (application erronée du théorème sur les produits de limites)-; on trouve aussi le modèle "tend vers" , et les copies sans modèles exprimés, qui présentent une répartition des procédures ayant les mêmes caractéristiques globales -autour de 40% de procédures correctes (surtout 6 ENC et 6 VAL-, des répartitions assez voisines des procédures 6 PRA et 6 PLI -autour de 10%-, peu de procédures 6 MON.

(VI_3) Procédures x modèles exprimés à l'exercice 6. Corpus N

Procédures à l'exercice 6 / Modèle exprimé	sans démonstration	procédures correctes			ambi gues	erronées						Modèles
	6 JSD Juste	6 ENC encadrement	6 VAL majoration	6 PRO produit juste	6 PRA produit amenuisé	6 PLI produit erroné	6 MON monotone	6 CSS confu. sans suite sérieuse	6 PAR cas parti culiers	6 NAB non abordé	6 NTE ou 6 DIF et 6 FSD	(Total)
PRIMITIF	6	5 4%	6 4%	0	2	10	5	2	2	9	9	56
TEND VERS	4	5 4%	7 4%	3 4%	4	6	2	2	0	5	8	46
DYNAMIQUE MONOTONE	1	4 3%	4 3%	3 4%	1	1	2	0	0	0	4	20
PAS DE MODELE EXPRIME	1	7 5%	7 4%	2 3%	6	2	2	0	1	2	8	38
TAUTOLOGIE	0	5 4%	0	1 1%	1	3	0	0	1	1	6	18
DEFINITION	1	2 1%	2 1%	1 1%	1	1	0	0	0	2	0	10
DYNAMIQUE	10	53 40%	58 37%	27 35%	22	12	1	8	6	21	13	231
PRESTATIQUE	3	10 8%	13 8%	2 3%	8	5	2	2	0	6	3	54
MIXTE	3	25 19%	35 23%	24 31%	4	7	2	4	1	5	4	114
STATIQUE	1	11 8%	11 7%	14 18%	2	0	0	1	0	1	0	41
NON ABORDE	2	4 3%	12 8%	1 1%	0	2	0	2	1	5	5	34
TOTAL	32	131	155	78	51	49	16	21	12	57	53+7	662

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

(VI_4) Procédures x modèles exprimés à l'exercice 6. Tableau résumé. Corpus N

Procédures à l'exercice 6 / Modèle exprimé	6 JSD	Procédures correctes dont procédures (6 VAL) entre parenthèses	Procédures ambigües 6 PRA	Procédures erronées 6 PLI + CSS + PAR + MON	Reste	Total abordés
PRIMITIF	6 13%	11 (6) 23%	2 4%	19 40%	9	47
TEND VERS	4 10%	15 (7) 37%	4 10%	10 24%	8	41
DYNAMIQUE MONOTONE	1 5%	11 (4) 55%	1 5%	3 15%	4	20
PAS DE MODELE EXPRIME	2 3%	27 (9) 44%	8 13%	10 16%	14	61
DYNAMIQUE	10 5%	138 (58) 66%	22 10%	27 13%	13	210
PRESTATIOUF	3 6%	25 (13) 52%	8 17%	9 19%	3	48
MIXTE	3 3%	84 (35) 77%	4 4%	14 13%	4	109
STATIQUE	1 2%	36 (11) 90%	2 5%	1 3%	0	40
NON ABORDE	2 7%	17 (12) 59%	0	5 17%	5	29
TOTAL	32 5%	364 (155) 60%	51 8%	98 16%	60	605

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages lignes calculés sur le total des abordés par modèle.

6.3. Comparaison des exercices 6 et 7 (Tableau VIs).

Il est intéressant de mettre en rapport les procédures utilisées dans l'exercice 6 et dans l'exercice 7. En effet, même si les énoncés ne sont pas les mêmes, les tâches proposées mobilisent, au moins partiellement, les mêmes connaissances.

On constate que sur les 302 étudiants ayant produit une procédure correcte à l'exercice 7, 13 n'abordent pas l'exercice 6 (soit 4%), et 228 produisent une procédure correcte à l'exercice 6 (soit 75%).

Ces procédures correctes à l'exercice 6 se répartissent en 28% de procédures 6 ENC, 52% de procédures 6 VAL, et 19% de procédures 6 PRO, alors que sur l'ensemble des procédures correctes à l'exercice 6, qu'elles soient ou non associées à une bonne procédure à l'exercice 7, la répartition est de 36% de 6 ENC, 43% de 6 VAL, 21% de 6 PRO. On note ainsi que les procédures 6 VAL (majoration de u_n au lieu d'encadrement de (u_n)), qui sont plus générales que les procédures 6 ENC, sont plus le fait d'étudiants réussissant également à l'exercice 7 que d'étudiants ne réussissant qu'à l'exercice 6. Si on regarde encore plus précisément, on constate que ce sont les procédures 7 DEC et 7 EQU qui sont plus associées à cette procédure 6 VAL que les procédures 7 DEF (éventuellement erronées, en tous cas, plus lourdes) et 7 PRO (utilisation astucieuse du théorème produit).

Autrement dit, il y a association privilégiée (si ce n'est majoritaire) des procédures les plus générales et les plus directes -à l'exception de celles qui font référence à une utilisation trop particulière d'un théorème.

D'autre part, sur les 155 étudiants ayant produit une procédure algébrique à l'exercice 7, 14 (soit 9%) n'abordent pas l'exercice et 47 (soit 30%) fournissent une procédure correcte à l'exercice 6.

Il est tout de même intéressant de constater que sur ces 47 étudiants, plus de la moitié (55%) donnent la procédure "élémentaire" 6 ENC et seulement 8 (17%) la procédure 6 PRO. Il y a 44 étudiants (soit 28%) qui utilisent ce même théorème produit de façon ambigüe (pour 19 d'entre eux) ou fausse (pour 25 d'entre eux).

Cela étant, c'est la procédure scalaire à l'exercice 7 qui est plus associée à la procédure 6 PLI, alors que c'est la procédure produit à l'exercice 7 qui est plus associée à la procédure 6 PRA. Tout se passe comme si les étudiants écrivant que $\lim \frac{1}{n} \cos n\theta = \lim \frac{1}{n} \times \lim \cos n\theta$ transforment leur procédure en $\lim nu_n = n \lim u_n$ dans l'exercice 7, alors que ceux qui livrent une procédure plus "nuancée" -peut-être parce qu'ils ont un léger doute- gardent $\lim nu_n = \lim n \times \lim u_n$ dans l'exercice 7. Ce n'est donc pas réellement l'utilisation de la procédure produit -spécifiquement- qui est à souligner, mais bien le recours à une procédure de type algébrique.

Exercice 6 x Exercice 7 Tableau VI_5 (corpus N)

Exercice 6 / Exercice 7	Procédures correctes dont	majoration d'un 6-VAL	encadrement de un 6-ENC	produit correct 6-PRO	procédures ambigues 6 PRA	procédures algébriques erronées 6 PLI	justes sans dém. 6 JSD	procéd. monotone 6 MON	non abordé 6 NAB	Total
Procédures correctes dont	228	119	64	45	16	8	6	5	13	302
définition sans changt. 7-DEF	67	30	22	15	7	4	2	3	8	106
définition avec changt. 7-DEC	109	60	28	21	6	3	0	1	1	128
équivalents 7-EQU	30	20	8	2	1	0	3	1	2	40
produit correct 7-PRO	22	9	6	7	2	1	1	0	2	28
procédures algébriques dont	47	13	26	8	19	25	16	6	14	155
procédure scalaire 7PSD-7PSC	20	5	11	4	8	16	9	6	10	90
procédure produit 7-PLI	27	8	15	4	11	9	7	0	4	65
procédures minoritaires erronées	57	18	22	17	10	11	6	5	10	119
non abordé 7-NAB	31	10	14	7	5	4	7	1	15	74
Total	364	155	131	78	51	49	32	16	57	

Enfin, sur les 119 étudiants ayant produit une procédure erronée de type minoritaire à l'exercice 7, presque la moitié (48%) donnent une procédure correcte à l'exercice 6, dont 39% la procédure 6 ENC, 31% 6 VAL, 30% la procédure 6 PRO, 10 n'abordent pas l'exercice, 10 produisent une procédure ambigüe 6 PRA, et 11 la procédure erronée 6 PLI. Tout ceci semble indiquer que le recours à ce type de procédures minoritaires dans l'exercice 7 est moins indicatif d'erreurs profondes que le recours aux procédures algébriques.

De la comparaison de ces procédures, on peut donc conclure que 75% des procédures correctes à l'exercice 7 sont associées à des procédures correctes à l'exercice 6, avec une association privilégiée 7 DEC-6 VAL; d'autre part, les procédures algébriques à l'exercice 7 sont associées, pour un tiers d'entre elles, à des procédures algébriques à l'exercice 6, et pour un autre tiers à des procédures correctes (surtout encadrement) -le dernier tiers se répartissant entre les non abordés, les non terminées et les divers faux. Enfin, presque la moitié des procédures peu utilisées sont associées à des procédures correctes à l'exercice 6 (équiréparties entre les trois procédures), le reste se répartissant en 20% de procédures algébriques, et le reste en non abordé, non terminé, et divers faux.

De l'autre point de vue, on constate que 42% des étudiants qui ont abordé l'exercice 6,sans aborder l'exercice 7, avaient produit une procédure correcte à l'exercice 6 -ceci souligne que nous ne devons pas assimiler trop vite copies non abordées et étudiants ayant séché sur l'exercice; seulement 20% des étudiants n'ayant pas abordé l'exercice 6, n'abordent pas l'exercice 7 non plus ! Par ailleurs, sur les 364 étudiants ayant affiché une procédure correcte à l'exercice 6, 63% seulement donnent une procédure exacte à l'exercice 7 -cela confirme que la tâche à l'exercice 7 est moins réussie que la tâche à l'exercice 6. Cela étant, les 51 procédures ambigües algébriques ne sont associées qu'à 16 procédures correctes à l'exercice 7 (soit 31%), et 19 procédures algébriques à l'exercice 7 (soit 37%), tandis que les procédures algébriques 6 PLI ne sont associées qu'à 8 procédures correctes (16%), et 25 procédures algébriques à l'exercice 7 (51%) -cela confirme la différence entre les deux, et une certaine stabilité du recours à l'algébrique.

Venons-en aux procédures monotones à l'exercice 6: il y en a 5 sur 16 (soit 31%) associées à des procédures correctes à l'exercice 7 (3 7-DEF, 1 7-DEC, 1 7-EQU), 6 associées à des procédures scalaires, et les 5 dernières réparties entre les procédures minoritaires -on ne peut rien conclure. Il en est de même de l'étude de la répartition des procédures 6 PAR et 6 CSS en procédures à l'exercice 7.

En conclusion, nous pouvons vérifier -aussi bien par les pourcentages de procédures correctes à l'exercice 6 (globalement plus de 60%), que grâce à la comparaison avec l'exercice 7- que la tâche de l'exercice 6 est plus réussie que les précédentes, comme nous nous y attendions. On ne peut cependant séparer le facteur "simplicité de la tâche" du facteur "bonne préparation à la tâche" dans l'explication de cette réussite.

D'autre part, grâce à la comparaison avec l'exercice 7, nous pouvons repérer qu'il existe, indépendamment de la complexité de la tâche, semble-t-il, chez un certain nombre d'étudiants, une tendance à recourir aux procédures algébriques erronées (même si ce ne sont pas les mêmes qui sont mobilisées).

Enfin, ce sont ici les procédures correctes les plus générales qui sont associées de manière privilégiée entre elles.

Deuxième partie : l'exercice 8.

Le texte initial de cet exercice est le suivant :

"Soit (u_n) une suite numérique et 1 un nombre réel. Montrer que si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 1, alors la suite (u_n) converge vers 1 ".

Il s'agit donc de vérifier qu'une suite -quelconque- est convergente, la limite étant donnée. Il n'y a guère le choix dans les méthodes conduisant au résultat, la définition en (ε,N) ou en termes de voisinage appliquée aux deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) permet d'exhiber un N convenable pour chaque ε à partir duquel $|u_n-1|<\varepsilon$. Eventuellement, on peut montrer -mais c'est bien compliqué et ça contient la démonstration précédente !- que la suite (u_n) est de Cauchy et donc converge vers 1 comme (u_{2n}).

6.4.0. Présentation des copies où l'exercice 8 est abordé.

L'exercice 8 est posé dans toutes les variantes, sauf V_8 -mais le texte V_1 ne concerne que 1055 copies. Comme dans les autres exercices, nous donnons les répartitions des procédures sur le corpus N des 662 copies correspondant au texte V_1 intégral. Nous vérifierons la stabilité des répartitions pour les copies des classes où le texte de l'exercice 8 est inchangé, et étudierons les répartitions obtenues dans les classes où la variante présentait une modification de l'énoncé de l'exercice 8 ou de l'ordonnancement du texte V_1 intégral.

Cela étant, sur les 662 copies N, 97 copies (15%) ne comportent rien sur l'exercice 8. La répartition de ces copies montre un taux plus élevé de "non abordé" en DEUG 1 tout de suite après le cours et, encore, moins de trois mois après le cours (30%); dans les autres niveaux, il n'y a pas d'irrégularités notoires, si ce n'est qu'en Math. Spé. et en Math. Sup. C plus de trois mois après le cours, il n'y a que 6% et 4% d'étudiants qui n'abordent pas l'exercice. Dorénavant, nous étudions essentiellement les 565 copies N (ou 997 copies S) où l'exercice 8 est abordé. Sont considérés comme ayant terminé l'exercice les étudiants qui livrent une conclusion avec une justification, ce sont, bien entendu, ces justifications que

Exercice 8 (VI'_0)

Tâche	Procédures rencontrées	Pourcentage sur le total des étudiants N ayant abordé l'exercice	Sigle
	ERRONEES	40%	
Vérifier qu'une suite (générale) est convergente, la limite l étant donnée, et intervenant comme limite commune des deux sous-suites d'indice pair et impair qui sont donc supposées convergentes.	. Estimation algébrique ou encadrement de u_n faisant intervenir u_{2n} et u_{2n+1}	7%	8 ALG
	. (u_n) est la réunion de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) donc converge vers l	5%	8 UNI
	. u_n appartient soit à (u_{2n}), soit à (u_{2n+1}), donc converge vers l	7%	8 LOC
D'une propriété sur des suites extraites il faut déduire la convergence de la suite (générale)	. En posant N=2n, on constate que u_N et u_{N+1} convergent donc u_N et u_n et divers faux	19%	8 MAG
	. Utilisation erronée du critère de Cauchy sous la forme $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0	2%	8 CAU
	CORRECTES	51%	
	. Utilisation de la définition en (ε,N) pour traduire les deux convergences et en choisissant (correctement ou non) N, établir de cette façon la convergence de (u_n)		8 DEF
	NON TERMINEES	9%	8 NTE
		Pourcentage sur le total des étudiants N	
	NON ABORDEES	.. 5%	8 NAB

nous analysons ici dans le premier paragraphe (6.4) (les procédures à l'exercice 8, les variantes -stabilités et différences-). Dans le deuxième paragraphe (6.5), nous étudions la répartition des procédures par niveaux et par modèles.
Enfin, dans la mesure où presque la moitié des étudiants ayant abordé l'exercice 7 utilisent la définition en (ε, N) (procédures 7 DEF et 7 DEC), nous terminons cette étude par la comparaison des procédures aux exercices 7 et 8 (paragraphe 6.6).
Nous joignons la liste des procédures à l'exercice 8 (Tableau VI'$_0$).

6.4.1. Les procédures à l'exercice 8.

a) Les procédures correctes.

Il s'agit des démonstrations qui consistent à écrire la définition en (ε, N) de la convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et à choisir, pour un ε quelconque, $n = \sup(2N_1(\varepsilon), 2N_2(\varepsilon) + 1))$ -avec des notations évidentes- comme rang à partir duquel $|u_n - 1| < \varepsilon$ si $n > N$.
Cette procédure a été baptisée 8 DEF par analogie avec les procédures 7 DEF et 7 DEC dans l'exercice 7 -où l'on utilisait également cette définition. Cependant, cette procédure est accompagnée chez un certain nombre d'étudiants de l'erreur suivante dans le choix de N : ayant choisi, pour ε donné, N_1 (resp. N_2) tels que si $n > N_1$ $|u_{2n} - 1| < \varepsilon$ (resp. $n > N_2$ $|u_{2n+1} - 1| < \varepsilon$) ils prennent $N(\varepsilon) = \sup(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$, rang qui ne convient manifestement pas. Cette erreur a reçu le sigle 8 FOR (erreur "formelle" ou "muette" qui ne met pas en cause la structure de la démonstration).
D'autres étudiants, peu nombreux, font d'autres erreurs formelles dans l'application de leur définition -fixant ε_1 et ε_2 et raisonnant sur $\sup(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ par exemple- on a regroupé ces erreurs avec la précédente.
Certains évitent la possibilité de telles erreurs en présentant leur solution agréablement par l'intermédiaire des intervalles $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$: un tel intervalle en effet, contenant tous les u_{2n} sauf un nombre fini, et tous les u_{2n+1}

sauf un nombre fini, contient tous les u_n sauf un nombre fini -c.q.f.d.
Globalement, toutes ces procédures correctes concernent 51% des copies (N).
Enfin, la procédure 8 DEF est quelquefois non menée à terme ou même abandonnée en cours de démonstration -si c'est la seule qui apparaît dans une copie non terminée, elle n'est pas prise en compte dans nos tableaux (sauf deux exceptions).

b) Les procédures erronées.

Comme le résultat était entièrement donné dans l'énoncé, il ne peut s'agir que de démonstrations fausses de la convergence de u_n vers 1 .

i) Les procédures algébriques. (8 ALG)

Dans un certain nombre de copies, on a trouvé des "estimations" algébriques du genre $u_n = u_{2n+1} + u_{2n}$ ou $u_n = \frac{1}{2}(u_{2n+1} + u_{2n})$ ou $u_n = u_{2n+1} - u_{2n}$ ou encore des majorations comme $u_n \leq u_{2n} \leq u_{2n+1}$ ou $u_{2n} \leq u_n \leq u_{2n+1}$.
De ces (in)égalités, on déduit plus ou moins directement le résultat cherché.
Ces procédures témoignent pour le moins d'une non-connaissance de la notion de la suite extraite. De plus, elles signalent une volonté de se ramener à une expression explicite de u_n .

ii) Les discours. (8 UNI, 8 LOC)

On a trouvé, dans d'autres copies, un essai de démonstration presque métamathématique de la convergence de (u_n) . Nous avons le sentiment, en lisant ces copies, que les étudiants trouvent la propriété demandée évidente et qu'un discours suffit à transmettre cette évidence.

* ou bien l'idée centrale est que la suite globale (u_n) est constituée de la réunion des deux sous-suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et que la convergence de (u_n) vers 1 découle ainsi "naturellement des deux convergences de l'hypothèse.

On a trouvé des phrases du type suivant :
"(u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites extraites de la suite u_n ; puisqu'elles convergent vers 1 et que leur réunion constitue (u_n) , $u_n \longrightarrow 1$ " (copie 0503)
Toutefois, s'il figure une égalité du genre $u_{2n} + u_{2n+1} = u_n$, même s'il y a

glissement entre l'idée d'union et l'introduction du signe + et si la conclusion est que (u_n) tend vers 1 , on range la procédure en 8 ALG (b) i)).
Dans certaines copies, les explications sont moins explicites: ainsi des phrases ne contenant pas le mot "union" ont encore été mises dans cette catégorie.

+ ou bien l'idée centrale est que u_n appartient soit à (u_{2n}) soit à (u_{2n+1}) et donc converge vers 1 (puisque c'est vrai dans les deux cas).

Ainsi, les démonstrations suivantes :
"si n est pair, u_n appartient aux valeurs de (u_{2n}) ; si n est impair, u_n appartient aux valeurs de (u_{2n+1}) ..." d'où vient le résultat. (copie [2302]).

iii) Les procédures magiques. (8 MAG)

Il s'agit des procédures suivantes, rencontrées surtout en DEUG première année:

On pose $N=2n$; il s'ensuit que $\lim u_N = 1$ (par hypothèse)

Mais, $\lim u_{N+1} = 1$ (par hypothèse)

Donc, $\lim u_n = 1$.

On voit à l'oeuvre une transformation formelle des données qui "par magie" conduit au résultat. En réalité, on a écrit autrement les hypothèses, et on ne s'est pas approché de la solution, mais il y a eu une sorte de reconnaissance de formes (abusive): comme u_N et u_{N+1} convergent, u_N (donc u_n) converge.

De la même façon, on trouve dans certaines copies :

$\lim z_{2n} = 1$ $\lim z_{2n+1} = 1$ ... $\lim z_n = 1$ (par une espèce de raisonnement reconnu abusivement comme une récurrence).

Enfin, le même ordre d'erreurs permet à certains d'affirmer que (u_n) converge parce qu'elle est extraite de (u_{2n}) et grâce au théorème du cours correspondant.

iv) Les procédures avec utilisation du critère de Cauchy. (8 CAU)

Il s'agit là de procédures erronées : en effet, on écrit que la suite $(u_{2n}-u_{2n+1})$ tend vers 0 -ce qui est vrai- mais on en déduit que la suite (u_n) est une suite de Cauchy, donc converge; et comme une suite extraite de cette suite converge vers 1 , la suite aussi a 1 pour limite. Il y a là une ignorance caractérisée du critère de Cauchy.

v) Le_reste. (8 MAG)

Les procédures erronées que nous n'avons pas encore citées sont trop diversifiées pour qu'on les ait distingué les unes des autres.

Citons les cas où le théorème (du cours) sur les suites extraites est cité et utilisé en lieu et place de sa réciproque sans autres commentaires d'ailleurs; des procédures -plus ou moins identifiables- font appel à la monotonie des suites évoquées; d'autres sont si confuses qu'on ne peut pas discerner la moindre méthode. Ces procédures concernent une dizaine de copies et ont été rangées avec les précédentes sous le sigle 8 MAG.

c) Les_copies_non_terminées. (8 NTE)

On en a déjà évoqué une partie. Dans les autres, souvent, on trouve cité le théorème des suites extraites sans conclusion, ou même accompagné de la réflexion réaliste

"c'est de la réciproque qu'on aurait besoin ici ..."

Tout se passe comme si la présence des suites extraites ne pouvait mobiliser que ce théorème; et que, comme il est inopérant ici, les étudiants restaient "coincés", sans pouvoir mobiliser autre chose.

Pour ce qui est de l'évolution, là encore, il n'y a pas d'ambigüités (8 JUS pour les résultats corrects à démonstrations correctes, 8 JDF sinon).

6.4.2. Les variantes à l'exercice 8: stabilités et différences.

Nous étudierons les répartitions des procédures correctes (8 DEF, y compris avec l'erreur 8 FOR) des procédures erronées (8 ALG + 8 LOC + 8 UNI + 8 CAU) et de la procédure 8 MAG pour obtenir des effectifs théoriques nous permettant un calcul de χ^2. Dans cet exercice, nous ne tenons pas compte des copies non abordées, non terminées -étant entendu que les effectifs correspondants ne semblent pas (à l'oeil nu !) trop différents. Nous indiquons cependant sur les tableaux le total des copies S concernées par notre comparaison (total partiel)

puis le total des copies où l'exercice est abordé, puis le total des copies concernées.

a) Les variantes qui n'en sont pas: V_5,V_6.

Aucun changement de texte n'est intervenu. Voici la répartition des procédures dans les classes concernées par (V_1,V_5).

Procédures (Copies S) Variante	correctes 8 DEF (8 FOR y compris)	Procédures erronées 8 ALG + 8 LOC + 8 UNI + 8 CAU	8 MAG	Total partiel	Total abordés	8 NAB non abordés	Total
V_1	35	4+3+3	9	54	62	13	75
V_5	18	1+3+2+3	10	37	42	8	50
Total	53	19	19	91			

On obtient χ^2=2,483 (v=2). Les distributions ne sont donc pas différentes de façon significative.

De la même façon, voici la répartition des procédures dans les classes concernées par (V_1,V_6).

Procédures (Copies S) Variante	correctes 8 DEF (8 FOR y compris)	erronées 8 ALG + 8 LOC + 8 UNI	8 MAG	Total partiel	Total abordés	8 NAB non abordés	Total
V_1	38	0+3+2	6	49	49	8	57
V_6	27	2+4+1	10	44	49	13	61
Total	65	12	16	93			

On obtient χ^2=2,900 (v=2).

Il apparaît que lorsque les textes ne sont pas changés, les répartitions des procédures ne sont pas différentes.

b) Pas de changement dans l'exercice, mais autre présentation des premières questions: la variante V_4.

De plus, dans l'énoncé correspondant, les indices "$n \in \mathbb{N}$" sont explicités pour chaque suite; voici cet énoncé:

" 7) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique et l un nombre réel. Montrer que si la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers l, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l ".

Voici la répartition des procédures dans les classes concernées par (V_1, V_4):

On trouve $\chi^2 = 1{,}414$ (v=2). Aucune différence significative en conséquence.

Procédures (Copies S) Variante	Correctes 8 DEF (8 FOR Ycompris)	erronées 8 ALG + 8 LOC + 8 UNI 8 CAU	8 MAG	Total partiel	Total abordés	8 non abordés	Total
V_1	14	3 + 3 + 2 + 1	10	33	43	10	53
V_4	9	3 + 3 + 4	5	24	30	9	39
Total	23	19	15	57	73		

c) Pas de changement dans le texte de l'exercice, mais changements d'ordre dans les exercices précédents l'exercice 8 -l'exercice 10 mis à part-: V_{10} (l'exercice 8 est posé en 8)), V_9 (l'exercice 8 est posé en 9)), V_{11} (l'exercice 8 est posé en 6)).

Procédures (Copies S) Variante	Correctes 8 DEF (8 FOR Ycompris)	erronées 8 ALG + 8 LOC + 8 UNI 8 CAU	8 MAG	Total partiel	Total abordés	8 NAB	Total
V_1	12	5 + 6 + 4	14	41	42	8	54
V_{10}	13	5 + 11 + 4 + 2	7	42	48	12	60
Total	25	37	21	83			

On obtient $\chi^2 = 3{,}660$ (v=2). Toujours pas de différences significatives.

Procédures (Copies S) Variante	Correctes 8 DEF (8 FOR Ycompris)	erronées 8 ALG + 8 LOC + 8 UNI 8 CAU	8 MAG	Total partiel	Total abordés	8 NAB	Total
V_1	31 53%	3 + 4 + 3 27%	$17_{61\%}$	$58_{49\%}$	67	11	78
V_9	22	5 + 4 + 10 + 8	11	60	73	18	91
Total	53	37	28	118			

On trouve $\chi^2 = 10{,}547$ (v=2). Là, par contre, l'exercice est plus "mal" résolu avec le texte V_9 -il apparaît une différence (significative) entre les procédures erronées plus nombreuses dans le texte V_9- à l'exception de 8 MAG.

Les pourcentages indiqués dans le tableau sont des pourcentages colonnes.

Procédures (copies) / Variante	correctes	erronées					
	8 DEF (8 FOR Y compris)	8 ALG + 8 LOC + 8 UNI 8 CAU	8 MAG	Total partiel	Total abordés	8 NAB non abordés	Total
V_1	58 67%	2 + 4 + 3 + 1 53%	7 39%	75 61%	78	12	90
V_{11}	28	2 + 3 + 4 + 0	11	48	49	15	64
Total	86	19	18	123			

On trouve χ^2=5,839 (v=2). Là par contre, ce sont les procédures 8 MAG qui sont significativement plus nombreuses avec le texte V_{11}.

Les pourcentages indiqués dans le tableau sont des pourcentages colonnes.

d) Inversion des exercices 8 et 10: V_7.

Procédures (copies) / Variante	correctes	erronées					
	8 DEF (8 FOR Y compris)	8 ALG + 8 LOC + 8 UNI 8 CAU	8 MAG	Total partiel	Total abordés	8 NAB non abordés	Total
V_1	23	4	1	28	32	4	36
V_7	22	4	3	29	30	1	31
Total	45	8	4	57			

Pour calculer le χ^2, on doit regrouper la deuxième et la troisième colonne. On trouve χ^2=0,342 (v=2), donc pas de différence significatives.

e) Changement de vocabulaire : la variante V_2.

Procédures (copies) / Variante	correctes	erronées				
	8 DEF (8 FOR Y compris)	8 ALG + 8 LOC + 8 UNI 8 CAU	8 MAG	Total partiel	Total abordés	Total
V_1	32	21	7	60	61	67
V_2	28	21	6	55	57	62
Total	60	42	13	115		

Sans même calculer le χ^2 (qui vaut 0,122), on constate des répartitions identiques.

f) Changement de notation: la variante V_3.

Procédures (copies) / Variante	correctes	erronées				
	8 DEF (8 FOR Y compris)	8 ALG + 8 LOC + 8 UNI 8 CAU	8 MAG	Total partiel	Total abordés	Total
V_1	11 39%	19 53%	17 71%	47 53%	56	70
V_3	17	17	7	41	55	73
Total	28	36	24	88		

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

Au contraire, on trouve $\chi^2=5,255$. Là, les répartitions sont différentes. Il est facile de constater que la variante V_3 présente plus de procédures correctes et moins de procédures erronées -mais la diminution ne porte que sur la procédure 7 MAG. Tout se passe comme si le changement de vocabulaire jouait pour rendre lës étudiants plus attentifs, et empêchait certaines erreurs sur le formalisme.

En conclusion,dans cet exercice, si , dans l'ensemble, les variantes n'apportent pas de changement significatif dans la répartition des procédures, on peut noter trois exceptions. Le texte V_3 où l'exercice est posé "plus tôt et où le formalisme utilisé (z_n à la place de u_n) rend peut-être les étudiants moins soumis à leurs automatismes,est mieux réussi que le texte V_1 correspondant,avec moins de procédures erronées non magiques.Nous avions déjà souligné un effet identique (mais non significatif) dans l'exercice 5;nous avions alors nuancé nos conclusions par l'incertitude sur le caractère aléatoire de la distribution des textes V_1 et V_3 dans les classes concernées.

Les textes V_9 et V_{11} au contraire pour les quels l'exercice est posé respectivement en 9) et en 6) , sont moins bien réussis que les textes V_1 correspondants avec plus de procédures erronées non magiques pour le premier et plus de procédures magiques pour le second.Nous n'avons pas d'explication particulière à proposer sur ces différences,d'autant plus que c'est l'ensemble du texte qui est changé dans les deux cas;il pourrait donc y avoir des "effets de contexte" globaux;de plus il y a peu d'étudiants qui ont eu entre les mains V_{11} et ils n'ont pas répondu le même jour que leurs camarades qui ont résolu V_1.Enfin, dans le texte V , on pourrait évoquer un effet de fatigue comme dans le cas des modèles et contrairement à ce qu'on a vu pour l'exercice 5("effet de chauffe") .

Y a-t il des différences sélectives de comportement suivant la tâche et suivant la place d'un exercice?

Des recherches beaucoup plus précises doivent être tentées pour éclaircir ces phénomènes.

6.5. Répartition des procédures à l'exercice 8.

6.5.1. Répartition des procédures par niveau (Tableau VI$_8$), (Corpus N).

a) Les procédures correctes (8 DEF).

Si aucun des trois groupes ne présente une répartition semblable par niveau, il y a tout de même des différences encore plus importantes entre les groupes qu'entre les niveaux au sein de chaque groupe.

Dans le premier groupe (DEUG 1,2), ces procédures (8 DEF) sont toujours le fait de moins de la moitié des étudiants ayant abordé la question. Cependant, la proportion augmente régulièrement puisqu'elle passe de 7% en DEUG tout de suite après le cours à 31% en DEUG 2, avec 11% et 17% dans les deux niveaux intermédiaires de première année. De plus, ce sont presque exclusivement les procédures présentant l'erreur d'indice (8 FOR) qui sont relevées en DEUG première année; au contraire, parmi les copies de DEUG 2 concernées, il y a presque moitié-moitié de procédures 8 DEF entièrement correctes et de procédures avec l'erreur 8 FOR.

Dans le troisième groupe, l'évolution est différente. Les procédures correctes sont le fait d'au moins 2/3 des étudiants par niveau -mais cette proportion est plus élevée en SUP. (78%), et surtout en maîtrise où 91% des étudiants l'emploient ! Il n'y a qu'en licence où on trouve un peu plus de procédures présentant l'erreur 8 FOR- dans tous les autres niveaux du groupe, les procédures entièrement correctes sont majoritaires, avec un record en SUP (66% des procédures 8 DEF sont sans erreurs).

Dans le deuxième groupe (Sup. C), moins d'un mois après le cours on trouve un peu moins de la moitié de procédures 8 DEF parmi les copies où l'exercice est abordé (40%), mais on dépasse largement ce seuil plus de trois mois après (73%).

Cependant, ce sont les procédures où se trouve l'erreur d'indice qui sont les plus nombreuses (autour de 2/3 du total).

b) Les procédures erronées.

Il y a lieu de distinguer entre 8 MAG et les quatre autres: 8 CAU, 8 ALG, 8 LOC, 8 UNI.

i) La procédure 8 MAG.

Elles sont caractéristiques du premier groupe, où se distinguent le premier niveau et les trois autres: en DEUG tout de suite après le cours, en effet, un étudiant sur deux a recours à une telle procédure ! Ensuite, il y a à peu près 30% des étudiants de chaque niveau qui continuent à recourir à cette procédure. Il y a là un phénomène intéressant: cette "fausse" formalisation est utilisée massivement en DEUG tout de suite après le cours. Cela peut dénoter une incompréhension de la notion de "suite" en tant qu'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Ces procédures se rencontrent beaucoup moins dans les deux autres groupes où elles ne représentent plus que 5% à 13% des procédures (troisième groupe), et 6% à 19% des procédures (deuxième groupe).

ii) La procédure 8 CAU.

Elle n'est utilisée que dans 12 copies, dont 8 proviennent de Sup. , Spé. -on ne peut rien dire de sa répartition.

iii) Les procédures 8 ALG, 8 LOC, 8 UNI.

Nous les avons réunies pour en étudier l'évolution -à cause des ambigüités dont le discours de chacune est porteuse. Ainsi, peut-on se poser des questions sur le "glissement" de l'idée "union", à l'idée "somme" ... Globalement, elles sont représentées presque de la même façon (7%, 7%, 5%).

Procédures x niveaux à l'exercice 8. Tableau VI_6 Corpus N

Procédures à l'exercice 8 / Niveau	8 DEF (1ère correcte (y compris 8 FOR)	1ère procédure correcte, erreur Formelle 8-FOR	8 ALG algébrique	8 LOC discours	8 UNI	8 MAG magique	8 CAU Cauchy	8 NTE non terminé	Total des abordés	8 NAB non abordé
DEUG I après le cours sans exercices	3 7%	2	11	0	4	22	0	4	44	20
DEUG I moins de 3 mois après le cours	5 11%	5	5	9	2	15	1	9	46	20
DEUG I plus de 3 mois après le cours	8 17%	7	4	6	7	15	1	7	48	7
DEUG 2ème année	27 31%	14	6	8	4	25	2	14	86	15
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	17 40%	11	4	6	5	8	0	2	42	6
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	19 73%	13	3	0	0	2	0	2	26	5
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	73 78%	25	1	4	4	6	3	2	93	4
MATH. SPE.	57 66%	21	5	3	2	5	5	9	86	6
LICENCE (3ème année)	26 68%	14	1	1	3	5	0	2	38	7
MAITRISE (4ème année)	51 91%	24	0	1	0	3	0	1	56	7
TOTAL	296 51%	136	40 7%	38 7%	31 5%	106 19%	12 2%	52	565	97

(1) Les pourcentages sont des pourcentages lignes, calculés sur le total des abordés par niveau.

Dans le premier groupe, on note une évolution différente de celles qu'on a déjà pu observer: c'est pendant toute la première année de DEUG que ces procédures sont utilisées, par un tiers environ des étudiants, alors qu'en DEUG 2 la proportion baisse à un cinquième environ. Par contre, les répartitions de chacune de ces trois procédures ne sont pas identiques. La procédure"algébrique" est de moins en moins utilisée (et c'est la plus "mauvaise"). Pour les deux autres, c'est plus flou: la procédure "locale" passe de 20% en DEUG moins de trois mois après le cours à 10% ensuite, et la dernière oscille entre 5% et 15%. Dans le troisième groupe, c'est la disparition de ce type de procédures en maîtrise (1 sur 56) qui nous semble devoir être soulignée. Dans les trois autres niveaux, on en trouve de 9% à 13%, sans régularité notoire dans leur répartition. Dans le deuxième groupe, on retrouve l'évolution entre les deux niveaux (déjà observée plusieurs fois); presque 36% des procédures de Sup. C moins d'un mois après le cours sont de ce type (équiréparties), alors qu'il n'y en a que 12% en Sup. C plus de trois mois après le cours.

En résumé, le premier groupe est caractérisé par une majorité de procédures incorrectes (surtout 8 MAG), mais aussi par une évolution marquée vers une amélioration des procédures -augmentation régulière des procédures correctes, diminution en deux temps des procédures incorrectes (8 MAG dès le deuxième niveau du DEUG, les trois autres, seulement en deuxième année). Il y a progrès dans la possibilité de mobiliser la définition en (ϵ,N) sans intermédiaires.
Dans le troisième groupe, les procédures correctes sont très largement majoritaires; le phénomène est accentué en Sup. et surtout en maîtrise où il n'y a presque plus de procédures incorrectes qu'elles qu'elles soient.
Enfin, le deuxième groupe est parfaitement intermédiaire, avec le premier niveau plus proche du premier groupe -mais meilleur que tous les niveaux correspondants et le deuxième niveau proche du troisième groupe.

6.5.2. Répartition des procédures à l'exercice 8 par modèles exprimés.

(Tableaux VI_7 et VI_8).

Nous avons surtout travaillé sur le tableau résumé VI_8 où sont regroupées les procédures erronées 8 UNI, 8 LOC, 8 ALG, 8 CAU. On retrouve une répartition très contrastée qui rappelle les précédentes répartitions par modèles exprimés.

Les modèles primitifs sont plus associés aux procédures erronées -tout particulièrement à la procédure 8 MAG qui correspond à une incompréhension fondamentale de la notion même de suite, application de N dans R .

Les modèles dynamiques sont globalement plus associés aux procédures correctes qu'aux autres -mais parmi les procédures erronées, tout particulièrement associées aux procédures 8 UNI et 8 LOC (discours correspondant à une interprétation de la suite comme union des deux autres globalement ou localement).

Le modèle mixte est associé nettement plus aux procédures correctes qu'aux autres; c'est encore plus évident dans le cas des modèles statiques pour lesquels 82% des étudiants concernés produisent une procédure 8 DEF.

Le modèle préstatique reste, au contraire, légèrement plus associé à des procédures erronées, surtout 8 LOC et 8 ALG -évaluation algébrique de u_n ou majorations de u_n .

Les copies sans modèles exprimés, ou bien avec un modèle "tend vers", ou bien avec un modèle dynamique monotone sont plus associees elles aussi à des procédures erronées qu'à des procédures correctes, avec des répartitions assez peu différentes entre les divers types de procédures erronées.

Par contre, les copies où les questions 1) et 2) ne sont pas abordées sont aux deux tiers associées à des procédures correctes !

VI$_7$

Procédures x modèles exprimés à l'exercice 8. Corpus N

Procédures à l'exercice 8 / Modèles	8 DEF correcte	8 UNI discours	8 LOC	8 ALG erronées	8 CAU	8 MAG	Divers et NTE non terminés	8 NAB non abordé	Modèles (effectifs totaux)
PRIMITIF	11 4%	2	7	3	0	18 17%	8	7	56 8%
TEND VERS	10 3%	0	2	7	1	10 9%	9	7	46 7%
DYNAMIQUE MONOTONE	7 2%	1	1	2	1	4 4%	2	2	20 3%
PAS DE MODELE EXPRIME	10 3%	2	0	3	1	9 8%	7	6	38 6%
TAUTOLOGIE	4 1%	1	0	2	0	3 3%	1	7	18 3%
DEFINITION	4 1%	0	0	1	0	1 1%	1	3	10 2%
DYNAMIQUE	103 36%	14	18	14	3	36 34%	11	32	231 35%
PRESTATIQUE	19 7%	4	4	5	3	8 8%	5	6	54 8%
MIXTE	70 24%	6	1	2	2	12 11%	6	15	114 17%
STATIQUE	31 11%	0	4	1	1	0 0	1	3	41 6%
NON ABORDE	17 6%	1	1	0	0	5 5%	1	9	34 5%
TOTAL	286	31	38	40	12	106	52	97	662

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

VI$_8$ Procédures x modèles exprimés à l'exercice 8. (Tableau résumé)

Corpus N

Procédures à l'exercice 8 / Modèles exprimés	8 DEF Corrects	8 UNI + 8 LOC + 8 ALG + 8 CAU erronées		8 MAG erronés	Reste	Total abordés
PRIMITIF	11 22%	12	24%	18 37%	8	49
TEND VERS	10 26%	10	26%	10 26%	9	39
DYNAMIQUE MONOTONE	7 39%	5	28%	4 22%	2	18
PAS DE MODELE EXPRIME	18 36%	10	20%	13 26%	9	50
DYNAMIQUE	103 52%	49	25%	36 18%	11	199
PRESTATIQUE	19 40%	16	33%	8 17%	5	48
MIXTE	70 71%	11	11%	12 12%	6	99
STATIQUE	31 82%	6	16%	0	1	38
NON ABORDE	17 68%	2	8%	5 20%	1	25
TOTAL	286 51%	121	21%	106 19%	52	565

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages lignes calculés sur le total des abordés par modèle.

6.6. Comparaison des exercices 8 et 7.

Le tableau croisant les procédures aux exercices 7 et 8 révèle une forte cohérence des productions des étudiants. Ainsi, 79% des étudiants ayant fourni une procédure correcte à l'exercice 8 et ayant abordé l'exercice 7 y ont effectivement fourni une procédure correcte -de même 75% des étudiants ayant proposé une procédure correcte à l'exercice 7 et ayant abordé l'exercice 8 ont proposé également pour ce dernier une procédure correcte. A l'opposé, 72% des étudiants ayant fourni une procédure erronée à l'exercice 8 et ayant abordé l'exercice 7 ont également produit une procédure erronée à ce dernier--de même, 63% des étudiants qui ont proposé pour l'exercice 7 une procédure erronée et qui ont abordé l'exercice 8 ont proposé également une procédure erronée à l'exercice 8.

Regardons maintenant le détail de ce croisement, et en premier lieu, l'origine des procédures correctes simultanées aux exercices 7 et 8. On peut souligner que parmi les procédures tout à fait correctes à l'exercice 8 (celles qui ne présentent pas l'erreur sur les indices), 91% sont associées à des procédures correctes à l'exercice 7, parmi elles, de plus, le pourcentage de procédures 7 DEC (utilisation de la définition avec changement de stratégie) est de plus de 50% -(54%)- ce qui est supérieur au pourcentage global de toutes les procédures 7 DEC par rapport à toutes les procédures correctes à l'exercice 7.

Autrement dit, il y a association privilégiée entre les procédures 7 DEC et 8 DEF sans l'erreur sur les indices.
De même, il y a plus de la moitié de telles procédures parmi les procédures correctes à l'exercice 8 associées à des procédures correctes à l'exercice 7, alors que globalement, parmi les procédures correctes à l'exercice 8, c'est le contraire (il y a plus de la moitié de 8 FOR). Or, cela provient essentiellement des procédures 7 DEC et 7 PRO.
Si on a su utiliser la définition correctement dans l'exercice 8, on a de grandes chances d'avoir utilisé une procédure correcte dans l'exercice 7, et plus particulièrement la procédure 7 DEC. Dans la mesure où la procédure 8 BIE est plus simple que les procédures 7 DEF et 7 DEC, cela dénote bien une forte cohérence dans les copies.

La répartition des procédures correctes à l'exercice 7 associées à des procédures erronées à l'exercice 8 correspond à la répartition globale de ces procédures erronées: 7% pour les premières sont du type 8 UNI ou 8 LOC, 12% globalement des procédures erronées à l'exercice 8 sont de ce type, etc ... Cependant, ce sont les procédures 7 DEF qui fournissent le plus fort contingent relatif de procédures erronées à l'exercice 8, ce qui n'a encore une fois rien d'étonnant -au contraire. Quant aux procédures correctes à l'exercice 8 associées à des procédures erronées à l'exercice 7, ce sont surtout des procédures 8 FOR, associées à des erreurs du type 7 SSR (erreurs sur les nombres réels et confusions suites-séries) pour 27% d'entre elles, et à des procédures algébriques pour 45% d'entre elles.

Corpus N

Tableau VI_9

Exercice 7 x Exercice 8

Exercice 7 \ Exercice 8	Non abordés	UNI + LOC procédures discours	ALG procédures erronées algébr.	MAG magiques	Procédures erronées	8DEF sans 8FOR utilisation de la définition	8FOR	Procédures correctes 8 DEF	NTE non terminé	Total	Total abordés
Non abordés	27	4	2	10	16	10	13	23	7	74	47
Procédures correctes	24	19	8	24	51	114	94	208	13	302	278
7 DEF définition sans chang	11	8	5	8	21	28	36	64	7	106	95
7 DEC définition avec chang	9	5	1	7	13	62	42	104	2	128	119
7 EQU $u_n \sim \frac{1}{n}$	4	6	1	8	15	9	8	17	2	40	36
7 PRO $u_n = \frac{1}{3}$ sinus	0	0	1	1	2	15	8	23	3	28	28
Procédures algébriques	27	31	13	41	85	6	15	21	20	155	128
Procédures scalaires	12	19	8	27	54	3	8	11	11	90	78
Procédures produit	15	12	5	14	31	3	7	10	9	65	50
Procédures erronées minoritaires	18	18	17	23	58	12	18	30	13	113	100
Procédures erronées	45	49	30	64	143	18	33	51	33	274	228
NTE non terminées	9	7	4	16	27	8	7	15	11	61	52
erreurs formelles	13	8	1	10	19	50	53	103	3	141	128
Total	97	69	40	106	215	150	136	286	56		
Total abordés		65	38	96	199	140	123	263	49		

Détail des procédures erronées minoritaires

Exercice 7 \ Exercice 8	Non abordés	8UNI + 8LOC discours	8ALG algébr.	8MAG magiques	8CAU Cauchy	Total erroné	8DEF sans 8FOR	8FOR erreur formelle	Total Corrects	Total
7 CAU Cauchy	2	2	1	0	0	3	3	2	5	8
7 DVG absurde	2	6	3	3	0	12	3	6	9	21
7 EGA $u_n = \frac{1}{n}$	3	1	5	7	1	14	0	0	0	14
7 SSR confusions suites/séries	8	2	5	5	1	13	5	9	14	27
7 ETO $u_n = nu_n$	0	2	2	3	0	7	1	0	1	8
7 PEG $u_n \simeq \frac{1}{n}$	3	3	1	5	0	9	0	1	1	10
Total	18	16	17	23	2	58	12	18	30	88

Si nous nous intéressons maintenant au détail des procédures erronées, nous pouvons déjà remarquer qu'il n'y a pas de copies où soient utilisées simultanément les procédures 7 CAU et 8 CAU -il n'y a pas de "réflexe de Cauchy" chez les étudiants de notre population ! Les procédures erronées minoritaires à l'exerice 7 se divisent en trois groupes; il y a les trois procédures 7 EGA ($u_n = \frac{1}{n}$), 7 ETO (nu_n et u_n confondus), 7 PEG ($u_n \simeq \frac{1}{n}$) associées à au moins 88% de procédures erronées à l'exercice 8; on peut même souligner une association privilégiée 7 EGA, 8 ALG et 8 MAG. Vient ensuite la procédure 7 DVG (raisonnement par l'absurde réducteur) associé à 57% de procédures erronées à l'exercice 8 -là, au contraire, il y a association privilégiée avec 8 UNI et 8 LOC; enfin, les procédures 7 SSR et 7 CAU sont associées à plus de 50% de procédures correctes. Tout ceci nous paraît une confirmation supplémentaire (et assez fine) de la cohérence des copies. Ainsi, les procédures du premier groupe correspondent à des erreurs conceptuelles (volonté d'expliciter u_n), alors que les autres (au moins la première et la dernière) auraient pu être correctes (7 SSR -elle regroupe des procédures fort différentes). Or, on a analysé que la procédure 8 ALG relève aussi de la volonté d'expliciter u_n, alors que les procédures 8 UNI et 8 LOC correspondent plus à une imprécision fondamentale qu'à des erreurs.

Les procédures algébriques erronées à l'exercice 7 associées à des procédures erronées à l'exercice 8 (qui représentent 66% de toutes les procédures algébriques erronées à l'exercice 7) présentent une répartition entre 8 UNI et 8 LOC, 8 ALG et 8 MAG, proche de la répartition globale des procédures erronées à l'exercice 8 entre ces trois types. Il n'y a donc pas d'association privilégiée avec 8 ALG en particulier, ce qui peut confirmer la différence entre appliquer un théorème algébrique en oubliant le présupposé d'existence des limites, et vouloir expliciter u_n.
Inversement, mais toujours dans le même sens, c'est la procédure 8 ALG qui est le moins associée à des procédures correctes à l'exercice 7, suivie par 8 MAG, puis par 8 UNI et 8 LOC; on retrouve aussi que cette procédure est plus associée à des procédures minoritaires erronées à l'exercice 7 que les autres, plus associées à des procédures algébriques erronées à l'exercice 7.

Pour résumer, on voit se confirmer une forte cohérence dans la production des procédures aux deux exercices, tenant même compte de la hiérarchie plus fine qu'on a pu établir entre les procédures erronées (8 UNI, 8 LOC, "moins"erronées que 8 ALG et 8 MAG, certaines procédures minoritaires "moins erronées" que les autres ou que les procédures algébriques à l'exercice 7).

En conclusion, il apparaît que la tâche de l'exercice 8, bien qu'apparemment plus élémentaire que celle de l'exercice 7 est réussie globalement dans les mêmes proportions, et dans une grande mesure, simultanément par les étudiants. On peut penser qu'à partir du moment où on sait faire fonctionner la définition, on sait le faire dans ces deux tâches.

De la comparaison avec l'étude précédente sur l'exercice 6, on peut déduire que, par contre, majorer correctement $|u_n|$ (ou encadrer u_n) sont des tâches qui peuvent être réussies par certains étudiants ne sachant pas faire fonctionner la définition en (ε,N) . On ne peut pas déduire de ce travail qu'il y a là un effet de l'enseignement (cf. les tâches les plus fréquemment proposées) ou une difficulté "conceptuelle" -ou les deux à la fois !.

Troisième partie : l'exercice 10.

L'exercice 10.

"Est-ce que si deux suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite converge ?"

Il s'agit, là encore, comme dans l'exercice 5, de décider si un énoncé est vrai ou faux (en fait, il n'y a pas d'autres alternatives); comme c'est faux, il suffit d'exhiber un contre-exemple -si l'énoncé est considéré comme vrai, une démonstration est de rigueur. La difficulté de l'exercice porte sur la conception des suites extraites: si on réalise qu'on peut choisir (par exemple) deux suites extraites de la même sous-suite convergente d'une suite ayant deux valeurs d'adhérence, on obtient des contre-exemples extrêmement simples. Ainsi, avec $(u_n) = (-1)^n$, $(u_{2n}) = 1$, $(u_{4n}) = 1$ ... De plus, dans l'exercice 8 précisément, on a démontré que si les deux sous-suites étaient (u_{2n}) et (u_{2n+1}), la propriété devenait vraie; ceci peut amener à construire des sous suites dont la réunion n'est pas la suite globale.

6.7.0. Présentation des copies où l'exercice 10 est abordé.

Cet exercice est posé dans 648 copies N (il y a une classe où le texte V_1 n'a pas été posé jusqu'au bout); il ne figure pas dans la variante V_6 -il y a donc 1 163 copies S concernées.

Nous donnerons la répartition des procédures et des performances pour les copies N, par niveaux et par modèles exprimés, après les avoir décrites et avoir vérifié les stabilités ou différences engendrées par les variantes de l'énoncé.

Il faut remarquer que cet exercice est moins abordé que les précédents -en moyenne 25% des étudiants N (et S) ne l'ont pas abordé, avec plus de la moitié des effectifs N (et S) en DEUG première année tout de suite après le cours.

Nous pensons déceler là un problème de lenteur éventuellement conjugué à un manque d'exemples simples mobilisables et peut-être à une non connaissance de la notion de "suite extraite". Après la présentation des procédures à l'exercice 10 (6.7.1 et 6.7.2.), et l'exposé de leur répartition par modèles et par niveaux (6.3) nous terminons par la comparaison des exercices 8 et 10. La liste des procédures (avec le sigle que nous leur avons affecté) est jointe dans le tableau VI''_0.

$Y1''_0$ Exercice 10.

Tâche	Procédures rencontrées	Pourcentage sur le total des étudiants N ayant abordé l'exercice.	Sigle
	DEMONSTRATIONS ERRONEES	10%	0 Div
Décider si une suite (générale) dont deux sous-suites admettent la même limite converge. si la réponse est "non", exhiber un contre-exemple ou justifier. sinon démontrer la proposition	CONTRE-EXEMPLES INCORRECTS	5%	0 EXF
	CONTRE-EXEMPLES CORRECTS OU JUSTIFICATION	54%	
	. Contre-exemple avec $(-1)^n$ sur (2 n) etc	40%	0 BIE
	. Justification métamathématique	14%	0 JSE
	REPONSES SANS DEMONSTRATIONS	31%	
	. Réponse bonne non justifiée	15%	0 JSD
	. Mauvaise réponse non justifiée	16%	0 FSD
D'une propriété concernant deux suites extraites d'une suite donnée, déduire une propriété de convergence de la suite (générale).	NON TERMINEES	3%	
	NON ABORDEES	25%	0 NAB

6.7.1. Les procédures à l'exercice 10.

a) Les réponses sans démonstration.

Il y a 152 copies -31% des copies N où l'exercice est abordé- où figure une réponse "oui" (erronée)(80 copies) ou "non" (exacte)(72 copies) sans autre justification. Ces réponses sont baptisées respectivement O-FSD et OJSD.

Il peut paraître intéressant de comparer ces "procédures" à celles similaires de l'exercice 5 (cela sera fait au chapitre 7).

b) Les procédures correctes.

Il y a d'abord les copies où est exhibé un contre-exemple probant. On trouve surtout des contre-exemples formés avec la suite $(-1)^n$ ou plus rarement la suite $(\sin 2\pi n)$, ou construits (pour la cause) par juxtaposition de trois sous-suites (u_{3p}), (u_{3p+1}), (u_{3p+2}) convenables. Elles représentent 193 copies -40% des copies N où l'exercice est abordé- et la procédure correspondante est baptisée O BIE.

On trouve aussi dans 69 copies (14% des copies N où l'exercice est abordé) une justification moins précise de la réponse correcte -sans contre-exemples explicites- soit métamathématique, soit elliptique, soit encore sans conclusion bien nette.

Ainsi, on a lu des "commentaires" allant du "non, pas forcément" (2 906) aux explications du style "non, car si les deux sous-suites ne regroupent pas tous les termes, on ne peut rien dire" (2 926), ou encore "c'est faux, mais on a l'implication inverse -si (u_n) converge, toute suite extraite converge" (2 719), ou enfin, citant une des méthodes de construction possible de contre-exemples, ou même citant la suite globale d'où on pourrait extraire deux sous-suites adéquates -sans le faire-.

Cette procédure a reçu le sigle O JSE.

c) Les procédures erronées.

Il reste les 72 copies (15% des copies N où l'exercice 10 est abordé) ne relevant d'aucune procédure précédente: 26 copies où la réponse correcte est accompagnée d'une justification erronée insuffisante, 37 copies où la réponse est incorrecte et accompagnée de commentaires erronés, et enfin, 9 copies où la réponse n'est

pas formulée -bien que l'exercice soit abordé.

La plupart des copies relevant d'une démonstration fausse du bon résultat présentent un contre-exemple faux (procédure 0 EXF) ou trop peu convaincant pour être généralisable:

Ainsi, a-t-on extrait de la suite $u_n = (-1)^n$ la même sous-suite deux fois (u_{2n}) et (u_{2n+2}) (interprétation trop restrictive); ou encore on n'a pas tenu compte de l'hypothèse de l'énoncé, à savoir que les deux sous-suites convergeaient vers la même limite, en prenant avec $u_n = (-1)^n$, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) comme suites extraites convergentes; on a aussi trouvé que la suite $(1/n)$ était extraite de la suite (n)(2 607) (1 819), ou bien on a extrait de la suite $(u_n = \sin n)$ la sous-suite correspondant à $\pi/2 < n < \pi$ qui converge vers 0 et celle qui correspond à $3\pi/2 < n < 2\pi$ qui a la même propriété, etc ... Enfin, on a pu lire que si v_n et w_n convergent vers 1, $u_n = v_n - w_n$ (suite dont v_n et w_n sont extraites) converge vers 21 ou 0, ce qui montre que l'énoncé est faux.

Quant aux copies -peu nombreuses- où l'énoncé est estimé être vrai, qui représentent 5% des copies N où l'exercice 10 est abordé, elles relèvent de procédures trop variées pour qu'on les ait retenues individuellement. On les a regroupées sous le sigle 0 DIV -ainsi que les deux ou trois copies précédentes ne relevant pas de la procédure 0 EXF.

Pour deux étudiants, il y a simplement confusion entre une propriété -celle qui est évoquée ici- et la réciproque (théorème du cours); pour quelques autres étudiants, il y a mauvaise compréhension de la nature des suites extraites. Ils affirment avec les notations classiques, qu'on doit avoir $\varphi(\mathbb{N}) \cup \psi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ si $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ sont les deux suites extraites ou encore déclarent ne pas voir de différence avec l'exercice 8. Certains enfin introduisent une monotonie (imaginaire) dans leurs suites et sous-suites pour conclure (avec éventuellement des inégalités du style $u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

Quant aux copies non terminées, elles correspondent à des citations du théorème (du cours) sur les suites extraites, ou à la constatation que si les suites extraites sont complémentaires, alors l'énoncé est vrai, : ces affirmations ne contenant aucune réponse explicite à la question posée dans l'énoncé (procédure 0 NTE).

6.7.2. Les variantes à l'exercice 10.

Vu le nombre des copies où l'exercice n'est pas abordé, nous comparons ici les répartitions des procédures, y compris la procédure "non abordé", quitte, dans un deuxième temps, à ne comparer les procédures que dans les copies où l'exercice est abordé.

a) Les variantes qui n'en sont pas: V_3, V_5, V_4.

Nous n'avons vérifié la stabilité que pour V_3 et V_4 (où le texte sur les modèles est différent). Voici les répartitions et le calcul de χ^2 sur le tableau résumé qui est indiqué:

Procédures / Copies S / variante	Juste sans 0 JSD démonstr.	Faux sans OFSD démonstr.	contre-exemple 0 BIE Correct	juste sans 0 JSE exemplé	divers erronés 0 EXF + 0 DIV	non terminé - non abordé 0 NTE + 0 NAB	Total
V_1	10	9	8	8	14	21	70
V_3	4	12	10	4	10	33	73
Total	14	21	18	12	24	54	143

On trouve $\chi^2=7,724$ (v=5).

Procédures (Copies S) Variante	Juste sans 0 JSD (1) démonstration	faux sans 0 FSD (2) démonstration	procédures correctes 0 BIE + 0 JSE (3)	divers erronés et non terminés 0 DIV + 0 NTE + 0 EXF (4)	non abordé 0 NAB (o)	Total
V_1	4	11	23 + 3	5	5	53
V_4	4	4	21 + 4	1	5	39
Total	8	15	46 + 7	6	10	92

On est obligé de réunir les colonnes (4) et (o) et (1) et (3) pour calculer le χ^2. On trouve $\chi^2=2,378$ (v=2).
Les répartitions ne sont pas significativement différentes. Il y a cependant des différences qui ne sont sans doute pas à attribuer aux présentations de l'exercice.

b) Changement de vocabulaire: la variante V_2.

Comme pour les autres exercices, on ne trouve pas de différence significative suivant que l'on utilise le mot "converge" ou "a une limite" dans l'énoncé.
Voici la répartition obtenue:

Procédures (Copies S) Variante	Juste sans 0 JSD (1) démonstrat.	faux sans 0 FSD (2) démonstrat.	contre-exemple 0 BIE (3) Correct	juste sans 0 JSE (4) exemple	divers erronés et non terminés 0 DIV + 0 EXF + 0 NTE (5)	non abordé 0 NAB	Total
V_1	2	5	30	14	10	6	67
V_2	0	4	28	6	13	11	62
Total	2	9	58	20	23	17	129

On réunit les colonnes (1) et (3) et (2) et (5) et on calcule $\chi^2=4,806$ (v=3).

c) Les changements d'ordre.

Ils concernent aussi bien la place de l'exercice dans le texte que sa place respective par rapport à l'exercice 8.

. La variante V_8: l'exercice 8 n'est pas posé et l'exercice 10 est posé en 9. Voici la répartition obtenue (les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes).

Procédures (Copies S) / Variante	Juste sans 0 JSD (1) démonstration	Faux sans 0 FSD (2) démonstration	Contre-exemple juste sans 0 BIE (3) correct	Juste sans 0 JSE (4) exemple	divers erronés et non terminés 0 DIV + 0 EXF + 0 NTE (5)	non abordé 0 NAB (6)	Total
V_1	22% 2	41% 11	46% 19	50% 4	44% 4	70% 14	47% 54
V_8	7	16	22	4	5	6	60
Total	9	27	41	8	9	20	114

Pour calculer le χ^2, nous réunissons (4),(1) et (3) et (2) et (5). On obtient $\chi^2=4,983$ (v=2). La seule tendance significative qui se dégage est que l'exercice est plus abordé sous la forme V_8. Il est possible que le fait que 8 et 10 se "ressemblent" ait moins incité les étudiants à aborder le 10, après avoir cherché le 8. Par contre, les répartitions de procédures ne nous semblent pas présenter de différences à signaler.

. Inversion des exercices 8 et 10: la variante V_7.

Dans cette variante, le texte sollicitant les modèles a changé, mais nous avons déjà vérifié que cela n'entraîne pas de différences vraiment significatives. Voici la répartition des procédures:

Procédures (Copies S) / Variante	Juste sans 0 JSD démonstration	Faux sans 0 FSD démonstration	Contre-exemple 0 BIE correct	Juste sans 0 JSE exemple	divers erronés et 0 DIV + 0 NTE + 0EXF non terminés	non abordé 0 NAB	Total
V_1	7	1	19	2	1	6	36
V_7	9	0	15	4	2	1	31
Total	16	1	34	6	3	7	67

Sans même calculer le χ^2, on constate que les répartitions ne sont pas significativement différentes.

. Rapprochement des exercices 8 et 10: les variantes V_9 et V_{11}.

On obtient le même résultat. Nous le ferons d'abord sur (V_1,V_9), puis dans (V_1,V_{11}) où il y a en plus le changement de place des questions 1, 2, 3, 4.
Voici la répartition des procédures pour les copies S concernées par (V_1,V_9):

(les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes).

Procédures (Copies S) / Variante	Juste sans 0 JSD (1) démonstration	Faux sans 0 FSD (2) démonstrat.	Contre-exem. 0 BIE (3) correct	Juste sans 0 JSE (4) exemple	divers erronés et non terminés 0 EXF + 0 DIV + 0 NTE (5)	non abordé 0 NAB (0)	Total
V_1	52% 13	47% 15	53% 19	51% 18	0	41% 13	46% 78
V_9	12	17	17	17	9	19	91
Total	25	32	36	35	9	32	169

On constate que la variante V_9 est plus associée à des procédures erronées. Cependant, si on regroupe (2) et (5), on obtient χ^2=3,279 (v=5), ce qui signifie que -moyennant ce regroupement- les répartitions ne sont pas significativement différentes.

Procédures (Copies S) Variante	juste sans 0 JSD démonstration	faux sans 0 FSD démonstration	correct 0 BIE + 0 JSE	erroné 0 EXF + 0 DIV	non abordé 0 NAB	Total
V_1	12	6	34+4	12	22	90
V_{11}	7	5	23+4	9	16	64
Total	19	11	65	21	38	154

On obtient χ^2=0,257. Même résultat.

. Entre les deux exercices, il y a l'exercice 9: la variante V_{10}.

Voici la répartition obtenue:

Procédures (Copies S) Variante	juste sans 0 JSD (1) démonstration	faux sans 0 FSD (2) démonstration	contre-ex. 0 BIE (3) correct	juste 0 JSE (4) sans ex.	erroné + non terminé + 0 DIV + 0 NTE + 0 EXF	non abordé 0 NAB	Total
V_1	7	7	7	6	14	13	54
V_{10}	1	11	10	10	18	10	60
Total	8	18	17	16	32	23	114

Pour calculer le χ^2, on a regroupé la colonne (1) à la colonne (4).
On obtient χ^2=2,164 (v=5) -les répartitions sont semblables, étant donné le regroupement des colonnes.

En résumé, il semble donc que ce ne soit pas sa place par rapport à l'exercice 8 -ni même dans l'énoncé- qui influence les procédures produites à l'exercice 10, exception faite du cas où l'exercice 10 est posé sans l'exercice 8, cas où il est plus abordé. Quant au changement de vocabulaire de la variante V_2, il a aussi peu d'effets significatifs que dans les autres exercices.

6.6. Répartition des procédures à l'exercice 10.

6.6.1. Répartition des procédures à l'exercice 10 par niveaux (Tableau VI_{10}).

Nous travaillons sur les 486 copies N dans lesquelles l'exercice 10 est abordé.

a) Les procédures sans démonstration (0 JSD, 0 FSD).

Elles représentent un peu plus de la moitié des procédures utilisées à chaque

VI_{10} Procédures x niveaux à l'exercice 10. (corpus N)

Procédures à l'exercice 10 / Niveaux	Juste sans démonstration 0 JSD	Faux sans démonstration 0 FSD	juste sans contre-exemple 0 JSE	juste, contre-exemple correct 0 BIE	exemple faux 0 EXF	divers faux 0 DIV	non terminé 0 NTE	Non abordés 0-NAB	Total abordés	Total
DEUG I après le cours sans exercices	4 14%	11 38%	2 7%	2 7%	0	10 31%	0	35	29	64
DEUG I moins de 3 mois après le cours	4 17%	13 54%	4 17%	3 12,5%	0	0	0	28	24	52
DEUG I plus de 3 mois après le cours	10 23%	13 30%	12 27%	2 5%	0	5 11%	2	11	44	55
DEUG 2ème année	21 21%	27 31%	22 25%	11 13%	2 2%	4 5%	0	14	87	101
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	3 8%	3 8%	4 11%	13 34%	3 8%	8 21%	4	10	38	48
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	1 5%	5 25%	0	10 56%	2 10%	2 10%	0	11	20	31
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	0	3 4%	10 12%	57 71%	10 12%	0	0	17	80	97
MATH. SPE.	13 17%	3 4%	4 5%	42 55%	6 8%	6 8%	3	15	77	92
LICENCE (3ème année)	6 17%	2 6%	3 8%	24 67%	0	1 3%	0	9	36	45
MAITRISE (4ème année)	10 26%	0	8 16%	28 55%	3 6%	2 4%	0	12	51	63
TOTAL	72 15%	80 16%	69 14%	193 40%	26 5%	37 8%	9 2%	162 (25%)	486	648

Tous les pourcentages sont des pourcentages lignes.

groupe; d'abord les procédures correctes y sont largement majoritaires, et c'est même en première année qu'on les rencontre le plus -(84% de procédures correctes en Sup. , 60% en Spé. , environ 72% en licence et maîtrise); ensuite, ce sont les procédures avec production d'un contre-exemple explicite qui dominent largement, elles sont même majoritaires à elles seules, dans tous les niveaux du groupe, et atteignent 70% de l'ensemble des procédures en Math. Sup. et en licence. Quant au deuxième groupe, il se rapproche du précédent puisqu'il y a entre 45 et 50% de procédures correctes, parmi lesquelles les procédures avec contre-exemple sont largement majoritaires.

c) Les procédures erronées, insuffisantes et non terminées (0 EXF, 0 DIV, 0 NTE).

Les contre-exemples maladroits ou faux concernent surtout le troisième groupe (19 copies sur 26 copies au total), et le deuxième groupe -ce qui confirme, d'une certaine façon, la difficulté des étudiants de DEUG à produire des contre-exemples- même faux !

Les autres procédures erronées qui concernent plus le premier groupe diminuent régulièrement au sein du groupe, puisqu'elles passent de 31% des procédures utilisées en DEUG tout de suite après le cours à 0%, puis 11% et enfin 5% respectivement en DEUG moins de trois mois après le cours, puis plus de trois mois après le cours, et enfin en seconde année.

Cela pourrait coïncider avec la diminution des modèles primitifs et l'acquisition vraisemblable de la notion de suites extraites. La répartition des copies non terminées n'appelle aucun commentaire, si ce n'est que la part relativement importante de ces copies en Sup. C est peut-être le résultat d'un "glissement" entre des procédures sans démonstrations délicates à produire dans des copies notées, et des copies sans conclusion, mais avec des commentaires.

En résumé, dans le premier groupe (DEUG), ce sont les procédures sans démonstration qui sont majoritaires; parmi elles les procédures fausses sont plus nombreuses que les autres, mais leur part diminue; les procédures correctes sont en

augmentation sensible -surtout celles qui ne donnent pas de contre-exemple explicite (toujours les plus nombreuses) et, corrélativement, les procédures erronées diminuent très sensiblement jusqu'à un très faible taux.

Dans le troisième groupe (SUP. , SPE. , Licence, maîtrise), les procédures correctes sont largement majoritaires, et parmi elles, les procédures où un contre-exemple explicite est exhibé sont nettement les plus nombreuses, et cela dès la Sup. , où les pourcentages sont les plus élevés dans ce sens. Cela est dû à l'absence en Sup. de procédures justes sans démonstration qui font la différence dans les autres niveaux du groupe. On ne peut pas caractériser d'évolution réelle dans ce groupe sur cet exercice 10.

Quant au deuxième groupe, il se montre bien intermédiaire entre les précédents: procédures correctes presque majoritaires, encore beaucoup de procédures sans démonstration (y compris fausses) ou erronées.Cependant il y a peu de progression entre les deux niveaux.

6.8.2. Répartition des procédures à l'exercice 10 par modèles exprimés.

(Tableaux VI_{11} et VI_{12}), (Corpus N)

Seuls les modèles primitifs, "tend vers" et dans une moindre mesure les "pas de modèles exprimés" sont moins associés à des procédures correctes qu'aux autres procédures. Il apparaît qu'il n'y a pratiquement pas d'étudiants ayant le modèle primitif et produisant un contre-exemple correct (3 sur 43 !). Par contre, presque la moitié d'étudiants ayant ce modèle et qui abordent l'exercice en donnent une réponse non justifiée -45% de ces réponses étaient justes. Le modèle "tend vers" présente une répartition de procédure ressemblant à celle des modèles primitifs. Le modèle dynamique monotone en est différent, plus proche des copies sans modèles exprimés.

Procédures x modèles exprimés à l'exercice 10. Corpus N VI_{11}

Procédures à l'exercice 10 / Modèle exprimé	juste sans démonstration O JSD	Faux sans démonstration O FSD	contre exemple correct O BIE	juste sans contre exemple O JSE	Exemple incorrect O EXF	Divers Faux O DIV et nontermin	Exercice non abordé O NAB
PRIMITIF	9	11 14%	3 2%	7	2	11	13
TEND VERS	7	9 11%	5 3%	3	1	5	15
DYNAMIQUE MONOTONE	2	2 2,6%	3 2%	3	0	3	6
PAS DE MODELE EXPRIME	6	6 7,5%	8 4%	6	1	0	10
TAUTOLOGIE	1	6 7,5%	0	3	2	4	2
DEFINITION	1	2 2,5%	4 2%	0	0	0	3
DYNAMIQUE	23	24 30%	76 39%	23	4	15	61
PRESTATIQUE	7	7 9%	12 6%	8	2	0	14
MIXTE	7	9 11%	52 27%	7	8	6	23
STATIQUE	6	2 2,5%	19 10%	4	5	0	5
NON ABORDE	3	2 2,5%	11 6%	5	1	2	10
TOTAL	72	80	193	69	26	46	162

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages colonnes.

Procédures x modèles exprimés à l'exercice 10. Tableau résumé Corpus N

VI_{12}

Procédures à l'exercice 10 / Modèle exprimé	juste sans démonstration 0 JSD	faux sans démonstration 0 FSD	corrects 0 BIE + 0 JSE	erronés - non terminés 0 EXF + 0 DIV + 0 NTE	Total abordé
PRIMITIF	9 21%	11 26%	10 23%	13 30%	43
TEND VERS	7 23%	9 30%	8 27%	6 20%	30
DYNAMIQUE MONOTONE	2 15%	2 15%	6 46%	3 23%	13
PAS DE MODELE EXPRIME	8 16%	14 28%	21 42%	7 14%	50
DYNAMIQUE	23 14%	24 14,5%	99 60%	19 11,5%	165
PRESTATIQUE	7 19%	7 19%	20 56%	2 6%	36
MIXTE	7 8%	9 10%	59 66%	14 16%	89
STATIQUE	6 17%	2 6%	23 64%	5 14%	36
NON ABORDE	3 12,5%	2 8%	16 67%	3 12,5%	24
TOTAL	72 15%	80 16%	262 54%	72 15%	486

Les pourcentages indiqués sont des pourcentages lignes.

Le modèle dynamique est plus associé à des procédures correctes qu'à des procédures sans démonstration ou erronées; il s'agit même plutôt de productions effectives de contre-exemples que de justifications métamathématiques. Cela étant, ce modèle est associé à autant de réponses justes sans démonstration que fausses sans démonstration.

Plus des deux tiers des étudiants ayant le modèle mixte et ayant abordé l'exercice le résolvent correctement avec essentiellement des productions de contre-exemples. Les autres se répartissent à peu près également entre les réponses non justifiées et les exemples faux. Ceux-ci sont particulièrement associés à ce modèle mixte, puisque 31% des étudiants ayant la procédure O EXF ont exprimé un tel modèle.

Les modèles statiques et préstatiques sont eux aussi associés à environ 63% et 50% de procédures correctes, mais il y a plus de justifications non accompagnées de contre-exemples explicites dans les copies où est exprimé un modèle préstatique. Les autres procédures utilisées sont les procédures sans démonstration (mais la proportion parmi elles des procédures fausses est de 25% pour les modèles statiques et 50% pour les modèles préstatiques). Il est intéressant de noter encore que dans plus des deux tiers des copies où les questions 1 et 2 ne sont pas abordées, on trouve des procédures correctes (plutôt métamathématiques). Au contraire, dans les copies sans modèle exprimé, moins de la moitié des procédures sont correctes et presqu'autant sont des réponses non démontrées (dont les deux tiers sont des réponses fausses).

6.9. Comparaison des procédures aux exercices 8 et 10. (Tableau VI_{13}).

On constate que sur les 162 étudiants qui n'abordent pas l'exercice 10, seulement 48 n'avaient pas abordé l'exercice 8; les autres procédures se répartissent en 40 procédures correctes à l'exercice 8, 27 procédures algébriques/10 algébriques et

Exercice 8 x Exercice 10 Tableau VI 13 (corpus N)

Exercice 8 / Exercice 10	non abordé 8 NAB	procédures correctes 8 DEF dont	sans 1 erreur formelle	avec 1 erreur formelle 8 FOR	8 UNI "discours"	8 LOC "discours"	procéd.° algébrique. 8 ALG	procéd.° magique 8 MAG	Cauchy 8 CAU	Total
non abordé	48	40	22	18	4	9	10	27	1	162
Procédures correctes dont	22	181	104	77	16	14	8	22	5	262
contre-exemple OBIE	15	155	94	61	6	8	2	13	3	193
juste sans exemple. OJSE	7	26	10	16	10	6	6	9	2	69
exemples faux O EXF	4	15	7	8	1	2	1	2	0	26
faux sans démonstration O FSD	13	9	3	6	3	4	8	31	3	80
juste sans démonstration O JSD	10	21	4	17	8	6	4	16	1	72
divers faux O DIV	5	14	8	6	3	4	10	1	2	37
Total	97	286	150	136	31	38	40	106	12	

13 procédures 8 LOC et 8 UNI.

Par contre, sur les 193 procédures correctes (0 BIE) à l'exercice 10, 155 étaient déjà correctes dans l'exercice 8, donc 90% des procédures correctes avec contre-exemple à l'exercice 10, et même 87% de celles correspondant à l'exercice 8 abordé, sont associées à des procédures correctes à l'exercice 8. De plus, si on considère toutes les procédures correctes (0 BIE et 0 JSE) à l'exercice 10 (262), 181 d'entre elles (66%) seulement sont associées à des procédures correctes à l'exercice 8. Donc, les procédures 0 JSE sont moins associées à des procédures correctes que les 0 BIE.

De plus, sur les 155 procédures 0 BIE à l'exercice 10 et 8 DEF à l'exercice 8, 94 ne présentent pas l'erreur 8 FOR à l'exercice 8 (61%); alors que sur les 26 procédures 0 JSE à l'exercice 10 et 8 DEF à l'exercice 8, 10 ne présentent pas l'erreur 8 FOR (38%). Ceci renforce l'hypothèse de la différence entre les deux types de procédures correctes à l'exercice 10, les étudiants qui disposent d'un contre-exemple font un peu mieux fonctionner leurs autres connaissances dans un autre exercice mobilisant l'utilisation de la définition en (ε,N) que ceux qui se contentent d'une justification métamathématique.

Les étudiants qui répondent "oui" ou "non" sans démonstration à l'exercice 10 ont abordé l'exercice 8 dans les mêmes proportions. Par contre, si 34% de ceux qui ont donné la réponse juste et abordé l'exercice 8 avaient produit une procédure correcte à l'exercice 8, c'est le cas pour seulement 13% de ceux qui ont donné la réponse fausse et abordé l'exercice 8. Au contraire, alors que 26% de ceux qui ont donné la réponse juste et abordé l'exercice 8 avaient produit une procédure 8 MAG à l'exercice 8, c'est le cas pour 46% de ceux qui ont donné la réponse fausse et abordé l'exercice 8. Autrement dit, les réponses "oui" et "non" ne sont pas entièrement aléatoires -même si aucune justification n'apparaît dans l'exercice 10- la réponse juste étant plus associée que l'autre à des fonctionnements corrects dans un autre exercice.

Enfin, sur les 26 étudiants ayant fourni un contre-exemple erroné à l'exercice 10, plus de la moitié avaient fourni une procédure correcte (8 DEF) à l'exercice 8, ce qui indique que ce type de procédure est "meilleur" que les précédentes.

Si on étudie les relations de l'autre point de vue, on constate que sur les 246

étudiants ayant produit une procédure 8 DEF et ayant abordé l'exercice 10, 155 fournissent également une procédure 0 BIE (soit 63%), et 181 une procédure 0 BIE ou 0JSE (soit 74%). On retrouve ainsi une forte cohérence, qui n'est cependant pas totale, entre les deux tâches.

Plus précisément encore, parmi les 118 étudiants ayant produit une procédure 8 DEF avec l'erreur formelle 8 FOR et ayant abordé l'exercice 10, 65% ont donné une procédure 0 BIE ou 0JSE à l'exercice 10, et parmi ces derniers 21% ont donné 0JSE, ce qui correspond au pourcentage global des 0 JSE par raport au total (0 JSE + 0 BIE).

Autrement dit, la relation entre les procédures correctes à l'exercice 10 et à l'exercice 8 est dépendante de la production de l'erreur formelle 8 FOR.

Les étudiants ayant fourni les discours 8 UNI et 8 LOC, tout comme les précédents d'ailleurs, ont donné deux fois plus de réponses justes sans démonstration que fausses sans démonstrations. Cette proportion s'inverse exactement pour les étudiants ayant résolu l'exercice 8 par une procédure algébrique ou "magique".

De plus, 54% des discours 8 UNI et 8 LOC sont associées à des procédures correctes à l'exercice 10 (en ne tenant compte que des copies où l'exercice 10 est abordé), alors que c'est le cas des 27% des procédures 8 ALG et de 29% des procédures 8 MAG.

On peut même souligner que sur les 67 procédures fausses sans démonstration à l'exercice 10, qui correspondent à un exercice 8 abordé, 46% des procédures fournies dans l'exercice 8 sont "magiques" -il y a là des étudiants particulièrement cohérents dans la production de procédures erronées. On voit tout l'intérêt qu'il y aurait à croiser les modèles avec ces procédures, pour chercher, par exemple, les modèles exprimés par les étudiants ayant donné une procédure "magique" et une procédure 0 FSD. Au lieu de réaliser toutes ces études par tris emboités, ce qui nécessiterait un gros travail fastidieux, nous avons choisi de réaliser des analyses factorielles et divers classements hiérarchiques sur l'ensemble de nos données -procédures et modèles exprimés; c'est ce que nous exposerons au chapitre 7.

En attendant, et en conclusion de la simple comparaison exercice8-exercice 10, on a d'abord pu constater que les tâches à l'exercice 10 et à l'exercice 8 sont bien résolues simultanément par bon nombre d'étudiants, avec une nuance en ce qui concerne les procédures sans contre-exemples à l'exercice 10 ,

plus liées à la production éventuelle de l'erreur formelle à l'exercice 8 ou même à des procédures erronées, et avec une légère supériorité de la résolution correcte de l'exercice 10 par rapport à celle de l'exercice 8.

Cela peut signifier que la compréhension de ce qui est en cause dans les deux exercices est acquise presque simultanément avec une légère antériorité de ce qui ne nécessite qu'un contre-exemple -il s'agit des deux "faces" d'une même question, le rapport entre la convergence d'une suite et des suites extraites; nous assimilons, dans cette hypothèse, compréhension et capacité de faire fonctionner. D'autre part, on peut établir une hiérarchie des procédures erronées à l'exercice 8 en tenant compte de leurs relations avec les procédures produites tout de suite après dans l'exercice 10. Ainsi, les discours 8 UNI et 8 LOC qui témoignent plus d'un manque de précision ou d'une difficulté à recourir à la définition en (ϵ, N) que de raisonnements faux s'avèrent-ils "meilleurs" que les procédures algébriques et magiques qui relèvent au contraire d'erreurs profondes. Enfin, on vérifie que les réponses sans démonstration ne sont pas aléatoires, ce que nous avions déjà noté dans l'exercice 5.

De ce chapitre de description des procédures à trois exercices se dégagent plusieurs éléments. Si le taux de réussite à chaque exercice est différent selon la tâche, par contre, dans les trois cas, on note la même opposition entre les groupes 1 et 3 (avec plus ou moins de progression au sein du groupe 1) et entre les modèles, statique et mixte d'une part, et primitif et "tend vers" d'autre part. Par contre, selon la tâche, les modèles dynamique et préstatique se "placent" différemment, mais toujours entre les deux pôles précédents. De plus, une cohérence certaine se dégage des comparaisons des exercices deux à deux dans les chapitres 4, 5 et 6. C'est précisément par l'étude globale de tous ces résultats partiels, effectuée dans la première partie du chapitre suivant, que nous allons préciser les caractères communs à toutes ces procédures.

CHAPITRES 7 ET 8 : ETUDES GLOBALES DES PROCEDURES ET DES ERREURS EN RELATION AVEC LES TACHES, LES MODELES EXPRIMES ET LES NIVEAUX.

Dans le chapitre 7, nous reprenons globalement nos résultats pour dégager les relations entre les procédures, les modèles exprimés, les niveaux et les tâches. Nous travaillons successivement sur les tris croisés des chapitres précédents et sur d'autres analyses statistiques plus ou moins élaborées. Cela nous permet de vérifier la pertinence de nos choix méthodologiques ; nous terminons par l'exposé de nos résultats sur le déroulement de l'acquisition de la notion et sur les types de comportement qui se sont dégagés. Un bref bilan méthodologique clôt le chapitre 7. Dans le chapitre 8 nous nous penchons sur les erreurs rencontrées dans les copies avec l'objectif de dégager les difficultés spécifiques de la notion. C'est sur des hypothèses concernant d'éventuelles modifications de l'enseignement de la notion, inspirées par l'ensemble de nos résultats, que nous terminons le chapitre 8 - annonçant ainsi des recherches ultérieures.

CHAPITRE 7 : ETUDE GLOBALE DES PROCEDURES EN RELATION AVEC LES TACHES, LES MODELES EXPRIMES ET LES NIVEAUX.

Dans le mesure où, dans ce chapitre 7, nous utilisons à la fois des tableaux de contingence et des analyses statistiques plus élaborées (analyses factorielles par exemple), nous ne tenons pas compte de l'exercice 9c) pour lequel la part des copies non abordées fausserait éventuellement les résultats des analyses factorielles. Signalons que, dans les tris croisés entre les niveaux et les procédures, sur les copies N, on regroupe systématiquement les copies de DEUG moins d'un mois après le cours et les exercices, et moins de 3 mois après le cours et les exercices.

Au contraire dans les analyses factorielles ces niveaux sont disjoints. A cela près, les données dont nous parlons dans le chapitre 7 sont les mêmes données que celles des chapitres II, III, IV, V, VI, mais elles sont analysées successivement au moyen de tris croisés, d'analyses factorielles et de classements hiérarchiques ce qui nous permet d'enrichir au fur et à mesure nos résultats, de vérifier la pertinence de nos choix méthodologiques et dégager le déroulement de l'acquisition de la notion et des types de comportement.

7.1. Etude globale des procédures et de leur relation avec la tâche par modèles exprimés et par niveaux.

Dans cette étude, nous commençons par dégager ces relations sur les tableaux de contingence établis pour chaque exercice dans les chapitres précédents. Nous sommes amenés, pour ce faire, à regrouper les procédures correctes à chaque tâche, le cas échéant (exercices 5, 6, 7, 10). De plus si le même effectif de copies intervient pour deux exercices différents à un niveau donné et pour une procédure donnée (par exemple), rien ne nous permet de savoir dans quelle mesure ce sont les mêmes copies qui contribuent à cet effectif. C'est précisément pour combler cette lacune que nous étudions dans le deuxième paragraphe de cette étude (7.1.2) la "cohérence" de nos copies, c'est-à-dire le rapport entre le nombre de procédures

correctes (ou erronées) dans chaque copie et le niveau ou le modèle. Dans le troisième paragraphe (7.1.3) enfin, nous analysons toutes nos procédures détaillées (en particulier les procédures correctes ne sont pas regroupées) grâce à des analyses statistiques plus fines dont les résultats - non contradictoires avec les précédents - enrichissent au contraire notre vue globale des relations entre les procédures et les modèles exprimés.

7.1.1. Etude sur les tris croisés établis dans les chapitres précédents.

Nous allons regrouper les résultats obtenus dans les chapitres IV, V, VI pour en tirer des conclusions sur les procédures concernant tous les exercices. A cet effet, nous avons dressé un certain nombre de tableaux de contingence récapitulatifs des procédures par modèles (tableaux M_i) et par niveaux (tableaux N_i) - (les courbes en baton correspondantes sont notées TM_i ou TN_i).

Nous étudions d'abord les copies N où les exercices ne sont pas abordés puis les autres copies N en distinguant les procédures correctes, les procédures ambigües et les procédures erronées (algébriques, type "Cauchy", résultant de confusions "suites-séries", présentant des erreurs sur la monotonie et autres).

a) Les copies N où les exercices 5, 6, 7, 8 ou 10 ne sont pas abordés (Tableaux N_o et M_o).

Il est frappant de constater que globalement, aussi bien que par niveau, aussi bien que par modèle, en général plus l'exercice est posé "tard" dans le texte, moins il est abordé et ceci indépendamment - donc - de la difficulté de la tâche. Seule la question 9c), qui fait partie d'un exercice long et difficile, fait exception par rapport à l'exercice 10. Nous avions vérifié un phénomène identique pour un exercice donné mais changé de place dans les variantes. [Nous appelons "non abordée" une copie dans laquelle un exercice n'est pas abordé.]

M_0 Répartition des copies non abordées par exercice par modèles exprimés (corpus N)

Modèle exprimé / Procédures	primitif	Tend vers	Dynamique monotone	Pas de modèle exprimé	Questions 1 et 2 non abordées	Dynamique	Préstatique	Mixte	Statique
Exercice 5 non abordé (19 non abordés sur 662)	4%	7%	0	2%	6%	3%	0	3%	2%
Exercice 6 non abordé (57 non abordés sur 662)	16%	11%	0	8%	15%	9%	11%	4%	2%
Exercice 7 non abordé (74 non abordés sur 662)	7%	20%	10%	11%	41%	10%	6%	10%	5%
Exercice 8 non abordé (97 non abordés sur 662)	12,5%	15%	10%	24%	26%	14%	11%	13%	7%
Exercice 10 non abordé (162 non abordés sur 648)	23%	33%	30%	23%	29%	26%	26%	20%	12%

Les pourcentages sont calculés par exercice sur le total des étudiants ayant le modèle concerné.

N0 Répartition des copies non abordées par exercice par niveau (corpus N)

Niveau / Procédures non abordées	DEUG tout de suite après le cours	DEUG moins 3 mois après le cours	DEUG plus de 3 mois après le cours	DEUG 2	SUP C moins d'1 mois après le cours	SUP C plus de 3 mois après le cours	SUP entre 1 et 3 mois après le cours	SPE.	Licence	Maîtrise
Exercice 5 non abordé (19 non abordés sur 662)	5%	2%	2%	3%	8%	3%	3%	2%	0	2%
Exercice 6 non abordé (57 non abordés sur 662)	14%	18%	7%	6%	23%	16%	3%	2%	2%	6%
Exercice 7 non abordé (74 non abordés sur 662)	16%	15%	9%	14%	8%	16%	8%	5%	7%	16%
Exercice 8 non abordé (97 non abordés sur 662)	31%	30%	13%	15%	12,5%	16%	4%	6,5%	16%	11%
Exercice 10 non abordé (162 non abordés sur 648)	55%	54 %	20%	14%	21%	35%	17,5%	16%	20%	19%

Les pourcentages sont calculés par exercice sur le total des étudiants du niveau de la colonne.

Revenons à la répartition des copies "non abordées" par niveau (tableau N_0) : il y a quelques exceptions à la tendance que nous avons dégagée ; en particulier l'exercice 8 est plus abordé que l'exercice 7 en maîtrise et en Math. Sup , l'exercice 6 est moins abordé que l'exercice 7 en Sup C moins d'un mois après le cours. De même, la répartition des copies non abordées par modèle (tableau M_0) ne montre qu'une exception à la tendance générale : l'exercice 6 est moins abordé que l'exercice 7 dans les copies où sont exprimés des modèles préstatiques ou primitifs.
Il faut souligner en premier lieu que c'est dans les copies où un modèle statique est exprimé que les exercices sont le plus abordés - il y a de 2 à 12% de copies "non abordées" selon les exercices.
Ce sont d'autre part les étudiants de Math. Spé. , suivis de très près par ceux de Math. Sup. qui abordent le plus les exercices - de 2% à 16 % de copies "non abordées" selon les exercices.
Au contraire ce sont les copies où les questions 1) et 2) ne sont pas abordées qui présentent le plus d'exercices non abordés (24% en moyenne) puis celle où est exprimé le modèle "tend vers" (17%). Les niveaux de DEUG "tout de suite après le cours" et "moins d'un mois après le cours" ont la même caractéristique (24% et 22% d'exercices non abordés en moyenne). Les autres modèles et les autres niveaux se répartissent entre ces 2 extrêmes - il est difficile d'en dire plus dans la mesure où nous ne pouvons assimiler "non abordé" et "ayant sèché sur l'exercice".
Dans ce qui suit, nous ne nous occuperons plus que des copies N où les exercices concernés sont abordés.

b) Les procédures correctes (copies N).

Dans ce paragraphe nous décrivons d'abord la répartition des procédures correctes à tous les exercices par modèles exprimés, en faisant intervenir aussi le genre des modèles mixtes et dynamiques. Nous dégageons ensuite le rôle de la tâche dans la

relation entre les modèles et les différentes procédures correctes. Enfin nous reprenons par niveaux la description des procédures correctes et l'analyse du facteur "tâche" dans la relation aussi dégagée. Rappelons que nous avons regroupés les procédures "5CEX, 5SIN, 5STA, 5DIV", pour l'exercice 5 , "6VAL, 6PRO, 6ENC' pour l'exercice 6, "7DEC, 7DEF, 7PRO, 7EQU", pour l'exercice 7, OBIE et OJSE pour l'exercice 10 .

i) Répartition des procédures correctes par modèles exprimées (Tableau M_1, courbe TM_1).

Globalement, il apparaît une hiérarchie valable pratiquement pour les 5 exercices (ce qu'on pouvait déjà entrevoir à la lecture des chapitres précédents).
Le modèle statique est toujours associé au meilleur taux de procédures correctes par exercice (avec pratiquement égalité avec le modèle mixte pour l'exercice 10). Ensuite on trouve dans cet ordre le modèle mixte, puis le modèle dynamique, puis le modèle préstatique ; viennent ensuite le modèle dynamique monotone (qui est "supérieur" au préstatique dans l'exercice 6), les copies sans modèles exprimés (tautologie, définition, pas de modèles), le modèle "tend vers" et - en bon dernier - le modèle primitif. Seules les copies où les questions 1) et 2) ne sont pas abordées ne prennent pas place dans la même hiérarchie et se "placent" entre le modèle préstatique et les modèles dynamiques ou même mixte suivant les exercices. Nous avons vu que ces 34 copies sont hétérogènes - il y a celles qui correspondent aux étudiants de maîtrise n'ayant pas abordé l'exercice faute de temps et les autres qui correspondent à des étudiants plus mauvais.

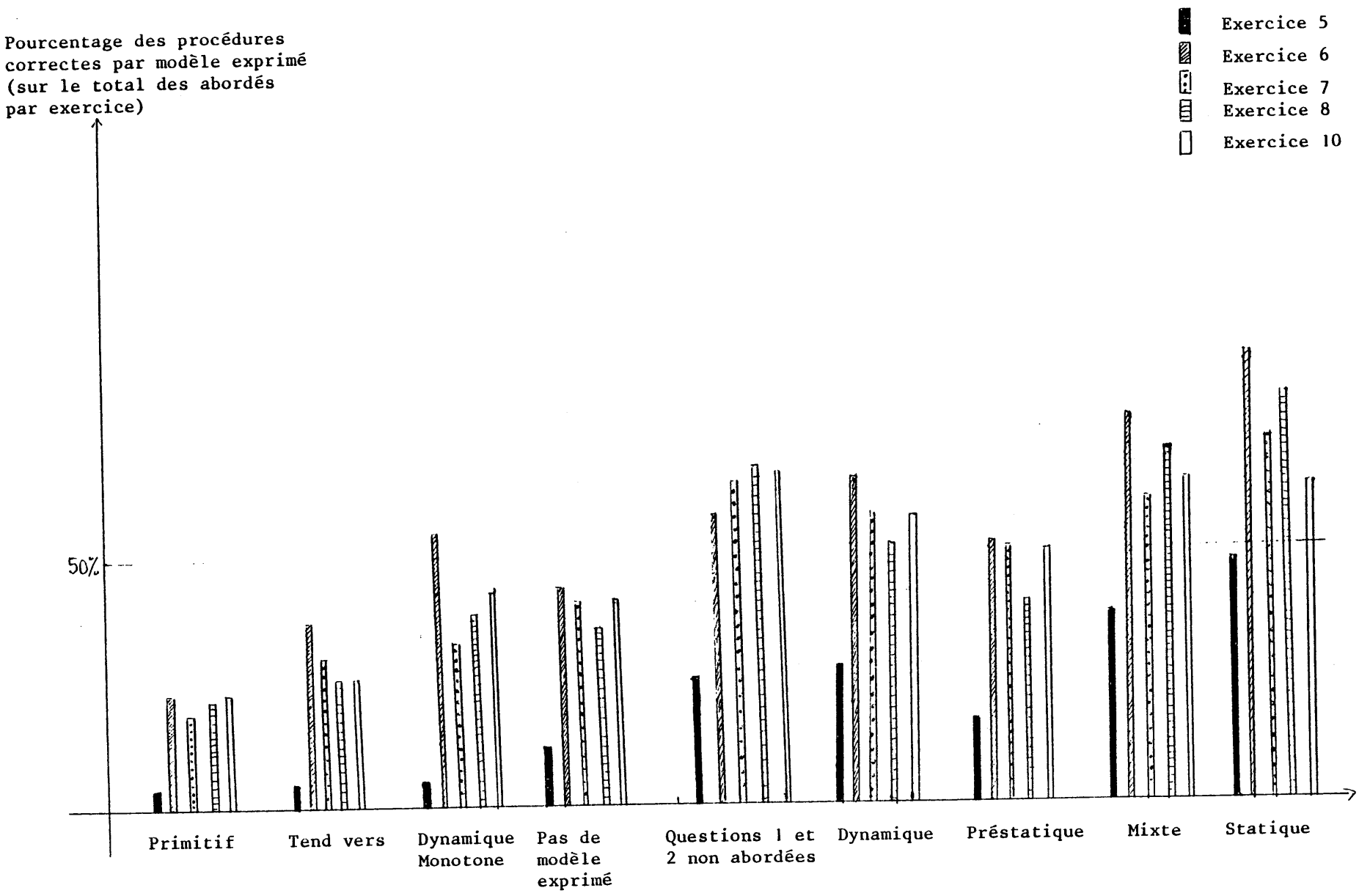
Cette hiérarchie nous semble intéressante sur plusieurs points. La différence des procédures fournies par des étudiants ayant exprimé un modèle statique et un modèle préstatique nous semble souligner l'importance de l'assimilation de l'idée que c'est pour tout ε que les u_n - sauf un nombre fini - sont dans $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$. Autrement dit ce n'est pas tant l'aspect non dynamique de la

M_1 **Répartition des procédures correctes par modèles exprimés.** (Corpus N)

Procédures correctes \ Modèle exprimé		primitif	Tend vers	Dynamique monotone	Pas de modèle exprimé (y compris tautol. et définition)	Questions † et/ou non abordées	Dynamique	Préstatique	Mixte	Statique
Exercice 5	5CEX contre-exemple	2%	5%	5%	9%	16%	17%	9%	22%	32,5%
	5SIN contre-exemple SIN	0	0	0	3%	3%	6%	4%	7%	10%
	5STA sous suite nulle	2%	0	0	0	6%	4%	2%	9%	5%
	5DIV divers juste	0	0	0	0	0	1%	2%	0	0
	Total	4%	5%	5%	12%	25%	28%	17%	38%	48%
Exercice 6	6VAL majoration de $\lvert u_n \rvert$	13%	17%	20%	17%	41%	28%	27%	32%	27,5%
	6ENC encadrement de u_n	11%	12%	20%	23%	14%	25%	21%	23%	27,5%
	6PRD $u_n = \frac{1}{n} \times \cos n\theta$	0	7%	15%	7%	3%	13%	4%	22%	35%
	Total	23%	37%	55%	44%	58%	66%	52%	77%	90%
Exercice 7	7DEC définition (ε,N) avec changement	8%	3%	17%	10%	55%	22%	22%	33%	33%
	7DEF définition (ε,N)	10%	11%	17%	15%	10%	22%	22%	17%	23%
	7EQU $u_n \sim \frac{1}{n}$	2%	11%	0	14%	0	7%	4%	8%	5%
	7PRD $u_n = \frac{1}{n} \times n u_n$	0	5%	0	2%	0	8%	4%	3%	10%
	Total	19%	30%	33%	41%	65%	58%	51%	61%	72%
Exercice 8	utilisation (ε,N) 8-DEF	22%	26%	39%	36%	68%	52%	40%	71%	82%
Exercice 10	0-BIE contre exemple	7%	17%	23%	24%	46%	46%	33%	58%	53%
	0-JSE juste sans ex	16%	10%	23%	18%	21%	14%	23%	8%	11%
	Total	23%	27%	46%	42%	67%	60%	56%	66%	64%

Les pourcentages sont sur le total des étudiants ayant abordé l'éxercice concerné et ayant le modèle de la colonne.

TM_1 Répartition des procédures correctes par modèles exprimés.



représentation qui semble intervenir que l'aspect "filtre" ou "point d'accumulation" qui,de fait,s'exprime mieux dans une représentation non dynamique et surtout synchronique. Il nous semble aussi important de souligner la relation

entre l'expression d'un modèle primitif et même d'un "modèle" "tend vers" et la non-production de procédures correctes. L'expression d'une telle représentation n'est donc pas "neutre" ; il y a association avec la production de procédures erronées. Il est aussi frappant de constater que les étudiants qui n'arrivent pas à exprimer un modèle sont meilleurs que ceux qui en sont restés à ces images primitives. Tout se passe comme s 'il valait mieux ne pas (encore) avoir de représentations que d'en fixer une erronée. Ainsi le modèle "tend vers" qui n'est pas assimilable à un modèle dynamique - comme nous le soupçonnions - se distingue,ce qui est plus étonnant, des copies sans modèles exprimés. C'est un modèle plutôt diachronique (le sujet du verbe est très rarement au pluriel) et qui fixe une image insuffisante de la convergence.

Cependant avant d'aller plus loin dans l'analyse de ces résultats, nous nous sommes livrée à une étude des différents genres du modèle mixte et du modèle dynamique pour préciser éventuellement la hiérarchie précédente.

ii) Etude de la répartition des procédures correctes par genres du mixte et du dynamique.

Pour analyser les modèles mixtes, il nous suffit d'étudier leur association avec les procédures correctes, vu ce qui précède - sur les copies N, bien entendu. Nous avons donc établi le tableau croisant les divers genres du modèle mixte et les procédures correctes dans les exercices concernés. Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice et ayant exprimé le modèle concerné. Rappelons que les différents genres du modèle mixte sont déterminés par l'expression soit d'un modèle statique, soit d'un modèle préstatique en association avec le modèle dynamique et par la distribution de ces expressions entre les deux premières questions du questionnaire.

Genre du modèle mixte / Procédures correctes	Dans la même question statique et dynamique	Dans la même question préstatique et dynamique	Statique en 1) Dynamique en 2)	Préstatique en 1) Dynamique en 2)	Dynamique seul en 1)	Total (*) dynamique et statique	Total (*) dynamique et préstatique
Exercice 5	50% 16	37% 11	40% 10	11% 1	33% 2	46% 26	31% 12
Exercice 6	97% 32	82% 23	77% 20	43% 3	50% 3	88% 52	74% 26
Exercice 7	77% 23	52% 13	72% 18	56% 5	33% 2	75% 11	53% 5
Exercice 8	88% 28	54% 13	79% 19	86% 6	100% 3	84% 47	61% 19
Exercice 10	75% 24	57% 16	42% 11	50% 3	60% 3	60% 35	56% 19

(*) Sauf lorsque le modèle dynamique est exprimé seul en 1) ou n'a pas le renseignement.

Les effectifs sont indiqués en bas à droite. On constate ainsi, en particulier, qu'il y a trop peu de modèles mixtes où on exprime en 1) une image dynamique et en 2) une image statique ou préstatique pour que nous puissions conclure sur cette colonne. Cela étant il y a deux caractères significatifs qui se dégagent de ce tableau. En premier lieu, les modèles mixtes où intervient un modèle statique sont plus associés à de bonnes procédures que ceux où c'est un modèle préstatique qui intervient. C'est vrai sans exception, quelle que soit la tâche, lorsque les expressions qui composent le modèle mixte coexistent dans la même question. C'est vrai sauf pour les exercices 8) et 10) lorsque ces expressions sont séparées (expression dynamique dans la 2ème question) - mais les effectifs correspondants à la catégorie "préstatique en 1) - dynamique en 2)" sont trop faibles pour que

nous puissions en tirer un enseignement. C'est vrai, mais de façon plus ou moins accentuée suivant la tâche, si on compare tous les modèles mixtes où intervient un modèle statique à tous ceux où intervient un modèle préstatique (exception faite des 6 modèles mixtes où l'expression dynamique est en première question). Ainsi on retrouve qu'à l'exercice 10 la différence n'est pas significative - or c'est précisément à cet exercice que, globalement, les modèles mixtes et statiques présentaient le même score de procédures correctes ! Il y a là une confirmation intéressante de la hiérarchie que nous avons pu établir globalement: ainsi c'est bien l'expression statique dans un modèle mixte qui est plus associée que l'expression préstatique à de bonne procédures, sans que l'expression dynamique y change quelque chose. En effet, l'autre caractère qui apparaît dans le tableau concerne la répartition des réponses sur une ou deux questions. Lorsqu'il s'agit d'une juxtaposition "statique - dynamique", la réponse correspondant à un regroupement des 2 composantes dans une même question est légèrement plus associée à des procédures correctes que l'autre - en nuançant selon la tâche. C'est vrai pour les exercices 6 et 10 en tout cas (deux tâches parmi les plus réussies). Par contre, lorsqu'il s'agit de l'autre juxtaposition "préstatique - dynamique" ce caractère encore vérifié pour les tâches des exercices 5 et 6, et s'inverse pour l'exercice 8 , avec quasi égalité des taux de procédures corrects aux exercices 7 et 10 . Autrement dit, il est impossible de dégager en toute certitude un caractère général sur le lien entre cette répartition en une ou deux questions et les procédures et nous n'en tiendrons pas compte. Cela justifie à posteriori notre choix méthodologique de regrouper toutes ces catégories ; cela justifie en particulier de ne pas créer artificiellement un modèle "Super Mixte" (expression statique et dynamique dans la même question) bien que les pourcentages de procédures correctes affichés par les étudiants ayant exprimé un tel modèle soient meilleurs que ceux des étudiants ayant exprimé un modèle statique ; cela confirme enfin que l'association dynamique -(pré)statique a des caractères particuliers que ne présente pas chaque modèle séparément.

Pour analyser les différents genres du dynamique, nous pouvons nous contenter aussi de regarder les procédures correctes (majoritaires sauf à l'exercie 5). Voici le tableau croisant les divers genres du modèle dynamique[1] et les procédures correctes.

Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice et ayant le modèle concerné.

Procédures correctes (Total)	Dynamique local		Dynamique global		Dynamique	
Exercice 5	17	25%	32	30%	14	30%
Exercice 6	46	71%	65	68%	27	73%
Exercice 7	39	57%	62	58%	20	50%
Exercice 8	35	56%	50	57%	18	47%
Exercice 10	35	56%	44	45%	20	49%

Il n'y a pas de différences significatives entre ces 3 expressions du modèle dynamique quelles que soient les tâches concernées.

Ceci justifie à posteriori notre choix méthodologique de regrouper ces différentes catégories en le modèle dynamique.

En conclusion, nous reprenons notre étude globale du lien entre nos modèles exprimés et les procédures correctes, après avoir vérifié qu'il ne s'introduisait pas de sous-catégories de modèles que nous aurions négligées. Retenons toutefois que dans les modèles mixtes nous avons retrouvé la différence entre statique et préstatique qui ne nous oblige pas à revenir sur notre classification mais qui éclaire les résultats sur la place du modèle mixte dans la hiérarchie.

---

(1) Dynamique local (resp. global) est réservé au modèle dynamique avec sujet du syntagme verbal au singulier (resp. au pluriel). Lorsque les deux formes coexistent ou lorsque le sujet est collectif (la suite, je, on) on a attribué "dynamique".

iii) La relation entre les tâches et les modèles dans les procédures correctes.

On ne peut pas ordonner les exercices par ordre "de procédures correctes croissantes" comme on a pu ordonner les modèles. Cependant, en assimilant momentanément - on sait que c'est inexact mais indicatif - production de procédures correctes et réussites, on constate que l'exercice 5 est le moins réussi des exercices, quel que soit le modèle exprimé, et l'exercice 6 le plus réussi. Or l'exercice 5 correspond à une tâche peu proposée aux étudiants ordinairement, et fait appel à la représentation qu'ils ont de la convergence des suites alors que l'exercice 6 correspond à une tâche élémentaire (compte tenu du "contrat" à propos de l'expression "étudier une suite") ne faisant intervenir qu'une majoration ou un encadrement (ou un théorème simple sur le produit de 2 suites). Cela peut indiquer qu'il y a des effets de fréquence - même pour les étudiants exprimant un modèle statique et présentant le plus fréquemment les meilleures procédures, un exercice peu rencontré est moins bien réussi. Par contre, "à force", un exercice correspondant à une tâche familière finit par être bien réussi par beaucoup plus d'étudiants Cela peut aussi indiquer que la tâche à l'exercice 6 est effectivement plus "facile" que celle à l'exercice 5.

Mais les 3 autres exercices ne se classent pas de la même façon.

Aussi y-a-t-il, par exemple, plus de procédures correctes à l'exercice 10 qu'à l'exercice 8 pour tous les modèles sauf les modèles mixtes et statiques ; il y a plus de procédures correctes à l'exercice 7 qu'à l'exercice 8 dans les copies où sont exprimés des modèles dynamiques, préstatique, "tend vers" ou pas de modèle du tout - c'est le contraire pour les modèles mixtes, statiques, primitifs et dynamiques monotones.
Or l'exercice 8 mobilise simplement la définition de la convergence en (ε,N) alors que l'exercice 10 mobilise la connaissance des suites extraites et le 7 un travail sur la définition de la convergence. On constate donc que, pour les étudiants ayant exprimé un modèle mixte et statique faire fonctionner de façon élémentaire la définition en (ε,N) est la tâche la plus réussie de ces 3 tâches, contrairement à ce qui se passe pour les autres modèles.

Nous allons faire apparaître ces résultats dans le tableau suivant où nous avons croisé les tâches de chaque exercice et le taux de production de procédures correctes par modèle exprimé : dans chaque case nous indiquons les modèles qui conviennent (en acceptant une marge de 2% sur les pourcentages).

TACHE \ TAUX DE PROCEDURES CORRECTE PAR MODELE EXPRIME	PLUS DE 50% DE PROCEDURES CORRECTES	ENTRE 40% ET 50% DE PROCEDURES CORRECTES	MOINS DE 30% DE PROCEDURES CORRECTES
Exemple suite à termes positifs non décroissante convergeant vers 0	Modèle statique.	Modèle mixte.	Modèles dynamique préstatique, primitif, "tend vers", dynamique monotone, sans modèles.
Définition en (ε,N) écrite 3 fois (2 fois nécess. et 1 fois suffisante) Limite connue.	Modèles statique, mixte et dynamique.	Modèles préstatique, dynamique monotone.	Modèles primitif, "tend vers", sans modèles.
Définition en (ε,N) plus encadrement éventuel ou produit ou équivalent. Limite inconnue.	Modèles statique, mixte, dynamique et préstatique.	Copies sans modèle exprimé.	Modèles dynamique, monotone, "tend vers", primitif.
Exemple suite divergente ayant 2 sous-suites convergentes	Modèles statique, mixte, dynamique, préstatique.	Modèles dynamique, monotone et copies sans modèle exprimé	Modèle "tend vers", primitif.
Encadrement de (u_n) par $-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}$ ou majoration de $\lvert u_n \rvert$ ou théorème produit	Modèles statique, mixte dynamique, préstatique et dynamique monotone.	Copies sans modèle exprimé, Modèle "tend vers".	Modèle primitif.

On constate "tâche par tâche" la hiérarchie suivante : statique, mixte, dynamique, préstatique, {sans modèle exprimé / dynamique monotone}, tend vers, et - bon dernier - primitif. Selon les tâches, la barre des 50%, 40%, 30% "tombe" à tel ou tel endroit dans la hiérarchie. Cela nous permet de confirmer l'hypothèse que, quelque soit le modèle exprimé, les tâches les mieux réussies sont les tâches d'encadrement de u_n ou de majoration de $\lvert u_n \rvert$ puis l'utilisation de la définition en (ε,N) et les exemples de suites/suites extraites puis les tâches où interviennent des représentations de

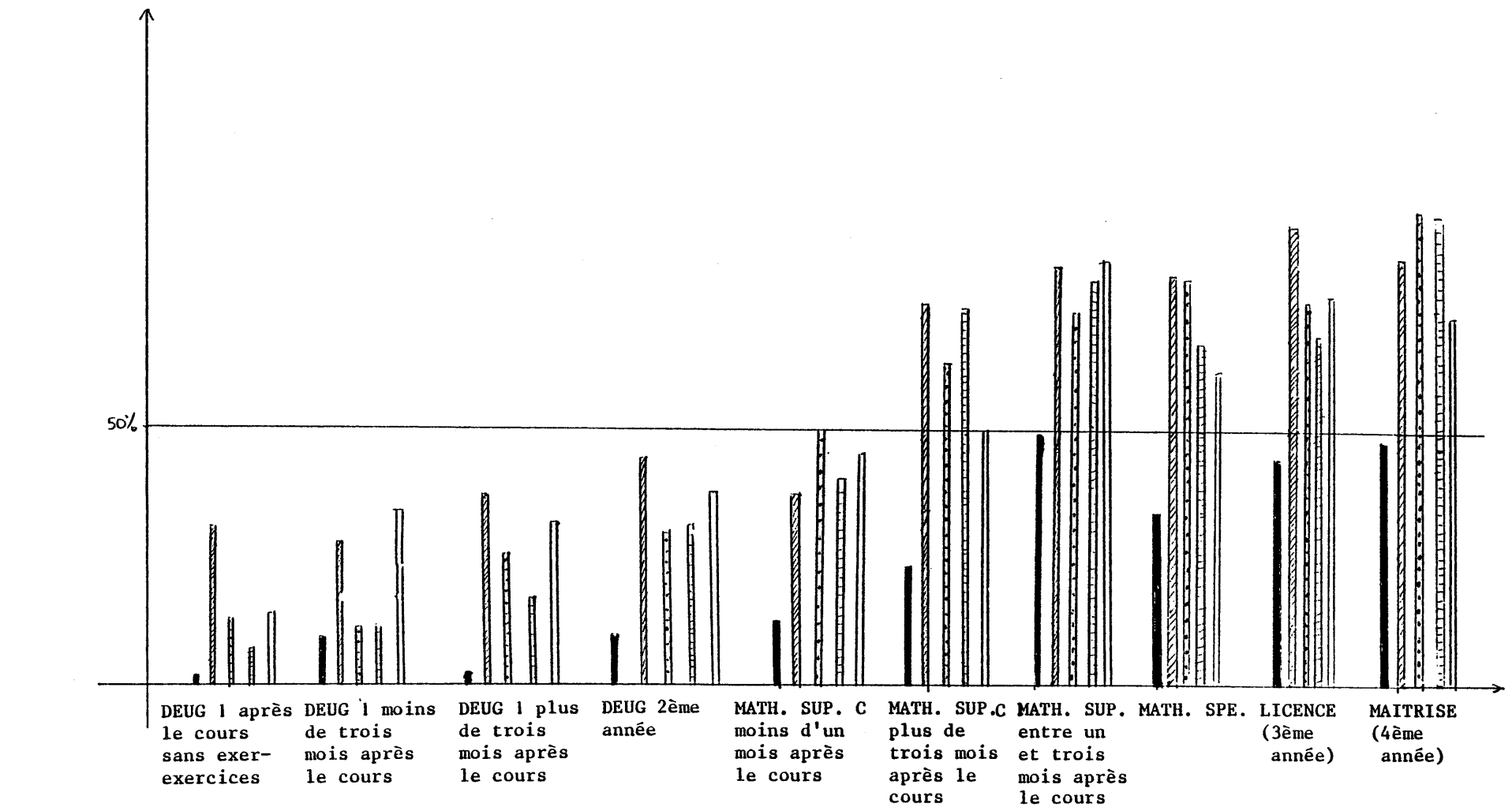
suites convergentes permettant de construire des contre-exemples. La place de l'exercice 7 par rapport à l'exercice 8 pour le modèle préstatique et pour le modèle dynamique monotone peut suggérer que le modèle préstatique est associé (tout de même) à une manipulation un peu meilleure de la définition en (ε,N).
A ce point de la comparaison et pour avancer dans nos conclusions, il est intéressant de regarder plus précisément la relation entre chaque procédure correcte et les modèles dans la mesure où cela a un sens de comparer les pourcentages correspondants. Nous nous limiterons donc aux modèles dynamique, mixte, préstatique, statique. On constate à nouveau que les modèles mixte: et statique: sont très proches - les différences entre eux concernent l'exercice 6 où les premiers sont plus associés à des procédures de majoration de $|u_n|$ et les seconds à des procédures utilisant le théorème du produit d'une suite bornée par une suite convergente - les modèles mixtes sont donc plus associés à la procédure la plus généralisable.
Les modèles dynamiques et préstatiques, eux, sont caractérisés par la production d'autant de procédures utilisant la définition sans changement de stratégie à l'exercice 7 que de procédures avec changement de stratégie - ces modèles correspondent à moins de souplesse dans les démonstrations et à une moins bonne manipulation de la définition en (ε,N) comme nous l'avons déjà vu.
Nous ne pouvons guère en dire plus.

iv) Répartition des procédures correctes par niveaux (Tableau N_1, courbe TN_1).
Si on examine les mêmes procédures correctes globalement par niveau et par exercice, on remarque d'abord qu'aucun niveau n'a exactement la même"courbe en bâton" qu'un modèle - les phénomènes ne sont pas aussi simples, l'échantillonage jouant aussi un rôle.
Ensuite, on s'aperçoit qu'il n'y a pas une "hiérarchie" des niveaux mais qu'il se dégage bel et bien 2 groupes avec, entre les deux, les Math. Sup. C.
Il est impossible de reclasser les niveaux par pourcentage croissant de procédures correctes, car l'ordre change à chaque exercice. Cependant, on constate que, pour la majorité des exercices, les deux premiers niveaux de DEUG sont

Procédures correctes \ Niveaux		DEUG tout de suite après le cours	DEUG moins 3 mois après le cours	DEUG plus de 3 mois après le cours	DEUG 2	SUP C moins d'1 mois après le cours	SUP C plus de 3 mois après le cours	SUP entre 1 et 3 mois après le cours	SPE.	Licence	Maîtrise
Exercice 5	5CEX contre-exemple	2%	5%	0	6%	4,5%	10%	30%	23%	20%	34%
	5SIN contre-exemple SIN	0	3%	0	4%	4,5%	7%	5%	8%	11%	5%
	5STA sous suite nulle	0	0	2%	0	0	7%	12%	2%	11%	8%
	5DIV divers juste	0				0	0				
	Total	2%	9%	2%	10%	9%	23%	49%	33%	44%	47%
Exercice 6	6VAL majoration de (u_n)	5%	4%	10%	15%	8%	8%	19%	48%	52%	71%
	6ENC encadrement de u_n	16%	20%	18%	25%	27%	58%	23%	16%	27%	8%
	6PRO $u_n = \frac{1}{n} \times \cos n\theta$	9%	4%	10%	4%	3%	8%	41%	16%	9%	3%
	Total	31%	28%	37%	44%	38%	73%	84%	79%	89%	83%
Exercice 7	7DEC définition (e,N)	4%	2%	4%	10%	11%	19%	40%	32%	24%	57%
	7DEF avec changement définition (e,N)	0	5%	16%	14%	34%	31%	25%	22%	26%	15%
	7EQU $u_n \sim \frac{1}{n}$	9%	4%	4%	3%	0	0	2%	11%	14%	19%
	7PRO $u_n = \frac{1}{n} \times n u_n$	0	0	2%	2%	5%	12%	4%	13%	10%	2%
	Total	13%	11%	26%	30%	50%	62%	72%	78%	74%	92%
Exercice 8	utilisation (e,N) 8-DEF	7%	11%	17%	31%	40%	73%	78%	66%	68%	91%
Exercice 10	0-BIE contre-exemple	7%	17%	4,5%	13%	34%	50%	71%	54,5%	67%	55%
	0-JSE juste sans ex	7%	17%	27%	25%	10,5%	0	12%	5%	8%	16%
	Total	14%	24%	32%	38%	45%	50%	82%	60%	75%	71%

Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice concerné par niveau.

TN_1 Répartition des procédures correctes par niveaux.



comparables, alors que, sauf pour l'exercice 5, le troisième niveau (plus de 3 mois après le cours et les exercices) est meilleur surtout pour les exercices 7 et 10. Autrement dit, en DEUG première année, il y a un certain progrès qui ne se manifeste qu'après un certain temps et donc une pratique sur d'autres objets que les seules suites ; de plus, si les techniques se mettent en place, les représentations, elles, ne s'améliorent pas suffisamment pour que l'exercice 5 soit mieux réussi. En DEUG II, on constate de meilleurs pourcentages de procédures correctes essentiellement à l'exercice 8 et dans une moindre mesure aux exercices 6 et 10 - toutefois il n'y a jamais 50% de procédures correctes à un exercice. L'exercice 6 est toujours le mieux réussi et l'exercice 5 le moins réussi. Autrement dit on a un peu appris en DEUG 2 la définition de la convergence (exercice 8) et la définition des suites extraites et on sait montrer (à 40%) qu'une suite, encadrée par 2 suites convergeant vers 0, - car dans les 4 niveaux de DEUG c'est la procédure d'encadrement (6 ENC) qui est la plus utilisée à l'exercice 6 , mais la "réussite" à l'exercice 5 reste infime en DEUG 2.

On constate par ailleurs que les 2 niveaux de Sup. C sont bien différents - les procédures des Math. Sup. C moins d'un mois après le cours et les exercices sont assez comparables à celles de DEUG II, alors que 3 mois après le cours elles sont bien meilleures et deviennent comparables à celles de SUP. Peut-on se demander si le premier trimestre d'une classe de Sup. C donne le même bagage de mathématiques aux élèves qu'une année et demie de DEUG ? En tout cas, c'est l'exercice 7 qui est relativement le mieux réussi par les Sup. C par rapport à ceux de DEUG II - - avec forte prédominance encore des procédures sans changement de stratégie

Tout se passe comme si la quantité d'exercices et de cours permettait aux étudiants de Sup. C d'aborder correctement les exercices même si leurs procédures ne sont pas les meilleures parmi les procédures correctes.

Plus précisément, c'est encore la procédure d'encadrement qui est la plus utilisée dans l'exercice 6 en SUP C moins d'un mois après le cours et les exercices. D'autre part, plus de 3 mois après le cours, la barre des 50% de procédures correctes est largement franchie pour les exercices 6, 7, 8, 10. Cependant on constate encore une large prédominance des procédures d'encadrement (peu généralisable) à l'exercice 6 et des procédures sans changement de stratégie à l'exercice 7.

En discutant à plusieurs reprises avec les enseignants concernés, nous sommes arrivée à la conclusion que le "progrès" sens-ible enregistré dans des Sup C différentes n'est pas seulement dû à la répartition de nos effectifs mais correspond bien à une réalité. En effet, si le recrutement des Sup C composant le niveau "3 mois après le cours" est vraisemblablement légèrement meilleur que celui des autres (réputation du lycée concerné), il fut jugé particulièrement mauvais cette année-là par les enseignants en question, qui estiment reconnaître dans nos résultats les progrès de leurs élèves pendant l'année. Dans ces conditions[1] il nous semble très important de souligner qu'il y a beaucoup plus de "progrès" en SUP C que pendant les 2 années de DEUG - le "niveau" de départ étant un peu plus élevé que le niveau de départ en DEUG et le "niveau" d'arrivée pouvant encore être amélioré dans la mesure où les meilleures procédures ne sont pas du tout mises en place. Est-ce le niveau de départ qui est condition nécessaire d'un tel progrès ? Est-ce, au contraire, la quantité de travail fournie en Sup C qui, à elle seule, implique un tel progrès ? Pourquoi les procédures correctes utilisées en Math. Sup C ne sont pas les mêmes que celles de Math. Sup. ? Pour conclure, il faudrait plus que nos données actuelles; nous y reviendrons. En ce qui concerne le troisième groupe, enfin, on constate de très bons pourcentages de procédures correctes dans les 4 niveaux, avec cependant supériorité des maîtrises pour les exercices 5, 7, 8, des licences pour le 6 et des Sup pour le 5 et 10. Dans tous les niveaux, l'exercice 5 est le moins "réussi" et l'exercice 6 le plus "réussi" sauf en maîtrise où ce sont les exercices 7 et 8. Autrement dit c'est en maîtrise qu'on est le plus à l'aise avec la définition de la convergence en (ε, N) - d'ailleurs les seules procédures 7-DEC avec changement de stratégie sont utilisées par 57% des étudiants de maîtrise ayant abordé l'exercice 7 ! (de même la procédure de majoration de $|u_n|$ dans l'exercice 6 est produite par 71% de ces étudiants). C'est donc en maîtrise et en maîtrise seulement, qu'on utilise nettement le plus les procédures les plus généralisables ou les plus élégantes.

---

[1] Nous avons vu que le programme en Math Sup C est moins développé (dans la mesure où on n'introduit pas les suites de Cauchy) mais que l'enseignement correspondant occupe une semaine entière avec cours et T.D. regroupés.

v) Relation entre tâches et procédures correctes par niveaux.

Nous avons fait apparaître ces résultats dans le tableau suivant où nous avons croisé, comme en iii), les tâches de chaque exercice et le taux de production de procédures correctes par niveau : dans chaque case nous indiquons les niveaux concernés (nous acceptons une marge de 2% sur les pourcentages).

TAUX DE PROCEDURES CORRECTES PAR NIVEAUX / TACHE	PLUS DE 50% DE PROCEDURES CORRECTES	ENTRE 40% ET 50% DE PROCEDURES CORRECTES	MOINS DE 30% DE PROCEDURES CORRECTES
Exemple suite à termes positifs non décroissante convergent vers 0	Sup. Maîtrise	Licence	1er groupe Sup C (les 2 niveaux).
Définition en (ε,N) écrite 3 fois (2 fois nécessaire et 1 fois suf fis.) - limite connue	3ème groupe Sup.C plus de 3 mois après cours.	Sup C moins d'un mois après cours.	1er groupe: DEUG I les 3 niveaux.
Définition en (ε,N) plus encadrement éventuel ou produit ou équivalent -limite inconnue	3ème groupe et 2ème groupe.		1er groupe: DEUG I les 3 niveaux.
Exemple suite divergente ayant 2 sous-suites convergentes	3ème groupe Sup C plus 3 mois après cours.	Sup C moins d'un mois après, DEUG II..	Deug I les 2 niveaux tout de suite après le cours et moins de 3 mois après le cours.
Encadrement de (u_n) par $-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$ ou majoration de $\lvert u_n \rvert$ ou théorème produit	3ème groupe Sup C plus de 3 mois après cours.	Deug II Sup C moins d'1 mois après (cours) DEUG I plus 3 mois après cours.	

On constate cette fois-ci la hiérarchie suivante : 3ème groupe (maîtrise et sup., puis licence et Spe, ou Spe et licence, suivant la tâche), Sup C plus de 3 mois après le cours, Sup C moins de 1 mois après le cours, DEUG II, DEUG I plus de 3 mois après le cours, DEUG I les deux premiers niveaux. Mais les tâches les mieux "réussies" (compte-tenu de cette hiérarchie) sont moins bien différenciées que dans le cas des modèles. On peut confirmer l'hypothèse, que dans les conditions de l'enseignement actuel, les tâches d'encadrement de u_n ou de majoration de $|u_n|$ sont "réussies" le plus rapidement, suivies de celles qui consistent à extraire des suites (convergentes) d'une suite (divergente), suivies de celles où on doit utiliser la définition en (ε,N) - cette utilisation s'avère le fait de moins du 1/3 des étudiants de DEUG 1ère année (tous niveaux) ce qui suggère une difficulté réelle - suivies de la tâche où intervient la représentation des suites convergentes.

Autrement dit ce n'est pas tout à fait la même hiérarchie que celle que nous avons obtenue par modèles. Cependant les tâches extrêmes sont les mêmes, alors que les tâches de difficultés intermédiaires sont interverties. Des recherches plus fines sont à entreprendre pour préciser encore ces résultats en fonction de l'enseignement qui est dispensé.

En conclusion, il apparaît à travers le questionnaire V_1, qu'une des difficultés de la notion est la manipulation effective de la définition en (ε,N) - du moins pour les étudiants des deux premières années de DEUG, l'autre difficulté étant, pour tous les étudiants, la mise en place d'une représentation de la convergence des suites suffisamment efficace pour résoudre l'exercice 5. Or le modèle le plus associé à des procédures correctes se trouve être précisément le modèle statique qui correspond à une "intégration" mentale de la définition en (ε,N). Cela peut signifier que, pour être apte à faire bien fonctionner une telle définition, il convient de l'avoir si bien comprise qu'on l'a adoptée (dans sa signification et non pas dans sa "lettre") comme "modèle". Dans une telle hypothèse, l'importance

des représentations mentales serait donc très grande, puisqu'il y aurait coïncidence entre une bonne manipulation de la définition de la convergence et un modèle correspondant le plus exactement possible au sens précis de la définition mathématique de la convergence. Reste à savoir si les 2 facteurs - manipulation et modèle exprimé - sont "acquis" simultanément ou si l'un est antérieur à l'autre, et si la mise en place d'un modèle statique est nécessaire ou seulement suffisante, et en conséquence qu'on doit penser du modèle dynamique. Cette importance des représentations mentales - reconnues comme telles - nous semble aussi suggérée a contrario par les résultats de l'exercice 5. Il y a en effet peu d'exercices de ce type posés au cours de l'enseignement que nous connaissons et nous constatons des échecs massifs sur cette tâche. Cela peut suggérer qu'un travail effectif sur la représentation (exprimée) de la convergence des suites pourrait être tenté en tant que tel, alors qu'actuellement, ou bien on espère (sans le dire) que des représentations correctes vont se mettre en place toutes seules - ou bien on ne prend pas du tout en compte l'existence même de ces représentations.
Nous allons compléter ces résultats par l'étude des procédures ambigües et erronées.

c) Les procédures ambigues et sans démonstrations (copies N).

i) Les exercices 5 et 10 - procédures sans démonstrations (Tableaux M_2 et N_2).

Il y a relativement plus de procédures sans démonstration à l'exercice 5 qu'à l'exercice 10. Cela étant, niveaux et modèles ont des profils assez contrastés dans leurs rapports à ces procédures. On constate que tous les modèles sauf un sont associés à plus de "faux" sans démonstration que de "juste" sans démonstration à l'exercice 5 alors que la répartition correspondante à l'exercice 10 est beaucoup plus équilibrée.

M_2 Répartition des procédures ambigües par modèles exprimés. (corpus N)

Procédures ambigües \ Modèle exprimé	primitif	Tend vers	Dynamique monotone	Pas de modèle exprimé	Questions † et non abordées	Dynamique	Préstatique	Mixte	Statique
Procédures sans démonstration									
5 JSD	17%	5%	0	18%	25%	17%	26%	10%	20%
5 FSD	50%	60%	70%	45%	22%	23%	30%	22%	13%
0 JSD	21%	23%	15%	16%	12%	14%	19%	8%	17%
0 FSD	26%	30 %	15%	28%	8%	14%	19%	10%	6%
Procédures ambiques									
5 RAN + SNUL	13%	16%	15%	14%	16%	18%	15%	18%	13%
5DES	0	0	0	0	3%	4%	2%	2%	0
6PRA	4%	10%	5%	13%	0	10%	17%	4%	5%

Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice concerné, et ayant le modèle de la colonne.

N_2 Répartition des procédures ambigües par niveaux.

Corpus N

Procédures ambigües \ Niveau	DEUG tout de suite après le cours	DEUG moins 3 mois après le cours	DEUG plus de 3 mois après	DEUG 2	SUP C moins d'1 mois après le cours	SUP C plus de 3 mois après le cours	SUP entre 1 et 3 mois après le cours	SPE.	Licence	Maîtrise
Procédures sans démonstration										
Exercice 5 — 5 JSD	18%	12%	15%	16%	2%	3%	10%	20%	20%	34%
Exercice 5 — 5 FSD	41%	46%	68,5%	62%	20%	10%	12%	13%	20%	5%
Exercice 10 — 0 JSD	14%	11%	23%	24%	8%	5%	0	17%	17%	20%
Exercice 10 — 0 FSD	38%	34%	30%	31%	8%	25%	4%	4%	6%	0
Procédures ambigües										
Exercice 5 — 5 RAN+5 NUL	26%	11%	6%	4%	23%	27%	21%	27%	11%	11%
Exercice 5 — 5 DES	8%	1,5%	4%	4%	0	0	2%	0	0	0
Exercice 6 — 6 PRA	9%	15%	16%	8%	8%	4%	5%	9%	2%	7%

Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice par niveau.

Seul en effet le modèle statique est associé à 1/5 de procédures justes sans démonstration et encore moins de fausses sans démonstration à l'exercice 5. Les procédures sans démonstration à l'exercice 5 sont présentes dans 70% , 67% et 65% des copies où sont exprimés un modèle dynamique monotone, primitif, "tend vers" ; pour l'exercice 10 ces pourcentages sont 28%, 47%, 52%
De plus, les répartitions entre "juste" et "faux" sont de l'ordre de 1 à 3 (au mieux) dans l'exercice 5 alors qu'il y a quasi-égalité dans l'exercice 10.
Dans les copies où sont exprimés des modèles dynamiques, mixtes et statiques, on trouve un tiers (environ) de procédures sans démonstration à l'exercice 5 (dans le rapport 1 à 1,5 entre juste et faux) ; il y a 18 à 28% de procédures sans démonstration à l'exercice 10, pratiquement équiréparties entre juste et faux.

Tout cela montre que ces réponses ne sont indépendantes ni de la tâche ni de la représentation de la convergence que l'on a. Autrement dit, lorsqu'un étudiant écrit "vrai" cette réponse[1] n'est pas aléatoire et s'avère liée à sa conception de la convergence des suites et à ce qu'on lui demande.
Les répartitions de ces procédures par niveaux sont très différentes. Ainsi dans les 2 premiers niveaux de DEUG I, elles sont très proches l'une de l'autre pour les 2 exercices - plus de 50% de procédures sans démonstration, moins du tiers de justes parmi elles.
Dans le 3ème niveau de DEUG I, très comparable au DEUG II, on constate qu'il y a encore plus de procédures sans démonstration "fausses" à l'exercice 5 (65%) mais que les répartitions entre juste et faux à l'exercice 10 se sont au contraire équilibrées dans l'autre sens - on se rapproche d'une équirépartition entre juste et faux à l'exercice 10.

Par conséquent c'est de nouveau 3 mois après le cours les exercices sur les suites et presqu'en DEUG II compris, qu'on relève un "basculement" dans les réponses : accroissement du nombre de reponses fausses à l'exercice 5 et amélioration des réponses à l'exercice 10.

Tout se passe comme si les suites extraites étaient mieux imaginées que les suites convergentes non monotones après l'enseignement reçu en DEUG première année !

---

[1] inexacte, rappelons-le.

Revenons à la répartition des réponses sans démonstration dans les groupes 2 et 3. Cette fois-ci le premier niveau de Sup C n'est pas comparable à ce qu'on a vu en DEUG II - il n'y a que 23% de procédures sans démonstration à l'exercice 5 et 16% à l'exercice 10 - de même, mais en sens contraire, le second niveau de Sup C n'est pas comparable au niveau Sup à cause de l'exercice 10 (30% de procédures sans démonstration en Sup C(contre 1% en Sup). Il n'y a en effet qu'à l'exercice 10 et en Math. Sup qu'on ne trouve pratiquement pas de copies sans démonstration (1) - en Spe, licence, maîtrise on en trouve autour de 20% avec de moins en moins de procédures fausses (en maîtrise il n'y en a plus). La même tendance se manifeste en maîtrise pour l'exercice 5. Dans les autres niveaux du groupe 3, les procédures sans démonstrations, un peu plus nombreuses que pour l'exercice 10 (de 17% à 40%) se répartissent dans tous les sens - plus de fausses en Math Sup, plus de justes en Math Spe, égalité en licence.

Nous avons établi le tableau croisant les procédures sans démonstration à la fois aux modèles et aux niveaux :

TAUX DE PROCEDURES SANS DEM. PAR MODELE OU NIVEAU	PLUS DE 50% PROC. A CHAQUE EXERCICE	ENTRE 40% ET 50%	MOINS DE 30%
JUSTE SANS DEM. AUX EXERCICES 5 ET 10			TOUS LES MODELES, TOUS LES NIVEAUX
FAUX SANS DEM. A L'EXERCICE 5	PRIMITIF TEND VERS DYNAMIQUE MONOTONE DEUG II,DEUG I PLUS 3 MOIS	PAS DE MODELE DEUG I 2 PREMIERS NIVEAUX	DYNAMIQUE MIXTE STATIQUE 3ème ET 2ème GROUPE
FAUX SANS DEM. A L'EXERCICE 10		DEUG I 2 PREMIERS NIVEAUX (38%,39%)	TOUS LES AUTRES NIVEAUX TOUS LES MODELES

En conclusion, il est possible que dans les 2 premiers niveaux de DEUG les réponses sans démonstration aux 2 exercices aient éventuellement un caractère aléatoire - par contre à l'exercice 5, ce sont les "modèles" véhiculant une image

monotone de la convergence ou une image vague, banalisée ("tend vers") qui sont associés à ces réponses fausses (comme nous l'avons déjà vu) ; enfin à l'exercice 10 on ne peut rien affirmer.

ii) Nous avons regardé simultanément[(1)] les procédures ambigües aux exercices 5 et 6 - les contre exemples ambigüs à l'exercice 5 (suite décroissante ou nulle à partir d'un certain rang) et les procédures "produit ambigu" à l'exercice 6. La seule régularité que nous pouvons noter est que, par modèles, il y a toujours moins de procédures produit ambigües que de contre exemples ambigüs - sauf pour le modèle préstatique (égalité) - alors que c'est dans les 3 derniers niveaux de DEUG que c'est le contraire. Là encore nos données sont insuffisantes pour avancer plus loin.

d) Les procédures erronées (copies N) (Tableaux M_3 et N_3).

i) Les procédures algébriques (applications erronées d'un théorème en acte de type algébrique dans les exercices 6 et 7 - estimation "algébrique de u_n dans l'exercice 8). On constate que les profils par niveaux sont beaucoup plus contrastés que les profils par modèles - autrement dit le temps intervient peut être plus (avec les éliminations d'étudiants !) que le modèle (exprimé) dans la production de telles procédures. Il y a une exception: le modèle statique est remarquablement peu associé à la production de ces procédures - moins de 5% de chacune.

On trouve ensuite le modèle mixte - moins de 10% de chacune de ces procédures ; pour le modèle dynamique se note une association plus marquée avec la procédure scalaire à l'exercice 7 ($\lim n u_n = n \lim u_n$) qu'avec les autres procédures algébriques ; pour le modèle préstatique se note une association plus marquée avec les 2 procédures scalaire et produit dans l'exercice 7. Les copies sans modèle exprimé ne sont pas très différentes de celles où s'exprime un modèle dynamique - sans association plus marquée à une des procédures. Elles sont aussi assez proches des copies où est exprimé un modèle dynamique monotone - à l'exception de l'association particulière plus marquée de ce dernier et des procédures "produit" à l'exercice 7. C'est avec le modèle "tend vers" qu'on a relativement le plus de procédures algébriques à l'exercice 8 - la production de ces procédures semble d'ailleurs indépendante de la production des procédures produit et scalaire à l'exercice 7 puisqu'elles "n'évoluent" pas de la même façon ni par niveau ni par modèle.

---

(1) cf. tableaux N_2 et M_2.

M_3 Répartition des procédures erronées par modèles exprimés. (Corpus N)

Procédures \ Modèle exprimé	primitif	Tend vers	Dynamique monotone	Pas de modèle exprimé	Questions 1 et 2 non abordées	Dynamique	Préstatique	Mixte	Statique
erronées type algébrique									
produit 6 PLI	21%	15%	5%	10%	7%	6%	10%	6%	0
produit 7. PLI	23%	8%	22%	12%	0	9%	18%	9%	3%
scalaire 7 PSC	6%	8%	6%	2%	0	4%	2%	3%	0
scalaire 7 PSO	16%	14%	6%	12%	0	14%	18%	7%	5%
8 ALG	6%	18%	11%	12%	0	7%	10%	2%	3%
erronées type Cauchy									
7-CAU	4%	5%	6%	0	5%	2%	0	1%	0
8-CAU	0	3%	6%	2%	0	2%	6%	2%	3%
erronées type monotonie									
5 DYN	6%	2%	5%	1,5%	3%	3%	2%	3%	0
5 MON	4%	0	5%	5%	6%	5%	4%	4%	5%
6 MON	11%	5%	10%	3%	0	0	4%	2%	0
erronées type confusion suites-séries									
6 CSS	4%	5%	0	0	7%	4%	4%	4%	2%
7 CSR	10%	8%	0	3%	10%	6%	12%	5%	5%

Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice concerné et ayant le modèle de la colonne.

Répartition des procédures erronées par niveau. (Corpus N)

Niveau / Procédures	DEUG tout de suite après le cours	DEUG moins 3 mois après le cours	DEUG plus de 3 mois après le cours	DEUG 2	SUP C moins d'1 mois après le cours	SUP C plus de 3 mois après le cours	SUP entre 1 et 3 mois après le cours	SPE.	Licence	Maîtrise
erronées type algébrique										
produit 6 PLI	9%	17%	18%	17%	16%	8%	1%	0	2%	0
produit 7 PLI	18,5%	30%	16%	9%	11%	11,5%	7%	2%	9,5%	4%
scalaire 7 PSC	4%	7%	6%	6%	9%	0	1%	2%	0	0
scalaire 7 PSO	33%	23%	24%	18%	9%	8%	2%	1%	2%	0
8-ALG	25%	11%	8%	7%	9,5%	11,5%	1%	6%	3%	0
erronées type Cauchy										
7-CAU	2%	0	0	5%	0	0	2%	5%	0	0
8-CAU	0	3%	2%	2%	0	0	3%	6%	0	0
erronées type monotonie										
5 DYN	3%	3%	4%	0	18%	7%	1%	1%	0	0
5 MON	2%	8%	2%	3%	16%	17%	4%	1%	4%	0
6 MON	7%	6%	2%	3%	3%	0	0	4%	0	0
erronées type confusion suites-séries										
6 CSS	0	7%	2%	8%	0	0	0	6%	4,5%	2%
7 CSR	2%	2%	8%	15%	7%	8%	4%	3%	7%	7,5%

Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants de chaque niveau ayant abordé l'exercice.

Les modèles primitifs enfin se caractérisent par la production de plus de 20% de procédures produit et scalaire aux exercices 6 et 7 dans les copies où ils sont exprimés. Il y a là une tendance à souligner : les modèles primitifs sont les modèles les plus associés de façon "stable", dans tous les exercices concernés, aux procédures algébriques qui correspondent à l'application erronée d'un théorème en acte sur la limite d'un produit.

On peut y voir une coïncidence entre une représentation erronée (et primitive) de la convergence des suites et l'application incorrecte du théorème sur le produit de 2 suites convergentes. Cela est renforcé par un résultat précédent où nous avions souligné la forte association de l'expression d'un modèle statique et la production de la procédure 6-PRO (application correcte du théorème du produit dans l'exercice 6).

Quant à la répartition des procédures algébriques par niveaux, elle est facile à décrire : dans le premier groupe il y a les 2 premiers niveaux qui se dégagent d'abord - avec, entre les 2, augmentation des procédures produits à l'exercice 6 et 7, et diminution des procédures scalaires et algébriques à l'exercice 8 ; rappelons[1] qu'en DEUG moins de 3 mois après le cours les procédures algébriques à l'exercice 7 occupent 60% des copies (équiréparties)... Ensuite ces procédures vont diminuer, d'abord la procédure produit à l'exercice 7 et les procédures algébriques à l'exercice 8 puis la procédure scalaire à l'exercice 7 (qui occupe encore 24% des copies de DEUG II) - seule la procédure produit à l'exercice 6 reste stable jusqu'en DEUG II. Cela semble confirmer la relative indépendance des procédures produit à l'exercice 6 et à l'exercice 7.

Les copies de Math Sup C moins d'un mois après le cours ressemblent beaucoup à celles de DEUG II, celles de Math Sup C plus de 3 mois après le cours sont cette fois-ci différentes (et moins bonnes) que celles de Sup. Il y a eu diminution entre les 2 niveaux des procédures 6-PLI et 7 PSC, le reste étant stable autour de 10%.

---

[1] cf. chapitre 5 ,première partie.

Par contre, en Sup, Spe, licence, maîtrise, ces procédures disparaissent des copies - il reste quelques procédures produit à l'exercice 7 en Sup, procédures algébriques à l'exercice 8 en Spé et procédures produit à l'exercice 7 en licence et en maîtrise (encore moins). C'est donc la procédure ($\lim nu_n = \lim n \times \lim u_n$) qui a la vie la plus dure ! On peut voir une preuve de plus que les procédures produit à l'exercice 6 et à l'exercice 7 sont relativement indépendantes - sans doute est-ce lié aux termes même du produit ($\cos n\theta$ ou n). On applique plus facilement le théorème (vraisemblablement) lorsqu'une des 2 suites qui interviennent a une limite connue.

ii) Les autres procédures erronées :

α) Utilisation de suites de Cauchy (exercices 7 et 8) :

Vu les effectifs, on peut seulement constater qu'elle est essentiellement le fait d'étudiants de Sup. et de Spe dans l'exercice 7 et dans l'exercice 8, aucune régularité du côté modèle ne nous semble fiable.

β) Procédures erronées du fait de l'utilisation abusive de critères de monotonie (exercices 5 et 6)

On constate qu'il y a une relation évidente entre la production de ces procédures et les modèles primitifs et dynamique monotone avec équirépartition entre l'exercice 5 et l'exercice 6.

Les modèles préstatiques, statiques, mixtes et dynamiques qui sont associés à 6%, 5%, 7% et 8% de telles procédures à l'exercice 5 présentent encore moins de procédures de ce type à l'exercice 6 (4%,0%,2%,0%). Par niveaux, ce sont les Math. Sup C moins d'un mois après le cours qui présentent le plus de ces procédures - à l'exercice 5 seulement. Comme nous l'avons déjà vu,[1] les procédures erronées sont encore assez représentées en Deug.1 trois mois après le cours et deviennent assez rares en Deug.2.Elles ont disparu en maîtrise.

---

[1] cf. chapitres 4 et 6 (première partie).

δ) Les confusions "suites-séries" sont plus fréquentes dans l'exercice 7 que dans l'exercice 6 et apparaissent surtout en DEUG II et en Spe (années d'étude des séries); elles ne sont pas discriminées par les modèles ; elles sont légèrement plus persistantes avec les modèles statiques, de même qu'elles disparaissent lentement en licence et en maîtrise. Ces erreurs sont bien sûr liées à l'introduction à partir de la deuxième année des séries dans les cours.

ε) Les autres procédures erronées.(Tableaux M_4 et N_4).

Il est difficile de comparer entre elles toutes ces procédures - on peut constater que le modèle statique intervient moins que tous les autres modèles dans la production de ces procédures (sauf DEXF et BLOC), suivi par les modèles mixte, dynamique et préstatique - sans qu'on puisse réellement comparer (vu la faiblesse des effectifs).

De même, en maîtrise la plupart de ces procédures ont disparu, avec une production faible en Sup, Spe et licence et plus élevée (surtout pour 8 MAG) dans le 1er groupe.

Pour essayer de résumer tous ces résultats, nous avons dressé le tableau suivant :

M4 Répartition des procédures erronées par modèles exprimés. (Corpus N)

Modèle exprimé / Procédures	primitif	Tend vers	Dynamique monotone	Pas de modèle exprimé	Questions I et non abordées	Dynamique	Préstatique	Mixte	Statique
Procédures erronées									
Exercice 6 Cas particuliers 6 PAR	4%	0	0	3%	3%	3%	0	1%	0
Exercice 7									
absurde 7DVG	0	3%	11%	7%	5%	3%	2%	5%	8%
$u_n = \frac{1}{n}$ 7EGA	8%	8%	17%	8%	0	1%	2%	1%	0
$u_n \simeq \frac{1}{n}$ 7PEG	8%	0	0	3%	5%	2%	2%	2%	0
$u_n \equiv nu_n$ 7ETD	5%	3%	0	3%	0	2%	4%	0	0
Exercice 8									
magique 8MAG	37%	26%	22%	26%	20%	18%	17%	12%	0
discours 8UNI	4%	0	5.5%	6%	4%	7%	8%	6%	0
discours 8LOC	14%	5%	5,5%	0	4%	9%	8%	1%	11%
Exercice 10									
exemple faux 0EXF	5%	3%	0	6%	4%	2%	6%	9%	14%
divers faux 0DIV	26%	17%	23 %	8%	8%	9%	0	7%	0

Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice concerné et ayant le modèle de la colonne.

N4 Répartition des procédures erronées par niveau. (Corpus N)

Procédures \ Niveau	DEUG tout de suite après le cours	DEUG moins 3 mois après le cours	DEUG plus de 3 mois après le cours	DEUG 2	SUP C moins d'1 mois après le cours	SUP C plus de 3 mois après le cours	SUP entre 1 et 3 mois après le cours	SPE.	Licence	Maîtrise
Procédures erronées										
Exercice 6 Cas particuliers 6 PAR	0	0	0	7%	8%	4%	1%	0	0	0
Exercice 7										
absurde 7DVG	4%	2%	2%	2%	11%	8%	9%	3%	0	0
$u_n = \frac{1}{n}$ 7EGA	6%	11%	6%	7%	0	0	1%	1%	0	0
$u_n \simeq \frac{1}{n}$ 7PEG	0	4%	8%	6%	2%	0	0	0	5%	0
$u_n \equiv nu_n$ 7ETO	4%	2%	14%	1%	0	0	1%	0	0	0
Exercice 8										
magique 8MAG	50%	33%	31%	29%	19%	8%	6%	6%	13%	5%
discours 8UNI	9%	4%	15%	5%	12%	0	4%	2%	8%	0
discours 8LOC	0	20%	12,5%	9%	14%	0	4%	3%	3%	2%
Exercice 10										
exemple faux 0EXF	0	0	0	2%	8%	10%	12,5%	8%	0	6%
divers faux 0DIV	34%	0	11%	5%	21%	10%	0	8%	3%	4%

Les pourcentages sont calculés sur le total des étudiants ayant abordé l'exercice concerné et du niveau de la colonne.

TAUX DE PROCÉDURES ERRONÉES par modèle ou par niveau / PROCÉDURES ERRONNÉES	PLUS DE 20%	PLUS DE 10%	MOINS DE 5%
procédure produit à l'ex.6 6-PLI	Primitif	Préstatique, tend vers	Statique, mixte et dynamique
		DEUG	3ème groupe et Sup C après 3 mois
procédure produit à l'ex.7 7-PLI	Primitif, dynamique, monotone	Préstatique, sans modèle, mixte et dynamique	Statique
	DEUG I	DEUG II, Sup C (les 2) licence	Spe, maîtrise
procédure scalaire à l'ex.7 7 PSO + 7PSC	Préstatique, tend vers, Primitif	Dynamique, Mixte, sans modèle exprimé	Statique
	DEUG I et II	Sup C	3ème groupe
procédure algébrique à l'ex. 8 8 ALG		Pas de modèle Tend vers Dynamique Monotone, préstatique	Mixte Statique
	DEUG I tout de suite après le cours	Deug I moins de 3 mois après le cours, 2ème groupe	Maîtrise, Sup, Licence
procédure magique à l'ex. 8 8-MAG	Primitif Tend vers Dynamique monotone Pas de modèle exprimé	Dynamique Mixte Préstatique	Statique
	DEUG I et II	Sup C(moins d'1 mois après le cours) licence	Maîtrise, Spe Sup, Sup C (plus de 3 mois après le cours)

Pour y voir plus clair nous n'avons gardé que les procédures erronées les plus représentées mais nous avons regroupé pour une même procédure modèle et niveau. Or, nous constatons que, pour ce qui est des modèles, c'est encore la même hiérarchie qui apparaît, statique toujours associé à moins de 5% de procédures erronées, puis mixte, puis dynamique, puis selon les cas dynamique monotone ou préstatique, copies sans modèle, "tend vers", primitif. Autrement dit, non seulement les procédures correctes sont associées dans un certain ordre aux modèles mais encore les procédures erronées disparaissent des copies dans le même ordre par

rapport aux modèles exprimés. On peut aussi confirmer que le même théorème en acte "limite d'un produit de suite" est moins utilisé dans un cas simple (exercice 6) que dans un cas plus compliqué (exercice 7) - cependant notre interrogation sur la différence effective entre les modèles mixtes et surtout dynamiques et préstatiques - autrement dit comme intervient la référence au mouvement dans la représentation - demeure entière. La contribution des procédures erronées à l'étude de la relation entre les procédures, les tâches, les modèles et les niveaux est ainsi moins importante que l'analyse des procédures correctes - nous réutiliserons cependant ces procédures erronées lors de notre investigation sur les erreurs au chapitre 8.

Nous avons étudié successivement chaque exercice, puis nous avons juxtaposé les résultats et constaté de grandes ressemblances ; il manque pourtant à ces analyses tout ce qui concerne le caractère simultané de la production des procédures aux 5 exercices principaux. Nous pouvons, pour y remédier, étudier la cohérence des copies, c'est-à-dire voir dans quelle mesure une procédure correcte à tel exercice est associée à des procédures erronées ou non à tous les autres, ceci en relation avec le modèle exprimé ou le niveau. Nous avons déjà pu constater en croisant 2 à 2 un certain nombre d'exercices une cohérence certaine dans les copies - voilà ce que nous allons confirmer dans le paragraphe suivant.

7.1.2. La cohérence des copies (copies N)

Nous avons étudié les répartitions par niveaux et par modèles des 3 fréquences suivantes : le nombre d'exercices réussis par individu, le nombre d'exercices abordés par individu et le nombre de démonstrations erronées produites par individu (N).

Les analyses des tableaux correspondants nous permettront de confirmer à la fois la cohérence des copies (en la nuançant), et les relations que nous avons déjà relevées entre les performances, les niveaux et les modèles. Nous avons enfin consacré un paragraphe spécial à l'étude à part des différents genres du modèle mixte avant de conclure.

a) Etude du nombre d'exercices réussis par individu.(Tableaux VII_1 et VII_2).

Pour obtenir une approche simple de cet indice, nous avons utilisé (exceptionnellement) les performances que nous avions attribué aux individus pour chaque exercice. Rappelons qu'un exercice est réussi si le résultat est juste et si la procédure correspondante est correcte ou ambigüe, à l'exclusion des procédures sans démonstrations. Un exercice non abordé est donc considéré ici comme non réussi, ce qui amène à rectifier un peu certains résultats bruts. Cela étant, il apparaît d'abord que les effectifs des étudiants N se répartissent en 40% d'étudiants qui réussissent moins de 2 exercices, 30% qui en réussissent 4 au moins et 30 % qui en réussissent 2 ou 3 - 45% d'étudiants réussissent 3 exercices au moins. Peut-on parler dans ces conditions de cohérence dans les copies ? En fait nous allons montrer que la répartition des étudiants dans les différents types ci-dessus n'est pas aléatoire, et qu'au contraire certains modèles et certains niveaux sont associés plus que les autres soit aux étudiants ayant réussi (au moins 3 ou 4 exercices) soit au contraire à ceux qui en ont réussi au plus un ou deux). C'est en ce sens que nous parlerons de cohérence : avec un modèle statique, par exemple, il y a 58,5 chances sur 100 d'avoir 4 exercices au moins réussis - avec un modèle primitif, il y a 4 chances sur 100 d'avoir 4 exercices au moins réussis, mais 77 chances sur 100 d'en avoir au plus un de réussi...

Nous commençons par étudier les étudiants ayant réussi à 3 exercices au moins sur 5 - avec les restrictions évoquées au début sur les 2 exercices restant (qui peuvent ne pas avoir été abordés) et sur les résultats justes sans démonstration dont il n'est pas tenu compte ici. Ces 2 restrictions influencent les pourcentages d'étudiants de maîtrise qui n'ont pas toujours eu assez de temps et qui donc n'ont pas toujours tout abordé ou ont pu "passer" certaines démonstrations.

Nous indiquons en même temps le pourcentage d'étudiants n'ayant réussi qu'un exercice au plus.

Tableau VII,

Nombre d'exercices réussis par modèles exprimés. (corpus N)

Nombre d'exercices réussis / Modèle exprimé	0	1	2	3	4	5
Primitif	48% 27	29% 16	12,5% 7	7% 4	4% 2	0 0
Tend vers	39% 18	30% 14	6,5% 3	13% 6	6,5% 3	4% 2
Dynamique monotone	25% 5	20% 4	35% 7	10% 2	0 0	10% 2
Pas de modèle exprimé (Tautologie définition, pas de mul)	38% 6+3+16	23% 6+3+6	11% 5+0+2	9% 0+1+5	11% 0+1+6	9% 1+2+3
Questions 1) 2) non abordées	21% 7	21% 7	12% 4	12% 4	21% 7	15% 5
Dynamique	13% 31	17% 40	19% 44	17% 40	16% 37	17% 39
Préstatique	22% 12	24% 13	17% 9	17% 9	7% 4	13% 7
Mixte	10,5% 12	14% 16	9% 10	20% 23	17,5% 20	29% 33
Statique	0 0	12% 5	12% 5	17% 7	27% 11	32% 13
Total	21%	20%	14,5%	15%	14%	1.%

Les pourcentages indiqués sont calculés sur le total des étudiants correspondant à chaque ligne.

Tableau VII$_4$ Nombre d'exercices réussis par niveaux. (corpus N)

Nombre d'exercices réussis / Niveau	0	1	2	3	4	5
DEUG 1 après le cours sans exercices	53% 34	28% 18	12,5% 8	5% 3	0 0	2% 1
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	42% 28	33% 22	15% 10	8% 5	0 0	1,5% 1
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	33% 18	31% 17	24% 13	13% 7	0 0	0 0
DEUG 2ème année	37% 37	29% 29	17% 17	11% 11	2% 2	5% 5
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	27% 13	25% 12	12,5% 6	12,5% 6	10% 5	12,5% 6
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	6% 2	23% 7	26% 8	16% 5	16% 5	13% 4
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	1 % 1	5% 5	9% 9	19% 18	33% 32	33% 32
MATH. SPE.	2% 2	12% 11	12% 11	24% 22	18% 17	31,5% 29
LICENCE (3ème année)	2% 1	13% 6	13% 6	22% 10	22% 10	27% 12
MAITRISE (4ème année)	2% 1	5% 3	13% 8	22% 14	32% 20	27% 17

Les pourcentages indiqués sont calculés sur le total des étudiants correspondant à chaque ligne.

Modèle	Statique	Mixte	Dynamique	Questions 1 2 non ab.	Définition	Prestatique	Tend vers	Dynamique monotone	Primitif	Tautologie	Pas de modèles exprimés
Pourc. d'ét. du modèle ayant réussi 3 ex sur 5	76%	67%	50%	47%	(40%)	37%	24%	20%	11%	(6%)	(37%)
- au plus 1 ex.	12%	24%	31%	41%	(60%)	46%	70%	45%	77%	(69%)	(58%)

Niveau	DEUG tout de suite après le cours	DEUG moins 3 mois après le cours	DEUG plus de 3 mois après le cours	DEUG 2	SUP C moins d'un mois après le cours	SUP C plus de 3 mois après le cours	SUP entre 1 et 3 mois après le cours	SPE.	Licence	Maîtrise
Pourc. d'ét. du niveau ayant réussi 3 ex. sur 5	6%	9%	13%	18%	35%	45%	85%	74%	71%	81%
- au plus 1 ex.	81%	76%	64%	65%	52%	29%	6%	14%	16%	6%

Ces deux répartitions nous semblent très éloquentes. Les niveaux se classent très naturellement en 3 groupes - le premier groupe (DEUG) est caractérisé par un taux de moins de 10% des étudiants qui réussissent à 3 exercices au moins ; on y note une certaine évolution, faible, assez homogène d'un niveau au suivant. Le deuxième groupe (Sup C) est parfaitement intermédiaire entre les groupes extrêmes et on y note également une évolution certaine entre les deux niveaux.

Le troisième groupe (Sup, Spe, Licence, Maîtrise) est caractérisé par un taux d'au moins 71% d'étudiants qui réussissent à 3 exercices au moins ; on note une ressemblance importante entre les Math Sup et les maîtrises, qui sont les "meilleurs" niveaux, avec un fléchissement en Math Spe et en licence. Les copies des groupes extremes s'avèrent particulièrement "cohérentes" - ratées pour le premier groupe, réussies pour le troisième groupe.

On constate d'autre part, que les modèles statique et mixte sont associés à des copies globalement "réussies", que le modèle dynamique est remarquablement non discriminant, que les modèles préstatiques et les copies sans modèle exprimé se distinguent par le fait que les premiers sont un peu moins associés à des copies vraiment "ratées" ; de plus on retrouve exactement la "hiérarchie" qui s'était dégagée de l'étude des procédures pour chaque tâche - on avait alors regroupé "définition " et "tautologie" en "pas de modèles exprimés". Le modèle primitif, lui, est bien exprimé dans des copies où la majorité des procédures est erronée et c'est le modèle le plus associé à ce genre de copies. Nous pouvons encore affiner ces résultats pour certains modèles - les résultats par niveaux sont si nets qu'il nous a paru inutile d'épiloguer davantage dessus. Par contre il est intéressant de souligner qu'aucun étudiant ayant exprimé un modèle primitif n'a réussi les 5 exercices - de même aucun étudiant ayant exprimé un modèle statique n'a échoué aux 5 exercices. De plus, il se trouve que 43% des étudiants ayant réussi 2 ou 3 exercices ont un modèle dynamique alors que globalement 35% des étudiants ont exprimé un tel modèle. Ceci illustre le fait que le modèle dynamique est non seul-ement "non discriminant" mais encore plutôt exprimé par des étudiants ayant des performances globales moyennes. Il n'en est pas de même du modèle préstatique - pourtant également trop imprécis-qui est plus associé à des mauvaises performances globales que le modèle dynamique. Nous allons maintenant nuancer nos résultats en étudiant le nombre d'exercices abordés par individu, par niveaux et par modèles et le nombre de démonstrations erronées .

b) Etude du nombre d'exercices abordés par individu.(Tableaux VII_3 et VII_4).
Le tableau croisant le nombre d'exercices abordés (sur les cinq principaux exercices étudiés) et les modèles et les niveaux révèle que globalement 87% des étudiants abordent au moins 4 exercices sur 5.

Par niveaux, ce pourcentage s'avère compris entre 72% et 73% pour les étudiants de DEUG moins de 3 mois après le cours ; il atteint son maximum en Math Spe (où 96% des étudiants abordent au moins 4 exercices). Par modèles, on constate que les étudiants qui n'ont pas abordé les questions 1) et 2) et ceux qui ont

Tableau VII,

Nombre d'exercices abordés par modèles exprimés. (corpus N)

Nombre d'exercices abordés / Modèle exprimé	0	1	2	3	4	5
Primitif	0	0	4% 2	11% 6	30% 17	55% 31
Tend vers	0	0	11% 5	9% 4	35% 16	46% 21
Dynamique monotone	0	0	0	0	50% 10	50% 10
Pas de modèle exprimé (faut, définition, pas de mod)	0	0	4,5% 3	12% 3+3+2	29% 7+2+10	54,5% 9+5+23
Questions 1) 2) non abordées	6% 2	3% 1	9% 3	9% 3	32% 11	41% 14
Dynamique	0,5% 1	1% 2	2% 5	10% 23	30% 69	57% 131
Préstatique	0	0	0	11% 6	31% 17	57% 31
Mixte	0	0	3% 3	9% 10	25% 28	64% 73
Statique	0	0	0	5% 2	19,5% 8	76% 31
Total	0%	0%	3%	9%	29%	57%

Les pourcentages indiqués sont calculés sur le total des étudiants correspondant à chaque ligne.

Tableau VII$_4$ Nombre d'exercices abordés par niveaux. (corpus N)

Nombre d'exercices abordés / Niveau	0	1	2	3	4	5
DEUG I après le cours sans exercices	3% 2	2% 1	11% 7	11% 7	44% 28	30% 19
DEUG I moins de 3 mois après le cours	1,5% 1	1,5% 1	8% 5	17% 11	38% 25	35% 23
DEUG I plus de 3 mois après le cours	0	0	0	11% 6	29% 16	60% 33
DEUG 2ème année	0	0	2% 2	9% 9	28% 28	61% 62
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	0	2% 1	4% 2	8% 4	35% 17	50% 24
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	0	0	3% 1	16% 5	45% 14	35% 11
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	0	0	1% 1	6% 6	21% 20	72% 70
MATH. SPE.	0	0	0	4% 4	24% 22	72% 66
LICENCE (3ème année)	0	0	4% 2	9% 4	13% 6	73% 33
MAITRISE (4ème année)	0	0	2% 1	9,5% 6	30% 19	59% 37

Les pourcentages indiqués sont calculés sur le total des étudiants correspondant à chaque ligne.

écrit seulement la définition en (ε,N) en réponse à ces questions sont ceux pour lesquels le pourcentage précédent est le plus faible (respectivement 73,5% et 70%). C'est pour les étudiants ayant exprimé un modèle dynamique monotone que, ce pourcentage atteint son maximum (100%) suivi par ceux ayant exprimé un modèle statique (95% d'entre eux abordent au moins 4 exercices).Vu la faiblesse des effectifs concernés, tous ces pourcentages sont assez peu fiables.

De plus, il n'y a que 6 étudiants qui abordent un exercice au plus et 96% des étudiants N abordent au moins 3 exercices sur 5.

On peut préciser encore ces résultats en analysant les étudiants ayant abordé les 5 exercices. On constate des différences plus marquées par niveaux et par modèles. Ainsi pour les niveaux de Deug moins 3 mois après le cours, moins de la moitié des étudiants sont dans ce cas - alors que 3 mois après le cours en Deug 1 et Deug 2 on en trouve 60% ; en Math Sup C on constate l'évolution inverse - le pourcentage baisse de 50% à 35% . Par contre à partir de la Math Sup c'est 72% des étudiants par niveau qui abordent les 5 exercices avec la chute à 59% en Maîtrise déjà soulignée et vraisemblablement consécutive au manque de temps. Le pourcentage d'étudiants ayant abordé les 5 exercices parmi ceux ayant exprimé un modèle donné atteint son maximum pour le modèle statique (76%), baisse à 64% pour les étudiants ayant exprimé un modèle mixte et à 57% pour ceux qui ont exprimé un modèle dynamique. Il se maintient autour de la moyenne sauf pour les étudiants qui n'ont pas abordé les questions 1) et 2) (41%) et pour ceux qui ont écrit une tantologie en lieu et place de modèle (44%). Cela ne fait que souligner l'idée banale qu'il y a une relation entre le fait d'aborder tous les exercices et l'expérience d'une part (cf. Deug), la représentation que l'on a d'autre part - ces 2 facteurs étant liés.

On peut enfin souligner que 86% des étudiants ayant exprimé un modèle primitif abordent au moins 4 exercices ce qui renforce les constatations du paragraphe précédent - les étudiants ayant exprimé ce modèle ne réussissent pas les exercices tout en les ayant abordé dans des proportions voisines de celles des étudiants ayant exprimé d'autres modèles.

c) Etude du nombre de démonstrations erronées par individus (Tableaux VII_5 et VII_6)

Nous allons étudier le tableau croisant le nombre de démonstrations fausses écrites par chaque étudiant et les modèles et les niveaux. Il faut souligner ici que les réponses fausses sans démonstration aux exercices 5 ou 10 ne sont pas comptabilisées comme démonstrations fausses. D'autre part les exercices non abordés n'apparaissent pas non plus comme démonstrations fausses - ils n'en sont pas !

Tableau VII$_5$

Nombre de démonstrations fausses par modèles exprimés. (corpus N)

Nombre de démonstrations fausses / Modèle exprimé	0	1	2	3	4	5
Primitif	5% 3	25% 14	43% 24	20% 11	7% 4	0
Tend vers	28% 13	33% 15	26% 12	9% 4	4% 2	0
Dynamique monotone	15% 3	25% 5	35% 7	25% 5	0	0
Pas de modèle exprimé (Tautologie Définition, pas de mod)	32% 4+5+12	36% 7+3+14	21% 5+2+7	8% 1+0+4	3% 1+0+1	0
Questions 1) 2) non abordées	59% 20	23,5% 8	15% 5	3% 1	0	0
Dynamique	42% 96	29% 66	19% 44	9% 21	2% 4	0
Préstatique	30% 16	28% 15	20% 11	20% 11	2% 1	0
Mixte	57% 65	25% 28	10,5% 12	5% 6	1% 1	2% 2
Statique	58,5% 24	34% 14	7% 3	0	0	0
Total	34%	29,5%	20%	10%	2%	0%

Les pourcentages indiqués sont calculés sur le total des étudiants correspondant à chaque ligne.

(Corpus N) Nombre de démonstrations fausses par niveaux.

(exercice non abordé= pas de démonstration fausse).

Tableau VII$_6$

Nombre de démonstrations Fausses / Niveau	0	1	2	3	4	5
DEUG 1 après le cours sans exercices	16% 10	27% 17	30% 19	19% 12	9% 6	0
DEUG 1 moins de 3 mois après le cours	17% 11	24% 16	44% 29	11% 7	3% 2	1,5% 1
DEUG 1 plus de 3 mois après le cours	7% 4	42% 23	34,5% 19	13% 7	4% 2	0
DEUG 2ème année	18% 18	32% 32	28% 28	21% 21	2% 2	0
MATH. SUP. C moins d'1 mois après le cours	17% 8	31% 15	27% 13	19% 9	4% 2	2% 1
MATH. SUP. C plus de 3 mois après le cours	45% 14	32% 10	16% 5	6% 2	0	0
MATH. SUP. entre 1 et 3 mois après le cours	62% 60	27% 26	8% 8	3% 3	0	0
MATH. SPE.	60% 55	29% 27	9% 8	2% 2	0	0
LICENCE (3ème année)	62% 28	29% 13	7% 3	2% 1	0	0
MAITRISE (4ème année)	84% 53	16% 10	0	0	0	0

Les pourcentages indiqués sont calculés sur le total des étudiants correspondant à chaque ligne.

Il s'agit donc ici des productions de procédures incorrectes strictes, ce qui est assez limité. Or si 70% des étudiants ne produisent pas plus d'une démonstration fausse sur les 5 exercices - avec les restrictions importantes évoquées ci-dessus - il n'y a que 39% qui n'en produisent aucune. Il est particulièrement intéressant d'analyser l'évolution des pourcentages par niveaux des étudiants n'ayant écrit aucune démonstration fausse et éventuellement même la répartition des étudiants par niveau et par nombre de démonstrations erronées produites.

que ce pourcentage reste inférieur à 20% en Deug, quel que soit le niveau considéré et sans qu'une évolution importante soit enregistrée - on ne peut que se demander si la baisse de ce pourcentage à 7% en Deug 1 plus 3 mois après le cours est un indice suffisamment fiable pour révéler éventuellement l'accroissement des erreurs un certain temps après un cours qui n'a pas été assimilé.
De plus, la répartition des étudiants de Deug 2 par nombre croissant de démonstrations fausses produites s'avère proche de celle des étudiants de DEUG I tout de suite après le cours ce qui n'est pas sans justifier le malaise des enseignants que j'ai évoqué dans l'introduction.
Par contre, si la répartition des étudiants par nombre croissant de démonstrations fausses en Math Sup C moins d'un mois après le cours est,elle aussi, proche de celle de Deug 2 et de celle de Deug 1 tout de suite après le cours (en non de Deug moins d'un mois après le cours), il y a une différence importante avec la répartition correspondant en Math Sup C 3 mois après le cours et cela vaut d'être souligné.
En effet cette fois-ci 45% des étudiants du niveau ne produisent aucune démonstration erronée et 77% au plus une - contre 17% et 48% en Math Sup C moins d'un mois après le cours. En nuançant ces résultats par les restrictions inhérentes à notre méthode (analyse synchronique) et à la faiblesse des effectifs de Sup C 3 mois après le cours, nous pensons tout de même qu'il y a lieu de faire l'hypothèse qu'un progrès réel est enregistré pendant l'année en Math Sup C, contrairement à ce qui se passe en Deug 1. Or nous avons vu que le programme

en Math Sup C est moins développé qu'en Deug (dans la mesure où on n'introduit pas les suites de Cauchy) mais que l'enseignement correspondant occupe une semaine entière avec cours et T.D. regroupés .

Enfin le pourcentage d'étudiants ne produisant aucune procédure erronée passe de 62% dans les niveaux Sup, Spe, Licence, à 84% en Maîtrise ; de plus les répartitions des 3 premiers niveaux sont proches, et si 90% des étudiants correspondants produisent au plus une procédure erronée, c'est le cas de 100% des étudiants de Maîtrise ! Ce décrochement dans les productions des étudiants de Maîtrise est rendu plus net par le fait que les exercices non abordés "comptent" comme les exercices justes. Il y a là l'indice d'un progrès réel en dernière année, à savoir l'élimination massive des procédures erronées - cette élimination a donc lieu après l'installation des représentations et corrélativement à l'apprentissage et au fonctionnement de connaissances autres que celles sur les suites (et accompagne une réorganisation des connaissances)[1].

L'examen de la répartition du nombre de démonstrations erronées par modèles révèle des différences tout aussi nettes. Il n'y a que deux modèles tels que plus de 60% des étudiants qui les ont exprimé produisent au moins deux procédures erronées aux 5 exercices - ce sont le modèle primitif (30% des étudiants qui l'expriment ont produit au plus une procédure erronée, les autres en ont produit au moins deux...) et le modèle dynamique monotone (40% des étudiants correspondant n'ont produit qu'une procédure erronée (au plus) sur les 5 exercices). Il n'y a même que 3 étudiants ayant un modèle primitif qui ne produisent aucune procédure erronée mais ils n'ont certainement pas réussi les 5 exercices étant donné qu'aucun étudiant ayant un tel modèle ne les a réussi tous les 5 (cf. tableau). Il y a là une bonne confirmation de l'association massive de l'expression d'un modèle monotone ou archaïque et de procédures fréquemment erronées. Ce résultat est d'autant plus frappant qu'on n'a pas tenu compte ici des exercices non abordés et des démonstrations fausses sans démonstration aux exercices 5 et 10 dont nous avions vu l'association privilégiée avec le modèle

---

(1) Il y a lieu ici de tenir compte également de l'élimination des étudiants au cours des études.

primitif. De l'autre côté de l'échelle, on trouve le modèle statique (93% des étudiants qui l'ont exprimé produisent au plus une procédure erronée) puis les modèles mixtes(pour lequel ce dernier pourcentage est de 82%), même pourcentage pour les copies où les questions 1) et 2) ne sont pas abordées (dont un bon nombre provient de Maîtrise) et, en dernier, le modèle préstatique (57% des étudiants l'ayant exprimé n'ont produit qu'une procédure erronée au plus).
Le classement des modèles par pourcentages décroissants d'étudiants ayant exprimé ce modèle et n'ayant produit aucune procédure erronée est à peu près le même, à ceci près qu'il y a presque égalité (à 58%) entre les modèles statiques, mixtes et les copies où les questions 1) et 2) ne sont pas abordées.

d) Etude à part : les différents genres du modèle mixte.

Comme les effectifs des divers genres du modèle mixte sont assez faibles nous n'utilisons les pourcentages correspondants qu'à titre indicatif. Voici la répartition des pourcentages d'étudiants ayant exprimé chaque genre du modèle mixte et ayant réussi à plus de 3 exercices, puis n'ayant produit aucune démonstration fausse - avec, à titre de comparaison, les répartitions analogues pour les modèles, statique, dynamique, préstatique :

	Dans la même question STA. + DYN.	STA. en 1 DYN. en 2	Total STA+DYN.	modèle STATIQUE	Dans la même question PSTA+DYN.	PSTA. en 1 DYN. en 2	TOTAL PSTA+DYN	DYN. en 1	modèle DYNAMIQUE	modèle PSTATIQUE
Total	34	29	63	41	29	10	39	6	231	54
Plus de 3 ex. réussis	91%	62%	78%	76%	62%	50%	59%	50%	60%	37%
Aucune dém. fausse	82%	59%	71%	59%	48%	40%	46%	93%	42%	30%

On constate que ces répartitions ne sont ni indépendantes ni aléatoires. On retrouve en effet la différence entre les étudiants ayant exprimé un modèle statique dans leur modèle mixte et les autres. Tout se passe comme si la hiérarchie "statique > dynamique > préstatique" était respectée au bénéfice du meilleur modèle quelle que soit l'association des 2 modèles exprimés. Ainsi la juxtaposition statique/dynamique s'avère-t-elle associée à des copies proches (si ce n'est meilleures) de celles où est exprimé le seul modèle statique ; on peut en effet constater sur ces effectifs réduits que les meilleures copies sont celles où c'est dans la même question que les deux descriptions statiques et dynamique sont juxtaposées. Cela indique que les représentations mentales où coexistent (puisque cela figure dans la même question) une image cinématique et une image statique de la convergence sont associées aux meilleures performances. Toujours à titre indicatif signalons ici que 9 collègues sur 10 ont précisément exprimé un tel modèle ... La juxtaposition dynamique/ préstatique est exprimée, elle, dans des copies proches de celles où est exprimé un modèle dynamique - les performances sont même meilleures dans les copies où c'est dans la même question que figurent les deux descriptions. Tout se passe comme si cette représentation mixte, peut-être par sa complexité justement, avait un effet "correcteur" sur l'insuffisance du modèle préstatique. Ces résultats confirment donc nos résultats antérieurs tout en mettant à nouveau en évidence le caractère enrichissant de l'association des 2 représentations différentes; de plus, les résultats sont d'autant meilleurs que l'expression des deux modèles se fait dans la même question

En conclusion si nous tenons compte des résultats des 4 études précédentes, nous pouvons affirmer que le troisième groupe a fourni des copies globalement réussies avec une évolution qui se marque en maîtrise par une quasi-disparition des procédures erronées ; le premier groupe lui est la source de copies globalement ratées, avec une évolution positive faible, variable selon ce qu'on considère ; le deuxième groupe est intermédiaire et révèle toujours un progrès.(1) Les modèles mixtes et statiques sont associés à de bonnes copies (globalement), le modèle dynamique est non discriminant et plutôt associé à des copies moyennes, les modèles primitifs, "tend vers", dynamique monotone et dans une moindre mesure préstatique ou les copies sans modèles exprimés sont exprimés dans des copies globalement non réussies. Enfin on constate encore que, pour ce qui est des différents genres du mixte, ceux qui proviennent de la juxtaposition statique, dynamique sont plus performants que les autres - qui sont quand même meilleurs que les modèles préstatiques. Cette étude a amplement confirmé tous les résultats précédents en leur donnant, par là même, encore plus de poids.

7.1.3. Analyses factorielles et classements hiérarchiques de nos données.

Nous allons maintenant décrire les résultats de l'analyse factorielle globale de nos données, du classement hiérarchique correspondant et établir un "arbre d'implication" des procédures et des modèles grâce à l'indice d'implication de R. Gras [1]. Précisons d'emblée que nous n'obtiendrons pas ainsi d'indications sur les interrogations auxquelles nos données ne peuvent pas répondre. Il s'agit au contraire, de comparer suivant la méthode d'analyse choisie les résultats obtenus - en vérifiant qu'ils sont non contradictoires et en les enrichissant éventuellement par les résultats complémentaires obtenus dans chacune des méthodes. Cependant dans ces analyses statistiques, les procédures correctes sont différenciées ce qui peut permettre d'affiner les résultats obtenus dans les premiers paragraphes.

---

(1) Il y a surtout diminution des démonstrations fausses (presque jusqu'au niveau du groupe3);l'augmentation des réussites dans le groupe 2 ne le rapproche pas autant du groupe 3.

a) Les analyses factorielles globables : procédures x modèles exprimés, modèles dessinés, exemples.

Dans les premières analyses, nous travaillons sur le tableau de Burt (tableau de contingence) croisant les modèles et les exemples en lignes (modèles dessinés, modèles exprimés, nature des exemples convergents et divergents) et les procédures aux exercices 5 et 10 en colonnes. Nous avons mis en supplémentaire les niveaux, les commentaires sur la divergence et les performances. Pour la dernière analyse un peu différente, nous avons placé certains points supplémentaires en variables supplémentaires.

i) L'analyse sur le corpus N.(1)

Il se dégage un premier axe qui porte 49% de l'inertie; de plus, les axes suivants accusent un fort décrochement.

Ce premier axe est construit d'une part par les modèles "primitif" et "tend vers", les modèles dessinés monotones croissant, les exemples convergents monotones, les exemples divergents non majorés d'un côté, qui s'opposent aux modèles mixte et statique de l'autre côté, ainsi qu'aux modèles dessinés non monotones, et aux exemples divergent comportant au moins un sinus et une suite "alternée"; d'autre part, il est construit par les procédures erronées (5 FSD, 6 JSD, 6 PLI, 6 MON, 7 PLI, 7 EGA, 8 NAB, 8 ALG, 8 MAG, 0 FSD, 0 FDF, 0 NAB) qui s'opposent aux procédures correctes (5 CEX, 5 STA, 6 VAL, 6 PRO, 7 DEC, 8 DEF et 0 BIE); nous avons souligné les procédures qui contribuent le plus à la construction de l'axe.

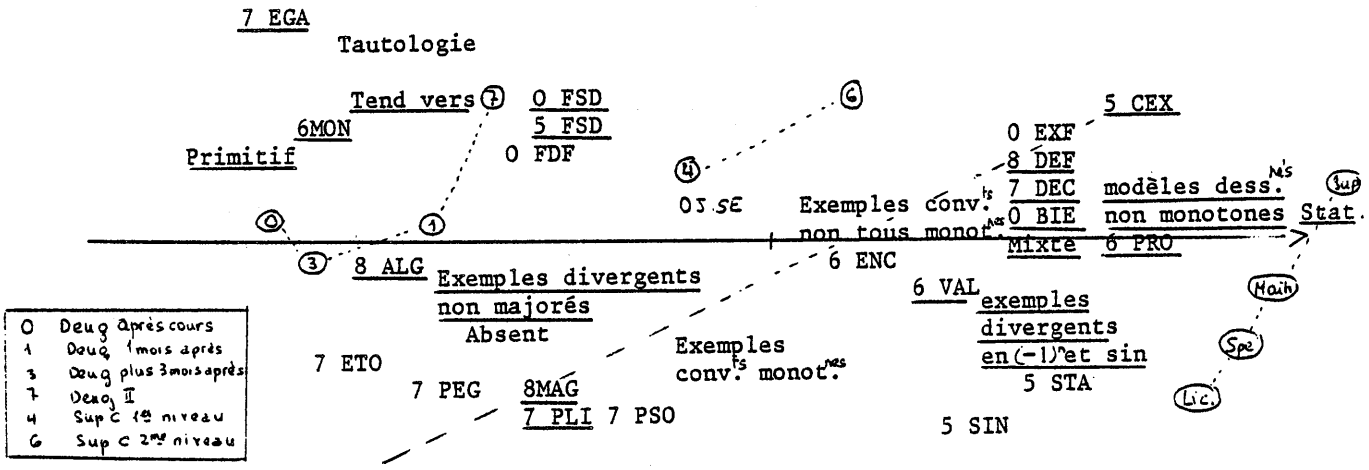
De toute évidence, ce premier axe peut s'interpréter comme un axe réussite-échec .

De plus, sont bien corrélés à l'axe et se projettent du côté des réussites, les exemples convergents non monotones, les exemples divergents en $(-1)^n$ et les variables supplémentaires correspondant aux genres du mixte SD et S_1D_2 et aux niveaux du groupe 3 . Enfin, c'est aussi le cas pour le modèle dynamique qui est cependant très moyennement corrélé à cet axe. Du côté des échecs, se projettent les variables suivantes (bien corrélées à l'axe): les modèles "absent", tautologie et dynamique monotone -c'est aussi le cas pour le modèle préstatique qui, toutefois, est mal corrélé à cet axe-,les copies sans modèle dessiné (dessin absent ou peu concluant), les modèles dessinés monotones; enfin, les procédures 5 SIN, dans une moindre mesure, 6 ENC, 7 DEF, 7 PRO et 0 EXF sont bien corrélés à l'axe et se projettent du côté des réussites, alors que les procédures 6 NAB, 6 PRA, 6 CSS, 7 NAB, 7 PSO, 7 CAU, 7 SSR, 7 PEG, 8 UNI, 8 LOC, 0 JSD, 0 JSE,bien corrélées à l'axe,se projettent du côté des échecs, avec les niveaux du groupe 1. Ici, c'est le premier niveau du group 2 qui est mal corrélé à l'axe. Les performances se projettent"comme il se doit' (avec de très fortes corrélations).

---

(1) Annexe (9)6.

Tous ces résultats sont extrêmement cohérents entre eux, et avec les résultats précédents; l'analyse factorielle permet d'opposer les modèles et procédures correctes, ainsi que les niveaux auxquels appartiennent les étudiants concernés, aux modèles et procédures erronées avec les niveaux correspondants. Il apparaît bien que les modèles dynamique et préstatique ne se placent pas dans cette opposition (ou plutôt se projettent assez près du centre), ce qui traduit leur rôle non discriminant.
Nous avons joint (1) une photocopie du nuage de points dans le plan (1,2), et nous reproduisons ci-dessous l'axe 1 avec les projections des points qui le construisent ou qui sont bien corrélés.



Les points soulignés sont ceux qui construisent les premiers axes, les autres sont bien corrélés au premier axe.
Tout se passe même comme si l'axe réussite échec était légèrement oblique comme nous l'indiquons.
On peut encore remarquer que toutes les procédures erronées, toutes les erreurs, et les performances erronées (mises en supplémentaires) se projettent du côté des échecs, alors que toutes les procédures correctes se projettent du côté des réussites.

ii) Les analyses par groupes et sur le corpus S.

Les trois analyses par groupes (1,2,3) ne nous ont pas permis d'enrichir nos résultats. Par contre, l'analyse des copies S, strictement semblable à celle des copies N, nous permet de confirmer la stabilité de nos résultats, compte tenu du fait que les variantes n'ont pas apporté en général de changements significatifs.

iii) L'analyse "Modèles, procédures x Modèles, procédures" (corpus N)

Dans cette analyse nous travaillons sur le tableau de Burt symétrique croisant l'ensemble des modèles, exemples et procédures en lignes aux mêmes caractères en colonnes. On constate que les résultats de cette analyse[1] sont identiques à ceux de l'analyse i), ce qui est fort rassurant. De plus nous avons placé dans cette analyse en points supplémentaires (en colonnes) les genres des modèles mixtes, dynamiques, et primitifs. Il s'avère que le point correspondant à la juxtaposition statique/dynamique (resp. préstatique) dans la même question-SD, (resp. dans les questions 1) et 2) - S1 D2) se projette tout à côté du point "modèle statique" - (resp. tout à côté du point "modèle mixte") ; les points correspondants aux autres genres du mixte mal correlés se projettent plus près du centre et même du côté des échecs pour préstatique et dynamique exprimés dans les question 1) et 2).

Les trois points correspondant aux genres du dynamique (DYG, DYL, DYNL) se projettent presqu'au même point près du centre. Enfin les trois points correspondant aux genres des modèles primitifs (barrière : PRIB, stationnaire : PRIS, monotone : PRMM) se projettent aussi en trois points très proches, situés très nettement du côté des échecs.

---

(1) cf. Annexe ⑨ 8 - C'est la même analyse que celle sur laquelle nous étudierons les données sociologiques.

b) Classification hiérarchique (corpus N) - Graphe CH_7.

La hiérarchie obtenue [1] montre une répartition des procédures à tous les exercices (y compris l'exercice 9), des modèles et des exemples en 20 classes qui correspondent exactement aux associations déjà rencontrées. Ainsi, trouve-t-on d'un côté de l'arbre, le sous-arbre des procédures et modèles corrects, et de l'autre côté, celui des procédures erronées et ambigües. Il a donc lieu d'analyser séparément ces deux sous-arbres.

Du côté "correct", on retrouve la classe des procédures correctes à tous les exercices (5 CEX, 6 VAL, 7 DEC, 8 DEF, 0 BIE, 9 RD) très liée à la classe où se trouve le modèle statique, et rejointe beaucoup plus tard par la classe où se trouve le modèle mixte, qui est accompagné en particulier des modèles dessinés non monotones.

Du côté des procédures et modèles erronées, on constate d'abord qu'il y a une série de classes non liées significativement aux autres, tout en se trouvant de ce côté. Il s'agit des classes constituées des procédures non abordées aux exercices 6, 8, 9 et 10, du modèle préstatique, d'un certain nombre de procédures ambigües et des procédures algébriques aux exercices 6 et 7. Par contre, on retrouve les associations des modèles "tend vers" et primitif avec les autres procédures erronées (5 FSD, 0 FSD, 8 MAG, 7 PEG, 7 EGA, 6 MON, 7 ETO, 8 ALG).

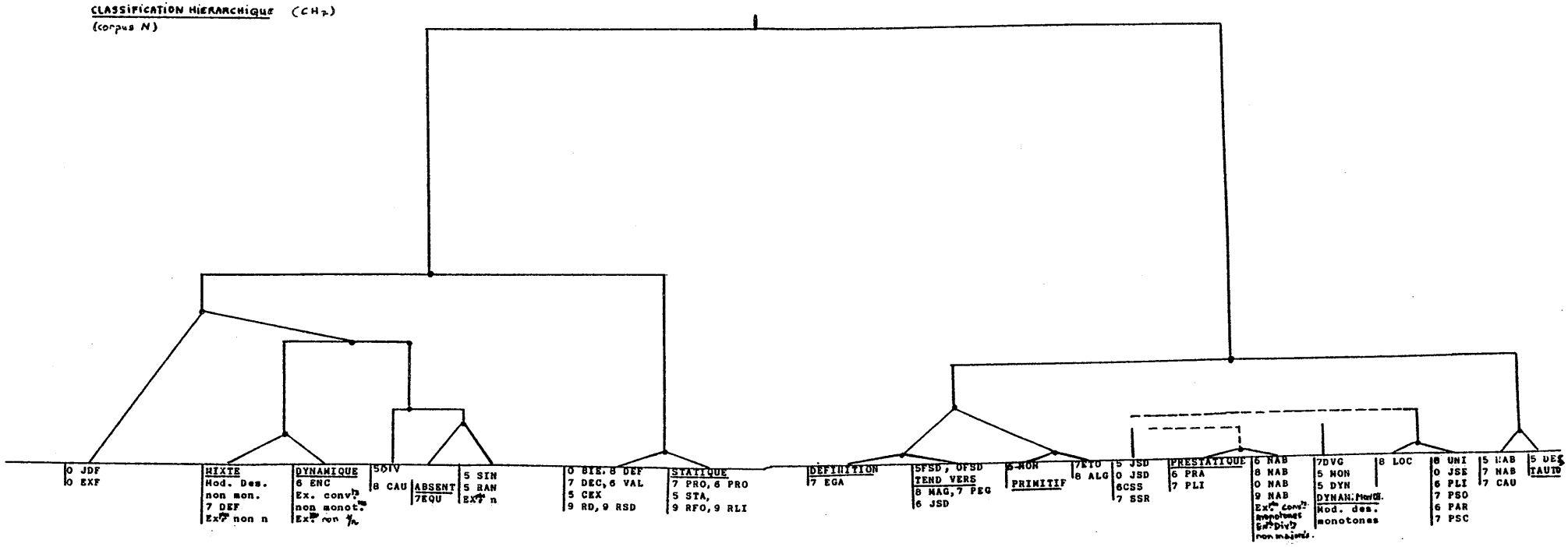
De façon générale, les exemples convergents, divergents, et les modèles dessinés se retrouvent de part et d'autre de l'arbre suivant qu'ils sont monotones ou non.

On peut s'étonner de voir le modèle dynamique figurer dans une classe du côté des procédures correctes, alors que le modèle préstatique,lui, est de l'autre côté: les "distances" entre les classes n'apparaissent pas dans la classification -il est très possible (moyennant une rotation des branches de l'arbre) que les deux classes concernées soient en réalité très proches et très proches "du centre"; cela souligne les limites d'un tel classement et l'intérêt de son association à une analyse factorielle.

---

(1) La classification (Type Jambu) a été réalisée par J. Mac Aleese

CLASSIFICATION HIERARCHIQUE (CH2)
(corpus N)



c) L'indice d'implication (graphe G_{VII}).

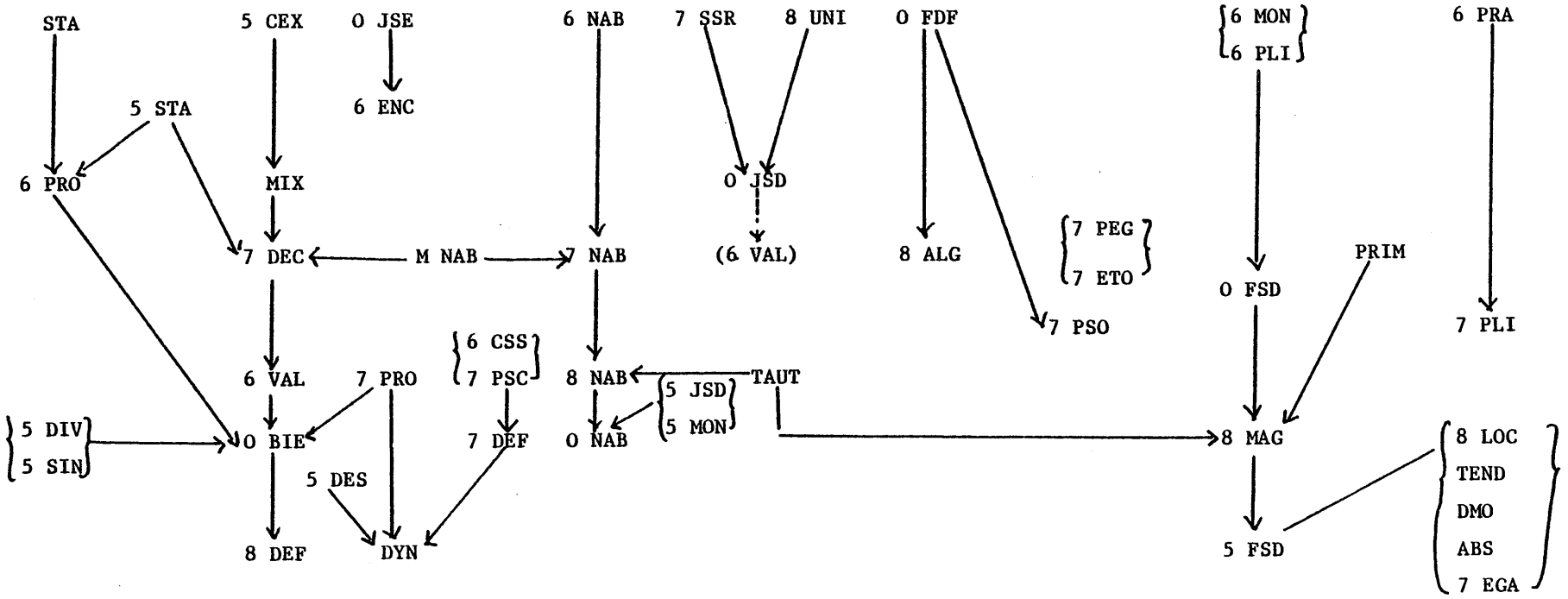
Nous avons appliqué la technique statistique mise au point par R. Gras pour dégager des chaînes d'implication entre nos procédures et nos modèles. Il s'agit de déterminer si statistiquement, la conduite A "implique" la conduite B. Cela suppose en particulier que l'effectif des étudiants ayant adopté B soit supérieur à celui des étudiants ayant adopté A. La fermeture transitive du graphe [1] construit sur la matrice d'implication obtenue au seuil de 0,20 met en évidence 3 chaînes principales qui "communiquent" très peu. La chaîne des procédures et modèles satisfaisants a comme points initiaux d'une part les principales procédures correctes à l'exercice 5 (5 CEX, 5 STA), d'autre part le modèle statique (STA), autrement dit le "meilleur" modèle et les procédures correctes les plus "difficiles". Ces procédures et ce modèle impliquent toutes les autres procédures correctes dans un ordre correspondant à ce qu'on a déjà vu sauf pour les exercices 6 et 8. En effet la procédure 8 DEF (point terminal) apparaît un peu comme un pré-requis - ce n'est pas contradictoire avec le fait que la tâche à l'exercice 6 est plus "facile", dans la mesure où il n'y a qu'une procédure correcte à l'exercice 8 alors qu'il y en a 3 à l'exercice 6 et qu'elles sont dispersées dans les implications.

Le modèle dynamique, en bout de chaîne, s'avère une condition importante de la production de procédures correctes ou plus ambigues, comme 7 PRO (produit à l'exercice 7), 7 DEF (utilisation de la définition à l'exercice 7 sans changement de stratégie) et les procédures 6 CSS et 7 SSR où se marque une confusion suites séries.

La deuxième chaîne est très cohérente et logique puisqu'elle relie les procédures affectées aux exercices non abordés (6 NAB, 7 NAB, 8 NAB, 10 NAB). On peut souligner que le point "Modèles non abordés" (MNAB) (questions 1) et 2) non abordées) a le double fonctionnement déjà relevé plusieurs fois puisqu'il est relié à la fois à la chaîne des non-abordés et à la chaîne des procédures correctes.

Du côté des procédures erronées on trouve d'abord la "mini-chaîne" 8 UNI→OJSD qui correspond à des procédures plus ou moins erronées (discours à l'exercice 8, réponse juste sans démonstration à l'exercice 10, confusion suite-séries à l'exercice 7). La chaîne des procédures erronées, elle, a comme points initiaux OFDF (réponse fausse avec démonstration fausse à l'exercice 10), les principales procé-

(1) cf. Gras [1].



Procédures correctes

Exercices non abordés

Procédures erronées

dures erronées à l'exercice 6 (6 MON, 6 PLI) et les procédures ambigues à l'exercice 6 (6 PRA). On retrouve que les procédures erronées à la tâche la plus réussie (exercice 6) fonctionnent comme une condition nécessaire à la production des procédures erronées à tous les autres exercices (sauf 7 PSO, 7 PLI, 8 MAG, impliqués par OFDF et 6 PRA respectivement).

Cette chaîne erronée aboutit à l'erreur 5 FSD, faux sans démonstration à l'exercice 5 (erreur la moins significative).

Le modèle "primitif" apparaît bien comme le plus mauvais modèle, impliquant les procédures magiques à l'exercice 8 (8 MAG) et étant très lié à la production de 6MON et 6 PLI (sans en être une condition suffisante). Les autres modèles erronés ne se relient à cette chaîne erronée que par 5 FSD.

On peut voir dans ce graphe[4] une confirmation complète des résultats précédents.

Nous avons tenté d'établir les mêmes graphes pour chaque groupe d'étudiants (1, 2, 3) nous n'avons pu en déduire aucun résultat supplémentaire ; en particulier nous n'avons pas plus de "communication" entre les procédures erronées et les autres et donc pas d'indication sur les étudiants "moyens".

---

(1) C'est J. Mac Aleese qui s'est chargée de la réalisation effective de ce travail.

En conclusion de ce paragraphe, on constate que toutes ces analyses mettent en évidence les oppositions les plus marquées entre les caractères (axe réussite-échec, groupements des procédures correctes/erronées, chaînes de procédures correctes/erronées).

Elles nous ont permis de visualiser de différentes manières nos classifications préliminaires les plus importantes en leur apportant ainsi non seulement une confirmation mais encore une présentation globale extrêmement agréable et plus communicable que celle des tris croisés.

Les analyses factorielles opposent les caractères les plus dissemblables et envoient au centre les moins discriminants ; les chaînes d'implication mettent en évidence plus précisément ces liens entre des procédures ou des modèles qui se trouvaient non opposées sur les analyses factorielles ; les classes regroupent également de telles procédures ou modèles sans les "ordonner" entre eux. Cependant nos données, qui correspondent à un travail de défrichement, ne nous ont pas permis d'utiliser toutes les ressources de ces analyses (deuxième axe et axes ultérieurs, interprétation plus fine des chaînes de R. Gras).

C'est précisément sur une analyse factorielle que nous avons choisi de tester la pertinence de nos choix méthodologiques - si pertinence il y a, la méthode choisie pour le vérifier assure une grande fiabilité au résultat.

7.2. Pertinence des choix méthodologiques. Etude des données sociologiques et retour sur les variantes.

Dans cette partie, nous allons d'abord justifier notre décision de retenir, parmi tous les caractères qui apparaissent dans les questions 1, 2, 3, 4, (du texte V_1), les modèles exprimés, les modèles dessinés, certains caractères des exemples (et les niveaux) commes "variables principales" dans l'analyse des conduites des étudiants. A cet effet, nous avons réalisé sur nos données une analyse factorielle(1) où tous les caractères que nous avons fait apparaître dans les réponses aux quatre premières questions du questionnaire (cf. Chapitre 3) sont retenus et sont analysés en même temps que les procédures aux cinq principaux exercices. Nous avons retenu comme principaux, parmi tous ces caractères ceux qui contribuaient effectivement à la construction des premiers axes (contribution supérieure à la moyenne) ; c'est le critère de "pertinence" dans l'explication des conduites observées que nous avons utilisé. Cela nous a permis de retrouver nos "variables principales" initiales - les modèles exprimés, les modèles dessinés, le caractère monotone des exemples le cas échéant.

Nous avons ensuite fait figurer en points supplémentaires, sur une analyse où ne sont retenues que ces "variables principales", toutes les variables correspondant aux données sociologiques décrites au chapitre 2 et nous décrivons les résultats correspondants en 7.2.2.

Enfin, nous revenons sur nos variantes et leurs "maigres" variations en 7.2.3.

7.2.1. Pertinence des choix des variables principales(2).

Nous travaillons sur l'analyse factorielle du tableau de Burt symétrique croisant toutes les variables définies à partir des réponses aux quatre premières questions et les procédures aux exercices 5, 6, 7, 8, 10 (en lignes et en colonnes).

Nous gardons la variable "niveau" comme variable principale dans la mesure où elle s'introduit naturellement comme telle dans nos données. Nous l'avons donc placée en supplémentaire dans notre analyse factorielle.

---

(1) effectuée par J. Mac Aleese, comme toutes les autres analyses statistiques.

(2) Annexe ⑨7

On constate que les deux premiers axes de l'analyse factorielle étudiée correspondent à des valeurs propres proches, et portent à peu près la même inertie (11% chacun). Les axes suivants présentent un décrochement important.

On interprête donc le nuage de points dans le plan déterminé par les deux premiers axes. Dans ce plan, on note en premier lieu une opposition entre les copies où les questions 1 et 2 ne sont pas abordées (représentées en bas, à droite du nuage), et les autres. D'autre part, on repère parmi ces autres points un axe "oblique" -qui peut s'interprêter comme un axe "réussite-échec"- et qui est construit essentiellement par des modèles exprimés, des modèles dessinés et des procédures.Dans la mesure où les quelques variables autres que les modèles exprimés, les modèles dessinés, les exemples et les procédures qui construisent les deux premiers axes correspondent à des banalités, nous pouvons affirmer que notre choix de variables principales est pertinent - (nous avions déjà indiqué nos choix sur les exemples).

Nous allons maintenant détailler les variables construisant ces deux premiers axes ainsi que celles qui leurs sont bien corrélées [1]. Nous ne reprenons pas les variables qui correspondent à des copies où les questions 1 et 2 ne sont pas abordées (avec l'absence de tous les caractères qui en est consécutive), car nous cherchons précisément à caractériser les conduites par des caractères issus des réponses aux questions 1 et 2. On trouve d'un côté de l'axe oblique "réussite-échec" les points correspondants aux variables suivantes :

- Modèle statique
- Modèle mixte (genre S.D. - statique et dynamique dans la même question)
- Modèles dessinés non monotones
- Explications sur les suites justes
- Absence de commentaires sur la limite
- définition triviale de la divergence

---

(1) Cf. annexe ⑨ 7

- Procédures : 5 CEX (contre-exemple à l'exercice 5)
  6 PRO (produit correct à l'exercice 6)
  7 DEC (utilisation de la définition avec changement de stratégie)
  8 DEF (porcédure correcte à l'exercice 8)
  0 BIE (contre-exemple à l'exercice 10)

De l'autre côté, on rencontre :

- Modèle primitif, et moins nettement "Tend vers"

- Exemples divergents non majorés

- Deux exemples au moins de type n ou $\frac{1}{n}$

- Procédures 5 FSD (faux démonstration)
  7 NAB (exercice 7 non abordé) et 7PSO (procédure scalaire)
  8 NAB (exercice 8 non abordé)
  8 MAG (procédure magique)
  0 FSD (faux sans démonstration à l'exercice 10)

De plus, sont bien corrélés les points correspondants aux variables suivantes:

du côté des réussites
- exemples n
- exemples divergents alternés et en sinus
- dessins du genre linéaire
- modèle mixte (genre S_1 D_2, statique en 1, dynamique en 2)
- procédures 6 VAL ($|u_n| \leq 1/n$)
  7 DEF (utilisation de la définition sans changemen de stratégie)

du côté des échecs
- exemples convergents tous monotones
- modèles dessinés monotones croissants
- commentaires "la limite ne peut être dépassée"
- les explications insuffisantes ou fausses sur les suites
- exemples convergents monotones
- les procédures 7 PLI (procédure algébrique erronée)
  8 ALG (procédure algébrique erronée)
  0 FDF (faux, démonstration fausse)

Les niveaux mis en supplémentaires sont bien corrélés, sauf les SUP. C trois mois après le cours -ceux du groupe 1 et le premier niveau de SUP. C du côté "échecs" et ceux du groupe 3 de l'autre côté.

En conclusion, nous retenons comme variables principales outre les niveaux, les modèles exprimés, les modèles dessinés, et certains caractères des exemples, l'analyse des exemples du chapitre III ayant déjà révélé que seul le caractère monotone des exemples convergents ou non majorés des exemples divergents) intervenait réellement. Cependant, dans nos analyses cliniques nous n'avons retenu en général que les modèles exprimés et les niveaux -les deux autres catégories étant moins riches et souvent très liées aux premières comme nous l'avons montré au chapitre III.

7.2.2 Les données sociologiques.

Nous les avons fait figurer en points supplémentaires[1] sur l'analyse factorielle déjà décrite (analyse du tableau "procédures x modèles exprimés x modèles dessinés x exemples"). Il s'agit donc du corpus N.

Ces données sont corrélées de façon variable à l'axe 1 et en général nous ne donnerons de précisions que sur les variables bien corrélées.

a) les points correspondant au temps imparti pour répondre au questionnaire sont inégalement corrélés. Il s'avère que les temps 0 (3/4 h), 2 (1 h 1/2) et 5 (3 h) se "projettent" du côté des réussites ; cela confirme que ce n'est pas ce facteur qui a un rôle déterminant dans les conduites, dans la mesure où les étudiants ayant disposé du temps le plus court et du temps le plus long se retrouvent du même côté. Le point "Temps 3" (2 h) se projette du côté des échecs: il correspond à des étudiants du groupe 1.

b) Les points correspondant au sexe sont inégalement corrélés au premier axe et se projettent de part et d'autre de l'origine avec le point "masculin", le mieux corrélé, du côté des échecs. On ne peut évidemment rien en déduire, si ce n'est que dans notre échantillon, parmi les étudiants ayant indiqué leur sexe il y a plus de garçons que de filles ayant échoué au questionnaire.

c) La façon dont les copies ont été recueillies par l'enseignant (copies anonymes, notées, non notées mais avec le nom de l'élève) correspond à des points mal corrélés sauf le point "copies notées" qui se projette du côté des échecs (copies de Math. Sup. C 1er niveau essentiellement).

d) Les points correspondant à des étudiants ayant passé le baccalauréat à 16 ans et à 17 ans, très bien corrélés à l'axe, se projettent du côté des réussites, alors que les points "Age de bac 19 ans" ou plus, bien corrélés se projettent du côté des échecs.

---

(1) c'est-à-dire que les axes sont déjà construits par les variables principales. cf annexe ⑨ 8

On retrouve une des caractéristiques de notre échantillon - les plus jeunes bacheliers sont en Math Sup et les plus vieux en DEUG, l'âge moyen du baccalauréat -18 ans- (mal corrélé) étant bien représenté dans les 2 filières.

e) De même les points correspondant aux principales séries du bac sont très bien corrélés à l'axe, le point bac C du côté des réussites et les points bac D et bac E du côté des échecs.
Enfin les points " cursus normal" et " cursus anormal" se projettent de part et d'autre de l'axe, le premier du côté des réussites. Il n'y a rien d'étonnant dans ces résultats qui traduisent la composition des groupes 1, 2, 3.

f) Aucune profession des parents n'est très bien corrélée au premier axe ; la seule qui se projette avec une corrélation raisonnable du côté des réussites est la profession du père : cadre supérieur... ; par contre les fils de père ouvrier font partie des étudiants "projetés" du côté des échecs avec une corrélation raisonnable. Même sur notre échantillon N on retrouve les facteurs sociaux de sélection !

7.2.3. Les variantes.

Nous avons pu constater, dans les chapitres 4, 5, 6, que toutes les modifications introduites dans nos variantes n'ont pas apporté, en général, de changements significatifs, si ce n'est qu'on n'aborde moins mais avec les mêmes répartitions de procédures les exercices qui sont placés plus loin dans le texte. En fait, dans un certain nombre de cas, nous trouvions un χ^2 qui ne nous permettait pas de conclure à une différence significative, mais suffisamment élevé tout de même pour que nous prenions en compte les différences qui se manifestaient dans le tableau. Cela nous semble indiquer que nos données ne sont pas tout à fait satisfaisantes par rapport à nos objectifs. En effet, les effectifs de chaque couple (V_1, V_i) étudié sont trop faibles d'une part et la répartition dans chaque classe de V_1 et V_i n'est pas "suffisamment" aléatoire d'autre part. Nous aurions dû nous arrêter à un plus petit nombre de variantes - et peut-être, être présente au moment de la distribution du questionnaire dans les classes. Il y a là un point faible dans l'adéquation entre nos objectifs et nos méthodes. Nous pouvons tout de même affirmer qu'il y a une stabilité certaine dans la répartition des procédures effectives à un exercice par rapport à des changements de vocabulaire (avec utilisation de synonymes), des changements de notations (équivalentes), des changements d'ordre et même certains changements dans la présentation de la tâche qui, au sein du "contrat" en vigueur, ne modifient pas, en réalité, la tâche telle qu'elle apparaît aux étudiants. Et c'est justement ce que nous voulions tester - cela valide dans une certaine mesure l'adéquation entre l'observation des copies et la préoccupation théorique d'observer les étudiants "en action". Plus précisément, nous avons vérifié qu'il n'y a pas de différence sensible entre l'utilisation des mots formés sur "convergent" et celle des expressions équivalentes utilisant le mot "limite" (ce qu'on aurait pu craindre après l'étude de Mme BOSCHET). Elle a constaté en effet une utilisation spécifique des expressions (apparemment équivalentes sémantiquement) "converger vers" et "avoir une limite". Il s'avère ici

que, dans les exercices, même si on utilise l'expression la moins souvent associée aux énoncés des exercices (converger vers), il n'en résulte aucun changement significatif dans les procédures des étudiants.

Si par ailleurs l'utilisation de θ ou de A comme paramètre est totalement sans effet sur nos étudiants, par contre, dans deux cas sur cinq, le remplacement de u_n par z_n a amélioré les procédures en diminuant dans un cas le taux de procédures algébriques erronées parmi elles. Il y a peut-être là des chaînes d'automatismes (u_n, lim...) qui engendrent facilement des comportements erronés chez certains et qui peuvent être évités par des changements de signifiants.

De plus quel que soit l'ordre de résolution des exercices, les répartitions des procédures effectives ne changent pas, même si moins d'étudiants abordent un exercice posé plus loin dans le texte, compte tenu de ce que les exercices n'ont pas d'influence les uns sur les autres.

Notons encore que le fait d'avoir mobilisé au début plus ou moins explicitement une expression de la représentation de la convergence (cf. V_4, V_7 et V_{11}) n'a pas d'effet sur les procédures. Cela renforce l'hypothèse de la "présence" de cette représentation qui n'a pas à être mobilisée pour devenir disponible.

Cela étant, ce dont nous pouvons être sûrs, ce n'est pas tant que la tâche est la même - malgré les variantes - mais que l'interprétation de la tâche par les étudiants est inchangée. Ainsi, si les étudiants produisent les mêmes procédures à 2 exercices qui diffèrent par quelque chose, c'est bien qu'ils interprètent la tâche des 2 exercices de la même façon malgré cette différence. Or dans l'interprétation d'une tâche comme nous l'avons déjà noté, il n'intervient pas que des facteurs explicites. Il intervient des facteurs de fréquence (cf. Brousseau), d'habitude (cf. étude de F. Boschet), de désir de "faire comme le maître veut" (pour avoir une bonne note le cas échéant), etc... Il est vrai que cela est renforcé par notre enseignement qui est si dirigiste que les étudiants n'ont pas l'habitude de chercher (paisiblement) un exercice en le prenant par tous les "bouts" possibles et sans se conformer à une idée préconçue (souvent l'analogie avec un

exercice précédent). Ainsi si les étudiants répondent de la même façon à un exercice intitulé "Montrer qu'une suite est convergente" et à un autre intitulé "Que peut-on dire de la suite...") c'est bien que pour eux les 2 textes sont interprêtés pareillement.

Autrement dit, nous obtenons aussi la confirmation de l'existence d'un certain contrat didactique dans l'interprétation d'un exercice. Selon les cas, les effets du contrat peuvent être différents: cela peut avoir comme résultat de gommer de légères différences en réduisant par exemple certaines questions ouvertes comme ci-dessus à une question semi-fermée, ou en attribuant à "positifs" une signification stricte ou large selon les cas. En conclusion, une interprétation correcte de différences ou de ressemblances enregistrées suite à des variations dans les textes proposés aux étudiants ne peut se faire sans tenir compte non seulement du contenu de ces variations mais encore du contrat didactique appliqué inconsciemment dans les classes concernées. Nous ne pouvons donc que constater que, compte tenu des conditions effectives de l'enseignement actuel, les variantes que nous avions proposées n'ont pas introduit de perturbations sensibles dans les procédures des étudiants.

7.3.Conclusions.

On constate, après toutes ces analyses cliniques ou factorielles, un certain nombre de régularités qui apparaissent d'ailleurs déjà dans chaque exercice et dont l'importance et la fiabilité sont renforcés par les constats de cohérence que nous avons pu faire.

Nous présenterons nos conclusions par groupes 1 s'agit donc de nos résultats concernant le déroulement de l'acquisition de la notion; puis, nous présenterons nos conclusions sur la relation entre les modèles et les procédures, en dégageant des "types de comportement" des étudiants.
Nous terminerons en exposant les limites de nos données qui éclairent la portée des conclusions précédentes.

7.3.1. Le déroulement de l'acquisition de la notion.

a) Les groupes 1 (DEUG) et 3 (Math. Sup. , Math. Spé. , licence, maîtrise).

Ces groupes s'avèrent opposés: le "meilleur" niveau du groupe 1 reste bien en dessous du "moins bon" niveau du groupe 3, les différences étant variables suivant la tâche. Les progrès au sein de chaque groupe sont assez localisés et dépendent précisément de la tâche.
En particulier, pour les étudiants du groupe 3, tout se passe comme si tout était presque joué dès la première année entre un et trois mois après le cours (sans oublier tout de même les restrictions qu'il faut apporter à ce genre de conclusions tirées d'une analyse synchronique). Les modèles exprimés -majoritairement"corrects"- varient peu, les performances sont correctes pour une bonne majorité des étudiants et presque toutes les tâches. Seules les procédures vont nettement évoluer dans le sens d'une amélioration de certaines procédures correctes ou ambigües qui sont remplacées par les procédures correctes les plus généralisables et les plus directes. De plus, en maîtrise, on remarque une disparition presque complète des procédures erronées quelles qu'elles soient, encore présentes (plus ou moins suivant les

tâches) dans les niveaux antérieurs. Les tâches les plus réussies sont les tâches de majoration de $|u_n|$ (exercice 6), et l'utilisation de la définition en (ε,N) (exercice 8 et 7); l'exercice 5 est le moins réussi.

En ce qui concerne, par contre, les étudiants du groupe 1, on constate également que les activités mathématiques ultérieures à celles sur les suites n'ont pas beaucoup d'effets sur l'acquisition de la notion. Tout se passe comme si, si un certain seuil dans l'acquisition de la notion n'était pas atteint assez rapidement, il n'était plus possible de "rattraper" (du moins pour une majorité des étudiants) le retard. En effet, ces étudiants ne réussissent dans leur majorité qu'à deux exercices au plus, tout en en abordant quatre au moins; ils expriment des modèles erronés (primitifs, tend vers, pas de modèle), ou, au mieux, dynamique et préstatique, et produisent des procédures incorrectes -de type algébrique, fausses sans démonstrations, magiques, etc... suivant les tâches.

La tâche la mieux réussie reste celle de l'exercice 6, résolue par encadrement de u_n et pour laquelle se marquent le plus de progrès au sein du groupe.

Cependant, les caractères ci-dessus ne concernent pas <u>tous</u> les étudiants, ni du groupe 1, ni du groupe 3, et il est particulièrement intéressant d'étudier toutes les exeptions. Dans le cas du DEUG, cette étude est faussée parce que les étudiants n'ont pas indiqué s'ils avaient ou non passé un an au moins en classe préparatoire -bien que cette question leur ait toujours été posée. Cela étant, ni les analyses factorielles par groupe, ni l'indice d'implication sur chaque groupe n'ont permis de dégager des régularités concernant ces étudiants "exceptionnels" -si ce n'est que le modèle dynamique est un peu plus associé précisément à des copies où deux ou trois exercices seulement sont réussis. Cette étude reste donc complètement à faire[1], vraisemblablement en commençant par une étude clinique diachronique. Rappelons ici, tout de même, que la tâche de l'exercice 6 (encadrement de u_n ou majoration de $|u_n|$) qui correspond à une des tâches élémentaires les plus souvent posées aux étudiants est mieux "réussie" que les autres en DEUG justement, ce qui pourrait renforcer l'hypothèse qu'en fait les mécanismes d'acquisition ne sont pas si différents, mais qu'un certain seuil quantitatif n'est pas atteint en DEUG. Enfin, il se pose un autre

(1) Nous avons d'ailleurs regardé à nouveau quelques copies de ce type sans pouvoir apercevoir de régularités.

problème: nous avons vu qu'un certain nombre d'étudiants de licence et maîtrise peuvent ne pas être passés par ces classes de Sup.; or, il n'apparaît pourtant pas de discontinuité dans le groupe 3 en licence. Il se peut que les étudiants de DEUG qui passent en licence soient les tous meilleurs étudiants de DEUG (ceux dont nous ne parlons pas lorsque nous caractérisons le groupe 1 par les traits qui concernent la majorité des étudiants de chaque niveau). Il se peut aussi que ces étudiants de DEUG qui font exception soient passés par une Sup. On voit là un prolongement indispensable à ce travail: l'analyse des étudiants de DEUG qui passent en licence (avec pré-test en DEUG et post-test en licence).

Cela étant, nous avons distingué un troisième groupe, les Math. Sup. C , caractérisé, contrairement aux deux autres, par les progrès qui se font jour entre les deux niveaux (compte tenu des précautions d'usage dans la mesure où ces étudiants ne sont pas les mêmes).

b) Le groupe 2 (Math. Sup. C).

Ses deux niveaux sont intéressants parce qu'il s'y marque presque toujours une évolution (positive) entre les deux et parce que si le premier niveau révèle des comportements assez proches de ceux du premier groupe (souvent en DEUG 2), le deuxième niveau, lui, révèle des comportements meilleurs que les premiers, quoique souvent encore un peu moins bons que ceux du troisième groupe.Autrement dit, si nous pouvions être sûre que les élèves des deux niveaux sont "comparables" (n'oublions pas que ce ne sont pas les mêmes élèves), nous pourrions affirmer qu'il y a dans ces classes un certain nombre d'élèves en progrès sensible -partis d'assez "bas" et ayant réussi à améliorer aussi bien leurs représentations que leurs procédures. Nous avons expliqué plus haut qu'il y a lieu d'accepter cette hypothèse. Or, nous avons constaté que dans les deux autres groupes, si les procédures évoluaient encore plus ou moins selon les tâches, les représentations, elles, se fixaient rapidement. Le cas des Math. Sup. C pourrait alors signifier que c'est corrélativement à un certain seuil de succès aux exercices que s'élaborent les représentations mixtes et statiques

-seuil atteint très rapidement en Math. Sup., presque jamais en DEUG, et au terme de trois mois de travail en Math. Sup. C. Il y a là des hypothèses à confirmer par une étude diachronique menée dans ces classes.

Cela étant, nous n'avons encore pas pu mettre en évidence des régularités dans la dynamique (et la dialectique) des progrès constatés -pas plus que nous n'avions réussi à cerner des caractéristiques des étudiants "exceptionnels" des groupes 1 et 3. Il est nécessaire, pour y arriver, nous semble-t-il, d'effectuer une étude diachronique et de séparer beaucoup plus les différentes tâches que nous voulons comparer.

7.3.2. La relation entre les modèles et les procédures: types de comportement.

a) Les comportements "corrects" - modèles mixtes et statiques.

Toutes les analyses ont montré l'association privilégiée de ces modèles (et particulièrement des modèles mixtes où un modèle statique intervient) et des procédures correctes à quatre exercices au moins -avec une hiérarchie dans la réussite aux diverses tâches (qui peut être dûe à la difficulté spécifique de la tâche ou au fait qu'elle ait été plus ou moins rencontrée); l'exercice 5 est le moins bien réussi, l'exercice 6 est le mieux réussi, quel que soit le modèle exprimé. Il y a donc là un "type de comportement" correct -réussite à tous les exercices (ou presque) avec procédures correctes [1] et modèle statique (ou mixte avec composante statique). Ces comportements sont en augmentation et sont surtout le fait d'étudiants du groupe 3, mais pas uniquement.

Cependant, là encore, il y a des étudiants dans chaque groupe ayant exprimé ces modèles et qui ne réussissent pas de la même manière, étudiants donc "exceptionnels"

---

(1) Contre exemple aux exercices 5 et 10 (5 CEX, 0 BIE), majoration de u_n ou application correcte du théorème sur le produit des suites à l'exercice 6, utilisation de la définition en (ε,N) avec changement de stratégie à l'exercice 7.

que nous avons voulu étudier. Mais, nous n'avons pas pu dégager de tâches "charnières" régulièrement associées à des échecs de ces étudiants.

b) Les comportements erronés -modèles primitifs, tend vers, dynamiques monotones.

Les étudiants sans modèle exprimé.

Ces étudiants n'abordent pas tous les exercices et ratent la plupart de ceux qu'ils ont abordé. Selon les tâches, ils produisent soit une procédure fausse sans démonstration, soit une procédure algébrique erronée, soit d'autres procédures incorrectes. Ils ont exprimé un modèle primitif, "tend vers" ou dynamique monotone, et ils appartiennent le plus souvent au groupe 1, mais pas uniquement. Là encore, nous n'avons pas réussi à caractériser les cas intermédiaires (modèles erronés, procédures correctes) -moins nombreux que les précédents. On peut rapprocher de ces étudiants ceux qui n'ont pas exprimé de modèle (tout en ayant abordé les questions 1 et 2 -avec tout de même des nuances, ces étudiants apparaissant un peu "meilleurs" que les précédents. Tout se passe comme si les comportements les plus erronés étaient le fait d'étudiants ayant fixé une image erronée de la convergence.
Quant aux étudiants n'ayant pas abordé les questions 1 et 2, ils se divisent en deux catégories proches, l'une de la précédente (avec encore plus d'exercices non abordés) et l'autre des modèles corrects.

c) Les comportements intermédiaires -modèles dynamiques et préstatiques.

Ces étudiants n'abordent pas tous les exercices, mais en réussissent quelques-uns sans qu'on puisse déterminer de régularités dans ces réussites (à part la plus grande réussite à l'exercice 6). Nous avons qualifié, pour cette raison, ces modèles de "non-discriminants" -peut-être peut-on voir dans l'association de ces modèles et des comportements intermédiaires un indice d'instabilité ?. Nous n'avons pas, non plus, élucidé le rôle du dynamique dans les représentations correspondantes ou dans les représentations mixtes, dans la mesure où aucune de nos tâches ne semblait mobiliser cet aspect du modèle.

Conclusion :

Les limites de nos données et la portée de nos résultats.

Tout au long de ce travail, nous avons pu constater un certain nombre de limites dans nos données, limites qui auraient d'ailleurs rendu illusoires des investigations statistiques plus poussées que celles que nous avons menées.

Rappelons-en quelques exemples.

a) Nous avons constaté que la tâche à l'exercice 6 est mieux réussie que les autres, et ceci dans tous les groupes. Or, nous ne pouvons pas en déduire que cette tâche est "plus facile" que les autres, dans la mesure où nous avons vérifié que c'est une des tâches les plus proposées aux étudiants, (contrairement aux tâches de manipulation de la définition en (ε,N), par exemple, lesquelles sont moins réussies). Pour tirer une conclusion pertinente concernant la plus grande "facilité" de telle ou telle tâche, il serait nécessaire de comparer les résultats d'étudiants préparés de la même façon à ces tâches. Il serait donc indispensable non seulement de connaître l'enseignement reçu par ces étudiants, mais encore éventuellement de proposer quelques séquences.

Tout ce que nous pouvons dire concernant la tâche à l'exercice 6 est que, dans les conditions actuelles de l'enseignement, elle est plus réussie; on voit à la fois l'intérêt de ce résultat et ses limites.

b) Nous avons voulu comparer les résultats par classes, et nous nous sommes immédiatement heurtée à un problème analogue. En effet, il était impossible d'interpréter les différences entre les classes sans connaître l'enseignement reçu dans chaque classe (et la composition de la classe). Nous avons réussi, par contre, à dégager sur des effectifs plus importants des régularités stables vérifiées sur le corpus N et sur le corpus S; nous pouvons les utiliser compte tenu des conditions actuelles de l'enseignement valables pour tous les enseignants; ce sont les conditions que nous avons dégagées dans le chapitre 1.

c) Nous n'avons pas réussi à caractériser les étudiants "exceptionnels", et à dégager, pour eux, de régularités dans leur acquisition de la notion. Or, ces étudiants étaient peu nombreux dans chaque groupe, et donc une étude comme la nôtre était d'avance moins bien adaptée à ce genre d'effectifs. Cependant, il nous manquait en même temps des éléments individuels supplémentaires pour avancer des hypothèses plus fines.

Il apparaît ainsi que pour continuer notre étude, il devient indispensable de se donner les moyens de mettre en rapport, individu par individu, l'enseignement et les productions qui en résultent, et d'observer les étudiants en activité. Cela nous permettra de mieux comprendre la mise en place des modèles et peut-être de saisir le caractère indispensable ou non de certains d'entre eux. Cela nous permettra aussi de mieux interpréter les hiérarchies que nous avons esquissées et enfin, d'avancer dans la description de l'acquisition de la notion des étudiants "non majoritaires" de chaque groupe. Cependant, les données que nous avons recueillies nous ont permis de dégager les grandes caractéristiques du déroulement de l'acquisition de la notion suivant les filières, et compte tenu de l'enseignement actuel, elles nous ont aussi permis de confirmer l'existence de représentations mentales dont nous avons mis en évidence un indice pertinent -le modèle exprimé. Il reste à élucider le rapport entre l'enseignement et l'élaboration des représentations mentales. Dans le dernier chapitre de ce travail, nous allons présenter quelques hypothèses à ce sujet.

CHAPITRE 8 : LES ERREURS

Dans ce dernier chapitre consacré "aux erreurs", nous reprenons toutes les erreurs rencontrées dans nos copies pour en dégager des grandes catégories - évidemment non disjonctives ; cela nous permet de mettre en rapport ces catégories et la disparition partielle des erreurs (par niveau) avant de rêver à la correction[1] des erreurs de tous les étudiants à la suite d'un enseignement différent.

Nous terminons par un reexamen du schéma initial de l'acquisition des connaissances que nous avons proposé et qui s'avère bien non contradictoire avec nos observations.

---

(1) C'est-à-dire à l'élimination des erreurs après leur production.

8.1. Classification des erreurs dans les procédures et les modèles exprimés.

Il est difficile de parler des "erreurs" sans en préciser une typologie - or, souvent, les différents types d'erreurs qui se dégagent sont si peu indépendants que les classifications s'avèrent peu opératoires.

Cependant, il y a vraisemblablement des différences qualitatives entre les connaissances de l'étudiant qui "sèche" et qui n'arrive donc pas à mobiliser ses connaissances pour résoudre la tâche données, les connaissances de l'étudiant qui produit une démonstration erronée et celles de celui qui, dans une procédure correcte, fait une erreur "muette" d'indice. De plus, non seulement la production des erreurs peut révéler des difficultés de natures différentes, mais encore, et en conséquence, la "correction" de ces erreurs peut devoir mettre en jeu des activités de natures différentes. En particulier, dans les hypothèses déjà citées de G. Brousseau c'est à la création puis à l'autocorrection des erreurs révélatrices des obstacles propres aux notions en cause que doit être consacré l'enseignement. Dans une telle hypothèse, il nous semble indispensable pour le moins de repérer ces "obstacles" et donc nous revenons à la nécessité d'étudier les erreurs en les classant, en sachant bien que, pour beaucoup d'entre elles, elles appartiennent simultanément à plusieurs des catégories que nous allons schématiquement esquisser maintenant.

Nous distinguons les étudiants qui "sèchent" partiellement ou complètement et ceux qui ont effectivement produit une procédure conduisant au résultat - ce sont les erreurs et difficultés de ces derniers que nous étudions, en y joignant une réflexion analogue sur les modèles exprimés.

8.1.1. Les étudiants qui "sèchent".

Notre matériel ne nous permet pas de dire grand-chose à ce sujet. Nous avons en effet constaté que, plus que la difficulté de la tâche, c'est sa place dans le texte qui semble responsable du nombre d'étudiants qui ne l'abordent pas. Nous n'avons donc comme témoin pertinent du phénomène étudié que les copies non termi-

nées - et encore ! il se peut que les étudiants, ne trouvant pas instantanément soient passés à autre chose, alors que dans d'autres circonstances, ils auraient terminé l'exercice.

Or, nous avons souvent constaté qu'une telle copie (non terminée) présente un début de stratégie identifiable, ainsi dans l'exercice 7, un tiers des copies non terminées a débuté en adaptant la définition en (ε,N) à la suite (nu_n) ; dans l'exercice 6, plus de la moitié ont essayé d'étudier le signe de $(u_{n+1} - u_n)$ ou la monotonie de $f(x) = \frac{1}{x} \cos x\theta$. Autrement dit, après avoir "traduit" l'hypothèse dans l'exercice 7 le plus directement possible, ou après avoir essayé dans l'exercice 6 la première condition de convergence à laquelle ils ont pensé (une suite monotone bornée est convergente) ils ont arrêté leur travail, soit parce qu'ils ne voyaient pas (tout de suite) comment relier à la conclusion ce qu'ils avaient obtenu (dans l'exercice 7), soit parce qu'ils avaient constaté que ça ne "marchait" pas ainsi (dans l'exercice 6).

Plusieurs interprétations de ces conduites sont possibles et peut-être coexistent. Il y a tout un volet psychologique que nous ne pouvons pas aborder, faisant appel à des "qualités" individuelles comme la mémoire, la rapidité, la confiance en soi, ou la combativité etc... Il y a peut-être aussi à chercher des explications plus profondes d'ordre psychanalytique. D'un point de vue plus strictement mathématique on constate qu'il n'y a pas d'essai de transformer une stratégie initiale. Ainsi nu_n (resp $\frac{1}{n}$) apparaît dans la formule, or c'est u_n (resp. une constante) dont on aurait besoin donc ça ne va pas. De même, la suite n'a pas l'air "facilement" monotone - on laisse tomber. Tout se passe comme si, dans la mesure où la première idée que l'étudiant a devant la tâche n'aboutit pas sans difficultés, il y avait abandon. On peut penser que, dans certains cas, peu de connaissances sont disponibles et qu'il n'y a pas de stratégie de rechange. Dans d'autres cas, les connaissances existent "dans la mémoire", elles seraient disponibles mais elles ne sont pas mobilisées. C'est le "Ah oui, c'était facile !" que nous connaissons bien de la part de nos étudiants lorsqu'on leur livre la solution d'un exercice sur lequel ils ont sèché. Il y a là des échecs, qui ne traduisent pas nécessaire-

ment seulement des difficultés spécifiques de la notion mais peut-être aussi des insuffisances de notre enseignement. En effet on s'interdit dans l'enseignement des mathématiques de faire appel à toute réflexion de type métaconnaissance, à part l'analogie. La quantité d'exercices nécessaire dans un système d'apprentissage où seule l'analogie entre deux exercices a droit de cité comme réflexion sur une pratique n'est pas atteinte en DEUG :on peut voir là un élément, dans l'enseignement en question, éventuellement responsable au même titre que les difficultés spécifiques sur les suites des conduites précédentes. Il est frappant de constater d'ailleurs que c'est en Sup et en Spe, où un certain seuil quantitatif est dépassé, que les copies non terminées sont le moins fréquentes. Nous devons donc plutôt chercher dans les procédures erronées les difficultés spécifiques à la notion de convergence de suites.

8.1.2. Les procédures erronées et les erreurs dans les modèles exprimés.

Outre des modèles exprimés erronés ou incomplets, nous avons rencontré dans chaque exercice, des procédures erronées et des erreurs "muettes" qui relèvent d'une ou plusieurs des catégories suivantes :

a) Non prise en compte du fait que, dans la convergence d'une suite (u_n) c'est n qui est la variable tendant vers l'infini.

Cette erreur intervient souvent en même temps que d'autres ; on la reconnait dans la reconnaissance des formes, le passage à la limite partiel et la procédure scalaire avec limite $\frac{1}{n}$ de l'exercice 7, où on obtient précisément $\frac{1}{n}$ comme limite - non nécessairement intermédiaire - de (u_n). Elle intervient aussi dans l' rreur "muette" qui consiste à poser $\varepsilon' = \varepsilon/n$. Elle intervient enfin dans de nombreuses procédures de l'exercice 9c) où n intervient comme indice et comme exposant et où un passage à la limite partiel ne tient compte du caractère variable de n que dans l'une de ses fonctions. Or non seulement il n'y a aucun effet significatif sur cette erreur lorsqu'on remplace (u_n) par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais encore nous avions noté que les étudiants recopient dans leur grande majorité le "$n \to +\infty$" sous le "$\lim u_n$"

de l'exercice 7. Il y a donc là une erreur de conception qui va au delà des simples abus de notation consistant à oublier le "$n \in \mathbb{N}$" qui mutifie la variable n dans (u_n) ou le "$n \to +\infty$" accompagnant une convergence de suite, quelle qu'en soit l'expression. De plus, si sous une forme simple, c'est-à-dire lorsque une seule occurrence de n apparaît dans une expression, cette erreur disparait "rapidement", sous une forme plus complexe - lorsque par exemple deux occurrences de n avec des rôles différents interviennent dans une expression - cette erreur s'avère beaucoup plus persistante et se manifeste encore en maîtrise.

Il y a là une difficulté qui nous semble spécifique de la convergence des suites numériques si ce n'est de la convergence des fonctions en général. Ainsi serait-il très intéressant de poser aux étudiants l'exercice suivant : Montrer que si f est une fonction réèlle numérique telle $\lim_{x \to +\infty} xf(x) = 1$, f a une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Y aurait-il autant de "$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{x}$" que de "$\lim u_n = \frac{1}{n}$" dans notre exercice 7 ?

En tout cas, nous trouvons là une erreur intimement liée à la nature même de la convergence des suites et à la prise en compte du fait que cette convergence ne peut se concevoir qu'au voisinage de $+\infty$ car $\mathbb{N}$ est un ensemble discret muni du filtre de Fréchet.

D'autre part, dans les représentations exprimées dynamiques de la convergence des suites, il apparaît particulièrement peu que c'est n la variable de ce phénomène. Lorsqu'on dit "u_n se rapproche de 1" ou "les u_n se rapprochent de 1", dans la mesure où on semble fixer u_n en le nommant, lui et lui seul, même si l'on précise "lorsque n tend vers l'infini", il n'est pas inscrit dans la forme du discours que c'est $u_{(n \text{ variable})}$ qui se rapproche d'une limite. Cela peut constituer un renforcement éventuel de l'erreur concernée, qui correspond d'ailleurs à la difficulté réèlle d'exprimer avec des mots le concept autrement qu'en "traduisant" la définition mathématique en (ε, N). Nous avions constaté dans le paragraphe 1.1.2 que ce n'est qu'à partir de Cauchy que les modèles exprimés dans les ouvrages de mathématiques ne sont plus dynamiques monotones. Il y a donc coïncidence entre une élaboration historique lente, la fréquence actuelle d'une représentation cinématique

tentante mais pas tout à fait correcte et pouvant renforcer cette erreur, et la production d'une erreur persistante sous une forme complexe. On peut convenir qu'il y a là un obstacle . Fallait-il tous ces travaux pour le deviner ? On a en tout cas dans cette étude une confirmation "scientifique" et des critères de caractérisation d'un obstacle et de l'intuition basée sur l'expérience des enseignants.

b.) Transformations ou tronquages de théorèmes de définitions.

i) Dans l'application erronée d'un certain nombre de théorèmes, il y a tronquage d'une partie des hypothèses nécessaires à cette application. Ainsi "oublie"t-on dans l'utilisation des théorèmes algébriques (produit et somme) le présupposé d'existence des limites (exercice 6 et 7) ou bien dans l'utilisation d'un théorème d'encadrement "oublie"t-on la moitié de l'encadrement (exercices 6 et 7).
Ces erreurs disparaissent un peu plus lentement que les précédentes sous leur forme simple mais représentent, dans les exercices concernés, moins de 10% des procédures utilisées dans chaque niveau du troisième groupe (dans les copies où les exercices correspondants sont abordés).
Il est peut-être plus important ici de travailler sur le recours à ces procédures algébriques à la place des procédures correctes que sur les erreurs propres à ces procédures. On ne peut en effet affirmer que les étudiants ne réciteraient pas correctement leur théorème, ou même ne les appliqueraient pas correctement dans un autre contexte. Ce n'est pas forcément la mémoire qui est seule en cause ici. Il y a aussi une reconnaissance de formes (produit ou somme de suites) et une application de type algorithmique de théorèmes qui ont l'air de s'appliquer à une hypothèse près.
On retrouve dans la reconnaissance de la forme de la définition rencontrée dans l'exercice 7 un fonctionnement analogue : on "oublie" que le nombre jouant le rôle de la limite doit être constant pour pouvoir appliquer la définition qu'on a presque reconnue. On a tronqué une partie des hypothèses de la définition, avec une erreur du type a) en plus.

ii) Dans l'application erronée de certains autres théorèmes ou définitions, il y a transformation réductrice des hypothèses ou des conclusions.

Ainsi, dans l'utilisation du critère de Cauchy, on se contente de vérifier que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0 (exercices 7 et 8) ; dans l'utilisation du théorème d'encadrement, des inégalités strictes restent strictes après "passage à la limite" (exercices 6 et 7) ; on a là,de façon caractéristique,une erreur "muette" qui contrairement aux précédentes et dans les exercices concernés ne change rien au déroulement et à la conclusion de la prodédure.

De même lorsque de l'inégalité $(u_n < 1)$ on déduit $(u_n^n \to 0)$, on transforme l'hypothèse $(a < 1)$ avec superposition d'une erreur du type a). On trouve aussi des confusions entre hypothèses et conclusions, par exemple transformation du théorème des suites extraites en sa réciproque. On peut y voir aussi une erreur de "logique" d'autant plus que la transformation n'est pas réductrice. On a baptisé ailleurs "télescopages" les erreurs qui proviennent de la transformation simultanée de 2 théorèmes réunis ensuite en un seul (exercice 7).

Enfin on trouve aussi des transformations de la définition des suites extraites dans l'exercice 10 (comme par exemple l'oubli de suites extraites autres que (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Or les modèles primitifs correspondent également à une transformation réductrice de la définition de la convergence puisqu'ils expriment que toute suite convergente est monotone bornée ou stationnaire.

De même le modèle préstatique correspond à un tronquage de la définition en (ε,N) puisqu'il exprime cette définition en "oubliant" le "quel que soit ε", remplacé éventuellement par "il existe un ε" (au quel cas il y a transformation et non tronquage).

Autrement dit les défauts des modèles exprimés proviennent des mêmes types d'erreurs qu'un grand nombre de procédures erronées. Il y a là un indice de l'éventualité d'une interaction entre l'élaboration des modèles et l'activité des étudiants sur les suites numériques. .

c) Les erreurs de "logique".

Nous avons déjà évoqué dans le paragraphe précédent des transformations de théorème qui, sans réduire hypothèses ou conclusions, consistent à confondre un théorème et sa réciproque (théorème des suites extraites, exercices 8 et 10). Dans la même catégorie, se trouve la négation erronée de la convergence rencontrée dans l'exercice 7. On rencontre de plus dans chaque exercice quelques copies classées en 'divers' où se notent de telles erreurs.

d) Les "étourderies", erreurs de calcul et d'indices.

Les étudiants qui lisent (u_n) à la place de (nu_n) dans l'exercice 7, ou qui dans l'exercice 8 estiment que un certain N convient alors que c'est 2N qu'il fallait choisir ou qui confondent suites et séries dans les exercices 6 ou 7 , produisent des erreurs qui nous semblent relever d'une telle catégorie. De même certains contre-exemples aux exercices 5 et 10 sont faux pour des raisons d'étourderie.

e) Les erreurs dues à des lacunes antérieures.

Dans l'exercice 5 on a trouvé des étudiants qui retranchent des inégalités membre à membre, ou qui pensent qu'une suite non croissante est décroissante. Ces erreurs sur les nombres réels, l'ordre et les fonctions, correspondent à des connaissances supposées acquises et qui ne le sont pas encore. Il en est de même pour les étudiants qui écrivent dans l'exercice 6 que $0 < \cos n\theta < 1$ ou, ce qui est nettement moins grave, $-1 < \cos n\theta < 1$.

f) Essai d'expliciter u_n dans une égalité ou une inégalité.

Un certain nombre de procédures aux exercices 7 et 8 semblent indiquer le désir des étudiants de se ramener à une expression explicite de u_n sur laquelle ils pourront travailler. Tout se passe comme si on essayait de se rapprocher d'une

situation type "algorithme" où on peut atteindre u_n. On a ainsi trouvé dans l'exercice 7, $u_n = \frac{1}{n}$ ou $u_n \simeq \frac{1}{n}$, dans l'exercice 8, $u_n = \frac{1}{2}(u_{2n} + u_{2n+1})$ ou $u_{2n} \leq u_n \leq u_{2n+1}$, ou en "posant" 2n = w, (u_w) converge donc (u_n) aussi car (u_w) et (u_n) sont les mêmes suites. De même dans l'exercice 6 un certain nombre de cas particuliers envisagés pour θ , correspondent à une possibilité de "calculer" complètement u_n pour conclure.

g) Les erreurs explicitement dues à une représentation erronée.

On a trouvé dans l'exercice 5, l'expression dynamique monotone de la convergence de (u_n) vers 0 ainsi que l'expression monotone, expliquant parfaitement bien les erreurs correspondantes. De même dans l'exercice 6, une conception monotone de la convergence explique la procédure où l'on démontre ainsi que (u_n) converge.
Une telle intervention directe de la représentation monotone peut encore intervenir dans quelques copies où la procédure est confuse, non terminée et ne peut donc être repérée quantitativement dans nos effectifs. Dans l'exercice 8, il se peut que lorsque les étudiants écrivent que u_n, appartenant soit à (u_{2n}) soit à (u_{2n+1}), converge "dans tous les cas vers 1", il y ait une intervention indirecte de représentations dynamiques dans lesquelles la variable n est "peu" mutifiée. De même pour la procédure où ils écrivent que (u_n) est la réunion des 2 autres et donc converge. On peut se demander si le raisonnement suivant n'intervient pas dans les 2 cas : u_{2n} se rapproche de 1, u_{2n+1} se rapproche de 1 donc u_n aussi.

h.) Les réponses sans démonstration.

Si elles équivalent à une absence de réponse : dans les exercices qui s'intitulent "Montrer que..." , leur statut est plus ambigü et nous nous en sommes déjà expliqués, lorsqu'il s'agit des exercices "semi-ouverts" 5 et 10. Cela étant, dans l'exercice 5, une partie des réponses fausses sans démonstration et des procédures ambigües peut vraisemblablement être attribuée comme nous l'avons vu à des représentations primitives, dynamiques monotones ou même dynamiques de la convergence. Dans l'exercice 10, par contre, c'est une conception restrictive des suites extraites qui serait sans doute en cause (erreur du type b ii)).

Ces différents types d'erreurs, encore une fois, ne sont pas disjonctifs et bien souvent une procédure erronée relève (ou peut relever) de 2 ou 3 d'entre eux. Nous mettrons à part les erreurs de logique, d'étourderie et celles dues à des lacunes antérieures, qui n'ont rien de spécifiques à la notion étudiée, mais qui relèvent (au moins) du champ conceptuel envisagé. Il est clair que les erreurs explicitement dues à une représentation erronée de la convergence des suites ainsi que celles qui reviennent à ne pas mutifier n lorsqu'il s'agit de la convergence de u_n sont spécifiques à la convergence des suites, tout en pouvant se rencontrer sous une forme modifiée dans des tâches sur la convergence des fonctions. Il y a là des recherches à mener.

Reste les erreurs correspondant à des tronquages ou transformations réductrices de théorèmes et définitions et aux essais d'expliciter (u_n). Ces erreurs nous semblent plus spécifiques du champ conceptuel "début de l'analyse réelle" que de la notion particulière envisagée ici. L'oubli de présupposé d'existence de limites peut se manifester dans des tâches sur les fonctions, aussi bien que l'oubli de la moitié d'un encadrement. Par contre les transformations réductrices de la définition d'une suite de Cauchy, d'une suite extraite ne peuvent intervenir que lorsqu'on parle de suites, pas nécessairement numériques au demeurant. Il apparaît ainsi que pour compléter un tel travail et répondre avec précision à notre question initiale "Quelles sont les difficultés spécifiques à la convergence des suites numériques", il est indispensable de s'intéresser aux notions proches de celle-ci et qui définissent avec elle un objet suffisamment complet à savoir le champ conceptuel "début de l'analyse réelle". En réunissant nos résultats sur les procédures, les tâches et les modèles exprimés et la classification des erreurs ci-dessus, nous pouvons cependant affirmer qu'il y a des difficultés spécifiques à la notion qui peuvent expliquer à la fois une grande partie des erreurs et leur persistance : il y a la difficulté à mettre en place une représentation mentale de la convergence qui doit traduire la défi-

nition en (ε,N) alors que des représentations dynamiques plus immédiates et donc plus faciles ne s'avèrent pas nécessairement suffisantes et que d'autres représentations erronées peuvent se présenter d'abord. Il y a corrélativement la difficulté des tâches où l'on manipule cette définition et en particulier la difficulté à concevoir le rôle variable de n dans la convergence.
Il y a enfin la difficulté d'abandonner le recours à des procédures de type algorithmique ou à des procédures partant d'expressions explicites de (u_n) pour travailler de conditions suffisantes en conditions suffisantes sur des expressions plus compliquées.
Cela étant, nous allons maintenant étudier la disparition des types d'erreurs que nous avons mis en évidence, par niveau.

8.2 Disparition des types d'erreurs par niveaux. (Tableau $VIII_1$)

Nous avons choisi une méthode simpliste pour repérer la disparition des erreurs par niveau, il ne faut donc accorder qu'une valeur indicative à nos résultats. Nous avons regardé en effet si il n'y avait aucun étudiant de Sup, de licence ou maîtrise ayant commis l'erreur concernée (ceci est noté 0_S, 0_L ou 0_M dans le tableau) ou s'il y en avait au moins 1 (en blanc dans le tableau).
Nous avons ainsi constaté (cf. tableau $VIII_1$) qu'il n'y a pas d'erreurs ayant disparu en Sup et n'ayant pas disparu en maîtrise, alors que le contraire est fréquent. Pour ce qui est des erreurs ayant pour origine (non exclusive) la non-prise en compte du caractère variable de n, elles disparaissent en maîtrise (et même en licence) sauf celles qui correspondent à des situations de double occurrence de n (passage à la limite partiel, ou calcul de $\lim_{n\to\infty} u_n^n$) et l'erreur muette "$\varepsilon' = \varepsilon/n$". On peut penser que cette dernière erreur n'amenant pas de perturbation dans le raisonnement est plus difficile à faire abandonner aux étudiants que les erreurs où l'étudiant peut être mis en contradiction avec le résultat attendu. On constate aussi qu'une erreur qui correspond à un degré de complexité plus grand (deux occurrences de n au lieu d'une seule) ne disparait pas en

Tableau $VIII_I$

DISPARITION DES ERREURS PAR NIVEAUX

Reconnaissance de formes (ex. 7)	O_L	O_M
Procédure scalaire, limite $\frac{1}{n}$ (ex. 7)	O_L	O_M
Passage à la limite partiel (ex. 7)		
$\varepsilon' = \varepsilon/n$ (ex. 7)		
Erreurs formelles en 9c)		
$\lim \frac{1}{n} \cos n\theta = \lim \frac{1}{n} \times \lim \cos n\theta$		O_M
$\lim nu_n = l \Rightarrow \lim u_n = \frac{l}{n} \to 0$		O_M
$\lim nu_n = \lim n \times \lim u_n$		
$\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$		
Cauchy dans l'exercice 7	O_L	O_M
Cauchy dans l'exercice 8	O_L	O_M
Semi-encadrement (ex. 7, ex. 6)		
Inégalités strictes après limite		
$u_n < 1 \Rightarrow u_n^n \to 0$		
Confusion suites ext^{s} réciproques		
Télescopages		O_M
Erreurs ds déf. suites extraites		
Logique (exercice 6)		
Confusion suites séries exercice 6		
" " " 7		
Erreurs formelles ds l'exercice 8		
Confusion nu_n et u_n (ex. 7)	O_L	O_M
$0 < \cos x < 1$		O_M
$-1 < \cos x < 1$		

$u_n \simeq \frac{1}{n}$ (ex. 7)		O_M
$u_n = \frac{1}{n}$ (ex. 7)	O_L	O_M
$u_n = \frac{1}{2}(u_{2n}+u_{2n+1})$ ou encadrement (ex. 8)		O_M
$N = 2n, u_N$ converge (8)^{exo}		
cas part. pour θ ds ex. 6	C_L	C_M
5.DYN (monotonie erronée)	O_L	O_M
5.MON (monotonie erronée)		O_M
6.MON (monotonie erronée)	O_L	O_M
8LOC (discours)		
8.UNI (discours)		O_M

même temps que sa forme simple.

Les erreurs dûes au tronquage d'une partie des hypothèses nécessaires à l'application des théorèmes algébriques disparaissent en maîtrise à l'exercice 6 où le produit concerne la suite $(\cos n\theta)$ et la suite $\frac{1}{n}$ et à l'exercice 7 pour ce qui est d'appliquer la procédure scalaire $\lim(n\, u_n) = n \lim u_n$. Par contre on trouve encore en maîtrise la procédure $\lim(n\, u_n) = \lim n \cdot \lim u_n$ et $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$ à l'exercice 7. On peut estimer que le degré de complexité de l'exercice 7 est un peu plus grand que celui de l'exercice 6 dans la mesure où les suites sont générales alors que la suite $(\cos n\theta)$ est numérique. On retrouve ainsi le fait qu'une erreur dont une forme "simple" a disparu à un certain niveau peut subsister sous une forme plus complexe. Cela suggère que seul un travail en profondeur (non quantitatif) peut faire disparaître une erreur quelle qu'en soit la forme en en "extirpant" l'origine: prise de conscience du caractère variable de n, prise de conscience du présuppposé d'existence des limites dans les théorèmes algébriques.

Des erreurs dans l'utilisation des théorèmes d'encadrement subsistent aussi en maîtrise, alors que les télescopages, et les transformations du théorème de Cauchy ont disparu; de même les modèles primitifs disparaissent des copies de maîtrise ainsi que les modèles dynamiques monotones alors que les modèles préstatiques qui correspondent à un "tronquage" de la définition subsistent. Il semble donc que les erreurs qui relèvent d'une transformation d'un théorème soient moins tenaces que celles qui ont pour origine un tronquage de ce théorème; il est possible que le "tronquage" témoigne d'un manque de compréhension de certaines hypothèses, alors que la transformation des hypothèses peut relever d'un manque de connaissance, d'un manque de temps de travail.

Les erreurs d'étourderie ne disparaissent pas en maîtrise sauf la confusion entre (u_n) et (nu_n) dans l'exercice 7. Par contre les erreurs dues à des lacunes antérieures disparaissent sauf les inégalités $-1 < \cos n\theta < 1$ (le contraire serait fort inquiétant). De même les erreurs associées aux représentations monotones disparaissent en maîtrise (et souvent en licence), tout comme ces représentations,

alors que les erreurs que nous avons associées à des images dynamiques subsistent. Cela soulève une nouvelle question sur la persistance du modèle dynamique en maîtrise. On peut se demander si ce modèle dont nous avons vérifié le caractère assez peu discriminant quant aux procédures correctes n'est pas le témoignage, lorsqu'il subsiste en maîtrise, d'une appropriation assez "pauvre" de la notion ce qui ne serait bien entendu pas du tout vrai dans les niveaux antérieurs. Les analyses par niveau dont nous avons déjà rendu compte renforcent cette hypothèse.

Quant aux erreurs qui correspondent à l'essai d'expliciter u_n avec une égalité ou une inégalité elles disparaissent dès la licence à l'exercice 7 mais pas à l'exercice 8 ni à l'exercice 6. On peut, là encore, estimer que la suite (u_n) de l'exercice 8 est encore plus générale que celle de l'exercice 7 et donc que de nouveau la complexité joue pour retarder l'élimination de l'erreur. Cette explication ne convient pas pour l'exercice 6.

En conclusion, on constate que les erreurs de chaque type sont d'autant plus tenaces qu'elles sont commises sur un exercice plus général ou plus complexe, qu'elles soient ou non spécifiques de la notion de convergence des suites numériques. Nous ne sommes pas en mesure de faire le même travail par modèles, nous pouvons rappeler à ce sujet les constats du chapitre précédent, à savoir que le modèle statique est très peu associé à des procédures erronées, suivi des modèles mixtes, dynamique et préstatique.

8.3 Où l'on rêve à la correction des erreurs.

Maintenant que nous avons dégagé quelques grandes classes d'erreurs, nous devons nous poser le problème de leur "correction", même si nous n'avons encore tenté aucune expérience nous permettant de dépasser le stade des simples hypothèses. Nous avons vu que les origines des différentes erreurs ne sont pas simples et qu'en tout cas, plus la représentation exprimée de la convergence des suites ressemble avec des mots à la définition mathématique, meilleures sont les procédures.
Il est donc tentant de proposer un travail spécifique, explicite, sur ces représentations exprimées et dessinées, quelque temps après le cours, pour faire prendre conscience aux étudiants de leurs images mentales, en essayant de rectifier de manière métamathématiques, par une réflexion sur ces images mentales et ces dessins, les représentations erronées (primitives essentiellement). Il est même raisonnable de proposer qu'un tel travail ait lieu en groupes pour faire jouer les conflits socio-cognitifs qui peuvent apparaître. Il est clair qu'une telle réflexion sera d'autant plus riche que les étudiants auront à leur disposition des exemples (et des dessins de ces exemples) variés et mobilisables. Autrement dit ce travail ne doit pas intervenir tout de suite après le cours mais après une ou deux semaines d'exercices, avant que le sujet des suites numériques ne soit abandonné. Ce travail original peut s'intégrer dans d'autres réflexions de type métamathématique que l'on s'interdit en général dans l'enseignement des mathématiques - à part les références aux analogies, justifiées par le caractère quantitatif de l'enseignement. Tout se passe souvent comme si, en franchissant la porte de la salle de "math", beaucoup d'étudiants oubliaient leurs aptitudes générales (sens critique, déduction ordinaire, etc...) pour s'apprêter à ne faire fonctionner que leurs connaissances strictement mathématiques. On s'aperçoit souvent par exemple que se demander "ce qu'on a à sa disposition" pour montrer qu'une suite est convergente dans le but d'essayer plusieurs stratégies est une question méprisée par les étudiants qui considèrent

peut-être qu'il n'est pas "noble" d'avouer qu'on n'a pas l'intuition du résultat et qu'on n'a aucune idée de la méthode à employer. Cela étant, ces propositions n'auront strictement aucune portée en dehors d'une pratique effective sur la convergence des suites. La question fondamentale qui se pose à ce sujet nous semble être la suivante : suffit-il d'agir quantitativement, en multipliant les tâches possibles pour que les étudiants apprennent "à force" que c'est bien n qui tend vers l'infini quand on évoque la convergence de (u_n), qu'en analyse on ne peut pas avoir recours aux mêmes techniques algorithmiques simples qu'en algèbre et qu'ils retiennent exactement leurs théorèmes ? Ou bien est-il nécessaire de construire intentionnellement des situations-problèmes (pas forcément très nombreuses) dont la solution passe inévitablement par le rejet de la part de l'étudiant de sa conception fausse de la variable lorsqu'on évoque la convergence de (u_n) (le temps par exemple), de son habitude à recourir à tel théorème algébrique en le tronquant etc... justifiant d'ailleurs les recherches menées ici pour détecter les difficultés spécifiques de la notion. Il est possible que dans la quantité des tâches sur les suites proposées aux étudiants dans les classes préparatoires, certaines jouent le rôle précédent - mais ce n'est pas certain ; de plus, comme en DEUG on a beaucoup moins le temps de faire des exercices et que les étudiants travaillent moins chez eux toute solution non quantitative est à retenir. Dit autrement, on peut se demander si toutes les tâches "possibles" sont équivalentes dans la construction des connaissances . L'enseignant est pris dans une contradiction que nous avons déjà évoquée - plus les tâches sont élémentaires, plus il y a de transposition didactique dans le cours, plus les étudiants peuvent être actifs. Si au contraire on n'impose aucune méthode, on mélange deux ou plusieurs notions pour faire réorganiser les connaissances, on a de grandes chances que la majorité des étudiants "sèchent" complètement. Cela suggère aussi, non seulement de tester des exercices bien choisis en fonction des difficultés que nous avons soulignées mais encore de renverser l'ordre traditionnel "cours, exercices sur le cours et on recommence" pour échapper à certaines contradictions inhérentes à la transposition didactique qui est liée à cet ordre.

Par exemple, on peut concevoir que des exercices sur les suites précèdent le cours correspondant, en même temps que des exercices sur les fonctions de manière à ce que les suites apparaissent comme des fonctions et que "n" apparaisse mieux comme la variable et que le cours réponde à des questions nées de la pratique et non l'inverse, un peu comme en mathématiques. On peut aussi, dans un autre ordre d'idées, concevoir des modifications du cours - présenté en fonction de l'utilisation de la notion ou beaucoup plus bref (pour réduire la transposition didactique) en utilisant les notions de base de filtre tout de suite ou de points d'accumulation (à cause du modèle statique) etc...

Il y a donc là matière à des recherches ultérieures.

On peut toutefois remarquer que le problème de la correction des erreurs est toujours un problème difficile - même dans la vie courante. Une attitude erronée, pour être abandonnée, doit être déstabilisée puis modifiée, par exemple grâce au fait que son auteur prend conscience non seulement de son caractère néfaste mais encore entrevoit un remplacement (cf. Adler[1]). Si une représentation erronée est moins "ancrée" dans la tête d'un étudiant que tel ou tel comportement, il est cependant plausible que pour s'en débarasser il faille la déstabiliser et en envisager immédiatement une autre - de même pour le recours à certaines procédures. Pourrait-on concevoir alors un enseignement n'engendrant aucune erreur pour éviter ces corrections difficiles ? L'expérience de l'histoire des mathématiques semble bien montrer que certains progrès décisifs n'ont pu être faits qu'après que des obstacles sérieux aient arrêté tous les savants ; et il n'est pas déraisonnable de se demander dans quelle mesure dans les apprentissages individuels et à des moments différents il n'est pas aussi nécessaire que des erreurs soient commises pour être franchies ensuite. En tout cas, nos étudiants font des erreurs, nous devons les corriger et jusqu'à présent un certain nombre de ces corrections restent inefficaces - c'est pour répondre à ce problème que nous proposons les hypothèses de travail ci-dessus. Nous ne sommes encore une fois pas en mesure de classer ces hypothèses les unes par rapport aux autres et envisageons plutôt de les essayer toutes.

---

(1) Le sens de la vie (A. Adler) PBP.

8.4 Retour sur notre axiomatique de l'acquisition des connaissances.

Tout se passe comme si les connaissances s'acquéraient par "palier" (DEUG, 3 premiers niveaux de groupe 3, maîtrise), à un palier correspond une certaine stabilité, une sorte de conviction qui n'est pas ébranlée ni par un contre-exemple ni par la correction d'erreurs ce qui explique la cohérence des copies correspondantes ; seul un nouvel équilibre différent du précédent peut faire évoluer cette conviction ; de plus tout ce qui rappelle les connaissances antérieures (sûres) joue un rôle d'attracteur. En particulier certaines formes de théorème ayant été acquises continuent à fonctionner - même à contre sens - par habitude, dans des domaines nouveaux (recours à un algorithme, théorèmes algébriques). Pour pouvoir avancer, il est ainsi nécessaire, pensons-nous, de se convaincre à nouveau, et à partir de connaissances sûres, des nouvelles notions. Pour abandonner l'application mécanique et erronée des théorèmes algébriques sur les suites qui consiste à négliger le présupposé d'existence des limites, il faut rencontrer un cas où les connaissances déjà acquises permettent de mettre en contradiction flagrante ce procédé et les conclusions qu'on peut attendre. Pour abandonner un modèle primitif, il faut être convaincu de l'existence de suites convergentes non monotones. Il y a là une dialectique entre les connaissances déjà acquises (réellement), leur auto-accroissement grâce à des fonctionnements faciles et la création de nouvelles connaissances ou de nouveaux modèles. Il ne peut y avoir construction de connaissances sans connaissances préalables solides, permettant les réorganisations qui permettront d'englober les nouvelles connaissances. Dans ce schéma les exercices d'application immédiate du cours favorisent la mémorisation des propositions et des techniques (l'assimilation dirait Piaget), mais ils ne suffisent pas, ils doivent être doublés d'exercices plus difficiles où justement s'élaborent les arrangements entre ce qui est connu et ce qui doit être atteint (l'accomodation dirait Piaget). Nous avons le sentiment que dans l'enseignement supérieur de DEUG à l'université, la tendance est à l'oubli de la deuxième étape rendue de fait très difficile par

l'étroitesse des connaissances antérieures des étudiants, ce qui rend les acquisitions encore plus difficiles et ainsi de suite...

Nous pensons qu'une solution pourrait être trouvée dans une déshomogénéisation des cours dont nous avons déjà parlé.

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, l'enseignement peut très bien engendrer l'apprentissage mais aussi l'empêcher ! En tout cas, il apparaît que la relation n'a rien d'automatique et toutes les recherches ultérieures devront, encore une fois, approfondir ces rapports. Cela étant, l'ensemble de nos résultats nous apparaît tout à fait compatible avec cette axiomatique constructiviste adoptée dès le début de ce travail, axiomatique, qui par ailleurs nous a permis de dégager des résultats nouveaux. Nous nous sentons autorisée d'en conclure que ce fut, pour ce travail, une bonne axiomatique.

CONCLUSION

Nous conclurons ce travail en revenant d'abord sur le déroulement de l'acquisition de la notion que nous avons pu mettre en évidence.

En premier lieu, nous avons constaté, au cours de cette étude, que l'acquisition de la notion, y compris dans le groupe des Math. Sup., Math. Spé., licence, maîtrise, n'est pas "terminée" dès la première année -même si les performances sont déjà très bonnes en Math. Sup. Plus précisément, si les représentations (du moins, les modèles exprimés) semblent se mettre en place assez rapidement, sans beaucoup évoluer dans le temps, les procédures, elles, évoluent pendant toutes ces années. En maîtrise, la grande majorité des étudiants usent des procédures les plus directes et/ou ne faisant pas appel à des théorèmes trop particuliers aux suites numériques. Ceci s'est vérifié dans l'exercice 6 où, en maîtrise, on majore plus volontiers $|u_n|$ qu'on n'utilise un théorème de produit d'une suite convergente par une suite bornée, ou qu'on n'encadre u_n. Dans l'exercice 7,également en maîtrise, on applique plus souvent la définition en (ε,N) à la suite (nu_n) -quitte à changer de stratégie, et à encadrer u_n- que les théorèmes des équivalents ou du produit. Dans l'exercice 9c, c'est encore plus net, puisque tous les étudiants de maîtrise utilisent un raisonnement direct.

Cela étant, l'acquisition de la notion s'avère fort différente dans les deux premières années du supérieur suivant la filière suivie (classe préparatoire ou DEUG). Les causes de lenteur et de retard dans l'acquisition de la notion en DEUG peuvent être cherchées dans deux directions différentes, mais non exclusives l'une de l'autre: la différence des enseignements et de recrutement des deux filières et des causes spécifiques inhérentes à la notion même de convergence des suites . Pour ce qui est du premier facteur, nous avons vu que ce n'est pas le contenu strict des cours sur les suites qui est en cause; par contre, nous avons rappelé, outre les différences de recrutement, les diverses formes d'enseignement de ces deux filières qui se distinguent par une organisation du travail très différente. En particulier, la quantité de travail fournie par les étudiants et souvent la diversité des tâches qui leur sont proposées ne sont pas comparables.

De plus, le "progrès" entre les deux niveaux de Math. Sup. C, constaté pour toutes les tâches, opposé à l'évolution positive beaucoup plus faible enregistrée dans le groupe DEUG, nous paraît confirmer l'influence des facteurs "organisation et quantité de travail" sur l'acquisition de cette notion, dans la mesure où les recrutements des Math. Sup. C et des DEUG ne sont pas très éloignés. Par ailleurs, le fait que la tâche d'encadrement de u_n (ou de majoration de $|u_n|$) par des termes généraux de suites convenables (exercice 6) soit d'une part la mieux réussie (dans tous les groupes), d'autre part, une des plus fréquemment proposée dans l'enseignement, et, enfin, celle qui occasionne le plus de progrès dans le groupe DEUG, souligne le rôle positif du facteur "fréquence" dans la résolution d'une tâche.

Cependant, nous ne sommes pas en mesure de déterminer le rôle respectif de ces facteurs sur les différences enregistrées en ce qui concerne l'acquisition de la notion.

Nous nous sommes donc attachée à préciser aussi les facteurs de difficulté inhérentes à la notion elle-même que l'on peut dégager des productions des étudiants.

Nous avons mis en évidence deux types de difficultés: les premières concernent la mise en place de représentations associées à de "bonnes" procédures, les autres sont à l'orgine d' erreurs qu'on ne peut pas attribuer, de manière évidente, à des représentations erronées.

Nous avons, en effet, montré l'existence de régularités saisissantes entre la production de procédures correctes à presque tous les exercices et l'expression des modèles statique et mixte, et entre la production de procédures erronées à presque tous les exercices et l'expression des modèles primitif et "tend vers". Nous pouvons donc confirmer que les modèles exprimés que nous avons distingué sont des indices pertinents pour caractériser les conduites des étudiants; en conséquence, nous pouvons supposer que certaines difficultés dans l'acquisition de la notion sont liées précisément à l'élaboration de ces représentations mentales "correctes". En particulier, dans la mesure où c'est le modèle statique qui s'avère le plus associé le plus associé à des procédures correctes, non seulement dans des exercices mobilisant la définition en (ε,N) , mais à des degrés divers dans tous les exercices étudiés, nous

pouvons penser qu'une difficulté réside dans l'élaboration d'une telle représentation statique.

Il peut ne pas être facile de mettre en place une image mentale correspondant à la traduction de la définition en (ε,N) . De plus, la différence entre les procédures des étudiants ayant exprimé un modèle statique ou un modèle préstatique -y compris au sein d'un modèle mixte- souligne qu'une des difficultés dans l'élaboration d'une représentation statique porte sur le fait que, aussi petit que soit l'intervalle autour de 1 ($\forall \varepsilon > 0$ ...), tous les u_n , sauf un nombre fini, sont dedans. C'est bien la notion de point d'accumulation qui est en cause ici avec la "contradiction" entre le caractère infiniment petit de l'intervalle et le cardinal infini de la collection des u_n qui sont dedans. Or, cette difficulté est peut-être accentuée dans le cas des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par le caractère discret de la variable et le filtre "au voisinage de l'infini" qui lui correspond.

Par ailleurs, nous avons constaté que l'image cinématique usuelle de la notion, une des plus anciennes (cf. d'Alembert) et des plus vulgarisées (cf. Larousse), n'est pas tellement "efficace": parmi les productions des étudiants ayant exprimé le modèle dynamique, il y a souvent presque autant de réponses erronées ou ambigües que de réponses correctes; et cela n'est pas seulement vrai dans les tâches mobilisant la définition en (ε,N) de la convergence,comme on a pu le voir dans l'exercice 5 où était mobilisée une représentation de la convergence.

Cette représentation dynamique n'est donc sans doute pas suffisante.

Cependant, si nous pouvons affirmer l'association des représentations exprimées correctes (resp. erronées), et des procédures correctes (resp. erronées), nous ne pouvons pas répondre aux questions importantes qui découlent de ce premier résultat, et notamment celles-ci:

Quel est le processus d'élaboration des modèles ? Y a-t-il des intermédiaires indispensables (modèle dynamique, par exemple) ? Quels sont les rôles respectifs dans cette élaboration des différentes activités des étudiants . Et, est-ce la même chose pour tous les étudiants ?

Abordons donc le deuxième type de difficultés que nous avons dégagé de la partie de notre étude consacrée aux erreurs (dans les procédures en particulier). Nous avons relevé un certain nombre de types d'erreurs spécifiques de la convergence sinon des seules suites numériques, en tout cas des suites et des fonctions numériques: ainsi la non-prise en compte du caractère variable de n dans la convergence et l'oubli des présupposés d'existence de la limite dans les théorèmes algébriques. D'autres erreurs semblent provenir du caractère non algorithmique des procédures en analyse. Ainsi, peut-on expliquer le recours à des théorèmes algébriques et/ou les tentatives d'expliciter u_n avant de résoudre un problème sur u_n. Néanmoins, nous ne saurions, là encore, répondre aux interrogations conséquences de ces résultats: certaines de ces erreurs doivent-elles être commises par certains étudiants pour être rectifiées en entrainant alors une acquisition ? Comment faire disparaître des erreurs lorsqu'une simple correction ne suffit pas ?

Toutes ces questions, issues de nos premiers résultats, suggèrent la mise en place de nouvelles expériences très différentes de nos premières observations.

En effet, nous nous sommes restreinte à observer les effets de l'enseignement sur une certaine population estudiantine. Il reste à étudier, pour aller plus loin, ce qui, dans nos résultats, est dû spécifiquement à l'enseignement, et donc peut éventuellement être modifié.

On peut, par exemple, se poser des questions sur la transposition didactique que nous avons dégagée: l'isolement de la notion de convergence de suites numériques ne peut-il pas en effet renforcer la difficulté spécifique des suites numériques par rapport aux fonctions, dans la mesure où, dans les cours, on ne peut démontrer que le fondement de la convergence au voisinage de l'infini d'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est le même que celui de la convergence d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (par l'intermédiaire des notions topologiques et/ou des bases de filtre) ? La difficulté intrinsèque de ces dernières notions plus générales et l'impossibilité de les introduire avant d'avoir suffisamment d'exemples pour justifier ces nouveaux objets et/ou concepts mettent bien en évidence une des contradictions inhérentes à l'enseignement traduite par la transposition didactique. En effet, l'état des connaissances permet

à l'enseignant d'avoir une vision unifiée, globale du concept dont il présente un cas particulier, mais d'autre part, il faut bien que les enseignés commencent par faire fonctionner effectivement des objets et/ou concepts, et cela nécessite de ne travailler que sur le cas particulier.
Il serait peut-être intéressant de tenter de changer les règles de cette transposition didactique (inévitable).
Nous avons aussi évoqué nos interrogations sur l'élaboration des modèles et la correction des erreurs. Pour toutes les recherches ultérieures que cela suppose, il faut recueillir des données différentes des nôtres, diachroniques et prises sur le vif (en situation de classe par exemple), permettant de préciser les rapports individuels entre l'enseignement reçu par les étudiants et l'acquisition de la notion qui en résulte.

Cependant, nos données quantitatives ont eu l'intérêt de nous permettre de dégager, dans un premier temps, des facteurs indépendants des personnalités des enseignants comme les diverses représentations, leurs liens avec les procédures et les traits généraux des erreurs. De plus, le grand nombre des copies sur lequel nous avons travaillé nous a permis d'atteindre un corpus "stable" (corpus N): les résultats correspondants étaient très proches de ceux d'un corpus double (corpus S). Cela nous a aussi permis de renforcer nos conclusions obtenues par la statistique descriptive classique, en utilisant différentes analyses plus élaborées et en retrouvant exactement les mêmes traits dominants. La lourdeur d'une telle méthodologie se justifie par le caractère de défrichement de ce travail, et par la nécessité d'obtenir des résultats assurés pour pouvoir effectuer des analyses plus fines ultérieures.

En conclusion,ce travail nous a permis de vérifier l'existence des représentations mentales en faisant apparaître le rapport étroit entre leur expression écrite et les procédures des étudiants.Nous avons pu dégager des difficultés spécifiques,si ce n'est de la notion,en tout cas du champ conceptuel au quel elle appartient,en

suggérant le lien de certaines de ces difficultés et de la transposition didactique mise en évidence dans ce travail.

Nous avons ainsi mis en lumière une possibilité d'approfondir les origines des conduites des enseignés.Cependant,et c'est peut-être là le dernier résultat de ce travail,il est apparu clairement,qu'aussi bien pour continuer notre exploration,que pour proposer des modifications dans l'enseignement,il est nécessaire de recueillir des observations supplémentaires et de nature différente,concernant précisément les rapports entre cet enseignement et l'acquisition individuelle des connaissances qui en résulte.

B I B L I O G R A P H I E S O M M A I R E

BAUDELOT, BENOBIEL, CUKROWITZ, ESTABLET [1] Les étudiants, l'emploi, la crise., Petite collection Maspero (1982).

BOSCHET,F. [1] Thèse de troisième cycle (1982).

BROUSSEAU,G. [1] Problèmes de l'enseignement des décimaux, Recherches en didactique des Mathématiques n° 1.1. (1980).

BOUR,M.C. [1] Papier IREM n° 4 (en Annexe ③) .

CHEVALLARD,Y. [1] Communications à l'Ecole d'Eté de didactique (1980). Non publié.

CORNU,B. [1] Interférence des modèles spontanés dans l'apprentissage de la notion de limite, Séminaire de Recherche pédagogique (Grenoble), Février 1980, n° 8.

[2] Grandes lignes de l'évolution historique de la notion limite (preprint).

CUKROWITZ,H. [1] Université et Emploi, P.U.L. (1980).

DOISE et MUGNY [1] Le développement social de l'intelligence, Inter-éditions (1981).

GRAS,R. [1] Thèse d'Etat.

MAC ALEESE,J. [1] Thèse de troisième cycle (1982).

OVAERT et VERLEY [1] Analyse, Vol. 1 "Léonard épistémon", A paraître, Cedic Nathan.

NOT,L. [1] Les pédagogies de la connaissance, Privat (1979).

PERRET-CLERMONT,A.N. [1] La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale (1979), P. Lang.

SALINS,M.H. [1] "Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire", Mémoire de DEA (1976), Bordeaux.

VERGNAUD,G. [1] L'enfant, la mathématique et la réalité (1980), P. Lang.

TABLE DES TABLEAUX

		Page
CHAPITRE 1.	Répartition des bacheliers inscrits dans l'Enseignement Supérieur	32
	. Répartition des étudiants en Science selon le cycle et le sexe	34
	. Répartition des étudiants en Science selon la catégorie socio-professionnelle des parents	35
	. Répartition des sortants de l'Université (1976)	36
	. Répartition des diplômes délivrés en Sciences	37
CHAPITRE 2.		
II_1	. Répartition de nos effectifs par conditions de passage	68
II_2	. Répartition des effectifs S par niveau et localisation géographique	71
	. Répartition des effectifs S par série de bac et niveaux	72
	. Répartition des effectifs S par catégorie socio-professionnelle des parents	73
	. Répartition des effectifs S par catégorie socio-professionnelle des parents par niveau	74
	. Répartition de nos effectifs par âge du bac	75
CHAPITRE 3.		
	. Genres des représentations graphiques (Figures 1,2,3,4)	95-96
	. Genres du dessin par groupes du niveau "DEUG tout de suite après le cours"	97
	. Genres du dessin par classes de Sup.	97
	. Genres du dessin par niveaux	98
III_1	. Répartition des modèles dessinés par niveaux (copies S)	100
	. Répartition des modèles primitifs en"barrière, stationnaire, monotone"	104
	. Répartition des copies S dynamiques par genre du dynamique	108
III_2	. Répartition des genres du modèle mixte (copies S) par niveaux	119
L_N	. Commentaires sur la limite par niveaux (corpus M_1)	128
L_M	. Commentaires sur la limite par modèles exprimés (corpus M_1)	129
D_N	. Expression de la divergence par niveaux (corpus M_1)	132
D_M	. Expression de la divergence par modèles exprimés (corpus M_1)	133
	. Répartition des modèles dessinés par modèles exprimés (copies S)	135

		Page
	. Répartition du genre du dessin par modèles dessinés (copies S)	137
	. Répartition des genresdu dessin par modèles exprimés (copies S)	138
III_3	. Répartition des modèles exprimés par niveau (corpus M_1)	143
III_4	. Répartition des modèles par classes (DEUG 1 premier niveau, Math. Spé.)	147
III_5	. Répartition des modèles par classes (Math. Sup.)	148
III_6	. Répartition des modèles par classes (Maîtrise)	149
(P,M III)	. Modèles x niveaux (courbe en bâtons)	152
III_7	. Répartition des modèles exprimés par niveau (corpus N)	151
SG_N	. Utilisation des suites géométriques dans les exemples par niveaux (corpus M_1)	158
F_N	. Répartition des fonctions utilisées dans les exemples par niveaux (corpus M_1)	160
E_N	. Exemples n et 1/n par niveaux (corpus N)	162

CHAPITRE 4.

	. Répartition des procédures à l'exercice 5 par variantes	177
IV_c	. Répartition des procédures à l'exercice 5 par classes	184
IV_o	. Liste des procédures à l'exercice 5 (sigle, définition)	189
IV_1	. Procédures x modèles exprimés (corpus N)	191
IV_2	. Procédures x modèles exprimés (tableau résumé)(corpus N)	192
(P,M,IV)	. Courbe en bâtons procédures x modèles exprimés (corpus N)	194
IV_3	. Modèles dessinés x procédures (Tableaux résumé et détaillé) (corpus N)	197
IV_4	. Exemples x procédures (Tableaux résumé, détaillé, pourcentages) (corpus N)	199
IV_5	. Procédures x niveaux (corpus N)	201
IV_6	. Procédures x niveaux (tableau résumé) (corpus N)	202
(P,N,IV)	. Courbe en bâtons procédures x niveaux (corpus N)	204
IV_7	. Performances x modèles	208

CHAPITRE 5. Première partie: l'exercice 7

V_o	. Liste des procédures à l'exercice 7 (sigle, définition)	215
V_1	. Répartition des procédures en "ε,N" par niveaux	223
V_2	. Répartition des procédures algébriques erronées par niveaux	227
V_3	. Répartition des procédures minoritaires par niveaux	230
	. Répartition des procédures par variantes	231
V_4	. Procédures x modèles exprimés	239
V_5	. Procédures x modèles exprimés (tableau résumé)	240
(P,M,V)	. Courbe en bâton procédures x modèles exprimés	243

		Page
V_6	. Répartition des procédures par niveaux	246
(P,N,V)	. Courbe en bâtons procédures x niveaux	247
V_7	. Exercice 5 x Exercice 7	251
	Deuxième partie: l'exercice 9c)	
	. Répartition des procédures à l'exercice 9c par variantes	269
V_8	. Répartition des procédures par niveaux	274
V_9	. Répartition des procédures par modèles exprimés	276

CHAPITRE 6.

VI_o	. Liste des procédures à l'exercice 6 (sigle, définition)	283
	. Répartition des procédures par variantes	288
VI_1	. Procédures à l'exercice 6 x niveaux (Tableau résumé) (corpus N)	293
VI_2	. Procédures x niveaux (corpus N)	294
VI_3	. Procédures x modèles exprimés (corpus N)	296
VI_4	. Procédures x modèles exprimés (tableau résumé) (corpus N)	297
VI_5	. Exercice 6 x Exercice 7	299
VI'_o	. Liste des procédures à l'exercice 8 (sigle, définition)	303
	. Répartition des procédures par variantes	308
VI_6	. Procédures x niveaux à l'exercice 8	314
VI_7	. Procédures x modèles exprimés	317
VI_8	. Procédures x modèles exprimés (tableau résumé)	318
VI_9	. Exercice 8 x Exercice 7	320
VI''_o	. Liste des procédures à l'exercice 10 (sigle, définition)	324
	. Répartition des procédures par variantes	327
VI_{10}	. Procédures x niveaux à l'exercice 10 (corpus N)	330
VI_{11}	. Procédures x modèles exprimés à l'exercice 10 (corpus 10)	333
VI_{12}	. Procédures x modèles exprimés à l'exercice 10 (tableau résumé)	334
VI_{13}	. Exercice 8 x Exercice 10	336

CHAPITRE 7.

M_o	. Répartition des copies non abordées par modèles exprimés (corpus N)	343
N_o	. Répartition des copies non abordées par niveau (corpus N)	344
M_1	. Répartition des procédures correctes par modèles exprimés	347
TM_1	. Courbe en bâtons	348
	. Répartition des procédures correctes par genre du mixte (corpus N)	350
	. Répartition des procédures correctes par genre du dynamique (corpus N)	352
N_1	. répartition des procédures correctes par niveaux (corpus N)	356

Page

TN_1 . Courbe en bâtons 357
N_2 . Répartition des procédures ambigûes par niveaux (corpus N) 364
M_2 . Répartition des procédures ambigües par modèles exprimés (corpus N) 363
N_3 . Répartition des procédures erronées par niveaux (corpus N) 369
N_4 . Répartition des procédures erronées par niveaux (corpus N) 374
M_3 . Répartition des procédures erronées par modèles exprimés (corpus N) 368
M_4 . Répartition des procédures erronées par modèles exprimés (corpus N) 373
VII_1 . Nombre d'exercices réussis par modèles exprimés (corpus N) 378
VII_2 . Nombre d'exercices réussis par niveaux (corpus N) 379
VII_3 . Nombre d'exercices abordés par modèles exprimés (corpus N) 382
VII_4 . Nombre d'exercices abordés par niveaux (corpus N) 383
VII_5 . Nombre de démonstrations fausses par modèles exprimés (corpus N) 385
VII_6 . Nombre de démonstrations fausses par niveaux (corpus N) 386
G_7 . Chaînes d'implication de Gras 397

CHAPITRE 8.

$VIII_1$. Disparition des erreurs par niveaux 427

UNIVERSITE PARIS VII

THESE de DOCTORAT D'ETAT

SPECIALITE: DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

PRESENTEE PAR: Madame Aline ROBERT

SUJET de la THESE L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur. Divers articles de Mathématiques.

soutenue le 25juin 1982 devant la commission d'examen

DOCUMENTS ANNEXES

ANNEXES

Liste des annexes avec leur numéro.

① Texte du questionnaire V_1 et les 10 variantes (V_2 à V_{11})

② Mode d'emploi

③ Texte de M.C. BOUR, "Elaboration du concept de convergence de suites".

④ Relevé d'erreurs (1978-79).

⑤ Enquête auprès de collègues ayant enseigné, et en premier cycle de faculté, et en classes préparatoires (en mathématiques).

⑥ Le code (extraits).

⑦ Intervalle de confiance pour les pourcentages.

⑧ Grille des tâches sur les suites numériques proposée par F. BOSCHET

⑨ "Nuages de points".

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous?

2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune? Ensuite définir une suite divergente.

3) Donner 4 exemples de suites convergentes.

4) Donner 4 exemples de suites divergentes.

5) Vrai ou faux: toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante.

6) Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}\cos(n\theta)$, θ fixé, pour $n > 0$.

7) Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} nu_n = 1$$

est convergente.

8) Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel. Montrer que si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l, alors la suite (u_n) converge vers l.

9) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$, pour tout x réel.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur R^+ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{2}{3}$ et croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est la racine positive de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad .$$

10) Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite converge?

11) Soit f une application continue de $[0\ 1]$ dans $[0\ 1]$, dérivable et telle que $f'(x) > 0$ sur $[0\ 1]$. Etudier la suite définie par $u_0 \in]0\ 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n > 0$.

12) Vrai ou faux : une suite dont l'ensemble des valeurs est fini converge si et seulement si elle est stationnaire.

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite ayant une limite un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous?

2) Comment modifieriez- vous vos explications si l'élève était plus jeune ? Ensuite définir une suite n'ayant pas de limite.

3) Donner 4 exemples de suites ayant une limite.

4) Donner 4 exemples de suites n'ayant pas de limite.

5) Vrai ou faux : toute suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante.

6) Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}\cos(n\theta)$, θ fixé, pour $n > 0$.

7) Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$$

a une limite.

8) Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel. Montrer que si la suite (u_{2n}) et la suite (u_{2n+1}) tendent vers 1, alors la suite (u_n) tend vers 1.

9) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction réelle f_n par : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$, pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 1 et croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) a une limite qui est la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

10) Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite a une limite ?

11) Soit f une application continue de $[0\ 1]$ dans $[0\ 1]$, dérivable et telle que $f'(x)>0$ sur $[0\ 1]$. Etudier la suite définie par $u_0 \in]0\ 1[$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour $n>0$.

12) Vrai ou faux : une suite dont l'ensemble des valeurs est fini a une limite si et seulement si elle est stationnaire.

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous?

2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune?

Ensuite définir une suite divergente.

3) Donner 4 exemples de suites convergentes.

4) Donner 4 exemples de suites divergentes.

5) Vrai ou faux: toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante.

6) Etudier la suite (z_n) définie par $z_n = \frac{1}{n}\cos(n\theta)$, θ fixé, pour $n>0$.

7) Montrer qu'une suite (z_n) qui vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} n z_n = 1$$

est convergente.

8) Soit (z_n) une suite numérique et 1 un nombre réel. Montrer que si les suites (z_{2n}) et (z_{2n+1}) convergent vers 1, alors la suite (z_n) converge vers 1.

9) Pour tout entier $n > 0$, on définit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$, pour tout x réel.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur R^+ et montrer que f_n a une unique racine positive z_n.

b) Montrer que la suite (z_n) est majorée par 1 et croissante.

c) Montrer que la suite (z_n) converge et que sa limite est la racine positive de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0$$

10) Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite converge?

11) Soit f une application continue de $[0\ 1]$ dans $[0\ 1]$, dérivable et telle que $f'(x) > 0$ sur $[0\ 1]$. Etudier la suite définie par $z_0 \in]0\,1[$ et $z_{n+1} = f(z_n)$ pour $n>0$.

1) Que vous évoquel'expression "suite convergente" ? Quelle représentation en avez-vous? Que vous évoque l'expression "suite divergente" ?

2) Donner desexemples de suites convergentes.

3) Donner desexemples de suites divergentes.

4) Vrai ou faux : toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante.

5) Etudier la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}\cos(n\theta)$, θ fixé.

6) Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$$

est convergente.

7) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et l un nombre réel. Montrer que si la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et la siute $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l .

8) Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie, pour tout réel, par: $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n .

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante majorée.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et que sa limite est la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

9) Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite converge?

10) Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une aplication dérivable telle que $f'(x) < 0$ sur $[0\ 1]$ .Etudier la suite définie par $u_0 \in]0\ 1[$ et pour $n \geq 1$, $f(u_n) = u_{n+1}$.

11) Vrai ou faux: une suite dont l'ensemble des valeurs est borné converge si et seulement si elle est stationnaire.

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous?

2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune?

Ensuite définir une suite divergente.

3) Donner 4 exemples de suites convergentes.

4) Donner 4 exemples de suites divergentes.

5) Vrai ou faux: toute suite à termes strictement positifs qui converge vers 0 est décroissante.

6) Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}\cos(n\theta)$, θ fixé, pour $n \geq 1$.

7) Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} nu_n = 1$$

a une limite nulle.

8) Soit (u_n) une suite numérique et 1 un nombre réel. Montrer que si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 1, alors la suite (u_n) converge vers 1.

9) Pour tout entier ≥ 1, on définit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$, pour tout x réel.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur R^+ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{2}{3}$ et croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est la racine positive de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad .$$

10) Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite converge?

11) Soit f une application continue de $[0\ 1]$ dans $[0\ 1]$, dérivable et telle que $f'(x) < 0$ sur $[0\ 1]$. Etudier la suite définie par $u_0 \in]0\ 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 1$

12) Vrai ou faux : une suite dont l'ensemble des valeurs est fini converge si et seulement si elle est stationnaire.

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous?

2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune?

Ensuite définir une suite divergente.

3) Donner 4 exemples de suites convergentes.

4) Donner 4 exemples de suites divergentes.

5) Vrai ou faux: toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante.

6) Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}\cos(n\theta)$, θ fixé, pour $n \geq 1$.

7) Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} nu_n = 1$$

tend vers 0.

8) Soit (u_n) une suite numérique et 1 un nombre réel. Montrer que si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 1, alors la suite (u_n) converge vers 1.

9) Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$, pour tout x réel.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur R^+ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{2}{3}$ et croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est la racine positive de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad .$$

10) Soit f une application de $[0\ 1]$ dans $[0\ 1]$, dérivable et telle que $f'(x) < 0$ sur $[0\ 1]$. Etudier la suite définie par $u_0 \in]0\ 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 1$.

11) Vrai ou faux : une suite dont l'ensemble des valeurs est fini converge si et seulement si elle est stationnaire.

1) Que vous évoque l'expression "suite convergente" ? Quelle représentation en avez-vous? Que vous évoque l'expression "suite divergente" ?

2) Donner des exemples de suites convergentes.

3) Donner des exemples de suites divergentes.

4) Vrai ou faux: toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante.

5) Etudier la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}\cos(nA)$ A fixé.

6) Que peut-on dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de terme général nu_n a pour limite 1 ?

7) Soit f une application de $[0\ 1]$ dans $[0\ 1]$, dérivable et telle que $f'(x) \neq 0$ sur $[0\ 1]$. Etudier la suite définie par $u_0 \in]0\ 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n > 0$.

8) Vrai ou faux : une suite dont l'ensemble des valeurs est fini converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

9) Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite converge?

10) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numerique et l un nombre réel. Montrer que si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

11) Pour tout entier $n > 0$, on définit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$, pour tout x réel.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur R^+ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ est majorée par 1 et croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ converge et que sa limite est la racine positive de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad .$$

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous?

2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune De votre classe? Définir une suite divergente.

3) Donner 6 exemples de suites convergentes.

4) Donner 6 exemples de suites divergentes.

5) Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}\cos(n\bar{n})$, $\bar{n}$ fixé. pour $n \geq 1$.

6) Soit f une application de $[0\ 1]$ dans $[0\ 1]$, dérivable et telle que $f'(x) > 0$ sur $[0\ 1]$. Etudier la suite définie par $u_0 \in]0\ 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 1$.

7) Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie pour tout x de R par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1 .$$

a) Montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et que sa limite est la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

8) Vrai ou faux : une suite dont l'ensemble des valeurs est fini converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

9) Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite converge?

10) Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} nu_n = 1$$

est convergente.

11) Vrai ou faux: toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante.

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous?

2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune

Ensuite définir une suite divergente.

3) Donner 4 exemples de suites convergentes.

4) Donner 4 exemples de suites divergentes.

5) Pour tout entier $n > 0$,on définit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$,pour tout x réel.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur R^+ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 1 et croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est la racine positive de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad .$$

6) Que peut-on dire d'une suite à termes strictement positifs qui converge vers 0 ?

7) Vrai ou faux : une suite dont l'ensemble des valeurs est fini converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

8) Soit f une application continue de $[0\ 1]$ dans $[0\ 1]$,dérivable et telle que $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0\ 1]$ .Etudier la suite définie par $u_0 \in]0[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n > 0$.

9) Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel.Montrer que si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l,alors la suite (u_n) converge vers l.

10) Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite,la suite converge?

11) Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} nu_n = 1$$

est convergente.

1) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous?

2) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune

Ensuite Définir une suite divergente.

3) Donner 4 exemples de suites convergentes.

4) Donner 4 exemples de suites divergentes.

5) Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$$

est convergente.

6) Soit f une application continue de [0 1] dans [0 1], dérivable et telle que $f'(x) > 0$ sur [0 1]. Etudier la suite définie par $u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

7) Que peut-on dire d'une suite à termes positifs qui tend vers 0 ?

8) Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel. Montrer que si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l, alors la suite (u_n) converge vers l.

9) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n réelle par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$, pour tout x réel.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur R^+ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 1 et croissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et que sa limite est la racine positive de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad .$$

10) Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite, la suite converge?

11) Vrai ou faux : une suite dont l'ensemble des valeurs est fini converge si et seulement si elle est stationnaire.

1) Pour tout entier $n > 0$,on definit la fonction réelle f_n par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$,pour tout x réel.

a) Etudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que f_n a une unique racine positive u_n.

b) Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{2}{3}$ et croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est la racine positive de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad .$$

2) Trouver une suite numérique (u_n) à termes positifs qui converge vers 0 et qui n'est pas décroissante.

3) Montrer qu'une suite (u_n) qui vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} n u_n = 1$$

est convergente.

4) Soit f une application continue de $[0\ 1]$ dans $[0\ 1]$,derivable et telle que $f'(x) > 0$ sur $[0\ 1]$ .Etudier la suite définie par $u_0 \in]0 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n > 0$.

5)) Vrai ou faux : une suite dont l'ensemble des valeurs est fini converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

6) Soit (u_n) une suite numérique et l un nombre réel.Montrer que si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l,alors la suite (u_n) converge vers l.

7) Est-ce que si 2 suites extraites d'une même suite numérique ont la même limite,la suite converge?

8) Si vous aviez à expliquer ce que c'est qu'une suite convergente à un élève de 14-15 ans,que diriez-vous et quels dessins feriez-vous?

9) Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève était plus jeune?

Ensuite définir une suite divergente.

10) Donner 4 exemples de suites convergentes.

11) Donner 4 exemples de suites divergentes.

Annexe ②

Mode d'emploi

A faire faire aux élèves en les prévenant qu'ils ne récupèreront pas leurs copies(**)! Distribuer chaque variante à un élève sur deux; il faut prévoir 2 h. ou 2,5 h. pour des 1ᵒᵒ années.

Sur chaque copie, demander d'indiquer: la Variante traitée.

- fille / garçon (*)
- année de naissance
- année et série du bac., éventuellement s'il y a lieu cursus universitaire.
- si possible profession des parents
- si possible 2 dernières notes obtenues
- si possible indiquer par un + (resp. -) si vous estimez l'élève au-dessus de la moyenne (resp. au dessous) .

Pour la classe indiquer: • la date du test

- l'avancement du cours sur les suites: milieu, fin, ... mois après (*)
- devoir fait en classe / à la maison (*)

(temps imparti)

- devoir noté / non noté (*)
- devoir anonyme / avec le nom (*)
- certains exos ont-ils été faits en classe, lesquels ?
- remarques et critiques

- si possible, titres des cours d'analyse précédant le cours sur les suites.

(*) rayer les mentions inutiles

(**) me renvoyer le paquet de copies (mêmes corrigées).

M.C. BOUR

ELABORATION DU CONCEPT DE CONVERGENCE DE SUITES

(Premiers éléments)

Il est difficile d'isoler le concept de suites et la notion de suite convergente dans l'histoire des mathématiques. Dès l'Antiquité grecque, on connaît les suites arithmétiques et géométriques en particulier la suite de Fibonacci mentionnée au 13è s. etc... Mais leur utilisation reste liée à l'approximation et au calcul numérique, science pratique, et elles tardent à acquérir un statut (Extraction de racine carrée, résolution approchée d'équations,...). La question de la convergence des suites ne sera étudiée au 18è s. et début 19è s., qu'à travers celle de la convergence des séries. A la fin du 18è s. encore, on ne trouve à l'article "Suites" de l'Encyclopédie de d'Alembert, que ces deux mots : "Voir Séries" !

Nous n'avons pas pu faire pour l'instant une étude complète de l'élaboration historique du concept de suite et nous nous bornons ici à donner quelques étapes dans l'évolution des conceptions des mathématiques, telles qu'elles transparaissent dans les définitions et commentaires concernant la convergence des suites et des séries depuis le début du 18è s.

Bien avant que la notion de convergence ne soit élaborée, les suites et séries sont très utilisées au 16è et 17è s. dans les calculs numériques (Napier, Mercator, Wallis, Gregory...). Newton, dans son ouvrage intitulé "Méthode des fluxions et des suites infinies" (1664-1671) donne des méthodes de développement en séries entières, par analogie avec les polynômes et des méthodes d'approximation de solutions d'équations du 3è degré sous forme de somme partielle de série, mais le concept de limite n'est pas encore formulé. Il est seulement abordé à propos de la définition des "derniers rapports" ("ultime ratio").

"Les derniers rapports dans lesquels se trouvent des quantités ne sont pas à proprement parler, des rapports de dernières quantités, mais des limites dont les rapports de ces quantités, décroissant sans limite, se rapprochent et que, bien qu'elles s'en approchent de plus près que toute différence donnée, elles ne peuvent ni dépasser ni atteindre avant que ces quantités aient diminué indéfiniment". Evidemment pour Newton, qui étudie le mouvement des corps, le langage est celui de la cinématique.

A la suite des travaux de Newton et de Leibniz et des débuts du Calcul Différenciel, le 18è s. verra de nombreuses tentatives pour fonder rigoureusement le calcul infinitésimal (Jurin, Robins, Mac Laurin...) en même temps que le développement considérable de la physique mathématique amène à l'utilisation de plus en plus vaste des séries, y compris d'ailleurs celle des séries divergentes (Euler, Lagrange, Laplace...). Mais il reste que, pour les mathématiciens de cette époque, le fait qu'une suite infinie de nombres ait ou non une limite résulte d'une intuition spatiale (longueur d'un arc de courbe considéré comme limite des longueurs d'une suite infinie de polygones inscrits, aire d'une surface définie par une courbe, etc...) et non d'une propriété de la suite elle-même.

D'Alembert, dans l'Encyclopédie méthodique (T.III p.29-32, 1784) donne d'une série ou suite la définition suivante : "Se dit d'un ordre ou d'une progression de quantités qui croissent ou décroissent suivant quelque loi : lorsque la suite ou série va toujours en approchant de plus en plus de quelque quantité finie, et que, par conséquent, les termes de cette série ou les quantités dont elle est composée, vont toujours en diminuant, on l'appelle suite convergente, et si on la continue à l'infini, elle devient égale à cette quantité". Quant à une série divergente, c'est une série où "les termes vont toujours en augmentant". Et c'est encore la monotonie et le mouvement qui apparaissent dans sa définition de limite, notion sur laquelle d'Alembert voulait fonder tout le Calcul Différentiel. "Une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut s'approcher de la première plus près qu'une quantité donnée, si petite qu'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui s'approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle s'approche, en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable", et encore "à proprement parler, la limite ne coïncide jamais ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite, mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus et peut en différer aussi peu qu'on veut".

Vers 1800, Gauss donnera la première définition générale d'une suite comme "un ensemble ayant un nombre quelconque d'éléments, l'ensemble des valeurs d'une fonction d'une variable". C'est la première définition fonctionnelle. Il a aussi une définition claire et précise de la limite d'une suite de nombres : après avoir défini les notions de limites supérieure et inférieure, il définit la limite d'une suite comme valeur commune aux limites supérieure et inférieure lorsque celles-ci coïncident" (Inédit : Notion fondamentale sur la théorie des suites Werke T.X).

En 1817, Bolzano a la notion correcte de convergence des suites (définition fonctionnelle à l'ordre des voisinages) et il énonce la condition de convergence des suites connue sous le nom de critère de Cauchy.

Cauchy lui-même, dans son Cours d'Analyse (1823) énonce la condition nécessaire et suffisante de convergence d'une suite de réels (critère de Cauchy) et donne la définition suivante de la convergence d'une série : "Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite convergente, et la limite en question s'appellera somme de la série. Au contraire, si, tandis que n croit indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixée, la série sera divergente et n'aura plus jamais de somme". Puis il démontre qu'une condition nécessaire de convergence de la série est que "le terme général u_n décroisse indéfiniment tandis que n augmente". Certes, pour Cauchy, cela signifie que le terme général u_n tend vers zéro, et il ne se limite pas à l'étude des suites monotones ; mais l'utilisation du terme "décroit" n'est pas fortuite et n'est sûrement pas indépendante de la génèse de la notion de convergence des suites. De même, si avec Cauchy, la notion de limite est enfin claire et dénuée d'ambigüité, le mot lui-même n'est pas totalement dégagé de sa signification dans le langage courant (barrière infranchissable) puisque Cauchy parle de "limite fixe" et ailleurs, dans l'énoncé d'une règle célèbre sur les séries "Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croit indéfiniment, l'expression $(u_n)^{1/n}$ et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit, la série est convergente pour $k < 1$, divergente pour $k > 1$".

Sans tenter de comparaison abusive avec les résultats obtenus dans l'étude précédente, il est frappant de constater que jusqu'au début du 19è s. c'est ce qu'on a appelé, le "modèle dynamique" monotone qui semble prédominant, en tout cas dans les définitions et dommentaires théoriques (car les suites utilisées n'étaient pas toutes monotones, et les séries pas nécessairement à termes positifs...). Il faut attendre plus d'un siècle pour voir apparaître un "modèle fonctionnel" (il est vrai que la notion de fonction n'était elle-même pas précise avant la fin du 18è s..). Et si la monotonie a certainement disparu de l'idée de suite convergente chez Cauchy, il en reste des traces dans le langage utilisé. En 1740, dans sa préface à la traduction de l'ouvrage de Newton sur "la méthode des fluxions et des suites infinies", Buffon n'affirmait-il pas : "Nous avons des idées nettes de la grandeur, nous voyons que

les choses en général peuvent être augmentées ou diminuées, et l'idée d'une chose devenue plus grande ou plus petite est une idée qui nous est aussi présente et aussi familière que celle de la chose même ; une chose quelconque nous étant présentée, ou seulement imaginée, nous voyons qu'il est possible de l'augmenter ou de la diminuer...".

Il faudrait tenter d'approfondir l'étude de l'élaboration du concept de suite et de suite convergente, en particulier à travers les problèmes qui en ont permis l'évolution. Il est bien sûr certain que c'est l'étude des séries (en particulier trigonométriques) qui a permis de préciser les notions de fonction et de convergence, mais il faudrait dégager les problèmes particuliers qui ont amené les mathématiciens, contraints à la résoudre, à améliorer aussi bien leurs techniques et par là-même, à préciser leur (re)présentation du concept de convergence des suites - avec toutes les conséquences pédagogiques qu'on peut imaginer-.

Annexe ④

Relevé d'erreurs d'étudiants en première ou deuxième année de faculté et en math. sup. sur des exercices portant sur des suites numériques.

avec la collaboration de

M. Azra
H. Balacheff
H. Berdot

Mme Baschet
Mme Bour
Mme Nguyen
Mme Mazet
Mme Michas
Mme Wirth

et présenté par Mme Robert.

Année 1978-1979

I Présentation

Ⓐ Nous avons demandé au début de l'année 1978-79 à une quinzaine de collègues enseignant en math. sup. ou en premier cycle universitaire de relever les erreurs de leurs élèves portant, entre autres thèmes, sur les suites numériques. Nous présentons ici le matériel brut que'une dizaine d'entre eux nous ont envoyé.

Un certain nombre de remarques s'impose d'emblée sur l'insuffisance de ce travail :

a) Les erreurs ont souvent été transcrites par l'enseignant en un style plus ou moins télégraphique ne respectant pas forcément la complexité de la pensée de l'étudiant. Nous demanderons à l'avenir une transcription plus fidèle des déclarations écrites ou orales des étudiants (l'idéal étant les photocopies de devoirs écrits ou les transcriptions d'enregistrements d'interrogation orale).

b) De la même façon le texte intégral de l'exercice concerné devra être fourni tel qu'il a été proposé à l'étudiant.

c) Il manque un certain nombre de détails concernant chaque erreur : il faudrait indiquer si l'erreur a été faite au cours d'un exercice écrit (à la maison, en temps limité), à l'oral (colle, T.D., classe) si l'exercice portait prioritairement ou accessoirement sur le sujet étudié, et surtout à quel moment du cours l'exercice a été donné (première semaine, milieu de cours, quelques mois après le cours, avant, ...)

d) Si une véritable étude de la fréquence d'une erreur donnée semble impossible, on pourrait toutefois indiquer si une erreur est le fait d'un ou plusieurs élèves, à une ou plusieurs occasions dans une classe donnée.

Nous sommes bien conscients de la difficulté de ce travail alors que le cours avance, que les élèves demandent une attention constante, que les copies s'accumulent... Nous remercions donc vivement les collègues ayant déjà cette année fait l'effort de nous fournir des premiers documents et... à l'avance ceux qui l'an prochain continueront ce travail !

(B) Nous livrons donc ici les premiers relevés, texte (éventuellement résumé) et erreur, les numéros de 1 à 9 correspondent à la classe où l'erreur a été relevée : 1, 2, 5, 6, 7 Math Sup C

4	Math Sup
8, 9	DEUG 1
3	DEUG II

1 Math Spé (non numérotée !).

(E) signifie "à l'écrit", (O) à l'oral.
On a pu reconstituer (bien que les indications n'étaient pas fournies) que tous les exercices sauf 5 (sauf de Math. Spé et de 3) ont été posés pendant le cours sur les suites et portaient prioritairement sur elles.

Aucune attention n'a été portée aux notations ni au vocabulaire.

On a recopié les erreurs en les regroupant par analogie grossière, à la première lecture et on les a numéroté de S_1 à S_{66}.

Il est donc clair que, d'une part, une même erreur peut relever de plusieurs groupes et que, d'autre part, une étude plus approfondie modifiera aussi bien la constitution des groupes que l'appartenance de telle ou telle erreur à tel groupe.
On a donc, dans un premier temps et pour faciliter la lecture et ... la critique, distingué groupes, qu'on pourrait momentanément intituler :

I **Passages à la limite** (S_1 à S_{34})

II Monotonie (S_{35} à S_{43})

III Suites $u_{n+1} = f(u_n)$ (S_{44} à S_{47})

IV Utilisation des nombres réels et équivalents (S_{48} à S_{55})

V Définition de la limite (S_{56} à S_{65})

VI Indices (S_{66}).

(C) Dans le même temps, au fur et à mesure que les erreurs étaient collectées, j'ai interrogé (partiellement) sur les exercices correspondants un petit nombre d'étudiants en préparation au CAPES. Le dépouillement intégral de ces "entretiens" sera fait ultérieurement mais je tiens à signaler que toutes les erreurs relevées et testées ont été refaites au moins une fois (cf feuille jointe à la fin).
Cette expérience devra être poursuivie et amplifiée l'année prochaine à mon avis.

(D) Au cours de l'année, nous nous sommes demandés si la façon dont les textes étaient posés pouvait être déterminante pour l'apparition (ou la disparition) de telle ou telle erreur.
C'est en ce sens qu'un collègue de Math. Sup a proposé à ses élèves un test écrit où deux variantes d'un même exercice (S_1) étaient proposées à chaque moitié de la classe. Le dépouillement de ce test sera joint ultérieurement - d'ores et déjà de telles expériences semblent réalisables et génératrices de résultats.

(E) De plus pour étayer notre réflexion sur les suites deux collègues se sont intéressées respectivement aux manuels utilisés habituellement et surtout à l'histoire des suites depuis l'Antiquité. Leurs travaux seront joints ultérieurement.

(F) D'autres questions se posent : lorsque "l'erreur" est constituée par une "non-réponse", autrement dit lorsqu'un étudiant ne sait pas commencer à résoudre un exercice, ou s'arrête avant la fin, doit-on considérer que cela entre dans la catégorie des erreurs ?

Autre question : comment sont "corrigées" les erreurs signalées par les enseignants ? Cela serait à lier avec le moment du cours où l'erreur intervient. Par exemple, serait-il possible de quantifier les exercices à faire avant de voir disparaître telle ou telle erreur ?

Pour l'instant nous n'avançons pas de réponse à ce type de questions.

(G) Enfin, peut-être pourrait-on étudier (dans quelques cas)

- l'évolution individuelle des erreurs.

II Les erreurs.

Groupe I "Passages à la limite".

Dans les erreurs de ce groupe, tout se passe comme si on effectuait un "passage à la limite partiel" dans une expression où n intervient deux ou plusieurs fois, on fait tendre n vers l'infini mais pas à tous les endroits où n intervient; tout se passe comme si "pour n très grand" (ou encore "pour n infini"...) on pouvait remplacer u_n par sa limite, ou encore comme si la limite de u_n était atteinte.

En particulier on a regroupé de S_{28} à S_{34} les erreurs concernant plus manifestement l'application du théorème de "passage à la limite dans les inégalités". Alors, on constate que le phénomène "existence" de ce qui pourrait être une limite numérique explicite, le fait de pouvoir exhiber une valeur, semblent oblitérer la question de la convergence. De plus le passage à la limite conserve le plus souvent l'ordre strict.

1.(O) Etudier une suite u_n telle que $\lim_{n\to+\infty} n u_n = 1$.

réponse $\lim n u_n = 1 \Rightarrow \lim (u_n) = \frac{1}{n}$ (S1)

4.(E) réponse: u_n converge vers une suite qui converge vers 0. (S2)

8. (E) d'une interrogation écrite donnée en DEUG 1ère année

(Extrait)

Que peut-on dire de la suite (u_n) telle que l'on ait :

$$\lim_{n\to+\infty} n u_n = 1$$

Diverses réponses sélectionnées (!) sur 27 copies

$\lim_{n\to+\infty} n u_n = 1 \Rightarrow n \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{n} = 0$

donc u_n est convergente (S3)

$\lim_{n\to+\infty} n u_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} n \times \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

donc $u_n \longrightarrow 0^+$ quand $n \longrightarrow +\infty$ (S4)

$n u_n$ est majorée et croissante
ou minorée et décroissante (S5)

donc u_n est majorée et croissante
ou minorée et décroissante -

$\lim_{n\to+\infty} n u_n = 1 \qquad n u_n = 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{n}$ (S6)

La limite d'un produit = le produit des limites

$u_n \longrightarrow \frac{1}{n}$ donc $u_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ (S7)

On sait que si $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n = A \\ \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{n} \end{cases}$ (S8)

$\lim_{n\to\infty} f_n u_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1$

1 (0) (colle) • Dans l'étude d'une suite (a_n) :

réponse : $a_n = a_{n-1}$ $\lim (a_{n-1}) = a_n$ (S9)

---

1 (0) (colle) • $u_n = (1+h)(1+h^2)\cdots(1+h^{2^n})$ $0 < h < 1$ (S10)

réponse : $\lim (u_n) = (1+h)\cdots(1+h^{2^{n_0}})$ où n_0 est tel que $h^{n_0} < \varepsilon$

---

1 · (E) (dessoi à la maison) $q_{n+2} = a_n q_{n+1} + b_n q_n$ (S11)

réponse : si (q_n) est convergente sa limite ℓ vérifie $\ell = a_n \ell + b_n \ell$

.(E) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on définit (p_n) et (q_n) par $p_0 = 0$ $q_0 = 1$ et $p_1 = 1$ $q_1 = 0$. (S12)

(pour la maison) de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$ $p_{n+2} = a_n p_{n+1} + p_n$

$q_{n+2} = a_n q_{n+1} + q_n$.

Démontrer que (q_n) est strictement croissante (à partir d'un certain rang) et tend vers limite $+\infty$.

(Lemme : si $(q_n) \to \ell$ $\ell = a_n \ell + \ell$)

2.(E). On pose $\forall n \geq 2$ $z_n = \frac{p_n}{q_n}$ Démontrer que les 2 suites (z_{2n}) et (z_{2n+1}) sont adjacentes. Conclure que (z_n) cvge. On appelle ℓ sa limite (S13)
(pour la maison) Etablir : $\forall n \geq 2$ $-\frac{1}{q_n} < \ell q_n - p_n < \frac{1}{q_n}$

En déduire $\ell \notin \mathbb{Q}$

(rappel du raisonnement : $\frac{1}{q_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
donc $0 < \ell q_n - p_n < 0$.)

Pour tout entier $n \geq 1$ on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1 .$$

1°) Montrer que sur les réels positifs f_n a une racine unique notée u_n.

2°) Montrer que la suite $\{u_n\}$ converge et que sa limite est la racine positive de l'équation :

$$x^2 + x - 1 = 0 .$$

deux réponses (copies photocopiées)

Vérifions $u_n \to \infty$ puisque u_n^n et u_n^{n-1} tendent vers ∞

u_n vérifie

$$u_n^2 + u_n - 1 = 0$$

Equation du second degré

$\Delta = 5$; $u_n' = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $u_n'' = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$u_n' < 0$ et $u_n'' > 0$

Seule la racine positive est à accepter

donc $u_n'' = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0{,}6$

(S14) Ce chiffre est une limite et non un nombre exact.

Donc $\{u_n\}$ converge

et $\boxed{\lim_{n \to \infty} u_n = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

---

autre copie (2)

si $0 < \rho < 1$ donc $\rho^n + \rho^{n-1} \to 0$

quand $n \to +\infty$

$\lim u_n$ est la valeur qui annule f_n

Donc $\lim u_n$ est la valeur qui annule $\rho^2 + \rho - 1$

(S15) à savoir $\rho' = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Ne pas lire (3)

Montrons qu'elle est croissante

$\{u_n\}$ est l'ensemble des racines des fonctions $f_n(x)$:

$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$

$u_n \in \{u_n\} \iff u_n^n + u_n^{n-1} + u_n^2 + u_n - 1 = 0$

(S16)

Donc : $u_n^n + u_n^{n-1} + u_n^2 + u_n = 1 \Rightarrow$

$u_n^{n-1}(u_n + 1) + (u_n + 1)u_n = 1 \Rightarrow$

$(u_n + 1)(u_n^{n-1} + u_n) = 1 \Rightarrow$

$u_n(u_n + 1)(u_n^{n-2} + 1) = 1$ ou encore

$(u_n^2 + u_n)(u_n^{n-2} + 1) = 1$

Remarque : si n augmente, comme $u_n \in]0, 1[$, u_n^{n-2} diminue.

posons :

$X = u_n^2 + u_n$

$Y = u_n^{n-2} + 1$

nous avons l'egalité $XY = 1$

si Y diminue, X augmente, c'est à dire $u_n^2 + u_n$ augmente.

n augmente $\Rightarrow$ u_n^{n-2} diminue $\Rightarrow$ $u_n^2 + u_n$ augmente.

Donc, plus n augmente, plus u_n augmente.

(4)

Si ℓ est la limite de la suite (u_n) alors ℓ vérifie:

$\ell^n + \ell^{n-1} + \ell^2 + \ell - 1 = 0$

or: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n < 1$ donc $\lim_{n \to \infty} u_n^n = 0$ et $0 \leqslant \ell < 1$

d'où $\lim_{n \to \infty} \ell^n = 0$ (S17)

donc ℓ vérifie: $\ell^2 + \ell - 1 = 0$

c'est à dire: $\boxed{\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ car $\ell \geqslant 0$

---

(5) (S18)

$f_n(u_n) = u_n^n + u_n^{n-1} + \dots + u_n^2 + u_n - 1$

si $n \to +\infty$; $u_n \in]0,1[$ $\Rightarrow$ u_n est de la forme $\frac{1}{n}$, $x = \ell^{+\infty}$

$\left(\frac{1}{x}\right)^n \to 0$ de même $\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \to 0$

nous oublierons la présence de l'indice à cet endroit

donc à la limite: $u_n^2 + u_n - 1 = 0$

---

(6) (S19)

à partir d'un certain rang N on a: $f_{n>N}(\ell) = 0$

c'est-à-dire:

$\lim_{n \to +\infty} f_n(\ell) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} (\ell^n + \ell^{n-1} + \ell^2 + \ell - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} (\ell^n + \ell^{n-1}) + \lim_{n \to +\infty} (\ell^2 + \ell - 1) = 0$ (A)

or: $0 < \ell < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (\ell^n + \ell^{n-1}) = 0$

donc: (A) $\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} (\ell^2 + \ell - 1) \Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 1 = 0$

Soit a la racine positive de l'équation : (S2)

$x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 5 \Rightarrow a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,61 < 1$

Comme a est racine de $x^2 + x - 1 = 0$, on a :

$f_n(a) = a^n + a^{n+1}$ or $a < 1$ donc

$f_n(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} (f_n)^{-1}(0) = \lim_{n \to +\infty} u_n = a$ donc u_n converge

vers la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

(S21)

(3)

→ Montrons que la limite de $\{u_n\}$ est racine positive de l'équation : $x^2 + x - 1 = 0$.

D'après un théorème connu :

si f est une fonction continue et définie en l qui est la limite d'une suite u_n alors :

$f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(l)$

La fonction f_n est continue et définie sur $\mathbb{R}$ donc on pose $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$

d'où $\lim_{n \to +\infty} f_n(u_n) \to f(l)$

$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(l) = 0$. (puisque $f_n(u_n) = 0$)

$\lim_{n \to +\infty} f(l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} l^n + l^{n-1} + l^2 + l - 1 = 0$

or $\lim_{n \to +\infty} l^n + l^{n-1} = 0$, puisque $0 < l < 1$ (en effet $0 < u_n < 1$ et si $l = 1$, $f(l) = 3 \neq 0$)

donc nécessairement $l^2 + l - 1 = 0$

autrement dit l est la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} u_n = l = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

(9) 2) $(\alpha^2 + \alpha - 1) = 0 \iff \left(\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\alpha + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

La limite de U_n est $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ si et seulement si on a : $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ solution de $P_n(x) = 0$ quand $n \to \infty$

$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

calculons $P_n\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1$

$P_n\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}+2}{2}\right) + \left(\frac{3-\sqrt{5}-1+\sqrt{5}-2}{2}\right)$

$= \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{+1+\sqrt{5}}{2}\right) + 0$

on a $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 0$; d'où $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = 0$

d'où $\lim_{n\to\infty} P_n\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$ (S22)

$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ est la lim de la suite $\{U_n\}$ ✓

II

Etude des suites $u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3}$ avec $u_1 = 1$

$$v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4} \text{ avec } v_1 = 5$$

1°) Montrer que les suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ convergent.

2°) Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β non nuls tels que :

$\alpha u_n + \beta v_n$ soit indépendant de n.

En déduire la limite de u_n et de v_n .

(dessin à la maison)
Réponses (copies photocopiées)

2) $\beta = 4 \Rightarrow \alpha = 3$

. or $3u_n + 4v_n = 3u_{n-1} + 4v_{n-1}$, par récurrence on a

$3u_1 + 4v_1 = 3u_0 + 4v_0 = 23$

$u_n \to \frac{23}{7}$ (idem v_n).

$\ell = 23/7$

(S23)

2) Si v_n admet ℓ comme limite, alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$ (S24)
et par suite $v_{n+1} = v_n = \ell$.

1) 2) u_n et v_n sont adjacentes - on a $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 3u_n + 4v_n = 23 \\ u_n - v_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7v_n = 23 \\ u_n - v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow v_n = 23/7$

Or, ces 2 suites étant adjacentes elle converge et leur
Vers la même limite qui est $23/7$

(S25)

(4) $3u_n + 4v_n = 3u_{n-1} + 4v_{n-1}$ 9

$3u_2 + 4v_2 = 3u_1 + 4v_1$

En additionnant membre à membre les 4 égalités on obtient $3u_n + 4v_n = 3u_1 + 4v_1$

soit $3u_n + 4v_n = 23$

On sait que $\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$

donc on a $3u_n + 4v_n = 23$

et $\underline{u_n - v_n = 0}$ $\underline{(n\to\infty)}$ (souligné par moi)

ou $\begin{cases} 3u_n + 4v_n = 23 \\ 3u_n - 3v_n = 0 \end{cases}$

En soustrayant membre à membre

on obtient $7v_n = 23$ soit $v_n = \frac{23}{7}$ $(n\to\infty)$

Lorsque $n\to\infty$ $v_n \to \frac{23}{7}$

et or $u_n \to \frac{23}{7}$ (u_n et v_n adjacentes)

la limite commune de u_n et v_n lorsque $n\to\infty$ est $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{23}{7}}$

(S2C)

c) Démontrons que $\lim_{n \to \infty} (U_n - V_n) = 0$

on a $V_0 - U_0 \leq \frac{V_0 - U_0}{2}$

Supposons que nous ayons $V_n - U_n \leq \frac{V_0 - U_0}{2^n}$

nous avons $V_{n+1} - U_{n+1} \leq V_n - U_n \iff \frac{3U_n + 9V_n - 8U_n - 4V_n}{12} \leq V_n - U_n$

$\frac{5V_n - 5U_n}{12} \leq V_n - U_n$ Ce qui est vérifié

or on a $V_n - U_n \leq \frac{V_0 - U_0}{2^n}$ et $V_{n+1} - U_{n+1} \leq V_n - U_n$

$V_{n+1} - U_{n+1} \leq V_n - U_n \leq \frac{V_0 - U_0}{2^n}$ or $V_n > U_n \Rightarrow 0 \leq V_n - U_n$

il a donc $0 \leq V_n - U_n \leq \frac{V_0 - U_0}{2^n}$

$\frac{V_0 - U_0}{2^n} = 0$

$0 \leq V_n - U_n \leq 0$

A fortiori $\lim_{n \to \infty} (V_n - U_n) = 0$

S27

1 (E) · $1 - \frac{1}{n} < u_n < 1 + \frac{1}{n}$ ①

réponse $\lim\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ donc $1 < \lim u_n < 1$ donc $\lim(u_n) = 1$

(Variante la fin rédigée ① simplifie $1 \leq \lim(u_n) \leq 1$ donc $\lim(u_n) = 1$ (sans prouver la CV de (u_n)).

S28

---

2 (E) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suite

$\exists k < 1$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ (I)

on démontre que l'éq $f(x) = x$ admet une racine unique α ;

puis on considère une suite récurrente : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$

Démontrer : $\forall n \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$ En déduire que (u_n) converge vers α.

réponse Dém : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.

ensuite, soit : . d'où $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim_{n \to +\infty} k^n |u_0 - \alpha|$

or $\lim_{n \to +\infty} k^n |u_0 - \alpha| = 0$ d'où $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$

S29

. soit encore : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$

or $\lim_{n \to +\infty} k^n |u_0 - \alpha| = 0$

D'où : $0 \leq |u_n - \alpha| \leq 0$

Ce qui donne $(|u_n|)$ converge vers α.

. soit dans une autre : on prend $\varepsilon = k^n |u_0 - \alpha|$

---

1 (Exil) $u_n > 0$

(u_n) CV $\Rightarrow \lim(u_n) > 0$.

S30

---

7. Soit $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

On a $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ - $\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)$ a pour limite 1

alors $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

S31

(u_n) a donc une limite ℓ comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1.

(E) Théorème des suites (u_n) (v_n) (w_n) tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq v_n \leq w_n$

Démontrer que si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l, (v_n) converge vers l

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq v_n \leq w_n \Rightarrow l \leq v_n \leq l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ (S32)

ou encore : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq v_n \leq w_n \Rightarrow \lim\limits_{n} u_n \leq \lim\limits_{n} v_n \leq \lim\limits_{n} w_n$

(E) On définit une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $\beta_0 > 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\beta_{n+1} = \beta_n^2 - 2$

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\beta_n > 2$

(S33)

b) On pose $w_n = \dfrac{1}{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_n}$ et $W_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

Démontrer que la suite (W_n) est croissante majorée. Conclure

on démontre $\forall n$ $w_n < \dfrac{1}{2^{n+1}}$ d'où $W_n < 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}$

ensuite : donc (W_n) est majorée par $1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}$ (avec éventuellement de plus petits que $1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}$)

ou bien : $\forall n \in \mathbb{N}$ $W_n < 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) = 1$ $\Rightarrow (W_n)$ majorée par 1 et l'implication aussi

(bien que le résultat soit vrai par la démonstration une petite plus)

ceci pouvant être suivi de : " donc W_n converge vers 1 "

---

1. (E) Devoir $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$

$u_n(p) = S_{np} - S_n$ (S34)

① $\dfrac{p-1}{p} \leq u_n(p) \leq p-1$ $\quad p \in \mathbb{N}^*$

② $(u_n(p))_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante, CV vers une limite positive

③ $g(p) = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n(p))$ g croissante

et $g(pq) = g(p) + g(q)$.

Erreur $u_n(p) > u_n(p+1) \Rightarrow \lim (u_n(p)) > \lim (u_n(p+1))$

$g(p) > g(p+1)$.

Groupe II "Monotonie"

Les erreurs de ce groupe concernent des exercices où la monotonie des suites intervient. Dans certains cas toute se passe comme si, ici, la certitude de la convergence obligeait les questions de limite (valeur numérique). Les erreurs de croire que toute suite convergente est monotone disparaît vite pendant le cours sur les suites mais on l'a retrouvé en spéciales et ~~dans~~ avec les étudiants du CAPES.

7. variante : $u_n \leq \frac{n}{n+1}$ et (u_n) est croissante.

(u_n) majorée par $\frac{n}{n+1}$ donc (u_n) est convergente. (S35)

le nombre

2.(O)

$a \geq b > 0$ $u_0 = a+b$ $u_{n+1} = a+b - \frac{ab}{u_n}$ Montrer que suite de convergente et calculer la limite. (S36)

On démontre que c'est une suite convergente minorée par a de limite et que les valeurs possibles pour la limite sont a et b.

Quelle est la valeur de la limite ? "Il faut b puisque b est plus petit que a et que la suite décroît"

2.(O)

$a_0 > 0$ $b_0 > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1}(a_{n+1} + b_n) = 2a_n b_n$

Démontrer que l'on définit ainsi 2 suites adjacentes (S37)

Dém. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\text{sgn}(a_{n+1} - a_n) = \text{sgn}(b_n - a_n)$

et $\text{sgn}(b_{n+1} - b_n) = \text{sgn}(a_n - b_n) = -\text{sgn}(a_{n+1} - a_n)$.

Donc l'une croît et l'autre décroît.

2.(E)

$\in]0,1[$ On lui associe les suites n_p, n_p fini ou non défini de la manière suivante pour $p=1$ n_1 est le + petit des entiers n vérifiant $\frac{1}{n} \leq x_1$ (S38)

on pose $x_2 = x_1 - \frac{1}{n_1}$ si $x_2 = 0$ construction terminée sinon on recommence

n_p est le plus petit des entiers n vérifiant $\frac{1}{n} \leq x_p$ et on pose $x_{p+1} = x_p - \frac{1}{n_p}$

Dans une première partie on démontre que les suites sont finies si x est rationnel

On démontre ensuite que pour x irrationnel la suite $(n_p)_p$ est strictement croissante et on conclue $\lim_{p \to +\infty} n_p = +\infty$.

Démontrons la propriété de la conclusion : la suite (n_p) étant une suite croissante d'entiers elle est non majorée d'où : $\lim_{p \to +\infty} n_p = +\infty$.

(pêche plutôt par manque de démonstration encore que le "croissante" à la place de "strictement croissante" ne me paraît pas être une suite logique)

groupe III Suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

les erreurs de ce groupe concernent plus spécialement des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. ... si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < v_n$ Dans l'étude de 2 suites adjacentes -
Est-ce que l'ensemble des $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ a une borne supérieure α : donc α est un élément de la suite (v_n). (S39)

---

1. (u_n) décroissante, minorée par 0 donc ~~converge vers~~ 0. (S40)

---

1. (E) $\begin{cases} 0 < u_0 < u_1 \ldots\ldots < u_n < 1 \\ \text{donc } \lim (u_n) = 1. \end{cases}$ (S41)

(S42)

Classe de Spéciale :

Toute suite positive de limite 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

Spéciale

Soient (u_n) et (v_n) convergentes de limite respectives l et m si $l \leq m$ il existe un rang à partir duquel (S43)
$u_n \leq v_n$

---

2 (O) Je me rappelle la réaction d'un élève quand je faisais le cours : suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ la fonction f était croissante. J'avais démontré : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \operatorname{sgn}(u_1 - u_0)$

Question : que peut-on dire de la suite (u_n) ?

réponse (de plusieurs) : elle est croissante (S44)

Moi : mais ça dépend du signe de $u_1 - u_0$

réponse du plus "distrait" qui voit $u_1 - u_0$ est positif puisque $u_1 = f(u_0)$ et que f est croissante ---

---

2 (E) Je me rappelle aussi une erreur commise dans un problème (S45) où l'on disait que je n'ai pas souvenir. Il s'agissait de l'étude d'une suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ où f était une fonction précisée.

Etude de la monotonie : tableau de variation de f.

$f \nearrow$ sur $]-\infty\ a]$ et $f \searrow$ sur $[a\ +\infty[$

Donc (u_n) croît jusqu'à a ? puis décroît

Donc pour n assez grand (n=a ?) (u_n) décroît.

---

1 (S46)

f continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$,

f dérivable t.q. $f'(x) < 1$ sur $[0,1[$.

$u_0 \in [0,1]$ $u_{n+1} = f(u_n)$. Etude de la suite

réponse. f croissante donc (u_n) est monotone.

(on a montré avant

$f'(x) \geq 0$ donc $f(x) = 0$ et f est constante ou $f'(x) > 0$ et f est croissante

---

3 (E) (S47)

Etude d'une suite notée $(|u_n|)$

- quand $u_1 < 0$ $(|u_n|)$ décroissante
- quand $u_1 > 0$ $(|u_n|)$ croissante

groupe IV [illegible] de R ou des équivalents

Dans les erreurs de ce groupe, une mauvaise utilisation soit des nombres réels, soit des équivalents semble prédominer.

3.0 pour tout x réel, $x^n \to +\infty$, $\frac{1}{2^n} \to 0$, donc $\frac{x^n}{2^n} \to 1$ compte tenu des $+\infty$ (S48)

---

7. Soit $u_n = a^n$ $a \in \mathbb{R}^{+*}$. (S49)

(u_n) a pour limite $+\infty$.

---

1. (E) $q_{n+1} > q_n \Rightarrow (\exists k, k>1, q_{n+1} > k q_n)$ donc la suite est divergente cf (9) (S50)

---

2. $0 \leq u_0 \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ (S51)

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$

puis : $\exists k \in]0;1[$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|u_{n+1} - l| \leq k |u_n - l|$

on conclut que la suite converge.

→ L'élève : je vais démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|u_{n+1} - l| < |u_n - l|$

d'où on déduira l'existence de $k<1$ puisque l'inégalité est stricte.

3.(0) Etude de la suite $u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ (S52)

$n \to +\infty$, $u_n \sim \frac{1}{n}$

la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est décroissante, donc la suite (u_n) est décroissante !

---

1. (E) $V_n = \frac{u_n^2}{q_0} + o(u_n^2)$ (u_n est un I.P au voisin de $+\infty$). (S53)

donc $V_n \leq \frac{u_n^2}{q_0}$

---

1. $\frac{q_{n+1}}{q_n} > 0 \iff q_{n+1} > q_n$ (S54)

Démontrer que (q_n) est une suite croissante

2.(E) Etude de la suite (v_n) définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \frac{2v_n - 1}{v_n + 4}$ (S55)

(Justification des questions précédentes où on étudiait plus généralement les suites définies $v_{n+1} = f(v_n)$ f étant une fonction homographique à partir des points doubles de f).

Existence de la suite (v_n) : $v_n \neq -4 \Rightarrow v_{n+1} \neq -4$

Donc "il y a une indétermination"

groupe V Définition de la limite

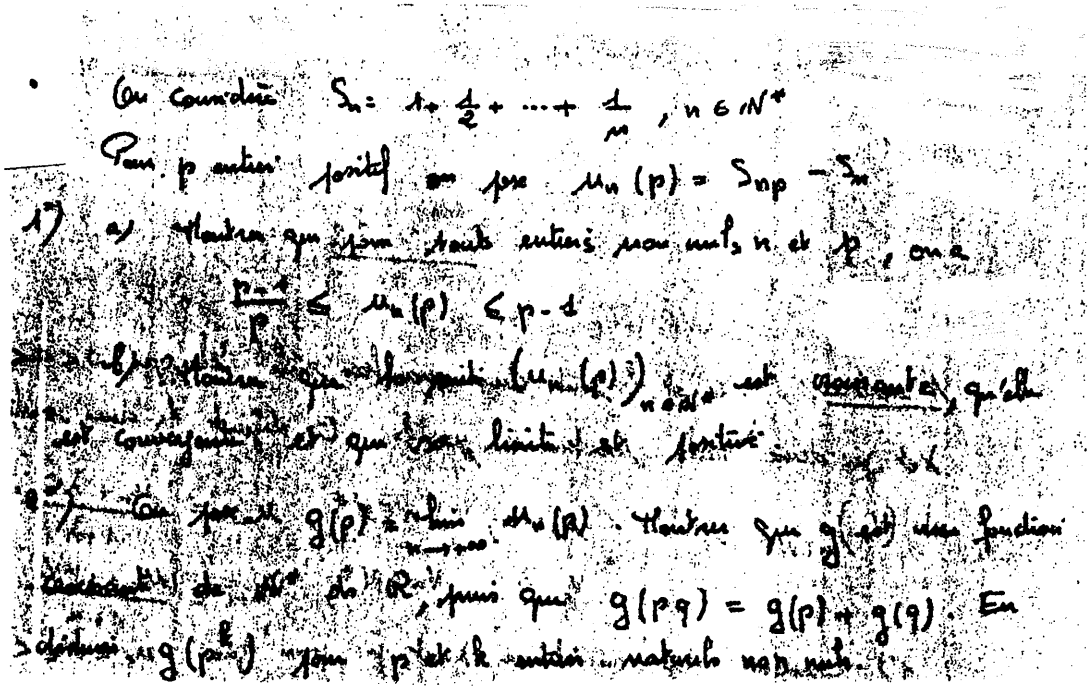
Ici c'est la notion même de limite qui est en cause ; les premiers exercices pourraient relever du groupe I.

1 ■ $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ est divergente car "si on ajoute des termes positifs, on obtient de nbs de plus en plus grands". (S56)

Graf (Colli)

---

1 (E) (devoir à la maison) (S57)



On considère $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Pour p entier positif on pose $u_n(p) = S_{np} - S_n$

1) a) Montrer que pour tous entiers non nuls n et p, on a

$$\frac{p-1}{p} \leq u_n(p) \leq p-1$$

b) En déduire que la suite $(u_n(p))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, qu'elle est convergente et que sa limite ℓ est finie.

2) On pose $g(p) = \lim_{n \to +\infty} u_n(p)$. Montrer que g est une fonction dérivable de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$, telle que $g(pq) = g(p) + g(q)$. En déduire $g(p^k)$ pour p et k entiers naturels non nuls.

réponse : Pour montrer $g(pq) = g(p) + g(q)$ certains trouvent que $\lim \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{np}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = 0 + 0 \dots + 0 = 0$
(ou disent simplement que "tous les termes tendent vers 0" donc $g(p) + g(q) = g(pq)$).

Suite de terme général : $U_n = \frac{1}{n+\frac{1}{n}} + \dots + \frac{1}{n+\frac{k}{n}} + \dots + \frac{1}{n+\frac{n}{n}}$. (S58)

(U_n) a pour limite 0 car $\left(\frac{1}{n+\frac{k}{n}}\right)$ a pour limite 0 et que U_n est une somme de termes de limite 0.

---

7 Soit (u_n) de limite 0. (V_n) définie par

$$V_n = \frac{u_0 + u_1 \dots + u_n}{n+1}.$$ (S59)

on a

$$V_n = \frac{u_0}{n+1} + \frac{u_1}{n+1} \dots + \frac{u_n}{n+1}$$

V_n est une somme de termes de limite 0 donc (V_n) a pour limite 0.

1. Exist s. $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0 \Rightarrow (u_n)$ CV. (S60)

5. Soit u_n telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$
Alors u_n est de Cauchy. (S61)

2. Encore à l'oral (S62)

- Démontrer directement que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n+3} = \frac{1}{2}$

c'est à dire : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $\left|\frac{n-1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$

Dém : $\left|\frac{n-1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| \leq \left|\frac{n-1}{2n+3}\right| + \frac{1}{2} < 1$

Donc " pour tout $\varepsilon = 1$ et " l'un et ci dessus et tout n_0 quelconque "

ou encore : $\left|\frac{n-1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{4n+6}$

" pour tout $\varepsilon > \frac{5}{4n+6}$ "

1. • $\lim \left(\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right) = 0$ (S63)
mais il faut montrer que (u_n) est CV.

Matspe
Le produit d'une suite convergente par une suite divergente est divergente. (S64)

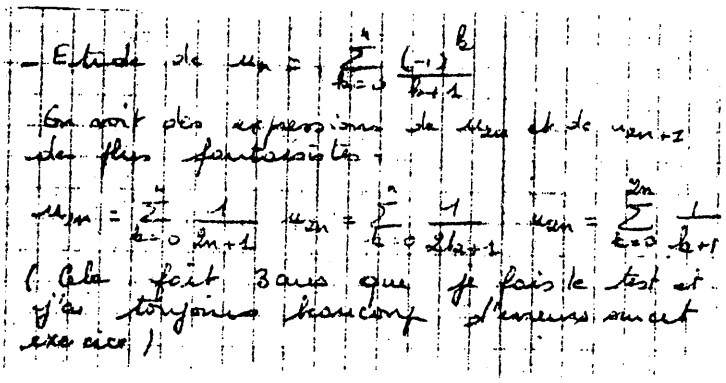
3. Etude de la suite $\sqrt{u_n} = \frac{1}{3+(-1)^n}$ (S65)

Si n est pair, on a $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \frac{1}{4}$
si n est impair, on a $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \frac{1}{2}$
donc pour tout n, lorsque n tend vers $+\infty$, $\lim \sqrt{u_n} < 1$

Groupe VI

Erreurs sur les indices

3.



(S66)

Voici des extraits de réponses d'étudiants interrogés individuellement sur certains des exercices précédents – étudiants qui sont en année de préparation au CAPES.

La première remarque à faire est que toutes les erreurs signalées par les collègues de première année ont été refaites au moins une fois.

- Exercice S_1 : (relevé d'observation)

  « on peut dire que $\lim u_n = \frac{1}{n}$ mais $\frac{1}{n}$ est un terme qui varie. On n'a pas le droit ? Quel droit a-t-on de sortir n du signe lim (souligné par moi). ? lim est pour moi un symbole ...

- On propose les exercices suivants :

  est-ce vrai ou faux que

  • toute suite u_n à termes positifs et convergeant vers 0 est décroissante (cf. S_{42})

« étudiant ... ça me paraît vrai ...
« autre étudiant puis il démontre que c'est faux
ça doit être vrai ... c'était faux !

- si une suite est décroissante et minorée par 0 elle converge vers 0 (cf S_{40})

  ça, ça marche ... ah non, non ça ne marche pas.

- enfin on a posé le texte de S_{14} ... S_{22}.

  On a retrouvé : si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$

  $\lim u_n^n = \ell^n$

  et si $u_n < 1$, $\ell < 1$.

Annexe ⑤

Enquête auprès de collègues ayant enseigné et en premier cycle de faculté et en classes préparatoires (en matière matheq)

① Quelles sont à votre avis les causes essentielles de la différence des résultats de l'enseignement en classes préparatoires et en DEUG SSM ? (Distinguer éventuellement Math Sup \ Math Spé) - (en ce qui concerne les math) -

② Si on transportait en Math Sup un groupe de TD de Deug 1 que se passerait-t-il ?

③ Si on vous affectait un ampli de DEUG 1 (2e) quels changements appréciables apporteriez-vous à vos cours ?

④ Répondre au questionnaire ci-après en affectant à chaque point un numéro de 1 à 3 selon son importance (= 1 au plus important, 3 au moins important) (0 = je ne sais pas). Vous pouvez ajouter des points et les doter de notes. Vous pouvez faire tous les commentaires que vous voulez ou affecter des coefficients le cas échéant.
La question posée est celle-ci : Quelles sont les causes de la différence des résultats de l'enseignement en classes prépa et en DEUG en ce qui concerne les maths ?

Evaluation des causes de la différence des résultats de l'enseignement en classes préparatoires et en DEUG SSM pour ce qui est des matières

	par what	SUI	E

1. RECRUTEMENT des étudiants
- Niveau antérieur de chaque élève
- Présence d'excellents élèves parmi d'autres
- Origine sociale des parents
- Perspectives de débouchés
- Intérêt pour les math. ou la physique
-

2 FORME de l'ENSEIGNEMENT
- 1 seul enseignant qui suit ses élèves depuis
- Qualification maximum des enseignants
- Présence obligatoire
- Rôle de la classe
- Contrôles (+notes) nombreux
- Contrôles individuels
- Résultats communiqués aux parents
- Colles (forme spécifique d'interrogation)
- Apprentissage régulier du cours.
- Concours à la fin de la 2ème année.
- Validation "sociale" de ces classes
- Organisation des journées toute faite - pas d'incertitudes
- Discussion entre étudiants
- Travail en commun
- Corrections fréquentes de problèmes ~~personnels~~ rédigés
- Quantité de travail journalière en classe
- Quantité de travail journalière à la maison
- Méthode travail meilleure
- Conditions matérielles (logement, nourriture) meilleures
- Accès aux bibliothèques meilleur.
-
-
-

3. CONTENU de l'ENSEIGNEMENT des mathématiques

- Adaptation cours, exercices, problèmes
- Quantité cours
- " exercices
- " problèmes à rédiger
- Qualité des cours
- Diversité des exercices
- Intérêt des problèmes
- Programmes
- Importance relative des autres matières
- Entraînement à la vitesse dans la résolution des problèmes
-

SUP	SPE

Annexe (6) : Extraits du code.

QUESTIONS 1 et 2

Vocabulaire utilisé (variable 19) (col 22)

- se rapproche de , va vers , se dirige vers , aboutit à , la distance devient petite , de plus en plus proche , l'écart diminue ... 0
- se rassemblent autour , se rejoignent , se groupent autour , se condensent , s'agglutinent , se massent , se stabilisent , varient peu autour , tournent autour , ... 1
- voisin , avoisinant , enfermés dans un espace , dans une bande , dans dans un cercle ; dans un voisinage , groupés autour , infiniement voisins , très près ... 2
- proches , rapprochés 3
- la distance est inférieure à ... , presque égal à , sensiblement la même valeur , garde la même valeur , la différence est petite ou peu différente de ... 4
- aussi près que l'on veut 5
- définition en ε et N 6
- ne dépasse pas , inférieur à la limite 7
- tend vers 8
- discours aberrant , faux , absent et divers autres 9

COMMENTAIRES SUR LA LIMITE (variable 20) (colonne 23)

- la limite ne peut être atteinte 0
- la limite peut être atteinte ou n'est pas nécessairement atteinte 1
- la limite doit être atteinte 2
- pas abordé 3
- ambigü 4
- la limite ne peut être dépassée 5
- 0 et 5 6
- divers 7
- 2 et 5 8
- questions 1 et 2 non abordées 9

ETUDES DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES-LIMITES (variable 21) (colonne 24)

- pas de dessin ou pas concluant 0
- le dessin est aberrant 1
- la limite n'est pas atteinte sur le dessin 2
- la limite est atteinte sur le dessin 3
- ambigü 4
- évoquent sans dessin une représentation graphique 5
- courbe asymptote évoquée 6
- pas abordé 9

MODELES DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES (variable 22) (colonne 25)

- on ne peut pas conclure sur le dessin 0
- le modèle est non monotone 1
- le modèle est monotone croissant 2
- le modèle est monotone décroissant 3
- le modèle est monotone 4
- pas de dessin mais évoquent une représentation graphique 5
- pas abordé 9

MODELES EXPRIMES (variable 23) (colonne 26)

- le modèle est monotone croissant ou décroissant (explicit.) 0
- le modèle est monotone(non précisé) 1
- indécidable car seule figure la définition 2
- dynamique 3
- dynamique monotone explicite 4
- mélangé 5
- fonctionnel 6
- divers : à partir d'un certain rang u_n = la limite , absent 7
- tautologie 8
- absurde 9

QUESTIONS 3 ET 4

Exemples sur les suites convergentes

.la suite 1/n est citée en premier,pas les suites du type a+b/cn+d (y compris la suite 1/n+1) 0
.la suite 1/n est citée non en premier,pas d'autres du type a+b/cn+d 1
.aucune suite du type a+b/cn+d n'est citée 2
.la suite 1/n+1 est citée,pas 1/n ni a+b/cn+d 3
.une suite du type a+b/cn+d est citée,pas 1/n ni1/n+1 4
.1/n et 1/n+1 sont citées ou (1/n-1/n+1),pas a+b/cn+d 5
.1/n et a+b/cn+d sont citées,pas 1/n+1 6
.1/n+1 et a+b/cn+d sont citées,pas 1/n 7
.il existe au moins 3suites 1/n,1/n+1,a+b/cn+d 8
.l'exercice n'est pas abordé 9

Types d'exemplescités (sur les exemples justes)

.toutes les suites sont monotones,avec une suite stationnaire, sans série convergente 0
.toutes les suites sont monotones,avec une suite stationnaire, avec une série convergente 1
.toutes les suites sont monotones,sans suite stationnaire 2
.toutes les suites sont monotones décroissantes(sans suite stationn-naire) 3
.toutes les suites sont monotones croissantes,sans suite stationnaire, avec une série convergente 4
.toutes les suites sont monotones croissantes,sans suite stationnaire, sans série convergente 5
.toutes les suites ne sont pas monotones,il existe une suite sta-tionnaire,il n'ya pas de série convergente 6
.toutes les suites ne sont pas monotones,il y a une série conver-gente,il n'y a pas de suite stationnaire 7
.toutes les suites ne sont pas monotones,il n'y a ni suite station-naire ni série convergente,les exemples sont classiques 8
.le reste... 9

Exemples sur les suites divergentes

.la suite n est citée en premier,il n'y a pas la suite n+1 ni une suite an+b 0
.la suite n est citée non en premier,il n'y a pas la suite n+1 ni une suite an+b 1
.ni n ni n+1 ni an+b ne sont citées 2
.la suite n+1 est citée ,il n'y a ni n ni an+b 3
.une suite an+b est citée, il n'y a ni n ni n+1 4
.les suites n et n+1 sont citées,il n'y a pas an+b 5
.les suites n et an+b sont citées,pas n+1 6
.les suites n+1 et an+b sont citées ,pas n 7
.il existe au moins 3 suites n,n+1,an+b 8
.l'exercice n'est pas abordé 9

Types d'exemples justes cités

.toutes les suites divergentes sont croissantes non majorées 0
.toutes les suites divergentes sont décroissantes non minorées ou tendent vers +ou-l'infini 1
.il existe une suite contenant un sinus,il n'y a ni série divergente ni suite du genre $(-1)^n$ 2
.il y a une série divergente,pas de suite avec sinus,pas de suite du genre $(-1)^n$ 3
.il y a une série divergente et une suite avec un sinus,il n'y a pas de suite du genre $(-1)^n$ 4
.il y a une suite du genre $(-1)^n$,il n'y a ni série divergente ni suite avec sinus 5
.il y a une série divergente et une suite du genre $(-1)^n$,il n'y a pas de suite avec un sinus 6
.il y a tout:série divergente,suite avec sinus,suite genre $(-1)^n$ 7
.il n'y a pas de série divergente,il y a une suite avec un sinus et une suite du genre $(-1)^n$ 8
.le reste..... 9

Etude des fonctions intervenant dans les exemples $u_n=F(n)$ ou $u_n=F(u_{n-1})$

.Log ou exp sont utilisés dans les exemples convergents et divergents 0
. " " " " " " seulement 1
. " " " " " divergents seulement 2
.ni Log ni exp ne sont utilisés,une puissance 1/m l'est dans les exemples convergents et divergents 3
.ni Log ni exp ne sont utilisés,une puissance 1/m l'est dans les exemples convergents seulement 4
.ni Log ni exp ne sontutilisés,une puissance 1/m l'est dans les exemples divergents seulement 5
.ni Log ni exp ni puissance 1/m ne sont utilisés,une fraction rationnel--le de dénominateur différent de 1 l'est dans les exemples conver--gents et divergents 6
.ni Log ni exp ni puissance 1/m,une fraction rationnelle l'est dans les exemples convergents seulement 7
.ni Log ni exp ni puissance 1/m,une fraction rationnelle l'est dans les exemples divergents seulement 8
.il n'y a rien de tout ça ouil y a des erreurs ouce n'est pas abordé 9

Etude des suites géométriques citées($(a)^n$ ou$(1/a)^n$) et de la diversité des exemples

.une suite géométrique est citée dans les exemples convergents,pas dans les exemples divergents 0
.une suite géométrique est citée dans les exemples divergents,pas dans les exemples convergents 1
.il y a une suite géométrique dans chaque catégorie 2
.il n'y a pas de suite géométrique mais tous les exemples sont clas--siques de types différents 3
.il n'y a pas de suite géométrique,il y a au moins 2exemples de même typedans une des catégories 4
.il n'y a pas de suite géométrique,il y a au moins 2 exemples de même type dans chaque catégorie 5
.il n'y a pas de suite géométrique,tous les exemples sont de types différents et il y a un exemple "tordu" au moins 6
.il n'y a pas de suite géométrique,tous les exemples sont du type $u_n=F(u_{n-1})$ 7
.divers 8
.la question n'a pas été abordée 9

Etude des erreurs dans les exemples,pas dans les démonstrations

.il y a le bon nombre d'exemples,il n'y apas d'erreur et aucune suite $u_n=F(u_{n-1})$ 0
.il y a 4 exemples divergents,moins de 4exemples convergents,il n'y a pas d'erreur 1
.il y a 4exemples convergents,moins de 4 exemples divergents,il n'y a pas d'erreur 2
.il n'ya pas d'erreur,il y a moins de 4exemples convergents et moins de 4 exemples divergents 3
.il n'y a pas d'erreur,il y a le bon nombre d'exemples et au moins une suite du type $u_n=F(u_{n-1})$ 4
.il y a une seule erreur dans les exemples convergents,les exemples divergents sont justes 5
.il y a une seule erreur dans les exemples divergents ,les exemples convergents sont justes 6
.il y a le bon nombre d'exemples et 2 erreurs au moins 7
.il n'y a pas le bon nombre d'exemples et il y a une erreur au moins 8
.l'exercice n'a pas été abordé ou divers 9

Remarque:si,dans le texte il y a "des" au lieu de "4",on note le nombre d'exemples donnés à part etle "bon nombre" est le leur.

Annexe ⑦

Intervalles de confiance pour les pourcentages (au seuil de 95%)

Pourcentage / Taille	10%	20%	30%	40%	50%
10	0,19	0,25	0,28	0,30	0,31
20	0,13	0,17	0,20	0,21	0,22
30	0,11	0,14	0,16	0,17	0,18
40	0,09	0,12	0,14	0,15	0,15
50	0,08	0,11	0,13	0,14	0,14
70	0,07	0,09	0,11	0,11	0,12
100	0,06	0,08	0,09	0,10	0,10
150	0,05	0,06	0,07	0,08	0,08
200	0,04	0,06	0,06	0,07	0,07

Exemple d'utilisation de ce tableau.

Lorsque, parmi 50 personnes, on a trouvé que le caractère C a une fréquence relative de 50%, le tableau permet d'affirmer que tout pourcentage compris entre (50+14)% et (50-14)% est non significativement différent du premier au seuil de 95%; la probabilité pour que ces deux pourcentages soient différents est de 5%.

Annexe ⑧

(F.Boschet) Grille des tâches proposées dans les divers exercices sur les suites

1. Définition de la convergence en (ε, N)
2. Définition de la divergence en (ε, N) (éventuellement limite infinie)
3. Toute suite convergente est bornée
4. On fait intervenir une suite extraite
5. On applique le théorème sur les suites extraites
6. Propiétes algébriques des suites convergentes
7. Inégalités sur les limites
8. Théorème sur les suites monotones
9. Suites tendant vers l'infini
10. SI f admet une limite en a, si $\lim u_n = a$, alors $\lim f(u_n) = f(a)$
11. On utilise un résultat sur les suites ou séries géométriques
12. Siutes de cauchy; théorème de Cauchy.
13. Valeur d'adhérence; point d'accumulation
14. Théorème de Bolzano-Weierstrass
15. Négation d'une propriété logique
16. Propiétés des nombres N , Z Q R
17. Techniques de calcul sur R ou C
18. Majoration minoration encadrement
19. Fonctions continues équivalents fonctions usuelles
20. Construction d'un exemple ou d'un contre exemple
21. Croissance des fonctions
22. Organisation de résultats déjà démontrés, reconnaissance du résultat d'une question précédente.
23. Généralisation
24. Autres

Annexe (9) .

Pour chaque analyse factorielle, nous joignons la liste des contributions et corrélations de toutes les variables aux 7 premiers axes et le nuage obtenu dans le plan (axe 1, axe 2). Nous avons souligné sur les deux (ou trois) premiers axes les contributions (resp. corrélations) à retenir. Nous n'avons laissé sur les nuages comportant trop de variables que les points construisant les axes ou bien corrélés avec eux. Voici la liste des analyses factorielles évoquées dans le texte et ci-jointes dans cet ordre (avec l'endroit du texte où l'analyse est utilisée).

1. Niveau, modèles exprimés et dessinés et genre du dessin (chapitre 3, 3.4.d)).
2. Modèles x exemples (chapitre 3, 2ème partie).
3. Modèles, Exemples x Exercice 5 (chapitre 4, 4.3.5.).
4. Modèles, Exemples x Exercice 7 (chapitre 5, 5.5.).
5. Modèles x Exercice 5 et Exercice 7 (chapitre 5, 5.5.).
6. Modèles x Exemples procédures à tous les exercices (chapitre 7, 7.1.3.).
7. Pertinence: analyse des questions 1 à 10 (chapitre 7, 7.2.1.).
8. Données sociologiques en supplémentaires (chapitre 7, 7.2.2.).

Les niveaux entourés O sur les analyses sont les suivantes:

0 DEUG 1 tout de suite après le cours
1 DEUG 1 moins d'un mois après le cours et les exercices
2 DEUG 1 entre un et trois mois après le cours
3 DEUG 1 plus de trois mois après le cours
4 Math. Sup. C moins d'un mois après le cours
5 Math. Sup. C entre un et trois mois après le cours
6 Math. Sup. C plus de trois mois après le cours
7 DEUG 2
8 Math. Spé.
9 ou L Licence
10 ou M Maîtrise

Eventuellement, les niveaux peuvent apparaître sous la forme (nP) ou (nM) (n=0 à 10). Les autres sigles ont été introduits dans le texte (chapitres 4,5,6) sauf les sigles affectés aux modèles (ci-joints) et aux variables introduites dans le chapitre 3 (ci-après).

PRIM	Primitif
TEND	Tend vers
ABS	Pas de modèle exprimé
TAUT	Tautologie
DEF	Définition
DMO	Dynamique Monotone
DYN	Dynamique
PSTA	Préstatique
MIX	Mixte
STA	Statique
MNAB	Questions 1 et 2 non abordées

COMMENTAIRES SUR LA LIMITE

LNPA	La limite ne peut être atteinte
LIPA	La limite peut être atteinte
LIDA	La limite doit être atteinte
LNPD	La limite ne peut être dépassée
LNAB	Non abordé. Questions 1 et 2 abordées
LTNA	Non abordé. Questions 1 et 2 non abordées
LIDI	Divers

MODELES DESSINES

MDAB	Pas concluant sur le dessin ou pas de dessin
MDNM	Modèle dessiné non monotone
MDMC	Modèle dessiné monotone croissant
MDMD	Modèle dessiné monotone décroissant
MDMO	Modèle dessiné monotone

EXPLICATION DU MOT SUITE

SNEX	Pas d'explication sur les suites
SEJU	Explication sur les suites juste
SEIF	Explication sur les suites insuffisante ou fausse
STNA	Pas abordé

COMMENTAIRES SUR LA DIVERGENCE

DIJU	Précisent les deux sous-cas
DITR	Non convergent
DIPL	Pas de limite
DIIN	Oubli d'un cas et en plus d'un infini
DIFA	Faux
DINA	Pas abordé

EXPLICATION AUX PLUS JEUNES

JNAB	Pas abordé ou question pas posée
JCON	Plus concret
JDES	Dessin seulement
JNTA	Changement de vocabulaire
JSEC	Pas de changement
JDIV	Divers autres

LES EXEMPLES DE SUITES CONVERGENTES

1/N	1/n cité en premier et seul
N 1/N	Pas de suite de ce type
T 1/N	Une seule suite de ce type
D 1/N	Deux suites de ce type
ECMO	Exemples convergents tous monotones
ECMN	Exemples convergents non tous monotones

LES EXEMPLES DE SUITES DIVERGENTES

N	n en premier et seul
NN	Pas de suite de ce type
TN	Une seule suite de ce type
DN	Deux suites de ce type
EDNM	Exemples divergents tous croissants non majorés
EDSI	Au moins un en sin sans $(-1)^n$
EDAL	Au moins un en $(-1)^n$ sans sin
EDAL	Au moins un en $(-1)^n$ et un en sin
EDRE	Le reste

LES FONCTIONS UTILISEES DANS LES EXEMPLES

LECD	Exponentielle et/ou logarithmes dans exemples convergents et divergents
LEC	Exponentielle et/ou logarithmes dans exemples convergents
LED	Exponentielle et/ou logarithmes dans exemples divergents
RACD	Racines dans exemples convergents et divergents
RAC	Racines dans exemples convergents
RAD	Racines dans exemples divergents
FRCD	Fractions dans exemples convergents et divergents
FRC	Fractions dans exemples convergents
FRD	Fractions dans exemples divergents
RIEN	Le reste

UTILISATION DES SUITES GEOMETRIQUES

SGC	Suites géométriques dans exemples convergents
SGD	Suites géométriques dans exemples divergents
SGCD	Suites géométriques dans exemples convergents et divergents
PSG 1	Pas de suites géométriques, tous les exemples différents
PSG 2	Pas de suites géométriques; deux exemples identiques soit convergents, soit divergents
PSG 3	Pas de suites géométriques; deux exemples identiques convergents et divergents
PSG 4	Pas de suite géométriques
ETNA	Exemples non abordés

LE GENRE DU DESSIN

NDES	Pas de dessin
FONC	Genre 1
APPL	Genre 2
LIN	Genre 3
PLAN	Genre 4

OBJET 11	-.36886227	-.38332695	.2949C68C	.15268117	.06475252	.22813737	.18660873	.15447289
OBJET 12	-.29066459	.31417120	.25715142	-.35112238	-.28577077	.09541285	-.32891828	-.28778708
OBJET 13	-.23443574	-.07758045	-.44245923	.07072705	-.13231748	-.11011523	-.12737072	.14867353
OBJET 14	-.34051800	.21727133	.34420365	.35163027	.11648607	-.03714918	-.25198817	-.12831849
OBJET 15	-.39177316	-.07417059	-.10285836	-.43576449	-.30542362	-.20016205	.36432594	.12645096
OBJET 16	-.12488461	-.17883605	-.36681598	.12424618	.24277109	-.18247724	.06849098	-.52166969

1 LES VALEURS PROPRES VAL(1)=1.00000286

NUM	ITER	VAL PROPRE	POURCENT	CUMUL	I	HISTOGRAMME DES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE
2	C	.11902346	50.999	50.999	I	CCCCCCCCCCCCCCC OOOOCCCCCCCCCCC OOOOCCCCCCCCCCC CCCCCCCCCCCCCCC
3	C	.03009944	12.891	63.890	I	CCCCCCCCCCCCCCC
4	1	.02712748	11.618	75.507	I	CCCCCCCCCCCCCC
5	2	.01965626	8.418	83.925	I	CCCCCCCCCC
6	1	.01632261	6.990	90.916	I	CCCCCCCC
7	1	.00916363	3.924	94.840	I	CCCCC
8	2	.00592756	2.539	97.379	I	CCC
9	2	.00469740	2.012	99.391	I	CC
10	1	.00105499	.452	99.842	I	C
11	2	.00036827	.158	100.000	I	
12	C	.00000021	.000	100.000	I	
13	2	.00000011	.000	100.000	I	
14	4	-.00000001	-.000	100.000	I	
15	2	-.00000009	-.000	100.000	I	
16	1	-.00000016	-.000	100.000	I	

	I1	GLT	PBID	INR	1#F	C0R	CTR	2#F	C0R	CTR	3#F	C0R	CTR	4#F	C0R	CTR	5#F	C0R	CTR	6#F	C0R	CTR	7#F	C0R	CTR
1	C	997	88	193	582	665	252	320	201	301	202	80	133	150	44	101	-60	7	20	11	0	1	3	0	0
2	1	994	72	75	169	117	17	-90	34	20	-233	225	145	308	390	347	215	190	203	-72	22	42	62	16	46
3	2	981	20	51	583	577	57	-30	2	1	158	42	18	-174	52	31	-312	167	121	-22	1	1	287	140	280
4	3	957	87	83	393	697	113	27	3	2	-92	39	28	-145	96	95	75	25	30	-133	81	172	-59	16	53
5	4	997	80	75	109	54	8	132	80	46	-343	543	350	-206	196	175	12	1	1	148	101	193	69	22	64
6	5	998	161	167	-459	874	286	37	6	7	79	26	37	-57	14	28	-10	0	1	-117	58	245	70	20	132
7	6	994	46	76	-210	115	17	83	18	11	341	303	199	-131	45	41	-416	451	491	-155	62	121	-6	0	0
8	7	998	139	124	254	312	76	-355	613	(588)	106	54	58	-27	4	6	-34	6	10	-44	9	29	-6	0	1
9	8	965	155	28	-121	353	19	50	58	13	-31	25	6	-32	26	9	-71	124	49	-12	4	3	-125	375	413
10	9	698	70	40	-248	463	37	-59	27	8	-100	77	27	118	104	50	-53	22	13	7	0	0	-26	5	8
11	10	925	80	89	-417	677	118	30	3	2	5	0	0	171	113	119	-110	47	60	148	85	193	9	0	1
		1452.0	1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000	

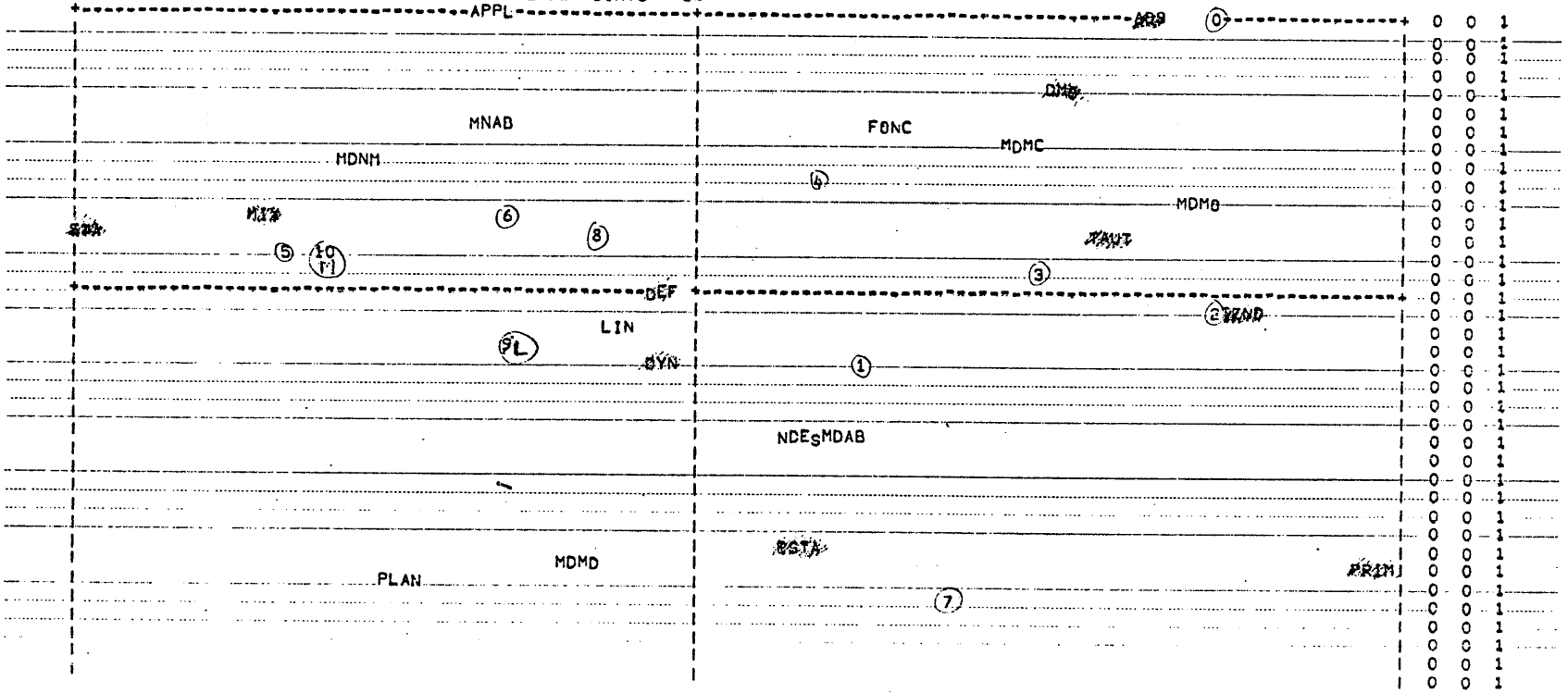
	J1	GLT	PBID	INR	1#F	C0R	CTR	2#F	C0R	CTR	3#F	C0R	CTR	4#F	C0R	CTR	5#F	C0R	CTR	6#F	C0R	CTR	7#F	C0R	CTR
1	PRIM	992	38	147	802	705	203	-317	111	126	356	139	175	-106	13	22	6	0	0	-32	1	4	145	23	133
2	DEF	951	7	22	-13	0	0	7	0	0	-400	210	40	659	568	148	-56	4	1	347	158	88	-92	11	10
3	DYN	979	155	10	-32	69	1	-77	383	31	18	20	2	-55	197	24	-56	206	31	25	41	11	-31	63	26
4	DMB	891	13	26	415	(386)	19	224	113	22	-332	249	55	-135	42	13	-89	18	7	2	0	0	192	83	83
5	MIX	965	76	79	-453	852	132	84	29	18	-15	1	1	-12	1	1	90	33	38	-92	36	73	-57	13	42
6	PSTA	998	36	68	109	27	4	-294	199	105	-235	127	74	402	369	(298)	323	238	(231)	-89	18	32	93	20	53
7	STA	919	27	77	-701	757	114	62	6	4	237	86	57	39	2	2	-140	30	33	-151	36	70	-33	2	5
8	TEND	950	31	66	641	826	107	-17	1	0	-147	44	25	132	35	27	7	0	0	-58	7	12	-134	37	95
9	ABS	988	25	77	541	413	63	308	134	80	129	24	16	378	202	185	-318	143	(158)	189	50	99	125	22	67
10	TAUT	990	12	60	459	182	21	61	3	1	412	147	75	-258	58	41	690	413	(352)	437	165	251	-160	22	53
11	MDNM	988	136	96	-358	781	147	139	117	87	68	28	23	25	4	4	79	38	52	48	14	35	32	6	24
12	MDMC	999	84	85	373	595	59	154	101	66	-198	169	123	-108	51	51	42	8	9	-107	50	108	-75	25	83
13	MDMD	940	55	34	-113	89	6	-326	732	196	50	17	5	-78	43	18	-59	25	12	-51	18	16	49	16	22

Annexe ⑨ 1. NIVEAUX, MODÈLES EXPRIMÉS, DESSINÉS, GENRE DU DESSIN

14	FONC	988	116	59	220	411	47	175	261	118	170	245	124	48	19	14	-13	2	11	-70	43	63	-28	7	16
15	LIN	987	153	43	-64	65	6	-45	32	11	-182	513	190	-108	-182	-93	-64	65	40	-89	-121	-133	-25	-9	-16
16	PLAN	951	34	52	-333	311	32	-343	331	135	111	34	15	184	95	59	-125	44	33	35	4	5	-216	132	272
		1492.C	1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000	
	JSUP	CLT	PBID	INR	1#F	CBR	CTR	2#F	CBR	CTR	3#F	CBR	CTR	4#F	CBR	CTR	5#F	CBR	CTR	6#F	CBR	CTR	7#F	CBR	CTR
17	MNAB	756	23	148	-239	38	11	176	20	231	202	27	341	420	117	2051	-364	88	1861	816	4401	658	197	26	149
18	MDAB	915	150	123	-179	168	401	-180	170	163	87	40	42	-280	-409	-597	-32	6	101	-152	-121	-378	-16	-1	-7
19	MDMB	653	18	126	590	214	53	102	6	61	313	61	66	-391	95	141	-515	164	295	-1	0	0	427	113	558
20	NDES	659	109	87	123	81	14	-169	155	104	118	74	56	157	131	136	-111	67	83	168	150	333	-14	1	4
21	APPL	941	26	135	-233	45	12	317	84	87	514	219	255	31	1	1	601	299	578	-128	-14	-48	579	279	1481
22	DINC	883	5	297	490	19	11	-526	21	49	-1420	156	399	2198	3731	318	1684	219	932	-766	45	344	805	50	586
		1492.C	915			141			433			852			2398			2084			2761			2785	

1 AXE HORIZONTAL(1)--AXE VERTICAL(2)--TITRE: ANACOR DU TABLEAU CROISANT LE NIVEAU ET LES MODELES EXPRIME,DESSINE

LARGEUR= 1.5C426 HAUTEUR= .84690 -NOMBRE DE POINTS= 33



Les niveaux sont entourés ○ , les modèles exprimés sont "grisés."

ANNEXE ⑨1

1ère axe 28% inertie 2ème axe 10%

1	PRTIN	794	14	36	-214	362	47	84	56	19	-143	164	68	-98	76	40	-124	123	72	0	0	0	41	13	10
2	DEF	567	3	24	40	3	0	373	301	67	102	23	6	239	124	42	-111	27	10	195	83	35	-51	6	3
3	DYN	425	59	13	16	23	1	-43	167	21	23	48	7	31	82	16	27	64	14	13	15	4	17	26	7
4	DMO	553	5	30	-247	210	22	-173	103	29	-106	39	13	0	0	0	-7	0	0	-205	144	78	129	57	35
5	MIX	829	29	26	184	696	70	-8	2	0	61	77	25	42	36	15	-18	7	3	3	0	0	-22	11	6
6	PSTA	407	14	15	-110	222	12	14	4	1	40	29	5	25	11	2	81	118	29	-32	20	6	-12	3	1
7	STA	714	10	30	254	453	48	3	0	0	-121	105	36	-114	93	40	-44	14	7	-33	8	4	76	41	25
8	TEND	803	12	37	-158	160	21	-53	18	6	-196	244	104	-109	77	41	31	6	4	79	40	27	-201	256	194
9	ABS	942	10	34	-300	517	82	-53	16	5	198	224	87	-31	6	3	-93	50	27	-149	129	79	4	0	0
10	TAUT	832	5	37	6	0	0	466	534	185	-98	24	10	98	24	12	-288	205	121	135	45	30	11	0	0
11	NPA	410	10	16	-65	56	3	-37	18	3	-47	30	5	-100	131	29	-25	9	2	-101	132	37	-50	34	11
12	LIPA	651	15	30	-25	7	1	33	11	3	142	201	68	155	239	101	-90	83	40	28	8	4	-100	102	61
13	IDA	791	5	40	-323	242	34	-58	8	3	167	64	29	-286	189	108	200	92	59	271	169	122	-108	27	22
14	NPD	666	10	21	-114	132	10	-150	230	45	19	4	1	-94	90	27	61	37	12	85	73	27	100	100	42
15	LIC	760	1	30	-27	0	0	73	3	1	-1033	698	240	132	11	5	-45	1	1	248	40	22	-99	7	4
16	LNAB	525	119	8	18	90	3	22	135	11	-21	136	13	10	31	4	0	0	0	-17	89	13	12	44	7
17	PDFS	711	34	34	-154	486	59	95	182	58	21	9	4	-21	10	5	-16	6	3	27	15	9	-12	3	2
18	APE	728	6	25	-151	119	10	49	12	3	106	58	16	-201	210	74	-97	49	20	-118	73	33	-200	207	104
19	DAM	799	114	11	49	481	19	-29	182	19	-10	27	3	16	53	9	-1	1	0	7	10	2	15	45	10
20	DPI	737	5	29	-142	72	7	136	65	18	-199	141	47	71	18	7	243	207	97	-257	234	123	-4	0	0
21	MDM	940	52	50	192	770	135	-4	0	0	-25	14	8	-22	11	7	-78	126	101	-23	11	10	-18	8	8
22	MDN	646	32	25	-100	257	23	-72	136	32	30	23	7	-8	2	1	-68	119	49	2	0	0	65	109	56
23	MDN	343	21	21	7	1	0	-32	21	4	62	77	19	-59	70	21	-62	77	27	-11	3	1	-68	94	41
24	MDN	448	7	16	-60	31	2	-60	31	5	-109	102	19	-48	20	5	-32	9	2	-111	105	31	133	150	50
25	SNEX	484	55	14	-45	169	8	50	201	26	-24	49	8	27	60	12	2	0	0	4	1	0	-6	4	1
26	SEJU	862	52	35	145	618	77	-15	7	2	47	65	26	-67	136	68	-33	35	20	4	0	0	6	1	1
27	SEIF	779	53	27	-122	597	56	-19	16	4	-37	56	17	41	67	25	29	34	14	-14	9	4	0	0	0
28	JCON	452	46	18	-28	43	3	-17	17	3	58	173	36	43	92	24	43	95	28	13	9	3	21	23	8
29	JDFS	603	5	13	-30	7	0	-27	6	1	-169	222	34	107	88	17	72	40	8	19	3	1	-174	237	64
30	JNTA	362	43	11	-37	113	4	-18	29	3	-11	10	1	13	13	2	-44	160	27	-14	17	3	-15	20	4
31	JFAU	765	6	34	-157	94	11	182	124	40	33	4	2	-225	192	94	168	106	58	227	192	119	119	53	36
32	JSFC	606	15	20	150	324	23	-48	34	7	18	5	1	-105	162	47	-34	18	6	-35	19	7	-54	44	18
33	JDTV	424	3	10	-7	0	0	58	14	2	56	13	2	-125	67	15	-153	100	25	-5	0	0	234	230	74
34	DIJU	563	18	21	9	1	0	122	256	50	61	63	15	20	7	2	115	226	75	0	0	0	24	10	4
35	DITR	824	60	22	114	694	55	-27	43	9	-23	31	8	-22	27	9	-9	5	2	21	24	10	2	0	0
36	DIPL	649	15	40	-47	18	3	275	572	215	26	5	2	-39	12	7	15	2	1	-54	23	16	48	17	14
37	DIIN	926	24	72	-316	660	169	-148	145	99	-2	0	0	95	60	62	-65	28	33	71	33	43	1	0	0
38	DIFA	622	14	10	-19	7	0	0	0	0	35	21	4	-34	21	5	0	0	0	-139	337	96	-116	236	76
		23430.0	1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000	

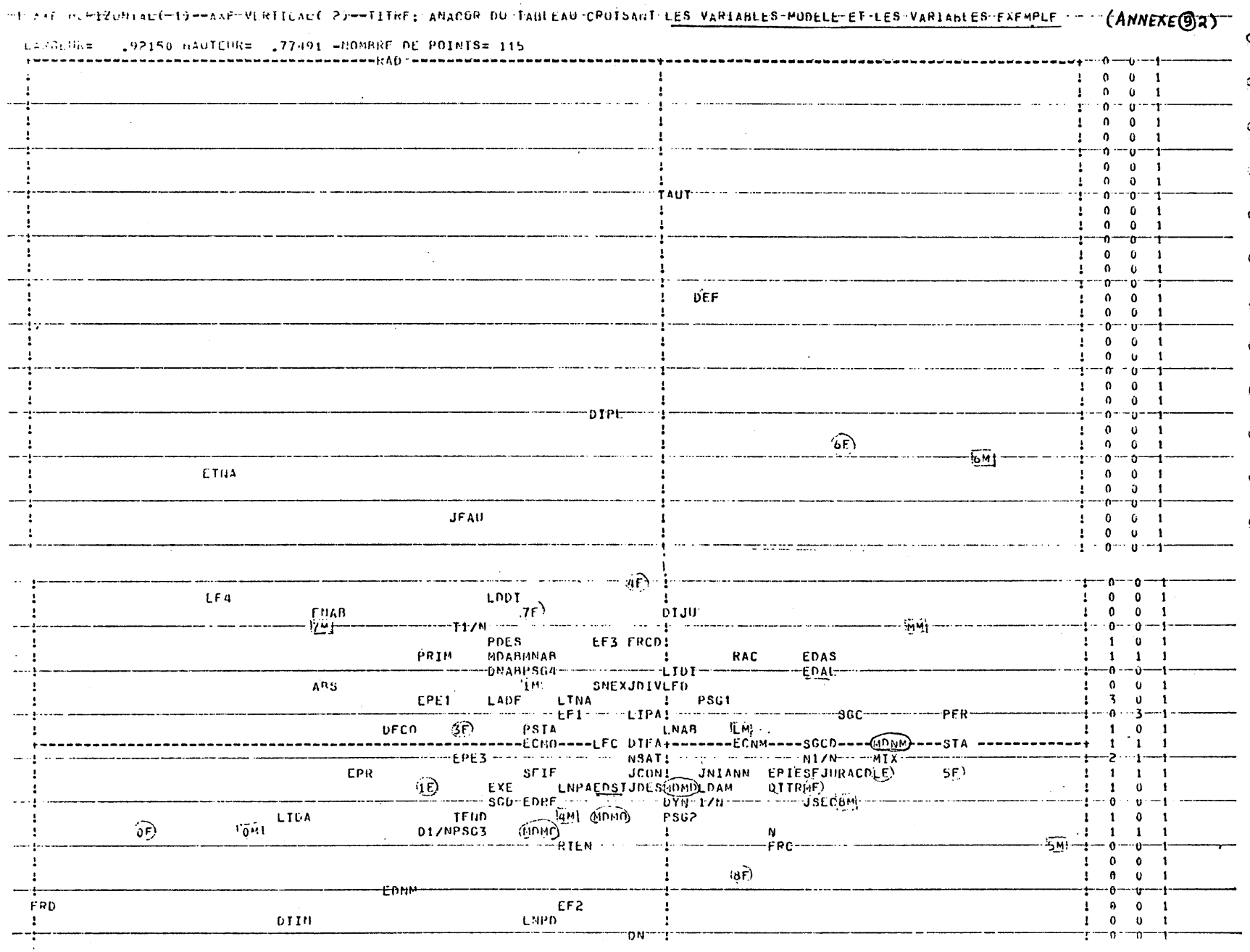
	ISUP	OLT	POID	INR	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
39	MRAB	511	9	17	-96	97	6	75	59	9	-94	94	18	128	170	41	3	0	0	-62	41	12	-69	50	17
40	LINA	525	10	12	-76	96	4	42	29	3	-58	56	8	101	165	28	-27	12	2	-70	83	18	-71	84	20
41	DINA	551	9	14	-88	105	5	46	28	4	-68	63	10	123	198	41	-29	12	3	-69	64	17	-78	61	24
42	MDAB	775	57	50	-154	550	97	-80	147	69	-29	21	12	-36	29	21	-12	4	3	-20	11	9	-23	13	13
43	STNA	551	9	14	-88	105	5	46	28	4	-68	63	10	123	198	41	-29	12	3	-69	64	17	-78	61	24
44	JNAB	658	51	30	-70	172	18	49	81	23	-89	270	93	33	37	16	-18	12	6	-38	53	28	-18	12	7
45	DIPA	299	39	14	-21	27	1	6	2	0	-50	149	24	29	48	10	-13	11	2	-30	52	13	-12	10	3
46	ERP	579	12	35	-251	432	53	-21	3	1	-13	1	1	-52	19	10	-53	20	11	-96	64	40	-76	40	28
47	EXP	212	6	22	-132	104	8	-31	6	1	-78	37	9	-55	18	6	-30	6	2	-66	26	10	51	15	7
48	DFCU	456	16	41	-227	399	58	-15	2	1	2	0	0	32	8	5	24	4	3	-34	9	7	-66	34	28
49	NSAT	323	89	12	-30	149	6	-4	4	0	-24	94	13	6	6	1	-13	29	5	16	40	8	2	1	0
50	DNAB	602	10	10	-129	211	12	71	63	9	-85	92	17	91	104	24	-7	1	0	-85	91	26	-56	40	13
51	PER	832	37	60	-246	743	158	-35	15	9	-58	41	28	-9	1	1	36	16	16	14	3	3	33	13	16

ANNEXE ⑨ 2 MODÈLES x EXEMPLES

52	ME	!	659	16	103!	-440	617	225!	-68	15	15!	-32	3	4!	-46	7	10!	-29	3	5!	34	4	7!	-55	10	21!
53	1E	!	547	13	37!	-204	291	39!	-27	5	2!	-168	197	84!	27	5	3!	45	14	8!	-52	19	13!	-47	16	12!
54	2E	!	403	4	52!	-288	124	23!	-182	50	24!	297	132	78!	-17	0	0!	35	2	2!	-223	74	69!	119	21	22!
55	3E	!	302	14	41!	-160	178	26!	-16	2	1!	-47	16	7!	-43	13	8!	-45	15	10!	-59	25	18!	-86	53	43!
56	4E	!	244	12	60!	-31	4	1!	147	88	50!	-100	42	29!	-22	2	2!	108	48	46!	96	38	41!	74	22	27!
57	5E	!	727	25	61!	260	553	119!	-19	3	2!	95	74	52!	25	5	5!	-56	27	26!	2	0	0!	-88	65	80!
58	6E	!	497	8	35!	159	113	14!	249	277	92!	20	2	1!	-124	71	36!	-66	20	12!	50	11	7!	-23	3	2!
59	7E	!	620	26	31!	-116	225	25!	118	228	67!	-38	25	9!	57	53	24!	-64	69	35!	32	17	10!	-12	3	2!
60	8E	!	183	24	57!	84	58	12!	-111	102	55!	-29	7	5!	-27	6	5!	9	1	1!	-12	1	1!	32	8	9!
61	9E	!	335	12	53!	189	156	29!	-11	1	0!	99	42	26!	18	1	1!	47	10	8!	14	1	1!	169	124	134!
62	ME	!	366	16	50!	146	137	24!	-16	2	1!	-2	0	0!	128	105	75!	95	58	47!	-91	54	49!	39	10	10!
		!		23430.0	916!			968!			443!			536!			409!			255!			426!			563!
	J1	!	OLT	POTO	INR!	1#F	COR	CTR!	2#F	COR	CTR!	3#F	COR	CTR!	4#F	COR	CTR!	5#F	COR	CTR!	6#F	COR	CTR!	7#F	COR	CTR!
1	1/N	!	554	66	13!	39	150	7!	-42	181	23!	17	30	5!	-10	13	2!	16	24	5!	-27	75	18!	29	81	22!
2	N1/N	!	868	46	32!	139	588	66!	-10	4	1!	-7	2	1!	-16	9	4!	-57	104	53!	23	17	9!	-68	144	92!
3	T1/N	!	875	41	43!	-172	573	86!	104	208	83!	-53	56	28!	26	13	8!	35	24	16!	-2	0	0!	7	1	1!
4	D1/N	!	676	12	25!	-193	356	32!	-68	45	11!	105	104	30!	49	23	8!	21	4	2!	78	57	26!	96	67	44!
5	FCM0	!	767	63	31!	-111	515	56!	3	0	0!	6	2	1!	7	2	1!	20	16	8!	47	97	53!	57	135	84!
6	FCNM	!	758	104	19!	67	497	33!	0	0	0!	-5	3	1!	-2	1	0!	-12	18	5!	30	104	35!	-34	135	51!
7	N	!	827	52	37!	113	364	47!	-68	136	47!	44	56	24!	51	75	39!	0	0	0!	-56	92	61!	60	104	77!
8	NN	!	653	46	29!	76	180	19!	-19	13	4!	-12	5	2!	-44	64	27!	67	142	66!	82	211	111!	-33	38	22!
9	TN	!	882	62	47!	-149	591	99!	91	219	98!	-9	2	1!	1	0	0!	-41	45	35!	-16	7	6!	-25	18	17!
10	DN	!	356	7	31!	-26	3	0!	-158	111	32!	-197	171	60!	-79	28	12!	-82	30	15!	54	13	7!	8	0	0!
11	FDNM	!	930	42	72!	-230	619	158!	-120	170	115!	39	17	14!	67	52	54!	-57	39	46!	53	32	42!	-6	1	1!
12	FDSI	!	703	27	29!	-53	54	5!	-32	20	5!	54	55	18!	-147	410	168!	-42	35	16!	-70	96	49!	-41	33	19!
13	FDAL	!	929	46	54!	135	507	62!	72	143	46!	0	0	0!	24	16	8!	97	260	44!	2	0	0!	11	3	2!
14	FDAS	!	723	39	39!	150	448	62!	79	124	46!	-30	19	9!	-54	60	34!	-30	19	12!	-2	0	0!	51	53	42!
15	FDRE	!	657	11	34!	-112	86	10!	-42	12	4!	-180	223	86!	200	271	129!	7	0	0!	-11	1	1!	-96	64	44!
16	LECD	!	832	33	21!	-25	21	2!	-5	1	0!	31	31	7!	-85	234	69!	-45	69	23!	-1	0	0!	49	76	32!
17	LEC	!	602	16	34!	-51	25	3!	7	0	0!	190	331	128!	103	98	47!	76	53	29!	-39	15	9!	-93	80	55!
18	LED	!	512	15	22!	24	8	1!	55	42	9!	8	1	0!	76	79	25!	115	182	65!	-117	192	77!	24	8	3!
19	PACD	!	342	5	21!	171	147	11!	-23	3	1!	-18	2	0!	-150	114	35!	20	2	1!	-112	64	24!	-44	10	4!
20	PAC	!	511	13	14!	71	89	4!	82	118	16!	-113	229	38!	17	5	1!	-49	44	10!	-3	0	0!	38	26	7!
21	PAD	!	845	4	54!	-236	92	18!	587	566	288!	101	17	10!	42	3	2!	-266	117	102!	168	47	45!	46	3	4!
22	FRCD	!	454	12	23!	-26	8	1!	94	91	20!	-13	2	1!	-146	222	73!	80	66	25!	78	63	26!	-12	2	1!
23	FRC	!	774	41	27!	91	253	24!	-73	167	43!	59	106	33!	53	85	33!	-58	106	46!	21	13	6!	-37	44	24!
24	FRD	!	806	2	50!	-555	205	36!	-134	12	6!	414	114	45!	-210	30	21!	471	148	119!	625	260	234!	236	37	38!
25	RIFN	!	831	26	42!	-80	81	12!	-78	76	30!	-237	699	335!	19	5	3!	34	15	10!	-10	2	1!	15	3	2!
26	SGC	!	491	19	28!	-153	316	31!	-25	8	2!	28	11	3!	79	85	33!	-37	20	9!	51	35	17!	-33	16	9!
27	SGD	!	677	19	32!	-146	257	29!	-34	15	4!	72	61	23!	-116	162	75!	0	0	0!	-117	163	95!	-39	19	12!
28	SGCD	!	424	26	25!	127	337	30!	10	2	0!	35	25	7!	10	2	1!	-12	4	1!	5	0	0!	51	54	27!
29	PSG1	!	420	46	10!	29	48	3!	47	123	19!	26	37	7!	54	161	38!	-13	11	3!	-3	1	0!	29	48	16!
30	PSG2	!	539	28	21!	8	2	0!	-58	91	18!	-97	251	61!	-28	23	7!	18	9	3!	57	85	32!	55	78	34!
31	PSG3	!	706	20	29!	-182	479	48!	-71	73	20!	-21	7	2!	-84	102	42!	3	0	0!	-20	6	3!	-51	39	22!
32	PSG4	!	742	7	27!	-95	45	4!	86	36	9!	26	3	1!	11	1	0!	247	299	132!	-54	15	7!	-263	343	190!
		!		23430.0	1000!			1000!			1000!			1000!			1000!			1000!			1000!			1000!
	JSUP	!	OLT	POTO	INR!	1#F	COR	CTR!	2#F	COR	CTR!	3#F	COR	CTR!	4#F	COR	CTR!	5#F	COR	CTR!	6#F	COR	CTR!	7#F	COR	CTR!
33	0N	!	547	15	79!	-356	457	128!	-65	16	12!	-12	1	1!	-100	38	43!	-72	20	25!	-53	11	15!	34	4	7!
34	1M	!	340	13	35!	-133	117	15!	54	22	7!	-58	26	10!	101	78	39!	40	12	7!	-22	4	2!	-102	81	58!
35	2M	!	416	4	53!	-345	174	33!	-187	51	26!	-65	6	4!	-131	25	19!	-212	66	56!	-192	54	51!	166	40	43!

36	3I		406	15	3.1	-183	261	35	-60	29	10	-68	36	16	-50	20	11	-51	21	13	-40	13	9	58	26	20
37	4I		59	13	53	-65	21	4	-60	17	9	26	3	2	3	0	0	-2	0	0	-2	0	0	62	18	20
38	5I		820	27	93	366	760	253	-89	47	41	22	3	3	10	1	1	-2	0	0	-5	0	0	8	0	1
39	6I		536	8	61	287	217	47	239	151	87	133	46	32	-170	77	67	-73	15	14	105	29	32	-19	1	1
40	7I		656	25	88	-301	526	165	108	67	56	-6	0	0	16	2	2	-33	7	9	90	47	74	-33	7	12
41	8I		383	25	36	152	317	40	-43	27	9	11	2	1	-20	6	3	-42	25	14	6	1	0	-17	5	3
42	LM		421	11	25	65	37	3	19	3	1	26	6	2	111	106	39	174	262	107	4	0	0	29	7	4
43	MM		521	12	60	222	198	42	108	47	27	-25	3	2	119	57	49	224	202	196	-47	9	10	-36	5	7
44	FTMA		649	2	56	-379	93	18	223	32	17	-646	270	172	339	74	59	-341	75	67	386	96	96	16	0	0
45	FBTE		826	99	31	101	644	71	23	36	11	24	37	13	32	69	31	21	28	14	1	0	0	14	12	8
46	FPF1		382	8	32	-198	203	23	38	7	2	35	6	2	5	0	0	-38	8	4	165	140	81	60	18	12
47	FPF2		343	7	24	71	30	3	23	3	1	8	0	0	177	187	64	-36	8	3	-89	48	21	-105	67	32
48	FPF3		386	12	44	-163	150	24	-8	0	0	-142	114	58	128	91	58	-13	1	1	46	12	10	-56	18	16
49	FE1		264	9	32	-83	40	5	36	7	2	113	74	27	79	36	16	-2	0	0	4	0	0	136	107	69
50	FE2		261	7	24	-87	48	4	-129	104	24	0	0	0	-98	60	21	9	1	0	-86	46	20	20	2	1
51	FE3		267	10	35	-50	14	2	-96	50	17	-62	22	9	-36	8	4	-87	42	24	-125	86	55	-91	45	33
52	FE4		650	11	57	-371	560	112	127	65	35	-24	3	2	35	5	4	-20	2	2	-37	6	6	-46	9	10
53	FNAB		630	3	46	-279	91	15	123	17	8	-497	287	150	170	33	22	-140	23	17	362	151	125	-154	28	26
			23430.0	1003			1041			400			506			550			575			609			382

(ANNEXE 92)


AXE HORIZONTAL(=1)--AXE VERTICAL(2)--TITRE: ANACOR DU TABLEAU CROISANT LES VARIABLES-MODELE ET LES VARIABLES-EXEMPLE
LARGEUR= .92150 HAUTEUR= .77491 -NOMBRE DE POINTS= 115
RAD
TAUT
DEF
DIPL
ETNA
JFAU
LF4
LDDI
FNAB
T1/N
DIJU
PDES
EF3 FRCD
PRIM
MDABMNAB
RAC
EDAS
DNABPSG4
LIDI
EDAL
ABS
SNEXJDIVLFD
EPE1
LADF
LTNA
LIPA
PSG1
SGC
PFR
EF1
DFCO
PSTA
LNAB
ECHO
LFC
DIFA
ECNM
SGCD
STA
EPE3
NSAT
N1/N
MIX
EPR
SFIF
JCON
JNIANN
EPIESFJURACDLE
EXE
LNPA
EDST
JDES
LDAM
QTTRMF
SGD
EDRF
DYN
I/N
JSECBM
LIDA
TEND
PSG2
D1/NPSG3
N
RIEN
FRC
EDNM
FRD
EF2
DTIN
LNPD
DN

LES VALEURS PROPRES			VAL(1)= .99999809																				
NUM	ITLP	VAL PROPRE	POURCENT	CUMUL	I*I	HISTOGRAMME DES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE																	
2	0	.06564340	51.172	51.172	I0I	0000000000000000	0000000000000000	0000000000000000	0000000000000000														
3	1	.02010889	15.628	66.800	I0I	000000000000000	000																
4	1	.01334545	10.372	77.172	I0I	000000000000																	
5	2	.00977079	7.600	84.772	I0I	0000000000																	
6	2	.00719406	5.591	90.363	I0I	0000000																	
7	2	.00553311	4.300	94.663	I0I	00000																	
8	2	.00296511	2.304	96.968	I0I	000																	
9	4	.00143554	1.116	98.083	I0I	0																	
10	1	.00136377	1.060	99.143	I0I	0																	
11	2	.00110265	.857	100.000	I0I	0																	

	I1	CLT	PUTD	INR	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
1	PRIM	966	21	60	-548	808	94	151	61	23	-76	16	9	27	2	2	31	3	3	126	42	59	-112	34	88
2	DEF	938	4	14	135	36	1	120	29	3	296	176	23	77	12	2	-576	668	165	71	10	3	-59	7	4
3	DYN	969	91	42	-173	500	41	-23	10	3	21	7	3	87	127	70	110	203	153	-64	122	119	0	0	0
4	DMO	960	8	53	-799	743	77	245	70	24	-25	1	0	-272	86	60	-118	17	16	-153	28	34	113	15	34
5	MIX	977	84	58	290	490	56	-78	36	13	-35	8	4	-269	424	325	7	0	0	-56	19	26	8	0	1
6	STAT	945	20	27	-41	10	1	-13	1	0	-134	105	28	-361	748	249	-86	44	21	-66	25	16	-45	12	14
7	STA	964	16	58	572	699	79	-31	2	1	67	10	5	-99	21	16	-271	158	163	182	71	95	40	3	9
8	TEND	968	16	86	-759	831	142	-49	4	2	183	48	41	-208	63	72	-37	2	3	19	1	1	-114	19	73
9	ABS	934	15	24	-383	707	33	-20	2	0	-103	52	12	-80	30	9	-131	84	36	-108	56	31	-25	3	3
10	TAUT	993	7	26	-457	415	21	282	158	27	-14	0	0	98	19	7	-101	21	10	152	46	28	410	334	382
11	MDAB	867	87	18	-103	405	14	-20	17	2	77	225	39	9	3	1	-68	179	58	-20	16	7	24	22	17
12	MDPM	983	78	80	-343	891	136	-41	13	7	-63	30	23	-63	30	31	-7	0	0	-6	0	1	-49	19	64
13	MDMC	966	47	33	-251	695	46	-7	1	0	-130	190	61	-1	0	0	-48	26	16	-69	54	41	-1	0	0
14	MDMD	976	32	50	-59	18	2	-265	351	112	-74	27	13	-125	79	52	204	205	182	243	292	339	28	4	9
15	MDMO	994	11	61	-315	135	16	702	668	262	-266	97	57	-115	18	15	-167	38	41	-154	33	46	-63	5	14
16	FCMO	944	95	22	-129	580	24	28	26	4	-60	126	26	32	35	10	-4	1	0	18	12	6	-68	164	153
17	FCMM	946	158	13	82	609	16	-15	24	2	38	131	17	-16	27	5	6	3	1	-7	6	2	40	146	85
18	FDMM	920	65	36	-195	535	38	-77	84	19	81	91	32	-77	82	39	-85	101	65	-24	8	7	-37	19	29
19	FDSI	995	42	52	-133	111	11	-251	395	132	-260	423	213	-6	0	0	-55	19	18	-86	47	57	5	0	0
20	FDAL	997	71	73	169	219	31	308	725	337	11	1	1	-41	13	13	21	4	5	66	33	55	-14	2	5
21	FDAS	969	58	40	-261	772	60	-72	60	15	-74	64	24	-19	4	2	-73	62	44	-7	1	1	-23	5	11
22	FDPE	979	18	73	-461	412	59	-120	28	13	520	522	368	-9	0	0	2	0	0	-90	16	27	-21	1	3
		2526.0	1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000	

	ISUP	CLT	PUTD	INR	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
23	0P	893	25	99	-387	332	58	-102	23	13	155	53	46	294	190	224	182	73	117	-300	200	416	-100	22	86
24	1P	686	18	33	-342	489	32	142	84	18	-47	9	3	-98	40	18	-98	40	24	-25	3	2	-72	21	31
25	2P	999	6	35	-639	537	37	287	108	24	-70	7	2	38	2	1	-13	0	0	110	16	13	500	328	500
26	3P	835	23	109	-892	781	166	65	7	5	74	9	10	106	19	27	12	0	0	87	13	32	60	6	28
27	4P	809	17	216	-114	8	3	779	368	514	-349	74	156	-285	50	143	-667	269	1052	-117	8	43	-389	92	875
28	5P	923	36	145	561	635	180	-140	40	37	42	4	5	-235	113	215	53	6	15	-106	23	78	31	2	12
29	6P	828	11	77	284	87	13	383	158	78	-406	179	132	-329	118	119	437	206	284	-164	30	53	216	50	168
30	7P	812	3	173	-537	596	201	-90	14	16	262	119	198	46	4	8	-87	13	41	146	37	148	129	29	215
31	8P	734	35	92	344	348	63	-127	48	28	-85	21	19	44	6	7	-293	254	418	-75	17	36	-116	40	161
32	1P	891	13	55	411	434	47	-240	150	53	-242	152	81	-63	11	8	-62	10	10	168	73	93	154	61	146
33	MP	920	24	163	-712	582	186	-115	15	16	79	7	11	151	26	56	-385	171	501	281	90	344	-158	29	206

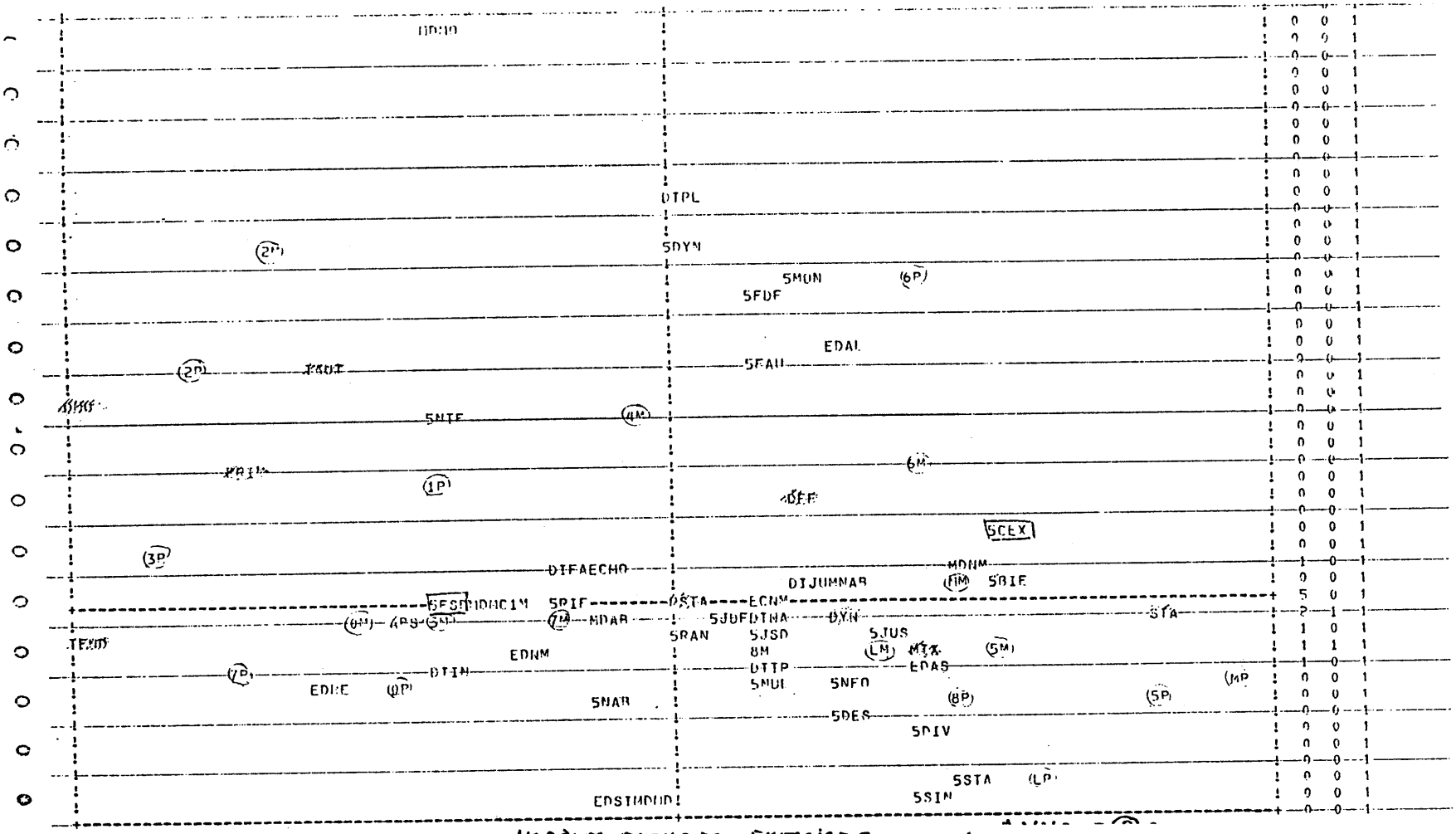
ANNEXE (9) 3 MODELES EXEMPLES VENTILES

34	MAL	609	13	141	166	215	61	17	2	01	72	39	51	105	82	151	140	106	67	135	197	511	-76	59	243

36	DIIN	933	70	56	96	195	13	-93	176	57	-5	1	0	-25	14	6	15	4	5	-161	527	417	11	71	155
37	DIPL	964	25	30	-95	5	0	486	894	265	-9	0	0	-37	5	5	95	33	27	52	4	4	79	23	47
38	DIIN	954	35	42	-223	711	58	-98	64	17	-65	27	11	-26	6	5	21	5	2	104	71	69	105	73	151
39	DIFA	741	21	20	-159	149	8	41	10	2	176	180	49	100	59	22	20	2	1	177	182	119	-166	162	197
40	DIMA	875	60	25	64	61	4	-3	0	0	38	29	7	74	109	34	-53	58	24	90	160	87	-147	458	445
	!	!	2526.0	1389	!		1042	!		1126	!		756	!		924	!		2560	!		2016	!		3404	!
	!	J1	!	CLT	POTD	IMR	!	1#F	COR	CTR	!	2#F	COR	CTR	!	3#F	COR	CTR	!	4#F	COR	CTR	!	5#F	COR	CTR	!	6#F	COR	CTR	!	7#F	COR	CTR	!
1	SJSD	!	937	158	66	!	94	182	21	!	-9	2	1	!	-36	28	16	!	172	608	481	!	-33	24	26	!	82	137	191	!	-16	6	15	!
2	SFSD	!	997	314	266	!	-325	974	506	!	-2	0	0	!	24	5	13	!	-30	9	30	!	-24	6	27	!	9	1	4	!	14	2	21	!
3	SLAB	!	955	29	52	!	-111	55	6	!	-130	75	25	!	290	366	185	!	-88	34	23	!	240	251	235	!	167	122	148	!	-109	52	117	!
4	SCFX	!	997	147	200	!	-371	786	367	!	-79	-36	46	!	-134	-98	-190	!	-63	-23	-61	!	-95	-52	-188	!	-11	-1	-4	!	-10	-1	-3	!
5	SSIN	!	920	47	72	!	276	387	55	!	-250	319	147	!	-184	173	120	!	-76	30	29	!	-6	0	0	!	45	10	18	!	14	1	1	!
6	SDFS	!	959	22	60	!	163	76	9	!	-156	70	27	!	358	362	209	!	213	128	101	!	224	142	152	!	-251	179	249	!	26	2	1	!
7	SDIV	!	697	6	20	!	260	127	61	!	-173	-57	-101	!	-185	-65	-161	!	-385	-279	-961	!	-296	-165	-771	!	-33	-2	-11	!	-29	-2	-11	!
8	SRAN	!	866	163	32	!	-13	8	0	!	-57	134	27	!	-82	275	85	!	8	2	1	!	-9	4	2	!	-105	443	330	!	-1	0	0	!
9	SMON	!	994	45	79	!	154	105	16	!	385	657	333	!	-47	10	8	!	-13	1	1	!	148	96	137	!	46	10	18	!	162	115	39	!
10	SSTA	!	952	40	83	!	345	452	731	!	-233	208	-1101	!	-129	-64	-511	!	-201	-154	-168	!	-131	-65	-961	!	-44	-7	-141	!	-21	-2	-11	!
11	SDYN	!	989	28	70	!	-26	2	0	!	443	614	274	!	-224	159	107	!	-56	10	9	!	125	49	61	!	-67	14	23	!	-211	141	421	!
	!	!	2526.0	1000	!		1000	!		1000	!		1000	!		1000	!		1000	!		1000	!		1000	!
	!	J3	!	CLT	POTD	IMR	!	1#F	COR	CTR	!	2#F	COR	CTR	!	3#F	COR	CTR	!	4#F	COR	CTR	!	5#F	COR	CTR	!	6#F	COR	CTR	!	7#F	COR	CTR	!
12	0M	!	724	99	211	!	-417	638	264	!	-19	1	2	!	-32	4	8	!	110	44	122	!	-84	27	101	!	-51	10	48	!	-6	0	2	!
13	1M	!	459	81	117	!	-203	225	51	!	-17	-2	-1	!	-88	-42	-47	!	-145	-114	-175	!	-106	-62	-130	!	-46	-11	-31	!	-21	-3	-11	!
14	2M	!	668	23	159	!	-496	283	88	!	426	207	211	!	-217	54	83	!	-54	3	7	!	316	114	325	!	-54	3	13	!	-60	4	21	!
15	3M	!	721	87	125	!	-319	552	135	!	-5	0	0	!	-81	37	44	!	27	4	7	!	9	0	1	!	-95	50	146	!	-119	78	424	!
16	4M	!	358	75	102	!	-72	31	6	!	213	258	169	!	-78	36	55	!	-28	5	7	!	45	11	21	!	-22	3	7	!	-49	14	61	!
17	5M	!	846	153	245	!	395	721	345	!	-59	18	28	!	-2	0	0	!	-139	96	308	!	26	3	14	!	32	5	28	!	-23	3	29	!
18	6M	!	459	48	100	!	260	252	49	!	161	97	62	!	-90	31	30	!	-8	0	0	!	3	0	0	!	86	28	65	!	117	51	221	!
19	7M	!	504	158	156	!	-191	291	89	!	-36	11	11	!	-51	20	30	!	-78	48	99	!	-65	33	92	!	-107	91	329	!	-36	10	71	!
20	8M	!	477	145	65	!	75	99	13	!	-70	87	36	!	-8	1	1	!	-82	120	103	!	-9	2	2	!	-90	144	217	!	37	24	67	!
21	9M	!	472	70	63	!	222	425	52	!	-60	32	13	!	12	1	1	!	-21	4	3	!	-22	4	5	!	17	3	4	!	-16	3	7	!
22	AM	!	740	95	136	!	425	568	151	!	-38	8	7	!	-107	62	82	!	-3	0	0	!	-125	85	209	!	-55	17	53	!	-8	0	2	!
23	SJUS	!	970	381	159	!	213	841	262	!	-56	61	62	!	4	6	1	!	-46	40	85	!	-2	0	0	!	-38	28	103	!	0	0	0	!
24	SJDF	!	175	55	60	!	28	5	1	!	-34	9	3	!	-73	39	22	!	-30	7	5	!	-108	84	91	!	-64	30	42	!	13	1	3	!
25	SFRF	!	958	69	118	!	85	42	10	!	363	772	584	!	-90	49	56	!	11	1	1	!	119	83	175	!	0	0	0	!	43	11	58	!
26	SNTE	!	362	10	99	!	-328	81	16	!	230	39	25	!	-72	4	4	!	190	27	35	!	-296	66	116	!	434	140	324	!	-85	5	23	!
27	SNUL	!	589	109	43	!	71	97	8	!	-95	180	59	!	-56	63	26	!	-85	145	83	!	56	62	48	!	45	40	40	!	-10	2	5	!
28	SFAU	!	947	105	93	!	82	58	11	!	284	204	420	!	-48	21	19	!	-74	49	60	!	-101	89	149	!	11	1	2	!	-53	25	102	!
29	SRTE	!	970	603	126	!	-154	888	220	!	-16	10	8	!	-13	7	9	!	33	40	67	!	-22	20	44	!	11	5	14	!	1	0	1	!
30	SNFO	!	464	24	48	!	193	147	14	!	-103	43	13	!	104	43	20	!	-48	9	6	!	-42	7	6	!	-231	213	235	!	-22	2	1	!
31	SLOG	!	321	31	50	!	78	30	3	!	2	0	0	!	72	25	12	!	105	54	35	!	18	2	2	!	177	153	177	!	107	57	12	!
32	SPTF	!	987	519	152	!	-181	882	262	!	-10	3	3	!	24	15	22	!	38	38	76	!	-14	6	16	!	40	42	146	!	-5	1	1	!
33	SBTE	!	976	179	207	!	362	881	357	!	4	0	0	!	53	19	38	!	-78	42	113	!	-70	34	127	!	3	0	0	!	5	0	1	!
	!	!	2526.0	2636	!		2404	!		1709	!		589	!		1397	!		1673	!		2024	!		1255	!

AXE HORIZONTAL(=1)=AXE VERTICAL(=2)=TITRE=ANAGOR DIL HURT MOD. FT EX. *= EXO 5=

LARGEUR= 1.51138 HAUTEUR= 1.04595 -NOMBRE DE POINTS= 73



MODÈLES, EXEMPLES x EXERCICES

ANNEXE ⑨ 3

	TI	GLT	POID	TOP	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
1	PRIM	972	21	92	652	655	157	-168	44	26	-248	96	75	319	157	155	65	7	9	-7	0	0	-89	13	27
2	DFF	967	4	44	562	166	19	-522	144	40	-400	85	32	38	1	0	-879	407	262	480	121	99	286	43	45
3	DYN	818	92	25	-80	158	10	126	383	61	65	103	22	61	89	24	30	22	8	47	54	25	20	9	6
4	DMO	947	8	51	258	68	9	-679	472	150	27	1	0	70	5	3	-595	363	268	1	0	0	-191	38	45
5	MTX	910	42	40	-305	653	68	-52	20	5	-138	136	46	-102	73	31	37	9	5	15	1	1	-50	18	17
6	PSTA	834	23	28	57	18	1	153	128	22	-137	104	25	299	492	146	48	13	5	-96	51	26	71	28	18
7	STA	909	15	50	-642	805	105	109	23	7	26	1	1	-39	3	2	-80	15	9	-181	64	60	-6	0	0
8	TFND	940	16	55	460	410	58	-87	15	5	383	285	132	-208	85	50	-39	3	3	247	119	120	110	23	30
9	ABS	954	14	59	295	137	21	267	112	41	-187	55	28	-530	444	281	-247	96	83	-158	40	43	-211	70	98
10	TAUT	437	6	26	168	44	3	-125	25	4	263	108	24	171	46	13	-16	0	0	-138	30	15	342	184	114
11	MDAB	980	83	45	132	211	25	-162	323	92	27	9	3	-117	168	82	96	111	74	-85	90	75	75	68	72
12	MDCM	985	77	73	-355	890	162	26	5	2	-11	1	1	5	0	0	-77	43	46	-19	3	4	20	3	5
13	MDHC	977	51	34	146	212	19	232	533	114	23	5	1	94	87	32	-93	87	43	62	38	23	-38	15	12
14	MDRD	918	32	35	162	157	14	-81	40	9	-55	19	6	-23	3	1	194	226	115	252	382	246	-122	91	75
15	MDMO	839	11	31	329	248	20	56	7	1	65	10	3	346	274	80	-109	28	12	-300	208	117	-166	64	46
16	EDNO	957	96	53	200	478	66	184	405	136	72	62	28	-8	1	1	-18	4	3	-23	7	7	4	0	0
17	EDNN	974	157	36	-126	467	43	-123	447	100	-35	37	11	-5	1	0	25	19	10	9	3	2	-1	0	0
18	EDNM	939	66	57	292	655	97	-66	35	12	-123	118	57	-68	37	22	48	18	15	-96	72	76	22	4	5
19	EDST	870	40	45	59	20	2	287	484	136	-174	179	69	-99	59	28	-14	1	1	85	43	35	120	84	89
20	EDAL	895	71	33	-136	268	23	-109	172	36	142	285	80	75	80	29	-49	35	17	1	0	0	62	55	43
21	EDAS	956	59	36	-253	707	65	-9	1	0	-65	47	14	42	19	7	36	14	7	53	30	20	-111	138	116
22	EDRF	967	18	51	135	42	6	-18	1	0	588	790	(34)	-58	8	4	51	6	4	-52	6	6	-222	114	137
		2568.0	1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000	

1ère axe 39% inertie

2ème axe 15% "

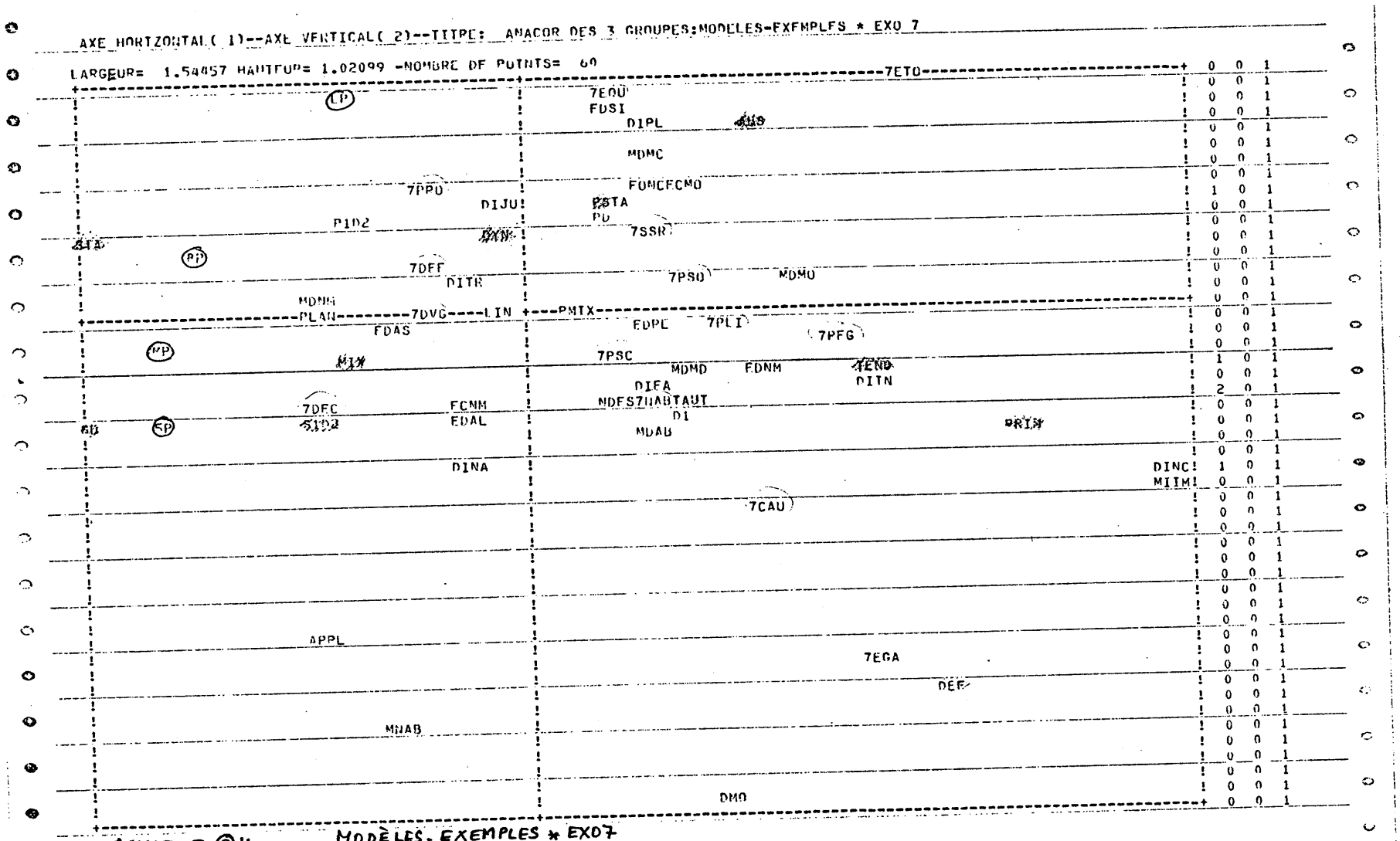
ANNEXE ⑥ 4 MODÈLES, EXEMPLES x EXERCICE 7

SUP	QUT	PAID	TOP	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
23 FOOD	557	66	61	151	162	26	182	235	90	-60	26	14	67	32	21	-51	19	17	103	76	86	-50	7	10
24 APPL	727	16	51	-341	237	31	-431	378	121	38	3	1	-62	8	4	-156	50	37	-121	30	28	-101	21	26
25 LTN	439	91	17	-54	148	7	5	1	0	36	45	7	28	28	5	-9	4	1	-14	7	2	77	206	84
26 PLAN	647	19	33	-343	446	36	0	0	0	-133	68	19	146	80	28	-70	19	9	-79	24	15	51	10	8
27 DTRC	936	2	39	878	303	31	-223	20	5	-531	111	37	53	1	0	-756	225	129	824	267	194	165	11	10
28 PMIX	912	209	7	42	373	6	0	0	0	43	382	22	8	13	1	12	32	3	-14	49	6	17	63	10
29 P1D2	807	4	17	-269	123	5	142	34	4	287	140	20	375	239	43	117	23	6	199	67	21	327	181	72
30 D1	460	2	41	193	14	1	-121	6	1	-485	90	31	680	176	77	-442	75	44	443	75	56	-252	24	23
31 SD	911	13	54	-666	698	98	-138	30	10	-161	41	19	-212	71	41	18	1	0	-103	17	17	-187	55	71
32 PD	919	11	34	95	20	2	159	55	12	-285	176	50	-297	191	69	38	3	1	-4	0	0	-468	474	376
33 S1D2	615	11	25	-317	307	20	-151	70	11	-105	34	7	-102	32	9	68	14	5	-33	4	2	226	154	90
34 MTIM	938	2	39	878	303	31	-223	20	5	-531	111	37	53	1	0	-756	225	129	824	267	194	165	11	10
35 MMAR	894	12	130	-210	28	10	-564	203	165	834	120	132	-573	210	291	674	289	547	-259	43	103	32	1	2
36 MDES	853	60	52	85	54	7	-115	101	33	88	58	26	-177	241	135	201	305	232	-79	49	47	-76	45	56
37 DTJN	640	27	34	-97	51	5	159	135	29	139	103	30	46	11	4	-128	89	44	-80	35	22	201	216	173
38 DTTP	505	91	43	-141	281	32	43	26	7	2	0	0	46	29	13	31	13	8	89	109	87	-57	47	46
39 DTPL	414	23	44	150	78	9	256	228	63	-78	22	8	31	3	2	65	15	10	98	34	27	99	34	35
40 DTIN	726	35	84	440	541	118	-80	18	10	-19	1	1	88	22	20	8	0	0	-206	119	185	-94	25	50
41 DTFA	763	22	24	122	92	6	-91	52	8	-252	396	80	-169	179	45	-74	35	12	-32	7	3	-18	2	1
42 DTNA	876	55	361	-124	155	15	-201	407	93	101	102	31	-133	178	69	50	25	13	-15	2	2	26	7	6
43 SP	958	38	105	-553	732	199	-142	49	32	43	4	4	2	0	0	-73	13	20	-158	60	117	-203	100	247
44 BP	587	35	129	-505	454	152	101	18	15	90	14	16	-185	62	85	-96	17	32	94	16	38	-58	6	19
45 LP	660	17	50	-258	153	20	319	233	73	-204	96	41	-161	60	32	-27	2	1	-148	51	47	168	65	76
46 MP	777	25	144	-547	349	131	-28	1	1	-216	55	67	-509	303	467	202	47	100	87	9	23	104	13	43
	2568.0	1294			999			786			699			1462			1402			1322			1543	

	J1	WGT	PCID	TGR	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
1	7NAP	976	110	81	117	174	26	-116	124	62	200	361	247	-158	228	196	107	103	121	-32	10	15	53	26	48
2	7DEF	956	164	72	-173	458	86	82	103	46	79	94	58	95	135	104	-89	122	128	-40	25	34	36	19	33
3	7DEC	990	195	184	-339	813	387	-111	89	103	-91	60	94	-18	3	5	51	18	49	16	2	6	-25	5	21
4	7EQU	999	62	97	93	37	9	301	368	235	-142	88	72	-305	401	415	-75	25	35	118	59	106	19	1	3
5	7PRO	648	44	39	-173	227	23	170	217	52	145	158	52	-2	0	0	-11	1	11	-47	17	12	61	28	25
6	7PSC	822	33	36	73	32	3	-49	15	3	103	64	19	104	66	25	-76	36	19	311	589	387	-56	20	17
7	7PSO	772	107	56	161	331	48	54	37	13	-23	7	3	110	155	93	99	126	103	81	84	87	50	32	42
8	7PLT	941	101	69	240	559	100	-10	1	1	-158	247	145	102	100	74	-51	26	26	-14	2	3	-24	6	10
9	7CAU	927	17	42	291	223	24	-273	198	52	267	187	67	73	14	6	116	35	22	163	70	54	-275	200	200
10	7DVG	790	37	40	-162	164	17	1	0	0	66	27	9	-108	73	31	-163	164	96	-127	100	74	-205	262	246
11	7EGA	984	31	120	464	371	115	-490	415	312	-41	3	3	-72	9	12	-304	160	28	-31	2	4	117	24	67
12	7SSP	760	58	33	148	257	22	109	138	29	-30	11	3	81	77	27	82	79	38	-105	131	80	76	67	52
13	7ETO	896	19	72	507	443	83	341	200	90	265	121	74	53	5	4	-2	0	0	-91	15	20	-254	112	100
14	7PEG	914	21	60	393	366	57	-36	3	1	-356	301	154	-65	10	7	199	94	82	-212	107	119	-116	33	46
		2568.0	1000				1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000

	SUP	NET	PRID	TLP	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
15	0M	833	98	180	392	554	259	55	11	12	-46	8	12	-192	134	258	-110	44	116	-146	78	260	54	4	18
16	1M	404	79	90	202	240	56	-37	9	5	52	16	12	-32	6	6	-33	7	9	-25	4	7	144	122	258
17	2M	618	23	133	562	341	125	9	0	0	-24	1	1	180	37	53	-99	11	22	-310	111	273	-290	97	305
18	3M	751	86	98	272	430	109	160	150	92	136	107	89	77	35	36	-16	2	3	67	26	46	-10	1	2
19	4M	446	74	81	61	22	5	19	2	1	110	73	51	63	24	21	-220	294	346	61	23	54	37	8	16
20	5M	824	150	217	-407	767	431	12	1	1	-46	10	19	-2	0	0	36	6	19	44	9	36	-81	31	160
21	6M	447	48	89	-264	248	58	-27	3	2	-19	1	1	138	67	64	33	4	5	-45	7	12	182	117	246
22	7M	782	156	131	222	388	131	-127	(131)	107	7	0	0	31	8	11	179	255	485	6	0	1	-1	0	0
23	8M	458	143	59	-122	240	37	40	26	10	7	1	0	-46	36	23	-53	46	40	82	107	117	-9	2	2
24	LM	514	69	53	-200	352	48	-47	29	7	-50	23	10	-65	38	21	37	12	9	61	32	31	-64	37	46
25	0M	721	93	122	-297	449	142	-150	116	89	-45	11	11	-126	82	107	7	0	0	-57	17	38	95	46	132
26	5JUS	869	375	144	-269	763	284	2	0	0	-37	25	30	-34	22	33	41	29	60	42	30	80	0	0	0
27	5JSD	436	156	46	-52	65	8	56	72	20	-72	122	47	27	17	8	23	12	8	-48	54	45	64	94	101
28	5JDF	406	54	55	-84	47	7	15	1	0	-72	35	16	-114	87	51	-63	27	21	-60	24	24	168	185	240
29	5FSD	836	309	227	277	693	408	-55	28	40	81	59	114	-59	33	79	-38	14	45	0	0	0	-31	9	50
30	5FDF	398	88	98	-68	28	7	-24	4	2	72	31	26	195	225	236	-98	59	84	-91	51	91	8	0	1
31	5NTF	531	9	82	425	137	29	-120	11	6	-121	11	8	441	147	129	-374	107	127	342	89	134	197	29	56
32	5NAR	597	29	45	117	59	7	-117	59	17	166	117	45	-176	134	64	187	149	98	107	49	40	-83	30	32
33	5CEX	848	144	178	-375	763	352	-98	53	59	36	7	10	-12	1	2	-49	13	34	-24	3	11	58	8	33
34	5SIN	810	46	63	-257	324	53	147	104	41	-171	144	78	-128	80	54	124	75	69	122	72	84	-46	11	16
35	5DES	297	21	51	-148	62	8	-26	2	1	175	85	37	-52	8	4	214	128	95	-63	11	11	-18	1	1
36	5NUL	742	107	37	-40	32	3	-24	12	3	-106	220	69	-38	29	11	113	244	132	97	180	123	-35	25	22
37	5FAU	286	103	79	-76	51	11	-61	34	17	69	41	28	113	109	93	-52	24	28	-54	26	38	8	1	1
38	5DIV	540	6	21	-209	88	5	260	136	18	-119	29	5	254	129	28	98	19	6	252	127	48	76	12	6
39	5PIF	778	593	101	135	703	185	5	1	1	17	11	10	-29	35	37	-22	20	30	-4	1	2	14	7	18
40	5RAN	456	160	27	1	0	0	72	203	35	-55	121	28	-45	84	25	-6	2	1	4	1	0	34	45	29
41	5NFO	324	24	41	-203	162	17	-80	25	6	2	0	0	-99	39	17	158	97	57	-17	1	1	2	0	0
42	5MON	479	44	68	-133	78	14	-123	66	28	56	13	8	198	169	124	-40	7	7	-174	132	167	57	14	22
43	5STA	868	40	72	-322	380	71	-5	0	0	-215	171	105	-58	13	10	194	137	145	206	154	206	-59	13	23
44	5DYN	349	28	58	56	10	2	48	7	3	67	14	7	249	197	121	-164	87	73	-76	19	20	-68	15	20
45	5LOG	191	31	41	-77	31	3	-102	54	14	-94	45	16	4	0	0	62	19	12	-19	2	1	89	40	38
46	5PIF	831	511	124	164	739	237	-16	8	6	43	52	54	-30	26	35	-14	6	11	0	0	0	2	0	0
47	5RIF	856	176	185	-362	831	399	-43	12	14	-12	1	2	-33	7	15	-11	1	2	24	4	12	6	0	1
48	6JUS	891	614	140	-168	836	303	6	1	1	11	4	4	-32	32	49	-7	2	4	18	10	26	-14	6	21
49	6JSD	659	49	50	293	564	72	-23	4	1	-97	63	26	43	12	6	34	8	6	32	7	6	-8	1	1
50	6JDF	681	132	118	245	447	136	-22	4	3	-126	119	119	18	2	3	81	49	84	-66	33	72	60	27	75
51	6FDF	475	73	104	294	255	108	-204	124	127	115	39	55	17	1	2	-108	35	84	71	15	45	-46	6	25
52	6NTF	398	63	124	243	197	64	25	2	2	89	26	28	-127	54	73	-62	13	24	-165	93	212	61	13	37
53	6NAR	575	87	61	197	367	58	3	0	0	64	39	20	53	27	17	16	2	2	41	16	18	115	124	178
54	6FNC	181	202	57	-71	122	18	9	2	1	1	0	0	-5	1	1	14	5	4	-10	3	3	-44	48	65
55	6VAL	875	237	79	-174	613	125	-47	47	23	-68	96	64	-59	73	62	51	20	22	30	18	27	21	8	16
56	6PRA	404	79	36	77	88	8	107	108	38	23	8	2	-23	8	3	-57	50	26	-69	72	47	26	10	8
57	6PLI	604	76	75	218	319	62	-162	177	83	35	8	5	55	20	16	76	39	42	-15	2	2	76	39	69
58	6PRO	798	121	178	-391	695	320	35	5	6	59	16	24	-60	17	52	-107	53	137	45	9	30	-24	3	12
59	6PTF	640	119	80	221	483	100	-13	2	1	-91	84	57	49	23	20	46	21	24	3	0	0	-52	27	51
60	6PAR	827	184	145	278	653	244	-13	2	1	111	104	128	-17	3	4	-37	12	25	-7	0	1	79	53	180
61	6MON	679	25	86	518	516	115	-156	47	26	-4	0	0	-51	5	5	-45	4	5	-47	4	7	-231	103	209
62	6ZEP	384	85	82	186	238	50	-49	17	9	12	1	1	80	44	38	46	14	17	-99	69	104	13	1	2
63	6CUS	484	28	58	194	120	18	-299	287	105	30	3	1	-40	5	3	14	1	1	123	49	52	77	19	26
64	6CSS	598	32	21	119	143	8	47	23	3	-48	24	4	-16	3	1	182	336	103	42	18	7	71	51	25

	JSUP	OLT	POID	TLP	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
65	6FUP	500	30	74	321	272	52	64	11	5	-112	34	21	134	48	38	-23	2	2	-93	23	32	204	110	193
66	6PAP	398	18	52	45	5	1	137	44	14	44	5	2	206	100	55	59	8	6	56	7	7	-311	229	278
67	6STP	305	94	36	-4	0	0	25	11	2	-50	46	14	-74	99	38	-15	5	2	76	100	66	-49	44	37
68	6PAS	361	45	37	-25	5	1	78	49	11	67	36	11	-89	66	26	-32	9	5	135	147	101	-77	49	43
69	6DUM	392	39	50	178	163	21	175	158	50	-2	0	0	-83	37	20	35	6	5	-71	27	25	10	1	1
70	6DIV	637	12	66	109	15	3	-56	4	2	-272	93	52	480	286	203	-434	236	228	29	1	1	-42	2	4
71	6PAT	798	229	143	255	693	257	-22	6	5	49	26	31	-33	12	19	-25	7	15	-34	13	33	62	41	139
72	6RIF	912	380	268	-306	890	617	-24	6	10	4	0	0	-34	12	34	1	0	0	16	3	13	7	1	3
73	6LCT	837	596	83	-126	768	165	2	0	0	-9	4	3	-34	59	53	-5	2	2	-6	3	4	-4	1	3
74	6LCD	539	131	37	12	3	0	46	50	12	-72	125	39	85	170	67	23	13	7	34	28	19	-79	150	130
75	6LNC	790	291	184	242	615	294	-70	52	61	69	51	79	-27	8	17	-8	1	2	9	1	3	77	62	270
76	7JUS	953	414	209	-257	(877)	474	37	18	23	-36	18	32	-52	37	83	-9	1	4	11	2	6	6	0	2
77	7NTF	366	94	68	58	24	5	-12	1	1	51	19	14	-23	4	4	-182	237	305	-24	4	7	104	77	161
78	7FAU	932	400	146	213	(823)	312	-36	24	22	-15	5	6	59	63	98	16	5	10	10	2	5	-22	10	34
79	7PIF	934	553	129	169	811	270	-55	91	73	23	15	16	-19	11	15	13	4	8	1	0	0	8	2	5
80	7FUR	887	218	129	-276	(865	288	-6	0	0	1	0	0	12	2	2	-32	13	23	-15	3	7	-18	4	13
81	7PAT	781	205	78	43	32	6	-80	113	55	137	327	218	-91	148	124	7	1	1	0	0	0	96	160	295
82	7RIF	904	170	95	-208	520	128	56	37	22	-52	34	27	-156	(291)	296	26	8	11	25	8	14	23	6	13
83	7LCT	948	351	124	-202	(778	249	-19	8	6	-54	56	59	-38	28	37	-21	9	16	8	1	2	-59	68	197
84	7LCD	619	231	58	114	345	52	26	19	7	-53	79	39	23	14	9	15	6	5	44	52	56	63	104	142
85	7LNC	813	436	68	95	381	68	-27	34	15	84	300	174	-22	22	16	2	0	0	-23	24	30	35	52	84
86	8JUS	911	500	224	-244	887	515	-24	9	13	17	4	8	7	1	2	-20	7	21	13	2	10	-8	1	6
87	8TDF	899	282	147	253	817	310	60	46	42	-36	18	22	19	5	7	27	9	19	-11	2	5	13	2	8
88	8FDF	821	2	60	952	156	24	355	22	8	-398	27	14	-1529	403	259	-300	16	14	-1009	176	195	-347	21	30
89	8NTF	632	87	126	284	371	121	-97	44	34	80	29	31	-92	40	54	-41	8	15	110	56	129	-134	84	249
90	8NAR	695	148	89	144	229	53	-67	50	28	6	0	0	-109	133	127	27	8	10	-57	37	61	147	238	501
91	8UNT	390	48	38	147	178	18	142	168	40	-24	5	2	18	3	1	51	22	12	-27	6	5	31	8	7
92	8LOC	528	59	80	155	118	24	39	8	4	-110	60	41	168	138	118	171	144	167	105	54	79	-33	6	11
93	8ALG	744	62	117	428	648	196	34	4	3	115	47	47	-29	3	4	-39	6	9	-22	2	4	98	34	94
94	8FOR	549	209	92	-183	505	121	9	1	1	38	22	17	28	12	12	-6	1	1	-3	0	0	23	8	17
95	8FAU	346	19	48	-34	3	0	233	141	42	-118	37	15	-3	0	0	-115	35	24	217	123	108	53	7	8
96	8ABS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
97	8MAC	822	163	85	246	774	170	34	15	8	-41	23	16	-12	2	2	9	1	1	21	6	9	-7	1	1
98	8DIV	704	228	134	198	444	155	-73	61	52	44	21	24	-114	148	213	19	4	8	-23	7	16	41	19	61
99	8RIF	918	230	294	-462	843	643	-85	38	70	-13	1	3	-18	2	6	-66	23	99	-8	0	2	-46	11	79
100	8DEF	902	459	299	-298	869	673	-39	16	30	11	1	3	3	0	0	-37	14	62	-6	0	2	-13	2	13
101	0JUS	823	439	163	-220	777	369	-42	30	30	-17	5	8	-11	2	5	-2	0	0	20	7	22	-10	2	8
102	0JSP	478	111	30	103	259	20	74	135	25	-30	23	6	-33	29	9	-31	24	11	-12	4	2	13	4	3
103	0JDF	204	26	54	-41	6	1	112	41	14	71	16	7	152	74	43	91	27	21	-72	17	17	85	23	29
104	0FSP	756	124	97	259	571	143	-42	15	9	89	68	56	-34	10	11	-1	0	0	-24	5	9	101	87	199
105	0FDF	619	44	64	336	490	82	18	2	1	29	4	2	5	0	0	-41	8	8	-150	103	122	-50	12	18
106	0NTF	151	26	32	45	11	1	-63	22	4	51	14	4	-54	17	6	64	23	10	-20	2	1	-106	62	46
107	0NAR	600	248	61	143	552	88	2	0	0	3	0	0	-29	24	16	0	0	0	29	22	25	10	2	4
108	0DIV	650	85	81	262	553	117	-32	8	4	23	4	2	91	57	50	7	0	0	-56	22	33	-29	6	12
109	0FXF	439	40	77	-318	351	70	-89	28	14	-110	42	28	34	4	3	-26	2	3	-35	4	6	49	8	15
110	0TSP	555	106	47	118	207	25	-65	64	19	58	50	20	2	0	0	64	61	42	-102	157	137	-32	16	18
111	0PIF	884	469	104	163	789	213	5	1	0	33	32	28	-41	52	58	1	0	0	3	0	1	18	10	24
112	0BIF	931	318	256	-324	874	579	-6	0	1	-43	16	35	-24	5	14	-31	8	31	57	27	127	13	1	9
113	9NAR	923	695	63	101	738	121	-17	25	10	31	71	38	12	10	7	-7	5	5	-22	37	43	23	37	55
114	9DIV	462	14	29	-138	60	5	47	7	1	-119	45	11	-40	5	2	254	199	85	200	123	67	-86	23	16



ANNEXE ⑨4 MODÈLES. EXEMPLES * EXO7

OBJET 19	-.22592252	-.20499307	-.12357891	.21613163	-.38486576	-.00763910	.01299741	.10026985
OBJET 20	-.09167665	-.12258060	.19441235	-.10339564	-.02120388	-.15925115	-.34473029	-.06452191
OBJET 21	-.13656324	.05770716	.06998873	-.02987752	.12116176	-.35649610	.03529752	-.24157655
OBJET 22	-.12531900	-.23935091	.35968697	-.06492424	-.36621553	-.17863977	-.32960284	.31158710
OBJET 23	-.17160020	-.09278959	-.13357913	.15384090	.02022207	.24000257	-.18668725	-.05307069
OBJET 24	-.09767141	-.20384604	-.10081208	.15484297	.31974250	.15857178	-.02410563	.04783994
OBJET 25	-.10390690	-.13969684	-.13900673	-.02141321	-.31288368	.20421791	-.24353349	-.27698806

-1 LES VALEURS PROPRES -VAL(1)= .09999839-

NUM	ITER	VAL PROPRE	POURCENT	CUMUL	I*I	HISTOGRAMME DES VALEURS PROPRES DE LA MATRICE
2	0	.05931660	42.335	42.335	I0I	000000000000000 000000000000000 000000000000000
3	0	.01757554	12.543	54.878	I0I	0000000000000000 000
4	1	.01390846	9.922	64.800	I0I	00000000000000
5	1	.01117760	7.977	72.777	I0I	0000000000
6	1	.00820548	5.856	78.633	I0I	0000000
7	1	.00673556	4.843	83.476	I0I	000000
8	1	.00489426	3.493	86.969	I0I	00000
9	2	.00437400	3.122	90.091	I0I	0000
10	1	.00347327	2.479	92.570	I0I	000
11	1	.00289987	2.070	94.640	I0I	000
12	1	.00211101	1.507	96.146	I0I	00
13	2	.00161616	1.153	97.300	I0I	00
14	2	.00135780	.969	98.269	I0I	0
15	1	.00083830	.598	98.867	I0I	0
16	2	.00068635	.490	99.357	I0I	0
17	2	.00045166	.322	99.679	I0I	
18	1	.00027652	.193	99.872	I0I	
19	2	.00015971	.114	99.986	I0I	
20	1	.00002089	.015	100.001	I0I	
21	1	.00000016	.000	100.001	I0I	
22	1	.00000002	.000	100.001	I0I	
23	4	-.00000001	-.000	100.001	I0I	
24	2	-.00000003	-.000	100.001	I0I	
25	1	-.00000056	-.000	100.000	I0I	

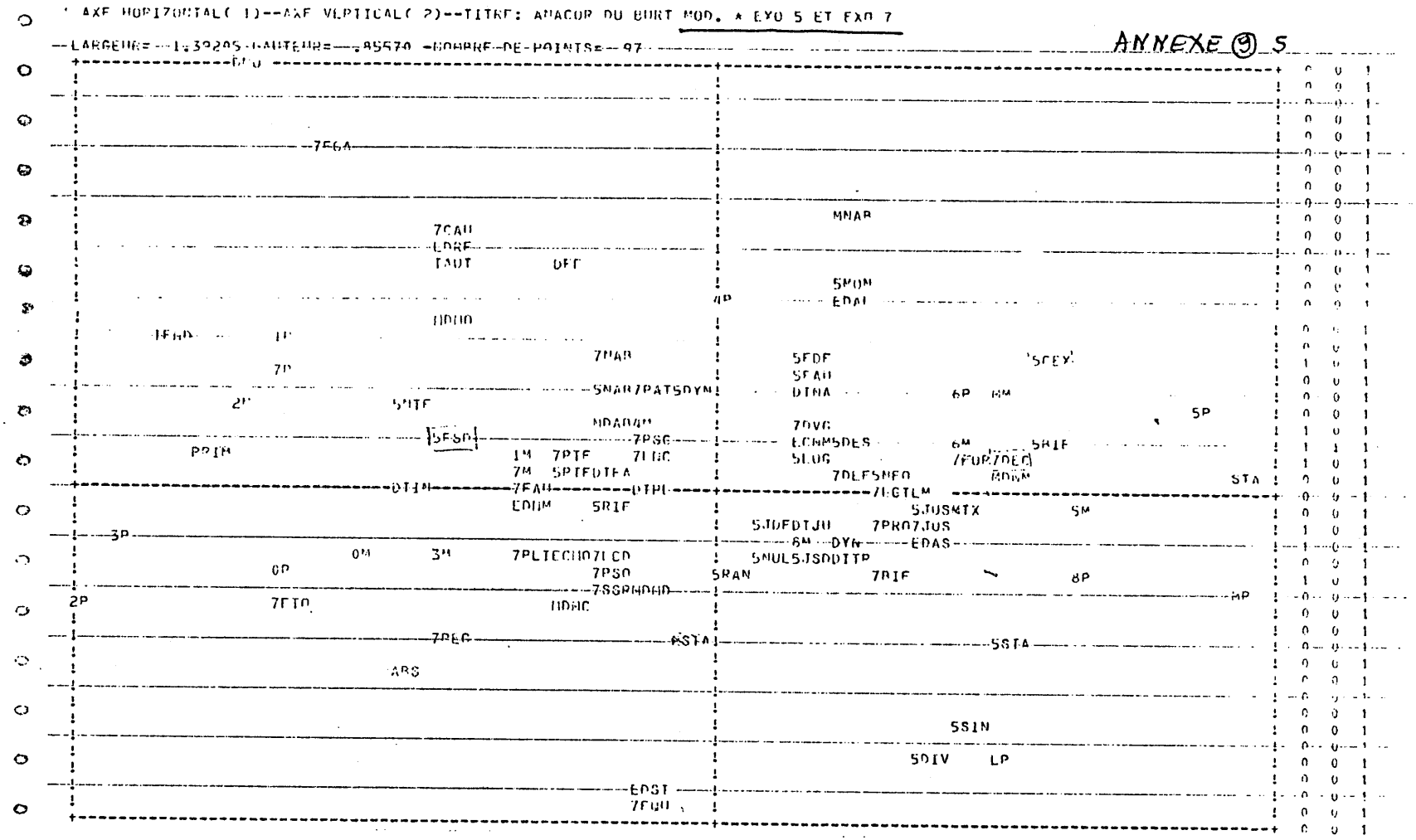
	I1	OLT	POR	IPR	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
1	PRTH	941	21	78	-589	672	123	32	2	1	164	52	41	-291	165	161	145	40	54	35	2	4	63	8	17
2	DEF	903	4	30	-188	30	2	257	55	13	13	0	0	-437	161	61	-311	82	42	-365	112	70	743	463	399
3	DYN	896	91	33	-127	319	25	-58	69	18	49	48	16	94	175	72	94	174	98	18	6	4	27	15	14
4	SOU	894	6	52	-545	324	39	492	264	108	1	0	0	-233	59	38	-440	211	186	167	30	32	72	6	8
5	VIS	876	43	88	304	584	67	-21	3	1	-129	106	52	-90	52	32	-94	57	47	90	51	51	-59	23	32
6	PSTA	863	22	26	-45	12	1	-168	155	35	-239	311	99	-66	25	9	-137	102	49	-96	51	30	-35	7	5
7	STA	831	15	54	606	748	95	11	0	0	-21	1	1	79	13	9	-137	39	35	-115	27	30	-39	3	5
8	TLMD	928	16	70	-672	640	105	172	49	27	-228	86	61	222	81	71	-99	17	20	107	19	27	140	32	65
9	ABS	760	14	42	-344	287	29	-212	109	37	-71	12	5	50	6	3	-303	222	161	-220	118	103	-103	26	32
10	TAUT	863	0	26	-334	197	17	245	105	22	179	56	15	18	1	0	-58	6	3	2	0	0	-235	98	74
11	MLAG	853	85	33	-116	253	20	84	131	34	-103	201	66	-24	12	5	21	8	5	-93	164	111	-66	84	79
12	MLMR	945	76	76	346	881	158	-25	5	3	38	11	8	34	8	8	-8	1	1	-55	23	36	-46	16	34
13	MDAC	928	89	34	-196	394	72	-134	186	51	117	139	48	81	67	29	-75	58	34	64	42	30	64	42	41
14	MDDI	837	32	42	-109	68	4	-111	68	22	-213	249	104	-116	74	39	142	109	77	223	271	233	21	2	2
15	MRMD	945	44	84	-326	198	101	198	64	23	539	498	222	49	4	2	95	16	12	175	52	48	-276	131	106
16	FCMO	868	96	30	-165	485	45	-83	124	39	78	108	42	92	147	72	-3	0	0	-13	3	3	5	1	1
17	FCMR	930	156	36	194	479	22	57	146	30	-54	135	35	-53	129	41	8	3	1	6	2	1	-10	6	4
18	FDMR	913	65	86	-239	564	64	-24	6	2	-70	49	24	-80	65	39	90	79	64	-119	140	138	-31	10	14
19	FDST	886	41	88	-91	51	6	-341	703	271	-37	9	4	-8	0	0	-135	111	92	40	9	9	-21	3	4
20	FDAL	860	71	51	149	229	27	208	428	174	143	202	104	13	2	1	0	0	0	27	7	8	12	1	2

ANNEXE ⑨.5 MODÈLES x EXERCICE 5, EXERCICE 7

21	FDAS	853	56	37	359	747	66	-53	33	10	-21	5	2	-46	24	11	-17	3	2	59	39	30	14	2	2
22	FDPE	866	18	61	-328	215	31	278	161	78	-219	101	62	432	390	299	89	17	17	30	2	2	5	0	0
			5094.0	1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000
	ISUP	OLT	POTD	IRR	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
23	AP	469	24	114	-517	394	106	-91	12	11	-90	12	14	37	2	3	182	49	95	17	0	1	16	0	1
24	BP	643	18	92	-514	367	80	180	45	33	112	17	16	-303	128	147	-10	0	0	51	4	7	244	82	217
25	CP	683	0	55	-758	440	57	-140	15	7	129	13	7	-246	47	32	184	26	24	-27	1	1	-428	141	222
26	DP	673	23	127	-660	563	175	-50	3	3	176	41	52	64	5	8	175	40	87	-24	1	2	9	0	0
27	EP	527	18	131	15	0	0	206	41	43	543	286	379	115	13	21	-118	14	31	383	143	387	-175	30	113
28	FP	760	38	173	556	676	196	97	20	20	-112	28	34	-16	1	1	-69	11	23	100	22	56	-31	2	8
29	GP	613	11	51	269	113	14	113	20	8	301	142	73	97	15	10	78	10	9	208	68	71	394	245	357
30	HP	639	39	127	-485	513	153	129	36	36	-120	32	45	-3	0	0	158	55	118	-36	3	8	5	0	0
31	IP	596	35	112	422	393	104	-90	18	16	-82	15	17	149	49	69	-185	77	147	-91	19	43	107	25	81
32	JP	588	18	52	352	209	37	318	246	102	18	1	0	43	5	3	77	15	13	89	20	21	28	2	3
33	KP	691	25	153	633	463	167	-112	15	18	-278	90	139	-79	7	14	-41	2	5	-306	109	343	68	5	23
34	MAB	631	13	74	167	34	6	314	123	73	-380	181	136	70	6	6	262	85	108	-97	12	18	-390	190	406
35	MJU	568	27	26	116	109	6	35	11	2	104	87	21	92	68	20	89	65	26	16	2	1	56	26	18
36	MTR	431	69	39	123	246	23	-50	42	13	-31	16	6	31	16	8	4	0	0	78	100	81	26	11	12
37	MPL	314	23	45	-88	29	3	5	0	0	263	250	113	14	1	0	11	0	0	43	7	6	86	27	35
38	MTN	657	35	65	378	562	86	5	0	0	0	0	0	96	37	30	89	31	34	70	20	26	41	7	13
39	MFA	346	22	26	-140	118	7	22	3	1	-73	33	9	-120	88	26	-37	9	4	-114	80	42	51	15	11
40	MPA	432	57	31	86	97	7	107	152	37	-96	125	39	12	2	1	6	0	0	-64	56	36	5	0	0
			5094.0	1441			1228			425			1096			402			725			1151			1522
	J1	OLT	POTD	IRR	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
1	SJSD	802	79	26	77	129	84	75	127	76	63	87	23	27	17	5	72	112	49	120	317	169	24	13	9
2	SESD	978	156	122	-311	890	255	50	23	22	-49	23	28	20	4	5	-56	30	63	25	6	14	-13	2	6
3	SLAB	703	15	24	-119	62	4	107	49	9	-279	337	82	105	48	14	212	194	80	32	4	2	47	9	6
4	SLFA	964	73	94	581	806	178	145	116	87	14	1	1	18	2	2	33	6	10	58	20	38	49	13	36
5	SSIN	887	23	34	277	380	30	264	349	94	134	90	31	38	8	3	40	8	5	90	40	28	48	12	12
6	SDFS	644	11	27	157	70	5	63	11	2	168	80	22	224	141	48	323	294	137	128	47	26	13	1	0
7	SDIV	631	5	12	245	415	31	314	193	181	154	46	5	31	2	0	290	164	32	109	23	6	213	88	29
8	SMAR	548	21	14	6	2	0	99	394	45	3	1	0	4	1	0	56	128	32	1	0	0	23	22	9
9	SBOB	844	22	37	145	92	8	228	228	66	280	342	126	81	30	14	39	7	4	53	12	9	173	133	139
10	SSTA	953	20	36	346	846	46	167	105	32	187	131	51	161	97	47	41	6	4	211	166	131	24	2	3
11	SDYK	728	14	31	43	6	0	113	40	10	422	563	179	15	1	0	73	17	9	172	93	61	34	4	3
12	7GAB	856	55	41	141	192	19	146	203	67	154	230	96	114	124	64	51	25	17	22	5	4	89	77	91
13	7HFE	939	83	39	159	379	35	25	9	3	154	356	141	103	159	78	43	29	19	15	3	3	17	4	5
14	7DFC	958	98	97	338	824	190	44	14	11	84	52	51	95	66	80	7	0	1	14	1	3	8	1	2
15	7EDU	890	31	52	85	32	4	362	573	230	119	63	33	86	32	21	188	155	136	72	23	25	52	12	18
16	7PRU	725	22	21	171	220	11	39	12	2	77	44	9	235	413	109	16	2	1	62	29	13	26	5	3
17	7PSC	925	16	20	70	30	1	61	22	4	7	0	0	32	6	1	55	18	6	177	186	76	334	663	376
18	7PSU	731	54	32	151	284	21	100	125	31	56	38	12	41	22	9	114	158	85	92	104	67	2	0	0
19	7PIT	928	51	39	220	452	42	72	49	15	113	118	47	179	300	148	2	0	0	5	0	0	31	9	10
20	7CAU	862	8	23	324	279	15	281	208	38	132	47	11	24	2	0	157	65	25	311	255	120	49	6	4
21	7DVO	611	19	21	103	67	3	68	29	5	25	4	1	94	56	15	235	355	127	21	3	1	123	97	58
22	7EGA	902	10	65	464	376	57	381	251	129	60	6	4	308	166	134	128	29	32	216	81	109	174	53	97
23	7SSK	692	29	19	131	188	9	102	115	18	106	121	24	12	2	0	127	174	58	89	87	35	21	5	3
24	7ETU	780	9	40	510	483	42	137	32	10	188	60	24	348	205	102	148	37	25	19	1	1	34	2	2
25	7PFG	807	11	35	326	251	20	176	74	19	23	1	0	317	237	98	178	74	42	192	87	59	187	83	78

		5094.0	1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000	
	USHP	DET	POTH	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR	
26	0H	838	49	97	-415	629	140	-75	21	16	-17	1	1	9	0	0	-136	68	113	-200	147	294	-78	22	62
27	1H	473	44	51	-208	247	34	-34	5	2	-17	2	1	25	4	2	-34	7	6	-157	140	146	-110	68	99
28	2H	656	12	72	-541	336	57	86	9	5	379	164	120	-128	19	17	-18	0	0	125	18	26	-310	110	228
29	3H	843	45	59	-394	524	69	-84	41	18	90	45	25	154	133	92	-12	1	1	118	78	88	61	21	53
30	4H	476	37	49	-71	30	3	85	43	15	185	200	91	56	19	11	-114	77	59	80	38	35	109	69	90
31	5H	851	76	114	405	777	210	-19	2	2	-57	16	19	-2	0	0	-20	2	4	107	54	127	-4	0	0
32	6H	427	24	47	267	259	29	62	14	5	153	85	40	-72	19	11	10	0	0	52	10	10	-104	40	54
33	7H	749	79	71	-210	353	50	43	15	8	64	34	24	-88	62	55	-187	276	333	-3	0	0	-33	9	19
34	8H	546	72	31	99	165	12	-37	24	6	-55	53	16	50	42	16	-94	150	79	77	99	63	28	13	11
35	LH	497	35	29	217	410	28	-8	1	0	-80	57	16	-38	13	5	12	1	1	2	0	0	41	15	12
36	4H	808	47	64	-319	532	80	114	68	35	-82	36	23	-66	23	19	-23	3	3	-166	146	193	-4	0	0
37	5JHS	923	189	75	217	846	150	-26	14	8	-54	54	41	-3	0	0	0	0	0	22	8	13	8	1	2
38	5JHF	275	27	28	56	22	1	-47	16	4	-31	7	2	-22	4	1	-157	171	83	-72	37	22	-50	18	14
39	5FHF	790	44	53	76	34	4	155	141	60	310	567	304	-13	1	1	2	0	0	74	33	36	87	14	21
40	5GTE	578	5	45	-380	109	12	88	6	2	323	78	35	-305	70	39	2	0	0	-35	1	1	646	314	401
41	5HHL	685	54	26	60	70	3	-71	101	16	-90	161	32	-100	199	89	44	38	13	77	116	47	-2	0	0
42	5FAH	691	52	43	79	54	5	157	212	72	193	324	139	-19	4	2	12	1	1	90	70	62	54	26	32
43	5RTE	909	209	55	-149	863	113	-15	9	4	-6	2	1	9	3	2	-23	22	21	-14	9	10	5	1	1
44	5GFG	286	12	22	204	103	8	28	3	1	-154	95	21	23	2	1	49	9	4	-36	6	2	-43	8	5
45	5LOG	290	16	26	81	32	2	38	7	1	32	5	1	107	57	16	108	58	22	133	89	41	92	42	27
46	5PTF	921	257	67	-178	876	140	12	4	2	-20	12	8	18	9	7	0	0	0	-29	12	16	18	8	16
47	5BTE	939	99	97	370	895	206	51	17	13	-82	12	12	1	0	0	-39	10	17	-4	0	0	28	5	14
48	7JHS	968	209	104	255	890	228	37	20	18	-28	12	13	22	7	4	-52	39	72	-1	0	0	0	0	0
49	7GTE	405	48	47	-65	32	4	81	47	18	107	82	39	14	1	1	-148	159	128	-95	66	64	50	18	25
50	7FAH	950	201	83	-212	789	155	0	0	0	32	18	15	-62	69	72	54	50	70	31	17	29	20	7	16
51	7PTF	949	279	69	-172	871	141	34	34	19	-19	11	8	-28	25	21	14	6	6	4	1	1	5	1	2
52	7FOR	872	116	67	262	800	127	36	15	8	17	3	2	17	3	3	-54	35	40	34	14	19	-11	2	3
53	7PAT	547	103	39	-63	77	7	120	271	84	-61	72	28	72	98	48	-18	7	4	-28	15	12	-18	7	8
54	7GTE	894	86	49	-211	550	64	90	103	41	108	146	73	38	18	11	-64	52	44	-41	22	22	-13	3	4
55	7LCI	868	177	64	192	725	110	-3	0	0	-28	17	11	-28	16	13	-67	91	100	27	14	18	-15	5	9
56	7LCD	662	117	31	-113	344	25	-68	127	32	28	21	7	-58	92	36	-6	1	1	54	77	50	0	0	0
57	7LNL	842	220	30	97	814	36	57	140	41	5	2	1	49	105	48	38	61	38	49	106	80	18	14	14
		5094.0	1794			2261			556			1170			610			1264			1529			1222	

ANNEXE ⑨ 5


' AXE HORIZONTAL(1)--AXE VERTICAL(2)--TITRE: ANACOR DU BURT MOD. A EXO 5 ET EXO 7
--LARGEUR=--1.32205--HAUTEUR=--.85570 --NOMBRE-DE-POINTS=--97
7CAU
LORE
TAUT
DET
5MON
EDAI
7NAR
5FDF
5FEX
SFAU
DINA
SNAR7PAT5DYN
5PTF
MDAR4M
7DVG
5FSD
7PSG
ECRM5DES
5RIF
5LOG
7PTF
7TGC
7M 5PTFDTFA
7DLF5NFO
7FAU
DTPL
EDIM
5RIF
5JUSMTX
5M
5JDFDTJU
7PR07JUS
6M DYN
EDAS
5NUL5JSDDITP
7PLTECH07LCD
7PSO
5RAN
7RIF
8P
7SSRMDHD
7FTD
DDHC
7PEC
5STA
ABS
5SIN
5DIV
LP
EDST
7FDU

1er axe 49% inertie

ANNEXE ⑨ 6 MODÈLES, EXEMPLES x PROCÉDURES à tous les exercices (5, 6, 7, 8, 10)

1	PRIM	917	21	97	-586	696	151	47	4	5	64	8	12	-120	29	52	296	163	314	52	45	12	94	18	45
2	DEF	162	4	20	-62	7	0	196	67	17	-113	23	7	1	0	0	160	45	19	-54	9	3	-112	22	12
3	DYN	965	90	70	63	133	8	-65	122	47	76	165	79	-58	99	54	-104	310	184	4	0	0	-35	76	28
4	DMO	715	7	74	-709	190	13	259	111	47	-119	29	16	193	73	48	270	144	102	262	136	113	-126	32	30
5	MIX	855	44	60	327	709	87	13	2	2	-114	91	91	34	9	9	62	25	21	4	0	0	-63	27	45
6	PSTA	456	21	29	-110	82	5	-142	135	49	135	122	53	10	2	1	84	47	28	-89	54	33	45	14	11
7	STA	851	16	71	584	791	102	-10	0	0	-2	0	0	110	29	30	3	0	0	-4	0	0	243	121	235
8	TEND	820	16	54	-462	583	45	121	40	27	-145	58	52	94	24	25	-93	24	27	169	78	102	52	8	11
9	ARS	545	14	77	-265	268	19	-68	18	7	-93	33	18	303	156	99	-36	5	4	-25	3	2	-128	62	57
10	TAUT	776	7	41	-789	218	18	319	145	75	105	16	11	108	17	13	12	0	0	-426	261	241	289	119	135
11	MDAR	859	85	74	-123	750	24	80	145	61	-78	143	79	-49	58	37	-21	11	8	-78	140	115	-22	12	11
12	MDNM	918	79	91	777	392	166	29	6	7	32	8	12	40	12	21	7	0	1	3	0	0	-1	0	0
13	MDMC	803	48	78	-217	(544)	42	-84	83	39	58	38	24	111	141	102	7	1	0	4	0	0	-7	1	1
14	MDMD	327	31	37	-75	44	3	-163	203	94	-76	45	23	-167	214	153	-26	5	4	172	226	205	109	99	92
15	MDMO	637	10	37	-288	232	16	75	16	6	330	303	165	27	2	1	170	47	32	46	6	5	-105	31	28
16	SCMO	867	95	35	-151	567	41	-47	56	24	67	111	65	67	96	65	-30	23	17	15	6	5	18	8	8
17	FCPM	890	158	23	94	543	26	33	66	19	-43	120	45	-42	116	51	15	14	7	-10	8	4	-11	8	5
18	FDNM	883	65	77	-709	772	115	-30	8	7	-75	11	13	-77	50	69	-34	10	15	-56	26	46	-27	6	13
19	FDSI	817	41	76	-28	8	1	-212	469	(208)	-120	150	80	123	155	106	41	18	13	-33	12	11	-21	5	5
20	FDAL	913	72	39	121	248	20	127	269	120	106	190	121	-10	2	1	-11	2	2	54	50	46	-54	52	54
21	FDAS	816	59	59	280	704	95	-37	13	9	6	0	0	-33	11	12	75	50	61	-10	1	2	64	37	59
22	FDRF	816	17	79	-217	185	15	255	254	124	-73	21	14	119	55	42	-202	162	132	90	32	31	166	107	116
		15105.0	1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000	

	ISUP	QLT	POID	INP	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
23	OP	619	28	150	-627	453	169	6	0	0	-85	10	26	38	2	6	-154	34	104	-63	6	21	-99	14	56
24	IP	460	20	90	-461	417	77	29	2	2	41	3	5	-98	19	33	62	8	14	-3	0	0	-75	11	27
25	OP	550	6	70	-817	438	70	53	2	2	-95	7	8	-195	28	37	124	11	16	-121	11	13	69	3	7
26	OP	614	21	114	-577	559	130	-23	1	1	144	35	66	39	3	6	13	0	1	31	2	4	91	14	43
27	OP	344	18	90	-173	32	6	58	6	7	399	270	414	-2	0	0	95	16	30	67	8	17	-39	3	7
28	OP	773	78	184	620	716	270	19	1	2	-51	5	13	88	14	51	29	2	6	105	21	93	83	14	72
29	OP	227	12	51	155	49	5	142	41	26	213	92	78	47	4	4	-85	15	16	-52	6	7	-98	20	28
30	OP	605	39	136	-430	476	133	110	31	53	14	1	1	-59	9	24	32	3	7	-76	4	12	179	81	300
31	OP	563	35	127	429	460	120	-92	22	34	-124	79	83	105	28	67	-18	1	3	37	3	10	-61	10	33
32	LP	605	13	53	362	595	43	-189	109	72	-79	19	17	-51	8	8	-48	7	8	-51	8	11	-139	59	86
33	MP	520	25	143	513	446	122	-35	2	4	-159	40	95	-151	36	99	-23	1	3	-87	12	42	-92	14	54
34	NNAP	423	13	47	86	18	2	179	80	46	-155	62	49	-258	167	150	-167	70	68	-95	23	26	-34	3	4
35	OIJU	316	27	24	98	70	4	-11	1	0	115	135	53	54	30	13	-1	0	0	-62	40	23	55	31	20
36	OIT	571	91	49	164	448	45	-28	14	9	-38	25	21	8	1	1	4	0	0	70	81	97	-11	2	3
37	OIPL	353	23	34	-158	150	11	37	8	3	153	147	84	28	5	3	27	4	7	-76	35	90	25	4	4
38	OIIN	684	75	79	-410	670	109	11	1	1	4	0	0	-4	0	0	33	4	7	-47	9	18	9	0	1
39	OIFA	149	21	29	-104	71	4	9	0	0	-29	6	3	-11	1	1	19	2	1	-69	32	22	75	37	29
40	OINA	268	53	30	54	51	3	37	24	9	-53	50	25	-54	53	31	-50	46	29	-1	0	0	-50	44	27
		15105.0	1501			1322			271			1045			535			316			450			811	

	JT	QLT	POID	INP	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
1	SJSO	575	24	11	44	44	1	-71	116	15	76	128	23	-32	32	6	3	0	0	-99	224	59	37	31	9
2	FSSO	964	52	55	-701	780	89	67	38	26	-92	50	54	72	51	54	20	3	4	52	23	32	34	10	15
3	SNAP	709	6	10	-135	73	2	70	27	3	-152	99	17	-173	128	26	-239	243	52	207	192	46	102	45	13
4	SCFX	942	25	37	770	811	62	138	112	52	27	4	3	-28	5	3	-30	6	5	-20	3	2	-11	1	1
5	SSIN	877	3	14	272	322	11	-283	413	71	-111	64	15	-29	5	1	-22	3	1	-2	0	0	47	11	4

6	5DES	547	4	12	100	32	1	60	10	1	-20	1	0	-201	112	26	-364	365	92	-92	24	7	-33	3	1
7	5DIV	595	1	5	179	62	1	-420	342	21	229	101	8	-166	54	5	-129	33	5	34	2	0	-22	1	0
8	5RAN	700	27	6	-16	11	0	-86	295	23	-35	51	5	54	112	14	7	2	0	-43	76	12	-62	153	27
9	5MON	700	9	16	100	43	1	178	139	27	301	394	(102)	-105	40	15	49	11	3	-28	4	1	-117	60	26
10	5STA	876	7	16	342	448	15	-202	159	31	-157	96	25	-163	103	31	61	14	5	63	15	6	13	1	0
11	5DYN	857	5	14	-51	8	0	75	18	3	339	468	(102)	65	13	3	179	89	25	192	114	39	-215	143	54
12	6JSO	692	8	12	-234	(50)	17	-86	47	7	-35	9	2	-84	45	10	102	65	16	54	18	5	17	2	1
13	6NAR	426	15	15	-207	388	12	29	8	1	58	31	8	-45	19	5	-62	36	11	22	4	2	-3	0	0
14	6ENC	323	34	12	67	110	3	-31	26	4	50	61	13	-39	38	9	-41	43	11	13	4	1	41	41	14
15	6VAL	924	40	16	167	633	21	-23	13	3	-22	121	32	-40	57	17	8	1	0	-10	3	1	-64	96	42
16	6PRA	590	14	9	-97	128	2	-61	51	6	101	135	21	56	42	7	-83	94	13	-65	57	13	-73	73	18
17	6LTI	753	17	18	-239	(380)	14	163	177	38	-25	5	1	-78	41	14	119	94	34	-78	41	17	48	15	7
18	6PRO	922	21	37	329	713	55	39	7	3	-36	7	4	164	133	95	-20	2	2	90	41	37	61	19	19
19	6YON	778	4	21	-540	535	23	96	17	4	-166	51	18	66	8	3	136	63	22	223	91	46	85	13	8
20	6CSS	511	5	5	-131	172	2	-138	192	12	-74	55	5	-87	76	7	-28	8	1	-25	7	1	-10	1	0
21	6PAR	704	3	12	-57	8	0	-63	10	1	279	178	36	-77	14	3	56	7	2	-9	0	0	195	87	29
22	7NAR	832	19	19	-143	194	7	165	254	57	-111	116	35	-27	7	3	-164	257	95	10	1	0	18	3	2
23	7DEF	920	28	16	145	326	11	28	12	2	160	396	(102)	107	178	55	-16	5	2	-12	3	1	-1	0	0
24	7DEC	931	33	70	325	907	65	21	4	2	-59	28	18	-99	77	58	46	16	13	-15	2	2	-10	1	1
25	7EQU	840	11	22	-76	25	1	-313	424	117	-166	119	44	209	187	79	-102	45	21	-12	1	0	-95	39	24
26	7PRO	630	7	9	141	152	3	-49	19	2	138	145	21	73	41	7	-204	321	58	-16	2	0	7	0	0
27	7PSC	447	6	9	-62	24	0	25	4	0	38	9	1	-45	12	2	5	0	0	255	389	79	39	9	2
28	7PSO	736	18	14	-177	372	11	-116	159	28	57	37	9	-76	70	19	19	4	1	-28	10	3	85	84	32
29	7PLI	942	17	19	-275	(498)	18	-85	65	24	43	16	5	-19	4	1	196	335	123	11	1	0	-61	33	16
30	7CAU	855	3	10	-303	236	5	200	103	13	-34	3	1	-202	105	20	-19	1	0	383	369	90	122	38	10
31	7DVG	419	6	9	126	100	2	93	43	5	-29	6	1	203	259	45	8	0	0	24	4	1	33	7	2
32	7EGA	769	5	29	-459	368	21	361	226	77	-160	45	20	-85	13	7	195	66	32	32	2	1	-167	49	37
33	7SSP	630	10	9	-173	315	6	-92	90	10	105	115	16	-7	1	0	5	0	0	-93	92	19	40	17	4
34	7ETO	798	3	12	-535	467	17	-110	20	4	259	109	32	183	55	18	-227	84	31	155	39	17	93	14	7
35	7PEG	685	4	14	-390	330	10	-155	55	10	-60	9	2	-251	144	40	188	80	24	-149	51	18	-83	16	6
36	8NAP	918	25	27	-168	326	13	67	52	17	-104	127	42	-17	4	1	-64	48	15	-176	357	171	-17	4	2
37	8UNI	601	9	10	-170	224	4	-151	176	21	81	50	8	11	1	0	-88	60	12	-40	13	3	-100	77	20
38	8LOC	857	10	19	-152	111	4	-226	265	63	99	46	15	-232	255	93	60	17	7	121	69	32	139	90	47
39	8ALG	767	11	23	-447	693	39	-23	2	1	78	21	10	20	1	1	-126	55	32	33	4	3	-16	1	1
40	8CAU	568	3	11	20	1	0	-346	704	47	-59	7	1	260	171	37	100	25	6	154	60	17	-11	0	0
41	8XAG	874	28	21	-258	793	34	-61	44	13	-17	4	1	8	1	0	51	30	17	16	3	2	-26	9	5
42	8DEF	926	75	62	290	915	(116)	66	42	37	29	9	10	16	3	3	25	7	9	18	4	5	1	0	0
43	8JSO	567	19	7	-103	281	4	-76	141	13	7	1	0	57	77	11	23	13	2	25	14	3	41	40	8
44	8JOF	924	4	12	-15	1	0	-41	6	1	86	24	5	69	16	4	16	1	2	-214	152	45	469	724	240
45	8ESO	889	21	23	-207	715	74	98	79	23	-27	7	3	29	7	3	-47	19	9	-73	46	25	44	16	10
46	8EDF	687	7	16	-768	580	39	59	15	3	21	2	0	99	42	13	57	14	4	-88	33	13	-14	1	0
47	8NAR	858	42	16	-159	605	20	-41	42	8	-10	9	2	-14	6	2	-38	36	12	34	28	11	-68	112	50
48	8EXE	891	7	16	311	368	12	88	30	6	-63	15	4	49	9	3	207	163	55	-165	105	41	224	191	84
49	8JSE	442	19	11	-139	279	7	54	42	6	52	39	7	-61	55	12	-18	5	1	-6	1	0	39	21	7
50	8PIE	977	54	54	324	953	(105)	-9	1	1	-7	1	1	5	1	1	14	2	2	13	2	2	-42	17	25

	J1	PLT	POID	TNP	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
51	9NAR	922	118	19	-118	855	31	32	63	14	30	54	16	2	0	0	4	1	0	0	0	0	-8	5	2
52	9DIV	617	2	7	143	62	1	-252	194	17	-51	8	1	-700	275	36	-146	65	9	-26	2	0	-60	11	2
53	9SO	857	20	20	282	737	70	2	0	0	-49	22	7	-59	24	9	-37	13	5	77	55	26	15	2	1
54	9PSO	622	6	12	203	189	5	-152	103	16	-117	61	13	111	55	17	196	169	44	10	0	0	111	54	16
55	9PLI	709	11	16	707	561	18	-63	26	5	-100	47	17	24	4	1	-93	58	19	38	9	4	107	74	32
56	9LLI	477	10	7	96	94	1	3	0	0	-136	236	27	-5	0	0	22	6	1	-55	40	7	-69	61	12
57	9SEO	915	5	7	146	136	2	-49	16	1	-44	17	2	237	330	47	147	137	21	-165	176	32	-32	7	1
		151	0	100			100			100			100			100			100			100			100

	SUP	OLT	POID	INR	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
59	M	936	17	47	-421	627	55	-6	0	0	-103	41	29	158	87	71	16	1	1	-119	51	57	-80	23	27
59	M	352	14	22	-222	275	12	49	13	4	-49	14	5	69	27	11	-37	8	4	-41	10	5	-25	4	2
60	M	579	4	32	-556	337	22	30	1	0	319	111	60	-32	1	1	195	41	38	190	39	31	-212	49	44
61	M	744	15	24	-305	504	25	-55	17	5	63	22	9	161	140	65	-6	0	0	73	29	17	77	32	21
62	M	576	13	19	-83	41	2	61	22	5	179	197	60	125	91	34	-16	2	1	118	81	38	-161	152	81
63	M	894	26	46	404	819	77	-48	12	7	-11	1	1	-0	0	0	11	1	1	89	39	44	66	22	27
64	M	553	9	19	240	219	9	103	40	10	151	86	28	-10	0	0	115	50	20	-191	124	58	97	35	19
65	M	852	26	31	-274	421	27	33	8	3	-37	11	6	-204	319	192	23	4	3	-23	4	3	106	85	73
66	M	474	24	17	105	189	5	-44	35	5	-64	73	15	71	87	21	-34	21	6	41	29	9	4	0	0
67	M	490	12	12	207	384	9	-24	6	1	-31	9	2	-77	55	12	-25	6	1	2	0	0	-57	30	10
68	M	729	16	26	305	509	27	104	62	20	-55	17	7	-107	65	32	-27	4	2	-88	44	29	-70	28	20
69	SJUS	913	64	70	294	813	49	-32	21	8	-27	16	8	-39	32	18	-26	15	9	-18	7	5	-11	3	2
70	SJDF	384	9	12	61	26	1	-41	12	3	-126	113	22	140	138	71	49	17	4	-20	3	1	-102	75	24
71	SFDF	865	15	27	46	13	1	116	70	27	322	608	231	-22	3	1	67	26	12	65	25	14	-137	111	69
72	SNTF	421	2	19	-402	125	5	131	17	3	260	48	15	10	0	0	427	141	54	-74	4	2	342	90	46
73	SNUL	609	18	8	45	40	1	-81	135	14	-73	108	15	-120	294	46	37	28	5	12	3	1	8	1	0
74	SFAU	747	17	13	61	33	1	130	146	37	205	368	110	-20	8	3	58	29	11	82	59	26	-108	104	51
75	SRIF	955	101	27	-153	816	44	-3	1	0	-29	29	13	52	92	47	10	4	2	0	0	0	19	12	9
76	SNFO	380	4	9	184	136	7	62	15	2	-112	51	8	-96	38	7	-57	13	2	-148	89	20	-97	38	10
77	SLOG	149	5	9	54	15	0	19	2	0	-20	2	0	-116	70	12	87	38	7	1	0	0	66	22	6
78	SPTF	952	87	32	-183	837	54	24	14	5	-29	22	12	32	27	17	-4	1	0	13	4	3	44	47	41
79	SRIF	940	79	29	362	816	73	30	10	5	-4	0	0	-32	8	6	-27	6	4	-5	0	0	2	0	0
80	JUS	934	104	27	158	871	48	-3	3	1	0	0	0	10	4	2	-33	40	22	21	15	10	5	1	1
81	JDF	733	22	30	-270	497	30	-81	45	17	-3	0	0	-96	63	36	65	28	19	-114	90	65	-38	10	8
82	FDF	682	12	39	-292	251	20	218	139	66	-107	34	22	99	29	21	226	148	113	158	73	68	53	8	9
83	NTF	607	11	29	-301	305	18	163	80	32	3	0	0	181	110	60	-18	1	1	-173	101	70	-18	1	1
84	PTF	811	20	20	-239	523	22	-58	32	8	-15	2	1	-27	7	3	154	218	90	-21	4	2	47	20	11
85	PAB	838	31	35	-201	734	53	93	56	24	8	1	0	48	13	12	-48	19	14	32	8	7	-14	2	2
86	FR	563	14	20	-211	294	12	74	36	9	65	27	9	-27	5	2	95	58	24	-140	130	63	45	13	7
87	COS	612	5	17	-169	96	3	246	201	32	-222	164	35	-73	18	5	199	118	32	29	3	1	60	12	4
88	COP	490	5	18	-366	333	13	-164	67	15	78	15	5	45	5	2	77	15	6	-123	38	17	-53	7	4
89	STP	172	16	8	3	0	0	-62	70	7	-56	56	8	-11	2	0	-45	38	6	17	5	1	6	1	0
90	PAS	411	8	9	17	2	0	-73	44	5	-84	57	8	75	45	7	-152	186	34	98	76	16	12	1	0
91	BOU	496	7	12	-185	171	4	-101	183	27	28	4	1	24	3	1	-150	112	28	0	0	0	-67	23	8
92	DIV	426	2	16	-38	10	0	-113	16	3	282	97	25	92	10	3	485	296	93	30	1	0	73	6	3
93	PAT	941	39	35	-276	782	55	65	43	18	1	0	0	26	7	4	-10	1	1	-10	1	1	-25	7	7
94	RIE	974	65	55	295	924	104	17	3	2	-3	0	0	-1	0	0	-10	1	1	25	6	9	-3	0	0
95	LCI	831	101	16	112	712	23	-16	16	3	-3	1	0	10	5	2	-14	13	4	9	5	2	-36	79	35
96	LCO	788	22	9	-17	4	0	-90	181	21	49	52	8	-31	11	2	105	243	46	54	65	14	103	232	58
97	LNC	854	50	43	-259	706	62	103	112	59	-33	12	3	4	0	0	-6	1	1	-23	12	12	33	11	13
98	JUS	977	70	47	249	918	80	-44	31	16	-15	4	3	26	10	8	-25	10	9	-4	0	0	-16	4	5
99	NTF	770	16	20	-81	40	2	116	98	24	79	46	15	114	96	46	8	0	0	-104	81	39	-5	0	0
100	FAU	943	68	39	-225	804	64	-4	0	0	14	3	2	-36	21	16	76	92	74	34	19	17	16	4	4
101	FTF	962	94	72	-179	865	56	38	30	15	-29	22	12	-18	9	6	21	12	8	18	8	6	16	7	6
102	FOP	899	37	27	258	839	46	23	6	2	26	8	4	40	20	10	15	3	2	33	13	9	6	1	0
103	PAT	728	35	16	-47	89	3	150	434	88	-43	46	12	27	10	7	-79	123	42	-28	16	6	23	10	5
104	RIE	896	29	20	205	552	22	-81	88	22	-94	117	39	19	5	2	-73	71	29	-40	22	11	-56	43	23
105	LCI	837	60	24	190	753	40	-11	3	1	-23	17	7	7	1	0	35	25	13	11	3	2	-40	35	24
106	LCO	678	39	14	-122	384	11	-70	128	23	-10	3	1	7	1	0	68	118	34	13	4	1	0	0	0
107	LNC	895	74	16	-112	515	17	66	179	36	15	10	3	0	0	0	-57	138	47	-8	3	1	36	51	23

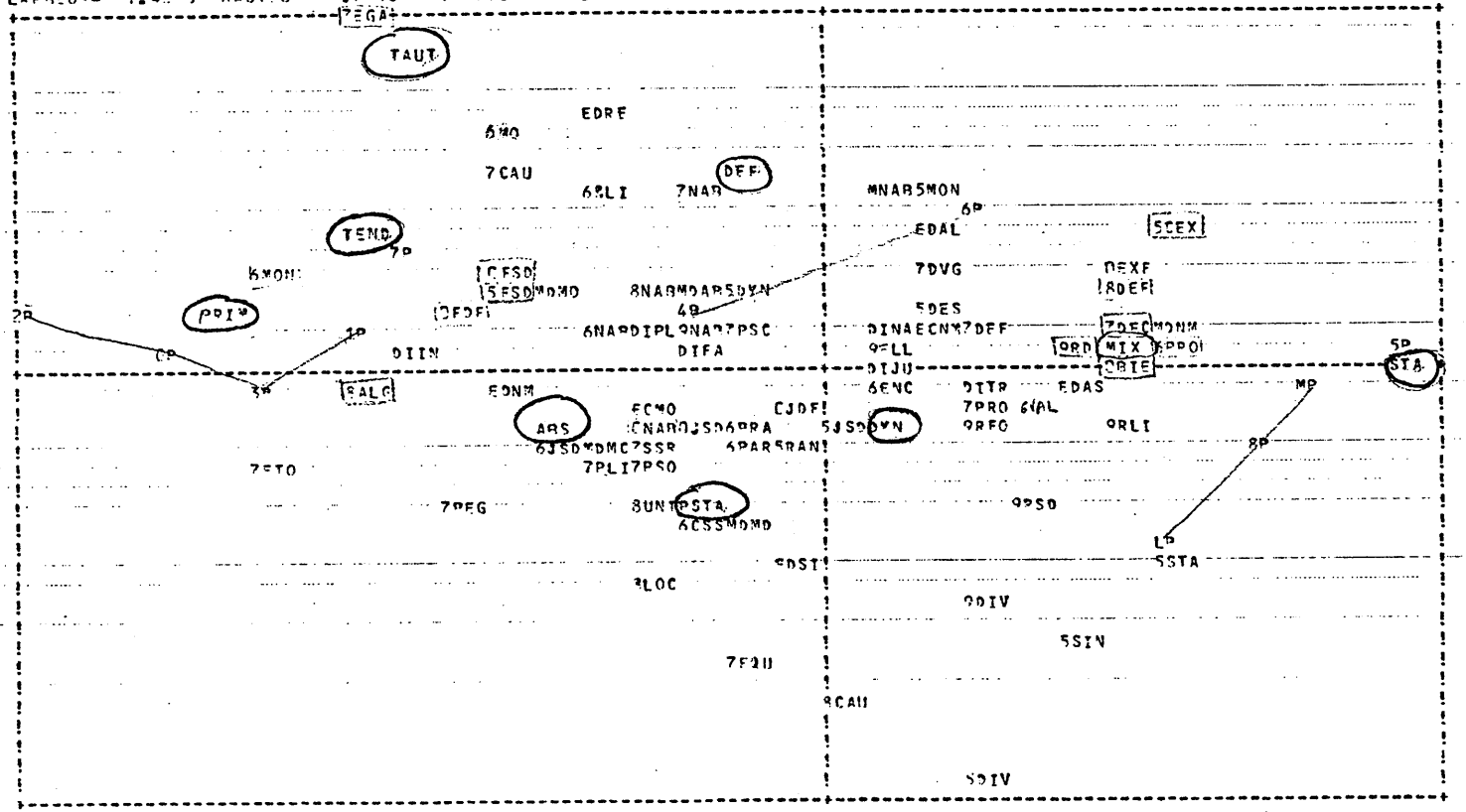
	SUP	OLT	POID	INR	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
108	JUS	981	85	46	275	926	87	36	22	13	34	19	14	4	0	0	2	0	0	29	14	15	-1	0	0
109	JDF	958	48	38	-263	824	64	-97	110	52	24	7	4	3	0	0	75	14	11	17	3	3	4	0	0

110	EDF	765	0	14	-915	143	4	-177	5	1	-474	32	7	450	35	9	-426	31	9	-540	50	17	-635	69	26
111	NTE	677	15	33	-703	411	25	92	37	14	-151	103	51	37	6	4	21	2	1	123	67	49	50	11	9
112	EOR	746	75	19	179	539	21	30	15	4	83	115	36	0	0	0	-15	4	2	39	26	12	53	47	24
113	ARS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
114	DIV	915	79	31	-233	566	36	80	71	28	-127	185	96	11	1	1	-43	21	14	-77	69	52	12	2	1
115	RIE	948	79	67	791	857	110	99	55	43	-18	2	2	30	5	6	62	22	29	0	0	0	-45	12	20
116	JUS	921	75	77	219	876	66	23	10	4	1	0	0	-18	6	4	29	15	12	27	13	12	-8	1	1
117	NTE	140	4	7	-87	42	1	131	94	9	-68	26	3	-4	0	0	0	0	0	-56	18	3	9	0	0
118	DIV	773	14	23	-311	627	26	48	15	4	25	4	1	20	3	1	110	78	33	-4	0	0	41	11	6
119	RTE	937	30	27	-191	892	49	-4	1	0	-17	9	4	9	2	1	-37	38	21	14	5	3	-3	0	0
			15105.0	1529		1799			904			1101			899			1104			976			933

1 AXE HORIZONTAL(1)--AXE VERTICAL(2)--TITRE: ANACOR DU 8URT MODELES-EXEMPLES * PROCEDURES A TOUS LES EXOS

ANNEXE ⑨ 6

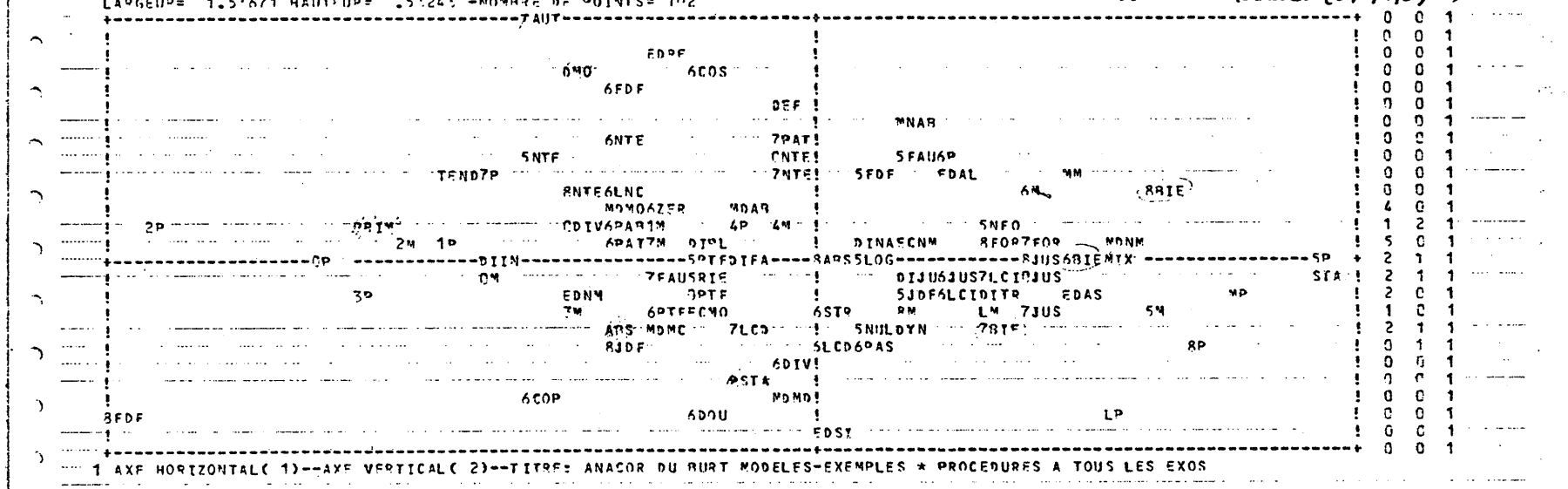
LARGEUR= 1.43335 HAUTEUR= .78165 -NOMBRE DE POINTS= 97

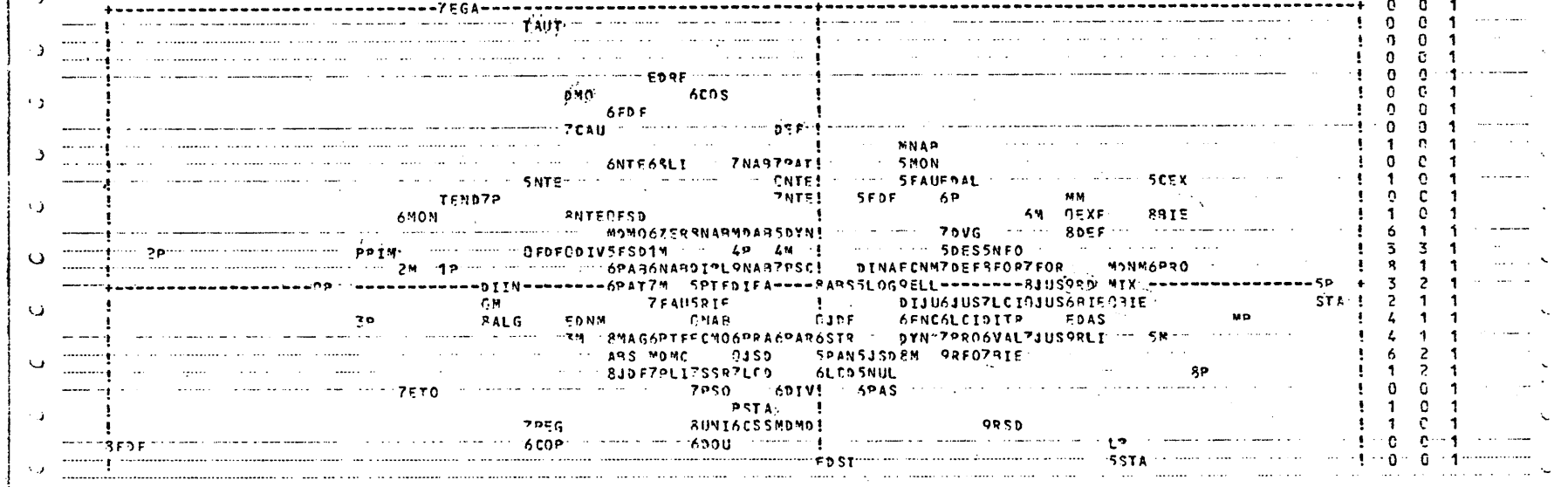


1 AXE HORIZONTAL(1)--AXE VERTICAL(2)--TITRE: ANACOR DU 8URT MODELES-EXEMPLES * PROCEDURES A TOUS LES EXOS

⑨6

MODÈLES-EXEMPLES × PROCÉDURES
à tous les exercices (5, 6, 7, 8, 10)





	J1	CLT	POID	IMC	1ER	COR	CTR	2ME	COR	CTR	3ME	COR	CTR	4ME	COR	CTR	5ME	COR	CTR	6ME	COR	CTR	7ME	COR	CTR
1	OFF	37	1	81	84	1	01	-54	1	01	47	0	01	-278	16	41	268	17	51	-103	2	11	39	0	01
2	VEAR	966	3	241	1329	412	851	-1509	532	118	-50	1	01	47	1	01	-222	12	101	-188	8	81	10	0	01
3	DRO	183	2	91	195	15	11	351	48	41	288	32	71	201	16	51	120	6	21	-292	33	121	294	33	121
4	PSTA	159	6	81	-79	8	01	152	27	21	-173	36	71	13	0	01	128	19	51	-33	1	01	-239	65	221
5	STA	343	4	91	-479	173	141	-309	72	61	-122	11	31	-229	40	121	157	18	61	20	0	01	198	29	111
6	TEMP	189	5	91	263	34	31	325	88	71	-200	34	81	-179	27	81	-45	2	11	66	4	11	-17	0	01
7	ASS	290	4	91	323	73	61	133	12	11	91	6	11	246	43	131	416	121	381	224	35	131	-20	0	01
8	TAUT	250	2	91	173	10	11	180	11	11	135	6	11	-790	210	621	131	6	21	110	4	11	-88	3	11
9	LOPA	242	4	91	28	1	01	315	74	61	151	17	41	-60	3	11	-812	127	391	-163	20	71	-5	0	01
10	IPA	136	6	81	95	11	11	191	43	31	9	0	01	68	9	21	217	55	161	103	12	41	71	6	21
11	LIDA	560	2	101	231	15	11	335	32	31	-40	2	11	178	9	31	-591	100	371	1185	400	1691	83	2	11
12	LAPO	494	4	91	145	15	11	399	116	101	175	22	61	235	40	131	-154	17	61	-458	153	561	426	131	511
13	TRT	66	0	81	-65	0	01	10	0	01	52	0	01	-737	40	131	-228	5	11	131	2	01	-380	10	31
14	LNAR	558	47	41	-132	381	121	21	9	01	-19	9	11	-34	26	31	63	84	111	11	3	01	-45	46	71
15	LTNA	969	4	251	1271	414	871	-1440	533	1201	-46	1	01	87	2	21	-207	11	101	-174	8	81	15	0	01
16	MAR	774	23	111	402	539	511	-200	134	181	4	0	01	-31	3	11	152	77	301	72	17	81	34	8	21
17	MNC	667	21	101	-401	574	471	-108	42	41	-18	1	01	-96	33	111	10	0	01	-30	3	11	-62	14	61
18	MNC	400	13	61	-6	0	01	316	250	191	96	23	51	123	38	111	-122	38	111	-134	45	151	47	6	21
19	MAR	302	8	91	-75	9	11	222	80	61	-164	45	101	84	12	31	-214	74	221	205	67	231	-97	15	51
20	MRO	207	3	91	68	2	01	375	71	61	219	24	61	148	11	31	-102	5	21	-320	52	191	289	42	151
21	SFX	374	22	61	-48	14	11	68	26	21	44	11	21	-43	11	21	213	255	581	-44	11	31	90	46	121
22	SEJO	571	21	81	-266	302	201	-82	8	11	-18	2	01	-59	15	41	-224	219	621	73	22	71	-26	3	11
23	SEIF	368	21	71	91	41	31	236	258	181	-12	1	01	90	38	91	39	7	21	14	1	01	-47	22	71
24	SIMA	967	4	251	1297	417	881	-1457	527	1201	-45	1	01	73	1	11	-215	12	101	-185	9	91	7	0	01
25	DIJO	95	7	41	-131	26	21	57	5	01	102	16	31	-75	9	21	82	3	11	-118	22	71	-95	14	51
26	DITR	429	24	71	-267	401	241	0	0	01	0	0	01	11	1	01	-82	10	31	21	2	11	-51	15	41
27	DIPL	144	6	81	-24	1	01	221	60	41	-3	0	01	-201	50	131	-144	26	71	-23	1	01	-63	6	21
28	DITM	507	9	101	250	100	81	404	260	231	102	17	41	78	10	31	114	21	71	64	7	31	240	93	371
29	DIFA	106	5	81	34	1	01	194	42	31	-171	33	71	-27	1	01	14	0	01	156	27	91	36	2	11
30	DIVA	709	15	111	337	270	241	-418	418	411	-37	4	11	56	8	31	30	2	11	-55	7	31	-6	0	01
31	I/S	170	25	61	-81	51	21	-24	5	01	-11	1	01	119	110	201	-2	0	01	14	2	01	9	1	01
32	NI/M	316	19	71	-158	115	71	-121	67	41	-16	1	01	-98	45	101	-88	36	91	-28	4	11	153	48	141
33	TI/N	508	17	81	287	230	201	126	58	41	4	0	01	-163	91	251	93	29	81	27	2	11	-127	52	181
34	GI/N	177	5	81	106	11	11	194	36	31	147	21	51	333	106	291	43	2	01	-33	1	01	-13	0	01
35	ECRU	271	25	61	95	64	31	125	111	61	24	4	11	74	39	81	1	0	01	-82	48	111	-24	5	11
36	ECAM	258	42	41	-51	52	21	-72	105	31	-10	3	01	-45	40	51	0	0	01	52	53	81	16	5	11
37	IN	469	21	71	-177	154	91	-149	110	71	22	2	01	159	123	291	33	5	11	38	7	21	114	68	201
38	IN	275	18	71	-135	78	51	-2	0	01	-116	58	111	-28	3	11	-129	71	181	-123	65	181	5	0	01
39	IO	628	26	71	241	332	211	110	69	51	49	14	31	-126	92	231	85	41	111	61	22	71	-150	56	161
40	EX	66	3	81	50	1	01	155	12	11	103	17	41	166	14	41	-213	24	71	-29	0	01	31	0	01
41	EDS	450	17	81	235	198	131	172	104	81	7	0	01	141	70	191	-11	0	01	51	9	31	144	73	251
42	ESI	176	11	71	7	0	01	67	11	11	-37	3	11	186	42	211	-112	30	81	138	43	131	14	1	01
43	EXA	259	19	71	-95	43	21	-105	52	31	-30	4	11	-98	46	101	2	0	01	-96	46	121	-121	76	201
44	EDA	235	15	71	-199	136	91	-134	62	41	18	1	01	-58	12	31	17	1	01	-59	12	41	52	9	31
45	EDR	302	5	91	239	89	41	115	11	11	157	21	51	-359	111	331	247	52	161	120	12	41	-231	46	171
46	DES	757	16	131	477	483	521	-323	223	261	47	5	21	-22	1	01	117	29	131	82	14	71	20	2	11
47	EON	363	18	81	-89	31	21	160	98	71	12	1	01	169	109	281	-161	101	271	56	12	41	-52	11	31
48	APL	406	8	91	-303	66	51	-45	1	01	42	1	01	-440	139	421	-9	0	01	266	50	191	448	103	551
49	LIN	373	23	71	-163	149	91	103	56	41	74	31	61	-41	10	21	-21	3	11	-148	122	341	-4	0	01
50	PLAN	167	5	81	-212	48	31	-12	0	01	-33	1	01	12	0	01	235	58	171	85	8	21	-260	72	241

ANNEXE ⑨ 7 PERTINENCE DES CHOIX INITIAUX

J1	ALT	POP	INT	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
51	921	1	15	168	3	01	480	21	31	-3067	874	349	1	0	01	333	10	51	-303	9	51	199	6	21
52	85	1	81	-16	0	01	283	19	11	219	11	21	-255	15	41	-70	1	01	-79	1	01	-404	38	131
53	47	1	81	-308	12	11	57	0	01	-28	0	01	-46	1	01	-398	20	61	-366	17	61	-366	17	61
54	296	4	91	-536	191	151	-299	60	51	76	6	11	-22	0	01	-20	0	01	105	7	31	226	30	131
55	95	5	81	-103	7	01	41	1	01	135	12	31	254	44	111	202	28	71	9	0	01	-62	3	11
56	230	3	91	-434	105	81	-212	25	21	2	0	01	-305	52	151	-73	3	11	161	14	51	237	31	111
57	921	1	15	168	3	01	480	21	31	-3067	874	349	8	0	01	333	10	51	-303	9	51	199	6	21
58	418	2	101	362	42	41	386	48	51	8	0	01	158	8	31	-289	27	101	952	293	1221	2	0	01
59	168	1	81	179	8	11	342	38	31	72	1	01	-84	2	11	-226	14	41	-397	41	141	565	80	301
60	305	2	101	424	67	61	516	98	91	197	18	41	-7	0	01	-62	1	01	-361	29	191	458	77	311
61	268	7	71	-217	71	51	63	6	01	-55	5	11	186	52	141	-237	85	241	-87	12	41	-194	57	191
62	68	12	71	-103	33	21	46	6	01	43	6	11	77	18	41	1	0	01	-5	0	01	-38	5	11
63	46	6	31	7	0	01	141	25	21	87	10	21	1	0	01	55	4	11	-39	2	11	-63	5	21
64	169	10	71	73	12	11	-71	12	11	-124	36	71	86	17	41	106	25	71	-42	4	11	-164	63	201
65	683	20	101	292	292	241	309	326	291	29	3	11	-83	24	81	81	22	81	15	1	01	55	15	61
66	132	2	81	233	21	11	-88	3	01	-19	0	01	-367	52	141	-356	49	141	84	3	11	-107	4	21
67	592	10	101	-408	255	231	-421	271	261	54	4	11	13	0	01	177	48	181	26	1	01	92	13	61
68	167	3	81	-298	55	41	-200	25	21	-318	62	141	64	2	11	-43	1	01	-17	0	01	190	22	81
69	83	1	81	155	7	01	18	0	01	161	8	21	37	0	01	-298	28	81	209	14	41	-287	26	81
70	169	0	81	-310	8	11	64	0	01	-1329	143	321	92	1	01	-592	28	81	174	2	11	-290	7	21
71	199	11	71	-57	8	01	-38	4	01	104	27	51	195	94	221	-144	52	131	43	5	11	-59	9	31
72	134	3	81	2	0	01	71	3	01	100	6	11	-209	26	71	-314	59	171	-243	35	121	-88	5	21
73	204	3	91	-407	85	61	-338	58	51	67	2	11	71	3	11	-55	2	01	273	38	131	175	16	61
74	109	2	81	89	1	01	171	11	11	81	2	11	-22	0	01	-176	11	31	-446	73	241	-170	11	41
75	273	3	81	316	67	51	200	27	21	-129	11	21	76	4	11	-300	60	171	-175	21	71	351	53	201
76	208	6	81	292	97	71	115	15	11	3	0	01	-129	19	51	-172	34	101	94	10	31	-171	33	121
77	48	13	61	-74	19	11	21	1	01	0	0	01	-1	0	01	75	19	41	-49	8	21	-16	1	01
78	555	16	91	-190	111	31	-309	291	231	18	1	01	209	132	381	67	14	41	39	5	21	21	1	11
79	187	5	91	80	7	01	230	59	41	65	5	11	101	11	31	159	28	81	29	1	01	-260	76	251
80	220	5	81	302	90	61	281	78	61	-17	0	01	-158	25	71	-99	10	31	-82	7	21	-98	10	31
81	393	8	91	-418	259	201	-166	41	31	-14	0	01	-179	48	141	-80	6	21	16	0	01	163	39	151
82	190	2	91	383	28	21	501	75	61	163	8	21	-50	1	01	40	0	01	503	76	271	-76	2	11
83	115	2	81	65	2	01	-2	0	01	-436	92	191	28	0	01	153	11	31	-130	8	31	57	2	11
84	113	1	81	85	2	01	111	3	01	96	2	11	-415	45	121	-112	3	11	-448	52	171	205	11	41
85	487	8	91	417	226	181	-206	56	51	-13	0	01	-219	63	201	-239	75	251	220	63	241	-55	8	21
86	274	11	71	-223	125	81	-19	1	01	58	8	21	-125	39	101	6	0	01	-145	53	151	-138	29	151
87	643	13	101	-308	202	181	-409	356	331	32	2	11	64	9	31	148	47	171	79	13	61	82	14	61
88	211	4	81	-165	23	21	2	0	01	-132	15	51	406	137	371	77	5	11	182	28	91	63	3	11
89	113	3	91	-353	71	51	-182	19	11	49	1	01	96	5	11	-108	7	21	-87	4	11	-102	6	21
90	185	2	81	76	3	01	302	81	31	-105	5	11	-250	28	81	-65	2	11	-441	87	291	-200	19	81
91	299	7	91	173	40	31	424	229	191	15	0	01	-41	2	11	-123	20	61	-42	2	11	-69	5	21
92	224	7	91	152	29	21	319	128	101	-75	7	21	158	32	91	-143	26	81	-38	2	11	-8	0	01
93	83	1	81	189	5	01	2	0	01	27	0	01	2	0	01	-398	35	101	48	1	01	-99	2	11
94	18	2	81	21	0	01	25	0	01	143	10	21	-32	1	01	20	0	01	-58	4	11	-80	3	11
95	356	2	101	389	52	41	496	85	71	-148	8	21	-169	10	31	409	58	191	-2	0	01	643	133	571
96	31	8	71	59	3	01	62	4	01	47	2	01	-37	1	01	96	9	21	-92	8	21	-58	4	11
97	183	1	91	357	28	21	520	76	61	263	15	41	30	0	01	525	60	191	125	3	11	-77	1	11
98	196	1	91	398	43	31	315	27	21	111	3	11	421	48	141	95	2	11	-18	0	01	524	75	271
99	321	10	81	322	202	141	85	4	01	-53	6	11	-139	38	111	-116	27	81	133	35	121	-66	9	31
100	190	3	91	172	18	11	316	62	51	131	11	21	259	41	121	63	2	11	-233	38	121	-197	22	81

	!	11	!	GET	POID	IOR!	1#F	COR	CTR!	2#F	COR	CTR!	3#F	COR	CTR!	4#F	COR	CTR!	5#F	COR	CTR!	6#F	COR	CTR!	7#F	COR	CTR!
101	!	AL	OC!	298	4	8!	63	3	0!	278	59	5!	-398	122	28!	70	4	1!	-277	59	18!	-14	0	0!	27	1	0!
102	!	GAL	C!	246	4	9!	277	56	4!	424	132	11!	130	12	3!	-49	2	1!	95	7	2!	-219	36	13!	-33	1	0!
103	!	#CA	H!	27	1	8!	-85	2	0!	204	11	1!	-28	0	0!	74	1	0!	176	8	2!	68	1	0!	-117	8	1!
104	!	#G	C!	390	11	9!	257	138	10!	261	161	13!	45	8	1!	42	4	1!	-37	3	1!	9	0	0!	208	88	31!
105	!	FF	L!	672	29	10!	-257	426	36!	-295	462	39!	58	7	2!	4	0	0!	55	15	5!	0	0	0!	-26	3	1!
106	!	GJS	O!	156	7	8!	122	24	2!	146	34	2!	-187	56	11!	110	19	5!	87	12	3!	-25	1	0!	-81	11	3!
107	!	OJF	F!	260	2	9!	-36	0	0!	-45	1	0!	65	1	0!	-732	178	53!	-305	31	10!	-115	4	2!	370	45	17!
108	!	OFS	D!	465	6	10!	330	143	12!	406	217	20!	-81	9	2!	-148	28	9!	155	32	11!	117	18	7!	116	18	6!
109	!	GFD	F!	199	3	9!	247	31	2!	470	113	9!	285	42	10!	-48	1	0!	90	4	1!	10	0	0!	121	8	3!
110	!	OMA	R!	298	16	7!	152	87	5!	59	13	1!	35	5	1!	69	18	4!	-213	172	43!	1	0	0!	-28	3	1!
111	!	GEA	F!	481	3	10!	-340	53	4!	-204	27	2!	28	0	0!	-697	222	73!	-293	39	14!	128	7	3!	541	133	55!
112	!	OJS	E!	276	7	8!	236	83	6!	113	19	1!	73	8	2!	-46	3	1!	172	44	12!	-150	34	11!	-239	85	27!
113	!	OR	IF!	785	21	10!	-349	426	36!	-302	320	30!	4	0	0!	92	30	10!	49	9	3!	0	0	0!	-5	0	0!
	!		!	11456	99.0	100!			100!			100!			100!			100!			100!			100!			100!

	!	JS	OP!	NET	POID	IOR!	1#F	COR	CTR!	2#F	COR	CTR!	3#F	COR	CTR!	4#F	COR	CTR!	5#F	COR	CTR!	6#F	COR	CTR!	7#F	COR	CTR!
114	!	PR	T!	435	6	10!	356	118	10!	440	180	16!	106	10	3!	24	1	0!	-158	24	8!	110	11	4!	312	91	37!
115	!	OY	!	316	24	6!	-121	103	5!	69	33	2!	11	1	0!	95	63	12!	-75	40	8!	-37	10	2!	-96	66	15!
116	!	NI	X !	334	12	8!	-335	280	19!	-111	31	2!	52	7	1!	-43	5	1!	-3	0	0!	43	5	1!	62	10	3!
117	!	0	!	603	6	5!	816	461	16!	238	130	5!	116	31	4!	52	5	1!	-97	22	4!	45	5	1!	57	8	1!
118	!	1	!	671	5	4!	162	54	2!	296	180	7!	-450	418	47!	-74	12	2!	39	3	0!	-43	4	1!	4	0	0!
119	!	2	!	475	2	2!	382	171	3!	384	164	3!	97	11	1!	139	21	2!	-206	48	4!	5	0	0!	231	68	6!
120	!	3	!	593	6	3!	222	184	4!	376	424	12!	46	6	1!	20	1	0!	17	1	0!	-21	1	0!	-63	12	2!
121	!	4	!	891	5	3!	57	8	0!	146	56	2!	113	33	3!	-103	28	3!	-228	136	15!	-247	186	23!	-129	44	6!
122	!	5	!	771	10	5!	-422	569	25!	-212	145	7!	33	8	0!	-93	28	5!	-50	8	1!	21	1	0!	71	18	2!
123	!	6	!	337	3	2!	-156	62	1!	-114	33	1!	58	8	0!	-201	102	7!	-194	96	7!	106	26	2!	-55	8	1!
124	!	7	!	590	10	4!	258	281	9!	214	199	7!	21	2	0!	-90	36	5!	120	63	9!	42	8	1!	16	1	0!
125	!	8	!	595	9	3!	-251	412	10!	-134	94	3!	18	2	0!	111	64	6!	42	9	1!	57	17	2!	-13	1	0!
126	!	L	!	532	5	2!	-157	118	2!	-200	100	3!	-1	0	0!	194	177	10!	83	32	2!	-15	1	0!	-58	14	1!
127	!	N	!	863	6	5!	11	0	0!	-598	740	35!	-18	0	0!	115	27	5!	133	36	7!	3	0	0!	-5	0	0!
	!		!	11654	00.0	61!			105!			108!			60!			58!			65!			38!			76!

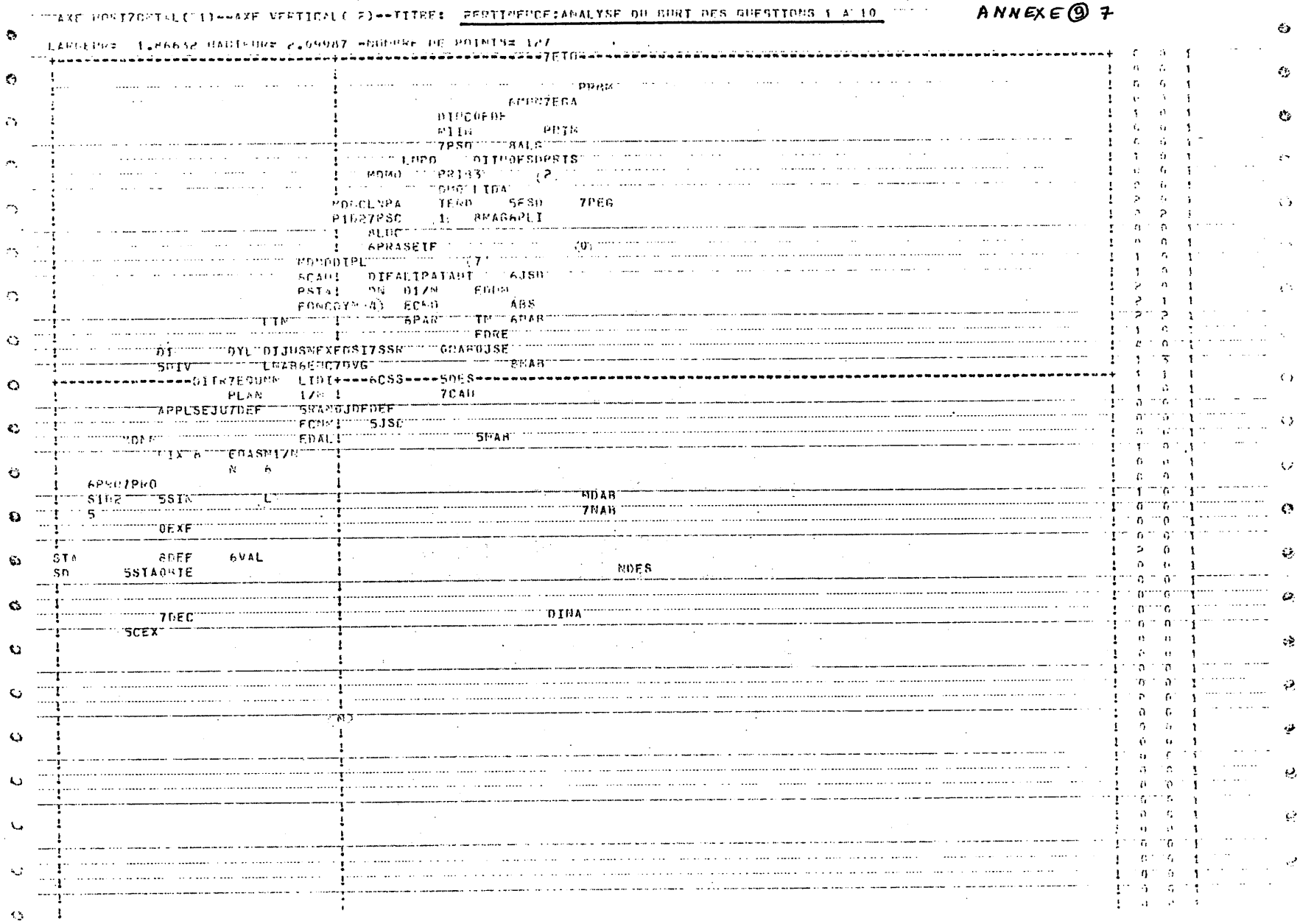
	TI	CLT	POID	TYR	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR	5#F	COR	CTR	6#F	COR	CTR	7#F	COR	CTR
1	BEF	37	1	8	84	1	0	-54	1	0	49	0	0	-278	16	4	288	17	5	-103	2	1	39	0	0
2	MAR	966	3	24	1329	412	85	-1509	532	118	-50	1	0	47	1	0	-223	12	10	-185	8	8	19	0	0
3	MO	143	2	9	195	15	11	351	48	41	208	32	7	201	16	5	120	6	2	-292	33	12	294	33	12
4	OSTA	159	6	8	-79	8	0	152	27	21	-173	36	7	13	0	0	128	19	5	-33	1	0	-239	66	22
5	SIA	343	4	9	-479	173	14	-309	72	6	-122	11	3	-229	40	12	157	18	6	20	0	0	198	29	11
6	TEG	149	5	9	203	34	3	325	88	7	-200	34	8	-179	27	8	-45	2	1	66	4	1	-17	0	0
7	ARS	290	4	9	328	73	6	133	12	1	91	6	1	246	43	13	416	121	38	224	35	13	-20	0	0
8	TAU	250	2	9	173	10	1	180	11	1	135	6	1	-790	210	62	130	6	2	110	4	1	-84	3	1
9	LRA	242	4	9	28	1	0	315	74	6	151	17	4	-60	3	1	-812	127	39	-163	20	7	-5	0	0
10	LTA	136	5	8	95	11	1	191	43	3	9	0	0	87	9	2	217	55	16	103	12	4	71	6	2
11	LIO	560	2	10	231	15	1	335	32	3	-80	2	1	178	9	3	-591	100	37	1185	406	149	93	2	1
12	LRO	494	4	9	145	15	1	399	116	10	175	22	6	235	40	13	-154	17	6	-458	153	56	424	131	51
13	LTO	66	0	8	-65	0	0	10	0	0	52	0	0	-737	49	13	-227	5	1	131	2	0	-340	10	3
14	LMA	558	47	4	-432	381	12	21	9	0	-19	9	1	-34	26	3	63	84	11	11	3	0	-85	46	7
15	LTA	969	4	25	1271	414	87	-1440	533	120	-46	1	0	87	2	2	-207	11	10	-174	8	8	15	0	0
16	OAR	774	23	11	462	539	51	-200	134	14	4	0	0	-31	3	1	152	77	30	72	17	6	34	8	2
17	ORA	667	21	10	-401	576	47	-106	42	4	-18	1	0	-96	33	11	10	0	0	-30	3	1	-62	14	4
18	EYC	400	13	8	-6	0	0	316	250	19	96	23	5	123	38	11	-122	36	11	-134	45	15	47	6	2
19	OPO	302	8	9	-75	9	1	222	80	6	-166	45	10	86	12	3	-214	74	22	205	67	23	-97	15	5
20	OMO	207	3	9	68	2	0	375	71	6	219	24	6	148	11	3	-102	5	2	-320	52	19	289	42	16
21	SNE	374	22	6	-48	14	1	68	26	2	44	11	2	-43	11	2	213	255	58	-48	11	3	90	46	12
22	SEJ	571	21	8	-266	302	20	-42	8	1	-18	2	0	-59	15	4	-226	219	62	73	22	7	-26	3	1
23	SEI	368	21	7	94	41	3	234	258	18	-12	1	0	90	38	9	39	7	2	14	1	0	-67	22	7
24	STA	967	4	25	1297	417	84	-1457	527	120	-45	1	0	73	1	1	-215	12	10	-185	9	9	7	0	0
25	DIJ	95	7	8	-131	26	2	57	5	0	102	16	3	-75	9	2	42	3	1	-118	22	7	-95	14	5
26	FIT	429	24	7	-267	401	24	0	0	0	0	0	0	11	1	0	-42	10	3	21	2	1	-51	15	4
27	OTP	144	6	8	-24	1	0	221	60	4	-3	0	0	-201	50	13	-144	26	7	-23	1	0	-68	6	2
28	DIN	507	9	10	250	100	8	404	260	23	102	17	4	78	10	3	114	21	7	64	7	3	240	92	37
29	DFA	106	5	8	34	1	0	194	42	3	-171	33	7	-27	1	0	14	0	0	156	27	9	38	2	1
30	DIN	709	15	11	337	270	24	-418	418	41	-37	4	1	56	8	3	30	2	1	-55	7	3	-6	0	0
31	I/N	170	26	6	-81	51	2	-24	5	0	-11	1	0	119	110	20	-2	0	0	14	2	0	9	1	0
32	A1/N	316	19	7	-158	115	7	-121	67	4	-16	1	0	-98	45	10	-88	36	9	-28	4	1	103	48	14
33	T1/N	508	17	8	267	280	20	126	54	4	4	0	0	-163	91	25	93	29	9	27	2	1	-123	52	14
34	D1/D	177	5	8	106	11	1	194	36	3	147	21	5	333	106	29	43	2	0	-33	1	0	-13	6	0
35	EC	271	25	6	95	64	3	125	111	6	24	4	1	74	39	8	1	0	0	-82	48	11	-26	5	1
36	EC	258	42	4	-51	52	2	-72	105	5	-10	3	0	-45	40	5	0	0	0	52	53	8	16	5	1
37	D	466	21	7	-177	154	9	-189	109	7	22	2	0	159	123	29	33	5	1	38	7	2	118	68	20
38	D	275	18	7	-135	78	5	-2	0	0	-116	58	11	-28	3	1	-129	71	18	-123	65	18	5	0	0
39	T	628	26	7	241	332	21	110	69	5	49	14	3	-126	92	23	85	41	11	61	22	7	-100	56	18
40	D	68	3	8	50	1	0	155	12	1	183	17	4	166	14	4	-213	24	7	-29	0	0	31	0	0
41	EP	450	17	8	235	194	13	172	104	8	7	0	0	141	70	19	-11	0	0	51	9	3	164	73	25
42	SP	170	11	7	7	0	0	67	11	1	-37	3	1	186	82	21	-112	30	8	134	43	13	16	1	0
43	FA	259	19	7	-95	43	2	-105	52	3	-30	4	1	-98	46	10	2	0	0	-96	44	12	-121	70	20
44	FA	235	15	7	-199	138	9	-134	62	4	18	1	0	-58	12	3	17	1	0	-59	12	4	52	9	3
45	FO	302	5	9	239	49	4	115	11	1	157	21	5	-359	111	33	247	52	16	120	12	4	-231	46	17
46	MF	757	16	13	477	483	52	-323	223	26	47	5	2	-22	1	0	117	29	13	82	10	7	29	2	1
47	FO	363	18	6	-59	31	2	160	98	7	12	1	0	169	109	28	-161	101	27	56	12	4	-52	11	2
48	AP	800	4	9	-303	66	5	-35	1	0	42	1	0	-400	139	42	-9	0	0	266	50	19	402	143	56
49	LI	373	23	7	-163	149	9	103	56	4	74	31	6	-41	10	2	-21	3	1	-146	122	34	-4	0	0
50	PLA	137	5	8	-212	46	3	-12	0	0	-33	1	0	12	0	0	235	58	17	85	8	2	-260	72	24

	! II !	OLT	POTO	I-R!	1#F	COR	CTR!	2#F	COR	CTR!	3#F	COR	CTR!	4#F	COR	CTR!	5#F	COR	CTR!	6#F	COR	CTR!	7#F	COR	CTR!
51	DT C!	921	1	15!	168	3	01	440	21	31	-3067	874	349!	8	0	01	333	10	5!	-303	9	5!	199	8	2!
52	PIP2!	85	1	8!	-14	0	01	283	19	11	219	11	21	-255	15	41	-70	1	01	-79	1	01	-404	38	13!
53	01 !	67	1	9!	-300	12	1!	57	0	01	-28	0	01	-64	1	01	-398	20	6!	-366	17	6!	-366	17	6!
54	SC !	294	4	9!	-536	191	15!	-299	60	5!	76	4	1!	-22	0	01	-30	0	01	105	7	3!	228	38	13!
55	PD !	95	3	8!	-103	7	01	41	1	01	135	12	3!	254	44	11!	202	28	7!	9	0	01	-62	5	1!
56	SIP2!	230	3	9!	-436	105	8!	-212	25	2!	2	0	01	-305	52	15!	-73	3	1!	141	16	5!	237	31	11!
57	TT !	921	1	15!	168	3	01	440	21	31	-3067	874	349!	8	0	01	333	10	5!	-303	9	5!	199	8	2!
58	P3T5!	418	2	10!	362	42	4!	396	48	5!	8	0	01	158	8	3!	-249	27	10!	951	293	122!	2	0	01
59	PSTR!	188	1	8!	179	8	1!	382	38	3!	72	1	01	-84	2	1!	-226	14	4!	-397	41	14!	565	84	30!
60	PS !	355	2	10!	428	67	6!	516	98	9!	107	14	4!	-7	0	01	-62	1	01	-361	48	19!	458	77	31!
61	PYL !	298	7	8!	-217	71	5!	63	6	01	-55	5	1!	186	52	14!	-237	85	24!	-87	12	4!	-194	57	19!
62	PYS !	65	12	7!	-103	33	2!	46	6	01	43	6	1!	77	18	4!	1	0	01	-5	0	01	-38	5	1!
63	PYP !	86	6	8!	7	0	01	141	25	2!	87	10	2!	1	0	01	55	8	1!	-39	2	1!	-83	5	2!
64	SJSD!	169	10	7!	73	12	1!	-71	12	1!	-124	36	7!	86	17	4!	106	25	7!	-42	4	1!	-166	63	20!
65	SFSD!	683	20	10!	292	292	24!	309	326	29!	29	3	1!	-83	24	8!	81	22	8!	15	1	01	65	15	6!
66	SMOD!	132	2	8!	233	21	1!	-88	3	01	-19	0	01	-167	52	14!	-356	49	14!	-86	3	1!	-107	4	2!
67	SCFX!	592	10	10!	-408	255	23!	-421	271	26!	54	4	1!	13	0	01	177	48	18!	26	1	01	92	13	6!
68	SIP4!	167	3	8!	-298	55	4!	-200	25	2!	-318	62	14!	64	2	1!	-43	1	01	-17	0	01	190	22	8!
69	SPFS!	83	1	8!	158	7	01	-18	0	01	161	8	2!	37	0	01	-298	28	8!	209	14	4!	-287	26	9!
70	SDIV!	139	0	8!	-310	8	1!	60	0	01	-1329	143	32!	92	1	01	-592	28	8!	174	2	1!	-290	7	2!
71	SSAV!	199	11	7!	-57	8	01	-38	4	01	104	27	5!	195	98	22!	-184	52	13!	43	5	1!	-59	9	3!
72	SSON!	134	3	8!	2	0	01	71	3	01	100	6	1!	-209	26	7!	-314	59	17!	-243	35	12!	-88	5	2!
73	SSTA!	298	3	9!	-407	85	6!	-338	58	5!	67	2	1!	71	3	1!	-55	2	01	273	38	13!	175	16	6!
74	SDYN!	109	2	8!	49	1	01	171	11	1!	81	2	1!	-22	0	01	-176	11	3!	-446	73	24!	-170	11	4!
75	AJSD!	273	3	8!	316	67	5!	200	27	2!	-129	11	2!	76	4	1!	-300	60	17!	-175	21	7!	351	83	23!
76	AA3!	208	6	8!	292	97	7!	115	15	1!	3	0	01	-129	19	5!	-172	34	10!	94	10	3!	-171	33	12!
77	AFAC!	48	13	6!	-74	19	1!	21	1	01	0	0	01	-1	0	01	75	19	4!	-49	8	2!	-16	1	01
78	AVAL!	555	16	9!	-190	111	8!	-309	291	23!	18	1	01	209	132	38!	67	14	4!	39	5	2!	21	1	1!
79	APRA!	147	5	8!	80	7	01	230	59	4!	65	5	1!	101	11	3!	159	28	8!	29	1	01	-260	76	25!
80	APLT!	226	5	9!	302	90	6!	281	78	6!	-17	0	01	-158	25	7!	-99	10	3!	-82	7	2!	-98	10	3!
81	APRO!	393	8	9!	-418	259	20!	-166	41	3!	-14	0	01	-179	88	14!	-60	6	2!	16	0	01	163	39	15!
82	AMOU!	190	2	9!	363	28	2!	501	75	6!	163	8	2!	-50	1	01	40	0	01	503	76	27!	-76	2	1!
83	ACSS!	115	2	8!	65	2	01	-2	0	01	-436	92	19!	24	0	01	153	11	3!	-130	8	3!	57	2	1!
84	APAP!	118	1	2!	85	2	01	111	3	01	96	2	1!	-415	45	12!	-112	3	1!	-448	52	17!	205	11	4!
85	ZAAA!	487	8	9!	417	226	18!	-206	56	5!	-13	0	01	-219	63	20!	-239	75	25!	220	63	24!	-55	8	3!
86	ZPFF!	274	11	7!	-223	125	8!	-19	1	01	58	8	2!	-125	39	10!	6	0	01	-145	53	15!	-139	48	15!
87	ZPEC!	642	13	10!	-309	202	18!	-409	356	33!	32	2	1!	60	9	3!	148	46	17!	79	13	6!	82	14	4!
88	ZPOU!	211	4	8!	-165	23	2!	2	0	01	-132	15	5!	406	137	37!	77	5	1!	182	28	9!	63	3	1!
89	ZPAC!	113	3	8!	-353	71	5!	-182	19	1!	49	1	01	96	5	1!	-108	7	2!	-87	4	1!	-102	6	2!
90	ZPSC!	165	2	8!	76	3	01	302	81	3!	-105	5	1!	-250	28	8!	-65	2	1!	-441	87	29!	-204	19	6!
91	ZPSO!	299	7	9!	178	40	3!	424	229	19!	15	0	01	-41	2	1!	-124	20	6!	-42	2	1!	-49	6	2!
92	ZPLT!	224	7	9!	152	29	2!	319	128	10!	-75	7	2!	158	32	9!	-143	26	8!	-38	2	1!	-4	0	01
93	ZCAU!	43	1	8!	169	5	01	2	0	01	27	0	01	2	0	01	-394	35	10!	83	1	01	-99	2	1!
94	ZPVG!	19	2	8!	71	0	01	-25	0	01	143	10	2!	-32	1	01	20	0	01	-88	4	1!	-80	3	1!
95	ZPES!	356	2	10!	389	52	4!	496	85	7!	-108	8	2!	-169	10	3!	409	58	19!	-2	0	01	643	143	57!
96	ZSSS!	31	4	7!	59	3	01	62	4	01	47	2	01	-37	1	01	96	9	2!	-92	8	2!	-64	4	1!
97	ZFIO!	143	1	9!	357	28	2!	590	76	6!	263	15	4!	30	0	01	525	60	19!	125	3	1!	-77	1	1!
98	ZPFG!	198	1	9!	398	43	3!	315	27	2!	111	3	1!	421	88	14!	95	2	1!	-14	0	01	524	75	27!
99	ZPAR!	321	10	8!	322	202	14!	45	4	01	-54	6	1!	-139	38	11!	-116	27	8!	134	35	12!	-66	9	3!
100	ZUPI!	190	3	9!	172	18	1!	316	62	5!	131	11	2!	259	41	12!	63	2	1!	-233	38	12!	-187	22	8!

101	SLOCE	248	4	81	63	3	01	278	59	51	-398	122	231	70	4	11	-277	59	181	-14	0	01	27	1	01
102	SALGI	206	4	91	277	56	41	424	132	111	130	12	31	-89	2	11	95	7	21	-219	36	131	-43	1	01
103	SCAB	27	1	81	-85	2	01	204	11	71	-26	0	01	74	1	01	176	8	21	68	1	01	-117	4	11
104	SFAC	390	11	91	257	134	101	281	161	131	85	4	11	82	4	11	-37	3	11	9	0	01	261	66	311
105	SDEF	372	29	101	-297	426	361	-295	422	391	34	7	21	4	0	01	55	19	51	0	0	01	-20	2	11
106	SJSO	156	7	81	122	23	21	146	38	21	-187	56	111	110	19	51	87	12	31	-25	1	01	-81	11	31
107	SJFE	260	2	91	-36	0	01	-45	1	01	65	1	01	-732	178	531	-305	31	101	-115	4	21	370	85	171
108	SFSO	465	8	101	330	143	121	406	217	201	-81	9	21	-144	28	91	155	32	111	117	18	71	116	18	81
109	EFOF	199	3	91	287	31	21	476	113	91	285	82	101	-44	1	01	90	4	11	10	0	01	121	4	31
110	SLAB	298	16	71	152	87	51	59	13	11	35	5	11	69	10	41	-213	172	431	1	6	01	-24	3	11
111	EXPE	481	3	101	-340	53	41	-244	27	21	28	0	01	-697	222	751	-293	39	141	128	7	31	541	133	551
112	SJSE	276	7	81	236	83	61	113	19	11	73	8	21	-46	3	11	172	44	121	-150	34	111	-239	85	291
113	EIE	784	21	101	-349	426	361	-302	320	301	4	0	01	92	30	101	49	8	31	0	0	01	-5	0	01
		1145699.0	1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000			1000

114	0	604	6	51	418	401	161	238	130	51	116	31	41	52	6	11	-97	22	41	45	5	11	57	8	11
115	1	671	5	41	142	54	21	296	180	71	-450	418	471	-74	12	21	39	3	01	-83	4	11	4	0	01
116	2	475	2	21	392	171	31	348	164	31	97	11	11	139	21	21	-206	48	41	5	0	01	231	60	61
117	3	583	6	31	222	148	41	376	424	121	46	6	11	20	1	01	17	1	01	-21	1	01	-63	12	21
118	4	491	5	31	57	8	01	146	56	21	113	33	31	-103	28	31	-228	134	151	-267	186	231	-129	44	61
119	5	771	10	51	-422	569	251	-212	145	71	33	4	01	-93	28	51	-50	8	11	21	1	01	71	16	31
120	6	337	3	21	-156	62	11	-114	33	11	58	8	01	-201	102	71	-194	94	71	106	28	21	-55	5	11
121	7	540	10	41	254	281	91	214	199	71	21	2	01	-90	36	51	120	63	91	42	8	11	16	1	01
122	8	600	9	31	-281	412	101	-134	95	31	18	2	01	111	64	61	42	9	11	57	17	21	-13	1	01
123	L	532	5	21	-157	118	21	-200	190	31	-1	0	01	194	177	101	83	32	21	-15	1	01	-54	13	11
124	"	803	6	51	11	0	01	-598	740	351	-14	0	01	115	27	51	133	36	71	3	0	01	-5	0	01
125	PRT	435	6	101	356	118	101	440	180	161	106	10	31	24	1	01	-159	24	81	110	11	41	312	91	371
126	OVF	316	24	61	-121	103	51	69	33	21	11	1	01	95	63	121	-75	40	81	-37	10	21	-96	65	151
127	-IX	338	12	21	-335	280	181	-111	31	21	52	7	11	-43	5	11	-3	0	01	43	5	11	62	10	31
		1145699.0	611			1051			1041			401			581			651			391			761

ANNEXE ⑨ 7


AXE HORIZONTAL(1)--AXE VERTICAL(2)--TITRE: REPARTITION:ANALYSE DU SORT DES QUESTIONS 1 A 10
LARGEUR= 1.86642 HAUTEUR= 2.09987 =NOMBRE DE POINTS= 127

1	PFIL	307	9	15	597	254	25	-118	10	4	-116	10	4	64	3	1	-217	34	16	105	8	4	-258	48	26
2	DEFL	46	1	12	99	2	0	342	15	5	-4	0	0	-160	11	4	43	0	0	-303	4	6	-90	1	1
3	DYNL	310	33	9	-63	21	1	-104	53	12	4	0	0	98	50	13	127	84	23	48	12	4	128	85	27
4	DNAL	528	5	14	24	0	0	865	349	115	414	30	30	33	0	0	185	16	7	340	54	25	-228	24	13
5	DMSL	310	3	14	416	48	4	-352	35	11	144	6	2	-65	1	1	-2	0	0	-686	131	61	-564	89	45
6	PIXL	308	16	12	-370	248	20	0	0	0	62	1	0	-21	1	0	-45	4	2	-153	49	20	-53	5	2
7	PSTL	105	3	13	82	6	0	-127	15	4	-59	3	1	-263	64	23	17	0	0	287	75	29	188	32	14
8	STAL	309	6	13	-624	234	21	54	2	1	-300	54	19	-102	6	3	-172	18	8	-1	0	0	-139	13	6
9	TDNL	309	6	14	442	118	11	82	4	1	-93	5	2	320	62	27	-45	1	1	-247	37	18	354	76	39
10	ASSL	230	5	13	362	70	6	-66	2	1	442	104	37	-262	37	15	-140	11	5	-16	0	0	-107	6	3
11	TALL	276	2	14	422	44	4	576	82	26	-545	71	26	-374	35	15	-272	18	8	-21	0	0	-301	22	11
12	MDAL	601	31	11	182	132	10	259	267	67	163	106	30	-83	28	9	-13	1	0	63	16	6	-112	51	20
13	TDAL	574	29	13	-390	479	41	-17	1	0	-116	43	14	-75	18	7	56	10	4	-40	5	2	75	18	8
14	MDCL	314	13	11	226	108	8	-257	141	38	39	3	1	99	21	7	-53	6	2	-128	35	14	14	0	0
15	MDCL	332	11	12	93	11	1	-115	18	5	-125	21	7	255	86	31	-91	11	4	141	26	11	337	149	66
16	MDSL	352	4	13	292	38	3	-399	62	19	-293	21	7	35	0	0	257	25	11	-158	10	4	-719	201	98
17	TAL	252	33	8	-105	66	4	-65	25	5	135	107	24	82	39	10	-28	5	1	12	1	0	-37	9	3
18	MAL	347	27	10	-214	165	11	-2	0	0	-201	146	40	74	20	6	22	2	1	-39	6	2	47	8	3
19	TAL	565	23	13	370	344	30	221	123	37	-27	2	1	-180	82	32	-11	0	0	-37	4	2	64	10	5
20	DAL	244	7	13	216	33	3	-401	115	34	202	29	10	-100	7	3	127	11	5	164	19	8	-203	30	14
21	ECAL	295	35	9	166	145	9	-157	132	28	17	2	0	26	4	1	40	8	2	14	1	0	-24	3	1
22	ECAL	278	52	5	-88	118	4	97	140	18	-8	1	0	-15	4	1	-22	7	1	-15	4	1	16	4	1
23	PL	502	29	11	-279	288	21	-89	30	8	185	126	36	42	6	2	-67	17	6	-19	1	1	-96	34	14
24	NL	393	24	11	-118	44	9	-116	43	11	-205	133	38	177	99	32	98	30	10	73	17	6	92	27	10
25	TIL	669	36	11	367	404	31	183	144	39	-65	3	1	-168	122	43	-22	2	1	-26	3	1	51	11	5
26	DIL	123	4	13	173	12	1	-247	24	7	204	16	6	127	6	2	132	7	3	-194	15	6	-330	43	20
27	EDAL	465	24	12	301	255	20	-68	13	4	172	84	26	138	54	19	29	2	1	45	6	2	-134	51	22
28	EDIL	319	15	11	57	6	0	-179	58	16	191	65	20	142	36	13	-246	109	41	56	6	2	148	39	17
29	EDLL	355	26	10	-152	83	6	42	6	2	-107	42	11	-84	26	8	213	161	53	-61	14	5	86	26	10
30	EDSL	372	21	11	-253	171	13	22	1	0	-167	75	22	-82	18	6	-112	34	12	102	28	10	-129	45	18
31	CDAL	407	6	14	330	70	6	455	133	42	-57	2	1	-212	29	12	-15	0	0	-457	135	62	244	38	19
32	UJSC	375	14	11	2	0	0	-2	0	0	42	11	3	-250	111	38	75	10	4	363	231	88	93	15	6
33	UFSD	724	28	15	500	644	64	20	1	0	-28	2	1	-15	1	0	-139	51	24	-96	24	12	-21	1	1
34	UMAB	315	3	13	143	6	1	663	127	38	-291	25	8	625	135	53	112	4	1	95	3	1	229	15	7
35	UCEX	591	13	16	-689	556	59	66	5	2	85	8	4	-78	7	4	-13	0	0	-105	13	7	-43	2	1
36	USIN	165	4	12	-430	57	7	-15	0	0	-11	0	0	284	38	14	-279	37	15	26	0	0	79	3	1
37	UCES	99	2	12	208	11	1	164	7	2	278	19	6	138	5	2	399	39	15	9	0	0	271	18	8
38	UDIV	97	1	13	-318	6	1	16	0	0	-27	0	0	579	21	8	707	31	12	-279	5	2	744	34	16
39	URAN	119	15	11	-78	12	1	-111	24	6	178	61	17	89	15	5	32	2	1	5	0	0	-28	2	1
40	UMSN	230	4	12	75	3	0	-22	0	0	-276	34	11	34	1	0	547	134	54	-190	16	7	-306	42	19
41	USTA	194	4	13	-617	147	13	-40	1	0	-106	4	2	50	1	0	-283	31	13	-143	9	4	53	1	1
42	UDYN	204	3	13	165	7	1	-442	53	16	-554	83	28	-4	0	0	624	105	44	-14	0	0	-152	6	3
43	VJSD	216	5	12	418	92	7	-80	3	1	2	0	0	413	90	33	-130	9	4	178	17	7	39	1	0
44	VMAB	308	8	13	373	117	10	211	38	11	105	10	3	172	25	10	312	82	34	-65	4	2	194	32	15
45	VENC	79	18	10	-63	11	1	-57	9	2	-84	18	5	10	0	0	64	10	3	8	0	0	-109	31	11
46	VVAL	625	22	13	-407	305	34	15	1	0	267	170	58	-13	0	0	-113	31	13	109	28	12	7	0	0
47	VPRA	219	7	12	237	48	4	-162	23	6	13	0	0	-284	70	25	262	59	22	126	13	5	-35	1	0
48	VPLI	295	7	13	491	182	16	29	1	0	-276	58	20	-185	26	10	45	2	1	191	27	12	0	0	0
49	VPRO	439	11	13	-454	241	21	-16	0	0	-296	66	23	56	4	1	-41	2	1	-327	126	56	0	0	0
50	VMON	257	2	13	597	111	10	-147	5	2	135	4	1	-207	10	4	-406	38	16	-519	62	28	341	27	13

ANNEXE ⑨ .8 . MODÈLES, PROCÉDURES x MODÈLES PROCÉDURES (DONNÉES SOCIOLOGIQUES en SUPPLÉMENTAIRES)

1ère axe 14,8% de l'inertie
2ème axe 4,2%

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

RESUME

Dans ce travail, nous étudions le déroulement de l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans les branches de l'enseignement supérieur français pouvant conduire à des études mathématiques (où, en particulier, la notion est enseignée en première année). Par l'intermédiaire d'un questionnaire passé par plus d'un millier d'étudiants, nous avons pu classer les procédures utilisées pour résoudre un certain nombre de tâches et dégager différents types de modèles exprimés sur la convergence des suites (dynamiques ou non). Les régularités remarquables dans les relations entre procédures et modèles exprimés nous ont permis d'établir des hiérarchies entre ces modèles qu'on pourrait à l'avenir essayer de prendre en compte dans l'enseignement.

MOTS CLES

didactique des mathématiques,
enseignement supérieur,
convergence des suites numériques,
modèles de convergence.

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la publication : R. CORI
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Juin 1982
ISBN : 2-86612-050-7