



HAL
open science

Plane representations and teaching space geometry at high school level. A contribution to the study of the knowing/seeing relation.

Bernard Parzysz

► To cite this version:

Bernard Parzysz. Plane representations and teaching space geometry at high school level. A contribution to the study of the knowing/seeing relation.. History and Overview [math.HO]. Université Paris VII, 1989. English. NNT: . tel-01251157

HAL Id: tel-01251157

<https://theses.hal.science/tel-01251157>

Submitted on 5 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS VII

DIPLOME DE DOCTORAT

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

THESE PRESENTEE PAR : M. Bernard PARZYSZ

VOLUME I : TEXTE ET APPENDICES

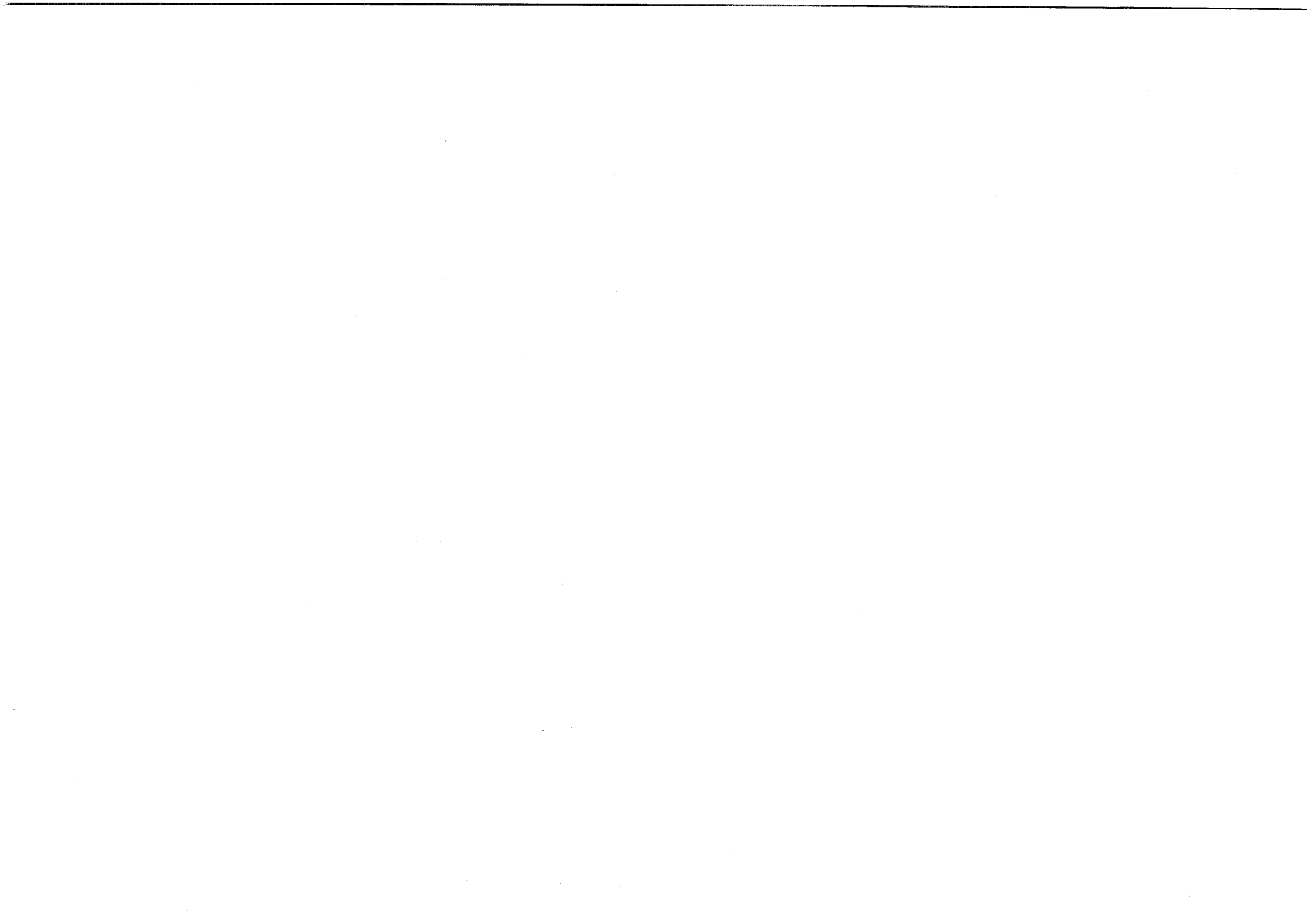
SUJET DE LA THESE : Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.

Soutenu le : 10 février 1989 devant la commission d'examen

JURY :

**M. D. LACOMBE
Mme J. ADDA
M. C. GAULIN
M. G. AUDIBERT
M. J. CHASTENET DE GERY
M. F. COLMEZ
M. J.L. MARTINAND**

**Président du jury
Directeur de recherche
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur**



UNIVERSITE PARIS VII

DIPLOME DE DOCTORAT

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

THESE PRESENTÉE PAR : M. Bernard PARZYSZ

VOLUME I : TEXTE ET APPENDICES

SUJET DE LA THESE : Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.

Soutenu le : 10 février 1989 devant la commission d'examen

JURY :

M. D. LACOMBE

Mme J. ADDA

M. C. GAULIN

M. G. AUDIBERT

M. J. CHASTENET DE GERY

M. F. COLMEZ

M. J.L. MARTINAND

Président du jury

Directeur de recherche

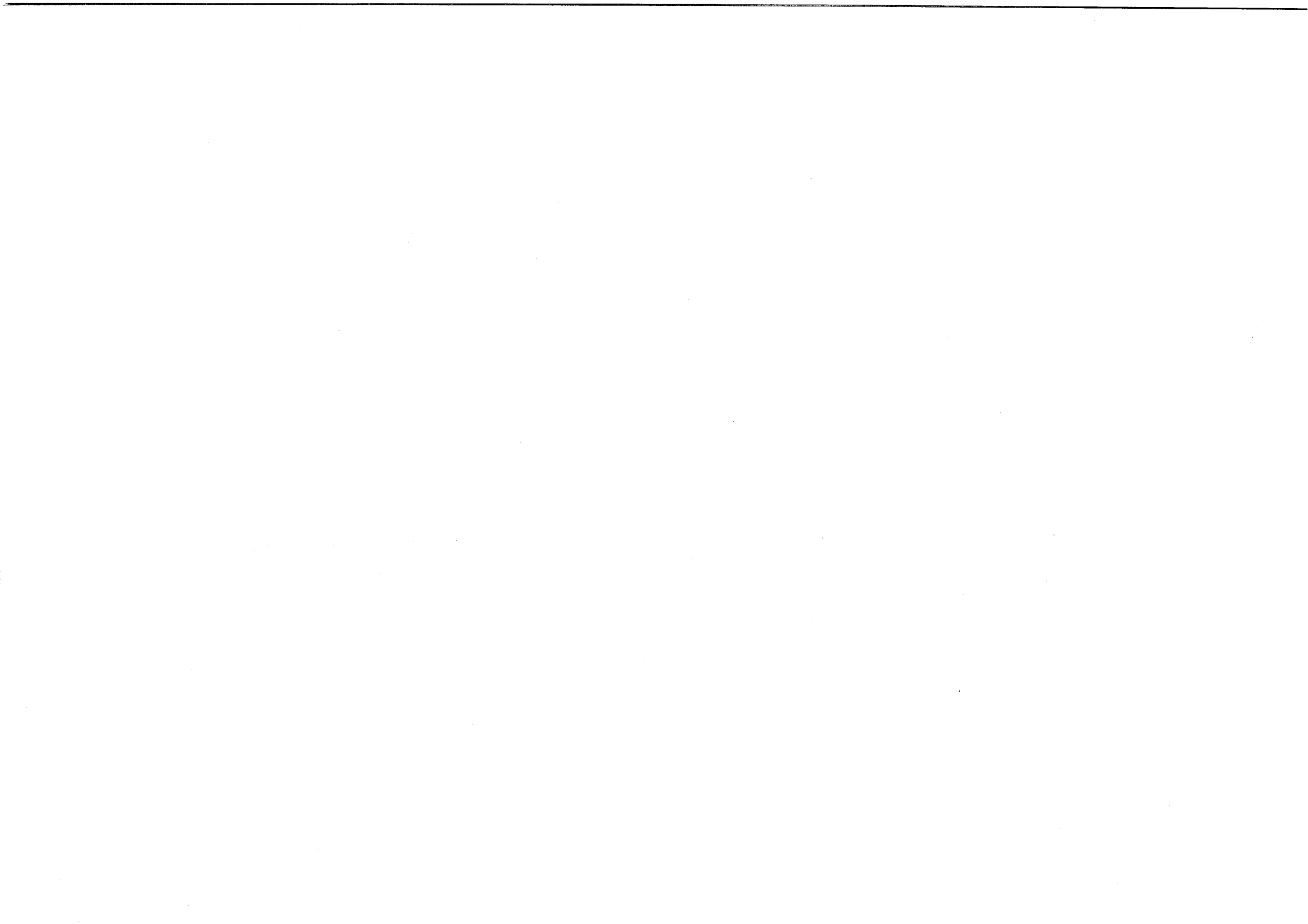
Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur



REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord remercier Daniel LACOMBE d'avoir bien voulu accepter de présider mon jury et m'aider de ses remarques et de ses conseils toujours très pertinents, qui m'ont permis de préciser et d'étayer plusieurs points de mon argumentation.

Mes remerciements vont également à Josette ADDA, qui a su efficacement diriger ma recherche, m'indiquant de nombreuses pistes intéressantes et critiquant les diverses versions de ma thèse. Je lui suis également reconnaissant de m'avoir mis en contact avec les didacticiens polonais de Wrocław (R. DUDA), Varsovie (W. ZAWADOWSKI) et Cracovie (la regrettée Z. KRYGOWSKA et S. TURNAU), auprès de qui j'ai reçu un accueil très cordial.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé à mener à terme ce travail:

Claude GAULIN, qui fait autorité en matière de visualisation des mathématiques, dont les remarques et suggestions constructives m'ont apporté un point de vue international;

Gérard AUDIBERT, qui m'a suivi et encouragé avec beaucoup de sympathie tout au long de ma recherche;

François COLMEZ, avec qui je travaille depuis plusieurs années à l'IREM, qui m'a fait retrouver le goût un peu oublié de la géométrie et m'a fait profiter de son savoir;

Jérôme CHASTENET de GERY et Jean-Louis MARTINAND, qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Mes remerciements vont aussi à mes collègues professeurs de lycée, et en particulier M.-H. CLAISSE, C. PEGLIASCO et J. BOUDAREL, qui ont bien voulu faire passer dans leurs classes les divers questionnaires étudiés ici,

ainsi qu'à tous les élèves qui y ont répondu, ou qui ont participé aux séquences didactiques.

Merci également à Mesdames LAMY, DIERAERT et LOCUFIER, du secrétariat et du service de reprographie de l'IREM, pour leur compétence et leur gentillesse.

Merci enfin à Annie, qui a été ma première lectrice et qui m'a supporté avec patience durant ces quatre années.

INTRODUCTION

En mathématiques, dans l'enseignement secondaire, la Géométrie de l'espace est, avec les Statistiques, l'une des deux parties "mal aimées": une enquête du ministère de l'Education nationale, menée à la fin de l'année scolaire 1985-86 au niveau de la classe de Seconde, fait d'ailleurs apparaître que 10% seulement des professeurs avaient à ce moment abordé la géométrie dans l'espace. Si l'on essaie de déterminer les raisons de cette désaffection en interrogeant les enseignants de Seconde, l'argument le plus fréquemment évoqué pour la justifier est le manque de temps. Mais alors, pourquoi sont-ce toujours les mêmes parties du programme qui sont ainsi sacrifiées? Parce que les élèves les reverront en Première? En ce qui concerne la géométrie de l'espace, ce n'est vrai que pour les "scientifiques"; et l'argument s'appliquerait encore mieux à l'Analyse, par exemple.

En réalité, la raison profonde est inavouée (inavouable?): c'est que la géométrie de l'espace passe -peut-être avec raison- pour être un sujet difficile; parce que, dit-on, "les élèves ne voient pas dans l'espace". En fait, ce que l'on entend par là n'est pas du tout relatif à la perception, mais se réfère à l'imagerie mentale, et plus précisément à la capacité, pour l'élève, d'imaginer une situation spatiale à partir d'un dessin (d'ailleurs souvent réalisé au tableau par le maître, et plus ou moins fidèlement recopié).

La question primordiale qui se pose en fait au sujet de l'enseignement de la géométrie de l'espace au lycée est: Quels savoirs et savoir-faire voulons-nous faire acquérir ou développer chez nos élèves? Selon nous, ils relèvent essentiellement de trois types:

- tout d'abord: l'espace lui-même, c'est-à-dire celui qui nous

environne, celui que nous percevons et dont chacun développe une connaissance intuitive depuis sa naissance.

- pour pouvoir agir sur cet espace, des "outils" sont nécessaires, et la géométrie en est un, lorsqu'on la considère comme une théorie physique de l'espace. En ce sens, il s'agira donc d'élaborer un (ou des) modèle de l'espace, dans lequel on "traduira" les problèmes qui se poseront, problèmes que l'on résoudra dans le cadre théorique et que l'on confrontera ensuite à la "réalité", critère d'adéquation du modèle.

- enfin, la résolution des problèmes sera facilitée par le recours aux objets étudiés, ou à des représentations de ces objets, spatiales (maquettes) ou planes (dessins).

A ces trois aspects correspondent trois directions dans lesquelles nous travaillons, afin de développer les savoirs et savoir-faire des élèves:

- développer la visualisation, ainsi que les habiletés spatiales: susciter ou améliorer les images mentales, grâce à la fréquentation d'objets tridimensionnels.

- faire accéder à une modélisation de l'espace physique: déterminer un ensemble, cohérent et efficace, de "règles" de géométrie (affine, euclidienne, voire projective).

- faire accéder à la maîtrise de systèmes de représentation de l'espace: "écriture" et "lecture" des dessins de géométrie.

Ces trois composantes sont interdépendantes, et il nous semble important de n'en négliger aucune. Aussi l'un de nos buts, en entreprenant ce travail, a-t-il été d'essayer de cerner le problème négligé de la "vision dans l'espace", et de mettre en oeuvre des moyens permettant aux élèves de l'acquérir, ou plutôt de la développer de façon à en faire un outil efficace dans la résolution des problèmes spatiaux. D'autre part, l'aspect visuel de l'enseignement habituel de la géométrie est essentiellement limité au cadre

graphique, ce qui peut être suffisant en géométrie du plan, où le dessin est "proche" (en un sens que nous aurons à définir) de l'objet géométrique qu'il représente, mais ne l'est peut-être pas en géométrie de l'espace, où le dessin ne "ressemble" plus à l'objet. D'où finalement une recherche à trois niveaux:

- l'utilisation de "maquettes" tridimensionnelles (tenant en fait la place des dessins de la géométrie plane) peut-elle permettre la mise en place et le développement, chez les élèves, d'une imagerie mentale efficace dans la résolution des problèmes spatiaux?

- un apprentissage explicite de méthodes et propriétés mathématiques de représentation plane peut-il leur permettre de faire du dessin un substitut opératoire de l'objet tridimensionnel?

- est-il possible, dans le même temps, de dégager des "règles" de géométrie, définissant le cadre théorique dans lequel seraient étudiés les problèmes?

Mais auparavant, il nous fallait préciser un certain nombre de points, et en particulier:

- voir si le dessin en géométrie de l'espace nécessitait réellement un apprentissage, ou (ce qui correspond à la pratique usuelle des enseignants) s'il allait de soi;

- rechercher et promouvoir un système de représentation plane de l'espace qui soit bien adapté aux élèves concernés, et pour cela étudier les rapports de ces élèves avec les représentations usuelles, considérées comme des "codages" de l'espace, aussi bien en ce qui concerne l'"écriture" (encodage) que la "lecture" (décodage).

Savoir si les élèves comprennent "correctement" (c'est-à-dire comme le souhaite l'auteur) les dessins qui leur sont proposés par leurs professeurs ou leurs manuels, s'ils sont capables de produire eux-mêmes, pour les aider

dans la résolution de problèmes ou communiquer une information, des dessins efficaces et qui puissent être à leur tour interprétés par leurs camarades ou le professeur, ne sont peut-être pas, en effet, des questions dépourvues d'intérêt, sauf si l'on pense que le rôle du dessin se borne à celui de résumé visuel de l'énoncé. Nous pensons au contraire que, conjointement avec le langage, les représentations graphiques en général, et le dessin en particulier, sont des éléments essentiels dans la communication, ainsi que dans la compréhension et la résolution des problèmes.

Convaincu que ce serait une erreur que de s'en tenir à l'à-peu-près qui règne encore actuellement sans remettre en question l'iconographie traditionnelle, nous avons commencé notre recherche par une série d'enquêtes auprès des lycéens, visant à préciser, d'une part "l'état des lieux", c'est-à-dire quels sont les savoirs et savoir-faire des élèves entrant en Seconde ou en Première scientifique, d'autre part les critères qui gouvernent, tant leur interprétation que leur réalisation de dessins relatifs à quelques situations des plus "classiques" de la géométrie de l'espace. Ceci devait nous permettre:

- de savoir si les dessins traditionnels sont effectivement interprétés comme on l'a toujours cru.

- de mettre en évidence les éléments mis (implicitement) en avant par les élèves dans les dessins qu'ils réalisent dans un but de communication, et qui leur semblent par conséquent importants pour la compréhension de la situation.

- de dégager des principes généraux d'explication permettant de savoir, pour toute figure de géométrie, quels sont les critères à prendre en compte pour que le dessin ait les meilleures chances d'être lu comme on le souhaite.

Ces enquêtes ont montré que les acquis des lycéens dans le domaine de la représentation plane de l'espace sont moins importants qu'on ne pourrait

le croire (en particulier du fait que nombre d'entre eux n'ont eu que des contacts sporadiques avec la géométrie de l'espace), et ont mis en évidence le double désir qu'ils ont de préserver, sur la représentation, l'aspect présenté habituellement à la vue par une réalisation tridimensionnelle de l'objet géométrique, mais aussi -et dans une proportion que ne laissaient pas présager les études existantes (notamment piagétienne) pour des élèves de cet âge et de ce niveau- les propriétés géométriques de cet objet (le "savoir"), souvent au détriment du "voir". En conséquence, ces résultats nous ont paru confirmer l'intérêt, pour notre propos, de la représentation en perspective parallèle, dont relèvent les dessins utilisés traditionnellement en géométrie de l'espace.

Mais, si nous étions d'accord sur le principe, nous ne l'étions pas sur l'utilisation qui en est habituellement faite (dessins stéréotypés, qui ne sont pas toujours les plus adéquats, et dont la réalisation relève du plus total implicite). Pensant qu'une explicitation des principes de la perspective parallèle permettrait à la fois aux élèves une amélioration de l'outil-dessin et une approche sensible de la géométrie de l'espace, nous avons conçu et expérimenté, en Seconde et en Première S, une séquence didactique introduisant conjointement à l'espace et à ses représentations, et faisant largement usage de matériels tridimensionnels.

On trouvera donc dans ce qui suit les résultats de notre recherche, présentés en trois volets complémentaires:

1- Un constat concernant les dessins habituels utilisés en géométrie de l'espace, et montrant l'existence effective d'une "tradition" bien établie aboutissant à de véritables stéréotypes.

2- Des enquêtes précisant les rapports qu'entretiennent les lycéens avec les représentations planes d'objets de la géométrie de l'espace, tant à l'encodage qu'au décodage.

3- Une expérimentation en classe utilisant les résultats des deux premières parties et proposant un exemple d'introduction à l'espace, à la géométrie et à ses dessins, en se fondant sur le phénomène de l'ombre.

CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE.

Si "faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes", faire de la géométrie, c'est résoudre des problèmes relatifs à l'espace. Il se trouve que, tout au moins lorsque l'on en commence l'étude, la géométrie fait largement usage de dessins. En ce qui concerne la géométrie du plan, cela ne saurait guère surprendre, et le problème est simple: les situations géométriques planes ont pour point de départ des situations "concrètes" planes, mettant en jeu des objets réels, et inversement la résolution des problèmes de géométrie plane est fréquemment facilitée par un "retour au concret", sous la forme d'un -voire de plusieurs- dessins, qui sont des copies (presque) conformes de la situation étudiée. Pour la géométrie de l'espace, la situation est moins claire, en ce sens que l'analogue du dessin, pour une situation tridimensionnelle, n'est pas un dessin, mais une maquette en volume.

1- LES REPRÉSENTATIONS EN MATHÉMATIQUES :

Les mathématiques, aussi bien en ce qui concerne l'enseignement que la recherche, utilisent des représentations de types variés: outre la langue naturelle et le langage symbolique, citons en particulier les diagrammes, graphiques, schémas, dessins de géométrie... Notons au passage que, bien qu'un certain nombre de ces représentations soient de type "visuel" (ce mot étant ici utilisé pour désigner celles dans lesquelles la référence linguistique n'est pas la composante essentielle), toutes ne sont pas pour autant des "images", au sens où l'entendent les philosophes ("l'image entretient avec son objet une relation directe de ressemblance" (CLEMENTZ 1984, p.55); ou, comme le note Michèle ARTIGUE: "l'idée d'image véhicule (...) celle de reflet fidèle de la réalité par ses dimensions analogiques et iconographiques" (ARTIGUE

1987, p.3).

Le rôle didactique des représentations graphiques en mathématiques a déjà été largement étudié (voir notamment à ce sujet GLAESER 1971 et ADDA 1983 et 1987). Les principales fonctions de ces représentations "visuelles" peuvent être (nous reprenons ici la classification de M. ARTIGUE, op. cit.):

- d'illustrer (des définitions, des théorèmes, des formules ...): citons les cas bien connus du théorème de Pythagore, ou de la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- de résumer un ensemble complexe d'informations: représentation graphique d'une fonction, par exemple, sur laquelle on peut "lire" le sens de variation, des valeurs particulières, des extremums..., ou "figure" d'un exercice de géométrie;
- de structurer la pensée: schémas ensemblistes, diagrammes divers (tableaux à double entrée, arbres...);
- d'aider à conjecturer: cas de l'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$, ou des dessins de géométrie, par exemple;
- d'aider à prouver: contre-exemples, ou dessins en géométrie...

C'est ainsi que, à la suite des travaux de Zofia KRYGOWSKA et Marianna CIOSEK à Cracovie, Maria Luz CALLEJO étudie actuellement (thèse en cours) le rôle des représentations graphiques dans les stratégies de résolution de problèmes de type "Olympiades". Parallèlement à ces fonctions dont l'intérêt ne saurait être nié, les représentations "visuelles" présentent d'autres avantages, et en particulier elles sont susceptibles d'aider à la constitution d'images mentales, et de favoriser la communication (voir par exemple BAUERSFELD et ZAWADOWSKI 1981, sur leurs fonctions de métaphore et de métonymie). Cependant, les représentations ne sont que des signes, et par conséquent, comme dans les relations de type signifié/signifiant, des problèmes risquent d'apparaître, en particulier au

cours de l'apprentissage (et l'expérience montre qu'ils apparaissent effectivement; voir par exemple ADDA 1976); entre autres:

- problèmes liés au code auquel ressortit la représentation (encodage, décodage);
- problèmes de la confusion entre les deux niveaux.

En ce qui concerne plus particulièrement le champ de la géométrie, l'objet est en général défini par un texte (énoncé, ou discours de l'enseignant); mais à ce premier type de représentation viennent le plus souvent s'en surajouter un ou plusieurs autres, de type iconique (les "figures" de géométrie), et c'est à celles-ci que nous allons plus particulièrement nous intéresser dans ce qui suit.

2- L'OBJET GEOMETRIQUE ET SES REPRESENTATIONS "CONCRETES" :

Commençons par fixer quelques points de la terminologie que nous utiliserons dans ce qui suit. Il ne s'agit pas de faire du verbalisme pour le plaisir: une mise au point s'impose, de par la polysémie même du mot "figure" dans le champ sémantique de la géométrie. En effet, ce terme désigne, soit l'objet géométrique (idéal, au sens platonicien) sur lequel porte l'étude, soit un dessin représentant cet objet. Prenons comme exemple la première phrase du premier chapitre de géométrie plane d'un manuel de la fin du siècle dernier (GIROD 1896, p.13):

"Un angle est une figure formée par deux droites AB et AC qui se coupent (fig.10)".

La première occurrence du mot "figure" renvoie au premier des deux sens précités, tandis que la seconde (en abrégé) est bien sûr relative à l'autre. C'est le premier sens, également, que l'on trouve dans les expressions "cas de figure" et "figures semblables", et le second que l'on

utilise lorsque l'on conseille de "faire une figure".

Voilà pourquoi nous réserverons (il s'agit d'une convention, contestable comme toutes les conventions) le terme de FIGURE à l'être géométrique, tandis que nous emploierons le mot DESSIN pour une représentation graphique (plane) de cette figure.

(N.B.: les programmes actuels des lycées, ainsi que certains chercheurs -par exemple Didier BESSOT (BESSOT D. 1983)- utilisent le terme CONFIGURATION là où nous utilisons FIGURE, et FIGURE là où nous utilisons DESSIN; nous dirons simplement à l'appui de notre terminologie que nous avons voulu conserver des termes existant dans le vocabulaire courant de la géométrie, nous contentant de restreindre leurs champs sémantiques de façon qu'ils soient disjoints. L'acception que nous retenons pour le mot "figure" est en effet attestée par le Petit Robert (ROBERT et al. 1973):

"Les volumes, surfaces, lignes et points considérés en eux-mêmes".)

La figure, telle que nous venons de la définir, est le plus souvent REPRÉSENTÉE; le verbe "représenter" étant ici utilisé avec l'acception suivante, également extraite du Petit Robert:

"2" (1270). Présenter à l'esprit, rendre sensible (un objet absent ou un concept) en provoquant l'apparition de son image au moyen d'un autre objet qui lui ressemble ou qui lui correspond (...) Spécialt. Evoquer ou indiquer par un procédé graphique, plastique (dessin, peinture, photographie, sculpture)."

La représentation de la figure, en géométrie, relève essentiellement de deux types, étant donné qu'elle peut être, soit bi-, soit tridimensionnelle. Dans le premier cas, il s'agit bien évidemment d'un dessin, et dans le second d'un MODÈLE, en donnant à ce dernier terme un sens un peu spécial, mais attesté par le Petit Robert:

"Ce qui représente sous une forme concrète ou restreinte une classe, une catégorie."

Cependant, étant donné le possible risque de confusion entre cette acception et celle qui est utilisée en logique, nous lui préférons souvent le mot MAQUETTE, évoquant sans ambiguïté l'aspect matériel, mais nous ôterons toutefois de son signifié la notion d'échelle.

Le tableau ci-dessous schématise la relation entre la figure et ses diverses représentations; pour reprendre l'expression de Rudolf ARNHEIM: "tous les media de représentation peuvent se rapporter à des références isomorphes ou non isomorphes. Ce sont en partie des analogues et en partie des signes" (ARNHEIM 1976, p.266). Nous distinguons donc deux niveaux de représentations:

- niveau 1 (représentation proche): la représentation "ressemble" (est, en quelque sorte, "isomorphe") à la figure géométrique, au "passage au concret" près;

- niveau 2 (représentation éloignée): la dimension de la représentation est strictement inférieure à celle de la figure.

(N.B.: "dimension" est ici à prendre au sens de la géométrie vectorielle, et non dans son acception courante de "taille".)

		Géométrie	
		du plan	de l'espace
	niveau 0	figure	
repr. proche	niveau 1	dessin	maquette
repr. éloignée	niveau 2	////	dessin

TABLEAU 1

3- REPRÉSENTER GRAPHIQUEMENT L'ESPACE EN GEOMETRIE :

Un certain nombre de manières de représenter graphiquement les figures de l'espace sur un plan sont -ou étaient- utilisées dans

l'enseignement secondaire, et nous nous contenterons de rappeler les cinq principales:

1- la perspective (projection) parallèle: c'est le mode de représentation le plus utilisé, et de loin, au début tout au moins.

2- la perspective (projection) centrale: peu utilisée, sauf en tant qu'objet d'étude (géométrie projective).

3- la géométrie descriptive: basée sur deux projections orthogonales coordonnées, l'une sur un plan horizontal, l'autre sur un plan vertical; elle est toujours enseignée dans l'enseignement technique, mais beaucoup moins que jadis dans l'enseignement général.

4- la géométrie cotée: projection orthogonale sur un plan horizontal, avec indication de la cote; elle était enseignée parallèlement à la précédente, jusque dans les années 50.

5- le croquis coté: constitué de plusieurs (en général 3) projections orthogonales coordonnées; il est toujours utilisé dans l'enseignement technique, et était enseigné jadis en mathématiques ("dessin géométrique").

Comme on peut donc le voir, la notion de base sous-jacente à toute représentation plane de l'espace, en tant qu'outil, est la projection parallèle (orthogonale ou non); nous nous attacherons dans ce travail à voir si cette prééminence est justifiée, et si oui pour quelles raisons. Pour préciser la terminologie que nous utiliserons dans la suite, signalons que, dans le domaine du dessin technique, les perspectives parallèles sont désignées sous le vocable général d'AXONOMETRIES (orthogonales ou non), avec des sous-espèces diverses dont les appellations diffèrent selon les auteurs (voir Appendice 1: "Les projections axonométriques"), mais qui se rapportent en général à la position d'un cube de référence par rapport aux paramètres de la projection. En ce qui nous concerne, nous réserverons le terme un peu galvaudé de PERSPECTIVE CAVALIÈRE à une projection parallèle oblique dans

laquelle le cube de référence possède deux faces frontales.

Mais le vrai problème est au fond celui-ci: le dessin offre-t-il un intérêt en géométrie en tant qu'outil? La période dite "math moderne" (correspondant grosso modo aux années 70) a mis, dans l'enseignement mathématique, l'accent sur les structures algébriques, l'objectif étant d'essayer de se placer dans le cadre le plus général possible. La géométrie "classique" n'apparaissait plus alors que comme un cas particulier sans beaucoup d'intérêt, et son aspect "concret", même, la rendait éminemment suspecte. C'est alors que l'on vit apparaître des manuels de géométrie pratiquement sans illustrations (impossible, en effet, de dessiner dans un espace affine à n dimensions, dès que n est supérieur à 2). Mais les résultats de cet enseignement ne furent pas aussi bons qu'on l'avait espéré, et ceci particulièrement dans le domaine de la géométrie. On peut d'ailleurs voir actuellement arriver dans la carrière enseignante des "produits" de cet enseignement, qui répugnent à la géométrie (surtout dans l'espace) et se sentent beaucoup plus à l'aise dans le domaine algébrique. Nous attribuons cet état de fait -à la suite de nombreux auteurs- à la carence en images mentales correspondant à des situations algébriques pourtant familières; l'expérience visuelle préalable est une composante efficace de la constitution des images mentales, et priver la géométrie de son côté visuel revient en définitive à l'amputer des références mentales correspondantes: par exemple, quelle meilleure illustration de la notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires qu'un plan et une droite de l'espace tridimensionnel?

Des voix se sont cependant élevées dès le début, insistant sur l'importance de développer le côté visuel dans et par l'enseignement de la géométrie, ainsi que le fait remarquer Claude GAULIN:

"For years mathematics educators like Bishop, Clements, Mitchelmore, Tahta and others have been advocating that one major goal for teaching geometry that

has been overlooked during the 'new math' wave and ought to be re-established is the development of students' spatial intuition, including their ability to visualize and to communicate spatial information by various means" (GAULIN 1985, p.64).

(Depuis des années des éducateurs en mathématiques comme Bishop, Clements, Mitchelmore, Tahta et autres plaident que l'un des objectifs majeurs de l'enseignement de la géométrie, qui avait été négligé durant la vague "math moderne" et devait être rétabli, est le développement de l'intuition spatiale des élèves, y compris leur capacité à visualiser et à communiquer l'information spatiale par des moyens variés.)

Les programmes actuels de l'enseignement secondaire prônent une approche expérimentaliste et constructiviste de la géométrie, et un retour à la fréquentation des "choses" et des dessins, comme préalable à toute étude géométrique:

"Dans l'espace, (l')étude (des objets usuels) s'appuie sur une approche franchement expérimentale des relations entre droites et plans et de l'orthogonalité. (...) Cette géométrie (...) doit développer une habitude de vision directe des choses; elle met au service de l'intuition et de l'imagination son langage, ses procédés de représentation (...). Dans ce contexte les activités graphiques doivent tenir une place très importante..."

(extrait du Programme de Seconde 1987)

(N.B.: ce n'est pas nous qui soulignons.)

Il s'agit là, à notre avis, d'une orientation éminemment souhaitable, à condition que l'on ne s'en tienne pas au seul stade des manipulations et de l'observation. En effet, l'évidence du dessin -essentiellement en géométrie du plan, d'ailleurs- risque de constituer un "obstacle épistémologique" (BACHELARD 1971), conduisant à un désintérêt total pour la démonstration ("c'est comme ça; ça se voit; ça ne sert donc à rien de le démontrer"). On peut considérer que deux fonctions primordiales du dessin en géométrie sont (comme le faisait remarquer plus haut Michèle

ARTIGUE), d'une part la monstration (illustration visuelle de la situation étudiée), et d'autre part la facilitation de l'accès aux conjectures (résolution du problème posé). Or, en géométrie plane surtout, ces deux aspects sont liés, car un dessin illustrant convenablement la situation permet souvent de discerner de nouvelles propriétés de la figure. En conséquence, lorsqu'il se trouve devant un tel dessin, le jeune élève risque d'avoir de la peine à discerner ce qui est donné de ce qui ne l'est pas, et le passage de la monstration à la démonstration risque de ne pas se faire, faute de motivation. L'avantage de la géométrie de l'espace, sous cet aspect, est que cette évidence du dessin y est infiniment moins flagrante qu'en géométrie plane: "l'appréhension de la situation spatiale à travers la médiation de la représentation plane ne s'appuie plus sur l'évidence, comme c'est le cas en géométrie plane" (BKOUCHE et SOUFFLET 1983, p.16). Pour prendre deux exemples simples, considérons ainsi:

Exemple 1: le "trapèze complet" du dessin 1.1; l'alignement des points O (intersection de (AD) et (BC)), I (intersection de (AC) et (BD)), M (milieu de [AB]) et N (milieu de [CD]) apparaît tellement "nécessaire" sur un dessin soigné que le besoin d'une démonstration disparaît complètement.

Exemple 2: dans le cas du cube du dessin 1.2, l'orthogonalité des droites (AI) et (CK) (où I est le milieu de [A'B'] et K celui de [DD']) n'est absolument pas évidente sur le dessin; il faudrait en fait réaliser une maquette tridimensionnelle pour pouvoir s'en rendre compte de visu. La démonstration acquiert de ce fait sa véritable motivation: prouver, pour (se) convaincre de quelque chose qui n'est pas évident.

4- LE DESSIN, AUXILIAIRE DE LA DÉMONSTRATION :

Quels sont les processus intervenant dans la résolution d'un

problème de géométrie de l'espace? Selon nous, ils peuvent être schématisés par le diagramme ci-dessous:

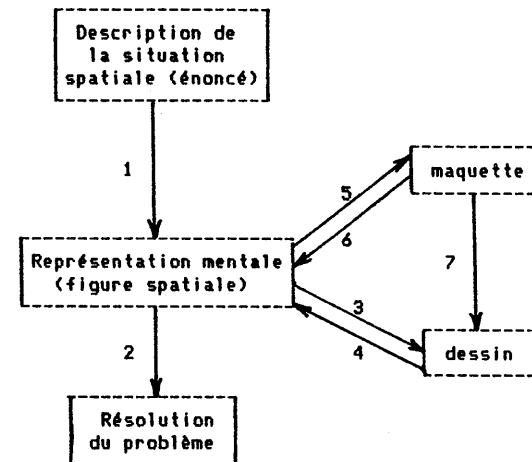


TABLEAU 2

La flèche 1 représente le passage du texte (lu ou entendu) à la situation spatiale qu'il décrit, et au fur et à mesure de cette description la représentation évoquée se précise, s'affine, se modifie: des détails s'ajoutent ou disparaissent, le "point de vue mental" change selon le déroulement du texte.

La flèche 2 représente le processus mental de résolution, qui peut être effectué directement si la situation spatiale est suffisamment simple ou familière, ou utiliser des auxiliaires (maquettes, dessins,...).

La flèche 3 représente la matérialisation de la situation sur le papier, par un dessin. Ce dessin est bien sûr relié à l'image mentale qui s'est précédemment constituée, et constitue un outil servant à la résolution du problème posé. On pourra ainsi être amené à varier le mode de représentation, s'il s'avère que celui qui a été choisi au départ se révèle mal adapté (flèche 4).

Quant aux flèches 5 et 6, elles concernent un élément qui n'existe que rarement dans la pratique: le recours à une maquette tridimensionnelle, en tant que support des images mentales. En fait, comme nous l'avons dit plus haut, l'image mentale est un substitut de la maquette (plus ou moins performant selon les individus et la situation), et toutes deux jouent un rôle analogue, comme différents travaux menés actuellement, notamment aux U.S.A, l'indiquent nettement: "les images mentales représentent la structure tridimensionnelle des objets et non les caractéristiques bidimensionnelles des dessins" (COOPER et SHEPARD 1985, p.43); "nous pouvons former des images mentales d'un objet ayant l'apparence réelle de cet objet; la construction de telles images engendre souvent des sensations visuelles qui semblent tout à fait réalistes" (FINKE 1986, p.91). Les flèches 5 et 6 correspondent ainsi aux flèches 3 et 4, à ceci près que la maquette permet, bien mieux que le dessin, de vérifier de visu (flèche 6) les conjectures faites à partir d'un dessin, lui-même obtenu (vue, section) à partir de la maquette (flèche 7).

Le "trajet" complet à travers le diagramme précédent comporte donc les stades:

situation spatiale
maquette
dessin
résolution.

L'intérêt de disposer d'une maquette, par rapport à toute représentation bidimensionnelle, est évident; ce qui est surtout intéressant, en fait, ce n'est pas tant la manipulation effective que la possibilité de choisir son point de vue et d'en changer, soit en déplaçant l'objet (s'il appartient au micro-espace), soit en se déplaçant autour de l'objet (s'il appartient au méso-espace): "la plus parfaite des épreuves photographiques actuelles ne montre que l'un des aspects de la réalité: elle se réduit à une

image unique, fixée dans un plan, comme le serait un dessin ou une peinture tracée à la main. La vue directe de la réalité offre, on le sait, infiniment plus de variété. On voit les objets dans l'espace, en vraie grandeur et en relief et non dans un plan. De plus, leur aspect change avec les positions de l'observateur; les différents plans de la vue se déplacent alors les uns par rapport aux autres; la perspective se modifie; les parties cachées ne restent pas les mêmes" (BULABOIS et TRIBILLON 1983, p. 644). L'insuffisance du dessin à susciter des images mentales opératoires chez des individus non entraînés a été mise en évidence en particulier par René BALDY, dont les travaux (BALDY 1985, 1986) sur la façon dont des adultes de bas niveau de formation lisaient des dessins en perspective cavalière ont montré que seule une petite partie d'entre eux parvient à élaborer une représentation mentale des volumes dessinés "bien structurée et capable de supporter des transformations spatiales" (BALDY et al. 1986, p.111).

Les manuels de géométrie dans l'espace illustrés de dessins stéréoscopiques (par exemple OTTO et OTTO 1963) ou les photographies stéréoscopiques de solides (utilisées par Wacek ZAWADOWSKI et son équipe à Varsovie) représentent un progrès par rapport au dessin, en ce sens qu'elles donnent l'illusion du relief; cependant l'objection que nous avons faite plus haut reste encore valable ici: les photographies sont bien prises de deux points de vue différents, mais chacun de ces deux points de vue correspond à un oeil, et finalement l'image fournie au cerveau du spectateur est celle d'un objet vu d'un point de vue particulier, et qui en outre lui est imposé. Les hologrammes seraient une réponse possible, mais il semble pour l'instant hors de question d'en envisager l'emploi en classe.

Certes, la réalisation systématique d'une maquette est une opération "coûteuse" (en moyens et en temps), et elle n'est pas toujours possible (sphère) ni efficace (points intérieurs); il est donc souhaitable de chercher

à s'en passer lorsque faire se peut, c'est-à-dire dans tous les cas courants. Néanmoins le stade "maquette" nous paraît indispensable, au début de l'apprentissage de l'espace tout au moins, car nécessaire à la mise en place des images mentales et à l'appropriation des principes selon lesquels s'effectue le passage du niveau 1 au niveau 2, et il est souhaitable d'y revenir dès qu'une difficulté fait apparaître son utilité. Nous rejoignons en cela les constructeurs antiques et médiévaux qui, ne disposant pas d'un système de représentation de l'espace suffisamment performant et accessible à tous, avaient recours de façon normale à des maquettes, dans le but de présenter leurs projets à leurs "clients", ou d'indiquer aux compagnons le travail à effectuer; car si un petit dessin en dit plus qu'un long discours, une petite maquette peut en dire plus que plusieurs dessins, l'opération mentale consistant à coordonner ces différents dessins s'avérant parfois délicate car nécessitant, non seulement la connaissance des principes de la coordination, mais encore une pratique suffisante de ce genre d'opération, assurant la formation d'une "bonne" image mentale. Ainsi Roland BECHMANN écrit-il dans la récente édition du célèbre "Carnet" rédigé (et dessiné) au 13e siècle par Villard de Honnecourt:

"De même que les savants de l'époque utilisaient des figurations matérielles pour leurs démonstrations géométriques, quand il s'agissait d'objets difficiles à représenter sur une surface plane, de même au niveau de la communication entre le concepteur et l'exécutant ou le "client", on recourait à des représentations en volume. Pour faire comprendre les dispositions générales d'un édifice à un abbé, un évêque, un grand seigneur, un chapitre d'église, aussi bien que pour faire exécuter par un tailleur de pierre un claveau, un voussoir, un sommier ou une clé de voûte, c'est-à-dire un élément d'une certaine complexité, on fabriquait ce que nous appelons, dans le premier cas, une maquette, et, dans le deuxième cas, un modèle ou patron

(ce que Villard appelle "mole")" (BECHMANN 1986, p.42).

L'enseignement de la période "math moderne", réduisait le "trajet" précédent au "squelette" situation spatiale → résolution. Ce raccourci n'est pas aberrant en lui-même, et nous sommes tous capables de résoudre mentalement des problèmes de géométrie de l'espace (par exemple la détermination de la longueur des diagonales d'un cube de côté donné), pour peu que ceux-ci ne soient pas trop compliqués, et à condition de disposer des images mentales correspondantes, de pouvoir "manipuler" mentalement ces images comme s'il s'agissait de maquettes, et de pouvoir en extraire, le cas échéant, les parties "utiles". Ceci n'est pas sans analogie avec le calcul mental: effectuer de tête $14 + 23$ est à la portée de beaucoup de gens, mais il n'en est pas de même pour 76×44 ; il existe certes des techniques pour effectuer mentalement de telles opérations, mais leur connaissance, si elle est nécessaire, n'est pas toujours suffisante... Pour résumer, le dessin constitue donc une aide à la mémorisation, lorsque les données sont, soit nombreuses, soit non familières.

Considérant, à la suite des chercheurs précédemment cités, que l'enseignement de la géométrie devait intégrer pleinement l'aspect graphique, nous avons donc entrepris -poursuivant en cela le travail commencé à l'IREM avec François COLMEZ (COLMEZ 1984, BAUTIER et al. 1987)- de centrer notre approche de la géométrie de l'espace au lycée (en Seconde et, à défaut, en Première S) sur ce point, en nous basant sur les hypothèses suivantes, nées de ces travaux antérieurs:

(H1) les débuts en géométrie de l'espace ne peuvent se faire qu'à travers TOUTES les étapes représentées sur le diagramme présenté plus haut, c'est-à-dire en ayant recours, non seulement aux représentations dessinées, mais aussi aux maquettes tridimensionnelles, et ceci QUEL QUE SOIT L'ÂGE DES ÉLÈVES IMPLIQUÉS.

(H2) parmi les divers types de représentation plane évoqués plus haut, la perspective parallèle est la mieux adaptée à cette première approche (une partie de notre recherche a précisément pour but d'étayer cette assertion); mais pour autant elle ne va pas de soi (contrairement à ce que semblent penser la majorité des enseignants de mathématiques de collège et de lycée, ainsi qu'en fait foi (LEROUGE 1988) une enquête réalisée à Montpellier) et sa "lecture" comme son utilisation nécessitent un apprentissage (voir ci-après), lequel est de nature géométrique.

Mais il en résulte que l'on se trouve ainsi placé devant un apparent cercle vicieux:

"La géométrie dans l'espace introduit des difficultés nouvelles, l'accès aux situations spatiales se fait à travers une représentation plane (...). Ceci suppose une théorie préalable de la représentation, mais cette théorie ne peut se fonder que sur une théorie géométrique préalable... autrement dit théorie de la représentation et théorie de la géométrie dans l'espace sont concomitantes et se construisent en même temps." (BKOUCHE et SOUFFLET 1983, p.16).

La "quadrature du cercle" à laquelle nous avons à faire face est effectivement la suivante:

a) pour aborder la géométrie de l'espace, l'utilisation de dessins est nécessaire (cf. H1);

b) mais, pour pouvoir faire usage de ces dessins, il faut avoir des connaissances en géométrie (cf. H2).

(H3) nous pensons pouvoir briser ce cercle vicieux par une approche de type expérimental, permettant l'accès simultané aux règles de la géométrie de l'espace et à celles de la représentation des objets dont elle fait usage, ceci étant rendu possible par l'existence d'une relation de type dialectique entre l'acquisition (ou le renforcement) des connaissances en géométrie de

l'espace, et la maîtrise des règles de représentation.

Ceci sous-entend également que:

(H4) il est impérativement nécessaire d'explicitier les règles de représentation utilisées. Il ne s'agit pas en effet de "conventions" plus ou moins floues, mais de propriétés de la projection sur un plan, parallèlement à une direction donnée.

5- LE DESSIN, INSTRUMENT DE COMMUNICATION :

"Nous nous penchons sur un phénomène plus subtil, celui de la déformation des messages produite par une divergence sur les postulats qui régissent la production et la compréhension des messages -c'est-à-dire sur les règles de codage explicites ou implicites."

Gregory BATESON (BATESON 1981, p.131)

Dans la classe de mathématiques, les élèves comme le professeur se trouvent, constamment ou presque, impliqués dans des situations de communication variées (professeur/élève, élève/ élève, élève/manuel, élève/ordinateur,...); cette communication est le plus souvent de type linguistique (orale ou écrite), mais elle peut faire appel (surtout, quoique non exclusivement, en géométrie) aux représentations graphiques. L'un des buts de notre recherche était également de nous intéresser aux dessins utilisés en géométrie de l'espace, considérés du point de vue de la transmission d'informations sur les situations géométriques associées, et en particulier de tenter de savoir si la première partie de notre hypothèse H2 (la perspective parallèle est le type de représentation plane de l'espace le mieux adapté à une approche de la géométrie de l'espace) avait quelque apparence de vérité, et s'il en était de même -comme nous en étions à peu près persuadé- pour la seconde partie de cette hypothèse (ce type de représentation ne va cependant pas de soi, même au niveau du lycée).

Nous considérons en effet la représentation plane d'une situation tridimensionnelle comme un codage de cette situation, réalisé à diverses fins, mais dont l'une des fonctions principales est de véhiculer des informations la concernant: "une situation spatiale apparaît ainsi à travers une représentation qui la transforme en figure plane; ceci nécessite l'explicitation d'un code, code d'écriture et code de lecture" (BKOUCHE et SOUFFLET 1983, p.16). On pourrait penser que, chez les lycéens, ce code est déjà acquis, sinon grâce à un apprentissage scolaire (en E.M.T par exemple), du moins par la fréquentation quotidienne des graphismes; or Lelis PAEZ-SANCHEZ, entre autres, a remarqué que même les élèves de Première et de Terminale avaient "de très graves difficultés à se représenter les objets et leurs transformations dans l'espace. En général, ces étudiants avaient du mal à "voir" les figures dans cet espace, mais surtout à les représenter graphiquement ou à "voir" sur des représentations graphiques toutes faites" (PAEZ-SANCHEZ 1980, p.3).

Quelles peuvent donc être les causes de ces difficultés persistantes? Considérons le schéma le plus simple de la communication (d'après ADDA 1987, p.13):



TABLEAU 3

Le problème de toute espèce de communication -et donc de celle qui nous occupe- est de savoir, ainsi que l'exprime Douglas HOFSTADTER, "...whether any message has, per se, enough compelling inner logic that its context will be restored automatically whenever intelligence of a high enough level comes in contact with it" (HOFSTADTER 1979, p.164) (...si tout message possède, en soi, une logique interne suffisamment

irrésistible pour que son contexte soit restitué automatiquement, dès lors qu'une intelligence d'un niveau suffisamment élevé entre en contact avec lui)

Ce n'est malheureusement pas le cas, car "le signe graphique, pas plus que le signe mimique ou linguistique, n'est un signe d'objet. Tout au plus peut-on le présenter comme une requête d'une interprétation qui satisfera les interlocuteurs" (DISPAUX 1984, p.70).

Le schéma précédent fait apparaître au moins trois sources de distorsion (correspondant chacune à l'une des flèches):

- la première est liée à l'encodage du message;
- la deuxième au médium de la communication;
- la troisième au décodage du message.

Nous retrouvons ces trois sources de biais dans le cas particulier du dessin en géométrie de l'espace; envisageons-les successivement:

1) les problèmes liés à l'encodage de la situation spatiale:

En l'occurrence, le code est le mode de représentation que choisit -consciemment ou non- l'émetteur (l'auteur du dessin), c'est-à-dire dans la quasi totalité des cas la (les) projection(s) selon laquelle (lesquelles) sera obtenu le dessin de l'objet spatial: il s'agit donc de déterminer:

- a) le type de représentation (voir plus haut les cinq principaux types);
- b) la position de l'objet à représenter par rapport aux éléments de la projection (par exemple, choix d'une perspective cavalière de préférence à une autre projection parallèle);
- c) les paramètres de cette représentation (par exemple, pour une perspective cavalière, angle de fuite et rapport de réduction);
- d) les informations qui seront codées: puisqu'il s'agit de passer de trois à deux dimensions par une projection, il en découle une nécessaire perte d'information; un point du dessin représente en effet toute une droite de l'espace (parallèle à la direction de projection en projection parallèle, passant par le centre de projection en projection centrale); en l'absence

d'indications supplémentaires, il y a donc indétermination, sur cette droite, du point représenté. Les choix a), b) et c) peuvent certes permettre de rendre moins gênante cette indétermination (en facilitant le décodage), mais par nature ils ne sauraient la pallier. D'autre part, et ceci est valable aussi bien en géométrie du plan qu'en géométrie de l'espace, tout ne saurait être montré sur un dessin: c'est le cas du vectoriel, par exemple.

Les conventions:

Dans le but d'améliorer la transmission de l'information, le dessin de géométrie fait usage de conventions, que nous avons réparties en divers types:

a) conventions de type géométrique: faisant passer de la figure spatiale à la figure plane. Elles sont relatives au choix de la projection (type, paramètres).

b) conventions de type graphique: relatives au dessin; il s'agit d'altérations du trait, dans le but de coder une information supplémentaire; par exemple pour indiquer:

- des égalités de longueurs, d'angles, la perpendicularité...
- qu'une ligne est une ligne de construction (ponctuation)
- qu'une ligne se trouve "derrière" une autre ligne ou une surface (ponctuation).

c) conventions de type rhétorique: qui font que, pour signifier une figure géométrique, on en représente une autre. Ainsi:

- la synecdoque: à un plan se substitue un rectangle inclus dans ce plan (qui ensuite, par projection parallèle, sera représenté par un parallélogramme). De même, à une droite se substitue un segment.

- la métonymie: par exemple lorsqu'un point est représenté par l'intersection de deux courts-segments (on peut aussi d'ailleurs considérer cette convention comme étant de type graphique).

Nous citerons également ici les diverses pratiques destinées à faciliter la communication, et qui peuvent concerner la figure ou le dessin. Citons principalement:

- la typicité: qui consiste à choisir (lorsque cela est possible) des objets typiques, ainsi que des positions et des représentations typiques de ces objets. Ainsi:

- si un point est représenté par une tache subdiscoidale, le diamètre en sera "petit"; l'épaisseur du trait représentant un segment ou une droite sera "faible" devant sa longueur...

- si l'on désire représenter un triangle scalène, on aura soin qu'il ne puisse sembler isocèle ou rectangle (voir LUBCZANSKI 1986 A et B).

- on utilisera souvent la perspective cavalière de préférence à une autre perspective parallèle, afin de privilégier une face caractéristique de l'objet à représenter.

- on situera de préférence les objets dans une position particulière par rapport au "repère privilégié" comprenant une verticale et une horizontale frontale.

- la terminologie: choix de lettres "traditionnelles" pour désigner les divers types d'éléments: A, B, M, N... pour des points, D, d...pour des droites, P pour un plan.

(N.B.: nous reviendrons plus en détail sur certaines de ces conventions dans le chapitre suivant, où nous nous intéresserons à la "tradition" du dessin de géométrie spatiale dans les manuels.)

Toutes ces conventions sont destinées à établir une connivence entre l'auteur du dessin et celui qui le regarde. Mais pour que s'établisse cette connivence il est nécessaire que les conventions utilisées fassent l'objet d'un apprentissage, car elles ne sont pas toutes "naturelles". Et d'autre part, elles ne sont en général pas suffisantes pour lever toutes les

ambiguïtés. En bref, le dessin, même soigné, ne peut prétendre à lui seul se substituer à l'énoncé définissant la situation géométrique; il est nécessaire de l'accompagner d'une légende, restituant l'information perdue dans le codage graphique, sauf peut-être dans certains cas particuliers où les stéréotypes (voir plus loin) sont si prégnants qu'une seule interprétation (la "bonne") s'impose (mais peut-on en être tout à fait sûr?).

D'autre part, l'encodage du message par l'émetteur ne se fait pas dans l'absolu; il risque de varier en fonction du récepteur (réel ou supposé); à ce sujet nous reprenons deux idées (issues de la psychanalyse freudienne) dégagées par l'école de Palo Alto, et exprimées en particulier par Gregory BATESON:

-la notion de transfert: "toute personne qui émet des signaux qu'elle a appris le fait en supposant (généralement de façon inconsciente) que le récepteur de ces signaux les comprendra "correctement", c'est-à-dire qu'elle présume que son interlocuteur du moment ressemble psychologiquement à quelque partenaire antérieur (ou même fictif) avec lequel elle a acquis à l'origine ses habitudes en matière de communication" (BATESON 1981, p.122).

-la notion de projection (au sens de la psychanalyse): "(elle) est liée de très près à la notion de transfert. Ce principe d'explication diffère cependant du transfert en ce sens qu'il n'invoque pas de tiers historique ou de personnage fictif. Quand A "projette" sur B, il postule simplement que les signaux de B doivent être interprétés comme A les interpréterait s'il les avait lui-même émis. C'est-à-dire que A postule que B opère en fonction de systèmes de codage similaires au sien" (BATESON 1981, p.122). En particulier, lorsque quelqu'un réalise un dessin d'une situation spatiale en ignorant qui aura à le "lire", il a tendance à le faire comme si ce récepteur fictif était en quelque sorte un autre lui-même.

2) les problèmes liés au médium:

Le dessin est réalisé sur un support en principe plan: feuille de papier, tableau, écran d'ordinateur; ceci nécessite l'utilisation d'instruments spécifiques: crayon (resp. craie), règle, compas, équerre, rapporteur...dans le premier (resp. le deuxième) cas; logiciel dans le troisième. A noter qu'au niveau du lycée, le recours aux instruments pour les dessins au tableau devient en général rare, sinon exceptionnel; ce qui influe sur leur qualité et risque parfois d'être cause d'incompréhension (élève qui a eu un moment d'inattention et ne dispose donc plus de la "légende orale" complétant le dessin). On entend d'autre part souvent dire que "la géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses" ("figure" étant bien sûr ici entendu dans le sens de "dessin"); cela n'a en fait guère de sens, car un dessin n'est ni juste ni faux, à moins de considérer que tout dessin représentant la figure est faux, de par sa nature matérielle même. Mais en fait il en est d'un dessin de géométrie comme d'une note ou d'un accord en musique: ils ne sont ni justes ni faux; c'est à chaque individu qui y est confronté de décider s'ils sont, non pas justes, mais acceptables, et ceci en fonction du contexte et de critères personnels. C'est se qui se produit (métonymie, volontaire ou non) dans certains cas où l'émetteur, voulant signifier un objet A, transmet en fait le dessin d'un objet B (donc "faux"), codage qui est interprété par le récepteur comme celui de l'objet A. Un exemple particulièrement net est celui du langage LOGO, dans lequel la procédure REPETE N (AVANCE X DROITE Y) s'utilise le plus souvent pour tracer, non pas un polygone, mais un cercle; sur l'écran du moniteur on observe alors, non pas le dessin d'un cercle, ni même celui d'un polygone, mais un ensemble de taches lumineuses évoquant aussi bien (?) l'un que l'autre (dessin 1.3).

Ainsi, ce n'est donc que grâce à une connivence (sur laquelle nous reviendrons plus loin) que peut s'établir la communication souhaitée.

Le degré d'"acceptabilité" du dessin est également, entre autres,

fonction du niveau de connaissances du récepteur, (c'est-à-dire, pour nos élèves, de l'âge): un dessin exécuté rapidement, à main levée, suffira souvent pour une démonstration en Terminale, alors qu'en Quatrième il risquera de gêner considérablement les élèves (surtout les plus faibles). Le dessin étant le support des images mentales que se constitue l'individu, si celui-ci est bien familiarisé avec les objets et les concepts géométriques en jeu, il n'utilise le dessin que comme point de départ, puis ensuite de façon épisodique. Au contraire, dans les débuts de l'apprentissage, les images mentales n'étant pas encore constituées de façon suffisamment complètes et précises, le dessin est le support tangible de la démonstration, et il est nécessaire qu'il soit "ressemblant" pour pouvoir jouer efficacement son rôle, et permettre en même temps la constitution des images mentales futures. En ce qui concerne plus précisément la géométrie de l'espace, il nous semble donc que, dans les débuts de l'apprentissage, un intérêt particulier doit être apporté à la réalisation des dessins, et à cet aspect "ressemblant", notion que nous tâcherons d'ailleurs de déterminer dans ce qui suit; c'est-à-dire que nous estimons souhaitable -au départ, avec les élèves plus jeunes- de rapprocher le dessin du dessin technique (usage des instruments, éventuellement dessin à l'échelle...).

A ce propos, le vocabulaire attaché au dessin est beaucoup plus riche (comme il est naturel) dans l'enseignement artistique et technique que dans l'enseignement dit classique. Voici ce que dit le Petit Robert de quelques-uns des termes les plus usités (ROBERT et al. 1973):

- dessin: "1° Représentation ou suggestion des objets sur une surface, à l'aide de moyens graphiques; par ext. Toute oeuvre d'art formée d'un ensemble de signes graphiques organisant une surface (...) 5° Représentation linéaire, exacte et précise, de la forme des objets, dans un but scientifique, industriel; technique de cette représentation."

(N.B.: on reconnaît ici dans le 1° le sens courant, et dans le 5° le sens "technique" du mot).

- épure: "1° Dessin à grande échelle ou en grandeur nature tracé pour aider à la construction d'un édifice, au montage d'une machine. 2° Dessin au trait qui donne l'élévation, le plan et le profil d'une figure (projetée avec les cotes précisant ses dimensions."

- esquisse: "Première forme d'un dessin (...), qui sert de guide à l'artiste quand il passe à l'exécution de l'ouvrage définitif."

- croquis: "Esquisse rapide (le plus souvent au crayon, à la plume).(...)
Par ext. Dessin rapide."

- schéma: "Figure donnant une représentation simplifiée et fonctionnelle (d'un objet, d'un mouvement, d'un processus)."

(N.B.: le terme "figure" est ici utilisé deux fois avec le sens que nous donnons -voir plus haut- à "dessin".)

Nous n'aurons guère besoin de distinctions aussi subtiles en ce qui concerne les représentations que nous serons amenés à étudier. Nous retiendrons simplement de ce qui précède que le dessin (au sens technique) désigne une représentation "exacte et précise", tandis que le schéma donne "une représentation simplifiée et fonctionnelle". Aussi réserverons-nous, en ce qui concerne les représentations planes de l'espace, le nom de DESSIN à celles qui sont fondées sur une projection plane (parallèle ou centrale), celles qui s'écartent étant désignées sous le nom de SCHEMA. On trouvera dans les Appendices 2, 3 et 4 (relatifs aux dessins traditionnels, en géométrie, d'une sphère et d'un "cercle dans un plan") deux exemples de représentations qui, à première vue, semblent relever de la perspective parallèle, et qui en réalité ne sont pas des dessins mais des schémas, dont la réalisation est bien plus simple que le dessin correspondant). Pour les dessins, nous utiliserons également les termes particuliers de VUE et de COUPE (ou SECTION), avec leur

sens technique.

3) les problèmes liés au décodage de la situation spatiale:

Douglas HOFSTADTER (HOFSTADTER 1979, p.166) distingue trois niveaux différents dans un message: le message-cadre (frame message), le message externe (outer message) et le message interne (inner message), et il les définit ainsi:

"To understand the frame message is to recognize the need for a decoding mechanism."

(Comprendre le message cadre, c'est reconnaître le besoin d'un mécanisme de décodage.)

"To understand the outer message is to build, or know how to build, the correct decoding mechanism for the inner message."

(Comprendre le message externe, c'est construire, ou savoir comment construire le mécanisme de décodage correct du message interne.)

"To understand the inner message is to have extracted the meaning intended by the sender."

(Comprendre le message interne, c'est avoir extrait le sens voulu par l'émetteur.)

C'est-à-dire que, pour déchiffrer correctement un message, il y a trois étapes à franchir successivement:

- a) savoir qu'il s'agit effectivement d'un message;
- b) savoir quel est le codage;
- c) savoir utiliser le décodage correspondant.

Dans le cas de la géométrie, la première étape est en principe franchie sans problème (sauf par un authentique débutant): placé face à un dessin de géométrie, nous savons en principe qu'il s'agit d'un dessin de géométrie, et ceci -en plus du contexte- grâce à certaines de ses caractéristiques: nature et forme des tracés, évoquant des figures et des concepts usuels de géométrie, utilisation de certaines lettres, placées près de certains éléments...

Une fois le graphisme identifié comme un dessin de géométrie, il s'agit d'identifier le codage qui a présidé à sa réalisation, ce qui est parfois un peu plus délicat: ainsi, le dessin 1.4 est-il un dessin de géométrie plane, ou un dessin de géométrie de l'espace? On peut en effet y voir, soit un hexagone régulier muni des diagonales passant par son centre, soit un cube (réduit à ses arêtes) en perspective isométrique. En l'occurrence, c'est le contexte qui va permettre de trancher, de façon explicite (légende accompagnatrice) ou implicite (cours ou manuel de géométrie, soit du plan, soit de l'espace). En l'absence de contexte (ce qui est relativement rare, mais se produit cependant dans certains manuels où le plan et l'espace sont étudiés simultanément), c'est parfois un raisonnement ou un réflexe de type "probabiliste" qui va orienter le choix, basé sur les "habitudes" que l'on a en matière de représentations géométriques (stéréotypes): ainsi le dessin 1.5 sera-t-il presque sûrement "lu" comme celui d'un cube en perspective cavalière, et non comme celui d'un carré et de son translaté, munis des segments joignant les sommets homologues.

Le caractère culturel de cette "lecture" apparaît clairement lorsque l'émetteur et le récepteur n'appartiennent pas à la même culture. Ainsi, dans l'expérience que relate Alan BISHOP, et dans laquelle il avait présenté à 12 Papous, étudiants en Université de Technologie, les deux dessins 1.6, A et B, et leur avait demandé (en guise de décodage) de réaliser, à l'aide de "pailles" à boire et de pâte à modeler, les objets représentés sur ces dessins (BISHOP 1979). Il a alors obtenu:

6 fois: "les mêmes objets qu'auraient produits des étudiants occidentaux";

2 fois: des objets plats, bidimensionnels;

4 fois: des objets tridimensionnels, mais dans lesquels le quadrilatère de base (complet ou non) était, non pas un rectangle ou un carré comme

l'auraient interprété des étudiants occidentaux, mais un parallélogramme banal. Et, bien entendu, dans le cas du "cube incomplet" du dessin 1.6 A, l'égalité des côtés de la base n'avait pas lieu.

Et BISHOP de conclure: "We are so familiar with these (conventions) that we take their knowledge for granted and assume a universality of understanding which is quite erroneous" (p.138).

((ces conventions) nous sont si familières que nous prenons leur connaissance comme assurée, et admettons une universalité de compréhension qui est tout à fait erronée)

Notons que BISHOP parle, à propos de ces dessins, de "conventions"; il est vrai que la représentation en perspective cavalière est un choix fondamental en géométrie de l'espace, mais un décodage correct n'est pas la conséquence inéluctable de la connaissance de ces conventions (par exemple, la perpendicularité des côtés de la base des solides représentés n'est absolument pas codée sur les dessins; rien n'indique non plus dans quels plans se trouvent les différents quadrilatères). C'est en réalité une connivence qui fait alors décrypter le dessin de la façon souhaitée par son auteur.

Lorsque l'on a identifié le graphisme comme représentant une figure spatiale (et peut-être également commencé à identifier du même coup la figure représentée), il reste à identifier complètement le type de codage qui a servi à sa réalisation: s'agit-il d'un schéma, ou d'un dessin? Dans ce dernier cas, quel est le type, et quels sont les paramètres, de la représentation? Comment se situe la figure par rapport à ces éléments?...Et, même si l'on répond à ces questions, tout n'en sera pas forcément résolu pour autant: "il faut nettement préciser qu'il n'existe pas de lecture naturelle d'une figure; une figure n'est lisible que si on en connaît au moins le code (...), sans que cela soit obligatoirement suffisant" (BESSOT D. 1983, p.35).

Comme nous l'avons dit au 1^{er}, dans un dessin de géométrie tout ne

peut être codé; mais il n'en reste pas moins que, dans la plupart des cas, ce dessin est correctement décodé par celui à qui il est destiné. Ceci est dû, comme nous l'avons déjà dit, à la fois au contexte et à une connivence qui s'établit entre l'émetteur et le récepteur. Cette connivence s'appuie d'abord sur une culture géométrique commune, relative aux objets et aux concepts dont on traite habituellement (les "archétypes"), ainsi que sur la fréquence plus élevée de certains types "traditionnels" de représentations (les "stéréotypes"). Il s'y ajoute certainement d'autres éléments, et c'est là un point auquel nous avons voulu nous attacher dans notre recherche. Plus précisément: dans le cas de la géométrie de l'espace, puisqu'il y a nécessairement choix dans les informations qui sont transmises:

- de quelle(s) nature(s) sont les éléments que le lycéen-émetteur introduit à l'encodage dans son dessin dans le but de donner une information optimale?

- de quelle(s) nature(s) sont les éléments qui sont interprétés comme signifiants par le lycéen-récepteur, lors du décodage?

Nous détaillerons dans le Chapitre 4 (Voir et savoir) les hypothèses générales, issues de travaux "classiques" ou plus récents, qui nous ont guidé dans la recherche de ces éléments.

6- VERS UN ENSEIGNEMENT INTÉGRÉ DE LA GÉOMÉTRIE, DE L'ESPACE ET DE SES REPRÉSENTATIONS :

Prendre conscience de façon précise des principes qui gouvernent la production et la lecture des dessins par les élèves, montrer la nécessité d'un apprentissage des principes de réalisation de ces dessins pouvaient déjà être des buts didactiques en eux-mêmes, mais qui nous semblaient insuffisant s'ils ne débouchaient pas sur une pratique (le fait de travailler

à l'IREM de Paris-7 n'y est sans doute pas totalement étranger). Aussi voulions-nous rechercher et mettre en pratique un enseignement explicite des représentations. Le Chapitre suivant nous montrera que, jusqu'à une date récente, la question générale des représentations des figures de l'espace n'était pas -sauf pour le plan- évoquée dans les manuels de géométrie où elles apparaissaient. A l'instar de Minerve surgissant tout armée du cerveau de Jupiter, les dessins (en perspective parallèle) faisaient leur apparition dès la première page du premier chapitre de la géométrie dans l'espace, comme si la chose allait de soi. A peine si, dans le meilleur des cas, on faisait allusion à "la" perspective pour justifier (?) le fait qu'un plan était représenté par un parallélogramme. Il en était d'ailleurs de même dans le cours oral lui-même, où rares étaient les professeurs qui envisageaient une "explication" des dessins qu'ils étaient amenés à réaliser au tableau, ou à faire faire par leurs élèves. Et, dans ce cas, on parlait le plus souvent des "conventions" de représentation.

Le moment semble donc venu de préciser notre position, concernant le dessin de géométrie de l'espace au lycée, position dont les différentes composantes s'appuient, soit sur des travaux antérieurs, soit sur notre propre recherche. Nous pensons avoir établi, dans ce qui suit, que le principe de représentation traditionnellement utilisé en géométrie de l'espace (la perspective parallèle, et plus particulièrement la cavalière) est effectivement bien adapté aux élèves de l'enseignement secondaire (lycéens aussi bien que collégiens), mais que l'utilisation qui en est faite, elle, appelle un certain nombre de réserves:

1) la perspective cavalière:

Certes, il est vrai que les lycéens connaissent en général la perspective cavalière, pour l'avoir pratiquée en E.M.T., et sont capables de représenter un cube en position frontale; mais cela ne signifie pas pour

autant qu'ils dominent suffisamment ce type de représentation pour pouvoir résoudre convenablement des problèmes de dessin plus complexes, savoir interpréter correctement une "figure" de leur manuel ou choisir les paramètres de façon à obtenir un dessin optimal pour la résolution d'un problème de géométrie de l'espace. En effet, on peut constater qu'au niveau du lycée tous les élèves sont familiarisés avec la représentation traditionnelle du cube en perspective cavalière; nous avons pu nous-même le vérifier: dès le début de la classe de Seconde, 9 élèves sur 10 au moins auxquels on demande de dessiner un cube le font de la façon "classique", c'est-à-dire (dessin 1.5):

- en perspective cavalière
- avec des fuyantes montant vers la droite.

(N.B.: les fuyantes montant vers la gauche sont rares, mais non inexistantes; et -pour autant que nous ayons pu en juger- elles ne semblent pas liées au fait que l'auteur soit ou non gaucher.)

On peut en conséquence se demander à partir de quel moment ce type de représentation est acquis, et s'il correspond réellement à une connaissance des règles de la perspective cavalière, ou s'il s'agit simplement de la reproduction d'un stéréotype. Des travaux ont été entrepris sur ce sujet (voir en particulier CARON-PARGUE 1979, DOLLE 1974, 1975, 1978, BESSOT et EBERHARD 1982, 1987). En particulier, Jean-Marie DOLLE a effectué des expériences sur 56 enfants âgés de 6 à 15 ans (donc jusqu'au seuil de l'entrée au lycée), auxquels il a demandé, un cube en carton étant présent, de réaliser un dessin "avec tout ce qu'on verrait du cube, s'il était en verre". L'étude des productions a mis en évidence trois stades principaux:

- premier stade (6-9 ans): aucune perspective n'apparaît; le procédé le plus courant est le rabattement: l'enfant dessine un carré et l'entoure.
- deuxième stade (9-12 ans): apparition d'une perspective empirique, sous la forme d'obliques; mais l'ensemble du dessin n'est pas coordonné.

- troisième stade (à partir de 12 ans): accès progressif à la perspective cavalière, la position frontale du cube étant la première à être représentée correctement.

En outre, DOLLE conclut de son étude qu'en fait -tout au moins chez certains enfants- la réalisation d'un dessin correct du cube frontal n'est pas l'indice d'une compréhension des règles de la perspective cavalière, mais simplement la reproduction d'un dessin stéréotypé: "certains enfants parviennent à donner une reproduction correcte des volumes en position de front par l'effet d'un simple apprentissage graphique, alors qu'ils n'ont pas les structures correspondantes". Il y a donc lieu de ne pas trop se fier au niveau "technique" des dessins des élèves, pour en déduire que les règles de la perspective cavalière sont assimilées, car "très souvent les enfants sont capables, au niveau formel, de productions graphiques d'un niveau supérieur à leurs réalisations spontanées".

2) Conventions ou non?

Il était question, plus haut, des "conventions" de la représentation usuelle des figures spatiales. En effet, la "convention" essentielle -mais elle est totalement implicite- est que les représentations ressortissent (sauf exceptions, les plus notables étant celles des "schémas" signalés en Appendices 2 et 3: "Les représentations de la sphère" et "Le cercle dans un plan") à la perspective parallèle (en général oblique). Mais, ceci étant posé, un certain nombre de propriétés de la représentation sont en conséquence parfaitement déterminées: ce sont toutes celles qui sont associées à la projection considérée (telles que: conservation du milieu, conservation du parallélisme, vraie grandeur dans les plans frontaux...). Il y a d'autres conventions, réelles celles-là, dont nous avons parlé plus haut; cependant, le fait de regrouper ainsi toutes ces caractéristiques de la représentation sous le vocable de "conventions" nous semble véritablement abusif, car il consiste

à amalgamer deux objets de nature fondamentalement différente: d'authentiques conventions d'une part, et des propriétés géométriques d'autre part.

3) Fournir des outils:

Si la représentation "classique", en perspective cavalière, des figures spatiales, est la plus utilisée, elle n'est pas la seule qui puisse être utile pour la résolution de problèmes de géométrie de l'espace. En effet, les savoirs et savoir-faire des lycéens sont nettement plus importants en géométrie du plan que de l'espace, et résoudre un problème spatial nécessite, dans la plupart des cas, la mise en oeuvre de ces connaissances "planes". Pour ce faire, un dessin partiel (vue, section) pourra s'avérer efficace), et Gérard AUDIBERT a montré que, si les vues étaient utilisées spontanément de façon relativement fréquente, le recours aux sections était, lui, beaucoup plus rare (AUDIBERT 1985 B). Il importe donc que nos élèves puissent agrandir la "panoplie" des outils que constituent les divers types de représentation de l'espace.

4) Situation didactique, dialectique outil/objet:

Nous considérons que le milieu que constitue la classe est un élément essentiel de la situation didactique, puisque c'est en son sein, et par rapport à lui que vont s'élaborer et évoluer (se compléter, se modifier, voire changer) les conceptions de l'élève, par le biais des situations-problèmes dans lesquelles il va se trouver impliqué, en tant qu'acteur (BROUSSEAU 1986). Plus précisément, en ce qui concerne la géométrie de l'espace le problème était justement de trouver des situations-problèmes qui soient susceptibles de prendre en compte à la fois l'étude de la géométrie de l'espace et celle de ses représentations en perspective parallèle; la mise en oeuvre d'une dialectique outil-objet (DOUADY 1984) nous a semblé un moyen d'y parvenir. Nous sommes parti des considérations suivantes:

a) Si l'utilité des dessins en tant qu'outils pour l'étude de la

géométrie de l'espace dans l'enseignement secondaire est actuellement reconnue, l'utilisation qui en est faite perd beaucoup de son efficacité par le fait que les représentations (et leurs propriétés) ne constituent pas un objet de l'enseignement des mathématiques à ce niveau, le savoir que peuvent acquérir les élèves à ce sujet ne dépassant pas le niveau des algorithmes (même s'ils sont souvent efficaces), et n'étant jamais institutionnalisés.

b) Nous pensons au contraire que prendre les représentations planes -et plus particulièrement les représentations en perspective parallèle (nous verrons dans la suite les raisons de ce choix)- comme objet d'étude en géométrie de l'espace va permettre d'explicitier et de donner un statut précis à ces représentations (notre hypothèse H3) -qui leur fait actuellement défaut comme on a pu le voir-, statut qui enfin leur conférera le caractère d'outil explicite de résolution de problèmes.

c) A l'entrée au lycée, les élèves disposent d'un certain nombre de connaissances en géométrie du plan, tandis que la géométrie de l'espace est encore souvent pour eux terra incognita (voir en particulier le Chapitre 9). La situation-problème doit pouvoir permettre un réinvestissement de ces connaissances "planes", qui contribueront ainsi à l'élaboration des connaissances "spatiales" (la géométrie plane jouant ici le rôle d'"outil ancien", et la géométrie de l'espace celui de "nouveau").

d) au niveau du lycée, la géométrie a encore besoin de s'ancrer dans la "réalité", c'est-à-dire dans l'espace environnant et le vécu quotidien, et c'est à partir de cette "réalité" que doit s'élaborer la connaissance. Autrement dit, l'approche de l'espace doit être de type expérimental et constructiviste, mais ne pas céder cependant à la déviation praticiste, qui consisterait à se contenter d'"observer". La situation-problème doit donc être signifiante pour l'élève, et conduire à une authentique démarche scientifique de recherche, en somme être suffisamment complexe, mais pas

trop: "des conditions qui font paraître une réponse trop naturelle, trop "obligatoire" peuvent faire disparaître le sens, les raisons de son apprentissage: les élèves croiront la "savoir" puisqu'ils la "voient". A l'inverse, des conditions qui font apparaître une réponse comme totalement inattendue ou miraculeuse justifient l'apprentissage mais diminuent le sens de la connaissance" (BROUSSEAU 1986, p.449).

5) La mise en oeuvre:

Il restait à trouver une situation-problème qui soit réellement un problème pour des élèves de lycée, qui soit abordable malgré tout, et qui se rattache à la fois à l'espace (d'où un travail avec des maquettes) et à ses représentations (d'où un travail sur la perspective parallèle et sur les dessins). Or nous avons eu l'occasion de travailler à partir d'une situation présentant ces particularités: l'ombre au soleil (COLMEZ 1984) d'un objet sur un plan, et d'autres chercheurs avaient déjà utilisé le même point de départ (GODDIJN 1980; KINDT et DE LANGE 1982), mais à titre occasionnel seulement dans leur démarche. L'idée de base étant trouvée, et un travail en classe ayant même déjà été effectué à partir de cette idée, il s'agissait de la préciser, et de trouver une ingénierie didactique permettant sa mise en application. Nous avons adopté la démarche suivante:

a) l'action:

C'est ici la résolution du problème posé. Mais, pour qu'il y ait problème, il faut que l'élève ait conscience de l'existence de ce problème. Le premier stade de la démarche didactique a donc consisté à provoquer cette prise de conscience, en soumettant les élèves à un questionnaire constitué de questions "simples" sur l'ombre d'un objet. Les guillemets se justifient par le fait que, si les questions étaient simples (puisqu'elles se rapportaient à un phénomène banal et quotidien), les réponses sont loin de faire l'unanimité. Le problème est ainsi posé, et on dispose du même coup d'une motivation

(comment se fait-il que l'on ne sache pas répondre à des questions aussi "bêtes" à propos d'un phénomène aussi courant?) qui permet la dévolution du problème aux élèves.

b) la formulation et la validation:

La divergence des opinions apparaît clairement à tous, et le désir de savoir est nettement perceptible; les conditions d'un conflit socio-cognitif au sein de la classe sont donc réunies. Nous instituons alors un contrat de "débat scientifique" (ALIBERT et al. 1986); il s'agit en fait de confier le problème, et sa résolution, aux élèves eux-mêmes, nous-même n'intervenant qu'en tant qu'animateur, pour canaliser la discussion et faire des synthèses partielles des idées émises par les divers intervenants, mais sans jamais fournir de réponse ni prendre parti. Le recours à une réalisation du phénomène permettrait certes de conjecturer les réponses correctes, mais nous passerions alors à côté du but visé, à cause de son aspect partiellement immatériel; par contre, une simulation à l'aide de matériel (maquette) permet une approche géométrique, et le réinvestissement des connaissances de géométrie plane; Elle permet également le contrôle des résultats.

c) l'institutionnalisation et le renforcement:

Le travail de validation nécessite l'utilisation de propriétés non encore codifiées ("outil nouveau"), qu'à un moment donné il s'agit pour l'enseignant (nous, en l'occurrence) de faire accéder au statut de savoir institutionnel. Ces "règles" de géométrie de l'espace constitueront un premier "flot déductif", point de départ du cours de géométrie sur lequel se greffera (modélisation locale) une mise en ordre des résultats (choix raisonné des "règles" que l'on conviendra de prendre comme axiomes, le reste des propriétés étant démontré à partir de ceux-ci), la résolution d'exercices (ce corpus d'axiomes et de théorèmes constituant maintenant un "outil ancien" permettant

de faire des démonstrations), et la démonstration de conjectures nouvelles, éventuellement réalisée à l'aide d'un "cycle" du même type, à partir d'une nouvelle situation-problème.

C'est ce type de démarche que nous avons essayé de mettre en pratique, et que nous relatons dans la dernière partie de ce travail. Mais auparavant, nous avons voulu justifier le bien-fondé de celui-ci, en étudiant les dessins qui figurent dans les manuels de géométrie de l'espace, la façon dont les lycéens "lisent" ces représentations, ainsi que celles qu'ils produisent eux-mêmes.

CHAPITRE 2: LES "FIGURES" DES MANUELS.

'You think that human beings tend to reproduce certain patterns? Stereotyped patterns? 'Précisément', said Poirot, and traced a design in the sand with his finger.
Agatha CHRISTIE

Quelles sont les représentations qui sont présentées aux lycéens, ou qu'ils sont amenés à considérer comme "la norme" (c'est-à-dire essentiellement celles que les professeurs, en classe, réalisent au tableau ou présentent au rétro-projecteur, et celles qu'ils peuvent trouver dans leurs propres manuels de mathématiques)? Poser aux enseignants de mathématiques les mêmes questions qui l'ont été aux élèves (voir chapitres suivants) serait assurément tout à fait intéressant (nous en aurons un petit exemple dans le Chapitre 5), mais, dans le temps nécessairement limité dont nous disposons, nous n'avons guère eu le loisir d'entreprendre un travail systématique sur ce sujet. Aussi nous contenterons-nous, ici, d'esquisser une étude -sommaire, mais néanmoins, pensons-nous, assez éloquente- des "figures" de géométrie de l'espace apparaissant dans les manuels de lycée, représentations graphiques soignées, susceptibles comme nous l'avons dit de servir -plus ou moins inconsciemment- de modèles aux enseignants (et par contrecoup aux élèves), et de contribuer ainsi à l'élaboration et au maintien d'une possible "tradition", basée sur la reproduction des images familières, tradition dont nous voulions essentiellement vérifier l'existence, et si possible rechercher les origines.

Notre thèse était que:

1- Les principes (mathématiques) et les conventions sous-tendant les représentations planes ne sont pratiquement jamais présentés explicitement dans le texte des manuels.

2- Il existe une tradition (c'est-à-dire des "modèles" de dessins que

l'on retrouve, pratiquement inchangés, à la fois d'un manuel à l'autre, et d'une génération à l'autre); cette tradition est actuellement très prégnante. Nous voulions également tenter de savoir à quelle époque elle remonte.

Nous allons montrer que ces hypothèses sont fondées et que, contrairement à une opinion bien établie qui veut que les règles de dessin en perspective parallèle soient si peu contraignantes que l'on peut dessiner à peu près comme l'on veut, ce type de dessin (de loin le plus utilisé en géométrie de l'espace) requiert de la rigueur et de la vigilance, vigilance dont ne font pas toujours suffisamment preuve les enseignants (y compris les auteurs de manuels), et qu'il nous semble important -parce que faisant partie de la culture géométrique- de faire acquérir à nos élèves.

1- EXPLICITATION DES PRINCIPES DE REPRÉSENTATION :

Notre expérience personnelle (d'abord en tant qu'élève, puis en tant qu'enseignant) nous a amené à supposer que les représentations graphiques des manuels de géométrie de l'espace relèvent -sauf exception- de la perspective parallèle, à l'exclusion de tout autre système. Or, la référence explicite à ce type de représentation est peu fréquente dans les ouvrages que nous avons consultés, lesquels s'étendent sur une période de plus d'un siècle. On trouvera ci-dessous les mentions -relevées dans 23 manuels- que nous avons trouvées, relativement à la représentation des figures spatiales. On remarquera que pratiquement toutes sont relatives à la représentation du plan; le plan constitue en effet, avec le point et la droite, l'un des objets fondamentaux de la géométrie "classique", mais il est le seul à (parfois) faire l'objet d'une mention spéciale concernant la façon de la représenter. Les représentations du point et de la droite dans l'espace sont apparemment considérées comme allant de soi, et pourtant, dans leur cas comme dans celui

du plan, nous avons bien affaire à une représentation de niveau 2. Il n'est en effet pas immédiat que, en passant du niveau 1 (géométrie plane) au niveau 2 (géométrie de l'espace), les représentations des objets ne vont pas changer (que l'on pense au cercle, par exemple). Pourtant, la question n'est jamais posée...

En Annexe 1 figurent, classés chronologiquement, les 23 extraits, codés de A à W (8 d'entre eux sont antérieurs à 1920, 6 correspondent à la période 1920-1945, 7 à la période 1945-1965, un seul à la période "maths modernes" -nous avons eu quelque peine à le dénicher-, et le dernier, tout récent, témoigne du regain d'intérêt pour les représentations graphiques en géométrie de l'espace qui commence à se manifester depuis peu). Nous pouvons distinguer ici six grandes catégories quant aux idées qui apparaissent dans ces textes:

a) l'idée de partie illimitée de l'espace, qu'il faut nécessairement borner pour la représenter (avec les qualificatifs "illimité", "indéfini", l'expression "on limite"...): cette idée est pratiquement présente partout, et elle dénote un souci pédagogique, celui de mettre en évidence le fait que le plan ne se limite pas aux contours de l'objet qui le représente (synecdoque géométrique) (cf A: "il faut concevoir ce plan prolongé indéfiniment au delà du contour de ce polygone"; J: "il est bien entendu que la surface n'est pas bornée au contour du parallélogramme"; L: "il est bien entendu que, par la pensée, il faut prolonger cette figure au delà de ses bords"...). L'analogie du procédé avec celui qui intervient dans la représentation de la droite est d'ailleurs indiqué par M.

b) la mention expresse du parallélogramme comme représentation du plan est presque constante, souvent accompagnée du dessin "classique" (parallélogramme dont les grands côtés sont horizontaux et les petits côtés obliques montant vers la droite).

c) l'idée de partie rectangulaire est, elle aussi, très fréquente. Il apparaît donc bien -ce n'est pas pure hypothèse de notre part- que le parallélogramme représentant un plan n'est pas simplement le dessin d'un parallélogramme quelconque inclus dans ce plan, mais celui d'un rectangle. Et pourtant cette orthogonalité est bien peu exploitée dans l'enseignement... Notons de plus la présence de références à un objet rectangulaire de la vie courante (F, U): surface d'une table, feuille de papier, tableau... Catherine BERDONNEAU qualifie ces évocations de "banales" (BERDONNEAU 1981, p.48), mais c'est justement là une nécessité si l'on veut que s'établisse la connivence entre l'auteur et son lecteur, et les comparaisons qu'elle cite sont variées, visant un public précis: feuille de papier, miroir, vitre, liquide au repos, table, tableau... pour l'enseignement général; tôle mince, planche dressée par un menuisier, mur dressé au plâtre par un maçon... pour l'enseignement technique.

d) l'idée de système de représentation graphique est également attestée, mais moins "systématiquement": allusion vague dans R ("vus les procédés de dessin dont nous disposons"), référence à "la perspective" dans M, N, O, P, V, et plus précisément à la cavalière dans I, L, W. Notons que, à l'exclusion des plus récents V et W, il s'agit uniquement de manuels appartenant à la période 1920-1950; est-ce un hasard?

e) la référence à la vision figure, elle aussi, parmi les idées évoquées (cf D: "c'est à peu près sous cette forme qu'on voit un rectangle quand on le regarde obliquement d'un point de vue très éloigné"; F: "en regardant la surface d'une table, on l'aperçoit sensiblement sous la forme d'un parallélogramme"; H: "une portion rectangulaire de plan qu'on dessine telle qu'on la voit"; N: "un rectangle, lequel est vu, en perspective, sous la forme d'un parallélogramme", V: "donnant ainsi l'impression visuelle d'un rectangle "vu en perspective"...). Comme on s'en aperçoit, cette référence peut rester

très vague (F, H), ou évoquer de façon assez précise la perspective parallèle oblique (D). Certains auteurs associent d'ailleurs perspective et vision dans la même expression (N, U), ce qui fait qu'un lecteur peu au fait de l'étendue du champ sémantique du verbe "voir" peut légitimement se demander si "la perspective" n'est pas une "façon de voir" (au sens perceptif) plutôt qu'une façon de représenter l'espace; ou, pour dire les choses plus simplement: la perspective est-elle un procédé de dessin ou une impression visuelle? Ce faisant, on joue sur deux sens du mot "perspective", comme l'atteste le Petit Robert:

"1° Art de représenter les objets sur une surface plane (...)

2° Aspect (surtout esthétique) que présente un ensemble architectural, un paysage vu d'une certaine distance." (ROBERT et al. 1973).

Ceci tend finalement à l'identification coutumière des deux acceptions, conférant un caractère d'absolu à la perspective linéaire ("la" perspective), caractère qu'elle ne possède pourtant pas (voir Chapitre 4). Pour reprendre -en entier cette fois- la citation précédente du Petit Robert:

"1° Art de représenter les objets sur une surface plane, de telle sorte que leur représentation coïncide avec la perception visuelle qu'on peut en avoir, compte tenu de leur position dans l'espace par rapport à l'oeil de l'observateur."

On ne saurait être plus clair.

f) l'idée de convention est également présente (G, N, P, Q, U, V). Cette convention est présentée tantôt comme une simple convention de représentation (G, Q, U, V), tantôt comme une convention au niveau de la synecdoque géométrique (N, P). Il y a là, à notre avis, plus qu'une nuance: dans le second cas, en effet la convention se borne au choix du rectangle pour représenter le plan (et il s'agira ensuite de représenter ce rectangle, par un procédé à définir; G et P parlent d'ailleurs de "perspective"), tandis que

dans le premier rien ne justifie a priori le choix du parallélogramme, aucune allusion n'étant en général faite à un quelconque procédé de représentation (ainsi, G et U restent muets sur ce point, et Q se contente de parler d'un "rectangle représenté conventionnellement par un parallélogramme"). Seul V fait exception à cette "loi du silence", en annonçant: "Dans cette section et dans la suivante, nous nous proposons de justifier et d'améliorer ces conventions". Comme il s'agira en fait de définir la projection parallèle sur un plan et ses propriétés, les "conventions" faites au début n'en seront plus, étant remplacées par le choix fait concernant le type d'application géométrique qui permettra de représenter les objets spatiaux (en l'occurrence la perspective parallèle). On se situe ainsi à un niveau différent, puisqu'il ne s'agit plus de savoir comment l'on va représenter chacun des objets qui vont intervenir, mais de choisir le principe de représentation de tous les objets. Pour prendre une analogie linguistique, la convention ne se situera plus au niveau des mots, mais à celui de la langue (et c'est bien là qu'elle se place en effet).

Nous terminerons ce paragraphe par quelques remarques concernant les textes que nous venons d'étudier:

1) la grande analogie entre B, E et K, qui ne sont pourtant, ni des mêmes auteurs, ni contemporaines (elles datent respectivement de 1880, 1902 et 1934, s'étalant donc sur plus d'un demi-siècle). Cette "reproduction" de la même formule, de génération en génération, constitue un indice allant dans le sens d'une "tradition" (que l'on songe également à la longévité de la géométrie de LEGENDRE (1823), qui a pratiquement traversé tout le XIXe siècle).

2) l'évolution de la désignation du plan: jusqu'au début du siècle, le plan est désigné par (au moins) deux lettres (habitude remontant au moins au

XVIIe siècle; voir par exemple BORELLI 1658), puis on ne le désigne plus que par une seule lettre.

3) la confusion entre l'objet et sa représentation, dans C ("pour figurer un plan (...) nous traçons un parallélogramme qui est une figure nécessairement plane"). Confusion basée à notre avis sur le fait que l'image d'un parallélogramme dans une projection parallèle est un parallélogramme (la réciproque n'étant cependant pas vraie).

4) la dualité relevée par V ("obtenir un aspect de la figure à représenter aussi proche que possible de la réalité physique; avoir la possibilité (...) de déterminer certains éléments de la figure..."), qui met l'accent sur les relations voir/savoir.

5) l'absence d'allusion à toute autre "convention" graphique, comme par exemple la ponctuation. Seul W (qui, rappelons-le, date de 1988) en fait mention (de façon d'ailleurs un peu maladroite). On peut noter également que l'assertion "les segments et les angles qui ne sont pas dans des plans parallèles au plan de la feuille ne sont pas représentés en vraie grandeur" y est contestable, car il existe en fait une autre direction de plan pour laquelle il y a "vraie grandeur" (voir Appendice 5).

2- APERÇUS SUR LA "TRADITION":

Dans sa thèse, Catherine BERDONNEAU note que "la plupart des théorèmes possèdent une représentation iconale (sic) standard" (BERDONNEAU 1981, p.64), et entre autres exemples:

- "une droite, lorsqu'elle est seule, est toujours représentée parallèle aux bords supérieur et inférieur de la page" (op. cit. p.62);
- "tout triangle isocèle repose évidemment sur sa base, alors que le triangle rectangle n'est pas souvent assis sur son hypoténuse, mais bien

plutôt calé sur un côté de l'angle droit" (ibid. p.63);

- "le carré, le rectangle ont leurs côtés parallèles aux bords de la page; le losange, lui, repose sur sa pointe" (ibid. p.64)...

Cette "représentation iconale standard" contribue donc à la reproduction, à travers le temps, de dessins analogues, d'autant plus que "à l'intérieur d'une même maison d'édition, les clichés sont réutilisés pour les manuels de différents auteurs" (ibid, p.45).

Désireux de préciser un tant soit peu en quoi consistait cette tradition iconographique, tout en restant dans des limites raisonnables, nous sommes intéressé à quelques représentations dans des manuels français de géométrie dans l'espace, rédigés pour l'essentiel depuis le début du siècle. En relation avec les chapitres 4, 6, 7 et 8, nous avons fait porter notre étude sur les dessins de plan et de cube, ainsi que sur l'ensemble "droite-et-plan-perpendiculaires".

1) Les dessins de plan:

(N.B.: Jusqu'au 18e siècle inclus (voir par exemple LA CAILLE 1772), le plan était représenté par un rectangle, et non par un parallélogramme comme actuellement, la perspective utilisée étant bien une perspective parallèle oblique, mais dans laquelle la direction de projection est située dans un plan vertical de bout. A partir du 19e siècle, on commence à trouver la représentation "classique" (par exemple dans LACROIX 1814).)

Dans la très grande majorité des cas, le dessin d'un plan consiste en première approximation en un parallélogramme (parfois incomplet) dont les côtés les plus longs sont "horizontaux", et dont les côtés obliques "montent vers la droite" On trouve aussi (mais en nombre beaucoup moins élevé) des parallélogrammes dont les côtés les plus longs sont verticaux, et (très rarement) des parallélogrammes dont tous les côtés sont obliques. Nous nous

occuperons uniquement, ici, du premier cas, constituant la représentation-type.

Tout d'abord, on trouve parfois, en plus du parallélogramme lui-même, d'autres traits graphiques, qui sont essentiellement de deux types:

a) un ombrage, constitué par des traits horizontaux dont l'écartement diminue de bas en haut, tandis que leur longueur augmente parfois (dessin 2.1). Apparemment, ce procédé a pour but, d'une part de donner de la "réalité" au plan, et d'autre part de lever l'ambiguïté théorique de la représentation (vue de dessus ou de dessous?), en indiquant qu'il s'agit d'une vue de dessus. En effet, si l'on suppose que les traits représentent des droites régulièrement espacées, le fait que les traits soient plus resserrés vers le haut suggère que le côté supérieur du parallélogramme est l'image du bord le plus éloigné du rectangle représenté. C'est un procédé qui a été utilisé par les graveurs de la Grande Encyclopédie (qui, eux, représentaient des objets concrets); mais ces représentations relevaient (du moins en théorie) de la perspective linéaire (même si le point de vue était éloigné), et le resserrement des parallèles (même s'il était obtenu à l'estime et n'était en fait qu'un semblant) était cohérent avec ce type de représentation. Appliqué tel quel à des dessins en perspective parallèle, il perd toute signification et se réduit à une pure convention graphique, sans grand intérêt. Ce procédé est d'ailleurs tombé en désuétude au tournant du siècle. Nous l'avons relevé dans LA CAILLE 1772 (avec des rectangles), LACROIX 1814 (présence également d'ombres portées, d'ailleurs non cohérentes avec les autres éléments des représentations), GIROD 1896 (avec des dessins sur fond noir, "reproduisant ainsi l'apparence de figures tracées à la craie sur le tableau noir" (BERDONNEAU 1981, p.45)).

b) un épaissement du trait: concernant les côtés inférieur et

droit du parallélogramme (dessin 2.2). A l'instar de la précédente, cette pratique a pour but de donner de la "réalité" à la représentation (analogie avec une planche), et de préciser le "point de vue" (d'en haut et de droite); mais elle offre deux avantages par rapport à celui-ci: tout d'abord elle est cohérente avec la représentation en perspective parallèle (mais un plan n'a pas d'épaisseur!), et surtout elle ne neutralise pas une partie de la représentation, occupée par ces traits parasites. Nous avons relevé ce procédé dans BOS 1897, CAMMAN ET RÉBOUIS 1928, BENOÎT 1943, LEBOSSÉ et HÉMERY 1949, MAILLARD 1951, LESPINARD et PERNET 1960, ROUX et MIELLOU 1961, BRÉARD 1962, GIRARD et LENTIN 1965, FOUCHÉ 1966, et non dans les manuels plus récents. Il semble donc qu'en France il ait pris la relève de l'ombrage jusqu'à devenir la règle, se soit éteint (et pour cause!) avec la naissance du mouvement "math moderne", et n'ait pas été repris par la suite (N.B.: à l'étranger, nous l'avons trouvé dans un récent manuel polonais: JANIKOWSKI, WENDORFF et WŁODARSKI 1983).

Nous nous sommes également intéressé à l'angle des côtés des parallélogrammes à côtés horizontaux, comme nous l'avons fait pour les productions des élèves (voir plus loin Chapitre 9), afin de savoir, d'une part si l'on peut effectivement constater une analogie, et d'autre part si les dessins des manuels, censés représenter des plans horizontaux (comme le montrent indirectement les dessins de couples droite-et-plan-perpendiculaires) risquent bien d'être perçus comme tels par le public auquel ils sont théoriquement destinés.

Nous avons retenu 17 manuels français, s'échelonnant entre 1890 et 1988 (auxquels nous avons adjoint le manuel actuellement en usage en Grèce, dans les classes de Première), dans lesquels le nombre de dessins de ce type était au moins égal à 40, et nous avons mesuré (par classes de 5 degrés d'amplitude) les angles des côtés. Les résultats obtenus sont représentés

par leurs polygones de fréquences (dessin 2.3A, B, C), dans lesquels les manuels sont codés chronologiquement par un nombre de 1 à 18, l'effectif des dessins par N et la moyenne des angles par m. Voici le codage de ces manuels:

- 1: COMBETTE 1893
- 2: NEVEU et BELLENGER 1917
- 3: CAMMAN et RÉBOUIS 1928
- 4: BENOÎT 1943
- 5: LEBOSSE et HEMERY 1949
- 6: MAILLARD et MILLET 1951
- 7: LESPINARD et PERNET 1960
- 8: BRÉARD 1962
- 9: MONGE 1962
- 10: COSSART et THÉRON 1964
- 11: GIRARD et LENTIN 1965
- 12: GAUTIER et al. 1973
- 13: GLAYMANN et MALAVAL 1981
- 14: STRASBOURG 1982
- 15: GAUTIER et al. 1986
- 16: MONGE et al. 1987
- 17: IREM de STRASBOURG 1988
- 18: PAPANIKOLAOU 1983

Première constatation: mis à part pour le n°1, toutes les moyennes sont supérieures à 50°, et vont jusqu'à 63° (dans 8 des 18 manuels, cette moyenne atteint ou dépasse 60°): ceci correspond bien à ce que nous pourrions observer dans les productions des lycéens (où, nous le verrons dans le Chapitre 9, 3 dessins sur 5 ont un angle compris entre 60° et 80°) mais non à une "lecture horizontale", puisqu'une part non négligeable des élèves (environ la moitié) ne voient pas dans ce type de représentation celle d'un plan horizontal. Nous pensons donc qu'une diminution systématique de cet angle, dans les manuels comme en classe, faciliterait la communication, en donnant de la situation spatiale illustrée une représentation mieux comprise.

Deuxième constatation: certaines distributions sont unimodales ("en cloche"), d'autres bimodales:

- les unimodales correspondent, soit à une distribution plus ou moins étalée (n° 1, 3, 4, 6, 8, 9), soit à une distribution peu dispersée (n° 7, 10,

11, 18, où le mode dépasse 70%); ce dernier cas correspond au recours systématique à un angle donné, en général de 60° (n° 7, 10, 11);

- les bimodales peuvent, elles aussi, refléter la recherche systématique d'angles particuliers, lorsque les deux modes sont séparés par un "creux" important; c'est le cas des numéros 2 (45° et 60°), 12 (55° et 65°), 14 (45° et 60°) 16 (45° et 65°) et 17 (45° et 60°). Certaines fois, ces angles différents correspondent à des types de dessins différents: par exemple, dans le manuel n° 2, l'angle de 45° correspond aux dessins explicatifs de la géométrie descriptive, associant un plan horizontal et un plan vertical (dessin 2.4), tandis que l'angle de 60° correspond au cas général. D'autres fois, des angles différents correspondent systématiquement à des chapitres différents, alors que rien dans le sujet du chapitre, ni dans les types de dessins, ne semble justifier un traitement particulier (ceci est très net pour les numéros 12 et 16); nous attribuons ce phénomène -mais ce n'est qu'une hypothèse- au fait que les illustrations des différents chapitres ont été confiées à des dessinateurs différents (il serait intéressant de savoir si tel a bien été le cas).

Nous avons aussi eu une surprise, lors du relevé des angles sur les dessins des manuels: alors que nous croyions avoir affaire à des parallélogrammes, nous nous sommes aperçu que tel n'était pas toujours le cas; en effet, dans certains manuels (en l'occurrence le n°5 et le n°9) le côté droit est plus redressé sur la verticale que le côté gauche (la différence, quasi imperceptible (voir le dessin 2.5), est de l'ordre de 5 degrés). Le résultat est que le plan, au lieu d'être représenté par un parallélogramme, est représenté par un trapèze dont le côté supérieur est légèrement plus court que le côté inférieur. Ici encore, comme dans les cas précédemment évoqués de l'ombrage et de l'épaississement, le but recherché est de désambiguïser la représentation, en imposant la "vue de dessus". Notons

qu'il ne s'agit en aucun cas de l'utilisation d'une perspective centrale, puisque par exemple on trouve dans le n°9: "Pratiquement, pour représenter un plan, on le suppose limité à la portion intérieure à un rectangle représenté conventionnellement par un parallélogramme" (p.8). La projection servant de fondement aux dessins est donc bel et bien une projection parallèle, mais avec laquelle on a pris quelques libertés dans le but d'améliorer le "voir". (N.B.: Dans les mesures d'angles, nous avons pris, pour les deux manuels concernés, l'angle du côté gauche avec l'horizontale (qui est le plus faible des deux). D'autre part, cette pratique n'est pas réservée aux seuls dessins de plans à grands côtés horizontaux, et est également appliquée à ceux dont les grands côtés sont verticaux.)

D'autre part, et comme nous l'avons vu chez les lycéens, les parallélogrammes ne sont pas toujours complets, et sont parfois latéralisés à gauche. Le tableau ci-dessous résume, pour chacun des 18 manuels étudiés, les effectifs de ces formes (les lignes A, B, C, D font référence aux parallélogrammes incomplets du dessin 2.6, la ligne G aux parallélogrammes latéralisés à gauche, et la ligne "Autre" aux dessins de plans dont un grand côté -au moins- est horizontal, et qui ne rentrent pas dans les catégories précédentes):

N° Forme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A							2				5			7		1		
B													4					
C												1	37	5				
D												1						
G						5		1					2					
Autre	51	40	66	108	91	41	84	92	48	61	57	42	9	67	56	47	48	64
Total	51	40	66	108	91	46	86	93	48	61	62	44	52	79	56	48	48	64

TABLEAU 4

Ce tableau montre à l'évidence que les formes "gauches" sont extrêmement rares, et que les formes incomplètes sont rares elles aussi (sauf, exceptionnellement, dans le n°13, où elles sont en majorité).

En résumé: l'image du plan véhiculée depuis plus d'un siècle par les manuels de l'enseignement secondaire long est donc bien -et très massivement- celle que nous nous attendions à trouver, et que nous pouvons caractériser ainsi:

- parallélogramme dont les grands côtés sont horizontaux,
- dont les côtés obliques montent vers la droite,
- dont l'angle aigu des côtés est supérieur à 45°.

2) Le cube:

Les dessins explicitement indiqués comme représentant des parallélépipèdes rectangles (pavés droits) ou des cubes, dessins qui sont pratiquement toujours en perspective cavalière, sont beaucoup moins nombreux que les représentations de plans; aussi n'est-il pas raisonnable d'en faire une étude statistique par manuel. Nous nous contenterons ici de donner

(dessin 2.7) le polygone des fréquences de l'angle des côtés obliques avec l'horizontale, pour l'ensemble de ceux des 18 manuels précédents (il y en a 11) dans lesquels figurent de tels dessins. Et, afin de comparer cette distribution à celle relative aux représentations de plan, nous avons, sur le même dessin, représenté en pointillés le polygone correspondant aux dessins de plan, pour l'ensemble des 11 manuels concernés. Le graphique montre:

- a) d'une part, une forte dissemblance entre les deux distributions, les angles étant nettement plus faibles dans le cas des cubes et pavés droits;
- b) d'autre part, pour ceux-ci, une prédominance des valeurs voisines de 45° (ce qui correspond à l'angle des perspectives AFNOR; voir Appendice 1), ainsi que deux modes secondaires:

- le premier à 30°, que nous interprétons (nous y reviendrons plus en détail dans le Chapitre 7; voir page 202 et Appendice 6) comme résultant du désir de "poser" l'objet sur un plan horizontal;

- le second, moins important, autour de 60°, qui résulte peut-être d'un tracé de la face supérieure par analogie avec le parallélogramme du dessin de plan.

Quoi qu'il en soit, cette étude -qui demanderait sans doute à être reprise sur une plus grande échelle- montre, pour la représentation des rectangles horizontaux, une différence sensible selon que le rectangle considéré est isolé ou constitue la face supérieure (ou inférieure) d'un pavé droit, différence provenant selon nous d'une volonté -forte quoiqu'implicite- de situer, dans le cas du pavé, l'objet dans l'espace en référence au repère "naturel" constitué d'une verticale et de deux horizontales (dont l'une frontale).

Pour ce qui est du rapport de réduction selon les fuyantes, la sous-population des cubes étant trop réduite, nous ne pouvons que donner une impression, basée sur les mesures faites: ce rapport n'est jamais supérieur à

1, et est fréquemment de l'ordre de 0,6 (dans le but, nous le verrons au Chapitre 4., de préserver le "voir"). On retrouve donc sans surprise le stéréotype du dessin de cube:

- face antérieure carrée,
- fuyantes montant vers la droite,
- angle de fuite ne dépassant pas 45°,
- rapport de réduction inférieur à 1.

3) Droite et plan perpendiculaires:

Les dessins dans lesquels figurent un plan et une droite perpendiculaire à ce plan sont relativement nombreux dans les manuels, car correspondant à une situation spatiale "classique". Parmi les 18 manuels précédents, nous n'avons retenu que ceux -il y en a 14- dans lesquels cette situation était représentée au moins 20 fois, et avons répertorié 7 types principaux de dessins, indiqués par une lettre dans le dessin 2.8. Ces 7 types nous ont permis de classer la quasi-totalité des représentations observées, mis à part quelques-unes que nous avons placées sous les rubriques:

- TC: transfert par rapport aux grands côtés, c'est-à-dire que le dessin de la droite est perpendiculaire aux deux côtés les plus longs du parallélogramme représentant le plan, comme c'est le cas pour les types A, B, A', D du dessin 2.8. Nous définirons dans sa généralité ce "transfert de propriété" au Chapitre 5, page 116; disons simplement ici qu'il s'agit de "traduire" une propriété de la figure par une propriété analogue du dessin.

- TD: transfert par rapport à la grande diagonale. Ici, le dessin de la droite est perpendiculaire à la plus longue des deux diagonales du parallélogramme, comme c'est le cas pour les types C et C'.

- X: divers (pas de transfert évident).

Nous avons relevé les résultats suivants:

Type \ N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	14	17	18	Total
A	37	28	44	78	45	28	41	31	16	41	28	48	23	35	523
B	3		2	1	2	10	4	5			1	5	4	2	39
B'						2			6						8
C	1					1									2
C'	1					1									2
D	1			4	1					2		2			10
E												2			2
TC				1						1		1	1		4
TD										2					2
X										1			1		2
Total	43	28	46	84	48	42	45	36	22	47	29	58	29	37	594

TABLEAU 5

De toute évidence, il y a bien un "modèle" graphique de la situation: le dessin de type A, qui approche des 90% sur l'ensemble des manuels étudiés (la proportion la plus faible est obtenue pour le manuel n°6, où elle n'est "que" de 2 sur 3). Ce modèle est lui-même la transcription graphique, en perspective cavalière, de la situation "concrète" constituée par un rectangle horizontal, dont deux côtés sont frontaux, percé par une tige verticale, position dans laquelle, sans conteste, on se rend le mieux compte de visu de la perpendicularité des deux éléments, sans avoir besoin de tourner la tête. Nous verrons au Chapitre 6 que le dessin traditionnel du plan est bien complété de cette façon par les élèves pour former un trièdre trirectangle (mais que les résultats sont, malgré tout, meilleurs avec un angle plus faible des côtés).

Un second modèle graphique (mais beaucoup moins fréquent) est le dessin de type B, qui, lui, transcrit graphiquement la situation constituée par un rectangle vertical percé par une droite horizontale frontale. Son succès beaucoup moins grand que celui du type A est sans doute dû à la plus grande ambiguïté dont il donne l'impression (car le dessin A n'est théoriquement pas moins ambigu que B): l'horizontale étant une direction de plan, et la verticale une direction de droite, tous les plans horizontaux sont parallèles entre eux et toutes les droites verticales parallèles entre elles. Une figure constituée d'un plan et d'une droite qui lui est perpendiculaire est donc bien définie (modulo une translation) si le plan est horizontal, ce qui n'est pas le cas si le plan est vertical. En donnant l'impression que le plan est horizontal (et la droite verticale), on fixe ainsi la figure dans une position déterminée, aisément repérable et la même pour tous.

Notons enfin que, même dans les types de dessin non classiques, les dessinateurs, tout comme les lycéens, font abondamment usage du transfert de propriété que nous avons évoqué plus haut, par rapport à un élément du dessin explicite (côté) ou implicite (diagonale), ou même du transfert de verticalité (type E, ce dessin de plan étant, on le verra au Chapitre 5, interprété majoritairement comme représentant un plan horizontal).

Cette petite étude, pour limitée qu'elle soit, nous aura donc permis de confirmer sans ambiguïté l'existence d'une "tradition graphique" dans le domaine des représentations de l'espace, tradition qui remonte pour l'essentiel au 19^e siècle et qui semble maintenant bien fixée et très forte. Nous avons en outre pu constater que ces dessins traditionnels font une large part au transfert de propriété (horizontalité, verticalité en particulier), sur lequel nous reviendrons abondamment.

3- LES CONVENTIONS:

1) Le paragraphe précédent nous a permis de rencontrer deux conventions habituelles concernant le cube, conventions qui ne sont pas du tout inhérentes au mode de représentation, mais qui sont destinées à renforcer la préservation du "voir":

- direction des fuyantes vers le haut ("point de vue" habituel);
- longueurs raccourcies dans la direction des fuyantes (voir plus haut).

Le fait que cette dernière particularité ne soit rien d'autre qu'une convention destinée à améliorer l'interprétation spatiale du dessin ne semble pas si évident. En effet, cet effet de raccourci est tellement entré dans les habitudes que l'on a fini par croire qu'il était partie intégrante des propriétés géométriques de la perspective cavalière. C'est ainsi que l'on trouve, dans un manuel récent de dessin technique (BLANC-TAILLEUR et GHERARDI 1981, p.53): "La perspective cavalière est une projection oblique. L'objet à représenter reste parallèle au plan de projection comme pour le dessin géométral (...), mais la direction des projetantes n'est plus perpendiculaire au plan de projection. Les conséquences de ce mode de projection se traduisent par une représentation en vraie grandeur de tout élément parallèle au plan de projection et une représentation raccourcie des fuyantes" (C'est nous qui soulignons).

(N.B.: S'il nous semble indispensable de remettre les choses à leur vraie place, il n'en reste pas moins que le fait d'utiliser un rapport de réduction inférieur à 1 améliore sensiblement la facilité de restitution de l'objet spatial à partir du dessin (le "voir"); c'est ce qui explique que les deux perspectives cavalières conseillées par l'AFNOR (voir Appendice 1) satisfassent à cette condition.)

2) Une autre convention importante est celle que nous nommons

semi-transparence ligne-surface, c'est-à-dire celle qui fait représenter en lignes discontinues les courbes ou portions de courbes "cachées" par des surfaces (nous la nommerons en abrégé convention LS). En fait, il est ici difficile de parler vraiment de parties "cachées", puisqu'il n'y a pas de point de vue à proprement parler (le spectateur serait à l'infini). Mais le recours à l'ombre au soleil permet de résoudre le problème, en transformant ce problème en celui des parties "à l'ombre" (non éclairées) de la figure.

L'utilité de cette convention est principalement de participer à la préservation du "savoir" concernant les objets, supposés opaques, puisque davantage est visible sur le dessin que ce que permettrait normalement l'application pure et simple des règles de la projection. C'est ainsi que si nous considérons par exemple le dessin 2.9A, même accompagné de la légende "pyramide", nous sommes incapable de dire si la base de cette pyramide est un triangle, un quadrilatère, etc. La convention de ponctuation permet alors de préciser ce point (dessins 2.9B et C), en nous apportant davantage de renseignements. On peut d'ailleurs considérer ce mode de représentation comme symbolique, puisque les lignes représentées en pointillés sont là (préservation du savoir) sans y être (préservation de l'opacité, donc du côté visuel). Car, en effet, supposer l'objet opaque permet de lever une partie de l'ambiguïté perceptive de sa représentation. Prenons par exemple le cas du cube-squelette, représenté en perspective cavalière par le dessin 2.10A; supposons-le posé sur un plan horizontal. Malgré cela nous ne pouvons théoriquement dire (même si, comme nous l'avons vu, l'une des deux interprétations s'impose davantage à l'esprit que l'autre) laquelle des deux faces frontales se trouve "en avant" (c'est-à-dire "éclairée"). Pour résumer le problème, on peut dire que l'opacité cache, et que la transparence est ambiguë. L'utilisation de la convention LS permet d'y remédier, puisque ce procédé permet de distinguer les parties éclairées de celles qui ne le sont

pas, tout en faisant voir ce qui ne serait normalement pas vu si l'objet était complètement opaque: en somme, "on montre sans montrer, et on cache sans cacher". Ainsi, en supposant le cube "semi-transparent", les problèmes évoqués sont-ils résolus (dessins 2.10B et C).

3) La convention de semi-transparence dont nous venons de parler concerne les occultations de type ligne/surface. Elle est parfois complétée par une autre convention, concernant les occultations ligne/ligne (que nous appellerons en abrégé convention LL), et qui consiste en une discontinuité de tracé là où une ligne est "cachée" par une autre (dessin 2.11).

Ces conventions LS et LL sont-elles fréquemment utilisées? Et si oui, comment? Nous avons, ici aussi, consulté quelques manuels pour nous en faire une idée:

a) En général, dans les ouvrages les plus anciens (LA CAILLE 1772; LEFÉBURE DE FOURCY 1840), les surfaces sont totalement transparentes (donc pas de convention LS); pour désambigüiser certaines situations, comme par exemple droite-et plan-perpendiculaires, on a alors recours à des subterfuges (ainsi, prendre comme extrémité de la représentation de la droite le dessin de son point d'intersection avec le plan: dessin 2.12, extrait de LA CAILLE 1772).

b) la convention LS est la plus largement répandue. Nous l'avons trouvée dès le début du 19e siècle (LACROIX 1814) (mais peut-être est-elle antérieure?). En tout cas, elle est générale à la fin du 19e siècle, et le reste encore actuellement. Notons que, dans la plupart des cas, les lignes relatives à cette convention sont tiretées et ne se distinguent pas des éventuels traits de construction, ce qui peut parfois être gênant (exception faite pour COMBETTE 1893, BENOÎT 1943, LEBOSSÉ et HEMERY 1949, qui utilisent le pointillé pour la convention LS et le tireté pour les traits de construction)

c) On trouve parfois une opacité des surfaces, comme dans CAMMAN et RÉBOUIS 1928, ou BRÉARD 1962; la convention LS n'est alors utilisée que lorsqu'on la juge utile. Cette opacité est parfois limitée à quelques éléments du dessin, dans le but évident de ne pas trop surcharger le dessin (qui justifie également les parallélogrammes incomplets, dont on peut considérer qu'ils relèvent eux aussi de cette opacité sélective: dessin 2.13); on la trouve par exemple dans LESPINARD et PERNET 1960, ROUX et MIELLOU 1961, GLAYMANN et MALAVAL 1981.

d) La convention LL, assez utilisée, est cependant moins fréquente que la convention LS; nous l'avons trouvée dans BRÉARD 1962, MONGE 1962, FOUCHÉ 1966, GLAYMANN et MALAVAL 1981, IREM de STRASBOURG 1988 (dans ces deux derniers cas, de façon non systématique).

4) Autre convention, elle aussi tout à fait implicite, et qui peut aussi être cause de confusion: celle de la notation. En effet, les points qui sont nommés sur le dessin ne sont pas des points du dessin, mais des points de la figure. Ceci n'a guère d'importance en géométrie plane, étant donné que la représentation est dans ce cas de niveau 1 (voir Chapitre 1), mais devient une difficulté réelle en géométrie de l'espace, où la représentation est de niveau 2. Puisque l'on travaille, simultanément ou alternativement, à la fois sur la figure et sur sa représentation (le dessin), il serait normal d'utiliser deux notations distinctes:

- l'une pour désigner les objets (points, droites, plans...) de l'espace;
- l'autre pour désigner les projetés de ces objets sur le plan de projection.

Or on constate que, dans tous les cas, une seule notation est utilisée; c'est-à-dire que les seuls êtres géométriques qui sont nommés sont les objets de l'espace. Certes, on allège ainsi le discours, ce qui n'est guère gênant avec des interlocuteurs entraînés; on réalise ainsi une

"économie", souhaitable certes, mais qui peut se révéler dangereuse, comme on le verra plus loin (Chapitre 14). Qui plus est, cette confusion des notations (à rapprocher d'une confusion signifié/signifiant) ne fait parfois que refléter une confusion au niveau du discours, qu'il faut se garder de faire trop tôt si l'on veut éviter des incompréhensions, voire des blocages. Bien sûr, il est impossible de se passer complètement de tels "abus de langage", mais il convient de ne les faire que prudemment (et non d'emblée), lorsque l'on pense qu'aucune confusion n'est plus à craindre, avec toujours cette arrière-pensée en tête qu'il est possible qu'ils créent encore des problèmes chez certains.

A titre d'exemple de cette confusion, nous citerons un manuel de Seconde (GLAYMANN et MALAVAL 1981, p.287) dans lequel est proposée l'activité suivante:

"Voici quelques dessins représentant des surfaces (...)

Exercice: Choisissez des points sur chacune de ces surfaces. Tracez les droites qui joignent ces points deux à deux. Pour une surface donnée, les droites sont-elles quelquefois, jamais ou toujours incluses dans cette surface?"

Si la première phrase fait bien la distinction objet/représentation, qu'en est-il dans la seconde? Comment tracer des droites sur un objet qui n'est pas matérialisé? N'y a-t-il pas là de quoi troubler plus d'un élève de Seconde?

Comme l'énumération précédente le prouve, les conventions -qui ont souvent pour but initial de rendre plus "lisibles" les représentations- sont nombreuses et variées; elles finissent par constituer un ensemble complexe dont le décryptage peut devenir difficile; les meilleurs élèves finissent bien par s'y retrouver, mais qu'en est-il des autres? Et n'épargnerait-on pas beaucoup de peine à tout le monde si, au fur et à mesure des besoins,

l'enseignant introduisait un petit nombre de conventions (s'en tenant aux plus indispensables, comme la convention LS), les explicitait (pourquoi? comment?) et les institutionnalisait clairement. C'est du moins ainsi que nous avons voulu procéder avec nos élèves (voir dernière partie de ce travail).

4- QUELQUES EXEMPLES D'INCOHÉRENCES RELEVÉS DANS LES MANUELS:

Le maniement correct de la perspective linéaire est réputé -à juste titre- délicat, et il est de fait que, la plupart du temps, on n'en trouve qu'une utilisation approximative, qui se borne à n'en conserver que les traits les plus visibles (par exemple la convergence, vers un point de fuite, des dessins des parallèles à quelques directions "importantes"), et qui s'en remet, pour le reste, au jugé (on trouvera en Appendices 7 et 8 deux exemples, l'un récent (terrain de tennis sur un placard publicitaire), l'autre du 18e siècle (gravure extraite de l'Encyclopédie), de cette façon de procéder, très courante dans les cabinets d'architectes). On peut cependant penser que la perspective parallèle, de par la meilleure préservation des propriétés des objets qu'elle permet, sera d'un emploi plus aisé. Mais il ne faut pas oublier que, comme pour la perspective linéaire, et contrairement à ce qui se produit pour les dessins de géométrie plane, qui sont des représentations "proches" (de niveau 1) des figures géométriques (niveau 0), les dessins de la géométrie de l'espace en perspective parallèle en sont des représentations "éloignées" (niveau 2). En conséquence, il existe dans ces derniers une part bien plus importante d'ambiguïté; ce qui procurera, en contrepartie, une plus grande liberté dans la représentation des objets géométriques. Ainsi par exemple, pour représenter un carré, pourra-t-on dessiner un parallélogramme absolument quelconque; pour représenter un trièdre orthonormé (un "coin de cube"), on pourra de même dessiner n'importe quel triplet de segments ayant une

extrémité commune (d'après le théorème de POHLKE, cité et démontré dans AUDIBERT 1985 A, p.47: "Donnons-nous quatre points s, a, b, c non alignés mais appartenant à un même plan P . Alors on peut toujours trouver un coin de cube $SABC$ et une projection cylindrique sur le plan P tels que s, a, b, c soient les images respectives de S, A, B, C obtenues au moyen de la projection cylindrique").

Il ne faudrait pourtant pas en conclure que, "dans l'espace, on peut faire n'importe quoi". Car la représentation reste malgré tout -en principe- une projection parallèle, et les premiers éléments dessinés détermineront des contraintes concernant les paramètres de cette projection sous-jacente, contraintes qui se répercuteront ensuite sur les éléments dessinés ultérieurement. Si l'on n'y prend pas garde, on peut ainsi aboutir à des incohérences graphiques, qui ne seront peut-être pas toujours visuellement choquantes, mais pourront nuire à la "vraisemblance" de la représentation. L'exemple le plus "classique" en est sans doute celui de la figure constituée par trois plans parallèles, coupés par deux droites non coplanaires, exemple que nous ne développerons pas ici, nous bornant à remarquer qu'il arrive -plus fréquemment qu'on ne pourrait s'y attendre- d'en trouver des représentations inexactes dans les manuels (voir le dessin 2.14, extrait de GRÉVY 1914, p.22), et que la réalisation d'un dessin correct conduit à une démonstration du théorème de Thalès dans l'espace (voir Chapitre 14). Nous préférons ici faire oeuvre un peu plus originale en traitant trois exemples moins courants, relevés dans des manuels au cours de nos recherches.

(N.B.: Nous serons parfois, dans ce qui suit, amenés à distinguer les objets spatiaux de leurs projetés (dessins); aussi désignerons-nous les objets géométriques par des lettres majuscules, et leurs projetés par les lettres minuscules correspondantes.)

Premier exemple :

Il s'agit du dessin 2.15, extrait d'un manuel de Première et illustrant le paragraphe "Propriétés du produit scalaire dans l'espace" (MONGE, AUDOUIN et HAUTCOEUR 1982, p.290).

Dans ce dessin, le point A est un point de la droite Δ , et les points C, D, F forment avec A le parallélogramme $ACFD$, et sont projetés orthogonalement sur la droite Δ en C', D' et F' respectivement (les parallélogrammes à bords parallèles représentent les plans projetants; ils sont d'ailleurs théoriquement inutiles, contribuant uniquement à "donner du relief" au dessin).

Montrons que, si C' et D' peuvent être pris quelconques sur Δ , le point F' est alors parfaitement déterminé sur cette droite, et que sa position ne correspond pas à celle qui est représentée sur le dessin:

La projection parallèle sur une droite transforme un parallélogramme en un parallélogramme (aplati): le quadrilatère $AC'F'D'$ est donc un parallélogramme. La projection parallèle sur un plan transformant, elle aussi, un parallélogramme en parallélogramme, les dessins a', f', c' et d' des points A', F', C' et D' seront par conséquent tels que $a'c'f'd'$ soit un parallélogramme. On peut cependant remarquer, même à vue d'oeil, qu'il n'en est rien sur le dessin du manuel; on le vérifie d'ailleurs en constatant par exemple que les longueurs $a'd'$ et $c'f'$ ne sont pas égales: $a'd'$ vaut environ 10,5mm et $c'f'$ 13mm. L'erreur n'est pas flagrante, et n'apparaît qu'à l'examen de la situation géométrique; d'autre part, la faute matérielle n'en incombe pas aux auteurs, mais au dessinateur (mais à qui revient de vérifier l'exactitude des dessins?) Il est en fait extrêmement vraisemblable que personne ne se soit rendu compte du problème: la réalisation des dessins de géométrie de l'espace demande beaucoup de vigilance...

Deuxième exemple :

Notre deuxième exemple (voir dessin 2.16) est extrait d'un manuel

récent de Seconde (IREM de Strasbourg 1986, p.261). Le texte correspondant à ce dessin (énoncé d'exercice) est le suivant:

- "On donne deux plans sécants P et Q. Soit d leur droite d'intersection.
Trois droites non coplanaires, concourantes en O, d_1, d_2, d_3 , percent respectivement le plan P en A, B, C et le plan Q en A', B', C' (figure ci-contre).
1. Démontrer que les droites (BC) et (B'C') sont sécantes ou parallèles.
 2. On suppose que les droites (AB), (AC), (BC) coupent d respectivement en R, S et T.
Démontrer que les points R, S et T appartiennent aux droites contenant les côtés du triangle A'B'C'.
 3. Démontrer que si (BC) est parallèle à d, alors (B'C') est aussi parallèle à d."

Avant même d'avoir lu le texte correspondant, la seule vue du dessin nous avait causé une impression de malaise. En effet, il nous semblait bien avoir "décodé" ce dessin correctement (trois droites concourantes coupant deux plans sécants), et le résultat graphique ne nous satisfaisait pas, pour une simple raison de bon sens:

Supposons, pour fixer les idées, que le plan P soit vertical, et le plan Q horizontal (vue plongeante). Par rapport au plan OBC (plan contenant également les points B' et C'), le point A est situé "en avant", pour l'observateur fictif situé à l'infini. Le point A' devra donc, par construction même (compte tenu de la position du point O) être situé "en arrière" de ce plan. Ce n'est manifestement pas le cas dans le dessin du manuel, où A' est également "en avant" du plan OBC. Or -et c'est d'autant plus étonnant- l'exercice en question donnait justement toutes les indications permettant de réaliser un dessin correct, par l'utilisation des points R, S et T. Le dessin 2.17 est le dessin rectifié, obtenu en conservant la représentation des plans P et Q, ainsi que celle des points O, A, B, C, B' et C'. Seul celui du point A' a été modifié. On peut voir que l'effet visuel produit est nettement plus satisfaisant.

Lorsqu'un dessin de géométrie vous cause une telle impression de malaise, il est difficile de ne pas en être affecté, et on peut se demander quelle peut alors être l'utilité d'une telle représentation. Un dessin "légèrement inexact" peut certes aider à ne pas tomber dans un cercle vicieux (réciproques, problèmes d'alignement ou de concours, par exemple), mais il ne faut pas que l'on en arrive à ne plus pouvoir l'utiliser efficacement. Le but de l'exercice aurait justement pu être de corriger le dessin donné : dans le manuel en question, on trouve effectivement (p.255, par exemple) de telles activités concernant la représentation plane des figures de l'espace (ce que nous approuvons hautement: il nous paraît bon de fournir aux élèves des occasions explicites d'exercer leur esprit critique). Mais il faut que les choses soient claires, et ce n'est manifestement pas le cas ici, car on ne trouve aucune allusion au fait que le dessin puisse ne pas être correct. De toute façon, présenter (volontairement ou non) un dessin incorrect sans signaler le fait ne nous semble pas pédagogiquement souhaitable.

Troisième exemple :

Cet exemple (dessin 2.18) provient d'un manuel de Première d'avant-guerre (CHÈNEVIER 1931, p.564); le dessin représente une pyramide régulière à base pentagonale.

On peut y relever, outre des inexactitudes de type affine (comme dans les deux précédents exemples), d'autres incorrections, de type métrique cette fois. Ainsi:

- type affine: le dessin de la droite (AO) ne passe pas par celui du milieu du segment [CD]; de même pour les droites (BO), (CO) et (DO). En outre, les droites (AC) et (DE) ne sont pas parallèles...
- type métrique: un examen un peu attentif révèle que le rapport des longueurs AD/BC (conservé, comme l'alignement, par toute projection) semble trop petit.

Considérons donc le pentagone régulier ABCDE (dessin 2.19). On sait que le côté du pentagone convexe [BC] et celui du pentagone étoilé [AD] ont leurs longueurs dans le rapport du nombre d'or. Soit: $AD/BC = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618$.

Or, sur le dessin du manuel, on a $AD \approx 24\text{mm}$ et $BC \approx 16\text{mm}$, soit $AD/BC \approx 1,5$. En conservant [BC], la longueur du segment [AD] devrait être de près de 26mm: erreur qui n'est pas très flagrante, mais reste néanmoins appréciable.

Comment pourrait-on construire correctement le dessin abcde du pentagone régulier ABCDE ? Nous allons partir des images c, b, o des trois points C, B, O, placées comme elles le sont sur le dessin original (le dessin 2.10 détaille les étapes de la construction, à l'échelle 2).

a) Soit H le milieu de [BC]. Pour placer l'image e du point E, nous pouvons par exemple utiliser le fait que les points o, h, e sont alignés, et que l'on a $oh/oe = OH/OE$. Or, dans le pentagone régulier, l'apothème (ici, OH) vaut $(R/4)\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ (R étant le rayon du cercle circonscrit). D'où $OH/OE = x = \sqrt{6+2\sqrt{5}}/4 \approx 0,809$.

Connaissant oh, nous aurons donc oe ($\approx 1,236.oh$). D'où la position du point e (dessin 2.20A).

N.B.: On peut ainsi constater que le point e est convenablement placé sur le dessin du manuel.

b) En utilisant ce même rapport de longueurs, nous pouvons maintenant placer le milieu i de [de] (aligné avec o et b, et tel que $oi/ob = x$), et de même le milieu j de [ae] (dessin 2.20B).

N.B.: On peut vérifier que la droite (ij) est parallèle à (bc).

c) Les points i et j étant ainsi placés, il ne reste plus alors qu'à placer le point d (symétrique de e par rapport à i), et de même le point a (dessin 2.20C).

On pourrait ainsi multiplier les exemples de dessins de géométrie de l'espace dans lesquels figurent des inexactitudes de ce type. Il est en effet plus facile d'en produire en géométrie de l'espace qu'en géométrie du plan: la représentation étant éloignée, on ne peut pas toujours contrôler de visu la correction de tous ses éléments. On notera au passage que, pour pouvoir corriger la représentation, nous avons été amené à "faire de la géométrie", en utilisant des théorèmes de géométrie de l'espace, ainsi qu'en mettant en oeuvre des résultats de géométrie plane. Réaliser un dessin cohérent, voilà une possible motivation pour nos élèves; car il s'agira alors en effet de se poser et de résoudre un problème véritable et non trivial: même les auteurs de manuels (c'est-à-dire des professeurs qui ne sont pas a priori à classer parmi les moins bons) se trompent parfois...

5- CONCLUSION :

En somme, et pour sommaire qu'elle soit, cette étude des dessins des manuels nous aura apporté quelques enseignements; nous avons certes parfois quelque idée de ce que nous allons trouver, mais nous avons pu ainsi préciser certains points, et en particulier:

- l'existence effective de "modèles graphiques" pour les principales figures (la "tradition"), qui ne sont pas forcément les meilleurs pour représenter les situations évoquées.

- la variété des conventions graphiques utilisées, qui évoluent dans le temps, et également, à un moment donné, d'un manuel à l'autre (ainsi par exemple, pour suggérer une "vue de dessus", trouve-t-on dans les représentations de plans l'ombrage, l'épaississement de traits, la convergence des bords).

- le vague et l'implicite régnant aussi bien sur les principes géométriques des représentations que sur les divers types de conventions.

- les réelles difficultés que peut présenter la réalisation d'un dessin en géométrie de l'espace, difficultés qui nécessitent la résolution de problèmes géométriques (contrairement au cas des schémas).

Tout ceci nous semble donc de nature à faire craindre que les rapports des élèves aux dessins de géométrie de l'espace ne soient pas aussi idylliques qu'un usage constant nous le fait croire, et en conséquence à justifier que la représentation des figures de l'espace fasse l'objet d'un enseignement explicite, enseignement qui sera de nature géométrique étant donné la nature du principe qui la gouverne (c'est-à-dire la projection).

CHAPITRE 3:

UN PARALLÉLOGRAMME POUR UN PLAN.

Nous avons étudié dans le chapitre précédent les explications avancées par les manuels au sujet de la représentation traditionnelle d'un plan par un parallélogramme. Il nous a semblé intéressant de poser la question aux lycéens, afin de savoir si les arguments qu'ils donnent sont de même nature.

1- LA QUESTION:

Nous verrons au Chapitre 9 que la majorité des élèves de Première utilisent, pour dessiner un plan, le type de représentation traditionnelle, ce qui tend à prouver qu'ils l'ont déjà rencontré, soit en classe de Seconde, soit au moins par la fréquentation de manuels. Mais nous voulions savoir si, de façon générale, les lycéens connaissaient les raisons de ce choix, ou s'ils pouvaient en imaginer; aussi avons-nous posé, en même temps qu'un autre questionnaire que nous étudierons plus loin (voir Annexe 5), la question suivante (que nous avons d'ailleurs placée en tête dudit questionnaire pour avoir les meilleures chances d'obtenir une réponse):

"En géométrie de l'espace, pourquoi, d'après vous, représente-t-on habituellement un plan par un parallélogramme?"

N.B.: le "d'après vous" était destiné à rassurer les élèves, en leur faisant sentir qu'ils ne devaient pas se sentir coupables de ne pas connaître "la" réponse.

2- LA POPULATION:

Nous avons posé cette question à 219 lycéens, répartis sur quatre classes du lycée Michelet de Vanves (nos élèves, ainsi que ceux de notre collègue Marie-Hélène CLAISSE) et trois classes du lycée Gustave-Monod d'Enghien (élèves de Jean BOUDAREL et de Catherine PEGLIASCO), classes qui se répartissent comme suit:

a) au lycée de Vanves:

- une classe de Seconde indifférenciée, notée 2.3 (32 présents);
- deux classes de Premières S, notées 1S1 (36 présents) et 1S2 (33 présents);
- une classe de Terminale D, notée TD2 (29 présents).

b) au lycée d'Enghien:

- une classe de Seconde technique, notée 2.T (26 présents);
- une classe de Première S, notée 1S6 (35 présents);
- une classe de Première G, notée 1G1 (28 présents)

3- LES PROBLÈMES DE LA REPRÉSENTATION DU PLAN:

Avant d'étudier les réponses des élèves, revenons sur le problème de la représentation du plan en géométrie de l'espace. Cette représentation consiste, on le sait, en un parallélogramme (parfois incomplet); il s'agit en fait du résultat de la conjonction de deux phénomènes:

- a) la convention d'utiliser une projection parallèle pour représenter sur un plan les figures tridimensionnelles de la géométrie;
- b) une synecdoque géométrique: la projection d'un plan sur un plan est le plan de projection tout entier; il est donc nécessaire, si l'on veut "voir" quelque chose sur le dessin, d'avoir recours à un subterfuge, en l'occurrence

la représentation d'une partie conventionnelle bornée de ce plan, qui tiendra lieu du plan entier.

Comment s'explique le choix du rectangle, de préférence à toute autre figure plane bornée? A priori, ce choix peut sembler étrange: étant donné qu'il suffit de trois points non alignés pour déterminer un plan, un triangle paraîtrait ici mieux indiqué a priori, en tant que figure la plus "économique". La raison en est vraisemblablement à rechercher dans le caractère tridimensionnel même de l'espace; les objets y sont souvent rapportés (non seulement en mathématiques, mais également dans la vie courante) à un repère trirectangle dont l'un des axes est vertical: longueur, largeur (profondeur) et hauteur. En géométrie de l'espace, un tel repère est traditionnellement représenté comme sur le dessin 3.1. Cette représentation évoque celle d'un "coin" de pavé droit (éventuellement de cube, dans le cas d'un repère normé), dessiné en perspective cavalière (dessin 3.2). Remarquons de plus que ce pavé est "lu" très majoritairement comme posé sur un plan horizontal; la face avant (verticale) est en vraie grandeur, et la face inférieure est représentée par un parallélogramme dont les deux côtés "horizontaux" sont en vraie grandeur et dont les deux côtés obliques ont la direction des fuyantes de la perspective cavalière utilisée. La représentation d'un plan par un parallélogramme, projeté d'un rectangle en perspective parallèle, indique donc en même temps un repère orthogonal de ce plan, apportant ainsi une information supplémentaire sur celui-ci. De plus, si ce rectangle est supposé horizontal, avec des "bords" frontaux (interprétation induite par la présence de deux grands côtés horizontaux; voir Chapitre 5), on dispose en plus de la troisième direction du trièdre trirectangle de référence: la verticale, correspondant à la "verticale" de la feuille. Le simple "dessin du plan" fournit ainsi de façon implicite, directement ou indirectement, un repère orthogonal de l'espace, lié aux "directions

privilegiées (PAEZ-SANCHEZ 1980).

Si l'on avait recours à un simple triangle ABC, on disposerait en fait de trois directions de droites coplanaires: (AB), (AC) et (BC). Pour arriver à obtenir les mêmes renseignements sur le plan qu'à partir du rectangle, il faudrait savoir que ce triangle est rectangle, et en quel sommet se situe l'angle droit. C'est d'ailleurs pratiquement ce qui se passe lorsque l'on représente un plan par un "coin" (dessin 3.3A), que l'on peut considérer, soit comme un "demi-rectangle" (dessin 3.3B), soit comme un triangle rectangle incomplet (dessin 3.3C). La représentation par un parallélogramme présente en outre l'avantage d'être implicitement comprise comme étant celle d'une plaque rectangulaire (ex.:feuille de papier) vue en perspective, et d'évoquer ainsi des objets usuels concrets (il suffit de songer à la fréquence des rectangles dans notre environnement), permettant une formation plus aisée des images mentales (en particulier la constitution du repère dont nous parlions plus haut). Il s'agit là, selon nous, d'un aspect important, expliquant le recours au parallélogramme de préférence à une autre figure (et nous avons bien trouvé ce type de justifications dans les manuels).

4- L'ANALYSE DES RÉPONSES:

A la suite d'un premier examen des réponses, nous avons pu les grouper selon les 9 grandes catégories schématisées ci-dessous, que nous détaillerons ensuite:

- I: c'est une convention.
- II: c'est pour représenter la troisième dimension
- III: c'est parce qu'un parallélogramme est plan
- IV: c'est une représentation bornée
- V: c'est un rectangle en perspective

VI: c'est à cause du parallélisme

VII: divers

VIII: je ne sais pas

IX: non réponse.

La répartition des réponses suivant ces catégories a été la suivante:

Classe / Catégorie	2.T	2.3	1G1	1S1	1S2	1S6	TD2	Total
I		2		1		1	3	7
II	9	12	7	9	17	18	12	84
III	2	4		5				11
IV	1	5	4	7	3	2	4	26
V	3	3	1	3	1	5	4	20
VI		3	1	5	1	2		12
VII	3		6	3	5	2	3	22
VIII		1			1			2
IX	8	7	9	9	7	10	6	56
Elèves présents	26	32	28	36	33	35	29	219/240

TABLEAU 6

N.B.1: Il y a parfois plus de réponses que d'élèves; ceci est bien sûr dû au fait que certains élèves ont avancé plusieurs arguments différents.

N.B.2: Malgré l'effectif relativement élevé de la population étudiée, nous ne ferons pas d'étude statistique systématique des résultats, étant donné d'une part l'hétérogénéité de cette population (niveaux, sections...), et d'autre part que ce qui nous intéressait surtout était le fait que tel argument soit attesté ou non.

Passons maintenant au détail de chaque catégorie.

Catégories VIII et IX: "je ne sais pas" et non réponse.

Si nous regroupons ces deux catégories, ce n'est pas uniquement par commodité; il y a en effet deux raisons principales qui nous y ont amené:

1*) Cette question, comme nous l'avons dit, se trouvait être la première du questionnaire soumis aux élèves, et par conséquent ceux-ci ont commencé par en lire le libellé. Nous pensons que, s'ils n'ont pas répondu immédiatement à la question, c'est que la réponse ne leur semblait pas évidente.

2*) Les élèves ont disposé d'un temps suffisant pour répondre à la totalité du questionnaire (nos collègues comme nous-même y avons veillé).

C'est pourquoi nous considérons ici les non-réponses comme un aveu implicite d'ignorance, ou à tout le moins de l'impossibilité d'une formulation de l'argumentation.

Quoi qu'il en soit, nous trouvons ici plus du quart des élèves (58 sur 219), et ce taux est à peu près constant dans les diverses classes. On notera d'ailleurs que, malgré l'hétérogénéité signalée plus haut, les résultats sont très comparables d'une classe à l'autre, tout au moins en ce qui concerne les catégories les mieux représentées.

Catégorie I: "c'est une convention".

Cet aspect a été très peu relevé, du moins de façon explicite (7 élèves seulement):

"C'est une façon arbitraire et pratique de représenter quelque chose (de) difficilement perceptible sur une feuille de papier" (TD2)

"Parce que c'est comme ça!!" (2.3)

"Tout d'abord, c'est par convention..." (2.3)

"Je crois que c'est une convention" (1S6)

Même si l'on peut penser que cette idée est présente chez un certain nombre d'autres élèves, il n'en reste pas moins qu'elle n'apparaît que rarement à la lecture de leurs réponses.

Catégorie II: "c'est pour représenter la troisième dimension".

Ce type de réponse est, de loin, le plus fréquent: 84 élèves sur 219, soit plus d'un sur trois. Nous avons subdivisé cette catégorie de réponses en trois sous-catégories, d'inégale importance, différant légèrement quant au contenu:

Ila: celles qui s'en tiennent à cet aspect de représentation de la troisième dimension (perspective, relief, profondeur...); ce sont les plus nombreuses (75 élèves). Ainsi:

"Cela donne une impression que le plan n'est pas sur notre feuille" (2.3)

"Pour mieux faire apparaître les trois dimensions et la mise en relief" (2.3)

"Pour montrer un certain relief" (1S6)

"Cela montre bien la perspective" (1S6)

"Pour avoir une idée sur l'encombrement" (2.3)

"Pour donner un effet de relief" (2.T)

"Pour représenter la perspective de ce plan" (2.T)

"Parce que le parallélogramme a la vertu de donner du relief sur un plan" (1G1)

"Il permet de créer une troisième dimension sur une surface plane" (1S2)

"Car au tableau ou sur un support plan, il est difficile de représenter la profondeur, et donc le parallélogramme contribue avec ses perspectives à imaginer une figure plane dans l'espace (càd imaginer une figure à 3 dimensions représentée en 2 dimensions)" (1S2)

I Ib: celles qui précisent (de façon plus ou moins explicite) que l'idée

de troisième dimension est donnée par les fuyantes (5 élèves):

"On utilise des parallèles car avec l'inclinaison on donne une impression de "profondeur" (IS2)

"Chaque angle du plan doit former un angle droit. Mais selon notre position par rapport au plan les angles "se déforment" de façon à former un parallélogramme" (IS2)

"Si on représentait un plan par un carré ou un rectangle, on le verrait de face. En le représentant par un parallélogramme, on le voit donc en perspective" (IS1)

"Si on représentait un plan par un parallélogramme rectangle, on aurait plus de mal à imaginer la figure car on serait dans le même plan que la feuille sur laquelle on écrit" (IS6)

Notons, dans les trois dernières réponses citées, l'allusion plus ou moins voilée à la représentation d'un rectangle, ce qui les rapproche de la catégorie V.

IIC: celles qui font référence à un repère (orthogonal?) du plan (4 élèves):

"Parce qu'il y a deux axes support de ce parallélogramme" (IS2)

"Les arêtes du parallélogramme représentent plus un repère dans l'espace" (IS6)

"C'est une surface plane délimitée par un repère avec deux axes" (IS1).

Les réponses de cette catégorie II se réfèrent donc à l'aspect "représentation" de l'espace, c'est-à-dire à l'effet de perspective relatif à deux directions privilégiées (perpendiculaires?) du plan considéré, certains élèves précisant que ces deux directions constituent un repère du plan (IIC), d'autres faisant remarquer que l'effet tridimensionnel est dû à l'inclinaison de certaines obliques (IIB).

Catégorie III: "c'est parce qu'un parallélogramme est plan".

La sous-catégorie IIC sous-entendait que le plan est défini par deux directions: celles qui sont représentées par les côtés du parallélogramme. Nous trouvons ici les élèves qui, admettant que le parallélogramme dessiné est l'image d'un parallélogramme de l'espace (mais n'est-ce pas le cas de tous? cf. le transfert de propriété) ont pris soin de remarquer que le parallélogramme est par nature un quadrilatère plan (donc une partie du plan que l'on cherche à représenter). Cette catégorie n'est pas nombreuse (11 élèves seulement), mais elle n'en est pas moins présente, et témoigne au moins du fait que, pour ces élèves (contrairement à d'autres, comme nous le verrons au Chapitre 12), un quadrilatère de l'espace n'est pas forcément plan.

Exemples:

"Car le parallélogramme représente une surface plane" (2.3)

"Car un parallélogramme est une surface plane régulière" (2.3)

"Le parallélogramme a la forme d'une surface PLANE" (IS1)

"Pour montrer que le plan est plat" (IS1)

"Parce que 2 droites parallèles déterminent un plan" (IS1)

Catégorie IV: "c'est une représentation bornée".

S'il est vrai que, pour certains élèves, le plan semble être une figure limitée (par exemple aux "bords" de sa représentation), le fait que l'on ait recours à une figure bornée pour représenter un ensemble de l'espace qui ne l'est pas est signalé par un certain nombre d'entre eux (26 élèves au total, soit près d'un sur huit). Ainsi:

"Un plan est infini comme une droite mais on le représente avec des limites sur notre feuille de papier" (2.3)

"Le parallélogramme délimite le plan" (2.3)

"Le parallélogramme représenté est une partie de ce plan, il sert simplement à définir la position du plan" (2.3)

"Pour pouvoir définir ce plan car un plan est indéfini" (IS1)

"Pour limiter ses frontières" (1S1)

"Parce qu'il me paraît plus délimiter un espace" (1G1)

"Pour situer une partie du plan, car un plan est trop grand pour travailler dessus. Il nous faut une limite" (1G1)

"Les plans étant des ensembles infinis de points, on n'en représente qu'une parcelle" (1S2).

N.B.: Certaines de ces réponses laissent entendre que l'élève considère le plan comme limité, idée que nous retrouverons au Chapitre 9, implicite dans certains dessins réalisés par les élèves.

Catégorie V: "c'est un rectangle en perspective".

Nous avons regroupé ici toutes les réponses (20 au total) faisant référence au dessin d'un rectangle, ou à un repère orthogonal. L'aspect le plus fréquemment évoqué fait allusion, comme dans les manuels (s'agit-il d'une reminiscence d'exemples donnés par un professeur antérieur?), à un objet concret (feuille de papier, plaque de verre...), c'est-à-dire à un support d'image mentale correspondant à une réalité précise: la matérialisation d'un rectangle (même si cela n'est pas expressément dit). On pourrait très bien se contenter de dire que le plan est représenté par la vue perspective d'un parallélogramme quelconque, mais ce serait à notre avis occulter cet aspect matériel des choses, où le rectangle est beaucoup plus attesté que le parallélogramme. En outre, comme nous le disions plus haut, supposer de plus que le parallélogramme est rectangle introduit une donnée supplémentaire (qui est d'ailleurs souvent intégrée implicitement), permettant de préciser la représentation considérée.

Exemples:

"Je pense que c'est un rectangle vu en projection" (2.T)

"Le plan est une sorte de plaque de verre dans l'espace" (2.3)

"Un parallélogramme dessiné sur papier ressemble à une feuille à plat"

(2.3)

"Un parallélogramme donne l'impression d'une plaque vue en perspective"

(2.3)

"Car un plan dans l'espace est comme une plaque" (1S1)

"Un carré dans l'espace = un parallélogramme" (1S1)

"Un plan peut être représenté par une feuille de papier. Les contours de la feuille, si elle est placée dans l'espace, représentent un parallélogramme" (1S6)

"Parce qu'en théorie on représente le plan par un carré, et dans l'espace on ne voit pas le carré de face, on le voit légèrement de profil" (1S6)

"Par habitude du plan limité le plus couramment utilisé: la feuille de papier" (TD2)

Catégorie VI: "c'est à cause du parallélisme".

Nous avons placé ici les réponses faisant référence au parallélisme, et que nous ne pouvions pas classer, faute de précisions suffisantes, dans la catégorie III. Ces réponses ne sont pas très nombreuses (12 au total), et font souvent allusion au côté "pratique" du parallélisme, ou à sa "régularité". La "régularité" fait peut-être référence au parallélogramme opposé aux quadrilatères (plans) qui n'en sont pas: le parallélogramme possédant un centre de symétrie (et, si c'est un rectangle, deux axes de symétrie perpendiculaires), cette régularité le rend plus simple à dessiner; d'où peut-être aussi l'argument d'être plus "pratique" (à représenter?). Nous nous contentons ici de formuler des hypothèses, et de citer quelques exemples de réponses:

"Pour plus de facilité, il est préférable d'avoir un plan dont les limites sont parallèles 2 à 2" (2.3)

"Cela doit être plus pratique, car les droites sont parallèles 2 à 2" (2.3)

"Les droites délimitant le plan sont parallèles 2 à 2, ce qui est pour l'oeil de la régularité" (2.3)

"Car le parallélogramme est en 3 dimensions et possède des parallèles (simplification)" (1S6)

"Il fallait une figure à plusieurs côtés, de préférence parallèles 2 à 2 pour donner une impression de stabilité" (1S6)

"Le parallélogramme est la figure géométrique la plus aisée pour représenter les parallélismes et intersections" (1S1)

Catégorie VII: divers.

Nous avons rangé ici tout ce qui ne rentrait pas dans les catégories précédentes, soit 22 réponses. Il s'agit surtout de phrases dont nous n'avons pas saisi le sens en tant qu'arguments explicatifs (peut-être parce que trop allusives, ou à cause de la maladresse de l'expression). Nous nous contenterons, ici aussi, de donner quelques exemples:

"Deux droites parallèles qui se coupent en leur milieu" (1G1)

"C'est plus simple" (1G1)

"Parce qu'il y a des angles" (1G1)

"Parce que l'on peut le changer plus facilement (en faire un carré ou un rectangle)" (1G1)

"Car c'est plus simple et on le fait généralement sur une feuille; de plus, il y a une infinité de plans, il est donc difficile de représenter un plan" (1G1)

"Car le plan semble plus grand qu'un carré" (1G1)

"Un plan se définit par 3 points dans l'espace et il faut un 4e point pour dessiner un parallélogramme" (1S1)

"Pour visualiser les faces du parallélogramme" (1S2)

"Parce que nous travaillons dans l'espace" (1S2)

"C'est pour faciliter le fait que nous travaillons dans l'espace" (1S6)

5- CONCLUSION:

Nous retrouvons donc ici, éparses chez les élèves, la totalité des explications qui figuraient dans les manuels étudiés au chapitre précédent, et plus généralement sont apparus les éléments que nous avons invoqués au début pour justifier cet emploi quasi-exclusif du parallélogramme en tant que représentation d'un plan en géométrie de l'espace. Ces réponses partielles sont tout à fait naturelles, et elles étaient attendues; elles sont dues au fait que la question posée était d'un libellé vague ("Pourquoi...?"), prêtant ainsi à des réponses se situant à plusieurs niveaux. Les élèves ont mis l'accent sur ceux qui leur ont semblé les plus évidents, ou importants, une réponse plus complète exigeant, comme on l'a vu, de prendre en compte plusieurs aspects complémentaires et habituellement implicites.

En tout premier lieu figure, dans les réponses des élèves, l'effet de perspective (cat. II) qui, comme le font remarquer certains, fait apparaître un rectangle (cat. V) sous la forme d'un parallélogramme. Vient ensuite la référence à la synecdoque géométrique (cat. IV), exprimée parfois sous une forme qui laisse douter du fait que, pour certains, le plan soit illimité ("un plan est trop grand pour travailler dessus"). Le fait qu'il s'agisse, pour une part, de conventions de représentation (cat. I), et que l'on pourrait prendre en fait n'importe quel type de polygone plan (cat. III) pour représenter le plan le contenant n'apparaît que rarement de façon explicite, même s'il est souvent sous-jacent. On peut également noter qu'il n'est fait que très rarement allusion au type de perspective qui produit la représentation (le mot "cavalière" n'apparaît que 3 fois, de même que le mot "fuyante").

Il apparaît donc qu'un travail d'explicitation concernant le

représentation du plan n'apparaît pas du tout superflu, même au niveau du lycée, dans le but de montrer clairement à tous :

- qu'il s'agit d'une convention;
- pourquoi le choix du rectangle présente certains avantages;
- quel type de perspective le représente comme un parallélogramme (et pourquoi).
- qu'on peut envisager d'autres moyens de représenter un plan...

Un tel travail permettra, non seulement de confirmer les idées intuitives de la plupart des élèves, mais aussi de leur assurer un fondement rationnel et de les institutionnaliser, en faisant explicitement le départ entre ce qui relève de la convention et ce qui relève de propriétés géométriques.

CHAPITRE 4: VOIR ET SAVOIR. LE PROBLÈME GÉNÉRAL.

"Même l'acte si simple que nous appelons "voir une personne que nous connaissons" est en partie un acte intellectuel. Nous remplissons l'apparence physique de l'être que nous voyons de toutes les notions que nous avons sur lui, et dans l'aspect total que nous nous représentons, ces notions ont certainement la plus grande part."

Marcel PROUST.

Les chapitres précédents ayant montré, en ce qui concerne les représentations planes utilisées en géométrie de l'espace, l'existence d'une tradition bien établie et reposant essentiellement sur des implicites que ne connaissent pas toujours les élèves concernés, nous avons voulu savoir si la façon dont eux-mêmes "lisaient" ces dessins traditionnels correspondait à l'interprétation attendue de ces implicites, et si leurs productions graphiques dans le domaine de la géométrie de l'espace y faisaient référence.

1- LES DEUX PÔLES :

Nous avons évoqué, dans l'introduction, les deux principes auxquels nous nous référerons pour interpréter les rapports des lycéens aux dessins de géométrie, et qui selon nous sont susceptibles, d'une façon générale, de pouvoir rendre compte des attitudes individuelles relativement aux représentations graphiques d'objets spatiaux; nous avons dénommé ces principes, par commodité, le "voir" et le "savoir". Cette terminologie fait, bien sûr, référence à l'étude classique de Jean PIAGET et Bärbel INHELDER sur "la représentation de l'espace chez l'enfant" (PIAGET et INHELDER 1947), et sur laquelle nous reviendrons bientôt. Elle a pour fondement le fait que, le dessin n'étant qu'une représentation éloignée de l'objet spatial (niveau 2), il n'est pas possible de faire qu'il conserve toutes les "propriétés

intéressantes" de cet objet (N.B.: par "propriétés" nous entendons ici, aussi bien ses propriétés intrinsèques (physiques ou géométriques) que ses propriétés extrinsèques (l'aspect qu'il présente à la vue)). Lorsque l'on aura à dessiner un objet, par un moyen quelconque (à l'encoder), il faudra donc choisir -plus ou moins consciemment- celles de ces propriétés que l'on veut voir représentées. Et, selon que l'on privilégiera les propriétés de la première ou de la seconde espèce, on dira que l'on s'est placé plutôt du côté du "savoir" ou plutôt du côté du "voir".

Pour ce qui est du décodage, c'est-à-dire de l'interprétation d'un dessin identifié comme celui d'un objet tridimensionnel, on peut noter que ces deux pôles sont difficilement dissociables, par suite d'une influence réciproque des aspects perceptif et cognitif:

- l'influence du "voir" sur le "savoir" est évidente, et en particulier elle justifie, en Analyse, le recours aux graphiques et, en Géométrie, le recours aux dessins (voir Chapitre 1). Le dessin a l'avantage de fournir une information globale et synthétique sur une situation souvent complexe, mais malgré tout, il ne saurait prétendre la décrire entièrement à lui seul, et nécessite d'être accompagné d'une légende; en fait, le "long discours" censé pouvoir être remplacé avantageusement par un "petit dessin" peut effectivement l'être par ce petit dessin, non pas seul, mais accompagné d'un petit discours.

- inversement, le "savoir" exerce lui aussi une influence sur le "voir" (cf la citation en exergue de ce chapitre), et plus généralement sur le percept: "la faculté de raisonner doit être disposée à accepter les premières caractérisations d'une situation qui lui est présentée par la faculté de percevoir, mais ensuite, si elle a des doutes sur ces données, la faculté de perception doit à son tour être prête à accepter ces doutes et à revenir en arrière pour réinterpréter la situation, ce qui crée une boucle

continue entre les niveaux" (HOFSTADTER et DENNETT 1987, p.345). Robert FRANCÈS résume la situation comme suit: "la perception est déclenchée par la stimulation actuelle, mais elle ne s'explique pas entièrement par cette stimulation. Une action en retour (feed back) de la signification globale ou du savoir concernant un de ses aspects modifie le résultat final de cette stimulation" (FRANCÈS 1981, p.83). Un exemple classique en est celui des clichés radiographiques, où le spécialiste décèle des caractéristiques et des anomalies tout à fait indécélables pour le profane.

2- LE "RÉALISME INTELLECTUEL" :

"L'âne continuait à examiner la peinture d'un regard plutôt attristé. Tout à coup, il eut comme un sursaut et s'écria:
-Qu'est-ce que ça veut dire? mais on ne m'a fait que deux pattes!
Cette fois, Marinette se sentit plus à l'aise et répondit:
-Bien sûr, je ne te voyais que deux pattes. Je ne pouvais pas en faire plus.
-C'est très joli, mais enfin, j'ai quatre pattes, moi.
-Non, intervint Delphine. De profil, tu n'as que deux pattes.
-C'est bon, dit-il en s'éloignant, je n'ai que deux pattes.
-Voyons, réfléchis un peu...
-Non, non, j'ai deux pattes et n'en parlons plus."
Marcel AYMÉ.

Jean PIAGET et Bärbel INHELDER (PIAGET et INHELDER 1947), reprenant les résultats des travaux de LUQUET (1927), rappellent les trois grands stades que celui-ci a dégagés dans l'évolution du dessin enfantin:

Stade 1: incapacité synthétique (3/4 ans)

Stade 2: réalisme intellectuel (5/7 ans)

Stade 3: réalisme visuel (à partir de 8/9 ans).

Après le stade 1 (celui du classique bonhomme-têtard de l'enfant de 3-4 ans) vient le stade du "réalisme intellectuel", dans lequel il "s'applique à dessiner, non pas ce (qu'il) voit de l'objet, mais "tout ce qui y est" (p.65). Ce que nous traduisons en disant qu'il cherche en priorité à intégrer

dans son dessin son "savoir" sur l'objet (au détriment du "voir"). Entre autres exemples donnés par Piaget et Inhelder, citons le fait:

- qu'"un oeil est toujours situé à côté de l'autre, même s'il s'agit d'un profil" (p.66): nous ne sommes pas loin des peintres cubistes;

- qu'on peut voir dans un même dessin "simultanément un cheval de profil, une voiture vue de face, mais couchée sur un plan horizontal et ses roues rabattues sur les côtés; (que) de plus, les diverses faces de cet ensemble sont simplement étirées pour être vues à la fois" (pp.66-67; c'est nous qui soulignons);

- que dans "un grand nombre de situations l'intérieur des choses est figuré par transparence: les aliments dans l'estomac, un canard dans son oeuf" (p.66): nous sommes ici tout près du "style Roentgen" des aborigènes de la Terre d'Arnhem (voir plus loin)...

On ne saurait être plus clair. Papa a deux yeux, donc il faut en montrer les deux yeux, la voiture a quatre roues, donc il faut en montrer les quatre roues...L'objet dessiné sera d'autant plus "ressemblant" qu'on y aura représenté davantage d'éléments "indispensables" à une identification correcte (si je ne lui dessine qu'un oeil, comment pourra-t-on savoir que mon papa n'est pas borgne?). D'où la nécessité de ce que PIAGET et INHELDER appellent "un mélange de points de vue inconciliables". Formellement parlant, c'est souvent de cela qu'il s'agit. Mais peut-on parler de "point de vue" lorsqu'il s'agit de transparence? ou lorsqu'un enfant dessine une voiture de profil dont les quatre roues sont alignées sur le côté visible? De plus, ces "points de vue" ne sont pas gratuits: ce qui importe à l'enfant, c'est de faire savoir, et la question ne se pose pas pour lui en termes de points de vue. C'est pourquoi nous préférons parler de représentation d'un savoir.

Le stade 2 se prolonge en moyenne jusque vers 8-9 ans, selon PIAGET et INHELDER, qui en signalent la "durée parfois surprenante", affirmation avec

laquelle nous ne pouvons qu'être d'accord, puisque Lelis PAEZ-SANCHEZ l'a trouvé chez des adultes peu scolarisés (PAEZ-SANCHEZ 1980), et que nous-même en relevons -on le verra- maintes traces chez des élèves de Seconde, de Première et de Terminale scientifiques, qui eux sont tout à fait scolarisés. Ce stade est suivi par le stade du "réalisme visuel", "forme de dessin soucieuse simultanément des perspectives, des proportions et des mesures ou distances" (p.68); nous dirons plutôt que nous sommes cette fois du côté du "voir", car l'enfant se soucie dans ce cas davantage d'un "point de vue", même s'il y intègre encore souvent un "savoir" qui lui semble nécessaire. La hiérarchie que PIAGET et INHELDER établissent entre leurs différents stades nous gêne un peu, car il apparaît nettement dans leur étude que le "réalisme visuel" (synonyme, pour eux, de point de vue unique, donc de perspective centrale) est l'objectif à atteindre dans les représentations. C'est là conférer un caractère d'absolu à ce type particulier de figuration, qui n'est en fait, comme on a pu le dire, que le point de vue d'un cyclope paralysé, puisqu'il suppose un oeil unique et immobile. Il ne s'agit ni plus ni moins que de la perspective photographique, qui, en notre "siècle de l'image" (nous l'a-t-on assez rabâché?), est bien sûr omniprésente, mais ne saurait prétendre à être la norme; comme le rappelle Lelis PAEZ-SANCHEZ: "la perspective linéaire n'a rien de naturel. Il n'est pas inutile de le répéter, surtout lorsqu'on constate son emploi comme norme d'évolution psychogénétique" (PAEZ-SANCHEZ 1980, p.276). En particulier, dans l'histoire -déjà longue- de l'art, la perspective linéaire n'est en somme, comme on a pu le dire, qu'une parenthèse, limitée géographiquement (l'Occident) et temporellement (cinq siècles tout au plus): "que ce système ait sa rationalité propre et permette de mettre de l'ordre dans la perception, c'est peu douteux. Mais sans doute convient-il de ne pas identifier purement et simplement cette reconstruction avec "l'espace réel". Car il s'agit précisément d'une reconstruction, fondée sur des

présupposés qui, au mieux, aboutissent à une simplification de nos processus perceptifs...La perspective linéaire, malgré son intérêt, ne peut être considérée comme douée d'une valeur absolue. Elle est commode, elle donne une certaine satisfaction à l'intellect; mais d'autres systèmes sont possibles" (THUILLIER 1984, p.1398). De plus, divers travaux tendent à prouver que la perspective linéaire n'est pas "naturelle", et choque ceux qui n'y sont pas habitués; ainsi Norman FREEMAN, faisant référence à Margaret HAGEN (voir HAGEN 1980, 1986): "It seems from Hagen's work (...) that "proper" linear perspective looks unnatural to people" (FREEMAN 1980, p.259) (Il ressort des travaux de Hagen que la "vraie" perspective linéaire ne semble pas naturelle aux gens).

En conclusion, tout ceci tend à montrer -et notre recherche va dans le même sens- que poser le problème en termes de hiérarchie ne se justifie pas, et qu'en réalité il s'agit plutôt d'une question d'adéquation aux buts recherchés, avec des contraintes qui sont d'ordre culturel plus que génétique, et relevant davantage de processus d'apprentissage que d'une évolution naturelle. Et ceci n'est pas seulement applicable hic et nunc, comme on en Jugera ci-après.

3- AILLEURS QU'AUTREFOIS :

Si nous prenons par exemple le cas de l'art égyptien de l'époque pharaonique, nous savons que les personnages y sont traditionnellement représentés d'une manière particulière: "la tête se voit mieux de profil, aussi est-elle dessinée de côté. Mais si nous pensons à l'oeil, nous le voyons de face. Aussi un oeil vu de face est-il inséré dans cette vue latérale du visage. La partie supérieure du corps, épaules et poitrine sont plus lisibles de face, puisqu'on voit ainsi comment les bras s'attachent au corps.

Mais les bras eux-mêmes, et les jambes en mouvement, se voient beaucoup plus clairement de profil. C'est pourquoi les personnages égyptiens semblent si étrangement plats et tordus" (GOMBRICH 1982 B, p.36). De même, dans les paysages, on trouve une utilisation fréquente du "rabattement" (dessin 4.1 d'après WHITEHOUSE et WILKINS 1987, représentant un bassin entouré d'arbres, dessinés perpendiculairement aux bords). Ce sont là des procédés qui sont effectivement attestés dans les productions graphiques des enfants, mais malgré cette convergence formelle on ne saurait cependant qualifier le dessin égyptien d'"enfantin", car les raisons du recours à ce type de représentation sont en réalité de nature religieuse: "les Egyptiens ...ne représentent pas l'objet tel qu'on le voit, mais au contraire tel qu'on le connaît (...). Ceci est particulièrement frappant dans la figuration de l'être humain: représenter les différentes parties du corps sous leurs aspects les plus complets et les plus significatifs est une nécessité absolue pour gagner "les terres éternelles", après la mort" (SKLIAR 1987, p.28). Arne EGGBRECHT appelle "aspective" cette conception artistique et, loin d'y voir une "enfance de l'art", la définit comme "une tournure d'esprit dont l'originalité consiste à traduire en deux dimensions un ensemble en représentant chacune de ses composantes sous un angle significatif permettant de les percevoir bien définies et d'une manière paratactique (c'est-à-dire mises côte à côte)" (EGGBRECHT 1986, p.399).

L'art pré- et protohistorique relève de la même conception. Ainsi, dans l'art paléolithique franco-cantabrique, l'un des "styles" identifiés (dessin 4.2) se distingue par la représentation de profil du corps de l'animal, les cornes étant vues de face ("perspective tordue" de l'abbé BREUIL (BREUIL 1974), "perspective bi-angulaire droite" d'André LEROI-GOURHAN (LEROI-GOURHAN 1973)). Au cours de la Protohistoire, on retrouve des procédés analogues, comme en témoignent les dessins 4.3 et 4.4. Le premier représente

une anaire (de profil) tirée par deux boeufs (vus de dessus); le second (d'après BIEL 1987, p.131) représente, lui, un char monté (dans lequel les différentes parties sont représentées sous l'aspect le plus "typique"), tiré par deux chevaux. Le cas-limite est certainement celui du style dit "Roentgen", ou "rayons X", que nous évoquions plus haut, dont les représentants les plus célèbres sont les aborigènes de la terre d'Arnhem orientale (dessin 4.5, d'après AMBESI 1966, p.147): "dans cet art, l'aborigène restitue non seulement ce qu'il a sous les yeux, mais les organes internes qui échappent à sa vue et dont il connaît cependant la présence, par exemple les os, le coeur et les poumons" (BUHLER, BARROW et MOUNTFORD 1962, p.212). On retrouve un procédé analogue-mais utilisé moins systématiquement- dans les gravures rupestres du Val Camonica, où "l'exécutant ne se borne pas à tracer l'apparence externe de l'animal, c'est-à-dire ce qu'il voit, mais il le complète en ajoutant, comme par transparence, quelques parties des entrailles et du squelette, c'est-à-dire ce qu'il sait ou devine, ou ce qu'il désire" (RIBA 1984, p.57).

Le souci de représenter le "voir" ne saurait, par principe, être absent d'un art figuratif, et les effets de perspective n'en constituent qu'un aspect particulier; la convergence des parallèles est déjà présente à l'époque romaine, en particulier sous la forme d'une "perspective en arêtes de poisson" dans laquelle différents points de fuite sont alignés sur l'axe vertical de la représentation (dessin 4.6, d'après une fresque murale représentant l'intérieur d'un édifice). Un autre exemple, médiéval celui-là, que nous avons découvert dans la Bible de Naples, nous semble résumer de façon lapidaire le conflit voir/savoir (dessin 4.7):

a) le "voir": sur le lit qui est représenté, la tête et le pied sont figurés convergents (aspect trapézoïdal).

b) le "savoir": la couverture qui recouvre le lit est décorée de bandes

parallèles, qui sont représentées par des bandes parallèles.

c) le conflit: il se trouve au pied du lit, que vient rencontrer la bande de droite de la couverture qui lui est parallèle.

On pourrait poursuivre ainsi, et multiplier les exemples (Byzance, Orient, Amérique précolombienne...) d'expressions graphiques dans lesquelles l'accent n'est pas mis uniquement sur le côté perspectif de la représentation, contrairement aux pratiques de l'Europe à l'époque classique... Au fait, la perspective linéaire fut-elle bien alors "le" moyen de représenter l'espace? En ce qui concerne l'art, cela est sans doute vrai, au moins dans le principe. Mais en se penchant par exemple sur les planches de l'Encyclopédie, dans le but de rechercher les types de projection utilisées, on peut s'apercevoir que, dans cet ouvrage didactique, cohabitent différents systèmes, et en particulier:

- la perspective linéaire, bien sûr (dessin 4.8) (et encore! voir Appendice 8: on utilise les règles de la perspective grosso modo, pour les effets les plus visibles; procédé qui est encore utilisé de nos jours: voir Appendice 7);

- la perspective cavalière (dessin 4.9); ou, plus fréquemment, une perspective "pseudo-cavalière", qui est en fait une perspective linéaire dans laquelle le point de vue, sans pourtant être à l'infini, est rejeté "très loin" (nous en avons rencontré une version "abâtardie" au Chapitre 2, utilisée dans certains manuels pour donner une illusion de perspective).

- les vues et les sections (dessin 4.10; "humanisé" par le petit personnage surajouté);

- une projection parallèle oblique sur un plan horizontal (dessin 4.11), dont les projetantes sont inclinées à 45° (dessin 4.12).

(N.B.: Ce dernier type de projection présente l'avantage de représenter en "vraie grandeur", non seulement les plans horizontaux, mais aussi les plans

verticaux orthogonaux à ceux qui contiennent la direction de projection, combinant ainsi plan et élévation, mais donnant comme effet pervers une impression de "rabattement", procédé étrange visuellement mais projectivement correct.)

4- LES APPORTS SCIENTIFIQUES RÉCENTS :

On peut associer, au pôle du voir, la notion d'image perceptive (immédiate, perçue directement par les organes sensoriels), tandis qu'au pôle du savoir sera associée la notion d'image mentale (différée, faisant intervenir la mémoire de l'individu). Comme le suggère Jean BERNARD, nous pouvons qualifier cette image mentale de "potentielle" (BERNARD 1987, p.93): "l'adjectif "potentiel", trop souvent galvaudé, peut être ici employé avec ses deux sens: le sens logique, qui vient d'Aristote, ce qui est virtuel, opposé à ce qui est effectif; le sens chirurgical, qui, lui, vient d'Ambroise Paré, ce qui est retardé, différé (l'action des cautères caustiques), opposé à ce qui est immédiat (l'action du fer rouge)."

Deux questions, en particulier, se posent alors: l'"image mentale" est-elle une réalité? Et, si oui, qu'est-elle? Cette notion remonte, sinon à "la plus haute antiquité", du moins à Aristote, qui la comparait à l'empreinte laissée par un sceau sur une tablette de cire. On s'y est intéressé jusqu'à la fin du siècle dernier (Locke, Hume, Condillac, Taine, Binet,...); mais, au début du siècle, les behavioristes prennent le parti de refuser "tous les termes subjectifs comme sensation, perception, image" (WATSON 1913): exit l'image mentale. Récemment cependant, des recherches ont de nouveau été entreprises sur ce sujet, avec succès (voir en particulier DENIS 1979). Entre autres, SHEPARD a travaillé sur des dessins d'assemblages de cubes, dont il fallait déterminer s'ils étaient ou non identiques, à une

rotation près. Il a montré que "la détermination de l'identité des formes (est) comme une sorte de rotation mentale dans l'espace à trois dimensions qui s'effectue avec une vitesse d'environ 60° par seconde" (SHEPARD 1978). KOSSLYN, lui, s'est intéressé à l'exploration mentale de plans et de cartes, et a montré que la durée de cette exploration était proportionnelle aux distances réelles sur la carte (KOSSLYN 1980). Les expériences qui sont actuellement menées conduisent donc à des mesures, et sont reproductibles d'un individu à l'autre; comme le dit Jean-Pierre CHANGEUX: "la matérialité des images mentales ne peut être mise en doute" (CHANGEUX 1983, p.164).

Mais, maintenant que nous savons que les images mentales existent, en quoi consistent-elles? Au contraire des percepts, qui ont lieu en présence de l'objet, les images mentales mettent en oeuvre la mémoire. D'autre part, elles se rattachent plutôt aux perceptions qu'aux sensations (rappelons qu'une même sensation visuelle (voir par exemple les dessins 4.13 et 4.14, ce dernier d'après BORSELLINO et al. 1986, p.83) peut donner lieu à diverses perceptions, à chacune desquelles est attaché un sens différent (Dessin 4.13: vase, ou profils? Dessin 4.14: souris, ou visage?). J.-P. CHANGEUX émet l'hypothèse d'une parenté neuronale entre le percept, le concept et l'image mentale: "l'hypothèse adoptée ici est que percept, image de mémoire et concept constituent des formes ou des états divers d'unités matérielles de représentation mentale que nous regroupons sous le terme général d'"objets mentaux"" (CHANGEUX 1983, p.168). Il distingue:

- 1) le percept primaire, objet mental déterminé par "l'interaction avec le monde extérieur";
- 2) l'image, dont l'évocation ne requiert pas cette interaction;
- 3) le concept, qui ressemble à l'image mais ne comporte qu'une "faible composante sensorielle, voire pas du tout". Le concept est donc obtenu à partir de l'image par "élagage" de la composante sensorielle, et aussi par

"enrichissement", dû à sa combinaison avec d'autres objets de mémoire; mais tous deux ressortissent cependant à la même catégorie.

Notons d'ailleurs que le mot "vision", entre autres acceptions, en possède deux qui se rattachent, l'une au percept, l'autre à l'image. Ainsi trouvons-nous, dans le Petit Robert (ROBERT et al. 1973):

"I 1° Perception du monde extérieur par les organes de la vue; mécanisme physiologique par lequel les radiations lumineuses donnent naissance à des sensations.(...)"

II 4° (XIXe). Image mentale.(...)"

La première de ces deux "définitions" -quoique amalgamant sensation et perception- ne concerne rien d'autre que l'aspect immédiat de la vision. Quant à la seconde, sa concision est suffisamment éloquente pour nous dispenser d'en dire plus...En outre, le lien existant entre l'image mentale et le "pôle cognitif" est manifeste dans la définition première du mot "connaître", extraite du même ouvrage:

"Avoir présent à l'esprit un objet réel ou vrai (concret ou abstrait; physique ou mental); être capable de former l'idée, le concept, l'image de."

Pour CHANGEUX, la reconnaissance des formes se fonde sur la reconnaissance d'une "isomorphie" entre le percept et l'image: "l'épreuve de la réalité consiste en la comparaison d'un concept ou d'une image avec un percept. Le test pourra être réalisé par l'entrée "en résonance", ou au contraire "en dissonance", de deux assemblées de neurones confrontées. La résonance se manifestera par une potentialisation d'activité, la dissonance par l'extinction de celle-ci. La sélection du concept "résonnant", adéquat au réel, donc "vrai", pourra alors en résulter" (CHANGEUX 1983, p.176).

On en arrive à la question de savoir comment se fait cette "reconnaissance" du percept. Maurice REUCHLIN, dans son ouvrage de synthèse sur la psychologie, résume ainsi la situation: "la sélection et la

construction perceptives fonctionnent normalement de façon inconsciente et à une échelle de temps excluant toute possibilité de raisonnement explicite. On peut donc parler de mécanismes, d'automatismes perceptifs. L'origine, innée ou acquise, de ces mécanismes a fait depuis longtemps l'objet de débats entre "nativistes" et "empiristes". Il paraît acquis à l'heure actuelle que certains de ces mécanismes sont appris, construits pendant la vie du sujet particulier chez lequel on les observe (ontogenèse), et que d'autres sont "précablés", inscrits héréditairement dans le système nerveux de l'espèce à laquelle l'organisme observé appartient...(phylogenèse)" (REUCHLIN 1978, p.82).

A cette dualité classique inné/acquis semble s'ajouter, comme en témoignent des travaux récents, un autre type d'opposition, qui concerne l'apprentissage. En effet des neuropsychologues américains, travaillant sur des singes (MISHKIN et APPENZELLER 1987, pp.26-36), ont récemment mis en évidence l'existence dans le cerveau de deux grands types de circuits neuronaux, l'un ayant son origine dans l'amygdale et l'hippocampe (structures de la face interne du lobe temporal), et l'autre dans le striatum (situé dans le cerveau antérieur). Ces circuits correspondraient respectivement, selon eux, à deux types d'apprentissage:

- l'un, de type cognitif, correspondant à la mémoire;
- le second correspondant à ce que MISHKIN et APPENZELLER nomment l'"habitude": "nous appelons ce type d'apprentissage, l'habitude. Ce n'est pas un mécanisme cognitif, car il n'est pas fondé sur un savoir, ni sur des souvenirs (en tant qu'entités mentales indépendantes), mais sur des connexions automatiques entre un stimulus et une réponse". L'habitude et la mémoire sont donc bien de nature différente, et MISHKIN et APPENZELLER rappellent que "des personnes amnésiques -au point qu'elles ne reconnaissent pas un individu vu quelques minutes auparavant- sont encore capables d'apprendre". De plus, selon

eux, le type d'apprentissage correspondant à l'habitude serait plus primitif que l'autre: "ainsi, les jeunes singes réussissent aussi bien que les adultes les tests de formation des habitudes, alors qu'ils obtiennent des scores médiocres dans les tests de mémoire". Les auteurs font également remarquer que, si cette théorie se confirmait, elle aurait, entre autres mérites, celui de réconcilier les psychologues behavioristes et cognitifs, puisque l'apprentissage reposerait sur deux systèmes différents: "le comportement serait une combinaison de réactions automatiques à des stimuli, et d'actions guidées par la connaissance et la prévision". Et de conclure: "Comment la mémoire et l'habitude interagissent-elles dans le cerveau adulte? (...) Il est probable que la plupart des types d'apprentissage reposent sur les deux systèmes, mais il est clair que la mémoire cognitive et les habitudes non cognitives sont souvent contradictoires". Même s'il faut se montrer prudent sur le transfert du singe à l'homme des processus d'apprentissage (la compréhension ne serait-elle que "mémoire"?), cette théorie -même incomplète- n'est pas sans intérêt.

Si nous rapprochons maintenant les deux théories évoquées de nos propres hypothèses, nous voyons que le "pôle du voir" correspond au percept et à l'habitude, tandis que le "pôle du savoir" correspond à l'image mentale, au concept et à la mémoire. Ces deux "pôles", quoique souvent en concurrence, ne sont donc pas forcément opposés, puisque l'image mentale se forme à partir du percept, et que le percept, en retour, est influencé par des images mentales.

Finalement, on peut résumer ce qui précède dans un tableau tel que le suivant:

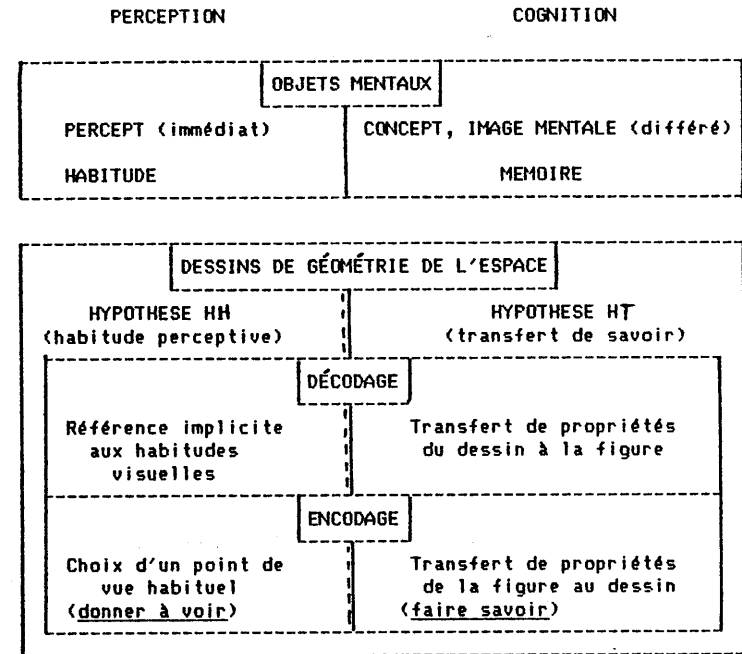


TABLEAU 7

N.B.: Dans ce tableau, la ligne de séparation entre les parties gauche et droite (c'est-à-dire perceptive et cognitive) est en partie double: le trait continu, à droite, se double à gauche d'une ligne ponctuée. Ceci est destiné à représenter notre incertitude concernant l'hypothèse HI (analogie avec les semi-conducteurs, en électronique, ou les membranes semi-perméables, en biologie, et analogie graphique avec la double ligne blanche au milieu de la chaussée).

5- DIRECTIONS PRIVILÉGIÉES :

On l'a déjà remarqué dans le Chapitre 2, et on le verra amplement dans la suite, aussi bien l'encodage que le décodage des dessins de géométrie

font apparaître une très forte influence des directions "horizontale" et "verticale" (ces mots étant ici employés au sens conventionnel, en référence à la feuille de papier). Cette attirance très forte exercée par l'horizontale et la verticale est-elle due à un "effet de bord", ou correspond-elle à une volonté de se référer à un repère particulier de l'espace, lié à l'individu (verticale + horizontale frontale, complétées par une autre horizontale)? Une expérience menée par PIAGET et INHELDER tend à montrer qu'apparaît tout d'abord l'effet de bord, et que le jeune enfant éprouve, au début, de grandes difficultés à construire (sur une table, à l'aide d'allumettes), une ligne droite qui ne soit pas parallèle au bord de cette table: "Au cours du stade II (de 4 à 7 ans environ) le sujet construit avec plus ou moins d'aisance la ligne droite parallèle au bord de la table, mais il échoue à la reproduire lorsque la ligne fait un angle avec le côté le plus voisin de la table: durant le sous-stade IIA (jusque vers 6 ans), il y a même impossibilité pour l'enfant à se libérer des suggestions perceptives exercées par les bords" (PIAGET et INHELDER 1947, p.184). Cet "effet de bord" peut également se produire avec d'autres éléments qu'un bord, comme dans le cas où "la droite à imaginer représentativement et à construire effectivement se trouve en conflit avec les droites ou les courbes perçues dans le voisinage" (PIAGET et INHELDER 1947, p.191).

Les travaux de Lelis PAEZ-SANCHEZ tendent à montrer que la référence aux directions horizontale et verticale semble apparaître plus tôt chez l'enfant (vers 6-7 ans) que ne l'indiquent PIAGET et INHELDER (vers 8-9 ans). D'autre part, la genèse même de la notion de droite lui paraît liée à ces "directions dominantes" (expériences dans lesquelles elle fait tracer des droites sur des feuilles à contours irréguliers): "il nous semble évident que les enfants perçoivent notre ligne oblique comme une droite ("une ligne"), mais leur investissement conceptuel dans le mot "droite" est fondamentalement

associé aux directions fondamentales dans leur espace graphique, que nous appellerons dorénavant directions dominantes (c'est-à-dire direction horizontale et direction verticale)" (PAEZ-SANCHEZ 1980, p.219). Et de conclure: "le mot "droite" a pour l'enfant une charge sémantique intégrée par des sens divers où prédomine celui qui associe une telle expression aux directions que nous avons appelées dominantes (...) Un tel sens trouve peut-être son origine dans des motifs d'ordre moteur, kinesthésique et/ou perceptif. Ce sens privilégié serait aussi induit par les habitudes scolaires (lecture et écriture)" (PAEZ-SANCHEZ 1980, p.238). Nous pensons qu'il est effectivement tout à fait vraisemblable que, chez les adolescents et les adultes tout au moins, les deux phénomènes interviennent tous deux (de façon généralement inconsciente), tantôt en conjugaison (d'où l'unanimité pour l'horizontale), tantôt en opposition (d'où la diversité observée pour les obliques). Et nous en donnerons une interprétation dans le cas particulier des dessins de géométrie de l'espace (transfert de propriété et habitude visuelle).

Notre système de référence étant ainsi explicité, nous allons commencer par voir comment il peut s'appliquer à l'étude de l'interprétation spatiale des dessins de géométrie, dans le cas très élémentaire du dessin de plan.

CHAPITRE 5:

INTERPRÉTATION SPATIALE DE "RECTANGLES EN PERSPECTIVE".

"Chaque être humain connaît une frange d'incertitude quant aux messages qu'il émet; et nous avons tous besoin, en dernière analyse, de voir comment sont reçus nos messages pour savoir ce qu'ils étaient."

Gregory BATESON (1981).

Nous l'avons vu, dans les dessins usuels de la géométrie de l'espace un plan se représente par un parallélogramme. Plus précisément, ce parallélogramme est -implicitement- l'image, dans une projection parallèle, d'un rectangle inclus dans le plan considéré (l'étude des manuels nous l'a confirmé). En outre, le plus souvent, deux des côtés du parallélogramme sont, soit "horizontaux" (c'est-à-dire parallèles aux bords inférieur et supérieur de la feuille de papier, support du dessin), soit "verticaux" (c'est-à-dire parallèles aux bords droit et gauche de cette feuille); tout au moins en est-il ainsi dans la grande majorité des dessins des manuels, comme nous l'avons constaté au Chapitre 2. Or, il existe une infinité de projections parallèles dans lesquelles un parallélogramme donné est l'image d'un rectangle (le problème se ramène en fait à celui de la recherche d'une projection et de deux vecteurs orthogonaux de l'espace dont les projetés sont deux vecteurs donnés; voir Appendice 2); d'où une totale indétermination (théorique) de la direction du plan de ce rectangle. Il s'agit d'ailleurs là d'une situation banale pour les phénomènes visuels: "la lecture de la représentation plane d'un objet supposé tridimensionnel ne s'impose pas d'elle-même" (LA VILLETTE 1987); ou encore: "vous voyez rarement les choses telles qu'elles sont, vous voyez des apparences dont, par toute une suite de déductions, vous extrayez ce que vous croyez être la nature réelle" (LÉVY-LEBLOND 1983, p.64). Ou enfin, pour résumer: "percevoir, c'est inférer, c'est faire une hypothèse" (IMBERT

1983, p.188).

Un problème n'est peut-être donc pas totalement dénué d'intérêt: celui du "décodage" de ce type de représentation. Autrement dit: Comment les élèves restituent-ils une troisième dimension dans ces dessins plans? Nous avons par conséquent conçu le test perceptif dont il est question ici, dans le but de voir si les élèves de lycée attribuaient à certains "plans dessinés" une orientation spatiale particulière (horizontale, verticale, oblique) et, dans le cas d'une réponse positive, de tenter de préciser quels pourraient être les éléments du dessin qui déterminent leur choix. Il s'agit en somme d'étudier sur quelles bases peut s'établir une connivence entre l'émetteur et le récepteur.

Certes, un dessin de géométrie de l'espace ne se réduit pas, sauf exception, à la seule représentation d'un plan, mais cet élément est nettement le plus fréquemment représenté, et de plus il occupe par nature beaucoup de place dans le dessin. On peut donc penser a priori que le "dessin de plan" constitue selon toute vraisemblance un facteur déterminant de l'interprétation spatiale de l'ensemble du dessin, même si cette interprétation est également influencée -comme nous le verrons au chapitre suivant- par d'autres éléments de ce dessin.

1- NOS HYPOTHÈSES:

(N.B.: Les hypothèses que nous faisons ici ne sont pas des a priori; elles se sont en fait dégagées des diverses études que nous avons entreprises au cours de cette recherche et se rattachent à notre explication générale des phénomènes liés à la représentation de l'espace ("Voir et savoir", Chapitre 4). En particulier, l'hypothèse HT, très nette dès le début de notre travail, est également apparue à l'examen des résultats du test de complètement de

trièdres (voir chapitre suivant). Quant à l'hypothèse HH, elle nous a été nécessaire pour compléter l'interprétation des résultats du présent test, à laquelle HT seule ne suffisait pas. Comme on le verra, à elles deux HH et HT permettent une interprétation satisfaisante de l'ensemble des résultats observés, non seulement pour le présent test, mais pour l'ensemble des enquêtes que nous avons menées.)

Nous faisons les deux hypothèses suivantes, relatives à l'interprétation de l'orientation spatiale d'un objet. Nous pensons que cette interprétation se fonde essentiellement sur:

(HH) une référence plus ou moins implicite à un point de vue "habituel" (règle d'habitude perceptive); cette hypothèse est donc directement liée à la préservation du "voir".

(HT) un transfert plus ou moins implicite à l'objet représenté de certaines propriétés du dessin (règle de transfert); nous en avons déjà parlé, et aurons encore l'occasion d'y revenir souvent. Cette hypothèse se rattache bien entendu à la préservation du "savoir".

De plus, en ce qui concerne plus particulièrement le "dessin de plan", nous faisons l'hypothèse annexe suivante:

(HR) le sujet suppose le rectangle dessiné de type "courant", c'est-à-dire non excessivement allongé selon une dimension.

(Cette dernière hypothèse, de nature psychologique, se réfère, elle aussi, à une habitude: un rectangle très allongé, même s'il répond typologiquement à la définition d'un rectangle, n'est pas mentalement catégorisé, donc ni perçu ni dénommé, comme tel; on parlera à son sujet de "bande", de "ruban", etc.).

Mais revenons à nos deux hypothèses principales:

1- L'existence d'habitudes perceptives est bien connue; on y a recours en particulier pour expliquer le phénomène d'"inversion du relief" (si l'on considère par exemple une photographie d'un paysage désertique vallonné, et qu'on la retourne tête en bas, ce qui était vu en relief est alors vu en creux, et inversement (voir par exemple le dessin 5.1, où la même image est présentée deux fois, la seconde après avoir subi une rotation d'un demi-tour); ceci est dû au fait que l'on suppose toujours implicitement que les objets sont éclairés par une lumière venant d'en haut). Autres exemples classiques: la chaise et la chambre d'Ames, illusions de nature projective destinées à faire voir ce qui n'est pas. Dans le premier cas, des tiges métalliques suspendues dans le vide donnent l'illusion, lorsque l'oeil se trouve en un point déterminé, de constituer une chaise; dans le second, "lorsque vous regardez à travers la fenêtre, cette pièce aux formes bizarres envoie à votre oeil la même image qu'une pièce ordinaire en forme de cube. Les pièces ayant habituellement une forme de cube, votre cerveau considère que celle-ci est une pièce banale. Mais la chambre aux illusions n'est pas un cube: le plancher est en pente abrupte, les horloges et les fenêtres sont de dimensions différentes, et le mur de gauche est beaucoup plus grand et plus éloigné que le mur de droite" (LA VILLETTE 1987).

En ce qui nous concerne plus particulièrement ici, (HH) se fonde sur la constatation que la plupart des (petits) objets que nous côtoyons sont, soit à notre niveau, soit à un niveau légèrement différent (et plus souvent inférieur que supérieur). A ce sujet, nous pouvons citer l'étude de VAN SOMMERS, à propos de "notre commerce visuel régulier avec les petits objets du monde": "the majority of such objects we see and interact with are below our line of sight.(...) Howard and Templeton discuss this issue of common perceptual experience and sum up by saying:"...there are more things that stick up than hang down" (VAN SOMMERS 1984, p.110).

(la majorité de ces objets que nous voyons et avec lesquels nous interagissons sont en dessous de notre ligne de vue.(...) HOWARD et TEMPLETON (1966) discutent cette question d'expérience perceptive commune et la résumant en disant: "...il y a davantage de choses qui se dressent que de choses qui pendent")

En accord avec cette remarque, nous faisons donc l'hypothèse que, dans la plupart des cas, le dessin d'un objet est, de façon plus ou moins implicite, supposé représenter cet objet vu d'un "point" situé, soit au même niveau que lui, soit légèrement au dessus (ceci sera d'ailleurs confirmé par les résultats des Chapitres 6, 7 et 8 en particulier). Remarquons que, dans un tel point de vue, une verticale est toujours sensiblement vue verticale, tandis qu'une horizontale sera vue de toutes les façons possibles (elle ne sera vue "horizontale" que si elle est frontale, c'est-à-dire dans un plan perpendiculaire à l'axe de visée). A titre d'exemples, nous donnons deux dessins (dessin 5.2, A et B), extraits d'une bande dessinée (PIERRET, 1987): le dessin 5.2A est relatif à un point de vue "habituel", et le dessin 5.2B à une vue "plongeante". On observera, sur ces deux dessins, les directions des représentations des horizontales et des verticales (nous aurons d'ailleurs l'occasion d'y revenir).

Dans l'hypothèse HH existe également une rétroaction, qui explique l'existence et le poids de la "tradition":

Pour qu'une communication soit aussi claire que possible, il est nécessaire qu'existe entre émetteur et récepteur une convivence qui, en particulier dans le cas présent, s'exercera au niveau graphique. Si l'on veut qu'un objet dessiné soit reconnu avec le maximum de chances possible, on a tout intérêt à le représenter dans une position habituelle, et selon un point de vue courant (typicité du "voir"). Comme le fait remarquer VAN SOMMERS: "It is a truism for any communicative system that its properties evolve as a compromise between economy of production effort in the sender and economy of perceptual effort in the receiver" (VAN SOMMERS 1984, p.25)

(C'est un truisme de tout système de communication que ses propriétés évoluent vers un compromis entre l'économie de l'effort de production de l'émetteur et l'économie de l'effort perceptif du récepteur)

Et, plus loin: "the drawings are to some degrees codified versions of the objects they represent, or at least depend on recognition of shared experiences" (VAN SOMMERS 1984, p.123)

(les dessins sont, jusqu'à un certain point, des versions codifiées des objets qu'ils représentent, ou au moins reposent sur la reconnaissance d'expériences partagées)

A la limite, on en arrive ainsi aux stéréotypes qui, s'ils facilitent la communication, risquent en revanche de constituer un carcan dont il devient difficile de s'affranchir.

2- (HT) suppose que la "lecture" du dessin d'un objet, en ce qui concerne son orientation spatiale, transfère certaines propriétés du dessin à l'objet lui-même, et cela même s'il n'existe aucune raison objective de le faire. C'est ainsi, par exemple, que si deux côtés du parallélogramme représentant un rectangle sont horizontaux, le "lecteur" du dessin aura tendance à "voir" le rectangle horizontal (alors que, comme nous venons de le dire, le dessin d'une horizontale peut avoir une orientation quelconque et que, inversement, une oblique peut parfaitement être dessinée "horizontalement", même d'un point de vue "habituel"). Ce principe repose sur un "contrat" tacite entre l'auteur du dessin et son lecteur, contrat qui est à la base de tout système de communication: le récepteur, a priori (sauf s'il a des raisons précises pour penser autrement), suppose que l'émetteur ne cherche pas à le tromper, et qu'en conséquence il a choisi une représentation "typique" de la situation, ce qui l'a conduit à transférer lui-même, sur le dessin, certaines propriétés de l'objet représenté (il ne s'agit pas pas là d'une simple vue de l'esprit: nous verrons au Chapitre 7 que, placés en situation d'émetteur, les élèves effectuent bien de tels transferts). En ce qui concerne la règle dont nous

parlons ici, on voit immédiatement que le danger en est que tout élément graphique risque d'être considéré comme étant signifiant, même si telle n'a pas été l'intention de l'émetteur.

Une fois considéré comme signifiant, il reste à déterminer la signification de cet élément. Un autre principe de la communication est que, pour être efficace, le sens doit être facilement accessible à partir du signifiant. Il s'ensuit qu'un segment ayant, sur la feuille, une orientation particulière (ici, "horizontale") aura de fortes chances d'être interprété comme l'image d'un segment ayant cette même orientation dans l'espace, et cela d'autant plus que son "impact visuel", c'est-à-dire son importance matérielle dans le dessin, sera plus grande. Les principales conséquences de la présente règle, concernant les représentations de rectangles en perspective, seront alors les suivantes:

(HT.1) le fait que deux côtés du parallélogramme soient "horizontaux" incite à "voir" le rectangle comme horizontal.

(HT.2) le fait que deux côtés du parallélogramme soient "verticaux" incite à "voir" le rectangle comme vertical.

(HT.3) le fait que deux côtés du parallélogramme soient "obliques" incite à "voir" le rectangle comme oblique.

Remarquons pour terminer que les hypothèses HH et HT, tantôt se renforceront l'une l'autre, tantôt s'opposeront. En outre, les sous-hypothèses HT.1 et HT.2 d'une part, HT.3 d'autre part, entreront en conflit dans la plupart des représentations. Cela devrait nous permettre de voir alors quelles sont celles dont l'influence est prépondérante; a priori, étant donné la grande prégnance des directions horizontale et verticale, on peut s'attendre à ce que HT.3 cède normalement le pas à HT.1 et HT.2. D'autre part, si notre hypothèse de transfert est correcte, ce transfert doit normalement être d'autant plus important que la longueur relative des

côtés considérés est plus grande.

2- LE TEST (PREMIÈRE PARTIE):

Nous avons présenté aux élèves de quatre classes du lycée Michelet de Vanves (92) -les Premières S1 et S4, ainsi que les Terminales D1 et D2- des dessins de "rectangles en perspective", en leur demandant comment ils se représentaient l'orientation de ces rectangles dans l'espace. Plus précisément, leur professeur leur a distribué une feuille de papier sur laquelle étaient représentés 20 parallélogrammes, et leur a tenu le discours suivant:

"Ces dessins représentent des rectangles, vus en perspective. La feuille étant placée normalement devant vous, vous indiquerez sous chaque dessin:

- la lettre H si le rectangle dessiné vous paraît être horizontal;
- la lettre V si le rectangle vous paraît être vertical;
- la lettre O dans les autres cas (rectangle ni horizontal, ni vertical).

Si vous hésitez entre deux réponses, indiquez-les toutes les deux, dans l'ordre de vos préférences.

N.B.: il s'agit uniquement d'une question de "goût" personnel."

Remarques:

1) Le fait que, sur la feuille, les dessins voisinent les uns avec les autres n'a pas, selon nous, causé de "contamination visuelle" de l'un à l'autre. En effet, d'une part, l'esprit parvient sans peine à isoler chacun d'entre eux de son "contexte" (d'autant plus que, du fait de l'étroitesse du champ de vision nette, lorsque l'on fixe des yeux un parallélogramme, les autres deviennent flous), et d'autre part il est impossible de donner une

interprétation spatiale globalement cohérente de plusieurs représentations voisines, du fait de l'absence de lien entre elles: les dessins sont disposés aléatoirement sur la feuille.

2) Le sens du mot "oblique" tel que nous l'utilisons dans ce chapitre se définit par opposition à ceux de "vertical" et d'"horizontal". Ceci correspond, empressons-nous de le dire, à l'acception courante de ce terme, utilisé de façon absolue. Cependant, les dictionnaires de langue usuels définissent essentiellement le mot "oblique" dans son acception relative, c'est-à-dire, en fait, "oblique par rapport à...". On trouve par exemple, dans le Robert (ROBERT et al.1973):

"1° Qui s'écarte de la verticale, qui s'écarte de la perpendiculaire (à une ligne, un plan donnés ou supposés) (...).

Spécialt. Géom. Ligne oblique, ou substant. une oblique, droite joignant un point A à un point d'une droite BC autre que le pied de la perpendiculaire menée de A à cette droite. La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ..."

Le fait que l'on utilise couramment, en mathématiques, le mot "oblique" (subst. ou adj.) dans un sens absolu (sans référence explicite à un autre être géométrique) ne peut s'expliquer que par l'existence effective d'une référence implicite, commune à tous, qui est celle d'une base "canonique", base orthogonale du plan (resp. de l'espace) dont l'une des directions est précisément verticale (voir la définition ci-dessus), l'autre (resp. les autres) étant horizontale(s).. C'est ainsi, par exemple, qu'une asymptote oblique à une courbe est une asymptote qui n'est ni horizontale, ni verticale.

Cette conception "en négatif" de l'obliquité (qui se reflète dans la façon dont la tâche relative au test avait été formulée) incite à penser que -tout au moins dans une certaine mesure- les élèves, en face d'un "dessin de

plan", cherchent d'abord, plus ou moins consciemment, à se le représenter horizontal ou vertical, et que ce n'est que lorsqu'ils n'y arrivent pas (ou lorsque le résultat ne leur semble pas satisfaisant) qu'ils "se rabattent", en quelque sorte, sur la troisième possibilité (oblique). La question de savoir si une autre formulation aurait pu conduire à des résultats différents ne se pose pas dans le cas présent, puisque nous n'avons pas utilisé le mot "oblique" dans la consigne, afin de ne pas risquer que les élèves ne lui donnent une signification erronée (l'obliquité d'un plan de l'espace n'étant pas, pensons-nous, une notion qui leur est familière).

Le premier problème qui s'est posé à nous a été de déterminer les parallélogrammes que nous ferions figurer sur la feuille de test, et pour cela de déterminer des variables qui nous semblaient pertinentes, eu égard au problème que nous nous posions. A première vue, deux caractéristiques permettent de discriminer un parallélogramme dans le plan:

- l'orientation des côtés (avec le rôle particulier de l'horizontale et de la verticale);
- le rapport des longueurs de deux côtés consécutifs.

Partant de cette constatation, nous avons finalement tenu compte des critères suivants:

- latéralisation: chaque type de représentation existe en deux versions, une version "droite" et une version "gauche", symétriques par rapport à la verticale. Par définition, nous appelons "droite" la version dans laquelle les côtés obliques (ou les plus longs, si les quatre côtés sont obliques) "montent vers la droite" (comme les fuyantes dans les perspectives cavalières usuelles). Voir exemples sur le dessin 5.3.
- angle aigu des côtés: il peut être "petit" (voisin de 30°) ou "grand" (voisin de 70°).

- présence ou absence de parallélisme de certains côtés du parallélogramme avec l'un des bords de la feuille. Dans le cas d'une réponse positive, ces côtés peuvent être:

- horizontaux, ou verticaux;
- les plus longs, ou les plus courts.

Ceci correspond finalement à l'organigramme du dessin 5.4 (toutes les branches de l'arborescence n'ont pas été indiquées), où l'on voit qu'il se présente 20 possibilités au total. Comme nous l'avons dit plus haut, ces 20 possibilités ont été réparties aléatoirement sur la feuille de test, afin d'éviter d'éventuelles "contaminations" lors de la lecture, par exemple entre une version "droite" et une version "gauche". L'expérience a montré qu'une telle contamination semble peu probable, des questions posées après la passation ont mis en évidence le fait que nombre d'élèves ne s'étaient pas aperçus de l'aspect "systématique" des dessins, aspect camouflé par leur répartition et leur nombre relativement important (voir feuille de test en Annexe 2).

3- LES RÉSULTATS:

Les résultats du test, où l'on a distingué les classes de Première (63 élèves) et celles de Terminale (49 élèves), sont indiqués sur le dessin 5.5 (les classes de Première sont notées 1S, et les Terminales TD): chaque triplet de nombres indique les pourcentages respectifs (arrondis à l'unité la plus proche) d'élèves ayant "vu" le rectangle correspondant comme étant

- horizontal
- vertical
- oblique.

Nous avons de plus visualisé les résultats sur les deux graphiques

triangulaires du dessin 5.6. Sur ces graphiques, le sommet "vertical" est le sommet supérieur, le sommet "horizontal" est le sommet inférieur droit, et le sommet "oblique" le sommet inférieur gauche.

N.B.1: Dans le cas de réponse double, nous n'avons tenu compte, ici, que du "premier choix" de l'élève. Un relevé du nombre de réponses doubles pour chaque représentation va dans le même sens que le relevé général, la plus grande fréquence de telles réponses correspondant aux représentations les plus "ambiguës".

N.B.2: Les numéros figurant dans le dessin 5.6 renvoient à ceux du dessin 5.5: les numéros "primes" correspondent à la latéralisation que nous avons appelée "gauche". Ce sont ces numéros que nous utiliserons dans la suite.

Nous pouvons constater, d'après les graphiques du dessin 5.6, que la latéralisation ne semble avoir d'influence notable sur la "lecture" des dessins que dans certains cas très limités:

4/4': le consensus est nettement plus fort sur 4 que sur 4'.

10/10': la latéralisation gauche 10' est vue plus souvent oblique que la latéralisation droite 10.

En ce qui concerne les autres cas, les résultats pour les versions "droite" et "gauche" sont comparables.

Quant à la comparaison entre les deux niveaux (Première S et Terminale D), le simple examen des deux graphiques triangulaires correspondants montre une grande similarité des résultats, ceux-ci étant peut-être plus tranchés chez les élèves de Terminale. Cette similarité constitue un indice en faveur de la "consistance" des résultats que nous allons exposer ci-après, et nous permet de regrouper les réponses de tous les élèves (c'est-à-dire 112) ayant été soumis au test. Dans les cas où des différences sont apparues, nous le signalerons et tenterons de les expliquer.

L'ensemble des réponses a été rassemblé dans le tableau ci-dessous, et a été visualisé sur le diagramme triangulaire du dessin 5.7, dans lequel les conventions sont les mêmes que précédemment.

N° dessin	%H	%V	%O
1	96	1	3
2	2	91	7
3	1	81	18
4	81	1	18
5	6	69	25
6	2	29	69
7	2	52	46
8	50	6	44
9	50	23	27
10	21	46	33

N° dessin	%H	%V	%O
1'	94	3	3
2'	3	88	9
3'	2	79	19
4'	64	4	32
5'	10	64	26
6'	5	24	71
7'	3	43	54
8'	48	4	48
9'	45	28	27
10'	13	35	52

TABLEAU 8

Ces représentations peuvent se répartir en trois grands groupes:

Groupe A: large consensus en faveur d'une orientation particulière.

Groupe B: large consensus pour rejeter une orientation particulière.

Groupe C: pas de consensus large.

En effet, étant donné un parallélogramme, les interprétations spatiales des élèves peuvent se porter toutes sur un même pôle (groupe A), ou sur deux pôles, à l'exclusion du troisième (groupe B), ou enfin de façon non négligeable sur l'ensemble des trois pôles (groupe C).

Reprenons plus en détail ces trois subdivisions:

GRUPE A (dessin 5.8):

Il s'agit donc ici des représentations pour lesquelles une grande majorité des élèves (au moins 80%) a la même interprétation spatiale "positive". Sur le diagramme triangulaire, ceci correspondra par conséquent aux points voisins d'un des sommets du triangle. On trouve dans ce groupe:

- les dessins 1/1', ainsi que 4: le rectangle est vu horizontal.
- les dessins 2/2', ainsi que 3/3': le rectangle est vu vertical.

On remarquera l'absence de consensus large en faveur d'un rectangle oblique.

1) Les rectangles vus comme verticaux sont donc ceux dont les côtés les plus longs sont verticaux, quel que soit l'angle des côtés (mais un "grand" angle, c'est-à-dire qui correspond à des petits côtés proches de l'horizontale, favorise une lecture dans ce sens). On peut noter que, dans ce cas, les hypothèses HH et HT (plus précisément HT.2) viennent se renforcer l'une l'autre. En effet:

a) nous avons déjà noté que, dans les points de vue "habituels", les verticales étaient vues comme sensiblement verticales (ce n'est que dans le cas de vue en plongée ou en contre-plongée que ceci peut se modifier notablement).

b) d'autre part, l'importance visuelle des grands côtés verticaux incite le lecteur à donner une valeur sémantique à cet élément du dessin, cette valeur étant bien entendu celle qui est le plus simplement associée à la propriété de la représentation, c'est-à-dire ici la verticalité.

2) Les rectangles qui sont vus comme horizontaux sont ceux qui ont deux côtés horizontaux et un angle des côtés petits, avec:

- une latéralisation quelconque si les côtés horizontaux sont les plus longs;

- une latéralisation "droite" dans le cas contraire.

On peut remarquer que ces résultats sont en accord avec notre hypothèse HT: des côtés horizontaux incitent à voir le rectangle comme horizontal lorsque les cotés obliques ont une direction voisine de l'horizontale. Cette restriction peut être interprétée comme liée à l'hypothèse HH: un "petit" angle des côtés "écrase" le rectangle sur l'horizontale, et donne l'illusion d'une vue plus rasante. L'axe de visée étant supposé sub-horizontale (HH), l'interprétation "horizontale" du rectangle, déjà induite par la présence de côtés horizontaux (HT), s'en trouve confortée.

Remarquons d'ailleurs, en ce qui concerne HT, que les résultats sont conformes aux prévisions que l'on pouvait faire: le rectangle, pour un angle donné, est vu d'autant plus horizontal que le rapport de longueurs des côtés est favorable aux côtés horizontaux.

Quant à la différence des résultats liée à la latéralisation dans le cas de 4/4', nous n'avons, pour l'instant, pas d'explication à y apporter.

GROUPE B (dessin 5.9):

On peut caractériser les éléments de ce groupe par:

- un consensus moins net en faveur d'une interprétation particulière (entre 50 et 80%);
- l'existence d'un critère "négatif": le rectangle est vu par une grande majorité des sujets comme n'ayant pas telle orientation donnée (un élève sur 10 environ choisit cette interprétation).

Ce groupe peut d'ailleurs se subdiviser en deux:

- l'un (sous-groupe B1), dans lequel l'une des deux interprétations restant en lice est nettement majoritaire par rapport à l'autre (rapport des

fréquences au moins égal à 2);

- l'autre (sous-groupe B2), dans lequel aucune de ces deux interprétations ne domine nettement par rapport à l'autre (rapport des fréquences voisin de 1).

Voyons donc ce qu'il en est pour chacun de ces deux sous-groupes:

1) Sous-groupe B1:

On y trouve:

- 4': il s'agit, rappelons-le, de la version "gauche" de 4 qui, lui, était vu horizontal. Ici, le rectangle est interprété comme "non vertical", mais plutôt horizontal quand même (64% des sujets l'interprètent ainsi).

- 5/5': ici, le rectangle est vu comme "non horizontal", et plutôt vertical. La présence de côtés verticaux explique vraisemblablement cette interprétation (HT) puisque, lorsque les côtés verticaux sont les plus longs, l'angle des côtés étant le même (cas des dessins 2/2'), cette interprétation verticale est nettement majoritaire. Quant à l'interprétation "oblique", elle passe de 8 à 25% environ, en accord avec HT: le transfert est d'autant plus fort que les côtés correspondants sont relativement plus longs.

- 6/6': dans le cas présent, le rectangle est vu comme non horizontal, et plutôt oblique. On peut y voir, à priori, l'influence de HH (il faudrait une vue plongeante pour interpréter le dessin comme celui d'un rectangle horizontal), ainsi que de HT (transfert de l'obliquité des côtés).

2) Sous-groupe B2:

On y trouve:

- 7/7': le rectangle est vu comme "non horizontal". Ici, les interprétations "vertical" et "oblique" s'équilibrent à peu près: la première

peut être attribuée à la fois à HH et à HT (petits côtés verticaux), et la seconde à HT (transfert de l'obliquité des longs côtés).

- 8/8': le rectangle est vu comme "non vertical". Ce sont ici les interprétations "horizontal" et "oblique" qui s'équilibrent sensiblement: la première s'expliquant par HH, et la seconde par HT.

Remarquons que, dans les sous-groupes B1 et B2, on trouve des représentations qui ne diffèrent entre elles que par l'angle des côtés:

1) 5/5', par rapport à 7/7':

Dans les deux cas, la présence des côtés verticaux favorise l'interprétation du rectangle comme étant vertical (HT). De plus, un grand angle des côtés (c'est-à-dire avec des côtés obliques se rapprochant de l'horizontale) renforce cette interprétation. Ceci peut s'expliquer grâce à HH, car ce dernier cas correspond à une vue plus "frontale" (le rectangle est vu d'une direction située plus "de face"), donc plus habituelle: lorsque l'on regarde un objet précis, on essaie de se placer si possible en face de lui afin de mieux le voir. Ceci va dans le même sens que ce que nous avons pu observer dans le groupe A, pour 3/3' par rapport à 2/2' (voir dessin 5.10).

2) 6/6', par rapport à 8/8':

Ceci peut intriguer davantage: les dessins 6/6' sont vus comme "non horizontaux", tandis que les dessins 8/8' sont vus comme "non verticaux"!

Dans un cas comme dans l'autre, l'interprétation "oblique" numériquement importante (entre 44 et 71%) s'explique sans problème par HT (plus précisément, HT.3). L'interprétation des dessins 8/8' comme étant horizontaux s'explique, elle, par HH (rectangle horizontal vu légèrement de dessus); ceci ne s'applique pas à 6/6', qui nécessiterait un "point de vue" tout à fait particulier pour être interprété comme horizontal. Par contre,

l'interprétation verticale, dans ce cas, est plus satisfaisante, même si elle exige une vue plongeante (cas assez peu courant, mais cependant moins exceptionnel que le point de vue évoqué ci-dessus) (dessin 5.11). On pourra d'ailleurs se référer pour comparaison aux représentations des murs dans le dessin 5.2B.

GROUPE C (dessin 5.12):

Ce groupe se définit par opposition aux deux précédents: aucune des trois interprétations n'est nettement prédominante (moins de 50% pour chacune), et aucune n'est vraiment exclue (plus de 10% pour chacune).

Dans ce dernier groupe nous trouvons:

- 9/9': le rectangle est plutôt vu horizontal. Comparées à 1/1', ces deux représentations ne se distinguent que par l'angle des côtés. On peut en conclure que, lorsque les côtés les plus longs sont horizontaux, le plan a tendance à être vu horizontal (HT), et ce d'autant plus que la direction des côtés obliques est proche de l'horizontale. Ce résultat est tout à fait en accord avec notre hypothèse HH, puisque des côtés obliques proches de l'horizontale correspondent à un point de vue plus "bas", donc plus conforme aux habitudes visuelles.

- 10/10': ce qui rapproche ces deux représentations, c'est -outre le fait qu'il s'agit des deux versions, droite et gauche, d'un même type- le fait que le rectangle correspondant est plutôt vu comme "non horizontal", et ce, malgré la présence de petits côtés horizontaux. Ceci les oppose à 9/9', alors que la seule différence est la valeur du rapport des longueurs horizontal/oblique: un rapport supérieur à 1 fait voir le rectangle plutôt horizontal. Ceci les oppose également à 4/4', la différence étant cette fois que les côtés obliques sont plus redressés sur la verticale. Ici encore, nos

hypothèses peuvent rendre compte de ces résultats:

- HH: dans l'hypothèse d'horizontalité du rectangle, la vue serait plongeante dans le cas de 10/10', et non dans le cas de 4/4', ce qui explique la moindre attirance dans le cas de 10/10' (chute de plus de 50%);
- HT: le transfert est d'autant plus grand que les côtés correspondants sont relativement plus longs (chute d'environ 30% de l'interprétation horizontale entre 9/9' et 10/10').

On peut également noter qu'il semble que le transfert dû aux côtés horizontaux soit plus important que celui qui revient aux côtés obliques, ce qui est conforme à nos prévisions (HT.1 prime sur HT.3).

Tentons à présent de dégager de façon plus précise la hiérarchie des principes qui gouvernent l'interprétation, dans les deux principaux cas (les plus attestés, d'ailleurs, dans les manuels):

- parallélogrammes à côtés horizontaux;
- parallélogrammes à côtés verticaux.

A) Parallélogrammes à côtés horizontaux:

Les représentations correspondantes sont: 1/1', 4/4', 9/9' et 10/10'. Le diagramme triangulaire du dessin 5.7 nous permet de classer ces "bipoints" dans l'ordre 1-4-9-10, correspondant à une interprétation "de moins en moins horizontale". Ce qui conduit à hiérarchiser les caractéristiques de ces représentations comme suit:

- d'abord, l'angle des côtés obliques avec l'horizontale (plus cet angle est faible, plus l'horizontalité est assurée). Ceci, nous l'avons dit, est à mettre en rapport avec notre hypothèse HH (point de vue situé à peu près au niveau de l'objet, voir Appendice 6, premier cas);

- ensuite, le rapport des longueurs des côtés (oblique/horizontal): plus ce rapport est faible, plus l'horizontalité est assurée. Ceci se rattache à notre hypothèse HT, assortie du fait que HT.1 prime sur HT.3.

Nous aboutissons ainsi à l'organigramme du dessin 5.13, où A désigne l'angle des côtés obliques avec l'horizontale, et R le rapport des longueurs côtés obliques/côtés horizontaux.

On peut donc en conclure que c'est ici l'angle qui constitue la variable primordiale dans l'interprétation spatiale de la représentation; en d'autres termes, HH l'emporte ici sur HT.

B) Parallélogrammes à cotés verticaux:

Les représentations correspondantes sont: 2/2', 3/3', 5/5' et 7/7'. Le diagramme triangulaire du dessin 5.7 nous permet de classer ces "bipoints" dans l'ordre 2-3-5-7, correspondant à une interprétation "de moins en moins verticale". Ce qui conduit à hiérarchiser les caractéristiques de ces représentations comme suit:

- d'abord, le rapport des longueurs des côtés (oblique/vertical): plus il est faible, plus la verticalité est assurée. Ceci correspond bien sûr à notre hypothèse HT, assortie du fait que HT.2 prime sur HT.3;

- ensuite, l'angle des côtés obliques avec l'horizontale: plus cet angle est faible, plus la verticalité est assurée. Ceci, comme nous l'avons fait remarquer au passage, est à mettre en rapport avec notre hypothèse HH, des côtés obliques voisins de l'horizontale correspondant à une vue plus "frontale" du rectangle, dans la mesure où on lui suppose une forme usuelle (c'est-à-dire pas excessivement allongée dans une dimension, hypothèse HR).

Nous aboutissons ainsi à l'organigramme du dessin 5.14, où A désigne l'angle des côtés obliques avec l'horizontale, et R le rapport des

longueurs côtés obliques/côtés verticaux.

Conclusion: cette fois, au contraire de la fois précédente, c'est donc le rapport des longueurs des côtés qui est la variable prédominante dans l'interprétation spatiale de la représentation; en d'autres termes, HT l'emporte ici sur HH.

En définitive, et pour ce qui concerne les parallélogrammes dont certains côtés sont parallèles à un bord de la feuille, les deux hypothèses que nous avons faites au départ rendent compte de façon tout à fait satisfaisante des résultats obtenus: aucune ne peut, à elle seule, gouverner toutes les interprétations, mais la conjonction des deux permet d'expliquer l'ensemble des réponses données par les élèves. Du point de vue strictement morphologique, nous pouvons finalement conclure:

L'influence du parallélisme de certains côtés avec un bord de la feuille sur l'interprétation spatiale, de la représentation est d'autant plus forte que:

- a) les côtés concernés sont plus longs;
- b) l'angle des côtés obliques avec l'horizontale est plus faible.

On peut également remarquer que, comme prévu, HT.3 cède le pas à HT.1, ainsi qu'à HT.2: dans tous les cas où HT.3 est opposée à HT.1 ou à HT.2, ce sont celles-ci qui priment.

Quelles conclusions d'ordre didactique peut-on tirer de l'étude précédente?

Cette étude nous aura permis de repérer des types de dessins de plan qui, lorsque l'on voudra représenter des orientations particulières de ces plans dans l'espace (horizontaux ou verticaux), seront aussi peu ambiguës que possible, et seront interprétées de la même façon par la grande majorité

des élèves (il n'est pas ici question, rappelons-le, d'interprétation "correcte", puisque tout parallélogramme peut être considéré, et ce d'une infinité de façons, comme image d'un rectangle dans une perspective parallèle. Les critères que nous avons mis en évidence, pour être subjectifs, n'en sont pas moins forts, comme on a pu s'en rendre compte. Précisons notre pensée: il nous semble en effet souhaitable, si l'on veut que l'objet dessiné puisse aisément être imaginé dans l'espace, qu'il soit placé d'une façon précise par rapport à un repère spatial dont l'un des axes est vertical ("la loi de la pesanteur est dure, mais c'est la loi", chantait Georges BRASSENS). Ce qui précède nous indique donc des moyens pour parvenir à un tel résultat, au moins dans le cas des plans horizontaux et verticaux. Mais cela ne doit pas nous empêcher -au contraire- de préciser explicitement les conventions particulières que l'on choisit pour la représentation (par exemple: "Pour réaliser ce dessin, je supposerai que le plan P est horizontal, et qu'on le projette sur un plan vertical, deux des côtés du rectangle matérialisant P étant parallèles au plan de projection."). Le choix d'un dessin particulier pour le plan, quoique non nécessaire, viendra alors renforcer l'effet tridimensionnel de la représentation plane. Et, inversement, on évitera -tout au moins avec les élèves les plus jeunes- d'utiliser des représentations qui, tout en étant perspectivement correctes, les choquent. On y parviendra grâce à:

- l'utilisation de projections particulières;
- des orientations spatiales particulières des objets représentés.

P.S.1: A titre de comparaison, nous avons fait subir ce test à 63 enseignants de mathématiques, en stage de Statistiques à l'IREM Paris-7; les résultats en sont consignés dans le tableau ci-après, et visualisés sur le diagramme triangulaire du dessin 5.15.

N° Dessin	%H	%V	%O
1	98	0	2
2	0	94	6
3	0	95	5
4	73	2	25
5	3	40	57
6	2	14	84
7	2	54	44
8	43	1	56
9	81	5	14
10	33	16	51

N° dessin	%H	%V	%O
1'	97	0	3
2'	0	95	5
3'	2	92	6
4'	59	3	38
5'	10	44	46
6'	0	11	89
7'	2	46	52
8'	32	3	65
9'	75	5	20
10'	24	16	60

TABLEAU 9

On peut constater qu'il semble y avoir ici une certaine radicalisation des réponses, caractérisée en particulier par:

- le déplacement de 6/6' (qui étaient dans le sous-groupe B1) vers le groupe A;
- le glissement de 10/10', du groupe C vers le groupe B;
- l'évolution de 9/9' (qui étaient dans le groupe C) vers le sous-groupe B1, et même presque à la limite du groupe A.

Il faut sans aucun doute y voir l'effet de la "tradition" que nous évoquons au début, et d'une "culture" commune dans le domaine des dessins de géométrie de l'espace. Cela est particulièrement net dans le cas de 9, qui est vu horizontal par 4 enseignants sur 5, alors que seul un lycéen sur deux fait la même "lecture". S'agissant d'une représentation marginale, ce fait n'aurait guère d'importance, mais lorsqu'on s'aperçoit que cette représentation est très voisine du dessin "classique" du plan, très

majoritaire dans les manuels, et qui est implicitement supposé horizontal (voir Chapitre 2), on peut penser que la "tradition" pourrait, sur ce point, être légèrement infléchie (il suffirait de diminuer l'angle aigu que font les côtés obliques avec les côtés horizontaux).

P.S.2: Au cours d'un stage de formation que nous animons en Avril 1988 à Tanger (Maroc), nous avons pu faire passer ce test aux 89 stagiaires, élèves-professeurs au Centre Pédagogique Régional. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau qui suit, et visualisés sur le diagramme triangulaire du dessin 5.16.

N° dessin	%H	%V	%O
1	99	0	1
2	0	92	8
3	0	93	7
4	73	2	25
5	6	56	38
6	2	21	77
7	4	58	38
8	49	1	50
9	72	2	26
10	15	40	45

N° dessin	%H	%V	%O
1'	98	1	1
2'	0	89	11
3'	1	80	19
4'	60	3	37
5'	15	40	45
6'	1	23	76
7'	0	48	52
8'	35	3	62
9'	66	11	23
10'	9	34	57

TABLEAU 10

La comparaison des trois diagrammes triangulaires (lycéens, professeurs, élèves-professeurs) est tout à fait conforme à ce que l'on pouvait attendre a priori: les élèves-professeurs se situent entre les élèves et les professeurs. Pour les représentations du groupe A, les résultats sont évidemment conformes aux résultats généraux; mais, pour celles des groupes B

et C, on peut clairement suivre les glissements d'un graphique à l'autre (voir en particulier 5/5', 9/9' et 10/10'), ce qui milite en faveur de la cohérence de nos résultats.

4- LE TEST (SECONDE PARTIE):

Le test que nous venons d'étudier nous a permis de conclure en ce qui concerne les parallélogrammes (non losangiques) dont deux côtés sont parallèles à l'un des bords de la feuille, et d'établir, dans chacun des deux cas considérés, une hiérarchie "locale" en ce qui concerne les deux caractères que constituent l'angle des côtés d'une part, et le rapport des longueurs de ces côtés d'autre part.

En ce qui concerne les parallélogrammes dont aucun côté n'est parallèle à un bord de la feuille (cas de 6/6' et de 8/8'), nous avons pu établir le lien positif existant entre la plus grande proximité des directions des côtés avec l'horizontale (resp. verticale) et l'interprétation horizontale (resp. verticale) du rectangle correspondant, même si dans tous les cas l'interprétation oblique reste à peu près toujours la plus fréquente. Ceci restait cependant insuffisant pour rendre compte de la diversité des cas a priori possibles: en effet, dans l'un comme dans l'autre des deux cas précités, les directions des côtés étaient sensiblement symétriques par rapport à la verticale, alors qu'a priori on pouvait envisager l'"indépendance" des directions de ces côtés.

On peut considérer qu'il y a deux grandes "façons", pour un segment, d'être oblique:

- être plus proche de l'horizontale que de la verticale (OH);
- être plus proche de la verticale que de l'horizontale (OV).

(Nous n'oublions pas la possibilité d'être "entre les deux", mais nous n'en

tiendrons pas compte ici, nous intéressant surtout, en définitive, à l'attraction qu'exercent les directions privilégiées que sont l'horizontale et la verticale, lesquelles semblent être des "pôles d'attraction" importants (nous avons pu constater que HT.3 cédait le pas à HT.1 et à HT.2 lorsqu'elle entraînait en conflit avec l'une de ces deux dernières pour l'interprétation spatiale d'un parallélogramme.)

En tenant compte, de plus, de l'inégalité des longueurs des côtés, nous obtenons huit cas, représentés sur l'organigramme du dessin 5.17. Dans cet organigramme, les grands côtés sont codés par GC, et les petits côtés par PC. Ainsi, GCOH/PCOV désigne un parallélogramme dont les côtés les plus longs sont des obliques proches de l'horizontale, et les côtés les plus courts des obliques proches de la verticale. Remarquons que cette description correspond en fait à quatre parallélogrammes différents, une fois fixés les angles des côtés avec la verticale et le rapport des longueurs des côtés: ce sont ceux qui sont représentés sur le dessin 5.18 (on remarque que 5.18B est la version "gauche" de 5.18A, de même que 5.18D est la version "gauche" de 5.18C). On obtient ainsi quatre dessins différents lorsque figurent dans un même parallélogramme des côtés OH et des côtés OV, donc dans deux des quatre cas du dessin 5.17; dans les autres cas, on n'en obtient que deux. Ce qui donne donc au total 12 cas. Nous n'avons cependant pas retenu, dans cette seconde partie du test, les parallélogrammes 5.18C et 5.18D (ni leurs homologues provenant de GCOV/PCOH), car nous avions d'autres visées (voir ci-dessous) et ne voulions pas noyer les élèves sous une avalanche de rectangles en perspective, la "surdose" risquant de dénaturer les réponses obtenues en dernier. Il n'en reste pas moins qu'il serait intéressant de savoir (ou mieux: de prédire) comment les élèves "voient" les rectangles correspondants.

De plus, il nous faut également signaler -à notre courte honte- un

oubli tout à fait involontaire, lors de la réalisation des feuilles de test: celui des deux parallélogrammes correspondant au cas GCOV/PCOV du dessin 5.17.

Les visées auxquelles nous faisons allusion ci-dessus sont de deux types:

- d'abord, avant d'aller plus loin dans l'analyse, nous voulions nous assurer de la "consistance" des résultats obtenus au cours du test précédent, c'est-à-dire de la reproductibilité des phénomènes observés (dans le sens où l'on peut parler de reproductibilité lorsqu'il s'agit de phénomènes d'ordre psychologique). Pour cela, nous avons décidé de reprendre certains des parallélogrammes de la première série (légèrement modifiés cependant), afin de vérifier la compatibilité des résultats avec ceux obtenus précédemment.

- ensuite, nous voulions pouvoir étudier certains "cas-limites" qui, même s'ils sont habituellement peu utilisés, risquaient d'apporter un éclairage particulier sur les cas "ordinaires". En particulier, les parallélogrammes dont tous les côtés sont parallèles à un bord de la feuille (qui sont donc en fait, on l'aura compris, des rectangles), ainsi que les parallélogrammes dont tous les côtés ont la même longueur (c'est-à-dire les losanges).

1) En ce qui concerne la reprise de cas précédemment rencontrés, on peut remarquer qu'il s'en trouve un dans les parallélogrammes que nous avons retenus sur l'organigramme du dessin 5.17: il s'agit de PCOH/GCOH (numéros 8/8' de la première partie). On aurait normalement dû y trouver également GCOV/PCOV (numéros 6/6' de la première partie) que, comme nous l'avons signalé plus haut, nous avons "oublié". A ceux-là nous avons adjoint des "redites" des cas 2/2', 9/9' et 10/10', en en accentuant légèrement les caractéristiques. C'est ainsi que les côtés obliques se sont un peu rapprochés de la direction

(horizontale ou verticale) dont ils étaient déjà proches, et que le rapport des longueurs des côtés les plus longs aux plus courts est devenu un peu plus grand.

Notons enfin que le fait de disposer de quatre cas de figure pour évaluer la "consistance" des résultats relativise la portée de notre oubli, qui concerne ce qui aurait dû être le cinquième de ces cas.

La correspondance entre les numéros de la première série de parallélogrammes et ceux de la seconde est la suivante:

2/2' est devenu 13/13'

8/8' est devenu 17/17'

9/9' est devenu 21/21'

10/10' est devenu 19/19'.

2) En ce qui concerne les "cas-limites", reprenons la classification envisagée plus haut:

a) Rectangles à côtés horizontaux:

On peut y distinguer trois cas: ou bien les côtés horizontaux sont les plus longs (numéro 25), ou bien ils sont les plus courts (numéro 22), ou bien le rectangle est en fait un carré (numéro 12). Bien entendu, il n'y a pas, ici, de version "droite" ou "gauche".

b) Losanges:

Nous avons considéré les losanges qui étaient "limites" de parallélogrammes de la première série, c'est-à-dire ayant:

- deux côtés horizontaux ou verticaux, les deux autres étant OH ou OV;
- quatre côtés obliques, OH ou OV (avec "mélange" possible, comme dans l'organigramme du dessin 5.17). On trouvera dans l'organigramme du dessin 5.19 la constitution des divers types de losanges retenus, avec les numéros qui leur ont été attribués. On voit que, parmi les sept cas, cinq sont latéralisés

(d'où 12 dessins). Nous leur avons ajouté le "cas-limite de cas-limite" que constitue le carré "posé sur la pointe" (numéro 27) (N.B.: c'est à dessein que nous utilisons cette expression).

Si maintenant nous faisons le bilan des dessins retenus, nous trouvons au total 28 parallélogrammes (dessin 5.20):

- deux carrés (numéros 12 et 27);
- deux rectangles non carrés (numéros 22 et 25);
- douze losanges non carrés (numéros 11/11', 14/14', 16, 18/18', 20, 23/23', 24/24');
- douze parallélogrammes "quelconques" (numéros 13/13', 15/15', 17/17', 19/19', 21/21', 26/26').

Ces parallélogrammes ont été donnés à "voir spatialement" dans les mêmes conditions que ceux de la première série, aux mêmes élèves (à deux exceptions près), en deux passations, séparées de quelques jours (dans le souci d'éviter la "surdose" dont nous avons déjà parlé). Signalons qu'un intervalle de plus de trois mois séparait la passation de la première série de dessins de celles de la seconde série; ceci, pensons-nous, peut garantir que les élèves ne risquaient pas de se souvenir des réponses fournies à la première série, pour des dessins analogues.

On trouvera en Annexe 3 les deux feuilles de test.

5- LES RÉSULTATS:

Ces résultats, où l'on a distingué les élèves de Première (62 élèves) et ceux de Terminale (49 élèves), sont consignés dans les dessins 5.21A et B. Le codage est le même que pour la première série de dessins: chaque triplet indique les pourcentages respectifs d'élèves ayant "vu" le

rectangle correspondant comme étant:

- horizontal
- vertical
- oblique.

Les résultats ont été visualisés sur les deux diagrammes triangulaires du dessin 5.22. Comme dans le cas de la première série, les numéros figurant dans ces diagrammes renvoient à ceux qui figurent dans les dessins 5.21A et B: les numéros "primes" (lorsqu'il y a lieu) correspondant à la latéralisation "gauche".

Les graphiques nous montrent, ici encore, une grande similitude des résultats entre les deux niveaux (Première S et Terminale D), et une faible influence de la latéralisation, sauf dans deux cas particuliers:

- 19/19' (qui, rappelons-le, correspond aux numéros 10/10' de la première série, et pour lequel le même phénomène avait observé, dans le même sens, la version "gauche" étant vue plus oblique).
- 23/23', sur lequel nous reviendrons plus loin.

En raison de cette similitude entre niveaux nous avons, cette fois encore, regroupé l'ensemble des résultats, pour les 111 élèves concernés, dans le tableau ci-dessous, et les avons visualisés sur le diagramme triangulaire du dessin 5.23, dans lequel les conventions sont les mêmes que précédemment.

N° dessin	%H	%V	%O
11	93	5	2
12	5	93	2
13	0	92	8
14	0	88	12
15	2	16	82
16	81	4	15
17	36	5	59
18	10	62	28
19	8	55	37
20	3	48	49
21	46	33	21
22	7	90	3
23	19	12	69
24	2	67	31
25	27	69	4
26	25	10	65
27	12	48	40

TABLEAU 11

A- La "consistance" des résultats: (Comparaison entre les dessins figurant, sous des formes très voisines, dans les deux séries de dessins)

a) 13/13' et 2/2': Les résultats sont tout à fait analogues: 90% environ des élèves les voient verticaux.

b) 17/17' et 8/8': Ici aussi, analogie des résultats: 95% des élèves

voient les rectangles correspondants non verticaux, et ils se répartissent à peu près également entre "horizontal" et "oblique".

c) 19/19' et 10/10': Dans un cas comme dans l'autre, 8 élèves sur 10 environ voient les rectangles correspondants comme non horizontaux, et ils se répartissent à peu près également entre les deux autres interprétations.

d) 21/21' et 9/9': Ici encore, grande analogie des résultats des deux séries. Une chose est certaine: l'incertitude des élèves quant à l'interprétation de ces dessins.

B- L'analyse des nouveaux dessins:

N.B.: Nous excluons a priori de cette étude les dessins dont nous venons de parler, ne les citant que dans la mesure où ils permettent d'expliquer certains résultats par comparaison.

D'autre part, nous reprendrons dans ce qui suit la distinction en trois groupes, définie lors de l'étude des dessins de la première série. A savoir:

- Groupe A: large consensus (au moins 80%) en faveur d'une orientation particulière.
- Groupe B: large consensus pour rejeter une orientation particulière.
- Groupe C: pas de consensus large.

Rappelons également que le groupe B avait été subdivisé en deux sous-groupes:

- sous-groupe B1: l'une des deux interprétations retenues domine par rapport à l'autre (rapport des fréquences au moins égal à 2).
- sous-groupe B2: aucune des deux interprétations retenues ne domine

(rapport des fréquences voisin de 1).

GROUPE A (dessin 5.24):

Nous y trouvons cette fois, en distinguant les diverses interprétations:

1) Interprétation horizontale:

a) 11/11': Consensus d'au moins 90%. Ce cas apparaît comme limite du cas 1/1'.

b) 16: Consensus de plus de 80%. L'explication se rattache sans doute à l'hypothèse HH, d'autant plus que, aucun côté n'étant horizontal, l'hypothèse HT semble ne pas avoir de rôle à jouer ici.

2) Interprétation verticale:

a) 22: Consensus de l'ordre de 90%.

Il s'agit du rectangle dont les grands côtés sont verticaux. HH et HT viennent ici se renforcer l'une l'autre.

b) 12: Consensus supérieur à 90%. On peut le considérer comme cas-limite du précédent, mais l'importance du consensus (surtout par comparaison à 25) peut surprendre. Nous reviendrons sur ce cas.

c) 14/14': Consensus de plus de 80%. Ce cas peut être considéré comme un cas-limite de 2/2', et les résultats sont très voisins.

3) Interprétation oblique:

C'est la première fois que nous trouvons une interprétation qui soit oblique de façon nettement majoritaire (rappelons que nous n'en avons pas trouvé dans la première série de dessins, le cas qui s'en rapprochait le plus étant 6/6', avec 70%). D'ailleurs, nous ne trouvons ici qu'un seul cas, celui de 15/15' (avec plus de 80%), c'est-à-dire le parallélogramme dont tous les côtés sont obliques, les plus longs étant plutôt proches de la verticale

et les autres plutôt proches de l'horizontale. Donc, par rapport à 6/6', le fait que les petits côtés soient plus proches de l'horizontale attire l'interprétation vers le pôle "oblique", aux dépens du pôle "vertical". Dans un cas comme dans l'autre, le fait qu'aucun côté ne soit parallèle à un bord de la feuille laisse le champ libre à HT.3 (transfert de l'obliquité). Mais ici, les petits côtés étant éloignés de la verticale, on est conduit à davantage rejeter une interprétation verticale, qui était relativement plus fréquente dans le cas de 6/6'. Ceci peut s'interpréter en se référant à l'hypothèse HH, de la façon suivante: dans le cas de 6/6', les petits côtés étant plus proches de la verticale, la "vue plongeante" d'un mur (vertical) s'impose davantage à l'esprit que lorsqu'ils sont proches de l'horizontale (voir, dans le dessin 5.28, le mur de droite de la maison), auquel cas on est contraint de se rabattre sur une autre interprétation (qui ne peut plus être qu'"oblique", les deux autres ayant été rejetées). L'interprétation verticale n'est cependant pas totalement absente dans le cas de 15/15' ("attirance" à partir des longues obliques, qui sont subverticales?). (N.B.: le parallélogramme est ici, du fait des directions imposées à ses côtés, subrectangulaire, mais ce n'est pas un rectangle, et ceci de façon visible. La raison qui nous fait insister sur ce point est la suivante: si le rectangle était dessiné sous la forme d'un rectangle, la tendance du "lecteur" pourrait être de le supposer frontal, c'est-à-dire (hypothèse HH) situé dans un plan vertical. Plus précisément: en oblique dans un plan vertical (auquel cas le mot "oblique" n'aurait pas le même sens que celui que nous lui avons attribué jusqu'à présent, s'appliquant à un objet plan et s'opposant à la fois à "horizontal" et à "vertical"). Le problème ne se pose donc pas ici, non plus que dans aucun des autres dessins, et nous pourrions donc continuer à utiliser le mot "oblique" sans ambiguïté.)

GROUPE B (dessin 5.25):

Nous allons de nouveau distinguer les deux sous-groupes:

A-Sous-groupe B1:

1) Non horizontal, plutôt vertical: On y trouve 24/24', ainsi que 18/18'.

a) 24/24': Il s'agit du cas-limite, intermédiaire formel entre 3/3' et 7/7' (qui, remarquons-le, appartiennent également au groupe B). On peut remarquer qu'il y a progression régulière vers la verticalité, au fur et à mesure que croît le rapport des longueurs des côtés verticaux aux côtés obliques.

b) 18/18': Ce cas est à rapprocher de 10/10'. L'interprétation plus verticale peut s'expliquer d'une manière en quelque sorte "négative", par l'absence ou la moindre influence de facteurs existant dans les cas 9/9' et 10/10' (pas de côtés plus longs que les autres).

2) Non vertical, plutôt oblique: On y trouve uniquement 26/26'. Le rejet relatif de l'interprétation verticale est certainement dû à l'absence de côtés verticaux, et celui de l'interprétation horizontale à l'absence de côtés horizontaux.

D'autre part, la comparaison avec 8/8' montre que c'est l'hypothèse HH qui semble ici gouverner l'interprétation spatiale du dessin.

3) Non oblique, plutôt vertical: On y trouve le rectangle 25, dont les longs côtés sont horizontaux. L'hypothèse HH semble ici prédominante, mais, au sein de cette hypothèse, le vertical l'emporte de façon écrasante par rapport à l'oblique, alors qu'a priori cette dernière possibilité n'était aucunement à exclure, car elle correspond, elle aussi, à un point de vue habituel. On peut alors proposer au moins deux explications à ce rejet de la lecture "oblique" du dessin:

- l'une, basée sur le fait que, entre deux interprétations également possibles, le sujet choisit plutôt la plus "simple", ou la plus "plausible" (ici, la verticale, par rapport à l'oblique). Cette explication, on le voit, est à ranger du côté de HH; elle se rattache à une attitude perceptive classique: "lorsqu'il est confronté à une situation ambiguë, votre oeil recherche généralement l'interprétation la plus simple, même si elle est fautive" (LA VILLETTE 1987).

- l'autre (liée à HT), basée sur le fait qu'aucun élément du dessin ne vient à l'appui d'une interprétation oblique, alors que les petits côtés verticaux peuvent inciter à une lecture verticale.

Quoi qu'il en soit, entre HH et HT c'est ici HH qui l'emporte nettement, même si l'on ne peut ignorer les effets possibles de HT, à savoir la fréquence non négligeable de l'interprétation horizontale et le rejet de l'interprétation oblique.

Notons enfin pour en finir avec ce cas que, si nous l'avons rangé dans le groupe B, c'est en raison de la fréquence un peu faible de l'interprétation majoritaire (69%, au lieu des 80% exigés a priori). On peut donc se poser la question de savoir s'il semble y avoir réellement une séparation entre deux groupes plutôt qu'une progression continue et, dans le cas d'une réponse positive, si le seuil se situe bien aux alentours de 80%, comme nous l'avons fixé arbitrairement a priori. Pour en avoir une idée un peu plus précise, nous avons construit le graphique du dessin 5.26: sur ce graphique sont portés en abscisses les numéros des dessins, et en ordonnées les pourcentages correspondants (N.B.: Nous avons, sous un même numéro, représenté les points relatifs aux deux latéralisations, le cas échéant: la latéralisation droite étant figurée par une croix, et la latéralisation gauche par un rond). Ce graphique montre un "trou" entre 79% (n°3') et 71% (n°6'), et c'est le seul que nous y trouvions. Nous pouvons donc, au vu de nos résultats,

répondre comme suit aux deux questions que nous nous étions posées:

1°: il y a bien une coupure,

et 2°: plutôt que de prendre 80% comme limite inférieure pour le groupe A, il paraît plus judicieux de placer la barre à 75% (au milieu du "trou").

L'individualisation du groupe A paraît donc nette, et il semble également qu'il en soit de même pour le groupe C (voir le dessin 5.27, qui montre un hiatus entre 13 et 21% quant au pourcentage de l'interprétation la moins attestée pour les dessins "non A"). Nous sommes cependant nettement moins catégorique en ce qui concerne la subdivision du groupe B en deux sous-groupes; mais ceci n'a guère d'importance: notre propos, en effet, étant -entre autres- de chercher à identifier des représentations pour lesquelles on ait un consensus très large, seules nous importent, de ce point de vue, les représentations que nous avons pu rattacher au groupe A. Les autres subdivisions, pour commodes qu'elles soient, ne nous servent en fait qu'à mettre en évidence les diverses façons dont est "vu" un dessin donné (deux façons seulement correspondent au groupe B, tandis que trois façons correspondent au groupe C). Ce qui compte donc, c'est l'existence d'un groupe A individualisé, pour les éléments duquel existe un large consensus, et où les différences d'interprétation n'auront qu'une influence limitée (il conviendra d'ailleurs d'explicitier cette interprétation lors de la réalisation d'un dessin, de l'"officialiser" en quelque sorte, afin d'éliminer totalement (?) le risque). Nous avons d'ailleurs commis une (légère) entorse à cette subdivision, en classant 10' dans le groupe C, alors que, sur la foi du dessin 5.27, nous aurions dû le classer (quoique à la limite inférieure) dans le groupe B. Mais nous l'avons laissé en compagnie de son "symétrique" 10, et avons traité les deux parallélogrammes ensemble, l'essentiel étant pour nous de nous être rendu compte que ces deux dessins laissaient nos élèves assez

perplexes, et divisés sur l'interprétation.

Il nous reste maintenant, pour en finir avec le sous-groupe B1, à examiner le cas de 23/23'. Comme on pouvait le prévoir, les résultats sont intermédiaires entre ceux de 15/15' et ceux de 26/26'.

B- Sous-groupe B2:

Nous trouvons ici les numéros 20 et 27, qui sont interprétés comme étant non horizontaux. Ceci est très net pour le n°20 et peut s'expliquer essentiellement par l'absence de côtés horizontaux.

Nous pouvons également proposer ici des interprétations du type de celles que nous avons données pour le n°16, étudié plus haut (Groupe A): la référence à un point de vue habituel, ou l'influence que peuvent avoir sur l'interprétation du dessin les éléments non dessinés que sont les axes de symétrie, et en particulier ici la grande diagonale du losange. En effet les interprétations verticale et oblique sont relativement importantes, et ceci peut être dû au fait que le rectangle paraît plus redressé dans un point de vue usuel (hypothèse HH). En particulier, ne dit-on pas généralement, en parlant d'un dessin tel que 27, qu'il s'agit d'un "carré posé sur la pointe" (voir plus haut)? Mais, comme une possible influence de la diagonale verticale irait également dans le sens d'une interprétation verticale (hypothèse HT.2), il est ici impossible de décider. Dans le cas de 16, c'est l'interprétation horizontale qui est -nettement- majoritaire, et ceci peut être dû au fait que le rectangle paraît davantage à plat dans un point de vue usuel, comme à l'influence de la grande diagonale horizontale. Nous devons donc nous borner ici à constater le phénomène, sans pouvoir lui attribuer avec sûreté une cause unique (mais pourquoi y aurait-il une cause unique?) Retenons en tout cas la possibilité d'une influence de certains éléments de symétrie non

dessinés sur l'interprétation spatiale d'un dessin.

N.B.: Remarquons que tous les losanges (non carrés) figurant parmi nos dessins ont en fait une grande diagonale qui est également axe de symétrie. Mais ce n'est que lorsque cette diagonale est parallèle à un bord de la feuille qu'il semble qu'elle puisse être massivement prise en considération pour l'interprétation spatiale du dessin.

GROUPE C:

Nous n'avons dans ce groupe que le cas 21/21', qui d'ailleurs a déjà été étudié (sous la forme 9/9') dans la première partie. Nous n'y reviendrons donc pas ici.

6- SYNTHÈSE:

Le moment semble maintenant venu de confronter de façon un peu plus synthétique, à la lumière des nouveaux types de dessins étudiés, l'adéquation de nos hypothèses HH et HT aux résultats observés dans l'interprétation spatiale des trois types de parallélogrammes rencontrés, à savoir:

- parallélogrammes à côtés horizontaux;
- parallélogrammes à côtés verticaux;
- parallélogrammes dont tous les côtés sont obliques.

A) Parallélogrammes à côtés horizontaux:

1) Grands côtés horizontaux: Il s'agit des cas 25, 9/9' et 1/1'. Voir dessin 5.28.

En passant de 25 à 1 via 9, l'angle des petits côtés avec l'horizontale diminue.

a) Si l'on fait l'hypothèse d'horizontalité du rectangle représenté, la vue est d'abord verticale de dessus (25), puis plongeante (9/9'), et enfin légèrement de dessus (1/1'). Cette hypothèse, d'après HH, doit donc acquiescer de plus en plus de force. Et c'est effectivement ce que l'on constate: voir dessin 5.29A (N.B.: dans les dessins 27, 30, 32, 35, 36 et 37 nous avons regroupé les deux latéralisations, en affectant à l'ensemble des deux parallélogrammes la moyenne des deux pourcentages correspondants)

b) Si l'on fait maintenant l'hypothèse de verticalité, la vue est d'abord de niveau (25), puis plongeante (9/9'), et enfin très plongeante (1/1'). D'après HH, cette hypothèse doit donc être de moins en moins retenue, car correspondant à des points de vue de moins en moins habituels. Et c'est bien ce que nous constatons également: voir dessin 5.29B.

c) Quant à l'hypothèse d'obliquité, elle ne peut tenir dans les cas 1/1' et 25, face à la vraisemblance beaucoup plus grande de l'une des deux autres interprétations. Ce n'est donc que dans le cas 9/9' qu'elle peut être retenue de façon non négligeable: voir dessin 5.29C.

La formulation de la tâche incitait peut-être à chercher d'abord si le rectangle pouvait être horizontal ou vertical, et seulement ensuite, dans le cas d'une réponse négative, à répondre "0". Mais cette formulation elle-même ne correspond-elle pas à quelque chose de profond en nous (physiologique)? Nous sommes plongés dans un milieu régi par la verticale et l'horizontale de par les effets de la pesanteur, et l'oblique (dans l'acception "absolue" de ce mot) n'est définie que par rapport à ces directions privilégiées (voir plus haut).

2) Petits côtés horizontaux: Il s'agit des cas 22, 10/10' et 4/4'. Voir dessin 5.30.

3) Losanges à côtés horizontaux: Il s'agit des cas 12, 18/18' et 11/11'. Voir dessin 5.31.

Nous ne développerons pas outre mesure ces deux cas, étant donné la similitude des interprétations, ainsi que celle des résultats statistiques. Nous nous contentons de donner les polygones de fréquences correspondants (voir dessins 5.32A,B et C). Sur chacun de ces trois dessins, la colonne 1 correspond aux rectangles, la colonne 2 aux parallélogrammes dont les côtés obliques sont proches de la verticale, et la colonne 3 à ceux dont les côtés obliques sont proches de l'horizontale. D'autre part, le polygone de fréquences noté > correspond aux grands côtés horizontaux, celui qui est noté < aux petits côtés horizontaux, et celui qui est noté = aux losanges. On y lit clairement la similitude -annoncée- des résultats.

B) Parallélogrammes à côtés verticaux:

Nous procéderons de la même façon que ci-dessus.

1) Grands côtés verticaux: Il s'agit des cas 22, 2/2' et 3/3'. Voir dessin 5.33.

En passant de 22 à 3 via 2, l'angle des petits côtés avec la verticale augmente.

a) Si l'on fait l'hypothèse de verticalité du rectangle représenté, la vue est, dans les trois cas, située au niveau du rectangle (direction de visée horizontale), mais le rectangle est tout d'abord frontal (cas 22), et est ensuite vu de plus en plus en biais (légèrement dans le cas de 2/2', et davantage dans le cas de 3/3'). Cette hypothèse, d'après HH, devra donc perdre progressivement de sa force. On constate que la proportion d'interprétation verticale reste très forte, et nettement majoritaire, mais décroît malgré tout quelque peu (dessin 5.34B).

b) Si l'on fait maintenant l'hypothèse d'horizontalité, la vue est d'abord de direction verticale (22), puis difficilement envisageable (2/2' et 3/3'). Et on constate qu'effectivement la proportion d'interprétation horizontale est très faible (dessin 5.34A).

c) Quant à l'hypothèse d'obliquité, il est compréhensible qu'elle prenne une certaine importance dans les cas 2/2' et 3/3', en raison d'une part de l'absence de côtés horizontaux pouvant inciter à une vision horizontale (hypothèse HT.1 "en négatif"), et d'autre part de la présence de côtés obliques (hypothèse HT.3). C'est effectivement ce que nous pouvons constater (dessin 5.34C).

(N.B.: Il est ici permis de se demander si le fait de voir un rectangle vertical de façon non frontale (en biais, c'est-à-dire, d'une certaine façon, "en oblique") n'induit pas, chez certains élèves, une confusion. Mais nous ne pouvons, pour l'instant, qu'assortir cette supposition de plusieurs points d'interrogation, d'autant plus que, rappelons-le, nous n'avions pas employé le mot "oblique" dans la consigne.)

2) Petits côtés verticaux: Il s'agit des cas 25, 5/5' et 7/7'. Voir dessin 5.35.

3) Losanges à côtés verticaux: Il s'agit des cas 12, 14/14' et 24/24'. Voir dessin 5.36.

Comme ci-dessus, nous ne développerons pas outre mesure ces deux cas, qui sont absolument comparables aux précédents. Nous nous contenterons de donner les polygones de fréquences correspondants (dessins 5.37A,B et C). Sur chacun de ces trois dessins, la colonne 1 correspond aux rectangles, la colonne 2 aux parallélogrammes dont les côtés obliques sont proches de l'horizontale, et la colonne 3 à ceux dont les côtés obliques sont proches de la verticale. En outre, le polygone de fréquences noté > correspond aux grands côtés verticaux, celui qui est noté < aux petits côtés verticaux,

et celui qui est noté = aux losanges. On peut y lire, ici aussi, la grande similitude des résultats.

C) Parallélogrammes dont tous les côtés sont obliques:

Nous mettons à part les losanges ayant leurs diagonales (axes de symétrie) parallèles aux bords de la feuille, et pour lesquels, comme nous l'avons vu, ces éléments de symétrie jouent apparemment un rôle non négligeable dans l'interprétation spatiale.

En ce qui concerne les autres cas, nous allons envisager successivement les différentes hypothèses que l'on peut faire au sujet de l'interprétation spatiale du parallélogramme dessiné:

1) Hypothèse d'horizontalité:

L'hypothèse d'horizontalité du rectangle représenté est en général ici peu vraisemblable, du point de vue de notre hypothèse HH: elle nécessite le recours à un point de vue inhabituel, sauf dans le cas où les quatre côtés sont voisins de l'horizontale (voir Appendice 6, second cas). On constate que c'est bien ce qui se passe. On peut également penser (hypothèse que nous avons déjà évoquée plus haut) que la présence de côtés dont la direction est voisine de l'horizontale peut inciter à une interprétation horizontale ("attraction" de l'horizontale, que l'on peut considérer comme une extension de notre hypothèse HT.1). Les résultats obtenus vont effectivement dans ce sens: le dessin 5.38 indique, dans différents cas, la fréquence d'interprétation horizontale. La colonne 1 correspond au cas où tous les côtés du parallélogramme sont voisins de l'horizontale, la colonne 2 (resp. 4) au cas où seuls les grands côtés (resp. petits côtés) le sont, la colonne 3 au cas du losange (non symétrique par rapport à la verticale), et enfin la colonne 5 au cas où aucun côté n'est voisin de l'horizontale. On

peut constater que, dès que deux côtés (sauf si ce sont les plus courts) ont une direction subhorizontale, la fréquence d'interprétation horizontale est au moins de 15%.

2) Hypothèse de verticalité:

Cette hypothèse, elle non plus, ne concorde pas avec l'hypothèse HH, puisque, comme nous l'avons dit, dans un point de vue habituel les verticales restent verticales. L'absence de côtés verticaux, dans les cas qui nous occupent ici, nécessite donc un point de vue en plongée, ou en contre-plongée. Et, en effet, on constate que la fréquence d'interprétation verticale reste relativement faible. Comme précédemment, on peut s'interroger sur une possible "attraction" des éventuels côtés voisins de la verticale. Le dessin 5.39 indique, dans différents cas, la fréquence d'interprétation verticale. La colonne 1 correspond au cas où les quatre côtés du parallélogramme ont des directions plutôt voisines de la verticale, la colonne 2 (resp. 4) au cas où seuls les grands côtés (resp. petits côtés) sont tels, la colonne 3 au losange (non symétrique par rapport à la verticale), et enfin la colonne 5 au cas où aucun côté n'a une direction voisine de la verticale. Comme dans le cas précédent, on peut constater une corrélation positive entre la présence de côtés subverticaux et l'interprétation verticale (mais ici, le rapport des longueurs des côtés ne semble pas avoir un rôle significatif).

3) Hypothèse d'obliquité:

Comme on pouvait s'y attendre (hypothèse HT.3, qui ici n'entre pas en conflit avec HT.1 ou HT.2), elle est nettement majoritaire, sauf dans le cas -vu plus haut- où elle entre en concurrence avec l'interprétation horizontale (hypothèse HH).

Cette seconde partie du test nous a donc apporté, comme nous l'espérions, quelques renseignements complémentaires. Tout d'abord, elle nous a permis de vérifier que, pour une même population, les réponses données étaient très sensiblement constantes dans le temps, et par conséquent que l'on pouvait se fier aux résultats statistiques relevés. De plus, en ce qui concerne ladite population, composée de 110 élèves (environ 60 élèves de Première S et 50 élèves de Terminale D), si l'on a pu constater entre les deux niveaux quelques différences "locales" dans certains cas restreints, les résultats sont néanmoins tout à fait comparables dans leur ensemble, et permettent de penser que des études semblables, portant sur d'autres élèves de même niveau, donneraient des résultats analogues.

De plus, nous avons également pu vérifier, sur de nouveaux dessins, que nos deux hypothèses fondamentales semblaient bien pouvoir rendre compte, à elles deux, des résultats observés:

- d'une part, aucune des deux hypothèses HH (habitude perceptive) ou HT (transfert de propriété) n'est suffisante, à elle seule, pour expliquer les réponses données par les élèves. En effet, HH repose essentiellement sur les directions des côtés de la représentation, indépendamment des rappports de longueurs (deux rectangles à côtés parallèles donneront, par projection parallèle, des parallélogrammes à côtés parallèles, et ceci qu'ils soient allongés suivant l'une des directions ou l'autre). Par conséquent, deux représentations dont les côtés ont les mêmes directions (comme par exemple les cas 3 et 7) devraient être interprétées de façon identique, puisque le "point de vue" peut théoriquement être le même; simplement, le rectangle correspondant au cas 3 serait allongé en hauteur (dans le cas d'une interprétation verticale), et le rectangle du cas 7 serait allongé en

profondeur (voir dessin 5.40). Or, il est manifeste, dans ce cas en particulier, que les interprétations ne sont pas identiques, les triplets (H,V,0) correspondant respectivement à 3 et à 7 étant 1.81.18 et 2.52.46 (c'est-à-dire que 3 est vu beaucoup plus massivement vertical que 7, ce que l'on peut expliquer par HT). De même, si l'on compare les triplets correspondant aux cas 25 (rectangle dont les grands côtés sont horizontaux) et 22 (rectangle dont les grands côtés sont verticaux), on trouve respectivement 27.69.4 et 7.90.3: le cas 22 est vu beaucoup plus massivement vertical que 25, ce que l'on peut également expliquer à l'aide de HT: HT.2 a davantage de poids lorsque le rapport des longueurs des côtés est favorable aux côtés verticaux.

- inversement, HT peut difficilement rendre compte de la façon dont est vue la représentation 8 (à laquelle correspond le triplet 50.6.44): aucun de ses côtés n'est horizontal (ni même aucune diagonale), et cependant ce dessin est vu majoritairement comme l'image d'un rectangle horizontal (interprétation dont peut rendre compte HH).

En outre, nous avons également pu affiner nos hypothèses, et en particulier HT, pour laquelle nous avons vu qu'il semble qu'elle puisse intervenir, pour ainsi dire, "en négatif" (en ce sens qu'une interprétation peut être rejetée faute d'éléments graphiques pour la retenir), ou même peut-être se fonder sur des éléments implicites de la représentation (axes de symétrie parallèles aux bords de la feuille). Et nous avons également envisagé la possibilité d'une "attraction" de l'horizontale ou de la verticale sur les directions voisines.

Nous avons aussi pu confirmer que HH et HT agissaient, tantôt en tant qu'alliées, et tantôt en tant qu'antagonistes. En particulier:

- lorsque, dans la représentation, sont présents des côtés horizontaux et des côtés obliques, l'interprétation horizontale est

majoritaire si les côtés obliques sont proches de l'horizontale (HH et HT se renforcent), mais non s'ils sont proches de la verticale (HH et HT sont en conflit).

- lorsque, dans la représentation, sont présents des côtés verticaux et des côtés obliques, l'interprétation verticale est, comme prévu, majoritaire dans presque tous les cas (HH et HT se renforcent), la seule exception étant 7/7', où les interprétations verticale et oblique sont du même ordre de grandeur (ce qui, comme nous l'avons vu, peut également se justifier par un conflit entre HH et HT).

Enfin, maintenant que nous savons mieux comment sont interprétés les dessins que nous avons étudiés, nous pouvons établir ce que les associations de consommateurs nomment le "meilleur choix", pour les dessins de rectangles en perspective (ou, pour mieux dire, des représentations de plan), c'est-à-dire que nous sommes à présent à même de donner des représentations de plan "aussi peu ambiguës que possible en ce qui concerne la direction" (c'est-à-dire pour lesquelles le consensus sera très large: au moins 75%, ce qui, comme nous l'avons vu, correspond à notre Groupe A). Le dessin 5.41 donne, pour chacune des trois "orientations" envisagées au départ (horizontale, verticale, oblique), les "meilleurs choix", compte tenu des dessins étudiés (N.B.: nous n'avons pas tenu compte ici des losanges, qui ne rentrent pas, à proprement parler, dans le cadre des représentations "classiques", et ne nous ont en fait servi qu'à éclairer les cas généraux).

Si nous disons que ces représentations sont "meilleures" ce n'est pas, rappelons-le, en raison d'une plus grande correction d'un point de vue perspectif (toutes les représentations envisagées sont perspectivement correctes), mais parce qu'elles sont spatialement interprétées de la même façon par la grande majorité des élèves. Comme nous l'avons dit plus haut,

cela n'empêchera nullement de préciser quelles sont les conditions qui permettent d'obtenir le dessin correspondant: direction du plan de projection (en général, vertical), direction des projetantes (en général, obliques "descendantes"), position de l'objet par rapport à ces éléments. Au contraire, ceci fournira les éléments nécessaires au "décodage" du dessin, éléments qui, eux, seront les mêmes pour tous (et non plus seulement pour une majorité, même large. L'avantage de choisir ces représentations plutôt que d'autres sera que cette objectivité, fondée sur une subjectivité, sera en quelque sorte la plus "naturelle" possible, pour le public considéré. En effet, rien n'empêche de représenter un plan horizontal par le parallélogramme du dessin 5.42A, car il existe des projections parallèles dans lesquelles un rectangle horizontal a une telle image (voir dessin 5.42B); mais nous ne pensons pas -sauf exception due au contexte- que cela constitue un choix judicieux, car il risque d'y avoir (et il y aura même certainement) conflit entre ce que l'élève verra, et ce qu'il saura de l'objet représenté (en l'occurrence, seulement un élève sur cinq verra un rectangle horizontal dans le dessin 5.42A en l'absence de contexte, alors que les autres le verront, soit oblique, soit vertical). Il peut, certes, y avoir des contraintes qui obligent, dans un dessin déterminé, à représenter un rectangle donné sous une forme qui ne corresponde pas à un "meilleur choix"; mais, justement, c'est alors le contexte graphique qui permettra de ne pas (trop) être choqué par une telle représentation (voir dessin 5.42B). Ce qui importe, en fait, ce n'est pas tant de s'interdire tel ou tel type de dessin, sous prétexte qu'il ne figure pas parmi ceux du dessin 5.41, que de faire des choix conscients, correspondant si possible à des points de vue habituels (hypothèse HH), et ne contenant pas d'éléments graphiques risquant d'induire inutilement en erreur (hypothèse HT): la représentation plane des figures de l'espace est un problème suffisamment complexe pour que l'on n'y ajoute pas, en plus, des

difficultés évitables.

7- CONCLUSION :

Ce chapitre nous a donc permis, comme nous l'espérions, de tester nos hypothèses relatives à la façon dont les élèves "lisent" l'espace sur un dessin de géométrie. Il a montré que le "voir" et le "savoir" jouent tous deux un rôle dans l'interprétation, et nous a permis de déterminer quelles sont les représentations de plan qui permettent le mieux -lorsque cela est possible- d'harmoniser voir et savoir, en suggérant de la façon la plus nette possible telle ou telle orientation spatiale, dans le but de favoriser l'actualisation de l'image mentale. En particulier, le fait que le dessin traditionnel n'est pas le meilleur pour évoquer un plan horizontal est apparu nettement (il suffirait d'ailleurs d'une légère modification pour l'améliorer sensiblement). Mais nous insisterons cependant sur le fait que l'orientation spatiale du plan dessiné n'est que suggérée par le dessin, et qu'il est nécessaire que cette orientation soit explicitée clairement.

CHAPITRE 6:

COMPLÈTEMENT DU DESSIN D'UN TRIÈDRE TRIRECTANGLE.

Notre test d'interprétation spatiale de dessins de "rectangles en perspective" avait essentiellement pour but de rechercher comment des lycéens "restituaient" la troisième dimension dans l'un des dessins plans élémentaires les plus fréquents en géométrie de l'espace, à savoir un parallélogramme censé représenter un rectangle de l'espace. Les résultats obtenus ont confirmé nos premières hypothèses, et ont permis de les affiner. Mais -et nous l'avons alors fait remarquer- le "dessin de plan" est ainsi isolé de tout contexte, contrairement à ce qui se produit dans les situations habituelles. Un dessin de Géométrie de l'espace ne se réduit pratiquement jamais (sauf peut-être lorsque l'on introduit la représentation d'un plan de l'espace) à un dessin de plan seul. On y trouve toujours d'autres éléments (points, droites, plans,...) interagissant les uns avec les autres pour aboutir -du moins on peut l'espérer- à une interprétation unique et cohérente.

Le but visé peut donc finalement se ramener à pouvoir situer l'objet représenté par rapport à une base orthonormale de l'espace, afin de lui assurer une "réalité" tridimensionnelle. En effet, un cube de référence étant choisi, tout point de l'espace peut alors être repéré par rapport à lui, et ainsi être déterminé. Dans un dessin, la représentation de cette "base" (au sens mathématique du terme) est en général induite implicitement par certains éléments du dessin, et c'est elle qui va servir de "base" (au sens courant du terme) à l'interprétation spatiale de l'ensemble.

Notre idée a donc été de chercher à savoir comment, à partir du dessin de deux directions d'un trièdre trirectangle, les élèves complétaient la représentation de ce trièdre. La donnée de deux droites perpendiculaires de l'espace suffit en effet à déterminer un trièdre trirectangle (à l'orientation

près). Plus précisément, \vec{U} étant un vecteur directeur de l'une des droites et \vec{V} un vecteur directeur de l'autre, $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ est un trièdre trirectangle si, et seulement si, le vecteur \vec{W} est colinéaire à $\vec{U} \wedge \vec{V}$. Mais la donnée du dessin de deux droites perpendiculaires de l'espace est tout à fait insuffisante à la restitution du dessin du trièdre (puisque les deux droites données ne sont pas déterminées sans ambiguïté). En fait, le dessin de trois droites concourantes peut toujours être considéré comme le dessin d'un trièdre trirectangle, en vertu du théorème de POHLKE. Par conséquent, le dessin de deux droites d'un trièdre trirectangle étant donné, celui de la troisième droite est absolument arbitraire, tout au moins théoriquement. Car nous pensions en effet que, confrontés à ce problème (courant dans la pratique) du complètement du dessin d'un trièdre trirectangle, les réponses de nos élèves ne seraient pas de type aléatoire, mais présenteraient plus ou moins des points communs et des régularités, que nous espérions pouvoir expliquer à l'aide des hypothèses déjà formulées à propos de l'interprétation spatiale de dessins de plan.

En fait, le test auquel nous avons soumis les élèves ne répond pas tout à fait à ce que nous venons d'annoncer. En effet, le problème aurait théoriquement été de donner le dessin de deux droites, en indiquant qu'il s'agissait de deux droites de l'espace perpendiculaires, et de demander le dessin d'une droite qui leur soit perpendiculaire. Mais dessiner "deux droites de l'espace" présente quelques problèmes. En premier lieu (comme dans le plan, d'ailleurs), une droite étant "illimitée", on ne peut en représenter qu'un segment; mais alors, quelles longueurs relatives donner aux deux segments tracés? D'autre part, le dessin de deux droites concourantes a de grandes chances d'être perçu comme un dessin de géométrie plane - même si l'on précise qu'il s'agit de géométrie de l'espace - par suite du "manque de relief" qu'il présente. Pour pallier cette difficulté, nous avons choisi de remplacer

le dessin de deux segments adjacents par celui du parallélogramme construit sur ces deux segments, représentation traditionnelle d'un plan en géométrie de l'espace; en précisant ensuite que ce dessin représentait un "rectangle en perspective", nous lui donnions le "relief" souhaité, avec un risque beaucoup plus faible d'interprétation "plane".

Il nous restait alors deux variables sur lesquelles nous pouvions jouer: les directions des segments, et leurs longueurs relatives.

1- LE TEST:

1) Principe:

Le principe de ce test (test que nous appellerons désormais CT, tandis que nous désignerons l'autre par IS) est le suivant:

On donne un parallélogramme, dont on précise qu'il représente un plan de l'espace (figuré par un "rectangle en perspective"), et on donne la consigne de dessiner une droite de l'espace perpendiculaire à ce plan, d'appeler M le point d'intersection, et de représenter en pointillés la partie de la droite qui se trouve "cachée par le plan" (sic).

Nous avons, afin de donner une "image" plus familière du problème, utilisé l'analogie avec une feuille de carton que l'on transperce par une aiguille à tricoter. Nous précisions également: "Il ne s'agit pas de faire une construction géométrique, mais un dessin. Il n'y a pas de solution géométrique; c'est uniquement une question de "vision" personnelle, et toutes les réponses sont acceptables."

2) Buts principaux:

Les principaux buts visés, auxquels nous allons nous intéresser ci-après, sont les suivants:

- tester nos principes généraux gouvernant le tracé de la droite à

dessiner. En particulier: nos hypothèses HH et HT permettent-elles encore d'expliquer les résultats obtenus?

- confronter ces résultats avec ceux obtenus lors du test IS.

Constata-t-on des différences et, si oui, comment les expliquer?

- rechercher des précisions sur la façon dont est "vu" le plan dessiné (grâce à la direction de la droite tracée, ainsi qu'aux pointillés correspondant à la partie "cachée" de cette droite): de dessus, de dessous, de droite, de gauche,...

3) Passation:

Nous avons utilisé les vingt parallélogrammes qui figuraient dans la première partie du test IS, et nous nous sommes ici entouré d'un "luxe" de précautions destiné à éviter, dans la mesure du possible, d'une part la "contamination" d'un dessin par un dessin voisin figurant sur la même page (contamination interne), et d'autre part l'éventuel "coup d'oeil auxiliaire" sur la feuille d'un élève voisin (contamination externe).

a) Pour éviter la "contamination interne", nous avons morcelé les vingt items du test: les dessins étaient répartis sur cinq feuilles de format 14,8cmx21cm (deux dessins de chaque côté de la feuille, aussi différents l'un de l'autre que possible). Les feuilles étaient numérotées I, II, III, IV, V et, sur chaque feuille, les dessins étaient numérotés 1, 2, 3, 4 (d'où le codage des parallélogrammes: II 3, IV 1, par exemple). (Les cinq feuilles figurent en Annexe 4).

b) Pour éviter la "contamination externe" (le "coup d'oeil auxiliaire", selon l'expression de Daniel LACOMBE), nous avons opéré la passation par un double jeu de permutations circulaires successives: l'ensemble des élèves de la classe étant ordonné (par les places occupées) nous leur avons, dans une première "vague", distribué respectivement les feuilles I, II, III, IV, V, I, II, etc. (l'élève p recevant la feuille portant

comme numéro, en chiffre romain, le reste de la division euclidienne de p par 5). Dans la deuxième "vague", les feuilles étaient décalées d'un cran (II, III, IV, etc.), et ainsi de suite. Au bout de cinq "vagues", tous les élèves avaient ainsi rempli les cinq feuilles du test, mais pas simultanément.

Ces précautions ont sensiblement alourdi la passation du test, et nous ne sommes pas sûr du tout qu'elles aient été indispensables. Elles ont néanmoins réduit notablement d'éventuels risques de "contamination", et par conséquent nous permettent d'accorder un crédit accru aux résultats observés.

4) Population:

Le test a été passé dans trois classes de Première S et une classe de Seconde du lycée Michelet de Vanves (92): au cours de l'année scolaire 1985-86 dans la classe de Première S5 (notée 1S5, et comportant 24 élèves), au cours de l'année scolaire 1986-87 dans la classe de Première S4 (notée 1S4, et comportant 34 élèves), et au cours de l'année scolaire 1987-88 dans les classes de Première S1 (notée 1S1, et comportant 36 élèves) et de Seconde 3 (notée 2.3, et comportant 35 élèves). Ce qui nous donne un effectif total de 129 élèves. Comme nous le verrons ci-après, l'analogie des résultats obtenus dans les quatre classes nous fait penser qu'ils sont -tout au moins dans leurs grandes lignes, sinon dans le détail- fiables.

5) Codage des réponses:

a) La "réponse" concernant l'un quelconque des vingt parallélogrammes consistait à tracer une droite partiellement ponctuée, ce qui revenait, en fait, à particulariser l'une des deux demi-droites ayant pour support la droite tracée et pour origine l'image du point d'intersection du plan et de la droite représentés (par exemple, et conventionnellement, la demi-droite non ponctuée de la droite tracée). On peut donc utiliser, pour le codage de la réponse, un cercle sur lequel figureront les rayons (ou diamètres) ayant pour direction:

- celle des grands côtés du parallélogramme (diamètre en trait épais);
- celle des petits côtés du parallélogramme (diamètre en trait fin).

(Ces deux diamètres n'ont en fait pour fonction que d'indiquer quel est le parallélogramme intéressé.)

D'autre part, nous pensions a priori que la direction des côtés aurait une influence sur le tracé de la droite (hypothèse HT, cette fois en sens inverse: transfert d'une propriété de l'objet représenté au dessin). Plus précisément, nous nous attendions à ce que ce tracé soit, dans un certain nombre de cas, perpendiculaire à l'une des deux directions de côtés. Nous avons donc également fait figurer en pointillés, sur le cercle, les diamètres perpendiculaires aux deux diamètres déjà placés.

Enfin, songeant à une possible influence d'éléments "implicites" du dessin, nous avons également fait figurer les diamètres correspondant aux directions des perpendiculaires aux diagonales du parallélogramme (ces diamètres, sur le cercle, ne sont représentés que par leurs extrémités: << >> pour la perpendiculaire à la grande diagonale, et < > pour la perpendiculaire à la petite; voir dessin 6.1).

b) La réponse proprement dite peut alors être codée par un point du cercle, intersection de celui-ci avec le rayon parallèle à la demi-droite conventionnellement choisie (voir plus haut), et de même sens qu'elle. Pour repérer ce point, nous avons mesuré (en degrés, au rapporteur), l'angle du couple de demi-droites déterminé par la demi-droite définie ci-dessus avec la demi-droite "origine" usuelle en trigonométrie, constituée par l'horizontale dirigée vers la droite. Nous avons ensuite regroupé les valeurs obtenues en classes ayant pour amplitude 10 degrés (il convenait en effet de tenir compte du fait que les tracés avaient été effectués par les élèves -en accord avec la consigne- à l'aide de la règle seule, d'où une certaine marge d'imprécision).

A noter que, sur le cercle, le point choisi pour représenter la

classe ne correspond pas systématiquement au centre de cette classe: lorsqu'un point particulier du cercle (extrémité d'un rayon ou diamètre matérialisé, ou d'un diamètre parallèle à un bord de la feuille) correspondait à un point de la classe, c'est lui qui a été choisi comme représentant de celle-ci, pour d'évidentes raisons.

6) Recherche des "points de vue":

a) Ambiguïté et habitude:

L'étude des réponses des élèves devait également permettre, selon nous, une confrontation avec les résultats du test IS. En effet, la détermination de la demi-droite non ponctuée dont nous venons de parler permet de définir un pavé droit "opaque", et par contrecoup, moyennant certaines hypothèses supplémentaires, un "point de vue" implicite. Précisons notre pensée: les dessins considérés ici relèvent (est-il besoin de le rappeler?) de la perspective parallèle, c'est-à-dire d'une projection parallèle sur un plan. Nous supposerons a priori, comme il est habituel de le faire (hypothèse HH) que le plan de la projection est vertical. Rappelons que ceci n'est pourtant pas du tout obligatoire, certaines "vues" moins usitées (plongée, contre-plongée, par exemple) mais tout à fait légitimes faisant intervenir une projection sur un plan non vertical (en particulier horizontal), comme nous avons pu le voir lors de l'étude du test IS, précisément. Pour illustrer notre propos, faisons appel à M.C. ESCHER (1898-1971), qui est sans doute l'artiste qui s'est le plus intéressé à cette ambiguïté de la représentation et aux points de vue inhabituels. Prenons comme exemple sa gravure sur bois intitulée "Un autre monde II" (1947), qui joue sur trois points de vue différents, correspondant à un même point de fuite principal (bien entendu, nous sommes ici en perspective centrale). Cette gravure (dessin 6.2A) comporte trois "régions", qui sont schématisées sur le dessin 6.2B, et pour lesquelles les différentes projections ont pour éléments caractéristiques ceux du tableau

ci-dessous :

Région	Plan du tableau	Point de fuite
1	vertical	punctum remotum
2	horizontal	nadir
3	horizontal	zénith

TABLEAU 12

La région 1 correspond donc à un "point de vue habituel", au sens où nous l'entendons, au contraire des deux autres, relatifs à des points de vue "rares". Remarquons que seul le contexte (les objets représentés) permet de définir le point de vue auquel on a affaire.

Pour en revenir au problème qui nous occupe directement ici, précisons que nous nous réservons le droit de revenir sur cet a priori du plan de projection vertical, et de changer la direction supposée de ce plan, au besoin. Remarquons cependant que, l'hypothèse étant ainsi faite d'un plan de projection vertical, il en résulte que toute verticale de l'espace a pour image une verticale du plan (c'est-à-dire une parallèle aux bords droit et gauche de la feuille). Notons toutefois que la réciproque n'est pas vraie. Malgré cela, ayant recours cette fois à notre hypothèse HT, et sur la foi des résultats du test IS, nous supposerons que l'élève qui trace une droite "verticale" l'imagine comme représentant une verticale de l'espace. En conséquence, nous en inférerons que le plan dessiné est, pour lui, horizontal (puisque perpendiculaire, par hypothèse, à une verticale).

b) L'effet girouette:

Dans une perspective parallèle, un rectangle ABCD est projeté selon un parallélogramme abcd. Supposons ce rectangle complété par une direction de demi-droite (c'est-à-dire un vecteur non nul, \vec{U} , de l'espace), orthogonal au

plan du rectangle. Considérons le rectangle A'B'C'D', image du rectangle ABCD dans la translation de vecteur \vec{U} : nous obtenons ainsi un pavé droit (alias "parallélépipède rectangle"). Soit maintenant a'b'c'd' le parallélogramme projeté du rectangle A'B'C'D', et considérons le projeté du pavé (dessin 6.3A). Ce projeté peut être considéré de deux façons différentes comme le projeté d'un pavé droit dans une projection donnée, comme on s'en rend compte en recourant à l'analogie de la projection parallèle avec l'ombre au soleil: si l'on suppose le pavé original opaque, ce peut être, soit la face ABCD (dessin 6.3B), soit la face A'B'C'D' (dessin 6.3C) qui est "au soleil". Mais les deux pavés correspondants, quoique disposés différemment, auront même ombre (car les dessins ont le même contour); c'est ce que Bruno ERNST (ERNST 1987, p. 80) appelle "l'effet girouette", et qu'il illustre par le dessin 6.4: l'orientation de la girouette, vue en contre-jour, est ambiguë.

De façon plus géométrique, considérons un plan P et une droite D non parallèle à ce plan. Par la projection sur P parallèlement à D, un point quelconque m du plan P est l'image de tous les points situés sur la parallèle à D passant par m. Soit alors un pavé droit opaque, situé dans l'un des deux demi-espaces limités par P; tout pavé droit, translaté du premier parallèlement à D, et situé dans le même demi-espace, aura le même projeté que lui. Mais il n'en sera pas de même s'il est situé dans l'autre demi-espace. Considérons en effet le dessin 6.5, et reprenons l'analogie "solaire": les points X, Y, X' et Y' sont placés dans cet ordre sur la droite D (X et Y dans un même demi-espace, et X' et Y' dans l'autre). Lorsque le soleil est situé dans le même demi-espace que X et Y, le point Y est "à l'ombre" de X; au contraire, lorsque le soleil est situé dans le même demi-espace que X' et Y', c'est le point X' qui est "à l'ombre" de Y'. Ceci explique que l'on obtienne deux dessins, de type 6.3B et 6.3C, à partir du

même dessin de type 6.3A: l'opacification "orientée" en quelque sorte la projection (ce que nous avons déjà vu lorsque nous avons parlé des conventions de semi-transparence). Ou, pour reprendre l'analogie "solaire": la direction des rayons du soleil est la même, mais ils peuvent avoir deux sens possibles sur cette direction, et ce qui est à l'ombre dans un cas est au soleil dans l'autre. Dans le problème qui nous occupe, la ponctuation de la droite tracée lève cette ambiguïté, en déterminant la partie de cette droite qui est "à l'ombre".

Dans le cas général (et en supposant toujours le plan de projection vertical), l'un des deux dessins correspondra à une vue "de dessus", et l'autre à une vue "de dessous" (sauf si l'on suppose la direction de projection horizontale); et de même, l'une correspondra à une vue "de droite", et l'autre à une vue "de gauche" (sauf si l'on suppose la direction de projection de profil).

Pour visualiser ces problèmes de "point de vue" dans les différents cas que nous allons étudier, nous utiliserons l'artifice suivant, qui consiste à donner une "épaisseur" au rectangle dessiné: c'est-à-dire que nous transformerons ce rectangle en pavé droit de faible épaisseur (dessin 6.6). En effet, l'épaisseur ne doit pas être trop importante, de façon à ne pas acquérir un "poids visuel" tel qu'il vienne perturber l'impression causée par les deux autres directions du trièdre.

2- LES RÉSULTATS:

Nous allons étudier les résultats du présent test (CT) à la lumière de ceux obtenus pour le test d'interprétation spatiale de rectangles en perspective (IS). Commençons (ce n'est pas inutile) par indiquer la

correspondance entre les numéros des vingt parallélogrammes dans les deux tests. Nous avons:

IS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CT	I 4	I 3	II 4	I 1	I 2	V 2	II 2	V 4	II 1	II 3

IS	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	10'
CT	IV 2	IV 1	III 2	IV 3	IV 4	V 3	III 4	V 1	III 3	III 1

TABLEAU 13

Les résultats comparés des quatre classes (IS1, IS4, IS5 et 2.3) sont présentés dans les dessins 6.7A, B, C, D, E: on peut, ainsi que nous l'avions annoncé, y voir la grande similitude des résultats, laquelle nous a conduit à regrouper l'ensemble de ces résultats sur le dessin 6.8. (N.B.: Pour les résultats d'ensemble, nous n'avons pas représenté les points correspondant à moins de 5% de l'effectif (c'est-à-dire à 6 élèves ou moins), ceci afin de ne pas trop surcharger visuellement les dessins avec des points "marginiaux".)

Avant d'entrer dans le détail, faisons quelques remarques d'ordre général:

- i) Rappelons que, dans un "point de vue habituel" (hypothèse HH), une verticale de l'espace est représentée par une "verticale" de la feuille. Si donc un plan est vu horizontal, la droite perpendiculaire sera alors tracée verticalement sur la feuille (mais, dans un point de vue quelconque, elle pourra avoir des directions variées).
- ii) Si un plan est vu vertical, une perpendiculaire à ce plan (donc une horizontale) pourra être représentée par une droite de direction quelconque, et non pas forcément par une "horizontale" de la feuille, et ceci même avec un

"point de vue habituel".

iii) D'une façon générale, même lorsqu'ils ont une idée précise de la direction du plan représenté, les élèves savent qu'une horizontale n'est pas forcément vue horizontale, et aussi (débat avec la classe de IS4 après la passation du test IS) qu'une verticale n'est pas forcément vue verticale. D'où une incertitude quant à la direction à donner à la perpendiculaire demandée. On peut donc s'attendre, dans le cas présent, à ce que l'hypothèse HT (transfert) joue un rôle important, puisqu'elle permet un tracé de la droite en fonction d'éléments graphiques, lui donnant en quelque sorte un fondement (pseudo) rationnel. Plus précisément, on peut penser qu'un certain nombre de réponses vont être, soit perpendiculaires aux grands côtés du parallélogramme (hypothèse HTG), soit perpendiculaire aux petits côtés (hypothèse HTP). Nous allons voir ci-après ce qu'il en est, et nous nous référerons, pour la classification des "rectangles en perspective", à la façon dont ils avaient été "vus" lors du test IS, ainsi qu'à la notation correspondante (1/1', 2/2', etc.). Nous distinguerons par commodité deux types de dessins: d'une part ceux qui avaient donné lieu à une interprétation assez nettement majoritaire (groupe A et sous-groupe B1), et d'autre part ceux qui avaient présenté davantage d'ambiguïté (sous-groupe B2 et groupe C).

Premier type: interprétation majoritaire:

1- Plans vus horizontaux:

A) Groupe A:

On y trouve les dessins 1 (I 4) et 1' (IV 2), ainsi que 4 (I 1).

Le consensus, rappelons-le, était très fort pour 1 et 1' (de l'ordre de 95%), et un peu moins -mais malgré tout important- pour 4 (environ 80%).

Remarquons tout d'abord que, pour le présent test, la proportion de droites tracées verticalement est d'environ 85% pour 1/1', tandis que pour 4 elle n'est plus que de 60% environ. Ce résultat confirme que la vision "horizontale" du plan correspond à un tracé "vertical" de la perpendiculaire (ceci se rattachant, comme nous l'avons dit, à un point de vue habituel).

On peut tenter d'expliquer le consensus plus important pour 1/1' par le fait que, dans ce cas, les hypothèses HH et HT se renforcent l'une l'autre. Par conséquent, le tracé d'une perpendiculaire "verticale" correspondra à la fois à un point de vue habituel (plan de projection vertical), et à une influence des grands côtés horizontaux (HTG). Au contraire, dans le cas de 4, les hypothèses HH et HTP d'une part, et HTG d'autre part, vont entrer en concurrence (les grands côtés du parallélogramme sont obliques, et ses petits côtés horizontaux). Une influence plus grande de HT se traduira donc normalement par une proportion relativement importante de droites tracées perpendiculairement aux grands côtés obliques. Et c'est bien ce que nous pouvons constater, puisque cette direction correspond à 24% de l'effectif dans le cas de 4. (Notons également 7 "indécis", pour lesquels la direction de la perpendiculaire se situe "entre" les deux positions attendues.)

Remarquons également que la "dissymétrie" observée dans le test IS pour les dessins 4/4' apparaît moins dans le présent test (rappelons que 4' (IV 3) était vu nettement plus oblique que 4); peut-être peut-on y voir un effet de l'influence accrue de HT, si l'on attribue la vision plus horizontale de 4 à une habitude visuelle (?).

En ce qui concerne le "point de vue" de l'observateur, remarquons que tous les élèves (à deux près, au maximum) "voient" le plan de dessus: les pointillés sont situés en dessous du point d'intersection. La vue de dessus correspond ici, comme nous l'avons déjà fait remarquer (Cf. VAN SOMMERS, 1985), au point de vue "habituel" (hypothèse HH) correspondant à un plan de

projection vertical et à une direction subhorizontale, légèrement inclinée vers le bas.

En résumé: pour les parallélogrammes dont deux côtés sont horizontaux et les deux autres obliques (et plus proches de l'horizontale que de la verticale), on peut constater pour les tracés (voir dessin 6.9) une attraction de la verticale, c'est-à-dire de la perpendiculaire aux côtés horizontaux:

- massive si les côtés horizontaux sont les plus longs (environ 85%);
- majoritaire, mais moins prononcée (environ 60%) s'ils sont les plus courts; il y a alors attraction secondaire de la perpendiculaire aux côtés obliques (environ 20%).

En outre, le plan est quasi unanimement vu de dessus.

B) Sous-groupe B1:

Nous avons déjà traité le cas de 4' (IV 3), qui était le seul de ce sous-groupe à être vu "plutôt horizontal" (et non vertical).

2- Plans vus verticaux:

A) Groupe A:

On y trouve les parallélogrammes 2 (I 3) et 2' (IV 1), ainsi que 3 (II 4) et 3' (III 2).

Le consensus "vertical" pour 2/2' était, dans le test IS, de l'ordre de 90%, alors que pour 3/3' il était de 80% environ. Nous constatons ici que la proportion de droites tracées horizontalement est comprise entre 55 et 71%. La majorité des réponses semble donc influencée par l'existence de grands côtés verticaux, mais la différence en faveur de 2/2' disparaît ici. Cette perte d'avantage pour 2/2' pourrait également être attribuée à une

importance accrue de HT dans le cas présent: la présence des grands côtés verticaux primant sur la plus ou moins grande "frontalité" de la vue (à laquelle nous avons, dans le test IS, attribué le meilleur "score" vertical de 2/2': hypothèse HH).

En ce qui concerne le reste des réponses, on constate également l'influence de la grande diagonale et, à un degré moindre, celle des petits côtés (pour 3/3') et de la petite diagonale (pour 2/2'). Ici encore, ce sont donc essentiellement des éléments matériels du dessin qui semblent rendre compte du tracé de la perpendiculaire au plan.

Pour ce qui est du "point de vue", les réponses sont ici plus partagées que dans le cas des plans horizontaux. Si nous considérons toujours que le plan de projection est vertical, un pavé tel que celui du dessin 6.10A est éclairé ("vu") de dessus (et de droite), tandis que celui du dessin 6.10B est éclairé ("vu") de dessous (et de gauche). Les résultats que nous avons obtenus sont les suivants:

Parallélogramme	Vu de dessus		Vu de dessous	
	Eff.	%	Eff.	%
2 (I 3)	91	71	26	20
2' (IV 1)	93	72	22	17
3 (II 4)	87	67	33	26
3' (III 2)	89	69	31	24

TABLEAU 14

On peut donc constater que sept rectangles sur dix sont vus de dessus, ce qui correspond tout à fait à notre hypothèse HH. Notons aussi qu'un dessin tel que 6.10B peut, lui aussi, correspondre à une vue de dessus: il suffit d'imaginer une vue "plongeante" d'un mur vertical: alors, les

côtés verticaux du dessin correspondent aux bords horizontaux du mur, et les côtés obliques aux bords verticaux. Et, inversement, un dessin tel que 6.10A peut correspondre à une vue de dessous (contre-plongée). Nous n'avons plus affaire, ici, à des points de vue habituels, mais de telles interprétations, pour être marginales, ne sont pas à exclure totalement.

B) Sous-groupe B1:

On y trouve les parallélogrammes 5 (I 2) et 5' (IV 4). Ces parallélogrammes étaient vus, dans le test IS, comme non horizontaux. Dans un point de vue habituel, une vision "horizontale" du plan correspondrait à une perpendiculaire tracée verticalement. Or on ne trouve ici que moins de 7% de verticales, ce qui confirme nos hypothèses. Les principaux "pôles d'attraction" pour les perpendiculaires sont ici:

- d'abord, les grands côtés obliques (42% pour 5, 50% pour 5');
- ensuite, les petits côtés verticaux (22% pour 5, 12% pour 5').

On trouve également une zone moins bien délimitée, c'est-à-dire un peu plus étalée, située autour de la grande diagonale (c'est-à-dire entre les deux pôles principaux). Cette zone correspond à ce que nous avons appelé plus haut les "indécis"; elle représente environ 20% dans l'un et l'autre cas.

Ici encore, c'est donc nettement l'hypothèse HT qui semble gouverner le tracé de la perpendiculaire au plan dessiné. On peut d'ailleurs noter une nette différence avec le cas 2/2', étudié plus haut: les directions des côtés des parallélogrammes sont les mêmes dans les deux cas, seuls les rapports de longueurs sont inversés. Or on constate que, lorsque ce sont les côtés verticaux qui sont les plus longs, ils attirent davantage de tracés que lorsque ce sont les côtés obliques (65% contre 45% environ): les directions "privilégiées" (horizontale et verticale) ont donc davantage de "poids" que les autres.

Si nous considérons maintenant les "points de vue" implicites des élèves, nous avons, grosso modo, la répartition du dessin 6.11 (nous disons "grosso modo" en raison du fait que nous avons dû regrouper, sur un seul dessin, différentes directions, sous la condition qu'elles correspondent à des points de vue du même type; nous avons d'ailleurs agi de même pour les dessins suivants). On retrouve sur le dessin 6.11, non seulement la symétrie globale des résultats que nous avons déjà signalée, mais également l'équilibre entre deux interprétations principales:

- la première (dessins 6.11A et C) correspond à la vue "classique" d'un plan vertical (non frontal) vu de dessus;
- la seconde (dessins 6.11B et D), elle, correspond (point de vue habituel) à la vue d'un plan vertical de dessous, mais on peut également l'interpréter comme celle d'un rectangle oblique (seconde interprétation spatiale, avec 25%, dans le test IS, dont les résultats sont donc confirmés) vu de dessus. Sans doute est-ce cette dernière possibilité qui a -au moins en partie- guidé les tracés correspondants. Mais la proportion d'élèves correspondant à cette orientation de tracés est néanmoins plus élevée que celle à laquelle on aurait pu s'attendre dans ce cas. Ceci pourrait être dû au fait que l'hypothèse HT semble, dans ce test, expliquer davantage de résultats que l'hypothèse HH.

3- Plans vus obliques:

On n'en trouve ici que dans le sous-groupe B1; ils correspondent aux parallélogrammes 6 (V 2) et 6' (V 3).

Dans le test IS, le consensus "oblique" pour ces deux dessins était de l'ordre de 70% (c'est-à-dire relativement élevé, mais pas tout à fait suffisant pour permettre un classement dans le groupe A). Quant à

l'interprétation "verticale", elle était de 25% environ. On constate ici, sur les deux diagrammes circulaires correspondant à ces parallélogrammes, l'existence de deux pôles d'attraction, d'ailleurs voisins:

- un pôle principal, qui correspond aux grands côtés obliques (53% pour 6, et 50% pour 6');
- un pôle secondaire, qui correspond aux tracés horizontaux (29% pour 6, et 27% pour 6'). (N.B.: la grande diagonale du parallélogramme est ici très voisine de la verticale.)

Ces résultats correspondent donc à ceux que nous avons obtenus dans le test IS. C'est encore une fois la direction des grands côtés qui attire la majorité des réponses, mais la présence du second pôle est susceptible de plusieurs interprétations; en particulier:

- ou bien, influence de l'élément "implicite" que constitue la grande diagonale (hypothèse HT "étendue");
- ou bien, influence de la vision "verticale" du rectangle dessiné (hypothèse HH), combinée avec un transfert de l'horizontalité (hypothèse HT)...

En ce qui concerne le "point de vue", les résultats sont indiqués dans le dessin 6.12. Il y a cette fois un net avantage en faveur de l'un des deux "points de vue", et le rapport de fréquences entre les deux orientations est du même ordre pour les deux pôles de tracés (71% pour 6.12A et 68% pour 6.12C, contre 23% pour 6.12B et 6.12D). On peut tenter d'interpréter (de manière tout à fait subjective) ce résultat en disant que les dessins "minoritaires" 6.12B et 6.12D évoquent plutôt des rectangles (des murs) verticaux en vue plongeante, alors que les dessins "majoritaires" 6.12A et 6.12C font plutôt penser à des rectangles obliques vus (légèrement) de dessus (on peut effectivement remarquer que les quatre dessins peuvent être interprétés comme des vues de dessus). Ceci correspondrait bien à

l'interprétation donnée à ces parallélogrammes dans le test IS, où ils étaient davantage vus obliques que verticaux. Nous avons bien sûr conscience de la part d'incertitude qui intervient dans cet essai d'interprétation, simple tentative d'explication des résultats basée sur nos deux hypothèses HH et HT.

Second type: dessins ambigus:

Il nous reste donc maintenant à nous intéresser au cas plus délicat des parallélogrammes les plus ambigus, c'est-à-dire ceux que, dans le test IS, nous avons rangés dans le sous-groupe B2 ou le groupe C.

1- Sous-groupe B2:

C'est le cas des parallélogrammes 7 (II 2) et 7' (III 4), pour lesquels le rectangle est vu "non horizontal", ainsi que de 8 (V 4) et 8' (V 1), où le rectangle est vu "non vertical".

a) Parallélogrammes 7/7':

Dans le test IS, le rectangle était vu à peu près également vertical ou oblique, d'où le classement dans le sous-groupe B2. Dans le présent test nous constatons une fois encore la présence de deux pôles:

- pôle principal: les grands côtés (obliques): 63% dans les deux cas (en y incluant les réponses correspondant à la petite diagonale, très voisine);
- pôle secondaire: les petits côtés (verticaux): 19% pour 7, 24% pour 7'.

Aucune équivoque non plus ici: c'est bien HT qui rend le mieux compte du tracé de la perpendiculaire. De plus, les côtés obliques dament le pion aux côtés verticaux, ceci étant dû très vraisemblablement au fait

qu'ils sont les plus longs.

Autre fait digne de remarque: la grande analogie des résultats concernant ce cas avec ceux obtenus dans le cas précédent (6/6'), dans lequel les grands côtés obliques avaient la même direction proche de la verticale, tandis que les petits côtés étaient obliques (subverticaux) au lieu d'être verticaux. On peut alors penser que l'existence du pôle secondaire n'est pas tant due à la présence de côtés verticaux qu'au fait que le rectangle est vu vertical (la présence effective de côtés verticaux favorisant cette "vision", mais n'étant pas indispensable). Ceci est d'autant plus plausible que la proportion des réponses correspondant au pôle secondaire est du même ordre de grandeur dans les deux cas (28% pour 6/6', contre 22% pour 7/7').

Relativement au "point de vue", nous retrouvons également le même phénomène que dans le cas 6/6' (dessin 6.13): une interprétation majoritaire (64% pour 6.13A et 70% pour 6.13C), face à une interprétation minoritaire (29% pour 6.13B et 25% pour 6.13D). On ne peut en effet manquer d'être frappé par la grande analogie des résultats obtenus (comparer avec le dessin 6.12), alors que -rappelons-le- les dessins correspondent à des "vagues" différentes, donc à des moments différents de la passation du test: aucune contamination n'a donc pu avoir lieu. Cela est dû, bien sûr, à la "similitude visuelle" des deux cas, que nous avons déjà évoquée, mais est également un indice en faveur de la fiabilité des résultats statistiques. Autre (très léger) indice allant dans le même sens (nous le donnons pour ce qu'il vaut): il se trouve que, par erreur, et sans s'en rendre compte, une élève de Première S1 a rempli deux fois la même feuille, lors de deux "vagues" différentes de la passation; ses réponses ont été absolument identiques.

Nous donnerons bien entendu ici la même "tentative

d'explication" des points de vue que pour 6/6'.

b) Parallélogrammes 8/8':

Dans le test IS, le rectangle était vu à peu près également horizontal ou oblique. Dans le présent test, nous pouvons constater sur les cercles la présence de trois pôles, avec une dissymétrie entre les deux dessins:

- dans le cas de 8', le pôle principal est celui des grands côtés obliques (48%), suivi de la direction verticale (22%); enfin, un troisième pôle est constitué par la grande diagonale (13%).

- dans le cas de 8, les deux premiers pôles sont intervertis: c'est la verticale qui vient en tête (41%), suivie des grands côtés (28%); en troisième lieu, vient encore la grande diagonale (16%).

Le pôle correspondant aux grands côtés s'explique évidemment par l'hypothèse HT (laquelle explique également l'existence du troisième pôle, à moins que celui-ci ne corresponde aux "indécis", hésitant entre les deux principaux pôles). Pour justifier l'existence des tracés verticaux, il nous suffit de rappeler que 50% environ des élèves avaient vu les rectangles correspondants comme horizontaux, au cours du test IS. On peut également comparer les résultats étudiés ici avec ceux obtenus dans le cas de 4/4' (voir plus haut): on retrouve les mêmes points sur les diagrammes circulaires; seules les proportions sont quelque peu différentes: la verticale a plus de force dans le cas de 4/4' (ce que l'on peut bien sûr expliquer par la présence des petits côtés horizontaux), mais tout le reste est comparable. On peut donc, ici comme dans le cas précédent, attribuer l'existence de ce pôle plus à la façon dont est "vu" le rectangle dessiné qu'à la présence d'éléments matériels du dessin.

(N.B.: On aura remarqué que ce pôle vertical correspond au trièdre trirectangle vu en perspective isométrique.)

Les différents "points de vue" sont visualisés sur le dessin 6.14, et correspondent bien sûr à ce que nous avons pu observer dans le cas de 4/4': le rectangle est vu de dessus.

2- Groupe C:

Il nous reste maintenant à étudier le cas des parallélogrammes 9 (II 1) et 9' (III 3) d'une part, et de 10 (II 3) et 10' (III 1) d'autre part.

a) Parallélogrammes 9/9':

Dans le test IS, le rectangle était vu plutôt horizontal (à près de 50%), les deux autres interprétations étant de l'ordre de 25%. Ici, les résultats sont beaucoup plus tranchés: il y a en fait un seul véritable pôle, correspondant aux grands côtés horizontaux (66% pour 9, et 68% pour 9'). Un second pôle existe bien, correspondant à la grande diagonale, mais il est très minoritaire (10% environ). Dans le test IS, nous avons attribué l'interprétation horizontale à HT, et les autres à HH (l'hypothèse "horizontale" ne correspond pas à un "point de vue" habituel, mais à un "point de vue" surélevé). Et, si l'on compare maintenant les résultats obtenus ici avec ceux de 1/1' (dessins qui ne diffèrent que par l'angle des petits côtés obliques avec les grands côtés horizontaux), on s'aperçoit que la "déperdition horizontale" est moins forte ici que dans le test IS (on passe de 85% à 65% environ ici, alors qu'on passait de 95% à 50% dans le test IS): l'hypothèse HT réalise donc un "score" nettement meilleur dans le présent test (influence accrue).

Pour ce qui concerne les "points de vue" (dessin 6.15), la quasi-totalité des élèves "voient" le plan de dessus (94% pour 1, et 90% pour 1'), comme on pouvait s'y attendre. On note pourtant 10% d'élèves qui semblent avoir vu en 9' un plan horizontal de dessous, à moins qu'il ne s'agisse d'un

plan oblique (ou vertical) vu de dessus (dessin 6.15C)?

b) Parallélogrammes 10/10':

Le rectangle correspondant était surtout vu, dans le test IS, horizontal ou oblique: plutôt vertical pour 10 (46% contre 33%), et plutôt oblique pour 10' (52% contre 35%); les résultats étaient donc assez dispersés. La dispersion est moins grande ici: on constate essentiellement l'existence de deux pôles, d'importance à peu près comparable:

- premier pôle: les grands côtés obliques (24% pour 10, 33% pour 10');
- second pôle: les petits côtés horizontaux (31% pour 10, 25% pour 10').

Les autres réponses se répartissent dans la zone intermédiaire entre les deux principaux pôles (les "indécis"?). A signaler également, dans le cas de 10', 8% de droites horizontales (attraction de l'horizontale vis à vis des perpendiculaires aux grands côtés?). Ici encore, c'est donc bien l'hypothèse HT qui rend compte de la majorité des réponses des élèves.

En ce qui concerne les "points de vue" (voir dessin 6.16), nous nous contenterons de dire que les dessins 6.16A et 6.16C correspondent, selon toute vraisemblance, à une vue de dessus d'un rectangle oblique; quant aux dessins 6.16B et 6.16D, ils évoquent, soit un rectangle oblique vu de dessous, soit un rectangle vertical en vue plongeante.

3- SYNTHÈSE:

Cette étude nous aura donc permis une nouvelle confrontation de nos deux hypothèses avec une situation très courante en dessin de géométrie de l'espace, qui est le tracé d'une perpendiculaire à un plan donné. Comme nous nous y attendions, les réponses des élèves n'ont pas été aléatoires, et nous

avons pu, sur les diagrammes circulaires, mettre en évidence un ou plusieurs pôles d'attraction, que nous avons mis en relation avec des éléments du "dessin de plan" à partir duquel devait se faire le tracé. En effet, dans 16 des 20 dessins considérés, le pôle principal est constitué par la direction des grands côtés (c'est-à-dire que les élèves tracent une droite perpendiculaire aux grands côtés du parallélogramme dessiné). Le tableau suivant récapitule d'ailleurs, pour chacun des 20 dessins, le pourcentage de droites tracées perpendiculairement aux grands côtés:

N° dessin	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
%	88	62	71	24	42	53	56	28	66	24

N° dessin	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	10'
%	85	55	70	29	50	50	55	48	68	33

TABLEAU 15

Dans les quatre exceptions relevées (dessins 4/4', 8 et 10, ces deux derniers cas se situant d'ailleurs à la limite), ce pôle vient en seconde position, après les tracés verticaux. Comme nous nous y attendions, c'est donc l'hypothèse HT qui, dans le présent test, explique le mieux les résultats observés. Ceci peut se justifier de la façon suivante: ce qui est demandé à l'élève, c'est le tracé d'une droite de l'espace perpendiculaire à un plan donné (lequel est, selon la coutume, représenté par un parallélogramme, image d'un rectangle inclus dans le plan). L'élève est, de plus, informé du fait que toutes les possibilités sont acceptables; mais, malgré tout:

1°) il se représente (à juste titre) le dessin donné comme un rectangle de l'espace, et il lui confère, de façon plus ou moins inconsciente, une orientation spatiale particulière;

2°) il va, pour le tracé demandé, se référer, toujours de façon plus ou

moins inconsciente:

a) soit à la "vision" qu'il a du plan dans l'espace (cf 1°),

b) soit à des éléments matériels de la représentation du plan (en particulier les grands côtés).

Nous avons vu, dans le test IS, que les hypothèses HH et HT, complémentaires l'une de l'autre, pouvaient expliquer les façons dont les élèves "voient" un rectangle dessiné sous forme de parallélogramme; on pouvait donc penser que ces deux hypothèses pouvaient intervenir dans le tracé demandé. Mais, en raison de la nature particulière de la tâche, nous pensons que le transfert de propriétés de l'objet au dessin

(hypothèse HT) pourrait jouer un rôle plus grand: plus précisément, le fait de demander le tracé d'une droite perpendiculaire à un objet spatial pourrait inciter à la tracer perpendiculaire à une droite liée au dessin de cet objet. Et c'est bien ce que nous avons pu constater en effet; nous pouvons même ajouter que la direction servant de "support" privilégié au tracé de la perpendiculaire est, dans la plupart des cas, celle des côtés les plus longs du parallélogramme représentant le plan (ce qui s'explique aisément par le fait que ces côtés sont les éléments du dessin les plus "voyants").

D'autre part, comme nous l'avons fait remarquer, le tracé de la droite, même assorti d'une ponctuation, ne suffit pas à déterminer précisément la façon dont est "vu" le trièdre (donc le plan) représenté. Nous avons donc dû nous en tenir parfois à des "présomptions" qui, même fortes, ne sauraient être tenues pour des certitudes absolues. Quoi qu'il en soit, nous avons pu retrouver ici les traces de l'hypothèse HH, par la constatation que la grande majorité des tracés correspond à une vue de dessus du rectangle; et ceci, bien sûr, correspond à un "point de vue habituel" (cf. "There are more things that stick up than hang down"),

Enfin, comme dans le cas du test IS, nous sommes maintenant à même de préciser quels sont ceux des dessins étudiés qui présentent une ambiguïté aussi réduite que possible, c'est-à-dire ceux pour lesquels le consensus dans le complètement du trièdre est le plus fort.

Ainsi, en ce qui concerne les plans vus horizontaux, le "meilleur choix" est constitué par les parallélogrammes 1 et 1', pour lesquels ce consensus est de l'ordre de 85% (dessins 6.17A et B); ceci n'est guère étonnant puisque les parallélogrammes seuls étaient vus, dans le test IS, quasi-unanimement comme les images de plans horizontaux. D'où deux excellentes raisons pour réaliser la quasi-unanimité sur le tracé de la perpendiculaire:

- le "point de vue" habituel (hypothèse HH): le plan est vu légèrement de dessus, et une perpendiculaire à un plan horizontal (donc une verticale) est, dans une telle perspective, représentée par une verticale de la feuille;

- le "transfert" (hypothèse HT): en raison de la tendance observée à tracer une perpendiculaire aux grands côtés pour représenter une perpendiculaire au plan lui-même (d'ailleurs renforcée ici par la "loi de la pesanteur" déjà évoquée), on peut s'attendre à ce que la droite demandée soit dessinée verticale.

Les dessins 6.17A et 6.17B peuvent donc être considérés -avec un faible risque d'erreur- comme représentant, pour près de 9 élèves sur 10, un plan horizontal vu de dessus, assorti d'une droite verticale.

En second lieu viennent les parallélogrammes 9 et 9', pour lesquels le consensus est de l'ordre de 45% (dessins 6.17C et D). Ce résultat est sans doute, à première vue, un peu plus inattendu que le précédent, étant donné que le consensus "horizontal" -dans le test IS- était nettement moins élevé pour les parallélogrammes seuls (au plus 50%). Ceci peut néanmoins s'expliquer sans trop de peine de la manière suivante:

- consensus moins fort que dans le cas de 1/1': ceci est lié à

l'interprétation du parallélogramme seul: comme nous l'avons fait remarquer dans l'étude du test IS, le point de vue est ici moins "habituel" (vue plus plongeante), et ceci aura tendance à se traduire également sur le tracé de la perpendiculaire demandée;

- consensus plus fort que dans le test IS: comme nous avons pu le constater, l'hypothèse HT revêt ici une importance plus grande. La tendance pourra donc être de tracer une perpendiculaire aux grands côtés (horizontaux). On aboutit alors à un dessin transformé, c'est-à-dire, en fait, à un nouveau dessin, représentant un plan assorti d'une perpendiculaire. Ou, si l'on fait abstraction du processus d'obtention, au dessin d'une droite verticale (HH et HT), assortie d'un plan perpendiculaire (HT): en effet, le dessin vu dans son ensemble présente deux longues horizontales et une verticale (directions privilégiées), ce qui selon nous incite à considérer le plan comme perpendiculaire à la droite verticale, c'est-à-dire comme horizontal. En résumé: le tracé de la verticale renforce la "vision" du plan comme horizontal.

Ce phénomène est bien connu dans les situations perceptives ambiguës, pour lesquelles, au départ, aucune signification n'apparaît; "mais lorsque la signification d'objet surgit, il y a une refonte de l'ensemble et les éléments épars au premier abord apparaissent autrement ou disparaissent en tant qu'éléments" (FRANÇES R. 1981, p.76). En fait, l'interprétation spatiale définitive n'a lieu qu'après le complètement du dessin; il se produit donc une rétroaction que l'on peut schématiser ainsi:

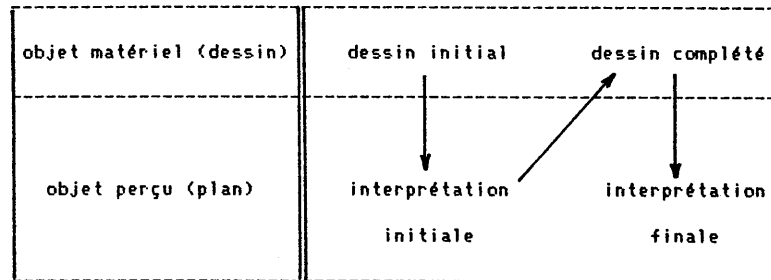


TABLEAU 16

L'influence en retour de la signification initialement attribuée au percept sur la perception finale de celui-ci est un phénomène tout à fait général, comme le fait remarquer Maurice REUCHLIN: "d'une part (...) l'interprétation utilise nécessairement les matériaux que le sujet puise dans son expérience personnelle, dans son savoir personnel. D'autre part, la signification ainsi attribuée à la construction perceptive exerce une action en retour, une rétroaction, un feed back, sur la construction elle-même, qui se complète, sélectionne ou réorganise les informations sensorielles qu'elle décide d'utiliser en fonction de l'interprétation choisie" (REUCHLIN 1978, p.95). Ce qui fait la particularité du cas que nous étudions présentement, c'est simplement le fait que cette rétroaction est en quelque sorte amplifiée par la modification matérielle du dessin initial, suite à une première interprétation spatiale.

Dans la conclusion du test IS, nous avons souligné l'intérêt qu'il y avait à prendre, pour le dessin d'un plan horizontal, un parallélogramme tel que 1 (ou 1'), de préférence à un parallélogramme tel que 9 (ou 9'). En ce qui concerne le dessin d'un trièdre trirectangle, cet intérêt existe encore, mais sans doute est-il moins crucial de veiller à ce que l'angle de l'oblique avec l'horizontale soit "faible" (on a cependant tout intérêt à le faire, dans la mesure du possible). L'une des raisons qui,

selon nous, pousse les auteurs des dessins des manuels (qui, notons-le, ne sont pas forcément les auteurs des manuels) à adopter des côtés obliques plus proches de la verticale dans leurs représentations de plans est que ce choix permet un encombrement réduit, pour une même "hauteur utile". Sur l'exemple du dessin 6.18, on voit que la largeur totale du dessin est, dans le premier cas, $E = L + h \cdot \cot 30^\circ$, alors que dans le second elle n'est que $E' = L + h \cdot \cot 70^\circ$. Le gain en largeur est donc: $E - E' = h \cdot (\cot 30^\circ - \cot 70^\circ)$, soit environ $1,37h$ (ce qui est loin d'être négligeable; ainsi, pour une hauteur de 2cm, le gain en largeur est-il de près de 3cm!).

Ce choix correspond peut-être également -de façon plus ou moins inconsciente- au même désir que chez les artistes "naïfs" ou "primitifs": rapprocher les côtés obliques de la verticale peut avoir deux effets principaux sur le lecteur du dessin, effets tous deux liés à l'hypothèse HH:

- ou bien le plan est vu oblique, plutôt qu'horizontal;
- ou bien le plan reste "vu" horizontal, mais en vue plongeante.

La vue plongeante permettant de mieux montrer (de mieux "faire savoir") ce qui se trouve sur (ou dans) le plan, on comprend pourquoi ce parti pris a pu être adopté par les naïfs et les primitifs: il se situe davantage du côté du savoir. Un dessin humoristique de HARVEY, paru il y a quelque temps dans le "Bulletin" de Sydney, et cité par GOMBRICH (GOMBRICH 1982 B,p. 21), semble tout à fait indiqué pour illustrer notre propos (dessin 6.19): à ceci près que l'artiste a réalisé un pastiche de dessin médiéval dans lequel figure une perspective "proto-linéaire", l'idée est tout à fait la même. La légende de ce dessin est: "It's the way they draw these wretched tables" (c'est-à-dire, à peu près: "C'est comme ça qu'ils dessinent ces f...iches tables"). Ainsi que le dit GOMBRICH:

"To us, at least, the medieval convention suggests in fact that the table is tilted and that nothing could stand on it."

(Pour nous, au moins, la convention médiévale suggère en fait que la table est penchée et que rien ne pourrait tenir dessus)

Le "nous" est ici essentiel: nous situons ("la" perspective est passée par là, donc nos habitudes visuelles ont changé) du côté du voir, alors que l'artiste médiéval se plaçait, lui, du côté du savoir (en fait, nous l'avons dit, du côté du "faire savoir", de l'information à transmettre).

Pour en terminer avec les parallélogrammes 1/1' et 9/9', remarquons que, chez les élèves, la latéralisation n'a pratiquement aucune influence sur les résultats: la latéralisation "droite" traditionnelle n'est donc ici rien de plus qu'une simple tradition, et n'a apparemment pas de fondement plus profond (biologique, social ou autre): le consensus n'est pas meilleur pour les versions "droites". Quant aux raisons de cette tradition, des recherches sur l'origine des représentations planes "classiques" en géométrie de l'espace nous l'apprendraient peut-être...

Un autre rectangle vu horizontal bénéficie d'un consensus assez important: il s'agit de 4/4' (dessins 6.17E et F), avec environ 55%. Nous avons déjà noté qu'ici le consensus ne s'établit pas sur la perpendiculaire aux grands côtés du parallélogramme, mais sur la verticale, perpendiculaire aux petits côtés horizontaux. Ceci est manifestement lié au fait que les parallélogrammes 4/4' sont majoritairement vus horizontaux (donc, ici, plus à HH qu'à HT, quoique cette "vision" horizontale soit favorisée par la présence des petits côtés horizontaux). Remarquons que la proportion de droites verticales obtenues ici est cependant moins élevée que celle des interprétations horizontales dans le test IS: cela est dû, pensons-nous, à l'attraction exercée par les grands côtés obliques (hypothèse HT). Notons également qu'ici la dissymétrie relevée sur les parallélogrammes 4 et 4' seuls disparaît par l'adjonction de la perpendiculaire.

En ce qui concerne les plans vus verticaux, nous avons un consensus

du même ordre de grandeur (55%) pour les parallélogrammes 3/3' (dessins 6.17G et H), qui étaient vus verticaux à 80% dans le test IS. Pour les parallélogrammes 2/2' (dessins 6.17J et K), qui n'en diffèrent que par l'inclinaison des petits côtés obliques, le consensus vertical était meilleur dans le test IS (environ 90%), alors qu'ici la proportion de droites horizontales est du même ordre de grandeur (46% en moyenne). Notre hypothèse d'une influence ici réduite de HH permet d'expliquer ce résultat: le meilleur "score" vertical de 2/2' dans le test IS était dû au rôle de HH ("point de vue" plus frontal); dans le cas présent, cette influence étant moins forte, la différence tend à s'estomper; on peut d'ailleurs constater que l'ensemble des répartitions des réponses pour 2/2' et 3/3' semble bien analogue.

Enfin, pour ce qui est des plans vus obliques, le seul cas qui donne ici un consensus de l'ordre de 50% est 8' (le pourcentage était comparable pour le test IS), avec une perpendiculaire oblique (dessin 6.17L).

4- CONCLUSION:

Le consensus le plus fort porte -et de loin- sur le plan horizontal vu de dessus, associé à une verticale, où il peut avoisiner 90% (ce qui correspond, nous l'avons vu, à la représentation la plus fréquente dans les manuels). En deuxième position vient le plan vertical associé à une horizontale (environ 50%), suivi par le plan oblique associé à une oblique (moins de 50%).

D'une part, ceci confirme bien notre hypothèse de départ (influence prépondérante de HT), et met également en évidence la référence implicite à un point de vue habituel: la vue de dessus (hypothèse HH). Ensuite, ceci montre l'importance que revêt un repère spatial constitué de deux axes horizontaux (dont l'un frontal) et d'un axe vertical. Ce qui n'est guère étonnant, eu

égard à l'omniprésence de la verticale dans tout ce qui se passe à la surface de la Terre, et justifie, d'une part l'importance de la perspective cavalière, et d'autre part la tradition bien établie en ce qui concerne la représentation des repères orthogonaux de l'espace (même si le choix de la latéralisation "droite" semble bien n'apporter aucune amélioration particulière).

CHAPITRE 7:
REPRÉSENTATIONS D'UNE PYRAMIDE.

Dans le but de préciser la façon dont les lycéens intègrent "voir" et "savoir" dans la représentation de l'espace en géométrie, et en particulier quelles sont les propriétés qu'ils jugent importantes à transférer de l'objet au dessin, nous nous sommes intéressés à leur production graphique d'objets spatiaux. Nous désirions leur demander de dessiner (avec une consigne explicite de communication) un objet familier, mais nous voulions que les représentations qu'ils donneraient de cet objet nous permettent d'accéder à leur démarche. C'est pourquoi nous avons rejeté le cube, dont la représentation est trop stéréotypée à ce niveau (nous avons d'ailleurs pu le vérifier nous-même au début de notre recherche), et dont l'évolution des représentations chez les enfants est déjà connue; nous avons également éliminé -tout au moins dans ce premier temps, car il y aurait là, sans aucun doute, une étude intéressante à entreprendre sur la représentation du cercle en perspective- les corps ronds (cône, cylindre, sphère), et avons porté notre choix sur un solide dont nous pensons que tous les élèves de lycée ont une image mentale suffisamment précise (ne serait-ce que grâce à l'Histoire), et qui de plus est aisé à définir: la pyramide régulière à base carrée. Au début des années scolaires 1986-87 et 1987-88 nous avons donc -avec l'aide de notre collègue Marie-Hélène CLAISSE- soumis cinq classes du lycée Michelet de Vanves (totalisant 156 élèves) au test ci-après.

1- LE TEST :

On dispose d'une pyramide-squelette régulière de 20 cm de hauteur, à base carrée de 15 cm de côté, réalisée dans de la baguette de bois à section

carrée de 4 mm. S'adressant à la classe, le professeur déclare :

"Voici une pyramide régulière (il la montre); sa base est un carré, et ses faces latérales sont des triangles isocèles. Vous allez, sur la feuille blanche qui va vous être distribuée, réaliser un dessin soigné d'une telle pyramide, en supposant les arêtes d'épaisseur négligeable et en utilisant les instruments de dessin qui vous sembleront utiles. Le but à rechercher est le suivant: quelqu'un qui n'est pas prévenu doit pouvoir reconnaître que votre dessin représente une pyramide régulière à base carrée (la maquette est alors rangée hors de vue des élèves). Vous n'utiliserez pas d'autre papier que celui que l'on va vous fournir et, si vous dessinez des traits auxiliaires de construction, ne les effacez pas."

Remarques:

1) le but officiellement annoncé (l'objet doit être identifiable par son dessin), destiné à mettre l'élève en situation de communication (mais ne l'est-il pas toujours, étant donné qu'il sait que sa production sera vue, au moins par le professeur? C'est la "projection" au sens psychologique, dont nous parlons dans le Chapitre 1), ne peut être théoriquement atteint sans l'aide d'indications, plus ou moins conventionnelles, de dessin: égalités de longueurs, angles droits, etc. Mais cela n'était pas dit, car nous voulions voir si les élèves en feraient spontanément usage pour introduire leur "savoir" dans leurs productions. Or, seuls 25 élèves sur 156 (soit 1 sur 6) ont utilisé de telles indications, dont 3 seulement de façon suffisante pour la détermination de la nature exacte de l'objet (moyennant la convention implicite que les segments dessinés représentaient bien des segments de l'espace). Ceci montre que la nécessité -pourtant quasi-constante- d'utiliser des éléments extérieurs au dessin proprement dit de l'objet (conventions graphiques, légende...) pour définir celui-ci n'est pas fortement ressentie, même à ce niveau, et qu'il n'est pas si évident que le dessin, à lui seul,

ne peut pas se substituer à l'objet tridimensionnel qu'il représente.

2) La nécessité d'utiliser du papier non quadrillé s'impose, par le fait même que l'on ne veut pas que le dessin soit influencé par les traits du quadrillage (parallélisme, perpendicularité, obliques à 45°, etc.). C'est d'ailleurs une constante dans l'enseignement de la géométrie -sauf cas particuliers.

3) Rien n'était dit, lors de la présentation de l'objet, sur "la" hauteur, élément de symétrie de la pyramide. Nous voulions en effet voir si cet élément non figuré serait utilisé pour la réalisation du dessin, comme c'est le cas dans la représentation traditionnelle.

4) L'allusion aux traits de construction avait pour but (inavoué) de permettre le contrôle, lors de l'étude des productions des élèves, des moyens utilisés pour obtenir la position de l'image du sommet de la pyramide. Le dessin "classique", en perspective parallèle, d'une pyramide régulière représente en effet la hauteur de cette pyramide comme une "verticale" passant par le dessin du centre du cercle circonscrit à la base. On en trouvera quelques exemples, extraits de manuels d'ancienneté diverse (CHÈNEVIER 1931, p.564; MARIJON 1947, p.322; LOUQUET et al. 1986, p.296), respectivement dans les dessins 7.1A, B, C.

Plus particulièrement, le dessin classique, en perspective cavalière, d'une pyramide régulière à base carrée consiste à représenter (dessin 7.2):

- la base par un parallélogramme dont les côtés les plus longs sont "horizontaux" (c'est-à-dire parallèles aux bords supérieur et inférieur de la feuille), et les autres obliques et "montant vers la droite";

- la hauteur relative à cette base par une "verticale" passant par le centre du parallélogramme de base (le sommet étant situé au-dessus de ce parallélogramme).

N.B.: la représentation d'une pyramide régulière à base carrée dans une perspective parallèle quelconque n'impose comme condition que la représentation de la base par un parallélogramme, à l'exclusion de toute autre (voir Appendice 10). Les autres conditions ne sont dues qu'aux particularités propres à la perspective cavalière: l'un des côtés du carré de base, ainsi que la hauteur, sont parallèles au plan de projection, et ont par conséquent des images qui leur sont parallèles, et donc perpendiculaires l'une à l'autre.

2- LA POPULATION :

Il s'agit, comme nous l'avons dit, de cinq classes du lycée Michelet, qui sont les suivantes:

- Seconde 3 (notée 2.3): 33 élèves présents;
- Première S1 (notée 1S1): 35 élèves présents;
- Première S2 (notée 1S2): 30 élèves présents;
- Première S4 (notée 1S4): 33 élèves présents;
- Terminale D1 (notée TD1): 25 élèves présents.

Soit un total de 156 élèves.

Les âges de ces élèves s'échelonnent donc entre 14 et 19 ans, et nous pourrions voir ainsi si des différences importantes apparaissent ou non dans leurs productions, liées à l'âge ou au passé scolaire.

3- LES PRODUCTIONS :

Nous nous sommes plus particulièrement intéressé aux quatre aspects suivants des dessins produits par les élèves:

- position de l'image de la base par rapport aux bords de la feuille

("grands côtés" horizontaux?);

- forme de l'image de la base (quels quadrilatères?);
- (dans le cas où cette image est un parallélogramme) angle des côtés (aussi élevé que pour les dessins de plan?);
- position de l'image du sommet par rapport à celle de la base (comme dans le stéréotype des manuels?).

1- Position de l'image de la base par rapport aux bords de la feuille:

Bien entendu, nous désignerons ici par "horizontale" une droite parallèle aux bords supérieur et inférieur de la feuille de papier, et par "verticale" une droite parallèle aux bords droit et gauche de cette feuille.

Nous avons distingué trois cas:

- H: l'un (au moins) des côtés du quadrilatère représentant la base est horizontal;
- S: le quadrilatère a un axe de symétrie vertical;
- X: autres cas.

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-dessous:

Cas \ Classe	2.3	1S1	1S2	1S4	TD1	Total
H	28	33	23	28	23	135
S	1		2	2		5
X	4	2	5	3	2	16
Total	33	35	30	33	25	156

TABLEAU 17

On voit que les résultats sont les mêmes dans toutes les classes: le premier cas a été choisi par au moins 3 élèves sur 4 dans chacune. Ceci

n'est guère surprenant (ce choix confère une "assise" à l'objet), et correspond à la perspective cavalière si le quadrilatère est un parallélogramme.

2- Forme de l'image de la base:

Nous avons cette fois distingué 6 cas:

- C: carré
- L: losange (non carré)
- R: rectangle (non carré)
- P: parallélogramme (ni losange, ni carré)
- T: trapèze (non parallélogramme)
- Y: autres quadrilatères

Les résultats figurent dans le tableau suivant:

Cas \ Classe	2.3	1S1	1S2	1S4	TD1	Total
C	10	4	4	2	3	23
L	8	5	11	14	9	47
R	1		1	1		3
P	13	23	9	14	11	70
T		2	3	2	2	9
Y	1	1	2			4
Total	33	35	30	33	25	156

TABLEAU 18

Ce tableau amène différentes constatations:

1) le parallélisme des arêtes de base est conservé par la quasi-totalité des élèves (plus de 9 sur 10), argument en faveur de la perspective parallèle,

meilleure préservatrice (via le transfert) des propriétés de l'objet que la perspective centrale.

2) C'est en Seconde que la fréquence du carré est la plus grande. Ce résultat, obtenu sur une seule classe, demanderait cependant à être contrôlé sur un effectif plus important. S'il était confirmé, il conforterait notre thèse de la prédominance plus forte du transfert de propriété chez les élèves les plus jeunes (plus proches du pôle "savoir"): l'un des éléments essentiels de l'objet étant le carré de base, on le représente par un carré.

3) Dans les autres classes, deux mêmes formes occupent toujours les deux premières places: le parallélogramme et le losange; à elles deux, elles constituent en tout à peu près les trois quarts de l'effectif total. Elles rendent par conséquent compte de la grande majorité de la production. Ces deux représentations correspondent à une vue "de côté" du solide, par opposition au carré et au rectangle, qui correspondent à une vue "de face" (N.B.: les termes "de côté" et "de face" font ici référence à la position d'un observateur (fictif!) placé à l'infini).

Cette différence de "point de vue" explique la désaffection dont souffrent le rectangle et (dans une moindre mesure cependant) le carré: une vue de face rend beaucoup moins bien l'effet de profondeur, en perspective parallèle, qu'une vue de côté (le "voir" est sacrifié). Cette désaffection frappe d'ailleurs surtout le rectangle (2% des cas seulement) qui, par rapport au carré (15%) possède un désavantage majeur: le carré en effet, comme nous l'avons dit plus haut, donne l'image conforme de la base de la pyramide, et ceci peut dans une certaine mesure compenser cela, la représentation du "su" se substituant en quelque sorte à celle du "perçu".

De manière analogue, la fréquence relativement grande du losange (à laquelle, à l'époque des premières passations, nous ne nous attendions pas

particulièrement) s'explique évidemment par le transfert de l'égalité de longueur des côtés de la base. La base étant carrée, l'idéal serait de la représenter par un carré; mais l'image ainsi donnée de l'objet est beaucoup moins satisfaisante, visuellement, par manque de relief (dessins 7.3A et B).

A l'opposé, la représentation de la base par un parallélogramme ne conserve que le parallélisme des côtés de cette base, mais l'effet de perspective est beaucoup plus convaincant.

Entre ces deux "pôles" extrêmes nous trouvons... le losange qui, tout en conservant l'essentiel de l'avantage visuel du parallélogramme, préserve de plus l'égalité de longueur des quatre côtés de la base, par rapport au parallélogramme "normal" de la représentation traditionnelle en perspective cavalière (dont les côtés obliques sont plus courts que les côtés horizontaux). D'où son succès (30% des cas). Plus précisément, le losange présente à la fois un avantage (du côté du savoir) et un inconvénient (du côté du voir):

- inconvénient: le rapport de réduction selon les fuyantes, égal à 1, tend à faire apparaître le carré comme trop allongé en profondeur (sauf si l'angle des côtés est faible).

- avantage: la conservation de l'égalité des longueurs des côtés.

Ainsi, les élèves qui choisissent le parallélogramme se placent du côté de la représentation du "voir" (ils donnent à voir), tandis que ceux qui optent pour le losange (tout comme ceux qui choisissent le carré) sont davantage du côté de la représentation du "savoir" (ils font savoir). En l'occurrence toutefois, on serait arrivé à un résultat optimum, et de façon plus économique, par le tracé d'un parallélogramme aux côtés obliques plus courts que les côtés horizontaux (préservation du "voir"), à condition de lui adjoindre, par exemple, une indication d'égalité de longueurs des côtés, par exemple grâce aux "petits traits" transversaux traditionnels

(préservation^{du} "savoir"). Mais cela, apparemment, n'est pas une pratique habituelle ou spontanée chez nos élèves, et nécessite un apprentissage, ou à tout le moins une sensibilisation.

3- Angle des côtés du parallélogramme représentant la base:

Notre but était de comparer cet angle à ceux que nous avons pu observer dans les manuels, tant pour les dessins de plan que pour les dessins de cube. Pour 156 élèves, 117 dessins représentent la base par un parallélogramme non rectangle (éventuellement losange). Pour ces 117 dessins, nous avons mesuré l'angle aigu des côtés du parallélogramme, et nous avons regroupé les résultats en classes de 10° d'amplitude. Ces résultats figurent dans le tableau qui suit, et sont représentés sur le polygone de fréquences du dessin 7.4:

Angle	20/29°	30/39°	40/49°	50/59°	60/69°	70/79°	80/89°	Total
Effectif	5	13	23	26	26	20	4	117
%	4	11	20	22	22	17	4	100

TABLEAU 19

Le polygone a une allure qui ne correspond apparemment pas à celle que nous avons pu observer chez des élèves de même âge et de même niveau, alors que la tâche consistait à "dessiner un plan" (voir plus loin, dans le Chapitre 9: "le plan idéal"): il est ici beaucoup plus étalé et moins dissymétrique. A titre de comparaison nous indiquons (en anticipant un peu) le polygone correspondant aux dessins de plan réalisés par les élèves dans le Chapitre 9 (dessin 7.5). Un test statistique réalisé sur les deux distributions, et concernant plus précisément la proportion d'angles supérieurs ou égaux à 60° (265 sur 390 pour les plans, et 50 sur 117 dans le

cas présent) fait d'ailleurs apparaître une différence très significative (même au seuil de 99%) entre ces deux distributions.

Dans le présent cas, il est possible de considérer la courbe comme la "somme" de deux courbes unimodales, dont l'une pourrait être du type du dessin 7.5, l'autre ayant un mode situé aux environs de 45°. Nous serions alors dans la situation du dessin 7.6, dans lequel la courbe résultante a bien la même allure que le polygone du dessin 7.4. Comment, alors, expliquer la courbe située 12 plus à gauche?

On peut l'interpréter comme correspondant, chez les élèves, à un désir de représenter l'horizontalité de la base de la pyramide, afin que celle-ci paraisse posée sur un plan horizontal. En effet, comme nous l'avons vu au Chapitre 5 (concernant pour l'essentiel les élèves dont nous étudions ici les productions), nous avons pu nous rendre compte que, de deux dessins tels que les dessins 7.7A et B, par exemple, présentés comme représentant des "rectangles vus en perspective", le dessin 7.7A est perçu presque unanimement comme celui d'un rectangle horizontal, alors que le dessin 7.7B est loin de faire l'unanimité: il n'est vu comme horizontal que par la moitié environ des élèves, l'autre moitié se partageant en deux sous-populations d'effectifs comparables, pour lesquelles il est, soit vertical, soit oblique.

Or, les dessins 7.7A et 7.7B ne se distinguent que par l'angle que font entre eux les côtés du parallélogramme (de l'ordre de 30° dans un cas, et de 70° dans l'autre). On peut raisonnablement en conclure que (le rapport des longueurs des côtés restant le même) plus cet angle est faible, plus le plan a tendance à être vu horizontal (nous avons justifié ce point de vue dans l'Appendice 6). Ce qui fait que le désir de représenter un carré horizontal se traduira en particulier par un angle petit (la prise en compte du rapport de réduction semblant nettement en retrait par rapport à celle de l'angle).

La courbe observée ici pour la distribution des angles peut alors être interprétée comme résultant des productions de deux sous-ensembles d'élèves:

- les premiers se contentant de dessiner un parallélogramme, qui représentera la base de la pyramide, indépendamment de toute référence spatiale (ce que nous avons déjà évoqué dans les Chapitres 2 et 5);
- les seconds désirent de plus indiquer que le dessin représente une surface plane horizontale, et utilisant pour ce faire un moyen graphique, de façon plus ou moins intuitive.

C'est-à-dire que tout se passe comme si la population étudiée était constituée de deux sous-populations disjointes, dont les préoccupations de représentation se situent à deux niveaux différents, et correspondent à deux types distincts:

- type 1: représentation d'un carré;
- type 2: représentation d'un carré, avec de plus le souci de le montrer horizontal (ce qui correspond, nous l'avons vu, aux dessins de cube des manuels).

Le type 2 correspondrait donc ainsi à un désir de situer l'objet dans l'espace, par rapport au repère canonique constitué d'un plan horizontal et d'une verticale; alors que le type 1 se contenterait de le représenter indépendamment de tout système de référence extérieur. En d'autres termes, la représentation de type 2 manifesterait l'émergence d'un souci de rechercher une position de l'objet et des caractéristiques de projection particulières.

Notre explication est sans doute un peu trop manichéenne; ainsi, le sommet de la courbe correspondant au type 2 est situé plus à droite que l'on ne pouvait s'y attendre (45° au lieu de 30-40°), ce qui pourrait être le signe d'un compromis entre les deux positions: une tendance "spontanée" à dessiner un parallélogramme comme on le dessine habituellement en géométrie

plane (c'est-à-dire avec un grand angle aigu), contrebalancée par une tendance à diminuer cet angle afin que la base de la pyramide ne paraisse pas trop redressée. En fait, il faudrait plus vraisemblablement imaginer une variation continue entre les deux pôles (type 1 et type 2) évoqués plus haut, ces deux pôles étant malgré tout assez attractifs.

4- Position de l'image du sommet de la pyramide :

Nous avons distingué 4 cas :

V: image du sommet sur la verticale passant par l'intersection des diagonales du quadrilatère (cas correspondant donc à la représentation classique);

I: image du sommet sur la médiatrice du côté "inférieur" du quadrilatère;

S: image du sommet sur la médiatrice du côté "supérieur" du quadrilatère;

Z: autres cas.

Remarque: Les cas V, I, S ne sont pas exclusifs les uns des autres. En particulier, dans une "vue de face" en perspective parallèle (base représentée par un rectangle, éventuellement carré), les trois conditions sont réalisées simultanément (dessin 7.3B, par exemple). Dans ce cas, nous avons donné la priorité à V sur I ou S.

Les résultats sont représentés dans le tableau suivant:

Cas \ Classe	2.3	1S1	1S2	1S4	TD1	Total
V	21	20	13	19	14	87
I	6	10	8	7	5	36
S	1	4	2	4		11
Z	5	1	7	3	6	22
Total	33	35	30	33	25	156

TABLEAU 20

Ce tableau fait d'abord apparaître que le sommet de la pyramide n'est certainement pas, dans la grande majorité des cas, placé au hasard: plus de 85% des élèves se rangent dans les cas V, I ou S.

D'autre part, le cas V prédomine nettement (près de 3 élèves sur 5 à lui seul), et correspond en général à la représentation classique. Mais il faut également noter la fréquence non négligeable du cas I (près d'un élève sur 4), ce qui a priori n'était pas attendu, et n'est en fait apparu qu'à l'examen des productions.

Ce type de production correspond plutôt (mais pas forcément de façon systématique) à une autre priorité dans la construction de la représentation: au lieu de commencer par placer la base, on représente d'abord une face latérale "de face" (donc sous la forme d'un triangle isocèle), et le reste suit. Ceci est à mettre en parallèle avec le dessin "classique" du cube en perspective cavalière (dessin avec lequel tous les élèves sont familiarisés depuis longtemps, si bien qu'il est devenu pour eux, comme pour nous, un stéréotype): on commence par dessiner un carré, puis on trace les fuyantes et on complète. A titre d'exemple citons un récent manuel de Quatrième: "Pour représenter un pavé en perspective cavalière, dessine d'abord une face (avant) rectangulaire ABCD. Puis trace une arête [AF]. Tu peux alors tracer trois

autres arêtes [DE], [BG] et [CH] de même direction, de même sens et de même longueur. Complète alors ton pavé." (DELEDICQ et al. 1988, p.196).

Il est à remarquer que, même dans le cas de la pyramide, cette représentation est tout à fait correcte du point de vue perspectif: il suffit de placer le solide de façon que la face latérale de référence soit frontale.

Le compromis entre la représentation du "perçu" et celle du "su" qui apparaît ici est exprimée habituellement par le terme "mélange de perspectives". Terme mal choisi selon nous, au moins dans le cas qui nous occupe:

Le "mélange de perspectives" consisterait à imaginer l'élève dessinant d'abord la face avant de l'objet, vu de face (triangle isocèle) mais, s'apercevant qu'un tel dessin manque par trop de relief, il le transformerait ensuite par un "changement de point de vue". Or, il nous paraît plus vraisemblable de penser que, dès le début, l'élève a en tête la représentation dans son ensemble: s'il dessine un triangle isocèle, ce n'est pas parce qu'il veut représenter la pyramide vue de face, mais plutôt parce que cet élément lui semble important ("typique") pour l'identification de l'objet: il s'agit d'un savoir à préserver. Il n'y a donc pas interférence de deux perspectives, mais intégration d'un "faire savoir" dans une perspective unique, comme dans le cas de la représentation de la base de la pyramide par un losange ou un carré.

Remarquons d'autre part qu'une représentation comme celle du dessin 7.3B conserve à deux faces latérales la forme isocèle, et que celle du dessin 7.3A en conserve même quatre! (Il est vrai que ces quatre triangles sont de plus rectangles, ce qui ne saurait être le cas pour aucune pyramide).

Nous pouvons maintenant voir quelle est la proportion d'élèves qui ont représenté la pyramide de manière "classique". Cela correspond,

rappelons-le, aux caractéristiques suivantes:

- base: P ou L (parallélogramme, éventuellement losange);
- sommet: V (sur la verticale du centre de l'image de la base).

On trouve au total 58 dessins sur 156, soit 37%, la proportion selon les classes variant entre 27% (Première S2) et 48% (Première S4). Ce qui, entre parenthèses, confirme notre idée a priori que la représentation de la pyramide serait moins stéréotypée que celle du cube. On peut en conclure que, même si la représentation classique est convenablement décodée par les élèves de lycée (il sont capables de reconnaître une pyramide régulière sur un dessin complété de conventions graphiques), leurs encodages ne sont pas au même niveau, car certaines de leurs productions évoquent difficilement une pyramide régulière (dessin 7.8), même si elles sont perspectivement correctes. Chez ces élèves, en effet, il n'y a pas choix conscient et délibéré d'une perspective et d'une position de l'objet qui "donnent à voir" et "font savoir" de façon optimale, pouvant ainsi servir d'aide à l'évocation de l'objet et à la résolution de problèmes, mais utilisation -plus ou moins importante et plus ou moins empirique- d'effets perspectifs, avec un souci de préserver certaines propriétés de l'objet sur le dessin.

4- CONCLUSION :

Cette étude nous aura permis d'observer les types de production que peuvent fournir nos élèves de lycée dans le domaine de la représentation plane d'objets géométriques tridimensionnels, et de confirmer notre explication générale de la variété et des constantes de ces productions: la gestion de l'inévitable conflit entre la représentation de ce que l'on voit, et celle de ce que l'on sait de l'objet à représenter (nous avons pu en particulier voir que le transfert de propriété avait également lieu dans le cas de

l'encodage des dessins).

Elle nous aura également permis, dans ce cas précis, d'émettre l'hypothèse de la présence, chez certains de ces élèves (et a contrario de l'absence chez les autres) d'une volonté de situer l'objet dans l'espace par rapport à un repère privilégié, et par conséquent d'opérer des choix d'ordre perspectif.

Elle aura enfin montré la nécessité d'un travail en classe sur les représentations, tant en ce qui concerne les choix projectifs que l'utilisation correcte de la projection choisie, ainsi que des conventions graphiques (indication des égalités d'angles, de longueurs, etc.), dans le but de pallier la perte d'information inévitable due au passage de trois à deux dimensions.

CHAPITRE 8:

PERSPECTIVES DE CUBES.

Bien que nous l'ayons récusé au chapitre précédent pour l'étude des représentations d'un objet spatial, le cube nous semble être un objet géométrique tout à fait digne d'intérêt, pour la bonne et simple raison qu'il permet de définir un repère orthonormé de l'espace. A partir de la représentation plane d'un cube de référence, on pourra ainsi obtenir celle d'un objet quelconque de l'espace, à condition de connaître certaines propriétés de la projection utilisée pour cette représentation (par exemple: conservation de l'alignement, du milieu, du parallélisme...). C'est d'ailleurs cette même idée qui nous a fait choisir d'utiliser le cube comme objet de base dans la séquence didactique qui fait l'objet de la dernière partie de ce travail. Nous avons donc également fait porter notre intérêt sur les représentations de cubes, représentations sur lesquelles nous possédions déjà un renseignement (d'ailleurs banal), résultat d'une expérimentation préliminaire: lorsque l'on demande à des lycéens de dessiner un cube -sans autre précision- les dessins que l'on obtient relèvent pratiquement tous (c'est-à-dire à plus de 90%) de la perspective cavalière, avec fuyantes vers le haut et la droite (dessin 8.1). Il s'agit en fait, nous l'avons dit, d'un véritable stéréotype (il suffit de jeter un regard sur les manuels de mathématiques ou, comme nous l'avons fait, sur les dessins réalisés par les élèves), au sujet duquel on ne se pose même plus de questions. Mais, si cette solution de facilité résoud (tout au moins en première approche) le problème de l'"encodage" du cube, qu'en est-il de celui du "décodage"? C'est-à-dire: quels dessins les lycéens identifient-ils (en dehors de toute autre information) comme des dessins de cube? C'est pour répondre à cette question que nous avons fait passer le questionnaire étudié ici dans diverses

classes de Seconde et de Première.

1- LE QUESTIONNAIRE :

Il comporte des questions portant sur 13 représentations d'objets spatiaux (voir Annexe 5), ces représentations étant obtenues à partir de diverses projections de cubes, centrales ou parallèles. Plus précisément, il s'agit de 8 projections parallèles, de 4 projections centrales, et d'un "monstre" ne relevant d'aucun de ces deux types. En voici le détail:

- repr. 1 : perspective axonométrique AFNOR (trimétrique à 105° et 120°)
- repr. 2 : perspective linéaire à un point de fuite
- repr. 3 : perspective cavalière AFNOR (45°; 1/2)
- repr. 4 : perspective axonométrique AFNOR (isométrique)
- repr. 5 : perspective linéaire à un point de fuite
- repr. 6 : perspective linéaire à un point de fuite
- repr. 7 : perspective linéaire à deux points de fuite
- repr. 8 : perspective cavalière (25°; 1,9)
- repr. 9 : perspective parallèle
- repr. 10: perspective axonométrique AFNOR (dimétrique usuelle: 131°30')
- repr. 11: "monstre"
- repr. 12: perspective cavalière (70°; 1/2)
- repr. 13: perspective axonométrique AFNOR (dimétrique redressée: 105°)

Donnons ici quelques précisions sur les représentations choisies:

Tout d'abord, on remarque que l'on y trouve, sur 8 projections parallèles, 5 perspectives AFNOR (pour leur définition, se reporter à l'Appendice 1): 4 axonométries orthogonales (repr. 1, 4, 10 et 13), et une perspective cavalière (repr. 3); nous voulions bien sûr voir si elles seraient acceptées d'emblée par les élèves. Les trois dernières sont:

- deux perspective cavalières: l'une (repr. 12) conservant le rapport de réduction AFNOR (1/2) mais ayant un angle plus grand (70°), de l'ordre de celui qui est le plus couramment utilisé dans la représentation des plans (implicitement) horizontaux (voir Chapitres 2 et 9); l'autre (repr. 8) ayant un angle faible (25°) mais un rapport de réduction supérieur à 1 (égal à 1,9).

- une projection non cavalière, mais malgré tout parallèle (repr. 9): on peut en effet (théorème de POHLKE) la considérer comme projection parallèle d'un cube; certains angles droits ont de plus été conservés.

Pour ce qui est des 4 projections centrales, il s'agit:

- d'une perspective linéaire à deux points de fuite, classique (repr. 7);
- de 3 perspectives linéaires à un seul point de fuite, celui-ci étant situé à droite pour deux d'entre elles, mais à des distances différentes (repr. 2 et 6), et dans l'axe pour la dernière (repr. 5).

Enfin, notre "monstre" (repr. 11) est en fait un hybride de projection parallèle et de projection centrale: les obliques montant vers la gauche sont parallèles, tandis que celles qui montent vers la droite convergent.

Voilà donc pour les représentations. Passons maintenant aux questions que nous avons posées à leur propos. Nous voulions en particulier savoir si, dans la lecture de représentations de cubes, les élèves restent prisonniers des stéréotypes qu'ils produisent, ou s'ils admettent volontiers d'autres types; et dans ce cas, pour lesquels ils manifestent une préférence. (N.B.: La question 1, qui figure en tête du questionnaire, ne se réfère pas aux représentations de cube. Son étude a fait l'objet du Chapitre 3.)

Question 2:

Elle a pour but d'opérer un tri entre les "bonnes" représentations de cube (pour les élèves) et les "mauvaises", et de permettre de déterminer, si possible, les raisons qui gouvernent leurs choix. En outre, la fréquence

des rejets devrait permettre d'établir un ordre de préférence.

Question 3:

Elle est destinée à contrôler, cette fois de façon directe, le "palmarès" établi à la question précédente.

Question 4:

Le dessin d'un cube-squelette est ambigu, car il peut être "lu" de différentes façons; nous souhaitons, grâce à cette question, tenter une approche des principes qui en sous-tendent la "lecture spatiale", et confronter les résultats que nous obtiendrons à certains de ceux qui le seront au chapitre suivant, afin de voir si les hypothèses que nous y formulons concernant le "décodage" de représentations de "rectangles en perspective" sont compatibles avec celles que nous faisons ici.

Question 5:

Dans l'étude de la séquence d'enseignement qui fait l'objet de la seconde partie de ce travail, nous basons l'accès à la représentation des objets spatiaux sur l'ombre au soleil; il semble donc intéressant de savoir si a priori, pour les élèves, est perçue l'identité de principe entre ces deux phénomènes que sont, d'une part la projection sur un plan, et d'autre part l'ombre projetée sur un plan à partir d'une source lumineuse ponctuelle.

2- LA POPULATION :

Elle se compose de 6 classes de lycée, totalisant 190 élèves: 3 classes du lycée Gustave-Monod d'Enghien (élèves de Jean BOUDAREL et de Catherine PEGLIASCO), et 3 du lycée Michelet de Vanves (élèves de Marie-Hélène CLAISSE et de nous-même). Les 190 élèves concernés se répartissent comme suit:

a) Enghien:

Seconde technique (notée 2.T): 26 élèves présents

Première G (notée 1G1): 28 élèves présents

Première S (notée 1S6): 35 élèves présents

b) Vanves:

Seconde indifférenciée (notée 2.3): 32 élèves présents

deux Premières S (notées 1S1 et 1S2): respectivement 36 et 33 élèves présents.

Il s'agit donc d'une population hétérogène, mais qui présente l'avantage de ne pas être exclusivement composée d'élèves "scientifiques" (lesquels risquent peut-être plus que les autres d'avoir des "stéréotypes" de représentation en géométrie). Cependant cette hétérogénéité nous conduira à la prudence dans l'étude statistique des résultats observés.

3- LES RÉPONSES :

Nous envisagerons successivement les quatre questions, dans l'ordre où elles figuraient dans le questionnaire.

Question 2:

Avant de passer aux motifs de rejet, contentons-nous de dresser le tableau des numéros des dessins rejetés, avec les effectifs correspondants:

N° des repr.	Classe						Total
	2.T	2.3	1G1	1S1	1S2	1S6	
1	1	3	3	2	2	6	17
2	23	29	27	36	21	32	168
3		1	3	2		1	7
4		7	3	1	5	2	18
5	17	19	17	17	8	15	93
6	18	15	9	18	8	16	84
7	12	18	14	22	11	22	99
8	24	29	28	35	31	34	181
9	19	21	19	32	20	22	133
10	10	14	19	21	9	13	86
11	23	29	23	36	22	28	161
12	6	4	7	5	9	6	37
13		2	3	1	2	3	11
Effectif	26	32	28	36	33	35	190

TABLEAU 21

Ce tableau montre d'abord, malgré l'hétérogénéité signalée de la population, des résultats tout à fait comparables entre les diverses classes; nous avons visualisé les résultats globaux dans le dessin 8.2, qui permet de sérier les représentations en trois grandes catégories:

Catégorie A: les dessins massivement rejetés (au moins 2 élèves sur 3)

Catégorie B: les dessins pour lesquels les réponses sont mitigées

Catégorie C: les dessins généralement acceptés en tant que représentations de cubes (par au moins 4 élèves sur 5).

Ceci nous permet de dresser un second tableau, où les représentations sont classées par effectifs, et donc selon ces catégories:

Catégorie	Repr.	Effectif
A	8	181
	2	168
	11	161
	9	133
B	7	99
	5	93
	10	86
	4	84
C	12	37
	4	18
	1	17
	13	11
	3	7

TABLEAU 22

Ce tableau, comme le dessin 8.2, montre que les catégories sont assez nettement individualisées (surtout la catégorie C des "bons" dessins, qui nous intéresse au premier chef). On peut d'ores et déjà observer que les représentations de la catégorie C relèvent toutes de la projection parallèle et que l'on y trouve 4 des 5 perspectives AFNOR, la cinquième s'en séparant pour une raison que nous verrons plus loin. Nous pouvons maintenant entrer un peu plus dans le détail et voir quels ont été les motifs invoqués par les élèves pour rejeter telle ou telle représentation.

Nous avons classé ces motifs selon les 4 grands types suivants, apparus à la lecture des réponses des élèves:

L: longueurs: inégalité des longueurs des arêtes, et aussi: c'est un (parallélépipède) rectangle et non un cube.

P: parallélisme: non-parallélisme des arêtes (et aussi: deux faces opposées ont des tailles différentes).

T: aspect tordu (déformé, de travers, bancal,...)

D: divers autres (que nous détaillerons suivant les cas).

La répartition des réponses s'est faite de la façon suivante (nous ne détaillerons pas ici classe par classe):

N° repr.	Motif	L	P	T	D	Total	Total rejets
8		167				167	181
2		137	20			157	168
11		59	71	9	2	141	161
9		125			2	127	133
7		48	30	1	2	81	99
5		23	56			79	93
10		76				76	86
6		20	47	1		68	84
12		20	3			23	37
4					11	11	18
1		12			2	14	17
13		5			3	8	11
3		6				6	7

TABLEAU 23

Une première constatation: les réponses ont été fréquemment expliquées (même si la formulation peut laisser parfois à désirer), ce qui est un gage du sérieux mis à répondre au questionnaire.

Nous allons maintenant passer individuellement en revue les 13 représentations, avec les appréciations des élèves.

Catégorie A :

Représentation 8: C'est la plus unanimement rejetée (181 élèves sur 190), et ce pour raison d'inégalité de longueurs des arêtes. Un élève sur

trois (64 sur 167) précise d'ailleurs (ce qui n'est guère étonnant) que l'objet représenté paraît trop allongé ("arêtes trop longues", "étroit et allongé", "4 arêtes plus longues que les autres",...) Comme nous le prévoyions, ce dessin est donc "lu" comme représentant une "barre", et non un cube (ce qui justifie d'ailleurs le choix d'un rapport de réduction selon les fuyantes inférieur à 1 dans les perspectives cavalières usuelles).

Représentation 2: Ici encore, la raison majeure de rejet (137 cas sur 157) est l'inégalité des longueurs des arêtes, avec la même proportion (45 élèves, soit 1 sur 3) précisant que l'objet semble trop allongé. Certains élèves (20 au total) ont cependant été davantage rebutés par le non-parallélisme des arêtes (4 cas), ou par le fait que les deux carrés du dessin n'ont pas la même taille (16 cas): chez eux, le "su" l'emporte sur le "perçu". Comme le dit l'un d'entre eux, l'objet "va en diminuant vers l'arrière".

Représentation 11: La tendance paraît ici s'inverser: le non-parallélisme l'emporte sur l'inégalité des longueurs (71 cas contre 59). Il faut dire que, sur les trois ensembles de segments du dessin représentant des arêtes parallèles du cube, un seul est constitué de segments parallèles (contre deux dans le cas du dessin précédent); on peut expliquer ainsi que le non-parallélisme soit plus apparent.

D'autre part, apparaît ici un troisième motif de rejet: l'aspect "tordu" (9 cas), dû en fait -comme nous l'avons fait remarquer au début- au choix d'une "fausse perspective".

Enfin, deux élèves reprochent à ce dessin que "certaines faces ne sont pas carrées". Est-ce parce qu'ils voient un parallélépipède rectangle? parce qu'ils transfèrent aux faces de l'objet les propriétés de leur représentation? parce que, pour eux, un dessin de cube doit nécessairement comporter deux carrés? Rien ne permet ici de le dire.

Représentation 9: De nouveau le motif de rejet est ici l'inégalité de longueur des arêtes (125 cas sur 127), les deux derniers élèves trouvant que "certaines faces ne sont pas carrées (voir ci-dessus). L'inégalité de longueur est encore précisée dans 1 cas sur 3 environ (44 sur 125): cette fois l'objet est "trop haut". Ce n'est guère étonnant en considérant que, en face de ce dessin, on fait l'hypothèse implicite qu'il s'agit d'une perspective cavalière (hypothèse encouragée par la "régularité" de deux des "faces": dans ce cas, les faces de l'objet correspondantes (frontales) sont des rectangles non carrés. Mais nous avons dit plus haut ce qu'il fallait en penser: rien ne précise dans quel système est représenté l'objet.

Catégorie B :

Représentation 7: Le motif principal de rejet est, ici encore, l'inégalité des longueurs (48 cas), mais le non-parallélisme (30 cas) est, proportionnellement, davantage remarqué que pour la représentation 2. Il l'est cependant moins que pour la représentation 11, qui lui ressemble; mais celle-ci avait été davantage vue "tordue"; les deux motifs sont peut-être liés, et il est possible que -dans le cas des perspectives non parallèles- l'écart par rapport à la "norme" que constitue la perspective cavalière soit parfois interprété comme une déformation de l'objet.

Représentation 5: Pour ce dessin, c'est nettement le non-parallélisme qui est invoqué comme motif (56 élèves, contre 23 seulement invoquant les longueurs). Précisons de plus que, parmi ces 56 élèves, la moitié environ (29 cas) précisent leur réponse, en particulier en indiquant -sous diverses formes- que "les côtés devraient être confondus" ou que l'objet est une "pyramide sans pointe" (= tronc de pyramide). C'est-à-dire que ces élèves s'attendent à ce que le dessin d'un cube, dans la position "symétrique" considérée, soit constitué de deux carrés translétés l'un de l'autre suivant

la direction d'un côté (dessin 8.3). Reste à voir si, confrontés à un tel dessin, ils le reconnaîtraient pour celui d'un cube...

Représentation 10: Comme on pouvait s'y attendre pour un dessin en perspective parallèle, le non-parallélisme ne figure pas comme motif de rejet. La totalité des 76 élèves ayant refusé ce dessin l'ont fait pour cause d'inégalité de longueurs, 28 d'entre eux précisant la forme qu'ils voyaient à l'objet représenté, par rapport à un cube: "pas assez haut", "trop aplati", "trop bas", "trop petit"...L'axonométrie dimétrique n'est donc pas complètement acceptée d'emblée, et ceci à cause de la réduction trop importante des longueurs selon la verticale: on se trouve ici en face d'une représentation qui préserve bien le savoir dans les plans horizontaux (les dessins des faces inférieure et supérieure sont presque des carrés), mais qui se trouve forcée de le sacrifier selon les verticales.

Représentation 6: Les résultats sont tout à fait comparables à ceux obtenus pour la représentation 5. Ce qui s'explique par le fait que, par rapport à celui-ci, le point de vue s'est simplement déplacé légèrement vers la droite.

Catégorie C :

(N.B.: Il convient ici de ne pas accorder une importance exagérée aux effectifs cités, étant donné leur faiblesse.)

Représentation 12: Le motif invoqué est bien sûr ici l'inégalité des longueurs des arêtes: 20 élèves, dont 4 précisent qu'ils trouvent l'objet "trop haut" pour être un cube. Notons que 3 élèves voient l'objet "tordu"; selon toute probabilité, ces élèves voient les faces supérieure et inférieure, non pas horizontales mais obliques, du fait de la forte inclinaison des fuyantes sur la verticale (voir Chapitre 5).

Représentation 4: Les motifs de rejet sont ici tout à fait différents, puisque l'on n'y trouve, ni l'inégalité des longueurs, ni le non-parallélisme

des arêtes. Comme nous nous y attendions, c'est l'ambiguïté de la représentation (espace, ou plan?) qui a été à la base de ce rejet. Les 20 élèves ayant refusé ce dessin se répartissent ainsi:

- c'est une "figure plane" (4 élèves): "hexagone", "polygone", "losange (sic) avec 3 diagonales"
- c'est un dessin ambigu (5 élèves): "les arêtes se coupent en un même point, ce qui donne l'impression qu'il n'y a pas 12 arêtes distinctes"; "ce n'est qu'en regardant attentivement qu'on s'aperçoit que c'est une figure en 3 dimensions et non en 2"...
- il y a "trop de faces" (2 élèves): nous avons d'abord été étonné par ce motif, mais il semble que ces élèves aient vu le dessin comme représentant une pyramide à base hexagonale vue de dessus (?). Malheureusement, nous n'avons pu leur demander de précisions.

Représentation 1: Sur 14 rejets, 12 sont attribués à l'inégalité des longueurs (2 élèves précisent qu'ils trouvent l'objet "trop haut"). En outre, deux élèves reprochent (au dessin ou à l'objet?) l'absence d'angles droits; peut-être s'agit-il ici d'un rejet lié au transfert de la perpendicularité (?)

Représentation 13: 5 élèves rejettent ce dessin à cause de l'inégalité des longueurs, et 3 lui font le reproche qu'"il y a des diagonales en plus". Apparemment, ces derniers ont "oublié" qu'il s'agissait de représenter un cube squelette, et une partie des arêtes verticales du milieu sont "lues" comme étant des diagonales (horizontales) des faces supérieure et inférieure.

Représentation 3: C'est le stéréotype du dessin de cube, et cependant 6 élèves lui reprochent l'inégalité des longueurs des arêtes; l'un d'eux précisant qu'il trouve l'objet "trop aplati". La comparaison s'impose avec les représentations 8 et 12:

- pour la représentation 8: même motif de rejet, mais infiniment

plus important pour la représentation 8 (167 cas contre 6): apparemment, l'inégalité des longueurs (pour les fuyantes) n'est choquante que lorsqu'il s'agit d'un allongement (influence du "perçu"). Ceci explique que certains croient nécessaire que le rapport de réduction soit inférieur à 1.

- pour la représentation 12: le motif principal de rejet est encore le même, avec une fréquence quelque peu plus élevée (20 cas contre 6). Même si ce n'est pas tout à fait évident a priori, ceci est peut-être lié à l'angle des fuyantes: la valeur élevée de l'angle dans la représentation 12 induit à voir l'objet en vue plongeante et, si cet objet est un cube, on s'attend en conséquence à voir la face supérieure presque carrée (cf repr. 10: cas de l'axonométrie dimétrique); ce qui n'est pas le cas pour la représentation 12, dans laquelle les arêtes obliques semblent trop courtes.

L'étude détaillée de cette question va donc bien dans le sens des hypothèses que nous avons formulées, la préservation du "su" et celle du "perçu" étant les deux pôles entre lesquels évolue l'interprétation, avec bien sûr des différences individuelles qui, loin de nous poser problème, nous permettent au contraire d'enrichir notre étude par la prise en compte d'une plus grande variété de motifs.

Question 3:

Il s'agissait ici d'établir directement une espèce de palmarès des représentations de cubes, puisque nous demandions aux élèves d'indiquer dans l'ordre de leur préférence les quatre représentations de cube qui leur semblaient les meilleures. Pour établir le classement général, nous avons décidé d'attribuer des points aux représentations, selon la place indiquée par chaque élève:

- 4 points pour la représentation classée première,
- 3 points " " deuxième,

2 points " troisième,
1 point " quatrième.

Les résultats ont été les suivants:

Classe N° repr.	2.T	2.3	161	1S1	1S2	1S6	Total
1	52	72	57	74	58	50	363
2			4			2	6
3	92	92	78	120	92	102	576
4	41	38	62	46	37	56	280
5		4	3	11	11	10	39
6	4	8		4	21	16	53
7	6	8	7	9	10	6	49
8			2				2
9	5	7	9		11	6	38
10	9	7	2	2		10	30
11							0
12	12	26	26	32	12	26	132
13	39	59	68	56	39	67	335
Eff. Classe	26	32	28	36	33	35	190

TABLEAU 24

Le classement s'établit donc comme suit:

1)	repr. 3:	576 points
2)	repr. 1:	363 points
3)	repr. 13:	335 points
4)	repr. 4:	280 points
5)	repr. 12:	132 points
6)	repr. 6:	53 points
7)	repr. 7:	49 points
8)	repr. 5:	39 points

9)	repr. 9:	38 points
10)	repr. 10:	30 points
11)	repr. 2:	6 points
12)	repr. 8:	2 points
13)	repr. 11:	0 point.

Une première constatation s'impose: la représentation 3 est plébiscitée (576 points, ce qui fait une moyenne de 3 points par élève). Rien d'étonnant: il s'agit du stéréotype de la représentation du cube en perspective cavalière. Remarquons ici que la représentation 12, qui correspond elle aussi à ce type de dessin, ne réalise que 132 points (soit moins du quart), alors que la seule différence réside dans l'angle des fuyantes: ceci corrobore donc tout à fait nos conclusions du Chapitre 5, et correspond également à ce que nous avons observé dans les manuels (Chapitre 2).

On remarque aussi que les cinq premières représentations du classement coïncident avec celles de la catégorie C définie précédemment. De plus, ces cinq représentations peuvent se subdiviser en trois:

- la représentation 3, qui "caracole" en tête;
- la représentation 12, qui est un peu distancée;
- les représentations 1, 13 et 4, qui se situent entre ces deux extrêmes.

Or, le même phénomène a lieu (en sens inverse, bien sûr) en ce qui concerne le nombre de rejets: si l'on n'en tire qu'une conclusion, ce sera la cohérence des résultats obtenus. On peut cependant retenir de plus l'excellent résultat de la représentation 1 (axonométrie trimétrique AFNOR), qui arrive en deuxième position bien que ne respectant, ni les angles droits (aucune face n'est carrée), ni l'égalité des longueurs (sauf bien sûr pour les arêtes parallèles): l'aspect "préservation du perçu", bien qu'insuffisant à lui seul, semble donc avoir malgré tout une importance non négligeable dans l'interprétation d'un dessin.

Question 4:

Cette question concerne la façon dont sont "vues" les représentations de cube. Rappelons que, dans le codage des réponses:

- la lettre B signifie que l'objet semble situé plus bas que "l'observateur" (donc "vu" de dessus);
- la lettre N signifie qu'il semble au même niveau;
- la lettre H signifie qu'il semble situé plus haut (donc vu de dessous).

Nous avons obtenu les résultats suivants, pour les 5 représentations constituant la catégorie C (les "bonnes" représentations de cube pour les élèves):

N° repr.	B	N	H	Total	%B	%N	%H
3	85	51	41	177	48	29	23
1	86	27	52	165	52	16	32
13	70	56	50	176	40	32	28
4	88	16	67	171	52	9	39
12	94	16	56	166	57	9	34

TABLEAU 25

(N.B.: En ce qui concerne les réponses, signalons qu'un certain nombre d'élèves ont systématiquement fourni une réponse pour toutes les représentations, d'où des effectifs totaux plus importants que ceux auxquels on aurait normalement dû s'attendre.)

On peut tout d'abord remarquer qu'il n'y a pas d'unanimité dans les réponses, le meilleur consensus n'atteignant pas les 60% (ce qui confirme, si besoin était, le caractère ambigu des représentations dans lesquelles on n'utilise pas l'opacité ou la convention de ponctuation). Malgré tout, on peut constater que, comme nous l'avions supposé, toutes les représentations sont

majoritairement vues de dessus. De plus, les représentations 4 et 12 se détachent des autres par la faible proportion de ceux qui les situent au même niveau qu'eux (9% seulement); ceci est à mettre en relation avec la forme du dessin de la "face supérieure" dans ces représentations, forme qui est directement liée à l'angle que font ses côtés, entre eux et par rapport à la verticale. Ainsi l'on a, comme valeurs pour l'angle aigu de ce parallélogramme:

dans la repr.12: 70°

dans la repr. 4: 60°

dans la repr. 1: 45°

dans la repr. 3: 45°

dans la repr.13: 30°

Une valeur faible de cet angle va donc bien dans le sens d'une vue "de niveau".

Question 5:

Pour terminer ce questionnaire, et en vue de préparer la séquence didactique que nous relatons dans la suite, nous voulions tâcher d'obtenir des renseignements sur la façon dont les élèves imaginaient l'ombre au soleil d'un cube, en utilisant les mêmes représentations que précédemment. Voici, pour chaque numéro, l'effectif des élèves l'ayant accepté comme ombre au soleil de cube:

N° repr. \ Classe	2.T	2.3	1G1	1S1	1S2	1S6	Total
1	4	6	6	9	15	8	48
2	13	17	9	17	15	12	83
3	7	9	7	12	16	4	55
4	7	8	9	20	14	7	65
5	15	12	6	16	16	14	79
6	12	11	10	15	15	13	76
7	4	10	4	13	8	5	44
8	11	21	9	17	15	15	88
9	9	9	6	13	10	7	54
10	9	7	11	13	15	5	60
11	13	6	9	11	10	8	57
12	7	9	8	13	16	6	59
13	6	12	9	15	17	5	64
Total	117	137	103	184	182	109	832
Eff. classe	26	32	28	36	33	35	190

TABLEAU 26

Ce tableau appelle les commentaires suivants:

1) Les réponses sont très dispersées: aucun numéro n'a été cité par la moitié au moins des élèves. Ceci trahit, à notre avis, leur embarras face à la question.

2) En moyenne, chaque élève a cité entre 4 et 5 numéros (moyenne générale: 4,4), mais ce nombre est très variable. Ceci apparaît également dans le tableau, où l'on voit que certaines classes (par ex. 1S6: moyenne 3,1) se sont montrées plus sélectives que d'autres (par ex. 1S2: moyenne 5,5).

3) On peut, sinon établir un palmarès comme à la question 3, du moins

remarquer que 4 représentations sont plus fréquemment citées que les autres; il s'agit des numéros 8, 2, 5 et 6; elles recueillent en effet entre 76 et 88 voix, alors que la suivante (le numéro 13) n'en obtient plus que 64. Observons d'un peu plus près ces 4 représentations:

Tout d'abord, on peut remarquer que seule l'une d'entre elles est une projection parallèle, les trois autres étant des perspectives linéaires: c'est donc que le critère de conservation du parallélisme n'est apparemment pas pris en compte pour accepter ou refuser telle ou telle représentation comme ombre de cube. Autrement dit, les élèves ignorent -ou agissent comme s'ils ignoraient- que l'ombre au soleil possède cette propriété (sinon de façon idéale, du moins à très peu près, voir Appendice 13).

Ensuite, la représentation 8, qui était unanimement rejetée en tant que dessin de cube, est ici celle qui est la mieux acceptée comme ombre au soleil de cube. Conclusion: si nous voulons arriver à la projection parallèle via l'ombre au soleil, il sera nécessaire de faire explicitement, et de façon précise, le lien entre les deux phénomènes.

Enfin, quels sont les critères qui semblent intervenir dans le choix des élèves? Les 4 représentations ont en commun d'avoir deux faces représentées par des carrés: on peut donc penser que les élèves avaient en tête l'ombre au sol d'un cube, posé à plat. D'autre part, les deux représentations les plus citées (les numéros 8 et 2) ont en commun l'allongement (remarqué d'ailleurs, on l'a vu, dans la question 2); l'allongement semble donc être un élément favorable dans l'identification d'un dessin en tant qu'ombre, bien que les représentations 5 et 6 (associées ici, tout comme elles l'étaient dans la question 2) ne satisfassent pas à ce critère.

4- CONCLUSION:

Au terme de l'étude de ce questionnaire, trois points principaux nous semblent devoir être retenus:

1- les résultats obtenus ici confirment les hypothèses que nous avons faites au début concernant le décodage, par les élèves, des représentations d'objets tridimensionnels.

2- contrairement à ce que l'on aurait pu croire, la conservation du parallélisme par l'ombre solaire n'est pas un phénomène qui fait partie du savoir des élèves de Seconde et de Première.

3- la conscience de l'identité de principe qui sous-tend à la fois le dessin de géométrie de l'espace et l'ombre au soleil (à savoir la projection parallèle sur un plan) n'est pas, elle non plus, le fait de ces élèves (en particulier, l'"allongement" est favorable à une interprétation "ombre", mais défavorable à une interprétation "dessin").

Ainsi donc, l'étude en classe de l'ombre au soleil d'un cube pourra se révéler motivante, même au niveau de la Seconde ou de la Première S, en ce qu'elle amènera les élèves à découvrir certains aspects de leur environnement quotidien qu'ils ignoraient, ou dont ils n'avaient jusque-là pas pris conscience.

CHAPITRE 9:

REPRÉSENTATION DE SITUATIONS "CLASSIQUES".

L'un de nos buts, en commençant le travail relaté ici, était de voir comment des élèves, à l'entrée en Première scientifique, avaient perçu les représentations usuelles de situations spatiales qui leur avaient été -en principe- proposées par leurs enseignants de mathématiques de Seconde, et ce qu'ils en avaient retenu; ou -si tel n'avait pas été le cas- comment ils codaient "spontanément" ces situations. Aussi avons-nous eu l'idée de commencer notre recherche en proposant deux questionnaires, l'un d'encodage, l'autre de décodage, de situations spatiales "classiques" (successivement et dans cet ordre, afin, bien sûr, que les dessins figurant dans le test de décodage ne risquent pas d'influencer les productions graphiques demandées lors du test d'encodage).

Nous allons dans ce chapitre étudier les résultats obtenus au premier de ces deux tests dans plusieurs classes de Première S du Lycée Michelet de Vanves (92). Le test de décodage sera, lui, traité dans le chapitre suivant.

1- LE TEST :

Nous voulions donc voir si -et comment- des élèves de Première S, à la suite de l'enseignement de géométrie de l'espace qu'ils avaient en principe reçu l'année précédente, étaient capables de représenter des figures "classiques" faisant essentiellement intervenir des points, droites et plans; voir si leurs productions reproduisaient d'éventuels stéréotypes, ou si elles leur étaient personnelles; et, dans ce cas, étudier comment ils intégraient "voir" et "savoir" dans leurs productions graphiques. Nous pensons en effet

que, chez certains au moins, les contacts avec la géométrie de l'espace auraient été plutôt sporadiques, et que nous pourrions peut-être, même à ce niveau de scolarisation, observer des dessins non traditionnels (qui, nous l'espérons, nous permettraient de confirmer notre grille d'interprétation). Nous nous sommes finalement arrêté à huit situations, et avons donné (par écrit) la consigne suivante:

"Représentez, par un dessin, chacune des figures de l'espace suivantes:

- 1- Un plan P, un point A du plan P et un point B hors du plan P.
- 2- Un plan P, une droite D située tout entière dans P et une droite D' qui coupe D en un point.
- 3- Un plan P et une droite D n'ayant aucun point commun avec P.
- 4- Un plan P et une droite D perpendiculaire à P.
- 5- Deux droites D et D' qui ont un -et un seul- point commun.
- 6- Deux droites D et D' non parallèles et n'ayant aucun point commun
- 7- Deux plans P et P' n'ayant aucun point commun.
- 8- Deux plans P et P' qui se coupent."

(La feuille de test se trouve en Annexe 6).

Afin de nous faire préciser la "quantité" d'enseignement de géométrie de l'espace que les élèves avaient reçue au cours de leur scolarité antérieure, nous avons ajouté, en fin de questionnaire, la question suivante:

"Avez-vous déjà fait de la géométrie dans l'espace en cours de Mathématiques, cette année ou les années précédentes?

Pas du tout. Un peu. Moyennement. Beaucoup."

(La réponse adéquate était à entourer).

Signalons également que nous avons ajouté -ou fait ajouter- la consigne verbale suivante: "Si vous pensez que votre dessin n'est pas suffisamment explicite (clair), vous pouvez lui ajouter un commentaire".

Notons enfin que ce questionnaire a présenté successivement deux variantes, différant légèrement l'une de l'autre quant aux consignes: dans la première version nous avons utilisé le vocabulaire traditionnel de la géométrie de l'espace, tandis que dans la seconde nous avons eu recours à un langage plus "naïf" et plus "neutre". Ainsi:

<u>Première version</u>	<u>Seconde version</u>
2- ... D incluse dans P D' sécante à P	2- ... D située tout entière dans P D' qui coupe P en un point
3- ... D parallèle à P	3- ... D n'ayant aucun point commun avec P
5- ... D et D' sécantes	5- ... D et D' qui ont un -et un seul- point commun
6- ... D et D' non sécantes et non parallèles	6- ... D et D' non parallèles et n'ayant aucun point commun
7- ... P et P' parallèles	7- ... P et P' n'ayant aucun point commun
8- ... P et P' sécants	8- ... P et P' qui se coupent

Les deux raisons qui nous ont conduit à modifier la première version sont:

- la première, que nous voulions réduire au maximum les termes "techniques" ("incluse", "sécantes",...) pour limiter les risques d'incompréhension de la part d'élèves n'ayant que peu de connaissances en géométrie de l'espace;
- la seconde, que nous ne voulions pas donner trop d'indications concernant les tracés à réaliser. Ainsi, "n'ayant aucun point commun" a été préféré à "parallèles" (pour des plans) car n'impliquant pas a priori le parallélisme.

La première version a été passée dans la classe de Première S5; les autres classes ont passé la seconde version. C'est celle-ci que nous prendrons

comme version de référence.

2- LA POPULATION :

Sauf mention contraire, nous prendrons comme population de référence celle qui a passé la seconde version du questionnaire. Il s'agit de quatre classes de Première S, que nous désignerons ci-après par 1S1, 1S2, 1S3 et 1S4, comportant respectivement 36, 22, 27 et 34 élèves présents (rappelons que la classe de 1S5, avec 24 élèves, avait passé l'autre version du questionnaire). Les passations ont eu lieu en début d'année scolaire (Octobre 1985, Septembre 1986 et Septembre 1987), afin que les élèves n'aient comme références que les acquis des années scolaires antérieures.

3- LES RÉSULTATS :

A) Les représentations de plan:

En posant ce questionnaire, l'un de nos buts était d'étudier la "forme" que les élèves donnaient au parallélogramme qui, traditionnellement (voir Chapitre 2), représente un plan dans les dessins de géométrie de l'espace: les "formes" que nous obtiendrions seraient-elles aléatoires, ou bien y aurait-il un -ou des- type(s) privilégié(s)? Dans ce cas, correspondraient-ils aux types "traditionnels" rencontrés dans les manuels, ou non?

Les quatre premières des huit situations retenues se prêtaient bien à une telle étude, puisqu'elles étaient simples et ne faisaient intervenir qu'un seul plan. C'est pourquoi nous les avons choisies comme support de notre recherche d'un éventuel "plan idéal" selon nos élèves. Dans le cas présent, la population concernée a pu être élargie à la Première S5;

elle comporte donc 143 élèves.

Nous nous attendions a priori à trouver surtout des dessins de type "traditionnel", c'est-à-dire relevant essentiellement de deux types:

- 1- le parallélogramme, bien sûr;
- 2- le "coin", parallélogramme incomplet constitué de deux segments adjacents formant un angle aigu (forme attestée dans certains manuels, cf Chapitre 2).

Nous avons cependant trouvé d'autres types de représentations, plus ou moins prévisibles; ce sont essentiellement:

- 3- le parallélogramme auquel manque un côté (et qui donc, en quelque sorte, constitue un cas intermédiaire entre le parallélogramme et le "coin", voir dessin 9.1); il s'agit également d'un type attesté -quoique rarement- dans certains manuels.

4- la "face de cube": il s'agit cette fois d'un parallélogramme qui n'est pas isolé dans l'espace, mais constitue l'une des faces (visibles) d'un cube (ou pavé droit) de référence, représenté en perspective cavalière (voir dessins 9.2A et B). Les élèves ayant eu recours à ce type de représentation provenaient tous d'une même classe de Seconde: manifestement, l'enseignement de la géométrie de l'espace y avait été basé sur la géométrie du cube -ce qui n'est pas un mal en soi-; mais, malheureusement, cet enseignement semble avoir négligé l'accès aux représentations graphiques, et l'on s'aperçoit que les élèves n'arrivent pas, seuls, à "sortir du cube";

5- la représentation que nous appellerons "naïve", et qui est figurée sur le dessin 9.3: elle consiste en un segment traversant l'espace réservé au dessin, lequel est parfois hachuré de l'un des deux côtés du segment. Il s'agit ici, formellement, de la représentation "traditionnelle" du demi-plan en géométrie du plan (le segment représentant une droite, qui est la frontière de ce demi-plan). Nous avons donc interviewé un certain nombre

d'élèves ayant eu recours à ce type de représentation, afin d'essayer de savoir s'ils ne faisaient pas, consciemment ou non, une confusion entre "plan dans l'espace" et "demi-plan dans le plan". Il en ressort que la réponse est négative, et que leurs dessins se voulaient bien être des dessins de géométrie de l'espace. L'explication fournie est la suivante: le segment (qui représente bien une droite) est le "bord du plan"(sic), et ce qui a été dessiné, c'est une vue de cet objet spatial. Ainsi, dans l'exemple de la première situation (plan P, point A dans P et point B hors de P), le point B est "à un autre niveau que le plan" (conclusion que nous avons déduite des commentaires des élèves et des gestes à l'appui): il s'agit donc bien là d'une situation spatiale, projetée sur le plan de la feuille. On pourrait penser a priori que le fait qu'un plan soit illimité de tous côtés ne semble pas totalement aller de soi, même au niveau de la Première S. Mais nous y reviendrons...

6- enfin, degré zéro de la représentation de plan,

l'"a-représentation": le plan P peut paraître assimilé au plan de la feuille de papier, mais en fait ce n'est pas le cas, et lui, ainsi que les autres éléments intervenant dans la situation considérée, sont dessinés en projection sur la feuille (dessin 9.4: exemple de la situation 2). Là aussi, nous avons eu besoin d'interviewer des élèves pour être sûr de l'interprétation à donner; leur explication a été aussi simple que logique: "un plan, sur un dessin, ça ne se voit pas".

Finalement, nous distinguerons donc sept grands types de représentations de plan, que nous désignerons désormais de la manière suivante:

- A: parallélogramme
- B: parallélogramme incomplet (3 côtés)
- C: coin (2 côtés)

D: représentation naïve (un bord)

E: a-représentation (rien)

F: face de cube

G: divers

Le tableau ci-dessous récapitule la répartition obtenue selon les classes, pour l'ensemble des quatre situations considérées:

Classe \ Type	A	B	C	D	E	F	G	Total
1S1	83	0	8	26	9	14	4	144
1S2	73	13	0	0	0	0	2	88
1S3	69	16	22	0	0	0	1	108
1S4	115	20	0	0	0	0	1	136
1S5	48	7	5	23	4	0	7	94
Total	388	56	35	49	13	14	15	570

TABLEAU 27

N.B.1: Nous n'avons que 570 dessins au lieu des 572 attendus (143x4), du fait de deux non-réponses en 1S5.

N.B.2: Parmi les 15 "divers" (type G), on trouve 9 trapèzes, essais (maladroits) de représentation de rectangles en perspective "vraie", ainsi que 6 dessins constitués de deux "droites" parallèles ("bande"); le dernier dessin est celui d'un plan "de profil"(sic): "on ne voit qu'une droite"(re-sic). Remarquons que ce dernier type est formellement analogue au type D, mais qu'il en diffère fondamentalement. Ainsi, dans la première situation, le type D donnera un dessin du genre du dessin 9.5A, tandis que le "plan de profil" donnera un dessin du genre du dessin 9.5B.

B) Le "passé scolaire" des élèves en Géométrie de l'espace:

Comme le montre le tableau précédent, les "profils" des classes sont différents, et il ne serait pas raisonnable de vouloir les comparer de façon trop fine: le "passé scolaire" (notamment en Seconde) des élèves qui les constituent est par trop divers (voir par exemple le cas, déjà évoqué, de la géométrie du cube); et il est même possible qu'en élargissant la population concernée par le test nous obtiendrions de nouveaux types de dessins.

C'est dans le but de nous faire une idée de ce "passé" relatif à la géométrie de l'espace que nous avons ajouté la question relative à ce sujet, citée au début. Les réponses obtenues se répartissent comme suit (la classe de 1S2 n'y figure pas, les feuilles de test n'ayant été que très peu de temps à notre disposition):

Réponse \ Classe	1S1	1S3	1S4	1S5	Total
pas du tout	4	8	11	16	39
un peu	26	18	21	8	73
moyennement	5	0	2	0	7
beaucoup	0	1	0	0	1
Total	35	27	34	24	121

TABLEAU 28

(N.B.: le seul élève ayant répondu "beaucoup" est un doublant, que nous avons eu en Première l'année précédente...)

On voit que la proportion d'élèves disant n'avoir jamais reçu aucun enseignement de géométrie de l'espace varie, selon la classe considérée, entre

1 sur 10 et 2 sur 3. D'autre part, la question se pose de la confiance que l'on peut accorder à ces réponses. Pour tenter de le savoir, nous avons pris l'exemple de la classe de 1S1 (36 élèves), pour laquelle:

- nous disposons de l'origine des élèves;
- 12 élèves provenaient de la même classe (Seconde 2 du lycée

Michelet).

Pour cinq classes d'origine (totalisant 30 élèves), les réponses avaient été les suivantes:

Réponse \ Origine	2de1	2de2	2de3	2de4	1S1
pas du tout	0	0	0	4	0
un peu	6	12	2	1	0
moyennement	1	0	0	0	4
beaucoup	0	0	0	0	0
Total	7	12	2	5	4

TABLEAU 29

On voit que les avis divergent peu entre les élèves provenant d'une même classe. On peut cependant s'étonner qu'un élève de Seconde 4 ait répondu "un peu" alors que ses congénères ont répondu "pas du tout"; mais, renseignement pris, cet élève faisait référence, non à la classe de Seconde, mais à celle de Cinquième. On peut donc tirer du tableau ci-dessus la conclusion que:

- les élèves provenant des Secondes 1,2 et 3 ont effectivement reçu dans cette classe un enseignement de géométrie de l'espace (nous ne dirons rien de la "quantité", notion plus subjective que la présence ou l'absence);
- les élèves provenant de la Seconde 4 n'en ont pas reçu;

- les doublants de Première S1 ont reçu un enseignement qui leur semble "normal" de géométrie de l'espace (ce qui est rassurant).

Autre conclusion (celle, en fait, qui nous intéressait au premier chef): on peut accorder un crédit raisonnable aux réponses faites par les élèves à ce sujet.

C) Le plan idéal:

Parmi les représentations de plans précédentes, nous nous sommes plus particulièrement intéressé aux représentations "classiques" (parallélogrammes). Elles sont au nombre de 388 (voir le tableau placé plus haut: type A). Parmi celles-ci, 326 (soit 84%) ont (au moins) un côté "horizontal" (c'est-à-dire parallèle aux bords supérieur et inférieur de la feuille de papier), ce qui montre la grande prégnance de cette direction dans le domaine graphique. Et l'on remarque que 91% de ces dernières sont "latéralisées à droite"; c'est-à-dire que les côtés obliques "montent vers la droite" (dessin 9.6).

Cette écrasante supériorité numérique en faveur de la droite se rattache à un phénomène bien connu, concernant les directions de tracé que privilégient inconsciemment les individus. Ainsi, dans cette expérience que relate VAN SOMMERS:

"Subjects were (...) given a blank sheet of paper and asked to cover it with short lines (...), but to do their best to make sure they drew in every possible direction. This instruction was emphasized, and subjects were discouraged from working systematically. The object was to discover whether there was in fact a bias in their stroke production even under the conservative instructions to try to lay down lines in every direction" (VAN SOMMERS 1984, p.5)

(Les sujets étant (...) munis d'une feuille de papier vierge, on leur demanda de la couvrir de courts segments de droite (...), mais de faire de leur mieux

pour s'assurer qu'ils les traçaient dans toutes les directions. On insista sur cette instruction, et on découragea les sujets de travailler de manière systématique. L'objectif était de découvrir s'il y avait en fait un biais dans leur production de traits, malgré l'instruction modératrice d'essayer de tracer des lignes dans toutes les directions.)

Le dessin 9.7 indique les résultats obtenus par VAN SOMMERS pour 12 droitiers (la courbe représente, pour chaque "direction", la proportion de lignes tracées). On voit que les tracés prédominants sont ceux qui "montent vers la droite" (suivis de ceux qui "descendent vers la droite" et de ceux qui "descendent vers la gauche").

Cette observation en corrobore d'ailleurs d'autres, que cite VAN SOMMERS:

"In Porter and Greenstreet's Manual of Graphic Techniques (1980), not only is the NE-SW direction of shading and cross-hatching five times more common than the other oblique, but most of the solid objects recede upward to the right. Almost without exception, the formal examples of drawings of solid objects drawn backwards from one face utilize the oblique that runs up toward the top right" (op.cit. p.13).

(Dans le Manuel des techniques graphiques, de Porter et Greenstreet (1980), non seulement la direction NE-SW d'ombres et de hachures est cinq fois plus courante que l'autre oblique, mais la plupart des objets fuient vers le haut et la droite. Presque sans exception, les exemples soignés d'objets solides dessinés en perspective cavalière utilisent l'oblique qui monte vers la droite).

Il resterait bien sûr à expliquer le pourquoi de la prédominance de cette "direction" (mouvements plus faciles de la main, habitude de l'écriture de gauche à droite,...); mais, quoi qu'il en soit, elle correspond à la pratique habituelle de la perspective cavalière.

Nous avons également étudié les représentations "classiques" du plan ayant un côté horizontal selon deux autres critères: l'angle des côtés et le rapport des longueurs des côtés.

1- Nous avons mesuré les angles (aigus) sur les 409 représentations qui

le permettaient, c'est-à-dire les parallélogrammes, complets (type A) ou non (type B), et les "coins" (type C). La répartition -en classes de 10 degrés d'amplitude- est la suivante:

Angle	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	Total
Effectif	1	2	19	41	69	121	131	25	409
%	0	0	5	10	17	30	32	6	100

TABLEAU 30

L'histogramme du dessin 9.8 visualise cette répartition. On constate que les valeurs sont tassées vers la droite, et que, dans plus de 3 cas sur 5, l'angle est compris entre 60° et 80°. Remarquons que ceci ne correspond pas à la norme conseillée par l'AFNOR pour la perspective cavalière (voir Appendice 1), dans laquelle, rappelons-le, l'angle des fuyantes est de 45° (vers la droite, bien entendu).

2- Nous avons également mesuré le rapport de la longueur des côtés obliques à celle des côtés horizontaux, pour les 326 parallélogrammes complets obtenus.

(N.B.: Un seul élève a dessiné les côtés obliques plus longs que les côtés horizontaux; nous n'en avons pas tenu compte ici).

La répartition -en classes d'amplitude 0,1- est la suivante:

Rapport	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	Total
	0,19	0,29	0,39	0,49	0,59	0,69	0,79	0,89	0,99	
Effectif	2	3	16	50	89	83	43	28	12	326
%	0	1	5	15	27	25	13	9	4	100

TABLEAU 31

L'histogramme du dessin 9.9 visualise cette répartition. On constate que, pour plus de la moitié des cas, le rapport est compris entre 0,5 et 0,7. De plus, l'allure de l'histogramme étant "normale", nous avons testé l'hypothèse de normalité de la distribution (voir Appendice 11), avec un résultat positif: la valeur trouvée pour le χ^2 est 9,96, alors que la valeur-limite au seuil de 95% est 11,07; l'hypothèse de normalité est donc acceptable.

(N.B.: Nous nous sommes également intéressé à une éventuelle corrélation entre l'angle et le rapport: nous avons obtenu un graphique "en boule", tout à fait typique d'une indépendance entre les deux variables.)

A la lumière des résultats précédents, on peut tenter d'esquisser le portrait du "dessin de plan idéal" selon nos élèves: ce serait un parallélogramme latéralisé à droite, dont l'angle des côtés mesurerait approximativement 65-70° et dont le rapport des longueurs des côtés serait de 0,6 (remarquons que ce rapport est très voisin de $(\sqrt{5}-1)/2$, caractéristique du "rectangle d'or": l'aspect "esthétique" jouerait-il un rôle implicite dans la réalisation de ces dessins?). Ce parangon des dessins de plans est représenté sur le dessin 9.10. Comme nous avons pu le constater dans le Chapitre 2, il ressemble beaucoup aux représentations "traditionnelles" de plan figurant dans les dessins des manuels de géométrie de l'espace. Les raisons probables de cette "tradition" graphique (possibilité de mieux "montrer", gain de place) ont été évoquées dans le Chapitre 5. Y a-t-il eu "contamination" par la fréquentation des manuels, ou par les dessins au tableau du professeur de Seconde? Ou bien s'agit-il d'une représentation "spontanée", liée aux directions privilégiées de tracé (voir plus haut)? Tout en sachant bien par expérience que les élèves se contentent généralement de copier le dessin fait au tableau par le maître ("s'il l'a fait ainsi, c'est que c'est sans doute le meilleur"), nous ne saurions récuser a priori la

seconde hypothèse, étant donné la similitude de forme frappante entre ces dessins de plans et les dessins de parallélogrammes de la géométrie plane. C'est ainsi qu'une étude des parallélogrammes réalisés -sur papier non quadrillé- par les élèves d'une classe de Première S à l'occasion d'un contrôle de géométrie plane a donné des résultats tout à fait comparables: latéralisation à droite, angle des côtés élevé (moyenne: 63°). Il est donc fort possible que "dessiner un plan" devienne, pour un individu familier des usages en vigueur en géométrie de l'espace, parfaitement équivalent à "dessiner un parallélogramme"; il s'agirait alors d'un codage purement conventionnel, sans aucune référence spatiale (le stéréotype à l'état pur). Mais, pour se faire une idée plus précise de l'influence des divers facteurs, il serait nécessaire d'entreprendre une étude sur une population non "géométrisée".

Comme autre représentation on pourrait envisager, bien sûr, une vue "oblique de face", dans laquelle le plan est représenté par un rectangle (certains rares élèves l'ont effectivement utilisée, retrouvant ainsi la représentation courante du plan dans les manuels des 17e et 18e siècles: voir Chapitre 2), mais elle présente certains inconvénients, en particulier une impression d'incertitude sur la position du plan dans l'espace (un plan horizontal, un plan oblique et un plan vertical peuvent être représentés de la même façon; voir également les Chapitres 5 et 7). Dans le même ordre d'idées, on pourrait reprocher à la représentation "idéale" le fait que le plan paraît moins nettement horizontal que si l'angle était plus petit; c'est effectivement ce qui est apparu lors du test d'interprétation spatiale (voir Chapitre 5): l'angle des côtés est ici la variable primordiale.

Conclusion:

Cette petite étude annexe nous aura finalement permis de dégager un certain nombre de constantes. Certaines plus ou moins attendues, comme la plus

grande fréquence des représentations "classiques" dans chacune des classes étudiées (même -et cela peut malgré tout surprendre -dans celle où les deux tiers des élèves disent n'avoir jamais fait de géométrie de l'espace), et l'écrasante supériorité de la latéralisation à droite (rappelons à ce sujet que nous n'avons trouvé aucune corrélation entre le fait d'être gaucher et celui de dessiner un -ou des- parallélogramme(s) latéralisé(s) à gauche; mais les gauchers étaient peu nombreux: une douzaine environ, ce qui correspond d'ailleurs à la proportion générale: 10%). Et d'autres, qui nous ont permis d'esquisser un "portrait-robot" du dessin de plan tel que le conçoivent (restons prudent) les élèves de Première S du lycée Michelet aux alentours de 1986.

D) La représentation des huit situations proposées :

Nous pouvons maintenant passer à l'étude des réponses des élèves concernant les huit situations envisagées. Nous ne tiendrons compte ici que des quatre classes ayant passé la seconde version (1S1, 1S2, 1S3 et 1S4), totalisant 119 élèves. Et, parmi les dessins de ceux-ci, nous nous intéresserons plus particulièrement aux représentations de type "traditionnel" (dessins de plan de type A, B ou C). De plus, si nous donnons les effectifs relevés, nous n'indiquerons pas de pourcentages, nous contentant de donner des proportions approximatives à titre purement indicatif, les possibilités d'encodage des situations variant énormément suivant le "passé" scolaire des élèves. Quoique, au sein d'un même type de représentation d'une situation donnée, il nous semble que l'on puisse se montrer moins réservé en ce qui concerne les "variantes", à condition, toutefois, que les effectifs soient suffisamment importants (comme c'est ici le cas en particulier pour les représentations "classiques").

Situation 1: Un plan P, un point A du plan P et un point B hors du plan P

On trouve 87 dessins de plan du type A (parallélogramme), dont 61 (soit 2 sur 3) ont deux côtés (les plus longs) horizontaux et sont latéralisés à droite (dessin "traditionnel"), tandis que 3 dessins sont latéralisés à gauche. Sur ces 87 dessins, le point A est toujours dessiné à l'intérieur du parallélogramme, et le point B pratiquement toujours à l'extérieur. Dans 4 cas seulement il est dessiné à l'intérieur, mais alors sa position hors du plan est "montrée" par le dessin du segment de la perpendiculaire au plan passant par B, compris entre celui-ci et le plan (voir exemples sur le dessin 9.11); le dessin est alors parfois accompagné d'une légende ("B hors du plan", ou "B ∉ P"). Il est donc à noter que, pour la grande majorité des élèves, le seul fait de représenter A à l'intérieur de la représentation de P suffit à signifier que ce point est dans P; et que le seul fait de représenter B hors de la représentation de P suffit à signifier que ce point est hors de P (le risque de confusion ne semble en effet apparaître aux élèves que lorsque le dessin de B est intérieur à celui de P). Nous nous trouvons bien sûr ici, de nouveau, devant le phénomène de transfert de propriété (ici: l'appartenance).

Pour les 61 dessins "traditionnels" dans lesquels le dessin de B est extérieur à celui de P, nous avons relevé la position du dessin de ce point et l'avons situé dans l'une des 9 régions du plan délimitées par les bords du dessin de P; la répartition est indiquée sur le dessin 9.12.

Comme on peut le constater, la "grande diagonale" du parallélogramme est délaissée, et la région située "au-dessus" de celui-ci est la plus représentée. Ceci correspond également à la représentation traditionnelle, et

nous l'interprétons de la façon suivante: le plan représenté est le plus souvent "vu de dessus" (voir Chapitres 6 et 8), et le point B, pour être vu doit lui-même se trouver "au-dessus" du plan; d'où une tendance à placer le dessin de ce point au-dessus de la représentation du plan (transfert de propriété).

Pour ce qui est des 32 dessins restants, on en trouve:

12 du type B (parallélogramme incomplet);

7 du type C ("coin");

4 du type F (à noter que les points A et B sont pratiquement toujours figurés sur une arête du cube, sauf une fois pour le point A);

9 du type D ("naïves"): on peut noter ici que, dans 7 des 9 cas, la direction du "bord" du plan est une oblique "montant vers la droite", ce qui rejoint notre remarque antérieure sur les directions de tracé privilégiées.

Dans le même ordre d'idées, nous avons obtenu, sur 106 dessins de plan se rapportant aux types A,B,C, 79 dessins (soit 3 sur 4) dont au moins l'un des côtés est "horizontal". S'agit-il là du désir de représenter un plan horizontal, ou d'une simple facilité (référence aux bords de la feuille de papier)?

Situation 2: Un plan P, une droite D située tout entière dans P et une droite D' qui coupe P en un point.

Les dessins de plan de type A,B ou C sont ici au nombre de 103 (dont 83 parallélogrammes). S'y ajoutent 3 cubes, 6 représentations "naïves", 3 "a-représentations" et 4 "divers".

a) Pour les parallélogrammes: le dessin de D est très souvent inclus dans celui de P (73 cas sur 83, soit près de 9 fois sur 10); sinon, il "déborde" d'un côté ou (le plus souvent) de deux côtés opposés du

parallélogramme, suggérant ainsi le caractère illimité du plan. Quant à la direction du dessin de D, elle est très variable; notons malgré tout qu'elle est parallèle à l'un des côtés du parallélogramme dans un cas sur trois environ. Le dessin de D', lui, "sort" toujours du parallélogramme (à une exception près), comme on pouvait s'y attendre.

On constate donc ici un phénomène du même ordre que pour la situation 1 (transfert de propriété): pour "montrer" que la droite D est incluse dans le plan, on inclut la représentation de D dans celle de P.

Nous nous sommes également intéressé à la façon dont était matérialisée l'intersection de la droite D' et du plan P (N.B.: ce qui suit est étendu aux 103 dessins de type A,B,C). Nous nous attendions a priori à trouver deux cas principaux, non exclusifs l'un de l'autre, et traditionnels en géométrie de l'espace:

- matérialisation du point d'intersection par un disque ou une croix;
- matérialisation de la partie "cachée" de D' par la ponctuation partielle de son tracé (semi-transparence), ou par l'absence partielle de celui-ci (opacité).

D'où six cas possibles, représentés sur l'arbre du dessin 9.13. Ces six cas sont visualisés sur le dessin 9.14, avec les effectifs correspondants.

On constate que les cas 1 et 4 sont les plus représentés (respectivement par 62 et 26 élèves): ils correspondent à la représentation "classique" de la droite sécante à un plan, l'emphase étant mise, ou non, sur le point d'intersection. On peut en déduire que, sur les 119 élèves concernés, 88 au moins (soit trois sur quatre) connaissent (ou réinventent?) la convention de semi-transparence, usuelle en géométrie de l'espace.

Le seul des quatre autres cas à être représenté de façon non négligeable est le cas 6 (auquel nous adjoignons le cas 3), correspondant à

l'absence de "partie cachée" de la droite D' (11 cas au total). A priori, les dessins de ce type sont difficilement interprétables, mais les élèves concernés (tous sauf un) ont eu recours à l'une de deux solutions, que l'on peut bien qualifier d'astucieuses, pour les rendre lisibles: ils ont, soit matérialisé le point d'intersection sur le bord du parallélogramme, en ne faisant "dépasser" le dessin de la droite D' qu'au dessous (dessin 9.15A, 3 élèves), soit placé le point d'intersection en un sommet du parallélogramme (dessin 9.15B, 8 élèves): et ainsi, nul besoin de recourir à un quelconque moyen pour résoudre le problème de la "partie cachée", puisque D' n'a pas de partie cachée!.

b) Pour les "faces de cube": elles ne sont qu'au nombre de trois. La droite D est deux fois une arête du cube de référence; quant à la droite D', elle passe deux fois par un sommet, et nous avons alors un cas analogue au précédent: D' passe par l'un des sommets du parallélogramme représentant P.

c) Pour les représentations "naïves": on en compte 6. La droite D est 4 fois parallèle au "bord" du plan P, et la droite D' lui est 4 fois perpendiculaire. La représentation "type" est donc celle du dessin 9.16. Nous reviendrons plus loin sur ce type de représentation, dans l'étude de la situation 4.

d) Pour les "a-représentations": il y en a trois. Sur le dessin figurent uniquement les droites D et D', ainsi que la matérialisation du point d'intersection de D' avec P. Ni ponctuation, ni disparition du tracé, ce qui est normal s'agissant d'élèves totalement "vierges" en géométrie de l'espace (dessin 9.17).

Situation 3 : Un plan P et une droite D n'ayant aucun point commun avec P.

On observe cette fois 106 dessins de plan de type A,B ou C, dont 85

parallélogrammes. On a de plus 4 "faces de cube", 5 représentations "naïves", 3 "a-représentations" et un "divers".

Pour les représentations de type A,B,C,D ou F, nous nous sommes intéressé aux positions relatives des dessins de la droite D et du plan P. Il se trouve que 94 élèves sur 115 (soit 4 sur 5) ont placé le dessin de D à l'extérieur de celui de P (transfert de la disjonction), c'est-à-dire à l'extérieur de la partie du plan de la feuille censée représenter P: parallélogramme, angle aigu, face de cube, demi-plan... Dans les types A,B,C, lorsque le dessin de D recoupe celui de P, il dépasse en général des deux côtés, et le fait que l'intersection de D et P est vide n'est pas "apparent" sur le dessin. Il est alors nécessaire de l'expliciter, et ceci est fait par les élèves de deux façons principales:

- ou bien un commentaire ("D//P", " $D \cap P = \emptyset$ ",...);
- ou bien une punctuation de la partie du dessin de D intérieure au dessin de P, ceci étant destiné à montrer que D est "en dessous" de P.

Notons d'autre part que, parmi les dessins de type A,B,C, il s'en trouve 65 (soit 3 sur 5) qui sont tels que le dessin de D soit parallèle à l'un des bords de la représentation de P. Nous voyons a priori deux explications possibles à ceci:

- prégnance des directions "horizontale" et "verticale" lorsque certains bords du dessin de P ont l'une de ces directions (mais ce n'est pas toujours le cas);
- interprétation (d'ailleurs correcte) de la consigne écrite, transformant "D n'a aucun point commun avec P" en "D est strictement parallèle à P"; ceci étant le fait d'élèves au courant des positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace, et désireux de "faire passer" cette information dans leur dessin.

Enfin, les trois élèves n'ayant à leur disposition que

l'"a-représentation" ont dû se contenter d'un dessin où n'était représentée que la droite D, dessin nécessairement assorti d'une légende, du type de celles que nous avons citées plus haut.

Situation 4 : Un plan P et une droite D perpendiculaire à P.

Nous avons ici relevé 104 dessins de types A,B ou C, dont 85 parallélogrammes. Comme pour la situation 2, nous nous sommes intéressé à l'utilisation de la "convention des pointillés" dans les dessins de ces trois types. 86 élèves l'ont utilisée, résultat tout à fait comparable à ce qui avait été obtenu précédemment.

Nous avons également constaté la grande fréquence du tracé de la droite D perpendiculairement à l'un des "bords" du dessin du plan P: 87 pour l'ensemble des trois types (soit 5 sur 6). Et, dans la grande majorité de ceux-ci (75 cas sur 87), la droite D est "verticale", et le dessin du plan P présente un côté "horizontal". On peut raisonnablement penser que ces élèves ont voulu représenter sur leur dessin, par un transfert de propriété, la configuration "typique" constituée d'un plan horizontal et d'une droite verticale (ce que semble également indiquer la représentation "classique" de cette situation; voir Chapitre 2). Ajoutant à ceci 4 dessins dans lesquels la droite D est "horizontale" (représentation vraisemblable d'un plan vertical et d'une droite horizontale), nous obtenons au total 79 cas dans lesquels la représentation de P présente un côté parallèle à deux bords de la feuille; ce qui, confronté aux 65 cas de la situation 2, semble indiquer que la présence de la notion de perpendicularité renforce le besoin d'une référence au repère privilégié induit par les bords de la feuille.

Nous avons cependant relevé 8 dessins dans lesquels le dessin de D est perpendiculaire à un côté oblique de la représentation de P; ici, plus

encore que dans le cas précédent, se pose la question du "pourquoi" de cette perpendicularité, alors qu'il est très rare que, dans la vie courante, un angle droit soit vu sous la forme d'un angle droit: le transfert de propriété (perpendicularité) fournit une explication.

La majeure partie des élèves a cependant eu recours à un moyen plus "direct" d'indiquer la perpendicularité de D et de P. Ainsi, sur les 104 cas présentement étudiés, 71 utilisent la convention graphique, usuelle à la fois en Géométrie du plan et en Géométrie de l'espace, d'indication d'angle droit:

- 8 élèves tracent deux droites sécantes (censées être incluses dans P), et font passer D par le point d'intersection, indiquant de la façon habituelle la perpendicularité de D avec ces deux droites (dessin 9.18A); ils prouvent par là leur connaissance de la CNS classique, et par conséquent le fait qu'ils ont reçu un enseignement non marginal de géométrie de l'espace.

- 12 élèves tracent une seule droite (censée être incluse dans P), et indiquent la perpendicularité de D avec cette droite (dessin 9.18B), celle-ci pouvant éventuellement être l'un des côtés de la représentation de P (un seul cas).

- 51 élèves se contentent du signe conventionnel, placé au point d'intersection de D avec P (dessin 9.18C).

- 33 élèves ne portent aucune indication (ni symbole graphique, ni commentaire), ce qui fait que le dessin ressemble tout à fait à une illustration de la situation 2 (D sécante à P), mis à part le fait que le dessin de D est le plus souvent perpendiculaire à un côté du dessin de P (27 cas). Ceci confirme notre interprétation antérieure: le transfert de propriété paraîtrait suffisamment explicite par lui-même (suffisamment "naturel") pour dispenser de toute explication.

Venons-en maintenant aux représentations "naïves", qui sont au nombre de 7. Ici, dans la totalité des cas, la droite D est tracée

perpendiculairement au "bord" du plan P; et, dans 5 cas sur 7, la perpendicularité est indiquée de la façon usuelle, au point d'intersection du dessin de D avec le "bord" de P (dessin 9.19). Ce type de représentation, comme d'ailleurs son analogue dans la situation 2, pose la question du statut du "bord" de la représentation du plan P: correspond-il réellement à une limite du plan lui-même (auquel cas le dessin serait difficilement acceptable), ou n'est-ce là qu'un artifice (au même titre que le parallélogramme traditionnel) destiné à visualiser P? Dans ce dernier cas, il serait certes insuffisant (un "repère" de P nécessite deux droites sécantes), mais correspondrait à un plan "illimité dans toutes les directions".

Pour en venir à l'"a-représentation" (3 élèves), nous avons obtenu deux types de dessin pour cette situation:

- cas du dessin 9.20A (2 élèves): la droite D est dessinée, ainsi que son point d'intersection avec P et le signe usuel indiquant la perpendicularité;

- cas du dessin 9.20B (1 élève): la droite D est représentée uniquement par un point.

Dans le premier cas, il est évident que le plan P n'est pas assimilé à celui de la feuille. Quant au second cas, la première idée qui vient à son sujet est celle d'une identification de P au plan de la feuille de papier, mais il peut tout aussi bien s'agir d'une vue orthogonale d'un plan parallèle à celui de la feuille, comme on en utilise parfois en Physique (voir par exemple le vecteur \vec{B} sur le dessin 9.21, extrait de PÉNIGAUD A. et al. 1983, p.159): notre interprétation précédente peut donc également convenir à ce cas de figure.

Une seule "face de cube" pour cette situation, et elle est sans surprise: P est représenté par une face du cube, et D par une arête perpendiculaire à cette face.

Pour terminer notre revue, signalons 4 "divers": trois dans lesquels la droite D n'avait pas été représentée (faute de savoir le faire?), et le dernier dans lequel elle avait été représentée par un point (dessin 9.22), cas se rattachant à ceux que nous venons d'évoquer (vue orthogonale). (N.B.: Pour des raisons de commodité, nous allons maintenant étudier les situations 7 et 8, avant les situations 5 et 6).

Situation 7 : Deux plans P et P' n'ayant aucun point commun.

Les types A,B,C regroupent 108 cas sur les 119 (dont 90 du type A). Comme nous l'avons fait remarquer au début, la consigne ne faisait ici aucune allusion au parallélisme des deux plans; ceci avait pour but de nous permettre de voir si le parallélisme paraissait, chez les élèves, lié à la disjonction de P et P'. Nous pensons en effet que -au moins chez certains d'entre eux- le parallélisme apparaîtrait dans les dessins, sous la forme du parallélisme des "bords" des représentations, en vertu du transfert de propriété. Or il se trouve que tel est le cas dans 88 des 108 dessins considérés (4 élèves sur 5). Comme il est difficile de soutenir qu'un tel résultat puisse être le fait du hasard, on peut dire que la grande majorité des élèves concernés fait le lien entre "intersection vide" et "parallélisme"; ceci ne veut pas nécessairement dire qu'ils y voient une synonymie parfaite (la suite nous montrera d'ailleurs que ce n'est vraisemblablement pas le cas); mais tout au moins peut-on penser que, pour eux, une façon qu'ont des plans d'être disjoints est d'être parallèles.

Encore fallait-il savoir si, en donnant explicitement la consigne "P et P' parallèles", nous aurions effectivement obtenu des représentations de P et P' à "bords" parallèles. Comme nous l'avons signalé au début, la classe de Première S5 avait passé la première version de ce

questionnaire, laquelle comportait justement la formulation ci-dessus: elle pourrait donc servir de classe-témoin. Nous avons, de plus, également fait passer cette première version dans la classe de Terminale D1, afin d'avoir un effectif de comparaison plus important. Pour l'ensemble de ces deux classes (totalisant 57 élèves), nous avons obtenu 51 dessins comportant deux représentations de plan ressortissant aux types A,B ou C, et dans tous les dessins les "bords" des deux représentations sont respectivement parallèles. Un rapide test statistique confirme -si besoin était- le fait que la différence entre les deux groupes est significative au seuil de 99% (voir Appendice 12). D'où la double conclusion:

- qu'il n'y a pas, chez tous les élèves, parfaite synonymie entre parallélisme et disjonction de plans;
- qu'il existe un lien fort net entre le parallélisme des plans et le parallélisme des "bords" de leurs représentations ("transfert").

Nous pouvons également noter que, dans les 17 cas de parallélogrammes dont les "bords" ne sont pas respectivement parallèles, ces parallélogrammes sont toujours d'intersection vide, ce qui n'est pas le cas lorsque les "bords" sont parallèles. Il s'agit peut-être là de la forme "primaire" du transfert lié à la situation considérée: les élèves ne faisant pas le lien entre "disjonction" et "parallélisme" expriment la disjonction de P et P' par celle de leurs représentations, et les autres expriment le parallélisme de P et P' par celui des "bords" de leurs représentations.

Achevons l'étude de cette situation par celle des 11 cas restants, qui sont les suivants:

- 4 "faces de cube": P et P' sont ici, bien sûr, représentés par deux faces opposées du cube.
- 7 représentations "naïves": dans 3 de ces 7 cas, les "bords" des représentations de P et P' sont parallèles, dans 3 autres ils sont confondus

(et P et P' situés de part et d'autre du "bord" commun; dessin 9.23A et B). Le dernier cas est constitué de deux "bords" convergents (mais non sécants), les représentations de P et P' ne se rencontrant pas (dessin 9.23C). Il est difficile, ici, de déterminer quelle est la "conception" du plan sous-jacente à ces dessins...

Situation 8 : Deux plans P et P' qui se coupent.

Nous avons cette fois 108 dessins comportant des représentations de plan de types A,B,C. Nous les avons sériés en 4 grands types, représentés sur le dessin 9.24 avec les effectifs correspondants (bien entendu, les plans ne sont pas toujours représentés par des parallélogrammes, mais c'est cette représentation que nous avons choisie comme exemple, en raison de sa fréquence nettement majoritaire).

Nous voulions tout d'abord mettre en évidence les représentations dans lesquelles figurait la droite d'intersection des plans P et P'. En effet, rien dans la consigne donnée n'indiquait la nature de l'intersection des deux plans, et nous voulions voir si celle-ci apparaissait dans les dessins. Parmi les types que nous avons distingués, cette droite est figurée dans les types 1 et 2, soit au total dans 68 cas. Par conséquent, 3 élèves sur 5 savent que deux plans se coupent suivant une droite et le montrent. Quant aux autres, ou bien ils l'ignorent, ou bien le fait ne leur semble pas suffisamment intéressant pour mériter d'être mentionné. Et il ne s'agit pas là de cas isolés, puisque nous avons relevé au total 40 dessins des types 3 et 4 (c'est-à-dire près de 2 cas sur 5).

Reprenons maintenant un peu plus en détail ces quatre types:

- type 1 (45 cas): Il s'agit de la représentation "classique" de deux plans sécants, mais elle est ici plus ou moins maladroitement réalisée: on

peut penser que la plupart des élèves n'ont pas "bâti" leur dessin à partir de la droite d'intersection (ce qui aurait donné des représentations plus équilibrées, en un mot plus "jolies"), mais que celle-ci a été tracée après les plans, en joignant les points d'intersection des "bords" des plans.

- type 2 (23 cas): C'est une forme encore plus "fruste" du type 1: on n'a pas même tenté de donner aux représentations de P et P' des "bords" sécants. Ici, il est manifeste que ce n'est pas la droite d'intersection qui a servi de base à la réalisation du dessin.

- type 3 (28 cas): Il est analogue au type 2, mais sans le tracé de la droite d'intersection.

On peut donc suivre, dans les types 1,2 et 3, la désaffection progressive vis-à-vis de la droite d'intersection des deux plans. Et on a là, à notre avis, un exemple de la relation liant un dessin de géométrie (et en particulier de géométrie de l'espace) à la conception qu'en a son auteur. On pourrait presque dire, ici, que le "beau" dessin (nous entendons par là le plus épuré, le plus "économique") serait le fait d'un élève ayant pleinement intégré l'élément "droite d'intersection" à la situation "plans sécants", et ayant pleinement pris conscience de son importance pour une exploitation optimale de la situation. Plus généralement, dans la recherche d'un problème de géométrie, le dessin ne doit venir qu'après coup, pour concrétiser une première image mentale, et permettre ainsi un va-et-vient (cf. le diagramme de la page 20, flèches 3 et 4) qui se poursuivra tout au long de la recherche, le dessin se modifiant et faisant à son tour évoluer l'image mentale, laquelle amènera peut-être à transformer le dessin, etc. Il ne s'agit donc pas de représenter les éléments dans l'ordre où ils apparaissent dans l'énoncé, mais d'essayer de se représenter la situation dans sa globalité, faute de quoi on court le risque d'aboutir à un dessin inefficace.

- type 4 (12 cas): Il n'est plus du tout question, ici, de droite

d'intersection: les représentations sont plutôt de type ensembliste, les dessins de P et de P' étant simplement "superposés", avec les trois "variantes" possibles: transparence, semi-transparence (ponctuation) et opacité. En somme, un dessin totalement inutilisable pour résoudre un problème.

Il nous reste enfin 11 cas à passer en revue:

- 4 cas sont du type "face de cube", les plans P et P' étant représentés par deux faces adjacentes du cube de référence;
- 7 cas relèvent de la "représentation naïve": dans deux d'entre eux, seule est représentée l'intersection de P et P', sous la forme d'un "bord" commun (dessin 9.25A): on peut imaginer un objet en forme de "toit", le "bord" commun en étant la faitière. Les 5 autres dessins évoquent irrésistiblement l'intersection de deux demi-plans en géométrie plane (dessin 9.25B), surtout lorsque sont figurées des hachures (4 cas sur 5): on voit difficilement une autre interprétation à donner à un tel dessin. Les élèves en question nous avaient montré qu'ils pensaient bien "dans l'espace"; il semble bien, ici, que la conception qu'ils ont du plan corresponde en fait au demi-plan de la géométrie plane.

Situation 5 : Deux droites D et D' qui se coupent.

Chacun sait que le dessin de deux droites D et D' de l'espace est trompeur: même si leurs représentations se coupent, il n'est pas évident qu'il en soit de même pour D et D'; et même si leurs représentations sont parallèles, il n'est pas évident que D et D' elles-mêmes soient parallèles.

Nous voulions donc voir si les élèves étaient conscients de ce problème, et si oui quels seraient les moyens qu'ils utiliseraient pour le

résoudre.

Voici donc les résultats que nous avons obtenus:

- 42 élèves (1 sur 3) se sont contentés de dessiner les deux droites, sans rien de plus.
- 50 élèves ont "matérialisé" le point d'intersection des deux droites: 17 en l'affectant d'un nom (lettre), et 33 en le représentant par une croix, un trait transversal ou un petit disque (avec éventuellement un nom).
- 5 élèves ont ajouté un commentaire, indiquant que les droites D et D' étaient sécantes.

Les 22 autres élèves ont eu recours à des représentations de plan:

- 16 élèves ont entouré les représentations de D et D' d'un parallélogramme, représentation d'un plan (dessin 9.26A): il s'agit là de la représentation "traditionnelle", quoique théoriquement insuffisante (les droites D et D' pourraient par exemple être "au-dessus" du plan, et ne pas se couper).
- 3 élèves ont représenté D dans un plan, et D' sécante à ce plan en un point de D (dessin 9.26B); ici aussi, le dessin est théoriquement insuffisant.
- 2 élèves ont représenté deux plans sécants, avec D dans l'un et D' dans l'autre se coupant sur la droite d'intersection (dessin 9.26C); insuffisance théorique, ici également.
- enfin, un élève a représenté D et D' sécantes à un plan en un même point (dessin 9.26D); même remarque que ci-dessus.

Finalement, on constate que deux élèves sur trois ont senti la nécessité de "montrer", par un moyen ou un autre (et ce qui précède montre que l'imagination ne leur fait pas défaut), l'intersection des deux droites. Il y a là, certainement, matière à une exploitation en classe de leurs productions, dans le sens d'une recherche des insuffisances des moyens graphiques utilisés,

qui sont pourtant parfois sophistiqués. On peut également noter les utilisations faites de la convention LS, qui effectivement permet de lever certaines ambiguïtés (mais hélas pas toutes).

Situation 6 : Deux droites D et D' non parallèles, et n'ayant aucun point commun.

Ici, 6 élèves ont répondu qu'une telle situation était impossible ("Deux droites non parallèles ont forcément un point commun"), évidente transposition à l'espace d'une propriété de géométrie plane. Quant aux 113 autres, voici comment se répartissent leurs réponses:

- 49 élèves se sont contentés de dessiner uniquement les deux droites: 23 ont dessiné deux segments convergents mais non sécants (transfert, dessin 9.27A), et 26 ont dessiné des segments sécants, dont 7 avec une discontinuité de l'un des deux au point d'intersection (dessin 9.27B), et 2 avec une perpendiculaire commune (dessin 9.27C).

(N.B.: on peut également voir un transfert de propriété dans le fait que les droites D et D' ne sont jamais représentées parallèles (la consigne disait: "non parallèles"). Pourtant, rien ne l'empêcherait en théorie).

Dans 10 cas, les élèves ont ajouté un commentaire, dont voici quelques exemples:

- "D et D' sont dans des plans différents" (2 fois)
- "D et D' n'appartiennent pas au même plan" (3 fois)
- "D et D' appartiennent à deux plans différents mais parallèles"
- "D et D' sont contenus dans deux plans superposés qui n'ont aucun point commun".

On notera que tous ces commentaires font référence à des plans, comme d'ailleurs les 58 dessins qui suivent; en effet:

- 19 élèves ont placé D dans un plan et ont dessiné D', soit sécante à ce plan (9 cas: dessin 9.28A), soit "hors de ce plan" (10 cas: dessin 9.28B);

- 39 élèves ont placé D et D' chacune dans un plan, les représentations de ces plans ayant des "bords" parallèles (26 cas: dessin 9.28C) ou non (13 cas: dessin 9.28D). Nous avons vu plus haut (situation 7) que des "bords" parallèles signifient des plans parallèles; quant à placer D et D' dans des plans non parallèles pour qu'elles ne se coupent pas...? Il est vrai que les représentations de ces plans sont disjointes. En fait, le principe de ce procédé est analogue à celui utilisé dans le dessin 9.26C, mais avec un propos opposé.

Enfin, 4 élèves ont eu recours à des arêtes de cube pour représenter D et D', et le dernier dessin est à ranger dans les divers (mauvaise lecture de consigne).

Au total, 73 élèves se réfèrent donc explicitement à un (ou des) plan(s). Le besoin s'en faisait effectivement beaucoup plus sentir ici que dans le cas précédent, car pour montrer que deux droites de l'espace sont sécantes, il suffit de montrer leur point d'intersection; mais pour montrer qu'elles ne le sont pas ce n'est pas aussi simple: le dessin est le même que pour des droites sécantes (on dessine deux segments non parallèles), et surtout il est le même que le dessin de géométrie plane représentant deux droites non parallèles. D'où la tendance à "montrer l'espace" sur le dessin.

4- CONCLUSION:

L'étude de ce questionnaire nous aura donc permis un certain nombre de constatations. Tout d'abord -et nous nous y attendions- nous nous sommes rendu compte que tous les enseignants de mathématiques de Seconde ne donnaient pas à la géométrie de l'espace la place qu'elle nous paraît mériter. En

fait, cette partie du programme est, avec les Statistiques, celle qui est écartée en premier par les professeurs qui ne peuvent "boucler" le programme; l'argument avancé pour justifier ce rejet est que, la géométrie de l'espace figurant également au programme de la classe de Première S, les élèves scientifiques pourront toujours se rattraper l'année suivante. Argument qui ne nous semble pas recevable, et ce pour deux raisons principales: tout d'abord, il fait peu de cas des élèves qui iront dans les sections A ou B, et paraît considérer la géométrie de l'espace comme un sujet difficile, qu'il ne convient de traiter qu'avec un public "choisi". La familiarisation avec l'espace, l'acquisition de savoirs et de savoir-faire dans ce domaine, même si elle n'est pas poussée à un haut niveau d'abstraction, nous semble au contraire faire partie des "outils" indispensables à tous, scientifiques ou non; la dernière partie du présent travail nous donnera d'ailleurs l'occasion de montrer que de petites questions "simples", qui font partie de l'expérience quotidienne commune, peuvent malgré tout poser problème. Ensuite, cet argument ne tient aucun compte de la variable "temps"; le temps nécessaire à la familiarisation avec les objets et les concepts de l'espace ne peut être impunément raccourci, et en ce domaine "le temps perdu ne se rattrape plus". L'approche de l'espace est une entreprise de longue haleine, qui doit se poursuivre tout au long de la scolarité, de façon continue et organisée (comme le préconisent d'ailleurs depuis peu les programmes du Collège). Peut-on par exemple estimer "normal" que, à la fin de la classe de Seconde, des élèves en soient encore à ne pas pouvoir imaginer que deux droites de l'espace puissent être autrement que parallèles ou sécantes? Les élèves ayant leur premier contact avec la géométrie de l'espace en classe de Première devront à la fois faire connaissance avec les objets qu'elle utilise, les concepts et leurs représentations. Or, l'apprentissage de celles-ci est pratiquement inexistant, et rares sont les professeurs qui y consacrent une partie -même minime- de

leur enseignement; les autres considèrent vraisemblablement que "cela va de soi". Mais ce n'est pas forcément le cas, comme en témoignent en particulier les représentations "non classiques" que nous avons observées chez certains de nos élèves. Et il ne s'agit pas seulement des représentations: ainsi, chez certains, l'idée même qu'ils ont de la notion de plan semble bien ne pas correspondre à la notion habituelle (présence d'un "bord"). Ces élèves, confrontés à un parallélogramme dont on leur dit qu'il représente un plan, ne risquent-ils pas d'être confortés dans leur opinion erronée? Certes, la majorité des élèves dont nous avons étudié les productions ont reçu un enseignement de géométrie de l'espace en Seconde qui généralement -mais pas toujours- a fait usage des représentations "traditionnelles". Mais peut-on être sûr que ces représentations ont toujours été convenablement interprétées, et ce, même si les élèves sont capables de les reproduire? Ce qui précède laisse planer le doute, et milite en faveur d'un enseignement explicite et spécifique des principes des représentations utilisées en géométrie de l'espace.

Pour ce qui est des représentations du plan de type "classique", qui sont malgré tout les plus nombreuses, notre étude a confirmé que la référence aux directions privilégiées que sont la "verticale" et surtout l'"horizontale" est très majoritaire.

Nous avons pu noter également, justement chez les élèves les moins "géométrisés dans l'espace", une réelle imagination mise en oeuvre pour venir à bout des problèmes que leur pose la représentation des situations spatiales, et qui parfois les amène à trouver des solutions véritablement astucieuses et dignes d'intérêt, quoique non "classiques".

Enfin, les productions des élèves nous ont également permis de mettre en évidence la façon la plus "naturelle" dont le "savoir" était intégré au "voir" dans les dessins, c'est-à-dire le phénomène de transfert de

propriété, de la figure géométrique vers son dessin. Phénomène qui, on l'a vu, ne se produit pas uniquement dans les représentations "naïves" mais est également très présent dans les représentations "traditionnelles", et nous semble constituer un ressort important -bien que totalement implicite- de la communication qui s'établit par l'intermédiaire du dessin.

CHAPITRE 10:
"LECTURE" DE SITUATIONS "CLASSIQUES".

Après nous être intéressé à l'encodage de situations spatiales, nous avons voulu savoir comment les élèves de lycée interprétaient -en ce qui concerne les positions relatives de leurs différents constituants- quelques dessins "classiques" relatifs à des situations courantes de la géométrie de l'espace, faisant intervenir des plans, des droites et des points. Nous voulions en effet savoir:

- si les élèves étaient sensibles à la grande part d'ambiguïté que recèlent les dessins plans d'objets tridimensionnels;
- si les représentations "traditionnelles" des situations considérées pouvaient être décodées, par la grande majorité des élèves, de la façon attendue;
- si certains caractères graphiques des dessins aidaient à ce décodage et, si oui, quels étaient ces caractères, et pourquoi ils favorisaient la "lecture" attendue (ou éventuellement une autre). Nous pensions en effet que le transfert de propriété devait, ici comme dans les autres cas déjà étudiés, jouer un rôle important, associé à une démarche intellectuelle que nous avons déjà évoquée, et qui pourrait être schématisée par le syllogisme suivant:

- 1) le dessin possède la propriété P.
- 2) les propriétés "remarquables" du dessin traduisent en général des propriétés analogues de l'objet lui-même.
- 3) donc l'objet spatial possède la propriété P (ou une propriété analogue).

1- LE TEST :

Nous avons retenu cinq situations, qui ont fait l'objet d'un questionnaire passé en deux versions successives au lycée Michelet de Vanves (92):

- une première version, préliminaire (voir Annexe 7), a été passée au début de l'année scolaire 1985-86 dans une classe de Première S et une classe de Terminale D, totalisant 55 élèves;
- une seconde version (voir Annexe 8) a été passée au début des années scolaires 1986-87 et 1987-88 dans trois classes de Première S et une classe de Seconde, totalisant 128 élèves.

C'est cette dernière version que nous prendrons comme version de référence, en signalant, le cas échéant, les différences que présente par rapport à elle la version préliminaire.

N.B.: Nous avons, en ce qui concerne la seconde version, regroupé les résultats de la classe de Seconde avec ceux des classes de Première, en raison de la grande similitude générale des résultats observés (laquelle est, d'ailleurs, un indice en faveur de la fiabilité desdits résultats, tout au moins en ce qui concerne la population considérée).

2- LES RÉSULTATS :

Nous allons ci-après passer successivement en revue les cinq situations faisant l'objet du questionnaire, et analyser les résultats obtenus.

SITUATION 1: Position de points relativement à un plan.

(En ce qui concerne cette situation, le dessin correspondant était le même dans les deux versions du questionnaire; quant au libellé, la seule différence était que "est hors de P" se substituait à "n'est pas dans P", ce qui -croyons-nous- n'est pas de nature à modifier fondamentalement les réponses obtenues).

Nous avons pu remarquer, lors de l'étude de l'encodage, par les élèves, de cette même situation, que la majorité des représentations de points extérieurs au plan étaient "au-dessus" de la représentation de celui-ci; aussi avons-nous placé le point B "au-dessus" du parallélogramme représentant le plan P. Et nous avons également placé un point C "à droite" de ce parallélogramme, afin de voir si cette position entraînerait des réponses différentes de celles obtenues pour B.

Notre idée, en considérant cette situation, était bien sûr de voir si le transfert de la propriété d'appartenance se faisait aussi bien au décodage qu'à l'encodage; c'est-à-dire qu'un point dessiné à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du parallélogramme représentant le plan serait interprété comme un point situé dans (resp. hors de) ce plan.

Les résultats obtenus ont été les suivants (pour un total de 183 élèves):

	est dans le plan P	n'est pas dans le plan P	le dessin ne permet pas de répondre	je ne sais pas
le point A	136	0	47	0
le point B	0	137	46	0
le point C	4	116	63	0

TABLEAU 32

(N.B.: la première version ne comportait pas de colonne "Je ne sais pas"; et, dans la seconde version, cette colonne n'a pas été utilisée).

1- Première constatation: Pour chacun des trois points représentés, plus du quart des élèves relèvent l'ambiguïté de la représentation (mais 18 élèves seulement la relèvent systématiquement pour les trois points). Ceci ne veut pas dire qu'un élève sur dix seulement est conscient de cette fondamentale ambiguïté: il est en effet possible -et même probable- que certains soient tentés de donner une réponse du type OUI/NON à la question "le point est-il dans P?" parce qu'ils interprètent la question comme étant "Voyez-vous le point dans P?". Il nous semble donc, a posteriori, que les réponses "le dessin ne permet pas de répondre" reflètent plutôt un embarras des élèves en face de l'interprétation à donner à la représentation, qu'une prise de conscience de son ambiguïté (ce qui, pour nous, est d'ailleurs tout aussi intéressant).

2- En ce qui concerne les autres élèves, nous pouvons constater qu'il y a unanimité au sujet des points A et B: le point A est vu dans P et le point B hors de P, ce qui tout à fait en accord avec les résultats obtenus à l'encodage (transfert). Pour ce qui est du point C, il y a quasi-unanimité (seuls 4 élèves ont vu C dans le plan P); mais on peut constater une augmentation du nombre d'élèves indiquant l'ambiguïté de la représentation. Un calcul statistique (analogue à celui de l'Appendice 12) montre d'ailleurs que la proportion d'élèves répondant que "le point n'est pas dans le plan P" est significativement moins élevée (au seuil de 95%) pour le point C que pour le point B. Nous interpréterons naturellement ceci en disant que, pour les élèves, la situation est moins claire pour le point C que pour le point B. Ainsi le point C, dessiné comme B à l'extérieur du parallélogramme représentant le plan P, peut plus aisément être imaginé dans ce plan que le

point B. Il semble donc que le "prolongement mental" du plan P dans le sens horizontal (ici: vers la droite) se fasse plus facilement que dans le sens vertical (ici: vers le haut). Plus précisément, les élèves -plus ou moins conscients du fait qu'un plan est illimité- paraissent avoir plus de facilité à l'imaginer illimité "horizontalement" (voir dessin 10.1). Il se peut que ceci soit dû au fait que le plan P représenté est unanimement vu comme étant horizontal (du fait de la présence des deux grands côtés horizontaux, et des côtés obliques proches de l'horizontale; voir Chapitre 5): le point C étant représenté "au même niveau" que le dessin du plan, aura davantage tendance à être vu dans ce plan que le point B, dont le dessin est "au-dessus"; ici aussi, le transfert de propriété permet d'expliquer ce fait.

En conclusion, si l'on veut représenter un point situé dans un plan, on n'aura pas intérêt, lorsque cela est possible, (et ce n'est guère surprenant) à le dessiner extérieur au parallélogramme représentant le plan; et, dans une moindre mesure, si l'on veut représenter un point situé hors d'un plan, il sera préférable de le dessiner extérieur au parallélogramme si l'on veut éviter les risques de confusion. Mais cela ne dispense pas d'explicitier le fait, par une légende ou un commentaire oral. En effet, même s'il n'y a théoriquement aucun lien entre la propriété d'appartenance du point au plan, dans la réalité d'une part, et sur le dessin d'autre part, il n'en reste pas moins qu'il nous semble préférable que la représentation soit "intuitivement" en accord avec l'interprétation qu'en fait l'élève (c'est-à-dire "typique"): il n'est peut-être pas utile -sauf au début- de choquer "pour le plaisir". Mais il n'en reste pas moins que ce type de dessin ne peut se suffire à lui-même. Car, bien entendu, toutes ces considérations ne permettent aucunement de lever l'ambiguïté théorique, ambiguïté dont il nous semble essentiel que les élèves prennent conscience dès le début, de façon tout à fait claire et explicite (et là, il peut être intéressant de choquer, dans

le but de dramatiser la situation). Le transfert de propriété apparaît ici comme une arme à double tranchant: intéressant dans la mesure où il permet une bonne évocation de l'objet ou de la situation représentés, il peut, lorsqu'il s'applique à des propriétés non prévues par l'auteur du dessin, aiguiller le lecteur vers une mauvaise voie; d'où la nécessité d'une explicitation.

Notons que, pour lever l'ambiguïté dans ce cas précis, on pourrait, soit légender le dessin ("A ∈ P", "B ∉ P"), soit (par exemple) projeter les points sur le plan, en ayant recours à la traditionnelle convention de semi-transparence LS (voir dessin 10.2). Cela n'empêchant pas que, dans les deux cas, il faudrait malgré tout préciser la nature des objets représentés, qui n'est interprétée correctement que grâce à la connivence émetteur/récepteur évoquée dans le premier chapitre.

SITUATION 2: Position de droites relativement à un plan.

(Ici encore, le dessin étant pratiquement identique dans les deux versions du questionnaire, nous avons regroupé tous les résultats.)

Nous voulions ici tester principalement deux choses:

a) le transfert de propriété:

- le dessin de D1 étant intérieur à celui de P, D1 devrait selon nous être vue comme incluse dans P;
- le dessin de D3 étant parallèle aux bords horizontaux de P, D3 devrait être vue comme parallèle à P.

b) l'importance -et la (re)connaissance par les élèves- de la convention de semi-transparence LS pour lever une ambiguïté (droites D2 et D4), par le fait même que l'utilisation de cette convention indique le point d'intersection.

Les résultats obtenus ont été les suivants (toujours pour un total

de 183 élèves):

	est tout entière dans P	coupe P en un point	n'a aucun point dans le plan P	le dessin ne permet pas de répondre	Je ne sais pas
la droite D1	148	1	2	32	0
la droite D2	2	179	1	1	0
la droite D3	0	1	163	17	2
la droite D4	0	53	27	102	1

TABLEAU 33

N.B.1: la première version ne comportait pas de colonne "Je ne sais pas".
 N.B.2: dans la première version, nous avons utilisé le vocabulaire "technique" (incluse, sécante, parallèle). Dans la seconde, au contraire, nous n'avons eu recours qu'au langage courant. Les résultats, étant tout à fait comparables, montrent que notre souci de ne pas faire achopper certains élèves (nous pensions aux plus jeunes) sur des questions de vocabulaire était ici sans objet.

Le tableau précédent nous permet de voir:

1- Qu'un élève sur 6 relève l'ambiguïté présentée par le dessin de D1 (proportion comparable avec celle observée pour le point A dans la première situation), et que la grande majorité voit D1 incluse dans P, ce qui va dans le sens du transfert de la propriété d'inclusion. Notons ici qu'un seul élève relève systématiquement l'ambiguïté dans les trois cas D1, D2 et D4!

2- Que les résultats obtenus sont de même type en ce qui concerne la droite D3, à ceci près que l'ambiguïté de la situation est moins souvent signalée (moins d'un élève sur 10). D'autre part, le transfert de propriété relatif au parallélisme se fait apparemment mieux encore que celui de l'inclusion. Ceci est vraisemblablement dû à la grande prégnance visuelle

des horizontales: le plan P et la droite D3 étant vus horizontaux, le parallélisme en est une conséquence immédiate.

3- Que pour la droite D2 la situation paraît on ne peut plus claire: aucune ambiguïté n'est signalée, la droite est unanimement vue comme sécante au plan. L'explication va de soi: tous les élèves de ce niveau comprennent la convention usuelle de ponctuation: la droite D2 "perce" le plan P. L'analogie graphique avec le dessin d'une tige rectiligne perçant une feuille rectangulaire rigide est donc suffisamment "parlante", et tout à fait efficace. Disons cependant que cette fort utile convention pourrait néanmoins laisser subsister une ambiguïté dans un cas comme celui du dessin 10.3A: la droite coupe-t-elle, ou non, le plan en un point du "bord" représenté? Rien ne permet théoriquement de le dire. Le problème est d'ailleurs exactement le même pour le dessin 10.3B, à ceci près que l'on n'y a pas besoin d'utiliser de ponctuation. Si nous mentionnons ce cas, a priori improbable, c'est que, lors du questionnaire d'encodage de situations spatiales, plusieurs élèves ont produit un dessin tel que 10.3B (voir le dessin 9.14) pour représenter "naïvement" une droite sécante à un plan (le point d'intersection étant donc un point du "bord" du rectangle).

4- Que, pour la droite D4, la situation est beaucoup moins nette que pour les autres droites, sauf en ce qui concerne la réfutation du fait que D4 soit incluse dans P: le transfert joue ici, en quelque sorte, "négativement" par rapport à D1. D'autre part, l'ambiguïté est beaucoup plus massivement signalée (102 élèves sur 183, soit plus de la moitié, ce qui contraste fortement avec les autres droites): la droite D4 est, bien sûr, "au-dessus" du plan P, mais elle peut lui être parallèle ou sécante (d'où, d'ailleurs, les proportions non négligeables correspondant à ces deux réponses). On peut également remarquer que l'interprétation "sécante" est plus attestée que l'interprétation "parallèle". Ce fait est peut-être encore dû à un

transfert négatif de propriété, par rapport à la droite D3, se traduisant chez l'élève par un raisonnement du type: D4 n'est sans doute pas parallèle à P car, si tel était le cas, on l'aurait représentée parallèle au plan.

A ceci vient s'ajouter le fait que l'une des extrémités du segment représentant D4 est intérieure au parallélogramme représentant P: ce point a alors tendance à apparaître comme un point d'intersection de D4 et de P (en supposant le plan opaque). A moins encore qu'il ne s'agisse d'une interprétation du type du dessin 10.3B (en supposant cette fois le plan transparent)? Une autre possibilité est que l'interprétation de D4 peut se faire par référence à celle de D2: pour D2, sécante à P, le point d'intersection avec le plan est clairement désigné, grâce à la ponctuation. Or, ce n'est pas le cas pour D4. Qu'en conclure? Que D4 n'est pas sécante à P, ou bien qu'elle coupe P en un point situé hors du rectangle,...? En bref, les raisons d'hésiter et de rester perplexe ne manquent pas ici, ce que reflète bien la variété des réponses données par élèves, et en particulier le pourcentage impressionnant réalisé par l'item: "le dessin ne permet pas de répondre".

Signalons pour terminer qu'il est possible de s'appuyer sur la ponctuation pour lever certaines ambiguïtés inhérentes aux représentations considérées ici (nous avons déjà évoqué le cas de la situation 1). Pour la situation 2, on peut "faire savoir" que D1 est incluse dans P et D3 parallèle à P en traçant deux droites parallèles passant par deux points de la droite considérée (dessin 10.4). Bien sûr, toute ambiguïté n'est pas encore levée (qui dit qu'il s'agit de droites, et qu'elles sont parallèles?), mais le dessin acquiert ainsi plus de "relief", et l'interprétation est orientée vers une même "vision" de la situation représentée.

SITUATION 3: Positions relatives de plans.

Nous voulions, ici, voir si le transfert de parallélisme fonctionnait pour les plans aussi bien dans le sens du décodage que dans celui de l'encodage. En outre, nous désirions également savoir si les élèves étaient conscients du fait que deux plans ne peuvent être que sécants ou parallèles. C'est ce qui explique la présence simultanée des deux colonnes "est parallèle à Q" et "n'a aucun point commun avec Q", laquelle n'est pas destinée à séparer le parallélisme strict d'avec l'égalité, mais bien à étudier le lien entre ces deux définitions du parallélisme (strict). Malheureusement, un moment d'inattention -dont nous ne nous sommes rendu compte qu'après coup- nous a fait écrire (mais pour cette question uniquement) "cochez la bonne réponse" au lieu de "les bonnes réponses". Nous serons donc très prudent dans l'analyse de cette question.

Disons également un mot de nos représentations de plan: le plan Q de référence, ainsi que le plan P2, sont très majoritairement vus comme horizontaux (voir Chapitre 5); en principe, ils devraient par conséquent être vus comme parallèles. Le plan P1, lui, n'a aucun côté horizontal, mais ses quatre côtés ont des directions proches de l'horizontale; nous avons vu qu'il est interprété, à peu près à égalité, comme étant horizontal ou oblique. Et il devrait en être de même pour P3; en effet, cette dernière représentation est voisine du numéro 4' du Chapitre 5 (Annexe 2), à ceci près que les côtés obliques sont moins proches de l'horizontale. Or 4' est vu deux fois sur trois comme horizontal et une fois sur trois comme oblique; l'interprétation oblique devrait ici être un peu renforcée, d'où un probable équilibre entre les deux interprétations.

Notons enfin que, dans la première version du questionnaire, la représentation de P2 était située entre celles de P1 et de Q (alors que dans

la seconde version ces deux dernières étaient voisines), et que la représentation de P3 était sensiblement différente (elle était proche du numéro 15' du Chapitre 5, lequel était vu très majoritairement oblique).

Nous donnerons donc ci-après les résultats obtenus à la seconde version du questionnaire seule, et signalerons les différences observées dans la première version (N.B.:54 élèves, et non 55, ont répondu aux questions sur les situations 3,4 et 5 de la première version, du fait d'une feuille malencontreusement imprimée au recto seulement). Le tableau comporte une colonne supplémentaire, intitulée \cap , dans laquelle sont recensés les élèves ayant répondu à la fois "est parallèle à Q" et "n'a aucun point commun avec Q". A noter de plus que, dans les colonnes "est parallèle à Q" et "n'a aucun point commun avec Q", ne figurent que les élèves ayant donné uniquement la réponse correspondante.

	coupe le plan Q	est parallèle à Q	\cap	n'a aucun point commun avec Q	le dessin ne permet pas de répondre	je ne sais pas
le plan P1	69	2	1	41	15	0
le plan P2	2	73	47	2	4	0
le plan P3	71	6	3	24	22	2

TABLEAU 34

Ce tableau appelle les remarques suivantes:

1- Comme nous nous y attendions, le plan P2 est vu presque unanimement comme parallèle au plan Q (120 élèves sur 128), malgré l'obstacle visuel que constitue la représentation du plan P1, qui vient "séparer" celles de P2 et de Q. (A titre de comparaison, l'unanimité est totale dans la première version du questionnaire, où P2 et Q sont directement "superposés" l'un à l'autre: 54 élèves sur 54.) Le parallélisme des deux plans, induit par celui des bords

(transfert de propriété), ne fait donc pas de doute pour les élèves (quatre d'entre eux seulement ont signalé l'ambiguïté de la représentation). Remarquons que ce parallélisme est surtout ici, en fait, une commune horizontalité, et que ceci vient peut-être renforcer cela. Il pourrait être intéressant de donner des représentations de P2 et Q à bords parallèles mais obliques, afin de s'assurer que le transfert de propriété (comme nous en sommes d'ailleurs persuadé) s'effectue dans d'aussi bonnes conditions. C'est d'ailleurs ce transfert qui est -implicitement- utilisé par les auteurs de manuels, dans des dessins tels que le dessin 10.5, représentant deux plans parallèles (GAUTIER et THIERCÉ 1986, p.136).

2- L'interprétation de la position du plan P1 relativement à Q s'avère nettement plus intéressante, du point de vue qui nous occupe ici. En effet, l'ambiguïté (que nous avons en quelque sorte "programmée") n'est pas très fréquemment signalée (15 élèves seulement pour P1, et aucun pour l'ensemble des trois plans), mais les réponses sont très partagées entre, d'une part, "P1 coupe Q" (69 élèves) et, d'autre part, "P1 n'a aucun point commun avec Q" (41 élèves). Ceci est peut-être à mettre en parallèle avec la double "vision" du plan P1 (horizontal ou oblique); mais un autre élément doit également être pris en compte: il s'agit du fait que les représentations de P1 et de Q sont disjointes, lequel peut induire l'idée que les plans eux-mêmes sont disjointes (transfert de propriété). Et ceci -selon nous- est peut-être cause de la quasi-absence de réponses "P1 est parallèle à Q" (2 élèves seulement!). Il est également possible que, chez certains, comme nous l'avait laissé entrevoir le questionnaire d'encodage, l'idée d'un plan illimité ne soit pas fortement ancrée (si même elle est présente). Il faut de plus tenir compte du fait que la "lecture" des différents plans se fait comparativement: ayant "lu" P2 parallèle à Q, et constatant que le dessin de P1 (resp. P3) est placé différemment, l'élève peut être tenté d'éliminer la réponse "parallèle à Q"

et de se reporter sur une autre; on aurait en quelque sorte ici encore affaire à un aspect "négatif" du transfert de propriété.

On peut également se poser la question de savoir si le fait que le questionnaire ait proposé une réponse "n'a aucun point commun avec Q" n'a pas pu inciter certains élèves à croire qu'il y avait effectivement trois possibilités distinctes pour deux plans. Cela n'est pas impossible, mais ne peut de toute façon concerner que les élèves ne sachant pas (ou n'étant pas certains) qu'il est équivalent pour deux plans d'être parallèles ou disjoints. Ainsi, le nombre élevé (42 sur 128, soit une sur trois) des réponses "n'a aucun point commun avec Q" dans le cas du plan P1 (dont une seule indique également le parallélisme des deux plans P1 et Q, mais nous avons vu qu'il y avait sans doute de notre faute) montre que la connaissance de cette situation ne fait pas toujours -il s'en faut- partie des savoirs des élèves.

Quoi qu'il en soit, le parallélisme de plans n'est donc bien induit des représentations que lorsque leurs bords sont parallèles: le transfert joue donc à plein, ici aussi, son rôle de "guide d'interprétation".

D'autre part, la question est posée de savoir si, pour certains élèves, il n'y aurait pas, non pas deux, mais trois positions relatives pour deux plans: sécants, parallèles ...et disjoints non parallèles (le parallélisme strict n'étant qu'un cas particulier de la disjonction), comme c'est le cas pour les droites dans l'espace. Mais nous y reviendrons plus loin...

En ce qui concerne la première version du questionnaire, les réponses concernant le plan P1 sont nettement différentes. Rappelons que la colonne "n'a aucun point commun avec Q" n'existait pas dans cette version préliminaire. Ici, les réponses "P1 est sécant à Q" sont rares (3 élèves sur 54), ce qui peut être dû au fait que les représentations de P1 et de Q

sont "séparées" par celle de P2, et qu'il peut être difficile d'imaginer -contrairement à ce qui se passe dans l'autre version, où les deux plans sont voisins- un prolongement suffisamment étendu de ces plans, permettant d'atteindre une partie qui leur soit commune. Notre hypothèse est que la plupart des élèves sont bien prêts à prolonger mentalement les dessins d'ensembles illimités, mais uniquement dans des limites "raisonnables".

La réponse "P1 est parallèle à Q" est, dans la première version, bien représentée (20 élèves sur 54), contrairement à ce qui se passe dans la seconde. Il est tout à fait possible que ce résultat soit également dû au phénomène évoqué ci-dessus (représentations de P1 et de Q éloignées, et séparées par celle de P2), conjugué avec l'absence de colonne "P1 n'a aucun point commun avec Q": la réponse "P1 est sécant à Q" ayant été rejetée, la seule réponse "déterminée" restant en lice est alors "P1 est parallèle à Q". Il n'est d'ailleurs pas interdit de penser que cette absence de troisième terme a pu pousser certains élèves à réfléchir sur la position relative de deux plans (Se peut-il que deux plans ne soient, ni sécants, ni parallèles?). Un élément qui irait dans le sens de notre interprétation est le grand nombre de réponses "le dessin ne permet pas de répondre" (29 élèves sur 54, soit plus de la moitié), qui est nettement plus élevé ici que dans l'autre version (15 sur 128: il est inutile d'avoir recours à un test statistique pour affirmer que la différence est significative). Quoi qu'il en soit, nous restons malgré tout prudent dans nos conclusions relatives à cette première version, dont l'effectif est relativement faible, et nous nous contenterons de remarquer le rôle vraisemblablement "perturbateur" de la représentation de P2, venant s'interposer entre celles des deux plans concernés (rôle que ne joue cependant pas, dans la seconde version, le plan P1 vis-à-vis de P2 et de Q: le parallélisme est trop patent pour être mis en doute).

3- Venons-en maintenant au plan P3 (seconde version). Ici encore, un

certain nombre d'élèves remarquent l'ambiguïté (22 sur 128), et les autres se répartissent essentiellement entre une interprétation majoritaire ("P3 coupe Q": 71 élèves), et une interprétation minoritaire ("P3 n'a aucun point commun avec Q": 24 élèves): ceci, somme toute, est comparable avec les résultats obtenus pour le plan P1. Notons cependant un peu plus de réponses "parallèle à Q" que dans le cas de P1 (6 élèves contre 2, mais les effectifs sont trop faibles pour être significatifs). Si néanmoins cette disparité était confirmée, elle pourrait être reliée au fait que les "petits" côtés du dessin de P3 sont parallèles aux "grands" côtés (horizontaux) de Q.

Comme nous l'avons dit plus haut, le plan P3 était représenté de façon différente dans la première version (interprétation très majoritairement oblique). Ici, la "direction générale" de la représentation de P3 (celle des grands côtés) est très différente de celle de Q, et l'intersection se laisse plus aisément imaginer dans les limites du dessin (voir plus haut notre hypothèse d'extension "raisonnable"). En accord avec cette hypothèse, les résultats sont nettement en faveur des plans sécants (30 élèves sur 54, contre 0 pour le parallélisme), même si 22 élèves signalent l'ambiguïté.

4- Un dernier point reste à étudier: le lien entre les réponses "est parallèle à Q" et les réponses "n'a aucun point commun avec Q" dans la seconde version. Théoriquement, toute réponse d'un type devrait entraîner l'autre, puisque (hormis le cas d'égalité des plans) elles s'équivalent. Mais on constate immédiatement sur le tableau qu'il n'en est rien, et nous en sommes sans doute en partie responsable, n'ayant pas accordé aux élèves la possibilité de réponses multiples. On voit néanmoins que les réponses doubles sont présentes, et qu'elles évoluent parallèlement aux réponses "est parallèle à Q", et pas du tout parallèlement aux réponses "n'a aucun point commun avec Q" (situation schématisée sur le dessin 10.6). On peut sans doute en conclure (mais il faudrait le confirmer par une enquête dans laquelle

seraient acceptées les réponses multiples) que les réponses doubles sont un "sous-produit" des réponses "est parallèle à Q", et ne sont pas pas liées aux réponses "n'a aucun point commun avec Q".

Il semblerait donc finalement que, pour la majorité des élèves, le fait pour deux plans (distincts) d'être parallèles implique qu'ils sont disjoints, tandis que la réciproque n'est pas vraie. Ceci nous ramène donc à l'hypothèse faite plus haut: pour certains élèves, deux plans peuvent être disjoints sans être parallèles (cf résultats pour P1 et P3). Faut-il y voir une confusion avec les positions relatives de deux droites, ou l'influence pernicieuse des représentations (limitées) de plans? Cette dernière hypothèse n'est pas à exclure.

SITUATION 4: Positions relatives de droites.

Nous avons ici l'intention de voir:

- si le transfert de propriété (parallélisme, intersection) se produisait également dans cette situation;
- si le fait de ne pas mettre l'emphase sur le point d'intersection des droites incitait à se poser des questions sur la position relative de ces droites;
- si les élèves connaissaient les trois positions relatives de deux droites (sécantes, parallèles ou non coplanaires).

Par rapport à la première version, la seconde version comporte une droite de plus (D4), et l'expression "est sécante à Δ " y est remplacée par "coupe Δ ". Ces problème de vocabulaire n'ayant manifestement eu aucune incidence, nous totaliserons les réponses des deux versions en ce qui concerne les droites D1, D2 et D3.

Ces réponses se répartissent comme suit:

	coupe la droite Δ	est parallèle à Δ	n'est ni parallèle, ni sécante à Δ	le dessin ne permet pas de répondre	je ne sais pas
la droite D1	21	1	46	112	2
la droite D2	1	174	1	5	1
la droite D3	175	1	2	3	1
la droite D4	28	2	80	18	0

TABLEAU 35

N.B.: la première version ne comportait pas de colonne "je ne sais pas".

Commençons l'étude des réponses par les droites D2 et D3, pour lesquelles il y a quasi-unanimité (respectivement 174 et 175 élèves sur 182): dans le cas de D3, la possible ambiguïté est éliminée par l'accent mis sur l'intersection des représentations ("gros point"), tandis que dans celui de D2 c'est évidemment le transfert de propriété qui dirige l'interprétation, de façon suffisamment forte pour annihiler toute velléité de réflexion sur le fond du problème. La réflexion se situe en fait ici au niveau de la connivence entre émetteur et récepteur: pourquoi aurait-on représenté D2 parallèle à si les deux droites n'étaient pas parallèles? Cependant, ce sont surtout les droites D1 et D4 qui nous intéressent en l'occurrence:

1- Pour D1, la situation est nette: 112 élèves (soit plus de 3 sur 5) signalent l'ambiguïté de la représentation. Parmi les 70 autres, 21 voient D1 sécante à Δ (transfert de la propriété d'intersection), et 46 voient les deux droites "ni parallèles, ni sécantes" (ce qui, du même coup, montre qu'ils sont conscients du fait que, dans l'espace, deux droites ne sont pas

nécessairement ou sécantes, ou parallèles). Cette multipolarisation des réponses "déterminées" explique dans une certaine mesure la forte proportion des réponses "le dessin ne permet pas de répondre" (nous avons d'ailleurs déjà pu observer ceci dans la situation 2, pour la droite D4, indice possible, selon nous, de l'embarras des élèves).

2- Pour D4, l'ambiguïté n'est plus relevée que par 18 élèves sur 123 (soit un sur 7 environ), alors que, théoriquement, elle est la même que pour D1. A quoi attribuer cette différence, de toute évidence très nettement significative? Sans doute au fait que sur le dessin les représentations de D4 et Δ ne se "croisent" pas (c'est la seule différence graphique notable entre les deux cas). Mais nous reviendrons bientôt sur une possible explication de ce phénomène.

Si nous comparons maintenant avec les résultats obtenus pour D3, nous constatons également une différence significative: pour le public de la seconde version seule, 124 élèves sur 128 voient D3 sécante à Δ , contre 28 seulement pour D4 (alors que 80 voient D4 et Δ non coplanaires). Nous avons à ceci une possible explication (que nous avons déjà utilisée plus haut, dans le cas de la situation 3), qui est que la "lecture" de D4 se fait par rapport à celle de D3. Il est graphiquement manifeste que D3 coupe Δ ("gros point"), mais ce n'est pas le cas pour D4 (aucun signe au point d'intersection des représentations). Par conséquent -peut se dire le lecteur- le cas de D4 est à distinguer de celui de D3: c'est donc que D4 n'est pas sécante à Δ . Et comme manifestement elle ne peut lui être parallèle, l'élève se reporte alors sur la seule solution restante.

Ceci peut d'ailleurs fournir une explication au fort taux d'ambiguïté relevé dans le cas de D1. Comparée à celles de D3 et de D4, la représentation de D1 souffre du fait que la zone de croisement avec Δ n'est pas apparente sur le dessin: pour D3 il n'y a aucune ambiguïté

d'interprétation (à cause du "gros point"); pour D4 l'ambiguïté existe, mais -comme nous venons de le voir- la "lecture" comparée de D3 et D4 permet de trouver une solution. Par contre, pour D1, on ignore absolument comment serait l'intersection des représentations: y aurait-il un "gros point" (comme pour D3), ou rien du tout (comme pour D4)? Rien ne permet de le dire, d'où le report massif vers "le dessin ne permet pas de répondre".

SITUATION 5: Perpendicularité d'une droite par rapport à un plan.

Avec cette dernière situation, nous voulions tenter de savoir comment, à partir des représentations, les élèves pouvaient imaginer des directions par rapport à un trièdre de référence (défini ici à partir du cube ABCDA'B'C'D'). Les droites Δ_1 et Δ_2 nous permettaient de vérifier que les élèves connaissaient bien la notion de "droite perpendiculaire à un plan" (même sans l'avoir apprise en classe); les droites Δ_2 et Δ_3 de vérifier qu'ici également se produisait le transfert de propriété, et de (re)voir -cf situation 4- dans quelle mesure ils étaient conscients du fait que, si le parallélisme des droites implique celui de leurs représentations, il n'en est pas de même de l'inverse.

Voici donc les résultats obtenus (pour la seconde version uniquement, la première étant sensiblement différente, comme nous le verrons plus loin):

	est perpendiculaire à P	n'est pas perpendiculaire à P	le dessin ne permet pas de répondre	je ne sais pas
la droite $\Delta 1$	124	3	1	0
la droite $\Delta 2$	4	123	1	0
la droite $\Delta 3$	89	7	31	1

TABLEAU 36

Une première constatation saute aux yeux: aucune ambiguïté n'est relevée par les élèves dans le cas de $\Delta 1$ et de $\Delta 2$; $\Delta 1$ est dite perpendiculaire à P par 124 élèves sur 128 (ce qui ne saurait surprendre: $\Delta 1$ est une arête du cube de référence), tandis que 123 élèves voient $\Delta 2$ non perpendiculaire à P (mais font-ils pour cela un véritable raisonnement, du type: si les représentations de deux droites ne sont pas parallèles, alors ces deux droites ne peuvent pas être parallèles? ou bien se contentent-ils de se fier à une impression visuelle, et d'opérer inconsciemment un transfert de propriété?). Quoi qu'il en soit, ceci nous incite à conclure à une bonne connaissance (certainement empirique, pour une large part) de la notion visée: il existe (cf $\Delta 1$) une direction unique (cf $\Delta 2$), perpendiculaire à un plan donné.

L'ambiguïté relative à la représentation de $\Delta 3$ est, elle, signalée par 31 élèves (soit 1 sur 4), ce qui est significativement plus que dans le cas de la droite D2 de la situation 4 (5 élèves sur 183). A priori, on aurait pu s'attendre à un transfert de parallélisme aussi massif dans le cas présent; à quoi peut donc être due cette différence? Nous pensons qu'elle tient, non pas tant à la direction commune des représentations des droites considérées (horizontale dans un cas, verticale dans l'autre), qu'au contexte graphique: le dessin relatif à la situation 4 manque totalement de "relief" (n'y sont représentées que des droites) et peut très bien être assimilé

(même au corps défendant du "lecteur") à un dessin de géométrie plane, tandis que celui de la situation 5 (faisant intervenir des représentations de cube et de plan) apparaît nécessairement comme tridimensionnel. En conséquence, l'élève aura tendance -attitude on ne peut plus saine- à se montrer plus circonspect dans ce dernier cas (dans l'espace, les choses ne sont pas toujours ce qu'elles ont l'air d'être), et en conséquence à ne pas prendre pour argent comptant ce qui lui est présenté.

Les autres élèves voient, comme prévu, la droite $\Delta 3$ perpendiculaire à P (89 sur 97): la représentation de $\Delta 3$ étant parallèle à celle de $\Delta 1$, on en induit (transfert) le parallélisme des droites elles-mêmes.

Pour ce qui est de la première version, la situation était différente, puisqu'aucun trièdre de référence ne permettait de lever les ambiguïtés inhérentes aux représentations. Ici, seul le transfert était en mesure de permettre aux élèves de donner l'une des deux réponses: "est perpendiculaire à P" ou "n'est pas perpendiculaire à P". A priori, nous pensons que, si une représentation de droite était perpendiculaire aux bords "horizontaux" de la représentation de P, elle avait de fortes chances d'être vue verticale, donc perpendiculaire au plan (conformément aux représentations "traditionnelles" des manuels). Les résultats obtenus ont été les suivants:

	est perpendiculaire à P	n'est pas perpendiculaire à P	le dessin ne permet pas de répondre	non réponse
la droite D1	41	4	8	1
la droite D2	3	43	7	1
la droite D3	23	7	23	1
la droite D4	2	30	21	1

TABLEAU 37

Etant donné la -relative- faiblesse des effectifs, nous resterons

prudents dans nos conclusions. Néanmoins ce tableau laisse apparaître, en ce qui concerne l'ambiguïté, une dichotomie entre les droites D1 et D2 d'une part, et les droites D3 et D4 d'autre part: l'ambiguïté -sans être absente- est donc moins ressentie avec les droites pour lesquelles le point d'intersection avec le plan P est clairement représenté. C'est ce que nous avons déjà pu observer dans la situation 2, à propos des droites D2 et D4: comme on pouvait s'y attendre, le fait de préciser le point d'intersection de la droite avec le plan apporte au moins un renseignement sûr: la droite est sécante au plan; le problème reste donc ici de savoir si elle lui est perpendiculaire (problème hélas d'ailleurs insoluble).

Les élèves qui ont répondu affirmativement ou négativement à la question de savoir si telle droite était perpendiculaire au plan P ont dégagé un large consensus (plus de 3 sur 4) dans chacun des quatre cas. Il en ressort que les droites D1 et D3 sont vues perpendiculaires à P, contrairement aux droites D2 et D4: le transfert s'effectue donc bien comme prévu, de concert avec l'interprétation horizontale du plan P.

3- CONCLUSION:

En définitive, cette étude nous aura permis de constater que les performances des élèves en décodage sont sensiblement supérieures à leurs performances en encodage, et elle nous aura apporté, grâce à la cohérence des résultats entre les diverses classes, un certain nombre de renseignements concernant aussi bien leurs connaissances en géométrie de l'espace que le sens qu'ils donnent aux représentations spatiales considérées.

En ce qui concerne les connaissances des élèves relatives à la géométrie de l'espace, nous avons pu nous rendre compte du fait que certaines notions sont bien connues de la majorité (et ceci même si elles n'ont pas

toujours fait l'objet d'un apprentissage scolaire "officiel"): il en est ainsi des droites et plans perpendiculaires, et des positions relatives de deux droites. Par contre, des doutes nous sont apparus concernant les positions relatives de deux plans, où disjonction et parallélisme pourraient ne pas, chez certains, aller de pair.

Pour ce qui est de l'interprétation des représentations, nous avons fait remarquer que, même si l'ambiguïté n'en est relevée que par une minorité d'élèves, il ne faut sans doute y voir qu'une estimation très approximative de la proportion réelle d'élèves ayant conscience de cette ambiguïté, le fait de reconnaître que "le dessin ne permet pas de répondre" pouvant n'apparaître à certains que comme une réponse "faute de mieux", tandis qu'à l'inverse cette possibilité permet à d'autres de prendre conscience de l'existence d'un problème qui leur aurait échappé sans cela. Nous avons également pu nous rendre compte de l'intérêt de préciser graphiquement, autant que faire se peut, certains éléments du dessin, tels que les intersections ("gros point", ponctuation...): tout ce qui va dans le sens de la réduction de l'ambiguïté ne peut, bien sûr, être que bénéfique pour une interprétation consensuelle de la représentation.

Nous avons surtout pu constater que -à défaut de supposer aux élèves une réflexion d'ordre mathématique au sujet des dessins qui leur sont proposés (propriétés des projections parallèles), réflexion qui, comme nous le verrons dans la suite, ne reflète -si l'on peut dire- absolument pas leur démarche- notre hypothèse de transfert de propriété (fonctionnant, dans le cas du décodage, du dessin vers la figure) permettait dans chaque cas de rendre compte des interprétations des représentations "traditionnelles" relatives aux situations classiques; ce transfert pouvant fonctionner aussi bien de façon positive (consensus) que négative (rejet), et pour des propriétés aussi diverses que l'appartenance (situation 1), l'inclusion (situation 2), la

disonction (situation 3), le parallélisme (situations 2,3,4,5) ou la perpendicularité (situation 5).

Un autre aspect nous a également été confirmé (cf Chapitre 6), basé sur l'évidence que les différents éléments du dessin constituent un tout, et qu'ils ne prennent leur sens que les uns par rapport aux autres. C'est bien sûr ce qui rend possible les transferts de propriété, mais explique également que certains éléments puissent jouer un rôle perturbateur dans l'interprétation, en interférant de façon non souhaitée avec d'autres.

Le transfert de propriété apparaît donc comme un guide puissant et fort utile, ayant pour effet, non pas de réduire l'ambiguïté théorique (ceci ne peut être obtenu que par d'autres procédés: légendes, conventions graphiques,...), mais d'orienter vers une même interprétation, c'est-à-dire vers une image mentale commune. Néanmoins, cette interprétation ne peut sans risque être laissée à la discrétion de chacun, et nécessite que le dessin soit accompagné d'indications explicites.

CHAPITRE 11:

VOIR ET SAVOIR DANS LES DESSINS DE GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

"Il nous faut vivre en admettant que nous ne savons pas encore comment nous prenons nos décisions, mais cela n'implique pas qu'il faille pour autant patouger dans l'indécision. Et tout ce qui éclaire nos décisions rapides sans nuire à leur rapidité est d'une importance inouïe."

Douglas HOFSTADTER (HOFSTADTER 1988, p.127)

1- LE BILAN :

Comme nous l'espérons, cette série d'enquêtes nous aura donc apporté quelques résultats, résultats qui ont souvent été la confirmation de nos intuitions de départ (établies désormais sur des bases plus solides), mais qui parfois n'étaient pas vraiment attendus.

1) Nous avons pu confirmer le fait qu'une proportion non négligeable de lycéens entrent en Première S sans avoir réellement eu d'enseignement en géométrie de l'espace (Chapitre 9), puisque c'est le cas d'un élève sur deux du lycée Michelet de Vanves, "grand" lycée aux portes de Paris (environ 1800 élèves pour le second cycle seul), dont les enseignants de mathématiques, tous titulaires, ont un âge tournant autour de la quarantaine et sont -notre contact quotidien avec eux nous en a persuadé- tout à fait compétents (plusieurs d'entre eux sont auteurs de manuels). Ceci, qui ne fait que confirmer les résultats d'autres enquêtes citées plus haut, montre que beaucoup reste encore à faire pour sensibiliser les enseignants à l'importance d'une fréquentation de l'espace substantielle et précoce, et situe la population que nous avons étudiée, et sur laquelle nous avons travaillé, dans la "norme".

2) Nous avons également pu constater (Chapitre 9) certains "effets pervers" d'un accès à la géométrie de l'espace basé uniquement sur l'étude des

solides (et tout particulièrement du cube), façon de procéder en faveur actuellement au collège, qui est tout à fait intéressante en ce qu'elle est fondée sur une fréquentation d'objets tridimensionnels, mais qui est "limitée" -c'est le mot- par le fait même que ces objets sont bornés: c'est ainsi que l'on court le risque, si l'on n'y prend pas garde, de donner à penser que les plans sont bornés (faces de cube), et que les directions -de droites ou de plans- se limitent à celles qui sont matérialisées par les faces et les arêtes du cube. Il apparaît ainsi qu'il convient, au niveau du collège, d'insister beaucoup sur le caractère illimité des plans comme des droites, et de varier les types de solides utilisés comme objets d'étude: ici comme ailleurs, généraliser à partir d'un ensemble trop réduit d'exemples peut conduire à des idées fausses.

3) Nous avons obtenu (Chapitres 9 et 10) des précisions sur les conceptions qu'ont certains élèves relativement aux positions relatives de droites et de plans (nous ne dirons pas qu'elles sont "spontanées", puisqu'à ce niveau de scolarisation il serait étonnant de trouver des conceptions qui n'aient pas été influencées -sinon suscitées- par l'enseignement reçu). C'est ainsi qu'outre le fait que le plan soit, pour certains, limité (conception peut-être favorisée par une référence quasi-exclusive au cube, mais que nous avons trouvée chez d'autres élèves, tant il est vrai que la notion d'infini n'est pas "naturelle"), nous avons pu constater en particulier que les diverses positions relatives de deux plans n'étaient pas connues de tous, que pour certains -rares, il est vrai- il ne semblait pas possible que des droites puissent à la fois n'être pas parallèles et ne pas se couper. Ce sont là des lacunes auxquelles il est facile de remédier par un enseignement approprié; encore faut-il être conscient de leur existence et ne pas considérer, un peu trop rapidement, qu'il s'agit là de notions "évidentes" (évidentes pour qui?)

4) Nos enquêtes ont également permis de confronter à la réalité notre

grille d'analyse des rapports qu'entretiennent les lycéens avec les représentations planes en géométrie de l'espace. Nous avons en effet pu voir que nos hypothèses permettent d'expliquer aussi bien la production des dessins par les élèves (l'encodage) que l'interprétation spatiale, par ceux-ci, des dessins qui leur sont proposés (le décodage). Reprenons-les un peu plus en détail:

a) Hypothèse HH (habitude perceptive): Nous avons pu constater que, spontanément, la tendance, lors du décodage (Chapitre 5), est de supposer que l'objet dessiné est vu légèrement de dessus par l'auteur de la représentation, ce qui correspond, on l'a vu, à un "point de vue habituel", et permet de résoudre (certes de façon empirique) certains problèmes d'ambiguïté inhérents à toute représentation plane de l'espace (problèmes que l'utilisation des conventions de semi-transparence permet également de lever, cette fois de façon plus rationnelle). De même, lors de l'encodage, on a tendance à représenter comme vu (légèrement) de dessus (Chapitre 7; cf aussi les dessins "traditionnels" de cubes). C'est cette hypothèse qui nous permet d'expliquer la différence observée sur les angles en ce qui concerne le cube d'une part (posé sur un plan horizontal) et le plan d'autre part (dessin d'un parallélogramme, souvent sans référence à l'horizontalité); le Chapitre 7 nous a d'ailleurs permis de voir, sur l'exemple de la pyramide, concurremment "en action" les deux façons de procéder.

b) Directions "dominantes" (selon la terminologie de Lelis PAEZ-SANCHEZ): Il s'agit, rappelons-le, des directions d'une base de référence liée à tout individu ("égocentrique"), et constituée par la verticale (haut-bas), l'horizontale "frontale" (droite-gauche) et la direction orthogonale aux deux précédentes (horizontale avant-arrière). Pour pouvoir observer (resp. représenter) au mieux un objet, nous nous plaçons de façon à ce que son aspect le plus "caractéristique" corresponde à cette base (c'est

d'ailleurs là le principe qui sert de fondement aux axonométries, définies à partir de la position d'un cube de référence par rapport au plan de projection). Grâce à l'association de la référence aux directions privilégiées et de l'hypothèse HH, l'auteur d'un dessin peut donc consciemment choisir une façon de représenter la situation (choix de la position des objets par rapport au "repère égocentrique", et choix du "point de vue") telle que celle-ci ait les meilleures chances d'être interprétée comme il le souhaite.

c) Hypothèse HT (transfert de propriété): Les deux hypothèses précédentes étaient situées du côté du pôle du "voir", étant donné qu'elles faisaient référence à un "point de vue", c'est-à-dire à l'aspect de l'objet tel qu'il apparaît sur le dessin qui le représente. L'hypothèse HT, elle, se situe du côté du "savoir", puisqu'elle postule un transfert de propriété entre l'objet et le dessin de celui-ci (modulo, parfois, une légère adaptation pour tenir compte du contexte différent: plan ou espace). Nous considérons ce transfert comme analogue à une "traduction", plus ou moins canonique, de la propriété visée, fonctionnant entre deux "langages": l'espace d'un côté, le plan de l'autre.

On peut penser a priori que ce transfert n'est qu'une conséquence de nos hypothèses précédentes: ainsi, pour "faire voir" sur le dessin telle propriété de l'objet, choisira-t-on de le représenter -lorsque cela est possible- de façon telle que la propriété considérée apparaisse sur la représentation. Par exemple, pour montrer l'orthogonalité de deux droites, la représentation sera telle que la direction de plan déterminée par ces deux droites soit frontale, ce qui implique la perpendicularité de leurs dessins, donc le transfert de la propriété; toute propriété "plane" pourra également être montrée par ce procédé. Mais nous objecterons à ceci que cette façon de faire est limitée: si différentes propriétés sont à montrer, il ne sera en

général pas possible que le "bon point de vue" soit le même pour toutes. C'est la raison pour laquelle, lorsqu'il y a transfert, on parle de "mélange de perspectives": chaque "perspective" correspondant à une propriété à faire apparaître sur la représentation. Nous avons déjà dit que nous récusions cette façon de voir, car il nous semble qu'elle ne correspond pas à la démarche intellectuelle qui est en jeu. Reprenons l'exemple du dessin de pyramide (Chapitre 7): lorsqu'il s'agit de représenter le carré de base, une proportion importante d'élèves dessine, non un parallélogramme quelconque, mais un losange. Or, il est difficile de soutenir que, pour obtenir ce losange, ces élèves ont (délibérément; ou même intuitivement) choisi un point de vue très éloigné, situé dans une direction faisant un angle donné avec le plan de la base de la pyramide; il est bien plus vraisemblable -nos discussions avec les élèves nous l'ont d'ailleurs confirmé- d'y voir tout simplement le désir de faire apparaître sur la représentation l'égalité des longueurs des quatre côtés. Notons d'ailleurs -et c'est un argument qui va dans notre sens- qu'il en est de même au décodage, puisqu'au Chapitre 8 des élèves ont reproché à certains dessins de cube de n'avoir pas tous leurs côtés de même longueur (la question, rappelons-le, était de dire s'il était possible que le dessin représentât un cube). De même, lorsque pour représenter un point hors d'un plan on dessine ce point extérieur au parallélogramme représentant le plan, l'hypothèse d'un point de vue faisant apparaître le point hors du rectangle semblerait une explication bien sophistiquée. Ainsi donc, même si dans certains cas il est difficile de déterminer celle des deux hypothèses qui sert de fondement au fait de retrouver sur le dessin la propriété correspondante de l'objet, il n'en reste pas moins que le transfert de propriété apparaît comme une réalité, et qu'il ne peut s'expliquer uniquement par le "mélange de perspectives"; l'hypothèse la plus satisfaisante (la plus simple) reste bien celle d'un "transfert de

savoir", ce qui, redisons-le, n'est pas forcément contradictoire avec une préservation du "voir".

Nous avons pu mettre en évidence plusieurs caractères de ce transfert; en particulier:

1° il porte sur des "propriétés" de natures diverses: ensemblistes (inclusion, disjonction), affines (parallélisme), métriques (orthogonalité, égalité de longueurs)...

2° il peut agir en négatif, car il peut porter sur une "absence" de propriété. A vrai dire, une telle absence de propriété est elle-même une authentique propriété (elle n'est autre que la négation de la propriété en question). Si nous insistons sur cet aspect "négatif", c'est que, contrairement à la règle qui veut qu'"une absence d'information n'est pas une information", nous avons pu observer qu'ici l'absence d'une propriété "intéressante" sur le dessin était parfois interprété comme indiquant l'absence de la propriété correspondante pour l'objet spatial lui-même. Ceci participe selon nous -comme le transfert dans son ensemble d'ailleurs- du désir inconscient d'identifier l'objet et sa représentation. Ainsi donc, toute perte d'information résultant du passage de trois à deux dimensions risque-t-elle d'être prise en quelque sorte au pied de la lettre, et d'induire des idées fausses chez le "lecteur".

3° il peut faire intervenir des éléments implicites: par exemple, nous avons vu au Chapitre 6 que la perpendicularité d'une droite avec un plan se traduisait parfois par la perpendicularité du dessin de la droite avec la grande diagonale du parallélogramme représentant le plan.

4° il est à double sens: puisqu'il se produit aussi bien de l'objet au dessin (lors de l'encodage) que du dessin à l'objet (lors du décodage). On voit alors la faiblesse du transfert, du point de vue de la communication, faiblesse inhérente à sa nature même: si le "lecteur" d'un dessin postule

l'existence d'un transfert, il va s'agir pour lui de déterminer sur quels éléments l'auteur a fait porter ce transfert; outre le fait de l'interprétation correcte de la propriété transférée, le risque est ainsi double: d'une part, ignorer des éléments signifiants du dessin (et perdre ainsi de l'information), d'autre part accorder une signification à des propriétés fortuites (et introduire ainsi une information parasite). Remarquons d'ailleurs que ceci n'est pas particulier à la géométrie de l'espace, mais apparaît également en géométrie du plan. Mais, dans ce dernier cas, le "transfert" est pour ainsi dire automatique, étant donné que la représentation est de niveau 1; tandis que dans le cas de l'espace vient se surajouter le "flou" dû au passage au niveau 2.

Si nous avons insisté plus particulièrement sur cette hypothèse de transfert, c'est qu'elle nous est apparue comme l'un des ressorts essentiels de la relation des élèves aux représentations planes de l'espace, basé sur le désir -bien compréhensible- de faire de la représentation un substitut parfait de l'objet spatial. Ce désir de "préservation du savoir" est une composante qui ne pourra donc absolument pas être négligée dans l'enseignement de la géométrie de l'espace.

5) Nous avons pu également constater que le "voir" et le "savoir", quoiqu'entrant souvent en conflit dans les représentations, ne s'opposaient pas systématiquement, et pouvaient même se renforcer l'un l'autre (Chapitre 5). Qui plus est, nous avons pu déceler indirectement, chez nos élèves, le phénomène connu de rétroaction du savoir sur le voir (Chapitre 6), sous la forme suivante: l'adjonction d'un élément (ici: une droite) à un dessin donné (dessin de plan) induit une relecture et une réinterprétation de l'ensemble (le trièdre).

6) Nous avons aussi eu confirmation -ce n'était pas une surprise- du fait que le moyen "normal" pour les élèves de représenter l'espace ressemble

beaucoup à la perspective parallèle. Deux raisons principales nous conduisent à faire cette réserve:

- d'abord, nous avons vu que certains dessins sont essentiellement des reproductions de stéréotypes "traditionnels" (le cube), et que le fait d'être capable de réaliser un dessin correct en perspective parallèle ne signifie pas pour autant que l'on maîtrise ce type de représentation (l'expérience nous a même fourni maintes preuves du contraire: voir Chapitre 10).

- ensuite, même dans les dessins non stéréotypés, il n'est pas évident que la conservation sur le dessin de certaines propriétés de l'objet spatial (parallélisme, milieu) soit dû à l'application des propriétés de la perspective parallèle; tout nous porte au contraire à croire que, bien souvent, il ne s'agit là que d'un transfert de propriété ne s'appuyant pas sur des bases géométriques.

7) Même si, souvent, il y a coïncidence entre les dessins réalisés par les élèves et les dessins traditionnels des manuels, il ne faudrait pas en conclure que ceux-ci sont interprétés exactement comme l'auteur le souhaiterait. En effet, celui-ci procède (on peut le penser) à des choix conscients des objets à représenter, ainsi que des caractères particuliers de la projection et de la position de ces objets, de façon à obtenir la représentation la mieux adaptée à son propos. Mais ce n'est pas pour autant que son dessin sera dépourvu d'ambiguïté, malgré l'utilisation de conventions appropriées. Si les choix opérés ne sont pas précisés au lecteur, on court le risque d'une interprétation non prévue, sinon de l'ensemble, du moins de certaines particularités. Les Chapitres 5 et 6, nous ont suffisamment montré qu'un dessin pouvait être "lu" de différentes façons par les élèves d'une même classe: un dessin, quelles que soient par ailleurs ses qualités intrinsèques, ne saurait donc se suffire à lui-même.

Finalement, ces enquêtes nous auront permis de comprendre un peu mieux ce qui entre en jeu dans les décisions que prend -le plus souvent à son insu- un élève (et, pourquoi pas, un individu quelconque, voire nous-mêmes?) lorsqu'il entreprend de dessiner un objet spatial, ainsi que les choix qu'il opère lorsqu'il s'agit d'interpréter un dessin de géométrie réalisé par un autre. Bien sûr, ces choix ne se situent que rarement au niveau du conscient, et l'interprétation est si rapide qu'elle peut donner l'illusion d'être instantanée et, partant, d'aller de soi. Ce que dément, bien sûr, la diversité des interprétations selon les individus, même si l'on peut constater des régularités statistiques (l'une comme les autres nous fournissant des indices permettant un accès indirect aux "mécanismes" inconscients gouvernant la prise de décision). Car nous croyons, avec HOFSTADTER (voir citation en exergue), en l'importance de cette compréhension; nous la considérons en fait comme une condition indispensable à l'élaboration d'un enseignement qui prenne véritablement en compte les élèves en tant qu'individus, avec leurs points communs, mais aussi leur diversité: nous n'enseignons pas les mathématiques; nous les enseignons à Paul, à Stéphanie, à Vincent... Ce qui n'est pas exactement la même chose.

2- LES CONSÉQUENCES DIDACTIQUES :

A) Quelles représentations planes de l'espace?

Nous avons pu constater et voir à l'oeuvre, chez les élèves, un phénomène tout à fait général, qui est le double souci de préserver à la fois le "voir" et le "savoir", avec pour conséquences des conflits et des contradictions dans les productions graphiques (dont ne sont d'ailleurs pas exempts les dessins des manuels de géométrie: voir Chapitre 2). Il nous semble donc que, pour favoriser l'évocation des images mentales, la représentation

graphique d'un objet spatial doit être suffisamment proche de l'aspect que présente cet objet à la vue, sous un angle habituel. D'autre part, et dans le même but, il est également souhaitable que la représentation synthétise et rappelle, de la façon la plus claire possible, les propriétés (topologiques, affines et métriques) de l'objet, ce qui permettra en outre d'utiliser le dessin comme un substitut de l'objet lui-même qui, quoiqu'imparfait, en sera suffisamment "proche" pour permettre d'établir des conjectures à son sujet, ainsi qu'une utilisation à des fins de calcul et de mesures (voir Appendice 14: "Le compas, l'équerre, la règle graduée et le rapporteur en perspective parallèle"). C'est pourquoi nous pensons que:

1°) Si l'on veut, sinon éviter, du moins pouvoir gérer correctement les conflits voir/savoir, il est nécessaire d'avoir recours à un système cohérent de représentation.

2°) Parmi les divers types usuels de représentation plane de l'espace, la perspective parallèle est celui qui satisfait le mieux aux deux critères:

- elle est suffisamment proche du "voir", car l'image qu'elle donne est souvent voisine de celle que nous fournit un objet éloigné; ceci la différencie de la géométrie cotée et de la géométrie descriptive, pour lesquelles le rapport à l'objet est beaucoup plus éloigné (dédoublément de chaque point dans le premier cas, numérisation dans le second);

- elle préserve sensiblement mieux le "savoir" que la perspective centrale.

Comme nous avons pu également le constater, l'utilisation de la perspective parallèle, même dans le cas simple de la perspective cavalière, ne va pas de soi, aussi bien en ce qui concerne la lecture que l'écriture, et il y a donc lieu de mettre en oeuvre, même au niveau du lycée, un apprentissage explicite de ses règles, lequel est fondamentalement de nature géométrique. C'est ce que nous avons voulu entreprendre dans nos classes, et

que nous relatons dans la dernière partie de ce travail.

B) Peut-on se passer de la maquette?

Un dessin, aussi parfait soit-il, ne représente jamais qu'un seul point de vue sur l'objet représenté, et reste par là-même insuffisant à en rendre compte dans sa totalité. Il faut donc que le dessin soit à même de susciter une image de l'objet qui soit plus complète que lui-même, et susceptible de déboucher éventuellement à son tour sur d'autres dessins, relatifs à d'autres points de vue. Le problème didactique ne se réduit donc pas à celui de la représentation plane des objets spatiaux, mais inclut en fait celui de l'acquisition, par les élèves, d'une imagerie mentale qui puisse constituer un outil efficace dans la résolution des problèmes relatifs à l'espace.

Si le dessin, auxiliaire utile et souvent indispensable, se révèle insuffisant, la fréquentation de matérialisations (tridimensionnelles) des objets eux-mêmes peut-elle contribuer à améliorer cette imagerie? Dans "L'imaginaire", Jean-Paul SARTRE a montré que, même si l'image "semble du côté de la perception", elle consiste en fait en un "savoir dégradé", c'est-à-dire que l'on n'y trouve que ce que l'on connaît déjà de l'objet ("on ne se représente en image que ce que l'on sait d'une façon quelconque"; SARTRE 1940, p.116). Et il cite l'exemple célèbre du Panthéon, exemple dû à ALAIN: même si l'on affirme être capable de se représenter clairement la façade du Panthéon, on est incapable de préciser quel nombre de colonnes y figurent, et ceci quel que soit l'effort mental auquel on s'astreint; en somme, "une image ne saurait exister sans un savoir qui la constitue" (op. cit., p.116).

Il est donc essentiel, si l'on veut que l'imagerie mentale dont disposent les élèves soit riche, et surtout opératoire, de leur faire acquérir un savoir sur les objets spatiaux, ce savoir s'appuyant sur la

fréquentation effective de représentations tridimensionnelles, c'est-à-dire en¹ définitive sur un voir direct, multiple et choisi. En un mot: "on doit apprendre les objets, c'est-à-dire multiplier sur eux les points de vue possibles" (op. cit., p.23). Et ce n'est qu'après cette période d'apprentissage que l'on pourra s'en passer (car c'est effectivement là l'un des buts importants de l'enseignement de l'espace: arriver à faire l'économie de la présence effective de l'objet), lorsque l'on disposera d'un substitut (en l'occurrence, un (ou mieux: des) système(s) de représentation plane) qui permette une évocation des objets tridimensionnels en jeu, suffisamment précise pour en tenir lieu. Mais il ne faudra cependant pas se priver, dès que le besoin s'en fera sentir, d'un retour à la maquette (pour contrôler un résultat, par exemple, ou aborder une notion nouvelle). Ce sont ces idées que nous avons essayé de mettre en oeuvre dans la séquence didactique que nous relatons ci-après.

CHAPITRE 12: LA SÉQUENCE "FLAMBEAU".

"La première de mes sensations fut l'étonnement que produisit en moi l'ombre des corps; je regardais sans frayeur mais avec une profonde surprise, ces espèces de fantômes qui se peignaient à la lumière, contre la muraille de ma chambre, et qui se raccourcissaient ou s'allongeaient, d'une manière piquante pour moi, et que je ne pouvais comprendre."

Cardinal de BERNIS

"Tel est l'effet de l'habitude: lorsqu'elle agit avec le plus de force, elle cache notre ignorance naturelle."

David HUME.

Un certain nombre de problèmes liés à la représentation plane des figures de l'espace ayant été cernés, il s'agissait pour nous d'imaginer, et de confronter au réel, un enseignement tenant compte des résultats obtenus et conforme aux buts visés. Nos idées de base étaient les suivantes:

- 1- choix (d'ailleurs conforme à la "tradition") de la perspective parallèle pour représenter les figures de l'espace;
- 2- enseignement explicite des principes de cette représentation (dans sa généralité, et non seulement dans ce cas particulier que constitue la perspective cavalière, quelque important qu'il soit);
- 3- intégration de cet enseignement des représentations planes dans celui de la géométrie de l'espace;
- 4- utilisation de matériel tridimensionnel, au moins dans les premiers temps, afin de permettre l'élaboration d'images mentales et d'habiletés spatiales;
- 5- recherche de situations-problèmes liées au quotidien, permettant une déséquilibre-rééquilibrage des connaissances des élèves;
- 6- dévolution fréquente de la résolution des problèmes aux élèves.

La situation-problème qui constitue l'épine dorsale de notre

séquence didactique est, nous l'avons dit, le phénomène de l'ombre au soleil, matérialisation de la projection parallèle qui fait partie de notre environnement, et dont nous pensions que les propriétés ne sont peut-être pas aussi bien connues qu'on pourrait le croire : voir par exemple la taille de l'ombre de l'avion dans le -poétique- dessin de Jean-Jacques SEMPÉ (dessin 12.1). Mais nous nous étions persuadé, au cours d'expérimentations précédentes, de la nécessité de commencer par une approche de l'ombre au flambeau, qui correspond mieux à l'idée intuitive que l'on a de ce que peut être "une" ombre.

Partant du fait que les règles de représentation en perspective parallèle sont de nature géométrique (projection sur un plan parallèlement à une direction de droite donnée), nous désirions intégrer l'apprentissage de ces règles à celui de la géométrie elle-même. Se posait alors, comme nous l'avons dit au début, le problème de la recherche de situations didactiques qui permettraient un tel apprentissage. Ces situations devaient permettre la fréquentation effective de matériel tridimensionnel, mais ne pas se borner à une manipulation et à une étude limitée au micro-espace (petits objets en carton, par exemple). Nous voulions que les élèves apprennent également à connaître le macro-espace, et nous pensions que notre situation de base permettait cette approche. Nos deux situations de départ sont en effet relatives, soit au macro-espace (l'ombre au soleil, Chapitre 13), soit au méso-espace (l'ombre au flambeau, présent chapitre), et pour leur étude nous sommes amenés à utiliser des simulations à la limite du micro- et du méso-espace (le matériel); l'objet de l'étude relève donc bien du macro-espace, et nous n'utilisons pas les maquettes pour elles-mêmes, mais pour faciliter cette étude.

La taille même du matériel permet de faire le lien entre le macro- et le micro-espace, car :

a) la simulation est suffisamment "conforme" pour rattacher l'étude sur maquette au phénomène réel;

b) son format relativement réduit en permet une manipulation, effective ou "visuelle" (multiplicité des points de vue), ainsi que l'accès à l'isotropie de l'espace par le dépassement du rôle privilégié de certaines directions (après basculement de la maquette, les propriétés considérées subsistent). On peut ainsi se rendre compte que ce qui importe, pour l'ombre, n'est pas le fait que l'objet qui la produit soit horizontal ou vertical, mais son orientation par rapport au plan de projection.

Au cours des trois années scolaires 1985-86, 1986-87 et 1987-88, nous avons donc commencé l'enseignement de la géométrie de l'espace en Première S (et, pour la dernière année, en Seconde Indifférenciée) en soumettant nos élèves à un questionnaire qui nécessitait la présence effective, sur le bureau, du matériel suivant (baptisé "FLAMBEAU" pour d'évidentes raisons).

1- LE MATÉRIEL:

a) Description: (voir Dessin 12.2)

Le "socle" est constitué d'une planche de contreplaqué (0,50x0,35x0,015) recouverte (mais ce n'est pas indispensable) d'une plaque de liège de 8mm d'épaisseur (plus commode pour y planter des épingles à tête de couleur). Sur cette planche vient se fixer (différents endroits sont possibles) un "mât" télescopique dont la longueur peut varier de 45 à 68cm, réalisé à l'aide de baguette demi-ronde de 25mm de diamètre. Au sommet de ce mât, une ampoule électrique (du type "lampe de poche") reliée par un fil à une pile plate de 4,5 volts.

(N.B.: Ce matériel, ainsi que les autres d'ailleurs, est entièrement démontable, pour deux raisons principales :

- ne disposant pas d'un local, et les cours se déroulant dans des salles diverses, il n'était pas question de transporter un matériel volumineux à travers le lycée;

- le fait de monter le matériel sur le bureau, devant les élèves, les familiarise avec celui-ci, et les quelques (courts) instants passés à cette installation ne sont pas du temps perdu.)

b) Présentation aux élèves:

Le matériel une fois monté, sur le socle est posé un "cube-squelette", de 15cm d'arête, réalisé dans de la baguette de bois dont la section, carrée, est d'environ 3mm. Les 4 arêtes supérieures de ce cube sont peintes en rouge (elles constituent le "carré rouge", ou la "face rouge", dont nous parlerons plus loin), les autres restant de la couleur naturelle. Le problème est alors posé sous la forme suivante :

"Si on allume l'ampoule, la classe étant plongée dans l'obscurité, elle va projeter une ombre du cube sur le socle, et c'est à cette ombre que nous allons nous intéresser. Malheureusement, il est impossible d'obtenir l'obscurité dans cette salle, faute de rideaux, et lorsqu'on allume l'ampoule (le geste est joint à la parole) on ne voit rien. Nous allons donc être contraints d'imaginer ce qui se passerait dans les conditions requises, et je vais vous demander, dans un premier temps, de répondre aux quelques questions qui figurent sur la feuille que je vais distribuer à chacun et chacune d'entre vous."

(On aura noté notre flagrante hypocrisie, consistant à déplorer ouvertement un fait qui nous vient au contraire bien à point.)

2- LE QUESTIONNAIRE:

Il figure en Annexe 9 dans sa dernière version (1987-88).

Le but de ce questionnaire est double: d'abord, tester les connaissances "intuitives" des élèves sur l'ombre "au flambeau" afin d'opérer, si nécessaire, les mises au point indispensables; ensuite et surtout, amener à une situation-problème qui pourra ensuite être exploitée collectivement.

Commentaire : Les notes du début ont pour but :

- la note 1 : de placer le problème dans un cadre géométrique, comme les élèves ont l'habitude de le faire depuis le collège (les objets ne sont que des matérialisations d'êtres idéaux, au sens platonicien).

- la note 2 : de sérier les réponses possibles. Evidemment, la réponse "quadrilatère quelconque" n'a de sens que par rapport aux autres quadrilatères mentionnés: dans ce questionnaire, est "quelconque" un quadrilatère qui n'est pas un trapèze (donc pas un parallélogramme, ni un losange, ni un carré). Cela a été précisé au début de la passation.

D'autre part, on a laissé la possibilité de ne pas répondre ("Je ne sais pas"), en insistant bien sur le caractère non infamant de cette réponse. Il s'agissait en effet d'essayer de déculpabiliser les élèves (un aveu d'ignorance est toujours difficile, surtout dans le contexte scolaire où il est fréquemment sanctionné), en leur expliquant que ne pas savoir, dans le cas présent, était tout à fait admissible, étant donné que les questions posées faisaient appel à des savoirs et à une expérience extra-scolaires. Le fait de se placer sur ce terrain "marginal" -l'expérience l'a montré- met les élèves beaucoup plus à l'aise, et les inhibe beaucoup moins (surtout ceux qui réussissent habituellement moins bien). On peut ainsi avoir un débat plus intéressant, plus nourri, où interviennent aussi ces élèves qui d'habitude ne parlent pas, complexes qu'ils sont par leur manque de réussite dans la matière.

Quant à la réponse "Cela dépend", elle correspond -cela fut expliqué- au cas où la forme du quadrilatère demandé varie selon la position relative du cube et de l'ampoule. Dans le cas de la question 1, nous avons pu nous rendre compte (grâce au dialogue tenu après la passation avec nos élèves de Première S1, qui sont ceux qui ont utilisé cette réponse de la façon la moins marginale) que cette réponse a fréquemment été donnée comme synonyme de "quadrilatère quelconque", la réponse "cela dépend" présentant l'avantage de prendre en compte les éventuels cas particuliers.

(N.B.: on notera l'hypothèse faite implicitement sur les connaissances des élèves en matière d'ombre: l'ombre d'un segment est un segment. Nous n'avons pas eu de problème de ce côté.)

En ce qui concerne la note 3, nous ne reviendrons pas sur les réponses "Je ne sais pas" et "Cela dépend" (voir ci-dessus). Il est question, ici, de la "taille" de l'ombre, terme volontairement vague et qui ne fait pas partie du vocabulaire mathématique. Ceci justement pour ne pas avoir à entrer dans des détails prématurés concernant une éventuelle "homothétie" (Question 2).

Aucune question n'a été posée par les élèves au sujet de ce terme, et il ne semble pas, d'après les réponses, qu'il y ait eu de problèmes d'interprétation à ce propos.

Le choix des différentes positions (question 1) :

La version originale du questionnaire ne comportait, pour la question 1, que les positions 2, 3 et 4 de la version de référence. En effet, celle qui nous intéressait était avant tout la position 3, cas le plus général d'un cube posé à plat. La position 2 était destinée à voir si le fait de placer le cube dans une position particulière par rapport au mât (variable non pertinente, en l'occurrence, de la position) pouvait être cause de réponses différentes. Quant à la position 4, elle devait éventuellement nous permettre de contrôler expérimentalement que l'on pouvait effectivement

obtenir par projection n'importe quel type de quadrilatère, pourvu que l'on choisit bien l'orientation du cube.

A l'examen de la diversité des réponses obtenues pour la position 2, nous avons estimé utile de particulariser encore cette position, en plaçant -nous verrons plus loin dans quel but- le cube contre le mât (position 1). Enfin, la troisième et dernière version comportait également la position 0, la plus simple à notre avis (et la suite prouva que nous ne nous trompions pas), pour laquelle la symétrie induisait l'idée d'une ombre carrée.

3- LA POPULATION:

La passation du questionnaire (et plus généralement la séquence didactique) a concerné les trois classes de Première S qui nous ont été confiées au lycée Michelet de Vanves (92) durant la période 1985-88, classes qui seront désignées dans ce qui suit par:

- 1S5: 23 élèves (année scolaire 1985-86);
- 1S4: 34 élèves (année scolaire 1986-87);
- 1S1: 36 élèves (année scolaire 1987-88).

(N.B.: Le lecteur aura pu constater l'évolution des effectifs, dans un sens certes favorable aux études statistiques, mais qui l'est sans doute moins en ce qui concerne l'aspect pédagogique.)

Aux réponses de ces trois classes nous avons adjoint celles de notre Seconde 3 de l'année scolaire 1987-88 (comprenant 34 élèves, et notée 2.3), ainsi que celles de la Première S7 (notée 1S7) du lycée Gustave-Monod d'Enghien (95), comportant 29 élèves et confiée, pour l'année scolaire 1986-87, à Jean BOUDAREL, notre collègue au sein du groupe "Géométrie second cycle" de l'IREM Paris-7.

4- LES RÉPONSES :

Nous allons commencer par envisager successivement les différentes positions que mettait en jeu la question 1:

Position 0 :

Comme nous le pensions a priori, la très grande majorité des élèves a donné la réponse correcte (voir tableau ci-dessous):

Forme	IS5	IS4	IS7	IS1	2.3	Total
carré		32	25	33	34	124
rectangle			1			1
losange				1		1
parallélogramme			2	2		4
trapèze			1			1
quad. quelconque						
cela dépend						
je ne sais pas						
Total		32	29	36	34	131

TABLEAU 38

Ce bon résultat s'explique naturellement par la symétrie que présente cette situation: "tout est identique" pour les quatre sommets du carré rouge (à une rotation d'un nombre entier de "quarts de tour" près); par conséquent, on peut s'attendre à trouver semblable "identité" pour les ombres des sommets, vis-à-vis du mât et du socle (à ces rotations près): les ombres constitueront ainsi sur le socle les sommets d'un carré.

Position 1 :

Nous avons introduit cette position dans le but d'appréhender de

façon plus précise les conceptions "naïves" des élèves relatives à la projection réalisée par l'ombre au flambeau sur le socle. Les résultats ont été les suivants:

Forme	IS5	IS4	IS7	IS1	2.3	Total
carré		11	8	7	7	33
rectangle		3		1	7	11
losange		6	5	12	9	32
parallélogramme		2	3	2	6	13
trapèze		2	4	4	3	13
quad. quelconque		8	9	8	2	27
cela dépend						
je ne sais pas				2		2
Total		32	29	36	34	131

TABLEAU 39

Comme le montre le tableau ci-dessus, les réponses sont ici beaucoup plus variées, ce qui s'explique par la rupture de la symétrie, par rapport à la position précédente; elles se répartissent essentiellement, et à peu près également, entre:

- carré (la réponse correcte)
- losange
- quadrilatère quelconque.

L'étude de cette dernière catégorie de réponses va nous permettre de préciser les conceptions sous-jacentes des élèves, du fait que nous avons demandé, dans ce cas, aux élèves de IS7 et IS1 de dessiner la forme approximative du quadrilatère auquel ils pensaient.

Sur 17 élèves concernés, 14 l'ont effectivement fait (dessin 12.3);

12 dessins relèvent du type "rhomboïde", lequel se définit comme un "quadrilatère orthodiagonal symétrique par rapport à une de ses diagonales" (LE LIONNAIS et al. 1979, p.650). Chez les élèves, il est toujours convexe; c'est-à-dire qu'il s'agit donc d'un quadrilatère affectant la forme du cerf-volant traditionnel, constitué de deux triangles isocèles de hauteur différente placés de part et d'autre d'une base commune. De plus, les deux triangles ne sont jamais obtusangles, et le plus grand des deux est toujours acutangle. Quant au plus petit, il est tantôt acutangle (6 cas), tantôt rectangle (6 cas également, dont deux explicitement, grâce à l'indication traditionnelle d'orthogonalité). Dans tous les cas, l'emplacement du pied du mât correspond au sommet du plus petit des deux triangles, comme les élèves l'ont indiqué sur leur dessin ou oralement après la passation.

Les deux derniers élèves ont dessiné un quadrilatère convexe constitué d'un triangle rectangle et d'un triangle scalène, placés de part et d'autre d'un côté commun; l'angle droit correspondant, comme dans le cas des 6 "rhomboïdes rectangles", à l'emplacement du pied du mât.

Il est également important d'observer ici que le losange (anciennement dénommé rhombe), qui a été obtenu 32 fois, est un cas particulier de rhomboïde convexe, dans lequel les deux triangles isocèles sont isométriques; et il n'est pas tout à fait exclu que certains élèves aient utilisé le terme "losange" pour désigner en fait un "cerf-volant".

Quant au carré (obtenu 33 fois), c'est un cas particulier de losange, donc de rhomboïde.

En définitive, les réponses "quadrilatère quelconque" correspondent à la conception sous-tendue par les deux "théorèmes en acte" suivants:

(T1): il se passe la même chose (à une rotation près) pour deux sommets du carré rouge situés à la même distance du mât (ce qui, dans le présent cas, entraîne l'existence d'un axe de symétrie pour l'ombre);

(T2): un sommet plus éloigné du mât a son ombre proportionnellement PLUS éloignée du pied du mât qu'un autre sommet.

Le "théorème" T1 est tout à fait correct (tant que l'on reste dans le plan du carré rouge), et il peut être complété chez certains en remarquant de plus que:

(T3): l'angle droit correspondant au sommet du carré rouge placé contre le mât est projeté suivant un angle droit.

T3 est bien sûr exact, et peut même être étendu à tous les sommets du carré rouge (à condition de surmonter l'hétérogénéité spatiale créée par la position particulière du cube par rapport au mât):

(T4): les angles droits du carré rouge sont projetés suivant des angles droits.

Quant à T2, il est, lui, tout à fait incorrect, car en fait:

(T5): un sommet quelconque du carré rouge a son ombre proportionnellement ÉGALEMENT éloignée du pied du mât qu'un autre sommet.

On pourrait certes penser à T5 pour expliquer les réponses "losange", mais ce "théorème" ne fait que traduire l'homothétie existant entre le carré rouge et son ombre sur le socle; par conséquent il aboutit en fait à la conclusion que cette ombre est carrée. (Notons d'ailleurs au passage que, si la référence plus ou moins consciente à une homothétie entre le carré rouge et son ombre existe bien chez certains élèves (comme nous le verrons plus loin), elle n'est le fait que d'une très petite minorité).

En conséquence, nous expliquerons plutôt les réponses "losange" par le "théorème" suivant:

(T6): Pour deux arêtes du carré rouge et leur ombre, l'égalité des longueurs est conservée.

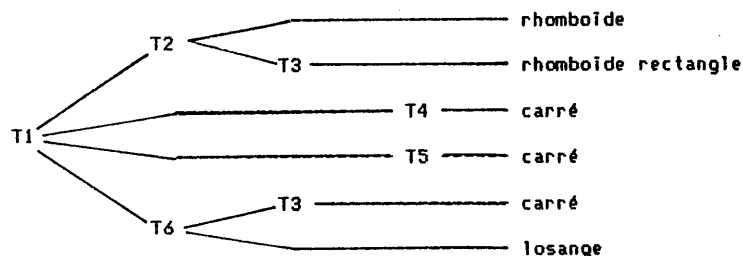
(N.B.: Il s'ensuit que T6 est une extension de T1. Ce qui fait que se référer à T6 dispense -théoriquement du moins- de toute référence à T1. Mais il n'est

pas évident -en fait, nous sommes même persuadé du contraire- que les élèves ayant donné la réponse "losange" n'aient pas d'abord pensé à la symétrie de la situation spatiale; c'est-à-dire que, selon nous, T6 ne se substitue pas à T1, mais le prolonge.)

En résumé, on peut établir la correspondance ci-dessous entre les formes d'ombre et les théorèmes:

- rhomboïde: T1 + T2
- rhomboïde "rectangle": T1 + T2 + T3
- losange: T1 + T6
- carré: T1 + T4, ou T1 + T5, ou T1 + T3 + T6.

Ces réponses s'articulent donc selon l'arbre suivant:



(N.B.: Nous aurions pu adjoindre à cette liste le rectangle, correspondant à T4 seul; mais il s'agit là d'une réponse marginale -un élève sur 12 seulement-, l'idée de base de la plupart des réponses observées semblant bien être le respect de la symétrie de la situation.)

Finalement, nous pouvons conclure que, pour une proportion non négligeable de nos élèves (en fait, environ la moitié), le rapport entre un sommet du carré rouge et son ombre sur le socle peut s'exprimer sous la forme suivante:

"Plus le sommet est éloigné de la source lumineuse, plus son ombre est éloignée du pied du mât."

Cette formulation n'est pas inexacte, mais elle est insuffisamment précise, car elle ne prend en compte que le sens de variation, et ignore tout aspect quantitatif, ce qui rend possible le glissement observé vers T2.

Position 2:

Cette position était, comme les suivantes, commune à toutes les versions du questionnaire. Nous avons obtenu les résultats suivants:

Forme	1S5	1S4	1S7	1S1	2.3	Total
carré	6	5		5	2	18
rectangle	7	12	7	10	9	45
losange	3	1	1	2	1	8
parallélogramme	2	3	7	5	5	22
trapèze	5	11	14	14	16	60
quad.quelconque						
cela dépend						
Je ne sais pas						
Total	23	32	29	36	34	154

TABLEAU 40

Nous observons ici deux réponses majoritaires, constituant chacune environ un tiers de l'effectif:

- trapèze (60 élèves sur 154)
- rectangle (45 élèves sur 154).

Nous avons désiré en apprendre davantage sur les conceptions "naïves" qui sous-tendaient ces réponses. Aussi avons-nous posé à la classe de Seconde 3, en addition au questionnaire, une question complémentaire (voir Annexe 10), destinée à préciser à la fois les réponses à la présente question et celles relatives à la question 3 (voir plus loin).

Il s'agissait dans ce cas de l'aspect "dynamique" du problème de l'ombre du carré rouge: à partir d'une position 2 proche du mât (notée A), on recule (dans l'axe du socle) le cube vers une autre position 2 (notée B), puis vers une troisième (notée C) (voir dessin 12.4). Nous fournissions 11 "scénarios" (basés sur les discussions ayant eu lieu lors des précédentes passations), censés représenter la forme de l'ombre du carré rouge dans chacune des positions A, B, C. L'élève avait à choisir celui de ces scénarios qui, selon lui, correspondait le mieux à ce qui serait observé dans la réalité.

Nous étudierons plus en détail les réponses à cette question lors de l'analyse des réponses à la question 3, mais nous pouvons dire ici que, sur 34 réponses:

- 27 indiquent des trapèzes comme forme pour l'ombre;
- 3 indiquent des rectangles;
- 3 indiquent des carrés;
- 1 indique un quadrilatère de "nature" variable.

On peut dès l'abord noter une différence quantitative par rapport aux réponses de cette même classe à la question "statique", pour laquelle nous avons obtenu, rappelons-le:

- 16 trapèzes;
- 9 rectangles;
- 2 carrés;
- et 5 parallélogrammes.

Cette apparente contradiction chez certains montre que l'introduction d'une "dynamique" dans l'énoncé est susceptible de modifier la conception qu'a l'élève du phénomène, celui-ci pouvant être perçu différemment du fait de l'introduction de ce nouvel élément. Il n'en reste pas moins que la réponse majoritaire reste le "trapèze" (elle s'en trouve même

renforcée).

Le cas du trapèze fait bien entendu penser à une confusion avec l'ombre (sur le socle) d'une des faces verticales du cube. Nous avons déjà émis cette hypothèse lors des deux premières passations, et avons en conséquence posé en annexe (au cours suivant) la question ci-après à nos élèves de 1S4:

"Le cube est dans la position 2, mais cette fois le carré rouge constitue la face verticale la plus éloignée du mât. Quelle est la forme de son ombre?"

Sur 34 réponses, nous avons obtenu:

- 26 trapèzes (dont 21 explicitement ou implicitement isocèles),
- 6 rectangles,
- 2 parallélogrammes.

Cette configuration spatiale fournit par conséquent une nette majorité de trapèzes (ainsi que quelques rectangles), en tout point analogues à ceux que nous avons pu observer (mais en moins grand nombre) lorsque le carré rouge est horizontal. Notre hypothèse d'une confusion horizontal/vertical n'est donc pas invraisemblable, tout au moins dans certains cas.

Mais quelles sont les conceptions sur lesquelles s'appuient les deux principales réponses?

On peut penser a priori que la réponse "trapèze" s'appuie sur le théorème en acte suivant:

(T7): les rayons lumineux divergent à partir de la source.

La réponse "rectangle" résultant, elle, d'une assimilation de l'ombre au flambeau avec l'ombre au soleil, par exemple sous la forme:

(T8): à une distance suffisante de la source, les rayons lumineux sont à peu près parallèles.

Mais, en observant les réponses à la question "dynamique", on se rend toutefois compte que les trapèzes choisis n'ont pas tous l'aspect que leur imposerait T7. En effet, si 20 des 27 élèves indiquent un trapèze dont la grande base est la plus éloignée du mât (dessin 12.5A), conformément à T7, les 7 autres sont d'un avis contraire (dessin 12.5B). Comment interpréter cette dernière réponse?

Suite aux discussions ultérieures que nous avons eues avec les élèves, nous proposons ci-après deux "explications".

1) la première (qui nous a justement été proposée en classe de Première), comme les autres bien sûr basée sur l'expérience de l'élève, fait plus précisément référence à son ombre personnelle (confusion horizontal/vertical) à la lumière d'un lampadaire l'éclairant par derrière (ce que confirment les discussions en classe. Or, qu'observe-t-on dans ces conditions?

En réalité, l'ombre du corps garde une largeur constante (puisque le rapport d'homothétie entre un segment horizontal et son ombre est constant). Mais sa longueur est d'autant plus grande que le sujet est éloigné de la source. Ce qui fait que l'ombre prend un aspect de plus en plus étiré au fur et à mesure que l'on s'éloigne du lampadaire et, vues par le sujet, les parties de son ombre qui sont les plus distantes de ses yeux (c'est-à-dire tête et épaules) lui paraissent plus minces. Cette explication se réfère à l'aspect dynamique de la situation (et c'est bien pour la question annexe que nous avons relevé ce type de réponse), et peut se résumer ainsi:

"Plus je suis loin de la source lumineuse, plus mon ombre est mince".

Elle débouche sur l'idée que les parties les plus éloignées de la source ont une ombre plus "mince", cette "minceur" (en fait, un étirement, c'est-à-dire une diminution du rapport largeur/longueur) étant ensuite comprise -indûment- comme une "étroitesse" (donc une largeur), par

glissement du relatif à l'absolu (et également du dynamique au statique, ainsi que du subjectif à l'objectif). Et finalement on peut énoncer:

(T9) Plus un objet est loin de la source, plus son ombre est étroite.

(Nous rappellerons cependant que T9 semble apparemment moins fréquent que T7.)

2) la seconde justification (qui nous a justement été fournie en classe de Seconde) a le mérite d'expliquer aussi bien l'obtention des deux types de trapèzes que celle des rectangles; elle se fonde sur un antagonisme entre:

- d'une part, le théorème en acte T2 ("un sommet plus éloigné du mât qu'un autre a son ombre proportionnellement plus éloignée du pied du mât que celle de cet autre");

- d'autre part, une conséquence de T7, qui est que "les rayons lumineux passant par les extrémités du côté du carré rouge le plus éloigné du mât font entre eux un angle plus petit que ceux qui passant par les extrémités du côté le plus proche".

Ces deux phénomènes sont effectivement perçus comme antagonistes puisque le premier a tendance à agrandir l'ombre du côté le plus éloigné, tandis que le second tend au contraire à lui donner une ombre plus petite. En conséquence:

- si le premier domine, on obtiendra un trapèze dont le côté le plus éloigné du mât est la grande base;

- si c'est le second, on obtiendra par contre un trapèze dont le côté le plus éloigné du mât est la petite base;

- enfin, s'il y a exacte compensation, on obtiendra un rectangle (ce qui de plus préserve les quatre angles droits).

(N.B.: le principe commun de ces trois "justifications" nous a été donné par l'un des 7 élèves ayant estimé que l'ombre avait la forme de celle du dessin 12.5B; mais les "adaptations" aux deux autres cas (trapèze du dessin 12.5A et

rectangle) ont été fournies "dans la foulée" par deux autres élèves. Elles ont d'ailleurs visiblement semblé convaincre le reste de la classe. Un élève a cependant exprimé son désarroi (qui certainement ne devait pas lui être particulier): "Pourtant, lorsque le cube est placé quelque part, on ne peut pas avoir les trois cas à la fois. Alors, quelle est la bonne solution?" Le problème revenait ainsi du dynamique au statique et, apparemment, il "accrochait": on avait envie de savoir...

Revenons-en maintenant à la question "dynamique" de l'Annexe 10, posée en Seconde 3; les 34 réponses se répartissent comme suit:

N° scénario	Effectif
1	5
2	12
3	2
4	1
5	7
6	2
7	
8	1
9	2
10	1
11	
Mélange	1
Total	34

TABLEAU 41

Trois scénarios se détachent du lot:

- le n°2 (12 élèves), où les différents trapèzes sont homothétiques les

uns des autres, et augmentent de taille à mesure que le cube s'éloigne du mât;

- le n°5 (7 élèves) et le n°1 (5 élèves), où le trapèze s'allonge lorsque le cube est écarté du mât.

On peut ainsi répartir les élèves selon deux grandes conceptions:

- l'une dans laquelle il n'y a pas changement de forme, mais augmentation de la taille (14 élèves, en y ajoutant les deux élèves ayant choisi le scénario 9);
- l'autre dans laquelle il y a surtout allongement de l'ombre (15 élèves, en y comprenant les deux élèves ayant choisi le scénario 6, et celui qui a opté pour le scénario 4).

Cette dernière conception trouve sans aucun doute son origine dans une confusion avec l'ombre d'un objet vertical (par exemple le propre corps de l'observateur); pour ce qui est de la première, c'est la conservation de la forme qui est apparemment l'élément dominant (intuition vague d'une homothétie?).

Pour en terminer avec la position 2, remarquons que, pour ce qui concerne la symétrie, les positions 1 et 2 font intervenir deux sortes de symétrie: l'une, par rapport au mât (position 1), et l'autre par rapport au socle (positions 1 et 2). Dans la position 1, il n'y a pas de symétrie par rapport au socle, et cependant la grande majorité des réponses se réfère plus ou moins implicitement à une symétrie (théorème en acte T1): nous en concluons (ce qui d'ailleurs n'est guère surprenant) que le rôle de la symétrie par rapport au socle, tout en n'étant pas niable, est cependant nettement moins fondamental que celui de la symétrie par rapport au mât.

Position 3:

Elle figurait également dans les trois versions du questionnaire.

Nous avons obtenu les résultats ci-dessous:

Forme	1S5	1S4	1S7	1S1	2.3	Total
carré	5	4	2	1	1	13
rectangle	1		1	1	6	9
losange	2	7		1	1	11
parallélogramme	1	5	5	7	11	29
trapèze	5	3	6	5	3	22
quad. quelconque	7	12	6	7	6	38
cela dépend	1	1	7	13	6	28
je ne sais pas	1		1	1		3
Total	23	32	28	36	34	153

TABLEAU 42

On constate, cette fois, une prédominance de la réponse "quadrilatère quelconque", à laquelle vient s'ajouter "cela dépend". Nous avons déjà fait remarquer plus haut que cette réponse correspond en fait, dans la majorité des cas, à la réponse "quadrilatère quelconque", ce qui place cette dernière nettement au-dessus des autres.

Nous avons visualisé la comparaison des réponses pour les positions 2 et 3 dans le polygone de fréquences du dessin 12.6. Ce graphique permet de constater la stabilité des réponses "parallélogramme", "losange" et "carré", la chute des réponses "trapèze" et surtout "rectangle", et corrélativement la grosse remontée de "quadrilatère quelconque", lorsque l'on passe de la position 2 à la position 3.

L'effondrement des "rectangles" et -dans une moindre mesure- des "trapèzes" s'explique clairement par la disparition de la particularité de la position du cube par rapport au mât, entraînant la disparition de la symétrie de l'ombre du carré rouge. Quant à la bonne réponse ("carré"), sa

stabilité (sur les 13 réponses relevées dans les cinq classes pour la position 3, 11 étaient déjà telles pour la position 2) correspond sans nul doute aux élèves ayant repéré (plus ou moins consciemment) une "homothétie" entre le carré rouge et son ombre sur le socle.

Pour en terminer avec l'étude du cube posé à plat, observons l'évolution des réponses correctes de la position 0 à la position 3:

Position	1S5	1S4	1S7	1S1	2.3	%
0		32	25	33	34	95
1		11	8	7	7	25
2	6	5	5	0	2	12
3	5	4	2	1	1	9

TABLEAU 43

Comme on pouvait le prévoir, la proportion est fonction du degré de particularité (symétries) de la position du cube par rapport au mât: de plus de 9 élèves sur 10 pour la position 0, elle tombe à moins de 1 sur 10 pour la position 3. En conclusion: la réponse à la question: "Un cube-squelette est posé sur le sol et éclairé par une source lumineuse ponctuelle placée à distance finie. Quelle est la forme de l'ombre portée sur le sol de sa "face" supérieure?" est loin d'être évidente pour les élèves de Première scientifique, et nous avons par conséquent là une véritable "situation-problème" dont l'exploitation pourra se révéler fructueuse pour l'apprentissage de la géométrie de l'espace.

N.B.: Notons ici que nous avons fait passer ce questionnaire à des enseignants de lycée en stage de géométrie à l'IREM Paris-7. Les réponses obtenues ont été tout à fait comparables à celles des élèves, ce qui nous conforte dans notre opinion.

Position 4:

Nous ne la mentionnerons que pour mémoire, puisque là n'était pas notre véritable but en soumettant ce questionnaire à nos élèves. Les réponses se répartissent comme suit:

Forme	IS5	IS4	IS7	IS1	2.3	Total
carré			5	4		9
rectangle					1	1
losange	3	10	10	5	18	46
parallélogramme	3	2	2	2	2	11
trapèze	4	2	5	3	1	15
quad. quelconque	8	9	2	6	6	31
cela dépend	4	7	3	9	3	26
je ne sais pas	1	1	1	6	1	10
Total	23	31	28	35	34	151

TABLEAU 44

On peut néanmoins s'étonner de la proportion relativement forte des réponses "losange", plus élevée même que dans le cas de la position 3. Nous nous contenterons de hasarder l'hypothèse d'une croyance, chez ces élèves, en la conservation du parallélisme et de l'égalité des longueurs par la projection conique (mais non de l'orthogonalité: le carré et le rectangle sont les réponses les moins fréquentes). Cependant, faute d'autres indices venant étayer ou infirmer cette interprétation, nous n'en dirons pas plus pour l'instant (voir chapitre suivant).

Passons à présent aux problèmes relatifs au changement de taille éventuel de l'ombre au sol par modification de la configuration spatiale

(position 2). Cette partie du questionnaire contenait un "piège" (qui n'était pas si grossier qu'il pourrait le sembler à première vue, puisque des enseignants s'y sont laissé prendre).

Question 2: Si on élève la source lumineuse (le mât restant fixé au même endroit), que constate-t-on pour l'ombre du carré rouge?

Le tableau ci-dessous indique les réponses obtenues à cette question:

Réponse	IS5	IS4	IS7	IS1	2.3	Total
diminue	18	21	17	27	26	109
augmente		8	7	7	6	28
pareille	4	1	4	2	2	13
cela dépend		1				1
je ne sais pas	1	1				2
Total	23	32	28	36	34	153

TABLEAU 45

La réponse correcte ("la taille diminue") est fournie par plus de deux élèves sur trois, ce qui est tout à fait honorable et dénote une bonne compréhension du phénomène

Question 3: Si on éloigne le cube du mât, que constate-t-on pour l'ombre du carré rouge?

Cette fois, nous avons obtenu les réponses suivantes:

Réponse	1S5	1S4	1S7	1S1	2.3	Total
diminue	3	7	7	6	5	28
augmente	15	20	17	27	23	102
pareille	4	4	3	2	2	15
cela dépend	1			1	1	3
je ne sais pas		1	1		2	4
Total	23	32	28	36	34	153

TABLEAU 46

La bonne réponse ("la taille ne change pas") n'a été fournie que par un élève sur 10 en moyenne, tandis que deux élèves sur trois pensent que la taille augmente. Dans le cas présent également, nous pensons qu'il y a eu confusion entre l'horizontal et le vertical, cette réponse correspondant en fait à ce qui se serait passé si le carré rouge avait été vertical. Ceci s'appuie sur le type de justification (parfois presque véhémence) fourni par les élèves à l'appui de leur position. En effet, l'explication la plus fréquemment fournie a été du type suivant: "Lorsque, la nuit, l'on est éclairé de derrière par un lampadaire, notre ombre s'allonge au fur et à mesure que l'on s'éloigne". Ainsi semble confirmée l'hypothèse faite plus haut, concernant la confusion horizontal/vertical. Il est vrai que, lorsqu'on évoque l'ombre sur le sol, on pense plutôt à l'ombre d'un objet vertical qu'à celle d'un objet horizontal, et il est possible que les propriétés de l'ombre auxquelles on pense de manière "intuitive" soient celles des objets verticaux, étendues à tous les objets.

Encore une fois, la situation considérée (cube posé à plat, avec le carré rouge au-dessus) semble bien pouvoir poser un véritable problème aux élèves, et provoquer un déséquilibre cognitif lorsqu'ils sont confrontés aux

résultats expérimentaux.

La dernière partie du questionnaire (Question 4) était destinée à voir quels dessins pouvaient être considérés comme des ombres "au flambeau" d'un cube-squelette, c'est-à-dire comme des dessins de cube en perspective centrale.

Au sujet de la justification des réponses, un élève avait -lors de la première passation- demandé s'il était suffisant (en cas de réponse positive) d'indiquer sur le dessin l'emplacement de la base du mât. Il s'ensuivit que cette possibilité fut offerte explicitement à toute la classe, qui dans son ensemble l'utilisa, et il en fut de même lors des passations dans les autres classes.

Les résultats obtenus figurent dans le tableau ci-dessous.

(N.B.: les 8 dessins ont été numérotés de gauche à droite et de haut en bas, de 4.1 à 4.8.

La réponse correcte a été entourée dans le tableau.

La réponse "oui" est codée par O, "non" par N et la non-réponse par NR.)

Dessin	1S5		1S4		1S7		1S1		2.3		Total		
	O	N	O	N	O	N	O	N	O	N	O	N	NR
4.1	17	5	24	5	10	18	17	19	28	4	96	51	7
4.2	16	7	24	6	21	7	19	16	21	11	101	47	6
4.3	4	18	8	20	3	25	12	24	13	19	40	106	8
4.4	16	7	24	7	10	18	24	12	29	2	103	46	5
4.5	20	3	31	1	26	3	33	3	22	11	132	21	1
4.6	7	15	15	15	9	19	13	22	16	17	60	88	8
4.7	6	15	11	19	5	23	9	27	14	18	45	102	7
4.8	16	7	22	7	10	18	18	18	27	6	93	56	6

TABLEAU 47

Pour visualiser ces résultats nous avons, sur le dessin 12.7, indiqué sous chacun des 8 dessins de la question 4 les nombres totaux de OUI et de NON obtenus (la réponse correcte est encadrée).

On peut constater que les résultats sont assez bons: la proportion des réponses correctes est variable suivant la classe considérée, mais la bonne réponse est toujours fournie majoritairement.

Le meilleur consensus (de loin) est obtenu pour la représentation 4.5, avec près de 9 élèves sur 10; ceci est bien sûr à mettre en relation avec le fait que, dans la question 1, la position 0 (correspondant à ce dessin d'ombre) est celle qui provoque (de loin) la meilleure réussite. La conclusion à en tirer est que cette situation est -comme on s'en était déjà rendu compte- la plus simple, en raison des symétries qu'elle présente.

Nous trouvons ensuite les représentations 4.3 et 4.7 (réponse négative), avec une proportion d'environ 2 élèves sur 3. Quelques (rares) élèves ont justifié ce rejet, et l'ont fait à l'aide d'arguments mentionnant

plus ou moins nettement l'absence d'un carré pouvant constituer (l'ombre de) la face inférieure du cube ("aucun côté (sic) n'est carré"). On peut s'étonner qu'un quart des élèves (au mieux) n'aient pas songé à utiliser ce critère; il est vraisemblable que leur image mentale du cube posé à plat n'était pas suffisamment précise pour être efficace.

Une proportion du même ordre (environ deux élèves sur trois) a été obtenue pour les représentations 4.2 et 4.4. Pour 4.2 la justification est très fréquemment fournie (sous la forme de l'indication de l'emplacement du pied du mât), et correcte. Le résultat est donc bien meilleur ici que pour la question 1, avec le cube dans la position 1 (position qui correspond à ce dessin d'ombre). Il semble donc y avoir une nette différence de performance entre l'encodage (détermination de la nature de l'ombre du carré rouge) et le décodage (lecture de l'ombre du cube), phénomène que nous avons déjà eu l'occasion d'observer par ailleurs. La représentation 4.4, elle, correspond à un cube placé dans la position 2. Ici également, la réussite est bien meilleure au décodage qu'à l'encodage (question 1).

Nous avons enfin obtenu des réponses un peu plus mitigées pour les trois dernières représentations:

- 4.1 et 4.8 sont tout à fait acceptables (le premier correspondant d'ailleurs à la position 2), et reconnues comme tels par plus de la moitié des élèves; ici encore, la réussite est nettement plus élevée pour le décodage que pour l'encodage.

- enfin, 4.6 correspond à une ombre "au soleil" de cube, et non à une ombre "au flambeau", mais il n'est pas impossible qu'un certain nombre d'élèves aient accepté cette représentation en songeant à une source lumineuse placée "très loin". Notons ici pour l'anecdote qu'un élève estime que ce dessin ne peut pas être l'ombre d'un cube, "puisque c'est le dessin d'un cube"!

En résumé, cette dernière partie du questionnaire nous aura donc permis de voir que l'ombre "au flambeau" est assez familière pour que les élèves la reconnaissent, même s'ils n'en connaissent pas toutes les propriétés.

Conclusion :

Grâce à ce questionnaire, nous aurons pu atteindre le double but que nous nous étions fixé :

D'abord, il nous a été possible de mettre en évidence certains des principes "intuitifs" qui -en l'absence de connaissances institutionnalisées, ou tout au moins clairement explicitées- guident les élèves dans leur appréhension des effets imaginés du phénomène auquel ils sont ici confrontés; le premier de ces principes étant, rappelons-le, la prise en considération des symétries éventuelles que peut présenter la situation spatiale, auquel viennent s'ajouter quelques autres "théorèmes en acte", issus directement de leur "expérience", mais qui se révèlent souvent trop "grossiers" pour être totalement opératoires.

D'autre part, la prise de conscience de ces carences, à propos d'un phénomène (l'ombre au flambeau) que l'on croit bien connaître pour le côtoyer journallement, constitue à nos yeux une motivation certaine, en faisant clairement apparaître la nécessité que l'expérience et la réflexion se nourrissent l'une de l'autre (point de départ d'une dialectique outil/objet), afin de permettre la constitution d'un savoir efficace et qui ne soit pas coupé du réel, rejoignant ainsi, à l'instar de la démarche historique, "la connexion étroite, vitale, nourricière avec les questions et les suggestions venues du monde physique" (DE GANDT 1982, P.190).

Ainsi, l'ombre au flambeau fait partie de notre environnement quotidien; nous pensons qu'elle n'a plus rien à nous apprendre, et pourtant...

Le faible taux de réussite des élèves pour certaines questions montre que l'on peut encore y trouver matière à réflexion. C'est la raison qui nous a poussé à prendre, comme première situation-problème, celle du cube posé à plat sur le socle, le carré rouge correspondant à la face supérieure (position 3).

5- LA SÉQUENCE DIDACTIQUE (CHRONIQUE COMMENTÉE) :

(Nous relatons ci-après la chronique commentée du déroulement de la séquence didactique que nous avons baptisée "FLAMBEAU", et que nous avons mise en oeuvre successivement dans une classe de Première S, puis dans une classe de Seconde Indifférenciée. Il s'agit de la classe de Première S1 et de la classe de Seconde 2, qui nous ont été confiées pour l'année scolaire 1987-88. En Première, il s'agissait en fait de la troisième année d'expérimentation, tandis qu'en Seconde c'était la première année. Nous relatons cette chronique en continu, mais elle s'est en fait déroulée sur une période d'un mois environ, à raison de trois séances de deux heures en Première, et de six séances d'une heure en seconde.) Bien entendu, les essais des deux années précédentes (en 1985-86 pour la Première S5 et en 1986-87 pour la Première S4) nous ont apporté beaucoup d'éléments, dont nous avons profité pour mettre au point cette version.)

A) En Première :

Après la passation du questionnaire FLAMBEAU, nous avons procédé à un rapide recensement collectif, à main levée, des réponses données à la première question, afin de faire apparaître à tous la grande diversité des opinions (c'est-à-dire montrer l'existence d'un véritable problème), et par conséquent fournir une motivation à la recherche de sa solution. Nous avons ensuite fait comparer entre elles les différentes positions du cube auxquelles

le texte du questionnaire faisait référence: les positions 0, 1 et 2 sont des cas particuliers de la position 3 (elle-même cas particulier de la position 4). Nous avons proposé de nous intéresser au cas de la position 3, faisant valoir que, ce cas une fois résolu, nous pourrions très certainement utiliser le résultat pour la résolution des cas particuliers.

Nous avons donc donné une première formulation du problème auquel nous allions collectivement nous intéresser: le cube étant posé à plat, carré rouge au-dessus, quelle est la forme de l'ombre de ce carré rouge sur le socle?

Question (posée à l'ensemble de la classe): Comment pourrait-on savoir ce qu'il en est (ou tout au moins en avoir une idée assez précise), sans se livrer à de pures conjectures?

Le recours à l'obscurité étant explicitement exclu, les élèves proposent assez rapidement diverses simulations: utilisation de règles en matière plastique, de ficelles, placées entre l'ampoule et les sommets du carré rouge, afin de déterminer l'emplacement sur le socle des ombres de ces sommets. (N.B.: on notera qu'il semble évident que l'ombre d'un segment est un segment). Nous remplaçons alors l'ampoule par un crochet, et tendons quatre élastiques, fixés à ce crochet et effleurant chacun l'un des sommets du carré rouge (dessin 12.8); puis nous soulevons l'ensemble du matériel et le faisons pivoter de façon que le socle soit vertical, face à la classe. Là, tout le monde peut se rendre compte de visu que la figure formée par les quatre épingles fixant les élastiques au socle semble bien être un carré (nous faisons d'ailleurs mesurer la longueur des côtés de ce quadrilatère, et vérifier à l'équerre leur perpendicularité).

Nous pouvons alors énoncer: si dans la position 3 l'ombre est un carré, il en est de même pour les positions 0, 1 et 2.

Nous sollicitons des propositions de justification a posteriori du

résultat "surprenant" (cf réponses au questionnaire) que font apparaître les points d'attache des élastiques. Un élève (Nicolas, aux résultats au demeurant assez médiocres en mathématiques) parle immédiatement d'"homothétie" entre le carré rouge et son ombre. A nos demandes de précisions il répond en donnant, comme centre de cette "homothétie" (spatiale) l'ampoule (ou le crochet), mais sans pouvoir fournir de justification (et pour cause). Un autre élève (Frédéric, aux résultats par ailleurs bien meilleurs) s'oppose avec force à cette "thèse de l'homothétie", en avançant l'argument suivant: les différents sommets du carré rouge étant à des distances différentes de l'ampoule, le rapport des distances à l'ampoule de chaque sommet et de son ombre sera différent dans chaque cas (nous retrouvons ici le "raisonnement" qui fait imaginer l'ombre du carré rouge, lorsque le cube est dans la position 1, sous la forme d'un "cerf-volant"). Le conflit socio-cognitif est dès lors en place, les autres élèves étant tentés, soit par la position de Nicolas (fondée essentiellement sur l'observation de la maquette), soit -et ceci d'autant plus que son "prestige mathématique" est plus grand- par la position de Frédéric (de nature plus intellectuelle). Il va falloir trancher: qui a raison, de Nicolas ou de Frédéric?

Le problème qui se pose maintenant est donc le suivant: comment évaluer le rapport des distances à l'ampoule d'un sommet du carré rouge et de son ombre projetée sur le socle?

Il ne s'agit donc plus que d'un seul point, et de son ombre; en conséquence, nous ôtons trois des élastiques installés pour n'en plus conserver qu'un.

Les élèves, visiblement déroutés par la tâche à accomplir (comment faire des calculs dans l'espace?), se trouvent plongés dans une phase de déséquilibre, nécessitant un changement de cadre. Nous sentons leur embarras et leur suggérons de trouver un plan dans lequel ils pourraient utilement

calculer. Après un moment de réflexion, quelqu'un propose de travailler dans le "plan de l'élastique" (le geste à l'appui indique que ce plan est, en outre, vertical). Il va donc s'agir de réaliser un dessin de "ce qui se passe" dans ce plan.

Suivant les indications d'un élève, nous dessinons au tableau sous la "dictée", et obtenons le dessin 12.9, complété par la "légende" suivante:

- "S : ampoule
- [HS] : mât
- M : sommet du carré rouge
- m : ombre du sommet M
- [MM'] : arête du cube."

Le problème est maintenant de calculer le rapport S_m/SM .

Un élève propose aussitôt d'utiliser, dans ce plan, l'homothétie de centre m, transformant M en S. En appelant k le rapport de cette homothétie, nous écrivons donc:

$$\vec{mS} = k \cdot \vec{mM} \quad (1)$$

$$\vec{mH} = k \cdot \vec{mM'} \quad (2)$$

$$\vec{HS} = k \cdot \vec{M'M} \quad (3)$$

Cette dernière égalité permet d'écrire: $k = HS/MM'$.

Appelant alors a la longueur des arêtes du cube et h la hauteur du mât, nous avons: $k = h/a$.

Les élèves se lancent dans l'évaluation de S_m , par rapport à SM (puisque c'est le rapport S_m/SM qui nous intéresse); finalement ils obtiennent, à partir de (1): $\vec{S_m} = (k/k-1) \cdot \vec{SM}$. D'où, puisque $k = h/a$, $\vec{S_m} = (h/h-a) \cdot \vec{SM}$.

Au vu de cette relation, quelqu'un fait remarquer qu'il aurait peut-être été plus simple d'utiliser l'homothétie de centre S transformant M en m; sollicité de s'expliquer, il ne sait trop comment procéder; un autre

élève propose alors de tracer la parallèle à (Hm) passant par M (dessin 12.10), qui coupe (HS) en X: on a cette fois (en appelant r le rapport de cette homothétie): $\vec{S_m} = r \cdot \vec{SM}$, et $\vec{SH} = r \cdot \vec{SX}$.

Or, $SH = h$, et $HX = MM' = a$; d'où $SX = h-a$, et $r = h/h-a$. CQFD.

Le débat reprend alors (nous schématisons un peu):

P (professeur) : Que peut-on déduire du résultat précédent?

E (élève) 1 : Que pour les quatre sommets du carré rouge, le rapport r est le même, puisqu'il ne dépend que de la dimension du cube et de la hauteur du mât.

P : ...C'est donc Nicolas qui semble être dans le vrai.

E 2 : Il en est d'ailleurs de même pour tous les points du plan du carré rouge.

P : Mais que se passe-t-il pour les points situés au-dessus (resp. en dessous) de ce plan?

E 3 : Si le point est au-dessus, le rapport r est plus grand; s'il est en dessous, r est plus petit.

P : En conséquence, il ne peut ici être question de parler d'"homothétie" spatiale, le rapport r variant selon la position, dans l'espace, du point considéré.

P : En appelant M, N, P, Q les quatre sommets du carré rouge, et m, n, p, q leurs ombres respectives, que peut-on conclure pour le quadrilatère mnpq?

E 4 : Il a ses quatre côtés égaux. (sic)

P : Comment cela?

E 4 : Leur longueur est celle des côtés du carré rouge multipliée par r.

P : Pourquoi?

E 4 : C'est Thalès.

P : Mais "Thalès" est valable dans le plan, alors qu'ici nous sommes dans l'espace.

E 4 : ...

Cependant, nous tendons un second élastique, passant par un sommet du carré rouge (N) voisin du précédent (M), laissons les élèves examiner la maquette, et suggérons de réitérer ce qui nous a réussi précédemment, à savoir se placer dans un plan "bien choisi". L'élève avec lequel nous venons d'avoir le dialogue ci-dessus propose le "plan des deux élastiques".

Le problème du dessin est ici moins évident pour les élèves: ils ne savent pas par où commencer. Nous proposons de réaliser un dessin en vraie grandeur au tableau, et à l'échelle 1/4 sur les cahiers. Ou aurons-nous besoin de mesurer? La longueur des deux élastiques, ainsi que la distance des ombres m et n sur le socle. Nous procédons à ces mesures (ce qui, au passage, nous permet de retrouver la valeur de r). Nous sommes alors ramenés au problème classique de la construction d'un triangle, connaissant la longueur de ses trois côtés (dessin 12.11).

La démonstration du résultat annoncé n'est plus alors qu'une formalité, en considérant dans ce nouveau plan l'homothétie de centre S et de rapport r: on a $\vec{mn} = r \cdot \vec{MN}$, d'où $mn = r \cdot MN$.

En faisant de même pour les quatre côtés du quadrilatère mnpq, on obtient: $mn = np = pq = qm = r \cdot a$; ce quadrilatère est par conséquent un ...losange. Nous avons donc progressé sérieusement, mais nous ne sommes pas encore au bout de nos peines: il nous reste à démontrer que ce losange est en fait un carré.

Un élève fait remarquer qu'un losange dont les diagonales ont même longueur est en fait un carré (affirmation contestée par l'un de ses camarades; il faut donc la démontrer). Il propose alors de considérer, au lieu du plan déterminé par deux élastiques qui passent par deux sommets consécutifs

du carré rouge, le plan déterminé par deux élastiques "opposés". Dans ce plan, le rapport de l'homothétie faisant passer de la diagonale (fictive) du carré rouge à son ombre (tout aussi fictive) est le même que précédemment. En considérant ainsi successivement les deux diagonales du carré rouge, on montre bien que les diagonales du losange-ombre ont même longueur.

Afin de nous rendre compte de la façon dont était reçu ce qui précède, nous demandons ensuite aux élèves de résoudre, sur la feuille prévue à cet effet, le petit problème figurant en Annexe 11: il s'agit, à partir du dessin à l'échelle de l'ombre du cube (dans la position 1, mais cela n'est pas dit), de déterminer la hauteur de la source lumineuse par rapport au socle.

Selon nous, cet exercice devrait être convenablement réussi dans l'ensemble, sinon totalement, du moins partiellement. Les principales difficultés que nous y voyons a priori sont les suivantes:

- identification de la position du cube par rapport au mât (question 1);
- identification des ombres des faces supérieure et inférieure du cube (question 2a);
- réalisation d'un dessin (à l'échelle ou non) dans un plan vertical contenant le mât et l'un des sommets du "carré rouge" (question 2b);
- calcul (ou mesure) de la hauteur du mât (question 2b).

Nous accordons une demi-heure à la résolution (individuelle) de cet exercice, en signalant que la réponse peut être trouvée, soit par le calcul, soit par mesure sur un dessin. Les résultats obtenus ont été les suivants (pour 33 élèves présents):

- 1- tous ont convenablement placé le pied du mât (question 1);
- 2- 29 élèves ont trouvé la dimension du cube (question 2a); 3 n'ont pas répondu à la question (oubli?), et le dernier a confondu les deux carrés du dessin de l'ombre.

3- 20 élèves ont trouvé la hauteur du mât (question 2b), et 10 n'ont pas eu le temps d'achever le calcul, qui était cependant commencé correctement (en général à partir des homothéties et/ou du calcul vectoriel).

4- Pour ce qui est des dessins, auxiliaires de la résolution, nous avons noté que 27 élèves ont réalisé un dessin dans un plan vertical contenant le mât et un sommet de la face supérieure du cube (plan d'une face latérale: 18 élèves; plan diagonal: 7 élèves; plan non identifié: 2 élèves). Parmi ces dessins, 21 sont à l'échelle (plan d'une face latérale: 19 élèves; plan diagonal: 2 élèves). En outre, deux élèves ont réalisé une vue d'ensemble du matériel, avec le cube, en perspective cavalière.

En définitive, tous ces résultats concordent pour indiquer une bonne compréhension du phénomène étudié, nous incitant donc à poursuivre.

Nous proposons alors (dans le cas général de la position 3) de comparer, dans le plan du socle, l'ombre du carré rouge avec la face inférieure du cube. On parle rapidement d'homothétie (centrée au pied du mât). Pour en déterminer le rapport, un élève propose de revenir au dessin 12.10: en effet, on a $\vec{Hm} = r \cdot \vec{XM}$ et, puisque $\vec{HM'} = \vec{XM}$, on en déduit $\vec{Hm} = r \cdot \vec{HM'}$. On passe donc de M' à m par l'homothétie de centre H et de rapport r .

Nous demandons ensuite aux élèves de dessiner, sur une feuille de papier non quadrillé, deux carrés de 3cm de côté, assortis d'un point H (voir dessin 12.12); ce dessin est censé représenter une "vue de dessus", à l'échelle 1/5, du socle sur lequel sont posés deux cubes, inégalement distants du mât (le point H représente le pied du mât). Nous donnons la hauteur de celui-ci: 60cm, et demandons de dessiner l'ombre des deux cubes.

Cet exercice est convenablement réussi par la plupart des élèves (voir dessin 12.13), et nous permet de faire quelques réflexions, en liaison avec les réponses au questionnaire FLAMBEAU, réflexions ayant pour but de

montrer aux élèves que, même incorrectes, ces réponses n'étaient pas "idiotes" (théorèmes en acte). Entre autres:

- Pourquoi certains élèves ont-ils répondu que l'ombre du carré rouge était trapézoïdale? (confusion horizontal/vertical)
- Pourquoi certains ont-ils répondu que l'ombre du carré rouge s'allonge lorsque l'on éloigne le cube du mât? (idem)
- Que se passe-t-il pour l'ombre du carré rouge, lorsque l'on élève la source lumineuse? (ce rapport étant égal à $h/(h-a)$, on est amené à étudier le sens de variation de la fonction $h \longmapsto h/(h-a)$ pour $h > a$)
- Enfin, certains remarquent que ces dessins d'ombre ressemblent à des dessins de cube "en perspective".

Nous distribuons ensuite une feuille sur laquelle sont reproduits les huit dessins d'ombre de cube (ou supposés tels) du questionnaire FLAMBEAU, et nous reposerons la question: "Ces dessins peuvent-ils être, ou non, les ombres d'un cube posé à plat sur le socle?" Cette fois, plus de problème: sont rejetés d'office les dessins dans lesquels ne figure aucun carré. Celui dans lequel les deux carrés sont de même taille divise cependant encore la classe: certains le refusent, d'autres l'acceptent, en précisant que la source est "très loin". Pour les autres dessins, placer le pied du mât à l'intersection des ombres des arêtes verticales se fait sans difficulté.

Nous enchaînons alors avec l'exercice suivant: on donne l'ombre d'un cube posé à plat: A, B, C, D , sont les ombres des sommets de la face supérieure, A', B', C', D' les (ombres des) sommets correspondants de la face inférieure. Placer le pied H du mât. Les droites (BA') et (CD') se coupent en K ; les droites $(B'A)$ et $(C'D)$ se coupent en L (voir dessin 12.14). Que remarque-t-on?

Ayant réalisé le dessin, les élèves voient l'alignement des points H, K, L . Pour le démontrer, nous rappelons que H est le centre de l'homothétie

positive transformant le carré ABCD en le carré A'B'C'D'. Ceci "débloque" la situation: on voit que K et L sont aussi des centres d'homothétie positive, transformant certains côtés de l'un des carrés en d'autres côtés du second. On écrit donc les correspondances ponctuelles relatives à ces 6 homothéties (puisque chacune a sa réciproque), en remarquant qu'il n'y a en fait que deux rapports, inverses l'un de l'autre. Nous proposons de chercher comment on peut passer de A à B en utilisant ces homothéties. Un élève propose de "passer par A'":

- on passe de A à A' par une homothétie de centre H;
- puis on passe de A' à B par une homothétie de centre K.

On remarque que ces deux homothéties ont des rapports inverses: leur composée est donc une translation (de vecteur \vec{AB}), en vertu de la "propriété caractéristique des homothéties": la transformation plane f est une homothétie de rapport k (resp. translation) ssi, pour tous points M et N, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = k \cdot \overrightarrow{MN}$ (resp. $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{MN}$). Quelqu'un suggère que la droite (HK) semble être parallèle à (AB). Est-ce là une propriété générale, ou non? Nous le démontrons effectivement dans le cas général, ce qui nous permet de prouver que (AB) et (HK) sont bien parallèles. La fin (recommencer avec des homothéties centrées en H et L, par exemple) n'est plus qu'une formalité.

Le principal intérêt de cet exercice nous semble avoir été de permettre aux élèves d'y réinvestir à la fois des connaissances relatives à l'espace (ombre de cube) et des connaissances relatives au plan (homothéties), fournissant à celles-ci une occasion de progresser (composée de deux homothéties de rapports inverses) par un jeu de cadres plan/espace. Nous aurions bien sûr pu le traiter dans le cadre strict de l'étude des homothéties, mais la situation nous a paru plus favorable ici, la configuration plane considérée (deux carrés homothétiques) constituant la base de notre séquence didactique, en tant qu'ombre au flambeau de cube.

Nous pensons que les élèves sont maintenant suffisamment familiarisés avec la situation pour pouvoir envisager de "passer à la limite", c'est-à-dire de progresser vers l'ombre au soleil. Nous entamons alors un dialogue, résumé ci-après:

P(rofesseur): L'ombre au flambeau conserve-t-elle le parallélisme?

E(lève) 1: Non; les arêtes verticales du cube ont des ombres concourantes.

P: Conserve-t-elle le milieu?

E 2: Oui, pour les côtés du carré rouge.

E 3: Mais ce n'est pas toujours vrai; par exemple pour les diagonales des faces verticales: ce sont les diagonales d'un carré, donc elles se coupent en leur milieu. Mais leurs ombres sont les diagonales d'un trapèze, et ne se coupent pas en leur milieu.

P: Voilà qui est finement pensé. Je vous propose une autre démonstration: si l'on prend le milieu d'une arête verticale, son ombre sera-t-elle le milieu de l'ombre de cette arête?

Nous avons dessiné la -désormais traditionnelle- "vue de face" (dessin 12.15), et le problème a été posé plus précisément sous la forme suivante:

"Le point I étant le milieu de $[MM']$, son ombre i peut-elle être le milieu de $[M'm']$?"

Réponse (quasi-immédiate): Non, car si cela était, la droite (Ii) serait "droite des milieux" dans le triangle MM'm, et on aurait alors $(Ii) // (Mm)$, ce qui est impossible puisque ces deux droites sont sécantes en S.

Question (sournoise): Si l'on voulait que i soit le milieu de $[M'm]$, que faudrait-il faire?

Réponse 1: Il faudrait deux sources lumineuses.

(N.B.: l'explication de cette réponse est la suivante: le point S devrait se trouver à la fois sur (Mm) et sur (li), qui sont parallèles; c'est impossible puisque deux parallèles "ne se coupent jamais".)

Réponse 2 : Il faudrait que le point S soit "très loin" sur (Mm).

Question (de plus en plus sournoise): Quel type de matériel pourrait nous donner un tel résultat?

Réponse (après un petit moment de réflexion): Il suffit d'éclairer par le soleil (variante: la lune).

Nous y étions donc.

Cette fois, le "parallélisme" des rayons solaires était venu, non pas parce que le professeur l'avait décrété, mais comme cas-limite de droites concourantes dont le point de concours était rejeté "très loin". Nous faisons (ou presque) de la géométrie projective, comme Monsieur Jourdain faisait de la prose. Et nous avons le schéma de base suivant, en "passant à la limite" le dessin 12.11 (dessin 12.16). Certes, cela nous avait demandé, à tous, du temps et des efforts; mais, si nous faisons le bilan (provisoire) de cette démarche, où en étions-nous? Nous avons travaillé sur du matériel "tangible", en trois dimensions, à partir duquel nous avons réalisé des vues et des coupes, non pas pour le plaisir, mais dans le but de résoudre des questions précises de géométrie de l'espace, et nous avons ainsi pu nous servir de l'espace comme champ d'application des connaissances en géométrie plane, par un "jeu de cadres" entre les deux domaines. Nous avons également pu "côtoyer l'espace", mettre en évidence quelques règles pour les utiliser (sans les démontrer à ce stade), ainsi que des objets mathématiques nouveaux (les plans, les vecteurs de l'espace,...). Au bout du compte, le bilan n'était peut-être pas si insignifiant...

Cependant, avant de nous tourner définitivement vers l'ombre au soleil, il nous a paru nécessaire de poursuivre un peu notre démarche dans la direction de la représentation graphique, en établissant la liaison ombre-dessin dans le cas qui nous occupait, c'est-à-dire ombre au flambeau-perspective centrale. Il n'était pas question, ici, de faire un cours de perspective linéaire, ni même d'en établir quelques principes. Nous voulions simplement mettre en évidence une analogie, qui serait reprise ultérieurement dans le cas ombre au soleil-perspective parallèle. En effet, il s'agissait là d'un enjeu essentiel de notre démarche: une condition sine qua non de son efficacité était la compréhension, par les élèves, de la similitude des principes de représentation d'un objet dans le cas de l'ombre et de la transformation géométrique que l'on peut lui associer canoniquement. En fait, il s'agissait de faire comprendre l'analogie de sens du mot "projection", qu'il s'agisse du sens usuel (projection cinématographique, par exemple) ou du sens géométrique, analogie que camoufle hélas le terme habituel de "perspective".

Pour aborder cette partie nous avons réalisé une "fenêtre de Dürer" classique (dessin 12.17), et l'avons installée sur le bureau, à côté du matériel FLAMBEAU. Nous en avons expliqué le fonctionnement et avons envoyé un élève volontaire dessiner le cube sur la vitre, à l'aide d'un crayon feutre. Puis la question cruciale a été posée: Quel rapport peut-il y avoir entre les deux matériels et les résultats graphiques obtenus?

La première remarque qui a été faite a concerné le fait que, dans les deux cas, des "rayons lumineux" passaient par un point fixe: source lumineuse dans un cas, oeil dans l'autre. Puis que, dans un cas comme dans l'autre, on considérait l'intersection de ce faisceau de "rayons lumineux" avec un plan. Avec une différence, cependant, qui est que, pour la fenêtre de Dürer, ce plan est situé entre le point fixe et l'objet, tandis que pour l'ombre au flambeau il est situé derrière l'objet, relativement au point

fixe. D'où un petit développement pour montrer (en décontextualisant le problème) que, lorsqu'on considère un faisceau de "rayons lumineux" (matérialisé par un faisceau d'élastiques), le fait de déplacer le plan d'intersection parallèlement à lui-même ne fait que modifier la taille de cette intersection, sans en altérer la forme (figures planes, "homothétiques" dans l'espace).

Une autre différence entre les deux matériels: dans un cas, le plan d'intersection est horizontal, et dans l'autre il est vertical. Pour montrer que cette différence est artificielle, il suffit de basculer le matériel FLAMBEAU d'un quart de tour, afin que le socle devienne vertical.

Finalement, on en arrive au schéma suivant (dessin 12.18), ainsi qu'à la conclusion (devenue, entretemps, un secret de Polichinelle): dans un cas comme dans l'autre, on fait une projection centrale de l'objet sur un plan

Le lien était donc établi entre l'ombre au flambeau et la perspective linéaire (qui consiste, rappelons-le, à dessiner ce que l'on verrait en regardant avec un seul oeil, d'un point fixe. Ce qui ne se produit jamais dans la réalité, sauf à utiliser un dispositif contraignant, tel justement la fenêtre de Dürer).

(N.B.1: Pour illustrer ceci nous avons fait circuler et commenté les gravures de Dürer (dessins 12.19A, B, C, D), et fait réaliser quelques dessins d'objets à l'aide de la fenêtre.

N.B.2: Nous n'avons pas approfondi la nature de ces "rayons lumineux" auxquels faisaient allusion les élèves. Epistémologiquement, ceci n'était cependant pas sans intérêt, puisque nous rejoignons là les conceptions des Anciens, qui distinguaient la lumière émise par la source lumineuse (lux), et le flot lumineux partant de l'oeil pour percevoir l'objet (lumen): "Jusqu'à la Renaissance (...) nous regardions les choses de deux points de vue différents. Déjà Euclide distinguait d'une part une lumière parvenant à l'oeil -ce qui est

notre mode de perception actuel-, d'autre part une lumière émise par l'oeil, dont l'extrémité des rayons sonde l'objet. A sa suite, Ptolémée et les Scholastiques nommèrent lux la lumière perçue par l'oeil et lumen le flot lumineux partant de l'oeil, qui éclaire l'objet" (VICARI 1986, p.45.)

Il est alors temps d'évoquer un autre problème, que fait ressortir cette comparaison ombre/dessin: tant que l'on ne considère que des "squelettes" d'objets, l'analogie est patente; mais ce n'est plus le cas pour des objets opaques: l'ombre ne donne que le contour. Nous posons alors le problème de savoir quelles sont les parties de l'objet qui sont vues (cas de la fenêtre), ou éclairées (cas de la lampe). Ce qui conduit à orienter les rayons lumineux, puis à définir la convention de ponctuation usuelle.

Dernière activité relative à cette séquence: nous repartons du dessin de l'ombre du cube dans la position 1, et posons collectivement à la classe la question suivante:

"Peut-on obtenir la même ombre, la source lumineuse étant placée au même endroit, mais avec un objet différent?"

(Sur le bureau nous avons auparavant reconstitué le montage en trois dimensions, avec le cube dans la position 1 et les trois élastiques fournissant les ombres des sommets du carré rouge.)

Différentes propositions sont venues, très rapidement. En particulier: on peut prendre comme objet un cube "homothétique" du cube original (il n'était, bien entendu, pas question d'en faire ici la démonstration, tant que nous ne disposions d'aucun outil théorique en Géométrie de l'espace); ou encore: un objet plan, "homothétique" de l'ombre elle-même. Quelqu'un ayant fait remarquer qu'il n'était même pas nécessaire que l'objet fût constitué de segments, on a cherché quels objets pouvaient avoir pour ombre un segment donné (dessin 12.20).

Après ce "débroussaillage", nous avons demandé le travail ci-après,

à réaliser pour la semaine suivante:

"Imaginez un objet qui ait la même ombre que le cube placé contre le mât, la source lumineuse étant placée au même endroit. Mais attention: cet objet ne doit, ni être un cube, ni être plat.

Sur une feuille grand format non quadrillée, vous réaliserez le(s) dessin(s) qui vous semble(nt) nécessaire(s) pour faire comprendre en quoi consiste l'objet. Dessin(s) que vous accompagnerez, si vous le jugez utile, d'un commentaire."

Nous allons maintenant détailler les résultats, en y incluant ceux de la classe de Première S5, à laquelle nous avons demandé le même travail au cours de l'année scolaire 1985-86:

Les 60 élèves ont fourni 109 dessins pour 87 objets (entre 1 et 5 par élève), que l'on peut classer comme suit:

- 41 troncs de pyramide;
- 4 "empilements" de troncs de pyramide;
- 5 cubes;
- 37 objets divers.

L'importance numérique des troncs de pyramide s'explique facilement: la plupart (31 sur 41) ont été obtenus de manière tout à fait simple grâce à une homothétie (spatiale) du carré rouge, ayant pour centre la source lumineuse, la base restant inchangée (voir dessin 12.21). Pour les autres troncs de pyramide (également à bases carrées horizontales), il a fallu un peu plus d'imagination, car les ombres des bases ont été interverties: c'est la face supérieure qui a pour ombre le petit carré (dessin 12.22). Les empilements de troncs de pyramide sont basés sur les mêmes principes (dessin 12.23).

Quant aux "divers", ce ne sont bien souvent que des troncs de pyramide "adaptés", par adjonction de segments (ou lignes brisées, ou courbes

planes) supplémentaires ou de remplacement de certaines arêtes. Un type s'est révélé cependant plus intéressant: il s'agit en quelque sorte d'un "tronc de pyramide généralisé", obtenu en coupant le faisceau d'élastiques par un plan non horizontal, mais parallèle à certaines arêtes horizontales du cube (voir dessin 12.24, où un tel objet est dessiné en perspective cavalière). Nous y reviendrons d'ailleurs bientôt...

Du point de vue théorique, tous ces objets (à l'exception d'un seul) sont acceptables, en ce sens qu'ils donnent tous l'ombre souhaitée. On s'étonnera peut-être de trouver ici 5 cubes, alors que la consigne donnée les refusait explicitement. En fait, il ne s'agit pas d'un oubli de cette consigne de la part des élèves concernés, mais tout simplement du fait qu'ils n'ont pas eu conscience du fait que l'objet qu'ils avaient "construit" était un cube: ils croyaient que leur objet était un pavé droit quelconque. Ainsi, ils avaient représenté une vue "de face", où figuraient (voir dessin 12.25), outre le mât vertical (SH), les deux élastiques (Sm) et (SM') situés dans la face "avant" du cube original. Ils ont coupé (SH) et (SM') par un plan horizontal, respectivement en a et b, et "remonté" le point b verticalement en b' sur (Sm). En considérant alors le plan horizontal passant par b', qui coupe le mât en a' et les deux derniers élastiques (passant par les sommets du "grand carré" de l'ombre) en c' et d', on obtient la face supérieure de l'objet, la face inférieure étant obtenue en coupant, par le plan horizontal passant par b, les élastiques passant par les sommets du "petit carré" de l'ombre. MAIS:

Le quadrilatère abb'a' est en fait un carré, et le pavé construit est un cube. Si les élèves ne s'en sont pas rendu compte, c'est parce que leur dessin n'était pas à l'échelle. Aussi avons-nous fait exécuter le dessin précédent à l'échelle par l'ensemble de la classe; on a alors pu constater que le rectangle abb'a' semblait bien être un carré. Enfin, nous l'avons fait

démontrer, tout simplement en faisant représenter la face "avant" du cube original sur le dessin (dessin 12.26): on obtient alors -une fois de plus- la configuration constituée par deux carrés et leur centre d'homothétie positive, ce qui permet de dire que $abb'a'$, homothétique d'un carré, est un carré.

(N.B.: Nous nous en sommes tenus là, et n'avons pas achevé la démonstration spatiale, faute d'éléments théoriques suffisants pour l'instant.)

Le but de ce petit exercice était double: voir, d'une part, si certains principes de base de la projection centrale étaient, à la suite des activités précédentes, devenus opératoires, et d'autre part quels seraient les types de représentation utilisés par les élèves. Le premier objectif semble avoir été atteint; en ce qui concerne le second point, les résultats obtenus ont été les suivants:

Sur les 109 dessins réalisés:

- 64 sont des perspectives parallèles (dont 53 perspectives cavalières);
- 13 sont des perspectives centrales (auxquelles nous pouvons adjoindre six "essais");
- 26 sont des vues.

Les représentations en perspective cavalière sont presque toutes des perspectives cavalières "classiques" (à fuyantes vers la droite) et, à l'exception d'une seule, toutes les perspectives parallèles sont correctes (il est vrai que, pratiquement, la seule règle à utiliser était la conservation du parallélisme). Ceci confirme le résultat du "test du cube" que nous évoquions au début: la perspective cavalière -tout au moins dans ses aspects les plus élémentaires- fait partie du "bagage" de nos élèves, même si l'on ne saurait en dire autant pour les cas plus complexes. La présence des 19 perspectives centrales (ou "pseudo") est moins classique, et il faut sans

doute y voir un désir de mettre en pratique ce qui venait d'être vu au sujet de l'ombre au flambeau (même si nous n'avions pas évoqué le "point de fuite"; les troncs de pyramide représentés dans ce système l'ont été en général correctement, du fait de la simplicité de la représentation: il suffisait d'utiliser un seul point de fuite, pour quatre des arêtes horizontales (dessin 12.27). Il n'en a pas été de même des autres objets, plus délicats à représenter. En ce qui concerne les vues, on peut constater qu'elles sont assez fréquentes, et nous avons remarqué que, plutôt que de remplacer le dessin en perspective, elles sont destinées à le renforcer, en ce sens qu'elles précisent des points que celui-ci laisse dans l'ombre (si l'on nous passe l'expression)...

B) En Seconde:

En Seconde, la stratégie suggérée par les élèves, pour démontrer que l'ombre du carré rouge était un carré, a été légèrement différente. Ceux-ci, qui venaient de traiter l'homothétie en géométrie plane, ont reconnu, dans la figure formée par deux élastiques et l'un des côtés du carré rouge, la configuration "classique" de l'homothétie. Nous avons en conséquence proposé de dessiner cette configuration sur le cahier, à l'échelle 1/4 (feuille non quadrillée). Nous avons mesuré sur la maquette ce que les élèves nous demandaient de mesurer, et en fait ils n'ont demandé que le minimum nécessaire, c'est-à-dire (voir dessin 12.28A): MN (arête du cube), SM, Sm et SN.

La construction d'un triangle, connaissant la longueur de ses trois côtés, était apparemment connue (d'autant plus que nous l'avions revue, en travaux dirigés, au début de l'année); aussi le dessin du triangle SMN, à partir de $[MN]$ (dessiné "horizontal") n'a-t-il pas posé problème, et le segment $[mn]$ a été tracé, à partir du point m, parallèlement à $[MN]$ ("ils sont tous les

deux horizontaux"). On a alors pu déterminer le rapport d'homothétie, ainsi que la longueur mn (d'abord par le calcul, puis par mesure -vérification- sur le dessin et la maquette).

Le problème était en fait de savoir si l'homothétie avait le même rapport pour tous les côtés du carré rouge. Aussi avons-nous, de proche en proche, fait dessiner (toujours à l'échelle 1/4) les analogues du dessin 12.28A pour les trois autres côtés de ce carré (nous n'avions en fait plus qu'à mesurer [SP] et [SQ]; voir dessin 12.28B, C, D). Ceci a suffi pour démontrer qu'effectivement le rapport était le même (en effet, de proche en proche, on a $S_m/S_n = S_N/S_n = S_P/S_p = S_Q/S_q$). En conséquence, le quadrilatère mnpq avait ses quatre côtés de même longueur: celle des côtés du carré MNPQ multipliée par le rapport d'homothétie commun.

Il restait donc à montrer que ce losange était en fait un carré. Ici les deux options sont envisagées: un carré est un losange qui a de plus, soit un angle droit, soit des diagonales de même longueur). Les élèves penchent en majorité pour les diagonales. l'un d'entre eux affirme que "c'est la même chose que pour les côtés", en précisant qu'il ne s'agit que de "prendre deux élastiques opposés" (sic). On fait donc un dessin (toujours à l'échelle 1/4) dans le plan de ces deux élastiques, soit SMP (plus besoin de mesurer sur la maquette: il suffit de reprendre les longueurs sur les dessins précédents), puis dans le plan des deux autres, soit SNQ (voir dessins 12.29A et B). Pour les mêmes raisons que plus haut, les diagonales [mp] et [nq] ont la même longueur, ce qui achève la démonstration.

Comme on le voit, la démarche se situe ici dans le cadre graphique, et se base essentiellement sur des dessins à l'échelle. On travaille dans différents plans, lesquels peuvent se raccorder les uns aux autres grâce aux éléments communs. En Première, par contre, les différents "plans de travail" étaient tous rattachés à un élément commun de référence, qui était le mât

(assorti du point d'intersection avec le plan du carré rouge), et l'intérêt de dessins à l'échelle n'apparaissait pas évident. Il nous semble que le travail sur les dessins à l'échelle est bien adapté aux élèves plus jeunes, de par son caractère plus "concret", plus "technique" (on dessine "telles qu'elles sont" des choses que l'on peut voir). Dans un cas comme dans l'autre, cependant, le savoir de géométrie plane (construction de triangles, polygones, homothétie...) est réinvesti -sans problème- dans une tâche bien définie, et l'on "passe à l'espace" de façon presque insensible, en progressant de plan en plan: il n'y a pas rupture brutale entre les deux champs conceptuels, mais au contraire élargissement du domaine d'application des connaissances.

Poursuivant la "correction" du questionnaire FLAMBEAU, nous posons à la classe de Seconde la question 3: Que devient la taille du carré, ombre du carré rouge, lorsque l'on éloigne le cube du mât?

Un élève explique que l'ombre va, selon lui, grandir, puisque le rapport (commun) des homothéties va augmenter. Nous attendions cette réponse puisque, en effet, nous n'avions pas -au contraire de ce qui s'était passé en Première- obtenu pour ce rapport d'homothétie une valeur "absolue"; rien n'incitait donc les élèves à penser qu'il restait invariant. Nous reformulons donc le problème sous cette nouvelle forme:

"Que devient le rapport commun des six homothéties planes précédentes, lorsque l'on éloigne le cube du mât?"

Un élève propose de commencer par regarder ce qu'il en est pour le cas-limite correspondant à la position 1 (cube contre le mât). Après avoir mis le cube dans cette position sur la maquette, on constate que le rapport "se voit sur le mât": on place une épingle sur celui-ci, au point où le carré rouge le touche. Puis on recule le cube (et on tend un élastique passant par l'un des sommets du carré rouge, puisque c'est ainsi qu'avait été déterminé le rapport d'homothétie). Un autre élève propose alors de réaliser

un nouveau dessin, dans le plan (vertical) de l'élastique. Ce qui est fait (toujours à l'échelle 1/4), en utilisant le premier des 6 dessins précédents: on place le mât [SH], dont la longueur a été mesurée; comme on connaît la longueur S_m de l'élastique (grâce à l'un des dessins antérieurs) on obtient la position du point m. Mais comment placer le point M? On aurait, bien sûr, pu utiliser également le dessin antérieur, mais quelqu'un propose de placer l'arête verticale [MM'] du cube en traçant la parallèle à (Hm) située "à 15cm au-dessus", ce qui est fait, à partir du point X correspondant à la position de l'épingle sur le mât (comme on le voit, l'idée de placer le cube contre le mât est sans doute à l'origine de cette proposition). D'où le dessin 12.30.

Sur ce dessin, on remarque immédiatement que le rapport des homothéties, égal à S_m/SM , est aussi égal à SH/SX : il ne dépend donc pas de la position du cube.

Ceci, manifestement, choque les élèves: nous avons droit au couplet habituel sur l'ombre-qui-grandit-lorsque-l'on-s'éloigne-du-lampadaire. Aussi décidons-nous de passer immédiatement à l'étude de l'ombre complète du cube. Ceci est fait de la façon que nous avons déjà rapportée pour la classe de Première, et est de même suivi par la réalisation d'un dessin (toujours à l'échelle 1/4) représentant l'ombre du cube, celui étant placé dans deux positions inégalement éloignées du mât. On peut alors se rendre compte que les idées a priori, même si elles étaient inexactes, reposaient malgré tout sur un fond de vérité:

- il y a bien quelque chose qui grandit lorsque le cube s'éloigne: l'ombre des arêtes verticales (ce qui fait que l'ombre du cube s'allonge).
- il y a bien des trapèzes, dans l'ombre (mais ce sont les ombres des faces verticales).
- pourquoi cette confusion? parce qu'on a beaucoup plus l'habitude

d'observer les ombres d'objets verticaux que d'objets horizontaux...

Nous faisons alors chercher individuellement l'exercice de l'Annexe 11, en insistant sur le fait que deux moyens sont offerts pour répondre à la dernière question:

- soit par calcul;
- soit par mesure sur un dessin à l'échelle (nous ne disons pas lequel).

Nous avons beaucoup insisté sur la possibilité d'obtenir le résultat grâce à un dessin, et ceci essentiellement pour deux raisons:

- 1°) dans une Seconde indifférenciée, un certain nombre d'élèves ne sont pas à l'aise dans les calculs (numériques, littéraux ou vectoriels), et il ne s'agissait pas ici de tester une aptitude au calcul;
- 2°) comme nous avons eu recours à une démarche de nature essentiellement graphique, nous voulions savoir si quelque chose en était passé dans les pratiques des élèves, et si la fréquentation et la "manipulation visuelle" du matériel avaient pu les aider à se former une imagerie mentale opératoire.

Afin de comparer les résultats de cette classe avec ceux obtenus en Première S, nous donnons ci-dessous un récapitulatif des résultats obtenus dans quatre classes:

- la Première S5 (année scolaire 1985-86), notée 1S5 et comportant 23 élèves;
- la Première S4 (année scolaire 1986-87), notée 1S4 et comportant 30 élèves;
- la Première S1 (dont nous avons déjà donné les résultats plus haut), notée 1S1 et comportant 33 élèves;
- la Seconde 3, qui nous occupe plus particulièrement ici, notée 2.3 et comportant 33 élèves.

A la question 1, tous les élèves ont donné la bonne réponse (à l'exception -déjà signalée- de deux élèves de 1S1): la position du cube par

rapport au mât est donc correctement identifiée.

Pour la question 2a, les résultats ont été les suivants:

Classe	1S5	1S4	1S1	2.3	Total
Bonne réponse	19	28	29	29	105
Confusion	4	2	1	2	9
Autres	0	0	3	2	5
Effectif	23	30	33	33	119

TABLEAU 48

(N.B.: la ligne "Confusion" correspond à une confusion entre les deux carrés de l'ombre, l'ombre de la face inférieure du cube étant identifiée comme le plus grand des deux carrés. La ligne "Autres" correspond à une réponse inexacte, ou à une non-réponse.)

On s'aperçoit donc que l'ombre du cube est -pour près de 9 élèves sur 10- correctement identifiée.

Voici enfin les résultats obtenus pour la question 2b:

Classe	1S5	1S4	1S1	2.3
Mesure	7	8	16	14
Calcul	5	7	1	0
Mes.+Calc.	0	1	3	5
Total	12	16	20	19
Effectif	23	30	33	33

TABLEAU 49

(N.B.: la ligne "Mesure" correspond aux solutions correctes obtenues

uniquement par mesure sur un dessin à l'échelle dans un plan vertical contenant le mât et une arête verticale du cube. La ligne "Calcul" correspond aux solutions correctes obtenues uniquement par calcul (vecteurs, homothéties, Thalès, trigonométrie,...). La ligne "Mes.+Calc." correspond aux solutions correctes obtenues par le calcul et vérifiées sur un dessin à l'échelle. Enfin, la ligne "Total" totalise les élèves ayant donné une réponse correcte.)

On voit que le pourcentage de réussite est, pour toutes les classes, de l'ordre de 50 à 60%, et que les résultats de la Seconde 3 n'ont rien à envier à ceux des classes de Première S. On s'aperçoit également que le nombre de solutions mesurées est proportionnellement plus important en Première S1 et en Seconde 3 que dans les autres classes; il n'y a là rien d'étonnant: nous avons, en cette troisième année de mise en oeuvre, insisté davantage sur le côté graphique opérateur (dessins à l'échelle), car il nous a semblé, à la lumière des essais précédents, qu'il y avait là une possibilité intéressante, insuffisamment exploitée dans l'enseignement général (par rapport à l'enseignement technique). Cette différence est également visible sur les dessins réalisés par les élèves:

Classe	1S5	1S4	1S1	2.3
Echelle	8	11	20	20
Sans échelle	14	17	6	4
Ech.+non éch.	0	0	1	0
Total	22	28	27	24

TABLEAU 50

En conclusion, il semble que l'approche que nous avons ainsi mise en oeuvre en Seconde ait permis à ces élèves de progresser dans la "compréhension

spatiale" de façon comparable à celle de leurs aînés de Première. Cela est dû, selon nous, tant au fait d'avoir ancré la géométrie de l'espace sur les connaissances de géométrie plane (comme d'ailleurs en Première), qu'à celui d'avoir appuyé le raisonnement sur des dessins de type "technique" (au sens large), c'est-à-dire sur lesquels on puisse se rendre compte -même si ce n'est que façon partielle- de ce qui se passe réellement, et en particulier faire des mesures, sans avoir besoin de recourir à la maquette (premier stade de l'abandon de la référence explicite au modèle tridimensionnel). Les sections, coordonnées les unes aux autres, jouent -toutes proportions gardées- un rôle analogue à celui des vues du croquis coté ou de la géométrie descriptive. Avec cet avantage que, si la réalité tridimensionnelle est, ici aussi, morcelée, les différents dessins ne sont pas des projections de l'ensemble, mais des vues (partielles) planes, dont le raccordement constitue en somme un patron de l'objet spatial (une "mise à plat", à proprement parler, de l'objet). Comme, au début de l'enseignement de la géométrie de l'espace, on ne dispose pas, pour représenter cet espace, de moyens permettant une bonne préservation du "voir", on y supplée ici par des graphismes plus orientés vers la conservation du "savoir", mais dans lesquels l'effort d'imagination nécessaire à la reconstruction mentale de l'objet tridimensionnel est facilité.

N.B.: Nous n'avons, en Seconde, opéré le "passage à la limite" de l'ombre au flambeau qu'après la passation du questionnaire SOLEIL (voir chapitre suivant).

CHAPITRE 13: LA SÉQUENCE "SOLEIL".

"Ce n'est pas dans la nouveauté, c'est dans l'habitude que nous trouvons les plus grands plaisirs."

Raymond RADIGUET

Les élèves ont désormais vu dans l'ombre au soleil un cas-limite d'ombre au flambeau, lorsque la source lumineuse est située "infiniment loin" (en fait, nous posons en Appendice 13 le problème de savoir dans quelle mesure cette approximation correspond à ce que l'on peut observer dans la réalité). Théoriquement donc, ils sont à même de pouvoir utiliser cette constatation pour déterminer un certain nombre de propriétés de l'ombre au soleil (identiques aux propriétés correspondantes de l'ombre au flambeau, ou "adaptées" de celles-ci par passage à la limite). Mais, comme on le sait, les choses ne sont hélas pas aussi simples dans le domaine cognitif, et nous pensons en fait a priori que cette première approche, si elle nous a paru nécessaire, n'a sans doute pas suffi pour que les élèves s'approprient ces nouvelles connaissances. Pour tenter de nous en rendre compte de façon plus précise, nous les avons donc soumis à un nouveau questionnaire, destiné à savoir dans quelle mesure ils seraient capables de transférer à l'ombre au soleil les connaissances acquises dans l'étude de l'ombre au flambeau, et dans quelle mesure leurs conceptions anciennes subsisteraient.

1- LE QUESTIONNAIRE :

Il figure en Annexe 12 dans sa dernière version (1987-88).

Comme nous l'avons dit ci-dessus, l'un des buts de ce questionnaire était de faire le point des "connaissances" des élèves au sujet de l'ombre au soleil (N.B.: Par "connaissances" nous entendons ici, non seulement les connaissances véritables, acquises au cours de la séquence didactique

précédente, mais encore les idées "naïves", soit présentes antérieurement à cette séquence et non modifiées, soit ayant été plus ou moins influencées -voire induites- par elle.). Mais, comme dans le cas de l'ombre au flambeau, notre idée était également de fournir un point de départ à une nouvelle situation-problème et à un nouveau débat, au cas -malgré tout fort probable- où toutes les questions ne seraient pas réglées.

Les notes placées au début du questionnaire ont -ici comme dans le cas du questionnaire FLAMBEAU- pour buts:

- de placer le problème dans le cadre géométrique;
- de sérier les réponses possibles (voir page 303).

Le choix des différentes positions (questions 1 à 3):

La position relative à la question 1 (carré rouge horizontal) est la même que la position 3 du questionnaire FLAMBEAU; elle permettra donc la comparaison. Nous avons en outre posé les questions 2 (carré rouge vertical) et 3 (cube posé sur la pointe) dans le but de voir dans quelle mesure la conservation du parallélisme dans l'ombre au soleil, même si elle est bien utilisée dans le cas d'une face horizontale (question 1), ce qui était déjà le cas pour l'ombre au flambeau après l'étude faite en classe, était également appliquée au cas d'une face non horizontale, qu'elle soit verticale (question 2) ou non (question 3).

La question 4:

Elle est complémentaire des précédentes, en ce sens qu'il s'agit ici de voir si les élèves utilisent, pour leurs constructions de l'ombre de la face supérieure du cube, la conservation, non seulement du parallélisme (comme dans le cas de l'ombre au flambeau), mais encore de la taille (vraie grandeur), ce qui diffère de l'ombre au flambeau et ne peut être déduit de la seule réponse "carré" à la question 1.

Enfin notons que, afin d'éviter dans la mesure du possible toute

ambiguïté sur la direction des rayons solaires, nous avons, avant la passation, posé le cube-squelette sur le bureau et avons indiqué du geste la direction de ces rayons.

2- LA POPULATION :

C'est la restriction aux classes du lycée Michelet de la population soumise au questionnaire FLAMBEAU; rappelons-la brièvement:

- trois classes de Première S (1S1, 1S4 et 1S5, totalisant 87 élèves lors de la passation);

- une classe de Seconde indifférenciée (2.3, avec 33 élèves présents).

(N.B.: Nous avons vu que, dans cette dernière classe, la passation du questionnaire a dû, pour des raisons d'emploi du temps, avoir lieu avant le "passage à la limite" de l'ombre au flambeau. Ceci a peut-être parfois -nous le verrons plus loin- joué un rôle dans les réponses données par les élèves.)

3- LES RÉPONSES :

Nous considérerons successivement les quatre questions dans l'ordre où elles figurent dans le questionnaire.

Question 1:

Comme prévu, on trouve ici une forte majorité de bonnes réponses ("carré"), ainsi que le montre le tableau de répartition ci-dessous:

Forme \ Classe	IS1	IS4	IS5	2.3	Total
carré	26	30	19	23	98
rectangle		1	3	3	7
losange				1	1
parallélogramme	1		1	2	4
trapèze	1			3	4
quadrilatère qcq	2				2
cela dépend	2	1		1	4
je ne sais pas					
Total	32	32	23	33	120

TABLEAU 51

Les autres réponses sont à l'état de traces; on y trouve quelques -rares- rectangles, parallélogrammes et trapèzes, vestiges vraisemblables des conceptions naïves analysées lors de l'étude des réponses au questionnaire FLAMBEAU. Cependant, dans l'ensemble, la conservation de la forme est bien perçue. Notons encore que 110 réponses sur 120 (soit plus de 9 élèves sur 10) conservent le parallélisme des côtés.

Question 2:

Les réponses se répartissent comme suit:

Forme \ Classe	IS1	IS4	IS5	2.3	Total
carré	6	7	3	4	20
rectangle	8	12	10	8	38
losange		2	1		3
parallélogramme	6	8	5	10	29
trapèze	9	2	2	10	23
quadrilatère qcq	1				1
cela dépend	1		2	1	4
Je ne sais pas	1	1			2
Total	32	32	23	33	120

TABLEAU 52

Les résultats sont, on le voit, très dispersés, et varient un peu selon la classe; on peut cependant constater l'existence de quelques constantes:

- 1- Quasi-absence des losanges et des quadrilatères quelconques;
- 2- Répartition comparable pour les 4 autres types de quadrilatères.

En particulier la bonne réponse ("parallélogramme") n'est fournie que par 1 élève sur 4 en moyenne. Mais cette apparente contre-performance doit être tempérée par le fait que 38 élèves ont donné la réponse "rectangle". Questionné à ce sujet, l'un d'eux a répondu avoir supposé (abusivement, certes) que le soleil était "dans l'axe du cube" (sic), c'est-à-dire dans un plan médian de celui-ci. Nous aurions donc dû insister davantage sur la position quelconque du soleil par rapport au cube, en précisant ce que nous entendions par "quelconque", c'est-à-dire "en biais" par rapport aux plans médians verticaux.

D'autre part, 20 élèves ont opté pour le carré. On peut certes y

voir l'hypothèse implicite d'un soleil au zénith; mais on peut également penser à un effet "d'entraînement" par rapport au questionnaire FLAMBEAU où, quelle que fût la position du cube posé sur le socle (positions 1, 2 et 3), l'ombre avait toujours la forme d'un carré.

Au total, 90 réponses sont quand même des parallélogrammes, plus ou moins particuliers, et 23 sont des trapèzes. Cette dernière réponse s'explique naturellement par une confusion avec l'ombre au flambeau (le soleil n'est pas vraiment à l'infini). Enfin, 4 élèves répondent que "cela dépend"; et cela n'est pas faux, dans la mesure où le parallélogramme (cas général) peut parfois être un rectangle (lorsque le soleil est dans un plan médian du cube), voire un carré (soleil au zénith).

En conclusion, la conservation du parallélisme des côtés, même si elle est moins fortement affirmée que dans la première question, est malgré tout observée par 3 élèves sur 4 en moyenne.

Question 3:

Les réponses sont indiquées dans le tableau suivant:

Forme	Classe	1S1	1S4	1S5	2.3	Total
carré		5	9	1	6	21
rectangle					1	1
losange		10	12	11	10	43
parallélogramme		3	3	4	9	19
trapèze		1	1	1	2	5
quadrilatère qcq		8	5	5	2	20
cela dépend		4	1		2	7
je ne sais pas		1	1	1	1	4
Total		32	32	23	33	120

TABLEAU 53

Ici également, des constantes se dégagent de l'examen du tableau:

- une réponse est plus fréquente que les autres: le losange (1 élève sur 3 environ);

- trois autres réponses sont données, avec des fréquences comparables (1 élève sur 6 environ): le carré, le parallélogramme et le quadrilatère quelconque.

Les autres réponses (trapèze, et surtout rectangle) sont très peu fréquentes.

Ainsi donc, la bonne réponse ("parallélogramme") n'est fournie que par 1 élève sur 6; malgré tout au total 84 réponses (soit environ 2 sur 3) sous-entendent une conservation du parallélisme des côtés, c'est-à-dire un peu moins que pour la question précédente, mais dans une proportion cependant comparable.

Le fait que la réponse "losange" soit la plus fréquente suggère deux explications possibles. En effet, dans le cas de la question 3 comme dans

celui de la question 2, il n'y a pas de différence fondamentale en ce qui concerne l'ombre du carré rouge (lequel n'est pas parallèle au plan de projection, et dont l'ombre est par conséquent un parallélogramme non carré). Cependant, la comparaison des deux tableaux - ou mieux encore celle des deux polygones de fréquences du dessin 13.1) fait apparaître des dissemblances évidentes, en particulier la grande fréquence de la réponse "losange" dans le cas de la question 3, et sa quasi absence dans celui de la question 2; ce fait mérite que l'on s'y arrête:

- ou bien certains élèves font une confusion sur la nature de l'être géométrique "losange" (?), ne le distinguant pas clairement du parallélogramme. Mais ceci est en contradiction avec les réponses obtenues à la question 2, où l'on observe une situation inverse;

- ou bien plutôt, outre le parallélisme, certains élèves pensent que l'égalité des longueurs (contrairement à l'orthogonalité) est, elle aussi, conservée par l'ombre au soleil. Ceci semble également contredit par les réponses à la question 2; il est cependant possible que, dans ce cas plus simple à imaginer, il ait pu y avoir plus facilement référence à une "connaissance" (voir plus haut pour l'emploi de ce terme) antérieure, ce que tend à corroborer le résultat obtenu pour la même position dans le cas du questionnaire FLAMBEAU, où nous avons également observé une majorité relative de réponses "losange", et dans la même proportion de 1 sur 3. Ceci ayant pour résultat la prédominance d'une "contamination" par l'ombre au flambeau (d'où d'ailleurs la plus grande fréquence des trapèzes), voire même parfois la persistance de conceptions naïves (pour certains des rectangles; voir chapitre précédent).

Autre disparité entre les réponses aux questions 2 et 3: la présence non négligeable (1 élève sur 6) du "quadrilatère quelconque" dans le cas de la question 3. L'explication qui vient immédiatement à l'esprit est "à situation

générale, réponse générale", idée possiblement renforcée ici par une contamination par l'ombre au flambeau.

En définitive, on peut conclure des réponses à ces trois questions que la fréquence des bonnes réponses varie -et c'est bien normal- en raison inverse de la complexité de la situation; la conservation du parallélisme par l'ombre au soleil dans tous les cas est sous-entendue par 2 élèves sur 3, ce qui constitue une proportion tout à fait convenable (qu'eût-elle été "à froid", avant la séquence FLAMBEAU ?), mais montre a contrario qu'une proportion non négligeable n'en est pas totalement convaincue (plus de 20 élèves -"trapèze" et "quadrilatère quelconque"- soit environ 1 sur 6). L'explication réside de toute évidence (comme pour la réponse "rectangle" à la question 2) dans un "passage à la limite" qui ne s'est pas toujours effectué de façon satisfaisante (voir classe de Seconde), laissant la place, soit à la rémanence de conceptions naïves, soit à l'application de propriétés véritables de l'ombre, ...mais de l'ombre au flambeau. En conclusion: même s'ils sont en bonne voie de résolution, tous les problèmes ne sont pas encore réglés.

Passons maintenant à la question 4, où il s'agissait, rappelons-le, de dessiner l'ombre du cube posé sur le sol, pour diverses "positions" du soleil.

1) Soleil au zénith :

Nous attendions a priori deux réponses:

- la réponse correcte (réponse A), consistant en un seul carré (dessin 13.2A);
- la réponse de type "ombre au flambeau" (réponse B), constituée de deux carrés homothétiques de même centre (dessin 13.2B).

Nous avons en fait obtenu les résultats suivants:

Réponse \ Classe	1S1	1S4	1S5	2.3	Total
A	26	27	18	20	91
B	4	4	3	12	23
Divers	2	1	2	1	6
Total	32	32	23	33	120

TABLEAU 54

(N.B.: les "divers" proviennent essentiellement d'une consigne incomplètement appliquée, le soleil n'étant pas supposé au zénith.)

On peut remarquer que la réponse correcte est très largement majoritaire, sauf en Seconde où 1 élève sur 3 dessine une ombre de type "flambeau". Ceci s'explique sans doute par le fait -signalé plus haut- que dans cette classe la passation du questionnaire a eu lieu avant l'explicitation de l'ombre au soleil, comme cas-limite d'ombre au flambeau. Il subsiste donc dans toutes les classes -même après cette explicitation- quelques cas de persistance d'ombre de type "flambeau", que les élèves justifient -et comment les blâmer?- en disant que "le soleil n'est pas vraiment à l'infini". Ce qui illustre clairement le conflit qui doit nécessairement être dépassé pour arriver à la modélisation du phénomène physique.

2) Soleil dans la direction d'une diagonale d'une face verticale du cube :

Les réponses attendues étaient ici:

- (Réponse A) le dessin correct (dessin 13.3A);
- (Réponse B) un dessin de type "flambeau" (dessin 13.3B).

Nous avons en fait obtenu les résultats suivants:

Réponse \ Classe	1S1	1S4	1S5	2.3	Total
A	19	23	12	6	60
B	1				1
Divers "soleil"	6	8	7	9	30
Divers "flambeau"			3	8	11
Autres	3			7	10
Non-réponse	3	1	1	3	8
Total	32	32	23	33	120

TABLEAU 55

(N.B.: Notons que certains dessins sont incomplets, les ombres des arêtes verticales n'étant pas représentées. Ce qui prouve, si besoin était, que c'est bien la position de l'ombre du carré supérieur par rapport au carré inférieur qui gouverne la recherche, l'ombre des arêtes verticales ne constituant en fait que du "remplissage".)

Le tableau fait apparaître plus d'une moitié de réponses correctes (60 sur 112), mais en nette régression cependant par rapport à la question précédente (ce qu'explique la plus grande complexité de la situation). Quant à la réponse B, elle est inexistante (un seul élève); nous en proposons l'explication suivante: il s'agit peut-être de la conscience d'une contradiction qui naît de la confrontation, à partir du désir de représenter une ombre au flambeau (donc de considérer les rayons solaires comme non parallèles):

- d'une part, du fait que l'un des sommets est commun aux ombres des faces supérieure et inférieure du cube;
- d'autre part, du fait que l'énoncé du problème (ainsi que notre

présentation de celui-ci) sous-entend une symétrie de la situation par rapport à un plan vertical, alors que le dessin que l'on obtiendrait ne respecterait pas cette symétrie (nous avons vu, au cours de la séquence FLAMBEAU, que la prise en compte de considérations de symétrie semblait influencer fortement les réponses des élèves).

Nous avons en outre fait figurer dans le tableau trois lignes supplémentaires, destinées à sérier les divers types de réponses incorrectes:

1- La ligne "Divers soleil" concerne les réponses "partiellement correctes", résultant d'une application incomplète de la consigne relative à la direction des rayons solaires, supposés malgré tout parallèles. Dans ces réponses, une grosse majorité (21 sur 29) consiste en une représentation du type du dessin 13.3C, dans laquelle les deux carrés, ombres des faces supérieure et inférieure du cube, s'ils sont bien décalés parallèlement à l'un des côtés, ne présentent cependant pas deux sommets en coïncidence. Cette réponse peut selon nous être le fait, soit d'élèves n'ayant pas remarqué cette coïncidence, soit d'élèves ayant compris l'expression "parallèles à une diagonale" comme signifiant "en diagonale", c'est-à-dire "en biais", avec par conséquent un sens plus étendu.

2- La ligne "Divers flambeau" regroupe les réponses dans lesquelles figurent deux carrés homothétiques de tailles différentes; on voit que les réponses du type "flambeau" sont nettement minoritaires par rapport aux réponses du type "soleil" (12 contre 90), ce qui confirme les résultats obtenus dans la première partie du questionnaire.

(N.B.: L'examen détaillé fait apparaître que 26 des 30 dessins correspondant aux "divers soleil" et 9 des 11 "divers flambeau" (soit, au total, 95 des 112 réponses obtenues, ou 85%) présentent un axe de symétrie, ce qui tend à corroborer l'hypothèse de symétrie faite plus haut).

3- La ligne "Autres" est relative aux réponses dans lesquelles l'ombre du

carré supérieur n'est pas carrée, réponses obtenues en Première S1 et surtout en Seconde, ce qui correspond bien, ici également, aux résultats de la première partie.

3) Soleil dans la direction d'une diagonale du cube :

Pour cette dernière question, nous avons conservé la même sériation des réponses que pour la précédente, avec:

- (Réponse A): le dessin correct (voir dessin 13.4A);
- (Réponse B): un dessin de type "flambeau" (voir dessin 13.4B);
- (Divers "soleil"): deux carrés translétés l'un de l'autre, sans sommet commun (voir dessin 13.4C);
- (Divers "flambeau"): deux carrés homothétiques, sans sommet commun (voir dessin 13.4D).

Les résultats obtenus se répartissent comme suit:

Forme	Classe	1S1	1S4	1S5	2.3	Total
A		12	18	6	7	43
B				2	2	4
Divers "soleil"		4	4	6	8	22
Divers "flambeau"					3	3
Autres		5	2	5	6	18
Non-réponse		11	8	4	7	30
Total		32	32	23	33	120

TABLEAU 56

On remarque tout d'abord que, sur l'ensemble des réponses effectivement obtenues, les réponses de type "flambeau" sont, ici aussi, très minoritaires par rapport aux réponses de type "soleil" (7 contre 65).

On peut également constater ici une proportion nettement plus importante de non-réponses, que n'explique pas entièrement le fait que cette question soit la dernière de la série. En effet, d'une part les élèves auraient eu le loisir de terminer s'ils l'avaient voulu (nous leur avons laissé suffisamment de temps pour que ceci n'entre pas en ligne de compte), et d'autre part le questionnaire n'était pas si long qu'il pût provoquer la lassitude chez des élèves de lycée, habitués à bien plus. Nous avons du reste bien senti -et certains d'ailleurs nous l'ont dit- que la cause première de leur non-réponse était essentiellement une impossibilité de résoudre le problème. Ceci est confirmé implicitement par le (relativement) faible taux de réussite à cette dernière partie (moins de la moitié des réponses effectivement obtenues). La cause en est selon nous la plus grande complexité de la situation, nécessitant d'imaginer une diagonale d'un cube, notion nouvelle comparativement à celle de diagonale d'un carré, et moins facilement rattachée visuellement à l'objet matériel.

La comparaison dans leur ensemble des réponses relatives aux trois directions des rayons solaires montre également, par la conjonction de ces divers indices (fréquence des bonnes réponses, des "divers soleil" et fréquence des non réponses) la difficulté de plus en plus grande qu'ont les élèves à imaginer de façon précise la situation spatiale, difficulté liée selon nous, comme nous l'avons dit, à la détermination de la direction de projection relativement au cube.

En définitive, ce questionnaire nous aura donc permis deux constatations: tout d'abord, que le "passage à l'infini" s'est effectué dans l'ensemble de façon satisfaisante (même si une petite minorité résiste encore un peu). Et ensuite que, malgré l'accent mis sur le parallélisme des rayons, l'ombre au soleil, phénomène plus "simple" que l'ombre au flambeau et

tout aussi banal que celui-ci, reste mal connu quant à ses propriétés "géométriques" (en particulier, conservation du parallélisme). Plus particulièrement, l'ombre au sol d'un cube par le soleil pose problème à une partie non négligeable des élèves, et on peut penser que le choix de cette situation-problème comme point de départ d'une étude de la projection parallèle aura de bonnes chances de se montrer tout aussi motivante que celui de la situation précédente pour la projection centrale.

Le problème est donc maintenant de concevoir un matériel qui nous permette une simulation de cette situation, étant donné que nous n'aurons plus ici de crochet (à l'emplacement de la source lumineuse) où attacher les élastiques...

4- LE MATÉRIEL :

Il est constitué de deux planches rectangulaires (0,70m x 0,50m) en contreplaqué de 15mm d'épaisseur, recouvertes d'une plaque de liège de 8mm d'épaisseur (non indispensable, mais pratique pour y planter les épingles qui fixeront les élastiques). Ces planches sont articulées selon l'un de leurs petits côtés grâce à deux charnières, qui permettent ainsi à l'ensemble de s'ouvrir et de se fermer comme un livre (d'où un transport plus commode). Deux entretoises de bois (vissables) maintiennent le système en position "ouverte" (c'est-à-dire de façon que les deux planches soient perpendiculaires), et plus précisément posé sur l'une des planches. Sur celle-ci est alors posé le cube-squelette (dessin 13,5).

(N.B.: Dans la première version de ce matériel (que nous avons évidemment baptisé SOLEIL), la planche verticale était remplacée par un cadre de bois de mêmes dimensions, tendu d'un treillis métallique à mailles losangiques de 5mm environ, sur lequel les élastiques étaient fixés à l'aide

de goupilles fendues (dessin 13.6). Mais cette fixation s'avérant plus délicate (élastique à passer à travers le treillis, puis dans la fente de la goupille), moins "souple" (problème du changement d'emplacement du point de fixation de l'élastique), et n'offrant en définitive aucun avantage particulier, nous sommes ensuite revenu au système décrit plus haut, finalement plus simple et plus pratique).

5- LA SÉQUENCE DIDACTIQUE :

(N.B.: La chronique commentée qui suit est relative à la classe de Seconde 3 (année scolaire 1987-88). Nous signalerons le cas échéant les variantes en Première S (années 1985-86, 86-87 et 87-88).)

Après la passation du questionnaire, un rapide sondage oral permet aux élèves, ici aussi, de se rendre compte de la diversité des réponses données aux premières questions. Si à peu près tout le monde est d'accord sur le fait que, lorsque le cube est posé, l'ombre de la face supérieure est carrée, il n'en est plus de même pour une face verticale. De plus et surtout, certains élèves avaient "séché" sur certains dessins d'ombre (en particulier le dernier), et sont manifestement désireux de connaître la réponse. Encore une fois, le recours à la réalisation effective du phénomène à l'aide du soleil est exclus (d'ailleurs, il ne fait pas beau), et, pour le simuler, le matériel SOLEIL est monté sur le bureau.

On réinsiste sur le parallélisme admis pour les rayons solaires, en revenant à la situation FLAMBEAU dans laquelle la source lumineuse est très éloignée. Pour "dramatiser" la situation, nous avons même recours au cadre numérique: sachant que la lumière du soleil met environ 8 minutes pour nous parvenir, et que la célérité de la lumière est de 300 000 km/s, quelle est la

distance de la Terre au soleil? Imaginez maintenant une arête [AB] du cube, mesurant 15 cm; et deux rayons lumineux émis par un même point S du soleil, passant chacun par une extrémité de cette arête. Imaginez le triangle SAB, dont deux côtés mesurent environ cent cinquante millions de kilomètres, et le troisième ... 15 cm!

A-Le parallélisme:

Le problème est maintenant de simuler les rayons du soleil. Un élastique, passant par l'un des sommets de la face supérieure du cube, est tendu entre un point de la planche verticale (baptisée "mur" par commodité de langage) et un point de la planche horizontale (baptisée "sol" pour les mêmes raisons). Il s'agit maintenant d'en tendre un deuxième, passant par un autre sommet de la face supérieure, et parallèle au premier.

Deux élèves volontaires sont envoyés au tableau dans ce but. Un moment perplexes, ils commencent à procéder par tâtonnements, s'occupant, l'un de la fixation côté mur, l'autre de la fixation côté sol. Assez rapidement, ils arrivent à une position qui les satisfait. Mais leurs camarades restés à leur place se récrient: manifestement, pour eux, les deux élastiques ne sont pas parallèles. Une discussion s'engage, afin de déterminer un critère permettant de savoir si oui ou non deux élastiques sont parallèles. Quelqu'un propose de mesurer leur écartement, à deux endroits différents. Mais comment effectuer ces mesures? On propose l'équerre graduée. Les élèves positionnent donc le second élastique par rapport au premier, en utilisant ce critère...et on s'aperçoit (à l'oeil) qu'il ne fonctionne pas: la condition est nécessaire, mais pas suffisante. Un élève propose de se placer en un endroit convenable, de "fermer un oeil", de façon que l'un des deux élastiques cache l'autre, puis de procéder comme précédemment (Question: "Pourquoi fermer un oeil?" Réponse: "Pour être sûr qu'ils sont dans le même plan."). Mis

à l'épreuve, ce procédé donne apparemment mieux satisfaction que le précédent. Quelqu'un propose alors d'utiliser deux équerres, placées tête-bêche l'une contre l'autre (dessin 13.7): cette fois, tous sont d'accord pour accepter la méthode (qu'ils mettent en relation avec un théorème de géométrie plane, et qui ne nécessite plus de mesurer de longueurs)...mais ils se rendent compte qu'elle manque de précision.

(Nous faisons à ce moment une petite pause, afin de réfléchir sur ce qui a été dit et expérimenté. Dans les deux méthodes qui viennent d'être vues, le premier point consiste à se ramener dans un plan; le problème devenant ensuite un problème de géométrie plane. Autrement dit: deux droites parallèles de l'espace sont d'abord deux droites coplanaires.)

Plusieurs élèves se remémorent alors qu'en début d'année nous avions basé une séance de Travaux dirigés sur le thème suivant:

Un élastique est tendu entre un point (A) d'un mur et un point (B) du plancher de la classe; un autre point (C) est donné (par une punaise) sur le plancher. Problème: tendre un élastique parallèle au premier et passant par le point C.

(C'est un problème difficile, du fait des contraintes qu'imposent les éléments matériels (il faut rester dans la portion d'espace comprise entre le mur et le sol). Les divers groupes avaient alors commencé par maints tâtonnements et "solutions" qui s'avèrent fausses à l'usage: comme par exemple de mesurer au sol la longueur BC, et de reporter horizontalement cette longueur sur le mur à partir de A pour déterminer le second point de fixation de l'élastique à tendre (dessin 13.8). Ils avaient ensuite inventé plusieurs méthodes correctes, parfois astucieuses, dont voici un exemple (voir dessin 13.9), basé sur la configuration de la "droite des milieux" dans un triangle:

1- On détermine sur le plancher le point O, symétrique de C par rapport à B.

2- On prend un point I "quelconque" de AB, et on tend un élastique [OI] assez long pour qu'il contienne le point D, symétrique de O par rapport à I.

3- On marque le point D sur l'élastique (à l'aide d'un feutre).

4- On tend un élastique passant par C et D: c'est l'élastique cherché.

(N.B.: On voit que I ne peut être tout à fait quelconque, puisqu'il faut que D soit "en avant" du mur; de même, il faut que l'on puisse déterminer le point O sur le plancher.)

Après ces rappels, nous indiquons nous-même la construction suivante (qui n'était pas apparue lors de la séance de T.D.), basée sur le parallélogramme (voir dessin 13.10):

1- On tend un élastique entre le point C et un point X du mur, de façon à ce qu'il touche l'élastique [AB] en un point "quelconque", M.

2- On marque (au feutre) le milieu P de [CM].

3- On tend un élastique passant par B et P.

4- On marque le point N, symétrique de B par rapport à P.

5- On tend un élastique passant par C et N: c'est l'élastique cherché.

(N.B.: Ici non plus, le point M ne peut être tout à fait quelconque, puisqu'il faut que l'élastique [CM] vienne toucher le mur, et que le point N soit "en avant" de celui-ci.)

Avant de poursuivre, nous refaisons le point: les diverses constructions envisagées font toutes référence au plan.

B- La correction du questionnaire :

Nous sommes maintenant (enfin!) théoriquement en mesure de tendre les élastiques passant par les trois derniers sommets de la face supérieure du cube. Ce qui est fait, avouons-le, en s'aidant plus des méthodes empiriques signalées au début que des méthodes plus sophistiquées indiquées ci-dessus.

Mais cela importe peu, puisque l'enjeu n'est plus là.

Question 1 :

Sans surprise, nous constatons que l'ombre du carré supérieur semble bien être un carré. Et, ce qui est plus intéressant, qu'il paraît être de même taille. On entreprend de le démontrer, en réalisant un dessin à l'échelle dans le plan de deux élastiques (dessin 13.11): le quadrilatère $ABba$, ayant ses côtés parallèles deux à deux, est un parallélogramme; donc $\vec{ab} = \vec{AB}$. Le reste de la démonstration est analogue à ce qui a été fait dans la séquence FLAMBEAU (tout ceci est très rapide). Se souvenant d'ailleurs de cette séquence, quelqu'un dit que l'ombre de la face supérieure est un carré translaté de la face supérieure. Ses arguments: ces deux carrés ont leurs côtés respectivement parallèles et de même taille (on notera l'utilisation implicite de la transitivité du parallélisme dans l'espace, qui est acceptée sans problème, et que nous admettrons "officiellement" un peu plus tard).

Question 2 :

La question de l'ombre de la face supérieure ainsi réglée, nous passons alors aux faces latérales. Le problème est devenu évident: grâce à la translation dans le plan inférieur, il est immédiat que les ombres des faces latérales sont des parallélogrammes. C'est ici que ceux qui ont donné la réponse "rectangle" à la question 2 l'expliquent en disant avoir ajouté implicitement une condition supplémentaire de symétrie, et que ceux qui ont donné la réponse "trapèze" voient que le trapèze a également ses deux autres côtés (les rayons solaires) parallèles, en vertu de l'hypothèse faite au début.

Autre conséquence de cette translation: pour avoir l'ombre du cube complet, il suffit d'avoir:

- la face inférieure
- l'ombre d'un sommet de la face supérieure (ce qui déterminera la

translation à effectuer).

Nous sommes alors en mesure de résoudre la question 4.

Question 4 :

En effet, le problème peut maintenant être reformulé de la façon suivante: par rapport au carré inférieur, où se trouve l'ombre d'un sommet donné du carré supérieur?

Plus précisément (voir dessin 13.12), la translation faisant passer du quadruplet (E,F,G,H) au quadruplet (a,b,c,d) , il suffit d'avoir le premier quadruplet et l'un des points du second.

a) Soleil au zénith:

Alors l'ombre du point A est le point E, donc $a=E$. La translation est de vecteur nul, donc les deux faces (supérieure et inférieure) ont même ombre. Et les arêtes verticales ont leur ombre réduite à un point (dessin 13.13A).

b) Rayons selon une diagonale de face latérale:

Supposons par exemple les rayons parallèles à (AH) . Alors l'ombre de A est H, donc $a=H$. Les deux carrés sont symétriques par rapport à la droite (GH) (dessin 13.13B). Quelles sont les ombres des arêtes verticales?

c) Rayons selon une diagonale du cube:

Supposons par exemple les rayons parallèles à (BH) . Alors l'ombre de B est H, donc $b=H$. Les deux carrés sont symétriques par rapport à H. On complète avec les ombres des arêtes verticales (dessin 13.13C).

Nous faisons dessiner différentes ombres d'un même cube, assez différentes les une des autres par la translation qui intervient; ceci permet de constater que certains de ces dessins (mais pas tous?) sont tout à fait semblables au dessin "classique" du cube. Nous en profitons pour développer l'idée que l'ombre de la face supérieure peut se trouver n'importe où dans le

plan de la face inférieure, en envisageant diverses positions du soleil. En particulier, nous montrons que le dessin 12.14 peut fort bien représenter l'ombre d'un cube. Cette remarque de notre part n'est pas innocente, car nous allons bientôt passer de l'ombre au dessin, et que, lors du test de l'Annexe 5, une représentation telle que celle-ci a été refusée, en tant que dessin de cube, par la quasi-totalité des élèves de la classe (29 sur 32), soit parce que (référence au perçu) le dessin est "lu" comme représentant un parallélépipède (sous-entendu: allongé vers l'arrière), soit parce que (référence à la préservation du su) "les arêtes n'ont pas toutes la même longueur". Nous faisons donc valoir également que l'ombre d'un piquet vertical peut être plus longue que ce piquet (soleil levant ou couchant), ce sur quoi tout le monde tombe d'accord, et que c'est exactement ce qui se passe pour les quatre arêtes verticales du cube. Finalement, on remarque que la seule contrainte est que la représentation soit constituée de deux carrés translés l'un de l'autre, avec les segments qui joignent les sommets homologues.

Question 3 :

La question 3 est restée pendante, mais elle n'est pas sans intérêt, puisqu'il s'agit en fait de savoir quelle est la forme de l'ombre au soleil d'un cube, dans le cas le plus général.

Le débat reprend: certains pensent qu'on peut obtenir "n'importe quoi", d'autres que les ombres des faces sont toujours des parallélogrammes. Ceci était-il vrai pour l'ombre au flambeau? Non (quelqu'un rappelle que, dans le cas du cube posé, on obtenait des trapèzes banals comme ombres des faces verticales). Se peut-il que l'on ait malgré tout cette propriété pour l'ombre au soleil? Un élève prétend que, l'ombre au soleil conservant le milieu (abordé à la fin de la séquence FLAMBEAU, pour amener le "passage à la limite"), elle conservera aussi le parallélisme (enchaînement de propriétés que nous avons déjà vu pour les transformations planes). La classe est plus ou

moins convaincue. Nous décidons donc d'étudier dans l'ordre ces deux conjectures:

- 1) l'ombre au soleil conserve le milieu.
- 2) l'ombre au soleil conserve le parallélisme.

1) Conservation du milieu : A la fin de la séquence FLAMBEAU, le fait d'avoir une source lumineuse à l'infini avait été trouvé comme condition nécessaire à la conservation du milieu; il s'agit ici de voir si cette condition est suffisante. En fait, la solution est tout de suite trouvée: elle consiste en l'adaptation des dessins utilisés dans la séquence FLAMBEAU (dessin 13.15, représentant un segment $[AB]$, orienté de façon quelconque, et son ombre $[ab]$). Le résultat découle immédiatement de ce dessin, par application du théorème de Thalès.

2) Conservation du parallélisme : Un élève rappelle que c'est une démonstration qui a déjà été vue plusieurs fois en géométrie plane, à l'occasion de l'étude des propriétés des transformations. Nous cherchons en fait à montrer que l'ombre d'un parallélogramme est un parallélogramme. Ce qui n'offre aucune difficulté en appliquant le résultat précédent aux diagonales:

Soit un parallélogramme ABCD, de centre I, et son ombre abcd. Le point I étant le milieu commun de $[AC]$ et $[BD]$, son ombre i est à la fois le milieu de $[ac]$ et de $[bd]$ (voir ci-dessus). Le quadrilatère abcd est donc un parallélogramme.

C- De l'ombre au dessin :

Comme dans le cas de l'ombre au flambeau, il s'agit maintenant d'effectuer le passage de l'ombre au dessin. Ici encore, l'une des données implicites des dessins en perspective est que le plan de projection est vertical, et non pas horizontal; et de plus, dans le cas particulier de la

perspective cavalière, ce plan de projection est parallèle à l'une des faces du cube de référence. Le fait d'avoir un matériel portable (donc orientable dans l'espace) permet par basculement de passer sans problème de l'horizontal au vertical, et même -nous le disons explicitement- à n'importe quelle projection parallèle sur un plan (nous définissons ce terme). Pour illustrer le cas particulier important de la représentation en perspective cavalière, nous posons le cube-squelette contre le tableau (carré rouge en avant), nous indiquons une "position" fictive du soleil (en l'occurrence: éclairage venant de droite pour les élèves), et dessinons sous la dictée l'ombre du cube: on retrouve le dessin classique, avec les fuyantes dirigées vers le haut et la droite.

Nous avons maintenant atteint l'un des buts que nous nous étions fixés en entreprenant cette démarche: pouvoir justifier et définir explicitement le principe fondamental de la représentation usuelle des figures en géométrie de l'espace: il ne s'agit de rien d'autre que d'une projection parallèle sur un plan.

Nous en avons également montré (et démontré) deux propriétés essentielles: la conservation du parallélisme, ainsi que la conservation des rapports (et en particulier du milieu). Les élèves sont de plus en mesure de faire la comparaison de ce type de représentation avec la perspective linéaire:

- bonne préservation du "voir" (car la représentation est "proche" du dessin en perspective);
- bonne préservation du "savoir" (car des propriétés importantes de l'objet se retrouvent sur le dessin).

En Seconde, afin de faire fonctionner une première fois ce nouveau mode de représentation des objets spatiaux, nous proposons la recherche

collective du problème suivant (problème dû à François COLMEZ, et que nous avons déjà expérimenté ensemble antérieurement dans une Première S):

Un tétraèdre régulier (squelette) est exhibé et observé (sommets, arêtes, faces), puis posé contre le tableau, de façon que l'une de ses faces soit horizontale, que l'une des arêtes de cette face soit contre le tableau et que le quatrième sommet soit au-dessus. Le problème est de dessiner à l'échelle 1/2 l'ombre au soleil de ce tétraèdre sur le tableau.

Tout d'abord, on remarque que l'arête qui est contre le tableau coïncide avec son ombre. Puis qu'il faut connaître la direction des rayons solaires. Un élève propose de fixer l'ombre du sommet qui est "en avant" (c'est-à-dire le sommet de la face inférieure qui n'est pas dans le plan du tableau); ce qui est fait, et donne l'occasion de remarquer que l'ombre de ce sommet peut être n'importe où dans le demi-plan inférieur ayant pour bord le support de l'arête située dans le plan du tableau. Pour être dans le cas de la perspective cavalière "classique" (à fuyantes vers la droite), nous supposons de plus que l'éclairage vient de la droite (dessin 13.16A). Maintenant, la situation est complètement déterminée (par la donnée de l'ensemble tétraèdre-soleil), et l'on doit -théoriquement du moins- pouvoir résoudre le problème. Hélas, comme le fait remarquer quelqu'un, la situation est moins favorable ici que pour le cube, puisque aucune face n'est parallèle au tableau (la projection en "vraie grandeur" est donc perçue comme une propriété intéressante!). Nous demandons ce que veut dire "parallèle au tableau". Un élève propose "vertical"; la discussion s'engage: tout plan parallèle au tableau est vertical, mais la réciproque n'est pas vraie. "Mais pour une droite c'est vrai dans les deux sens", dit quelqu'un. Nous posons donc la question de savoir si l'on ne peut pas trouver un segment lié au tétraèdre et qui soit vertical. Après quelques instants de réflexion on parle de la "hauteur", de la "droite (verticale) passant par le sommet". Tout le

monde semblant convaincu que cette droite passe par le centre de la base (conviction qui est très certainement liée à des considérations de symétrie), nous admettons donc ce fait, et matérialisons cette hauteur (par un crayon) sur le tétraèdre maintenant posé sur le bureau. Le problème est reformulé de la façon suivante: pour déterminer l'ombre du quatrième sommet, il suffit:

- a) de déterminer l'ombre du "centre de la base";
- b) de déterminer la (mesure de la) "hauteur" du tétraèdre.

La suite ne se fait guère attendre:

- la hauteur sera représentée verticale et en vraie grandeur;
- sa "base" (= son pied) sera représentée par le centre de la base (la polysémie ne gêne apparemment pas, puisqu'on a l'objet sous les yeux, et que geste vient au secours de la parole).

Ces deux caractéristiques sont justifiées par des propriétés de l'ombre au soleil et du centre de gravité d'un triangle. Il ne reste plus alors qu'à trouver la mesure de la hauteur du tétraèdre, ce qui donne l'occasion:

- a) de dessiner une face et une section du tétraèdre à l'échelle 1/2;
- b) d'utiliser (deux fois) le théorème de Pythagore.

Après avoir trouvé que la mesure de la hauteur est celle de l'arête multipliée par $\frac{\sqrt{2}}{3}$, la réalisation effective du dessin se fait sans problème (dessin 13.16B). Et finalement, nous aurons encore une fois fait intervenir conjointement comme outils des connaissances (institutionnalisées) de géométrie du plan, et des connaissances (non encore institutionnalisées), ainsi que des méthodes (sections) de géométrie de l'espace. Ce problème de dessin était en fait un authentique problème de géométrie...

D- Perspective centrale et perspective parallèle :

Le moment semble maintenant venu de mettre en parallèle les deux

modes de représentation que nous avons successivement étudiés. Nous réalisons donc collectivement un tableau comparatif:

Perspective centrale	Perspective parallèle
Point de vue à distance finie	" Point de vue " à l'infini
Milieu non conservé	Milieu conservé
Parallélisme non conservé	Parallélisme conservé
Orthogonalité non conservée	Orthogonalité non conservée
Angles non conservés	Angles non conservés
	Vraie grandeur pour les objets situés dans un plan frontal

TABLEAU 57

En conclusion: la perspective parallèle est d'un emploi plus commode en ce qui concerne les calculs et les constructions; en particulier la dernière propriété mentionnée indique que l'on aura tout intérêt à bien choisir, lorsque cela sera possible, le plan de projection, de façon à obtenir comme plans frontaux des plans intéressants, relativement au problème posé.

E- Les conventions :

1) Nous sommes également à même de faire le départ de ces propriétés de la projection parallèle avec les caractéristiques habituelles du stéréotype du dessin de cube: direction des fuyantes "montant vers la droite", et longueurs raccourcies sur les fuyantes (voir Chapitre 2).

2) Pour ce qui est de la convention de semi-transparence, c'est

-comme dans la séquence FLAMBEAU- en ayant recours à l'ombre du cube que nous introduisons la convention LS, tout en faisant malgré tout le lien avec le côté visuel (observateur placé "très loin"), qui permet également l'introduction de la convention LL.

3) La représentation "traditionnelle" du cube nous sert également à introduire la convention de représentation des plans. Il s'agit ici, nous l'avons dit, d'un autre type de convention (synecdoque géométrique). En géométrie du plan, les élèves de lycée sont habitués à représenter une droite par un segment (mais il ne faut pas oublier que leurs premiers contacts avec ce fait ont pu leur causer quelques problèmes, la tentation étant grande de considérer la droite comme limitée au segment dessiné). Nous retrouvons bien sûr cette synecdoque en géométrie de l'espace, non seulement avec les droites (comme dans le plan), mais aussi avec les plans (car en effet le projeté d'un plan sur un plan est en général un plan), et avec ce même problème de savoir si le plan se limite ou non au quadrilatère représenté (voir Chapitres 2 et 9).

Il s'agit donc de substituer au plan à représenter une partie bornée de celui-ci qui, elle, pourra être complètement figurée. Cette partie est traditionnellement un rectangle, même si ce fait est très fréquemment occulté d'habitude (Chapitre 2). Le projeté d'un parallélogramme (donc également d'un rectangle) étant un parallélogramme, un plan de l'espace sera représenté par un parallélogramme. De plus, comme nous l'avons établi plus haut (Chapitres 2 et 6), le couple plan horizontal/droite verticale constitue un repère nettement privilégié (qui d'ailleurs, si on limite le plan au rectangle évoqué ci-dessus, est trirectangle). Il y a donc intérêt à préserver cette représentation, tout au moins dans les premiers temps, et ceci d'autant plus qu'elle offre une plus grande simplicité de réalisation, liée comme nous l'avons vu à la préservation du "savoir". La représentation

privilégiée (et traditionnelle) d'un plan sera donc celle d'un rectangle horizontal, dont de plus deux des côtés sont frontaux. Cette définition correspond en particulier à la face supérieure du cube de référence, dans une perspective cavalière.

(N.B.: Notons cependant que cette face est un carré, et non pas un rectangle "banal". On peut d'ailleurs se poser la question de savoir s'il ne serait pas avantageux -au moins dans certains cas- de décider que le rectangle figurant le plan est en fait un carré. On disposerait ainsi du rapport de réduction dans la direction des fuyantes, ce qui permettrait, dans certains problèmes métriques, une plus grande précision dans le dessin. Peut-être cette idée mériterait-elle que l'on s'y intéresse d'un peu plus près..?)

Nous faisons donc dessiner un pavé droit horizontal dont les faces sont parallèles à celles du cube de référence (en Seconde, nous donnons ses dimensions et celles du cube, de façon à faire "fonctionner" davantage de propriétés de la projection); la face supérieure du pavé, comme nous l'avons dit, nous sert alors à justifier la représentation que nous utiliserons le plus souvent pour le plan, et à expliciter les hypothèses implicites qui seront faites.

Les élèves sont maintenant en mesure de représenter des plans. Nous revenons sur l'une des questions du questionnaire ayant fait l'objet du Chapitre 10, où étaient figurés un plan et trois points. Reprenant ce même dessin (dessin 13.17), nous posons la question de savoir où se trouvent les points A, B et C. Certains élèves, qui avaient déjà signalé l'ambiguïté lors de la passation du questionnaire, la font remarquer. Aussi dessinons-nous au tableau un plan P, ainsi qu'un point A dont le dessin est intérieur au parallélogramme représentant P, et demandons-nous aux élèves de montrer que le point A est hors du plan P. Pratiquement toutes les réponses font intervenir le projeté vertical de A sur P (dessin 13.18), même si toutes

n'utilisent pas la convention de semi-transparence à bon escient (elle n'est pas encore entrée dans leurs moeurs). Nous insistons donc sur son intérêt, ainsi que sur le fait que, même alors, le dessin reste ambigu, et qu'une légende reste nécessaire, ne serait-ce que pour indiquer la nature des êtres géométriques représentés. Puis, reprenant le même dessin, tel qu'il était au départ, nous demandons cette fois de montrer que le point A est dans le plan P ce qui ne présente plus aucune difficulté (dessin 13.19).

4) Autre convention à expliciter, celle de la notation. Dans ce qui précédait nous utilisions simultanément, dans un but de clarification, deux notations distinctes:

- une lettre majuscule pour désigner un point donné de l'espace (ainsi qu'éventuellement sa représentation sur une coupe);
- la lettre minuscule correspondante pour désigner le projeté de ce point sur le plan de projection.

C'est-à-dire que les lettres majuscules correspondaient aux points de l'espace, et les lettres minuscules au dessin de ces points. Mais, à partir du moment où la figure n'est plus matérialisée, il est possible de faire l'économie de la première notation. Ce que nous avons fait avec beaucoup de vigilance.

Les préliminaires étant ainsi établis, nous allons (enfin?) pouvoir "commencer la géométrie de l'espace" (au sens où l'entendent certains de nos collègues), c'est-à-dire nous occuper de définitions, d'axiomes et de théorèmes. N'en déplaise à ceux-là, nous estimons malgré tout n'avoir pas perdu notre temps avec ce qui précède.

(N.B.: Nous n'avons pas ici abordé le problème des "corps ronds" (cylindre et sphère), qui pourtant, malgré les difficultés que présente leur représentation

(voir Appendices 2 et 3), figurent au programme du collège; nous renvoyons à l'Appendice 4 pour le tracé pratique d'un cercle en perspective.

D'autre part, nous n'avons pas non plus évoqué les rapports du dessin en perspective parallèle avec les mesures (angles, distances); on trouvera en Appendice 14 un petit complément sur ce sujet.)

CHAPITRE 14: INSTITUTIONNALISATION ET ÉVALUATION.

"Même si une connaissance est acquise par instinct, c'est justement là une raison pour tenter de passer de l'instinct à la raison."
Vincent VAN GOGH.

Disposant désormais de principes de représentation des figures spatiales (sections, projection parallèle, conventions), ayant été à même de manipuler certains concepts de géométrie de l'espace (action) et d'en débattre pour arriver à quelques résultats non triviaux (formulation et validation), il convient maintenant de rassembler ces connaissances pour en faire un ensemble organisé et cohérent (institutionnalisation), et d'en tirer un certain nombre de conséquences, donnant elles-mêmes naissance à de nouvelles conjectures et à des situations-problèmes qui permettront la mise en oeuvre de nouveaux "cycles".

Par rapport à ce qui précède, nous entrerons ici moins dans le détail (afin de ne pas trop déborder du sujet), et nous ne respecterons plus systématiquement la chronologie, préférant regrouper les activités par genres. Ainsi, une première phase d'institutionnalisation des règles d'incidence a été accompagnée d'exercices destinés, non seulement à en faire (re)découvrir certaines conséquences, mais également à faire utiliser les règles de représentation qui ont été mises en évidence. C'est-à-dire que nous travaillions, non seulement sur les objets spatiaux (niveau 0), mais aussi sur les dessins plans les représentant (niveau 2), en cette sorte de jeu de cadres espace/plan dont nous avons déjà parlé, et qui nous semble important (en particulier parce qu'inévitable, tout au moins à ce niveau d'enseignement). Plutôt que de relater le déroulement exact de la séquence, nous séparerons (dans la mesure du possible) ce qui a trait au niveau 0 de ce qui ressortit au niveau 2, indiquant malgré tout les moments où nous passons de l'un à l'autre.

1- LES RÈGLES D'INCIDENCE :

Lorsque nous avons utilisé (plus ou moins implicitement) des "règles" relatives à l'espace, celles-ci sont apparues au fur et à mesure des besoins, et non pas en une progression telle que nous n'ayions plus eu qu'à les noter l'une après l'autre pour constituer un ensemble cohérent. D'autre part, certaines de ces propriétés étaient même imbriquées les unes dans les autres, et il était donc nécessaire d'organiser cet ensemble pour le structurer, de façon à le rendre exploitable (ou -pour utiliser un mot à la mode- "opérationnel"). De plus, il s'agit maintenant de conférer à cet ensemble le statut de savoir mathématique de référence, grâce auquel seront justifiées les propositions énoncées par la suite. Il incombe donc à l'enseignant de prendre en charge cette partie, et de lui donner toute la "pompe" nécessaire, par tous les moyens -tant verbaux qu'écrits- qu'il a à sa disposition. En un mot, institutionnaliser le savoir. Ceci n'est pas spécifique de la géométrie de l'espace, bien entendu, mais cette phase est particulièrement importante et essentielle dans le type de démarche que nous avons suivi. Certes, dès le début, nous avons admis une ou deux propriétés, et nous avons pu, grâce à elles, démontrer (à l'aide de résultats de géométrie plane) d'autres propriétés. Mais il ne s'agissait là, en somme, que d'une "micro-modélisation", alors que dans le cas présent, il s'agirait plutôt d'une "méso-modélisation" (nous réservons le terme de "macro-modélisation" à des ensembles plus importants, comme par exemple l'ensemble de la géométrie). Nous amorçons ainsi une sorte de "spirale" qui, de reprise en reprise, pourra permettre aux élèves d'avoir une vue moins parcellaire de ce que peut être la mathématique.

Nous avons commencé par donner deux axiomes faisant le lien (et la

distinction) entre géométrie du plan et géométrie de l'espace :

Axiome 1: Dans l'espace, il y a au moins un plan et un point hors de ce plan.

Axiome 2: Dans tout plan de l'espace, les propriétés de la géométrie plane sont vraies.

(Pour les élèves, ces deux règles prêtent à sourire, car elles font l'effet de vérités de La Palice. Nous n'y insistons pas outre mesure.)

Nous rappelons ensuite quatre "règles" que nous avons utilisées dès le début, dans la séquence FLAMBEAU:

- nous avons alors parlé "du plan déterminé par deux élastiques (fixés au crochet)". D'où: deux droites sécantes déterminent un plan.
- nous avons utilisé le fait que deux points suffisaient pour qu'une droite soit située dans un plan (élastique tendu). D'où: si une droite a deux points dans un plan, elle est incluse dans ce plan.
- nous avons également considéré (dans le cube) "le plan déterminé par trois sommets". D'où: trois points non alignés déterminent un plan.
- enfin, nous avons aussi parlé (avec le tétraèdre) du "plan contenant la hauteur et un sommet". D'où: une droite et un point situé hors de cette droite déterminent un plan.

On s'aperçoit que certaines de ces règles peuvent être déduites des autres, et que ceci peut se faire de plusieurs façons différentes (on fait quelques essais, en esquissant les démonstrations). Finalement, nous choisissons:

Axiome 3: Si une droite a deux points dans un plan, elle est incluse dans ce plan.

Axiome 4: Trois points non alignés déterminent un plan.

Théorème 1: Une droite et un point hors de cette droite déterminent un plan.

Avec les "micro-démonstrations" qui y sont attachées, nous avons là une "micro-modélisation", sorte de "Meccano n° 00" qui permet de toucher concrètement aux principes de la méthode axiomatique, tout en ayant une taille suffisamment réduite pour qu'un élève de Seconde puisse l'appréhender sans difficulté dans son ensemble.

Nous passons ensuite aux positions relatives d'une droite et d'un plan. Il s'agit en fait de propriétés qui ont été utilisées dès le début de la séquence FLAMBEAU:

- position sécante avec les points de concours des élastiques avec le socle;
- parallélisme avec les côtés du carré rouge et leur ombre.

On se rend compte qu'un plan et une droite non incluse dans le plan ne peuvent avoir qu'un seul point commun au plus (Axiome 3), et qu'il est possible d'avoir exactement un point commun (conséquence de l'Axiome 1). On a pu constater la possibilité de n'avoir aucun point commun, et on l'admet:

Axiome 5: Une droite et un plan peuvent être disjoints. On dit alors que la droite est parallèle au plan.

On peut ensuite synthétiser les positions relatives d'une droite et d'un plan:

- a) droite incluse dans le plan;
- b) droite sécante au plan (un point commun et un seul);
- c) droite parallèle au plan (aucun point commun).

On en déduit les positions relatives de deux droites distinctes de l'espace: elles ne peuvent avoir qu'au plus un point commun (Axiome 3):

- a) si c'est le cas, elles déterminent un plan (Théorème 1), et dans ce plan elles sont sécantes (géométrie plane);
- b) si ce n'est pas le cas, alors elles peuvent être:
 - soit non coplanaires (Axiome 1);

- soit coplanaires, et alors elles sont parallèles (géométrie plane).

On en arrive enfin aux positions relatives de deux plans, qui elles aussi ont été rencontrées dès le début (plans parallèles avec la face supérieure du cube et le socle, plans sécants pour la détermination des ombres des côtés du carré rouge), et que nous admettons:

Axiome 6 : Deux plans distincts peuvent:

- soit avoir une droite commune (plans sécants);
- soit être disjoints (plans parallèles).

Nous insistons sur le fait que ce sont les seules possibilités. Rappelons en effet que nous avons pu déceler, chez certains élèves (voir Chapitre 9), la croyance en une troisième possibilité qui serait d'avoir un unique point commun, et qui correspondrait au dessin 14.1, croyance certainement induite par la représentation traditionnelle d'un plan par un parallélogramme; nous montrons que le fait de représenter deux plans parallèles par deux parallélogrammes à côtés parallèles n'est rien d'autre qu'une convention traditionnelle, destinée à faciliter la représentation mentale, et que la condition n'est, ni nécessaire (dessin 14.2: les rectangles ABCD et A'B'C'D' sont respectivement dans les plans parallèles P et P', et leurs côtés ne sont pas parallèles), ni suffisante (dessin 14.3: les faces ABCD et A'B'C'D' des pavés ont leurs côtés parallèles, et cependant elles ne sont pas vues parallèles, procédé cher à M.C. ESCHER).

Le parallélisme de droites et de plans ayant ainsi été abordé, nous l'approfondissons ensuite de façon plus systématique, en établissant quelques résultats supplémentaires) et toujours en nous référant aux situations spatiales rencontrées au cours des séquences FLAMBEAU ou SOLEIL. Il en sera de même pour l'orthogonalité, mais nous n'entrerons pas davantage ici dans le détail, afin de ne pas abuser de la patience du lecteur.

Le moment est maintenant venu de mettre l'accent sur des propriétés

"évidentes" qui ont été utilisées de façon complètement implicite par tous, depuis le début même de la séquence FLAMBEAU, et qui peuvent à présent être démontrées au sein de notre petit modèle théorique afin, précisément, de le faire "fonctionner": il s'agit essentiellement de deux propriétés attribuées à l'ombre (au flambeau comme au soleil):

- a) l'ombre (= le projeté) d'un point est en général un point (c'est en effet l'intersection du plan de projection avec la projetante du point);
- b) l'ombre d'une droite est en général une droite (intersection du plan de projection avec le plan défini par la droite et l'une -quelconque- des projetantes des points de la droite).

Tous ces éléments du "Cours de géométrie de l'espace" ont été mis en place, comme nous l'avons signalé plus haut, en utilisant bien sûr des dessins correspondant aux diverses configurations envisagées, ainsi que de petits exercices destinés, non seulement à mettre en oeuvre ce savoir nouvellement institutionnalisé (propriétés, et méthodes), mais aussi à faire fonctionner les règles de la représentation.

2- UN EXERCICE DE LECTURE (DU DESSIN A L'OBJET) :

Nous avons voulu mettre l'accent sur les (délicats) rapports entre figure spatiale et dessin en perspective parallèle, et en particulier ici:

- voir si -et comment- les élèves pouvaient maintenant "lire" (décoder) un tel dessin;
- leur faire apparaître qu'un dessin convenablement légendé pouvait (tout au moins dans les cas simples) permettre de retrouver toute l'information sur l'objet tridimensionnel représenté.

Pour cela nous avons décidé de partir de l'un des "objets ayant la

même ombre que le cube" qui avaient été imaginés par les élèves (voir Chapitre 12 et dessin 12.24). Plus précisément, il s'agissait en l'occurrence de cet objet que nous avons baptisé "boîte" faute de mieux. Cet objet, rappelons-le, est obtenu en coupant le faisceau (concourant) d'élastiques par un plan oblique, parallèle à certaines arêtes horizontales du cube initial. Il a été préféré aux autres productions des élèves pour deux raisons principales:

- la face inférieure étant posée sur le socle, on n'aura, pour déterminer l'objet, qu'à déterminer les 4 sommets de la face supérieure;
- la face supérieure est plane, mais non horizontale, ce qui rend le problème moins trivial.

Quatre élèves avaient représenté un tel objet, tous quatre en perspective cavalière classique.

A) Ce que nous aurions voulu faire (ou plutôt: faire faire):

C'eût été, par groupes, de réaliser véritablement l'objet, dans de la baguette de bois, à partir du dessin en perspective cavalière accompagné de sa légende. Pour ce faire, il aurait fallu déterminer des longueurs, des angles,...bref s'intéresser à diverses faces de l'objet, de façon suffisamment précise pour pouvoir en arriver à la construction effective. Mais la réalisation de l'objet aurait peut-être demandé plus de temps que celui dont nous disposions alors, malgré tout son intérêt. Nous avons choisi une voie plus rapide.

B) Ce que nous avons fait :

Nous avons distribué le dessin, accompagné d'un questionnaire (voir Annexe 13), en expliquant l'origine de la situation évoquée (le matériel FLAMBEAU, le mât, le cube posé contre ce mât, les élastiques,etc.), ainsi que notre intention primitive, et en disant que, faute de temps, nous avions un peu "mâché" le travail.

1- Le questionnaire:

Le questionnaire est, comme nous l'avons dit, construit dans l'optique d'une réalisation effective de l'objet (que nous avons baptisé "objet HERVÉ", du prénom de l'élève dont nous avons utilisé le dessin pour ce travail). Il était précisé (oralement):

- que le dessin était en perspective parallèle,
- que les points nommés étaient les points de l'espace et non ceux du dessin,
- que la face ADHE était représentée en "vraie grandeur", c'est-à-dire...à l'échelle 1/2.

Il a paru également nécessaire de préciser qu'il s'agissait du dessin d'un objet précis, bien déterminé, et non pas de n'importe quel objet du même type comme c'est souvent le cas en géométrie (on dessine "un" rectangle): par exemple, le point A est un point bien précis de [SH], et non pas n'importe quel point de ce segment). Le parallélisme des arêtes [AB], [CD], [EF] et [GH] était explicité (car "ce n'est pas parce que les dessins de deux droites sont parallèles que ces droites le sont"). Il était également précisé que l'objet était constitué de segments de droite, et que les élastiques étaient représentés en traits tiretés (la convention était donc ici différente de la convention de semi-transparence habituelle).

Ce problème a été soumis (individuellement, en temps limité mais suffisant pour que tous répondent à toutes les questions posées) aux élèves de nos classes de Seconde 3 (34 présents) et de Première S1 (33 présents).

Question 1 :

Elle n'était là, en fait, que pour aider les élèves à "entrer dans la figure", à en repérer les divers plans et alignements. Bien entendu, la très grosse majorité des réponses sont correctes: elles le sont toutes en

Première, et en Seconde elles varient entre 28 (segment [AH]) et 34 (segments [BC] et [CD]). Les quelques erreurs relevées nous ont cependant apporté un enseignement (auquel nous ne nous attendions d'ailleurs pas). En effet, elles attribuent comme ombre:

- au point A: les points E, K ou G;
- au point B: les points F ou G;
- au point C: le point F;
- au point D: le point E.

Nous avons pourtant pris soin de représenter les rayons lumineux passant par ces 4 points (élastiques); mais nous pensons que les élèves concernés n'ont en fait pas tenu compte de ces tracés pour répondre, et ont raisonné en s'appuyant sur des "théorèmes en acte" du type suivant:

(T1): la source lumineuse étant située à gauche de l'objet, l'ombre d'un point quelconque sera à droite de ce point (d'où: $A \rightarrow E$, $A \rightarrow K$, $C \rightarrow F$, $D \rightarrow E$).

(T2): la source lumineuse étant située en avant de l'objet, l'ombre d'un point quelconque sera en arrière de ce point (d'où $A \rightarrow G$, $B \rightarrow G$).

Ces "théorèmes" sont certes vrais, mais ils sont insuffisamment précis; d'où les erreurs constatées.

Question 2 :

La façon dont l'objet était conçu (plan oblique coupant le faisceau d'élastiques) n'avait pas été explicitée. Cette question n'était donc pas sans objet. Nous avons obtenu 33 bonnes réponses en Première, et 27 en Seconde, sur 29 exprimées (il y a en effet 5 non-réponses dans cette classe: oubli?). Ce résultat massif montre que le principe du problème avait été compris.

N.B.: les deux réponses incorrectes de Seconde sont les suivantes:

- un élève a donné, comme dimension du cube, celle de [HG] (croyance en

la "vraie grandeur" dans la direction des fuyantes?);

- l'autre a donné celle de [AD] (réponse plus difficile à expliquer).

Question 3 :

Ici apparaît l'ambiguïté fondamentale des représentations planes de l'espace. Nous avons signalé, lors de la présentation du questionnaire, que les êtres mathématiques dont il était question (et donc ceux qui étaient nommés) étaient les êtres réels de l'espace, et non leur représentation plane. De plus, en circulant dans la classe de Seconde au cours de la passation, nous avons vu un élève répondre que le quadrilatère EFGH était un parallélogramme. D'où une mise en garde générale renforcée (dans les deux classes) sur ce thème: il s'agissait d'indiquer la nature des quadrilatères réels, et non celle de leur dessin. L'exemple a été pris d'un cube dessiné au tableau en perspective cavalière: si l'on demande par exemple de dessiner la face supérieure de ce cube, il s'agit de dessiner un carré, et non pas un parallélogramme.

Cette insistance n'a sans doute pas été inutile; malheureusement, il n'a pas été possible de le vérifier, la plupart des élèves écrivant leurs réponses au crayon noir sur le questionnaire, ce qui interdit de se rendre compte des "repentirs". On verra malgré tout qu'elle n'a pas suffi, ce qui montre que le problème soulevé n'est pas imaginaire. Il faut bien se persuader, en effet, que, lorsque l'on parle d'une chose alors que l'on en montre une autre, le discours risque de voir son sens complètement détourné, de façon proprement "surréaliste" (a priori, que pourrait-on penser de quelqu'un qui, dessinant un parallélogramme, déclarerait tout de go: "Ceci est un carré"? Et c'est pourtant bien de cela qu'il s'agit en l'occurrence). On peut d'ailleurs, dans un certain sens, considérer cette identification objet/dessin comme le "cas-limite" du transfert de propriété, dont nous avons

ou l'importance.

Passons en revue les résultats obtenus pour les différents quadrilatères:

EFGH:

En Seconde: 25 carrés, 3 parallélogrammes, 3 rectangles.

En Première: 31 carrés, 1 parallélogramme, 1 rectangle.

La réponse correcte est donc fournie dans la grande majorité des cas, mais on constate malgré tout quelques confusions objet/dessin ("parallélogrammes") et quelques transferts "négatifs" partiels (inégalité des longueurs des côtés, pour les "rectangles").

ABGH:

En Seconde: 30 trapèzes (dont 10 tr. rectangles), 4 rectangles.

En Première: 29 trapèzes (dont 20 tr. rectangles), 3 rectangles.

Les bonnes réponses ("trapèze rectangle") sont plus nombreuses en Première qu'en Seconde, où une majorité d'élèves ne repèrent pas l'orthogonalité de la verticale avec les horizontales non frontales (pour lesquelles le transfert ne peut avoir lieu); par contre, le transfert du parallélisme (conscient ou non) est massif.

CDEF:

En Seconde: 27 trapèzes (dont 6 tr. rectangles), 4 rectangles.

En Première: 24 trapèzes (dont 10 tr. rectangles), 5 rectangles.

Mêmes remarques que ci-dessus. Nous noterons sans surprise la proportion moins élevée de trapèzes rectangles: les élèves ne savent encore rien de l'orthogonalité dans l'espace, et la détection des angles droits nécessite ici une forte dose d'"intuition spatiale".

ADEH:

En Seconde: 19 quadrilatères plans quelconques, 13 trapèzes.

En Première: 20 quadrilatères plans quelconques, 11 trapèzes.

Une majorité, donc, de réponses exactes; mais on aurait pu s'attendre à un succès massif: le quadrilatère est représenté en vraie grandeur. Il faut remarquer la fréquence non négligeable (environ 1/3) des "trapèzes", bien que le dessin de ADEH ne soit manifestement pas un trapèze. Quelle explication donner à ce fait? on peut a priori penser qu'il s'agit, ou bien d'une conception erronée de ce qu'est un trapèze, ou d'une réponse trop rapide, le quadrilatère "ressemblant" à un trapèze (rectangle): l'obliquité de (ED) par rapport à (EH) aurait davantage retenu l'attention de ces élèves que le non-parallélisme de (AD) et (EH).

BCFG:

En Seconde: 15 quadrilatères plans quelconques, 17 trapèzes.

En Première: 15 quadrilatères plans quelconques, 13 trapèzes, 2 "autre".

On note la grande analogie de ces résultats avec les précédents, que nous expliquons bien sûr de la même façon, étant donné l'analogie de forme entre les dessins de ces deux quadrilatères. Mais il n'y a en réalité ici que deux bonnes réponses, car ce quadrilatère n'est pas plan. Quelqu'un de très habitué à la géométrie de l'espace pourrait dire que rien n'incite à croire que ce quadrilatère est plan; mais pour nos élèves, cela relevait plutôt de la divination (et c'est pour cela, en particulier, que nous aurions aimé leur faire construire l'objet).

ABCD:

En Seconde: 24 trapèzes (dont 9 tr. rectangles).

En Première: 25 trapèzes (dont 18 tr. rectangles).

Ici aussi, la détection des angles droits était rien moins qu'évidente pour des débutants en géométrie de l'espace.

Finalement, si les résultats de cette question sont moins bons en seconde qu'en Première S (ce qui n'est que normal), ils y sont cependant tout

à fait convenables; d'autre part, elle nous aura permis de voir que la non-conservation des angles droits sur le dessin créait un réel problème, sur lequel il conviendrait d'insister particulièrement lors de l'étude de l'orthogonalité dans l'espace. Par contre, la conservation du parallélisme, permettant un transfert de propriété "licite" semble avoir été nettement bénéfique, et confirme l'intérêt de la représentation en perspective parallèle.

Nous en arrivons maintenant au problème proprement dit, puisque les quatre dernières questions avaient pour but de préciser les longueurs des arêtes, et la forme des "faces" de l'objet (N.B.: si nous mettons des guillemets, c'est à cause de BCFG, bien sûr).

Question 4 :

Dans les deux classes, toutes les réponses sans exception sont correctes (à quelques -rares- étourderies près, dues à l'oubli que le dessin était à l'échelle 1/2). Ce qui n'est pas étonnant (le plan considéré ici est représenté en vraie grandeur, à l'échelle près, comme nous l'avions précisé au début), mais est quand même rassurant.

Question 5 :

Comme prévu, les résultats sont ici moins bons (2 élèves sur 3 par classe), du fait d'une possible confusion objet/dessin, qui a été effectivement constatée:

En Seconde: 21 bonnes réponses et 11 confusions objet/dessin.

En Première: 22 bonnes réponses et 4 confusions objet/dessin.

N.B.1: Dans cette dernière classe, 6 erreurs sont dues, non pas à une confusion objet/dessin, mais au fait que le segment [AB] n'a pas été tracé

parallèle à [HG], dans certains cas parce que l'angle droit a été placé en B au lieu de A (4 fois), et dans d'autres (nous le supposons) par suite d'une erreur de mesure ou de calcul.

N.B.2: Rappelons que, pour la nature du quadrilatère ABGH, nous avons obtenu, à la question 3, 10 trapèzes rectangles en Seconde et 20 en Première, les résultats sont donc meilleurs ici (surtout en Seconde), ce qui peut s'expliquer par le fait que les élèves ont construit le dessin (grâce à une réflexion et à des mesures), et que le résultat s'est en quelque sorte "écrit lui-même" comme une conséquence de cette construction. C'est-à-dire que l'on peut dessiner un trapèze rectangle (parce qu'on a extrait de la figure les éléments pour le faire), même si l'on n'a pas opéré une synthèse de ces éléments permettant de savoir a priori que la figure est un trapèze rectangle.

Question 6 :

Notons qu'ici (comme d'ailleurs dans le cas précédent), la réponse pouvait être inexacte pour le dessin (non-perpendicularité de [DE] et [EF]), et correcte pour la mesure de [CD] (en raison du parallélisme de [CD] et [EF]); ceci n'avait pas été observé dans la question précédente, mais nous en trouvons ici quelques cas, ce qui s'explique par le fait que l'angle droit en E (ou D) était ici beaucoup moins facilement repérable.

On constate que les bonnes réponses se maintiennent en Première, mais chutent un peu (au niveau du dessin) en Seconde:

En Seconde: 14 dessins corrects (20 mesures exactes) et 10 confusions.

En Première: 24 dessins corrects (27 mesures exactes) et 5 confusions.

Question 7 :

Une légère déperdition, par rapport à la question précédente:

En Seconde: 10 bonnes réponses.

En Première: 21 bonnes réponses.

En conclusion, on voit que les résultats ont été assez bons en Première, puisque 2 élèves sur 3 ont résolu entièrement le problème posé. S'ils l'ont été moins en Seconde (1 élève sur 3), ils restent malgré tout encourageants, car n'oublions pas que nous n'avions pas encore vu l'orthogonalité dans l'espace. On a pu également constater que la confusion objet/dessin était plus fréquente en Seconde, malgré les précautions prises, et qu'il y a, à ce niveau, un véritable problème sur lequel il nous faudra revenir. La correction collective de ce questionnaire, lors de la séance suivante, a permis de faire le point et a certainement été profitable, eu égard à l'intérêt que les élèves y ont porté. En ce qui concerne le quadrilatère BCFG, le seul moyen dont nous disposions pour les convaincre de sa non-planéité a été d'exhiber l'objet construit: posé sur le bureau suivant BCFG, l'équilibre était bancal, alors que, posé de quelque autre façon, il était stable (on trouvera en Appendice 15 une démonstration du résultat). L'objet sous les yeux, ils ont pu constater la conformité au modèle, ainsi que la vraisemblance des réponses au questionnaire (en particulier la présence d'angles droits). De plus, cette "face qui n'en était pas une" leur a permis d'approcher de nouveau certaines limites de la représentation plane: sur le dessin, au contraire de la maquette, rien, a priori, ne permet de dire si un quadrilatère est plan ou non.

3- DES EXERCICES DE PONCTUATION (DU DESSIN AU DESSIN):

Nous avons déjà eu maintes fois l'occasion de nous apercevoir que les problèmes de représentation des figures sont, en géométrie de l'espace,

plus complexes qu'en géométrie du plan, que ce soit à l'encodage ou au décodage. En particulier, le dessin m d'un point M de l'espace ne définit pas ce point, mais le laisse indéterminé sur la projetante passant par m . De même, le dessin d d'une droite D la laisse indéterminée dans le plan parallèle à la direction de projection et contenant d . Il ne faudrait pas cependant en conclure, un peu trop hâtivement, que, dans un dessin de géométrie de l'espace, on peut faire n'importe quoi. La représentation obéit aux règles de la projection parallèle sur un plan, ce qui impose par conséquent des contraintes de dessin.

Réaliser un dessin correct et précis peut être une motivation non négligeable pour les élèves (nous avons pu nous en rendre compte, principalement en Seconde), et en outre -même s'ils n'en sont pas dès l'abord conscients- l'enjeu sera pour eux d'obtenir un dessin plus "parlant", plus lisible, et partant plus efficace en tant qu'outil de résolution de problèmes. La lisibilité et l'efficacité d'un dessin de géométrie de l'espace dépend essentiellement de deux facteurs, qu'il faut apprendre aux élèves à utiliser au mieux:

- le choix du "point de vue" (c'est-à-dire, plus précisément, des éléments de la projection choisie et de l'orientation de la figure à représenter, par rapport à ceux-ci);
- la cohérence du dessin.

Cette dernière est le résultat de l'existence d'une "logique interne", résultant du respect des contraintes de la perspective, ainsi que des conventions usuelles. Très souvent, des élèves sentent qu'il y a "quelque chose qui ne va pas" dans un dessin qu'ils ont réalisé, mais n'arrivent pas à identifier précisément ce qui les gêne. Une réflexion de nature géométrique peut aider à cerner le problème, et à mettre en évidence le fait que leur sentiment est dû à une incohérence, résultat de la violation inconsciente

d'une convention ou d'une règle de perspective.

Nous avons déjà eu l'occasion, précédemment (voir Chapitre 2), de montrer un certain nombre d'exemples de telles erreurs, provenant de manuels de lycées. Nous n'y reviendrons pas, nous contentant de remarquer qu'ici en particulier, l'erreur est formatrice, puisqu'elle permet une réflexion sur les principes mêmes de la représentation, réflexion qui n'est possible que parce que ces principes ont été clairement explicités. La démarche qui intervient dans ce cas est la suivante: à partir d'un problème d'origine perceptive (le "voir"), portant sur la représentation, on débouche sur un problème de nature géométrique (le "savoir") qui, résolu, permettra de remédier à la situation.

Bien sûr, chez l'élève ce problème perceptif apparaîtra spontanément, ou n'apparaîtra pas, car il faut une certaine attention et une certaine "pratique" pour déceler certaines anomalies. Mais c'est également notre rôle d'enseignant que de favoriser cette fréquentation des dessins, et d' "apprendre à voir", en suscitant une réflexion critique. Ceci est nécessaire si l'on veut que puisse fonctionner cette dialectique voir/savoir, dans laquelle les conflits pourront être identifiés, dépassés, et permettront d'aboutir à une meilleure maîtrise à la fois de la géométrie et des représentations.

Lors de la résolution d'un problème spatial, un dessin respectant les règles de la projection parallèle pourra (surtout chez les élèves les plus jeunes) permettre de se faire une idée plus précise de la figure tridimensionnelle, en en fournissant une image mentale suffisamment "vraie" (c'est-à-dire optimisant la préservation du "voir" et le "savoir"). C'est ainsi qu'il pourra faciliter la découverte d'une conjecture et/ou d'une démonstration, et par là même participer efficacement à l'élaboration des connaissances.

Inversement, pour bien "voir" (au sens de "se représenter

mentalement") un dessin de géométrie de l'espace, il faut souvent pouvoir imaginer, en plus de ceux qui sont effectivement représentés, d'autres objets géométriques qui serviront de repères, et les rendre apparents sur le dessin. Mais ces éléments de référence ne pourront être déterminés et fonctionner comme tels que si l'on sait convenablement agencer, les uns par rapport aux autres, les différents éléments de la figure, ce qui nécessite au départ la connaissance (d'ailleurs non nécessairement formalisée) de propriétés géométriques de cette même figure (voir au Chapitre 13 l'exercice sur le tétraèdre régulier). Ce qui fait -et c'est là une idée qui nous semble importante- que le dessin apparaîtra, non comme une représentation immuable, entièrement obtenue du premier jet, mais comme un objet qui se construit progressivement, par "approximations successives" en quelque sorte, s'enrichissant des connaissances que l'on acquiert au fur et à mesure sur la figure géométrique représentée.

Afin de familiariser nos élèves avec ces idées, nous avons entrepris, en même temps que nous mettions en forme le début du "cours" de géométrie de l'espace, de leur donner à résoudre, en classe, quelques "petits exercices de ponctuation", basés par conséquent sur la convention de semi-transparence, et n'ayant (apparemment) trait qu'à la représentation des figures (mais nous venons de voir ce qu'en fait il convenait d'en penser). Cette convention peut en effet donner lieu à des exercices -simples, mais fondamentaux- permettant une première mise en oeuvre de la dialectique voir/savoir évoquée ci-dessus. La plupart de ces exercices demandent -sur un dessin légendé donné- le tracé d'une droite, répondant à certaines conditions, et qui doit couper certains des plans représentés. Il s'ensuit qu'il s'agira de dessiner (c'est-à-dire, dans un premier temps, d'imaginer et de "construire" dans l'espace) leur point d'intersection, pour pouvoir placer convenablement sur la droite les parties en pointillés.

Exercice 1 (posé avant l'institutionnalisation des positions relatives d'une droite et d'un plan):

Un plan P et deux points A et B sont dessinés (dessin 14.4). Montrez sur ce dessin, à l'aide de la ponctuation, successivement:

- que la droite (AB) est parallèle à P.
- que la droite (AB) est sécante à P.

Le premier problème est résolu individuellement sans difficulté, en projetant (souvent "verticalement") les points A et B sur P (dessin 14.5), ce qui tend à montrer

1°) que cette notion, ainsi que la caractérisation par le parallélisme avec une droite du plan, sont familières aux élèves, même si elles n'ont fait l'objet d'aucun apprentissage systématique.

2°) que la transposition du parallélisme, de la figure au dessin, se fait sans difficulté ("transfert de propriété").

Le second problème n'est pas résolu aussi immédiatement, mais des solutions sont trouvées: certains élèves "prolongent" le plan P, de façon à faire apparaître le point d'intersection à l'intérieur du parallélogramme (dessin 14.6); d'autres se contentent, ici encore, de projeter les points A et B sur le plan P, mais cette fois avec des segments projetants de longueurs inégales (dessin 14.7). Deux méthodes que l'on pourrait qualifier respectivement de "positive" (le point unique d'intersection, caractérisant cette position, est figuré) et de "négative" (la position est définie en tant que "non parallélisme", et le point d'intersection n'apparaît pas).

Exercice 2:

Le plan H est horizontal, le plan V est vertical. Les points A et B se projettent verticalement sur H en a et b respectivement (voir dessin 14.8). Tracez la droite (AB).

Cet exercice est typique de ce que nous souhaitons que les élèves

sachent faire: il s'agit encore une fois, si l'on se fie à la lettre de l'énoncé, d'un pur exercice de dessin. Le véritable problème n'apparaît que lorsque l'on entreprend de réaliser effectivement le tracé: une partie de la droite (AB) est cachée par le (rectangle représentant le) plan V, et cette partie devra donc être représentée par un segment pointillé. La détermination de l'une des extrémités de ce segment est évidente, mais celle de l'autre l'est moins, car il s'agit d'utiliser le fait que le projeté vertical i du point d'intersection I de (AB) avec V est situé sur la droite d'intersection des plans H et V (dessin 14.9), c'est-à-dire de faire fonctionner un certain nombre de propriétés géométriques concernant les droites, les plans et le parallélisme. Ainsi le "simple" problème de tracé se mue-t-il en un authentique problème de géométrie de l'espace...

Nous ne détaillerons pas les autres exercices de cette série, nous contentant d'en donner les énoncés dans l'Annexe 14. (N.B.: Pour chaque exercice, le dessin de gauche correspond à l'énoncé du problème de ponctuation posé, et celui de droite indique une solution de ce problème). Nous ferons cependant une exception pour l'exercice suivant, montrant la portée que peuvent finalement avoir ces petits "amusements graphiques":
Enoncé: Les plans P, P' et P'' sont parallèles. D et D' sont des droites. Sont-elles sécantes? Prolongez le dessin de la droite D' vers le bas de la feuille (dessin 14.10).

Le lecteur averti aura reconnu dans cette description le dessin associé classiquement au "théorème de Thalès dans l'espace". La simple observation du dessin donné permet de dire que les droites D et D' ne sont pas sécantes: si elles l'étaient, elles seraient coplanaires, détermineraient un plan Q qui couperait P et P' selon deux droites parallèles (voir l'exercice 4 de l'Annexe 14), ce qui n'est manifestement pas le cas (on apprécie ici la conservation du parallélisme par le procédé de représentation). Justement, les

exercices 4 et 5, destinés à "préparer" celui-ci, et qui eux font intervenir des droites coplanaires, peuvent faire penser à utiliser une droite qui soit sécante à l'une des droites D ou D', et parallèle à l'autre (et c'est effectivement ce qui s'est produit en classe). D'où la solution (dessin 14.11). Ainsi, lorsqu'on aura réalisé un dessin correct, on aura pratiquement, de surcroît, démontré le théorème. Il ne restera plus qu'à mettre la démonstration en forme...

4- UN CONTRÔLE...DE DESSIN :

Afin de pouvoir évaluer l'impact de notre introduction à la géométrie de l'espace et aux modes de représentation associés, nous avons soumis nos deux classes, la Seconde 3 (34 élèves présents) et la Première S1 (33 élèves présents), à un ensemble de quatre courts exercices (les mêmes pour les deux classes), consistant en tracés à effectuer sur des dessins représentant des figures spatiales, tracés mettant en oeuvre diverses "règles" de géométrie vues précédemment. Bien entendu, les dessins étaient accompagnés de leur -nécessaire- légende, destinée à lever les ambiguïtés inhérentes aux représentations utilisées (voir feuille d'exercices en Annexe 15).

Les deux premiers exercices reposaient sur la notion de projection orthogonale sur un plan (ce plan étant, en l'occurrence, supposé horizontal, afin de faciliter la représentation mentale de la situation spatiale); ils demandaient le dessin de l'intersection de droites ou de plans avec le plan de projection. Les deux derniers exercices, eux, demandaient la détermination des intersections d'un plan, défini par trois points, avec d'autres.

La passation a duré environ 50 minutes dans chaque classe, et nous avons obtenu les résultats suivants:

Exercice 1 :

Propriétés géométriques de la projection mises en oeuvre:

- parallélisme d'une droite parallèle à un plan et de sa projetée sur ce plan;
- obtention du point d'intersection d'une droite avec un plan comme intersection de la droite avec sa projetée sur ce plan.

En Seconde comme en Première, la quasi totalité des élèves ont résolu entièrement, et de manière correcte, le problème posé (29 sur 33 en Première, et 31 sur 34 en Seconde). Nous ne nous appesantirons donc pas davantage sur cet exercice.

Exercice 2 :

La réussite à la première question a été bonne dans les deux classes: 24 élèves sur 34 en Seconde, et 28 sur 33 en Première; les propriétés géométriques à mettre en oeuvre dans cette question étaient d'ailleurs les mêmes que pour l'exercice précédent. L'erreur de loin la plus fréquente (12 élèves) a consisté à tracer le projeté vertical de (AB) sur H parallèle aux "bords horizontaux" de la représentation de ce plan. Ceci peut s'expliquer par le fait que ces élèves, ayant une idée approximative (et purement visuelle) de l'endroit où doit se trouver le dessin du point I, et ne trouvant pas de solution géométrique, "inventent" un procédé, inexact certes, mais qui leur permet néanmoins de donner une position assez vraisemblable pour le dessin du point demandé. Dans le même ordre d'idées, une élève a d'ailleurs placé I ...sur l'une des diagonales du parallélogramme représentant le plan H. Le dessin 14.12 indique les trois positions du dessin de I signalées ci-dessus:

- la position correcte I, sur la droite projetée (ab) de la droite (AB);
- la position erronée I', sur la parallèle en a aux bords horizontaux;
- la position erronée I", sur la diagonale du parallélogramme.

Les positions I' et I" apparaissent bien comme des "approximations" de I.

Pour ce qui est de la seconde question, elle a apparemment été moins bien réussie en Seconde (11 élèves seulement) qu'en Première (21 élèves). Mais ceci doit être tempéré par le fait que 12 autres élèves de Seconde (soit 23 au total) ont explicitement dessiné le point d'intersection de (BC) avec le plan H, sans avoir ensuite tracé la droite demandée. Avoir deux points de l'intersection des deux plans ne leur a apparemment pas permis de tracer la droite d'intersection, peut-être faute d'une vue suffisamment synthétique de la situation. Tous, en effet, savaient que l'intersection de deux plans non parallèles était une droite, mais ils n'ont peut-être pas vu que le point qu'ils avaient placé leur donnait la clé du problème...

Notons également que les solutions trouvées par les élèves à cette seconde question sont au nombre de deux :

- utilisation de l'intersection de (BC) avec H;
- utilisation de l'intersection de (AC) avec H.

En Première, 12 élèves ont utilisé la première solution et 9 la seconde; en Seconde, 10 élèves ont utilisé la première, et un seul la seconde. La différence des résultats observés dans les deux classes peut donc aussi être attribuée -tout au moins en partie, et autant qu'on en puisse juger sur ce faible échantillon- au fait qu'un certain nombre d'élèves de Première ont pensé à réutiliser pour la droite (AC) le même procédé que pour la droite (AB), montrant ainsi une capacité de réinvestissement du principe utilisé dans la première question (même si, en l'occurrence, cette solution n'était pas la plus simple).

Exercice 3 :

Nous ne citerons que pour mémoire l'intersection du plan (ABC) avec Q2, puisque les points A et B étaient dans ce dernier plan et que tous les élèves ont, bien sûr, tracé (AB), ou tout au moins [AB].

a) Intersection avec le plan Q1 :

En Première, 21 élèves l'ont convenablement placée, contre 12 seulement en Seconde. Notons que nous avons ici trouvé essentiellement des non-réponses, ce qui montre que les élèves n'ont su que faire. La solution, rappelons-le, consiste à utiliser le point d'intersection de (AB) avec Δ ; ce point n'apparaît donc qu'après que l'on se soit intéressé à l'intersection de (ABC) avec Q2, et il est possible que les élèves, ayant d'abord cherché l'intersection de (ABC) avec Q1 (respectant en cela l'ordre dans lequel étaient nommés les plans dans l'énoncé), et n'ayant pas réussi -et pour cause- à la déterminer, se soient ensuite détournés de cette question. A moins qu'ils n'aient pas eu le temps d'y revenir. Il faut donc peut-être également voir dans la plus grande complexité de la tâche la raison de la moindre réussite des élèves, surtout en Seconde.

b) Intersection avec le plan P :

22 élèves l'ont correctement placée en Première, contre 10 en Seconde. Tous ces élèves avaient déjà convenablement tracé l'intersection de (ABC) avec Q1, et ils n'ont plus eu -en principe- qu'à utiliser le point d'intersection, avec P, de cette intersection. C'est ce qui s'est effectivement produit dans la plupart des cas, excepté toutefois pour trois élèves de Première, qui ont utilisé l'intersection de (AC) avec P, en projetant A et C sur P parallèlement à Δ , par analogie avec les deux premiers exercices.

Nous avons également eu quelques réponses partiellement exactes, c'est-à-dire dans lesquelles l'un seulement des deux points déterminant la droite d'intersection était convenablement placé: 3 cas en Seconde et 5 en Première.

Exercice 4 :

Nous distinguerons deux stades dans la réponse demandée:

- détermination de l'intersection avec la face "supérieure" du cube;

- détermination de l'intersection avec les faces "postérieure" et "droite".

Le premier stade a été franchi par la quasi-totalité des élèves (33 en Première et 30 en Seconde). En ce qui concerne le second stade, nous avons observé une déperdition, qui semble (peut-être) plus importante en Seconde qu'en Première : 25 élèves ont complètement résolu le problème en Première, contre 19 en Seconde. Cette déperdition est due à des erreurs dans les tracés (et non plus à des non réponses), erreurs qui sont essentiellement les suivantes :

- tracé approximatif, n'utilisant manifestement pas le parallélisme (5 élèves, dont 4 en Seconde); on en voit la trace dans les "repentirs" que présentent certains de ces dessins.

- "court-circuitage" de l'intersection avec l'arête [CC'] : le tracé joint directement l'intersection du plan (MNP) avec l'arête [BC] au point N (voir dessin 14.13). Il n'est pas impossible que, malgré les exercices de même type faits auparavant en classe, ces élèves n'aient pas imaginé que l'intersection du plan avec le cube puisse être pentagonale, et que, une fois déterminée l'intersection avec la face supérieure, ils aient cru leur tâche achevée.

N.B.: Tous les élèves qui ont résolu cette question -sauf un- ont utilisé le fait que, lorsqu'un plan coupe deux plans parallèles, les droites d'intersection sont parallèles. Le dernier -en Première- s'est servi du point d'intersection du plan (MNP) avec l'arête (CD), solution moins immédiate (car ne se limitant pas au cube physique), mais qui donne un résultat graphiquement plus précis, le parallélisme des droites ayant souvent été réalisé à l'oeil.

Ainsi, cette série d'exercices nous aura permis de constater que les principes fondamentaux et les conventions usuelles de la représentation en

perspective parallèle (conservation de l'alignement et du parallélisme, ponctuation...) étaient bien compris et correctement utilisés, et qu'il en était de même pour les règles d'incidence, tout au moins en ce qui concerne les cas simples (Exercices 1, 2 (1°) et 4 (début)). Cependant, lorsque la tâche demande une analyse plus poussée de la situation spatiale, comme par exemple la détermination d'éléments de la figure n'apparaissant pas directement dans les données (Exercices 2 (2°), 3 et 4 (fin)), le taux de réussite, comme on pouvait raisonnablement s'y attendre, est moins élevé: les élèves sont encore jeunes dans la pratique de la géométrie de l'espace, et leur expérience dans la résolution de problèmes spatiaux très légère. Quoiqu'il en soit, les résultats obtenus, en Seconde comme en Première, nous apparaissent comme encourageants, et nous pourrions -après quelques petites mises au point (voir ci-après)- poursuivre notre étude de l'espace sans grandes craintes au niveau des représentations et des principales règles d'incidence.

5- SECTIONS DE CUBE :

Pour renforcer ce savoir encore "jeune", nous avons décidé de systématiser quelque peu le quatrième -et dernier- des exercices précédents, en entreprenant une étude du -désormais classique- problème de la section d'un cube par des plans parallèles (voir BOUDAREL et GOETGHELUCK 1983). Et, ici encore, nous avons centré l'activité sur la réalisation de dessins corrects (à l'échelle).

Le cube-squelette est posé sur le bureau, à la vue de tous, et ses sommets sont nommés individuellement, de façon que chacun puisse les repérer (A, B, C, D pour la face inférieure, A', B', C', D' pour la face supérieure; voir dessin 14.14A). Nous matérialisons alors par deux épingles les points M

et N du cube définis comme suit:

- M est le milieu de $[AB]$;
- N est situé sur $[AD]$, au tiers à partir de D.

Le problème posé est de représenter (individuellement) la figure correspondante, en perspective cavalière (en Seconde, nous demandons de plus un patron du cube tronqué, nécessitant un dessin en vraie grandeur du triangle MNA').

Le dessin est réalisé sans problème, y compris celui des points M et N: tout le monde transfère sur le dessin les rapports de distances définissant ces deux points (dessin 14.14B). Le problème de la légitimité de ce transfert n'apparaissant pas spontanément, nous le soulevons: est-il si évident que les rapports soient conservés par le dessin? (Nous rappelons que nous avons vu précédemment que l'ombre au flambeau ne conservait même pas le milieu). On nous rétorque:

- que l'ombre au soleil, elle, conserve le milieu (en rappelant le dessin 13.15);

- puis, que ce même dessin, adapté légèrement, peut servir à démontrer que l'ombre au soleil conserve "n'importe quel rapport" (dessin 14.15).

Nous sommes donc en mesure d'ajouter cette propriété (importante) de l'ombre au soleil (donc de la perspective parallèle) à celles que nous connaissions déjà.

On peut tirer une double conclusion de cette expérience:

1- le transfert de propriétés (de l'objet au dessin) est un phénomène réel et tout à fait "naturel" (en ce sens qu'il s'opère sans même que l'on en soit conscient);

2- ce transfert doit être géré, pour éviter les généralisations abusives (transfert d'égalités d'angles, de longueurs dans des directions différentes...).

Nous distribuons ensuite la feuille qui figure en Annexe 16, et qui comporte six fois un même dessin: celui du cube (ici supposé plein et "semi-transparent"), "amputé" du tétraèdre $AA'MN$. Le problème est maintenant de dessiner successivement (en changeant de dessin à chaque fois), l'intersection du cube avec un plan parallèle au plan MNA' , et plus précisément:

- 1- passant par le milieu I de $[AA']$ (plan P1);
- 2- passant par le point D (plan P2);
- 3- passant par le point B (plan P3);
- 4- passant par le point D' (plan P4);
- 5- passant par le point B' (plan P5).

(N.B.: le sixième et dernier dessin sera utilisé plus tard.)

Intersection avec P1:

Il faut ici "reconstituer" le cube dans son intégralité, avec le sommet A. Le dessin ne pose pas de problème particulier: les élèves savent que deux plans parallèles en coupent un troisième selon deux droites parallèles.

Intersection avec P2:

Ici, les élèves remarquent (nous attirons d'ailleurs leur attention sur ce point) que les dessins qu'ils obtiennent sont parfois légèrement différents les uns des autres; ceci est attribué à l'imprécision du tracé à main levée des parallèles. La question se pose alors d'un tracé "juste"; diverses méthodes sont proposées. En particulier:

1- le tracé des parallèles aux instruments.

2- le "contrôle" de la construction; la demande de description de la méthode d'obtention de l'intersection a en effet fait apparaître des différences selon les élèves (relatives aux parallèles qui ont été tracées); ceci montre que l'on a en fait "trop de renseignements", et que les

informations excédentaires peuvent être utilisées comme moyen de vérification. Ainsi par exemple, si l'on a:

a) tracé les intersections (DP) et (DQ) de P2 avec les plans ABCD et ADD'A', parallèles respectivement à (DM) et (DN) (dessin 14.16A);

b) tracé l'intersection (PR) avec la face ABB'A', parallèle à (MA') (dessin 14.16B).

Si le dessin est correct, la droite (QR) doit être parallèle à la droite (DP), car ce sont les intersections de P2 avec deux faces parallèles du cube.

3- la détermination par le calcul de la position des points P, Q, R. Ceci est fait grâce à des dessins à l'échelle des trois faces concernées, et à l'utilisation des propriétés de l'homothétie (ou du théorème de Thalès) (dessin 14.17A, B, C). Ces dessins font intervenir un point X et un point Y, extérieurs au cube. Quelqu'un fait remarquer que ces deux points sont en fait confondus: en effet, ils occupent la même position relativement aux points A et A'. Ce point X n'est autre, en réalité, que l'intersection des plans P2, ABB'A' et ADD'A'; et il peut, lui aussi, servir à la construction de l'intersection: puisque les droites (AA'), (DX) et (PX) sont concourantes, on peut construire l'une quelconque d'entre elles à partir du point d'intersection des deux autres.

Intersections avec P3, P4, P5:

Ces différents cas se traitent maintenant sans problème, en utilisant les diverses méthodes qui viennent d'être vues. En Première, les élèves utilisent davantage les points d'intersection du plan sécant avec les arêtes du cube (tels que X), tandis qu'en Seconde on a davantage recours au parallélisme.

Notons également que nous avons, tout au long de cette séquence, utilisé le rétro-projecteur, qui nous a semblé un auxiliaire intéressant pour

disposer au tableau d'un dessin "tout prêt", identique à celui dont disposent les élèves sur leur feuille photocopiee, ainsi que pour montrer l'évolution des intersections selon les diverses positions du plan sécant. On a pu ainsi voir que l'intersection peut être un triangle, un quadrilatère (trapèze) ou un pentagone. Nous demandons, pour le cours suivant, de chercher si l'on peut obtenir un hexagone (toujours avec un plan parallèle à MNA') et, le cas échéant, de représenter une telle intersection sur le dessin restant.

Nous arrêterons ici cette "chronique commentée", qui est, pensons-nous, suffisante pour montrer les principes qui nous ont guidés dans la mise en oeuvre de cette introduction à la géométrie de l'espace, et en particulier la motivation que constitue -surtout chez les élèves plus jeunes- le dessin correct, qui amène, d'une part, à l'utilisation de vues ou de sections, et d'autre part à l'utilisation des règles d'incidence, et qui de plus entraîne au contrôle permanent. Bien entendu, notre travail en géométrie de l'espace ne s'est pas arrêté là, et nous avons encore plus d'une fois mis à contribution notre matériel pour parler de nouvelles notions (par exemple l'orthogonalité). Il y a certes encore beaucoup à faire dans cette direction, et tous les problèmes sont loin d'être réglés, mais c'est finalement très stimulant.

6- COMMENT LES ÉLÈVES ONT-ILS REÇU CET ENSEIGNEMENT ?

Nous avons voulu avoir une idée, à la fin de l'année scolaire 1987-88, de la façon dont les élèves avaient ressenti notre enseignement de la géométrie de l'espace. Rappelons ici que nous n'avons pas du tout présenté cet enseignement comme étant marginal ou expérimental: il s'est d'abord agi d'étudier certaines propriétés de l'ombre, puis certaines situations

spatiales, ce qui nous a amené ensuite au cours proprement dit, tout à fait "orthodoxe" dans ses résultats, sinon dans ses méthodes. C'est pourquoi, vers la mi-juin, nous avons posé à nos élèves le questionnaire suivant, destiné à évaluer, dans une certaine mesure, comment ce sujet avait été ressenti, comparativement aux autres "parties" du programme (N.B.: le mot "partie" est ici à prendre au sens ensembliste, c'est-à-dire que les différentes parties ne sont pas nécessairement disjointes). En voici l'énoncé:

"Indiquez, dans l'ordre de vos préférences, les deux parties du cours de mathématiques de cette année qui vous ont semblé:

- A- les plus intéressantes: _ _
- B- les moins intéressantes: _ _
- C- les plus faciles: _ _
- D- les plus difficiles: _ _"

Les principales parties du cours étaient ainsi répertoriées et codées sur la feuille:

- "1- Analyse (1ère). Equations-Inéquations (2de)
- 2- Etudes de fonctions
- 3- Géométrie plane
- 4- Géométrie de l'espace
- 5- Trigonométrie
- 6- Autre (précisez)."

Nous avons soumis à ce petit questionnaire nos propres élèves, c'est-à-dire ceux de la Seconde 3 et ceux de la Première S1. Les résultats obtenus sont rassemblés dans les tableaux ci-dessous, où chaque classe est traitée séparément.

(N.B.: en fait, nous n'avons pas ici tenu compte de l'ordre des réponses fournies par les élèves. Nous avons cependant, à titre expérimental, fait un autre décompte où la première partie nommée était créditée de deux points,

alors que la seconde n'en recevait qu'un; les résultats n'en ont pas été sensiblement modifiés.)

Première S1 (30 élèves présents):

Question \ Partie du cours	1	2	3	4	5	6	Total
A	18	26		11	6		61
B	7		23	15	6		51
C	21	18	5	7	7		58
D	4	2	18	17	15		56

TABLEAU 58

(N.B.: Pour certaines questions (en particulier la question A), certains élèves ont donné plus de deux réponses; pour d'autres, certains n'en ont donné qu'une seule; ceci explique les différences observables dans les totaux, aussi bien en Seconde qu'en Première.)

Seconde 3 (27 élèves présents):

Question \ Partie du cours	1	2	3	4	5	6	Total
A	10	15	4	18	13		60
B	7	9	22	7	5	1	51
C	23	3	1	1	23		51
D	3	12	15	19	3		52

TABLEAU 59

Observons tout d'abord les résultats de Première: les parties jugées les plus intéressantes sont celles qui relèvent de l'Analyse; en tête

viennent les études de fonctions, et ce n'est pas une surprise: elles ont toujours la faveur des élèves en Première, car c'est à ce niveau que l'on commence à dessiner des courbes au tracé plus "intéressant" (c'est-à-dire qui ne soient pas uniquement des droites, des paraboles ou des hyperboles), et il y a, à chaque fois, un effet de surprise. Après l'Analyse vient ...la géométrie de l'espace, tandis que la géométrie plane (transformations essentiellement) n'apparaît pas, au contraire de la question suivante (parties les moins intéressantes) où elle décroche la palme. Apparemment, l'espace intéresse davantage que le plan; est-ce dû à la nouveauté du sujet, à la "réalité" des problèmes spatiaux, ou à une autre cause? Il serait prématuré de conclure.

Pour ce qui est de la difficulté, l'Analyse est perçue comme plus facile par les élèves (d'où la plus intéressante?), tandis que la Géométrie (aussi bien plane que spatiale) semble plus ardue (ainsi d'ailleurs que la Trigonométrie). En ce qui concerne notre sujet, on peut donc dire que la géométrie de l'espace, même si elle apparaît comme un sujet difficile, intéresse malgré tout raisonnablement nos élèves de Première S.

En Seconde, les résultats sont quelque peu différents: du point de vue de l'intérêt, l'Analyse reste dans une honnête moyenne, tandis que les opinions sont nettement plus tranchées en ce qui concerne la Géométrie: l'espace plaît, plus que le reste, et le plan déplaît. Ce rejet de la géométrie du plan ne peut pas être dû à la seule difficulté (l'espace est ressenti comme aussi difficile), et il serait intéressant de tenter d'approfondir la question (nous y songeons). En tout cas, s'il était dû au sujet, l'espace serait un (bon) moyen détourné de faire faire de la géométrie plane (nous avons vu combien celle-ci pouvait être réinvestie dans les problèmes spatiaux). L'attrait de la géométrie de l'espace est sans doute, pour une part, celui de la nouveauté: tant mieux; le premier contact avec un

sujet nouveau est très important.

En résumé, cette petite esquisse de bilan, toute sommaire et limitée qu'elle soit, nous paraît encourageante, et tend elle aussi à prouver que l'on a intérêt à commencer l'étude de l'espace suffisamment tôt, en la fondant sur des problèmes véritables ("réalité" et non-évidence des problèmes, possibilité de faire intervenir les cadres géométrique, graphique, numérique, etc.).

CONCLUSION

"For, when anybody comes to a conclusion it is as if they had tossed the ball over the net and must wait for the unseen antagonist to return it to them."

Virginia WOODLF

Au terme de ce travail, nous pensons être en mesure de fournir des réponses -ou des éléments de réponse- aux questions que nous nous posions en l'entreprenant, dans les trois directions que nous évoquions dans l'introduction.

Pour ce qui est des représentations, notre étude des manuels de lycée, pour sommaire qu'elle ait été, a confirmé nos impressions a priori; une étude plus exhaustive pourrait être entreprise, afin de préciser certains points, mais il apparaît bien en effet qu'il existe, depuis la fin du 19^e siècle au moins, une forte "tradition" dans les représentations planes des figures de géométrie de l'espace, à tel point que certaines ont fini par devenir des stéréotypes, et que les principes mêmes de représentation qui les sous-tendent ont été évacués et ne sont même plus évoqués. On assiste en conséquence, dans l'enseignement traditionnel, à la reproduction "par inertie" de ces stéréotypes, sans que la question soit posée de leur légitimité et de leur adéquation.

D'autre part, l'étude que nous avons faite de l'encodage et du décodage de situations spatiales nous a permis de mettre en évidence quelques principes généraux que les élèves mettent -plus ou moins inconsciemment- en oeuvre: plutôt que de se situer dans un interstade entre le "réalisme intellectuel" et le "réalisme visuel", ils essaient, à l'encodage, de maximiser la conservation, sur le dessin, de l'information concernant l'objet spatial, tout en en préservant l'aspect visuel. C'est-à-dire que le problème se pose plutôt en termes d'adéquation que de hiérarchie. La contrepartie de

cet état de fait étant, lors du décodage d'un dessin, la tendance à transférer à l'objet spatial certaines propriétés géométriques de la représentation.

(N.B.: Nos études statistiques ont porté sur des populations d'élèves de l'ordre de 150 individus, ce qui semble suffisant étant donné la grande constance des résultats entre les différentes sous-populations, laissant à penser que l'accroissement de taille de l'échantillon n'apporterait pas de modifications importantes aux résultats que nous avons obtenus.)

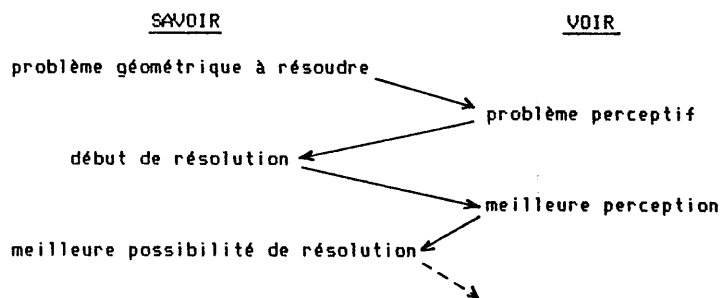
On pourra nous objecter que commencer l'étude des représentations planes de l'espace en Seconde, voire en Première, est bien tardif. Nous en sommes nous-même tout à fait convaincu, mais nous ne pensons pas que notre travail ait pour autant été inutile:

- premièrement, parce que nos enquêtes ont permis de montrer les carences de l'enseignement qu'avaient reçu nos élèves au cours des années antérieures, et de constater un type de rapport aux représentations que l'on ne se serait pas attendu à trouver à cet âge et à ce niveau;

- ensuite, parce que si le transfert de propriété tient tant de place chez des lycéens scientifiques, on peut penser qu'il en tient autant, sinon plus, chez les élèves de collège. Il faudrait certes le confirmer par une recherche à ce niveau, et nous faisons plus qu'y songer, puisque nous sommes actuellement partie prenante dans un programme de recherche franco-japonais visant en particulier à préciser les paramètres de l'évolution, en fonction de l'âge (de 8 à 16 ans), de l'encodage et du décodage d'objets géométriques, ainsi que l'influence éventuelle de facteurs socio-culturels.

Si la perspective parallèle nous semble un mode de représentation bien adapté aux élèves avec lesquels nous avons travaillé, dans la résolution de problèmes spatiaux, c'est qu'elle conserve des propriétés importantes, tout en donnant des objets une image proche de l'image "photographique"; le "voir" est donc ainsi acceptable et facilite l'évocation de l'objet représenté, et le

"savoir", étant en partie préservé sur le dessin, permet le renforcement de cette image mentale, ainsi que l'utilisation du dessin pour l'établissement de conjectures, et la recherche de stratégies de résolution. Le rôle heuristique du dessin nous semble fondamental, en ce qu'il permet une relation de type dialectique entre voir et savoir, basée sur l'évidente influence de la perception sur la connaissance, ainsi que sur la rétroaction qu'exerce le savoir sur la perception; situation que l'on peut schématiser par le diagramme ci-dessous:



Mais ce n'est pas parce que le savoir est mieux préservé par la perspective parallèle que l'on peut pour autant s'en remettre au hasard et à l'implicite pour ce qui est de l'utilisation et de l'interprétation correctes du dessin, au contraire: le transfert des propriétés, dans un sens comme dans l'autre (objet → dessin ou dessin → objet), n'étant que partiel, il importe de savoir de façon précise quels sont les principes exacts qui le gouvernent. C'est pourquoi un apprentissage explicite est nécessaire, concernant, non seulement les principes, mais aussi les conventions utilisées et les limites; l'un de nos objectifs a été de fournir aux élèves les moyens de prendre conscience du fait que le dessin ne peut tout représenter et ne peut donc se substituer totalement à l'objet spatial, de faire la part des conventions et de la géométrie, de préciser ce qui est laissé au choix du

dessinateur, en bref d'apprendre à utiliser le dessin dans les meilleures conditions possibles, et non pas véhiculer des stéréotypes vidés de leur signification et sclérosants.

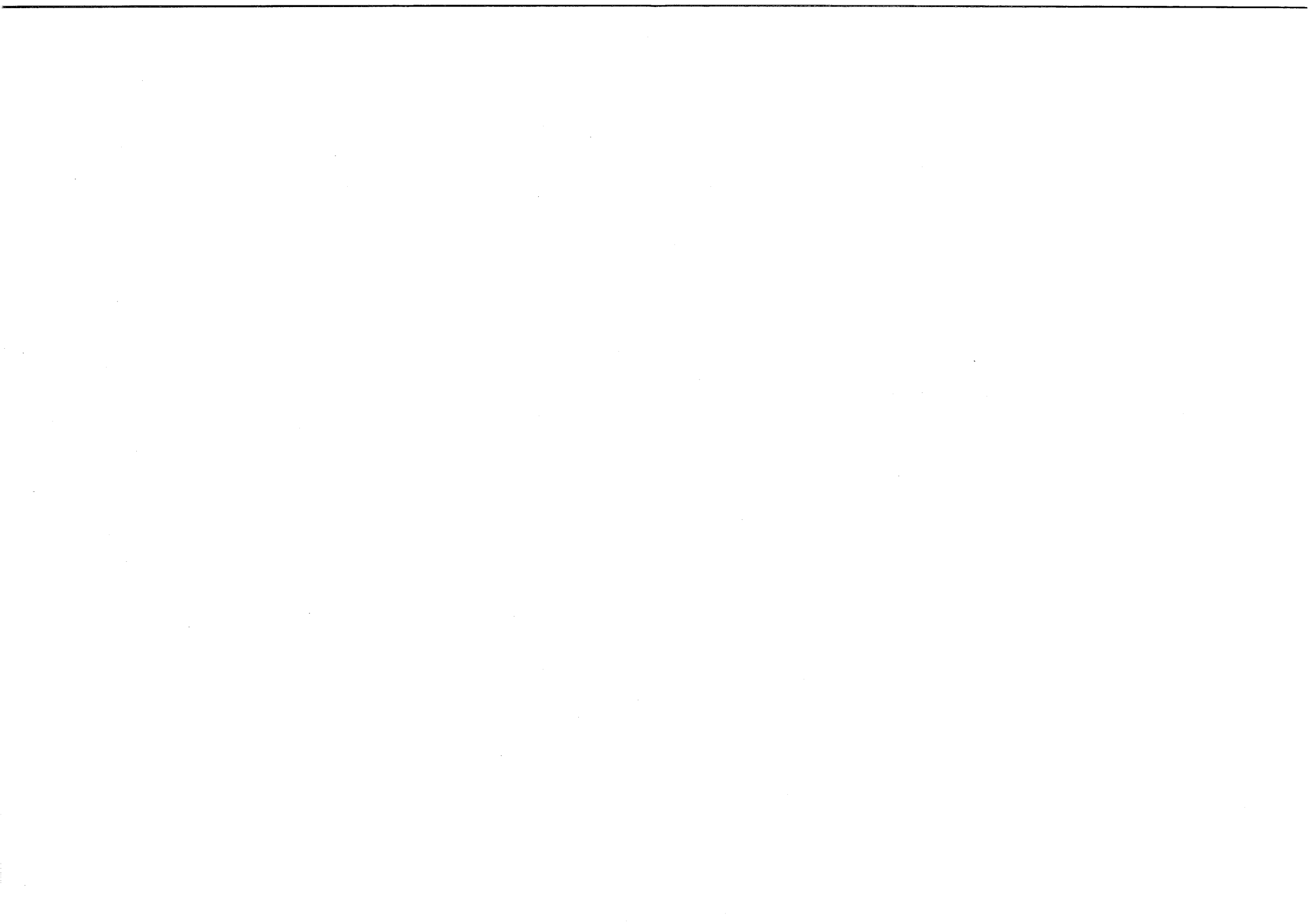
Nous ne voudrions cependant pas que l'on croie que nous préconisons un emploi exclusif de la perspective parallèle, ou pire de son cas particulier le plus connu qu'est la perspective cavalière. Remarquons d'abord que la perspective parallèle, que nous avons envisagée dans sa généralité, englobe aussi bien les axonométries que la cavalière et les "vues", et que nous avons aussi fait largement usage des sections. Et nous irons même plus loin en disant que notre approche préserve également l'avenir, puisque non seulement nous englobons tous les types de perspective parallèle, mais que de plus nous commençons par une étude de l'ombre au flambeau que nous relient explicitement à la perspective linéaire: l'accès à cet autre mode de représentation, ainsi qu'à la géométrie projective qui lui est associée, n'est donc pas exclu, au contraire.

Pour ce qui est de la formation et de la structuration des images mentales, les résultats que nous avons obtenus sont encourageants, tout au moins à court terme: l'impact de la fréquentation de matériel tridimensionnel est apparu important, et justifie l'investissement que celui-ci a nécessité (et qui est, répétons-le, finalement moindre qu'il n'y paraît à première vue). Le problème se pose de savoir si les effets perdurent à moyen terme, et il faudrait pouvoir suivre les élèves au-delà des quelques mois durant lesquels ils nous sont confiés, et élaborer un enseignement qui enrichisse progressivement leur "panoplie" d'images mentales géométriques, par la diversification des objets étudiés. Un apprentissage plus précoce et continu permettrait selon toute vraisemblance d'atteindre ces objectifs.

Quant à l'accès à la géométrie de l'espace et à ses règles, il a été réalisé (du moins l'avons-nous tenté) selon les principes précisés au début, en

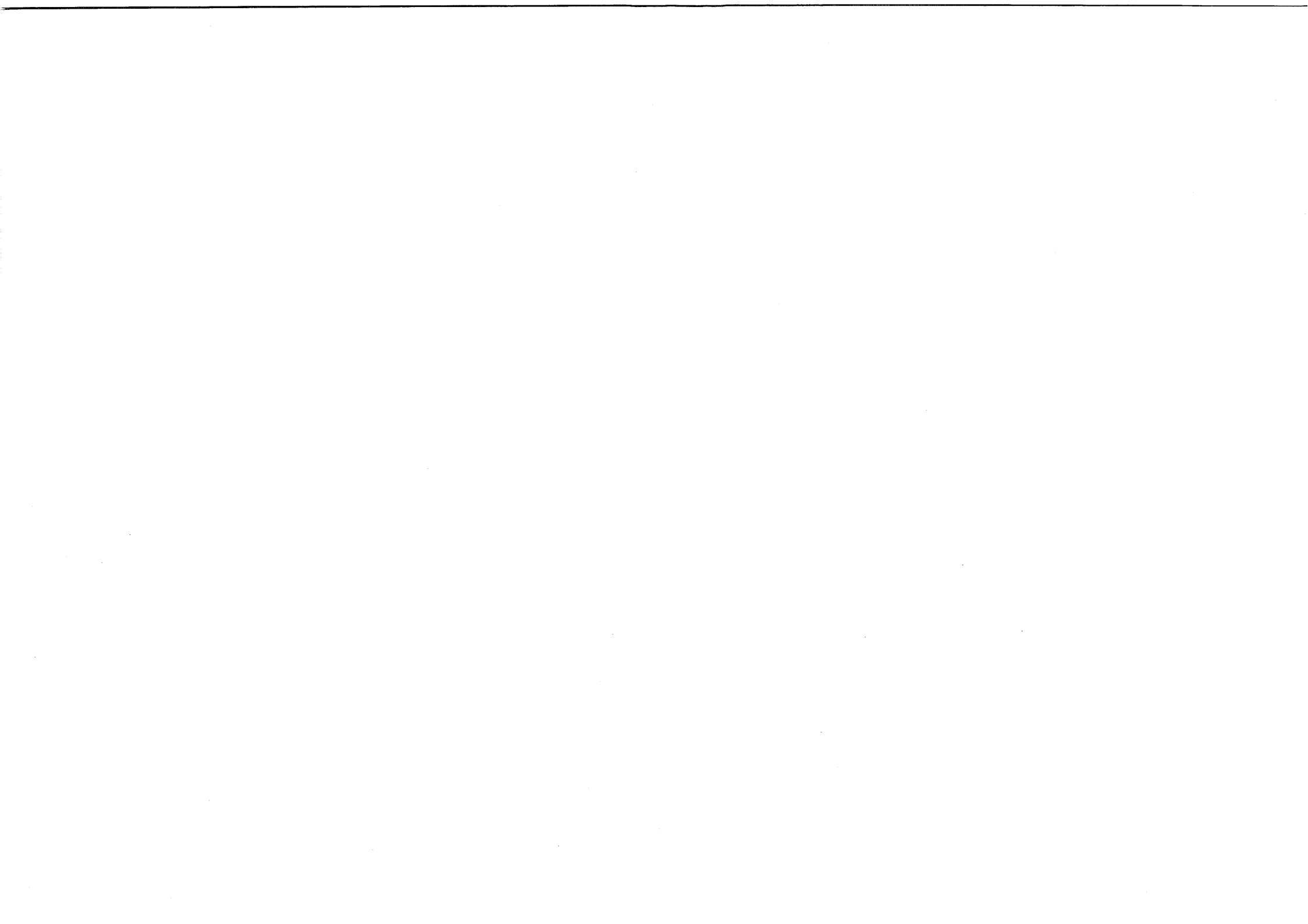
favorisant et en diversifiant les activités des élèves, en jouant dans les deux cadres plan/espace, et en individualisant nettement les périodes d'institutionnalisation. Dans cette direction également le bilan apparaît positif.

Nous ne prétendons pas que l'approche que nous avons utilisée, basée sur l'étude des ombres, soit la seule possible ou souhaitable. Nous la considérons simplement comme un essai d'enseignement de la géométrie de l'espace intégrant trois apprentissages, pour nous essentiels: espace, représentations, géométrie. Pour nos élèves, cet enseignement est venu très tard. Il n'a été en réalité qu'une tentative de remédiation à une situation de fait que nous estimons anormale. Les apprentissages visés ici pourraient se faire avec profit tout au long de la scolarité, et en particulier au collège. Il s'agirait alors d'imaginer et de mettre à l'épreuve des modalités de mise en oeuvre de ces apprentissages qui soient adaptés aux élèves plus jeunes. C'est pourquoi nous pensons qu'il serait fructueux que des recherches didactiques soient entreprises au niveau du premier cycle de l'enseignement secondaire. Nous commençons, nous l'avons dit, à travailler dans cette direction, et d'autres équipes (encore peu nombreuses malgré tout) s'intéressent également à cette question. Beaucoup reste encore à faire, mais le problème des représentations en géométrie de l'espace, jusqu'ici négligé, est maintenant posé et commence (c'est un signe) à faire son apparition dans les programmes officiels. Il faudra sans doute encore du temps pour que cette composante entre réellement dans les pratiques scolaires, mais nous avons des raisons d'espérer.



APPENDICES

(Les dessins relatifs aux Appendices se trouvent dans le second volume, à la suite des dessins relatifs au texte).



APPENDICE 1:

LES PROJECTIONS AXONOMETRIQUES.

A- PROJECTIONS AXONOMETRIQUES ORTHOGONALES:

1) Préliminaire: deux angles suffisent à déterminer la projection:

Soit $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ un repère orthonormal direct. On projette orthogonalement sur le plan $\langle O; \vec{i}, \vec{j} \rangle$ un "coin de cube" $\langle O; M, N, P \rangle$, c'est-à-dire un triplet $\langle [OM], [ON], [OP] \rangle$ dans lequel O, M, N, P sont les sommets d'un même cube de côté a. On peut supposer que M se projette sur la demi-droite $\langle O; \vec{i} \rangle$, au besoin en faisant tourner le repère autour de $\langle O; \vec{k} \rangle$. En posant $\widehat{(\vec{i}, \vec{OM})} = f$, on a $0 < f < \pi/2$.

Soient m, n, p les projetés respectifs de M, N, P sur $\langle O; \vec{i}, \vec{j} \rangle$ (dessin A.1). On pose $\widehat{(\vec{Om}, \vec{On})} = \hat{t}$, $\widehat{(\vec{On}, \vec{Op})} = \hat{t}'$, $\widehat{(\vec{On}, \vec{ON})} = \hat{p}$ et $\widehat{(\vec{Op}, \vec{OP})} = \hat{p}'$ (dessin A.2).

On peut supposer que \hat{p} et \hat{p}' sont compris entre 0 et $\pi/2$, au besoin en changeant de "coin de cube". On a alors:

$$\begin{aligned} x(M) &= a \cdot \cos \hat{f} & y(M) &= 0 & z(M) &= a \cdot \sin \hat{f} \\ x(N) &= a \cdot \cos \hat{p} \cdot \cos \hat{t} & y(N) &= a \cdot \cos \hat{p} \cdot \sin \hat{t} & z(N) &= a \cdot \sin \hat{p} \\ x(P) &= a \cdot \cos \hat{p}' \cdot \cos(\hat{t} + \hat{t}') & y(P) &= a \cdot \cos \hat{p}' \cdot \sin(\hat{t} + \hat{t}') & z(P) &= a \cdot \sin \hat{p}' \end{aligned}$$

(N.B.: nous supposerons que ni \hat{f} , ni \hat{p} , ni \hat{p}' ne sont droits. En effet, dire que l'un de ces angles est droit signifie que l'une des arêtes du trièdre $\langle O; M, N, P \rangle$ est portée par $\langle O; \vec{k} \rangle$. Dans ce cas, le projeté du cube est un carré; ce qui, d'un point de vue pratique (représenter un cube de façon "claire"), n'est guère intéressant.

D'autre part, nous supposerons également que ni \hat{t} , ni \hat{t}' , ni $\hat{t} + \hat{t}'$ ne sont droits. En effet, dire que l'un de ces angles est droit signifie que l'un des angles droits \widehat{MON} , \widehat{NOP} , \widehat{MOP} se projette orthogonalement sur $\langle O; \vec{i}, \vec{j} \rangle$ selon un angle droit, ce qui implique que l'une des trois arêtes $\langle OM \rangle$, $\langle ON \rangle$ ou

$\langle OP \rangle$ est dans ce plan. Il y a alors, non seulement un, mais deux des angles droits ci-dessus qui se projettent suivant un angle droit. Par conséquent, deux des trois points m, n et p sont alignés avec l'origine O, dans le plan $\langle O; \vec{i}, \vec{j} \rangle$. Le projeté du cube étant, ici également, très particulier, ce cas n'offre pas non plus un grand intérêt pratique.)

Nous avons de plus des conditions liant les différents angles (par suite de l'orthogonalité de $\langle OM \rangle$, $\langle ON \rangle$, $\langle OP \rangle$ deux à deux):

$$\cos \hat{t} + \tan \hat{f} \cdot \tan \hat{p} = 0 \quad (1)$$

$$\cos(\hat{t} + \hat{t}') + \tan \hat{f} \cdot \tan \hat{p}' = 0 \quad (2)$$

$$\cos \hat{t}' + \tan \hat{p} \cdot \tan \hat{p}' = 0 \quad (3)$$

(Remarque: par construction, $\tan \hat{f}$, $\tan \hat{p}$ et $\tan \hat{p}'$ sont positifs; donc $\cos \hat{t}$, $\cos \hat{t}'$ et $\cos(\hat{t} + \hat{t}')$ sont négatifs.)

Théorème: la donnée de \hat{t} et \hat{t}' suffit à déterminer les autres angles.

En effet, on déduit de (1), (2) et (3):

$$\tan \hat{p} = - \cos \hat{t} \cdot \cos \hat{t}' / \cos(\hat{t} + \hat{t}') \quad (4)$$

$$\tan \hat{f} = - \cos \hat{t} / \tan \hat{p} \quad (5)$$

$$\tan \hat{p}' = - \cos \hat{t}' / \tan \hat{p} \quad (6)$$

Rapports de réduction:

selon $\langle Om \rangle$, c'est $r = \cos \hat{f}$

selon $\langle On \rangle$, c'est $r' = \cos \hat{p}$

selon $\langle Op \rangle$, c'est $r'' = \cos \hat{p}'$.

Ces rapports peuvent s'exprimer également en fonction de \hat{t} et \hat{t}' . Le calcul donne (en posant $K = -1/2 \sin \hat{t} \cdot \sin \hat{t}' \cdot \sin(\hat{t} + \hat{t}')$):

$$r = K \cdot \sin 2\hat{t}'$$

$$r' = K \cdot \sin 2(\hat{t} + \hat{t}')$$

$$r'' = K \cdot \sin 2\hat{t}$$

Conséquence: l'image du cube étant donnée, on peut retrouver tous les éléments, et en particulier la longueur des arêtes de ce cube.

En effet, \hat{t} et \hat{t}' étant lus directement sur le dessin on en déduit \hat{f} , \hat{p} et \hat{p}' (voir ci-dessus), ainsi que les rapports de réduction. Puis, d'après les longueurs des images des arêtes sur le dessin, la longueur de celles-ci (ce qui permet d'ailleurs de contrôler si le dessin est correct, ou si l'axonométrie est bien orthogonale).

2) Les axonométries orthogonales usuelles:

- Isométrique (AFNOR 1953):

On a ici $\hat{t} = \hat{t}' = 120^\circ$. On en déduit $\tan \hat{f} = \tan \hat{p} = \tan \hat{p}' = 1/\sqrt{2}$, et le rapport de réduction, identique dans les trois directions principales: $r = r' = r'' = \sqrt{2/3}$.

Le dessin A.3 représente, dans cette axonométrie, un cube de 3cm de côté.

- Dimétrique usuelle (AFNOR):

On a ici $\hat{t} = \hat{t}' = 131^\circ 30'$. On en déduit $\tan \hat{p} = 1,8981$, puis $\tan \hat{f} = 0,3491$ (égal, bien sûr, à $\tan \hat{p}'$). Pour les rapports de réduction, on a $r = r'' = 0,9441$, et $r' = 0,4661$ (Remarque: r' est voisin de $r/2$).

Le dessin A.4 représente, dans cette axonométrie, un cube de 3cm de côté.

- Dimétrique redressée (AFNOR):

On a ici $\hat{t} = \hat{t}' = 105^\circ$. On en déduit $\tan \hat{p} = 0,2781$, puis $\tan \hat{f} = \tan \hat{p}' = 0,9306$. Rapports de réduction: $r = r'' = 0,7321$, et $r' = 0,9634$.

Le dessin A.5 représente, dans cette axonométrie, un cube de 3cm de côté.

(N.B.: le qualificatif "redressée" provient du fait que, par rapport à la précédente axonométrie, l'arête [ON] du cube est plus proche de l'horizontale: on a en effet $\hat{p} = 15^\circ 32'$, contre $62^\circ 13'$ dans le cas précédent.

- Trimétrique (AFNOR):

On a ici $\hat{t} = 105^\circ$ et $\hat{t}' = 120^\circ$. On en déduit $\tan \hat{p} = 0,4278$, puis $\tan \hat{f} = 0,6050$ et $\tan \hat{p}' = 1,1688$. Rapports de réduction: $r = 0,8556$,

$r' = 0,9194$ et $r'' = 0,6501$.

Le dessin A.6 représente, dans cette axonométrie, un cube de 3cm de côté.

B- PROJECTIONS AXONOMÉTRIQUES NON ORTHOGONALES :

Cette fois, la projection sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, se fait selon une direction quelconque (cependant non parallèle, bien sûr, à ce plan). D'après le théorème de POHLKE (AUDIBERT 1985A), tout quadruplet de points distincts du plan peut être considéré comme l'image d'un "coin de cube" dans une projection parallèle. En conséquence, les angles \widehat{mOn} et \widehat{nOp} peuvent être quelconques, ainsi que les rapports de réduction suivant les trois directions principales. D'autre part, d'après la remarque faite au début, une axonométrie dans laquelle un -et un seul- des trois angles \widehat{mOn} , \widehat{nOp} ou \widehat{mOp} est droit ne saurait être orthogonale (cette remarque est motivée par le fait que, assez fréquemment pour de telles axonométries (voir ci-après), on choisit deux des trois droites $\langle Om \rangle$, $\langle On \rangle$, $\langle Op \rangle$ perpendiculaires, avec le même rapport de réduction suivant leurs directions, ce qui fait que la face correspondante du cube est représentée par un carré (préservation du "savoir", mais n'anticipons pas).

1) Axonométries non orthogonales usuelles:

(N.B.: nous conservons les notations \hat{t} et \hat{t}' , pour désigner les angles \widehat{mOn} et \widehat{nOp} .)

- Perspective cavalière (AFNOR):

(N.B.: le cavalier est un petit bastion, situé assez loin en avant des fortifications principales, et surplombant celles-ci.)

On a ici $\hat{t} = 90^\circ$, $\hat{t}' = 135^\circ$, $r = r' = 1$, $r'' = 0,5$.

Le dessin A.7 représente, dans cette axonométrie, un cube de 3cm de côté.

(N.B.: il existe diverses variantes de cette perspective, obtenues en donnant

d'autres valeurs à r'' . Valeurs les plus courantes: $1/\sqrt{2}$, $3/4$, 1 .)

Perspective militaire:

On a ici $\hat{t} = 150^\circ$, $\hat{t}' = 120^\circ$, $r = r' = r'' = 1$.

Le dessin A.8 représente, dans cette axonométrie, un cube de 3cm de côté.

(N.B.: il existe, dans ce cas également, plusieurs variantes de cette perspective, obtenues en échangeant les valeurs de \hat{t} et de \hat{t}' , ou en donnant à r' la valeur 0,5.)

2) Autres types:

Ils sont très variés. Le tableau ci-dessous récapitule diverses axonométries non orthogonales relevées dans 10 ouvrages différents, publiés depuis 1964, avec les dénominations utilisées par les auteurs (d'après LUDI 1986):

Liste des ouvrages (désignés par leur numéro dans le tableau):

- 1 : ALLEN and OLIVER (1981): Architectural drawing, the art and the process. Ed. Whitney.
- 2 : BEGUIN (1978): Dictionnaire technique et critique du dessin. Ed. Oyez.
- 3 : BENEVOLO (1974): Corso di disegno. Ed. Laterza.
- 4 : CHING (1975): Architectural graphics. Ed. Architectural Press.
- 5 : COULIN (1968): Zeichenlehre für Architekten, Bauz. und Designer. Ed. Hoffmann.
- 6 : HEUSER (1976): Freihändig Zeichnen und Skizzieren. Ed. Bauverlag.
- 7 : LANDSCHEIDT und SCHLÜTER (1966): Bauzeichnungen. Ed. Bauverlag.
- 8 : RAYNAUD et RAYNAUD (1968): Dessin technique. Ed. Amphora.
- 9 : SCHAAMWACHTER (1964): Perspektive für Architekten. Ed. Hatje.
- 10 : THOMAE (1976): Perspektive und Axonometrie. Ed. Kohlhammer.

(\hat{t}, \hat{t}')	(r, r', r'')	Dénomination	N° d'ouvrage	
$(90^\circ, 135^\circ)$	$(1, 1, 1/2)$	p. cavalière	6. 7. 9. 10	type "cavalière"
		pr. cavalière	8	
		a. cavalière	3	
		de la face isométrie	5	
$(90^\circ, 135^\circ)$	$(1, 1, 1)$	p. cavalière	5	type "cavalière"
		a. cavalière	3	
		de la face	5	
		p. parallèle isométrie élévation oblique	5 4	
$(90^\circ, 135^\circ)$	$(1, 1, 3/4)$	p. cavalière élévation oblique	2 1	
$(90^\circ, 120^\circ)$	$(1, 1, 1)$	isométrie	5	
$(90^\circ, 120^\circ)$	$(1, 1, 1/2)$	isométrie	5	
$(150^\circ, 120^\circ)$	$(1, 1, 1)$	p. militaire	5. 10	type "militaire"
		isom. du plan	5. 6	
		axonométrie	5	
		plan oblique	4	
$(150^\circ, 120^\circ)$	$(1, 1/2, 1)$	p. militaire isom. du plan axonométrie	5 5 5	
$(120^\circ, 150^\circ)$	$(1, 1/2, 1)$	p. militaire	9	
$(120^\circ, 150^\circ)$	$(1, 3/4, 1)$	plan oblique	1	
$(97^\circ, 120^\circ)$	$(1, 1, 1/2)$	dimétrie pr. axonom.	7. 10 6	divers
$(96^\circ, 120^\circ)$	$(1, 1, 1/2)$	p. simulée	5	
$(135^\circ, 135^\circ)$	$(1, 1, 1)$	a. cavalière	3	
		du plan plan oblique	4	
$(97^\circ 20', 131^\circ 40')$	$(1, 1, 1/2)$	dimétrie	9	
	$(1, 1, 1/3)$			
	$(1, 1, 1/4)$			
$(97^\circ 20', 131^\circ 40')$	$(1, 2/3, 5/6)$ $(1, 1/2, 9/10)$	trimétrie	9	
$(116^\circ, 124^\circ)$	$(1, 1, 3/4)$	parallèle oblique	3	
$(103^\circ, 142^\circ)$	$(1, 1, 2/3)$	dimétrie	1	
$(105^\circ, 120^\circ)$	$(r, 1, r'')$ avec $r < 1$ et $r'' < 1$	p. trimétrique	2	

APPENDICE 2:

LES REPRÉSENTATIONS PLANES DE LA SPHÈRE: DESSINS OU SCHEMAS ?

Dans les dessins de géométrie de l'espace, la sphère est constamment représentée par un cercle; il en est de même en géographie, et plus généralement en sciences, chaque fois que l'occasion se présente. Or, dans une projection (parallèle ou centrale), une sphère a pour image une ellipse, qui n'est un cercle que lorsque la projection est orthogonale.

C'est pourquoi, si l'on désire représenter correctement une sphère en perspective oblique (c'est-à-dire en faire un dessin), il y a lieu de dessiner, non pas un cercle, mais une ellipse. Cependant une telle représentation n'est guère satisfaisante visuellement: l'ellipse dessinée évoque, dans un contexte spatial, non pas une sphère, mais un ellipsoïde. Quelle est la raison de cet état de fait? Elle tient simplement dans l'étroitesse de notre champ de vision distincte: lorsque nous regardons une sphère, nous la regardons toujours en face; car, si elle ne se trouve pas au voisinage immédiat de notre axe de vision, nous ne pouvons la percevoir distinctement, et par conséquent nous rendre compte précisément de sa forme, et nous bougeons les yeux -et éventuellement la tête- pour amener notre axe visuel à passer par elle; la sphère se présente donc toujours à notre vue comme un cercle. En effet, si notre champ visuel (yeux immobiles) est de l'ordre de 50°, nous ne voyons distinctement que dans un champ d'environ un degré et demi d'étendue. La raison (physiologique) en est la suivante: "au centre de la rétine (...), il y a une petite dépression appelée "fovea" ou "tache jaune". Elle ne contient que des cônes, en si grande concentration que c'est l'endroit où la vision est la plus précise en lumière intense, et l'homme l'utilise constamment pour regarder tout ce qui attire réellement son

attention. Cependant, la tache jaune est petite et a, par conséquent, un champ de vision limité, environ 25cm² à 2,50 mètres de distance. Pour compenser cette limitation, le globe oculaire bouge presque constamment, afin d'envoyer les images sur cette concentration de cônes" (MUELLER et RUDOLPH, 1969).

L'appareil photographique est, de ce point de vue, moins imparfait que notre oeil, puisque l'image est (à peu près) nette dans tout le champ de vision. Les déformations deviennent-elles, dans ce cas, très importantes? Considérons un objectif usuel d'appareil 24x36, dont la focale est de 50mm. Son champ de vision est analogue à celui de l'oeil humain, soit environ 50°. Prenons l'exemple d'une sphère de 20cm de rayon, vue à une distance de 2 mètres. Lorsqu'elle est dans l'axe de visée, l'objectif de l'appareil la "voit" sous un angle \hat{x} tel que $\sin(\hat{x}/2) = 20/200 = 0,1$ (d'où $\hat{x} \approx 11^{\circ}29'$) (dessin A.10). Donc, lorsqu'elle est à la limite du champ de l'objectif, l'angle que fait la droite qui joint cet objectif au centre de la sphère avec l'axe de visée est de l'ordre de 20° (c'est cette valeur que nous prendrons pour le calcul numérique). Si l'on effectue une projection ayant pour centre l'objectif sur un plan perpendiculaire en H à l'axe de visée, on obtiendra des images homothétiques de celles que donne l'appareil sur la pellicule. Le dessin A.11 représente une "vue de dessus" de la situation: C et C' sont les deux positions successives du centre de la sphère, les segments [AA'] et [BB'] sont les intersections des projetés de la sphère avec le plan (OCC').

Dans la position axiale, le cercle projeté de la sphère aura pour diamètre [AA']; dans la position excentrée, l'ellipse projetée aura pour grand axe [BB']. Calculons donc AA' et BB':

$$AA' = 2HA' = 2OH \cdot \tan \hat{x}/2 \approx 0,201 \cdot OH$$

$$BB' = HB' - HB = OH \cdot \tan(20^{\circ} + \hat{x}/2) - OH \cdot \tan(20^{\circ} - \hat{x}/2) \approx 0,228 \cdot OH$$

Il nous reste à évaluer la longueur du petit axe de l'ellipse projetée de la sphère, dans la position excentrée. Le centre de cette ellipse

est le point I, milieu de $[BB']$. Faisons un dessin dans le plan P défini par le petit axe $[DD']$ de l'ellipse et le point O (dessin A.12); si nous déterminons l'angle \widehat{DOI} ($= \hat{t}$), nous pourrions en déduire DD' ($= 2OH \cdot \tan \hat{t}$), à condition de connaître également OI.

a) calcul de OI:

On a $HI = (HB + HB')/2 = \frac{OH \cdot (\tan(20^\circ + \hat{x}/2) + \tan(20^\circ - \hat{x}/2))}{2}$, soit $HI \approx 0,368.OH$.

Or, $\tan \widehat{HOI} = HI/OH$, d'où \widehat{HOI} et $OI = OH/\cos \widehat{HOI}$. On trouve $OI \approx 1,066.OH$.

b) calcul de \hat{t} :

Calculons d'abord KP: on a $\widehat{C'OI} = \widehat{HOI} - \widehat{HOC'}$, et $C'K = OC' \cdot \sin \widehat{C'OI}$, $OK = OC' \cdot \cos \widehat{C'OI}$. D'où (Pythagore) $KP = \sqrt{(C'P)^2 - (C'K)^2} \approx 19,99 \text{ cm}$. (L'angle $\widehat{C'OI}$ étant petit, le cercle d'intersection de la sphère et du plan P est pratiquement un grand cercle de la sphère.)

On a alors $\sin \hat{t} = KQ/OK = KP/OK$, et enfin $DD' = 2OH \cdot \tan \hat{t}$. Le calcul donne $DD' \approx 0,214OH$ (N.B.: avec les dessins A.11 et A.12 à l'échelle, on pourrait obtenir BB' et DD' par mesure.)

L'ellipse image de la sphère sera donc inscrite:

- en position axiale, dans un carré;
- en position limite, dans un rectangle dont les longueurs des côtés sont proportionnelles (à très peu près) à 214 et 228. Comme on peut s'en rendre compte sur le dessin A.13, ce rectangle est très peu aplati; l'ellipse aura donc un aspect pratiquement circulaire. Ainsi donc, même aux limites du champ d'un objectif normal, l'aplatissement de l'image de la sphère reste tout à fait discret. Mais il n'en va pas de même pour les objectifs "grand angle":

"Les objets placés près des bords de l'image semblent déformés. En vérité, il ne s'agit pas d'une déformation de la perspective, mais d'une perspective

inhabituelle, due à ce que l'objectif embrasse un champ -90° , par exemple - bien supérieur à celui embrassé par nos yeux" (BOUILLLOT 1975, p.30).

Reprenons donc l'exemple précédent en remplaçant l'angle de 20° par un angle de 40° . On obtient cette fois $BB' \approx 0,345.OH$ et $DD' \approx 0,261.OH$; l'aspect du rectangle, comparé au carré initial, est celui du dessin A.14. L'ellipse sera donc assez nettement aplatie, et elle ne sera certainement plus acceptée comme l'image d'une sphère.

...Mais revenons à nos moutons. La représentation plane d'une sphère sous forme de cercle ne pouvant donc être, en projection parallèle, que le fait d'une projection orthogonale, il faut en conclure que:

- ou bien les représentations habituelles de sphères, en géométrie de l'espace, relèvent d'une projection différente de celle des autres représentations (perspective orthogonale et non oblique);
- ou bien ces représentations sont simplement des schémas, ne se rattachant à aucun système perspectif.

Notons que ni l'une ni l'autre de ces deux possibilités ne sont jamais explicitement indiquées dans les manuels. Prenons l'exemple de la "Géométrie dans l'espace", de G. LECOMTE (LECOMTE 1942); on y trouve une trentaine de dessins comportant des représentations de sphères. Dans une partie d'entre eux on ne peut lever l'ambiguïté signalée ci-dessus. Quant aux autres, ils relèvent du genre "schéma", et ne peuvent être considérés comme des dessins en perspective parallèle (même orthogonale). Le dessin A.15 est constitué de trois de ces représentations ambiguës, et le dessin A.16 de trois schémas. Dans ce dernier cas, l'incorrection du point de vue projectif provient du désaccord entre la projection orthogonale (imposée par la représentation de la sphère par un cercle) et la représentations de certains autres éléments de la représentation, en particulier droite et plan perpendiculaires. Le cas le plus fréquent est celui de la sphère munie d'un

$$\vec{U} = x.\vec{i} + y.\vec{W}$$

De même, on peut écrire:

$$\vec{V} = z.\vec{j} + t.\vec{W}$$

On en déduit:

$$\vec{U}.\vec{V} = yz.\vec{W}.\vec{j} + xt.\vec{W}.\vec{i} + yt.\vec{W}.\vec{W} = 0$$

La projection sera orthogonale ssi $\vec{W}.\vec{i} = \vec{W}.\vec{j} = 0$. Une condition nécessaire et suffisante est donc $yt = 0$ (c'est-à-dire: \vec{U} colinéaire à \vec{i} , ou \vec{V} colinéaire à \vec{j}). On retrouve ici le théorème classique sur la projection orthogonale d'un angle droit.

Second cas: \vec{U} est dans \vec{P} :

Si \vec{V} est également dans \vec{P} , le problème est trivial. Sinon, soit un vecteur non nul \vec{j} de \vec{P} , orthogonal à \vec{U} . Le plan (\vec{j}, \vec{V}) est, par construction, orthogonal à \vec{U} . Soit alors \vec{W} un vecteur non nul quelconque de ce plan. La projection sur \vec{P} , de direction \vec{W} , laisse bien sûr \vec{U} invariant, et transforme \vec{V} en un vecteur colinéaire à \vec{j} , donc orthogonal à \vec{U} (dessin A.32). Cette projection répond donc aux conditions imposées.

Envisageons maintenant le problème par l'autre bout: la projection étant donnée (par \vec{P} et \vec{W}), quels sont les couples (\vec{U}, \vec{V}) de vecteurs orthogonaux qui sont projetés suivant un couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs orthogonaux?

Premier cas: ni \vec{U} ni \vec{V} ne sont dans \vec{P} :

D'après ce qui précède, il y a une infinité de couples répondant à la question. Considérons une base orthogonale (\vec{i}, \vec{j}) de \vec{P} , et un vecteur \vec{U} de (\vec{i}, \vec{W}) , non colinéaire à \vec{i} . Soit \vec{V} un vecteur non nul de l'intersection du plan orthogonal à \vec{U} avec (\vec{j}, \vec{W}) . Le vecteur \vec{U} se projette sur \vec{P} selon un vecteur \vec{u} colinéaire à \vec{i} ; de même \vec{V} se projette sur \vec{P} selon un vecteur \vec{v} colinéaire à

\vec{j} . Le couple (\vec{U}, \vec{V}) répond bien à la question.

Second cas: \vec{U} est dans \vec{P} :

Si \vec{U} est orthogonal à \vec{W} , n'importe quel vecteur \vec{V} du plan orthogonal à \vec{U} convient; sinon, ne conviendront que les vecteurs de l'intersection de ce plan avec \vec{P} .

Puisque le problème admet tout de solutions, on peut tenter d'imposer des contraintes supplémentaires. Par exemple: les deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} étant de plus unitaires, peut-on trouver une projection telle que \vec{u} et \vec{v} soient eux aussi unitaires (donc qui transforme la base orthonormale en une base orthonormale)?

Supposons qu'une telle projection existe. Les vecteurs \vec{U} , \vec{u} et \vec{W} sont coplanaires, puisque $\vec{U}-\vec{u}$ est colinéaire à \vec{W} (dessin A.33). Posons $\vec{A} = \vec{U} + \vec{u}$. Les vecteurs \vec{U} et \vec{u} étant unitaires, OUAu est un losange, et par conséquent \vec{A} et \vec{W} sont orthogonaux. On démontre de même que \vec{W} doit être orthogonal à $\vec{B} = \vec{V} + \vec{v}$ (nous supposons ici, bien entendu, que ni \vec{U} ni \vec{V} ne sont dans \vec{P}).

Soit donc le plan $\vec{P}' = (\vec{U}, \vec{V})$. Le plan (\vec{A}, \vec{B}) est un plan bissecteur du dièdre (\vec{P}, \vec{P}') , et \vec{W} doit être orthogonal à ce plan. Il y a donc deux projections possibles: celles dont la direction est orthogonale à l'un des deux plans bissecteurs de (\vec{P}, \vec{P}') . On vérifie sans peine que ces deux projections conviennent, et que les bases (\vec{U}, \vec{V}) et (\vec{u}, \vec{v}) sont alors symétriques par rapport à ce plan bissecteur.

(N.B.: Si \vec{U} (et non \vec{V}) est dans \vec{P} , on sait d'après ce qui a été vu plus haut que \vec{W} doit appartenir à (\vec{V}, \vec{j}) (dessin A.32). Puisque \vec{V} doit se projeter en vraie grandeur, la direction de \vec{W} doit être celle d'une bissectrice (dans le plan (\vec{V}, \vec{j})) de l'angle (\vec{V}, \vec{j}) (dessin A.34).

CONCLUSION:

Dans une projection oblique, il existe deux directions de plan (et

APPENDICE 71

PROBLÈMES DE LA REPRÉSENTATION EN PERSPECTIVE LINÉAIRE : UN EXEMPLE RÉCENT.

Dans un placard publicitaire récemment paru dans la presse (dont le "Nouvel Observateur" du 30 Mai 1986), et vantant les qualités d'une automobile (la Peugeot 205 "Lacoste"), figure un dessin que l'on peut identifier a priori comme celui d'un terrain de tennis représenté en perspective linéaire (présence de "fuyantes" convergentes) (dessin A.39). Cette représentation n'étant que partielle, le dessin A.40 donne la représentation complète, à l'échelle 1/2 par rapport au dessin original.

Si nous examinons cette représentation dans l'hypothèse faite au début (perspective linéaire), nous pouvons constater dès l'abord que le centre du terrain est mal placé: il devrait être situé au point d'intersection des diagonales du trapèze représentant ce terrain, ce qui n'est pas le cas (N.B.: Dans ce qui suit nous ne distinguerons pas toujours, dans le texte, l'élément réel et sa représentation (ceci pour ne pas alourdir outre mesure la rédaction). Nous pensons que cela ne sera source d'aucune ambiguïté gênante pour le lecteur)

Deuxième constatation: les "lignes de côté de service" (parallèles aux grands côtés du terrain, voir dessin A.41) sont mal placées elles aussi: en effet, les petits côtés du terrain étant représentés par des segments parallèles, on peut en déduire que ce sont des segments frontaux (parallèles au plan du tableau). Or, sur de tels segments, les rapports de distance sont conservés; par conséquent, puisque les lignes de côté de service sont situées au 1/8 de la largeur du terrain à partir du coin, il devrait en être de même sur le dessin, ce qui n'est pas le cas.

Cherchons donc quelle est la représentation correcte du terrain, en perspective linéaire, qui a le même contour que le dessin original:

1) Le contour nous fournit le point de fuite principal P (celui de la direction des grands côtés du terrain). Et, d'après la remarque faite plus haut, nous pouvons placer les lignes de côté de service: elles passent par P et coupent le côté "avant" du terrain (c'est-à-dire le plus proche de l'observateur théorique) au 1/8 à partir des extrémités. Quant à la ligne médiane, on l'obtiendra de même, en joignant le milieu du côté avant au point P.

2) L'intersection des diagonales du trapèze nous donne le centre du terrain, donc la ligne de filet (parallèle aux bords avant et arrière).

3) Il reste à déterminer, pour finir, les deux "lignes de service", parallèles aux petits côtés situées aux 3/13 du terrain à partir de ceux-ci.

Pour cela, nous allons construire une échelle de profondeur, c'est-à-dire la représentation d'une suite (d) de droites parallèles aux côtés avant et arrière, qui soient équidistantes et telles que:

- a) d_0 soit le support du côté avant;
- b) d_{13} soit le support du côté arrière.

Ceci étant réalisé, d_3 et d_{10} nous fourniront les supports des lignes de service cherchées.

Pour déterminer cette "échelle", on peut procéder par tâtonnements, la position de d déterminant, selon la construction classique (dessin A.42), celle de tous les termes suivants de la suite (d). Le dessin A.42 représente l'échelle de profondeur convenable, correspondant au problème qui nous occupe ici, et que nous avons obtenue par calcul (voir Note à la fin du présent Appendice).

Disons ici un mot de cette construction (géométrique) d'une échelle de profondeur, indiquée dès le 15e siècle par ALBERTI dans son traité "Della Pittura" (1436), et qui explique la proportion très élevée de sols carrelés figurant dans les tableaux et les fresques de cette époque:

Il s'agit de représenter des rectangles (en pratique, ce sont des carrés, mais le problème reste le même) de mêmes dimensions, alignés l'un derrière l'autre, et dont deux côtés sont de front; la position des côtés de front successifs fournira l'échelle de profondeur désirée. On commence par représenter le côté avant du premier rectangle ($[XY]$ sur le dessin A.42), ce qui fournit les supports (PX) et (PY) des côtés perpendiculaires de tous les rectangles à représenter. Puis on dessine le côté arrière du premier rectangle, ainsi que l'une des diagonales de ce rectangle. C'est elle qui nous donnera le point de fuite I de la direction de cette diagonale (point d'intersection avec la ligne d'horizon, parallèle à (XY) passant par P).

Nous pourrions alors tracer une diagonale du deuxième rectangle (représentation passant par I), ce qui nous fournira le côté arrière de celui-ci, et ainsi de suite... .

Grâce à l'échelle de profondeur, nous serons alors à même (dessin A.43) de terminer la représentation du terrain, en plaçant les deux lignes de service ("barreaux" de l'échelle numérotés 3 et 10) (voir Note).

Si nous comparons maintenant le résultat (dessin A.44) avec le dessin original (dessin A.40), nous constatons de notables différences. En fait, la seule propriété de la perspective linéaire qui a été utilisée par le dessinateur est la convergence des fuyantes. C'est d'ailleurs essentiellement à cette propriété qu'est attaché le sens courant du mot "perspective", car c'est une des plus voyantes (avec la transformation des cercles en ellipses). Il est d'ailleurs compréhensible que ces deux propriétés soient les plus repérables: ce sont en effet des propriétés qui changent les objets auxquelles elles s'appliquent, alors que les autres sont des propriétés de conservation (qui ont donc beaucoup plus de chances de passer inaperçues), ou des propriétés de disparition (auxquelles on ne prête donc pas attention: une information négative n'est généralement pas perçue comme une

information): quelqu'un qui n'a que peu de notions de perspective linéaire sait malgré tout que les fuyantes convergent, et s'il veut réaliser un dessin "en perspective", il utilisera cette propriété, plus ou moins bien, s'en remettant pour le reste à son intuition et à son sens artistique. C'est ce qu'a fait notre dessinateur, qui a placé la ligne de service avant et la ligne de filet beaucoup trop bas. Sur le dessin A.44, la position de ces deux éléments peut sembler bizarre, voire choquante, mais elle est la conséquence inéluctable du choix fait pour le contour du terrain, et qui avait pour but de produire un net effet de raccourci.

De même, le "couloir" gauche paraît, sur le dessin A.44, beaucoup plus étroit que le couloir droit, et le dessinateur l'a représenté, sur le dessin A.40, plus large qu'il n'aurait dû l'être, ce qui fait qu'il donne une impression visuelle comparable à celle de l'autre. En effet, si l'on mesure les angles formés par les deux bords de chaque couloir, on trouve pour celui de droite et celui de gauche respectivement:

- sur le dessin original: 7° et 13° .
- sur le dessin correct: 4° et 15° .

Ainsi, l'angle a été dessiné plus petit pour le couloir gauche (ce qui correspond au fait que le point de vue est plus proche du bord droit que du bord gauche), mais moins cependant que ce que donne l'application stricte des règles de la perspective linéaire.

Que conclure, en définitive?

1°) Que, dans certains effets de "raccourci" en particulier, la perspective linéaire peut donner des résultats quelque peu troublants -voire choquants- et non conformes à ce à quoi l'on se serait attendu "intuitivement", ce qui, entre parenthèses, met en évidence le rôle compensateur du cerveau dans la perception.

2°) Que, bien qu'existant et étant pratiquée -et bien connue- depuis

APPENDICE 8:

PROBLÈMES DE LA REPRÉSENTATION EN PERSPECTIVE LINÉAIRE:

UN EXEMPLE ANCIEN.

Dans les planches de la Grande Encyclopédie on trouve, outre des sections et des vues, des dessins en perspective cavalière et des dessins en perspective linéaire. Il est parfois difficile de décider au premier coup d'oeil si telle figure est représentée dans l'un ou l'autre de ces deux systèmes perspectifs, car fréquemment, dans le cas de la perspective linéaire, la convergence des fuyantes est faible (ce qui correspond à un point de vue situé loin du plan du tableau), et ce dans le but évident de ne pas trop "déformer" les objets représentés, tout en produisant malgré tout un effet de perspective (gestion du conflit voir/savoir).

Ainsi, si nous jetons un regard à la "figure" 1 de la planche V du Chapitre "Mosaïque", nous voyons la représentation d'une "table avec cases contenant des marbres de différentes couleurs" (dessin A.45). Le contour de la face supérieure de cette table (dessin A.46) est un quadrilatère ABCD qui semble être un parallélogramme, mais qui est en fait un trapèze (AD=136mm et BC=132,5mm sur l'original): il ne peut donc s'agir que d'une représentation en perspective linéaire, telle que nous l'avons définie ci-dessus (point de vue éloigné).

D'autre part, on peut raisonnablement supposer que toutes les cases que comporte cette table ont les mêmes dimensions. Deux raisons principales nous incitent à retenir cette hypothèse:

1°) ces cases étaient destinées à recevoir des tesselles (petits cubes de marbre) de mêmes dimensions, ne différant que par la couleur, et destinées à la fabrication de mosaïques;

2°) une table de même type se trouve représentée, vue sous un autre

angle, sur la planche I du même chapitre (dessin A.47), et sur cette représentation les rangées de cases semblent bien être de même largeur.

Nous ferons donc l'hypothèse que les huit rangées de cases de la table de la planche V ont toutes la même largeur.

D'autre part, nous savons que, en perspective linéaire, la hauteur apparente des "barreaux" successifs d'une échelle de profondeur décroît progressivement (voir Appendice 7). C'est bien ici le cas pour les rangées (horizontales) de cases. Mais on peut cependant remarquer que, le point de vue étant, comme on l'a dit, "éloigné", la représentation se rapproche d'une perspective cavalière, dans laquelle la hauteur de chaque rangée serait constante (dessin A.48). Il semble donc a priori que la décroissance des hauteurs que l'on peut observer ici soit plus importante qu'elle ne devrait normalement l'être. Cet éventuel écart par rapport aux règles de la perspective est d'ailleurs confirmé par la constatation suivante:

Les diagonales des cases étant, dans la réalité, parallèles à deux directions:

- a) les "coins" de cases alignés seront représentés par des points alignés;
- b) les représentations de diagonales parallèles seront des droites convergeant en un même point de fuite, situé sur la ligne d'horizon.

Or, on constate sans peine sur le dessin A.45 que le a) n'est même pas vérifié. Voyons donc ce qu'il devrait en être sur un dessin conforme aux règles de la perspective:

(N.B.: nous reprenons ici les notations de l'Annexe précédente, ainsi que certains des résultats obtenus; voir dessin A.49)

Les données (mesurées en mm sur le dessin original) sont:

$$x_0 = 136, x_8 = 132,5, \text{ ainsi que } y_0 - y_8 (= h) = 18,5.$$

$$\text{De } y_8/y_0 = x_8/x_0 \text{ nous déduisons } 1 - y_8/y_0 = 1 - x_8/x_0, \text{ soit } h/y_0 = (x_0 - x_8)/x_0.$$

APPENDICE 14:

LE COMPAS, L'ÉQUERRE, LA RÈGLE GRADUÉE ET LE RAPPORTEUR

EN PERSPECTIVE PARALLÈLE.

Les mesures, sur le dessin en perspective parallèle d'un objet plan de l'espace, ne peuvent se faire directement avec les instruments habituels (sauf si le plan en question est frontal), du fait que, par projection, ni les distances ni les angles ne sont en général conservés. Il est donc nécessaire de recourir à d'autres moyens, par exemple (pour les mesures d'angles) à un "rapporteur projeté", lequel ne sera autre que l'ellipse projetée d'un cercle trigonométrique du plan considéré.

Pour pouvoir tracer une telle ellipse (que l'on pourra toujours orienter au besoin par référence au plan d'origine), il suffit en fait de connaître le projeté d'un carré du plan considéré, carré dans lequel on inscrira ensuite l'ellipse. Le problème se ramène donc à la construction des deux demi-axes d'une ellipse lorsqu'on en connaît deux rayons conjugués. Deux procédés ont été indiqués par Gérard AUDIBERT (AUDIBERT 1985A). On peut également avoir recours, dans la pratique, au procédé rapide indiqué en Appendice 4.

L'ellipse de référence étant ainsi obtenue, voyons comment l'utiliser à la résolution de quelques problèmes métriques.

1- DESSIN D'UN CERCLE:

Un cercle sera représenté par une ellipse homothétique de l'ellipse de référence. Son tracé ne présentera donc pas de difficulté particulière.

Exemple: Tracé du cercle de centre Ω passant par le point M (dessin A.53A).

(N.B.: Sur ce dessin, comme sur les suivants, nous avons pris le cas de la

perspective cavalière AFNOR: angle de fuite 45° , rapport de réduction 1/2)

On trace, sur l'ellipse de référence, le diamètre parallèle à ΩM , qui coupe cette ellipse en I et I' (dessin A.53B). L'ellipse à tracer aura pour centre le point Ω , et lui sera homothétique dans le rapport $\Omega M/OI$ (dessin A.53C).

2- PERPENDICULAIRE:

Deux diamètres perpendiculaires d'un cercle deviennent, par projection, deux diamètres conjugués de l'ellipse projetée. Celle-ci peut donc servir d'équerre, puisque, grâce à elle, on peut obtenir sans peine le tracé d'une perpendiculaire à une droite donnée Δ (elle est parallèle aux tangentes à l'ellipse aux extrémités du diamètre δ parallèle à Δ).

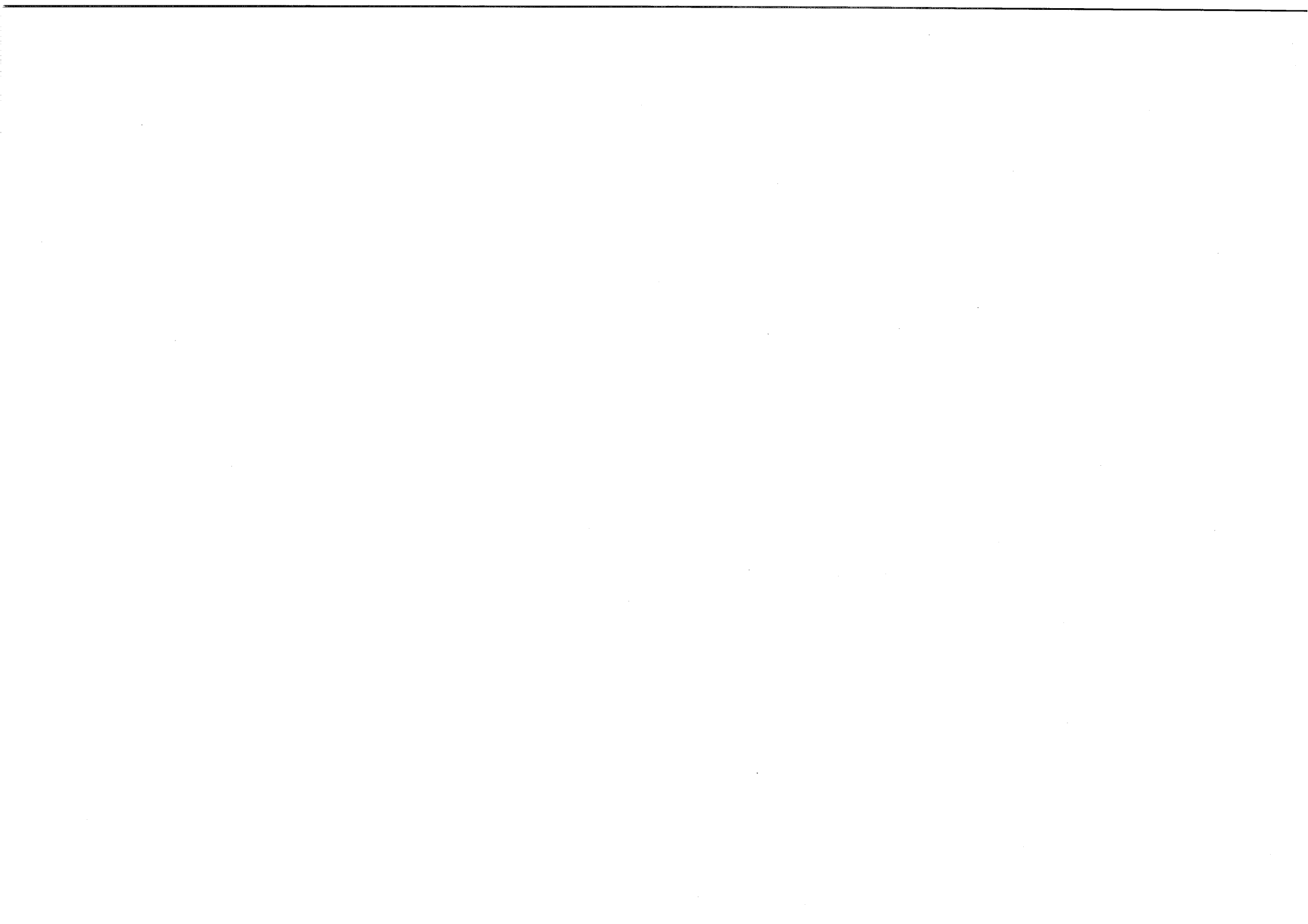
Exemple: Tracé de la perpendiculaire à Δ au point A (dessin A.54A):

On trace, sur l'ellipse de référence, le diamètre δ parallèle à Δ , qui coupe cette ellipse en I, puis on trace la tangente à l'ellipse en I, soit δ' (dessin A.54B); la perpendiculaire cherchée est la parallèle Δ' à δ' passant par A (dessin A.54C).

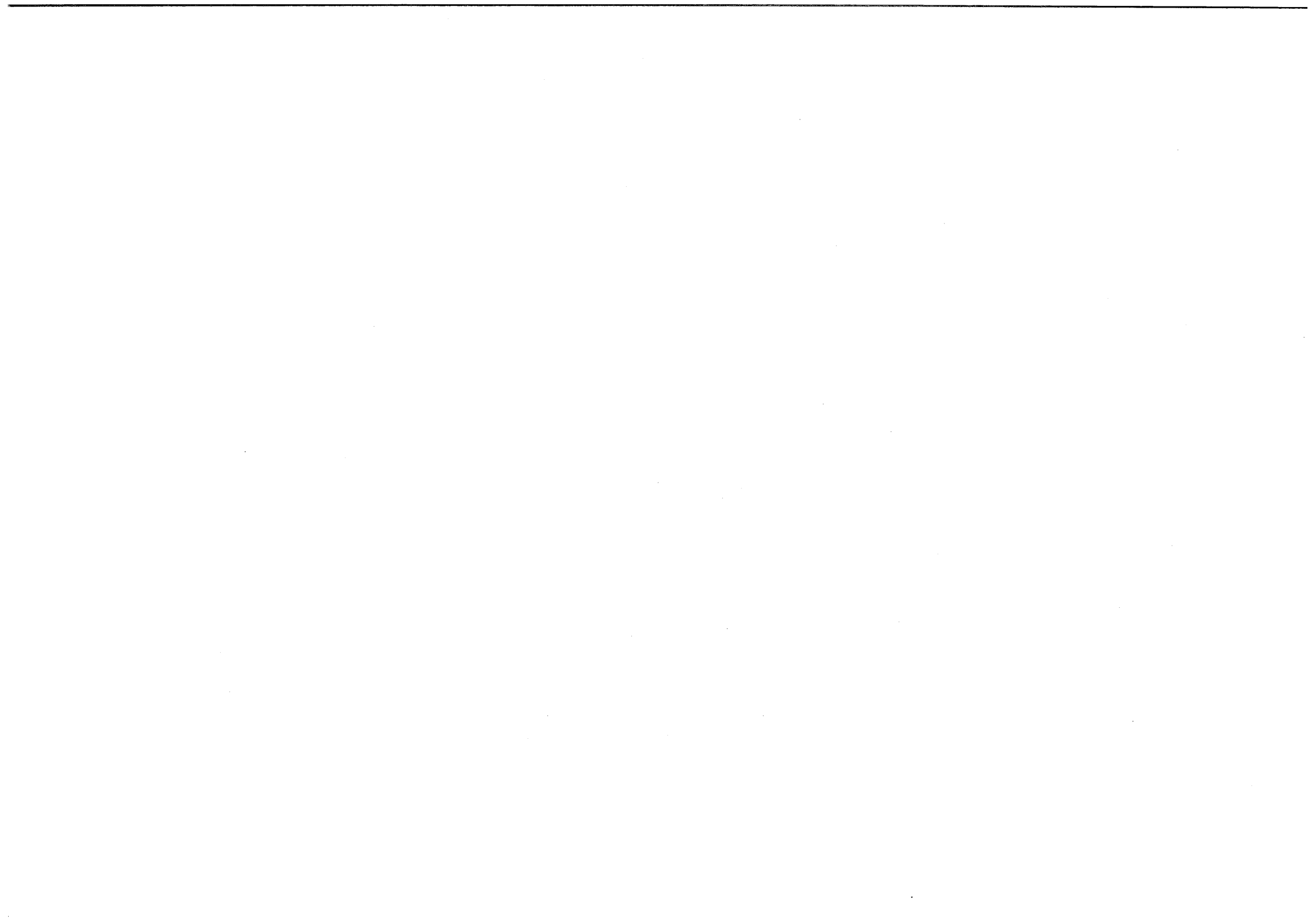
3- MESURES DE LONGUEURS:

Soit un segment du plan considéré, connu par son dessin, et que l'on veut mesurer. Il suffit en fait de connaître le rapport de réduction correspondant à la direction du dessin de ce segment. Ce rapport s'obtient aisément en traçant, sur l'ellipse de référence, le diamètre $[II']$ parallèle au dessin du segment, et en faisant le quotient de la distance II' par celle du diamètre frontal $[AA']$ qui est, lui, projeté en vraie grandeur (dessin A.55). Le rapport de réduction cherché est donc égal à II'/AA' .

(N.B.: Le "rapport de réduction" peut être supérieur à 1: c'est le cas en particulier pour le grand axe de l'ellipse.)



REFERENCES
ET
BIBLIOGRAPHIE



RÉFÉRENCES

ABBOTT Edwin A. (1962) Flatland. Une aventure à plusieurs dimensions. Traduit de l'anglais par E. Gille. Nlle éd. 1984. Ed. Denoël, Paris. 190p.

ADDA Josette (1976): Difficultés liées à la présentation des questions mathématiques, in Educational Studies in Mathematics, vol.7, pp.3-22.

ADDA Josette (1983): Representations in mathematics, in Actes du Colloque Psychologie et Enseignement des mathématiques, Jérusalem.

ADDA Josette (1987): Elementos de didactica de las mathematicas. Notas y traduccion de G. Arreguin y M. Oliverra. Seccion Matematica Educativa. Ed. del CINESTAV, Mexico. 218p.

AFNOR (1953): Dessins techniques pour Industries mécaniques, électriques et connexes. Représentations dites "en perspective". 6e tirage 1970. Ed. Association Française de Normalisation. 2p.

ALIBERT D., GRENIER D., LEGRAND M. et RICHARD F. (1986): Atelier sur le débat scientifique, in Actes de la 4e Ecole d'été de didactique des mathématiques, Ed. IREM Univ. Paris-7, pp.110-115.

AMBESI Alberto Cesare (1966): Arte dell'Oceania. Ed. Fabbri, Milan.

ARNHEIM Rudolf (1976): La pensée visuelle. Traduit de l'américain par C. Noël et M. Le Cannu. Ed. Flammarion, Paris. 354p.

ARTIGUE Michèle (1987): L'évolution du rôle de l'image en mathématiques liée à l'utilisation de l'outil informatique, in "Place et rôle de l'image dans l'enseignement". Intervention lors de la Journée organisée par la Coordination des Ressources Informatiques pour la Classe (CRIC), pp.1-13.

AUDIBERT Gérard (1985):
A- Une problématique en Géométrie de l'espace. Ed. IREM de Montpellier, 63p.

B- Représentation de l'espace et empirisme dans le problème FIL. Ed. IREM de Montpellier, 25p.

AUDIBERT Gérard et BONAFÉ Freddy (1985): Projection cylindrique d'un coin de cube. Ed. IREM de Montpellier, 14p.

AUDIBERT Gérard (1986):
A- L'enseignement de la géométrie de l'espace, in Bulletin APMEP n°355, pp.501-526.

B- Description des 14 groupes finis d'isométries. Ed. IREM de Montpellier. 32p.

AUDIBERT Gérard et KEITA Boubakar (1987): La perspective cavalière et la représentation de l'espace, in Actes du Colloque CNRS GRECO Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Sèvres. Ed. CNRS, Paris, pp.78-92.

BACHELARD Gaston (1971): La formation de l'esprit scientifique. Ed. Urin, Paris, 257p.

BALDY René (1985): La reconnaissance de dessins d'objets en perspective cavalière. Thèse de 3e cycle. Université de Provence, Marseille, 98p.

BALDY René (1986): Comparaisons de dessins de volumes en perspective cavalière par des sujets adultes de bas niveau de formation, in Archives de Psychologie, n°54, pp.271-285.

BALDY R., DOLLE J.-M., HIGELÉ P., LEBAHAR J.-C., RABARDEL P., VERILLON P., VERMERSCH P., WEILL-FASSINA A. (1986): Activités cognitives dans l'apprentissage et l'utilisation du dessin technique: état des travaux, in Actes du Colloque CNRS GRECO Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Sèvres. Ed. CNRS, Paris, pp.108-122.

BATESON Gregory (1981): Communication. Trad. par D. Bansard, in La nouvelle communication. Ed. Seuil, Paris, pp.116-144.

BAUERSFELD H. et ZAWADOWSKI Wacek (1981): Metaphors ans metonymies in the teaching of mathematics. Occasional paper n°11. Ed. Universität Bielefeld, 10p.

BAUTIER Thierry, BOUDAREL Jean, COLMEZ François et PARZYSZ Bernard (1987): Représentation plane des figures de l'espace, in Actes du Colloque CNRS GRECO Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Sèvres. Ed. CNRS, Paris, pp.93-107.

BECHMANN Roland (1986): Les dessins techniques du Carnet de Villard de Honnecourt, in Carnet de Villard de Honnecourt. Ed. Stock, Paris, pp.39-50.

BERDONNEAU Catherine (1981): Quelques remarques sur l'introduction à la géométrie démontrée à travers les manuels en usage dans l'enseignement post-élémentaire en France au vingtième siècle. Thèse de 3e cycle, Université Paris-7. 288p.

BERNARD Jean (1987): Et l'âme? demande Brigitte. Ed. Buchet-Chastel, Paris. 232p.

BESSOT Annie et EBERHARD Madeleine (1982):
A- Errare humanum est, in Grand N n°27, pp.73-75.
B- Représentations d'empilements de cubes au C.E., in Grand N n°28, pp.21-66.

BESSOT Annie et EBERHARD Madeleine (1987): Représentations graphiques d'assemblages de cubes et finalités des situations, in Actes du Colloque CNRS GRECO Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Sèvres. Ed. CNRS, Paris, pp.64-77.

BESSOT Didier (1983): Problèmes de représentation de l'espace, in "Enseignement de la Géométrie", Bulletin inter IREM n°23. Ed. IREM de Lyon, pp.33-40.

BIEL Jorg (1987): L'équipement du mort. Richesse dans la tombe. Reflet de sa puissance, in Trésor des princes celtes. Ed. Réunion des Musées nationaux,

pp.115-136.

BISHOP Allan J. (1979): Visualising and mathematics in a pre-technological culture, in *Educational Studies in Mathematics*, vol.10, pp.135-146.

BKOUCHE Rudolph et SOUFFLET Michel (1983): Axiomatique, formalisme et théorie, in "Enseignement de la Géométrie", Bulletin inter IREM n°23. Ed. IREM de Lyon, pp.3-24.

BLANC-TAILLEUR René et GHERARDI Janine (1981): Dessin HFI. Habillement, Fabrications Industrielles. Ed. Castella, Paris, 144p.

BORSELLINO A., CARLINI J. et MASULLI J. (1986): Illusions optiques en trois livres-ordinateurs, in "L'imaginaire scientifique. De la perception à la théorie à travers les images des sciences." Ed. Denoël, Paris, pp.82-83.

BOUDAREL Jean et GOETGHELUCK Patrick (1983): Géométrie dans l'espace Seconde. Le cube. Ed. IREM Paris-Nord. 64p.

BOUILLOT René (1975): La photographie moderne. Traité technique et pratique. Ed. Montel, Paris. 192p.

BREUIL Henri (1974): Quatre cents siècles d'art pariétal. Ed. Art et Industrie, Paris, 418p.

BROUSSEAU Guy (1986): Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Thèse d'Etat, Université de Bordeaux-1, 481p.

BUHLER Alfred, BARROW Terry et MOUNTFORD Charles (1962): Océanie et Australie. L'art de la mer du Sud. Trad. par L. Servicen, M. Müller-Strauss et J.R. Weiland. Ed. Albin Michel, Paris, 255p.

BULBOIS Jean et TRIBILLON Gilbert (1983): Les images à trois dimensions, in *La Recherche* n°144, numéro spécial "la révolution des images", pp.638-649.

CARON-PARGUE L. (1979): Etude sur la représentation du cube chez des enfants de 3 à 11 ans. Thèse de 3e cycle, Univ. Paris-5.

CHANGEUX Jean-Pierre (1983): L'homme neuronal. Coll. Pluriel. Ed. Fayard, Paris, 379p.

CLÉMENTZ François (1984): La vérité moins l'image (imitation, représentation, signification), in *L'imitation, aliénation ou source de liberté?*, pp.49-62. Ed. La Documentation Française, Paris.

COLMEZ François (1984): La représentation plane en perspective cavalière des objets de l'espace, un problème de géométrie; essai d'ingénierie didactique en classe de Première S, in *Actes du Colloque inter IREM de Géométrie. Journées SMF de Marseille*. Ed. IREM de Marseille.

COOPER Lynn et SHEPARD Roger (1985): Le retournement mental des objets, in *Pour la Science* n°88, pp.40-47.

DE GANDT François (1982): Mathématiques et réalité physique au XVIIe siècle (de la vitesse de Galilée aux fluxions de Newton), in "Penser les mathématiques". Séminaire de philosophie et de mathématiques de l'École

Normale Supérieure (J. Dieudonné, M. Loi, R. Thom). Textes préparés et annotés par François Guénard et Gilbert Lelièvre. Ed. du Seuil, Paris.

DELORME André (1982): Psychologie de la perception. Ed. Etudes vivantes, Montréal. 421p.

DEMARQUET-CRAUK N. (1907): Notions de perspective appliquée aux croquis rapides de vues d'après nature. 3e éd. Ed. Vuibert et Nony, Paris.

DENIS Michel (1979): Les images mentales. Ed. P.U.F., Paris (coll. Les Psychologues).

DISPAUX Gilbert (1984): La logique et le quotidien. Une analyse dialogique des mécanismes d'argumentation. Ed. de Minuit.

DOLLE Jean-Marie et al. (1974): La construction représentative de l'espace volumétrique chez l'enfant (contribution à l'étude de la genèse de la perspective), in *Bulletin de Psychologie*, Vol.XXVII, pp.578-589.

DOLLE Jean-Marie et al. (1975): Apprentissage opératoire de la représentation graphique d'une figure volumétrique, in *Bulletin de Psychologie*, Vol.XXVIII, pp.956-963.

DOLLE Jean-Marie et al. (1978): La représentation de la perspective géométrique (étude génétique), in *Bulletin de Psychologie*, Vol.XXXI, pp.157-169.

DOUADY Régine (1984): Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire. Thèse d'Etat. Université Paris-7; 342p.

DUCROT Oswald (1972): Dire et ne pas dire. Principes de sémantique linguistique. Coll. Savoir. Ed. Hermann, Paris.

DÜRER Albrecht (1963): The complete woodcuts. Ed. by Dr. Willy Kurth. Ed. Dover, New York.

EGGBRECHT Arne (1986): L'Egypte ancienne. Au royaume des pharaons. Ed. Bordas, Paris.

ERNST Bruno (1987): Le miroir magique de M.C. Escher. Ed. Medea, Fribourg. 112p.

FINKE Ronald (1986): Imagerie mentale et système visuel, in *Pour la Science* n°103, pp.86-93.

FRANÇÈS Robert (1981): La perception. 6e éd. Ed P.U.F, Paris (coll. Que sais-je?), 128p.

FREEMAN Norman H. (1980): Strategies of representation in young children (Analysis of spatial skills and drawing processes). Academic Press, New York.

GAULIN Claude (1985): The need for emphasizing various graphical representations of three-dimensional shapes and relations, in *Psychology of Mathematical Education*, pp.53-71.

- GLAESER Georges (1971): *Mathématiques pour l'élève-professeur*. Ed. Hermann, Paris.
- GODDIJN Aad (1980): *Shadow and depth*. Ed. Wiskivon Dept of the IOWO, Utrecht. 70p.
- GOMBRICH Ernst (1982):
A- *The image and the eye. Further studies in the psychology of pictorial representation*. Ed. Phaidon, Oxford. 320p.
B- *Histoire de l'art*. Trad. de l'anglais par J. Combe et C. Lauriol. Ed. Flammarion, Paris.
- HAGEN Margaret A. (1980): *The perception of pictures. Vol.1: Alberti's window. The projective model of pictorial information. Vol.2: Dürer's devices. Beyond the projective model of pictures*. Academic Press, New York.
- HAGEN Margaret A. (1984): *Varieties of realism. Geometries of representational art*. Cambridge University Press.
- HOFSTADTER Douglas (1979): *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid*. Ed. Vintage Books, New York 1980, 778p.
- HOFSTADTER Douglas (1988): *Ma Thémagie*. Trad. de l'américain par J.-B. Berthelin, J.-L. Bonnetain et L. Rosenbaum. Ed. InterEditions, Paris. 897p.
- HOFSTADTER Douglas et DENNETT Daniel (1987): *Vues de l'esprit. Fantaisies et réflexions sur l'être et l'âme*. Version française de J. Henry. Ed. Inter Editions, Paris, 508p.
- HUME David (1748): *Enquête sur l'entendement humain*. Traduction revue et corrigée par Didier Deleule. Coll. Les Intégrales de Philo. Ed. Nathan, Paris 1982.
- IMBERT Michel (1983): *L'espace, le temps et la neurobiologie*, in *L'espace et le temps aujourd'hui*. Ed. Seuil, Paris, pp.179-191.
- KAUFMANN L. et ROCK I. (1962): *The moon illusion*, in *Scientific American* n°207.
- KINDT Martin and DE LANGE Jan (1982): *Lessons in space geometry*. Utrecht University, 2d printing, 100p.
- KOSSLYN S. (1980): *Image and mind*. Ed. Cambridge Mass. Harvard Univ. Press.
- LA VILLETTE (1987): *Commentaire de l'exposition temporaire: "La lumière démasquée"*. Cité des Sciences et de l'Industrie.
- LE LIONNAIS François et al. (1979): *Dictionnaire des mathématiques*. Ed. PUF, Paris.
- LEROI-GOURHAN André (1973): *Résumé des cours 1972-73: Préhistoire*, in *Annuaire du Collège de France*, pp.343-357.
- LEROUGE A. (1988): *Rêve et réalité à propos de l'enseignement de la géométrie dans l'espace au collège*, in *Bulletin APMEP* n°363, pp.165-170.

- LEVY-LEBLOND Jean-Marc (1983): *La structure de l'espace-temps (les relativités)*, in *L'espace et le temps aujourd'hui*. Ed. Seuil, Paris, pp.51-64.
- LOCHER J.L. et al. (1972): *Le monde de M.C. Escher*. Ed. Chêne, Paris. 264p.
- LUBCZANSKI Jacques (1985):
A- *Comment réussir le triangle quelconque*, in *Bulletin APMEP* n°347, pp.103-109.
B- *Le triangle quelconque: une nouvelle recette*, in *Bulletin APMEP* n°351, pp.911-918.
- MISHKIN Mortimer et APPENZELLER Tim (1987): *L'anatomie de la mémoire*. In *Pour la Science* n°118, pp.26-36.
- MITCHELMORE M.C. (1985): *Children's drawings of solids and their concept of parallels*, in *Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique* n°66. Ed. IMAG, Univ. Grenoble-1, pp.133-143.
- MUELLER Conrad G. et RUDOLPH Mae (1969): *L'optique*. Traduit de l'américain par J. Caudmont. Ed. Laffont, Paris. 189p.
- PAEZ-SANCHEZ Lelis (1980): *La représentation graphique de l'espace chez l'enfant et chez l'adulte peu scolarisé*. Thèse de 3e cycle, Univ. Paris-7. Ed. IREM Paris-7. 283p.
- PÉNIGAUD Alain et al. (1983): *Physique, Terminale C.E.* Ed. Nathan, Paris.
- PIAGET Jean et INHELDER Bärbel (1942): *La représentation de l'espace chez l'enfant*. 4e éd., 1981. Ed. PUF, Paris. 574p.
- PORTER P. and GREENSTREET B. (1980): *Manual of Graphic Techniques*. Ed. Scribners, New York.
- REUCHLIN Maurice (1978): *Psychologie*. 2e éd. Coll. Fondamental. Ed. P.U.F., Paris. 447p.
- RIBA Daniel (1984): *Les gravures rupestres du Val Camonica*. Ed. France Empire, 253p.
- ROBERT Paul et al. (1973): *Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*. Ed. Société du Nouveau Littéraire, Paris. 1971 p.
- SARTRE Jean-Paul (1940): *L'imaginaire*. 2e éd. 1986. Coll. Folio Essais. Ed. Gallimard, Paris, 379p.
- SEMPÉ Jean-Jacques (1981): *Comme par hasard*. Ed. Denoël, Paris. 104p.
- SHEPARD R. (1978): *The mental image*, in *American Psychologist* (Febr. 1978), pp.125-137.
- SKLIAR Ania (1987): *L'Égypte*. Coll. Prestige du passé. Ed. Lazarus, Paris.
- THUILLIER Pierre (1984): *Espace et perspective au Quattrocento*, in *La Recherche* n°160, pp.1384-1398.

LISTE DES MANUELS DE GÉOMÉTRIE CONSULTÉS

- AMIOT A. (1864): Eléments de géométrie. 8e éd. Ed. Dezobry, Paris. 428p.
- ANDRÉ Ph. (1889): Nouveau cours de géométrie conforme au dernier programme officiel. 18e éd. Ed. Guédon, Paris. 496p.
- ASTRUC Hubert-Marcel (1938): Géométrie mixte. 6e éd. Ed. Lavauzelle, Paris. 645p.
- BÉCHÉ A. (1932): Géométrie. EPS 1ère année. 10e éd. Ed. Colin, Paris. 207p.
- BENOIT A. (1943): Géométrie. Classe de Première. 2e éd. Ed. Vuibert, Paris. 179p.
- BIGUENET A. et DUVAL R. (1956): Notions de géométrie dans l'espace et de géométrie descriptive. Coll. L'enseignement technique et professionnel. 2e éd. Ed. Eyrolles, Paris. 315p.
- BLANCHET M.A. (1871): Cours de géométrie par A.M. Legendre, avec additions et modifications. 14e éd. Ed. Didot, Paris. 310p.
- BONTEMPS Guy et al. (1988): Géométrie. Classe de Première S et E. Coll. "Fractale". Ed. Bordas, Paris. 256p.
- BORELLI Alphonso (1658): Euclides restitutus, sive Prisca geometriae elementa. Ed. Honophei, Pisa.
- BOS H. (1897): Géométrie élémentaire conforme aux programmes officiels du 28 janvier 1890 pour l'enseignement dans les classes de Quatrième, Troisième, Seconde, et Philosophie. 4e éd. Ed. Hachette, Paris. 284p.
- BOURSIN J.-L., DEVISMES A. et GOERINGER G. (1974): Mathématiques. Première C, D, E. Ed. Bordas, Paris. 496p.
- BRACHET F., DUMARQUÉ J. et POCHARD H. (1949): Géométrie dans l'espace. Classe de Première A et B. Ed. Delagrave, Paris. 112p.
- BRÉARD C. (1962): Mathématiques. Classes de Seconde A', C, M, M'. Ed. L'Ecole, Paris. 732p.
- CAMMAN P. et RÉBOUIS A.-G. (1928): Géométrie. Classes de Première. 2e éd. Ed. de Gigord, Paris. 191p.
- CHÈNEVIER Pierre (1931): Cours de géométrie dans l'espace à l'usage des classes de Première de L'Enseignement secondaire. 4e éd. Ed. Hachette, Paris. 318p.
- CHUQUET Nicolas (1484): La géométrie. Première géométrie algébrique en langue française. Introduction, texte et notes par H. L'Huillier (1979). Ed. Vrin, Paris. 491p.
- CLUZEL René et ROBERT Jean-Pierre (1943): Géométrie. 3e partie. A l'usage des ENP, des EP et des EPS. Ed. Delagrave, Paris. 206p.
- COMBETTE E. (1893): Cours de géométrie élémentaire. 4e éd. Ed. Alcan, Paris.

- 697p.
- COMMISSAIRE H. (1932): Leçons de géométrie, classe de Mathématiques. Ed. Masson, Paris. 656p.
- CONDAMINE M. (1970): Mathématiques. Premières C-D-E. Algèbre linéaire et géométrie. Coll. P. Vissio. Ed. Delagrave, Paris. 495p.
- CORRIEU L., LION G., ROUMILHAC J.-P. et VILATTE J. (1988): Géométrie. Premières S et E. Ed. Delagrave, Paris. 286p.
- COSSART E. et THÉRON P. (1964): Collection de mathématiques. Classe de Seconde. Ed. Bordas, Paris. 672p.
- COSSART E. et THÉRON P. (1966): Collection de mathématiques. Classe de Première C. Tome II: Trigonométrie, Géométrie, Cinématique. Ed. Bordas, Paris. 254p.
- DELEDICQ André, LASSAVE Claude, MISSENERD Claudie et MISSENERD Didier (1988): Mathématiques 4e. Coll. Faire des mathématiques. Ed. CEDIC-Nathan, Paris. 256p.
- DELTHEIL Robert et CAIRE Daniel (1951): Compléments de géométrie. Géométrie métrique. Géométrie projective. Géométrie anallagmatique. Classes de préparation aux grandes écoles. Concours de l'enseignement. Ed. Baillière, Paris. 437p.
- DESBATS J. (1951): Géométrie et géométrie cotée. Classes de Première (sections C et Moderne). Ed. L'Ecole, Paris. 293p.
- F.J.C. (1881): Eléments de géométrie. Cours de mathématiques élémentaires. 4e éd. Ed. Mame, Tours. 355p.
- FOUCHÉ André (1966): Mathématiques. Classe de Seconde A. Ed. Vuibert, Paris. 360p.
- FOULON G. (1939): Géométrie. Cours de Première. 2e éd. Ed. Magnard, Paris. 153p.
- GAUTIER C., GIRARD G., GERLL D., THIERCÉ C. et WARUSFEL A. (1973): Algèbre Géométrie Seconde. Coll. Aleph 1. Ed. Hachette, Paris. 375p.
- GAUTIER C. et THIERCÉ C. (1982): Géométrie. Premières S et E. Ed. Hachette, Paris. 256p.
- GAUTIER C. et THIERCÉ C. (1986): Géométrie. Premières S et E. Ed. Hachette, Paris. 256p.
- GIRARD Georges et LENTIN André (1965): Géométrie. Seconde C. Ed. Hachette, Paris. 318p.
- GIROD Félicien (1896): Cours de géométrie théorique et pratique à l'usage des lycées et des collèges. 13e éd. Ed. Guédon, Paris. 392p.
- GLAYMANN Maurice et MALAVAL Joël (1981): Mathématiques Seconde. Ed. Cedic, Paris. 367p.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	p.5
CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE	p.11
1- Les représentations en mathématiques	p.11
2- L'objet géométrique et ses représentations "concrètes"	p.13
3- Représenter graphiquement l'espace en géométrie	p.15
4- Le dessin, auxiliaire de la démonstration	p.19
5- Le dessin, instrument de communication	p.26
6- Vers un enseignement intégré de la géométrie, de l'espace et de ses représentations	p.38
CHAPITRE 2: LES "FIGURES" DES MANUELS	p.47
1- Explicitation des principes de représentation	p.48
2- Aperçus sur la "tradition"	p.53
3- Les conventions	p.65
4- Quelques exemples d'incohérences relevés dans les manuels	p.70
5- Conclusion	p.76
CHAPITRE 3: UN PARALLÉLOGRAMME POUR UN PLAN	p.79
1- La question	p.79
2- La population	p.80
3- Les problèmes de la représentation du plan	p.80
4- L'analyse des réponses	p.82
5- Conclusion	p.91
CHAPITRE 4: VOIR ET SAVOIR. LE PROBLÈME GÉNÉRAL	p.93
1- Les deux pôles	p.93
2- Le "réalisme intellectuel"	p.95
3- Ailleurs ou autrefois	p.98
4- Les apports scientifiques récents	p.102
5- Les directions privilégiées	p.107
CHAPITRE 5: INTERPRÉTATION SPATIALE DE RECTANGLES EN PERSPECTIVE	p.111
1- Nos hypothèses	p.112
2- Le test (première partie)	p.118
3- Les résultats	p.121
4- Le test (seconde partie)	p.135
5- Les résultats	p.139
6- Synthèse	p.149
7- Conclusion	p.159
CHAPITRE 6: COMPLÈTEMENT DU DESSIN D'UN TRIÈDRE TRIANGLE	p.161
1- Le test	p.163
2- Les résultats	p.170
3- Synthèse	p.183
4- Conclusion	p.191

CHAPITRE 7: REPRÉSENTATIONS D'UNE PYRAMIDE	p.193
1- Le test	p.193
2- La population	p.196
3- Les productions	p.196
4- Conclusion	p.207
CHAPITRE 8: PERSPECTIVES DE CUBES	p.209
1- Le questionnaire	p.210
2- La population	p.212
3- Les réponses	p.213
4- Conclusion	p.228
CHAPITRE 9: REPRÉSENTATION DE SITUATIONS "CLASSIQUES"	p.229
1- Le test	p.229
2- La population	p.232
3- Les résultats	p.232
4- Conclusion	p.259
CHAPITRE 10: "LECTURE" DE SITUATIONS "CLASSIQUES"	p.263
1- Le test	p.264
2- Les résultats	p.264
3- Conclusion	p.284
CHAPITRE 11: VOIR ET SAVOIR DANS LES DESSINS DE GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE	p.287
1- Le bilan	p.287
2- Les conséquences didactiques	p.295
CHAPITRE 12: LA SÉQUENCE "FLAMBEAU"	p.299
1- Le matériel	p.301
2- Le questionnaire	p.303
3- La population	p.305
4- Les réponses	p.306
5- La séquence didactique (chronique commentée)	p.327
CHAPITRE 13: LA SÉQUENCE "SOLEIL"	p.353
1- Le questionnaire	p.353
2- La population	p.355
3- Les réponses	p.355
4- Le matériel	p.367
5- La séquence didactique	p.368
CHAPITRE 14: INSTITUTIONNALISATION ET ÉVALUATION	p.385
1- Les règles d'incidence	p.386
2- Un exercice de lecture (du dessin à l'objet)	p.390
3- Des exercices de ponctuation (du dessin au dessin)	p.399
4- Un contrôle...de dessin	p.405
5- Sections de cube	p.410
6- Comment les élèves ont-ils reçu cet enseignement?	p.414

UNIVERSITE PARIS VII

DIPLOME DE DOCTORAT

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

THESE PRESENTÉE PAR : M. Bernard PARZYSZ

VOLUME 2 : DESSINS ET ANNEXES

SUJET DE LA THESE : Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.

Soutenue le : 10 février 1989 devant la commission d'examen

JURY :

M. D. LACOMBE

Mme J. ADDA

M. C. GAULIN

M. G. AUDIBERT

M. J. CHASTENET DE GERY

M. F. COLMEZ

M. J.L. MARTINAND

Président du jury

Directeur de recherche

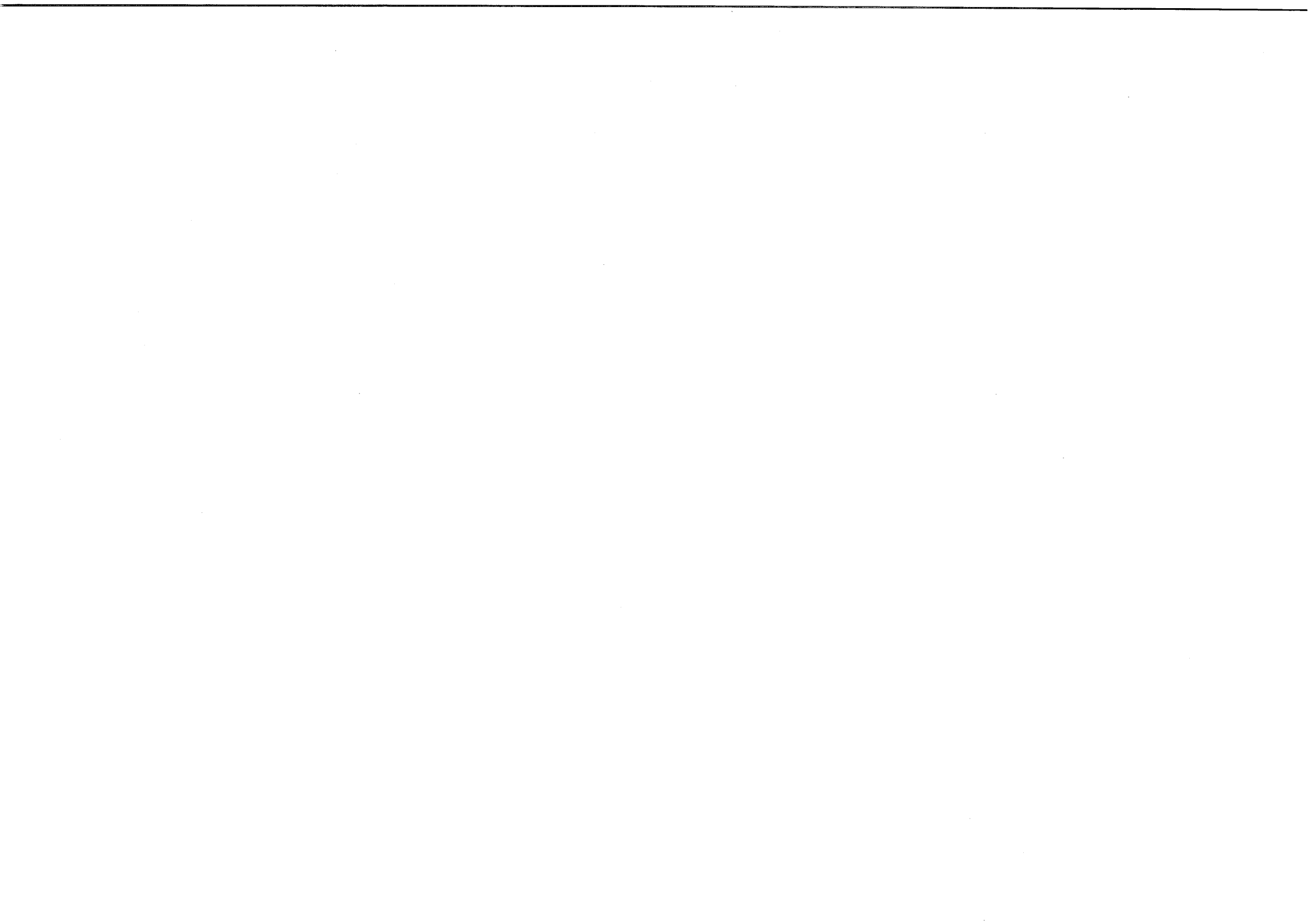
Rapporteur

Rapporteur

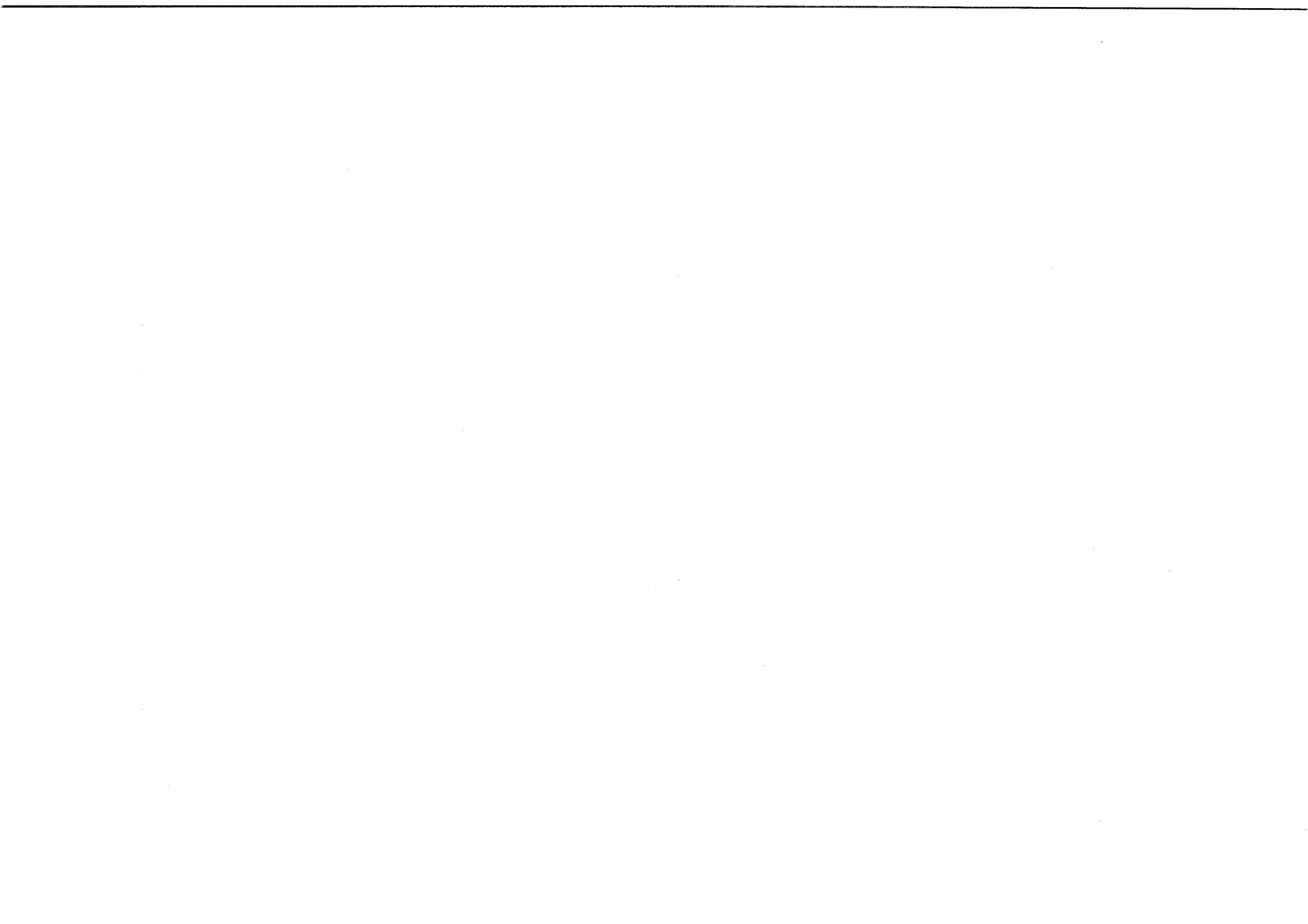
Examineur

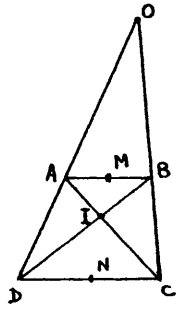
Examineur

Examineur

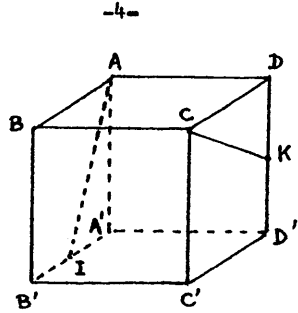


DESSINS RELATIFS AU TEXTE

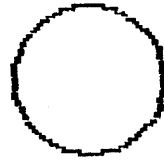




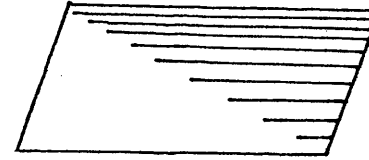
DESSIN 1.1



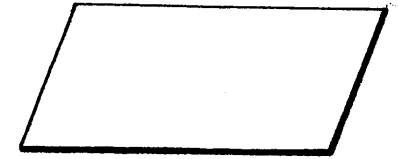
DESSIN 1.2



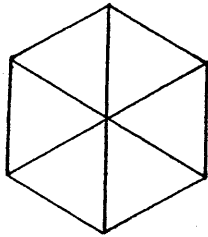
DESSIN 1.3



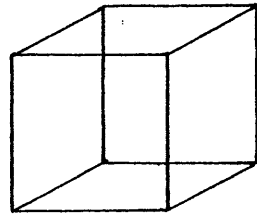
DESSIN 2.1



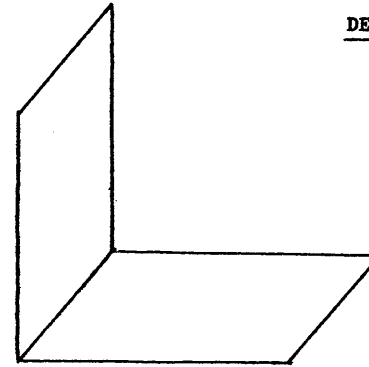
DESSIN 2.2



DESSIN 1.4



DESSIN 1.5

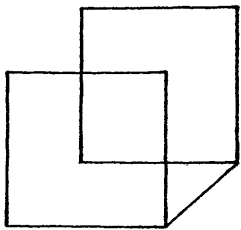


DESSIN 2.4

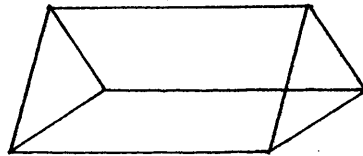


DESSIN 2.5

DESSIN 2.3: Voir pages suivantes



(A)



(B)

DESSIN 1.6



(A)



(B)

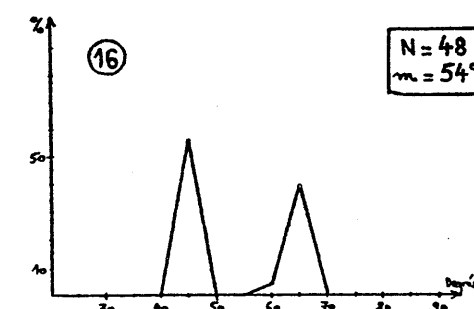
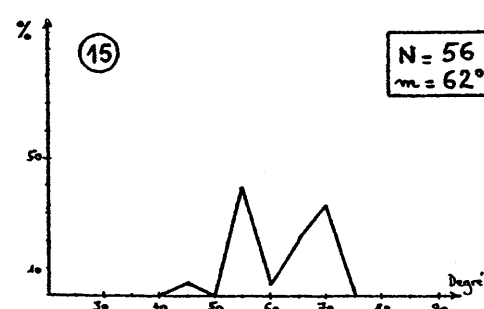
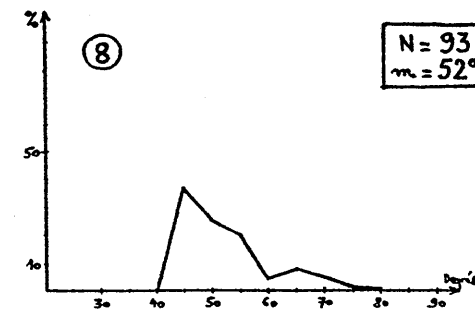
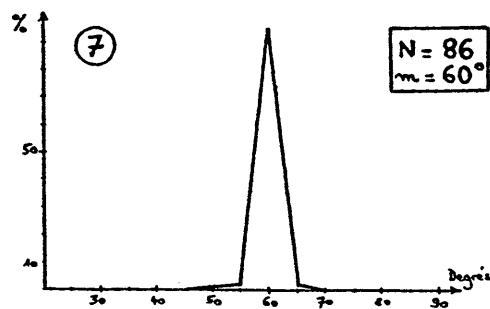
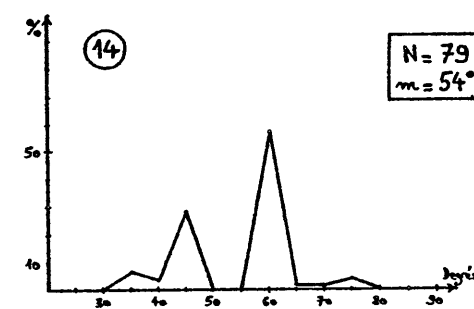
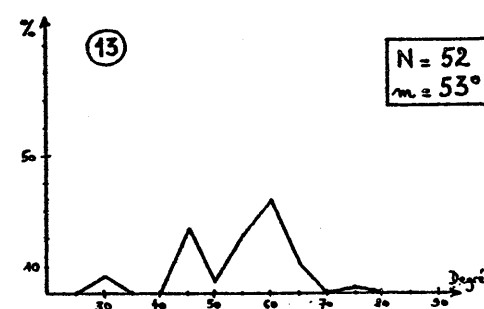
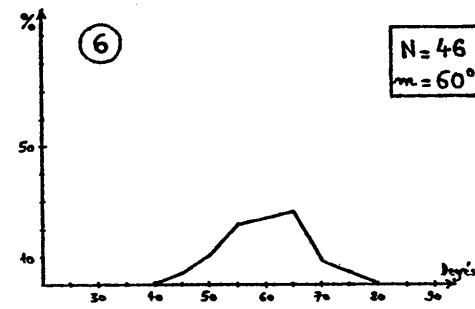
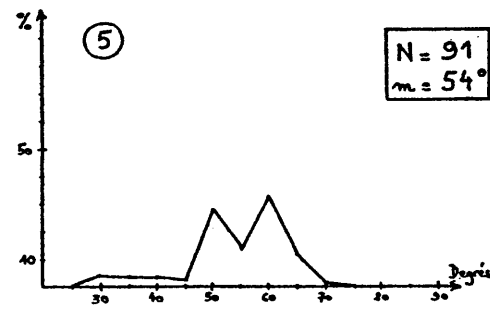
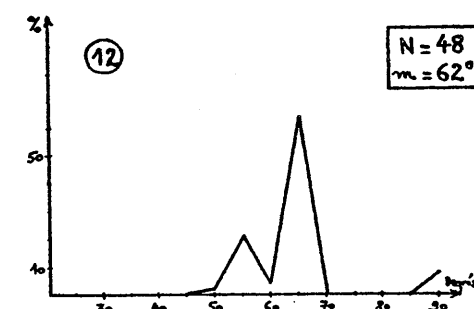
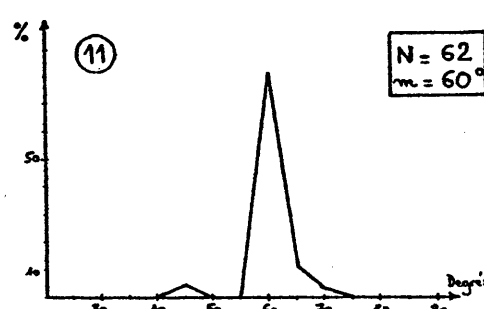
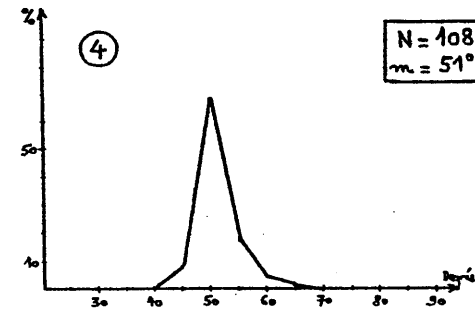
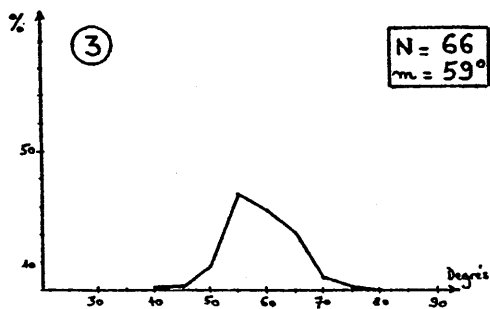
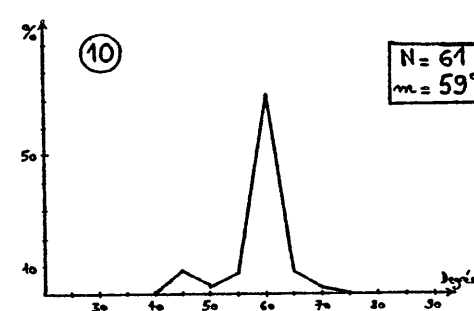
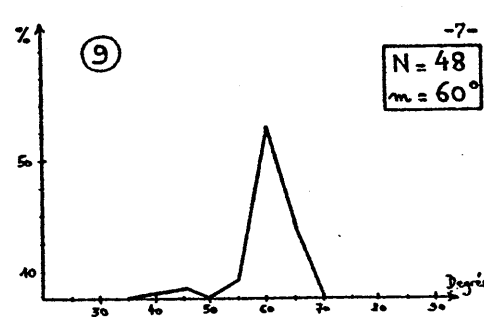
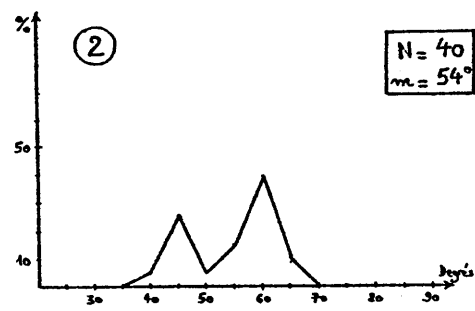
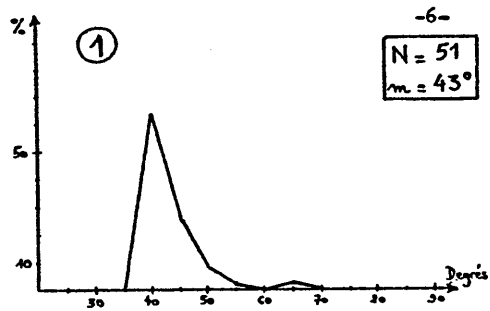


(C)



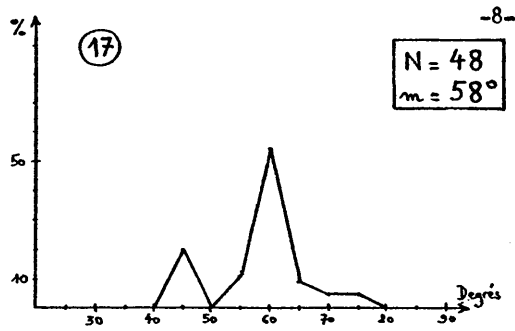
(D)

DESSIN 2.6

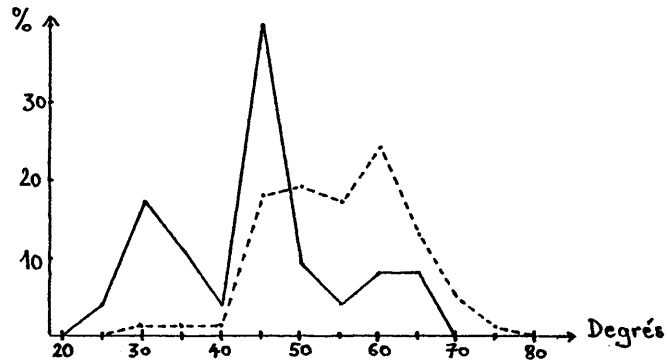
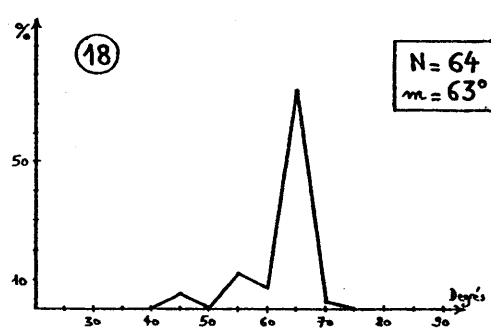


DESSIN 2.3 A

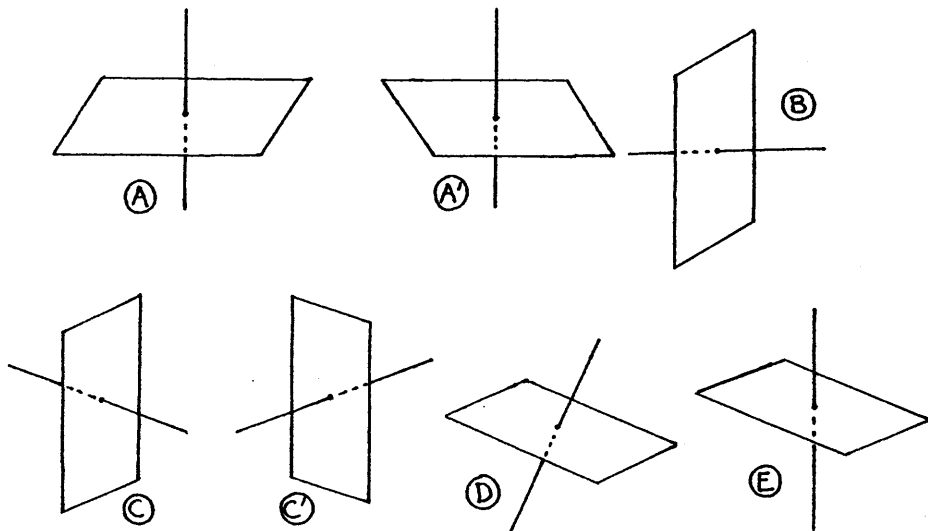
DESSIN 2.3 B



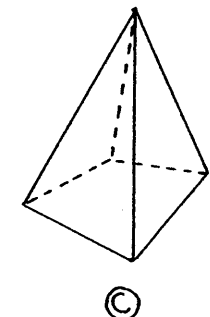
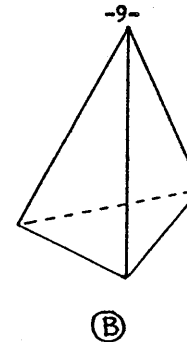
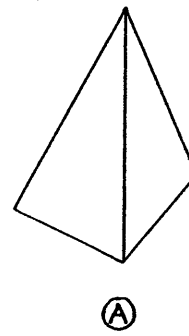
DESSIN 2.3 C



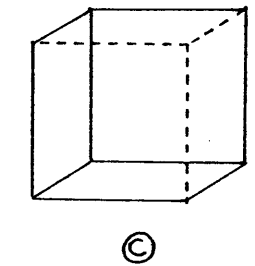
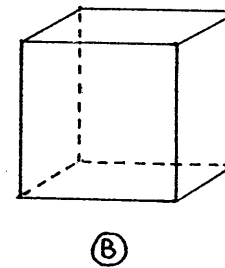
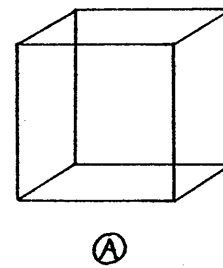
DESSIN 2.7



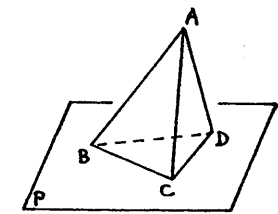
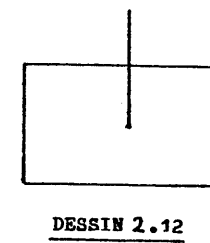
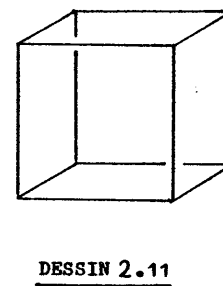
DESSIN 2.8



DESSIN 2.9



DESSIN 2.10



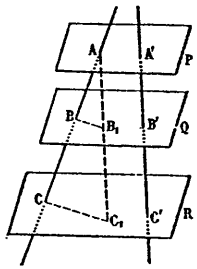
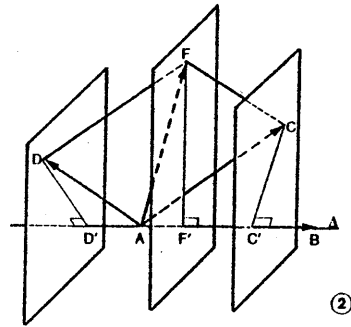


Fig. 31.

DESSIN 2.14



DESSIN 2.15

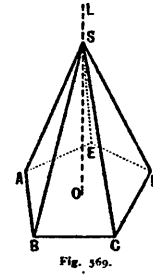
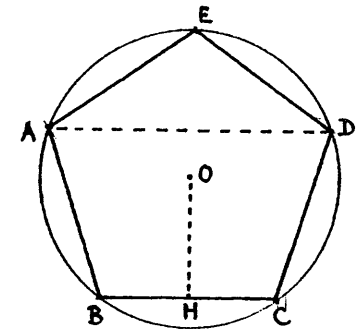
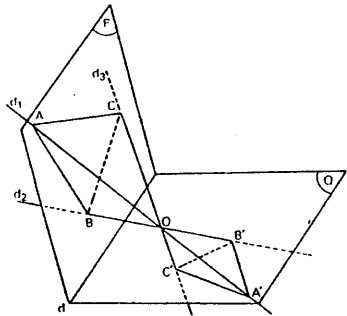


Fig. 369.

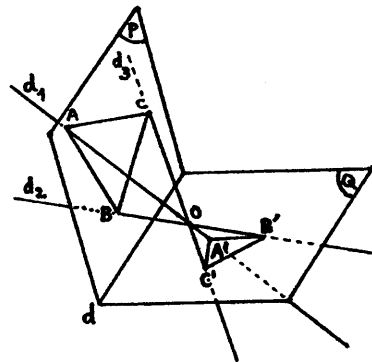
DESSIN 2.18



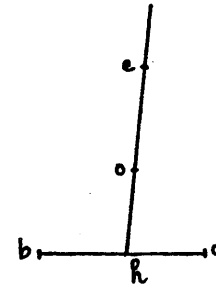
DESSIN 2.19



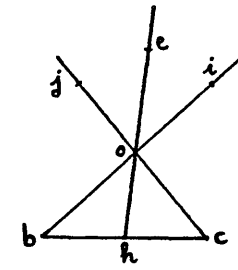
DESSIN 2.16



DESSIN 2.17

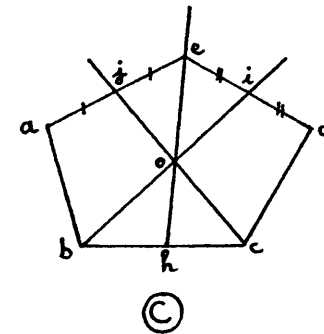


(A)

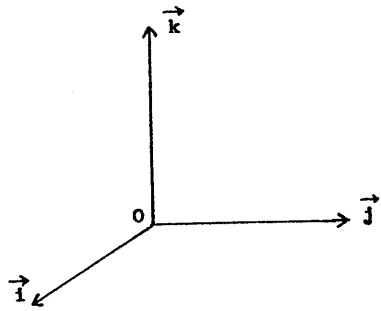


(B)

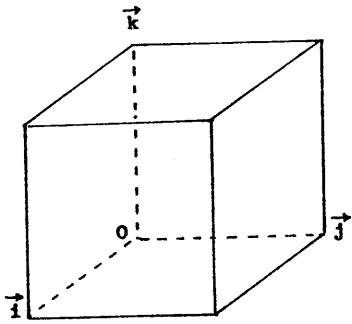
DESSIN 2.20



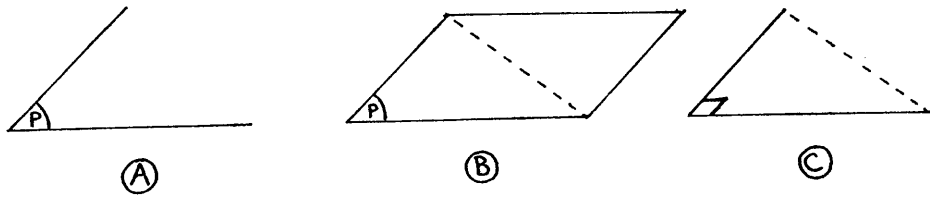
(C)



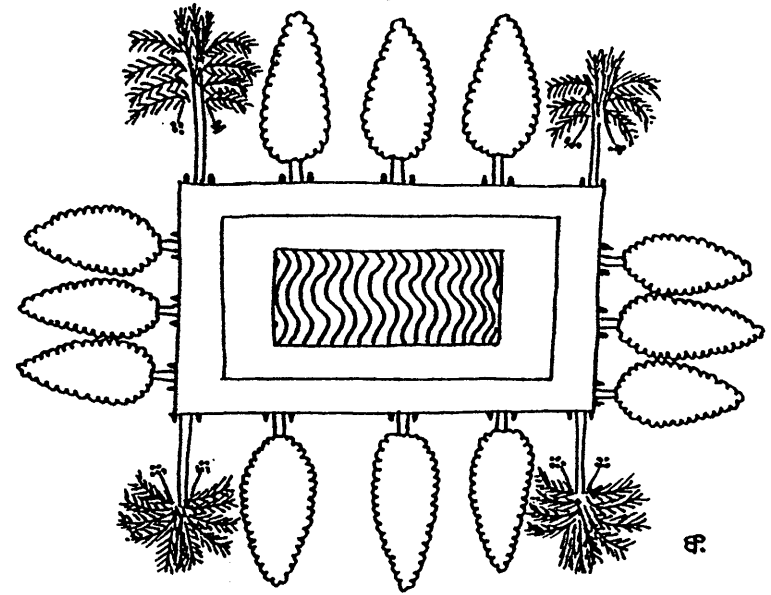
DESSIN 3.1



DESSIN 3.2



DESSIN 3.3



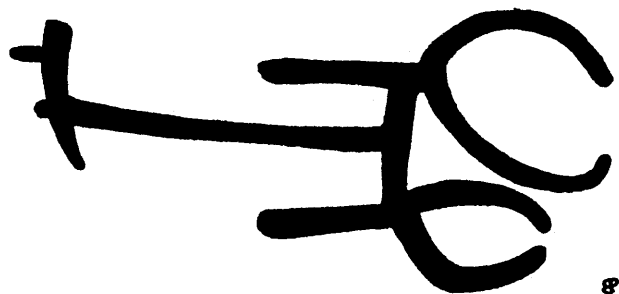
DESSIN 4.1

(Egypte (14e siècle av. J.-C.))



DESSIN 4.2

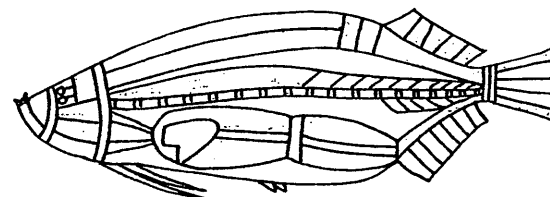
Bouquetin gravé. Grotte Bayol, Collias (30)



8

DESSIN 4.3

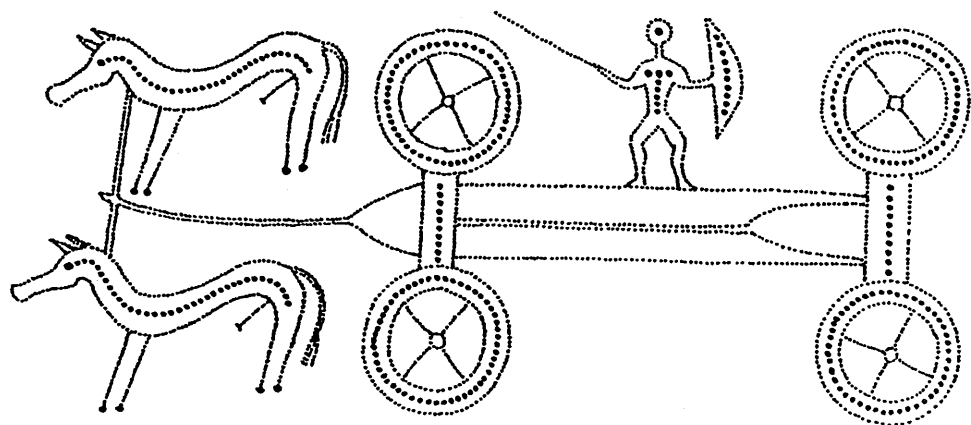
Gravure rupestre. Mont Bego (06)



8.

DESSIN 4.5

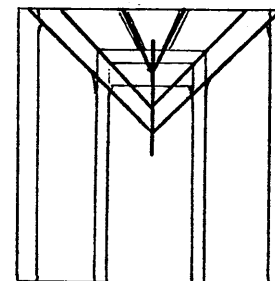
Peinture sur écorce. Terre d'Arnhem (Australie)
Musée de l'Homme



8.

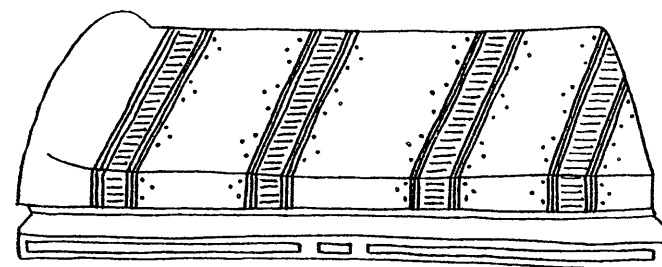
DESSIN 4.4

Détail de la décoration d'une banquette de bronze
(6e siècle av. J.-C.) Hochdorf (All.)



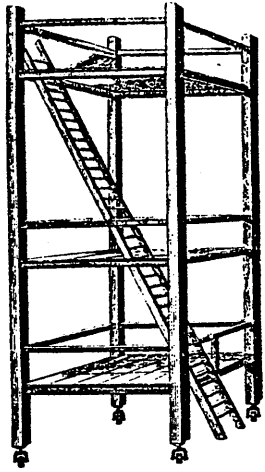
DESSIN 4.6

Décoration murale de Boscoreale
(1er siècle). Musée de Naples

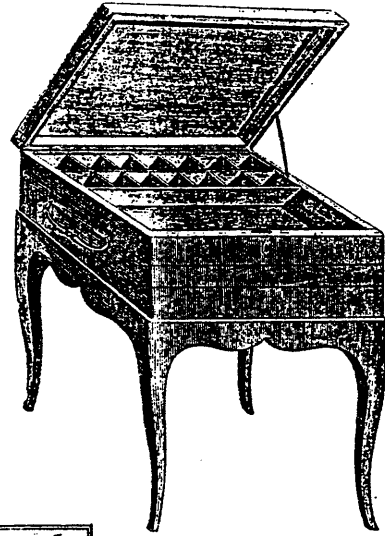


DESSIN 4.7

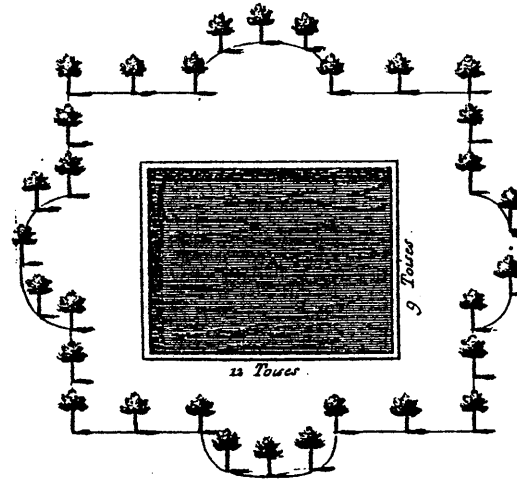
Le lit de mort de Moïse, d'après la
miniature "L'appel de Josué" (14e siècle)
La Bible de Naples.



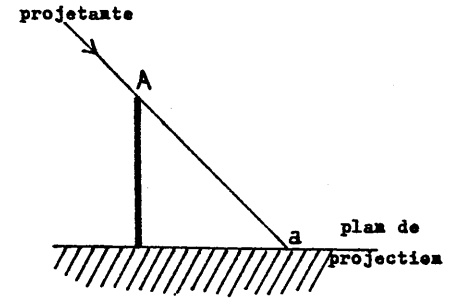
DESSIN 4.8



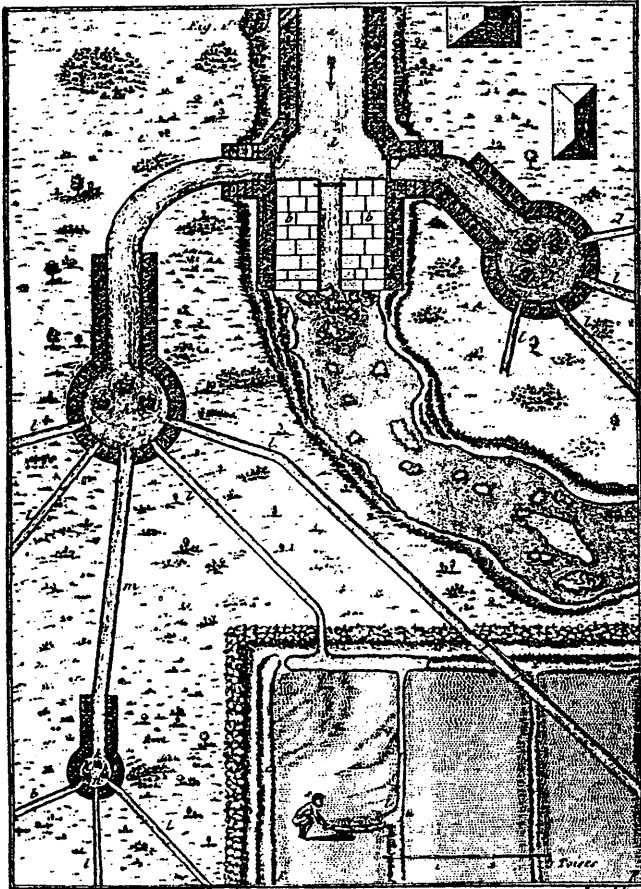
DESSIN 4.9



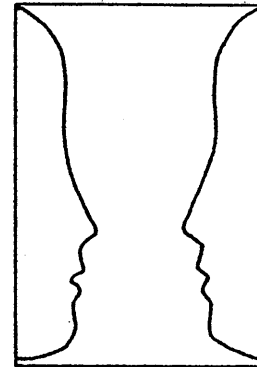
DESSIN 4.11



DESSIN 4.12



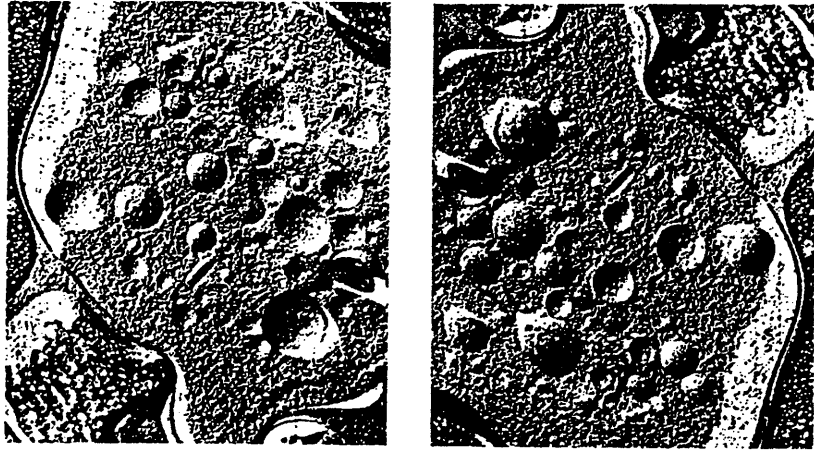
DESSIN 4.10



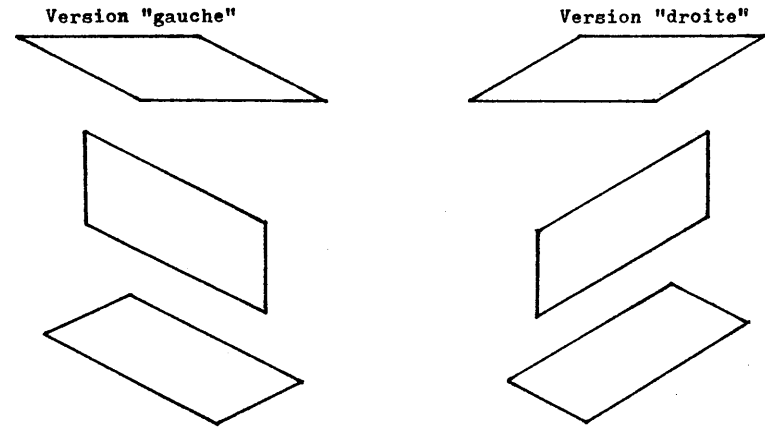
DESSIN 4.13



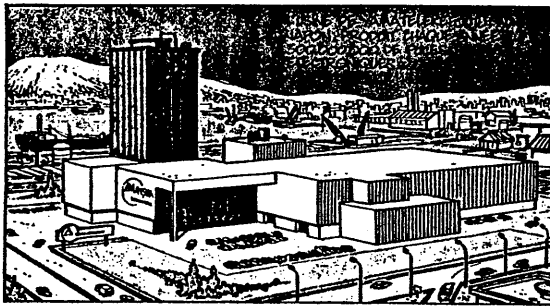
DESSIN 4.14



DESSIN 5.1
(extrait de LANNERS, 1975, p.102)



DESSIN 5.3

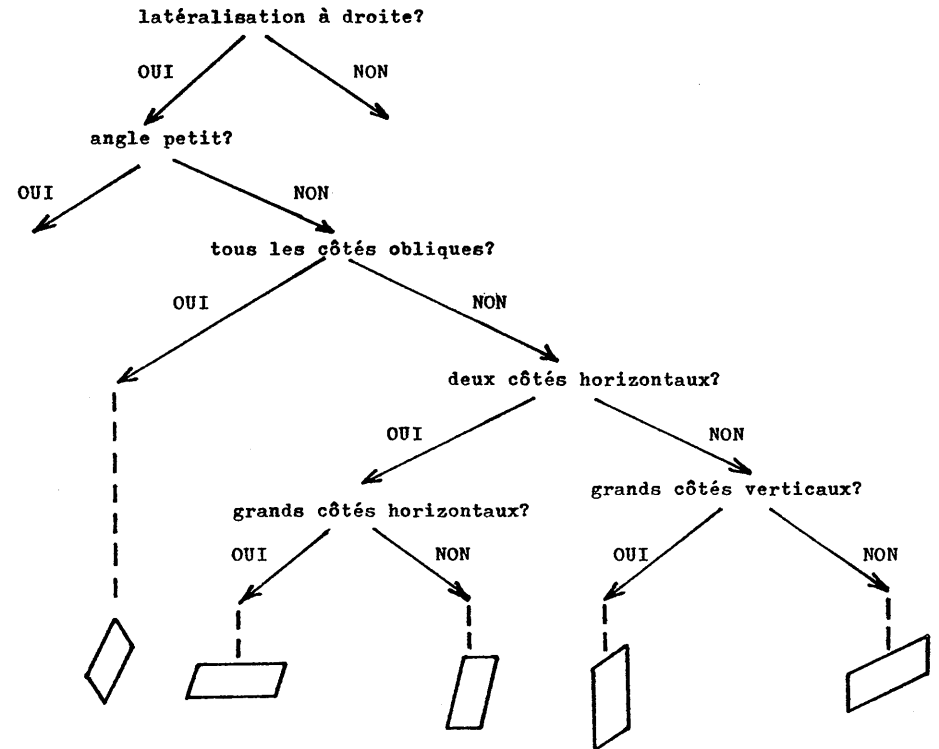


Ⓐ

DESSIN 5.2

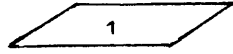
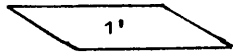


Ⓑ



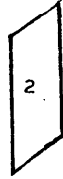
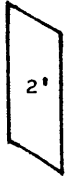
DESSIN 5.4

%1S: 92.3.5
%TD: 98.2.0



%1S: 95.0.5
%TD: 98.2.0

%1S: 3.89.8
%TD: 2.88.10



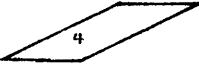
%1S: 1.89.10
%TD: 2.94.4

%1S: 0.78.22
%TD: 4.82.14



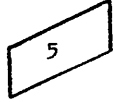
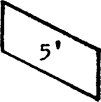
%1S: 0.81.19
%TD: 2.82.16

%1S: 63.4.33
%TD: 65.4.31



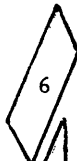
%1S: 82.2.16
%TD: 80.0.20

%1S: 9.67.24
%TD: 10.61.29



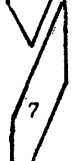
%1S: 6.75.19
%TD: 6.61.33

%1S: 3.18.79
%TD: 8.33.59



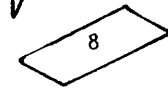
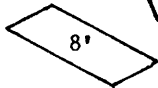
%1S: 0.27.73
%TD: 4.33.63

%1S: 0.43.57
%TD: 6.43.51



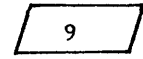
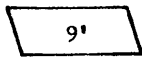
%1S: 0.54.46
%TD: 4.49.47

%1S: 44.5.51
%TD: 53.2.45



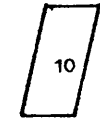
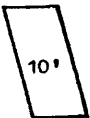
%1S: 46.6.48
%TD: 55.6.39

%1S: 43.33.24
%TD: 47.22.31



%1S: 45.30.25
%TD: 57.14.29

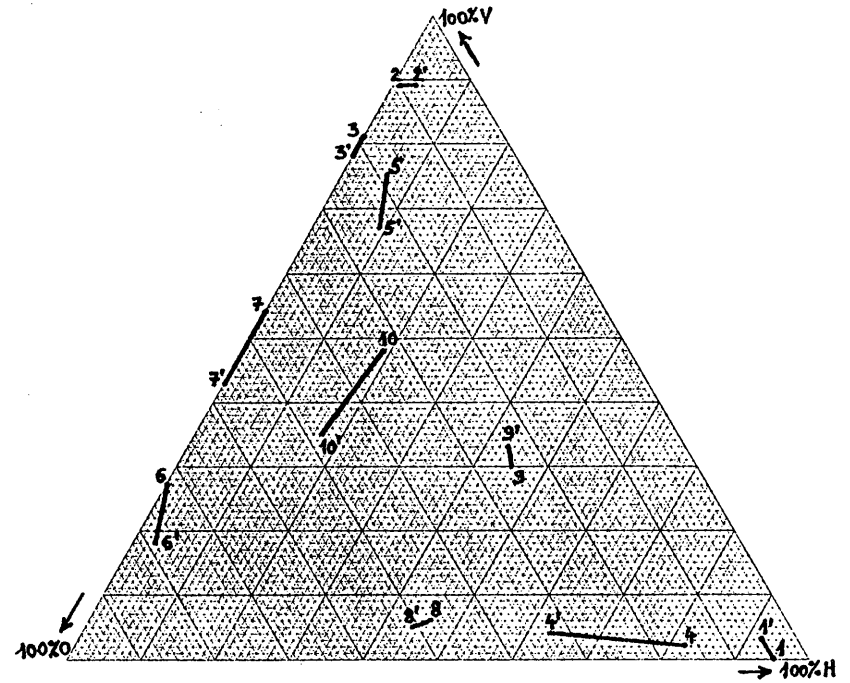
%1S: 17.35.48
%TD: 8.35.57



%1S: 19.48.33
%TD: 24.43.33

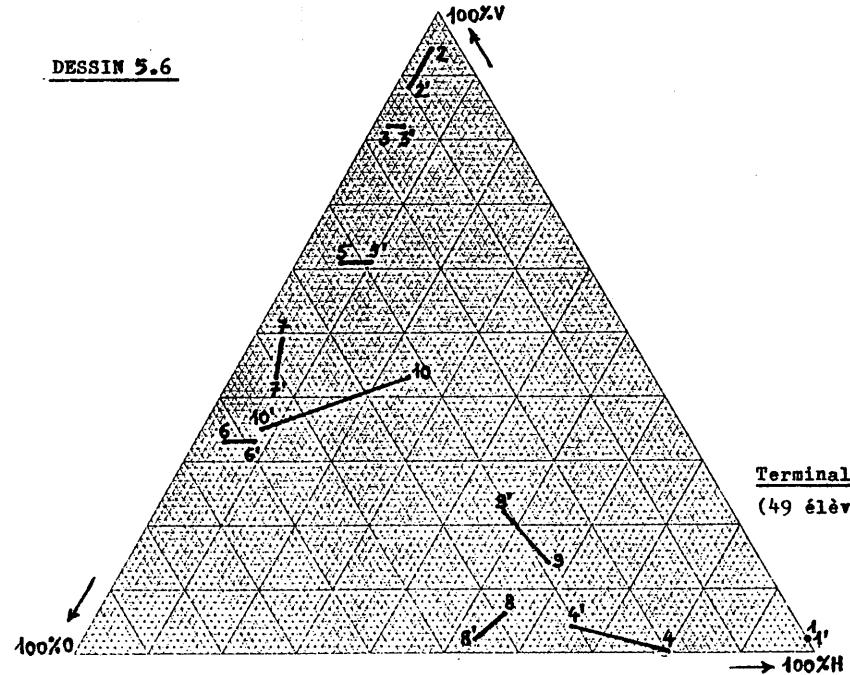
DESSIN 5.5

Triplets (H,V,0)

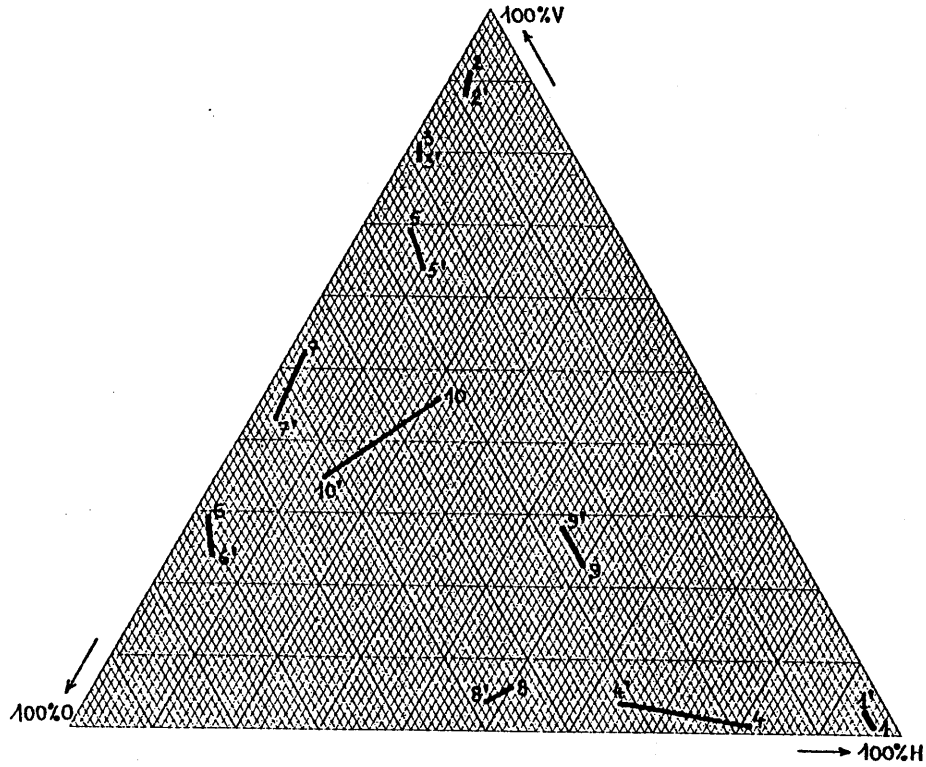


Premières S (63 élèves)

DESSIN 5.6

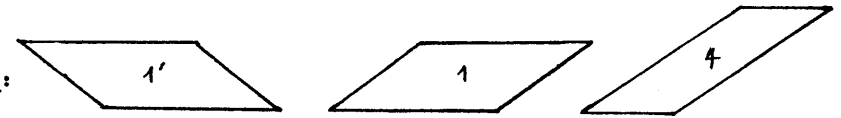


Terminales D (49 élèves)

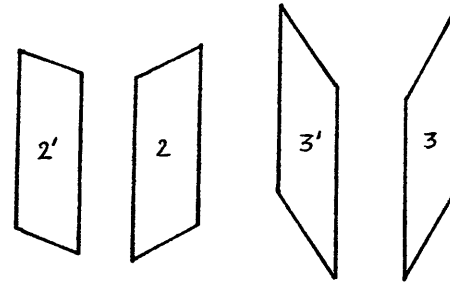


DESSIN 5.7
Résultats globaux

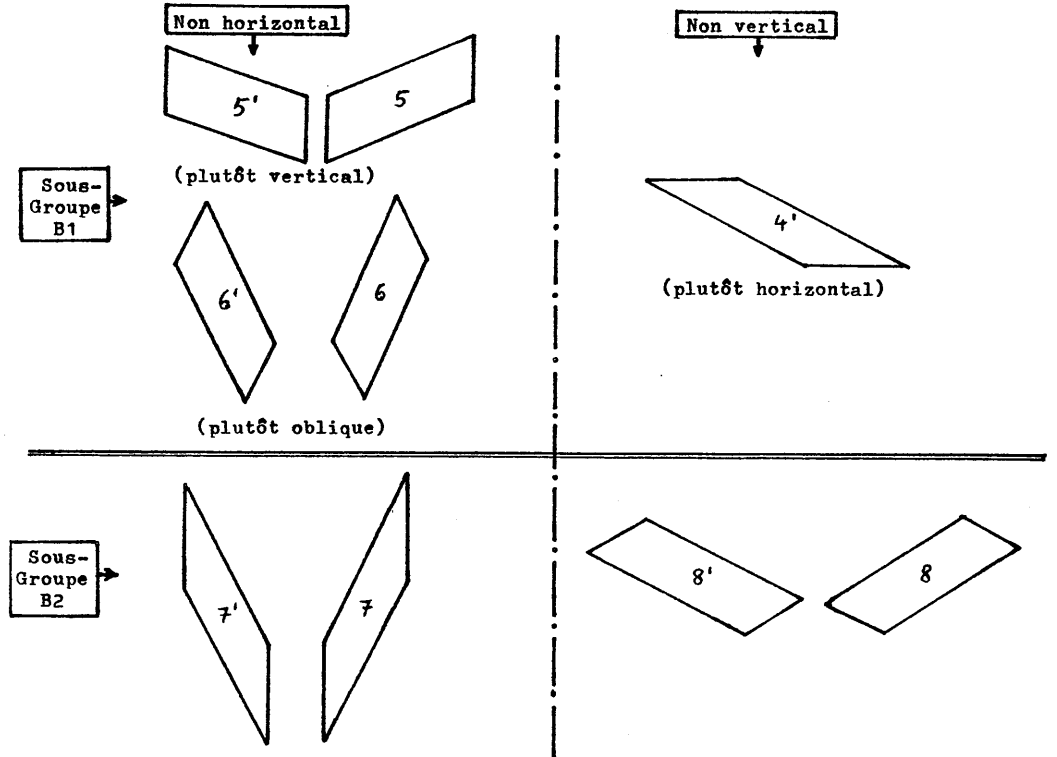
horizontal:



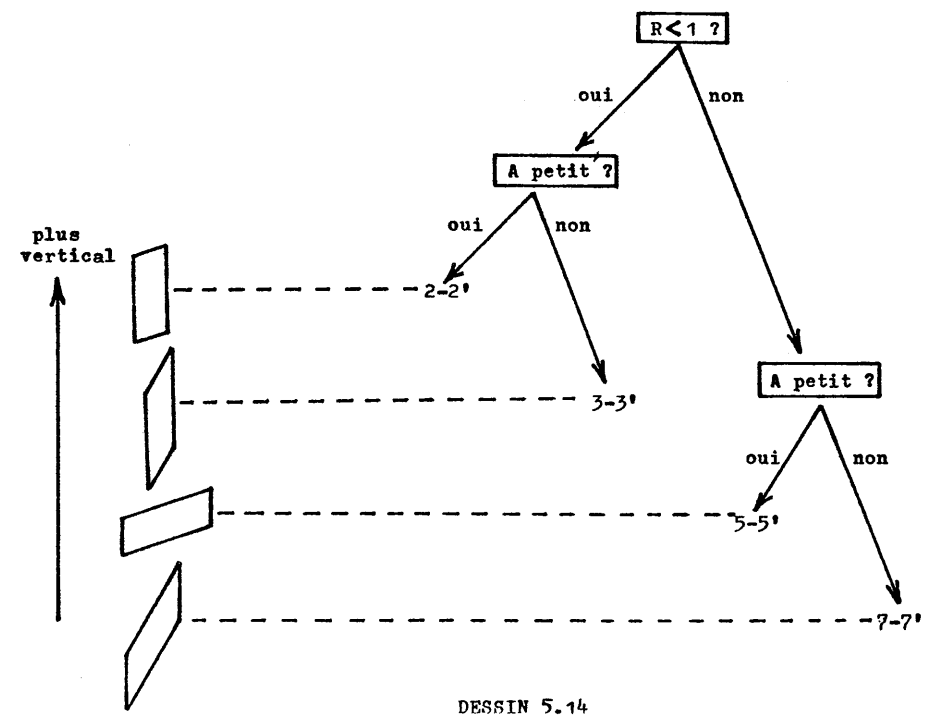
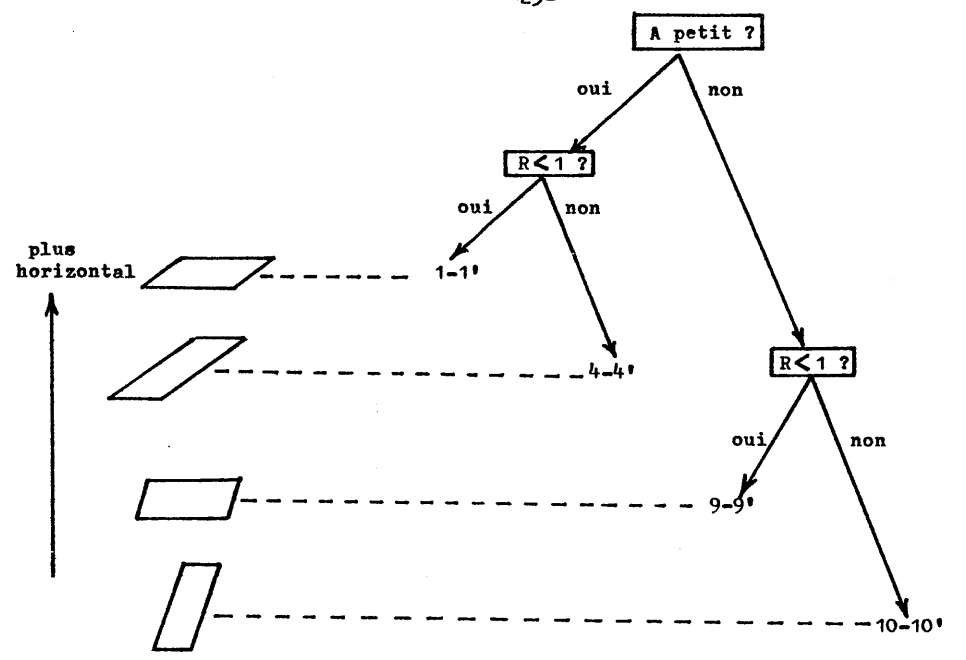
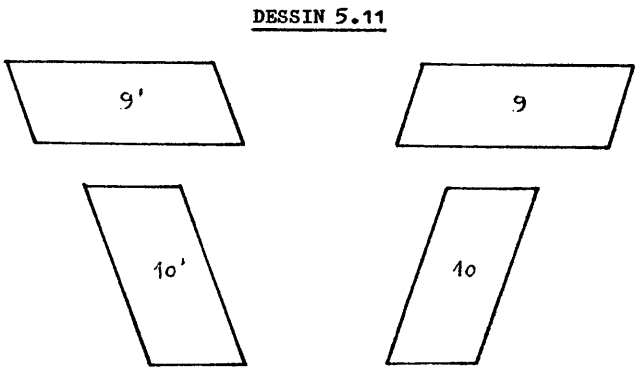
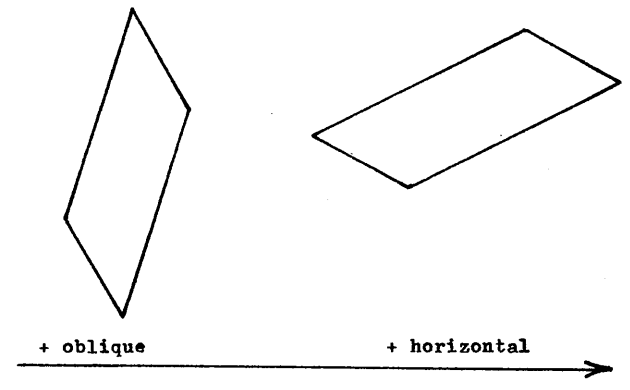
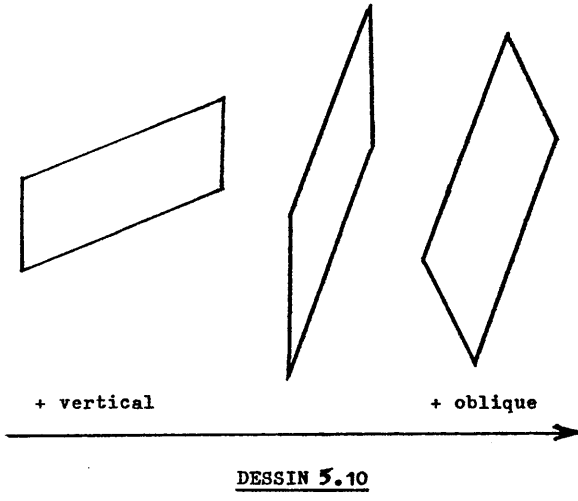
vertical:

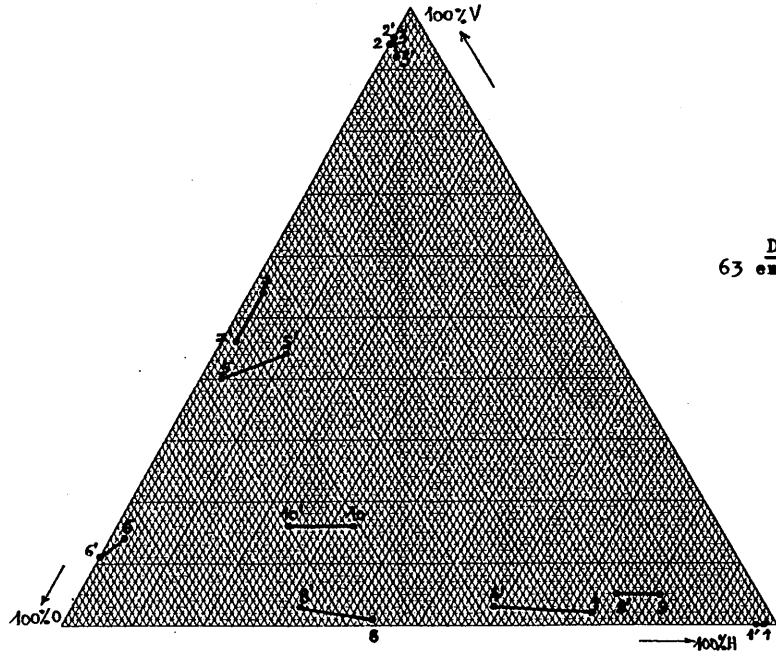


DESSIN 5.8

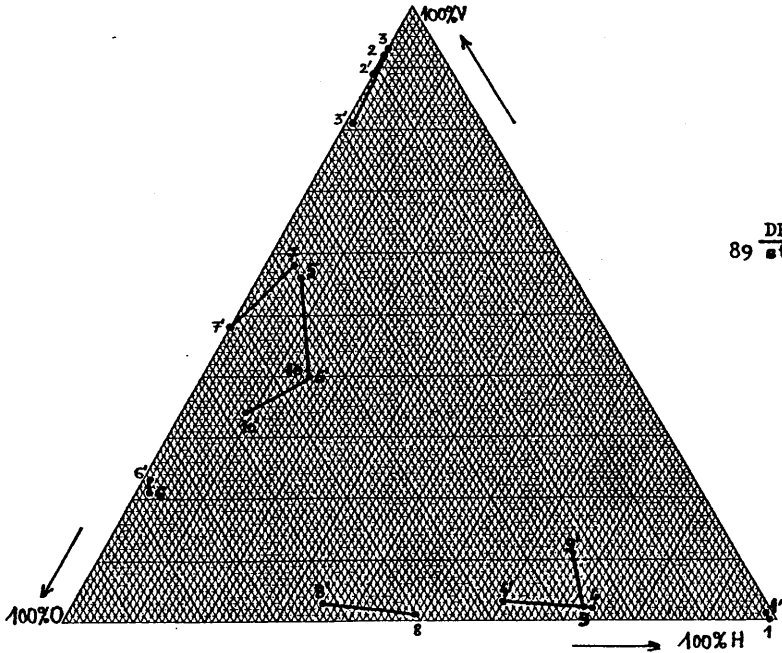


DESSIN 5.9

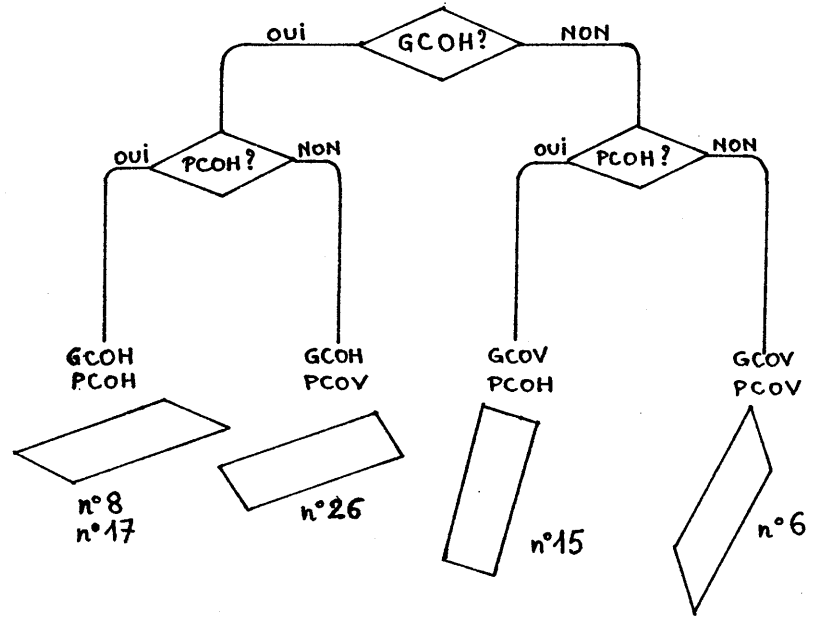




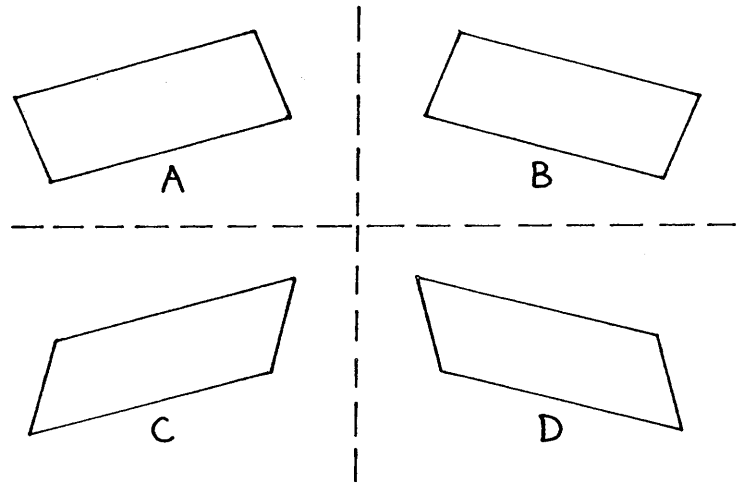
DESSIN 5.15
63 enseignants



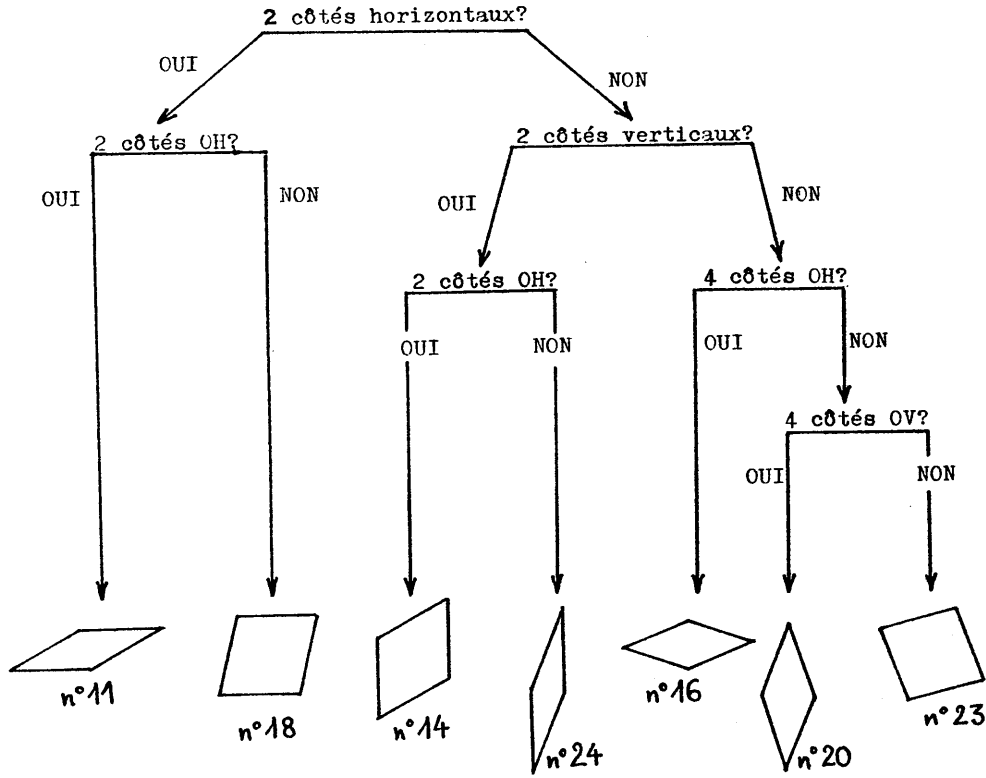
DESSIN 5.16
89 stagiaires



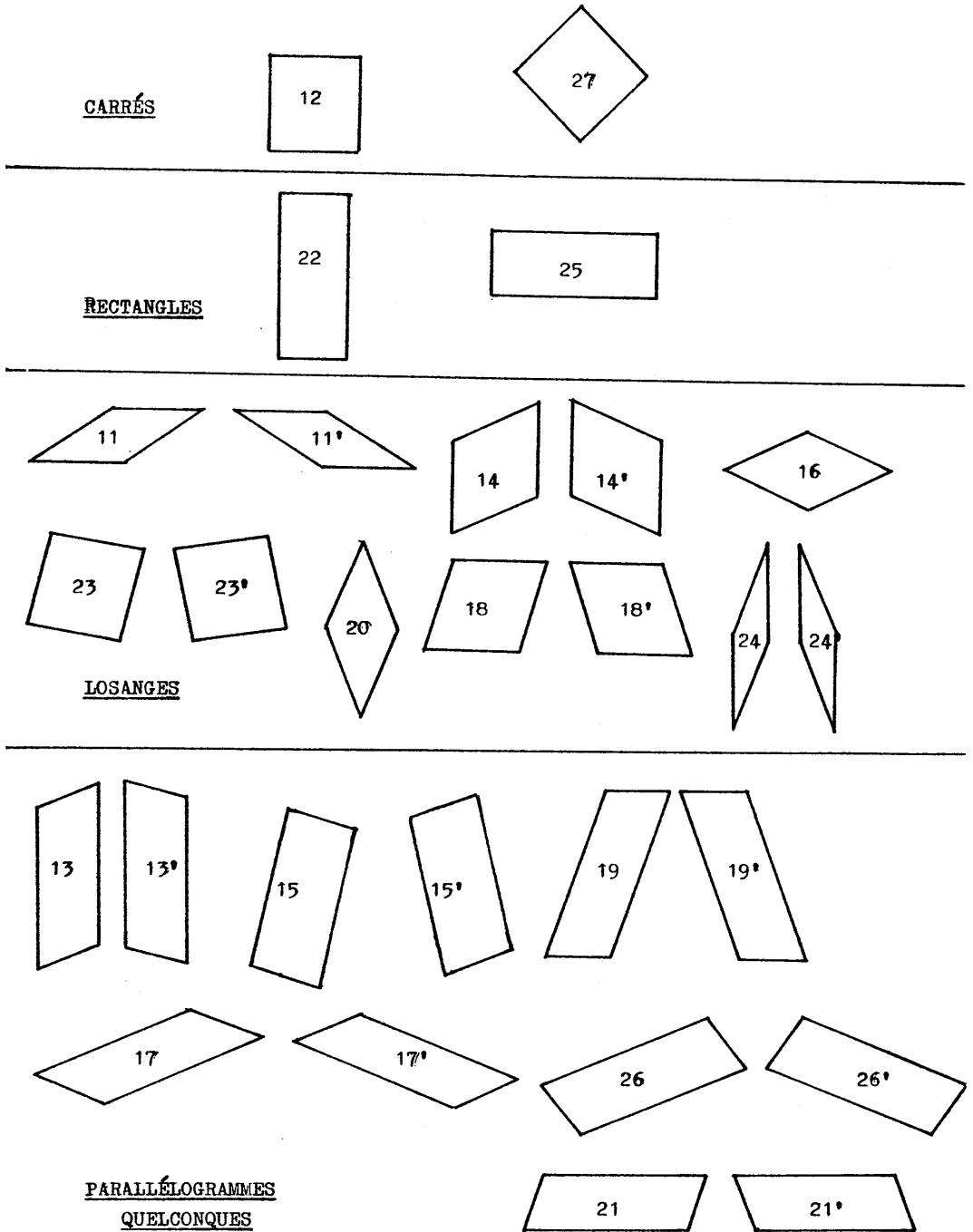
DESSIN 5.17



DESSIN 5.18

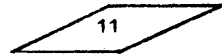
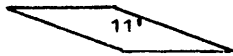


DESSIN 5.19



DESSIN 5.20

%1S: 90.0.10
%TD: 90.2.8

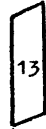
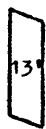


%1S: 95.2.3
%TD: 90.2.8



%1S: 8.89.3
%TD: 2.98.0

%1S: 1.84.15
%TD: 0.92.8



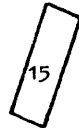
%1S: 0.87.13
%TD: 0.98.2

%1S: 2.82.16
%TD: 2.85.13

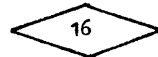


%1S: 0.85.15
%TD: 0.92.8

%1S: 2.18.80
%TD: 0.10.90

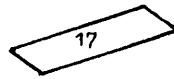
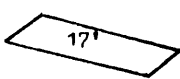


%1S: 2.18.80
%TD: 2.15.83



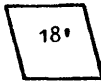
%1S: 79.6.15
%TD: 83.2.15

%1S: 32.7.61
%TD: 54.2.44



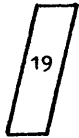
%1S: 32.7.61
%TD: 44.0.56

%1S: 12.56.32
%TD: 9.60.31

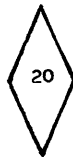


%1S: 13.60.27
%TD: 6.65.29

%1S: 8.32.60
%TD: 2.42.56



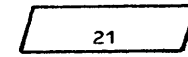
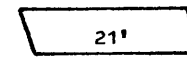
%1S: 12.53.35
%TD: 4.56.40



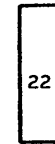
%1S: 3.55.42
%TD: 2.40.58

DESSIN 5.21A

%1S: 32.37.31
%TD: 52.29.19

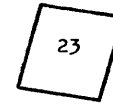


%1S: 35.42.23
%TD: 60.21.19



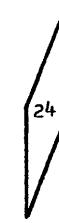
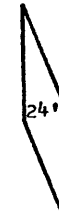
%1S: 9.88.3
%TD: 4.94.2

%1S: 11.17.72
%TD: 10.29.61

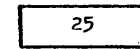


%1S: 14.16.70
%TD: 25.8.67

%1S: 3.69.28
%TD: 2.67.31

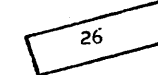
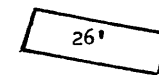


%1S: 3.67.30
%TD: 0.67.33

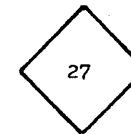


%1S: 25.72.3
%TD: 31.65.4

%1S: 25.12.63
%TD: 27.14.59

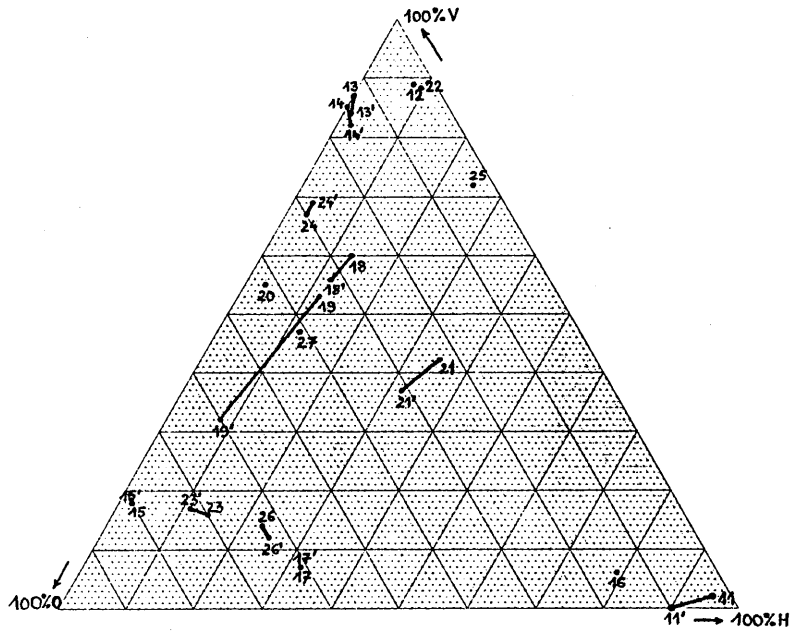


%1S: 23.14.63
%TD: 27.6.67



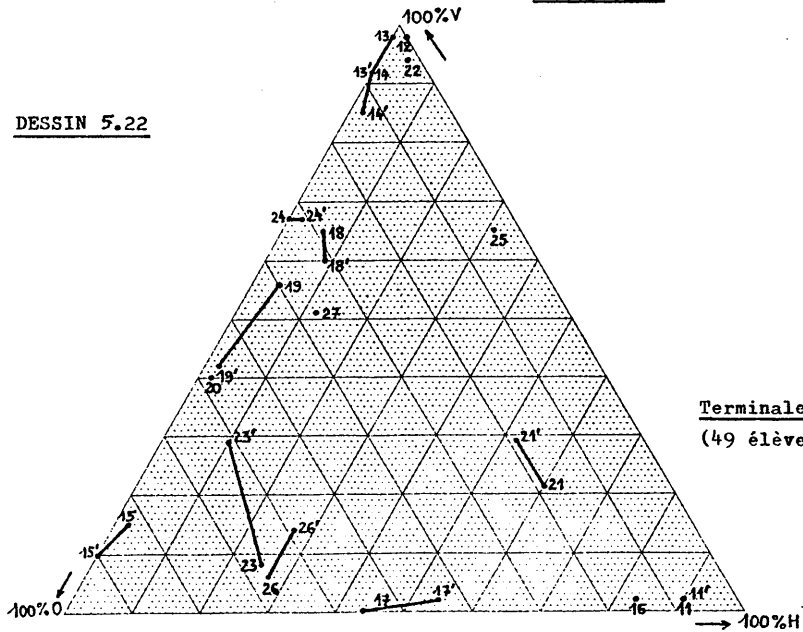
%1S: 12.47.41
%TD: 12.51.37

DESSIN 5.21B

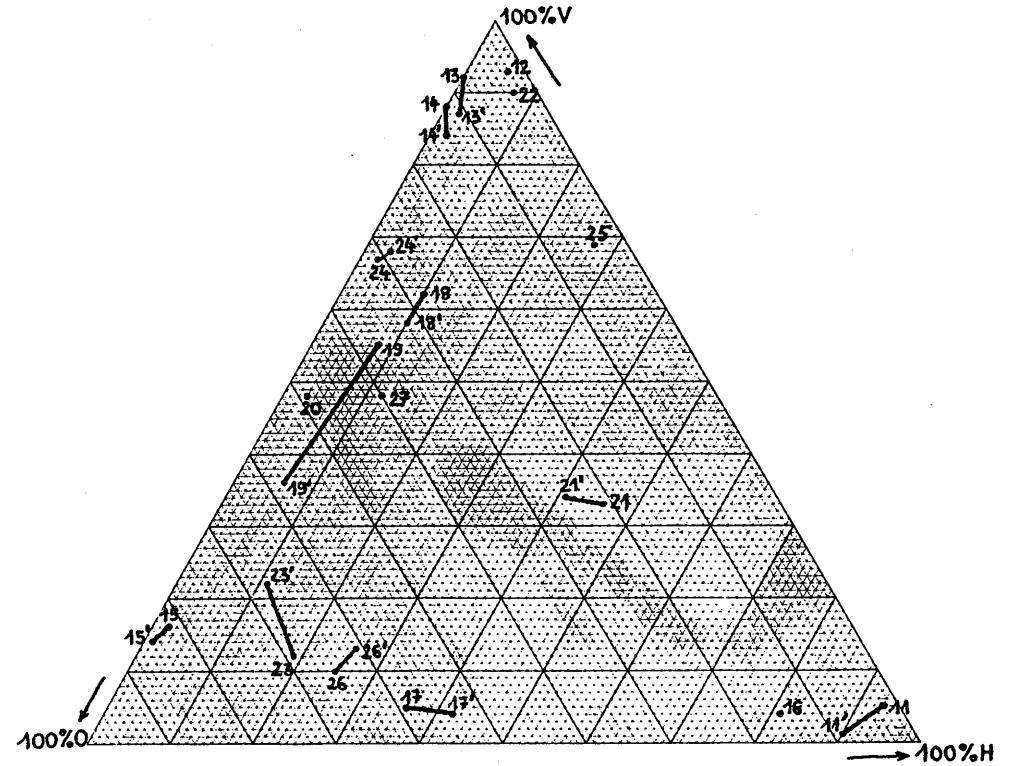


Premières S (62 élèves)

DESSIN 5.22



Terminales D
(49 élèves)

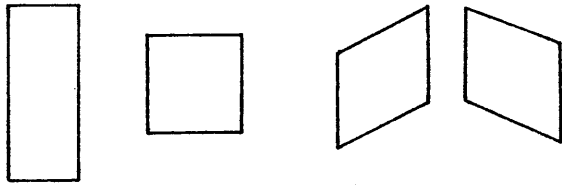


DESSIN 5.23
Résultats globaux

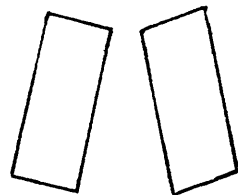
horizontal:



vertical:



oblique:

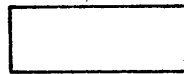
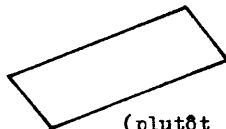
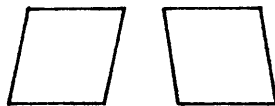


DESSIN 5.24: GROUPE A

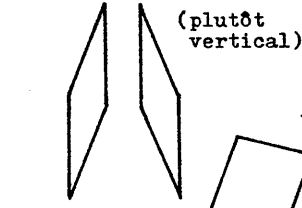
Non horizontal

Non vertical

Non oblique

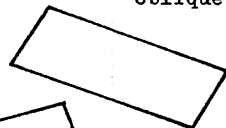


Sous-Groupe B1



(plutôt vertical)

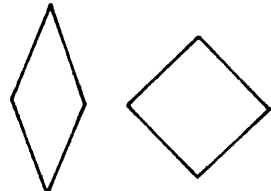
(plutôt oblique)



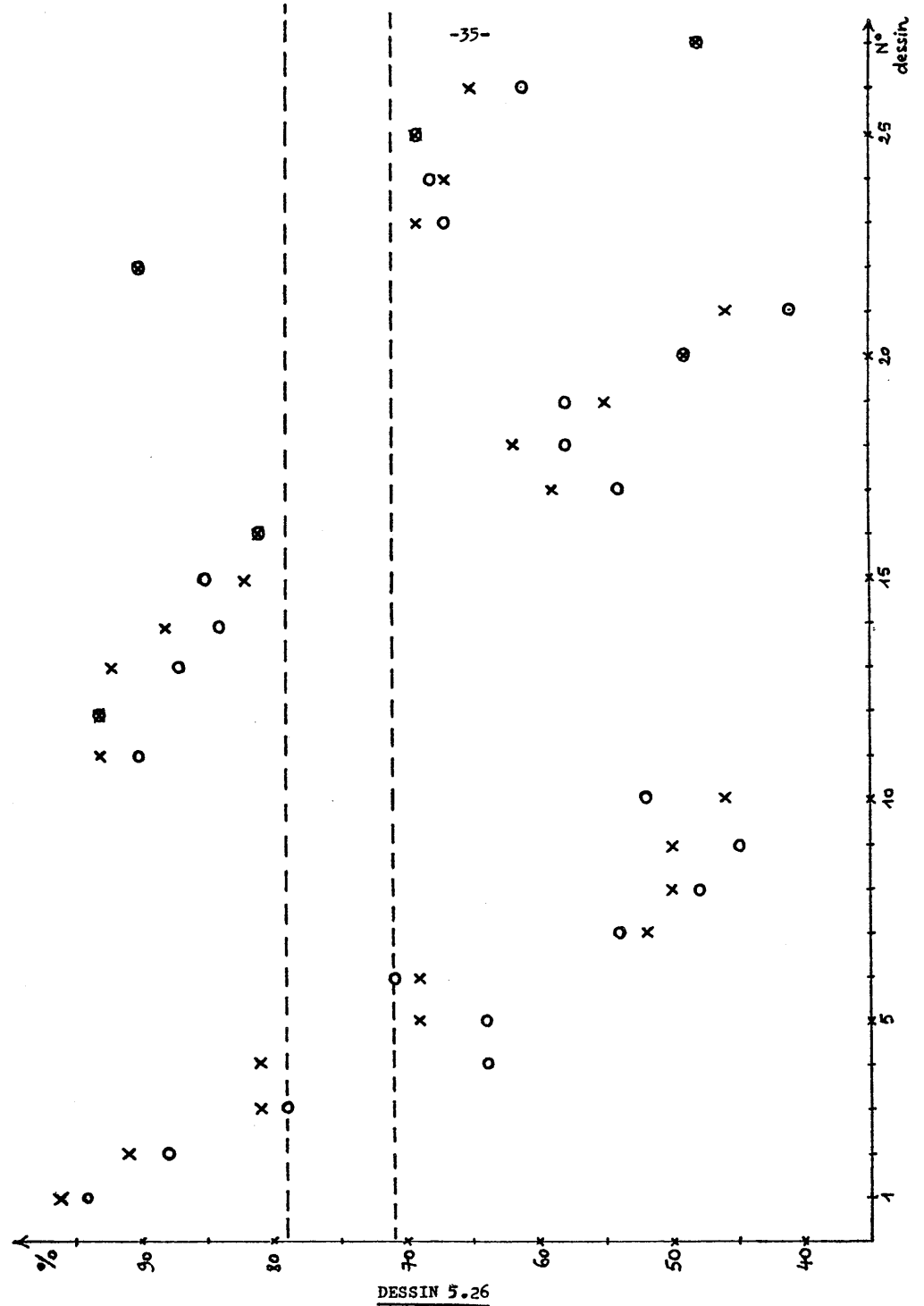
(plutôt vertical)

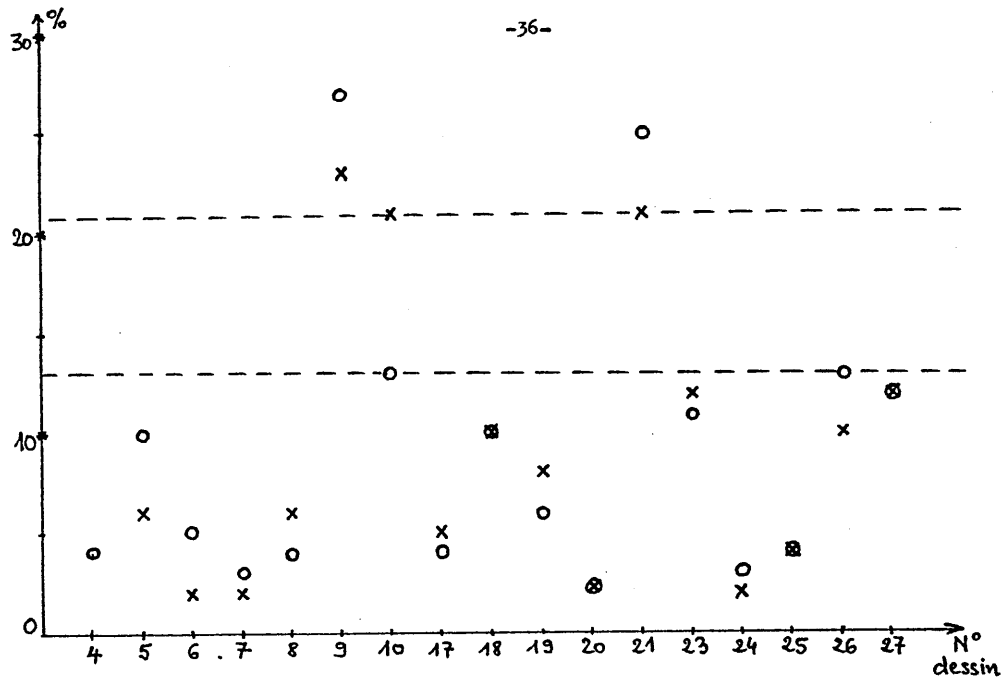
(plutôt vertical)

Sous-Groupe B2

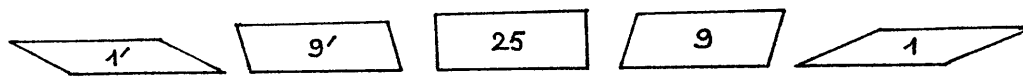


DESSIN 5.25: GROUPE B

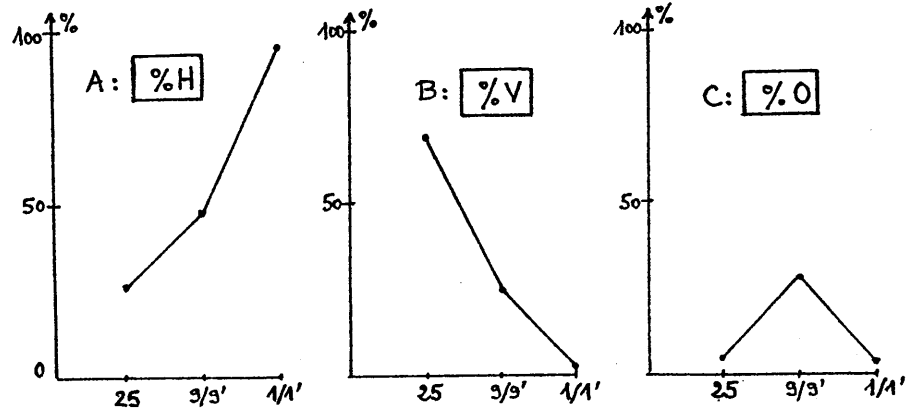




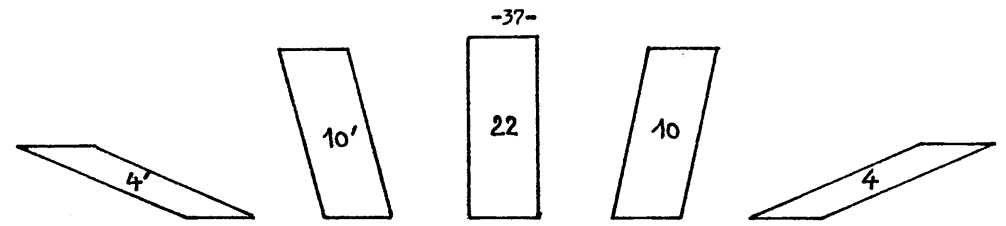
DESSIN 5.27



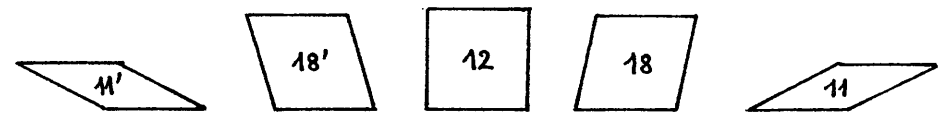
DESSIN 5.28



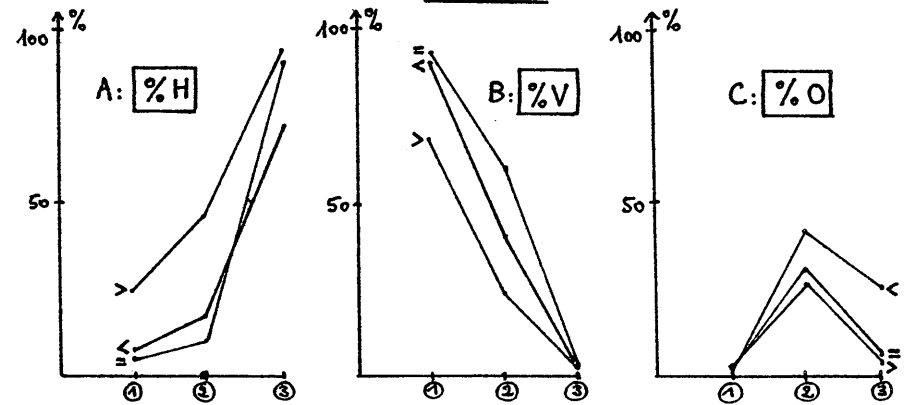
DESSIN 5.29



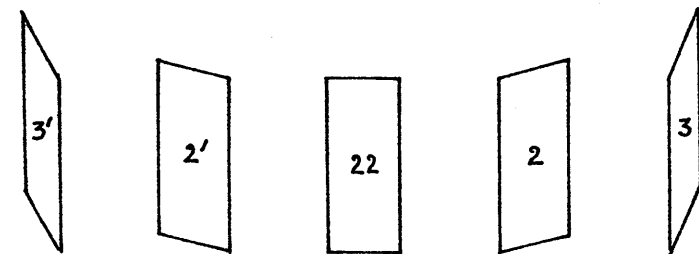
DESSIN 5.30



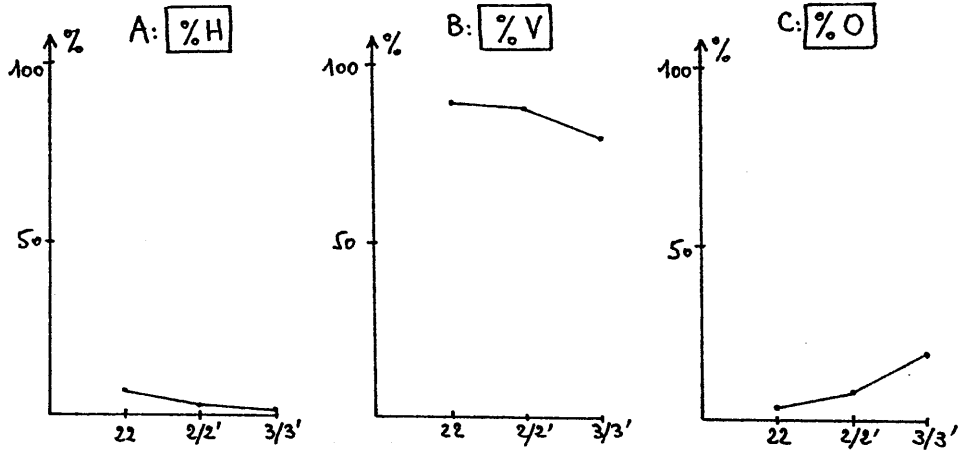
DESSIN 5.31



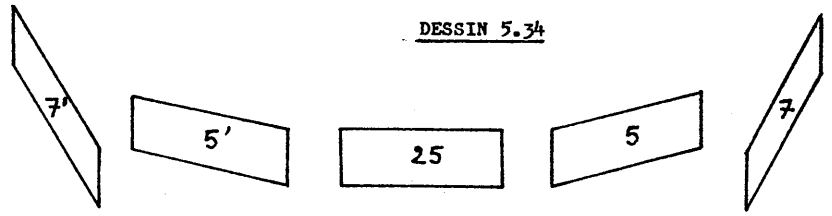
DESSIN 5.32



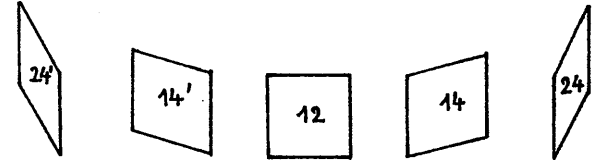
DESSIN 5.33



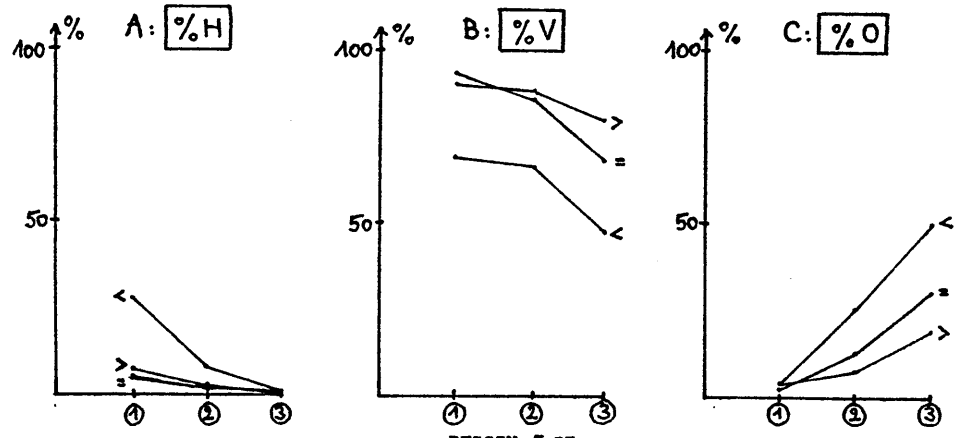
DESSIN 5.34



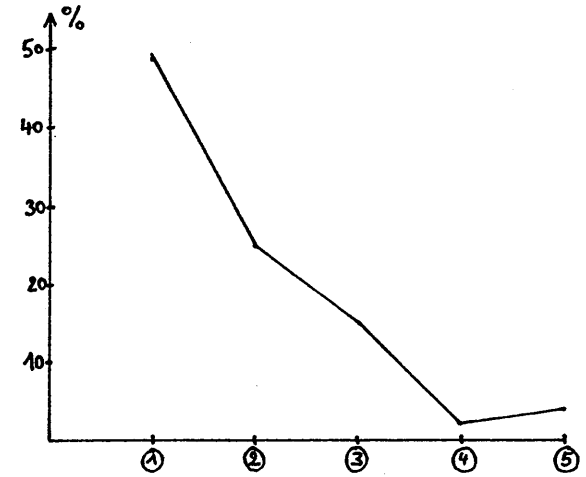
DESSIN 5.35



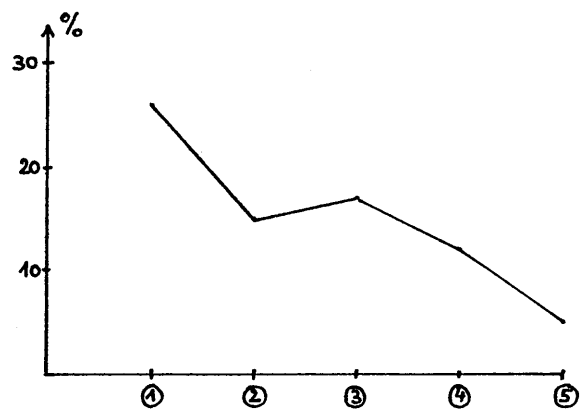
DESSIN 5.36



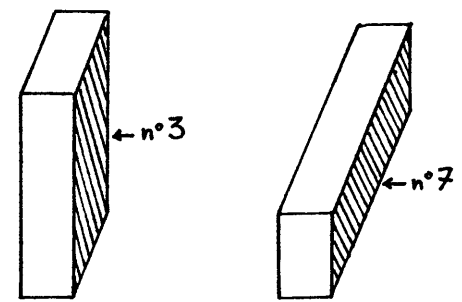
DESSIN 5.37



DESSIN 5.38

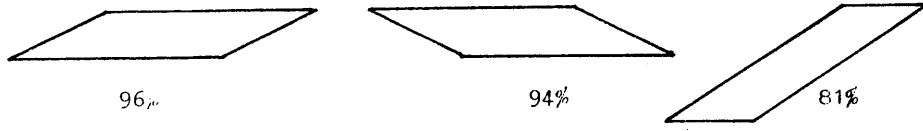


DESSIN 5.39

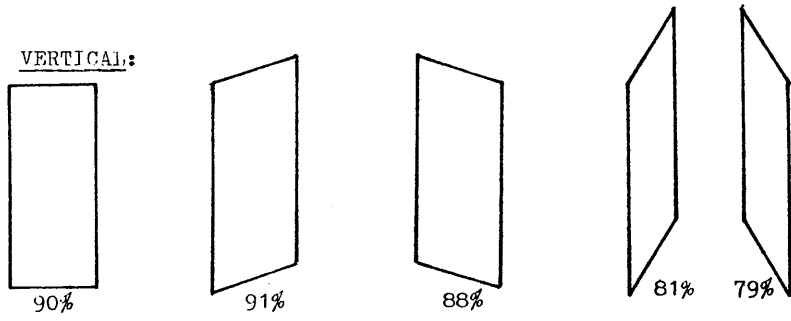


DESSIN 5.40

HORIZONTAL:



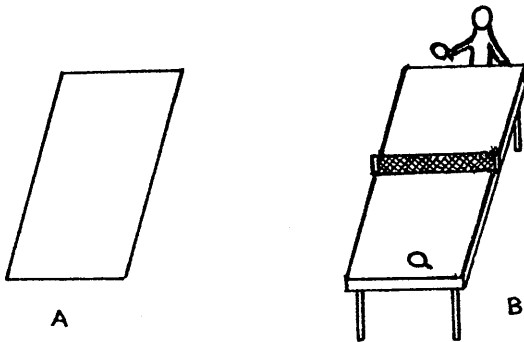
VERTICAL:



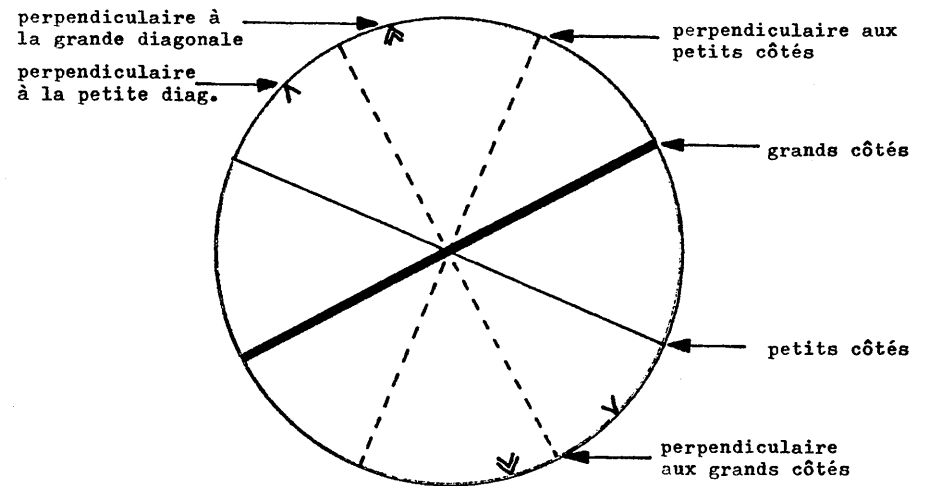
OBLIQUE:



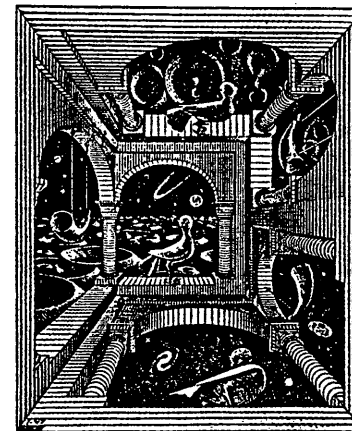
DESSIN 5.41



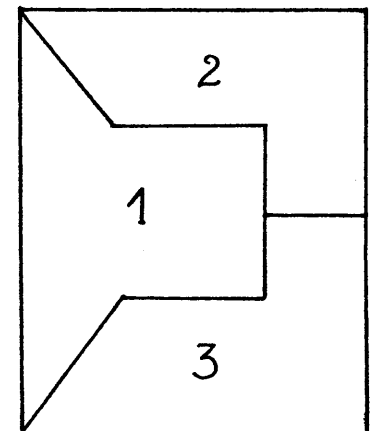
DESSIN 5.42



DESSIN 6.1

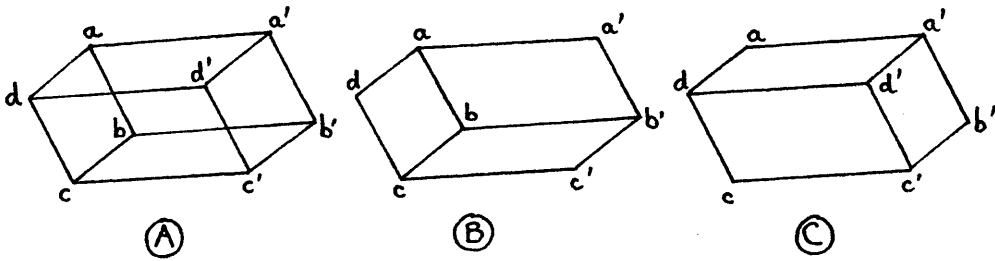


(A)

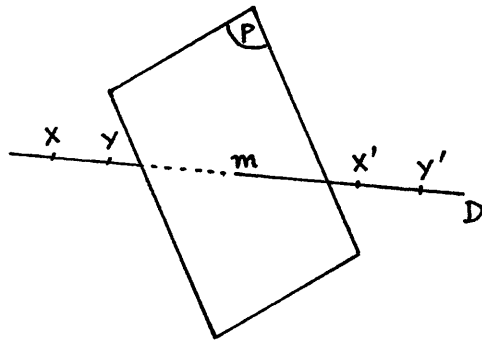


(B)

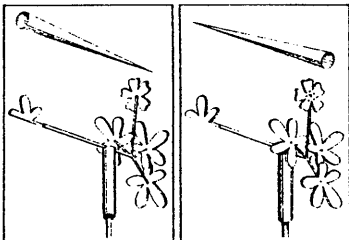
DESSIN 6.2



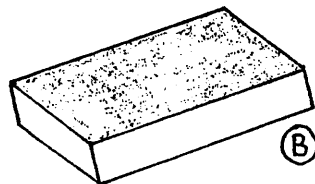
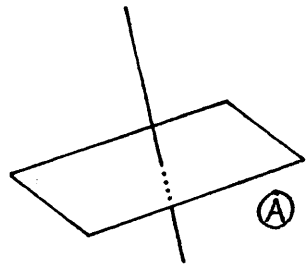
DESSIN 6.3



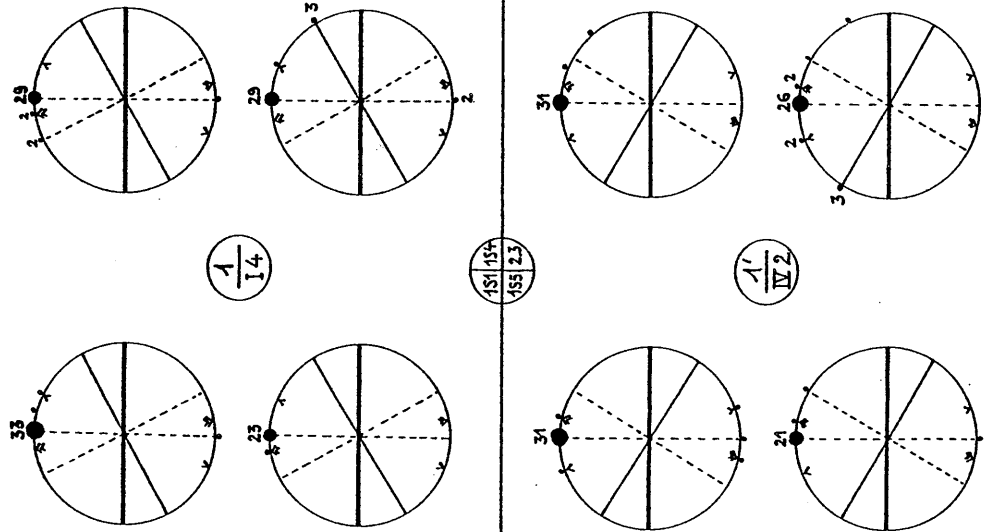
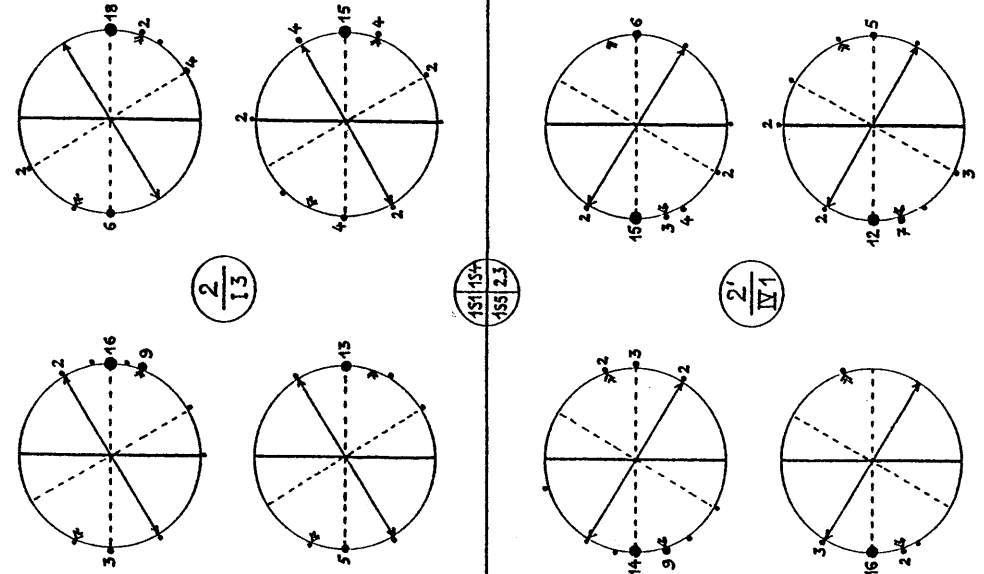
DESSIN 6.5



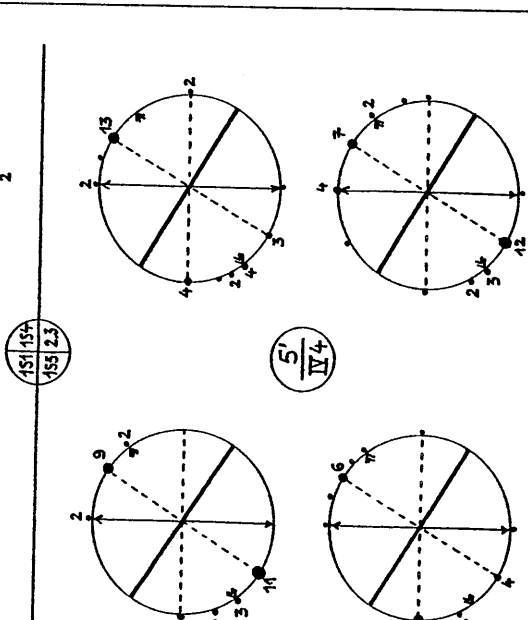
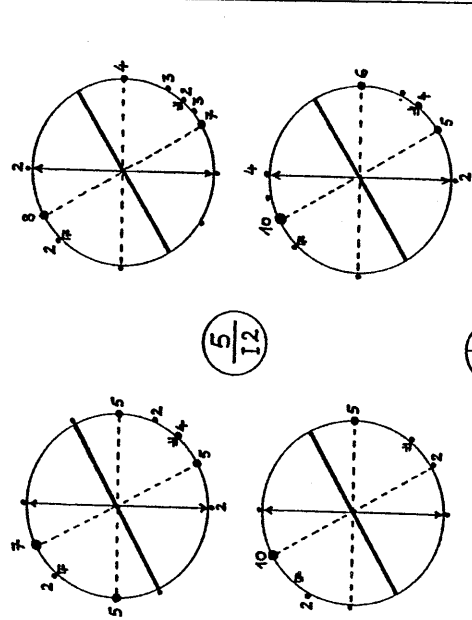
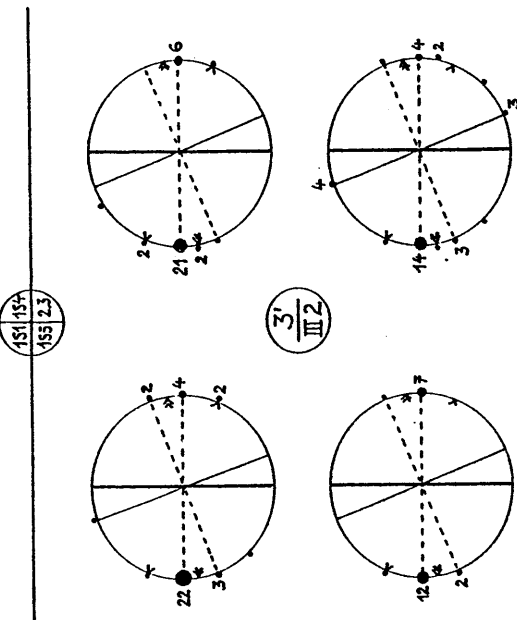
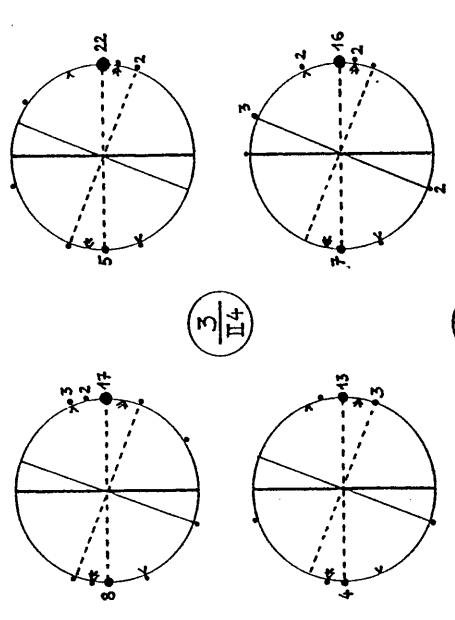
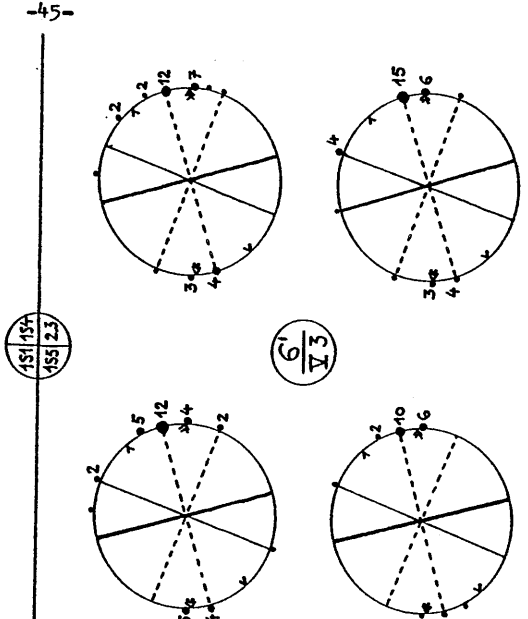
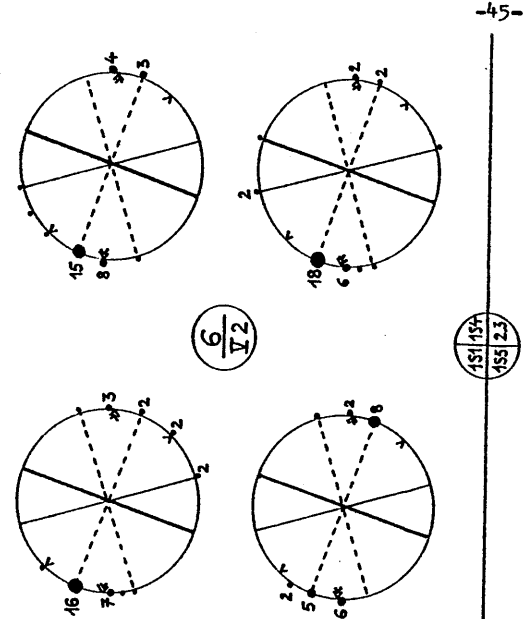
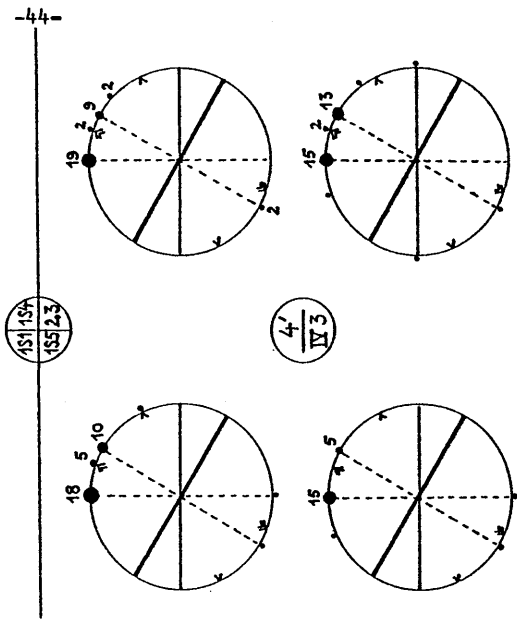
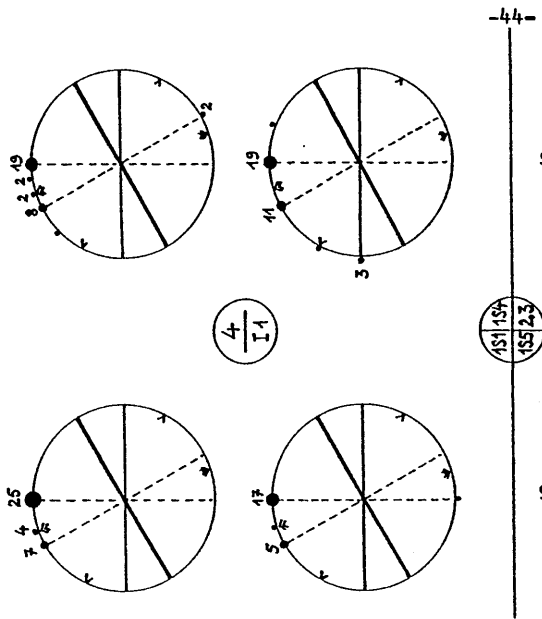
DESSIN 6.4



DESSIN 6.6

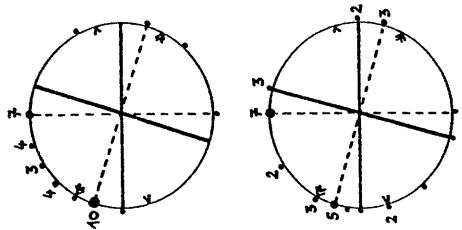


DESSIN 6.7A



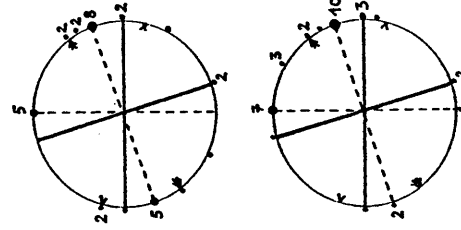
DESSIN 6.7B

DESSIN 6.7C

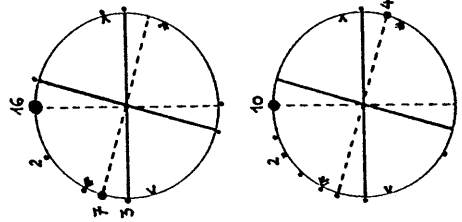


10
II3

151 157
155 23

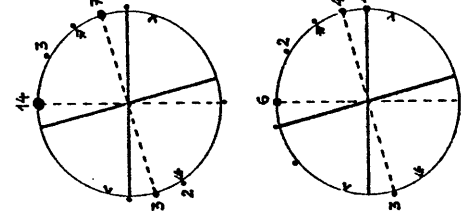


10'
III1

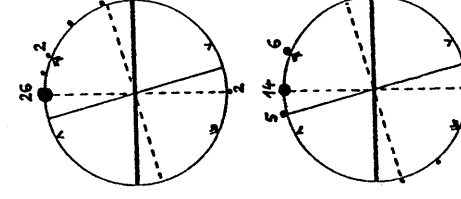
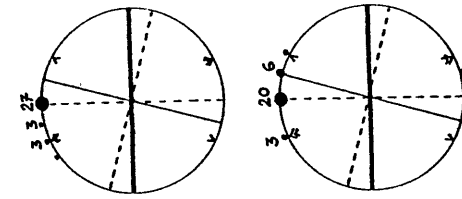


9
II1

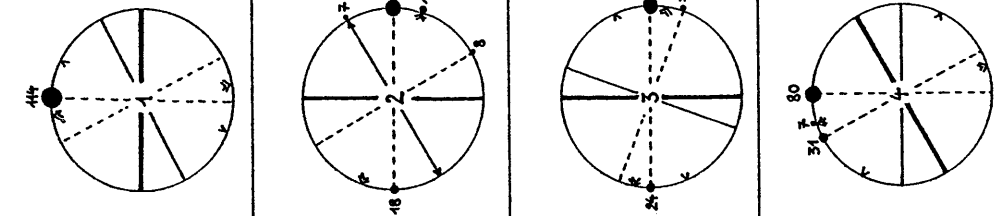
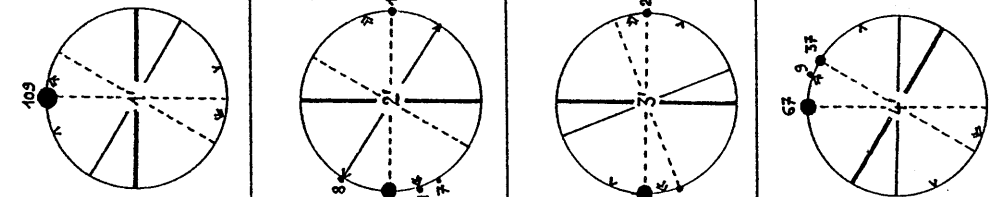
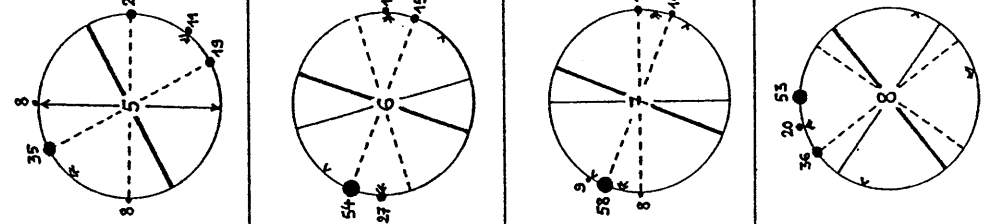
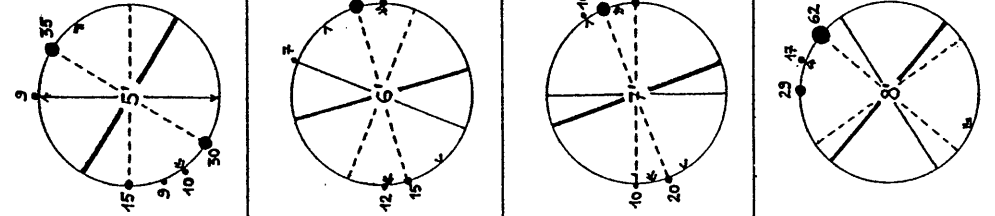
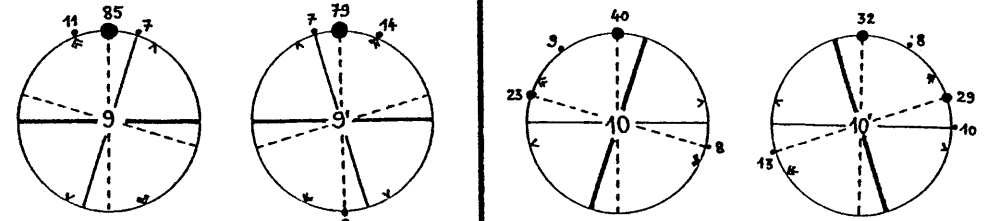
151 157
155 23



9'
III3

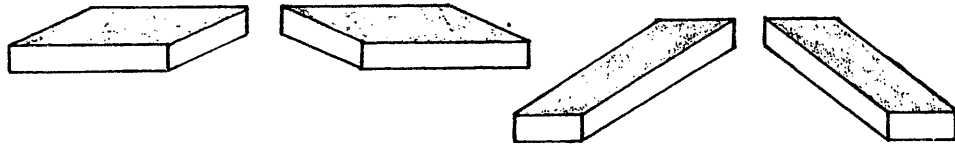


DESSIN 6.7E

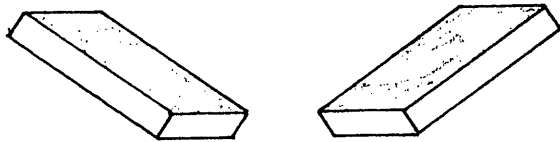


DESSIN 6.8

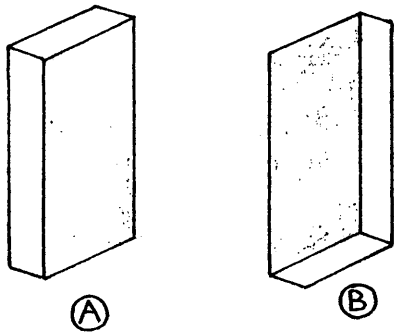
MAJORITAIRES:



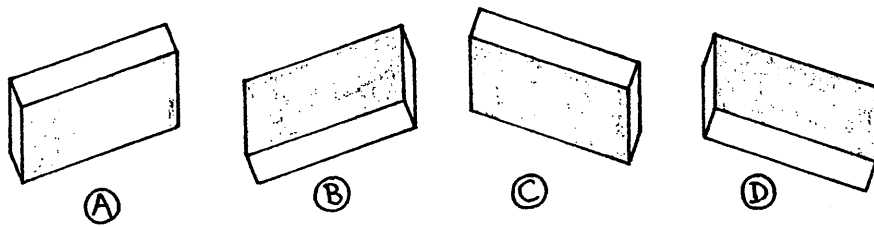
MINORITAIRES:



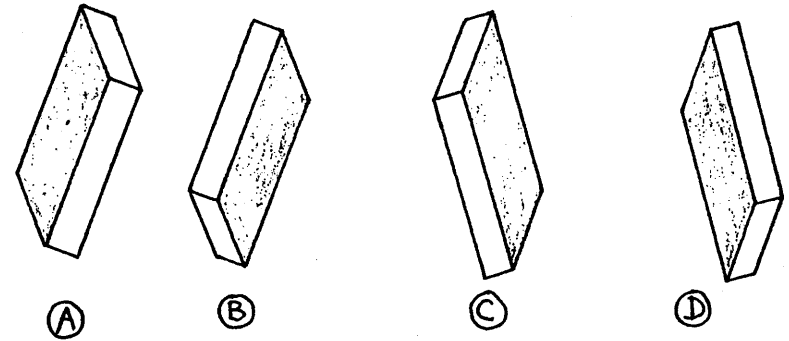
DESSIN 6.9



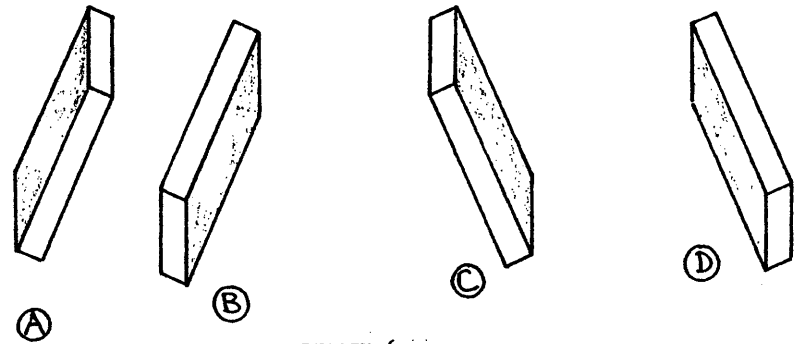
DESSIN 6.10



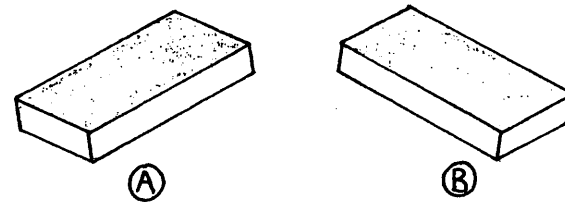
DESSIN 6.11



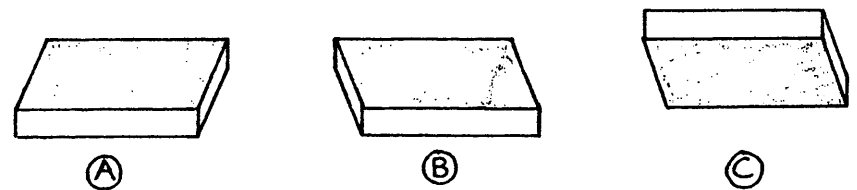
DESSIN 6.12



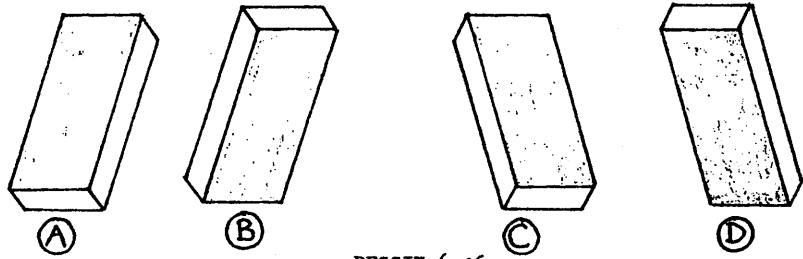
DESSIN 6.13



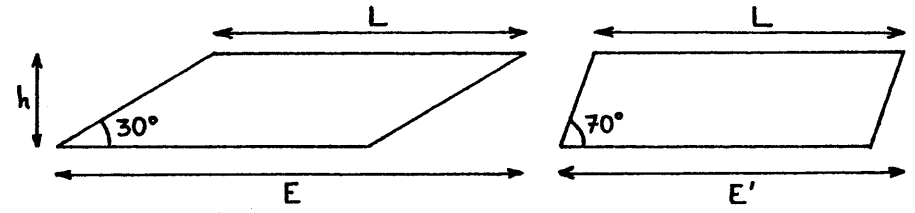
DESSIN 6.14



DESSIN 6.15



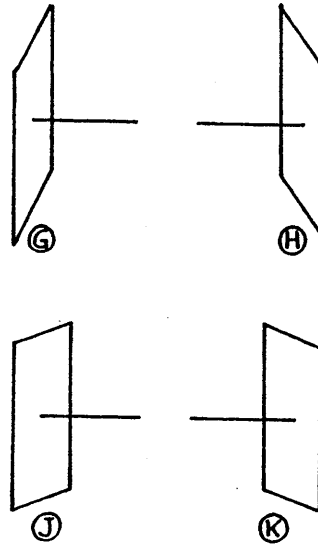
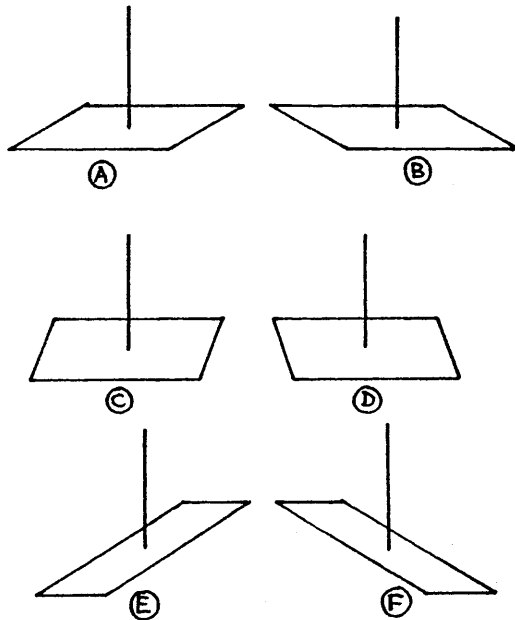
DESSIN 6.16



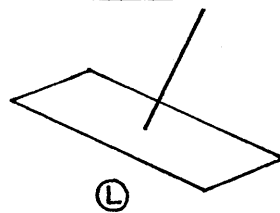
DESSIN 6.18

HORIZONTALAUX

VERTICAUX



OBLIQUE



DESSIN 6.17



DESSIN 6.19

"It's the way they draw these wretched tables."

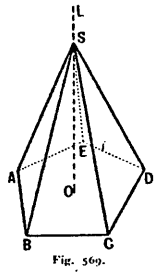


Fig. 369.

(A)

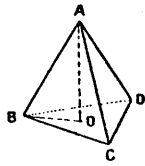


Fig. 354.

(B)

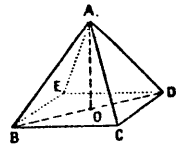
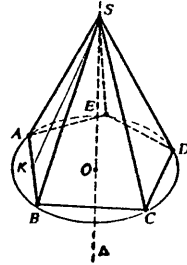
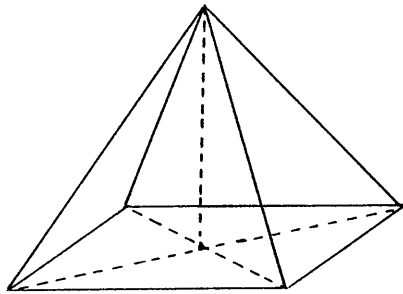


Fig. 355.

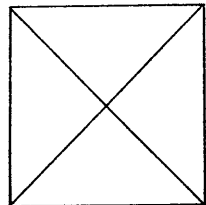


(C)

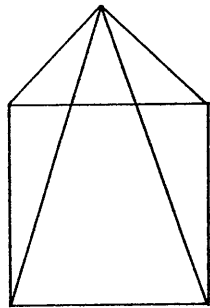
DESSIN 7.1



DESSIN 7.2

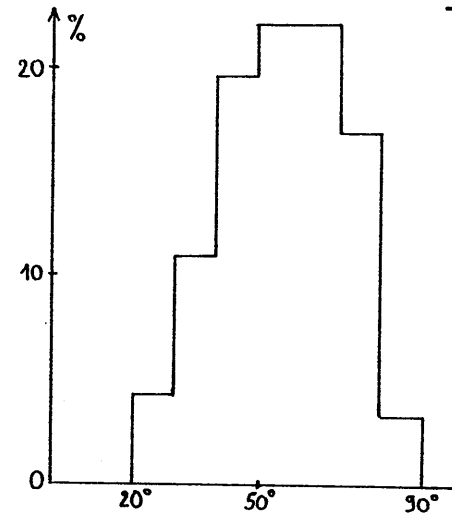


(A)

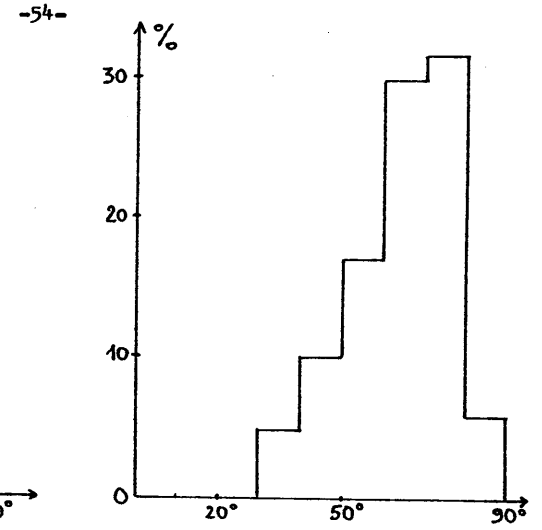


(B)

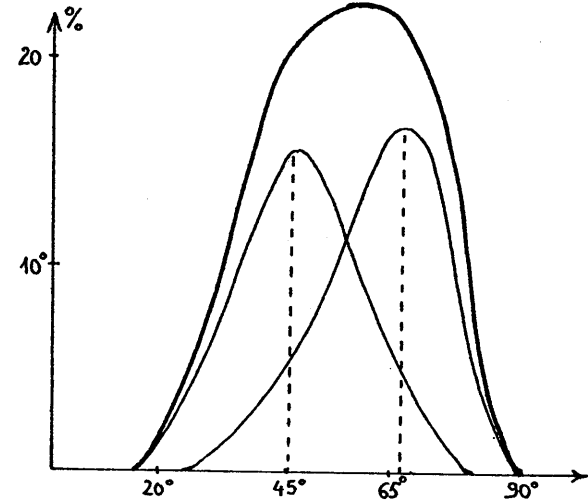
DESSIN 7.3



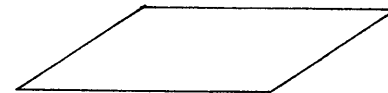
DESSIN 7.4



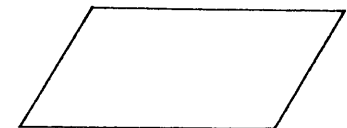
DESSIN 7.5



DESSIN 7.6

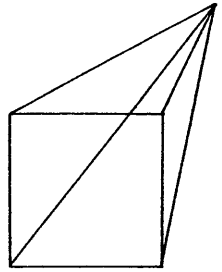


(A)

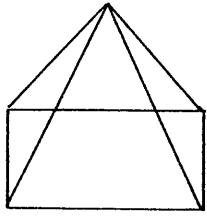


(B)

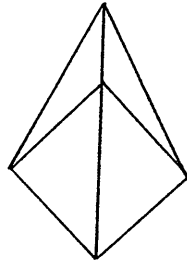
DESSIN 7.7



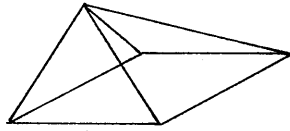
1S1, 1S2



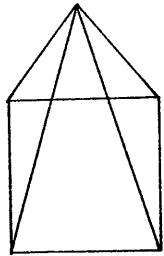
2.3, 1S4



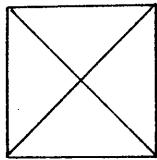
2.3, 1S2, 1S4



2.3, 1S1, 1S2, 1S4

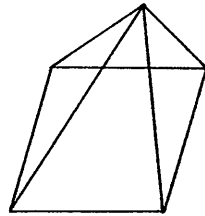


2.3, 1S1, 1S2, 1S4, TD1

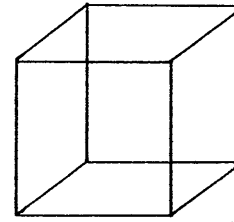


2.3, 1S4, TD1

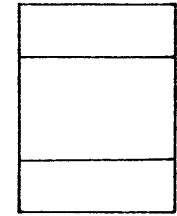
DESSIN 7.8



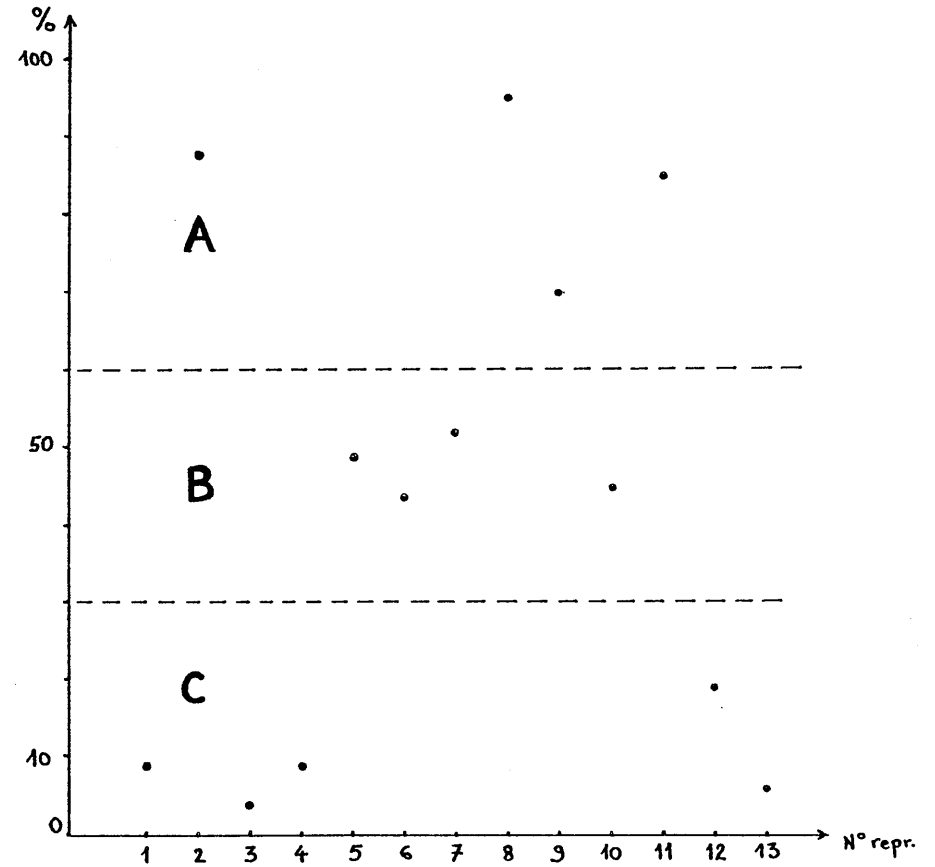
2.3, 1S1, 1S2, 1S4, TD1



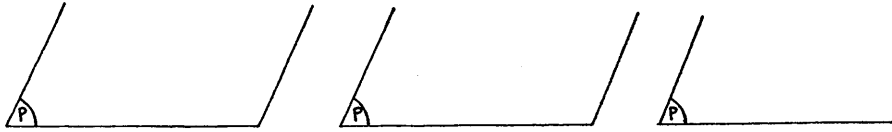
DESSIN 8.1



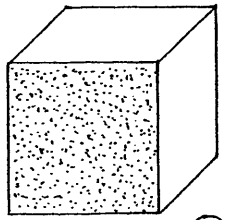
DESSIN 8.3



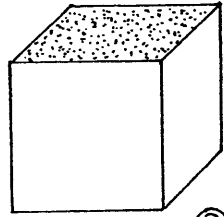
DESSIN 8.2



DESSIN 9.1

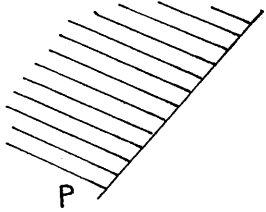


(A)

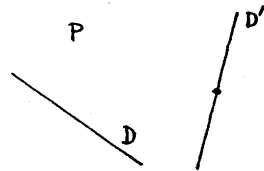


(B)

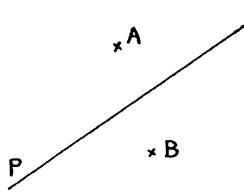
DESSIN 9.2



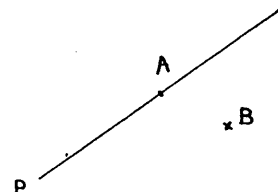
DESSIN 9.3



DESSIN 9.4



(A)



(B)

DESSIN 9.5

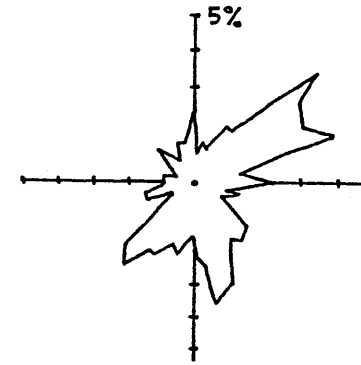


latéralisation droite

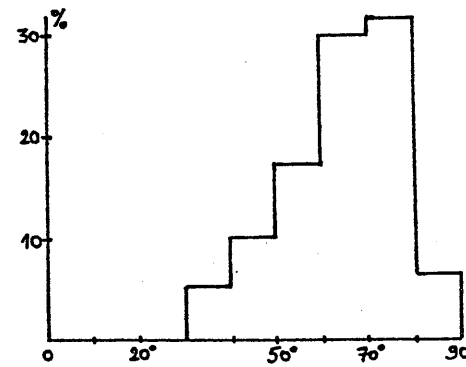


latéralisation gauche

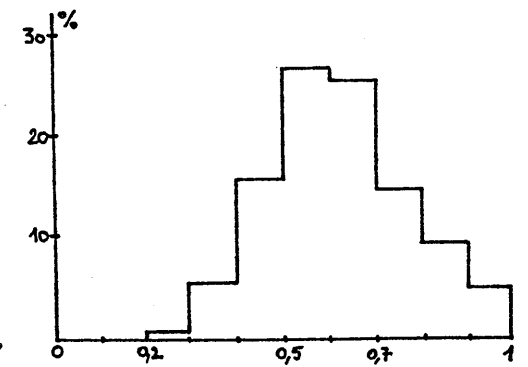
DESSIN 9.6



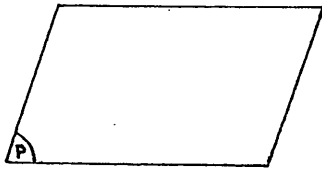
DESSIN 9.7



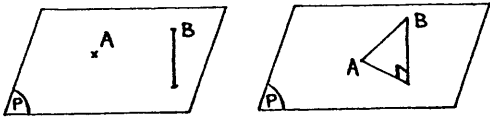
DESSIN 9.8



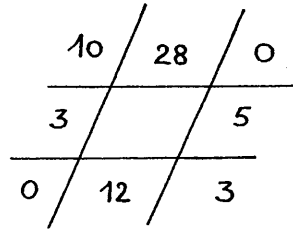
DESSIN 9.9



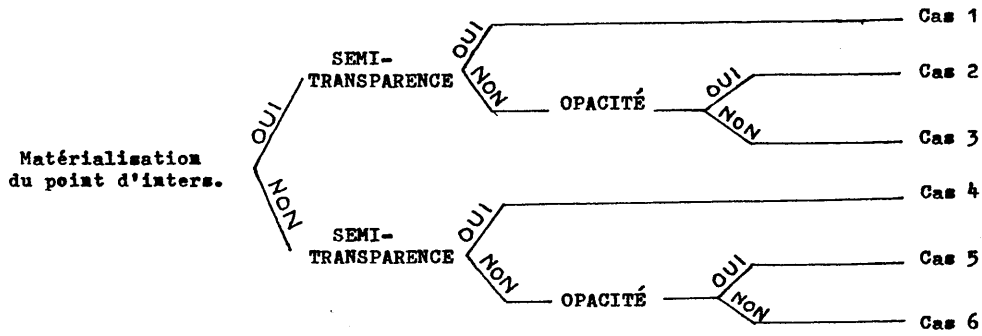
DESSIN 9.10



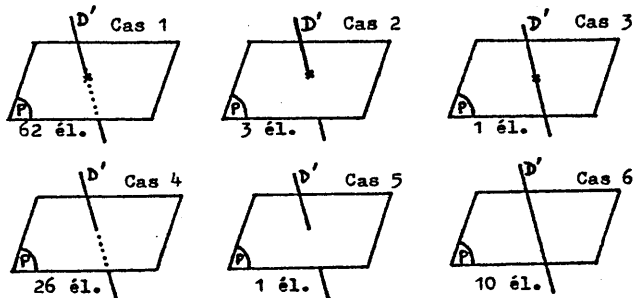
DESSIN 9.11



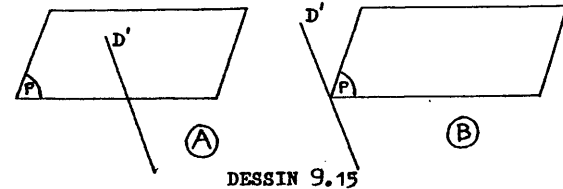
DESSIN 9.12



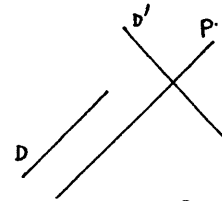
DESSIN 9.13



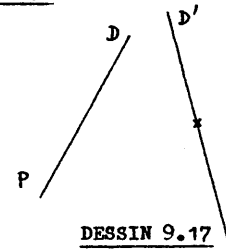
DESSIN 9.14



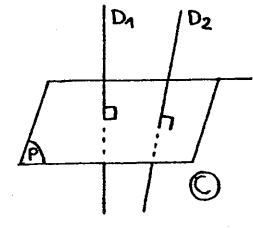
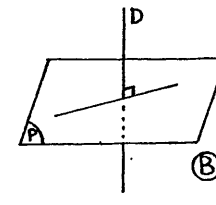
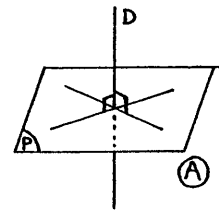
DESSIN 9.15



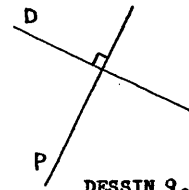
DESSIN 9.16



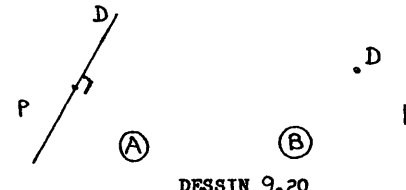
DESSIN 9.17



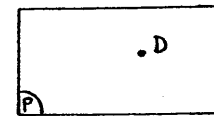
DESSIN 9.18



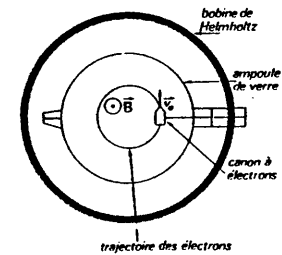
DESSIN 9.19



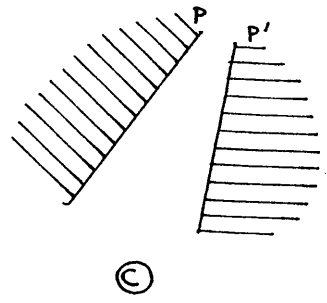
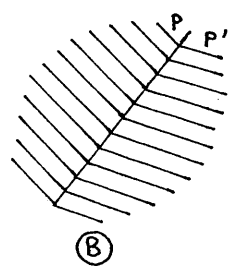
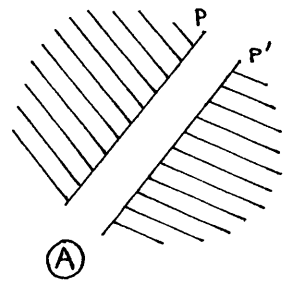
DESSIN 9.20



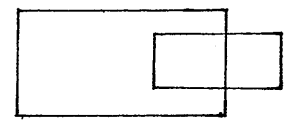
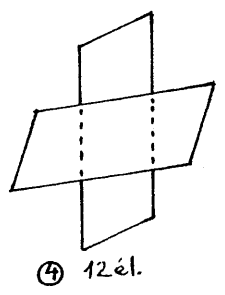
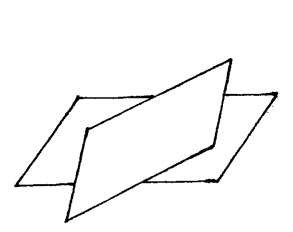
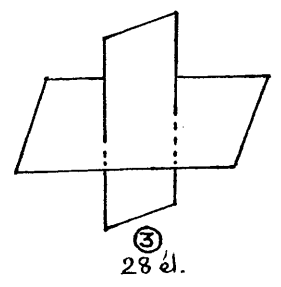
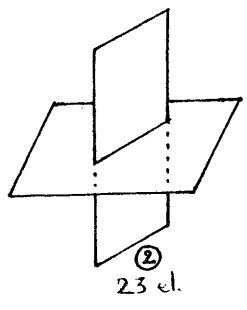
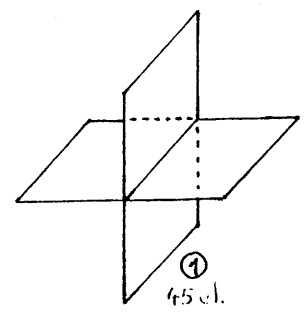
DESSIN 9.22



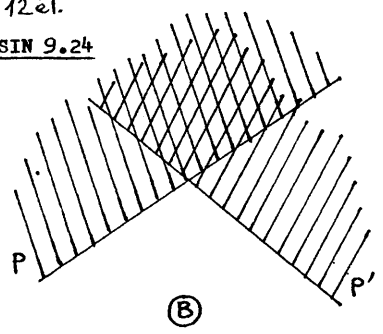
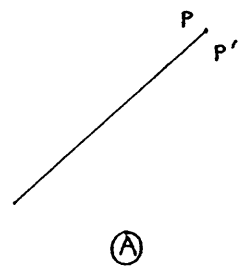
DESSIN 9.21



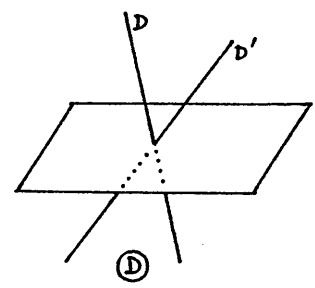
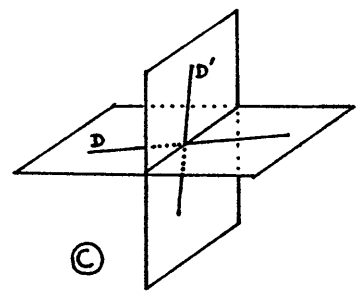
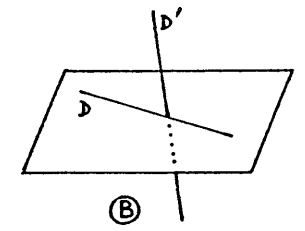
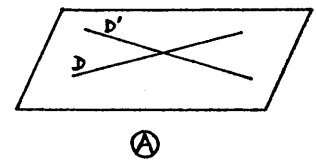
DESSIN 9.23



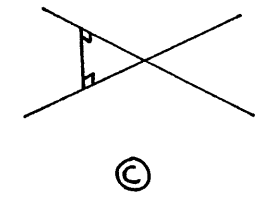
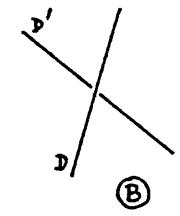
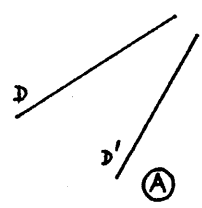
DESSIN 9.24



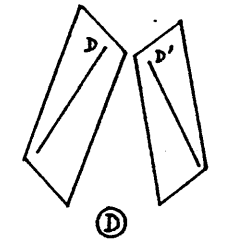
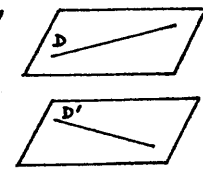
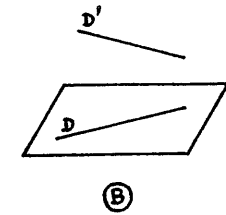
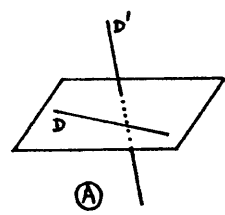
DESSIN 9.25



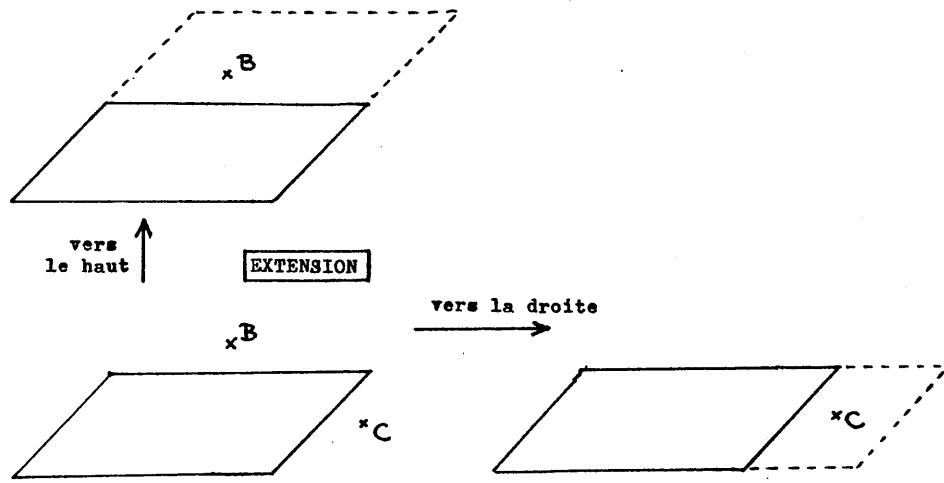
DESSIN 9.26



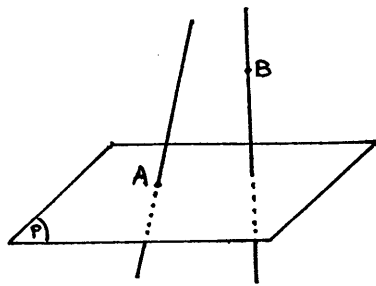
DESSIN 9.27



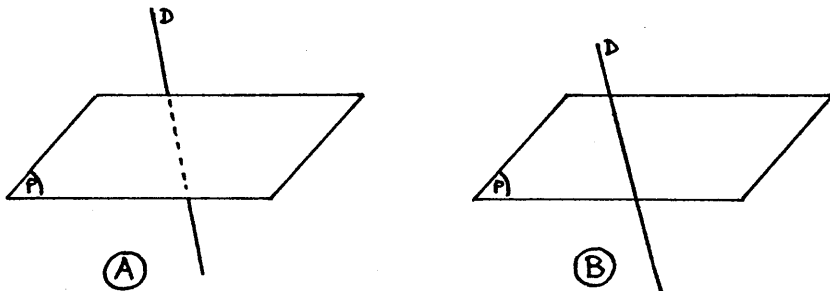
DESSIN 9.28



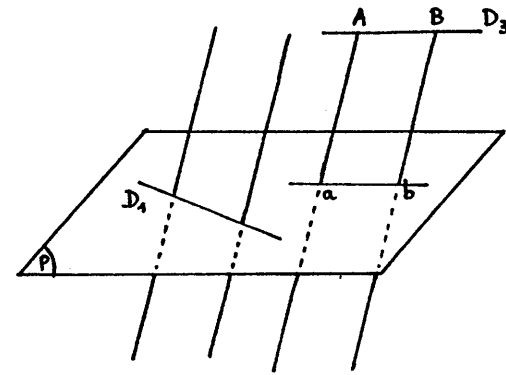
DESSIN 10.1



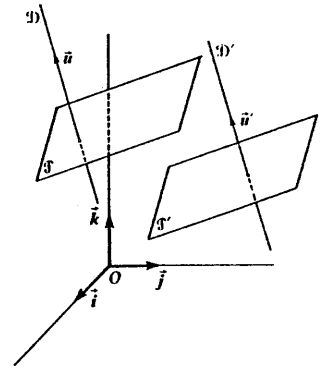
DESSIN 10.2



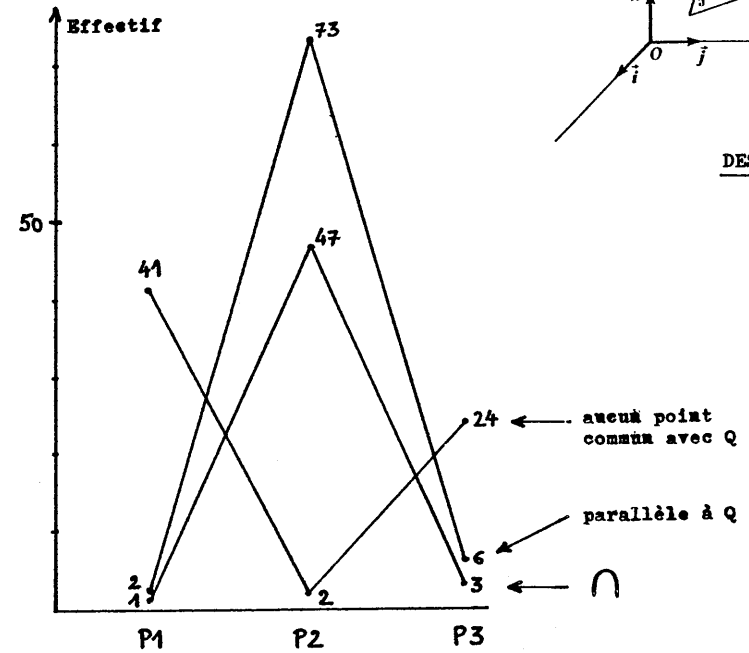
DESSIN 10.3



DESSIN 10.4



DESSIN 10.5

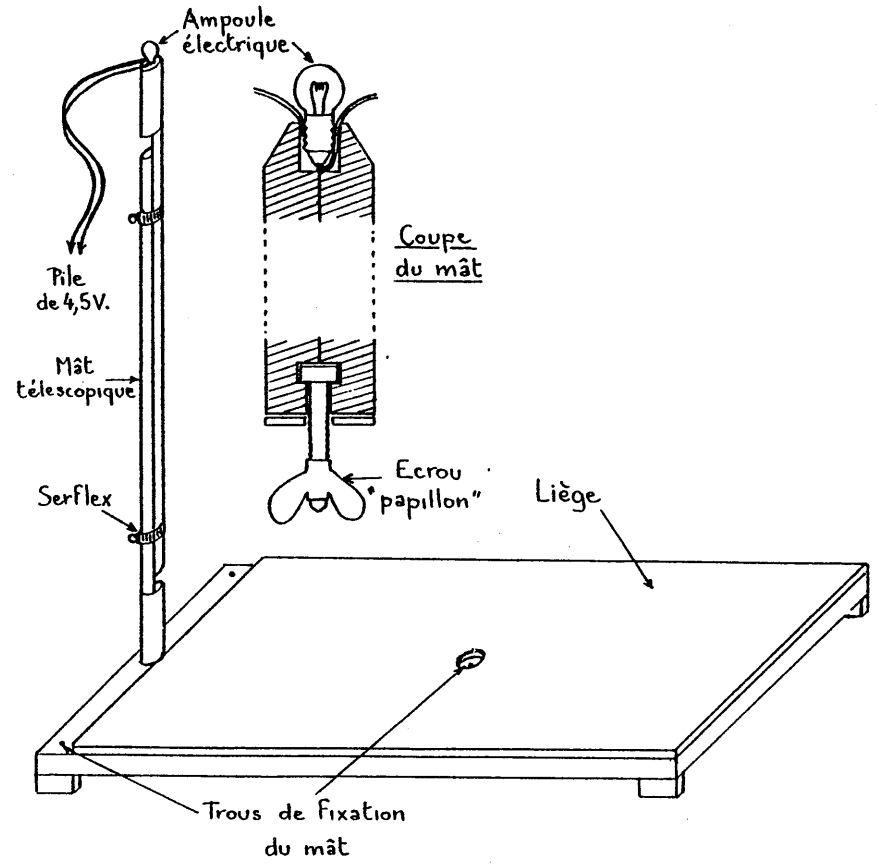


DESSIN 10.6

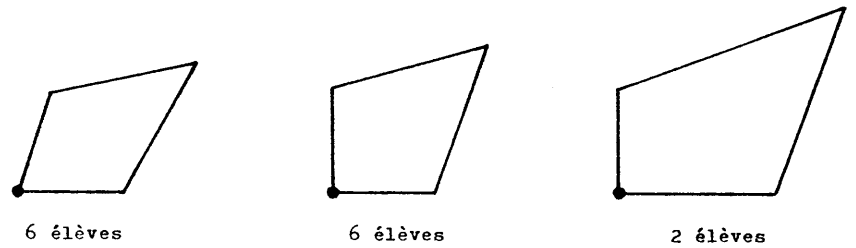


DESSIN 12.1

(SEMPÉ 1981, p.97)



DESSIN 12.2



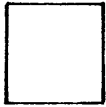
6 élèves

6 élèves

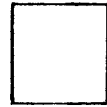
2 élèves

DESSIN 12.3

Mât



A

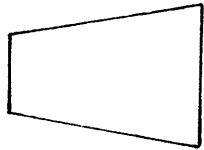


B

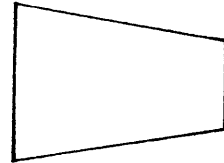


C

DESSIN 12.4

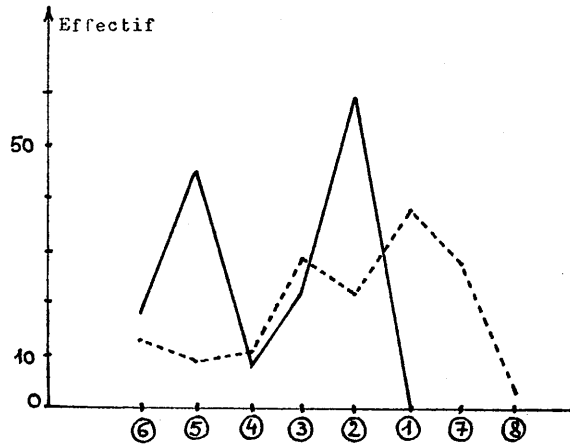


(A)



(B)

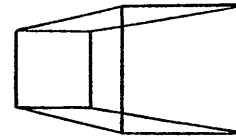
DESSIN 12.5



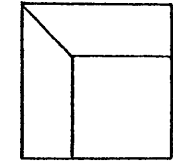
— Position 2
- - - Position 3

- | | |
|-------------------|---------------------------|
| ⑥ carré | ② trapèze |
| ⑤ rectangle | ① quadrilatère quelconque |
| ④ losange | ⑦ cela dépend |
| ③ parallélogramme | ⑧ je ne sais pas |

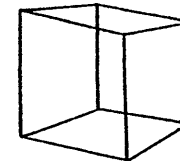
DESSIN 12.6



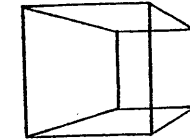
OUT: 68
NON: 47



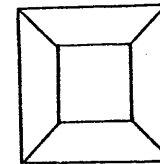
OUT: 80
NON: 36



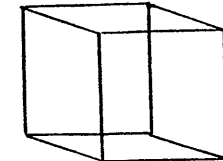
OUT: 27
NON: 87



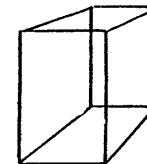
OUT: 74
NON: 44



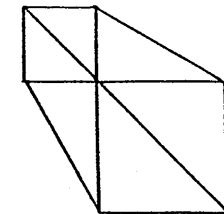
OUT: 110
NON: 10



OUT: 44
NON: 71

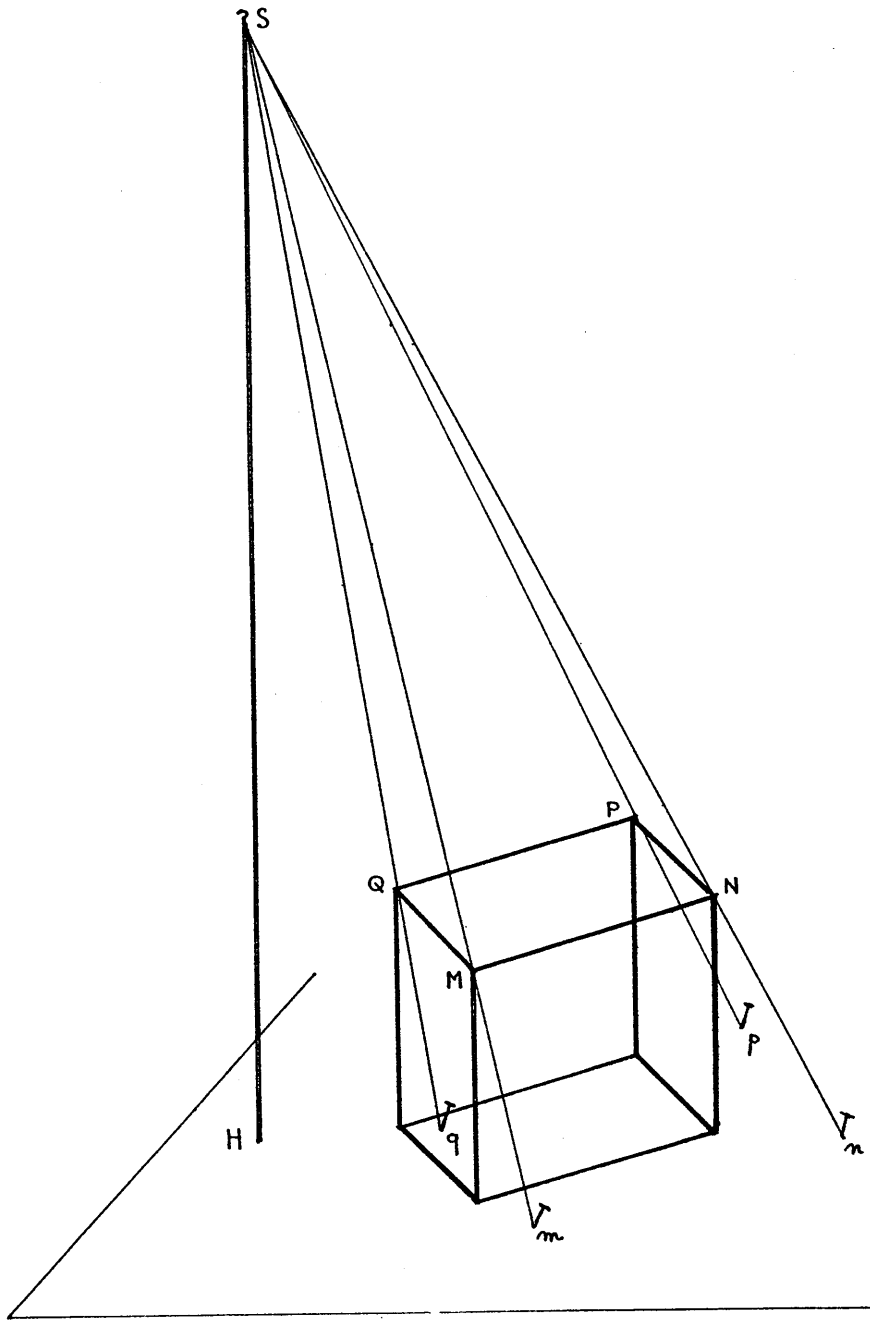


OUT: 31
NON: 84

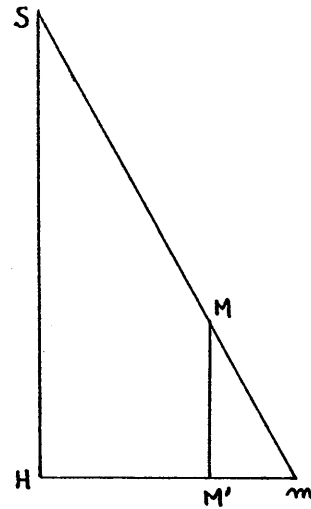


OUT: 66
NON: 50

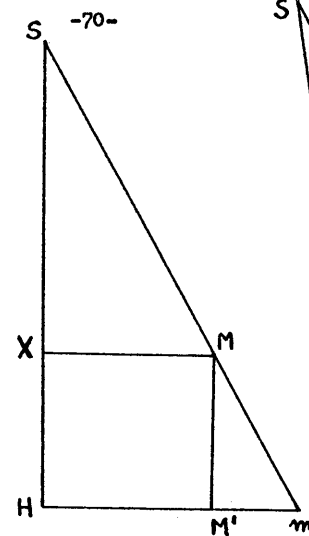
DESSIN 12.7



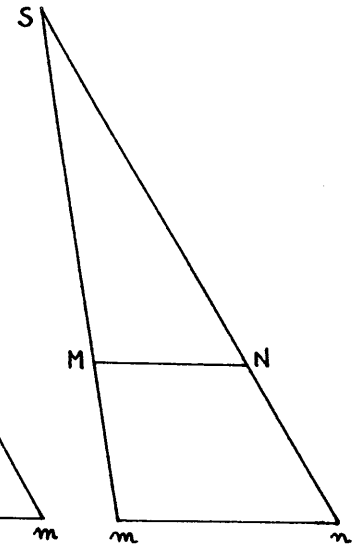
DESSIN 12.8



DESSIN 12.9



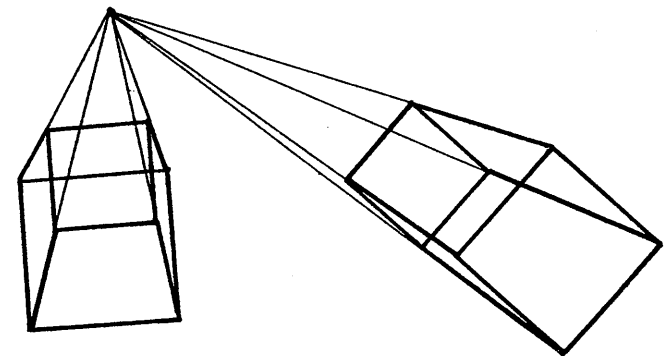
DESSIN 12.10



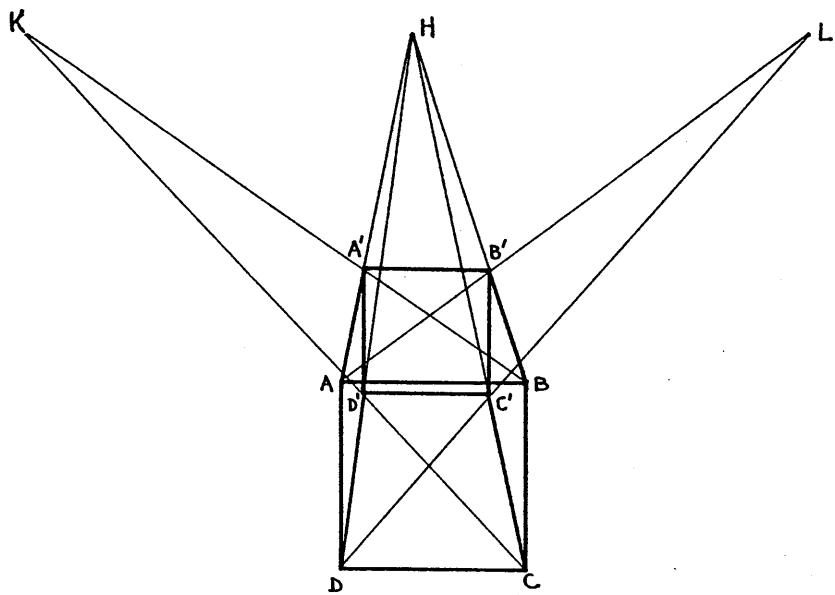
DESSIN 12.11



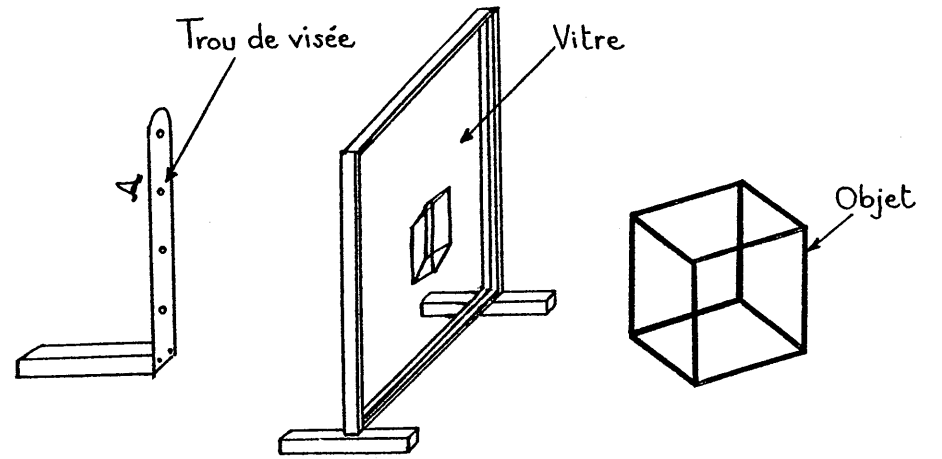
DESSIN 12.12



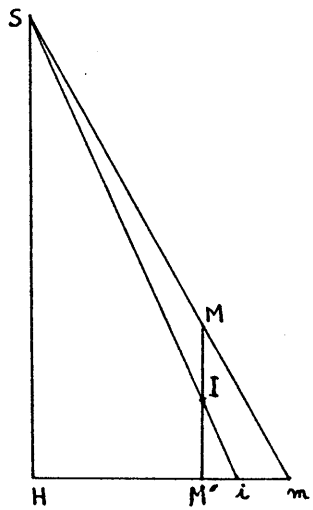
DESSIN 12.13



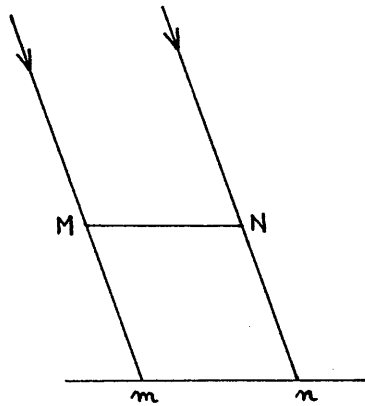
DESSIN 12. 14



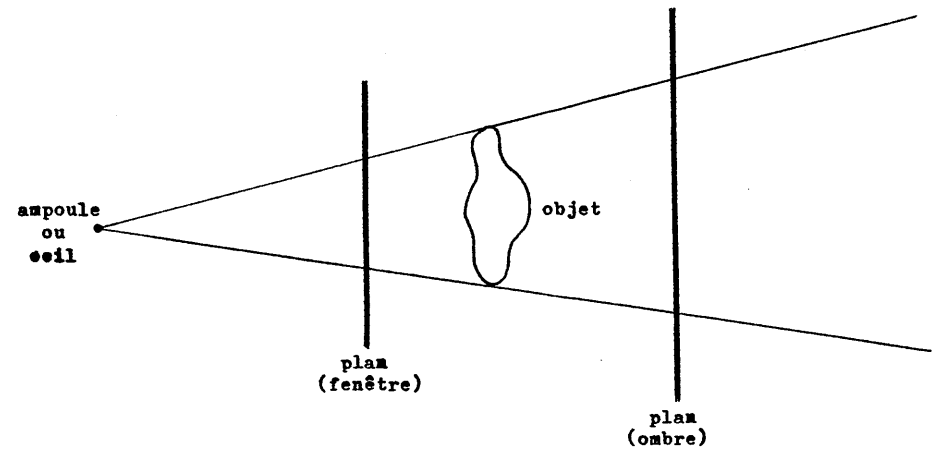
DESSIN 12. 17



DESSIN 12. 15



DESSIN 12. 16



DESSIN 12. 18

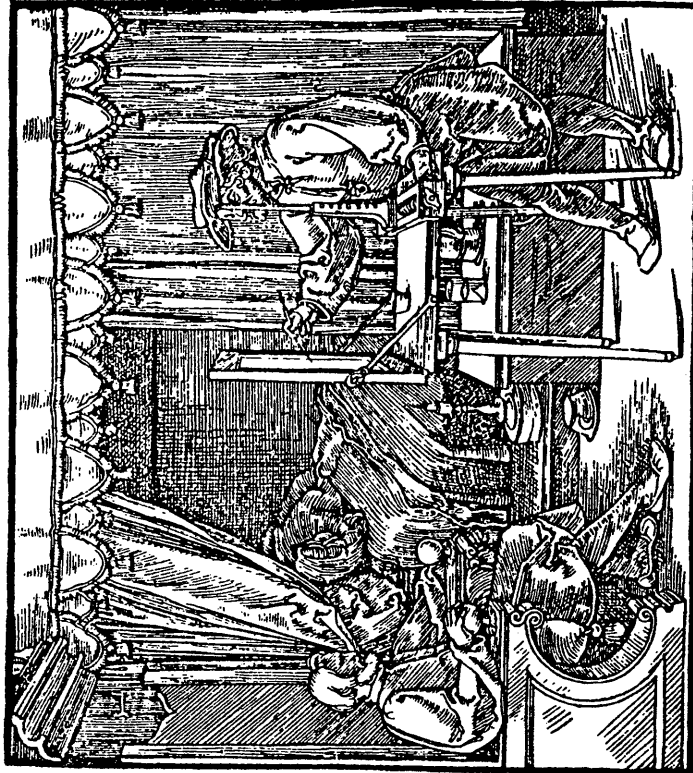
Ces gravures font partie de "Underweysung der Messung" (Albrecht DÜRER, 1525).

Légende de la présente gravure:

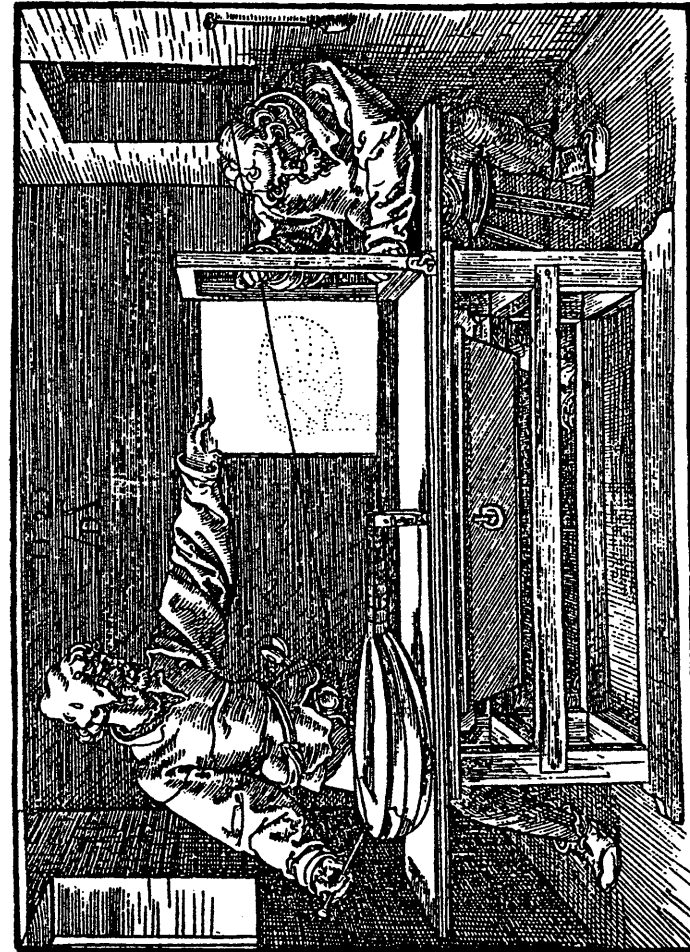
"Solchs ist gut allen denen, die jemand wollen abconterfeien und die ihrer Sache nicht gewis sind"

(Ceci est bon pour tous ceux qui veulent contrefaire (dessiner) quelqu'un, et qui ne sont pas sûrs de leur affaire)

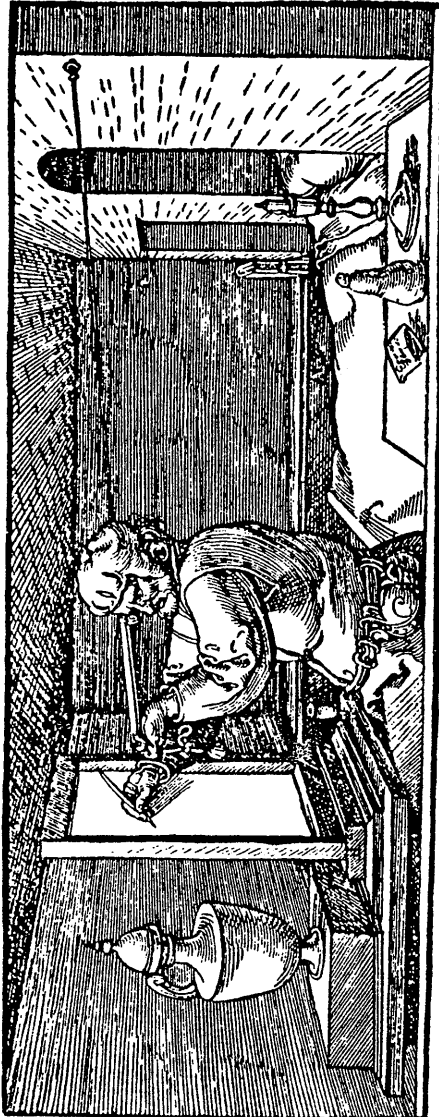
(KURTH, 1963, pp.270, 271, 272)



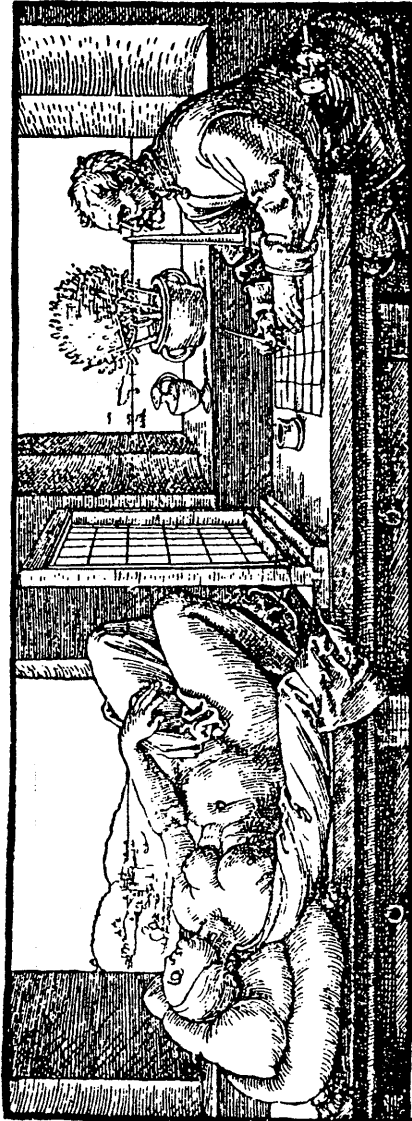
DESSIN 12.19A



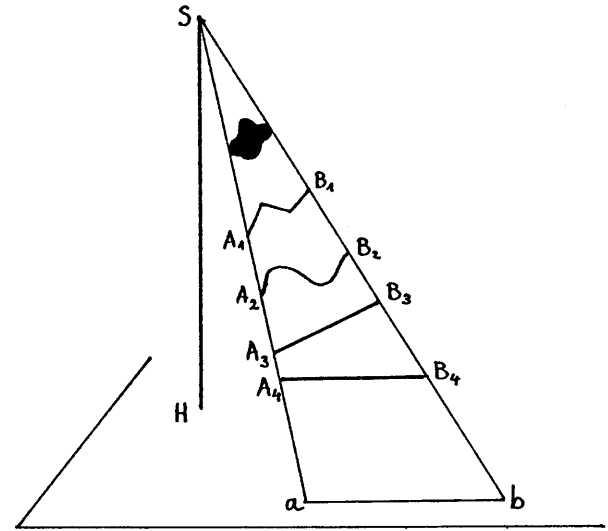
DESSIN 12.19B



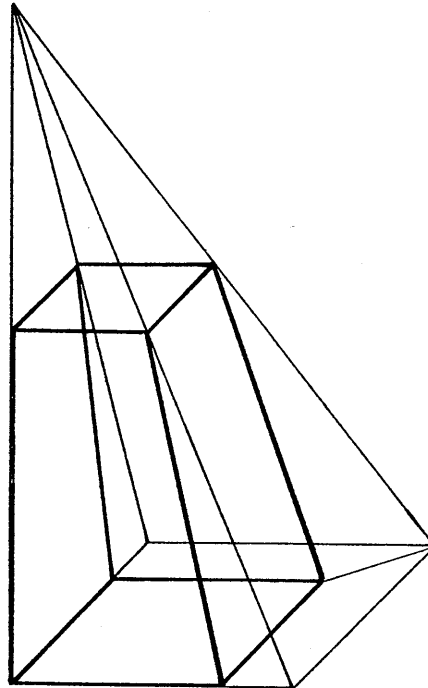
DESSIN 12.19C



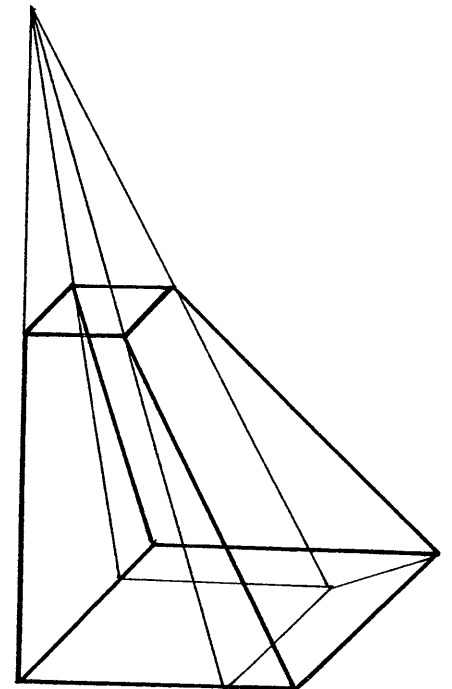
DESSIN 12.19D



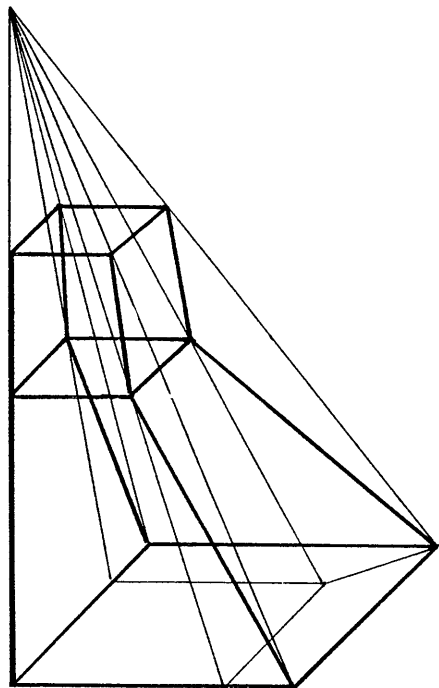
DESSIN 12.20



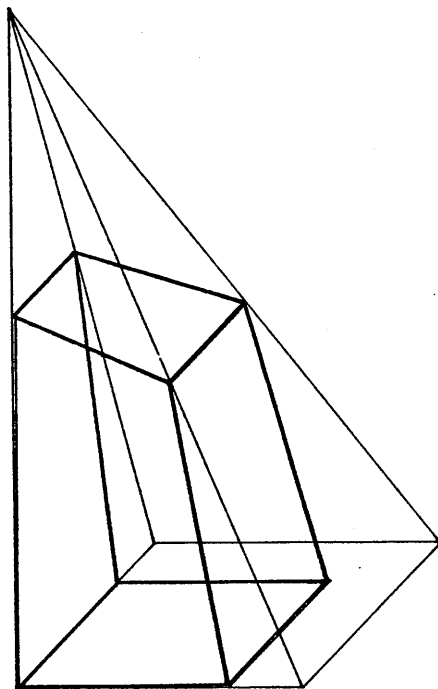
DESSIN 12.21



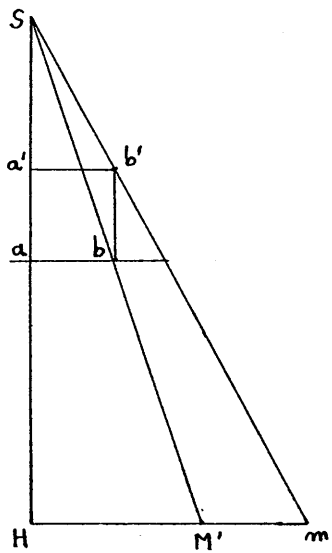
DESSIN 12.22



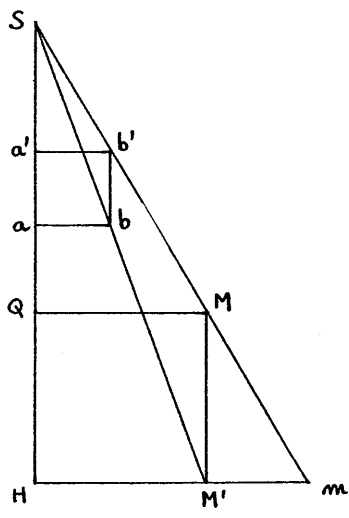
DESSIN 12.23



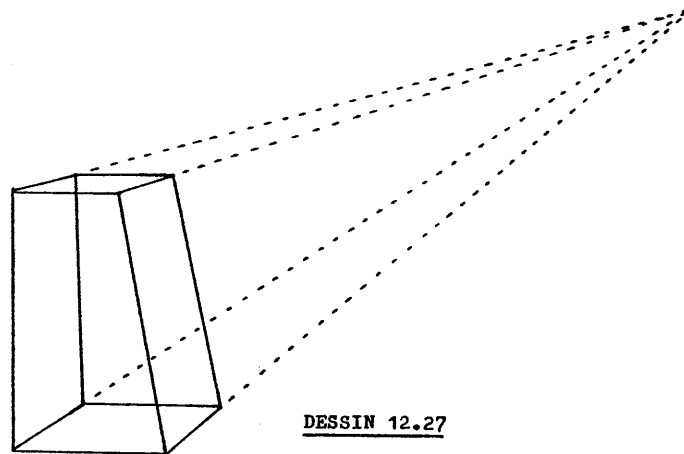
DESSIN 12.24



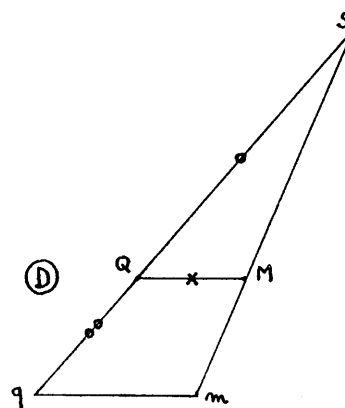
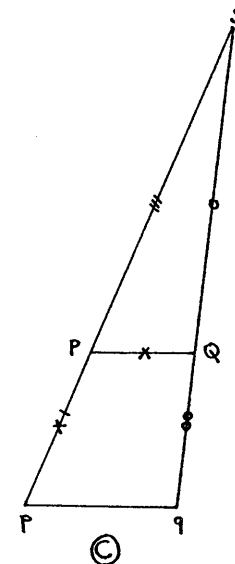
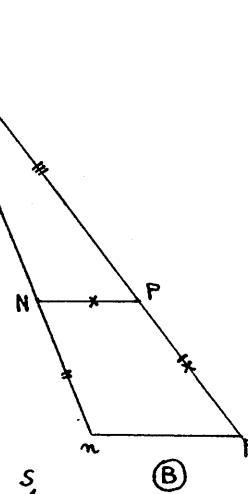
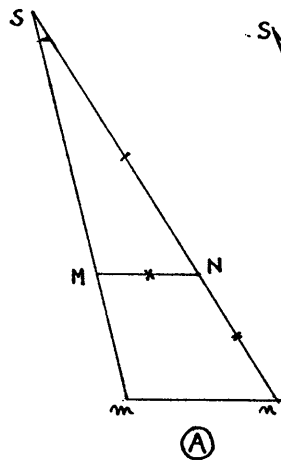
DESSIN 12.25



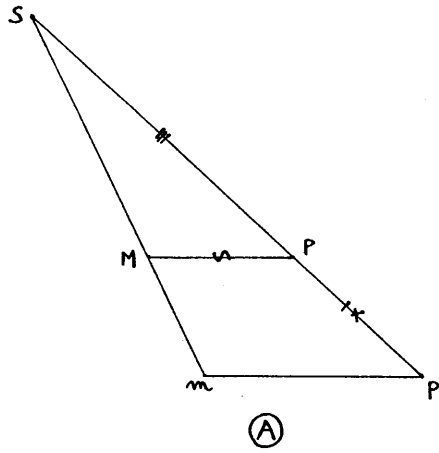
DESSIN 12.26



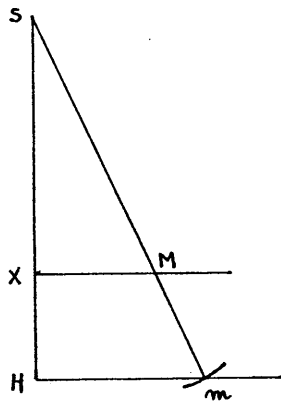
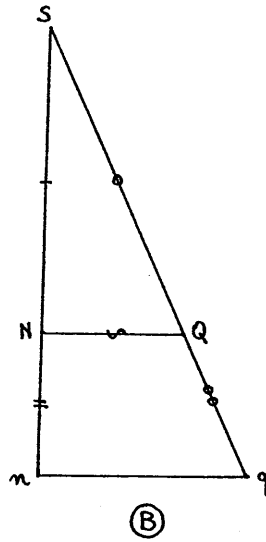
DESSIN 12.27



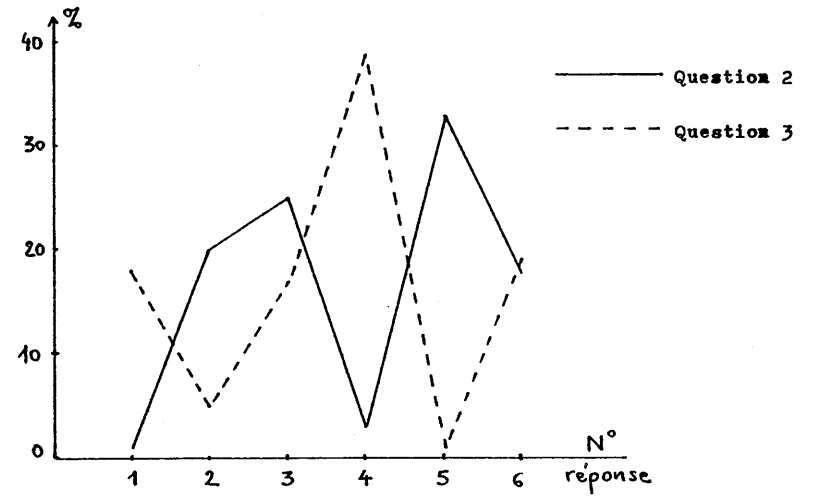
DESSIN 12.28



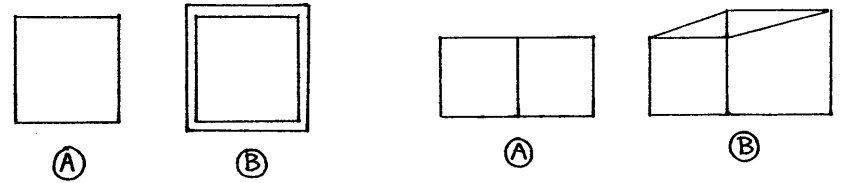
DESSIN 12.29



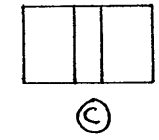
DESSIN 12.30



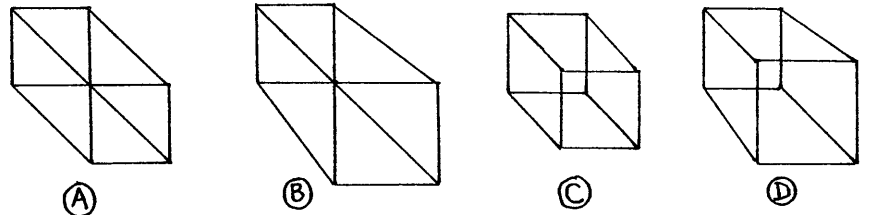
DESSIN 13.1



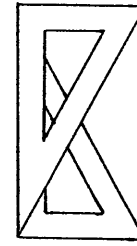
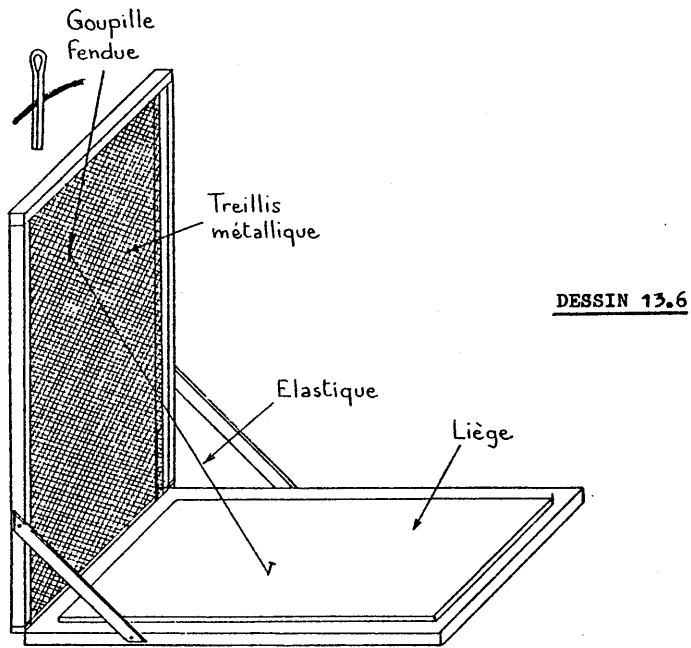
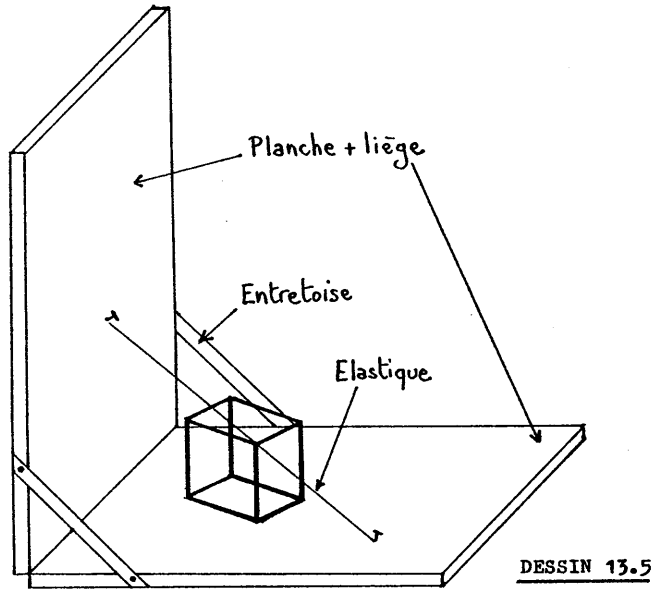
DESSIN 13.2



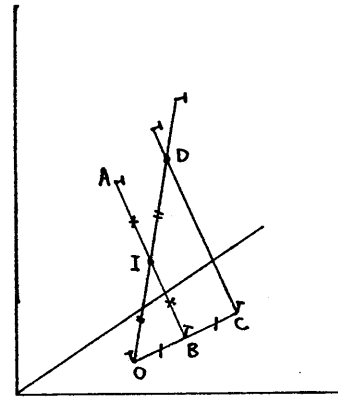
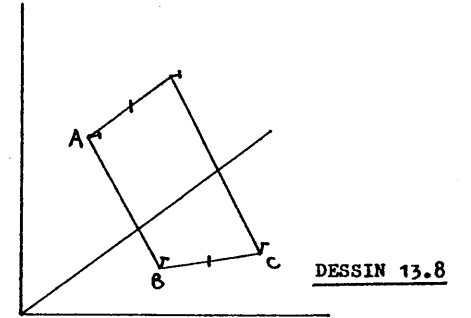
DESSIN 13.3



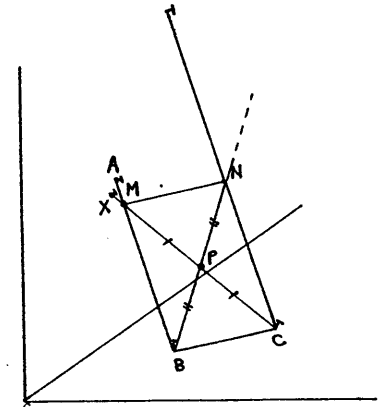
DESSIN 13.4



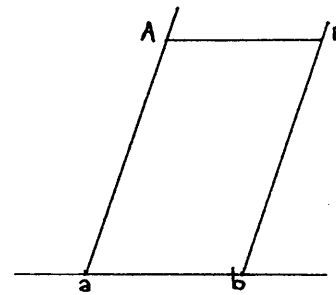
DESSIN 13.7



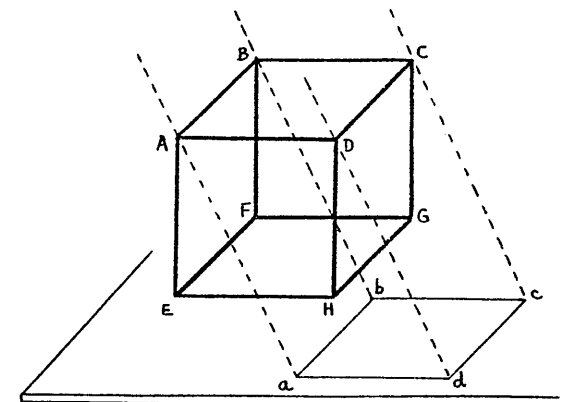
DESSIN 13.9



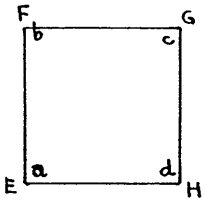
DESSIN 13.10



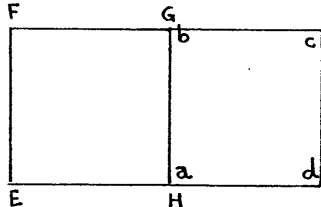
DESSIN 13.11



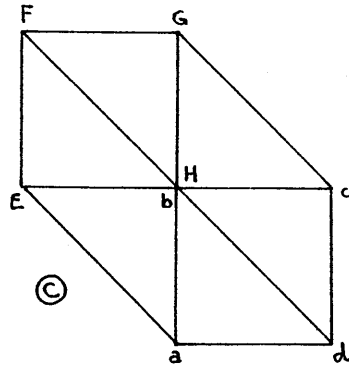
DESSIN 13.12



(A)

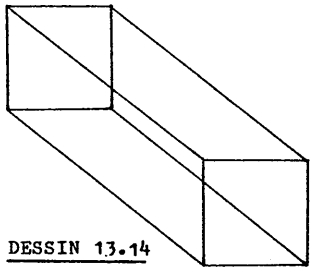


(B)

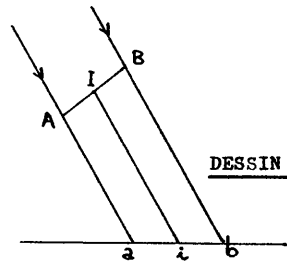


(C)

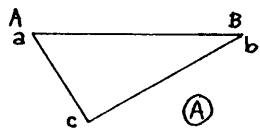
DESSIN 13.13



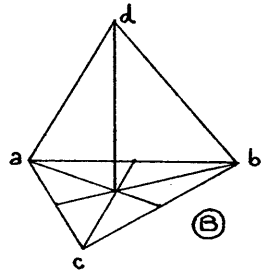
DESSIN 13.14



DESSIN 13.15

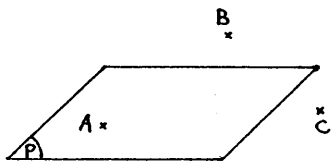


(A)

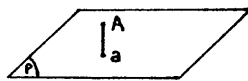


(B)

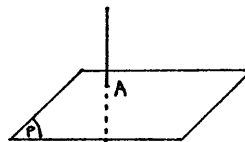
DESSIN 13.16



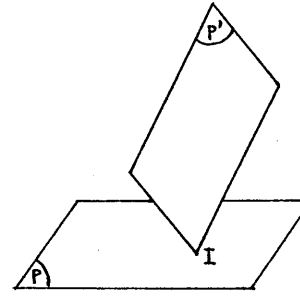
DESSIN 13.17



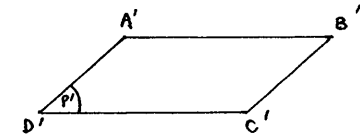
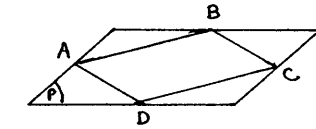
DESSIN 13.18



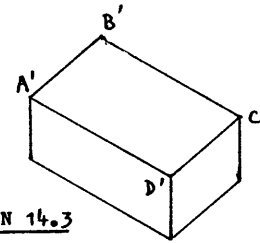
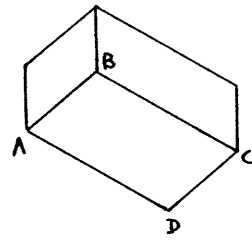
DESSIN 13.19



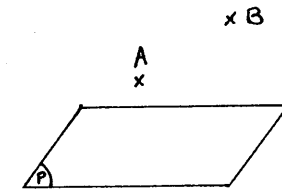
DESSIN 14.1



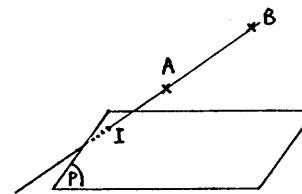
DESSIN 14.2



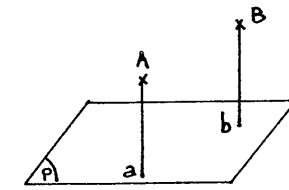
DESSIN 14.3



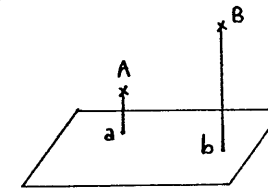
DESSIN 14.4



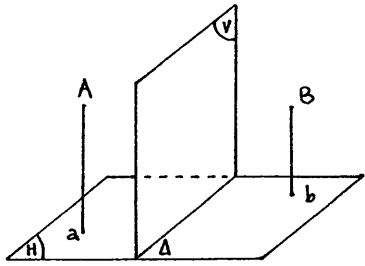
DESSIN 14.6



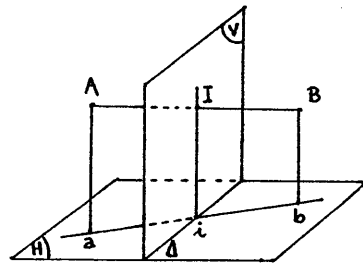
DESSIN 14.5



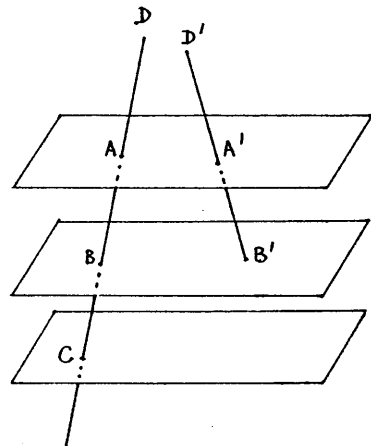
DESSIN 14.7



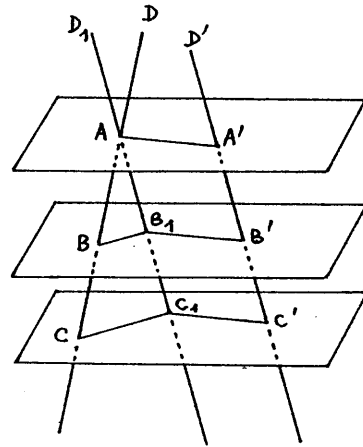
DESSIN 14.8



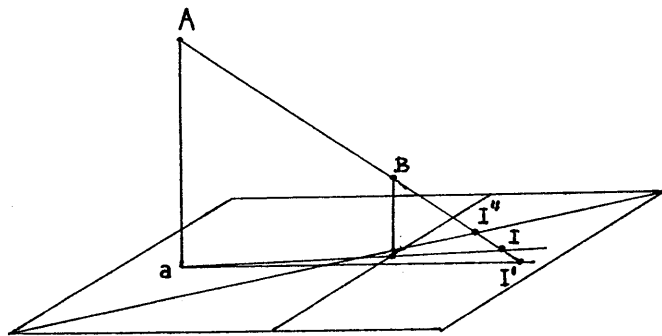
DESSIN 14.9



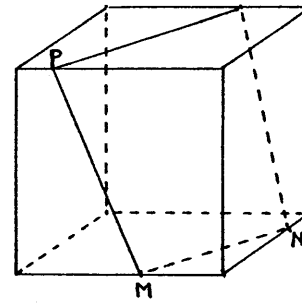
DESSIN 14.10



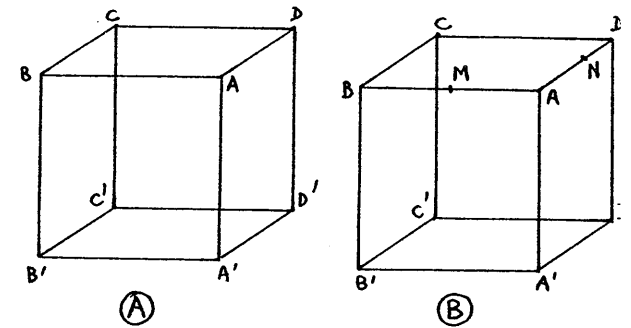
DESSIN 14.11



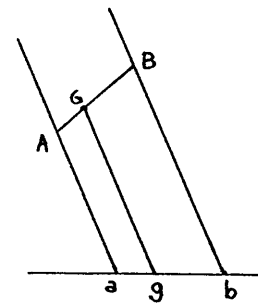
DESSIN 14.12



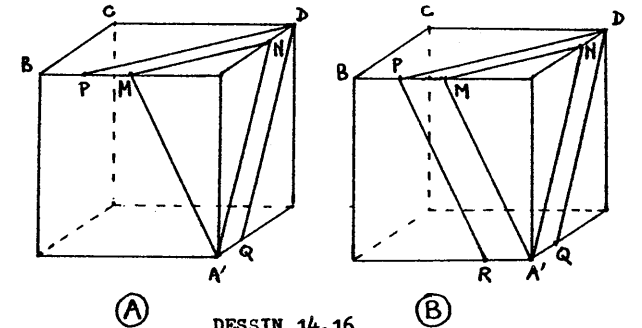
DESSIN 14.13



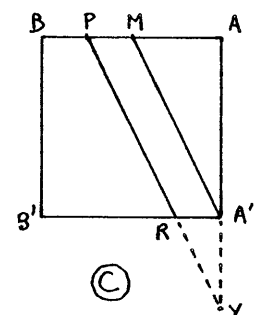
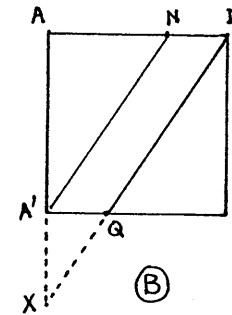
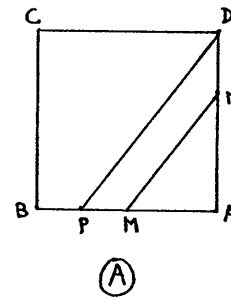
DESSIN 14.14



DESSIN 14.15

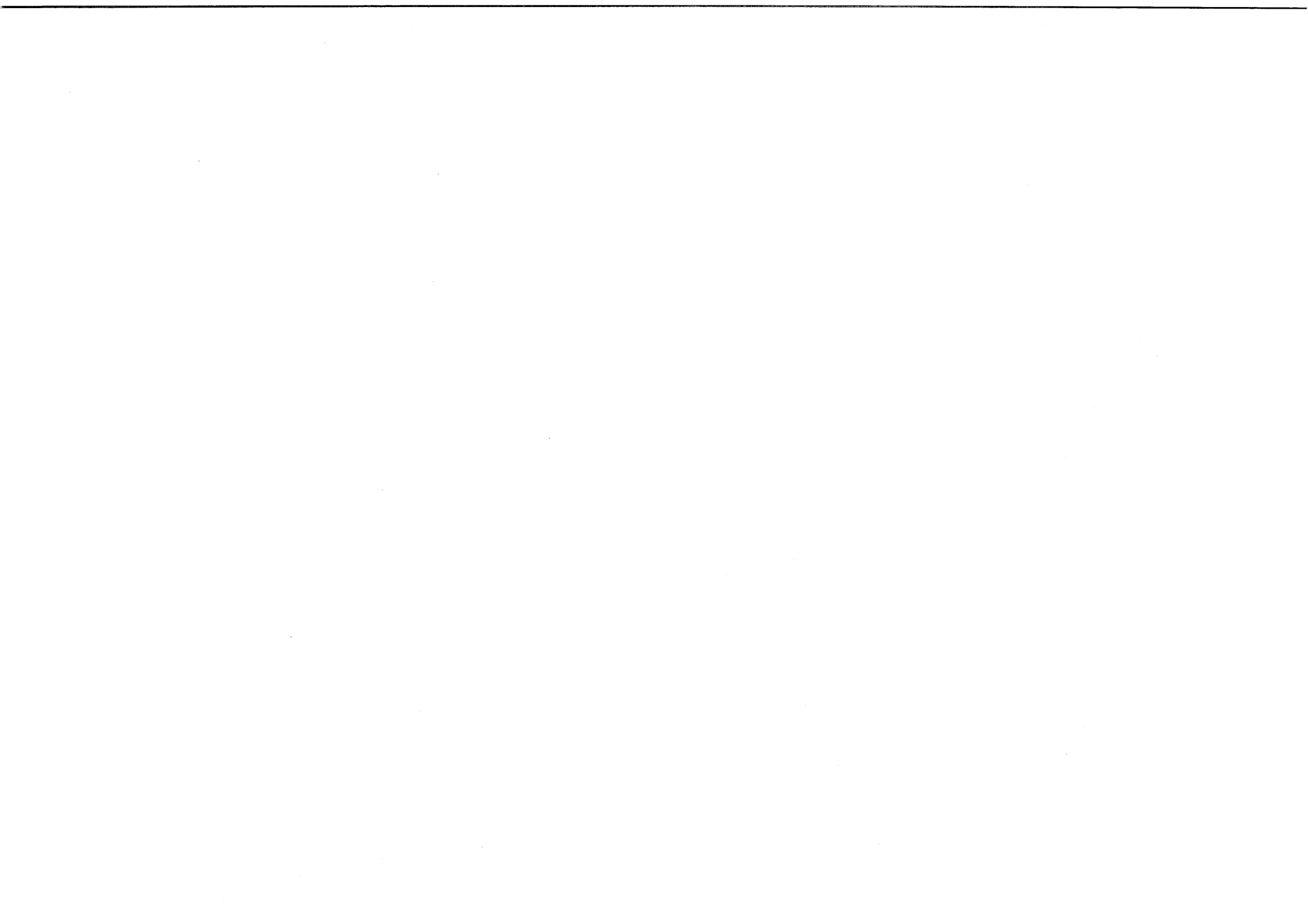


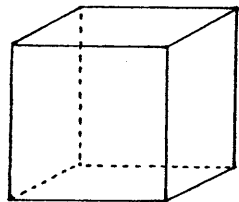
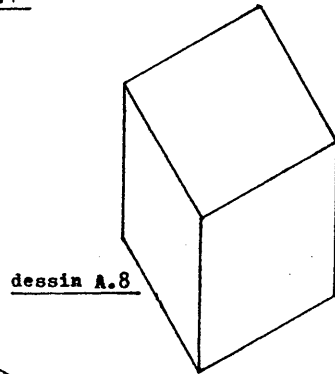
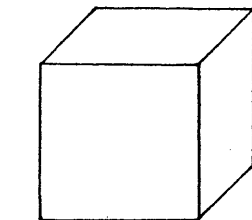
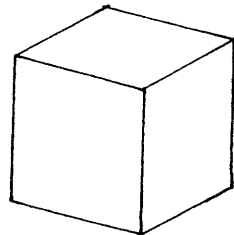
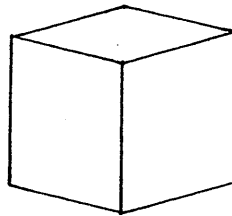
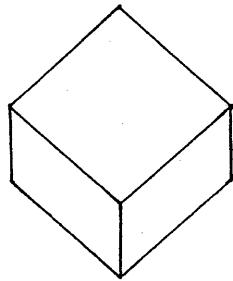
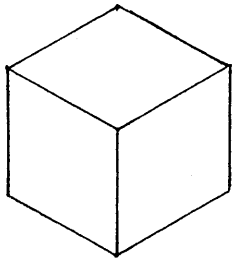
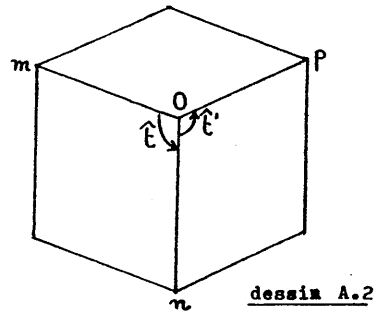
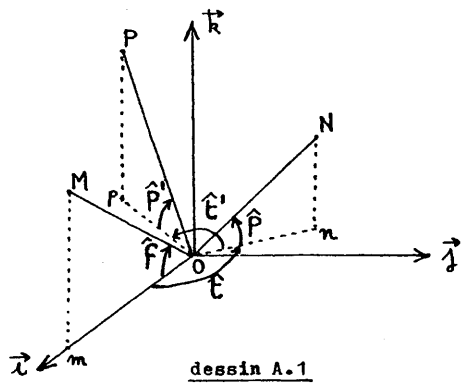
DESSIN 14.16



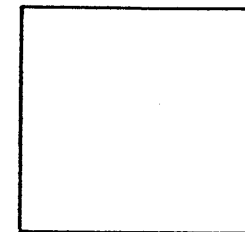
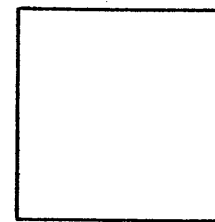
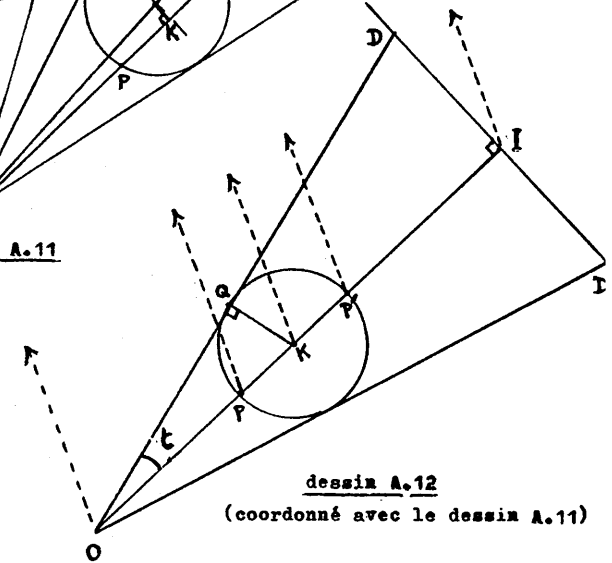
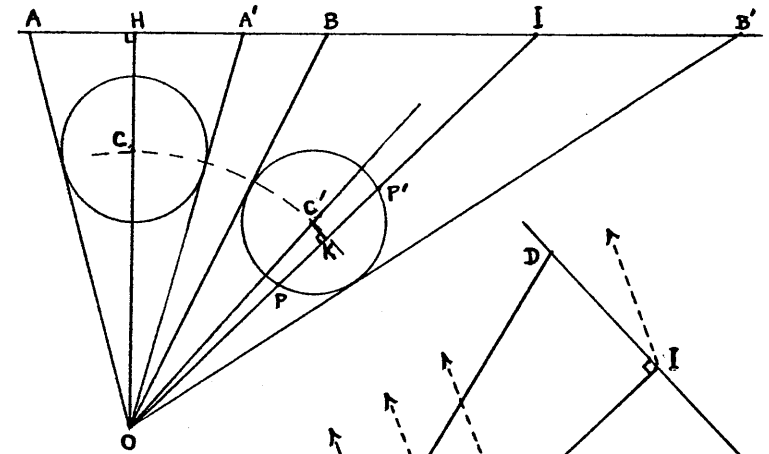
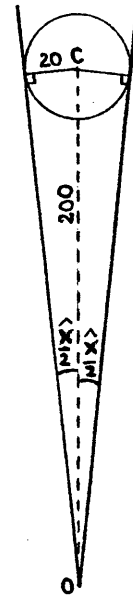
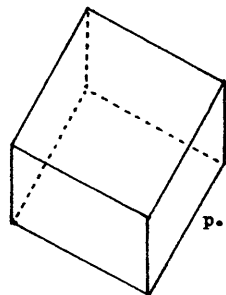
DESSIN 14.17

DESSINS RELATIFS AUX APPENDICES

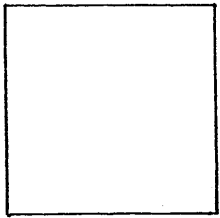




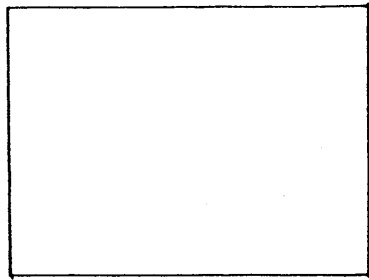
dessin A.9



dessin A.13

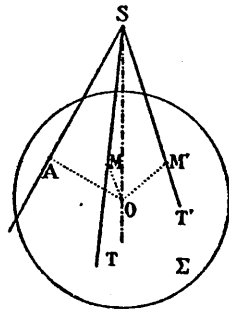
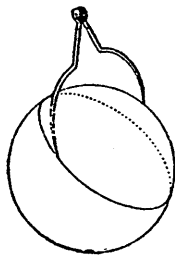
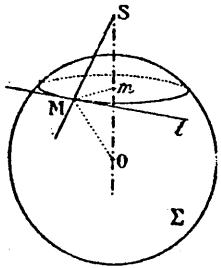


Position axiale

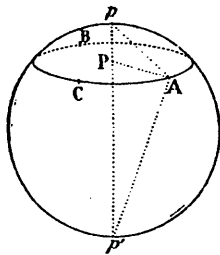
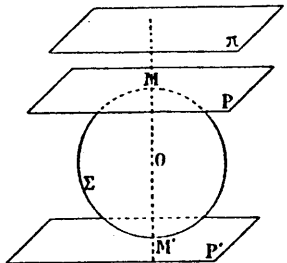


Position excentrée

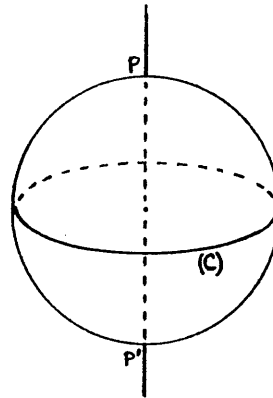
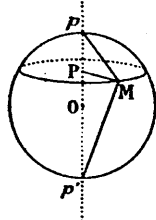
dessin A.14



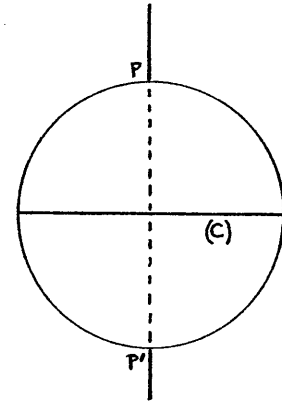
dessin A.15



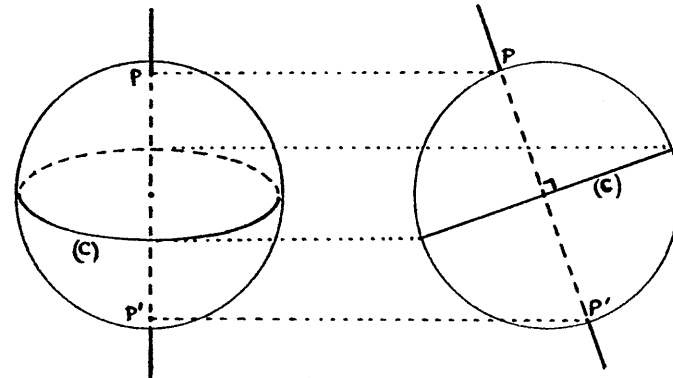
dessin A.16



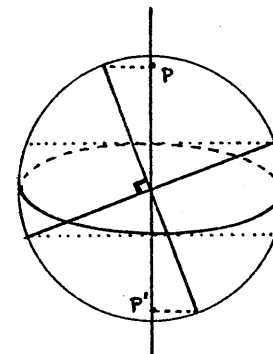
dessin A.17



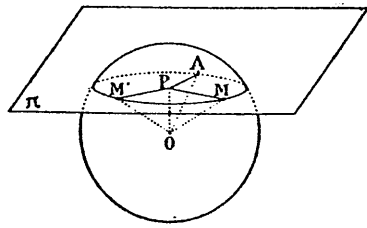
dessin A.18



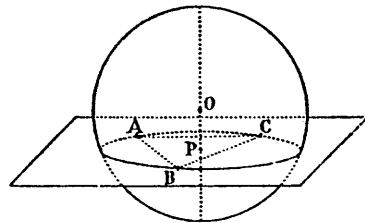
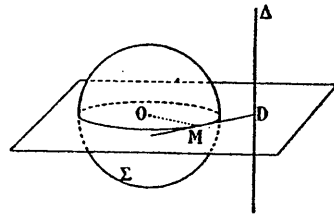
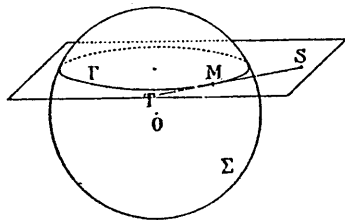
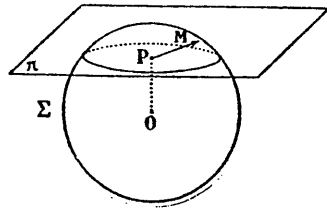
dessin A.19



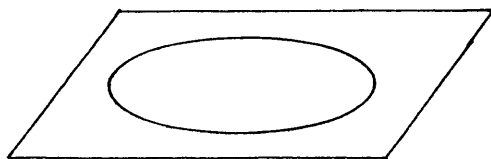
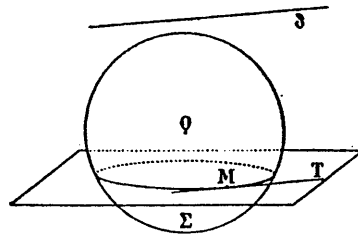
dessin A.20



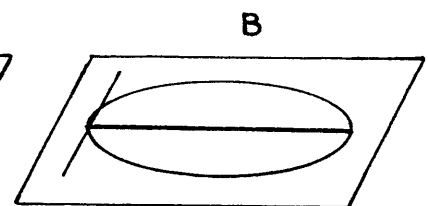
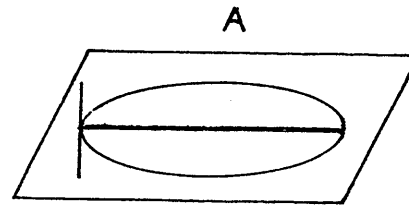
dessin A.21



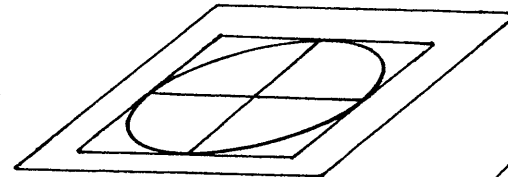
dessin A.22



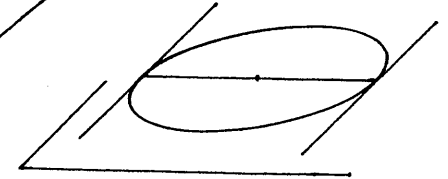
dessin A.23



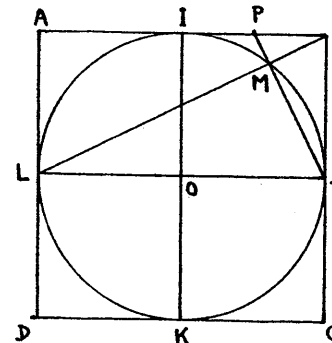
dessin A.24



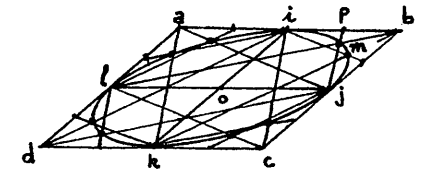
dessin A.25



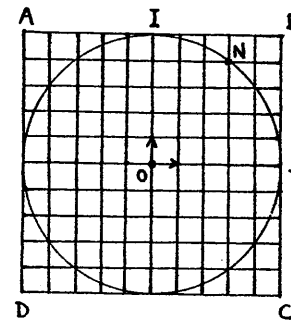
dessin A.26



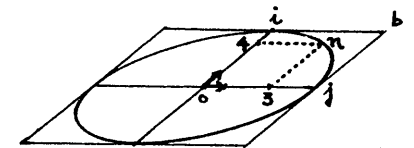
dessin A.27



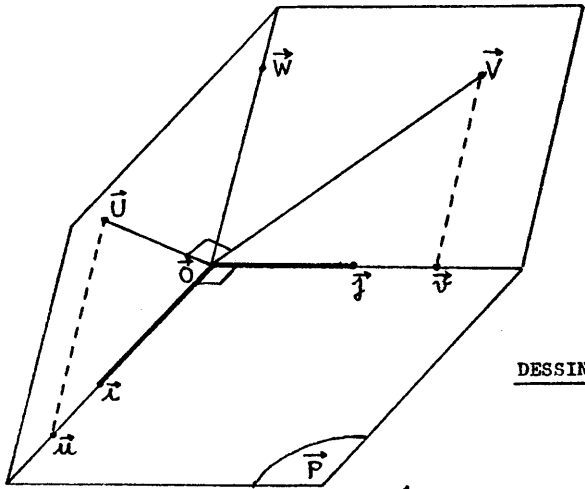
dessin A.28



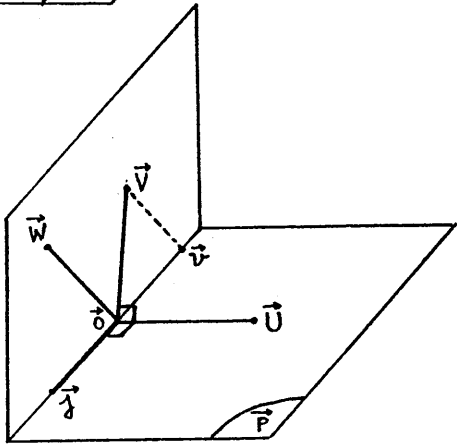
dessin A.29



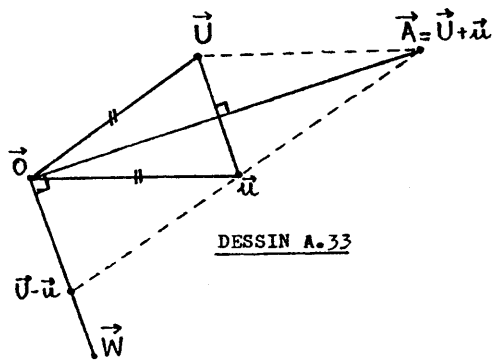
dessin A.30



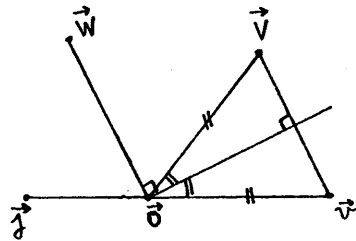
DESSIN A.31



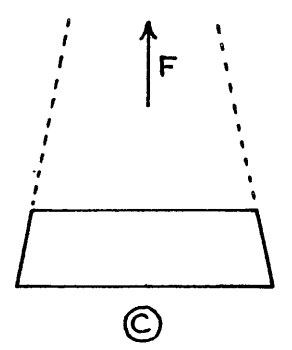
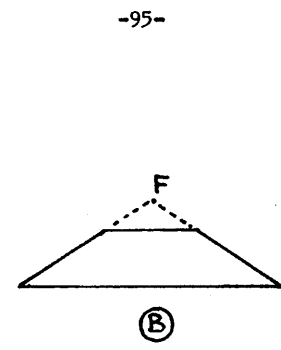
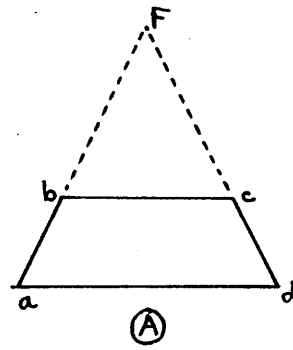
DESSIN A.32



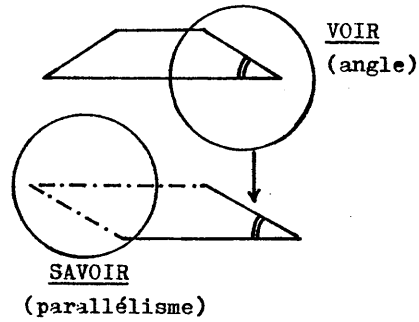
DESSIN A.33



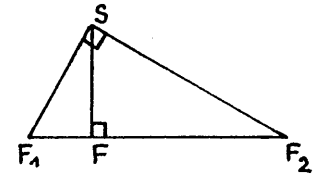
DESSIN A.34



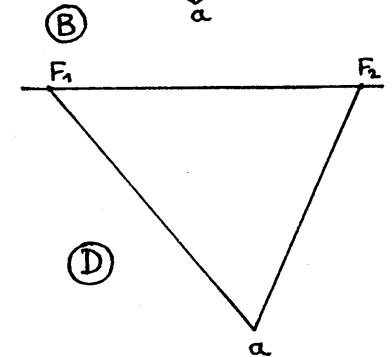
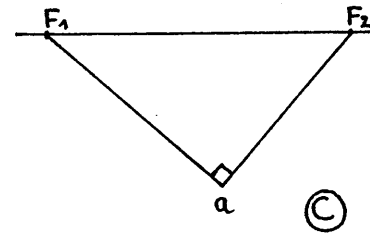
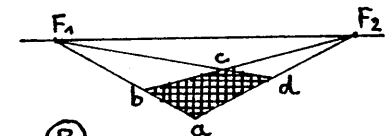
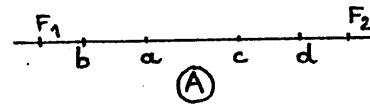
dessin A.35



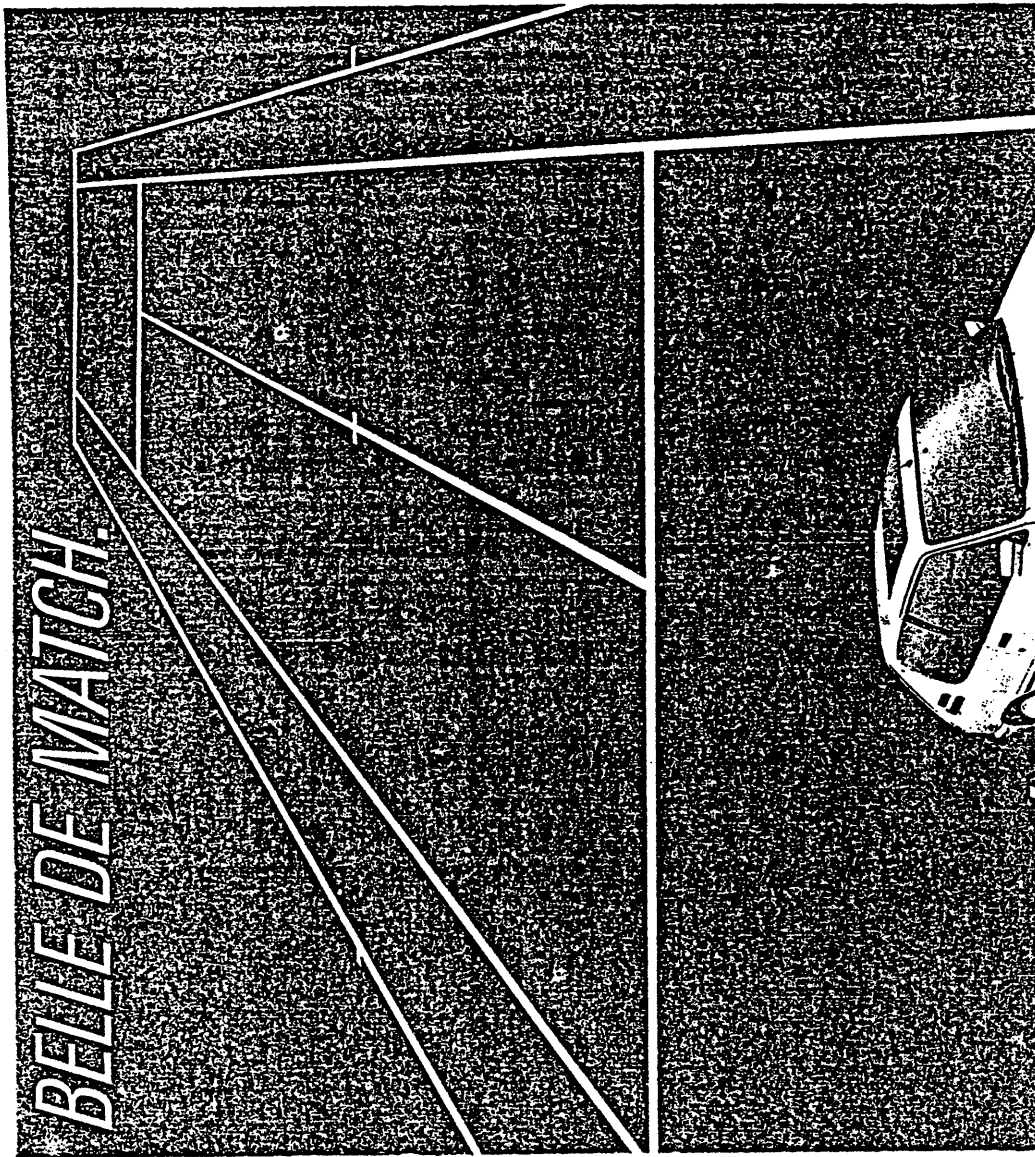
dessin A.36



dessin A.37

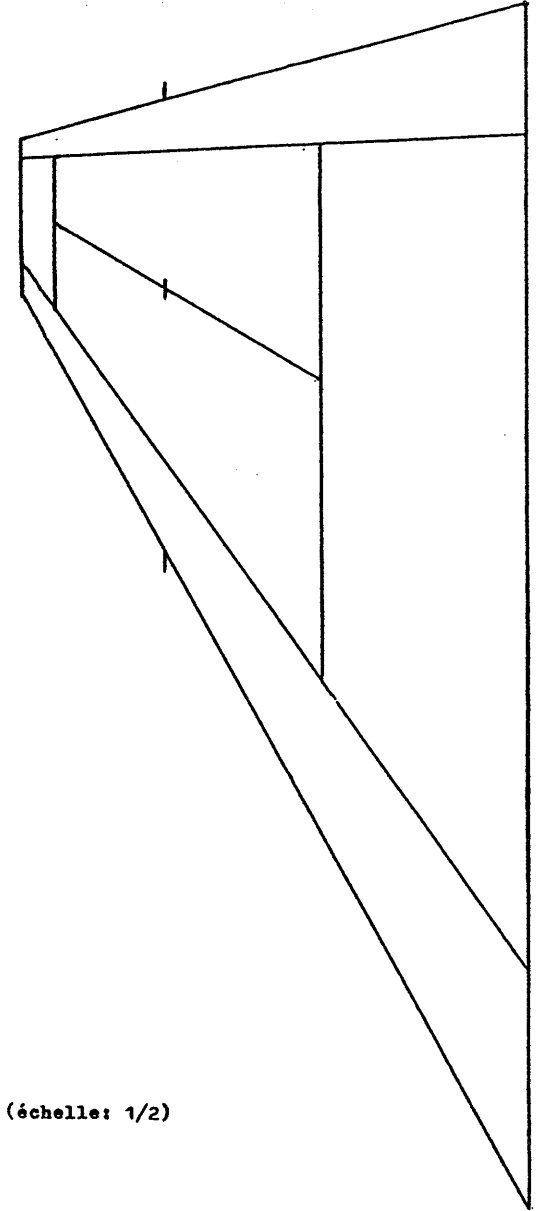


dessin A.38

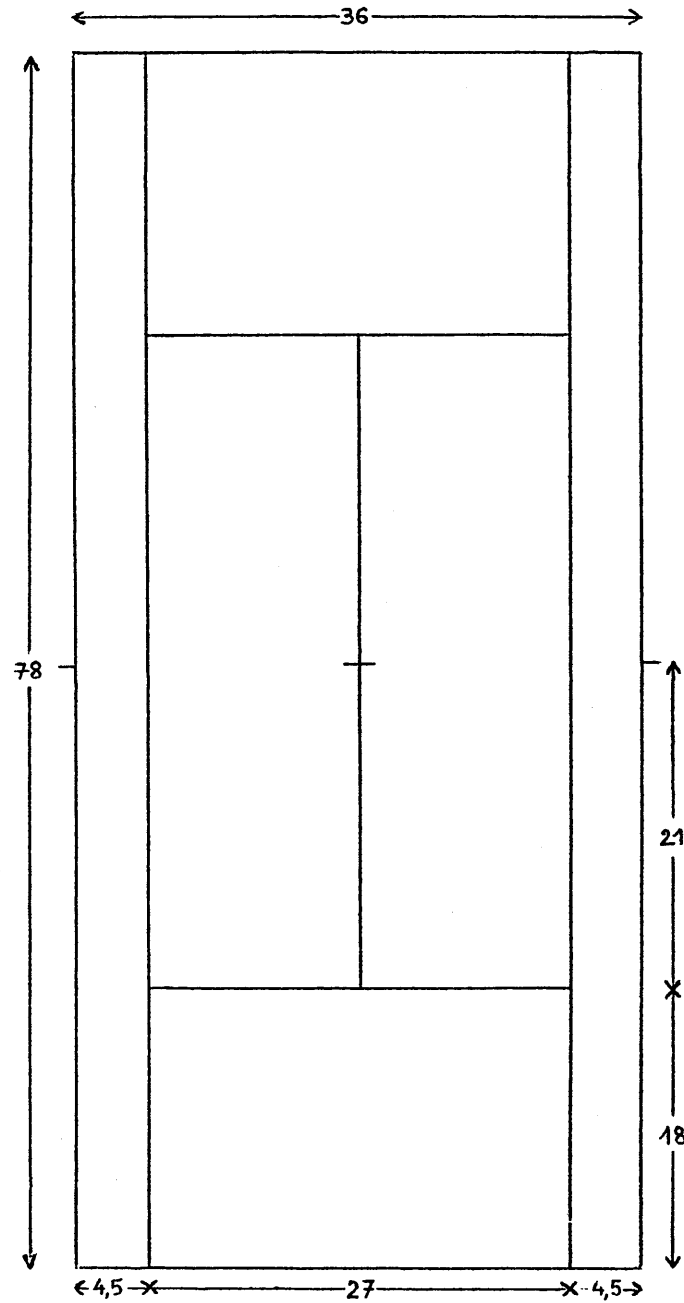


DESSIN A.39

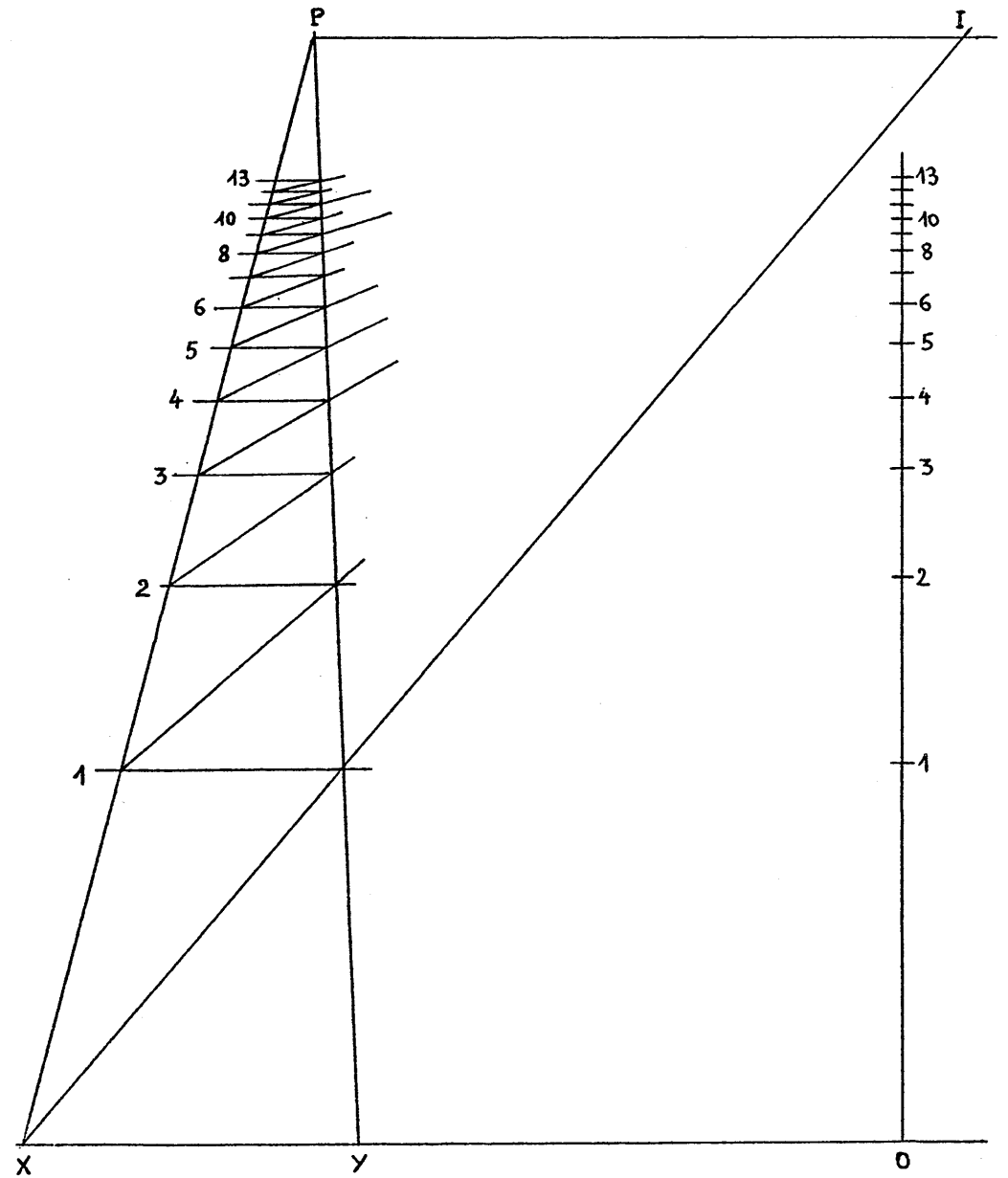
P.



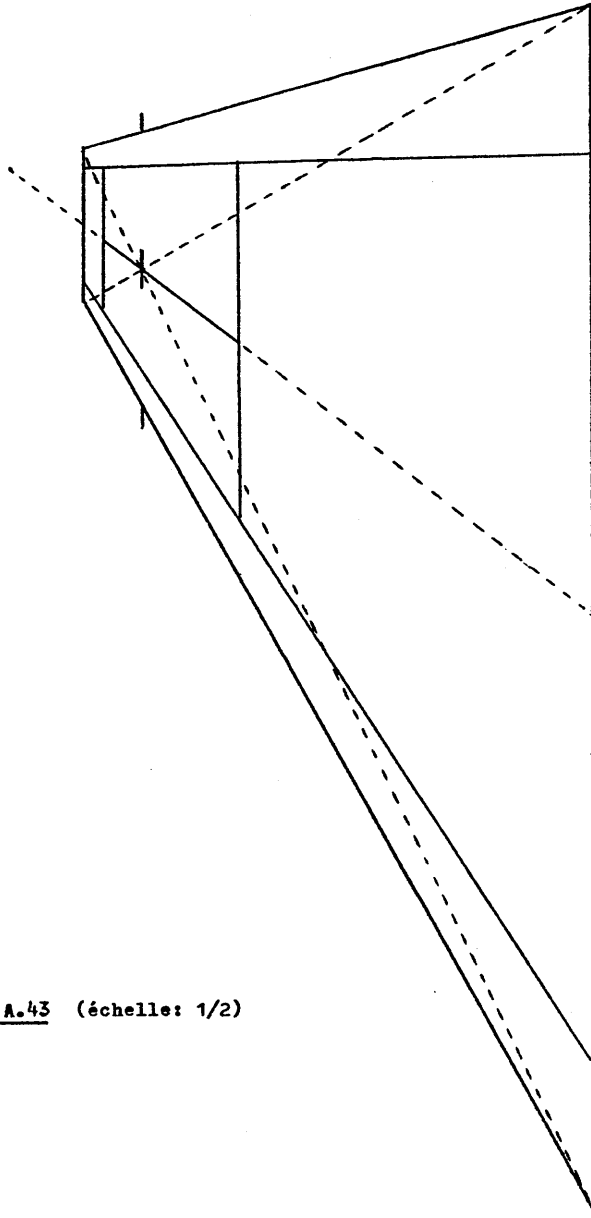
DESSIN A.40 (échelle: 1/2)



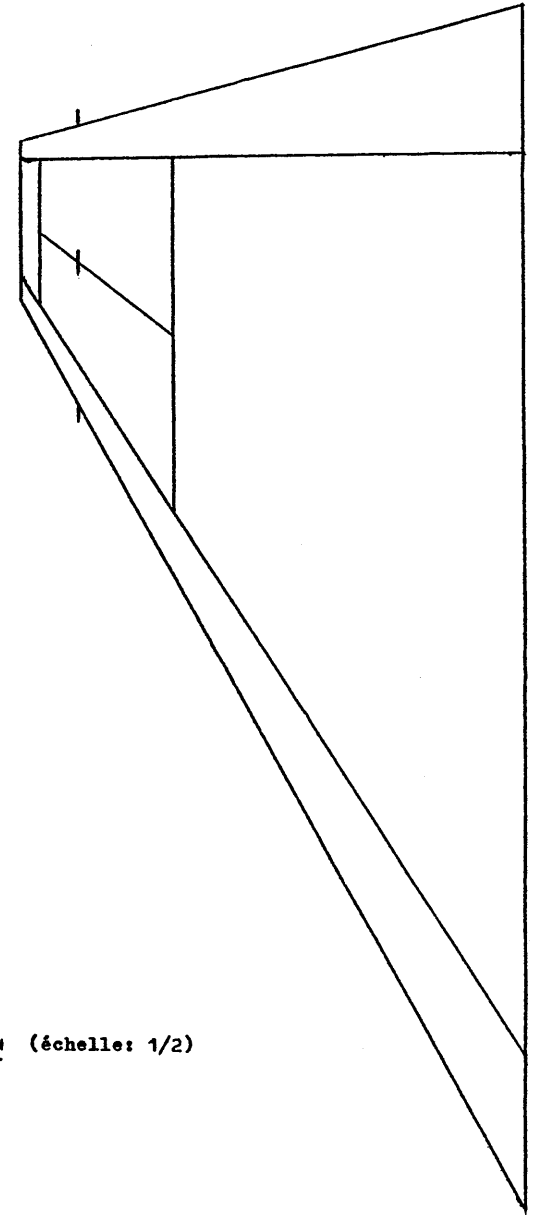
DESSIN A.41 (mesures en pieds anglais)



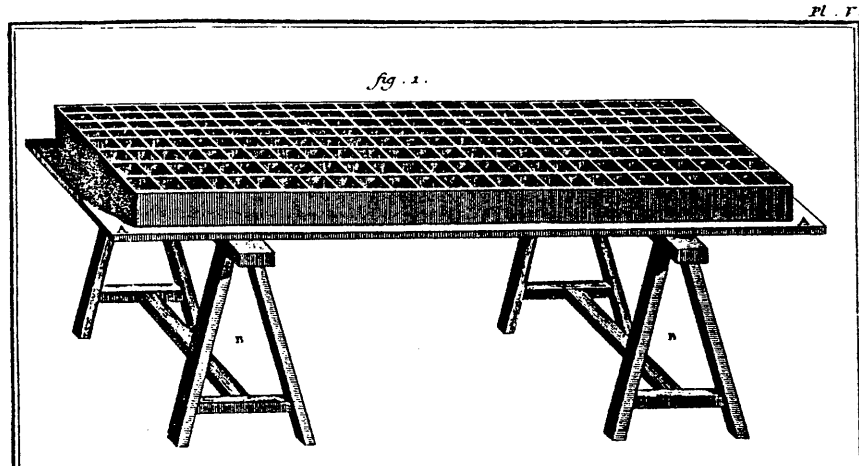
DESSIN A.42 (échelle: 1)



DESSIN A.43 (échelle: 1/2)

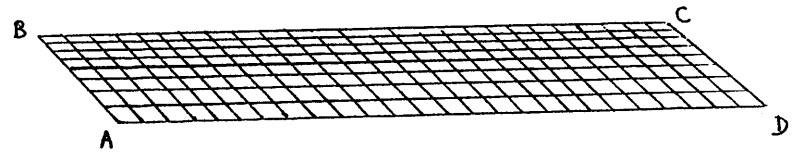


DESSIN A.44 (échelle: 1/2)

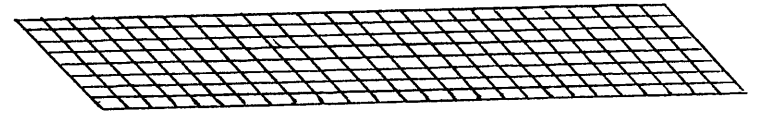


DESSIN A.45

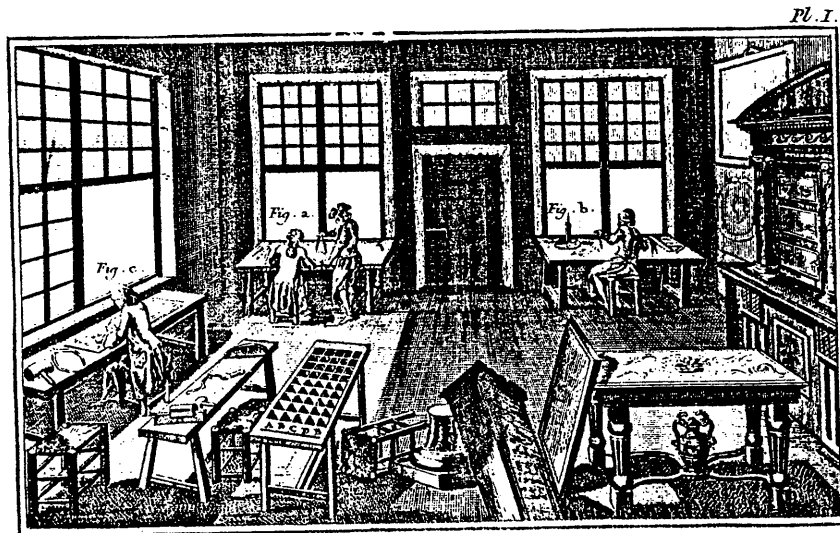
DESSIN A.46: voir page suivante



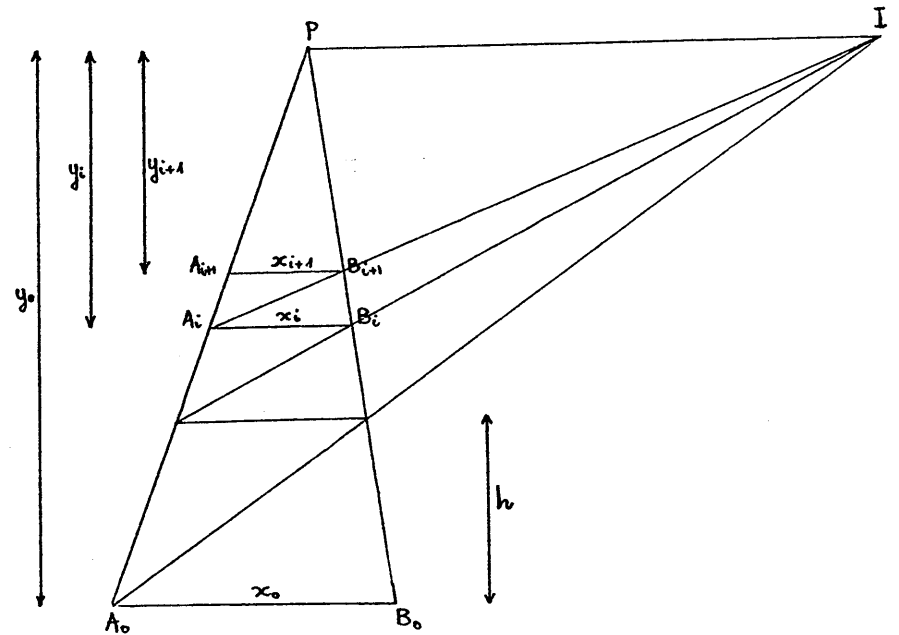
DESSIN A.46



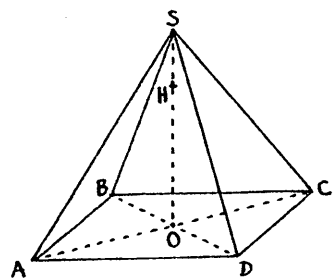
DESSIN A.48



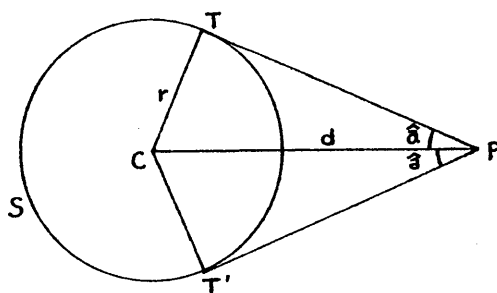
DESSIN A.47



DESSIN A.49

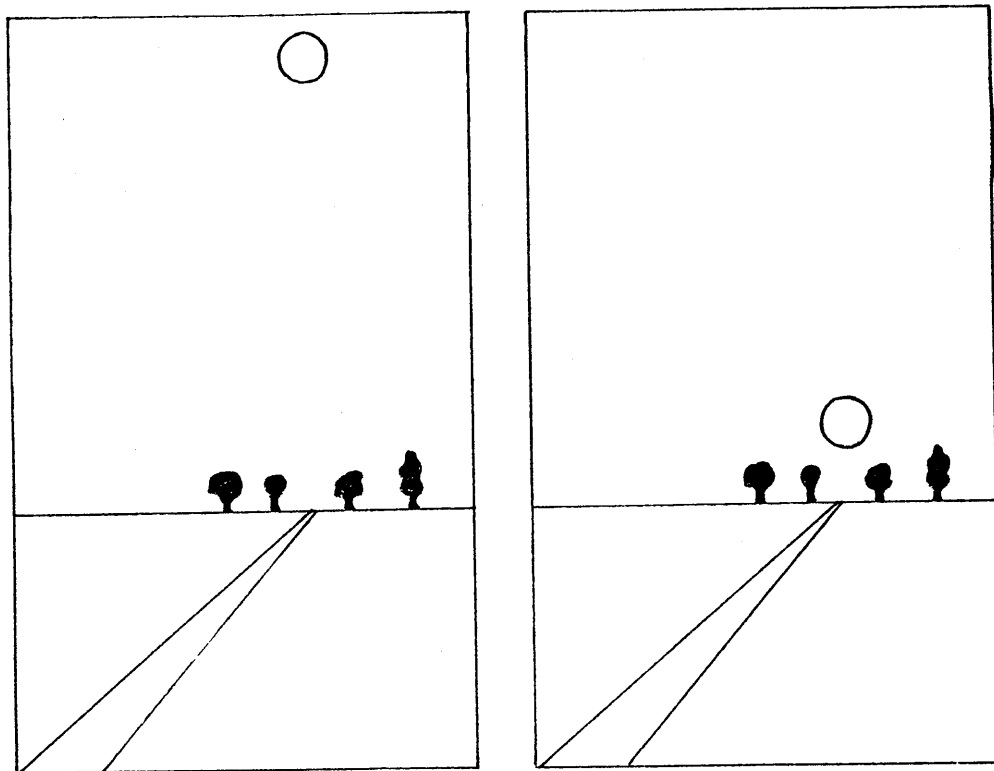


dessin A.50

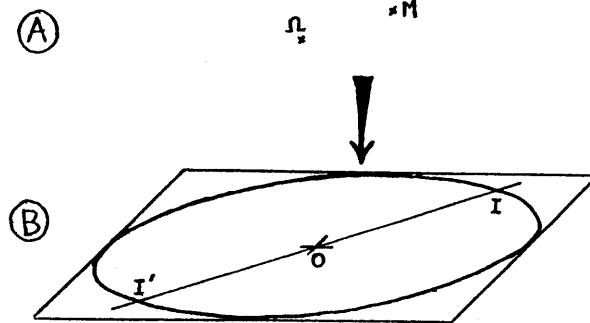


dessin A.51

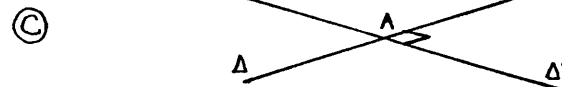
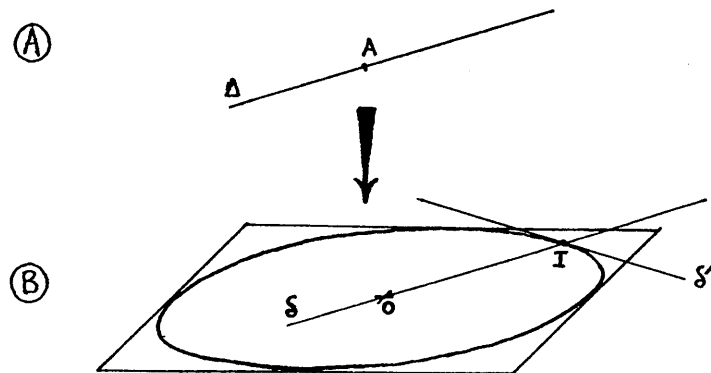
Même sur un dessin, l'astre paraît plus gros au voisinage de l'horizon.



dessin A.52

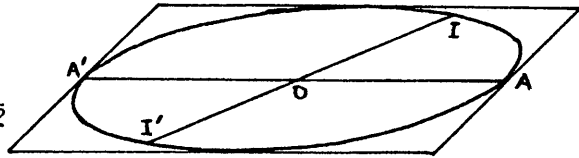


DESSIN A.53

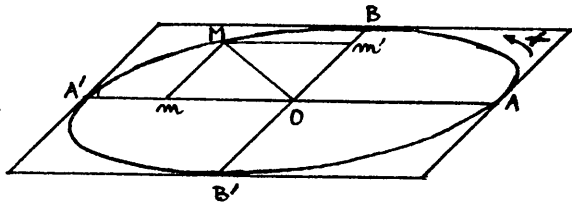


DESSIN A.54

DESSIN A.55

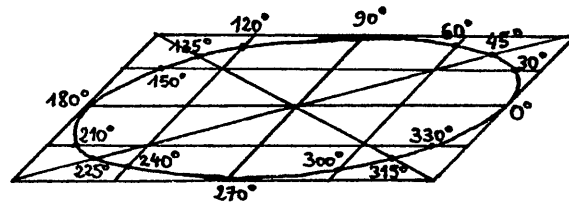
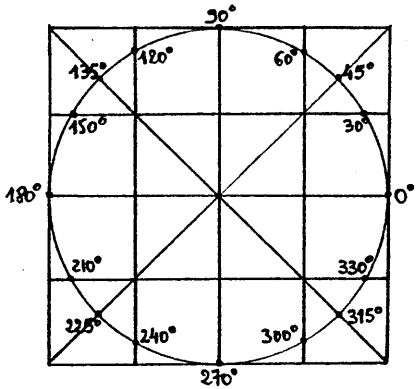


DESSIN A.56



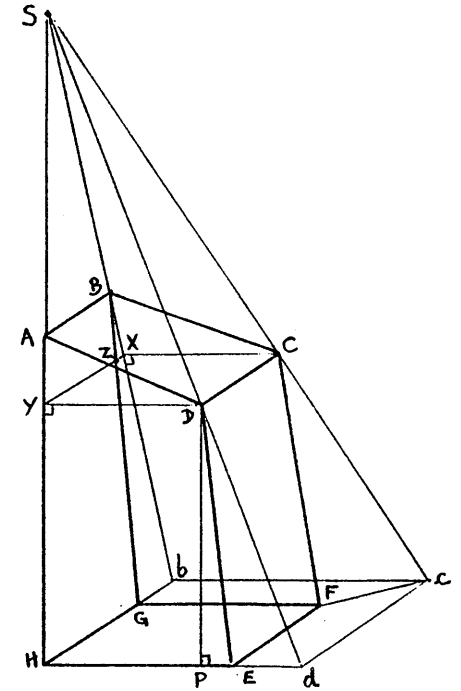
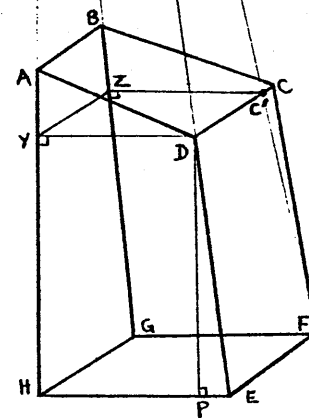
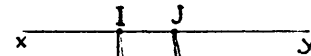
Sur le cercle:

Sur l'ellipse projetée:



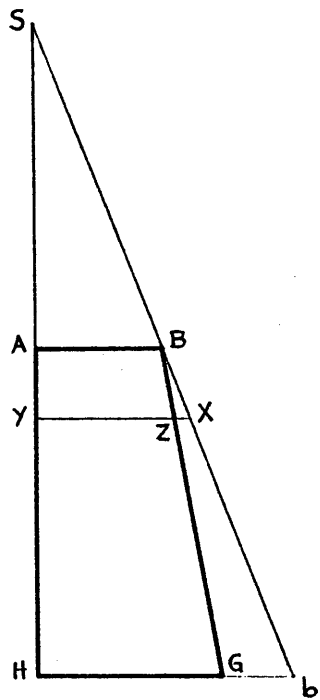
Précaution d'emploi: Cette ellipse ne pourra pas être utilisée tout à fait comme un rapporteur ordinaire: on ne pourra que la translater, et l'angle de deux demi-droites quelconques ne pourra être évalué qu'à partir de l'angle de chacune des deux demi-droites par rapport à l'axe des cosinus.

DESSIN A.57



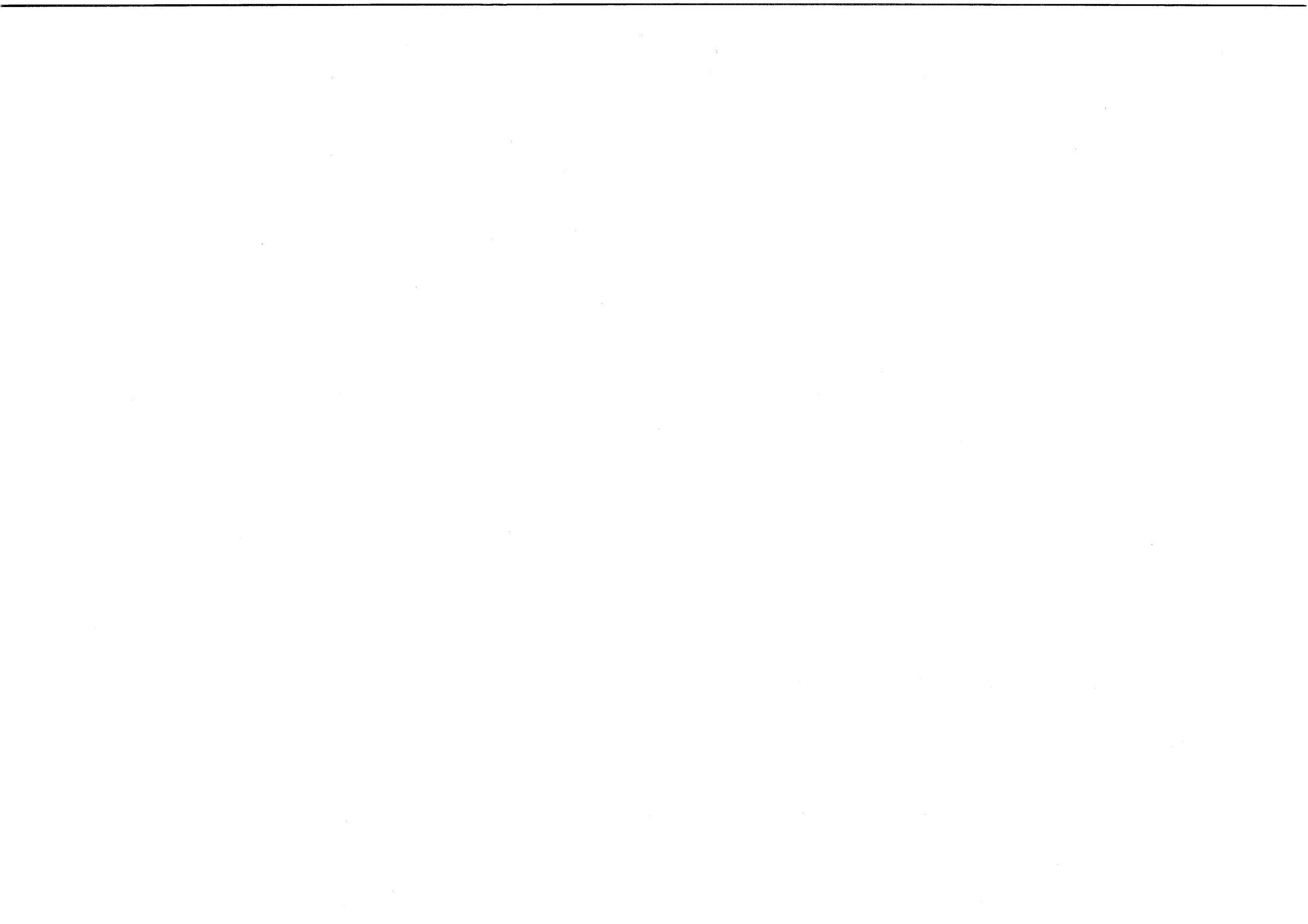
DESSIN A.59

DESSIN A.58

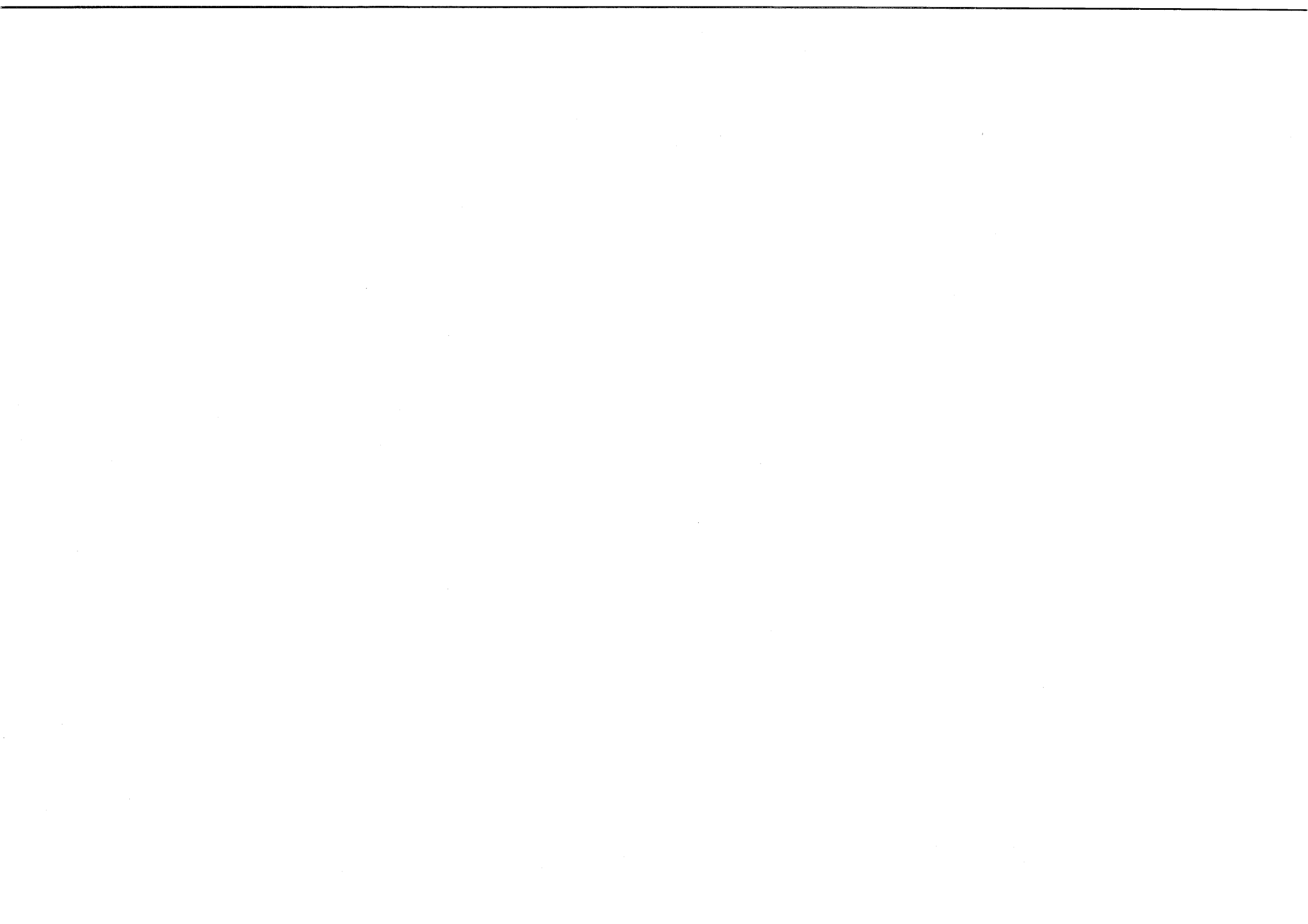


DESSIN A.60

(Echelle: 1/4)



ANNEXES



ANNEXE 4:
RÉFÉRENCES AUX PRINCIPES DE REPRÉSENTATION DANS 23 MANUELS.

-A-

Pour représenter un plan, surface illimitée qui n'a pas de forme, on trace sur ce plan un polygone quelconque, par exemple un quadrilatère; mais il faut concevoir ce plan prolongé indéfiniment au delà du contour de ce polygone. (AMIOT, 1864, p.175)

-B-

Le plan a une étendue illimitée, mais pour faciliter les démonstrations et fixer les idées, on le représente par des figures limitées, ordinairement par un parallélogramme. (ANDRÉ, 1880, p.187)

-C-

Pour figurer un plan, surface illimitée, nous traçons un parallélogramme qui est une figure nécessairement plane. (COMBETTE, 1893, p.342)

-D-

Un plan est une surface indéfinie; mais, pour plus de clarté dans les figures, nous le représenterons toujours limité, en lui donnant la forme d'un parallélogramme; c'est à peu près sous cette forme qu'on voit un rectangle quand on le regarde obliquement d'un point de vue très éloigné. (BOS, 1897, p.153)

-E-

Le plan a une étendue illimitée; mais pour fixer les idées et faciliter les démonstrations, on le représente ordinairement par un parallélogramme tracé sur sa surface. Exemple le plan MN. (GIROD, 1902, p.226)

-F-

En regardant la surface d'une table, on l'aperçoit sensiblement sous la forme d'un parallélogramme. Cela conduit naturellement à l'idée de représenter un plan par un parallélogramme. (NEVEU et BELLENGER, 1913, p.197)

-G-

Un plan est une surface indéfinie, mais on convient de la représenter par un parallélogramme. (X., 1914, p.1)

-H-

Dans les applications, on envisage seulement une portion limitée de plan. La figure 226 représente une portion rectangulaire de plan qu'on dessine telle qu'on la voit, c'est-à-dire sensiblement suivant un parallélogramme. (NEVEU et BELLENGER, 1917, p.197)

-I-

En Géométrie de l'espace, on représente généralement un plan par la perspective cavalière d'une portion rectangulaire de ce plan, c'est-à-dire par un parallélogramme que l'on désigne par une lettre. (BÉCHÉ, 1928, p.2)

-J-

Un plan est une surface indéfinie dont on ne représente sur le dessin qu'une portion limitée, par exemple rectangulaire; mais il est bien entendu que la surface n'est pas bornée au contour du parallélogramme. (CAMMAN et RÉBOUIS, 1928, p.2)

-K-

Le plan a une étendue illimitée; mais, pour faciliter les démonstrations et fixer les idées, on le représente par une figure limitée, généralement un parallélogramme. (HUE et VAGNIER, 1934, p.35)

-L-

Sur le dessin, on figure une portion rectangulaire d'un plan P (*); mais il est bien entendu que, par la pensée, il faut prolonger cette figure au delà de ses bords, indéfiniment dans tous les sens. (* En Géométrie dans l'espace, pour dessiner des figures qui ne sont pas toutes dans un même plan, on utilise une représentation particulière: la perspective. Par exemple la perspective cavalière d'une portion rectangulaire d'un plan est un parallélogramme. (COLLECTIF, 1940, p.382)

-M-

En Géométrie plane, pour représenter une droite, on ne dessine qu'une portion de cette droite. De même, pour représenter un plan, on n'en dessine qu'une portion. En général, on en représente une portion rectangulaire que l'on dessine à cause de la perspective sous la forme d'un parallélogramme. (ROUX et MIELLOU, 1942, p.8)

-N-

Pour représenter un plan, on le limite conventionnellement à un rectangle, lequel est vu, en perspective, sous la forme d'un parallélogramme: le plan P (fig.3). (CLUZEL et ROBERT, 1943, p.6)

-O-

Fréquemment, pour représenter un plan, nous imaginerons qu'on en a délimité une portion par un rectangle, et nous représenterons cette portion en perspective de la même façon que se trouve, sur la figure 1, représenté en perspective le dessus rectangulaire de la table (on peut, au moyen d'une rallonge (fig.1), augmenter l'étendue d'une table; on peut donc prolonger une surface plane limitée). (BENOÎT, 1946, p.5)

-P-

Le plan étant illimité, nous devons, pour pouvoir le dessiner, le limiter conventionnellement à un certain contour. Ce contour est en général un rectangle, qui, par un effet de perspective, est vu sous forme d'un parallélogramme. (BRACHET, DUMARQUET et POCHARD, 1948, p.5)

-Q-

Pratiquement, pour représenter un plan, on le suppose limité à la portion intérieure à un rectangle représenté conventionnellement par un parallélogramme. (LEBOSSÉ et HEMERY, 1949, p.8)

-R-

On ne peut songer à représenter qu'une portion de plan. On donne à cette portion la forme d'un rectangle qui, vus les procédés de dessin dont nous disposons, apparaîtra comme un parallélogramme (fig.2) ou un trapèze, selon les cas. (DESBATS, 1951, p.7)

-S-

Comme un plan est illimité dans toutes les directions, nous n'en représenterons jamais qu'une partie, celle que limite, par exemple, un rectangle (fig.2, plan P). (BIGUENET et DUVAL, 1956, p.6)

-T-

Dans les figures on représente une portion de plan par un parallélogramme, mais il est bien entendu que par la pensée, il faut prolonger cette figure au delà de ses bornes, indéfiniment, dans tous les sens. (COLLECTIF, 1960, p.433)

-U-

La notion de plan est intuitive: c'est la feuille de papier ou le tableau (...). On convient, en géométrie dans l'espace, de figurer un plan par un parallélogramme (fig.110). Une lettre, placée dans un coin, désignera le plan. Il s'agit là d'une simple convention, le plan étant illimité. Pour alléger une figure, on n'indique parfois sur deux ou trois côtés du parallélogramme. (GIRARD et LENTIN, 1965, pp.101-102)

-V-

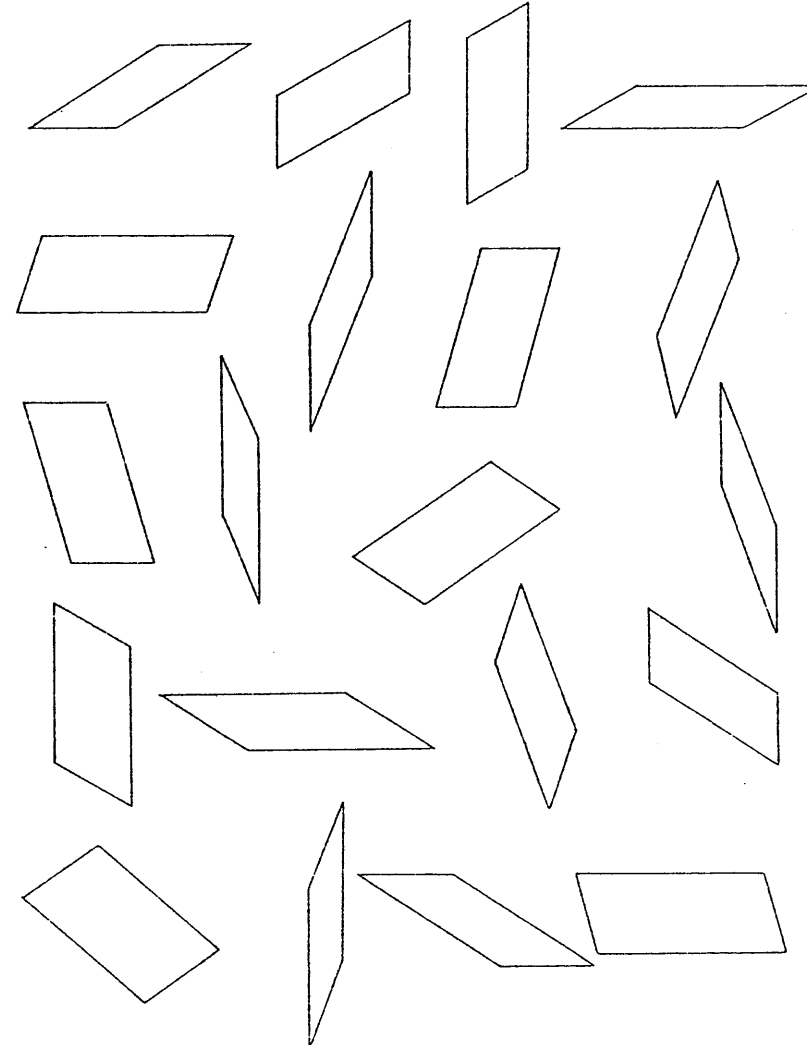
Au chapitre 9, nous avons usé de conventions de dessin pour représenter les figures les plus simples de l'espace. En particulier, pour représenter un plan, nous avons pris l'habitude de dessiner un parallélogramme, donnant ainsi l'impression visuelle d'un rectangle "vu en perspective". Dans cette section et la suivante, nous nous proposons de justifier et d'améliorer ces conventions. Au moyen d'un dessin, réalisé sur une feuille de papier ou sur le tableau, il s'agit d'atteindre un double objectif: a) obtenir un aspect de la figure à représenter aussi proche que possible de la réalité physique; b) avoir la possibilité, à partir de données précises, de déterminer certains éléments de la figure ou d'effectuer sur la figure certains problèmes de construction. (GAUTIER, GIRARD, GERLL, THIERCÉ et WARUSFEL, 1973, p.348)

-W-

Les représentations de figures de l'espace sont faites en perspective cavalière (Mathématiques Seconde, paragraphe B.1). Rappelons quelques propriétés: 1) Une figure contenue dans un plan parallèle au plan de la feuille n'est pas déformée. 2) Deux droites parallèles de l'espace sont représentées par deux droites parallèles. 3) Un segment et son milieu sont représentés par un segment et son milieu. 4) Les segments et les angles qui ne sont pas dans des plans parallèles au plan de la feuille ne sont pas représentés en vraie grandeur. Pour obtenir une meilleure lecture de la figure, on convient de considérer les plans et les solides comme opaques: les lignes "vues" sont alors tracées en traits pleins, les lignes "cachées" en traits pointillés. (CORRIEU, LION, ROUMILHAC et VILATTE, 1988, p.39)

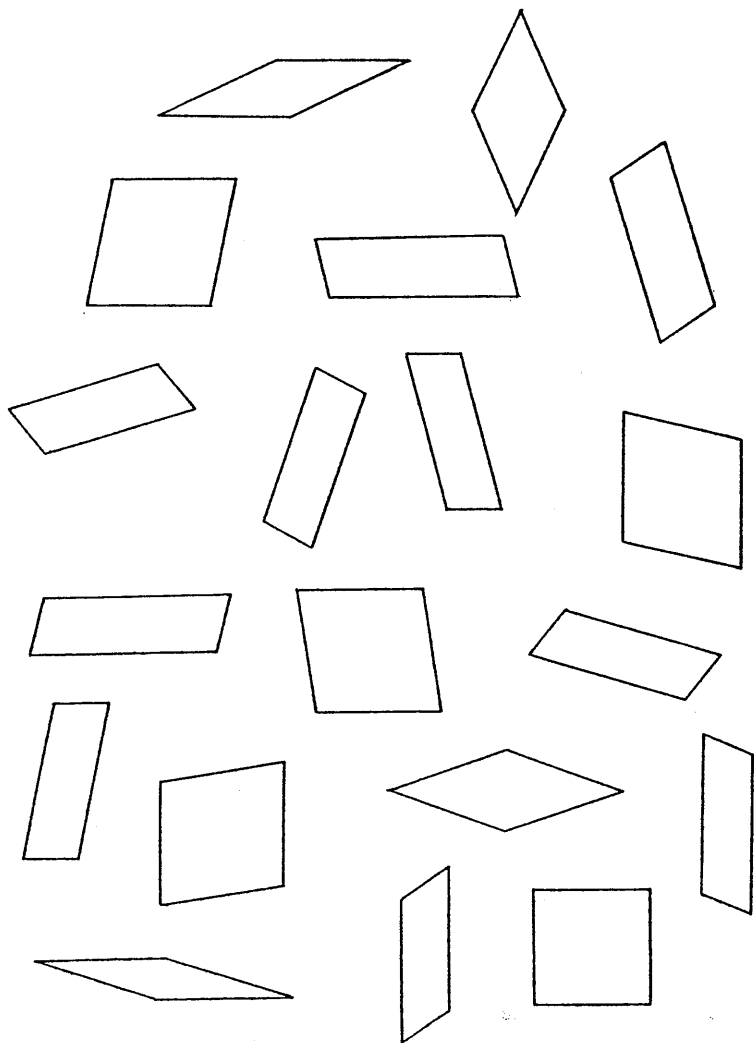
ANNEXE 2 : LA FEUILLE DE TEST.

14/1 NOM et Prénom: Classe:
Etablissement: Date:



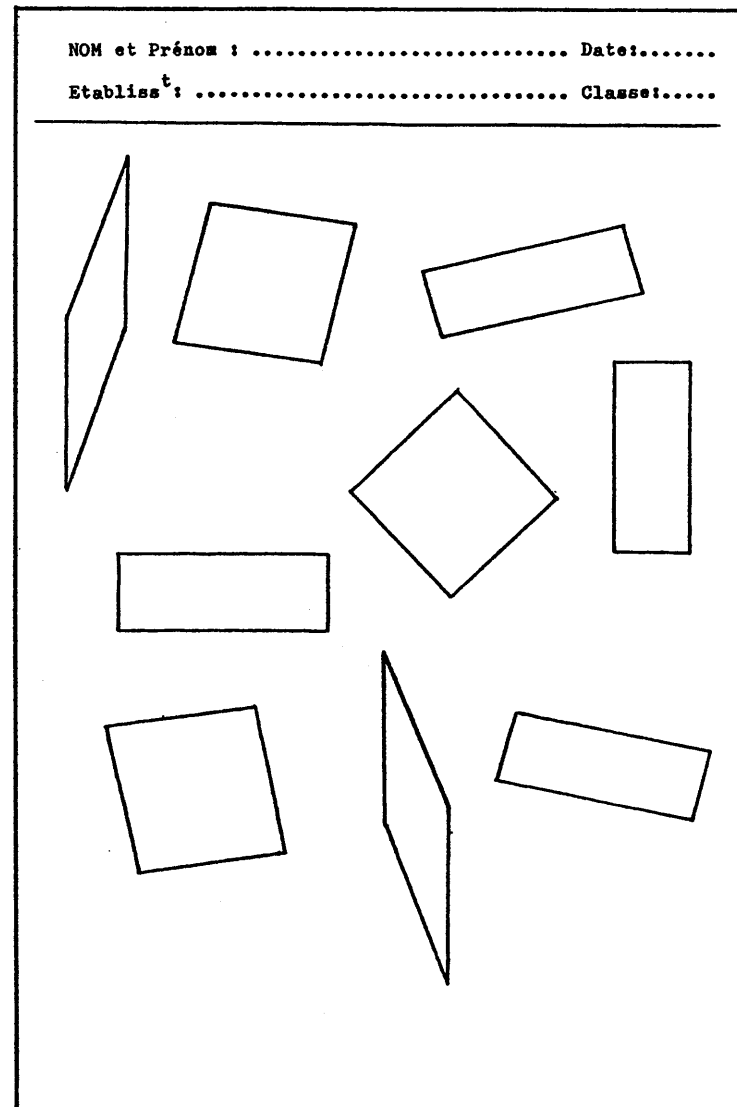
ANNEXE 3 (1/2): LA PREMIÈRE FEUILLE DE TEST.

NOM et Prénom: Classe: 19/1
Etablissement: Date:



ANNEXE 3 (2/2): LA SECONDE FEUILLE DE TEST.

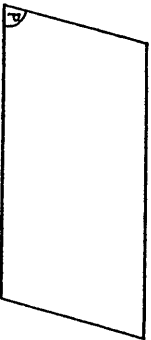
NOM et Prénom : Date:.....
Etabliss^t: Classet:.....



ANNEXE 4 : LA DEUXIÈME FEUILLE DE TEST, RECTO ET VERSO.
(2/5)

4
A/1
I
NOM et Prénom:
Classe: Redoublant? oui non
Etablissement:
Date:

① Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :

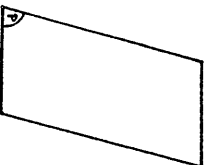


② Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :

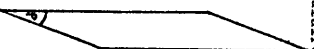


4
B/1
I
NOM et Prénom:
Classe: Redoublant? oui non
Etablissement:
Date:

③ Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :



④ Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :



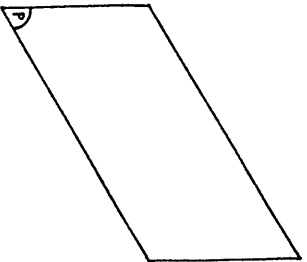
ANNEXE 4 : LA PREMIÈRE FEUILLE DE TEST, RECTO ET VERSO.
(1/5)

4
A/1
I
NOM et Prénom:
Classe: Redoublant? oui non
Etablissement:
Date:

① Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :

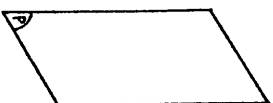


② Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :

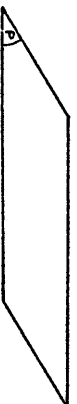


4
B/1
I
NOM et Prénom:
Classe: Redoublant? oui non
Etablissement:
Date:

③ Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :



④ Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :



ANNEXE 4 : LA QUATRIÈME FEUILLE DE TEST, RECTO ET VERSO.

(4/5)

4C/1
 NOM et Prénom:
 Classe: Redoublant? oui non
 Etablissement:
 Date:

1 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :

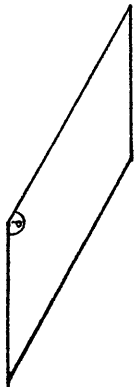


2 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :

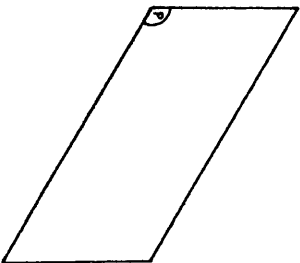


4D/1
 NOM et Prénom:
 Classe: Redoublant? oui non
 Etablissement:
 Date:

3 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :



4 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :

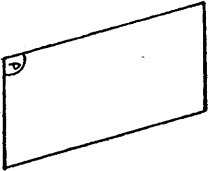


ANNEXE 4 : LA TROISIÈME FEUILLE DE TEST, RECTO ET VERSO.

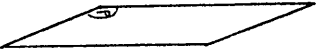
(3/5)

4C/1
 NOM et Prénom:
 Classe: Redoublant? oui non
 Etablissement:
 Date:

1 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :

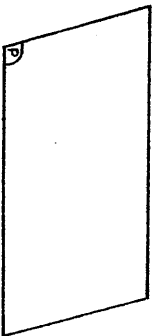


2 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :



4D/1
 NOM et Prénom:
 Classe: Redoublant? oui non
 Etablissement:
 Date:

3 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :



4 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :

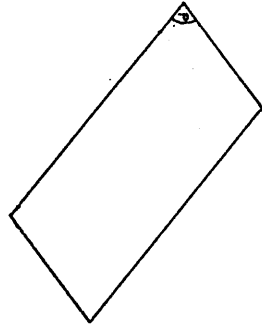


ANNEXE 4 : LA CINQUIÈME FEUILLE DE TEST, RECTO ET VERSO.

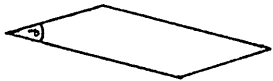
(5/5)

4E/1
 NOM et Prénom:
 Classe: Redoublant? oui non
 Etablissement:
 Date:

1 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :



2 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :

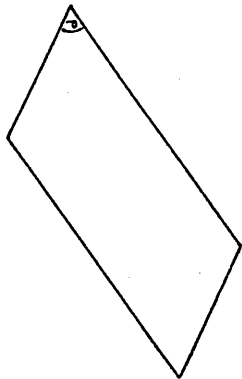


4E/1
 NOM et Prénom:
 Classe: Redoublant? oui non
 Etablissement:
 Date:

3 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :



4 Tracer une droite D perpendiculaire au plan P :



ANNEXE 5 : LA FEUILLE DE TEST (1/2)

3A/1 NOM et Prénom: Redoublant? OUI NON
 Classe: Etablissement:

QUESTION 1: En Géométrie dans l'espace, pourquoi, (d'après vous) représente-t-on habituellement un plan par un parallélogramme ?

QUESTION 2: Parmi les dessins de la figure ci-jointe, indiquez ceux qui (à votre avis) ne peuvent pas représenter un cube (réduit à ses arêtes). Dans chaque cas, vous justifierez votre rejet:

Numéro	Justification

QUESTION 3: Parmi les dessins de la figure, indiquez les quatre qui vous semblent le plus clairement représenter un cube (réduit à ses arêtes). Vous les classerez dans l'ordre décroissant de vos préférences:

- Premier: le numéro
- Deuxième: le numéro
- Troisième: le numéro
- Quatrième: le numéro

(TOURNEZ LA FEUILLE, S.V.P.)

LA FEUILLE DE TEST (2/2)

38/1

QUESTION 4: Pour chacun des dessins de la figure qui peuvent représenter un cube, ce cube vous paraît-il situé:

- a) plus haut que vous ? (répondez H)
- b) au même niveau que vous ? (répondez N)
- c) plus bas que vous ? (répondez B)

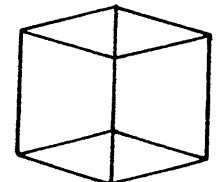
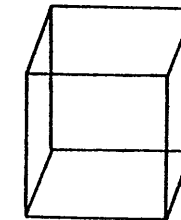
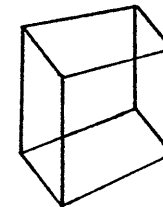
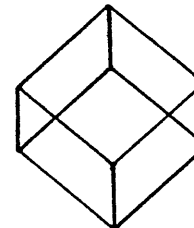
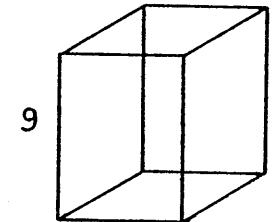
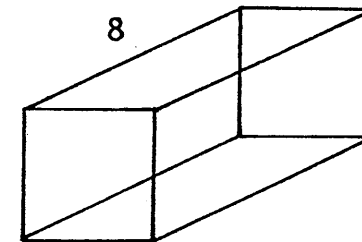
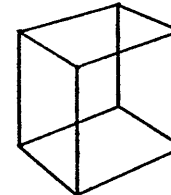
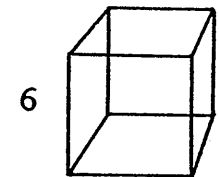
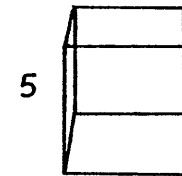
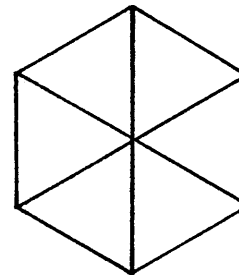
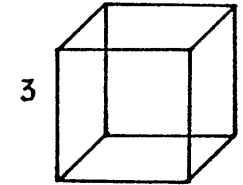
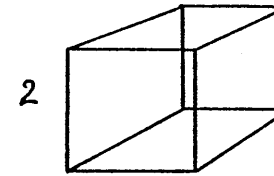
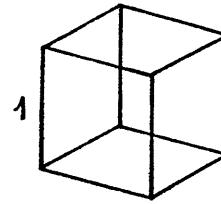
(N.B. : Lorsque vous voyez plusieurs possibilités, n'indiquez que celle que vous voyez vue en premier.)

Numéro	Réponse

QUESTION 5: Parmi les dessins de la figure, indiquez les numéros de ceux qui, selon vous, peuvent représenter l'ombre au soleil d'un cube (réduit à ses arêtes):

Les numéros

ANNEXE 5 :
LES DESSINS DE CUBE



11

12

13

1 A/1

NOM et prénom: Redoublant? OUI NON

Classe: Etablissement:

Représentez, par un dessin, chacune des figures de l'espace suivantes:

- 1- Un plan P, un point A du plan P et un point B hors du plan P.
- 2- Un plan P, une droite D située tout entière dans P et une droite D' qui coupe P en un point.
- 3- Un plan P et une droite D n'ayant aucun point commun avec P.
- 4- Un plan P et une droite D perpendiculaire à P.
- 5- Deux droites D et D' qui ont un -et un seul- point commun.
- 6- Deux droites D et D' non parallèles et n'ayant aucun point commun.
- 7- Deux plans P et P' n'ayant aucun point commun.
- 8- Deux plans P et P' qui se coupent.

DESSIN 1

DESSIN 2

DESSIN 3

DESSIN 4

DESSIN 5

DESSIN 6

DESSIN 7

DESSIN 8

QUESTION SUPPLÉMENTAIRE: Avez-vous déjà fait de la Géométrie dans l'espace en cours de mathématiques, cette année ou les années précédentes?

Pas du tout. Un peu. Moyennement. Beaucoup.

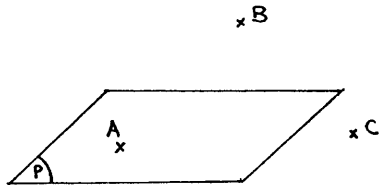
1 A/2

LE QUESTIONNAIRE (PREMIERE VERSION)

NOM:
Classe:

Dessin 1

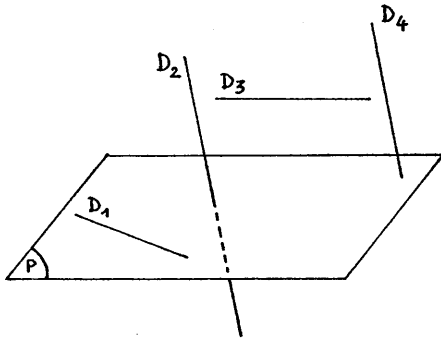
A, B, C sont des points de l'espace.
P est un plan.
Pour chacun des trois points A, B, C,
dire s'il est:
- dans P
- hors de P
- ou si le dessin ne permet pas de
répondre à la question.



Point A:
Point B:
Point C:

Dessin 2

D_1, D_2, D_3, D_4 sont des droites de l'espace. P est un plan.
Pour chacune des droites D_1, D_2, D_3, D_4
dire si elle est:
- incluse dans P
- sécante à P
- parallèle à P
- ou si le dessin ne permet pas
de répondre à la question.

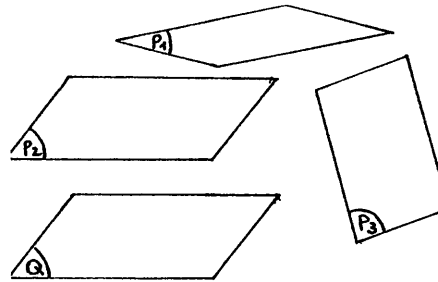


Droite D_1 :
Droite D_2 :
Droite D_3 :
Droite D_4 :

T.S.V.P.

Dessin 3

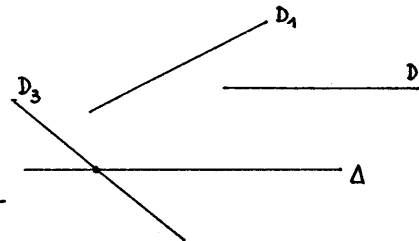
P_1, P_2, P_3, Q sont des plans de l'espace.
Pour chacun des plans P_1, P_2, P_3 , dire
s'il est:
- sécant à Q
- parallèle à Q
- ou si le dessin ne permet
pas de répondre à la question.



Plan P_1 :
Plan P_2 :
Plan P_3 :

Dessin 4

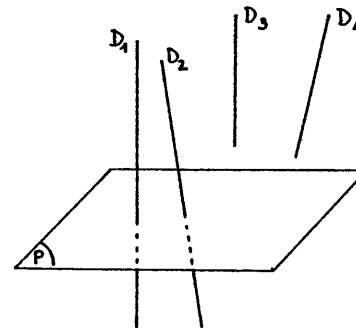
D_1, D_2, D_3, Δ sont des droites de l'espace.
Pour chacune des droites D_1, D_2, D_3 , dire
si elle est:
- sécante à Δ
- parallèle à Δ
- ni sécante, ni parallèle à
- ou si le dessin ne permet pas
de répondre à la question.



Droite D_1 :
Droite D_2 :
Droite D_3 :

Dessin 5

D_1, D_2, D_3, D_4 sont des droites de l'espace.
P est un plan.
Pour chacune des droites D_1, D_2, D_3, D_4 ,
dire si elle est:
- perpendiculaire à P
- ou non
- ou si le dessin ne permet pas
de répondre à la question.



Droite D_1 :
Droite D_2 :
Droite D_3 :
Droite D_4 :

LE QUESTIONNAIRE (SECONDE VERSION)

NOM et Prénom: Redoublant? OUI NON
 Classe: Etablissement:

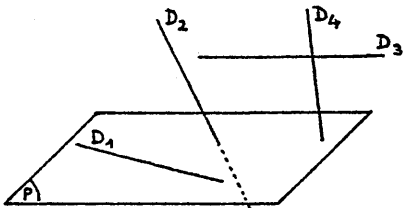
DESSIN 1
B.



Ce dessin représente 3 points de l'espace A, B, C, ainsi qu'un plan P.
 Pour chacun des points A, B, C, dites si, d'après le dessin, il est dans le plan P.
 (Cochez les bonnes réponses)

	est dans le plan P.	n'est pas dans le plan P.	le dessin ne permet pas de répondre.	je ne sais pas.
le point A				
le point B				
le point C				

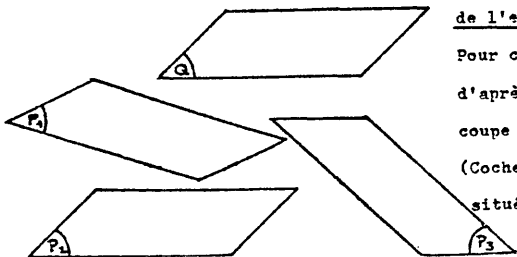
DESSIN 2



Ce dessin représente 4 droites de l'espace D_1, D_2, D_3, D_4 , ainsi qu'un plan P.
 Pour chacune des 4 droites, dites si, d'après le dessin: . elle est dans le plan P;
 . elle coupe P en un point;
 . elle n'a aucun point dans P.
 (Cochez les bonnes réponses)

	est tout entière dans P.	coupe P en un seul point.	n'a aucun point dans le plan P.	le dessin ne permet pas de répondre.	je ne sais pas.
la droite D_1					
la droite D_2					
la droite D_3					
la droite D_4					

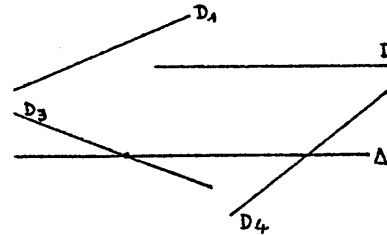
DESSIN 3



Ce dessin représente 4 plans, P_1, P_2, P_3 et Q, de l'espace.
 Pour chacun des 3 plans P_1, P_2, P_3 , dites si, d'après le dessin, il est parallèle à Q, ou coupe Q.
 (Cochez la bonne réponse dans le tableau situé au dos de la feuille)

	coupe le plan Q.	est parallèle à Q.	n'a aucun point commun avec Q.	le dessin ne permet pas de répondre.	je ne sais pas.
le plan P_1					
le plan P_2					
le plan P_3					

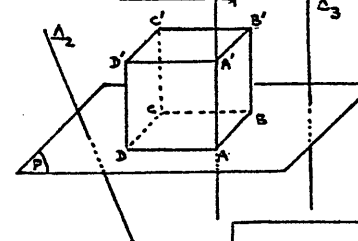
DESSIN 4



Ce dessin représente 5 droites D_1, D_2, D_3, D_4 et Δ de l'espace.
 Pour chacune des 4 droites D_1, D_2, D_3, D_4 , dites si, d'après le dessin:
 . elle coupe Δ ;
 . elle est parallèle à Δ ;
 . elle n'est, ni parallèle, ni sécante à Δ .
 (Cochez les bonnes réponses)

	coupe la droite Δ .	est parallèle à Δ .	n'est ni parallèle, ni sécante à Δ .	le dessin ne permet pas de répondre.	je ne sais pas.
la droite D_1					
la droite D_2					
la droite D_3					
la droite D_4					

DESSIN 5



Ce dessin représente un cube ABCDA'B'C'D' posé sur un plan horizontal P, ainsi que 3 droites $\Delta_1 (=AA'), \Delta_2$ et Δ_3 .
 Pour chacune des droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, dites si, d'après le dessin, elle est verticale.
 (Cochez les bonnes réponses)

	est perpendiculaire à P.	n'est pas perpendiculaire à P.	le dessin ne permet pas de répondre.	je ne sais pas.
la droite Δ_1				
la droite Δ_2				
la droite Δ_3				

QUESTION SUPPLÉMENTAIRE: Avez-vous déjà fait de la Géométrie dans l'espace en cours de mathématiques, cette année ou les années précédentes ?

ANNEXE 9: LE QUESTIONNAIRE "FLAMBEAU".

NOM et Prénom: Classe:
Etablissement: Date:

6/3
A

NOTA BENE:

1-Le matériel est supposé idéal: source lumineuse ponctuelle, tiges sans épaisseur,..

2-Codage des réponses à la question 1:

- | | |
|----------------------------|-------------------|
| quadrilatère quelconque: 1 | rectangle: 5 |
| trapèze: 2 | carré: 6 |
| parallélogramme: 3 | cela dépend: 7 |
| losange: 4 | je ne sais pas: 8 |

(De plus, si vous répondez 1, précisez votre réponse par un petit dessin.)

Vous donnerez à chaque fois une seule réponse, la plus précise possible.

3-Codage des réponses aux questions 2 et 3:

- | | |
|----------------------------|-------------------|
| sa taille diminue: 1 | cela dépend: 4 |
| sa taille augmente: 2 | je ne sais pas: 5 |
| sa taille ne change pas: 3 | |

QUESTION 1: Dites quelle est, d'après vous, la forme de l'ombre du carré rouge, lorsque le cube est placé dans chacune des positions ci-après:

Position 0: cube posé à plat au centre du socle. Réponse:

Position 1: cube posé à plat, une arête verticale contre le mât. Réponse:

Position 2: cube posé à plat, écarté du mât parallèlement à l'axe du socle. Réponse:

Position 3: cube posé à plat, et orienté de façon quelconque. Réponse:

Position 4: cube posé sur la pointe, de façon quelconque. Réponse:

QUESTION 2: Le cube est placé dans la position 2. Si on élève la source lumineuse (le mât restant fixé au même endroit), que constate-t-on pour l'ombre du carré rouge?

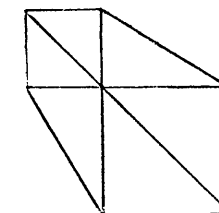
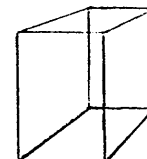
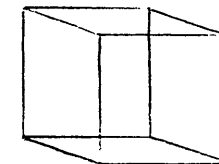
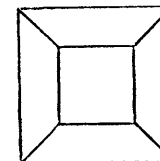
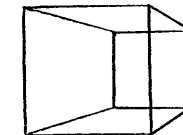
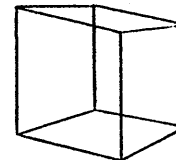
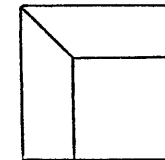
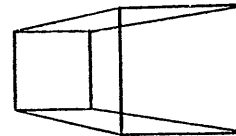
Réponse:

Tournez la page, S.V.P.

QUESTION 3: Le cube est dans la position 2. Si on éloigne ce cube du mât, que constate-t-on pour l'ombre du carré rouge ?

RÉPONSE :

QUESTION 4: Est-il possible d'obtenir comme ombre chacune des formes ci-dessous, avec le cube posé à plat sur le socle ? Ecrivez OUI ou NON sous le dessin correspondant, et justifiez si possible votre réponse .



ANNEXE 10: LES SCÉNARIOS.

NOM et Prénom : Classe :

Etablissement : Date :

19/1

● A B C Vue de dessus des trois positions du cube.
mât

	A	B	C
1 ●			
2 ●			
3 ●			
4 ●			
5 ●			
6 ●			
7 ●			
8 ●			
9 ●			
10 ●			
11 ●			

Indiquez dans la case ci-dessous le numéro de celle des 11 situations ci-contre qui vous semble le mieux correspondre à ce que l'on observerait pour l'ombre du carré rouge:



Commentaire éventuel:

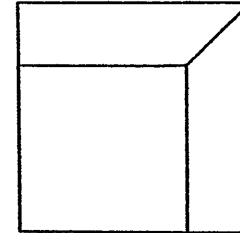
ANNEXE 11 : UN PROBLÈME D'OMBRE.

NOM et Prénom : Classe :

Etablissement : Redoublant ? OUI NON

Date :

7/2_A



Le dessin ci-contre représente, à l'échelle 1/4, l'ombre, sur le socle, du cube (celui-ci étant posé à plat) .

1) Indiquez sur le dessin où se situe le pied du support de la source lumineuse .

2) D'après le dessin:

- a) Combien mesure (en mm) l'arête du cube?
- b) A quelle hauteur au-dessus du socle la source lumineuse se trouve-t-elle ?

ANNEXE 12 : LE QUESTIONNAIRE "SOLEIL".

NOM et Prénom : Classe : 9/1
Etablissement : Redoublant ? OUI NON
Date :

NOTA BENE :

- 1- Le cube est supposé "idéal" (arêtes sans éraisseur).
2- Codage des réponses aux questions 1,2 et 3 :
quadrilatère quelconque: 1 rectangle: 5
trapeze: 2 carré: 6
parallélogramme: 3 cela dépend: 7
losange: 4 je ne sais pas: 8

Vous donnerez une seule réponse, la plus précise possible évidemment .

QUESTION 1 : Le cube est posé à plat, face rouge au-dessus . Le soleil l'éclaire .
Quelle est la forme de l'ombre (sur le sol) du carré rouge ?

RÉPONSE :

QUESTION 2 : Même question avec le cube posé à plat, la face rouge étant cette fois verticale .

RÉPONSE :

QUESTION 3 : Même question avec le cube posé sur la pointe (de façon quelconque) .

RÉPONSE :

QUESTION 4 : Le cube est posé à plat . Dessinez la forme de son ombre sur le sol lorsque :

- a) le soleil est au zénith (c'est-à-dire à la verticale du cube) ;
b) les rayons solaires sont parallèles à une diagonale d'une face latérale du cube ;
c) les rayons solaires sont parallèles à une diagonale du cube .

(Faites les dessins au dos de cette feuille et indiquez sous chacun de quel cas il s'agit.)

ANNEXE 13 : DU DESSIN A L'OBJET (1/3)

NOM et Prénom : Classe: 10/2
Etablissement: Date: A

Le dessin représente un "objet" constitué de 12 tiges rectilignes, ainsi que son ombre par la source lumineuse S.

1°) Expliquez pourquoi cet objet a la même ombre qu'un cube posé contre le support [SH] de la source lumineuse. Pour cela, indiquez quelle est l'ombre de chacun des 8 segments suivants:

[AB]: [AD]: [BC]: [CD]: [AH]: [BG]: [CF]: [DE]:

2°) Quelle serait la longueur des arêtes du cube ayant même ombre que l'objet? (en mm)

3°) Indiquez la nature des quadrilatères suivants (voir codage) . Attention! il s'agit des véritables quadrilatères, et non de leur dessin.

EFGH: ADEH: ABGH: ABCD: BCFG: CDEF:

4°) Dessinez à l'échelle 1/4 le triangle SHK (avec le segment [AD]). D'après ce dessin, combien mesure [AD] (en mm)?.....
Combien mesure [SK] (en mm)?

5°) Dessinez à l'échelle 1/4 le triangle SHI (avec le segment [AB]). D'après ce dessin, combien mesure [AB] (en mm)?

6°) Dessinez à l'échelle 1/4 le triangle SKJ (avec le segment [CD]). D'après ce dessin, combien mesure [CD] (en mm)?.....

7°) Dessinez à l'échelle 1/2 le quadrilatère ABCD. D'après ce dessin, combien mesure [BC] (en mm)?.....

ANNEXE 13 : DU DESSIN A L'OBJET (3/3)

S. (source lumineuse)

"Un objet qui a la même ombre qu'un cube"

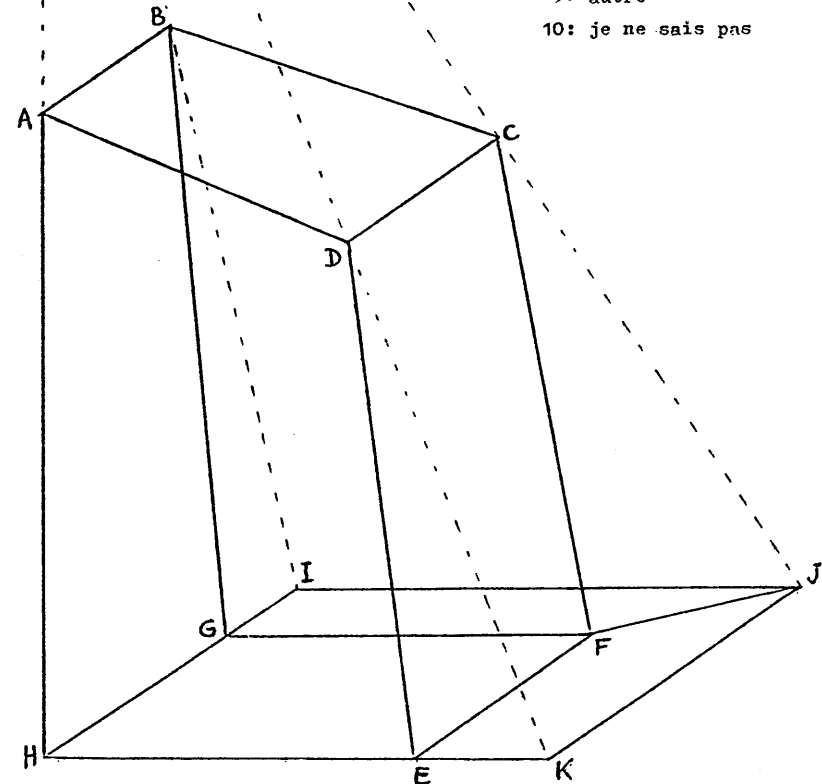
N.B.: ①. Le dessin est à l'échelle 1/2 .

②. Les arêtes [AB], [CD], [EF], [GH] sont parallèles .

③. Codage des quadrilatères pour la

question 3 :

- 1: quadrilatère quelconque
- 2: trapèze quelconque
- 3: trapèze rectangle
- 4: trapèze isocèle
- 5: parallélogramme
- 6: rectangle
- 7: losange
- 8: carré
- 9: autre
- 10: je ne sais pas



ANNEXE 14: PETITS EXERCICES DE PONCTUATION (1/3)

(Voir dessins à compléter sur l'autre feuille)

Dessin 1:

Les plans P et P' sont parallèles. La droite Δ passe par I. Le point A est dans P.

Dessiner la droite (AI).

Dessin 2:

Les plans P et P' sont parallèles. Le point A est dans P.

Dessiner la droite Δ' , parallèle à la droite Δ et passant par A.

Dessin 3:

Les plans P et P' sont sécants. La droite Δ passe par I. Le point A est dans P.

Dessiner la droite (AI).

Dessin 4:

Les plans P et P' sont sécants. Le point A est dans P.

Dessiner la droite Δ' , parallèle à la droite Δ et passant par A.

Dessin 5:

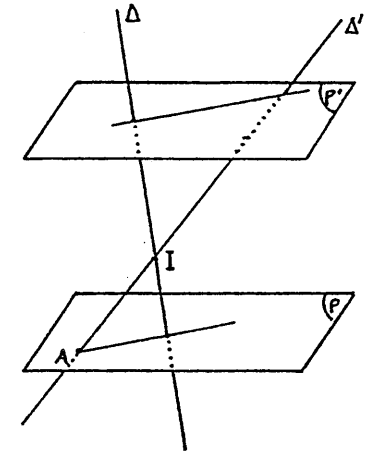
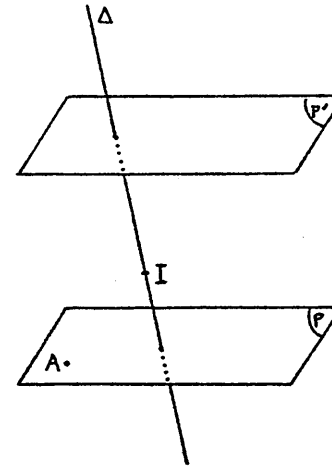
Le plan P est horizontal. Le point A est dans le plan P'.

Dessiner le projeté vertical de A sur P.

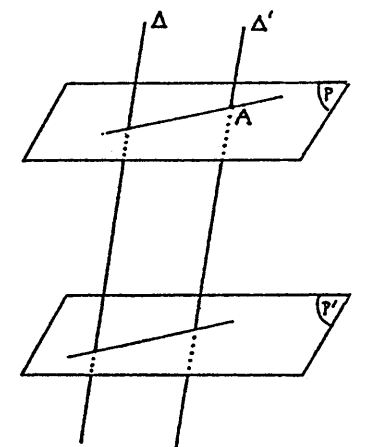
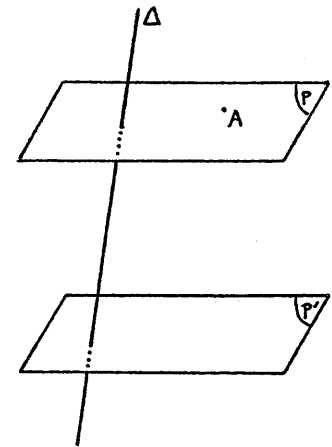
Dessin 6:

Le plan P est horizontal. Le parallélogramme ABCD se projette verticalement sur P selon abcd.

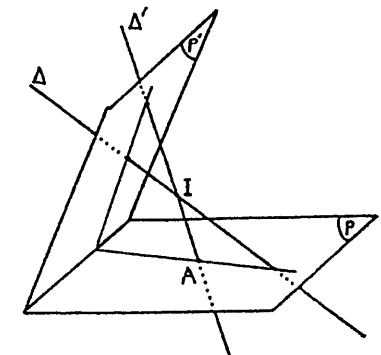
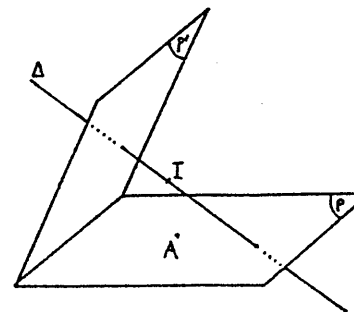
Dessiner le point d.



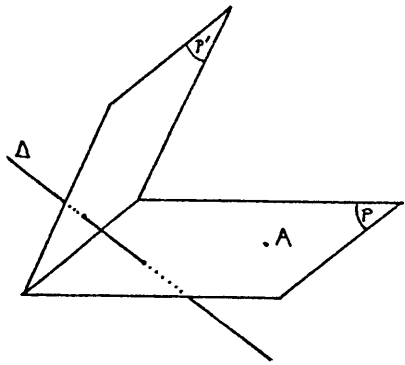
DESSIN 1



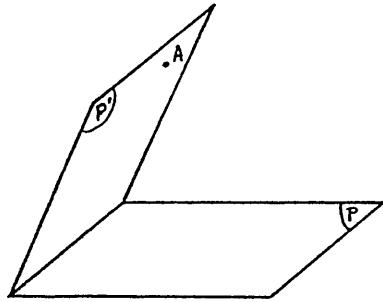
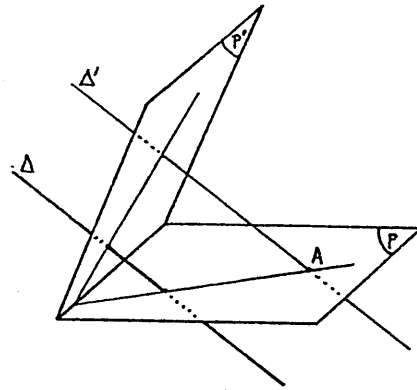
DESSIN 2



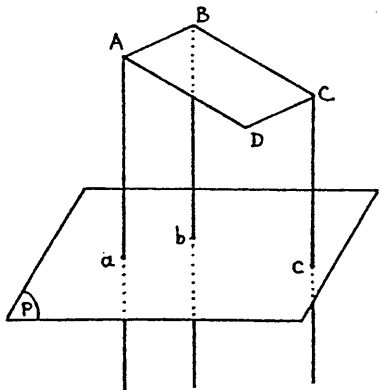
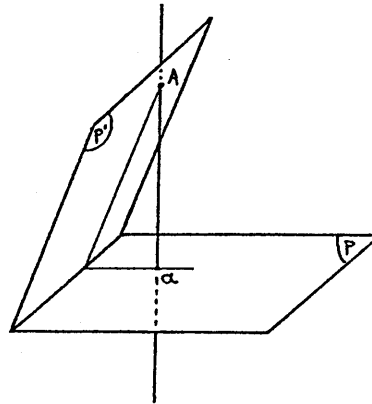
DESSIN 3



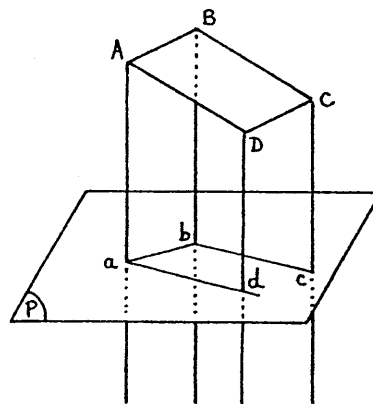
DESSIN 4



DESSIN 5

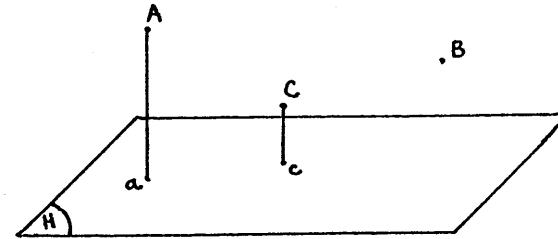


DESSIN 6

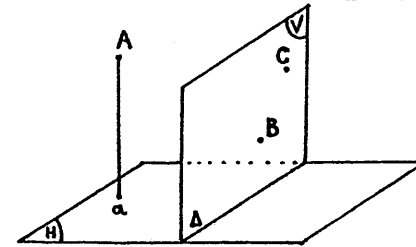


ANNEXE 15 : LA FEUILLE DE CONTRÔLE.

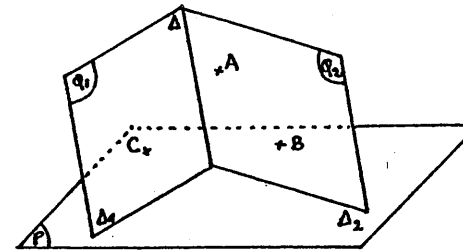
NOM et Prénom: Date: 23/1
 Classe: Etablissement:



Le plan H est horizontal.
 Le point a est le projeté vertical du point A sur H.
 Le point c est le projeté vertical du point C sur H.
 1) La droite (AB) est parallèle à H. dessinez le projeté vertical b du point B sur H.
 2) Dessinez le point I d'intersection de la droite (AC) avec H, et le point J d'intersection de la droite (BC) avec H.

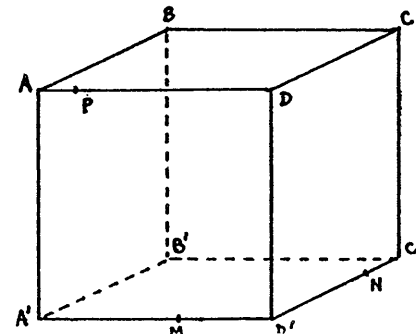


Le plan H est horizontal, et le plan V est vertical. Ils se coupent suivant Δ .
 Le point a est le projeté vertical du point A sur H.
 Les points B et C sont dans le plan V.
 1) Dessinez le point I d'intersection de la droite (AB) avec H.
 2) Dessinez la droite d'intersection du plan (ABC) avec H.



Les plans P et Q_1 se coupent suivant Δ_1 .
 Les plans P et Q_2 se coupent suivant Δ_2 .
 Les plans Q_1 et Q_2 se coupent suivant Δ .
 Les points A et B sont dans le plan Q_2 .
 Le point C est dans le plan Q_1 .

Dessinez les droites d'intersection du plan (ABC) avec les plans Q_1 , Q_2 , P.



ABCD A' B' C' D' est un cube.
 Le point M est sur l'arête [A'D].
 Le point N est sur l'arête [C'D].
 Le point P est sur l'arête [AD].

Dessinez l'intersection du plan (MNP) avec le cube.

ANNEXE 16: SECTIONS DE CUBE.

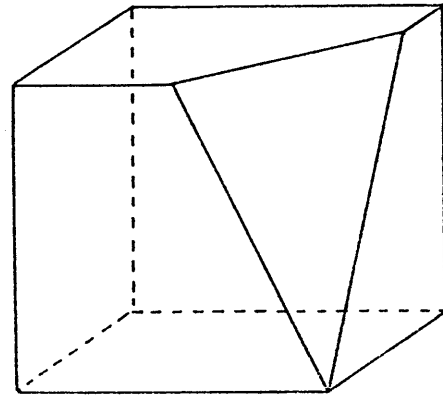
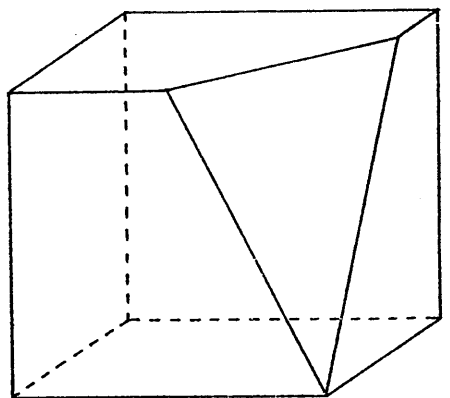
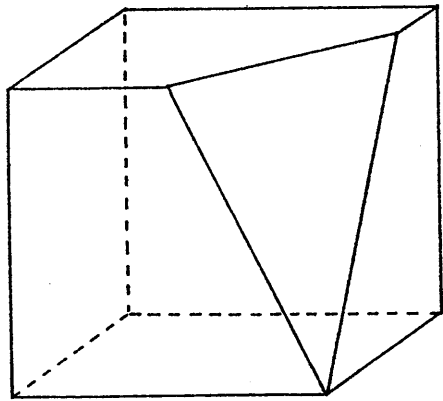
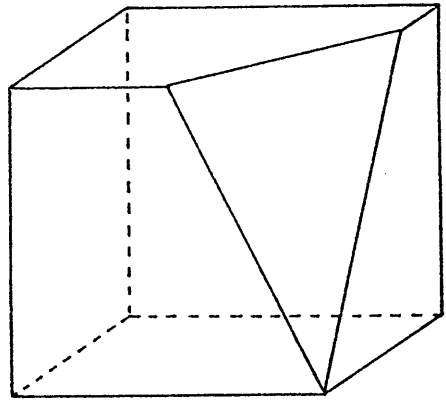
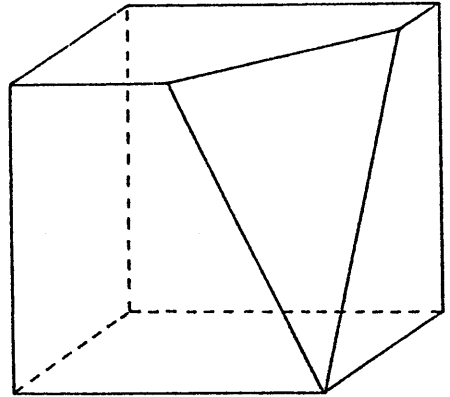
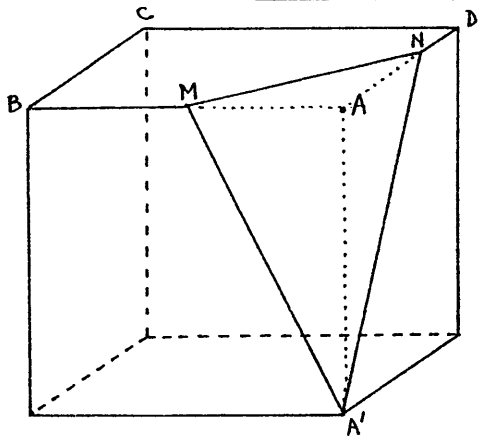


TABLE DES MATIÈRES

Dessins relatifs au texte

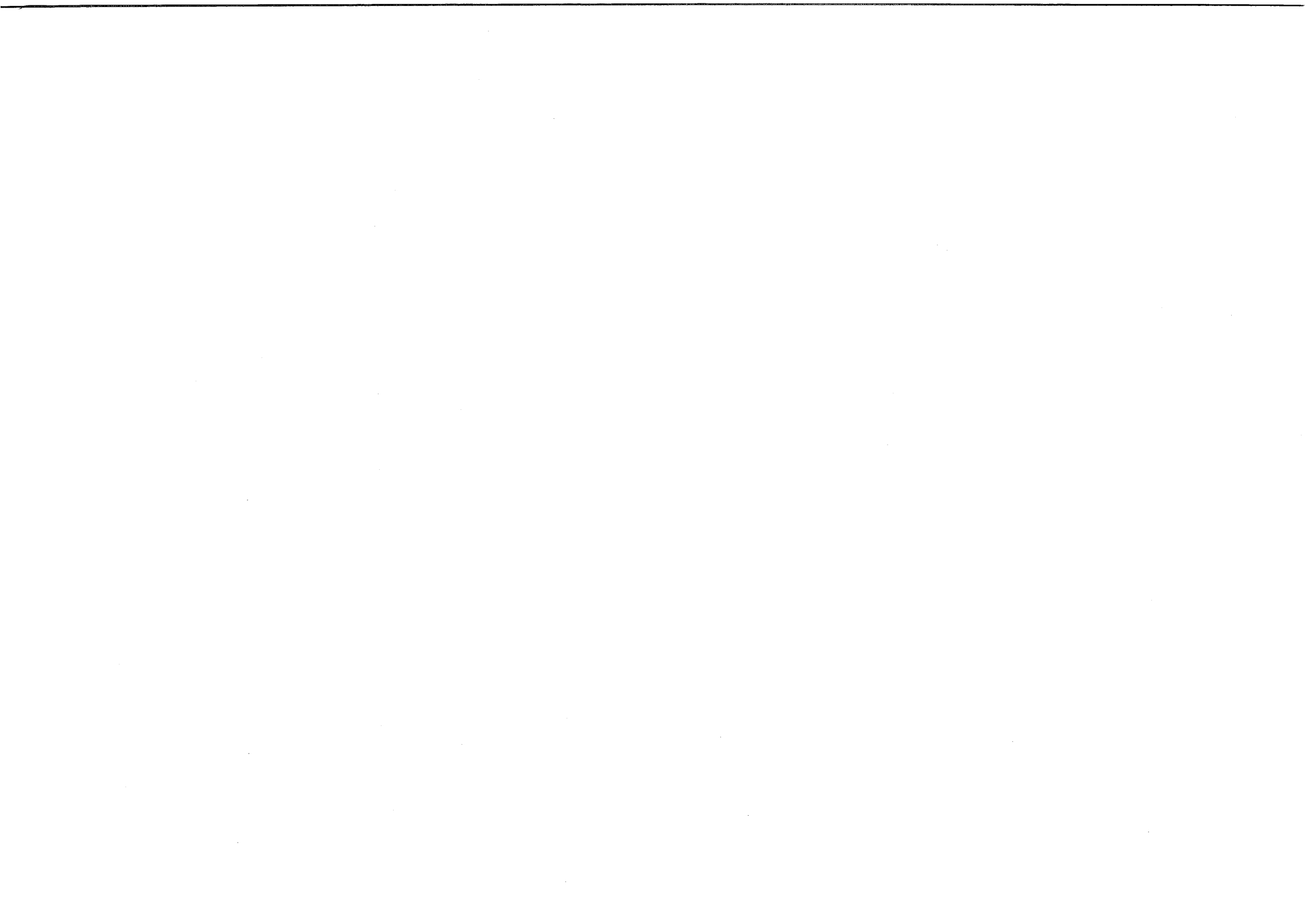
p.3

Dessins relatifs aux Appendices

p.87

Annexes

p.109



Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

<http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html>

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7

Case 7018

2 place Jussieu

75251 Paris cedex 05

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Février 1989
ISBN : 2-86612-158-9