

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE D'INFORMATIQUE
LABORATOIRE INRIA SACLAY

DISCIPLINE : INFORMATIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

Soutenu le 24 Septembre 2015 par

Alexandre Chotard

Titre :
Analyse Markovienne des Stratégies d'Évolution

Directeur de thèse : Nikolaus Hansen

Directeur de recherche (INRIA Saclay)

Co-directeur de thèse : Anne Auger

Chargée de recherche (INRIA Saclay)

Composition du jury :

Rapporteurs : Dirk Arnold
Tobias Glasmachers

Professor (Dalhousie University)
Junior Professor (Ruhr-Universität Bochum)

Examineurs : Gersende Fort
François Yvon

Directrice de Recherche (CNRS)
Professeur (Université Paris-Sud)

Résumé de la thèse

Les problèmes d'optimisation sont fréquemment rencontrés dans la science et l'industrie. Étant donné une fonction f à valeur réelle définie sur un ensemble appelé l'espace de recherche X , optimiser la fonction f consiste à trouver un point $\mathbf{x} \in X$ en lequel la valeur $f(\mathbf{x})$ est optimale, ou du moins à construire une séquence $(\mathbf{x}_t)_{t \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ s'approchant de l'optimum. En fonction de l'espace de recherche X , les problèmes d'optimisation peuvent être globalement classés en problèmes discrets (e.g. $X = \{0, 1\}^n$) ou en problèmes continus (e.g. $X = \mathbb{R}^n$). Les propriétés de la fonction f et les informations disponibles sur cette fonction sont d'une grande importance quant au choix de la méthode à adopter pour l'optimiser : plus elles sont importantes, et plus la méthode choisie peut-être spécifique et puissante. Ainsi, différentes méthodes d'optimisation existent pour des fonctions linéaires [13], quadratiques [14], différentiables avec un gradient défini et connu en tout point de X [22]... Dans cette thèse, nous nous intéressons au contexte de l'optimisation continue d'une fonction dite boîte noire : aucune information sur la fonction à optimiser n'est disponible, hormis la valeur $f(\mathbf{x})$ que cette fonction associe à des points $\mathbf{x} \in X$. Ainsi les méthodes d'optimisation boîte noire sont très générales puisqu'elles ne supposent rien sur la fonction à optimiser. Les problèmes boîte noire sont très fréquents dans l'industrie, où le calcul de la valeur d'une fonction peut-être le résultat de simulations trop complexes à analyser mathématiquement, ou encore le résultat donné par un programme externe dont le code source est inaccessible. Bien souvent, la durée de l'évaluation d'un point \mathbf{x} par f rend négligeable le temps de calcul des opérations internes à l'algorithme d'optimisation employé, et ainsi le nombre d'évaluations par f est souvent considéré comme le coût de l'algorithme.

Les stratégies d'évolution (ESs) sont des algorithmes d'optimisation stochastiques dont l'efficacité à été montrée dans de nombreux problèmes réels [24, 15, 21, 18, 16]. Les stratégies d'évolution sont des méthodes inspirées par l'évolution naturelle : à l'itération $t \in \mathbb{N}$, partant d'un certain point $\mathbf{X}_t \in X$ appelé parent, une population de $\lambda \in \mathbb{N}^*$ enfants $(\mathbf{Y}_t^i)_{i \in [1..\lambda]}$ est générée à partir d'une distribution d'échantillonnage θ_t . Cette distribution est usuellement une distribution normale multivariée centrée en \mathbf{X}_t , de variance $\sigma_t^2 \mathbf{C}_t$ où σ_t est une variable appelée step-size contrôlant l'écart type de la distribution, et \mathbf{C}_t est une matrice de covariance. De façon équivalente, pour $i \in [1..\lambda]$

$$\mathbf{Y}_t^i := \mathbf{X}_t + \sigma_t \mathbf{C}_t^{1/2} \mathbf{N}_t^i, \text{ où } \mathbf{N}_t^i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}d_n) \text{ et } (\mathbf{N}_t^i)_{i \in [1..\lambda]} \text{ i.i.d..} \quad (1)$$

Les points ainsi générés sont évalués par la fonction f , et les différents paramètres de l'algorithme

sont mis à jour en fonction de ces nouveaux points et de leurs rangs vis à vis de la fonction f . Ainsi un point ayant une meilleure valeur $f(\mathbf{Y}_t^i)$ qu'un autre contribue davantage au nouveau parent \mathbf{X}_{t+1} et aux autres paramètres de la distribution d'échantillonnage θ_{t+1} .

Les ESs [23][17] sont connus en pratique pour converger log-linéairement vers l'optimum \mathbf{x}^* de la fonction, i.e.

$$\frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|\mathbf{X}_t - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{x}^*\|} \right) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} -r < 0 .$$

Cependant prouver la convergence de ces méthodes d'optimisation est un problème difficile du fait de leur nature stochastique. Des preuves de convergence log-linéaire ont tout de même pu être obtenues en utilisant des outils de la théorie des chaînes de Markov, en considérant des ESs simples sur des problèmes simples [6, 3, 4]. Dans cette thèse, l'essentiel de l'analyse se concentre sur le cas d'un ES utilisant un mécanisme pour adapter le step-size appelé "Cumulative Step-size Adaptation" (CSA), qui est utilisé dans l'algorithme état de l'art CMA-ES [17] pour adapter le step-size. Cette méthode d'adaptation du step-size est plus complexe que les méthodes analysées jusque là du fait d'une variable supplémentaire \mathbf{p}_t^σ , interne à l'algorithme appelée un "evolution path".

Le problème étudié dans cette thèse est le cas d'une fonction linéaire, avec ou sans contrainte. C'est un cas simple qui modèle lorsque le step-size σ_t est très petit par rapport à la distance à l'optimum $\|\mathbf{X}_t - \mathbf{x}^*\|$. En effet, les ensemble d'égales valeurs de la fonction f peuvent alors être approximés par des hyperplans via un développement limité du premier ordre. La résolution de ce cas par des ESs via la divergence de la méthode (l'optimum de f se trouvant à l'infini) est donc une étape essentielle à la convergence des ESs dans des cas plus généraux. En effet, la convergence log-linéaire d'un $(1+1)$ -ES utilisant un mécanisme d'adaptation du step-size appelé la règle des 1/5 [23] a été démontrée sur une large classe de fonctions appelées *positively homogeneous*, sous condition que le step-size diverge log-linéairement sur les fonctions linéaires [4]. Similairement, la convergence locale d'un algorithme que l'on peut voir comme un ES idéalisé a été démontrée sur les fonctions C^2 , à nouveau à condition que le step-size diverge log-linéairement sur les fonctions linéaires [1].

L'objectif de cette thèse est à la fois d'établir de nouvelles preuves sur la convergence des ESs ainsi que de développer les outils mathématiques nécessaires à ces preuves.

Le contenu de cette thèse est organisé ainsi : dans le chapitre 1, une introduction au contexte de la thèse, puis aux concepts mathématiques utilisés (venant de la théorie des chaînes de Markov), sont données. Dans le chapitre 2, un état de l'art est présenté sur l'optimisation continue boîte noire, où une attention plus forte est portée aux stratégies d'évolution. Ensuite les contributions sont présentées : dans le chapitre 3 des outils généraux permettant de prouver certaines propriétés d'une chaîne de Markov (à savoir l'irréductibilité, l'apériodicité et le fait que les compacts sont des *small sets* pour la chaîne) sont développés. Dans le chapitre 4, une introduction à la méthode employée pour réaliser des preuves de convergence des ESs est donnée. Puis une analyse du $(1, \lambda)$ -CSA-ES sur les fonctions linéaires est conduite. Ensuite une analyse d'un $(1, \lambda)$ -ES avec step-size constant et avec step-size adapté via CSA est conduite sur une fonction linéaire avec une contrainte linéaire. Enfin une analyse d'un $(1, \lambda)$ -ES avec un step-size constant utilisant des distributions non nécessairement Gaussienne est conduite sur

une fonction linéaire avec une contrainte linéaire. Finalement dans le chapitre 5, les résultats de cette thèse sont résumés, discutés, et des perspectives sur de futurs travaux sont présentées.

Définitions préliminaires

Avant de continuer, nous rappelons la définition de quelques concepts nécessaires à la compréhension de la suite de ce résumé.

Notions de la théorie des chaînes de Markov

Soit $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ un espace de probabilité et $\Phi := (\Phi_t)_{t \in \mathbb{N}}$ une séquence de variables aléatoires à valeurs dans cet espace de probabilité. Intuitivement, la séquence Φ est appelée une chaîne de Markov homogène si

$$\Pr(\Phi_t \in A | \Phi_{t-1} \in B_{t-1}, \dots, \Phi_0 \in B_0) = \Pr(\Phi_1 \in A | \Phi_0 \in B_{t-1})$$

pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, $(A, (B_i)_{i \in [1..t-1]}) \in \mathcal{B}(X)^t$. Dans la suite nous dénotons $P^t(\mathbf{x}, A)$ pour $\Pr(\Phi_t \in A | \Phi_0 = \mathbf{x})$, et simplement P si $t = 1$.

φ -irréductibilité

Une chaîne de Markov $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est appelée φ -irréductible si il existe une mesure non triviale φ telle que pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$

$$\varphi(A) > 0 \Rightarrow \text{pour tout } \mathbf{x} \in X, \exists t_{\mathbf{x}} \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } P^{t_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, A) > 0 .$$

Période d'une chaîne de Markov

Pour une chaîne de Markov $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{N}}$ φ -irréductible et pour $d \in \mathbb{N}^*$, on appelle un d -cycle une séquence $(D_i)_{i \in [0..d-1]} \in \mathcal{B}(X)^d$ d'ensembles disjoints deux à deux telle que

$$\text{pour tout } i \in [0..d-1] \text{ et tout } \mathbf{x} \in D_i, P(\mathbf{x}, D_{i+1 \pmod{d}}) = 1 ,$$

$$\text{pour tout } \psi \text{ mesure d'irréductibilité, } \psi \left(\left(\bigcup_{i=0}^{d-1} D_i \right)^c \right) = 0 .$$

Le plus grand $d \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe un d -cycle est appelé la *période* de la chaîne de Markov. Si la période est de 1, la chaîne de Markov est appelée *apériodique*.

Small-sets

Un ensemble $C \in \mathcal{B}(X)$ est appelé un small-set si il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et ν_m une mesure non triviale telle que pour tout $\mathbf{x} \in C$ et pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$

$$P^m(\mathbf{x}, A) \geq \nu_m(A) .$$

Modèle de contrôle

Pour toute chaîne de Markov homogène $\Phi := (\Phi_t)_{t \in \mathbb{N}}$ définie sur un ouvert X [19, p. 24] il existe une séquence de variables aléatoires $(W_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ i.i.d. à valeurs dans un espace mesurable Ω et une fonction $F : X \times \Omega \rightarrow X$ telle que

$$\Phi_{t+1} = F(\Phi_t, W_t) . \quad (2)$$

On peut alors définir $F^0 : X \rightarrow X$ comme l'identité et pour $t \in \mathbb{N}$

$$F^{t+1}(\mathbf{x}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{t+1}) := F^t(F(\mathbf{x}, \mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{t+1}) .$$

Généralement, F est supposée C^∞ , et W_t est supposé admettre une densité semi-continue inférieurement p dont le support est noté $O_w := \{\mathbf{w} \in \Omega \mid p(\mathbf{w}) > 0\}$.

Pour $t \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{x} \in X$, on définit alors

$$A_+^t(\mathbf{x}) := \{F^t(\mathbf{x}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t) \mid (\mathbf{w}_i)_{i \in [1..t]} \in O_w^t\}$$

l'ensemble des points accessibles depuis \mathbf{x} en t pas, et

$$A_+(\mathbf{x}) := \bigcup_{t \in \mathbb{N}} A_+^t(\mathbf{x})$$

l'ensemble des points accessibles depuis \mathbf{x} (incluant \mathbf{x} lui même). Si pour tout $\mathbf{x} \in X$, $A_+(\mathbf{x})$ est d'intérieur non vide, on dit que le modèle de contrôle associé $\text{CM}(F)$ est *forward accessible*. Un point $\mathbf{x}^* \in X$ est dit globalement attracteur si pour tout $\mathbf{y} \in X$, $\mathbf{x}^* \in \overline{A_+(\mathbf{y})}$.

Certaines propriétés de la chaîne de Markov, notamment l'irréductibilité et l'apériodicité, peuvent être déduite des propriétés de F^t et de W_t , comme dans les théorèmes suivants.

Théorème 1 ([20, 7.2.5 et 7.2.6]). *Supposons qu'une chaîne de Markov soit modélisée via (2), que F est C^∞ , que W_t admet une densité de probabilité semi-continue inférieurement et que le modèle de contrôle associé est forward accessible. Alors la chaîne de Markov est irréductible si et seulement si il existe un point globalement attracteur.*

Théorème 2 ([20, 7.3.4 et 7.3.5]). *Supposons qu'une chaîne de Markov soit modélisée via (2), que F est C^∞ , que W_t admet une densité de probabilité semi-continue inférieurement, que le modèle de contrôle associé est forward accessible et que l'ensemble O_w est connexe. Si il existe un point globalement attractif $\mathbf{x}^* \in X$ et que l'ensemble $\overline{A_+(\mathbf{x}^*)}$ est connexe, alors la chaîne de Markov est apériodique.*

Stratégies d'évolution

Nous donnons ici une définition des algorithmes étudiés dans cette thèse, c'est à dire des $(1, \lambda)$ -ES avec step-size constant ou avec step-size adapté via cumulative step-size adaptation, avec matrice de covariance égale à l'identité, dans le cadre d'un problème de minimisation d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Étant donné un point \mathbf{X}_t , un step-size σ_t , et $\mathbf{C}_t = \mathbf{I}d_n$ un ES génère de nouveaux points via (1), c'est à dire

$$\mathbf{Y}_t^i := \mathbf{X}_t + \sigma_t \mathbf{N}_t^i, \text{ où } \mathbf{N}_t^i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}d_n) \text{ et } (\mathbf{N}_t^i)_{i \in [1..n]} \text{ i.i.d..}$$

Ces nouveaux points sont ensuite évalués et triés

$$f(\mathbf{Y}_t^{1:\lambda}) \leq \dots \leq f(\mathbf{Y}_t^{\lambda:\lambda}),$$

ce qui définit implicitement $\mathbf{N}_t^{i:\lambda} := (\mathbf{Y}_t^{i:\lambda} - \mathbf{X}_t) / \sigma_t$. Un $(1, \lambda)$ -ES met à jour \mathbf{X}_t en le remplaçant simplement par le meilleur nouveau point, c'est à dire

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{Y}_t^{1:\lambda} = \mathbf{X}_t + \sigma_t \mathbf{N}_t^{1:\lambda}.$$

Cumulative step-size adaptation

Afin d'adapter le step-size, le mécanisme de cumulative step-size adaptation utilise une variable $\mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^n$ appelée l'évolution path, et mise à jour via

$$\mathbf{p}_{t+1} = (1 - c_\sigma) \mathbf{p}_t + \sqrt{c_\sigma(1 - c_\sigma)} \mathbf{N}_t^{1:\lambda}. \quad (3)$$

Le coefficient $c_\sigma \in (0, 1]$ est appelé paramètre de cumulation. L'influence des événements passés décroît exponentiellement vite en $(1 - c_\sigma)^t$. Les coefficients de l'équation (3) sont calculés de façon à ce que si $\mathbf{p}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}d_n)$ et que la fonction f classe uniformément aléatoirement les nouveaux points (et donc que $\mathbf{N}_t^{1:\lambda} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}d_n)$), alors $\mathbf{p}_{t+1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}d_n)$ aussi. La longueur du vecteur \mathbf{p}_{t+1} est comparée à la longueur moyenne d'un vecteur gaussien $\mathbf{N} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}d_n)$

$$\sigma_{t+1} = \sigma_t \exp\left(\frac{c_\sigma}{d_\sigma} \left(\frac{\|\mathbf{p}_{t+1}\|}{\mathbf{E}(\|\mathbf{N}\|)} - 1\right)\right). \quad (4)$$

Ainsi si l'évolution path \mathbf{p}_t est plus long que la longueur qu'il devrait avoir lorsque la fonction f est aléatoire, le step-size est augmenté, et dans le cas contraire il est diminué. Le paramètre d_σ est appelé le damping et contrôle la variance du step-size. Il est généralement proche de 1.

Résumé des contributions

Analyse des stratégies d'évolution

Dans le chapitre 4 plusieurs analyses de différentes stratégies d'évolution sont conduites.

Le chapitre présente tout d'abord dans la section 4.1 une méthode générale pour démontrer la convergence des stratégies d'évolution [5]. Celle-ci s'applique dans le cadre de fonctions dites scaling invariant : une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite scaling invariant autour de $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ si

pour $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$ et pour tout $\rho > 0$,

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) \Leftrightarrow f(\mathbf{x}^* + \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)) \leq f(\mathbf{y}^* + \rho(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)) .$$

En d'autres termes, les ensembles d'isovaleur sont les mêmes à homothétie de centre \mathbf{x}^* près. Cela a notamment pour conséquence qu'il ne peut y avoir d'extremum local autre que \mathbf{x}^* . De plus, généralement $(\mathbf{X}_t/\sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est alors une chaîne de Markov [5]. On montre alors que la chaîne de Markov est irréductible, apériodique, et que les compacts sont des small sets. En vérifiant une inégalité de drift de Foster-Lyapunov sur un compact [20], cela nous permet de déduire que la chaîne de Markov est Harris récurrente et possède une mesure invariante π . Enfin, en considérant une fonction g de la chaîne de Markov $(\mathbf{X}_t/\sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$ et en vérifiant qu'elle est intégrable relativement à π , l'on peut appliquer une loi forte des grands nombres qui garantit la convergence presque sûre de $\sum_{t=0}^T g(\mathbf{X}_t/\sigma_t)$ à $\int_X g(\mathbf{x})\pi(d\mathbf{x})$.

Fonction linéaire

La section 4.2 présente une analyse d'un $(1, \lambda)$ -ES utilisant cumulative step-size adaptation [17] et optimisant une fonction linéaire. Les résultats sont présentés dans un rapport [7]. Ce rapport contient l'article [10] publié à la conférence PPSN en 2012, les preuves des différentes propositions de cet article, ainsi que des résultats supplémentaires sur la divergence log-linéaire de $(|f(\mathbf{X}_t)|)_{t \in \mathbb{N}}$, plus précisément que sans cumulation ($c_\sigma = 1$)

$$\frac{1}{t} \ln \left| \frac{f(\mathbf{X}_t)}{f(\mathbf{X}_0)} \right| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{1}{2d_\sigma n} \underbrace{(\mathbf{E}(\mathcal{N}_{1:\lambda}^2) - 1)}_{>0 \text{ pour } \lambda \geq 3} ,$$

où $\mathcal{N}_{1:\lambda}$ dénote la première statistique d'ordre de λ variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite. Il est ensuite démontré que pour $\lambda \geq 3$ le step-size diverge log-linéairement, ce qui est le comportement désiré sur une fonction linéaire. Plus précisément,

$$\frac{1}{t} \ln \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_0} \right) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{1}{2d_\sigma n} \underbrace{(2(1 - c_\sigma) \mathbf{E}(\mathcal{N}_{1:\lambda})^2 + c_\sigma (\mathbf{E}(\mathcal{N}_{1:\lambda}^2) - 1))}_{>0 \text{ pour } \lambda \geq 3 \text{ et pour } \lambda=2 \text{ et } c_\sigma < 1} .$$

La vitesse de divergence de l'algorithme étant donnée explicitement, elle peut être utilisée pour calculer une valeur optimale pour λ dans le cadre de la fonction linéaire. Ensuite la variance du logarithme du step-size de l'algorithme est calculée. L'écart type du logarithme du step-size normalisé par son espérance constitue une mesure de l'instabilité de l'algorithme. En fixant le paramètre de cumulation à $c_\sigma = 1/(1 + n^\alpha)$, l'écart type du logarithme du step-size est environ $\sqrt{(n^{2\alpha} + n)/n^{3\alpha}}$ plus grand que son espérance. Ainsi, une valeur critique pour $\alpha = 1/3$ apparaît : pour $c_\sigma > 1/(1 + n^{1/3})$ l'algorithme devient de plus en plus instable en grande dimension, alors qu'au contraire avec $c_\sigma < 1/(1 + n^{1/3})$ l'algorithme se stabilise en grande dimension.

Fonction linéaire avec contrainte linéaire

La section 4.3 contient des études de stratégies d'évolutions optimisant une fonction linéaire f avec une contrainte linéaire g , où les points en dehors de la région possible sont rééchantillonnés jusqu'à ce qu'ils soient dans la région possible. Le premier article [9] présenté est une extension d'une première version publiée à CEC [8] en 2014. Cette extension a été acceptée pour publication au Evolutionary Computation Journal en 2015, et inclue l'analyse de la stratégie d'évolution avec cumulative step-size adaptation. Ces analyses ont été inspirés par [2] qui étudie le même cas avec les mêmes algorithmes, mais où la stabilité de la chaîne de Markov associée au problème est une hypothèse utilisée pour arriver aux résultats. Au contraire dans [9] la stabilité de la chaîne de Markov associée au problème est rigoureusement démontrée. Le papier étudie d'abord un $(1, \lambda)$ -ES avec step-size constant afin d'établir la méthodologie sur un cas plus simple. Le problème se révèle en effet bien plus difficile à analyser que le problème sans contrainte, car dans le précédent cas la séquence $(\mathbf{N}_t^*)_{t \in \mathbb{N}}$ est i.i.d., alors que dans le problème sous contrainte la distribution de \mathbf{N}_t^* dépend de la distance de \mathbf{X}_t à la contrainte et du step-size σ_t , ou plus précisément $\delta_t := g(\mathbf{X}_t)/\sigma_t$. Il est démontré que la séquence $(\delta_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov qui admet une mesure invariante π , dont dépend la convergence ou divergence de l'algorithme. Une loi des grands nombres peut être appliquée, et

$$\frac{f(\mathbf{X}_t) - f(\mathbf{X}_0)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \underbrace{\sigma \mathbf{E}_\pi(f(\mathbf{N}_t^*))}_{>0 \text{ pour } \lambda \geq 2} .$$

L'algorithme utilisant cumulative step-size adaptation est ensuite étudié. L'évolution path \mathbf{p}_t^σ doit être intégré dans la séquence $(\delta_t, \mathbf{p}_t^\sigma)_{t \in \mathbb{N}}$ afin d'obtenir une chaîne de Markov. La dynamique de cette chaîne de Markov se révèle bien plus difficile à étudier du fait de l'évolution path et de l'inertie qu'il implique dans le comportement de la chaîne de Markov. La preuve de la stabilité de la chaîne de Markov est alors restreinte au cas sans cumulation ($c_\sigma = 0$), où $(\delta_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Dans ce cas il est démontré que cette chaîne possède une mesure invariante π_c , et qu'une loi forte des grands nombres peut être appliquée. Ainsi, lorsque $c_\sigma = 1$,

$$\frac{1}{t} \ln \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_0} \right) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{1}{2d_\sigma} \left(\frac{\mathbf{E}(\|\mathbf{N}_t^*\|^2)}{n} - 1 \right) . \quad (5)$$

Le signe du membre droit de (5) est ensuite estimé via des simulations de Monte-Carlo. Il apparaît que lorsque l'angle θ que les gradients de f et de g forment est trop faible (et donc que la contrainte se rapproche d'un mur), le signe du membre droit de (5) est négatif. L'algorithme converge alors prématurément, échouant donc à résoudre un problème simple. En revanche, pour une valeur suffisamment élevée de λ ou suffisamment faible de c_σ , le signe du membre droit de (5) est positif, assurant la divergence log-linéaire de l'algorithme.

Le même problème est étudié dans [11], publié à PPSN en 2014, pour un $(1, \lambda)$ -ES avec un step-size constant et utilisant des distributions d'échantillonnage pouvant être non Gaussiennes. L'article présenté dans cette thèse [12] est un rapport contenant [11] ainsi que les preuves des

différentes propositions. L'article considère une distribution d'échantillonnage H et établit que si H admet une densité h continue et positive sur \mathbb{R}^n alors $(\delta_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible, apériodique et les compacts sont des small sets. De plus si $\mathbf{E}(|g(N_t^i)|) < \infty$ et que $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(|g(N_t^i)| \mid \delta_t = \delta) < \infty$, la chaîne de Markov possède une mesure invariante π , est Harris recurrente et une loi des grands nombres s'applique

$$\frac{f(\mathbf{X}_t) - f(\mathbf{X}_0)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \sigma \mathbf{E}_\pi(f(\mathbf{N}_t^*)) .$$

Il est ensuite montré que si la distribution d'échantillonnage possède une matrice de covariance différente de l'identité, cela est équivalent à une différente norme sur l'espace X , ce qui implique que l'angle θ entre les gradients de la contrainte et de la fonction objectif est différent. Une bonne adaptation de la matrice de covariance peut donc rendre ce problème trivial.

Conditions suffisantes pour l'irréductibilité, apériodicité et propriété de T -chain d'une chaîne de Markov.

Le chapitre 3 présente un ensemble de conditions suffisantes qui garantissent qu'une chaîne de Markov est une T -chain irréductible et apériodique. Ces conditions sont inspirées de conditions préexistantes de [20, Chapitre 7] présentées dans les théorèmes 1 et 2 où la chaîne de Markov $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est modélisée via une séquence de vecteurs aléatoires $(\mathbf{U}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ et une fonction G telles que (2) tienne, c'est à dire

$$\Phi_{t+1} = G(\Phi_t, \mathbf{U}_{t+1})$$

pour tout $t \in \mathbb{N}$. Une hypothèse importante des théorèmes 1 et 2 est que la fonction F est C^∞ .

Dans le cadre de la modélisation markovienne des stratégies d'évolution, le vecteur aléatoire \mathbf{U}_{t+1} correspond aux vecteurs $(N_t^i)_{i \in [1.. \lambda]}$ qui ont tous la même distribution, et la fonction F met à jour les différents éléments de la chaîne de Markov en fonction de ces $(N_t^i)_{i \in [1.. \lambda]}$. Pour un $(1, \lambda)$ -ES, la mise à jour de ces éléments se fait via le vecteur sélectionné $N_t^{1:\lambda}$. Hors le processus de sélection donnant $N_t^{1:\lambda}$ n'est pas continue vis à vis des vecteurs $(N_t^i)_{i \in [1.. \lambda]}$: si N_t^i et N_t^j ont des f -valeurs similaires, un léger changement de N_t^i peut faire que l'un est sélectionné à la place de l'autre, et la distance entre N_t^i et N_t^j n'est en général pas contrôlable. Cela aboutit à une non continuité de la fonction G , qui fait que les théorèmes 1 et 2 de [20] ne sont pas applicables dans ce cadre.

Cependant, bien que la fonction G soit discontinue vis à vis des variables $(N_t^i)_{i \in [1.. \lambda]}$, elle est continue vis à vis de $N_t^{1:\lambda}$, mais la séquence $(N_t^{1:\lambda})_{t \in \mathbb{N}}$ n'est pas i.i.d.. L'article contenu dans le chapitre 3 propose donc un nouveau modèle où la séquence de vecteurs aléatoires utilisée pour mettre à jour la chaîne de Markov n'est pas nécessairement i.i.d., mais la distribution de cette variable aléatoire est une fonction de la chaîne de Markov. Ainsi le nouveau modèle décrit est

$$\Phi_{t+1} = F(\Phi_t, \alpha(\Phi_t, \mathbf{U}_{t+1})) , \tag{6}$$

où $(\mathbf{U}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est une séquence de vecteurs aléatoires i.i.d. à valeur dans \mathbb{R}^p (mais évidemment $(\alpha(\Phi_t, \mathbf{U}_{t+1}))_{t \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement i.i.d.), $\alpha : X \times \mathbb{R}^p \rightarrow \Omega$ et $F : X \times \Omega \rightarrow X$ sont deux fonctions mesurables. Dans le cadre d'un $(1, \lambda)$ -ES, \mathbf{U}_{t+1} correspond toujours aux vecteurs $(\mathbf{N}_t^i)_{i \in [1.. \lambda]}$, la fonction α au processus de sélection et le vecteur $\alpha(\Phi_t, \mathbf{U}_{t+1})$ correspond au vecteur sélectionné $\mathbf{N}_t^{1:\lambda}$. Ainsi la fonction F est continue, les discontinuités de la fonction G étant été transférées dans la fonction α . La dépendance du vecteur aléatoire $\mathbf{W}_{t+1} := \alpha(\Phi_t, \mathbf{U}_{t+1})$ avec Φ_t implique une complexification des notations : il sera supposé par la suite que \mathbf{W}_t admet une densité de probabilité conditionnelle $p_{\mathbf{x}}$ sachant que $\Phi_t = \mathbf{x}$. La densité de probabilité conditionnelle jointe de $(\mathbf{W}_i)_{i \in [1..t]}$ sachant que $\Phi_0 = \mathbf{x}$ est notée $p_{\mathbf{x},t}$, et

$$p_{\mathbf{x},t}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t) = p_{\mathbf{x}}(\mathbf{w}_1) \dots p_{F^{t-1}(\mathbf{x}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{t-1})}(\mathbf{w}_t)$$

où $F^0 : X \rightarrow X$ est l'identité et pour $t \in \mathbb{N}$

$$F^{t+1}(\mathbf{x}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t) = F^t(F(\mathbf{x}, \mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_t) .$$

Le support de $p_{\mathbf{x},t}$ est noté $O_{\mathbf{x},t} := \{\mathbf{w} \in \Omega^t \mid p_{\mathbf{x},t}(\mathbf{w}) > 0\}$. Des résultats similaires au Théorème 1 sont démontrés dans le cadre de ce modèle.

Théorème 3. *Supposons qu'une chaîne de Markov soit modélisée via (6), que F soit C^1 et que la fonction $(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \mapsto p_{\mathbf{x}}(\mathbf{w})$ est semi-continue inférieurement. Si il existe $\mathbf{x}^* \in X$ un point globalement attractif et $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{w}^* \in O_{\mathbf{x}^*,k}$ tel que $F^k(\mathbf{x}^*, \cdot)$ est une submersion en \mathbf{w}^* , alors la chaîne de Markov est irréductible.*

L'hypothèse que $F^k(\mathbf{x}^*, \cdot)$ est une submersion en un certain point remplace l'hypothèse du théorème 1 que le modèle de contrôle est forward accessible. Lorsque F est C^∞ , le modèle de contrôle est forward accessible si et seulement si pour tout $\mathbf{x} \in X$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{w} \in O_{\mathbf{x},k}$ tel que $F^k(\mathbf{x}, \cdot)$ est une submersion en \mathbf{w} .

L'article contenu dans le chapitre 3 propose également le concept de points fortement globalement attractifs, qui est lié à l'apériodicité de la chaîne de Markov (les points globalement attractifs étant liés à l'irréductibilité). Un point $\mathbf{x}^* \in X$ est appelé fortement globalement attractif si pour tout $\mathbf{y} \in X$ il existe une suite de pas $(\mathbf{w}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ avec $\mathbf{w}_t \in O_{\mathbf{x},t}$ tel que la suite $(F^t(\mathbf{y}, \mathbf{w}_t))_{t \in \mathbb{N}^*}$ converge vers \mathbf{x}^* . Afin de comparaison, un point $\mathbf{x}^* \in X$ est globalement attractif si et seulement si pour tout $\mathbf{y} \in X$ il existe une suite de pas $(\mathbf{w}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ tel que l'on peut extraire de $(F^t(\mathbf{y}, \mathbf{w}_t))_{t \in \mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergent vers \mathbf{x}^* . Le théorème suivant utilise la propriété de forte globale attractivité.

Théorème 4. *Supposons qu'une chaîne de Markov soit modélisée via (6), que F soit C^1 et que la fonction $(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \mapsto p_{\mathbf{x}}(\mathbf{w})$ est semi-continue inférieurement. Si il existe $\mathbf{x}^* \in X$ un point fortement globalement attractif et $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{w}^* \in O_{\mathbf{x}^*,k}$ tel que $F^k(\mathbf{x}^*, \cdot)$ est une submersion en \mathbf{w}^* , alors la chaîne de Markov est irréductible, apériodique, et les compacts sont des small sets.*

Bibliography

- [1] Youhei Akimoto, Anne Auger, and Nikolaus Hansen. Convergence of the continuous time trajectories of isotropic evolution strategies on monotonic c^2 -composite functions. In *Parallel Problem Solving from Nature-PPSN XII*, pages 42–51. Springer, 2012.
- [2] D.V. Arnold. On the behaviour of the $(1, \lambda)$ -ES for a simple constrained problem. In *Foundations of Genetic Algorithms - FOGA 11*, pages 15–24. ACM, 2011.
- [3] A. Auger. Convergence results for the $(1, \lambda)$ -SA-ES using the theory of φ -irreducible markov chains. *Theoretical Computer Science*, 334(1–3):35–69, 2005.
- [4] Anne Auger and Nikolaus Hansen. Linear convergence on positively homogeneous functions of a comparison based step-size adaptive randomized search: the $(1+1)$ ES with generalized one-fifth success rule. *CoRR*, abs/1310.8397, 2013.
- [5] Anne Auger and Nikolaus Hansen. On proving linear convergence of comparison-based step-size adaptive randomized search on scaling-invariant functions via stability of markov chains. *CoRR*, abs/1310.7697, 2013.
- [6] Alexis Bienvenüe and Olivier François. Global convergence for evolution strategies in spherical problems: some simple proofs and difficulties. *Theor. Comput. Sci.*, 306:269–289, September 2003.
- [7] A. Chotard, A. Auger, and N. Hansen. Cumulative step-size adaptation on linear functions: Technical report. Technical report, Inria, 2012.
- [8] A. Chotard, A. Auger, and N. Hansen. Markov chain analysis of evolution strategies on a linear constraint optimization problem. In *Evolutionary Computation (CEC), 2014 IEEE Congress on*, pages 159–166, July 2014.
- [9] A. Chotard, A. Auger, and N. Hansen. Markov chain analysis of cumulative step-size adaptation on a linear constraint problem. *Evol. Comput.*, 2015.
- [10] Alexandre Chotard, Anne Auger, and Nikolaus Hansen. Cumulative step-size adaptation on linear functions. In *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN XII*, pages 72–81. Springer, september 2012.

Bibliography

- [11] Alexandre Chotard and Martin Holena. A generalized markov-chain modelling approach to $(1, \lambda)$ -es linear optimization. In Thomas Bartz-Beielstein, Jürgen Branke, Bogdan Filipič, and Jim Smith, editors, *Parallel Problem Solving from Nature – PPSN XIII*, volume 8672 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 902–911. Springer International Publishing, 2014.
- [12] Alexandre Chotard and Martin Holena. A generalized markov-chain modelling approach to $(1, \lambda)$ -es linear optimization: Technical report. Technical report, Inria, 2014.
- [13] George Bernard Dantzig. *Linear programming and extensions*. Princeton university press, 1998.
- [14] Zdenek Dostál. *Optimal Quadratic Programming Algorithms: With Applications to Variational Inequalities*, volume 23. Springer Science & Business Media, 2009.
- [15] A Ben Haj-Yedder, A Auger, CM Dion, E Cances, A Keller, C Le Bris, and O Atabek. Numerical optimization of laser fields to control molecular orientation. *Physical Review A*, 66(6):063401, 2002.
- [16] N. Hansen, S.P.N. Niederberger, L. Guzzella, and P. Koumoutsakos. A method for handling uncertainty in evolutionary optimization with an application to feedback control of combustion. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 13(1):180–197, 2009.
- [17] N. Hansen and A. Ostermeier. Completely derandomized self-adaptation in evolution strategies. *Evolutionary Computation*, 9(2):159–195, 2001.
- [18] Nikolaus Hansen. The cma evolution strategy: a comparing review. In *Towards a new evolutionary computation*, pages 75–102. Springer, 2006.
- [19] Onésimo Herná-Lerma and Jean Bernard Lasserre. Markov chains and ergodic theorems. In *Markov Chains and Invariant Probabilities*, pages 21–39. Springer, 2003.
- [20] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability*. Cambridge University Press, second edition, 1993.
- [21] Sibylle D Müller et al. *Bio-inspired optimization algorithms for engineering applications*. PhD thesis, Diss., Technische Wissenschaften ETH Zürich, Nr. 14719, 2002, 2002.
- [22] Elijah Polak. *Optimization: algorithms and consistent approximations*, volume 124. Springer Science & Business Media, 2012.
- [23] I. Rechenberg. Evolutionsstrategie: Optimierung technischer systeme nach prinzipien der biologischen evolution. *Feddes Repertorium*, 86:337–337, 1973.
- [24] Hans-Paul Schwefel. *Numerical optimization of computer models*. John Wiley & Sons, Inc., 1981.