



HAL
open science

Discrétisation spectrale du transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux

Sarra Maarouf

► **To cite this version:**

Sarra Maarouf. Discrétisation spectrale du transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux. Mathématiques générales [math.GM]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066133 . tel-01252684

HAL Id: tel-01252684

<https://theses.hal.science/tel-01252684>

Submitted on 8 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS VI - PIERRE ET MARIE CURIE
ECOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES

T H E S E

pour obtenir le titre de

Docteur ès Sciences

de l'Université Pierre et Marie Curie
Mention : Mathématiques Appliquées

Présentée par

Sarra MAAROUF

**Discrétisation spectrale du transfert de chaleur et de
masse dans un milieu poreux**

dirigée par Christine BERNARDI

Soutenue le 06 Juillet 2015 devant le jury composé de

M. Zakaria BELHACHMI	Professeur	Examineur
M ^{me} . Christine BERNARDI	Directrice de recherche	Directrice de thèse
M. Tomás CHACÓN REBOLLO	Professeur	Rapporteur
M. Michel DEVILLE	Professeur	Rapporteur
M ^{me} . Linda EL ALAOU	Maître de conférences	Examineur
M ^{me} . Vivette GIRAULT	Professeur	Examineur
M. Yvon MADAY	Professeur	Examineur (président)

À mon père et ma mère

Remerciements

Ce manuscrit de thèse est l'aboutissement d'un travail de trois années au laboratoire Jacques-Louis Lions grâce à la bourse du ministère Algérien de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique. Je tiens ici à remercier l'ensemble des personnes qui ont contribué plus ou moins directement à l'élaboration de ce travail de thèse.

Je tiens à remercier vivement madame Christine Bernardi d'avoir assuré l'encadrement de cette thèse et de m'avoir soutenu et prodigué de nombreux conseils. Je la remercie aussi pour sa disponibilité.

J'exprime ma vive gratitude aux Professeurs Tomás Chacón Rebollo et Michel Deville qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail en tant que rapporteurs.

J'exprime également ma gratitude à Monsieur Yvon Maday pour avoir accepté de présider ce jury de thèse. J'ai été également très heureuse de compter parmi les membres de mon jury madame Vivette Girault et madame Linda El Alaoui, merci d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je souhaite également remercier monsieur Zakaria Belhachmi de me faire l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Les travaux de cette thèse ont été réalisés en collaboration avec Driss Yakoubi. Je le remercie sincèrement pour son intérêt à mon travail, ainsi pour son soutien et ses judicieux conseils.

Je remercie très sincèrement Adel Blouza, Vivette Girault, Frédéric Hecht et Linda El Alaoui pour leurs discussions intéressantes. Je tiens aussi à dire un grand merci à Yvon Maday pour son aide financière pour participer à ICOSAHOM'14.

Un grand merci aux différents personnels administratifs du laboratoire Jacques-Louis Lions, en particulier les secrétaires Salima, Catherine et Malika pour leur chaleureux accueil et leur aide toujours attentive, Mes remerciements s'adressent

aussi aux personnels du service informatique, Khashayar, Altaïr, Hugues, ainsi Stephan, C. David et Antoine pour leur disponibilité et serviabilité.

Mes vifs remerciements à tous mes collègues du laboratoire en particulier mes (ex-)collègues de bureau 15-16-301 pour leur gentillesse, je leur souhaite une bonne continuation.

Je tiens à remercier ma tante Fatima et sa petite famille de m'avoir accueilli dès mon arrivée à Paris. Je remercie également toutes mes amies en France.

Un petit saut au dessus de la méditerranée et je me trouve chez moi à Jijel en Algérie, je tiens à remercier tous mes enseignants à l'université de Jijel, en particulier Yasmina Daikh et Wided Chikouche pour leur soutien et leurs conseils.

Enfin, Je ne pourrai jamais assez remercier mes parents et mes sœurs qui m'ont toujours soutenu et infiniment encouragé. Merci à ma famille et à mes proches en Algérie.

Encore un grand merci à tous pour m'avoir conduit à ce jour mémorable.

Résumé

Cette thèse se donne comme ambition de montrer que la simulation numérique du transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux, peut être traitée de manière efficace par un programme de calcul basé sur une discrétisation spatiale de type **spectral**. La méthode spectrale s'avère optimale en ce sens que l'erreur obtenue n'est limitée que par la régularité de la solution.

Le point de départ de cette étude est le système des équations de Darcy non linéaire et non stationnaire qui modélise l'écoulement instationnaire d'un fluide visqueux dans un milieu poreux quand la perméabilité du milieu dépend de la pression. Le deuxième problème proposé est le transfert de la chaleur dans un milieu poreux décrit par un couplage des équations de Darcy avec l'équation de la chaleur. Dans la dernière partie, la concentration de masse est prise en compte dans le milieu, nous décrivons un problème non linéaire instationnaire qui modélise le transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux.

Dans les trois problèmes proposés, les résultats d'existence et unicité sont établis. Puis les problèmes discrets correspondants sont décrits. Nous avons prouvé des estimations d'erreur a priori et nous avons confirmé l'étude théorique par des résultats numériques.

Mots clés

Milieu poreux, transfert de chaleur, transfert de masse, équations de Darcy, équation de la chaleur, équation de la concentration de masse, schéma d'Euler, méthode spectrale.

Abstract

This thesis aims to show that the numerical simulation of heat and mass transfer in porous media can be effectively treated by a numerical program which is based on a space discretization of **spectral** type. The spectral method is optimal in the sense that the error obtained is only limited by the regularity of the solution.

The starting point of this study is the system of nonlinear unsteady Darcy equations that models the unsteady flow of a viscous fluid in a porous medium when the permeability of the medium depends on the pressure. The second problem which we study models transfer of heat in a porous medium which is described by Darcy equations coupling with the heat equation. In the last part, the concentration of mass is taken into account in the medium, we describe a nonlinear problem that models unsteady transfer of heat and mass in porous media.

In the three proposed problems, the results of the existence and the uniqueness are established. Then the corresponding discrete problems are described. We prove the error a priori estimates and we confirm the theoretical study with numerical results.

Keywords

Porous medium, heat transfer, mass transfer, Darcy's equations, heat equation, the concentration of mass, Euler's scheme, spectral method.

Table des matières

1	Introduction générale	17
1.1	Écoulement en milieu poreux saturé	18
1.1.1	Caractéristiques d'un milieu poreux	18
1.1.2	La loi de Darcy	20
1.1.3	Transfert de chaleur dans un milieu poreux	22
1.1.4	Transfert de chaleur et masse dans un milieu poreux	24
1.2	Motivation	25
1.3	Description de la thèse	27
1.4	Rappels et généralités	28
1.5	Outils de la méthode spectrale	30
2	Les équations de Darcy non linéaires instationnaires	33
2.1	Introduction	34
2.2	Problème continu	34
2.2.1	Formulation variationnelle	34
2.2.2	Résultat d'existence	36
2.3	Problème discret	44
2.3.1	Discrétisation temporelle	44
2.3.2	Discrétisation spatiale	48
2.4	Analyse d'erreur a priori	50
2.4.1	Estimation d'erreur en temps	50
2.4.2	Estimation d'erreur en espace	55
2.4.3	Lemmes techniques	62
2.4.4	Résultat et conclusion	69
2.5	Résultats numériques	70
2.5.1	Précision temporelle	70
2.5.2	Précision spatiale	72

2.5.3	Comparaison entre la méthode spectrale et la méthode des éléments finis	75
2.5.4	Calcul dans un cas plus réaliste	76
2.6	Conclusion	79
3	Discrétisation spectrale des équations de Darcy couplées avec l'équation de la chaleur	81
3.1	Introduction	82
3.2	Problème continu	82
3.2.1	Analyse du problème stationnaire	82
3.2.2	Formulation variationnelle	83
3.2.3	Résultats d'existence	84
3.3	Problème discret	90
3.4	Estimation d'erreur a priori	91
3.4.1	Autre formulation	91
3.4.2	Lemmes techniques	94
3.4.3	Résultat et conclusion	99
3.5	Simulation numérique	99
3.5.1	Schéma itératif	100
3.5.2	Précision spatiale	101
3.5.3	Problème de Horton-Rogers-Lapwood	105
3.5.4	Simulation numérique de l'équation de réaction-diffusion couplée avec l'équation de Darcy	107
3.6	Conclusion	110
4	Discrétisation spectrale des équations de Darcy couplées avec l'équation de la chaleur et de la masse	111
4.1	Introduction	112
4.2	Problème continu	113
4.2.1	Formulation variationnelle	114
4.2.2	Estimations a priori	115
4.2.3	Résultat d'existence	117
4.3	Problème discret	119
4.3.1	Discrétisation temporelle	120
4.3.2	Discrétisation spatiale	122
4.4	Analyse d'erreur a priori	123
4.4.1	Estimation d'erreur en temps	123

4.4.2	Estimation d'erreur en espace	125
4.4.3	Lemmes techniques	127
4.4.4	Résultat et conclusion	129
4.5	Résultats numériques	130
4.5.1	Précision temporelle	130
4.5.2	Précision spatiale	133
4.5.3	Problème de Horton-Rogers-Lapwood	137
4.6	Conclusion	141
	Conclusion générale et perspectives	144
	Bibliographie	147

Table des figures

1.1	Illustration de la taille intermédiaire l du volume élémentaire représentatif VER entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et la taille du pore à l'échelle microscopique d	19
1.2	Expérience illustrant la loi de Darcy	21
2.1	Convergence par rapport au pas du temps	72
2.2	Convergence par rapport au degré de polynôme	73
2.3	Pression. Gauche : Spectrale. Droite : Exacte	73
2.4	Vitesse. Gauche : Spectrale. Droite : Exacte	74
2.5	Champs de vitesse. Gauche : Spectrale. Droite : Exacte	74
2.6	Isoligne de u_1 . Gauche : éléments finis. Droite : méthode spectrale.	76
2.7	Pression dans le maillage ou la grille de Gauss-Lobatto. Gauche : éléments finis. Droite : méthode spectrale.	76
2.8	Fonction g quand $t=1$	77
2.9	Isothermes de la pression sur trois plans horizontaux	78
2.10	Iso-surfaces de pression. Gauche : $t = 0.1$. Droite : $t = 1$	78
2.11	Projection de la vitesse au plan vertical ($x=-4.5$)	79
2.12	Projection de la vitesse au plan ($y=0.5$)	79
3.1	Convergence en norme $L^2(\Omega)$ par rapport au degré de polynôme	102
3.2	Convergence en norme $H^1(\Omega)$ par rapport au degré de polynôme	103
3.3	Solution exacte (Gauche) vers solution spectrale pour $N = 17$ (Droite)	104
3.4	Convection Naturelle : Chauffage par le bas	105
3.5	Convergence par rapport à l'iteration de point fixe	106
3.6	Solution vitesse quand $\delta T = 100$ (Gauche) solution vitesse de (3.54) quand $\delta T = 1$ (Droite)	107
3.7	Simulations numériques montrent quatre régions différentes dans le plan (R_p, F_K) . . .	108
3.8	Champ de vecteurs de vitesse de (3.55) pour $F_K = 1$ et $R_p = 100$	109

3.9	Solution température (en haut) et pression (en bas) de (3.55)	109
4.1	Convergence en norme $H^1(\Omega)$ par rapport au pas du temps	132
4.2	Convergence en norme $L^2(\Omega)$ par rapport au degré de polynôme	134
4.3	Convergence en norme $H^1(\Omega)$ par rapport au degré de polynôme	134
4.4	Solution exacte (Gauche) vers solution spectrale pour $N = 16$ (Droite) :	135
4.5	Solution exacte (Gauche) vers solution spectrale pour $N = 16$ (Droite) :	136
4.6	Champ de vecteur de vitesse quand $\delta T = 100$	138
4.7	Iso-surfaces de la température quand $\delta T = 100$	139
4.8	Iso-surfacse de la concentration quand $\delta T = 100$	140
4.9	Champs de vecteurs de vitesse pour $\delta C = 10$	141
4.10	Iso-surfaces de la température pour $\delta C = 10$	142
4.11	Iso-surfaces de la concentration pour $\delta C = 10$	143

Liste des tableaux

1.1	Ordre de grandeur du coefficient de permeabilité k pour différentes sortes de matériaux	21
2.1	Estimation de l'ordre de convergence	71
4.1	Estimation de l'ordre de convergence en temps	131
4.2	Estimation de l'ordre de convergence en espace	133



Chapitre 1

Introduction générale

Sommaire

1.1	Écoulement en milieu poreux saturé	18
1.1.1	Caractéristiques d'un milieu poreux	18
1.1.2	La loi de Darcy	20
1.1.3	Transfert de chaleur dans un milieu poreux	22
1.1.4	Transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux	24
1.2	Motivation	25
1.3	Description de la thèse	27
1.4	Rappels et généralités	38
1.5	Outils de la méthode spectrale	30

1.1 Écoulement en milieu poreux saturé

Les écoulements de fluide à travers un milieu poreux se rencontrent dans des domaines très variés des sciences et techniques. À titre d'exemple, on peut citer les problèmes de purification de l'eau, de dépollution des sols, d'extraction de pétrole et de gaz, les problèmes géophysiques,...

Le lecteur intéressé, pourra consulter les ouvrages de J. Bear [12] et D.A Nield et A. Bejan [67], pour de plus amples informations.

1.1.1 Caractéristiques d'un milieu poreux

Le milieu poreux est composé d'une matrice solide, à l'intérieur de laquelle se trouvent des pores reliés entre eux ou éventuellement isolés. D'une manière générale, les milieux poreux sont définis par deux critères :

- les matrices solides non consolidées où la phase solide est formée de grains (par exemple le sable, le gravier, billes de verre, d'acier, les lits de particules pas encore fluidilisés ...).
- les matrices solides consolidées (par exemple les roches calcaires, le grès, l'argile, le bois, tissu biologique ...).

Les pores reliés entre eux, permettent l'écoulement d'un ou plusieurs fluides. On peut alors classer les problèmes rencontrés, suivant les phases en présence à l'intérieur des pores :

- le milieu est saturé d'un seul fluide ou encore un ensemble de fluides miscibles (par exemple un sol imbibé d'eau).
- le milieu est composé de plusieurs fluides non miscibles. Un ensemble de ménisques sépare alors les différentes phases (par exemple un mélange eau-huile-gaz dans les roches pétroliers, ou un sol partiellement saturé d'eau, la deuxième phase étant l'air).
- le milieu est le siège d'un transport de fluide et de particules solides. Il agit en général comme un filtre, mais ses propriétés hydrodynamiques se modifient au cours du temps (dépollution des eaux contenant de grosses particules par percolation à travers le sol).

On rappelle succinctement, les différentes grandeurs caractéristiques du milieu poreux.

Volume Élémentaire Représentatif (VER)

La distribution des pores et des grains est généralement très irrégulière. À cette échelle, la vitesse, la pression et la température varient très irrégulièrement d'un point à l'autre du domaine. On est donc amené à effectuer une moyenne spatiale de ces grandeurs. Elles ont pour but d'éliminer les fluctuations à l'échelle du pore, mais pas les fluctuations à l'échelle macroscopique du milieu poreux L . Cette moyenne s'effectue donc sur des nombreux pores par l'intermédiaire d'un Volume Élémentaire

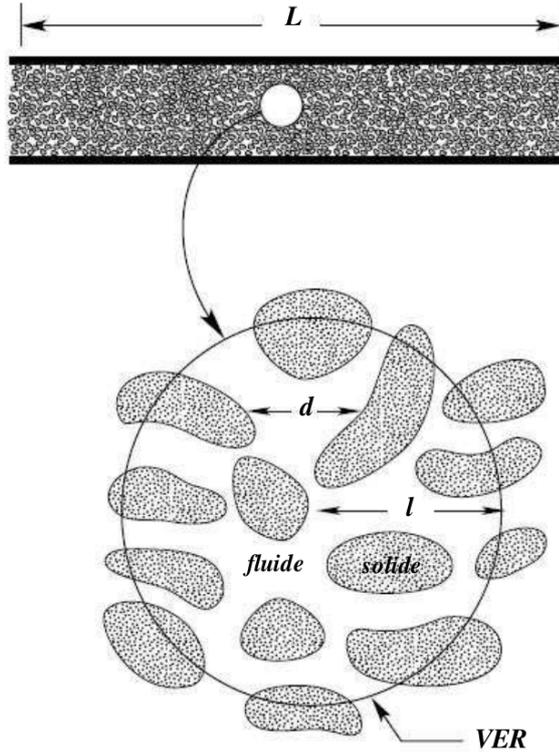


FIGURE 1.1 – Illustration de la taille intermédiaire l du volume élémentaire représentatif VER entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et la taille du pore à l'échelle microscopique d

Représentatif VER (voir figure 1.1) du milieu. De plus, l'échelle l du VER doit donc vérifier :

$$d \ll l \ll L.$$

On obtient donc les grandeurs caractéristiques de la vitesse, la pression et la température, en les moyennant sur le VER. Cela permet de représenter un point dans un nouveau milieu continu fictif par changement d'échelle. Il est équivalent au domaine poreux étudié mais à l'échelle macroscopique. Lorsque les propriétés locales, définies sur le VER, sont indépendantes de la position de celui-ci, le milieu est dit homogène, à l'échelle macroscopique.

Porosité

La porosité φ est définie comme le rapport du volume vide occupé par les pores, sur le volume total soit :

$$\varphi = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}}.$$

La porosité peut être tubulaire et/ou fissurée. Un sol est saturé quand toute la porosité est remplie par l'eau.

Perméabilité

La perméabilité k se réfère à la capacité du milieu poreux à laisser passer le ou les fluides à l'intérieur des pores. Ce paramètre est relié à la dimension et à la connection des pores entre eux. Des pores clos et non connectés entre eux empêchent le fluide de s'écouler librement d'un pore à un autre. L'ouverture des pores peut plus ou moins favoriser l'écoulement entre les éléments du milieu. La perméabilité est aussi liée à la viscosité du fluide qui est la mesure de sa résistance à l'écoulement. La perméabilité intrinsèque s'exprime, indépendamment des caractéristiques du fluide, sous la forme :

$$k = \frac{Q\mu}{A(\Delta p/\Delta s)},$$

où Q désigne le débit du fluide qui s'écoule, μ est la viscosité dynamique du fluide, A représente l'aire de la section traversée par le fluide, $\Delta p/\Delta s$ est la variation de la pression par unité de longueur.

1.1.2 La loi de Darcy

C'est en 1856 que Henry Darcy [38] a décrit une loi sur les écoulements isothermes dans un milieu poreux. À partir d'expériences de percolation d'eau à travers une colonne de sable verticale saturée de hauteur h , il en déduit

$$Q = k' S \frac{\Delta p_m}{h},$$

où Q est le débit de l'eau percolant à travers la colonne, Δp_m la différence de pression entre le haut et le bas de la colonne et k' une constante dépendant de la perméabilité de la couche poreuse du milieu et du milieu fluide. D'après Scheidegger [77], k' est le quotient de la perméabilité k sur la viscosité μ . On peut généraliser cette loi par

$$\mathbf{u} = \frac{-k}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z), \quad (1.1)$$

où p représente la pression, ρ est la masse volumique du fluide, et g est l'accélération gravitationnelle, z est la cote définie selon un axe vertical ascendant.

La loi de Darcy est vérifiée par de nombreux résultats expérimentaux pour des régimes d'écoulement laminaire. Elle a également été vérifiée par des simulations directes des équations de Navier-Stokes [72] où on vérifie bien cette chute.

Jusqu'à présent, nous avons été préoccupés par le milieu poreux. Si nous passons maintenant à l'eau, que nous considérons comme incompressible et en négligeant la variation spatiale de la masse volumique, la loi de Darcy (1.1) se simplifie de la façon suivante :

$$\mathbf{u} = -\frac{k\rho g}{\mu} \nabla \left(\frac{p}{\rho g} + z \right).$$

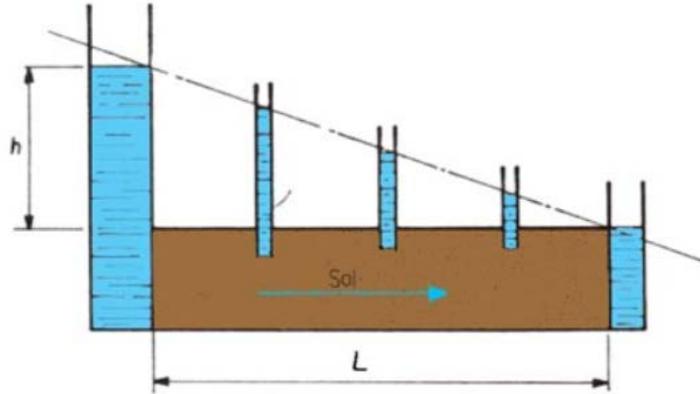


FIGURE 1.2 – Expérience illustrant la loi de Darcy

Le coefficient de perméabilité k est un scalaire dans le cas de milieu poreux isotrope ou si l'écoulement est unidirectionnel. On présente dans le Tableau 1.1 quelques valeurs du coefficient de perméabilité pour des matériaux divers, (voir [17, Tableau 1] par exemple).

Matériaux	Marne	Pierre à chaux	Argile	Sable fin
k	10^{-12}	10^{-7}	10^{-13}	10^{-1}

Tableau 1.1 – Ordre de grandeur du coefficient de perméabilité k pour différentes sortes de matériaux

En régime transitoire, en toute rigueur, la loi devient

$$\mathbf{u} = -k \left(\nabla \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) - \frac{1}{g\omega} \partial_t \mathbf{u} \right).$$

L'eau est considérée comme un fluide incompressible, alors l'équation de conservation du flux se réduit à

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Conditions initiales et conditions aux limites

Pour écrire les équations instationnaires, en plus de la loi de Darcy qui décrit l'écoulement transitoire d'un fluide à travers un domaine donné, il faut spécifier d'autres caractéristiques qui expriment l'état initial ($t=0$) et les conditions imposées aux limites pour les temps de simulations, qui nous intéressent. Plusieurs types de conditions aux limites peuvent être considérés :

- **Conditions de Dirichlet** : dans ce cas, la charge est simplement imposée sur les frontières concernées.

$$p(\mathbf{x}, t) = p_b(\mathbf{x}, t),$$

où p_b est une fonction donnée. En régime permanent, ce type de conditions aux limites est, en général, nécessaire pour assurer l'unicité de la solution. Les conditions à charge imposée peuvent être par exemple : contact de la nappe avec une rivière, une ligne de sources, ect.

- **Conditions de Neumann** : ces conditions imposent le flux normal à frontière. Elles s'expriment par

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g(\mathbf{x}, t),$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire à la limite et g une fonction connue.

Une limite à flux imposé peut être : un prélèvement ou injection à travers les frontières, un flux nul au long d'une limite imperméable, ect.

- **Conditions de Cauchy ou de Fourier** : ce sont des conditions mixtes de charge et de flux. Dans certains cas, le flux aux limites est décrit en fonction de la charge, sous la forme combinée :

$$-K \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = g^F(\mathbf{x}, t)p + f^F(\mathbf{x}, t),$$

où f^F et g^F sont des fonctions connues. C'est le cas, par exemple, d'une liaison hydraulique de la nappe avec une rivière.

- **Conditions périodiques** : dans certaines situations, ce type de conditions aux limites est utilisé pour simuler des domaines infiniment larges. Une continuité de la fonction d'état et son gradient est imposée sur les limites considérées.

1.1.3 Transfert de chaleur dans un milieu poreux

L'étude des instabilités hydrodynamiques qui se développent dans un milieu fermé bénéficie d'un intérêt considérable depuis les trente dernières années. Cette partie est inspirée de l'ouvrage de Nield et Bejan [67] et la thèse de Delache [43].

Équation de conservation de l'énergie

La convection en milieu poreux favorise le transfert de chaleur entre la paroi chaude et la paroi froide. Ce transfert de chaleur est assuré à la fois par la phase fluide et la phase solide. Or ces deux phases ne possèdent ni la même capacité thermique, ni la même conductivité thermique (respectivement λ_f, λ_s). Pour cette raison et dans le but de tenir compte du transfert de chaleur lié à la présence des deux phases, Combarous et Boris [33] avaient proposé un modèle de deux équations décrivant l'évolution de la température des deux phases

$$(1 - \varphi)(\rho c)_s \partial_t T_s = (1 - \varphi) \nabla \cdot (\lambda_s \nabla T_s) + (1 - \varphi) q_s''', \quad (1.2)$$

$$\varphi(\rho c_P)_f \partial_t T_f + (\rho c_P)_f \mathbf{u} \cdot \nabla T_f = \varphi \nabla \cdot (\lambda_f \nabla T_f) + (1 - \varphi) q_f''', \quad (1.3)$$

Ici, les indices s et f désignent les phases solide et fluide, respectivement, c est la chaleur spécifique du solide, c_P est la chaleur spécifique à pression constante du fluide, λ est la conductivité thermique, et q''' [W/m^3] est la production de chaleur par unité de volume.

En posant $T_s = T_f = T$, on déduit en sommant termes à termes des équations (1.2) et (1.3) le modèle de transfert de chaleur le plus couramment utilisé pour les milieux poreux (équation de transport-diffusion)

$$(\rho c)_m \partial_t T + (\rho c_P)_f \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda_m \nabla T) + q_m''', \quad (1.4)$$

Approximation d'Oberbeck-Boussinesq

Pour que la convection thermique se produise, la densité du fluide doit être écrite en fonction de la température, et donc nous avons besoin d'une équation d'état pour compléter les équations de conservation de masse, de mouvement et d'énergie. la plus simple équation d'état est

$$\rho_f = \rho_0 (1 - \beta_T (T - T_0)), \quad (1.5)$$

où β_T est le coefficient d'expansion thermique, T_0 une température de référence par exemple la température de la plaque du bas. Dans les gaz et les liquides, le coefficient d'expansion thermique β_T est très petit. Nous adoptons donc l'hypothèse d'Oberbeck-Boussinesq [24] pour la densité du fluide qui montre que les variations de densité sont négligeables, excepté dans le terme gravitationnel $\rho_f \mathbf{g}$ où elles rendent compte de la poussée d'Archimède qui est la cause de la convection thermique. En conséquence, l'équation de continuité se réduit à $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, tout comme pour un fluide incompressible.

Conditions aux limites

Une fois la conductivité thermique dans le milieu poreux déterminée, l'application de conditions aux limites thermiques est généralement simple.

Pour une couche semi-infinie $[0, L] \times [0, aH] \times [0, H]$, on impose les conditions aux limites suivantes :

- pour la vitesse, on utilise l'équation de Darcy, avec des conditions de glissement à la frontière (paroi imperméable) :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{quand } z = 0, H \text{ et } y = 0, aH.$$

- Pour la température, on utilise l'équation de l'énergie avec des parois latérales verticales adiabatiques

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = 0, aH.$$

des parois horizontales isothermes

$$T = T_0 \quad \text{pour } z = 0 \quad \text{et } T = T_1 \quad \text{pour } z = H.$$

1.1.4 Transfert de chaleur et masse dans un milieu poreux

Les transferts couplés de chaleur et de masse qui se développent dans les milieux poreux non saturés, sous l'influence de faibles gradients de température, jouent un rôle extrêmement important dans divers phénomènes naturels ou processus industriels. Il en est ainsi dans les échanges d'humidité entre le sol et l'atmosphère par suite des variations de température journalière et saisonnière de la surface, mais également dans certains domaines techniques : génie civil, séchage des matériaux, voie technologiques : caloducs, où les transferts de masse sont simulés de manière naturelle ou artificielle par des gradients de température.

Conservation de masse dans un mélange de fluides

Considérons un mélange de fluides de volume V et la masse m . L'indice i représente la i^{eme} composante (composante i) du mélange.

Nous appliquons le principe de la conservation de la masse de chaque composant dans le mélange. On note C_i la concentration du composant i . En l'absence de génération de composants, nous devons avoir

$$\partial_t C_i + \nabla \cdot (C_i V_i) = 0,$$

où V_i est la vitesse de la particule du composant i . En sommant sur i on obtient

$$\partial_t C + \nabla \cdot (C \mathbf{u}) = 0,$$

tel que \mathbf{u} est la vitesse de masse moyenne et donnée par

$$\mathbf{u} = \frac{1}{C} \sum_i C_i V_i.$$

Jusqu'à présent, nous avons été préoccupés par le fluide uniquement, mais maintenant nous envisageons une matrice solide poreuse saturée par un mélange de fluide. L'équation de conservation de masse dans un milieu poreux est donnée par

$$\partial_t C + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = \nabla \cdot (\lambda_{21} \nabla C), \tag{1.6}$$

où λ_{21} est la diffusivité de masse du milieu poreux.

Production combinée de chaleur et de masse

Dans la convection à double diffusion (par exemple, thermohaline) le couplage de transports de chaleur et de masse a lieu parce que la densité du fluide dépend à la fois de la température T et de la concentration C . Dans ce cas la loi de Darcy s'écrit sous l'approximation de Bousinesq. Les propriétés thermophysiques du fluide sont supposées constantes, à l'exception de la masse volumique dans le terme des forces de volume qui dépend linéairement de la température et de la concentration

$$\rho_f = \rho_0(1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_s(C - C_0)). \quad (1.7)$$

où β_T et β_s sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et massique. Dans certaines circonstances, on a un couplage direct entre l'équation de la chaleur et l'équation de masse. C'est alors que le phénomène appelé cross-diffusion (les effets de Soret et Dufour) n'est pas négligeable (voir Eckert et Drake [45]). L'effet de Soret se réfère au flux massique produit par un gradient de température et l'effet de Dufour se réfère au flux de la chaleur produit par un gradient de concentration. En absence de la source de chaleur et de masse, les équations s'écrivent

$$\partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = \nabla \cdot (\lambda_{11} \nabla T) + \nabla \cdot (\lambda_{12} \nabla C), \quad (1.8)$$

$$\partial_t C + (\mathbf{u} \cdot \nabla)C = \nabla \cdot (\lambda_{22} \nabla C) + \nabla \cdot (\lambda_{21} \nabla T), \quad (1.9)$$

où λ_{11} et λ_{22} sont respectivement, les coefficients de la diffusivité thermique et massique et λ_{12} et λ_{21} sont respectivement, les coefficients de Dufour et Soret du milieu poreux. Ces derniers sont déjà étudiés dans plusieurs références comme [5, 10, 46, 64, 70].

La variation de la masse volumique avec la température et la concentration donne lieu à une force de flottabilité combinée. Le fait que les coefficients de l'équation (1.8) sont différents de ceux de l'équation (1.9) conduit à des effets intéressants, tels que les flux oscillant dans le temps en présence de conditions aux limites stables.

1.2 Motivation

Parmi les très nombreuses techniques pour la discrétisation d'équations aux dérivées partielles elliptiques, nous avons choisi de présenter les méthodes spectrales. La technique des méthodes spectrales permet d'obtenir des approximations d'équations à dérivées partielles avec une bonne précision et une convergence rapide.

Les méthodes spectrales ont été introduites pour la première fois par D. Gottlieb et S. Orszag [53, 68]. Elle repose sur l'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles initialement par des séries de Fourier tronquées puis par des polynômes de haut degré. Les méthodes spectrales utilisent

des formules de quadratures numériques pour évaluer les intégrales obtenues dans la formulation variationnelle, le plus souvent la formule de Gauss-Lobatto ; le problème est discrétisé en les nœuds de cette formule qui sont les racines de polynômes dérivés des polynômes de Legendre. De nombreux ouvrages ont été publiés sur les méthodes spectrales, nous citons par exemple [25, 30, 49, 62].

Les domaines où ces équations sont posées, se multiplient et se généralisent. Grâce aux produits de tensorisation sur les polynômes, la géométrie de base est soit un carré soit un cube. Nous pouvons trouver des extensions sur des trapèzes, cylindres ou même des cônes, par conséquent, le champ d'applications des méthodes spectrales ne se limite plus aux géométries simples, mais s'étend aux situations complexes [13], voir les références [15, 44, 78] pour plus de détails.

Dans cette thèse nous nous intéressons à plusieurs problèmes liés aux milieux poreux. L'étude des milieux poreux est un domaine de recherche très actif du fait de large champ de ses applications. Par essence transversale à la mécanique du solide et à la mécanique de fluides, l'étude de transport, de l'écoulement de la propagation d'ondes en milieu poreux déformable ainsi que dans la gestion de déchets souterrains la propagation d'agent polluant, l'hydrologie, dans l'industrie du pétrole dans la génie chimique, dans l'exploitation de gisements et dans la sismologie.

D'un point de vue mécanique, ces équations sont essentiellement les équations les plus simples décrivant l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux (nous citons par exemple [57]). Mais d'un point de vue mathématique, elles sont difficiles à étudier à cause de leur contrainte d'incompressibilité. Dans le cas stationnaire, ces équations sont de la forme

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{aligned} \tag{1.10}$$

On réfère à Marsily [40] pour les arguments principaux qui conduisent à l'obtention de ce modèle. Les inconnues sont le champ de vecteur \mathbf{u} à valeurs dans \mathbb{R}^d qui représente la vitesse et la fonction p qui représente la pression. La fonction \mathbf{f} est une densité de forces extérieures appliquées au fluide (la gravité par exemple). Le coefficient α dépend de la perméabilité du milieu et la viscosité du fluide.

Dans [2], Achdou et ses collaborateurs, ont traité le problème (1.10) muni de conditions aux limites de Neumann et tel que α est constant (égal à 1). L'analogue à cette étude est effectuée dans [1] quand α est une fonction positive. Nous citons aussi [17], où les auteurs ont étudié l'analyse a priori et a posteriori en utilisant la méthode des éléments finis avec joints lorsque α une fonction continue par morceaux, voir aussi [37].

Lorsque la pression sur la frontière peut présenter de fortes variations, la perméabilité du milieu est supposée dépendre de la pression, voir Rajagopal [73], dans ce cas, l'analyse théorique et numérique a été réalisé dans [4] par la méthode des éléments spectraux et [11] par la méthode spectrale.

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'écoulement instationnaire d'un fluide incompressible dans un milieu poreux et rigide. Les équations de Darcy s'étendent à une hiérarchie de modèles régissant l'écoulement des fluides par un solide poreux, voir Rajagopal [73], et Amirat [7]. Les équations de Darcy instationnaires ont été étudiées par éléments finis dans [16] quand α est constant et positif et ont été munies de la condition de Dirichlet sur la pression.

Dans un milieu poreux, quand un fluide saturant est soumis à plusieurs composants à des gradients de densité causés par des variations locales de température et de concentration, des forces volumiques dues au champs de gravité induisent un mouvement convectif. Dans un premier temps, on considère le problème modèle, dérivé des équations de la mécanique des fluides dans les milieux poreux et de la thermodynamique dans le cas stationnaire. Les conditions aux limites sont de type Neumann sur la vitesse et de type mixte Dirichlet et Neumann pour la température. Des études ont toutefois été effectuées par Bernardi et al. [23] sur les équations de Navier-Stokes écrites sous l'approximation de Boussinesq couplées avec l'équation de la chaleur.

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons au transfert combiné de chaleur et de masse dans un milieu poreux modélisé par les équations de chaleur et de masse avec les termes convectifs couplées avec la loi de Darcy écrite sous l'approximation de Boussinesq munies de conditions aux limites de Neumann sur la vitesse et la condition mixte Dirichlet et Neumann pour la température et la concentration.

1.3 Description de la thèse

Cette thèse est organisée de la façon suivante :

On considère dans le chapitre 2 les équations de Darcy non-stationnaires et non-linéaires qui modélisent l'écoulement instationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans un milieu poreux rigide avec des conditions aux limites mixtes. Nous proposons une discrétisation en temps et en espace du système complet en utilisant le schéma d'Euler implicite et les méthodes spectrales quand le domaine est le carré ou le cube. Nous prouvons des estimations d'erreur optimales. À la fin de ce chapitre, on présente la mise en œuvre de la méthode spectrale pour ces équations telle que le code de calcul est développé en FreeFem3d (voir [42, 82]).

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons au couplage des équations de Darcy avec l'équation de la chaleur. On écrit la formulation variationnelle, puis on établit par deux démonstrations différentes l'existence de la solution ainsi que l'unicité. Ensuite, une discrétisation par méthode spectrale est décrite et analysée en détail. Enfin, nous présentons quelques expériences numériques confirmer l'intérêt de la discrétisation, et nous choisissons comme application du modèle le problème de Horton-

Rogers-Lapwood (voir [67, Chap. 6]) qui modélise une couche horizontale d'un milieu poreux et est chauffée de manière uniforme à partir du fond de la couche. Un autre modèle est simulé sur la convection naturelle de la chaleur dans un milieu poreux.

Par analogie au deuxième et troisième chapitres, le chapitre 4 de ce mémoire propose une étude mathématique et numérique du couplage des équations de la chaleur et de la concentration de masse avec la loi de Darcy. On prouve également que le système d'équations admet une solution. Dans la section suivante nous nous intéressons à l'approximation temporelle et spatiale du problème en utilisant le schéma d'Euler implicite et les méthodes spectrales. Dans la suite, on démontre des majorations d'erreur à la fois sur la vitesse, la pression, la température et la concentration. On termine le chapitre par quelques expériences numériques confirmant l'intérêt de la méthode ainsi du problème.

1.4 Rappels et généralités

Nous introduisons ici les espaces dans lesquels nous cherchons nos solutions ainsi que les propriétés utilisées. Les démonstrations des propriétés indiquées figurent en particulier dans les ouvrages de référence suivants : Adams [3], Dautray et Lions [39], Evans [47], Grisvard [54], Lions et Magenes [61] et Nečas [65].

Nous considérons un ouvert Ω borné connexe de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 . Nous rappelons que $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω , et que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans \mathbb{R}^d . Le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω . Nous définissons, pour tout réel $p \geq 1$ l'espace

$$L^p(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d; \varphi \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |\varphi(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\varphi(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit,

$$\partial^k v = \frac{\partial^{|k|} v}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}},$$

où $k = (k_1, \dots, k_d)$ est un d -uplet d'entiers positifs tel que $|k| = k_1 + \dots + k_d$.

Pour tout entier positif m et tout réel $p \geq 1$, l'espace de Sobolev est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega); \forall |k| \leq m, \partial^k v \in L^p(\Omega) \right\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|k|=0}^m \int_{\Omega} |\partial^k v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus, nous notons $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$. En particulier, si $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ est noté $H^m(\Omega)$.

Pour un nombre réel positif fixé T et un espace de Banach séparable E muni de la norme $\|\cdot\|_E$, on note $\mathcal{C}^0(0, T; E)$ l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ à valeurs dans E .

Pour un entier positif m , on introduit aussi l'espace $H^m(0, T; E)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables sur $]0, T[$ à valeurs dans E telles que les fonctions : $v \mapsto \|\partial_t^\ell v\|_E^2, 0 \leq \ell \leq m$, soient intégrables sur $]0, T[$.

L'opérateur de divergence appliqué à un champ de vecteurs \mathbf{v} de composantes (v_x, v_y) en dimension $d = 2$ et (v_x, v_y, v_z) en dimension $d = 3$, est défini lorsque \mathbf{v} est de classe \mathcal{C}^1 par la formule

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \text{en dimension } d = 2,$$

et

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{en dimension } d = 3,$$

Nous pouvons étendre la définition de la divergence à un élément quelconque \mathbf{v} de $\mathcal{D}'(\Omega)$ par les formules de dualité suivantes :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, \varphi \rangle = - \langle v_x, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle - \langle v_y, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle \quad \text{en dimension } d = 2,$$

et

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, \varphi \rangle = - \langle v_x, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle - \langle v_y, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle - \langle v_z, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rangle \quad \text{en dimension } d = 3.$$

L'opérateur de trace normale $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ est défini par la formule

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi + \nabla \cdot \mathbf{v} \varphi) dx.$$

Nous rappelons dans le lemme suivant l'inégalité de Poincaré–Friedrichs.

Lemme 1.4.1 *Il existe une constante c_p ne dépendant que de la géométrie de Ω telle que toute fonction φ de $H_0^1(\Omega)$ vérifie*

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq c_p \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (1.11)$$

On suppose que la frontière $\partial\Omega$ est divisée en deux parties disjointes Γ_{\sharp} et Γ_{\star} telles que Γ_{\star} est de mesure positive et est une sous-variété lipschitzienne de $\partial\Omega$.

Pour écrire le problème de Darcy (2.1) en forme variationnelle, on introduit l'espace de pression suivant :

$$H_\star^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega), \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\star\}. \quad (1.12)$$

Les traces de fonctions de $H_\star^1(\Omega)$ sur Γ_\sharp appartiennent à $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)$ (voir [61, Chap.1, §11]). On note $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp))'$ son espace dual et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_\sharp}$ le produit dual entre $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp))'$ et $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)$.

1.5 Outils de la méthode spectrale

Pour tout entier positif n , on note $\mathbb{P}_n(\Omega)$ l'espace des restrictions à Ω des polynômes à valeurs dans \mathbb{R} et de degré $\leq n$ par rapport à chaque variable.

On considère le domaine Ω égal au carré ou au cube $] -1, 1[^d$, $d = 2$ ou 3 . On rappelle la formule de Gauss-Lobatto sur l'intervalle $] -1, 1[$: il existe un unique ensemble de $N + 1$ nœuds ξ_j , $0 \leq j \leq N$, avec $\xi_0 = -1$ et $\xi_N = 1$, et un unique ensemble de $N + 1$ poids ρ_j , $0 \leq j \leq N$, tel que

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(-1, 1), \quad \int_{-1}^1 \Phi(\zeta) d\zeta = \sum_{j=0}^N \Phi(\xi_j) \rho_j. \quad (1.13)$$

Cette formule de quadrature n'est pas exacte sur $\mathbb{P}_{2N}(-1, 1)$, donc elle n'est pas exacte pour la norme $L^2(-1, 1)$ des polynômes de $\mathbb{P}_N(-1, 1)$. En revanche, on a les relations suivantes (voir [22, Chap. IV, Corollaire 1.10] :

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N(-1, 1), \quad \|\varphi_N\|_{L^2(-1,1)}^2 \leq \sum_{j=0}^N \varphi_N(\xi_j)^2 \rho_j \leq 3 \|\varphi_N\|_{L^2(-1,1)}^2. \quad (1.14)$$

La grille de Gauss-Lobatto est donnée par

$$\Sigma_N = \begin{cases} \{\mathbf{x} = (\xi_i, \xi_j), \quad 0 \leq i, j \leq N\} & \text{pour } d = 2, \\ \{\mathbf{x} = (\xi_i, \xi_j, \xi_k), \quad 0 \leq i, j, k \leq N\} & \text{pour } d = 3. \end{cases}$$

On introduit les espaces discrets suivants

$$\mathbb{X}_N = \mathbb{P}_N(\Omega)^d \quad \text{et} \quad \mathbb{Y}_N = \mathbb{P}_N(\Omega),$$

et on approche l'espace $H_\star^1(\Omega)$ défini dans (1.12) par

$$\mathbb{Y}_N^\star = \mathbb{Y}_N \cap H_\star^1(\Omega).$$

On suppose que $\Gamma_\sharp, \Gamma_\star$ sont des unions de côtés entiers ($d = 2$) ou de faces entières ($d = 3$) de Ω , on note par $\Gamma_{\star j}$, $1 \leq j \leq J_1$, respectivement $\Gamma_{\sharp j}$, $1 \leq j \leq J_2$, avec $J_1 + J_2 = 2d$, les côtés ou les faces contenues dans Γ_\star , respectivement Γ_\sharp . On introduit les espaces

$$\mathbb{X}_N^{\Gamma_\star} = \{\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma_\star); \quad \varphi|_{\Gamma_{\star j}} \in \mathbb{P}_N(\Gamma_{\star j}), \quad 1 \leq j \leq J_1\},$$

$$\mathbb{X}_N^{\Gamma_{\sharp}} = \{\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma_{\sharp}); \varphi|_{\Gamma_{\sharp j}} \in \mathbb{P}_N(\Gamma_{\sharp j}), 1 \leq j \leq J_2\}.$$

On définit le produit discret pour toutes fonctions continues u et v sur $\overline{\Omega}$ par

$$(u, v)_N = \begin{cases} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u(\xi_i, \xi_j) v(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j & \text{si } d = 2, \\ \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u(\xi_i, \xi_j, \xi_k) v(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \rho_i \rho_j \rho_k & \text{si } d = 3. \end{cases} \quad (1.15)$$

La formule (1.14) entraîne que le produit discret est un produit scalaire sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et on note $\|\cdot\|_N$ la norme associée à ce produit scalaire. Similairement, on introduit une approximation du produit de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{\sharp}}$ par

$$(u, v)_{\Gamma_{\sharp}}^N = \sum_{j=1}^{J_2} (u, v)_{\Gamma_{\sharp j}}^N. \quad (1.16)$$

tel que, si par exemple $\Gamma_{\sharp j}$ est le côté ou la face $\{-1\} \times [-1, 1]^{d-1}$

$$(u, v)_{\Gamma_{\sharp j}}^N = \begin{cases} \sum_{i=0}^N u(\xi_0, \xi_i) v(\xi_0, \xi_i) \rho_i & \text{si } d = 2, \\ \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^N u(\xi_0, \xi_i, \xi_k) v(\xi_0, \xi_i, \xi_k) \rho_i \rho_k & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

On note \mathcal{I}_N l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds de la grille Σ_N à valeurs dans $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et $i_N^{\Gamma_{\star}}$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds de $\Sigma_N \cap \overline{\Gamma_{\star}}$ à valeurs dans l'espace des traces des fonctions de \mathbb{X}_N sur Γ_{\star} que l'on note $\mathbb{X}_N^{\Gamma_{\star}}$.



Chapitre 2

Les équations de Darcy non linéaires instationnaires

Ce chapitre consiste à un article soumis pour publication, écrit avec C. Bernardi et D. Yakoubi, [18].

Sommaire

2.1	Introduction	34
2.2	Problème continu	34
2.2.1	Formulation variationnelle	34
2.2.2	Résultat d'existence	36
2.3	Problème discret	44
2.3.1	Discrétisation temporelle	44
2.3.2	Discrétisation spatiale	48
2.4	Analyse d'erreur a priori	50
2.4.1	Estimation d'erreur en temps	50
2.4.2	Estimation d'erreur en espace	55
2.4.3	Lemmes techniques	62
2.4.4	Résultat et conclusion	69
2.5	Résultats numériques	70
2.5.1	Précision temporelle	70
2.5.2	Précision spatiale	72
2.5.3	Comparaison entre la méthode spectrale et la méthode des éléments finis	75
2.5.4	Calcul dans un cas plus réaliste	76
2.6	Conclusion	79

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère les équations de Darcy non linéaires (où la non-linéarité vient du fait que le coefficient de perméabilité dépend de la pression) dépendant du temps munies de conditions aux limites mixtes. Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , à frontière lipschitzienne $\partial\Omega$ et soit \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ extérieur à Ω . On suppose que $\partial\Omega$ est divisé en deux parties disjointes Γ_{\sharp} et $\Gamma_{\star} = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_{\sharp}$. Soit \tilde{T} un nombre réel positif. On considère le problème suivant, introduit par H. Darcy [38] et généralisé par K.R. Rajagopal [73] :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t \mathbf{u} + \alpha(p)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans} & \Omega \times]0, \tilde{T}[, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans} & \Omega \times]0, \tilde{T}[, \\ p = p_b & \text{sur} & \Gamma_{\star} \times]0, \tilde{T}[, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g & \text{sur} & \Gamma_{\sharp} \times]0, \tilde{T}[, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 & \text{dans} & \Omega, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où les inconnues sont le champs de vecteur \mathbf{u} et la pression p du fluide. Ce système modélise l'écoulement instationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans un milieu poreux saturé et rigide. Il semble assez réaliste d'un point de vue mécanique, au moins lorsque le coefficient α qui est lié à la perméabilité du milieu et à la viscosité du fluide satisfait aux conditions suivantes :

- Quand p est fixé, la fonction $\mathbf{x} \mapsto \alpha(\mathbf{x}, p)$ est constante par morceaux. En effet, les équations précédentes modélisent le flux dans un milieu poreux, mais les milieux souterrains poreux sont souvent non homogènes, composés de plusieurs composants tels que l'argile ou le calcanéite, les valeurs de α pour ces différents éléments sont très différentes.
- Lorsque la pression présente de fortes variations, par exemple induite par les conditions sur le bord, le coefficient α dépend de ces valeurs de façon exponentielle, on réfère à [73] pour plus de détails sur la manière d'obtenir ce modèle.

Les données sont une densité des forces \mathbf{f} (ce qui représente le plus souvent l'action de la gravité), la limite de pression p_b et le flux au bord g , et également la condition initiale \mathbf{u}_0 .

2.2 Problème continu

2.2.1 Formulation variationnelle

Dans ce qui suit, on suppose que

- Γ_{\star} est de mesure positive dans $\partial\Omega$ et $\partial\Gamma_{\star}$ est une sous-variété lipschitzienne de $\partial\Omega$,
- La fonction α est :
 - ★ positive et bornée, i.e. il existe deux constantes positives α_1 et α_2 ,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 \leq \alpha(\xi) \leq \alpha_2, \quad (2.2)$$

\star continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et lipschitzienne, i.e., il existe une constante positive α_L telle que

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \quad |\alpha(\xi_1) - \alpha(\xi_2)| \leq \alpha_L |\xi_1 - \xi_2|. \quad (2.3)$$

- Les données (\mathbf{f}, g) appartiennent à $L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\#})')$,
- La fonction p_b appartient à $L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star}))$ et admet un relèvement dans $L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ encore noté p_b pour simplifier, qui vérifie

$$\|p_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \leq c_T \|p_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star}))}. \quad (2.4)$$

- La donnée \mathbf{u}_0 appartient à $L^2(\Omega)^d$ et vérifie

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On considère la formulation variationnelle suivante

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ tel que

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.5)$$

et pour tout $t, 0 \leq t \leq \tilde{T}$,

$$p(\cdot, t) = p_b(\cdot, t) \quad \text{sur } \Gamma_{\star},$$

$$\forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\alpha(p)\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + b(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.6)$$

$$\forall q \in H_{\star}^1(\Omega), \quad b(\mathbf{u}, q) = \langle g, q \rangle_{\Gamma_{\#}}. \quad (2.7)$$

où la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla q(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Proposition 2.2.1 *Les problèmes (2.1) et (2.5) – (2.6) – (2.7) sont équivalents dans le sens où :*

(i) *toute solution du problème (2.1) appartenant à $H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ est solution du problème (2.5) – (2.6) – (2.7),*

(ii) *toute solution du problème (2.5) – (2.6) – (2.7) est solution du problème (2.1) au sens des distributions.*

Preuve. (i) L'équation (2.6) est facile à obtenir. On suppose que $\nabla \cdot \mathbf{u}$ est dans $L^2(\Omega)$. L'équation (2.7) s'obtient par la formule de Green : pour tout $q \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\tau) q(\tau) d\tau.$$

Puis, on suppose que $q = 0$ sur Γ_\star

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\tau)q(\tau)d\tau = \int_{\Gamma_\#} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\tau)q(\tau)d\tau,$$

et on utilise la condition du bord de \mathbf{u} sur $\Gamma_\#$ combinant avec la condition d'incompressibilité.

(ii) Nous déduisons de la densité de $\mathcal{D}(\Omega)^d$ dans $L^2(\Omega)^d$ et de $\mathcal{D}(\Omega \cup \Gamma_\#)$ dans $H_\star^1(\Omega)$ (voir [14]) que (2.6)-(2.7) est équivalent à (2.1) au sens des distributions.

2.2.2 Résultat d'existence

Nous sommes en position de présenter le résultat principal de cette section, à savoir l'existence de la solution du problème (2.5) – (2.6) – (2.7).

Nous prouvons une propriété supplémentaire de la forme $b(\cdot, \cdot)$ dans le lemme suivant.

Lemme 2.2.2 *La forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ est continue sur $L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$ et vérifie la condition inf-sup*

$$\sup_{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}} \geq \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (2.8)$$

Preuve. Pour tout $q \in H_\star^1(\Omega)$, nous choisissons $\mathbf{v} = \nabla q$

$$b(\mathbf{v}, q) = \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)^d}^2,$$

d'où la condition désirée.

On introduit le noyau de la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \forall q \in H_\star^1(\Omega), b(\mathbf{v}, q) = 0\}.$$

qui est caractérisé par :

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_\#\}.$$

De plus, cet espace est séparable (voir [26, Prop III.22]).

Comme les traces de fonctions de $H_\star^1(\Omega)$ appartiennent à $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)$, grâce à la condition inf-sup, et [51, Chap I, Lemme 4.1], il existe $\mathbf{w}(\cdot, t) \in \mathbf{V}(\Omega)^\perp$ tel que :

$$\forall q \in H_\star^1(\Omega), b(\mathbf{w}(\cdot, t), q) = \langle g(\cdot, t), q \rangle_{\Gamma_\#}.$$

et

$$\|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|g(\cdot, t)\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)}. \quad (2.9)$$

Comme $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^\perp(\Omega)$ alors sa dérivé en temps y appartient. On définit l'application

$$\alpha_* : \xi \mapsto \alpha(\xi + p_b),$$

qui vérifie les mêmes propriétés que α en particulier (2.2). On pose

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{u} - \mathbf{w} \quad \text{et} \quad p_* = p - p_b.$$

On note que $\mathbf{u}_* \in H^1(0, \tilde{T}; \mathbf{V}(\Omega))$ et $p_* \in L^2(0, \tilde{T}; H_*^1(\Omega))$ et on voit que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$, $b(\mathbf{v}, p_*) = 0$. Par conséquent, si (\mathbf{u}, p) est solution du problème (2.5), le couple (\mathbf{u}_*, p_*) est solution du problème réduit suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\mathbf{u}_*, p_*) \in H^1(0, \tilde{T}; \mathbf{V}(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H_*^1(\Omega)) \text{ tel que} \\ \mathbf{u}_*(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 - \mathbf{w}(\cdot, 0) \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}_*(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \alpha_*(p_*(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}_*(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \alpha_*(p_*(\mathbf{x}, t)) \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - b(\mathbf{v}, p_b). \end{aligned} \quad (2.11)$$

La propriété d'équivalence est facilement vérifiée, voir [16, Lem 2.1].

Proposition 2.2.3 *Les problèmes (2.5)-(2.6)-(2.7) et (2.10)–(2.11) sont équivalents au sens où (\mathbf{u}, p) est solution de (2.5) à (2.7) si et seulement si (\mathbf{u}_*, p_*) est solution de (2.10)-(2.11).*

On montre la stabilité de la solution \mathbf{u}_* dans le lemme suivant.

Lemme 2.2.4 *Pour toutes données*

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \in L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d), \quad g \in L^2(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'), \\ p_b \in L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^d, \end{aligned} \quad (2.12)$$

la solution \mathbf{u}_* du problème (2.10) – (2.11) satisfait pour tout t , $0 \leq t \leq \tilde{T}$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} + \alpha_1 \|\mathbf{u}_*\|_{L^2(0, t; L^2(\Omega)^d)} \\ \leq c \left(\|\mathbf{u}_*(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, t; L^2(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0, t; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star}))} + \|g\|_{L^2(0, t; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})')} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

et

$$\begin{aligned} \|\partial_t \mathbf{u}_*\|_{L^2(0, t; L^2(\Omega)^d)} \\ \leq c \left(\|\mathbf{u}_*(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, t; L^2(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0, t; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star}))} + \|g\|_{L^2(0, t; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})')} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Preuve. 1) En prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}_*$ dans (2.11) et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u}_*^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \alpha_1 \|\mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ & \leq \|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \quad + \|\mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla p_b(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} + \alpha_2 \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

On utilise la formule de Young

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad (2.15)$$

avec ε est égal à $\frac{\alpha_1}{3}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u}_*^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \frac{\alpha_1}{2} \|\mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ & \leq \frac{3}{2\alpha_1} (\|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\nabla p_b(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2) + \frac{3\alpha_2^2}{2\alpha_1} \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

En intégrant entre 0 et t on obtient,

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_1 \|\mathbf{u}_*\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)}^2 \\ & \leq \|\mathbf{u}_*(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{3}{\alpha_1} (\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)}^2 + \|p_b\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}^2) + 3 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \|\mathbf{w}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)}^2. \end{aligned}$$

En combinant cette dernière inégalité avec (2.4) et (2.9) on obtient l'estimation (2.13).

2) Similairement, on prend $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}_*$ dans (2.11)

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_{\Omega} \alpha_*(p_*(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}_*(\mathbf{x}, t) \partial_t \mathbf{u}_*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \partial_t \mathbf{u}_*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \alpha_*(p_*(\mathbf{x}, t)) \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \partial_t \mathbf{u}_*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - b(\partial_t \mathbf{u}_*, p_b). \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ & \leq \|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\partial_t \mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla p_b(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\partial_t \mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \quad + \alpha_2 \|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\partial_t \mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} + \alpha_2 \|\mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\partial_t \mathbf{u}_*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

puis on utilise les mêmes arguments précédents, on obtient (2.14).

Ce dernier lemme prouve la stabilité de la vitesse \mathbf{u} solution du problème (2.5)-(2.6)-(2.7).

Proposition 2.2.5 *Pour toutes données \mathbf{f}, p_b, g et \mathbf{u}_0 satisfaisant (2.12), la solution \mathbf{u} du problème (2.5)-(2.6)-(2.7) vérifie pour tout $t \in [0, \tilde{T}]$,*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)} & \leq c' (\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)} \\ & \quad + \|p_b\|_{L^2(0,\tilde{T};H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_*))} + \|g\|_{H^1(0,\tilde{T};H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)')}). \end{aligned}$$

Pour prouver que le problème (2.5)-(2.6)-(2.7) est bien posé, on a également besoin du lemme technique suivant

Lemme 2.2.6 *L'espace $L^2(\Omega)^d$ s'écrit*

$$L^2(\Omega)^d = \mathbf{V}(\Omega) \oplus \mathbf{V}(\Omega)^\perp \quad \text{ou} \quad \mathbf{V}(\Omega)^\perp = \{\nabla q; q \in H_\star^1(\Omega)\}.$$

Preuve. Posons

$$\mathbf{P} = \{\nabla q, q \in H_\star^1(\Omega)\}.$$

C'est clair que l'espace \mathbf{P} est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)^d$, donc il suffit de démontrer que $\mathbf{P}^\perp = \mathbf{V}(\Omega)$. Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$ alors

$$\forall q \in H_\star^1(\Omega), \quad b(\mathbf{v}, q) = \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} = 0.$$

Alors $\mathbf{v} \in \mathbf{P}^\perp$. La deuxième inclusion est facile à vérifier.

Posons $\mathbf{f}_* = \mathbf{f} - \partial_t \mathbf{w} - \nabla p_b$, ce dernier résultat implique que le problème (2.10)-(2.11) se réécrit :

Trouver $(\mathbf{u}_*, p_*) \in H^1(0, \tilde{T}; \mathbf{V}(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H_\star^1(\Omega))$ vérifiant (2.10), tel que

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega), \quad \int_\Omega \partial_t \mathbf{u}_* \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \alpha_*(p_*) \mathbf{u}_* \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \alpha_*(p_*) \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}_* \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (2.17)$$

$$\forall q \in H_\star^1(\Omega), \quad \int_\Omega \alpha_*(p_*) \mathbf{u}_* \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \alpha_*(p_*) \mathbf{w} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} + b(\nabla q, p_*) = \int_\Omega \mathbf{f}_* \cdot \nabla q \, d\mathbf{x}, \quad (2.18)$$

Proposition 2.2.7 *Pour toutes données \mathbf{f}, p_b, g et \mathbf{u}_0 satisfaisant (2.10) – (2.12) et pour tout p_* dans $L^2(0, \tilde{T}; H_\star^1(\Omega))$, l'équation (2.17) admet une solution unique \mathbf{u}_* dans $L^2(0, \tilde{T}; \mathbf{V}(\Omega))$.*

Preuve. On prouve successivement l'existence et l'unicité.

1. Soit l'application

$$G : (t, \mathbf{u}_*) \mapsto \mathbf{f}_*(t) - \alpha_*(p_*) \mathbf{u}_* - \alpha_*(p_*) \mathbf{w}.$$

Cette application est continue sur $L^2(\Omega)^d$ et lipschitzienne en \mathbf{u}_* . On sait qu'il existe un sous-espace de $\mathcal{D}(\Omega)^d$ qui est dense dans $\mathbf{V}(\Omega)$ (voir [51, Sec. 2.2]). Soit $(\mathbb{H}_n)_n$ une suite croissante de sous-espaces de dimension finie de $\mathbf{V}(\Omega)$ telle que $\cup_n \mathbb{H}_n$ est dense dans $\mathbf{V}(\Omega)$. On en déduit le problème suivant, pour tout $n > m$

Trouver $\mathbf{u}_{*n} \in \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; \mathbb{H}_n)$ tel que

$$\mathbf{u}_{*n}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}(\cdot, 0),$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_m, \quad \int_\Omega \partial_t \mathbf{u}_{*n} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \alpha_*(p_*) \mathbf{u}_{*n} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}_* \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_\Omega \alpha_*(p_*) \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (2.19)$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz [76, Th. 21.1], cette équation admet une solution unique \mathbf{u}_{*n} dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; \mathbb{H}_n)$. La solution \mathbf{u}_{*n} vérifie (2.13) et (2.14), donc il existe une sous-suite que l'on note encore $(\mathbf{u}_{*n})_n$ pour simplifier, qui converge faiblement vers \mathbf{u}_* dans $L^2(0, \tilde{T}; \mathbf{V}(\Omega))$. la fonction \mathbf{u}_* est solution de (2.17) pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{H}_m$ et donc pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$ par densité. Comme $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; \mathbf{V}(\Omega))$ s'injecte dans $L^2(0, \tilde{T}; \mathbf{V}(\Omega))$, on a ainsi l'existence de \mathbf{u}_* dans $L^2(0, \tilde{T}; \mathbf{V}(\Omega))$.

2. De plus, si \mathbf{u}_*^1 et \mathbf{u}_*^2 sont deux solutions de l'équation (2.17) et soit $\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_*^1 - \mathbf{u}_*^2$, on voit que l'équation (2.17) est linéaire par rapport à \mathbf{u}_* . On considère les données $\mathbf{u}_*(\cdot, 0)$, \mathbf{f} , p_b et g égaux à zéro, on déduit alors de (2.13) que \mathbf{u}_* est nul. Ceci prouve l'unicité de la solution dans $L^2(0, \tilde{T}; \mathbf{V}(\Omega))$.

On définit l'application $\mathbf{F} : p_* \mapsto \mathbf{u}_*$ où \mathbf{u}_* est la solution exhibée dans la Proposition 2.2.7. Cette application est continue de $L^2(0, \tilde{T}; H_*^1(\Omega))$ dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; \mathbf{V}(\Omega))$ et bornée. L'équation (2.18) est équivalente à

$$\forall q \in H_*^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \alpha_*(p_*) \mathbf{F}(p_*) \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \alpha_*(p_*) \mathbf{w} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} + b(\nabla q, p_*) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_* \cdot \nabla q \, d\mathbf{x}. \quad (2.20)$$

Lemme 2.2.8 *Pour toutes données \mathbf{f} , p_b , g et \mathbf{u}_0 vérifiant (2.12), l'équation (2.18) admet une solution unique p_* dans $L^2(0, \tilde{T}; H_*^1(\Omega))$ vérifiant :*

$$\|\nabla p_*\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)} \leq c(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_*))} + \|g\|_{H^1(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_*'))} + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d}). \quad (2.21)$$

Preuve. Soit l'application ϕ définie par : pour tout $q \in H_*^1(\Omega)$,

$$\langle \phi(p_*), q \rangle = \int_{\Omega} \alpha_*(p_*) \mathbf{F}(p_*) \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \alpha_*(p_*) \mathbf{w} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} + b(\nabla q, p_*) - \int_{\Omega} \mathbf{f}_* \cdot \nabla q \, d\mathbf{x}.$$

Si on prend $q = p_*$, on aura

$$\langle \phi(p_*), p_* \rangle \geq \alpha_1 \int_{\Omega} \mathbf{F}(p_*) \cdot \nabla p_* \, d\mathbf{x} + \alpha_1 \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla p_* \, d\mathbf{x} + b(\nabla p_*, p_*) - \int_{\Omega} \mathbf{f}_* \cdot \nabla p_* \, d\mathbf{x}.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle \phi(p_*), p_* \rangle \geq \|\nabla p_*\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - c_0(t) \|\nabla p_*\|_{L^2(\Omega)^d}$$

où

$$c_0(t) = \|\partial_t \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)^d} + \alpha_2 \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla p_b\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{F}(p_*)\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

On obtient de (2.16),

$$c_0(t) \leq c(\|\partial_t \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)^d} + \alpha_2 \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla p_b\|_{L^2(\Omega)^d}).$$

Par conséquent, la quantité $\langle \phi(p_*), p_* \rangle$ est positive sur la sphère du rayon $\mu = c_0(t)$. D'après Bernard [14], $\mathcal{D}(\Omega \cup \Gamma_\#)$ est dense dans $H_*^1(\Omega)$. Soit maintenant $(\mathbb{W}_n)_n$ une suite croissante de sous-espaces de dimension finie de $H_*^1(\Omega)$ telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_n$ est dense dans $H_*^1(\Omega)$. Comme ϕ est positif sur chaque \mathbb{W}_n , $n \geq 1$, d'après le théorème du point fixe de Brouwer et [51, Chap IV, Cor 1.1], il existe $p_{*n} \in \mathbb{W}_n$ tel que pour tout $n > m$:

$$\forall q_m \in \mathbb{W}_m, \quad \langle \phi(p_{*n}), q_m \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \|\nabla p_{*n}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \mu. \quad (2.22)$$

Comme $(p_{*n})_n$ est bornée par μ dans $H_*^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)$, il existe une sous-suite que l'on note $(\tilde{p}_{*n})_n$ qui converge faiblement vers \tilde{p} dans $H^1(\Omega)$ et fortement vers \tilde{p} dans $L^2(\Omega)$. Alors pour tout \mathbf{w} dans $L^2(\Omega)^d$, $(\alpha_*(\tilde{p}_{*n})\mathbf{w})_n$ converge aussi p.p. vers $\alpha_*(\tilde{p})\mathbf{w}$, et on a

$$\forall n \geq 1, \quad |\alpha_*(\tilde{p}_{*n})\mathbf{w}| \leq \alpha_2|\mathbf{w}|.$$

Comme $\alpha_2|\mathbf{w}| \in L^2(\Omega)^d$, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que $(\alpha_*(\tilde{p}_{*n})\mathbf{w})_n$ converge vers $\alpha_*(\tilde{p})\mathbf{w}$ fortement dans $L^2(\Omega)^d$. D'autre part, on écrit l'expansion

$$\int_{\Omega} \alpha_*(\tilde{p}_{*n})\mathbf{F}(\tilde{p}_{*n}) \cdot \nabla q_m \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F}(\tilde{p}_{*n}) \cdot \alpha_*(\tilde{p})\nabla q_m \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{F}(p_{*n}) \cdot (\alpha_*(\tilde{p}_{*n}) - \alpha_*(\tilde{p}))\nabla q_m \, d\mathbf{x}.$$

La continuité de \mathbf{F} donne la convergence faible $\mathbf{F}(\tilde{p}_{*n})$ vers $\mathbf{F}(\tilde{p})$ dans $\mathbf{V}(\Omega)$ et donc la convergence du premier terme vers $(\mathbf{F}(\tilde{p}), \nabla q_m)$. Pour le deuxième terme, on voit que

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}(p_{*n}) \cdot (\alpha_*(\tilde{p}_{*n}) - \alpha_*(\tilde{p}))\nabla q_m \, d\mathbf{x} \leq \|\mathbf{F}(\tilde{p}_{*n})\|_{L^2(\Omega)^d} \|(\alpha(\tilde{p}_{*n}) - \alpha(\tilde{p}))\nabla q_m\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

De (2.13), la suite $(\mathbf{F}(\tilde{p}_{*n}))_n$ est borné, et on a la convergence forte de $(\alpha(\tilde{p}_{*n})\nabla q_m)_n$, ça implique la convergence vers 0 du deuxième terme. En passant à la limite dans (2.22), on trouve

$$\forall q_m \in \mathbb{W}_m, \quad \int_{\Omega} \alpha_*(\tilde{p})\mathbf{F}(\tilde{p}) \cdot \nabla q_m \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \alpha_*(\tilde{p})\mathbf{w} \cdot \nabla q_m \, d\mathbf{x} + b(\nabla q_m, \tilde{p}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_* \cdot \nabla q_m \, d\mathbf{x}.$$

Par densité de $\bigcup_{m=0}^N \mathbb{W}_m$ dans $H_*^1(\Omega)$, on aura

$$\forall q \in H_*^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \alpha_*(\tilde{p})\mathbf{F}(\tilde{p}) \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \alpha_*(\tilde{p})\mathbf{w} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} + b(\nabla q, \tilde{p}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_* \cdot \nabla q \, d\mathbf{x}.$$

D'où $\tilde{p} = p_*$ est solution du problème (2.18). Concernant l'estimation (2.21), on prend $q = p_*$ dans (2.18) et on intègre de 0 à t , on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla p_*\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)} &\leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))} + \|\partial_t \mathbf{w}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)} \\ &\quad + \alpha_1 \|\mathbf{w}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)} + \alpha_1 \|\mathbf{u}_*\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)}. \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\nabla p_*\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)} &\leq c(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0,t;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_*))}) \\ &\quad + \|\partial_t g\|_{L^2(0,t;H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)')} + \|g\|_{L^2(0,t;H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)')} + \alpha_1 \|\mathbf{u}_*\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)}. \end{aligned}$$

Or, d'après (2.13) on a

$$\alpha_1 \|\mathbf{u}_*\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)} \leq \|\mathbf{u}_{*0}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)} + c_T \|p_b\|_{L^2(0,t;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))} + \|g\|_{L^2(0,t;H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)')}.$$

Il suffit de combiner les deux dernières inégalités pour conclure.

On montre le théorème fondamental de ce paragraphe sur l'existence et l'unicité de la solution (\mathbf{u}, p) du problème (2.5)-(2.6)-(2.7) :

Théorème 2.2.9 *Pour toutes données $(\mathbf{f}, p_b, g, \mathbf{u}_0)$ satisfaisant (2.12), le problème (2.5)-(2.6)-(2.7) admet une solution (\mathbf{u}, p) dans l'espace*

$$H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)).$$

De plus, cette solution satisfait

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|_{H^1(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)} + \|\nabla p\|_{L^2(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)} \\ & \leq c(\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0,\tilde{T};H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))} + \|g\|_{H^1(0,\tilde{T};H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)')}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Preuve. Comme on a l'équivalence des problèmes (2.5)-(2.6)-(2.7) et (2.17)-(2.18), la proposition et le lemme précédents donnent l'existence et l'unicité de la solution (\mathbf{u}, p) du problème (2.5)-(2.6)-(2.7) dans $H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$. L'estimation (2.23) résulte par combinaison de (2.14) et (2.21).

On conclut par un résultat d'unicité.

Proposition 2.2.10 *Si le problème (2.5)-(2.6)-(2.7) admet une solution (\mathbf{u}, p) telle que la partie \mathbf{u} appartient à $H^1(0, \tilde{T}; L^\rho(\Omega)^d)$, $\rho > 2$ en dimension $d = 2$ et $\rho \geq 3$ en dimension $d = 3$, et satisfait pour une constante positive κ appropriée*

$$\sup_{0 \leq t \leq \tilde{T}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\rho(\Omega)^d} \leq \kappa, \quad (2.24)$$

alors, cette solution est unique.

Preuve. Soient (\mathbf{u}_1, p_1) et (\mathbf{u}_2, p_2) deux solutions du problème (2.5)-(2.6)-(2.7) telles que \mathbf{u}_1 vérifie (2.24). Il est clair que le couple $(\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \tilde{p} = p_1 - p_2)$ appartient à $H^1(0, \tilde{T}; \mathbf{V}(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H_\star^1(\Omega))$ et vérifie

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \partial_t \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \alpha(p) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\alpha(p_2) - \alpha(p_1)) \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (2.25)$$

$$\forall q \in H_\star^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \alpha(p_2) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \nabla \tilde{p} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\alpha(p_2) - \alpha(p_1)) \mathbf{u}_1 \cdot \nabla q \, d\mathbf{x}, \quad (2.26)$$

1) On prend $q = \tilde{p}$ dans l'équation (2.26), ce qui donne

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{p}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 &= \int_{\Omega} (\alpha(p_2) - \alpha(p_1)) \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \tilde{p} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \alpha(p_2) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{p} \, d\mathbf{x} \\ &\leq \alpha_L \|\tilde{p}\|_{L^{\rho^*}(\Omega)} \|\mathbf{u}_1\|_{L^\rho(\Omega)} \|\nabla \tilde{p}\|_{L^2(\Omega)} + \alpha_2 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \tilde{p}\|_{L^2(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^*} = \frac{1}{2}$. En choisissant ρ^* de sorte que $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^{\rho^*}(\Omega)$ et en utilisant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, ça nous donne

$$\|\nabla \tilde{p}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \alpha_L (1 + c_p^2)^{\frac{1}{2}} \|\nabla \tilde{p}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_1\|_{L^\rho(\Omega)} + \alpha_2 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

On utilise la propriété (2.24) pour $\kappa = \frac{1}{2\alpha_L(1 + c_p^2)^{\frac{1}{2}}}$, on obtient

$$\|\nabla \tilde{p}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{p}\|_{L^2(\Omega)^d} + \alpha_2 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Par conséquent,

$$\|\nabla \tilde{p}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq 2\alpha_2 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (2.27)$$

2) D'autre part, en prenant $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}$ dans (2.25), on voit que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_{\Omega} \alpha(p_2) \tilde{\mathbf{u}}^2(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\alpha(p_2) - \alpha(p_1)) \mathbf{u}_1 \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_1 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \alpha_L \|\tilde{p}\|_{L^{\rho^*}(\Omega)} \|\mathbf{u}_1\|_{L^\rho(\Omega)^d} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Puis, on utilise l'inégalité de Young et l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^{\rho^*}(\Omega)$, on déduit

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{\alpha_L}{\sqrt{\alpha_1}} \|\tilde{p}\|_{L^{\rho^*}(\Omega)} \|\mathbf{u}_1\|_{L^\rho(\Omega)^d}.$$

Combinant cette dernière inégalité avec (2.27) et (2.24)

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Comme $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot, 0)$ est égale à 0, en intégrant cette dernière inégalité entre 0 et t et en appliquant le lemme de Grönwall (voir [50, Chap. V, Lem. 1.8]). On en déduit que $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d}$ est égal à zéro et donc \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 coïncident.

3) Finalement, en combinant le résultat de 2) avec (2.27) on obtient que p_1 et p_2 sont égaux.

Même si la condition (2.24) n'est pas trop restrictive, nous préférons l'éviter dans les chapitres suivants.

2.3 Problème discret

2.3.1 Discrétisation temporelle

Pour discrétiser la dérivée par rapport au temps de la vitesse, on fait appel à un schéma d'ordre un, le schéma d'Euler implicite [29, 35, 36]. On introduit une partition de l'intervalle $[0, \tilde{T}]$ en des intervalles $[t_{m-1}, t_m]$, $1 \leq m \leq M$, telle que

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = \tilde{T}.$$

On désigne par τ_m le pas du temps $t_m - t_{m-1}$, et par τ les M -uplets (τ_1, \dots, τ_M) ; on pose aussi $|\tau| = \max_{1 \leq m \leq M} \tau_m$. La dérivée $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t_m)$ est alors approchée par le quotient différentiel

$$\frac{\mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}(t_{m-1})}{\tau_m}.$$

La fonction $\alpha(p)$ est traitée explicitement pour simplifier. Dans ce qui suit, on a besoin d'initialiser p^0 pour cela, deux possibilités existent : ou bien on prend p^0 égal à la pression atmosphérique p_a , ou bien on résout le problème stationnaire suivant

Trouver $p^0 \in H^1(\Omega)$ tel que,

$$\begin{aligned} p^0 &= p_b^0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\star, \\ \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad b(\mathbf{v}, p^0) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}^0 \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \alpha_0 \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

où la perméabilité est choisie constante.

Le problème semi-discret s'écrit :

Trouver $(\mathbf{u}^m)_{0 \leq m \leq M} \in (L^2(\Omega)^d)^{M+1}$ et $(p^m)_{1 \leq m \leq M} \in (H^1(\Omega))^M$ tels que,

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

et pour tout m , $1 \leq m \leq M$,

$$\begin{aligned} p^m &= p_b^m \quad \text{sur} \quad \Gamma_\star, & (2.28) \\ \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}}{\tau_m} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \alpha(p^{m-1}) \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + b(\mathbf{v}, p^m) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \forall q \in H_\star^1(\Omega), \quad b(\mathbf{u}^m, q) &= \langle g^m, q \rangle_{\Gamma_\sharp}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{f}^m = \mathbf{f}(\cdot, t_m)$, $g^m = g(\cdot, t_m)$ et $p_b^m = p_b(\cdot, t_m)$.

Proposition 2.3.1 *Supposons que*

$$(\mathbf{f}, p_b, g) \in \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)')$$

et que la vitesse initiale \mathbf{u}_0 appartienne à $L^2(\Omega)^d$. Alors, le problème (2.28) admet une solution unique (\mathbf{u}^m, p^m) tel que

$$\mathbf{u}^m \in L^2(\Omega)^d, \quad 0 \leq m \leq M, \quad \text{et} \quad p^m \in H^1(\Omega), \quad 1 \leq m \leq M. \quad (2.29)$$

Preuve. On prend

$$a(\mathbf{u}^m, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \tau_m \int_{\Omega} \alpha(p^{m-1}) \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

Il est clair que $a(\cdot, \cdot)$ est $L^2(\Omega)^d$ -elliptique. Comme $b(\cdot, \cdot)$ vérifie la condition inf – sup (2.8), d'après [51, Corollaire I.4.1], on a l'existence et l'unicité de la solution.

Proposition 2.3.2 *Sous les hypothèses de la proposition précédente, il existe une constante positive c telle que la vitesse \mathbf{u}^m vérifie :*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq & \|\mathbf{u}^0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|g^m\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\#})'} + c \left\{ \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{f}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=0}^m \tau_j \|g^j\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\#})'}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Preuve. Rappelons que la donnée p_b^m admet un relèvement que l'on note aussi p_b^m dans $H^1(\Omega)$ et vérifie

$$\|p_b^m\|_{H^1(\Omega)} \leq c_T \|p_b^m\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}. \quad (2.31)$$

avec la même constante c_T que dans (2.4). On pose $\mathbf{u}_*^m = \mathbf{u}^m - \mathbf{w}^m$ où $\mathbf{w}^m = \mathbf{w}(\cdot, t_m)$ et dans $\mathbf{V}(\Omega)$, vérifie :

$$\|\mathbf{w}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|g^m\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\#})'}. \quad (2.32)$$

Or, si (\mathbf{u}^m, p^m) est la solution du problème (2.28), la solution \mathbf{u}_*^m est dans $\mathbf{V}(\Omega)$, satisfaisant pour tout $m, 1 \leq m \leq M$

$$\mathbf{u}_*^0 = \mathbf{u}^0 - \mathbf{w}^0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad (2.33)$$

et

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}_*^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \tau_m \int_{\Omega} \alpha_*(p_*^{m-1}) \mathbf{u}_*^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = & \tau_m \int_{\Omega} \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{u}_*^{m-1} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \tau_m \int_{\Omega} \alpha_*(p_*^{m-1}) \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \tau_m b(\mathbf{v}, p_b^m). \end{aligned} \quad (2.34)$$

On prend $\mathbf{v} = \mathbf{u}_*^m$ dans (2.34) et on utilise l'identité

$$(a, a - b) = \frac{1}{2} (\|a\|^2 + \|a - b\|^2 - \|b\|^2).$$

On obtient,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}_*^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2) + \alpha_1 \tau_m \|\mathbf{u}_*^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ & \leq \tau_m \|\mathbf{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_*^m\|_{L^2(\Omega)^d} + \tau_m \|\nabla p_b^m\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_*^m\|_{L^2(\Omega)^d} + \alpha_2 \tau_m \|\mathbf{w}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_*^m\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

On utilise la relation de Young $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$. En prenant $\varepsilon = \frac{\alpha_1}{3}$, on en déduit,

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_*^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau_m \alpha_1 \|\mathbf{u}_*^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ & \leq \frac{3}{\alpha_1} \tau_m (\|\mathbf{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\nabla p_b^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_2^2 \|\mathbf{w}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2), \end{aligned}$$

en sommant sur m et d'après (2.31), on obtient

$$\|\mathbf{u}_*^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{3}{\alpha_1} \sum_{j=1}^m \tau_j \left(\|\mathbf{f}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + c_T^2 \|p_b^j\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_*)}^2 \right) + \frac{3\alpha_2^2}{\alpha_1} \sum_{j=1}^m \tau_j \|g^j\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)'}^2,$$

puis on remplace $\mathbf{u}_*^m = \mathbf{u}^m - \mathbf{w}^m$, d'où la conclusion.

Proposition 2.3.3 *Sous les hypothèses de la Proposition 2.3.1, il existe une constante positive ne dépendant que de α_1, α_2, c_T telle qu'on ait la majoration suivante :*

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\mathbf{u}_*^j - \mathbf{u}_*^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \left\{ \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{f}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_*)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|g^j\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)'}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Preuve. En prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}$ dans (2.34), on aura

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau_m \int_{\Omega} \alpha_*(p_*^{m-1}) \mathbf{u}_*^m \cdot (\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}) d\mathbf{x} \\ & = \tau_m \int_{\Omega} \mathbf{f}^m \cdot (\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}) d\mathbf{x} - \tau_m \int_{\Omega} \alpha_*(p_*^{m-1}) \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1} d\mathbf{x} + \tau_m b(\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}, p_b^m). \end{aligned}$$

Comme la fonction α est bornée,

$$\begin{aligned} & 2\|\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau_m \alpha_1 (\|\mathbf{u}_*^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2) \\ & \leq 2\tau_m \|\mathbf{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d} + 2\tau_m \|\nabla p_b^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \quad + 2\alpha_2 \tau_m \|\mathbf{w}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\tau_m \alpha_1 (\|\mathbf{u}_*^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}_*^m - \mathbf{u}_*^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2) \\ & \leq 4\tau_m^2 (\|\mathbf{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\nabla p_b^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2) + 4\alpha_2^2 \tau_m^2 \|\mathbf{w}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned}$$

En divisant par τ_m et en additionnant les termes de 1 à m , on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\mathbf{u}_*^j - \mathbf{u}_*^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\alpha_1 \|\mathbf{u}_*^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - 2\alpha_1 \|\mathbf{u}_*^0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\alpha_1 \sum_{j=1}^m \|\mathbf{u}_*^j - \mathbf{u}_*^{j-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ & \leq 4 \left(\sum_{j=1}^m \tau_j (\|\mathbf{f}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|p_b^j\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}^2) + \alpha_2 \sum_{j=1}^m \tau_j \|g^j\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)'}^2 \right), \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration.

Proposition 2.3.4 *Sous les hypothèses de la Proposition 2.3.1, la suite de pressions $(p^m)_{1 \leq m \leq M}$ vérifie*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \tau_j \|\nabla p^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 & \leq c \left(\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{f}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|g^j\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)'}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.36)$$

où c est une constante positive ne dépendant que de α_1 et α_2 .

Preuve. On prend $\mathbf{v} = \nabla p^m$ dans (2.28), on trouve

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}) \cdot \nabla p^m \, d\mathbf{x} + \tau_m \int_{\Omega} \alpha(p^{m-1}) \mathbf{u}^m \cdot \nabla p^m \, d\mathbf{x} + \tau_m b(\nabla p^m, p^m) = \tau_m \int_{\Omega} \mathbf{f}^m \cdot \nabla p^m \, d\mathbf{x}$$

et donc

$$\begin{aligned} \tau_m \|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 & \leq \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \quad + \tau_m \alpha_2 \|\mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d} + \tau_m \|\mathbf{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

On utilise la formule de Young avec $\varepsilon = \frac{3}{\tau_m}$, on aura

$$\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{3}{2\tau_m} \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\tau_m}{6} \|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

Encore une fois, la formule de Young nous donne pour $\varepsilon = 3$,

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d} + \alpha_2 \|\mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \leq \frac{3}{2} \|\mathbf{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{6} \|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{3\alpha_2^2}{2} \|\mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{6} \|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned}$$

En combinant les deux dernières inégalités avec (2.37), on obtient

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \tau_j \|\nabla p^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \frac{3}{2} \sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{3\alpha_2^2}{2} \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{f}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

Cette inégalité combinée avec (2.30) et (2.35) achève la démonstration.

2.3.2 Discrétisation spatiale

Dans cette partie, on s'intéresse à la discrétisation par méthode spectrale du problème (2.28) en espace en utilisant la méthode de Galerkin avec intégration numérique. Dans ce qui suit Ω est le carré ou cube $] - 1, 1[^d$, $d = 2$ ou 3 . On désigne par N le paramètre de discrétisation.

On suppose que les données \mathbf{f}, p_b et g sont continues respectivement sur $\bar{\Omega} \times [0, \tilde{T}]$, $\bar{\Gamma}_\star \times [0, \tilde{T}]$ et $\bar{\Gamma}_\ddagger \times [0, \tilde{T}]$. Le problème discret construit par la méthode de Galerkin avec intégration numérique s'écrit alors

Trouver $(\mathbf{u}_N^m, p_N^m) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$ tel que,

$$\mathbf{u}_N^0 = \mathcal{I}_N \mathbf{u}_0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

et pour tout $m, 1 \leq m \leq M$,

$$p_N^m = i_N^{\Gamma_\star} p_b^m \quad \text{sur} \quad \Gamma_\star, \quad (2.38)$$

$$\forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad a_N^m(\mathbf{u}_N^m, \mathbf{v}_N) + \tau_m b_N(\mathbf{v}_N, p_N^m) = \tau_m (\mathbf{f}^m, \mathbf{v}_N)_N + (\mathbf{u}_N^{m-1}, \mathbf{v}_N)_N,$$

$$\forall q_N \in \mathbb{Y}_N^\star, \quad b_N(\mathbf{u}_N^m, q_N) = (g^m, q_N)_N^{\Gamma_\ddagger},$$

où les formes bilinéaires $a_N^m(\cdot, \cdot)$ et $b_N(\cdot, \cdot)$ sont données par

$$a_N^m(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) = (\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N + \tau_m (\alpha(p_N^{m-1}) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N,$$

et

$$b_N(\mathbf{v}_N, q_N) = (\mathbf{v}_N, \nabla q_N)_N.$$

Le fait que ce problème soit bien posé résulte de la proposition suivante :

Proposition 2.3.5 *La forme bilinéaire $b_N(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$ et vérifie la condition inf-sup*

$$\forall q_N \in \mathbb{Y}_N, \quad \sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{b_N(\mathbf{v}_N, q_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}} \geq \|\nabla q_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (2.39)$$

Preuve. Il est évident que $b_N(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$ (voir (1.14)). Soit $q_N \in \mathbb{Y}_N$, alors $\nabla q_N \in \mathbb{X}_N$. On prend $\mathbf{v}_N = \nabla q_N$, on obtient

$$\frac{b_N(\mathbf{v}_N, q_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}} = \frac{(\nabla q_N, \nabla q_N)_N}{\|\nabla q_N\|_{L^2(\Omega)^d}} \geq \frac{\|\nabla q_N\|_{L^2(\Omega)^d}^2}{\|\nabla q_N\|_{L^2(\Omega)^d}} = \|\nabla q_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

On voit bien que la forme bilinéaire $a_N(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive. Cette propriété combinée avec la Proposition 2.3.5 et en appliquant [51, Chap.II, Thm. 1.1], entraîne la :

Proposition 2.3.6 *Pour toute données \mathbf{f}, p_b et g continues sur $\bar{\Omega} \times [0, \tilde{T}]$, $\bar{\Gamma}_\star \times [0, \tilde{T}]$ et $\bar{\Gamma}_\ddagger \times [0, \tilde{T}]$, pour chaque m , $0 \leq m \leq M$, le problème (2.38) admet une solution unique (\mathbf{u}_N^m, p_N^m) dans $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$.*

On définit le noyau de $b_N(\cdot, \cdot)$ par

$$\mathbf{V}_N(\Omega) = \{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \forall q_N \in \mathbb{Y}_N^*, b_N(\mathbf{v}_N, q_N) = 0\}.$$

On suppose que p_b est dans $H^\tau(\Gamma_\star)$ tel que $\tau > \frac{d-1}{2}$, la fonction p_b est continue sur $\bar{\Gamma}_\star \times]0, \tilde{T}[$ et donc $i_N^{\Gamma_\star} p_b$ est bien défini. De plus, en appliquant [22, Chap. III, Th. 3.1] sur Γ_\star , on voit qu'il existe un p_{bN} dans \mathbb{Y}_N égal à $i_N^{\Gamma_\star} p_b$ sur Γ_\star et tel que

$$\|p_{bN}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|i_N^{\Gamma_\star} p_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}. \quad (2.40)$$

Grâce à la condition inf-sup discrète et [51, Chap. I, Lemme 4.1], il existe $\mathbf{w}_N^m \in \mathbf{V}_N^\perp(\Omega)$, tel que $b(\mathbf{w}_N^m, q_N) = (g^m, q_N)_N^{\Gamma_\sharp} = (i_N^{\Gamma_\sharp} g^m, q_N)_N^{\Gamma_\sharp}$ et vérifie

$$\|\mathbf{w}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|i_N^{\Gamma_\sharp} g^m\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)'}$$

On pose $p_{*N}^m = p_N^m - p_{bN}^m$ et $\mathbf{u}_{*N}^m = \mathbf{u}_N - \mathbf{w}_N^m$, on note alors que, pour toute solution (\mathbf{u}_N^m, p_N^m) du problème (2.38), la vitesse $(\mathbf{u}_{*N}^m)_m$ appartient à l'espace $\mathbf{V}_N(\Omega)$ et vérifie

$$\mathbf{u}_{*N}^0 = \mathcal{I}_N \mathbf{u}_0 - \mathbf{w}_N^0, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbf{V}_N(\Omega), \quad & (\mathbf{u}_{*N}^m, \mathbf{v}_N)_N + \tau_m (\alpha_*(p_{*N}^{m-1}) \mathbf{u}_{*N}^m, \mathbf{v}_N)_N \\ & = (\mathbf{u}_{*N}^{m-1}, \mathbf{v}_N)_N + \tau_m (\mathbf{f}^m, \mathbf{v}_N)_N - \tau_m b_N(\mathbf{v}_N, \mathcal{I}_N p_b^m). \end{aligned} \quad (2.42)$$

On a maintenant le résultat suivant.

Proposition 2.3.7 *Le problème (2.41) – (2.42) admet une solution unique dans $\mathbf{V}_N(\Omega)$.*

Preuve. Posons

$$a_N^m(\mathbf{u}_{*N}^m, \mathbf{v}_N) = (\mathbf{u}_{*N}^m, \mathbf{v}_N)_N + \tau_m (\alpha_*(p_{*N}^{m-1}) \mathbf{u}_{*N}^m, \mathbf{v}_N)_N,$$

et

$$L(\mathbf{v}_N) = (\mathbf{u}_{*N}^{m-1}, \mathbf{v}_N)_N + \tau_m (\mathbf{f}^m, \mathbf{v}_N)_N - \tau_m b_N(\mathbf{v}_N, \mathcal{I}_N p_b^m).$$

La relation (1.14) nous donne la continuité et l'ellipticité de $a_N^m(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{V}_N(\Omega) \times \mathbf{V}_N(\Omega)$, donc on a l'existence et l'unicité de la solution \mathbf{u}_{*N}^m dans $\mathbf{V}_N(\Omega)$.

Par les mêmes arguments que pour les Propositions 2.3.2 et 2.3.4, on peut prouver la propriété de stabilité suivante.

Corollaire 2.3.8 *Sous les hypothèses de la Proposition 2.75, la solution du problème (2.38) vérifie*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d} + \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|p_N^j\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq c \left(\|\mathcal{I}_N \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathcal{I}_N \mathbf{f}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|i_N^{\Gamma_\star} p_b^j\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|i_N^{\Gamma_\sharp} g^j\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)'}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.4 Analyse d'erreur a priori

Dans le but de montrer l'estimation d'erreur a priori, on applique le Théorème dû à Brezzi, Rappaz et Raviart [28]. Dans un premier temps, on écrit d'autres formulations linéaires.

On considère l'espace

$$\mathbb{Z} = L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\#})') \times L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})) \times L^2(\Omega)^d.$$

On définit l'opérateur linéaire \mathcal{T} associé à toute donnée $(\mathbf{f}, g, p_b, \mathbf{u}_0)$ dans \mathbb{Z} , la solution $U = (\mathbf{u}, p)$ du problème

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad p = p_b \quad \text{sur } \Gamma_{\star} \times]0, \tilde{T}[, \\ \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \alpha_0 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + b(\mathbf{v}, p) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \forall q \in H_{(p)}^1(\Omega), \quad b(\mathbf{u}, q) &= \langle g, q \rangle_{\Gamma_{\#}}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

où α_0 est une constante positive. Selon ce qu'on a vu précédemment, ce problème est bien posé. Avec cette notation, le problème (2.5)-(2.6)-(2.7) est équivalent à trouver $U = (\mathbf{u}, p)$ la solution de l'équation :

$$\mathcal{F}(U) = U - \mathcal{T}\mathcal{G}(U) = 0, \quad (2.45)$$

où \mathcal{G} est donné par

$$\mathcal{G}(U) = (\mathbf{f} - (\alpha(p) - \alpha_0)\mathbf{u}, g, p_b, \mathbf{u}_0).$$

2.4.1 Estimation d'erreur en temps

On note $\mathbf{u}_{\tau}, p_{\tau}$ les fonctions continues affines sur $[t_{m-1}, t_m]$, $1 \leq m \leq M$, et égales à \mathbf{u}^m et p^m respectivement en temps $t = t_m$, $0 \leq m \leq M$. Pour toute fonction \mathbf{v} continue sur $[0, \tilde{T}]$, on introduit les fonctions $\pi_{\tau}^{-}\mathbf{v}$ et $\pi_{\tau}^{+}\mathbf{v}$ qui sont constantes et égales à $\mathbf{v}(t_{m-1})$ et à $\mathbf{v}(t_m)$ respectivement, sur tout $]t_{m-1}, t_m]$, $1 \leq m \leq M$, de plus cet opérateur vérifie,

$$\|\pi_{\tau}^{\pm}\mathbf{v}\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))} \leq c\|\mathbf{v}\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))} \quad \text{et} \quad \|\pi_{\tau}^{\pm}\mathbf{v}\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))} \leq |\tau|^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{v}\|_{C^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))}. \quad (2.46)$$

Soit \mathcal{T}_{τ} l'opérateur semi-discret : pour toutes données

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &\in C^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d), \quad g \in C^0(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\#})') \\ p_b &\in C^0(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\#})) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^d, \end{aligned}$$

la quantité $\mathcal{T}_\tau(\mathbf{f}, g, p_b, \mathbf{u}_0) = (\mathbf{u}_\tau, p_\tau)$ est associée à (\mathbf{u}^m, p^m) solution du problème

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^0 &= \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{pour tout } m, 1 \leq m \leq M, \\ p^m &= p_b^m \quad \text{sur } \Gamma_\star, \\ \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad & \int_{\Omega} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \tau_m \alpha_0 \int_{\Omega} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \tau_m b(\mathbf{v}, p^m) \\ &= \tau_m \int_{\Omega} \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u}^{m-1} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \forall q \in H_{(p)}^1(\Omega), \quad & b(\mathbf{u}^m, q) = \langle g^m, q \rangle_{\Gamma_\#}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

On pose

$$\mathbb{W} = \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)) \tag{2.48}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{W}} = \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)} + \|\cdot\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))}$. On prouve les trois propriétés de cet opérateur : la stabilité, l'estimation d'erreur a priori et la convergence.

Proposition 2.4.1 *Pour toute fonction $\mathbf{f} \in L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)$, l'opérateur \mathcal{T}_τ vérifie la propriété de stabilité suivante*

$$\|\mathcal{T}_\tau(\mathbf{f}, 0, 0, 0)\|_{\mathbb{W}} \leq c \|\pi_\tau^+ \mathbf{f}\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)}, \tag{2.49}$$

où c est une constante positive ne dépend que de α_0 .

Preuve. Posons $\mathbf{u}_0 = p_b = g = 0$. Le problème linéaire est un cas particulier du problème non linéaire, on en déduit la propriété de stabilité de (2.30) et (2.36) :

$$\|\mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\nabla p^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq c \sum_{j=0}^m \tau_j \|\mathbf{f}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2,$$

Proposition 2.4.2 *Pour toute donnée $(\mathbf{f}, g, p_b, \mathbf{u}_0)$ dans \mathbb{Z} ,*

$$\|\mathcal{T}_\tau(\mathbf{f}, g, p_b, \mathbf{u}_0)\|_{\mathbb{W}} \leq c |\tau|^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{T}(\mathbf{f}, g, p_b, \mathbf{u}_0)\|_{H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Preuve. Rappelons que \mathbf{w} est défini dans le paragraphe 2.2.2. On considère les problèmes elliptiques suivants, pour tout $t \in]t_{m-1}, t_m]$, $0 \leq m \leq M$,

$$(\partial_t \mathbf{u}_* + \alpha_0 \mathbf{u}_* + \nabla p_*) + (\partial_t \mathbf{w} + \alpha_0 \mathbf{w} + \nabla p_b) = \mathbf{f} \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

et

$$(\partial_t \mathbf{u}_{*\tau} + \alpha_0 \mathbf{u}_{*\tau} + \nabla p_{*\tau}) + (\partial_t \mathbf{w}_\tau + \alpha_0 \mathbf{w}_\tau + \nabla \pi_\tau^+ p_b) = \mathbf{f}(\cdot, t_m) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

On voit que, pour tout $t \in]t_{m-1}, t_m]$,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}_{*\tau} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \alpha_0 \int_{\Omega} \mathbf{u}_{*\tau} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}_*(\mathbf{x}, t_m) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \alpha_0 \int_{\Omega} \mathbf{u}_*(\mathbf{x}, t_m) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

On prend $\mathbf{v} = \mathbf{u}_{*\tau}$ dans cette dernière, on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_{*\tau}(\mathbf{x}, t))^2 d\mathbf{x} + \alpha_0 \|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ \leq \|\partial_t \mathbf{u}_*(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d} + \alpha_0 \|\mathbf{u}_*(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_{*\tau}(x, t))^2 d\mathbf{x} + \alpha_0 \|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq c (\|\partial_t \mathbf{u}_*(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}_*(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2).$$

On intègre de t_{m-1} à t_m on voit que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t_{m-1})\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_0 \|\mathbf{u}_{*\tau}\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; L^2(\Omega)^d)}^2 \\ \leq c\tau_m (\|\partial_t \mathbf{u}_*(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}_*(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2). \end{aligned}$$

Grâce à l'injection continue de $H^1(t_{m-1}, t_m)$ dans $\mathcal{C}^0(t_{m-1}, t_m)$, on obtient

$$\|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t_{m-1})\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_0 \|\mathbf{u}_{*\tau}\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; L^2(\Omega)^d)}^2 \leq c\tau_m \|\mathbf{u}_*\|_{H^1(t_{m-1}, t_m; L^2(\Omega)^d)}^2.$$

En sommant sur m ,

$$\|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_0 \sum_{m=1}^M \|\mathbf{u}_{*\tau}\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; L^2(\Omega)^d)}^2 \leq c \sum_{m=1}^M \tau_m \|\mathbf{u}_*\|_{H^1(t_{m-1}, t_m; L^2(\Omega)^d)}^2.$$

$$\|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_0 \|\mathbf{u}_{*\tau}\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)}^2 \leq c|\tau| \|\mathbf{u}_*\|_{H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)}^2 + \|\mathbf{u}_*(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \quad (2.50)$$

Similairement, on prend $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}_{*\tau}$, on obtient

$$\|\partial_t \mathbf{u}_{*\tau}\|_{L^2(0, \tilde{T}_m; L^2(\Omega)^d)}^2 + \alpha_0 \|\mathbf{u}_{*\tau}(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq c|\tau| \|\mathbf{u}_*\|_{H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)}^2 + \|\mathbf{u}_*(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \quad (2.51)$$

D'autre part, on a

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}_{*\tau} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \alpha_0 \int_{\Omega} \mathbf{u}_{*\tau} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + b(\mathbf{v}, p_{\tau}) = \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}(\cdot, t_m) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \alpha_0 \int_{\Omega} \mathbf{u}(\cdot, t_m) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + b(\mathbf{v}, p(\cdot, t_m)),$$

On choisit maintenant $\mathbf{v} = \nabla p_{\tau}$,

$$\begin{aligned} \|\nabla p_{\tau}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq c (\|\partial_t \mathbf{u}(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_0 \|\mathbf{u}(\cdot, t_m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ + \|p(\cdot, t_m)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\partial_t \mathbf{u}_{\tau}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_0 \|\mathbf{u}_{\tau}\|_{L^2(\Omega)^d}^2). \end{aligned}$$

Encore grâce à l'injection continue de $H^1(0, \tilde{T})$ dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T})$

$$\|\nabla p_{\tau}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{H^1(t_{m-1}, t_m; L^2(\Omega)^d)}^2 + \|p\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; H^1(\Omega))}^2 + \|\partial_t \mathbf{u}_{\tau}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_0 \|\mathbf{u}_{\tau}\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

Puis, on intègre de t_{m-1} au t_m et en sommant sur m , on en déduit,

$$\|\nabla p_\tau\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}^2 \leq c|\tau|(\|\mathbf{u}\|_{H^1(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}^2 + \|p\|_{L^2(0,t_m;H^1(\Omega))}^2) + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Ceci achève la démonstration.

Dans ce qui suit, on va estimer l'erreur due à la discrétisation en temps. On déduit l'équation de l'erreur en soustrayant (2.47) de (2.44) au temps $t = t_m$, tel que la solution \mathbf{e}^m est définie par $\mathbf{e}^m = \mathbf{u}(\cdot, t_m) - \mathbf{u}^m$, vérifiant $\mathbf{e}^0 = 0$ et pour tout m , $1 \leq m \leq M$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad & \int_{\Omega} \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \alpha_0 \tau_m \int_{\Omega} \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \tau_m b(\mathbf{v}, p(\cdot, t_m) - p^m) \\ & = \tau_m \int_{\Omega} \varepsilon^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{e}^{m-1} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\forall q \in H_{(p)}^1(\Omega), \quad b(\mathbf{e}^m, q) = 0,$$

où l'erreur de consistance ε^m est donnée par

$$\varepsilon^m = \frac{\mathbf{u}(\cdot, t_m) - \mathbf{u}(\cdot, t_{m-1})}{\tau_m} - \partial_t \mathbf{u}(\cdot, t_m). \quad (2.53)$$

On donne le lemme suivant qui majore l'erreur de consistance.

Lemme 2.4.3 *On suppose que la vitesse \mathbf{u} de la solution (\mathbf{u}, p) du problème (2.5) est dans $H^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)$, on a l'estimation suivante,*

$$\|\varepsilon^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \sqrt{\frac{\tau_m}{3}} \|\mathbf{u}\|_{H^2(t_{m-1}, t_m; L^2(\Omega)^d)}. \quad (2.54)$$

Preuve. On fait appel à la formule de Taylor

$$\mathbf{u}(\cdot, t_m) - \mathbf{u}(\cdot, t_{m-1}) = \tau_m (\partial_t \mathbf{u})(\cdot, t_m) - \int_{t_{m-1}}^{t_m} (t - t_{m-1}) \partial_{tt}^2 \mathbf{u}(\cdot, t) dt,$$

donc

$$\varepsilon^m = -\frac{1}{\tau_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} (t - t_{m-1}) \partial_{tt}^2 \mathbf{u}(\cdot, t) dt.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\varepsilon^m \leq \frac{\tau_m^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \left(\int_{t_{m-1}}^{t_m} (\partial_{tt}^2 \mathbf{u})^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En passant à la norme de $L^2(\Omega)^d$ on obtient

$$\|\varepsilon^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \frac{\tau_m}{3} \|\partial_{tt}^2 \mathbf{u}\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; L^2(\Omega)^d)}^2.$$

Ceci achève la démonstration.

Proposition 2.4.4 *On suppose que la vitesse \mathbf{u} de la solution (\mathbf{u}, p) du problème (2.5) est dans $H^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)$, alors on a l'estimation d'erreur suivante pour tout $1 \leq m \leq M$*

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t_m) - \mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0} |\tau| \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, t_m; L^2(\Omega)^d)}. \quad (2.55)$$

Preuve. Elle est similaire à la preuve de (2.30). On prend $\mathbf{v} = \mathbf{e}^m$ dans la première équation de (2.52), comme $p(\cdot, t_m) - p^m$ est dans $H^1_{(p)}(\Omega)$, on a

$$\|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{e}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{e}^m - \mathbf{e}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + 2\alpha_0\tau_m \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \tau_m \|\varepsilon^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

D'où

$$\|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=1}^m \tau_j \|\varepsilon^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \quad (2.56)$$

En insérant (2.54) dans (2.56), on obtient le résultat désiré.

On termine ce paragraphe, en estimant l'erreur de la dérivée en temps et de la pression.

Corollaire 2.4.5 *Si les hypothèses de la proposition précédente sont satisfaites, l'estimation d'erreur a priori est donnée pour tout $1 \leq m \leq M$ par*

$$\left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{(\mathbf{u}(\cdot, t_j) - \mathbf{u}^j) - (\mathbf{u}(\cdot, t_{j-1}) - \mathbf{u}^{j-1})}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} |\tau| \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, t_m; L^2(\Omega)^d)}, \quad (2.57)$$

$$\left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|\nabla(p(\cdot, t_j) - p^j)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |\tau| \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, t_m; L^2(\Omega)^d)}. \quad (2.58)$$

Preuve. Notant que $b(\mathbf{e}^m - \mathbf{e}^{m-1}, p(\cdot, t_m) - p^m) = 0$, pour tout $0 \leq m \leq M$, en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{e}^m - \mathbf{e}^{m-1}$ dans l'équation (2.52), on aura

$$\begin{aligned} 2\|\mathbf{e}^m - \mathbf{e}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_0\tau_m (\|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{e}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{e}^m - \mathbf{e}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2) \\ \leq \tau_m \|\varepsilon^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{e}^m - \mathbf{e}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

En sommant sur m , sachant que $\|\mathbf{e}^0\|_{L^2(\Omega)^d} = 0$, on obtient

$$\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\mathbf{e}^j - \mathbf{e}^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_0 \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha_0 \sum_{j=1}^m \|\mathbf{e}^j - \mathbf{e}^{j-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \sum_{j=1}^m \frac{\tau_j}{4} \|\varepsilon^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

L'inégalité (2.54) donne la première estimation. Pour obtenir la deuxième estimation, on prend $\mathbf{v} = \nabla(p(\cdot, t_m) - p^m)$ dans (2.52), on a donc

$$\tau_m \|\nabla(p(\cdot, t_m) - p^m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \tau_m \|\varepsilon^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla(p(\cdot, t_m) - p^m)\|_{L^2(\Omega)^d},$$

d'où

$$\sum_{j=1}^m \tau_j \|\nabla(p(\cdot, t_j) - p^j)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \sum_{j=0}^m \tau_j \|\varepsilon^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

Combinant avec (2.54), ceci achève la démonstration du corollaire.

Du Corollaire 2.4.5 et de la Proposition 2.4.4 on déduit l'estimation d'erreur a priori suivante :

Proposition 2.4.6 *Pour toute donnée $(\mathbf{f}, g, p_b, \mathbf{u}_0) \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_\tau)(\mathbf{f}, g, p_b, \mathbf{u}_0)\|_{\mathbb{W}} \leq c|\tau| \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)}. \quad (2.59)$$

Théorème 2.4.7 *Pour toute donnée $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)$, on a*

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_\tau)(\mathbf{f}, 0, 0, \mathbf{0})\|_{\mathbb{W}} = 0. \quad (2.60)$$

Preuve. Soit \mathbf{f} dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)$ associé à la solution (\mathbf{u}, p) . D'après la densité de $\mathcal{D}(0, \tilde{T})$ dans $H^1(0, \tilde{T})$, il existe une suite (\mathbf{u}_n, p_n) de $H^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ qui converge vers la solution (\mathbf{u}, p) dans \mathbb{W} :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \quad \forall n \geq n_0, \quad \|(\mathbf{u}, p) - (\mathbf{u}_n, p_n)\|_{\mathbb{W}} < \varepsilon. \quad (2.61)$$

Soit la suite des données $(\mathbf{f}_n)_n$ de $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)$ telle que $\mathbf{f}_n = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{u}_n, p_n)$. Il est clair que la suite $(\mathbf{f}_n)_n$ converge vers \mathbf{f} . En effectuant une inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_\tau)(\mathbf{f}, 0, 0, \mathbf{0})\|_{\mathbb{W}} &\leq \|\mathcal{T}(\mathbf{f}, 0, 0, \mathbf{0}) - (\mathbf{u}_n, p_n)\|_{\mathbb{W}} + \|(\mathbf{u}_n, p_n) - \mathcal{T}_\tau(\mathbf{f}_n, 0, 0, \mathbf{0})\|_{\mathbb{W}} \\ &\quad + \|\mathcal{T}_\tau(\mathbf{f} - \mathbf{f}_n, 0, 0, \mathbf{0})\|_{\mathbb{W}}. \end{aligned}$$

Grâce à (2.61), le premier terme converge vers 0. Le deuxième terme se majore par l'inégalité (2.59), Pour le dernier terme on utilise la stabilité de l'opérateur \mathcal{T}_τ et la convergence de la suite de données $(\mathbf{f}_n)_n$.

On déduit immédiatement du Théorème 2.4.7 le

Lemme 2.4.8 *Pour tout compact \mathcal{K} de $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)$,*

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sup_{\mathbf{f} \in \mathcal{K}} \|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_\tau)(\mathbf{f}, 0, 0, \mathbf{0})\|_{\mathbb{W}} = 0.$$

2.4.2 Estimation d'erreur en espace

Similairement, on note $\mathbf{u}_{N\tau}, p_{N\tau}$ les fonctions continues affines sur tout intervalle $[t_{m-1}, t_m]$, $1 \leq m \leq M$, et égales à \mathbf{u}_N^m, p_N^m respectivement au temps $t = t_m$, $0 \leq m \leq M$. Soit $\mathcal{T}_{N\tau}$ l'opérateur linéaire défini par : pour toutes données \mathbf{f}, p_b et g continues respectivement sur $\bar{\Omega} \times [0, \tilde{T}]$, $\bar{\Gamma}_* \times [0, \tilde{T}]$ et $\bar{\Gamma}_\# \times [0, \tilde{T}]$ et $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^d$, l'opérateur $\mathcal{T}_{N\tau}(\mathbf{f}, g, p_b, \mathbf{u}_0) = (\mathbf{u}_{N\tau}, p_{N\tau})$ associe à (\mathbf{u}_N^m, p_N^m) solution

du problème

$$\begin{aligned}
p_N^m &= i_N^{\Gamma_\star} p_b^m \quad \text{sur } \Gamma_\star, \\
\forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad & (\mathbf{u}_N^m, \mathbf{v}_N)_N + \tau_m \alpha_0 (\mathbf{u}_N^m, \mathbf{v}_N)_N + \tau_m b_N(\mathbf{v}_N, p_N^m) \\
&= \tau_m \int_{\Omega} \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v}_N \, d\mathbf{x} + (\mathbf{u}_N^{m-1}, \mathbf{v}_N)_N, \\
\forall q_N \in \mathbb{Y}_N^{(p)}, \quad & b_N(\mathbf{u}_N^m, q_N) = \langle g_N^m, q_N \rangle_{\Gamma_\sharp}.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

On note $U_{N\tau} = (\mathbf{u}_{N\tau}, p_{N\tau})$. On voit que le problème (2.38) est équivalent à

$$\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}) = U_{N\tau} - \mathcal{T}_{N\tau} \mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}) = 0, \tag{2.63}$$

où $\mathcal{G}_{N\tau}$ se définit par les composants $\mathcal{G}_{N\tau}^1$, $\mathcal{G}_{N\tau}^2$, $\mathcal{G}_{N\tau}^3$ et $\mathcal{G}_{N\tau}^4$ qui sont donnés par

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{G}_{N\tau}^1(U_{N\tau}), V_N \rangle &= (\mathbf{f} - (\alpha(\pi_\tau^- p_N) - \alpha_0) \mathbf{u}_{N\tau}, \mathbf{v}_N)_N, \\
\langle \mathcal{G}_{N\tau}^2(U_{N\tau}), V_N \rangle &= (g, q_N)_{N^{\Gamma_\sharp}}, \\
\mathcal{G}_{N\tau}^3(U_{M\tau}) &= p_b \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{N\tau}^4(U_{N\tau}) = \mathbf{u}_0.
\end{aligned}$$

Pour simplifier, on introduit l'espace discret $\mathbb{W}_{N\tau}$ des fonctions affines sur tout intervalle $[t_{m-1}, t_m]$, $1 \leq m \leq M$, et telles que leurs valeurs sont dans $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$. Cet espace est de dimension finie et inclus dans l'espace \mathbb{W} défini en (2.48).

Théorème 2.4.9 *Pour toute fonction continue \mathbf{f} sur $\bar{\Omega}$,*

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_{N\tau}(\mathbf{f}, g, p_b, \mathbf{u}_0)\|_{\mathbb{W}} &\leq c(\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\pi_\tau^+ \mathbf{f}\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)} \\
&\quad + \|\pi_\tau^+(i_N^{\Gamma_\star} p_b)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))} + \|\pi_\tau^+(i_N^{\Gamma_\sharp} g)\|_{C^0(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)')}).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Preuve. On pose $\mathbf{u}_{*N}^m = \mathbf{u}_N^m - \mathbf{w}_N^m$ et $p_{*N}^m = p_N^m - p_{bN}^m$ tels que \mathbf{w}_N^m et p_{bN}^m sont donnés dans la Section 2.3.2. Ce changement de variables nous donne

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{v}_N \in \mathbf{V}_N(\Omega), \\
(\mathbf{u}_{*N}^m, \mathbf{v}_N)_N + \alpha_0 \tau_m (\mathbf{u}_{*N}^m, \mathbf{v}_N)_N &= (\mathbf{u}_{*N}^{m-1}, \mathbf{v}_N)_N + \tau_m (\mathbf{f}^m, \mathbf{v}_N)_N - \tau_m b_N(\mathbf{v}_N, \mathcal{I}_N p_b^m).
\end{aligned} \tag{2.65}$$

où la solution vitesse vérifie

$$\|\mathbf{u}_{*N}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq c \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{f}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_{bN}^j\|_{H^1(\Omega)}^2 \right),$$

et donc

$$\|\mathbf{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq c \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{f}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_{bN}^j\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|i_N^{\Gamma_\sharp} g^m\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)'}^2 \right).$$

D'autre part, la solution pression vérifie

$$\sum_{j=1}^m \tau_j \|p_{bN}^j\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{f}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_{bN}^j\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|i_N^{\Gamma_\sharp} g^m\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)'}^2 \right).$$

On conclut en combinant ces dernières majorations.

On est en mesure d'estimer l'erreur due à la discrétisation en espace.

Proposition 2.4.10 *Pour tout entier $N \geq 2$, on suppose la solution (\mathbf{u}^m, p^m) du problème (2.47), dans $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$, pour tout $s \geq 1$ et la donnée p_b dans $H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)$ pour tout $\sigma > \frac{d-2}{2}$. Alors, la solution $(\mathbf{u}_{N\tau}, p_{N\tau})$ du problème discret (2.62) vérifie la majoration d'erreur suivante,*

$$\|\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_{N\tau}\|_{C^0(0, \bar{T}; L^2(\Omega)^d)} \leq cN^{-s} \|\mathbf{u}_\tau\|_{H^1(0, \bar{T}; H^s(\Omega)^d)} + cN^{-\sigma} \|\pi_\tau^+ p_b\|_{L^2(0, \bar{T}; H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))}. \quad (2.66)$$

Preuve. Pour majorer l'erreur entre \mathbf{u}^m et \mathbf{u}_N^m on introduit l'espace \mathbb{X}_N^g des fonctions de \mathbb{X}_N égales à $i_N^\Gamma g$ sur $\Gamma_\#$. Considérons la fonction \mathbf{v}_N^m dans \mathbb{X}_N^g , on remarque que $\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m$ est dans $\mathbf{V}_N(\Omega)$. On vérifie de (2.62),

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) - (\mathbf{u}_N^{m-1} - \mathbf{v}_N^{m-1})}{\tau_m}, \mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m \right)_N + \alpha_0 \|\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m\|_N^2 + b_N(\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m, p_N^m) \\ &= \int_\Omega \mathbf{f}^m \cdot (\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) d\mathbf{x} - \left(\frac{\mathbf{v}_N^m - \mathbf{v}_N^{m-1}}{\tau_m}, \mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m \right)_N - \alpha_0 (\mathbf{v}_N^m, \mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m)_N, \end{aligned}$$

on retranche de deux côtés $b_N(\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m, p_{bN}^m)$, on voit que $b_N(\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m, p_N^m - p_{bN}^m) = 0$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau_m} (\|\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m\|_N^2 - \|\mathbf{u}_N^{m-1} - \mathbf{v}_N^{m-1}\|_N^2 + \|(\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) - (\mathbf{u}_N^{m-1} - \mathbf{v}_N^{m-1})\|_N^2) \\ &+ \alpha_0 \|\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m\|_N^2 = \int_\Omega \mathbf{f}^m \cdot (\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) d\mathbf{x} - \left(\frac{\mathbf{v}_N^m - \mathbf{v}_N^{m-1}}{\tau_m}, \mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m \right)_N \\ &- \alpha_0 (\mathbf{v}_N^m, \mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m)_N - b_N(\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m, p_{bN}^m) \end{aligned}$$

Insérons la troisième ligne de (2.47) dans cette dernière équation, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau_m} (\|\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m\|_N^2 - \|\mathbf{u}_N^{m-1} - \mathbf{v}_N^{m-1}\|_N^2 + \|(\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) - (\mathbf{u}_N^{m-1} - \mathbf{v}_N^{m-1})\|_N^2) + \alpha_0 \|\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m\|_N^2 \\ &= \int_\Omega \frac{(\mathbf{u}^m - \mathbf{v}_N^m) - (\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{v}_N^{m-1})}{\tau_m} \cdot (\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) d\mathbf{x} + \alpha_0 \int_\Omega (\mathbf{u}^m - \mathbf{v}_N^m) \cdot (\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) d\mathbf{x} \\ &+ \int_\Omega \frac{\mathbf{v}_N^m - \mathbf{v}_N^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) d\mathbf{x} - \left(\frac{\mathbf{v}_N^m - \mathbf{v}_N^{m-1}}{\tau_m}, \mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m \right)_N \\ &+ \alpha_0 \left(\int_\Omega \mathbf{v}_N^m \cdot (\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) d\mathbf{x} - (\mathbf{v}_N^m, \mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m)_N \right) + \left(b(\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m, p_b^m) - b_N(\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m, p_{bN}^m) \right). \end{aligned}$$

L'évaluation des trois derniers termes est similaire, pour cela il suffit d'estimer le premier, on déduit de la propriété d'exactitude de la formule de Gauss-Lobatto

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \frac{\mathbf{v}_N^m - \mathbf{v}_N^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) d\mathbf{x} - \left(\frac{\mathbf{v}_N^m - \mathbf{v}_N^{m-1}}{\tau_m}, \mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m \right)_N \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\mathbf{v}_N^m - \mathbf{v}_N^{m-1}}{\tau_m} - \mathcal{I}_{N-1} \left(\frac{\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}}{\tau_m} \right) \right) \cdot (\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) d\mathbf{x} \\ &- \left(\frac{\mathbf{v}_N^m - \mathbf{v}_N^{m-1}}{\tau_m} - \mathcal{I}_{N-1} \left(\frac{\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}}{\tau_m} \right), \mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m \right)_N. \end{aligned}$$

Combinons ceci avec (1.14) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ceci entraîne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{v}_N^m - \mathbf{v}_N^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) d\mathbf{x} - \left(\frac{\mathbf{v}_N^m - \mathbf{v}_N^{m-1}}{\tau_m}, \mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m \right)_N \\ \leq c \left(\left\| \frac{(\mathbf{u}^m - \mathbf{v}_N^m) - (\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{v}_N^{m-1})}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)^d} \right. \\ \left. + \left\| \frac{(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}) - \mathcal{I}_{N-1}(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1})}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)^d} \right) \|\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

On obtient donc la majoration,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_m} (\|\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m\|_N^2 - \|\mathbf{u}_N^{m-1} - \mathbf{v}_N^{m-1}\|_N^2 + \|(\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m) - (\mathbf{u}_N^{m-1} - \mathbf{v}_N^{m-1})\|_N^2) + \alpha_0 \|\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m\|_N^2 \\ \leq c \left(\left\| \frac{(\mathbf{u}^m - \mathbf{v}_N^m) - (\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{v}_N^{m-1})}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \left\| \frac{(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}) - \mathcal{I}_{N-1}(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1})}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\ \left. + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}^{m-1} - \mathcal{I}_{N-1}\mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|p_b^m - \mathcal{I}_{N-1}p_b^m\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p_b^m - p_{bN}^m\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Puis on multiplie par τ_m et en sommant de 1 à m , on en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m\|_N^2 - \|\mathbf{u}_N^0 - \mathbf{v}_N^0\|_N^2 + \sum_{j=1}^m \|(\mathbf{u}^j - \mathbf{v}_N^j) - (\mathbf{u}^{j-1} - \mathbf{v}_N^{j-1})\|_N^2 + \alpha_0 \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}_N^j - \mathbf{v}_N^j\|_N^2 \\ \leq c \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{(\mathbf{u}^j - \mathbf{v}_N^j) - (\mathbf{u}^{j-1} - \mathbf{v}_N^{j-1})}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{(\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}) - \mathcal{I}_{N-1}(\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1})}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^m \tau_j (\|\mathbf{u}^j - \mathbf{v}_N^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}^j - \mathcal{I}_{N-1}\mathbf{u}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2) + \sum_{j=1}^m \tau_j (\|p_b^j - \mathcal{I}_{N-1}p_b^j\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p_b^j - p_{bN}^j\|_{H^1(\Omega)}^2) \right). \end{aligned}$$

On voit donc que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_N^m - \mathbf{v}_N^m\|_N^2 + \alpha_0 \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}_N^j - \mathbf{v}_N^j\|_N^2 \\ \leq \|\mathbf{u}_N^0 - \mathbf{v}_N^0\|_N^2 + c \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{(\mathbf{u}^j - \mathbf{v}_N^j) - (\mathbf{u}^{j-1} - \mathbf{v}_N^{j-1})}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j - \mathbf{v}_N^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{(\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}) - \mathcal{I}_{N-1}(\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1})}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j - \mathcal{I}_{N-1}\mathbf{u}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j - \mathcal{I}_{N-1}p_b^j\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j - p_{bN}^j\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire implique, d'une part

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 &\leq c \inf_{\mathbf{v}_N^j \in \mathbb{X}_N^g} \left(\|\mathbf{u}^m - \mathbf{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}_N^0 - \mathbf{v}_N^0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{(\mathbf{u}^j - \mathbf{v}_N^j) - (\mathbf{u}^{j-1} - \mathbf{v}_N^{j-1})}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j - \mathbf{v}_N^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \left. + c' \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1} - \mathcal{I}_{N-1}(\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1})}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j - \mathcal{I}_{N-1}\mathbf{u}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j - \mathcal{I}_{N-1}p_b^j\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j - p_{bN}^j\|_{H^1(\Omega)}^2 \right), \right.
 \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j - \mathbf{u}_N^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 &\leq c \inf_{\mathbf{v}_N^j \in \mathbb{X}_N^g} \left(\|\mathbf{u}_N^0 - \mathbf{v}_N^0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \left\| \frac{(\mathbf{u}^j - \mathbf{v}_N^j) - (\mathbf{u}^{j-1} - \mathbf{v}_N^{j-1})}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j - \mathbf{v}_N^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \left. + c' \left(\sum_{j=1}^m \left\| \frac{\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1} - \mathcal{I}_{N-1}(\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1})}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j - \mathcal{I}_{N-1}\mathbf{u}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j - \mathcal{I}_{N-1}p_b^j\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j - p_{bN}^j\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \right.
 \end{aligned}$$

Comme la trace de $\mathcal{I}_N \mathbf{u}^m$ sur Γ_{\sharp} est l'image de la trace de \mathbf{u}^m par l'opérateur $i_N^{\Gamma_{\sharp}}$, (voir [22, Chap. V]) $\mathcal{I}_N \mathbf{u}^m$ est dans \mathbb{X}_N^g et on a

$$\inf_{\mathbf{v}_N^m \in \mathbb{X}_N^g} \|\mathbf{u}^m - \mathbf{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\mathbf{u}^m - \mathcal{I}_N \mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d},$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq cN^{-s} \left(\|\mathbf{u}^m\|_{H^s(\Omega)^d} + \left(\|\mathbf{u}^0\|_{H^s(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j\|_{H^s(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + cN^{-s} \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{H^s(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + cN^{-\sigma} \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq cN^{-s} \left(\|\mathbf{u}^m\|_{H^s(\Omega)^d} + \left(\sum_{j=0}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j\|_{H^s(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad + cN^{-s} \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{H^s(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + cN^{-\sigma} \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j - \mathbf{u}_N^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq cN^{-s} \left(\sum_{j=0}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j\|_{H^s(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ cN^{-s} \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{H^s(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + cN^{-\sigma} \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_*)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

ce qui termine la démonstration.

Proposition 2.4.11 *Sous les hypothèses de la proposition précédente, la solution du problème (2.62), (\mathbf{u}_N^m, p_N^m) vérifie la majoration d'erreur suivante, pour tout $1 \leq m \leq M$*

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{(\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}) - (\mathbf{u}_N^j - \mathbf{u}_N^{j-1})}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq cN^{-s} \left\{ \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{H^s(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=0}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j\|_{H^s(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} + cN^{-\sigma} \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_*)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Preuve. Soit $\mathbf{v}_N^m \in \mathbb{X}_N^g$ pour tout m , $0 \leq m \leq M$, on note $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}$, $\delta \mathbf{u}_N = \mathbf{u}_N^m - \mathbf{u}_N^{m-1}$ et $\delta \mathbf{v}_N = \mathbf{v}_N^m - \mathbf{v}_N^{m-1}$. On remarque que $\delta \mathbf{v}_N$ est dans \mathbb{X}_N^g , alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_m} \|\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N\|_N^2 &= \frac{1}{\tau_m} \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{v}_N) \cdot (\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N) d\mathbf{x} \\ &+ \alpha_0 \tau_m \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}^m \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N}{\tau_m} d\mathbf{x} - \left(\mathbf{u}_N^m, \frac{\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N}{\tau_m} \right)_N \right) \\ &+ \frac{1}{\tau_m} \left(\int_{\Omega} \delta \mathbf{v}_N \cdot (\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N) d\mathbf{x} - (\delta \mathbf{v}_N, \delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N)_N \right) \\ &+ \tau_m \left(b \left(\frac{\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N}{\tau_m}, p_b^m \right) - b_N \left(\frac{\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N}{\tau_m}, p_{bN}^m \right) \right), \end{aligned}$$

Grâce à l'exactitude de la formule de quadrature on a

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \mathbf{u}^m \cdot \frac{\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N}{\tau_m} d\mathbf{x} - \left(\mathbf{u}_N^m, \frac{\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N}{\tau_m} \right)_N \\ &\leq c \left(\|\mathbf{u}^m - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d} \right) \left\| \frac{\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \delta \mathbf{v}_N \cdot (\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N) d\mathbf{x} - (\delta \mathbf{v}_N, \delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N)_N \\ &\leq c \left(\|\delta \mathbf{u} - \mathcal{I}_{N-1} \delta \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \right) \|\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Le dernier terme se majore pour tout q_{N-1} dans \mathbb{Y}_{N-1} par

$$\begin{aligned} &b \left(\frac{\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N}{\tau_m}, p_b^m \right) - b_N \left(\frac{\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N}{\tau_m}, p_{bN}^m \right) \\ &\leq c \left(\|p_b^m - p_{bN}^m\|_{H^1(\Omega)} + \|p_b^m - q_{N-1}\|_{H^1(\Omega)} \right) \left\| \frac{\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

On insère ces estimations et on utilise la formule de Young, on voit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_m} \|\delta \mathbf{u}_N - \delta \mathbf{v}_N\|_N^2 &\leq c \left(\frac{1}{\tau_m} \|\delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau_m \|\mathbf{u}^m - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\ &\quad + \tau_m \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{\tau_m} \|\delta \mathbf{u} - \mathcal{I}_{N-1} \delta \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ &\quad \left. + \tau_m \|p_b^m - p_{bN}^m\|_{H^1(\Omega)}^2 + \tau_m \|p_b^m - q_{N-1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

On somme sur les m , et on choisit q_{N-1} égal à l'image de p_b^m par l'opérateur de projection orthogonale de $H^1(\Omega)$ sur \mathbb{Y}_N

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{u}_N}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ &\leq cN^{-2s} \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{H^s(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=0}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j\|_{H^s(\Omega)^d}^2 \right) + cN^{-2\sigma} \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_*)}^2. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Proposition 2.4.12 *Sous les hypothèses de la Proposition 2.4.10, pour le problème (2.62), on a la majoration d'erreur*

$$\begin{aligned} &\|p_\tau - p_{\tau N}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \\ &\leq cN^{-s} (\|\mathbf{u}_\tau\|_{H^1(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d)} + \|p_\tau\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))}) + cN^{-\sigma} \|\pi_\tau^+ p_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_*))}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Preuve. Pour évaluer l'erreur sur la pression, on prend $\mathbf{v}_N = \nabla(p_N^m - q_N^m)$ dans (2.62), on voit que

$$\begin{aligned} \|p_N^m - q_N^m\|_N^2 &= \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}}{\tau_m} \cdot \nabla(p_N^m - q_N^m) d\mathbf{x} - \left(\frac{\mathbf{u}_N^m - \mathbf{u}_N^{m-1}}{\tau_m}, \nabla(p_N^m - q_N^m) \right)_N \\ &\quad + b(\nabla(p_N^m - q_N^m), p_N^m - q_N^m) + b(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m) - b_N(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m) \\ &\quad + \alpha_0 \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}^m \cdot \nabla(p_N^m - q_N^m) d\mathbf{x} - (\mathbf{u}_N^m, \nabla(p_N^m - q_N^m))_N \right). \end{aligned}$$

Grâce à l'exactitude de la propriété de la formule de Gauss-Lobatto

$$\begin{aligned} \tau_m \|\nabla(p_N^m - q_N^m)\|_N^2 &\leq c \left(\tau_m \left\| \frac{(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}) - (\mathbf{u}_N^m - \mathbf{u}_N^{m-1})}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\ &\quad + \tau_m \left\| \frac{\mathbf{u}_N^m - \mathbf{u}_N^{m-1}}{\tau_m} - \mathcal{I}_{N-1} \left(\frac{\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}}{\tau_m} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ &\quad + \tau_m \|\mathbf{u}^m - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau_m \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\ &\quad \left. + \tau_m \|\nabla(p^m - q_N^m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau_m \|\nabla(p^m - \mathcal{I}_{N-1} p^m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right). \end{aligned}$$

En sommant sur m et combinant avec (2.68) et (2.70) on déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \tau_j \|p^j - p_N^j\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq c \left(N^{-2s} \left(\sum_{j=0}^m \tau_j \|\mathbf{u}^j\|_{H^s(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{H^s(\Omega)^d}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^m \tau_j \|p^j\|_{H^{s+1}(\Omega)}^2 \right) + N^{-2\sigma} \sum_{j=1}^m \tau_j \|p_b^j\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_*)}^2 \right). \end{aligned}$$

Ceci donne l'estimation désirée. Les Propositions 2.4.10 et 2.4.12 permettent de conclure.

Corollaire 2.4.13 *Pour toutes données \mathbf{f}, g et p_b dans $L^2(\Omega)^d \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\#})' \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})$, on a*

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{T}_{\tau} - \mathcal{T}_{N\tau})(\mathbf{f}, g, p_b, \mathbf{u}_0)\|_{\mathbb{W}} \\ & \leq cN^{-s} \|\mathcal{T}_{\tau}(\mathbf{f}, g, p_b, \mathbf{u}_0)\|_{H^1(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))} + cN^{-\sigma} \|\pi_{\tau}^{+} p_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star}))}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Du Théorème 2.4.9 et Corollaire 2.4.13, on déduit le théorème de convergence.

Théorème 2.4.14 *Pour toute donnée \mathbf{f} continue sur $[0, \tilde{T}] \times \bar{\Omega}$, on a pour tout $\tau \geq 0$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(\mathcal{T}_{\tau} - \mathcal{T}_{N\tau})(\mathbf{f}, 0, 0, \mathbf{0})\|_{\mathbb{W}} = 0. \quad (2.73)$$

2.4.3 Lemmes techniques

Pour appliquer le théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart, on définit une approximation $U_{N\tau}^{\diamond}$ égale à $(\mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}, p_{N\tau}^{\diamond})$ de U dans $\mathbb{W}_{N\tau}$, (on réfère à [20, Th. 7.4] pour l'existence de cette approximation), qui vérifie pour tout $\ell \leq s$ et $s > \frac{1}{2}$, pour tout t , $0 \leq t \leq \tilde{T}$,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}(\cdot, t)\|_{H^{\ell}(\Omega)^d} \leq cN^{\ell-s} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^s(\Omega)^d}, \quad (2.74)$$

$$\|p(\cdot, t) - p_{N\tau}^{\diamond}(\cdot, t)\|_{H^{\ell+1}(\Omega)} \leq cN^{\ell-s} \|p(\cdot, t)\|_{H^{s+1}(\Omega)}. \quad (2.75)$$

On fait désormais les hypothèses suivantes.

Hypothèse 2.4.15 *La solution $U = (\mathbf{u}, p)$ du problème (2.5)-(2.6)-(2.7)*

(i) *appartient à $H^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d) \times H^1(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))$ pour tout $s > 0$ en dimension $d = 2$ et $s > 1$ en dimension $d = 3$,*

(ii) *est telle que $D\mathcal{F}(U)$ soit un isomorphisme de $H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$.*

On note \mathcal{E} l'ensemble des endomorphismes de \mathbb{W} . L'opérateur $\mathcal{F}_{N\tau}$ est parfaitement défini par (2.63). On commence par prouver une propriété d'isomorphisme pour la différentielle de cet opérateur.

Lemme 2.4.16 *Si la fonction $\alpha(\cdot)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et ses dérivées sont bornées, il existe un entier et un réel positifs N_0, τ_0 tels que, pour tout $N \geq N_0$ et $\tau \leq \tau_0$, l'opérateur $D\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^{\diamond})$ est un isomorphisme de $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$. De plus, la norme de son inverse est bornée indépendamment de N et τ .*

Preuve. On voit que :

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^{\diamond}) &= D\mathcal{F}(U) - (\mathcal{T} - \mathcal{T}_{N\tau})D\mathcal{G}(U) \\ &\quad - \mathcal{T}_{N\tau}(D\mathcal{G}(U) - D\mathcal{G}(U_{N\tau}^{\diamond})) - \mathcal{T}_{N\tau}(D\mathcal{G}(U_{N\tau}^{\diamond}) - D\mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}^{\diamond})). \end{aligned}$$

D'après (ii) de l'Hypothèse 2.4.15, il suffit de voir que les trois derniers termes tendent vers 0 quand $\tau \rightarrow 0$ et $N \rightarrow \infty$. Soit $W_{N\tau} = (\mathbf{w}_{N\tau}, r_{N\tau})$ un élément de la sphère unité de $\mathbb{W}_{N\tau}$.

1. On voit que

$$D\mathcal{G}(U) \cdot W_{N\tau} = (-\alpha(p) - \alpha_0)\mathbf{w}_{N\tau} - \alpha'(p)r_{N\tau}\mathbf{u}, 0, 0, \mathbf{0}.$$

D'après le Théorème 1.1' de [27], la fonction $p \mapsto \alpha(p)$ est continue sur $H^{s+1}(\Omega)$ dans lui-même, et donc dans un sous-espace de $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))$. Comme $\mathbf{w}_{N\tau}$ est borné dans $L^2(\Omega)^d$, la quantité $(\alpha(p) - \alpha_0)\mathbf{w}_{N\tau}$ appartient à un sous-espace de dimension finie et est bornée dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)$. Similairement, de l'Hypothèse 2.4.15, $\mathbf{u} \in L^\rho(\Omega)^d$, avec $\rho > 2$ en dimension $d = 2$ et $\rho > 3$ en dimension $d = 3$. D'autre part, posons $\frac{1}{\rho} = \frac{1-s}{2}$, tel que $H^s(\Omega)$ s'injecte dans $L^\rho(\Omega)$ et $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{2}$, puis on utilise l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^{\rho'}(\Omega)$ pour déduire que $\alpha'(p)r_{N\tau}\mathbf{u}$ appartient à un sous-espace compact de $L^2(\Omega)^d$. Grâce à l'expansion : $\mathcal{T} - \mathcal{T}_{N\tau} = (\mathcal{T} - \mathcal{T}_\tau) + (\mathcal{T}_\tau - \mathcal{T}_{N\tau})$, la convergence du premier terme est une conséquence de (2.60) et (2.73).

2. On définit les quantités

$$\begin{aligned} \langle D\mathcal{G}(U) \cdot W_{N\tau}, Z \rangle &= - \int_{\Omega} (\alpha(p) - \alpha_0)\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \alpha'(p)r_{N\tau}\mathbf{u} \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{x}, \\ \langle D\mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}^\diamond) \cdot W_{N\tau}, Z_N \rangle &= (-\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha_0)\mathbf{w}_{N\tau}, z_N)_N - (\alpha'(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond)r_{N\tau}\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{z}_N)_N. \end{aligned}$$

On voit que

$$\begin{aligned} \langle (D\mathcal{G}(U) - D\mathcal{G}(U_{N\tau}^\diamond)) \cdot W_{N\tau}, Z \rangle &= - \int_{\Omega} (\alpha(p) - \alpha(p_{N\tau}^\diamond))\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} (\alpha'(p) - \alpha'(p_{N\tau}^\diamond))r_{N\tau}\mathbf{u} \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \alpha'(p_{N\tau}^\diamond)r_{N\tau}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond) \cdot \mathbf{z} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

De la propriété de Lipschitz de $\alpha(\cdot)$ et $\alpha'(\cdot)$, combiné avec l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^{\rho'}(\Omega)$, on voit que

$$\begin{aligned} \langle (D\mathcal{G}(U) - D\mathcal{G}(U_{N\tau}^\diamond)) \cdot W_{N\tau}, Z \rangle &\leq c(\|p - p_{N\tau}^\diamond\|_{H^1(\Omega)}\|\mathbf{w}_{N\tau}\|_{L^\rho(\Omega)^d} \\ &\quad + \|p - p_{N\tau}^\diamond\|_{H^1(\Omega)}\|r_{N\tau}\mathbf{u}\|_{L^\rho(\Omega)^d} + \|r_{N\tau}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond\|_{L^2(\Omega)^d})\|\mathbf{z}\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Comme $(\mathbf{w}_{N\tau}, r_{N\tau})$ est borné dans $L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$ et on sait que $H^{1+\frac{s}{2}}(\Omega)$ s'injecte dans $L^\infty(\Omega)$, grâce à (2.64), (2.74) et (2.75), on déduit que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}_{N\tau}(D\mathcal{G}(U) - D\mathcal{G}(U_{N\tau}^\diamond))\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

3. Finalement, on montre la convergence du dernier terme, on voit que

$$\begin{aligned} \langle (D\mathcal{G}(U_{N\tau}^\diamond) - D\mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}^\diamond)) \cdot W_{N\tau}, Z_N \rangle &= \alpha_0 \left(\int_{\Omega} \mathbf{w}_{N\tau} \cdot \mathbf{z}_N \, d\mathbf{x} - (\mathbf{w}_{N\tau}, \mathbf{z}_N)_N \right) \\ &\quad - \int_{\Omega} \alpha(p_{N\tau}^\diamond)\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \mathbf{z}_N \, d\mathbf{x} + (\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond)\mathbf{w}_{N\tau}, \mathbf{z}_N)_N \\ &\quad - \int_{\Omega} \alpha'(p_{N\tau}^\diamond)r_{N\tau}\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond \cdot \mathbf{z}_N \, d\mathbf{x} + (\alpha'(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond)r_{N\tau}\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{z}_N)_N. \end{aligned}$$

Les arguments d'évaluation des trois termes sont similaires, pour cela on considère le troisième terme parce qu'il est le plus compliqué. On choisit N^* égale à la partie entière de $\frac{N-1}{3}$ et on introduit des approximations $\beta_{N^*\tau}$ de $\alpha'(p)$, $r_{N^*\tau}$ de $r_{N\tau}$ et $\mathbf{v}_{N^*\tau}$ de \mathbf{u} . D'après l'exactitude de la formule de quadrature, on a

$$\int_{\Omega} \beta_{N^*\tau} r_{N^*\tau} \mathbf{v}_{N^*\tau} \cdot \mathbf{z}_N \, d\mathbf{x} = (\beta_{N^*\tau} r_{N^*\tau} \mathbf{v}_{N^*\tau}, \mathbf{z}_N)_N.$$

On voit que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha'(p_{N\tau}^{\diamond}) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond} \cdot \mathbf{z}_N \, d\mathbf{x} - (\alpha'(\pi_{\tau}^- p_{N\tau}^{\diamond}) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}, \mathbf{z}_N)_N \\ & \leq (\|\alpha'(p_{N\tau}^{\diamond}) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond} - \beta_{N^*\tau} r_{N^*\tau} \mathbf{v}_{N^*\tau}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \quad + 3^d \|\mathcal{I}_N(\alpha'(\pi_{\tau}^- p_{N\tau}^{\diamond}) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond} - \beta_{N^*\tau} r_{N^*\tau} \mathbf{v}_{N^*\tau})\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Puis, on utilise l'inégalité triangulaire et la stabilité de l'opérateur \mathcal{I}_N [21, Rem. 13.5],

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha'(p_{N\tau}^{\diamond}) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond} \cdot \mathbf{z}_N \, d\mathbf{x} - (\alpha'(\pi_{\tau}^- p_{N\tau}^{\diamond}) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}, \mathbf{z}_N)_N \\ & \leq c \{ (\|\alpha'(p_{N\tau}^{\diamond}) - \beta_{N^*\tau}\|_{L^{\rho}(\Omega)} + \|\alpha'(\pi_{\tau}^- p_{N\tau}^{\diamond}) - \beta_{N^*\tau}\|_{L^{\rho}(\Omega)}) \|r_{N\tau}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}\|_{L^{\rho'}(\Omega)^d} \\ & \quad + \|r_{N\tau} - r_{N^*\tau}\|_{L^{\rho}(\Omega)} \|\beta_{N^*\tau}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}\|_{L^{\rho'}(\Omega)^d} \\ & \quad + \|\mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond} - \mathbf{v}_{N^*\tau}\|_{L^{\rho'}(\Omega)^d} \|\beta_{N^*\tau}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|r_{N^*\tau}\|_{L^{\rho}(\Omega)} \} \|\mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Grâce à l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, $q > 0$, en dimension $d = 2$ et dans $L^6(\Omega)$ en dimension $d = 3$ ainsi le fait que $\beta_{N^*\tau}$, $r_{N^*\tau}$ et $\mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}$ sont bornés, on arrive à

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha'(p_{N\tau}^{\diamond}) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond} \cdot \mathbf{z}_N \, d\mathbf{x} - (\alpha'(\pi_{\tau}^- p_{N\tau}^{\diamond}) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}, \mathbf{z}_N)_N \\ & \leq c (\|\alpha'(p_{N\tau}^{\diamond}) - \alpha'(\pi_{\tau}^- p_{N\tau}^{\diamond})\|_{H^1(\Omega)} + \|\alpha'(p) - \alpha'(p_{N\tau}^{\diamond})\|_{H^1(\Omega)} + \|\alpha'(p) - \beta_{N^*\tau}\|_{H^1(\Omega)} \\ & \quad + \|r_{N\tau} - r_{N^*\tau}\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond} - \mathbf{v}_{N^*\tau}\|_{H^1(\Omega)^d}) \|\mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Évaluons le premier terme, la propriété de Lipschitz de α' donne

$$\begin{aligned} \|\alpha'(p_{N\tau}^{\diamond}) - \alpha'(\pi_{\tau}^- p_{N\tau}^{\diamond})\|_{L^2(0, \bar{t}; H^1(\Omega))} & \leq c \|p_{N\tau}^{\diamond} - \pi_{\tau}^- p_{N\tau}^{\diamond}\|_{L^2(0, \bar{t}; H^1(\Omega))} = c \left(\sum_{m=1}^M \frac{\tau_m}{3} \|p_N^{\diamond m} - p_N^{\diamond m-1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq c \left(\sum_{m=1}^M \frac{\tau_m}{3} \|p(\cdot, t_m) - p_N^{\diamond m}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{m=1}^M \frac{\tau_m}{3} \|p(\cdot, t_{m-1}) - p_N^{\diamond m-1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + \left(\sum_{m=1}^M \frac{\tau_m}{3} \|p(\cdot, t_m) - p(\cdot, t_{m-1})\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Le premier et le deuxième termes de cette dernière inégalité sont majorés par (2.75). De plus,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=1}^M \tau_m \|p(\cdot, t_m) - p(\cdot, t_{m-1})\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{m=1}^M \tau_m^3 \|\partial_t p(\cdot, t_m)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\tau| \|p\|_{H^1(0, \bar{T}; H^1(\Omega))}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Revenons à (2.76), la convergence de deuxième terme découle de la propriété de Lipschitz de α' combinée avec (2.75). Pour montrer la convergence des trois derniers termes, on choisit les opérateurs $\beta_{N \circ \tau}$, $r_{N \circ \tau}$ et $\mathbf{v}_{N \circ \tau}$ de sorte qu'on utilise [22, Chap. III].

Combinant ceci avec la propriété de stabilité de l'opérateur $\mathcal{T}_{N\tau}$, ceci achève la démonstration.

Le même opérateur $\mathcal{F}_{N\tau}$ possède également la propriété de Lipschitz suivante.

Lemme 2.4.17 *Si le coefficient α est de classe C^2 et si l'Hypothèse 2.4.15 est vérifiée, il existe un voisinage de $U_{N\tau}^\diamond$ dans $\mathbb{W}_{N\tau}$ et une constante positive c tels que l'opérateur $D\mathcal{F}_{N\tau}$ satisfait la propriété de Lipschitz, pour tout Z_N dans ce voisinage*

$$\|D\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^\diamond) - D\mathcal{F}_{N\tau}(Z_N)\|_{\mathcal{E}} \leq c\mu(N) \|U_{N\tau}^\diamond - Z_N\|_{\mathbb{W}}, \quad (2.78)$$

avec $\mu(N)$ est égal à N en dimension $d = 3$ et à $(\log N)^{\frac{1}{2}}$ en dimension $d = 2$.

Preuve. On pose $Z_N = (\mathbf{z}_N, \sigma_N)$, on a

$$\begin{aligned} &< (D\mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}^\diamond) - D\mathcal{G}_{N\tau}(Z_N)) \cdot W_{N\tau}, B_N > \\ &= -((\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha(\sigma_N)) \cdot \mathbf{w}_{N\tau}, \mathbf{b}_N)_N \\ &\quad - ((\alpha'(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha'(\sigma_N)) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{b}_N)_N - (\alpha'(\sigma_N) r_{N\tau} (\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond - \mathbf{z}_N), \mathbf{b}_N)_N. \end{aligned} \quad (2.79)$$

On évalue chaque terme de membre de droite comme suit :

1. Pour le premier terme, on utilise [22, Chap. IV, Cor. 1.10], on voit que

$$((\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha(\sigma_N)) \cdot \mathbf{w}_{N\tau}, \mathbf{b}_N)_N \leq c \|\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha(\sigma_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{w}_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{b}_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Comme la fonction α est lipschitzienne, on a

$$((\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha(\sigma_N)) \cdot \mathbf{w}_{N\tau}, \mathbf{b}_N)_N \leq c \|\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond - \sigma_N\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{w}_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{b}_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

On applique l'inégalité inverse [71], validée pour tout polynôme φ_N dans $\mathbb{P}_N(\Omega)$

$$\|\varphi_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c N^{\frac{2d}{\delta}} \|\varphi_N\|_{L^\delta(\Omega)}.$$

On distingue deux cas :

- En dimension $d = 3$, on note que l'espace $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^6(\Omega)$, et donc

$$\|\varphi_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c N^{\frac{2d}{6}} \|\varphi_N\|_{H^1(\Omega)}.$$

- En dimension $d = 2$, l'espace $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^\delta(\Omega)$, $\delta \geq 2$, et la norme de cette injection est majorée par $c\sqrt{\delta}$, voir [79]

$$\|\varphi_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c N^{\frac{2d}{\delta}} \sqrt{\delta} \|\varphi_N\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.80)$$

On choisit δ égal à $\log N$, on obtient

$$\|\varphi_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \sqrt{\log N} \|\varphi_N\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.81)$$

On pose

$$\mu(N) = \begin{cases} \sqrt{\log N} & \text{en dimension 2} \\ N & \text{en dimension 3,} \end{cases}$$

on obtient

$$((\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha(\sigma_N)) \cdot \mathbf{w}_{N\tau}, \mathbf{b}_N)_N \leq c\mu(N) \|\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond - \sigma_N\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{w}_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{b}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (2.82)$$

2. L'évaluation de deuxième terme est similaire, en utilisant encore [22, Chap. IV, Cor. 1.10],

$$\begin{aligned} & ((\alpha'(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha'(\sigma_N)) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{b}_N)_N \\ & \leq c \|\alpha'(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha'(\sigma_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathcal{I}_N(r_{N\tau} \mathbf{v}_{N\tau})\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{b}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

En combinant la stabilité de l'opérateur \mathcal{I}_N sur les polynômes de degré $\leq 2N$, (voir [21, Rem. 13.5]), avec le fait que α' est lipschitzien, on déduit que pour tout $\rho > 2$, et tel que $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} & ((\alpha'(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha'(\sigma_N)) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{b}_N)_N \\ & \leq c \|\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond - \sigma_N\|_{L^\infty(\Omega)} \|r_{N\tau}\|_{L^{\rho'}(\Omega)} \|\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond\|_{L^\rho(\Omega)^d} \|\mathbf{b}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

De l'Hypothèse 2.4.15 et l'estimation (2.74), $\mathbf{v}_{N\tau}$ est borné dans $L^\rho(\Omega)^d$, pour $\rho > 2$ en dimension $d = 2$, et $\rho = 3$ en dimension $d = 3$. De plus, $H^1(\Omega)$ s'injecte dans l'espace correspondant $L^{\rho'}(\Omega)$

$$((\alpha'(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha'(\sigma_N)) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{b}_N)_N \leq c \|\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond - \sigma_N\|_{L^\infty(\Omega)} \|r_{N\tau}\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{b}_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

On conclut en utilisant (2.80) et (2.81)

$$\begin{aligned} & ((\alpha'(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha'(\sigma_N)) r_{N\tau} \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{b}_N)_N \\ & \leq c\mu(N) \|\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond - \sigma_N\|_{H^1(\Omega)} \|r_{N\tau}\|_{L^{\rho'}(\Omega)} \|\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond\|_{H^s(\Omega)^d} \|\mathbf{b}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

3. Finalement, avec les mêmes arguments, on voit que

$$\begin{aligned}
 & (\alpha'(\sigma_N)r_{N\tau}(\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond - \mathbf{z}_N), \mathbf{b}_N)_N \\
 & \leq c \|\alpha'(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond)\|_{L^\infty(\Omega)} \|r_{N\tau}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond - \mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{b}_N\|_{L^2(\Omega)^d}, \\
 & \leq c\mu(N) \|r_{N\tau}\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond - \mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{b}_N\|_{L^2(\Omega)^d}.
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

En insérant (2.82), (2.83) et (2.84) dans (2.79) et en combinant avec la stabilité de l'opérateur $\mathcal{T}_{N\tau}$ et la première relation de (2.46), on obtient la conclusion.

Lemme 2.4.18 *Si l'Hypothèse 2.4.15 est vérifiée et la donnée (\mathbf{f}, p_b, g) est dans $H^\sigma(\Omega) \times H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star) \times H^\sigma(\Gamma_\sharp)$, $\sigma > \frac{d}{2}$, on a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^\diamond)\|_{\mathbb{W}} & \leq c(\mathbf{u})(N^{-s} + |\tau|)(\|\mathbf{u}\|_{H^2(0,\tilde{T};H^s(\Omega)^d)} + \|p\|_{H^1(0,\tilde{T};H^{s+1}(\Omega))}) \\
 & + c N^{-\sigma} (\|\mathbf{f}\|_{C^0(0,\tilde{T};H^\sigma(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0,\tilde{T};H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))} + \|g\|_{L^2(0,\tilde{T};H^\sigma(\Gamma_\sharp))}).
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

Preuve. Comme $\mathcal{F}(U) = 0$, on utilise l'inégalité triangulaire et on voit que

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^\diamond)\|_{\mathbb{W}} & \leq \|U - U_{N\tau}^\diamond\|_{\mathbb{W}} + \|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_{N\tau})\mathcal{G}(U)\|_{\mathbb{W}} \\
 & + \|\mathcal{T}_{N\tau}(\mathcal{G}(U) - \mathcal{G}(U_{N\tau}^\diamond))\|_{\mathbb{W}} + \|\mathcal{T}_{N\tau}(\mathcal{G}(U_{N\tau}^\diamond) - \mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}^\diamond))\|_{\mathbb{W}}.
 \end{aligned}$$

Le premier terme s'est majoré dans (2.74) et (2.75). Les estimations (2.59) et (2.72) entraîne

$$\begin{aligned}
 \|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_{N\tau})\mathcal{G}(U)\|_{\mathbb{W}} & \leq \|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_\tau)\mathcal{G}(U)\|_{\mathbb{W}} + \|(\mathcal{T}_\tau - \mathcal{T}_{N\tau})\mathcal{G}(U)\|_{\mathbb{W}} \\
 & \leq c|\tau| \|\mathbf{u}\|_{H^2(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)} + c(|\tau| + N^{-s})(\|\mathbf{u}\|_{H^2(0,\tilde{T};H^s(\Omega)^d)} + \|p\|_{L^2(0,\tilde{T};H^{s+1}(\Omega))}) + N^{-\sigma} \|p_b\|_{L^2(0,\tilde{T};H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))}.
 \end{aligned}$$

Évaluons le troisième terme, on voit que

$$\mathcal{G}(U) - \mathcal{G}(U_{N\tau}^\diamond) = (-\alpha(p) - \alpha_0)\mathbf{u} + (\alpha(p_{N\tau}^\diamond) - \alpha_0)\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, 0, 0, \mathbf{0}.$$

De la stabilité de l'opérateur $\mathcal{T}_{N\tau}$ (2.64) et grâce à la première relation de (2.46), on a

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{T}_{N\tau}(\mathcal{G}(U) - \mathcal{G}(U_{N\tau}^\diamond))\|_{\mathbb{W}} & \leq c\|(\alpha(p) - \alpha_0)\mathbf{u} + (\alpha(p_{N\tau}^\diamond) - \alpha_0)\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond\|_{L^2(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)} \\
 & \leq c(\|\alpha(p) - \alpha(p_{N\tau}^\diamond)\|_{L^2(0,\tilde{T};L^\rho(\Omega))} \|\mathbf{u}\|_{C^0(0,\tilde{T};L^{\rho'}(\Omega)^d)} \\
 & + \|\alpha(p_{N\tau}^\diamond)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond\|_{L^2(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)} + \alpha_0 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond\|_{L^2(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)}),
 \end{aligned}$$

tel que $\frac{1}{\rho} = \frac{1-s}{2}$, $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{2}$ et $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^{\rho'}(\Omega)$. Comme α est lipschitzienne, on déduit que

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{T}_{N\tau}(\mathcal{G}(U) - \mathcal{G}(U_{N\tau}^\diamond))\|_{\mathbb{W}} & \leq c(\mathbf{u})(\|p - p_{N\tau}^\diamond\|_{L^2(0,\tilde{T};H^1(\Omega))} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond\|_{L^2(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)}) \\
 & \leq c(\mathbf{u})(\|p - p_{N\tau}^\diamond\|_{L^2(0,\tilde{T};H^1(\Omega))} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond\|_{L^2(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)}).
 \end{aligned}$$

Encore grâce à (2.74) et (2.75), on obtient

$$\|\mathcal{T}_{N\tau}(\mathcal{G}(U) - \mathcal{G}(U_{N\tau}^\diamond))\|_{\mathbb{W}} \leq c(\mathbf{u})N^{-s}(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,\tilde{T};H^s(\Omega)^d)} + \|p\|_{L^2(0,\tilde{T};H^{s+1}(\Omega))}). \quad (2.86)$$

Finalement, pour le dernier terme on doit majorer les deux termes suivants pour tout Z_N dans la sphère unité de $\mathbb{W}_{N\tau}$

$$\langle \mathcal{G}^1(U_{N\tau}^\diamond) - \mathcal{G}_{N\tau}^1(U_{N\tau}^\diamond), Z_N \rangle \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{G}^2(U_{N\tau}^\diamond) - \mathcal{G}_{N\tau}^2(U_{N\tau}^\diamond), Z_N \rangle.$$

On écrit

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^1(U_{N\tau}^\diamond) - \mathcal{G}_{N\tau}^1(U_{N\tau}^\diamond), Z_N \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{z}_N d\mathbf{x} - (\mathbf{f}, \mathbf{z}_N)_N + \alpha_0 \int_{\Omega} \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond \cdot \mathbf{z}_N d\mathbf{x} - \alpha_0 (\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{z}_N)_N \\ &\quad - \int_{\Omega} \alpha(p_{N\tau}^\diamond) \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond \cdot \mathbf{z}_N d\mathbf{x} + (\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{z}_N)_N. \end{aligned}$$

Pour tout polynôme \mathbf{f}_{N-1} de degré $N-1$

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}_{N-1} \cdot \mathbf{z}_N d\mathbf{x} - (\mathbf{f}_{N-1}, \mathbf{z}_N)_N = 0.$$

Comme $(\mathbf{f}, \mathbf{z}_N)_N = (\mathcal{I}_N \mathbf{f}, \mathbf{z}_N)_N$, alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{z}_N d\mathbf{x} - (\mathbf{f}, \mathbf{z}_N)_N \right| &\leq c(\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f} - \mathcal{I}_N \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\leq cN^{-\sigma} \|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d} \|\mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme se majore par les mêmes arguments, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond \cdot \mathbf{z}_N d\mathbf{x} - (\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{z}_N)_N &\leq c(\|\mathbf{u} - \mathcal{I}_{N-1} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond - \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\leq cN^{-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} \|\mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Pour majorer le dernier terme, on prend N^* égal à la partie entière de $\frac{N-1}{2}$, et on introduit comme dans la preuve précédente les approximations α_{N^*} de $\alpha(\cdot)$ et \mathbf{v}_{N^*} de \mathbf{u} ,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \alpha(p_{N\tau}^\diamond) \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond \cdot \mathbf{z}_N d\mathbf{x} - (\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{z}_N)_N \\ &\leq c(\|\alpha(p_{N\tau}^\diamond) \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond - \alpha_{N^*} \mathbf{v}_{N^*}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond - \alpha_{N^*} \mathbf{v}_{N^*}\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

en effectuant une inégalité triangulaire, on voit que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \alpha(p_{N\tau}^\diamond) \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond \cdot \mathbf{z}_N d\mathbf{x} - (\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) \mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, \mathbf{z}_N)_N \\ &\leq c(\|\alpha(p_{N\tau}^\diamond) - \alpha_{N^*}\|_{L^{\rho'}(\Omega)} \|\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond\|_{L^\rho(\Omega)^d} + \|\alpha(\pi_\tau^- p_{N\tau}^\diamond) - \alpha_{N^*}\|_{L^{\rho'}(\Omega)} \|\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond\|_{L^\rho(\Omega)^d} \\ &\quad + \|\alpha_{N^*}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond - \mathbf{v}_{N^*}\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

On considère les mêmes ρ et ρ' définis précédemment et tels que $H^s(\Omega)$ s'injecte dans $L^{\rho'}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha(p_{N\tau}^{\diamond}) \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond} \cdot \mathbf{z}_N d\mathbf{x} - (\alpha(\pi_{\tau}^{-} p_{N\tau}^{\diamond}) \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}, \mathbf{z}_N)_N \\ & \leq c(\|\alpha(p_{N\tau}) - \alpha(p)\|_{H^1(\Omega)} + \|\alpha(p) - \alpha_{N^*}\|_{H^1(\Omega)} + \|\alpha(p_{N\tau}^{\diamond}) - \alpha(\pi_{\tau}^{-} p_{N\tau})\|_{H^1(\Omega)}) \|\mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}\|_{H^s(\Omega)^d} \\ & \quad + \|\alpha_{N^*}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond} - \mathbf{v}_{N^*}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Grâce aux propriétés d'approximations standards (voir [22, Chap.III, Th 2.4, 2.9]) on déduit que,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha(p_{N\tau}^{\diamond}) \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond} \cdot \mathbf{z}_N d\mathbf{x} - (\alpha(\pi_{\tau}^{-} p_{N\tau}^{\diamond}) \mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}, \mathbf{z}_N)_N \leq c(N^{-s}(\|p\|_{H^{s+1}(\Omega)} + \|\alpha(p)\|_{H^{s+1}(\Omega)}) \|\mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}\|_{H^s(\Omega)^d} \\ & \quad + \|\alpha(p_{N\tau}^{\diamond}) - \alpha(\pi_{\tau}^{-} p_{N\tau})\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_{N\tau}^{\diamond}\|_{H^s(\Omega)^d} + N^{-s} \|\alpha_{N^*}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} \|\mathbf{z}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Lorsque on passe à la norme en temps on trouve de (2.77)

$$\|\alpha(p_{N\tau}^{\diamond}) - \alpha(\pi_{\tau}^{-} p_{N\tau})\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \leq |\tau| \|p\|_{H^1(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} + N^{-s} \|p\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))}.$$

Il reste à majorer

$$\langle \mathcal{G}^2(U_{N\tau}^{\diamond}) - \mathcal{G}_{N\tau}^2(U_{N\tau}^{\diamond}), Z_N \rangle = \langle g, r_N \rangle_{\Gamma_{\sharp}} - (g, r_N)_{N^{\sharp}}.$$

Comme $(g^m, r_N)_N = (i_N^{\Gamma_{\sharp}} g, r_N)_N$, on a tout polynôme g_{N-1} de degré $N-1$

$$|\langle g^m, r_N \rangle_{\Gamma_{\sharp}} - (g^m, r_N)_{N^{\sharp}}| \leq c(\|g^m - g_{N-1}\|_{L^2(\Gamma_{\sharp})} \|r_N\|_{H^1(\Omega)} + \|g_{N-1} - i_N^{\Gamma_{\sharp}} g\|_{L^2(\Gamma_{\sharp})} \|r_N\|_{H^1(\Omega)}).$$

On choisit g_{N-1} l'image de g^m par l'opérateur de projection de $L^2(\Gamma_{\sharp})$ sur $\mathbb{P}_{N-1}(\Gamma_{\sharp})$ et on applique [22, Thm. 2.4], on obtient

$$|\langle g, r_N \rangle_{\Gamma_{\sharp}} - (\pi_{\tau}^{+} g, r_N)_{N^{\sharp}}| \leq c N^{-\sigma} \|g\|_{H^{\sigma}(\Gamma_{\sharp})} \|r_N\|_{H^1(\Omega)}.$$

Combinant ceci avec la stabilité de l'opérateur $\mathcal{T}_{N\tau}$ donne

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{N\tau}(\mathcal{G}(U_{N\tau}^{\diamond}) - \mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}^{\diamond}))\|_{\mathbb{W}} & \leq c \left(|\tau| \|p\|_{H^1(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} + N^{-s} (\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d)} + \|p\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))}) \right. \\ & \quad \left. + N^{-\sigma} (\|\mathbf{f}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma}(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star}))} + \|g\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma}(\Gamma_{\sharp}))}) \right). \end{aligned}$$

Ceci donne la majoration souhaitée.

2.4.4 Résultat et conclusion

Grâce aux Lemmes 2.4.16 à 2.4.18, toutes les hypothèses dont on a besoin pour appliquer le théorème dû à Brezzi, Rappaz et Raviart [28, Thm. 1] sont satisfaites.

Théorème 2.4.19 *Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème (2.5)-(2.6)-(2.7) vérifiant l'Hypothèse 2.4.15. Il existe un réel τ_0 et un entier N_0 tels que, pour tout τ , $|\tau| \leq \tau_0$ et pour tout $N \geq N_0$, la solution*

(\mathbf{u}_N^m, p_N^m) du problème (2.38) vérifie l'estimation d'erreur a priori suivante

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\|_{C^0(0,\tilde{T};L^2(\Omega)^d)} + \|p - p_{N\tau}\|_{L^2(0,\tilde{T};H^1(\Omega))} \\ & \leq c(\mathbf{u})(N^{-s} + |\tau|)(\|\mathbf{u}\|_{H^2(0,\tilde{T};H^s(\Omega)^d)} + \|p\|_{H^1(0,\tilde{T};H^{s+1}(\Omega))}) \\ & + cN^{-\sigma}(\|\mathbf{f}\|_{C^0(0,\tilde{T};H^\sigma(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0,\tilde{T};H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))} + \|g\|_{L^2(0,\tilde{T};H^\sigma(\Gamma_\#))}). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Cette estimation est parfaitement optimale. En outre, l'Hypothèse 2.4.15 n'est pas restrictive, elle implique seulement l'unicité locale de la solution (\mathbf{u}, p) qui est vraisemblable.

2.5 Résultats numériques

Dans cette section, les résultats numériques de dimension $d = 2$ et $d = 3$ sont comparés aux résultats théoriques de convergence (2.87) prévus dans les sections précédentes. Pour observer ces propriétés de convergence, nous allons utiliser la technique de solutions manufacturées. Un champ de vitesse d'analyse de divergence nulle et un champ de pression sont substitués dans les équations de Darcy pour obtenir l'équilibre des forces volumétriques. La discrétisation de l'espace est effectuée en utilisant une méthode spectrale comme décrit précédemment (voir [21, 22] pour plus de détails) que nous avons mis en œuvre dans FreeFEM3D¹, (voir aussi [41]), qui est développé par D. Yakoubi [82] durant sa thèse. Les résultats sont obtenus en utilisant un espace de discrétisation $\mathbb{P}_N^d \times \mathbb{P}_N$ de (\mathbf{u}, p) , et le schéma d'Euler implicite au pas de temps uniforme $\tau_m = \delta t$. Le terme non linéaire $\alpha(p(\cdot, t))$ est pris égal à $\exp(p(\cdot, t))$.

Enfin, à chaque pas du temps, on obtient des systèmes linéaires et résolus en utilisant un GMRES préconditionnés (Generalized Minimal résiduelle), voir par exemple Saad [75].

2.5.1 Précision temporelle

Le premier test est utilisé pour valider l'exactitude de temps. Nous considérons l'équation de Darcy (2.1) dans $\Omega =]0, 1[^3$ telle que la solution exacte est donnée par

$$\begin{cases} u_1(x, y, z, t) = 2yz(y-1)(z-1)\sin(t) + 2xz + y^3 + z^4 - 1 \\ u_2(x, y, z, t) = -xz(x-1)(z-1)\sin(t) - x(x-1)^2 + z^2 \\ u_3(x, y, z, t) = -z^2 \\ p(x, y, z, t) = xyz(x-1)(y-1)(z-1)t^2. \end{cases} \quad (2.88)$$

Dans chaque direction x , y et z , le degré de polynôme N est égal à 6, et donc l'erreur due à la discrétisation en espace est négligeable par rapport à l'erreur due à la discrétisation en temps. Nous

1. <http://www.freefem.org/ff3d/>

récupérons un ordre de convergence pour la vitesse et la pression qui décroît quand le pas de temps δt tend vers 0, ce qui confirme l'estimation théorique (2.87) obtenue en passant à la limite quand N tend vers ∞ :

$$\|(\mathbf{u}, p) - (\mathbf{u}_{N\tau}, p_{N\tau})\|_{C^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \leq C\delta t \|(\mathbf{u}, p)\|_{H^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times H^1(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))}.$$

Quand $T = 1$, on calcule l'erreur

$$\mathcal{E}_{\delta t} = \left(\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_N)(\cdot, 1)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|(p - p_N)(\cdot, 1)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2},$$

pour plusieurs valeurs de pas de temps $\delta t = 0.1$, $\delta t/2 = 0.05$ jusqu'à $\delta t/2^6 = 0.0015625$.

En posant $\mathcal{O}_{\frac{\delta t}{2}} = \frac{\log(\frac{\mathcal{E}_{\delta t}}{\mathcal{E}_{\frac{\delta t}{2}}})}{\log(2)}$, on remarque que le taux de l'ordre 1 de convergence obtenu dans le tableau 2.1 confirme les résultats théoriques.

δt	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^3}$	$\ p - p_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)}$	$\mathcal{E}_{\delta t}$	$\mathcal{O}_{\frac{\delta t}{2}}$
1/10	0.00118208	3.7977672×10^{-4}	1.2415891×10^{-3}	—————
1/20	0.00059374	1.9549339×10^{-4}	6.2509682×10^{-4}	0.9900362
1/40	0.00029753	0.9914039×10^{-4}	3.1361837×10^{-4}	0.9950695
1/80	0.00014893	4.991711×10^{-5}	1.5707563×10^{-4}	0.9975507
1/160	7.45078×10^{-5}	2.504243×10^{-5}	0.7860366×10^{-4}	0.9987909
1/320	3.72639×10^{-5}	1.255598×10^{-5}	0.3932239×10^{-4}	0.9992454
1/640	1.86346×10^{-5}	6.2847384×10^{-6}	0.1966586×10^{-4}	0.9996574

Tableau 2.1 – Estimation de l'ordre de convergence

En utilisant les mêmes résultats du Tableau 2.1, nous traçons dans la figure 2.1, les erreurs $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)^3}$ et $\|p - p_{N\tau}\|_{H^1(\Omega)}$ en échelle logarithmique et en fonction du pas du temps δt .

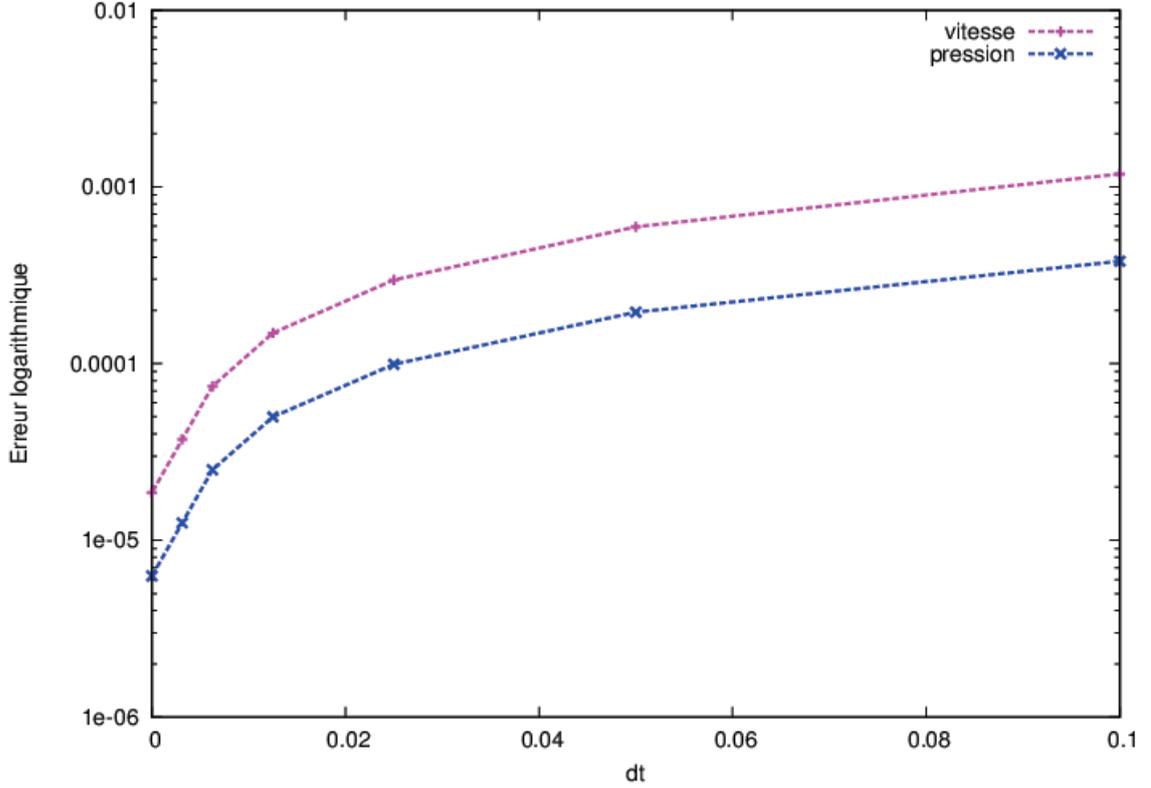


FIGURE 2.1 – Convergence par rapport au pas du temps

2.5.2 Précision spatiale

L'objectif du deuxième test est de vérifier l'exactitude de la discrétisation en espace. Le domaine de calcul est le carré $\Omega =]-1, 1[^2$, et la solution exacte de l'équation Darcy est donnée comme suit :

$$\begin{cases} u_1(x, y, t) = \sin(t) \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ u_2(x, y, t) = -\sin(t) \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ p(x, y, t) = t^2 \sin(\pi x) \cos(\pi y). \end{cases} \quad (2.89)$$

Nous fixons le pas de temps δt égal à 0,1, et nous traçons l'erreur de la vitesse en norme L^2 de la pression en norme H^1 entre la solution numérique et la solution exacte quand $T = 1$ avec un polynôme de degré successive de $N = 5$ à $N = 25$. Il ressort clairement de la Figure 2.2 que les pentes de convergence des erreurs de la vitesse et de la pression coïncident avec la pente de la fonction e^{-x} . Ainsi la convergence spectrale pour toutes les inconnues est obtenue qui est compatible avec l'estimation d'erreur (2.87) lorsque le pas de temps tend vers 0.

Nous observons qu'à partir de degré ≥ 20 , l'erreur principale est due à la précision de la machine, de sorte que la courbe s'arrête de décroître.

Dans les Figures 2.3 et 2.4, nous présentons les solutions exactes et discrètes issues de (2.89), où la solution discrète est calculée pour $N = 15$.

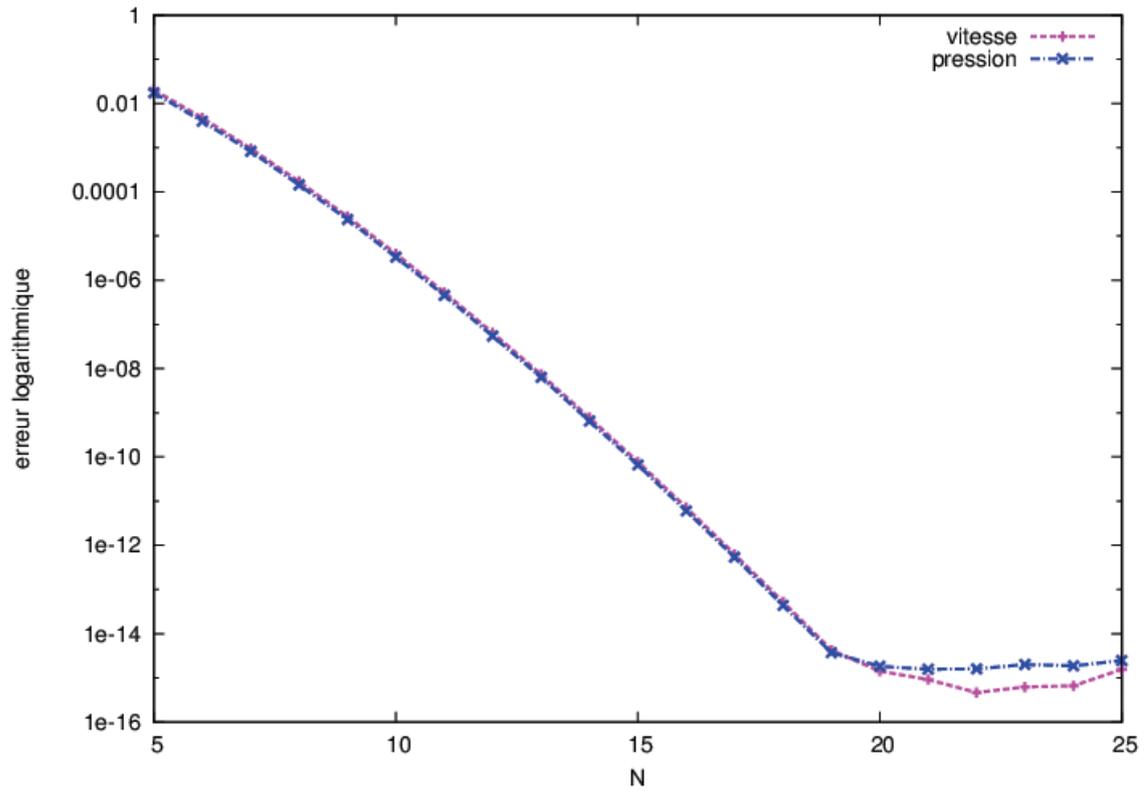


FIGURE 2.2 – Convergence par rapport au degré de polynôme

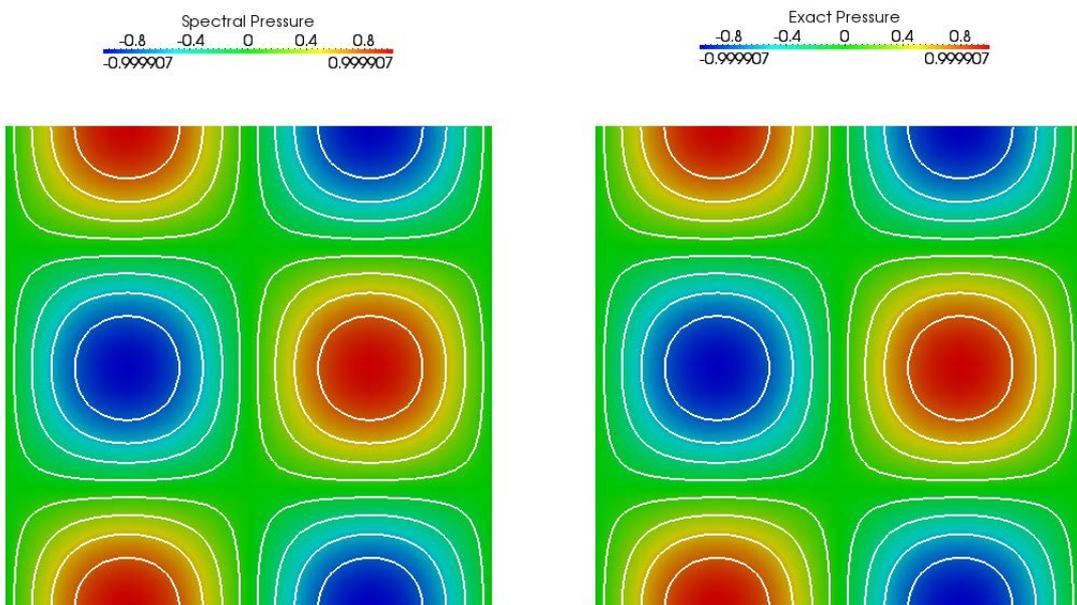


FIGURE 2.3 – Pression. Gauche : Spectrale. Droite : Exacte

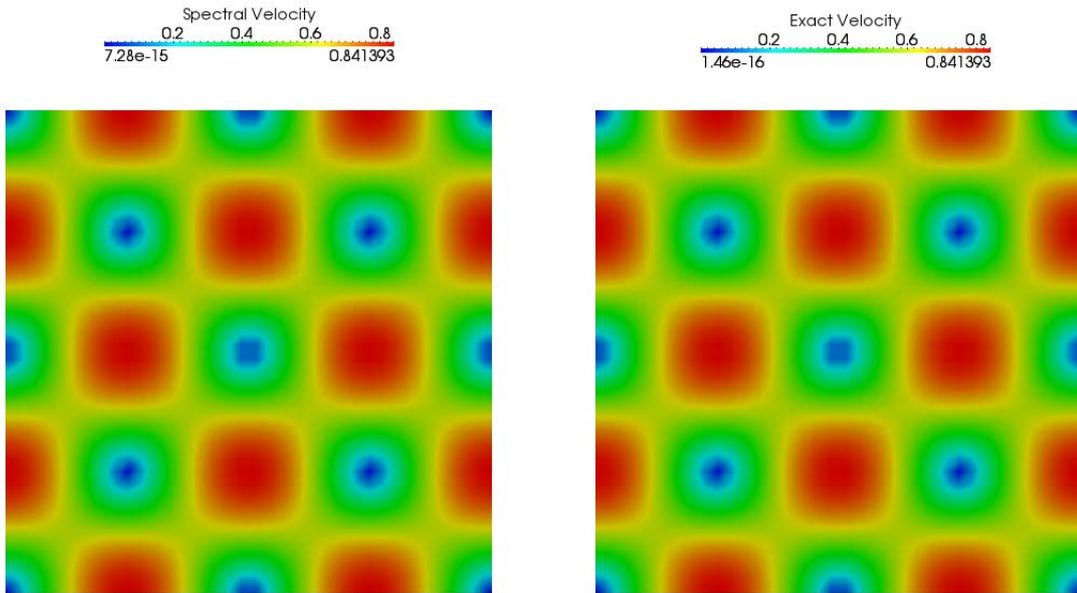


FIGURE 2.4 – Vitesse. Gauche : Spectrale. Droite : Exacte

La Figure 2.5 présente les champs de la vitesse exacte et spectrale, obtenues pour $N = 15$ dans le cas spectral.

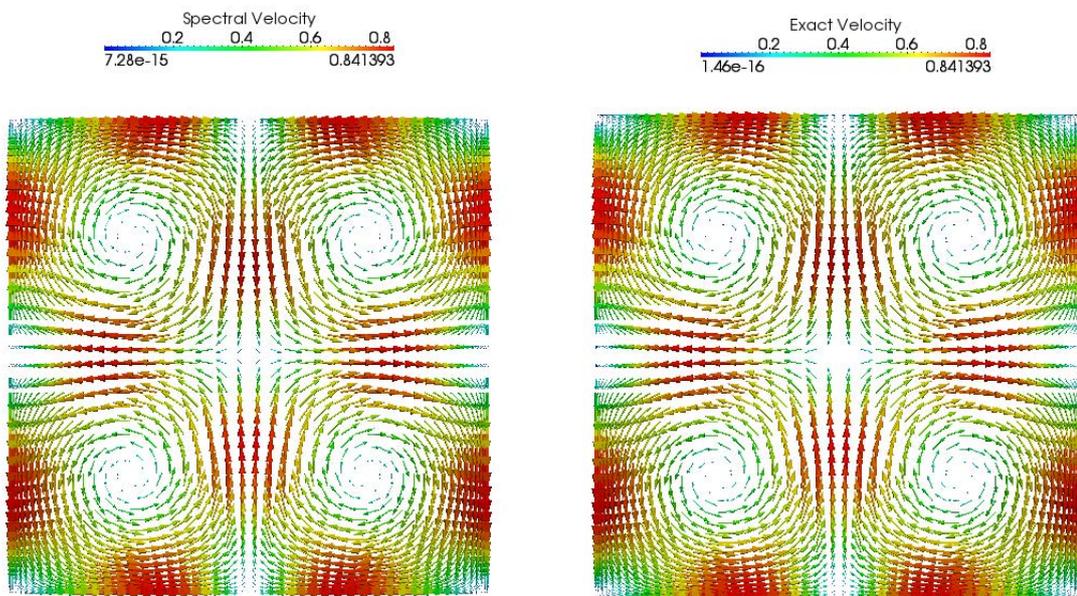


FIGURE 2.5 – Champs de vitesse. Gauche : Spectrale. Droite : Exacte

On peut voir que les parties gauche et droite des figures ne peuvent pas être distinguées, comme usuel en méthode spectrale.

2.5.3 Comparaison entre la méthode spectrale et la méthode des éléments finis

Dans ce test, on compare le résultat obtenu par la méthode spectrale et par la méthode des éléments finis, lorsque la solution exacte ne peut être obtenue de manière explicite. En effet, le problème que nous résolvons ici est donné par : Trouver $p \in H^1(\Omega)$ et $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u} + \alpha(p) \mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ -\nabla \cdot \mathbf{u} = f & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (g_1, g_2) \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_u \\ p = p_b & \text{sur } \Gamma_p, \end{array} \right. \quad (2.90)$$

où $\Omega =]0, 1[^2$, Γ_p est égal au bord supérieur de Ω , $]0, 1[\times \{1\}$, et $\Gamma_u = \partial\Omega \setminus \Gamma_p$. L'étude de ce problème par la méthode des éléments finis avec joint est effectué par Bernardi et al. [8]. La simulation par éléments finis que nous présentons ici a été effectuée sur le code FreeFem++ due à Hecht, voir [55]. Nous avons utilisé une formulation d'éléments finis mixtes où l'espace de discrétisation de la vitesse est l'espace de Raviart-Thomas, voir [74], on considère l'espace \mathcal{P}_1 pour la pression, D'autre part, la simulation spectrale a été réalisée par FreeFEM3D, où le couple vitesse-pression discret appartient à $\mathbb{P}_N^2 \times \mathbb{P}_N$, avec $N = 10$ dans chaque direction x et y . Comme dans les Sections 2.5.1, 2.5.2, le coefficient de perméabilité est pris non linéaire et égal à $\exp(p)$. Le pas de temps dans les deux méthodes est égal à 0.1 et les données sont donnés comme suit :

$$f = g_1 = g_2 = p_b = 1.$$

Nous observons dans les Figures 2.6, 2.7 que les solutions obtenues par éléments finis et méthodes spectrales sont très similaires.

On notera que ces résultats sont obtenus par deux codes différents. Nous pouvons conclure que nos simulations sont très efficaces.

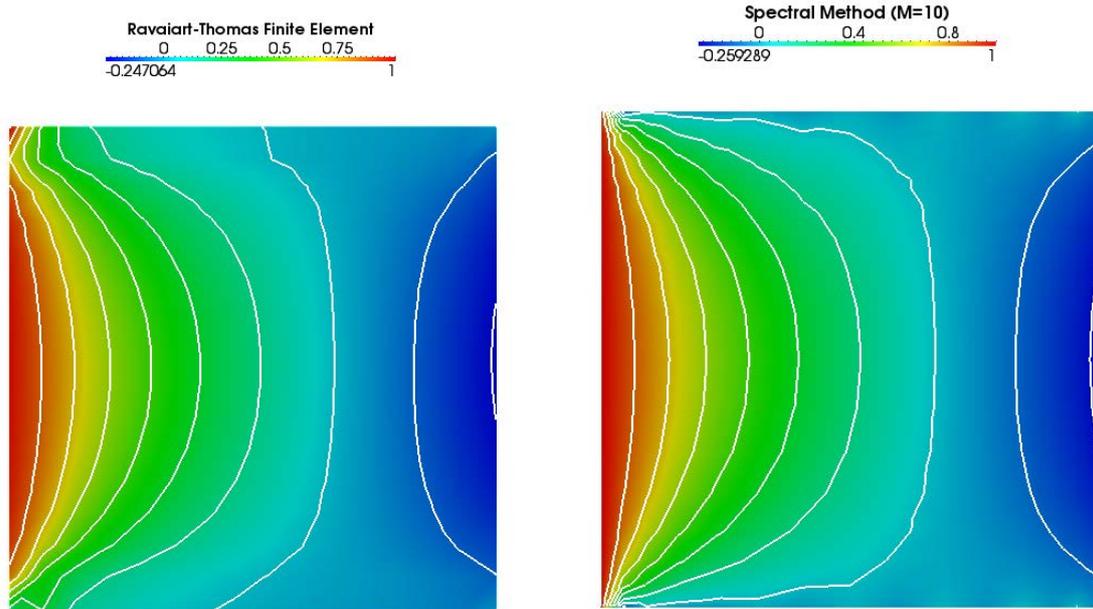


FIGURE 2.6 – Isoligne de u_1 . Gauche : éléments finis. Droite : méthode spectrale.

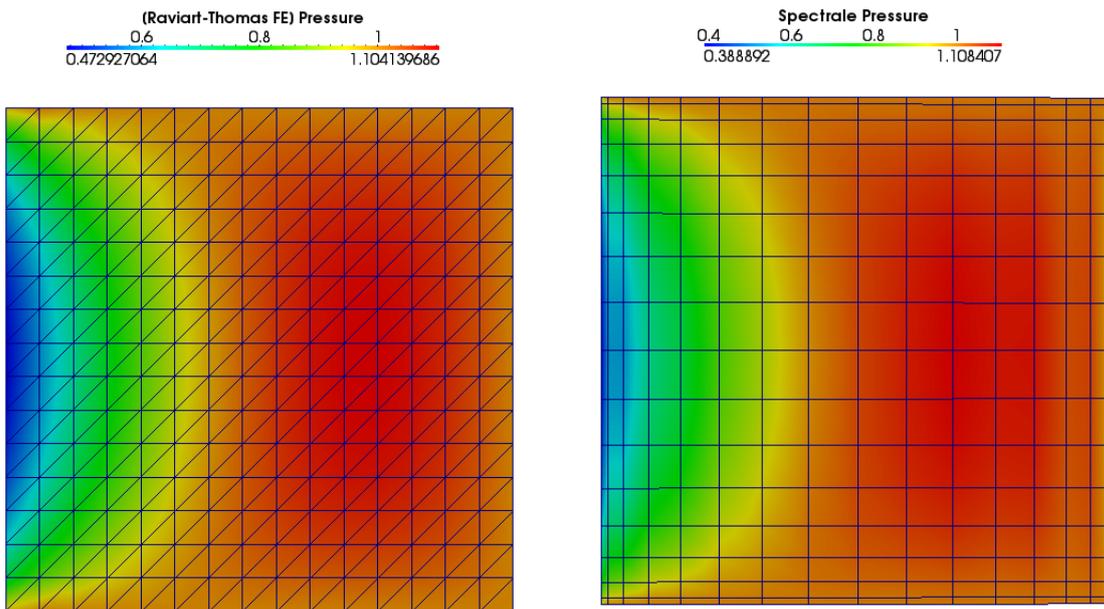


FIGURE 2.7 – Pression dans le maillage ou la grille de Gauss-Lobatto. Gauche : éléments finis. Droite : méthode spectrale.

2.5.4 Calcul dans un cas plus réaliste

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas où le milieu poreux, occupe le domaine

$$\Omega =]-10, 10[\times]0, 1[\times]-1, 0[,$$

situé juste sous la surface. Les données sont présentées comme suit.

- 1) La partie Γ_p de la frontière est la face supérieure $] - 10, 10[\times] 0, 1[\times \{0\}$. La pression p_b représente la pression atmosphérique et est constante égale à 1.
- 2) Sur Γ_u , la fonction g a un support contenu dans la face gauche $\{-10\} \times] 0, 1[\times] - 1, 0[$. Plus précisément, ce support est le disque

$$x = -10, \quad (y - 0,5)^2 + (z + 0,5)^2 \leq 0,01,$$

sur lequel elle est égale à

$$g(-10, y, z, t) = \lambda(t)(1 - 100((y - 0.5)^2 + (z + 0,5)^2)), \quad \text{avec} \quad \lambda(t) = \frac{10t}{t+1}.$$

Cette fonction est représentée dans la figure 2.8.

- 3) La donnée \mathbf{f} et la vitesse initiale \mathbf{u}_0 sont prises égales à zéro.

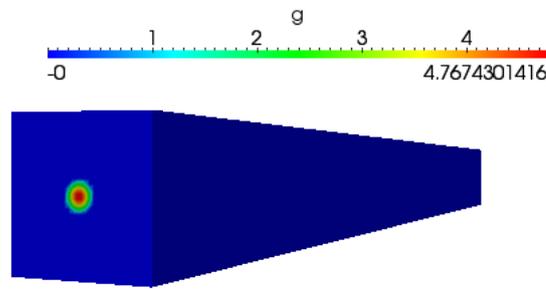


FIGURE 2.8 – Fonction g quand $t=1$

Notons que, puisque la divergence de la vitesse est nulle, l'intégrale de son flux sur $\partial\Omega$ est égale à zéro, de sorte que le liquide sort par Γ_p .

Le calcul est effectué avec un pas de temps $\delta t = 0.1$ et les degrés de polynômes N égale à 20 dans la direction x et 12 dans les directions y et z (ceci est dû à l'anisotropie du domaine).

Figure 2.9 présente les isovaleurs de la pression au temps $t = 1$ et de haut en bas dans les trois plans $z = -0.1$, $z = -0.5$ et $z = -0.9$.

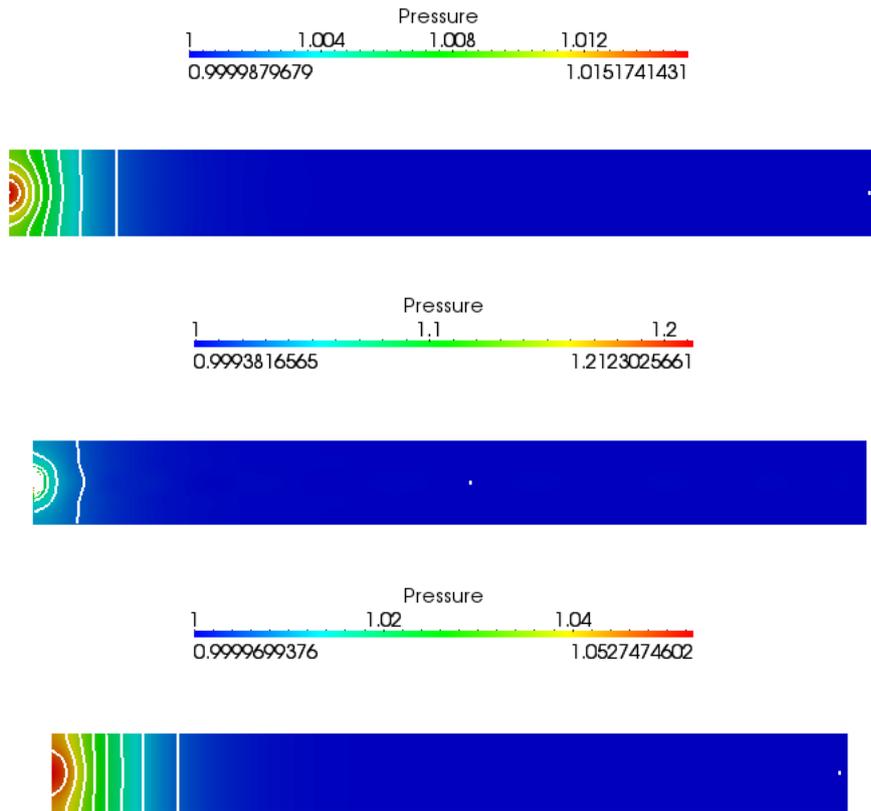


FIGURE 2.9 – Isothermes de la pression sur trois plans horizontaux

Figure 2.10 présente les isovaleurs de la pression au temps $t = 0.1$ à gauche et $t = 1$ à droite.

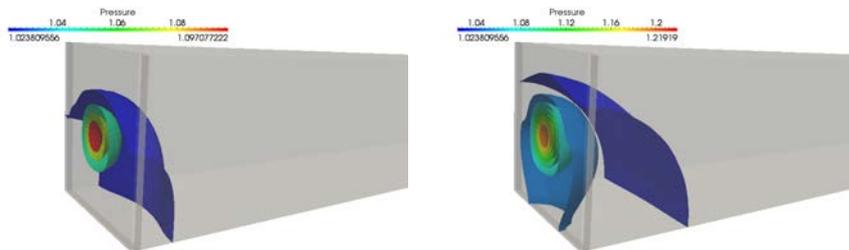
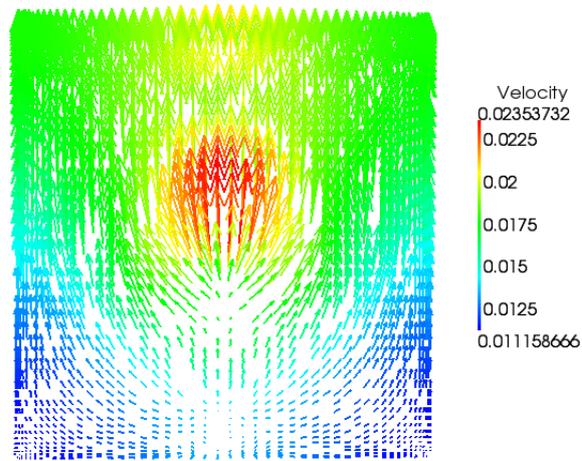
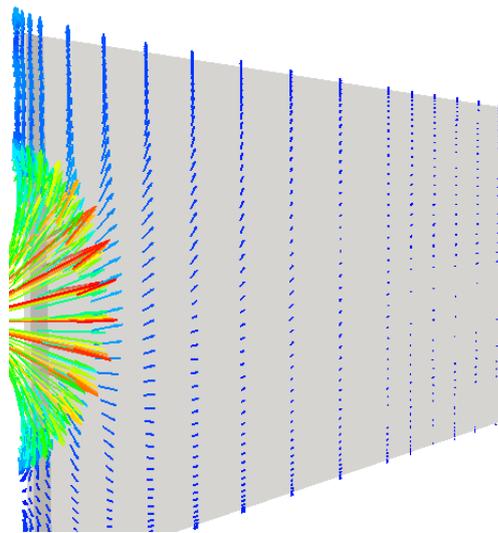


FIGURE 2.10 – Iso-surfaces de pression. Gauche : $t = 0.1$. Droite : $t = 1$

La figure 2.11 présente la projection de la vitesse aussi au temps $t = 1$ dans le plan $x = -4, 5$. Nous présentons dans la figure 2.12 la projection de la vitesse quand $y = 0.5$ et au temps $t = 1$.

FIGURE 2.11 – Projection de la vitesse au plan vertical ($x=-4.5$)FIGURE 2.12 – Projection de la vitesse au plan ($y=0.5$)

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé un modèle numérique pour l'équation de Darcy non linéaire (2.1). La méthode spectrale est utilisée pour approcher sa solution. Le coefficient de perméabilité

dépend de la pression. Nous avons prouvé que le régime discret converge vers la solution du problème continu.

En outre, des tests numériques confirment nos résultats théoriques, en particulier la précision de la discrétisation en temps et en espace en dimension 2 et 3. Enfin, dans le dernier test au paragraphe 2.5.4, et pour effectuer un calcul plus réaliste du modèle que nous avons utilisé, nous reproduisons correctement la simulation en dimension 3.

Chapitre 3

Discrétisation spectrale des équations de Darcy couplées avec l'équation de la chaleur

Ce chapitre consiste à un article soumis pour publication, en collaboration avec C. Bernardi et D. Yakoubi, [19].

Sommaire

3.1	Introduction	82
3.2	Problème continu	82
3.2.1	Analyse du problème stationnaire	82
3.2.2	Formulation variationnelle	83
3.2.3	Résultats d'existence	84
3.3	Problème discret	90
3.4	Estimation d'erreur a priori	91
3.4.1	Autre formulation	91
3.4.2	Lemmes techniques	94
3.4.3	Résultat et conclusion	99
3.5	Simulation numérique	99
3.5.1	Schéma itératif	100
3.5.2	Précision spatiale	101
3.5.3	Problème de Horton-Rogers-Lapwood	105
3.5.4	Simulation numérique de l'équation de réaction-diffusion couplée avec l'équation de Darcy	107
3.6	Conclusion	110

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les équations qui expriment la première loi de la thermodynamique dans un milieu poreux. Le modèle consiste en l'équation de diffusion avec les termes convectifs et la loi de Darcy dans l'approximation quasi-stationnaire pour un fluide incompressible

$$\begin{aligned} \partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \lambda \Delta T \\ \mathbf{u} + \frac{\kappa}{\mu} \nabla p &= \frac{g\beta\kappa}{\mu} \rho(T - T_0) \mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ici \mathbf{u} est le vecteur vitesse du fluide, p est la pression, T est la température, λ représente le coefficient de la diffusivité thermique, μ la viscosité cinématique, ρ la densité, g est l'accélération due à la gravité, \mathbf{e}_z est le vecteur unité dans la direction verticale, T_0 la valeur caractéristique de la température et enfin κ est la perméabilité.

Les deux dernières équations de (3.1) sont écrites sous l'approximation de Boussinesq et l'approximation quasi-stationnaire. La première signifie que la densité du fluide est constante presque partout excepté pour le terme de flottabilité ce qui produit le membre du droite dans la deuxième équation de (3.1). L'approximation quasi-stationnaire dans la loi de Darcy est souvent utilisée pour les fluides dans un milieu poreux.

3.2 Problème continu

3.2.1 Analyse du problème stationnaire

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , à frontière lipschitzienne $\partial\Omega$. On suppose que la frontière $\partial\Omega$ admet la décomposition suivante

$$\Gamma_\star \cap \Gamma_\# = \emptyset \quad \text{et} \quad \bar{\Gamma}_\star \cup \bar{\Gamma}_\# = \partial\Omega,$$

telle que Γ_\star est de mesure positive dans $\partial\Omega$ et $\partial\Gamma_\star$ est une sous-variété lipschitzienne de $\partial\Omega$.

Dans cette partie, on s'intéresse au problème dans le cas stationnaire qui se traduit par les équations suivantes :

$$\alpha \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F}(T) \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T - \lambda \Delta T = h \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.3}$$

Les coefficients α et λ sont supposés constants positifs. Les données sont

- une fonction \mathbf{F} assez régulière de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^d sur laquelle on effectue les hypothèses suivantes
 - (i) la fonction \mathbf{F} est continuellement dérivable sur \mathbb{R} à dérivée bornée ;
 - (ii) il existe un réel T_0 où la fonction \mathbf{F} s'annule.
- une fonction h ne dépendant que de la variable de l'espace.

On propose les conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.4)$$

$$T = T_\star \quad \text{sur } \Gamma_\star \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \theta_\sharp \quad \text{sur } \Gamma_\sharp, \quad (3.5)$$

On pose

$$\gamma = \sup_{\zeta \in \mathbb{R}} |\mathbf{F}'(\zeta)|.$$

Comme on va le voir, ce paramètre intervient de façon fondamentale dans notre étude. Puis, on effectue le changement de variable $\theta = T - T_0$ et on pose $\mathbf{f}(\theta) = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}(T)$, de sorte que

- (i) la fonction \mathbf{f} s'annule en 0,
- (ii) et est continuellement dérivable sur \mathbb{R} ,
- (iii) avec la norme de sa dérivée ≤ 1 .

Les équations (3.2)-(3.3) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{u} + \nabla p &= \gamma \mathbf{f}(\theta) && \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \theta - \lambda \Delta \theta &= h && \text{dans } \Omega. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si on regarde les conditions aux limites (3.4)-(3.5), on voit que seulement la condition de Dirichlet sur la température est modifiée par le changement de variable : les équations (3.5) sont remplacées maintenant par

$$\theta = \theta_\star = T_\star - T_0 \quad \text{sur } \Gamma_\star, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \theta_\sharp \quad \text{sur } \Gamma_\sharp. \quad (3.7)$$

3.2.2 Formulation variationnelle

On suppose que

$$h \in L^2(\Omega), \quad \theta_\sharp \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp))' \quad \text{et} \quad \theta_\star \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star). \quad (3.8)$$

On admet (voir [3, Th. 4.32]) que θ_\star peut être prolongée de façon continue en une fonction de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et on déduit de [22, Chap. I, Th. 2.19] qu'il existe une fonction $\tilde{\theta}_\star$ de $H^1(\Omega)$ dont la trace sur Γ_\star coïncide avec θ_\star .

Le problème (3.6)-(3.4)-(3.7) admet la formulation variationnelle suivante

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in L^3(\Omega)^d, \quad p \in H^1_\diamond(\Omega) \text{ et } \theta \in H^1(\Omega) \text{ avec } \theta - \tilde{\theta}_* \in H^1_\star(\Omega) \text{ tels que}$$

$$\forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \alpha \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla p \, d\mathbf{x} = \gamma \int_\Omega \mathbf{f}(\theta) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (3.9)$$

$$\forall q \in H^1_\diamond(\Omega), \quad \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} = 0, \quad (3.10)$$

$$\forall \varphi \in H^1_\star(\Omega), \quad \lambda \int_\Omega \nabla \theta \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega h \varphi \, d\mathbf{x} + \lambda \langle \theta_\sharp, \varphi \rangle_{\Gamma_\sharp}. \quad (3.11)$$

Remarque 3.2.1 Dans ce problème, la solution \mathbf{u} doit être dans $L^3(\Omega)^d$ en dimension $d = 3$ pour que la forme linéaire $\varphi \mapsto \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \varphi \, d\mathbf{x}$ soit continue de $H^1(\Omega)$ dans \mathbb{R} .

Des arguments usuels combinés avec la densité de $\mathcal{D}(\Omega \cup \Gamma_\sharp)$ dans $H^1_\star(\Omega)$ (voir Bernard [14]), conduisent à l'équivalence des problèmes (3.6)-(3.4)-(3.7) et (3.9)-(3.10)-(3.11).

Proposition 3.2.2 Tout triple (\mathbf{u}, p, θ) dans $L^3(\Omega)^d \times H^1_\diamond(\Omega) \times H^1(\Omega)$ est solution du problème (3.9)–(3.10)–(3.11) si et seulement si il est solution du problème (3.6)-(3.4)-(3.7) (au sens des distributions).

La condition inf-sup suivante est évidente.

Proposition 3.2.3 On a la condition inf-sup

$$\forall q \in H^1(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d} \frac{\int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}} \geq \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (3.12)$$

3.2.3 Résultats d'existence

On définit l'espace de vitesses suivant

$$\mathbf{V}(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d; \quad \forall q \in H^1_\diamond(\Omega), \quad \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} = 0 \right\},$$

qui est caractérisé par

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

Grâce à la condition inf-sup (3.12), les deux premières équations du problème (3.9) sont équivalentes à trouver \mathbf{u} dans $\mathbf{V}(\Omega)$ solution de

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega), \quad \alpha \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \gamma \int_\Omega \mathbf{f}(\theta) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (3.13)$$

On remarque que le couple (\mathbf{u}, θ) dans $(\mathbf{V}(\Omega) \cap L^3(\Omega)^d) \times H^1(\Omega)$ est solution du problème variationnel (3.13)-(3.11).

Proposition 3.2.4 *Pour toutes données h, θ_{\sharp} et θ_{\star} vérifiant (3.8), il existe deux constantes positives c_1, c_2 telles que toute solution (\mathbf{u}, θ) de (3.13)-(3.11) vérifie*

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c_1 (\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_{\sharp}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'} + \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}), \quad (3.14)$$

$$\|\theta\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 (\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_{\sharp}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'} + \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}), \quad (3.15)$$

Preuve. On choisit la fonction test \mathbf{v} égale à \mathbf{u} dans (3.13), on voit que

$$\alpha \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \gamma \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta) \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \quad (3.16)$$

et donc

$$\alpha \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \gamma \|\mathbf{f}(\theta)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

D'autre part, les propriétés de la fonction \mathbf{f} et le théorème des accroissements finis entraînent que, pour tout réel ζ ,

$$|\mathbf{f}(\zeta)| = |\mathbf{f}(\zeta) - \mathbf{f}(0)| \leq |\zeta|, \quad (3.17)$$

de sorte que

$$\alpha \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \gamma \|\theta\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.18)$$

D'autre part, en posant $\tilde{\theta} = \theta - \tilde{\theta}_{\star}$, on voit que $\tilde{\theta}$ est dans $H_{\star}^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H_{\star}^1(\Omega), \quad \lambda \int_{\Omega} \nabla \tilde{\theta} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{\theta} \varphi \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} h \varphi \, d\mathbf{x} + \lambda \langle \theta_{\sharp}, \varphi \rangle_{\Gamma_{\sharp}} \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} \nabla \tilde{\theta}_{\star} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{\theta}_{\star} \varphi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On prend $\varphi = \tilde{\theta}$ on trouve,

$$\begin{aligned} \lambda \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 &\leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|\theta_{\sharp}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \lambda \|\nabla \tilde{\theta}_{\star}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\tilde{\theta}_{\star}\|_{L^6(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

D'autre part, grâce au lemme de Hopf [51, Chap. IV, Lem. 2.4], pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir $\tilde{\theta}_{\star}$ vérifiant

$$\|\tilde{\theta}_{\star}\|_{L^6(\Omega)} \leq \varepsilon \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}. \quad (3.20)$$

Insérant (3.20) dans (3.19) entraîne

$$\begin{aligned} \lambda \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 &\leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|\theta_{\sharp}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \lambda \|\nabla \tilde{\theta}_{\star}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)^d} + \varepsilon \|\mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}. \end{aligned}$$

On déduit de l'inégalité de Poincaré-Friedrichs

$$\frac{\lambda}{(1+c_p^2)^{\frac{1}{2}}} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|h\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|\theta_{\sharp}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'} + \lambda \|\nabla \tilde{\theta}_{\star}\|_{L^2(\Omega)^d} + \varepsilon \|\mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^d} \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}.$$

L'inégalité triangulaire permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{(1+c_p^2)^{\frac{1}{2}}} \|\theta\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|h\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|\theta_{\sharp}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'} \\ &\quad + c_0 \lambda \left(1 + \frac{1}{(1+c_p^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})} + \varepsilon \|\mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^d} \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}. \end{aligned}$$

On choisit ε égal à $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^d}}$, on obtient

$$\|\theta\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{(1+c_p^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda} \left(\|h\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|\theta_{\sharp}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'} + c_0 \lambda \left(1 + \frac{1}{(1+c_p^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})} + \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})} \right).$$

On combine cette dernière inégalité avec (3.18) pour conclure.

On réfère à [22, chap. XIII, Th. 1.9] pour la preuve du résultat suivant.

Proposition 3.2.5 *Pour tout θ dans $L^2(\Omega)$, il existe (\mathbf{u}, p) dans $L^2(\Omega)^d \times H_{\diamond}^1(\Omega)$ solution unique du problème (3.9) – (3.10). De plus cette solution vérifie*

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|p\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\theta\|_{L^2(\Omega)}.$$

On a un résultat sur la régularité de la solution (\mathbf{u}, p) .

Proposition 3.2.6 *Soit*

$$s = \begin{cases} 1 & \text{si } \Omega \text{ est convexe,} \\ \frac{1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose θ dans $H^1(\Omega)$, alors la solution (\mathbf{u}, p) du problème (3.9)-(3.10) est dans $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$. En outre,

$$\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} \leq c_R \|\theta\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.21)$$

où c_R est une constante positive dépendant de α et γ .

Preuve. Introduisons l'espace

$$X_T(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \quad \mathbf{curl} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Cet espace s'injecte dans $H^s(\Omega)^d$ tel que $s = \frac{1}{2}$ (voir Costabel [34]) et $s = 1$ si Ω est convexe (voir Amrouche et al. [9, Thm. 2.17], ou Nédélec [66]). On applique l'opérateur rotationnel sur la première équation de (3.6)

$$\alpha \mathbf{curl} \mathbf{u} = \gamma \mathbf{curl} \mathbf{f}(\theta) \quad \text{dans } \Omega.$$

Comme $\mathbf{curl} \mathbf{f}(\theta)$ appartient à $L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}$, \mathbf{u} est dans $X_T(\Omega)$, on en déduit que \mathbf{u} est dans $H^s(\Omega)^d$. Revenant à la première équation de (3.6), on voit que

$$\nabla p = \gamma \mathbf{f}(\theta) - \alpha \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega,$$

par conséquent, p est dans $H^{s+1}(\Omega)$.

Remarque 3.2.7 Comme $H^s(\Omega)^d$, $s \geq \frac{1}{2}$, s'injecte de façon continue dans $L^q(\Omega)^d$ tel que $\frac{1}{q} = \frac{d-2s}{2d}$, on déduit pour $s = \frac{1}{2}$ que \mathbf{u} est dans $L^4(\Omega)^d$ en dimension 2 et dans $L^3(\Omega)^d$ en dimension 3.

Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme de Lax-Milgram [60] (voir aussi, par exemple [51, Chap. IV, Cor 1.1] ou [31, Thm 1.1]).

Proposition 3.2.8 On suppose que les données $h, \theta_{\#}$ et θ_{\star} vérifient (3.8). Pour tout \mathbf{u} dans $\mathbf{V}(\Omega) \cap L^3(\Omega)^d$, l'équation (3.11) admet une solution unique θ dans $H^1(\Omega)$.

Les propositions 3.2.5, 3.2.8 ne donnent pas l'existence de la solution de (3.9)-(3.10)-(3.11), que nous allons maintenant établir.

Théorème 3.2.9 Pour tout $h, \theta_{\#}$ et θ_{\star} vérifient (3.8), et

$$\frac{c_2 c_R (1 + c_p^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda} (\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_{\#}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\#})'} + \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}) < 1, \quad (3.22)$$

le problème (3.9)-(3.10)-(3.11) admet une solution unique (\mathbf{u}, p, θ) dans $L^3(\Omega)^d \times H_{\diamond}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Preuve. On introduit l'application $\mathcal{F}_1 : \theta \mapsto \mathbf{u}$ telle que \mathbf{u} est la partie de (\mathbf{u}, p) solution du problème (3.9)-(3.10) qu'on a exhibée dans la proposition 3.2.5. Cette application est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^3(\Omega)^d$, on rappelle que \mathbf{u} est dans l'espace $\mathbf{V}(\Omega)$. Ainsi, on introduit une application \mathcal{F}_2 de $\mathbf{V}(\Omega) \cap L^3(\Omega)^d$ dans $H^1(\Omega)$ qui associe à \mathbf{u} dans $\mathbf{V}(\Omega) \cap L^3(\Omega)^d$ la solution θ_{\star} de (3.11). On pose $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$. Soient $\theta_1, \theta_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ dans $H^1(\Omega)$ et $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ dans $L^3(\Omega)^d$ tels que

$$\mathcal{F}_1(\theta_1) = \mathbf{u}_1, \quad \mathcal{F}_1(\theta_2) = \mathbf{u}_2,$$

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{u}_1) = \tilde{\theta}_1, \quad \mathcal{F}_2(\mathbf{u}_2) = \tilde{\theta}_2.$$

On a de (3.21),

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^3(\Omega)^d} \leq c_R \|\theta_1 - \theta_2\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.23)$$

D'autre part,

$$\|\nabla(\mathcal{F}(\theta_1) - \mathcal{F}(\theta_2))\|_{L^2(\Omega)^d} = \|\nabla(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Comme $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$ sont solutions de (3.11)

$$\lambda \int_{\Omega} \nabla(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2) \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \tilde{\theta}_1 \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \tilde{\theta}_2 \varphi \, d\mathbf{x} = 0$$

Choisissant $\varphi = \tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2$,

$$\lambda \|\nabla(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^3(\Omega)^d} \|\tilde{\theta}_2\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

La fonction $\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2$ est nulle sur Γ_* , on en déduit que

$$\lambda \|\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + c_p^2)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\theta}_2\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^3(\Omega)^d}.$$

En insérant (3.23) dans la dernière estimation

$$\lambda \|\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2\|_{H^1(\Omega)} \leq c_R (1 + c_p^2)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{\theta}_2\|_{H^1(\Omega)} \|\theta_1 - \theta_2\|_{H^1(\Omega)}.$$

Or, la fonction $\tilde{\theta}_2$ est bornée, voir (3.15), il résulte

$$\lambda \|\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 c_R (1 + c_p^2)^{\frac{1}{2}} (\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_{\sharp}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'} + \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}) \|\theta_1 - \theta_2\|_{H^1(\Omega)}.$$

La relation (3.22) entraîne que la fonction \mathcal{F} est contractante, en appliquant le théorème de point fixe de Banach [32, Thm. 3.7-1], on trouve que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$. On en déduit que (\mathbf{u}, p, θ) est solution du problème (3.9)-(3.10)-(3.11), ainsi cette solution est unique.

La condition (3.22) est peu restrictive. Dans le théorème suivant on prouve un autre résultat d'existence où on va remplacer cette condition par des hypothèses sur la géométrie du domaine.

Proposition 3.2.10 *On suppose que Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^2 , ou un convexe ou un polyèdre de \mathbb{R}^3 . Le problème (3.9) admet une solution (\mathbf{u}, p, θ) dans $L^3(\Omega)^d \times H_{\diamond}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Si de plus la relation (3.22) est vérifiée alors cette solution est unique.*

Preuve. L'existence de (\mathbf{u}, p) est exhibée dans la Proposition 3.2.5. Pour prouver l'existence de θ on distingue trois étapes :

1) On introduit l'application $\mathcal{F} : \theta \mapsto \mathbf{u}$ qui est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^3(\Omega)^d$ et vérifie

$$\|\mathcal{F}(\theta)\|_{L^3(\Omega)^d} \leq c_R \|\theta\|_{H^1(\Omega)}.$$

On définit l'application $\phi(\tilde{\theta})$ comme suit

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H_{\star}^1(\Omega), \quad \langle \phi(\tilde{\theta}), \varphi \rangle = & \lambda \int_{\Omega} \nabla \tilde{\theta} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathcal{F}(\tilde{\theta} + \tilde{\theta}_{\star}) \cdot \nabla) \tilde{\theta} \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} h \varphi \, d\mathbf{x} \\ & - \lambda \langle \theta_{\sharp}, \varphi \rangle_{\Gamma_{\sharp}} + \lambda \int_{\Omega} \nabla \tilde{\theta}_{\star} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathcal{F}(\tilde{\theta} + \tilde{\theta}_{\star}) \cdot \nabla) \tilde{\theta}_{\star} \varphi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Cette application est continue sur $H_\star^1(\Omega)$. En prenant $\varphi = \tilde{\theta}$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \phi(\tilde{\theta}), \tilde{\theta} \rangle &\geq \lambda \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} - \lambda \|\theta_\# \|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)'} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad - \lambda \|\nabla \tilde{\theta}_\star \|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)^d} - \|\mathcal{F}(\tilde{\theta} + \tilde{\theta}_\star)\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\tilde{\theta}_\star \|_{L^6(\Omega)}. \end{aligned}$$

Or

$$\|\mathcal{F}(\tilde{\theta} + \tilde{\theta}_\star)\|_{L^3(\Omega)^d} \leq c_R (\|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} + \|\theta_\star \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}).$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle \phi(\tilde{\theta}), \tilde{\theta} \rangle &\geq \frac{\lambda}{1+c^2} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)}^2 - \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} - \lambda \|\theta_\# \|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)'} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad - \lambda \|\nabla \tilde{\theta}_\star \|_{L^2(\Omega)^d} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} - c_R (\|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{\theta}_\star \|_{H^1(\Omega)}) \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \|\tilde{\theta}_\star \|_{L^6(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'une façon équivalente et grâce à (3.20), on a

$$\begin{aligned} \langle \phi(\tilde{\theta}), \tilde{\theta} \rangle &\geq \frac{\lambda}{1+c^2} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)}^2 - \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} - \lambda \|\theta_\# \|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)'} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad - c_0 \lambda \|\theta_\star \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} - \varepsilon c_R (\|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{\theta}_\star \|_{H^1(\Omega)}) \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \|\theta_\star \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}. \end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon = \frac{\lambda}{2c_R(1+c_p^2)\|\theta_\star \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}}$ de sorte que la quantité $\langle \phi(\tilde{\theta}), \tilde{\theta} \rangle$ est positive sur la sphère de $H_\star^1(\Omega)$ à rayon

$$\mu = \frac{2(1+c_p^2)}{\lambda} (\|h\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|\theta_\# \|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)'} + \lambda(1 + \frac{c}{2}(1+c_p^2)) \|\theta_\star \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}).$$

2) Grâce à la densité de $\mathcal{D}(\Omega \cap \Gamma_\#)$ dans $H_\star^1(\Omega)$, il existe une suite croissante $(\mathbb{W}_n)_n$ de sous-espaces de dimension finie de $H_\star^1(\Omega)$ telles que $\cup_n \mathbb{W}_n$ soit dense dans $H_\star^1(\Omega)$. Les propriétés de la fonction ϕ sont encore vérifiées lorsque l'on remplace l'espace $H_\star^1(\Omega)$ par \mathbb{W}_n . On applique le théorème de point fixe de Brouwer : pour tout n , il existe $\tilde{\theta}_n$ dans \mathbb{W}_n solution de

$$\forall \varphi_n \in \mathbb{W}_n, \quad \langle \phi(\tilde{\theta}_n), \varphi_n \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \|\nabla \tilde{\theta}_n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \mu.$$

3) Comme $(\tilde{\theta}_n)_n$ est borné dans $H_\star^1(\Omega)$, il existe une sous-suite notée encore $(\tilde{\theta}_n)_n$ pour simplifier qui converge vers une fonction $\tilde{\theta}$ faiblement dans $H_\star^1(\Omega)$. Pour tout $m < n$, $\tilde{\theta}_n$ satisfait,

$$\forall \varphi_m \in \mathbb{W}_m, \quad \langle \phi(\tilde{\theta}_n), \varphi_m \rangle = 0.$$

De façon équivalente, pour tout $\varphi_m \in \mathbb{W}_m$,

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} \nabla \tilde{\theta}_n \cdot \nabla \varphi_m \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathcal{F}(\tilde{\theta}_n + \tilde{\theta}_\star) \cdot \nabla) \tilde{\theta}_n \varphi_m \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} h \varphi_m \, d\mathbf{x} + \lambda \langle \theta_\# , \varphi_m \rangle_{\partial\Omega} \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla \tilde{\theta}_\star \cdot \nabla \varphi_m \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathcal{F}(\tilde{\theta}_n + \tilde{\theta}_\star) \cdot \nabla) \tilde{\theta}_\star \varphi_m \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Passant à la limite sur n qui est évidente pour les termes linéaires. Rappelons que la fonction \mathcal{F} est continue de $H^1(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)^d$, on réfère à Amrouche et al. [9, Prop 3.7] pour l'injection compacte de $H^s(\Omega)$ dans $L^3(\Omega)$ en dimension 3, pour $s = 1$ si Ω est convexe, et $s = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ si Ω est un polyèdre. De cette injection, il existe une sous-suite encore notée $(\tilde{\theta}_n)_n$ qui converge faiblement vers $\tilde{\theta}$ dans $H^1(\Omega)$ et telle que la suite $(\mathcal{F}(\tilde{\theta}_n + \tilde{\theta}_*))_n$ converge fortement dans $L^3(\Omega)^d$ vers $\mathcal{F}(\tilde{\theta} + \tilde{\theta}_*)$. On voit que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathcal{F}(\tilde{\theta}_n + \tilde{\theta}_*) \cdot \nabla) \tilde{\theta}_n \varphi_m \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathcal{F}(\tilde{\theta} + \tilde{\theta}_*) \cdot \nabla) \tilde{\theta} \varphi_m \, d\mathbf{x} \\ & \leq \|\mathcal{F}(\tilde{\theta}_n + \tilde{\theta}_*) - \mathcal{F}(\tilde{\theta} + \tilde{\theta}_*)\|_{L^3(\Omega)^d} \|\tilde{\theta}_n\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + \int_{\Omega} (\mathcal{F}(\tilde{\theta}) \cdot \nabla) (\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}) \varphi_m \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Donc la suite $(\mathcal{F}(\tilde{\theta}_n + \tilde{\theta}_*) \cdot \nabla \tilde{\theta}_n)_n$ converge faiblement vers $\mathcal{F}(\tilde{\theta} + \tilde{\theta}_*) \cdot \nabla \tilde{\theta}$. Finalement, grâce à l'argument de densité $\theta = \tilde{\theta} + \tilde{\theta}_*$ est solution de (3.9)-(3.10)-(3.11).

Remarque 3.2.11 *Si les données h , θ_* et θ_{\sharp} vérifient (3.8) et (3.22) alors la solution exhibée dans la proposition précédente est unique.*

3.3 Problème discret

À partir de maintenant nous effectuons notre analyse sur le carré ou le cube $\Omega =]-1, 1[^d$, $d = 2$ ou 3 . Les données h , θ_{\sharp} et θ_* étant supposées continues respectivement sur $\bar{\Omega}$, $\bar{\Gamma}_{\sharp}$ et $\bar{\Gamma}_*$, le problème discret est construit à partir de la formulation (1.13) par la méthode de Galerkin avec intégration numérique. En effet, dans la formulation variationnelle (3.9)-(3.10)-(3.11), nous remplaçons les espaces continus par les espaces discrets et les intégrales exactes par la formule de quadrature (1.13). Alors le problème discret s'écrit

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}_N, p_N, \theta_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N^{\circ} \times \mathbb{Y}_N, \text{ tel que} \\ & \theta_N = i_N^{\Gamma_*} \theta_* \quad \text{sur } \Gamma_*, \\ & \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad \alpha(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N + (\mathbf{v}_N, \nabla p_N)_N = \gamma(\mathbf{f}(\theta_N), \mathbf{v}_N)_N, \\ & \forall q_N \in \mathbb{Y}_N^{\circ}, \quad (\mathbf{u}_N, \nabla q_N)_N = 0, \\ & \forall \varphi_N \in \mathbb{Y}_N^*, \quad \lambda(\nabla \theta_N, \nabla \varphi_N)_N + ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \theta_N, \varphi_N)_N \\ & \qquad \qquad \qquad = (h, \varphi_N)_N + \lambda(\theta_{\sharp}, \varphi_N)_N^{\Gamma_{\sharp}}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Par les mêmes arguments que précédemment pour avoir l'existence de la solution continue on prouve ce résultat.

Proposition 3.3.1 *Pour tous h , θ_* et θ_{\sharp} continue sur $\bar{\Omega}$, $\bar{\Gamma}_*$ et $\bar{\Gamma}_{\sharp}$ respectivement, le problème (3.24) admet une solution $(\mathbf{u}_N, p_N, \theta_N)$ dans $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N^{\circ} \times \mathbb{Y}_N$.*

L'unicité locale de la solution du problème discret va être établie plus tard avec l'estimation d'erreur a priori.

3.4 Estimation d'erreur a priori

Pour faire l'analyse d'erreur a priori on va appliquer le théorème de Brezzi, Rappaz et Raviart [28], pour cela on a besoin d'écrire une autre formulation pour chacun de deux problèmes continu et discret.

3.4.1 Autre formulation

On introduit d'abord l'opérateur linéaire \mathcal{T} qui associe à toute fonction \mathbf{f} de $L^2(\Omega)^d$ le couple (\mathbf{u}, p) que l'on note \tilde{U} , solution dans $L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$ du problème

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{u} + \nabla p &= \gamma \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.25}$$

On définit l'opérateur de Laplace \mathcal{L} qui associe à tout

$$h \in L^2(\Omega), \quad \theta_{\sharp} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp}) \quad \text{et} \quad \theta_{\star} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star}),$$

la solution θ dans $H^1(\Omega)$ du problème de Laplace muni de conditions aux limites mixtes

$$\begin{aligned} -\lambda \Delta \theta &= h & \text{dans } \Omega, \\ \theta &= \theta_{\star} & \text{sur } \Gamma_{\star}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \theta_{\sharp} & \text{sur } \Gamma_{\sharp}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Puis, on définit l'application \mathcal{F} de l'espace $L^3(\Omega)^d \times H_{\diamond}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ dans lui-même par

$$\begin{aligned} \forall U = (\tilde{U}, \theta) \in L^2(\Omega)^d \times H_{\diamond}^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \\ \mathcal{F}(U) = U - \begin{pmatrix} \mathcal{T} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U) \\ \mathcal{G}^2(U) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.27}$$

tel que

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U) \\ \mathcal{G}^2(U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\theta) \\ (h - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta, \theta_{\sharp}, \theta_{\star}) \end{pmatrix}$$

La continuité et la différentiabilité de cet opérateur sont faciles à vérifier à partir des injections de Sobolev.

On remarque que le problème (3.9)-(3.10)-(3.11) est équivalent à trouver $U = (\tilde{U}, \theta)$ solution de l'équation

$$\mathcal{F}(U) = 0. \tag{3.28}$$

On fait désormais l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.4.1 On suppose que la solution (\tilde{U}, θ) du problème (3.9)-(3.10)-(3.11) vérifie :

- (i) il existe $s > \frac{d}{6}$ tel que (\tilde{U}, θ) soit dans $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega) \times H^{s+1}(\Omega)$,
- (ii) l'opérateur $D\mathcal{F}(U)$ est un isomorphisme de $L^3(\Omega)^d \times H_\diamond^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ dans lui-même.

En écrivant l'opérateur $D\mathcal{F}(U)$ de façon plus explicite :

$$\begin{aligned} \forall W = (\mathbf{w}, \varrho, \zeta) \in L^3(\Omega)^d \times H_\diamond^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \\ D\mathcal{F}(U) \cdot W = W - \begin{pmatrix} \mathcal{T} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}'(\theta)\zeta \\ -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\zeta - (\mathbf{w} \cdot \nabla)\theta, 0, 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

on voit que la partie (ii) de l'Hypothèse 3.4.1 équivaut à dire que le problème suivant

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \alpha \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \varrho \, d\mathbf{x} &= \gamma \int_{\Omega} \mathbf{f}'(\theta)\zeta \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} A \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \forall q \in H_\diamond^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} &= 0, \\ \forall \varphi \in H_\star^1(\Omega), \quad \lambda \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\zeta \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \nabla)\theta \varphi \, d\mathbf{x} &= \langle B, \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (3.30)$$

admet une solution unique $W = (\mathbf{w}, \varrho, \zeta)$ dans $L^3(\Omega)^d \times H_\diamond^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ pour tous $A \in L^2(\Omega)^d$ et $B \in (H_\star^1(\Omega))'$.

Similairement, on introduit les opérateurs \mathcal{T}_N et \mathcal{L}_N , analogues discrets des opérateurs \mathcal{T} et \mathcal{L} . Pour tout \mathbf{f} de $L^2(\Omega)^d$, $\mathcal{T}_N \mathbf{f}$ est le couple (\mathbf{u}_N, p_N) dans $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N^\diamond$, solution du problème

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, & \alpha(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N + (\mathbf{v}_N, \nabla p_N)_N = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_N \, d\mathbf{x}, \\ \forall q_N \in \mathbb{Y}_N^\diamond, & (\mathbf{u}_N, \nabla q_N)_N = 0. \end{cases}$$

Dans ce qui suit on note \tilde{U}_N le couple (\mathbf{u}_N, p_N) .

D'autre part, pour tout h dans $L^2(\Omega)$, θ_\sharp dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp))'$ et θ_\star continu sur Γ_\star , on note $\mathcal{L}(h, \theta_\star, \theta_\sharp)$ la solution θ_N appartient à \mathbb{Y}_N du problème

$$\begin{cases} \theta_N = i_N^{\Gamma_\star} \theta_\star & \text{on } \Gamma_\star, \\ \forall \varphi_N \in \mathbb{Y}_N^\star, & \lambda(\nabla \theta_N, \nabla \varphi_N)_N = \int_{\Omega} h \varphi_N \, d\mathbf{x} + \lambda \langle \theta_\sharp, \varphi_N \rangle_{\Gamma_\sharp}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Finalement, soit l'espace

$$\mathcal{X}_N = \mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N^\diamond \times \mathbb{Y}_N,$$

on introduit l'application \mathcal{F}_N qui est définie de \mathcal{X}_N dans lui-même par

$$\forall U_N = (\tilde{U}_N, \theta_N) \in \mathcal{X}_N, \quad \mathcal{F}_N(U_N) = U_N - \begin{pmatrix} \mathcal{T}_N & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}_N^1(U_N) \\ (\mathcal{G}_N^2(U_N), \tilde{\theta}_\sharp, \theta_\star) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

où les composants $\mathcal{G}_N^1(U_N)$, $\mathcal{G}_N^2(U_N)$ et $\tilde{\theta}_\sharp$ sont définis par

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N^\diamond, & \quad \langle \mathcal{G}_N^1(U_N), \mathbf{v}_N \rangle = (\mathbf{f}(\theta_N), \mathbf{v}_N)_N, \\ \forall \varphi_N \in \mathbb{Y}_N^\star, & \quad \langle \tilde{\mathcal{G}}_N^2(U_N), \varphi_N \rangle = (h, \varphi_N)_N - ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla)\theta_N, \varphi_N)_N, \\ \text{et} & \quad \langle \tilde{\theta}_\sharp, \varphi_N \rangle = \lambda(\theta_\sharp, \varphi_N)_N^{\Gamma_\sharp}. \end{aligned}$$

Il faut noter que l'application \mathcal{F}_N est continuellement différentiable sur \mathcal{X}_N . D'autre part, le problème (3.24) est équivalent à trouver $U_N = (\tilde{U}_N, \theta_N)$ dans \mathcal{X}_N solution de l'équation $\mathcal{F}_N(U_N) = 0$.

On rappelle, voir [22, Chap. V & XIII], les résultats de stabilité et de l'estimation d'erreur concernant les opérateurs linéaires \mathcal{T}_N et \mathcal{L}_N .

Proposition 3.4.2 *Il existe une constante positive c telle que*

(i) *Pour tout \mathbf{f} dans $L^2(\Omega)^d$*

$$\|\mathcal{T}_N \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)} \leq c \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d}. \quad (3.33)$$

Si de plus $\mathcal{T} \mathbf{f}$ appartient à $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$ pour tout s , $s \geq d - 2$ on a la majoration d'erreur

$$\|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_N) \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)} \leq c N^{-s} \|\mathcal{T} \mathbf{f}\|_{H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)}. \quad (3.34)$$

(ii) *Pour tout h dans $L^2(\Omega)$, on a*

$$\|\mathcal{L}_N(h, 0, 0)\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.35)$$

Si en outre la fonction $\mathcal{L}(h, \theta_\sharp, \theta_\star)$ appartient à $H^{s+1}(\Omega)$, pour tout entier s , $s \geq 1$, on a la majoration d'erreur

$$\|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_N)(h, \theta_\sharp, \theta_\star)\|_{H^1(\Omega)} \leq c N^{-s} \|\mathcal{L}(h, \theta_\sharp, \theta_\star)\|_{H^{s+1}(\Omega)}. \quad (3.36)$$

Notons que les résultats de convergence suivants découlent de propriétés de stabilité et estimations a priori.

Théorème 3.4.3 *Pour tout \mathbf{f} dans $L^2(\Omega)^d$ et h dans $L^2(\Omega)$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_N) \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d \times L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_N)(h, 0, 0)\|_{H^1(\Omega)} = 0. \quad (3.37)$$

3.4.2 Lemmes techniques

On est en position de prouver les résultats dont on a besoin pour appliquer le théorème de Brezzi, Rappaz et Raviart [28]. On considère une approximation $U_N^\diamond = (\mathbf{u}_N^\diamond, p_N^\diamond, \theta_N^\diamond)$ de U dans \mathcal{X}_N qui satisfait pour tout $\ell, s, 0 \leq \ell \leq s$,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_N\|_{H^\ell(\Omega)^d} \leq cN^{\ell-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d}, \quad (3.38)$$

$$\|p - q_N\|_{H^{\ell+1}(\Omega)} \leq cN^{\ell-s} \|p\|_{H^{s+1}(\Omega)}, \quad (3.39)$$

$$\|\theta - \theta_N\|_{H^{\ell+1}(\Omega)} \leq cN^{\ell-s} \|\theta\|_{H^{s+1}(\Omega)}. \quad (3.40)$$

L'existence de cette approximation est établie dans [21, Thm. 7.4] (voir aussi [22, Chap. III, Th. 2.4 & Chap. VI, Th. 2.5]). On note \mathcal{E} l'espace des endomorphismes de \mathcal{X}_N .

Lemme 3.4.4 *On suppose que la fonction $\mathbf{f}(\cdot)$ est de classe \mathcal{C}^2 avec ses dérivées bornées. Si l'Hypothèse 3.4.1 a lieu, alors il existe un entier positif N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, l'opérateur $D\mathcal{F}_N(U_N^\diamond)$ est un isomorphisme de \mathcal{X}_N et la norme de son inverse est bornée indépendamment de N .*

Preuve. Pour simplifier quand $\tilde{\theta}_\sharp = \theta_\star = 0$ on note $\mathcal{L}(h)$ au lieu de $\mathcal{L}(h, 0, 0)$, Similairement pour l'opérateur \mathcal{L}_N . On voit que

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}_N(U_N^\diamond) &= D\mathcal{F}(U) - \begin{pmatrix} \mathcal{T} - \mathcal{T}_N & 0 \\ 0 & \mathcal{L} - \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\mathcal{G}^1(U) \\ D\mathcal{G}^2(U) \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \mathcal{T}_N & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\mathcal{G}^1(U) - D\mathcal{G}^1(U_N^\diamond) \\ D\mathcal{G}^2(U) - D\mathcal{G}^2(U_N^\diamond) \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \mathcal{T}_N & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\mathcal{G}^1(U_N^\diamond) - D\mathcal{G}_N^1(U_N^\diamond) \\ D\mathcal{G}^2(U_N^\diamond) - D\mathcal{G}_N^2(U_N^\diamond) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Grâce à l'Hypothèse 3.4.1-(ii), il suffit de démontrer que les trois derniers termes tendent vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. Soit $W_N = (\mathbf{w}_N, \varrho_N, \zeta_N)$ dans la sphère unité de \mathcal{X}_N . Nous procédons trois étapes.

1) On a

$$\begin{pmatrix} D\mathcal{G}^1(U) \cdot W_N \\ D\mathcal{G}^2(U) \cdot W_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}'(\theta)\zeta_N \\ -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\zeta_N - (\mathbf{w}_N \cdot \nabla)\theta, 0, 0 \end{pmatrix}$$

On déduit de (3.33) et (3.34) que, si \mathcal{K} est compact dans $L^2(\Omega)^d$, on a la convergence

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{f} \in \mathcal{K}} \|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_N)\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)} = 0.$$

L'image de la boule unité de \mathcal{X}_N par la fonction

$$(\mathbf{w}_N, \rho_N, \zeta_N) \longmapsto \mathbf{f}'(\theta)\zeta_N,$$

est compacte dans $L^2(\Omega)^d$. D'autre part, $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\zeta_N + (\mathbf{w}_N \cdot \nabla)\theta$ appartient à un sous-espace compact de $L^2(\Omega)$. En combinant avec (3.37), ceci donne

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{T} - \mathcal{T}_N & 0 \\ 0 & \mathcal{L} - \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\mathcal{G}^1(U) \\ D\mathcal{G}^2(U) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

2) Selon la définition de $D\mathcal{G}^1$ et $D\mathcal{G}^2$, on doit montrer la convergence des deux termes

$$(\mathbf{f}'(\theta) - \mathbf{f}'(\theta_N^\diamond))\zeta_N, \quad ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_N^\diamond) \cdot \nabla)\zeta_N - (\mathbf{w}_N \cdot \nabla)(\theta - \theta_N^\diamond).$$

Soit V_N dans la sphère unité de \mathcal{X}_N ,

$$\langle (D\mathcal{G}^1(U) - D\mathcal{G}^1(U_N^\diamond)) \cdot W_N, V_N \rangle \leq \|\mathbf{f}'(\theta) - \mathbf{f}'(\theta_N^\diamond)\|_{L^4(\Omega)^d} \|\zeta_N\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d},$$

En utilisant l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$ et la propriété de Lipschitz de \mathbf{f}' , on trouve

$$\langle (D\mathcal{G}^1(U) - D\mathcal{G}^1(U_N^\diamond)) \cdot W_N, V_N \rangle \leq \|\theta - \theta_N^\diamond\|_{H^1(\Omega)} \|\zeta_N\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d},$$

Comme ζ_N et \mathbf{v}_N sont bornés dans \mathcal{X}_N combiné avec l'estimation (3.40)

$$\langle (D\mathcal{G}^1(U) - D\mathcal{G}^1(U_N^\diamond)) \cdot W_N, V_N \rangle \leq cN^{-s} \|\theta\|_{H^{s+1}(\Omega)} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Sous les mêmes arguments, on trouve

$$\begin{aligned} \langle (D\mathcal{G}^2(U) - D\mathcal{G}^2(U_N^\diamond)) \cdot W_N, \varphi_N \rangle &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N^\diamond\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla \zeta_N\|_{L^2(\Omega)^d} \|\varphi_N\|_{L^6(\Omega)} \\ &\quad + \|\mathbf{w}_N\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla(\theta - \theta_N^\diamond)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\varphi_N\|_{L^6(\Omega)}. \end{aligned}$$

On choisit ℓ égale à $\frac{d}{6}$ dans (3.38) de sorte que $H^\ell(\Omega)$ s'injecte dans $L^3(\Omega)$, on obtient

$$\langle (D\mathcal{G}^2(U) - D\mathcal{G}^2(U_N^\diamond)) \cdot W_N, \varphi_N \rangle \leq c(N^{\frac{d}{6}-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + N^{-s} \|\theta\|_{H^{s+1}(\Omega)}) \|\varphi_N\|_{L^2(\Omega)^d},$$

on déduit aisément de la stabilité de \mathcal{T}_N (3.33) et \mathcal{L}_N (3.35) que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{T}_N & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\mathcal{G}^1(U) - D\mathcal{G}^1(U_N^\diamond) \\ D\mathcal{G}^2(U) - D\mathcal{G}^2(U_N^\diamond) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

3) Évaluons le dernier terme, on a

$$\begin{aligned} \langle (D\mathcal{G}^1(U_N^\diamond) - D\mathcal{G}_N^1(U_N^\diamond)) \cdot W_N, V_N \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{f}'(\theta_N^\diamond)\zeta_N \mathbf{v}_N \, d\mathbf{x} - (\mathbf{f}'(\theta_N^\diamond)\zeta_N, \mathbf{v}_N)_N \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}'(\theta_N^\diamond)\zeta_N \mathbf{v}_N \, d\mathbf{x} - (\mathcal{I}_N(\mathbf{f}'(\theta_N^\diamond))\zeta_N, \mathbf{v}_N)_N. \end{aligned}$$

On pose N^* égal à la partie entière de $\frac{N-1}{2}$, on introduit une approximation \mathbf{f}_{N^*} de $\mathbf{f}'(\theta_N^\diamond)$ dans \mathbb{X}_{N^*} et ζ_{N^*} de ζ_N dans $\mathbb{Y}_{N^*}^\diamond$. Grâce à la propriété d'exactitude de la formule de quadrature (1.13)

$$\begin{aligned} \langle (DG^1(U_N^\diamond) - DG_N^1(U_N^\diamond)) \cdot W_N, V_N \rangle &\leq (1 + 3^d) (\|(\mathbf{f}'(\theta_N^\diamond) - \mathbf{f}_{N^*})\zeta_N\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \|(\zeta_N - \zeta_{N^*})\mathbf{f}_{N^*}\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + 3^d \|(\mathbf{f}'(\theta_N^\diamond) - \mathcal{I}_N(\mathbf{f}'(\theta_N^\diamond)))\zeta_N\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

d'une façon équivalente,

$$\begin{aligned} \langle (DG^1(U_N^\diamond) - DG_N^1(U_N^\diamond)) \cdot W_N, V_N \rangle &\leq (1 + 3^d) \|\mathbf{f}'(\theta_N^\diamond) - \mathbf{f}_{N^*}\|_{L^{\rho'}(\Omega)^d} \|\zeta_N\|_{L^{\rho'}(\Omega)} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + (1 + 3^d) \|\zeta_N - \zeta_{N^*}\|_{L^{\rho'}(\Omega)} \|\mathbf{f}_{N^*}\|_{L^{\rho}(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + 3^d \|\mathbf{f}'(\theta_N^\diamond) - \mathcal{I}_N(\mathbf{f}'(\theta_N^\diamond))\|_{L^{\rho}(\Omega)^d} \|\zeta_N\|_{L^{\rho'}(\Omega)} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{2}$. D'autre part, on introduit les approximations, \mathbf{u}_{N^*} , \mathbf{w}_{N^*} et θ_{N^*} de \mathbf{u}_N^\diamond , \mathbf{w}_N^\diamond et θ_N^\diamond respectivement dans \mathbb{X}_{N^*} et \mathbb{Y}_{N^*} , on voit que

$$\begin{aligned} \langle (DG^2(U_N^\diamond) - DG_N^2(U_N^\diamond)) \cdot W_N, \varphi_N \rangle &\leq (1 + 3^d) (\|\mathbf{u}_N^\diamond - \mathbf{u}_{N^*}\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla \zeta_N\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}_{N^*}\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla(\zeta_N - \zeta_{N^*})\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \|\mathbf{w}_N - \mathbf{w}_{N^*}\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla \theta_N^\diamond\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{w}_{N^*}\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla(\theta_N^\diamond - \theta_{N^*})\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\varphi_N\|_{L^6(\Omega)}. \end{aligned}$$

Les propriétés de stabilité des opérateurs introduits dans [22, Chap. III] entraînent que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{T}_N & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DG^1(U_N^\diamond) - DG_N^1(U_N^\diamond) \\ DG^2(U_N^\diamond) - DG_N^2(U_N^\diamond) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

Ceci prouve que $D\mathcal{F}_N(U_N^\diamond)$ est un isomorphisme de \mathcal{X}_N .

Lemme 3.4.5 *Si la fonction $\mathbf{f}(\cdot)$ est de classe \mathcal{C}^2 et ses dérivées sont bornées, alors il existe un voisinage de U_N^\diamond dans \mathcal{X}_N et une constante positive c , tels que pour tout Z_N dans ce voisinage,*

$$\|D\mathcal{F}_N(U_N^\diamond) - D\mathcal{F}_N(Z_N)\|_{\mathcal{E}} \leq c \|U_N^\diamond - Z_N\|_{L^3(\Omega)^d \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)}. \quad (3.42)$$

Preuve. Posant $Z_N = (\mathbf{z}_N, \zeta_N, \sigma_N)$, on a

$$D\mathcal{F}_N(U_N^\diamond) - D\mathcal{F}_N(Z_N) = (U_N^\diamond - Z_N) - \begin{pmatrix} \mathcal{T}_N & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} DG_N^1(U_N^\diamond) - DG_N^1(Z_N) \\ DG_N^2(U_N^\diamond) - DG_N^2(Z_N) \end{pmatrix}.$$

1) On voit facilement que

$$\begin{aligned} \langle (DG_N^1(U_N^\diamond) - DG_N^1(Z_N)) \cdot W_N, V_N \rangle &= ((\mathbf{f}'(\theta_N^\diamond) - \mathbf{f}'(\sigma_N))\zeta_N, \mathbf{v}_N)_N \\ &\leq 3^d \|\mathcal{I}_N(\mathbf{f}'(\theta_N^\diamond) - \mathbf{f}'(\sigma_N))\|_{L^4(\Omega)^d} \|\zeta_N\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Grâce à la stabilité de l'opérateur \mathcal{I}_N et l'injection de l'espace $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$

$$\langle (DG_N^1(U_N^\diamond) - DG_N^1(Z_N)) \cdot W_N, V_N \rangle \leq 3^d \|\theta_N^\diamond - \sigma_N\|_{H^1(\Omega)} \|\zeta_N\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

2) On obtient aussi,

$$\begin{aligned} & \langle (DG_N^2(U_N^\diamond) - DG_N^2(Z_N)) \cdot W_N, \varphi_N \rangle \\ &= (\mathbf{w}_N \cdot \nabla(\theta_N^\diamond - \sigma_N), \varphi_N)_N - (((\mathbf{u}_N^\diamond - \mathbf{z}_N) \cdot \nabla)\zeta_N, \varphi_N)_N \\ &\leq 3^d (\|\mathbf{w}_N\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla(\theta_N^\diamond - \sigma_N)\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}_N^\diamond - \mathbf{z}_N\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla\zeta_N\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\varphi_N\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On combine ces deux estimations avec la stabilité des opérateurs \mathcal{T}_N (3.33) et \mathcal{L}_N (3.35), ceci donne le résultat désiré.

Lemme 3.4.6 *Pour tout h dans $H^\sigma(\Omega)$, θ_\sharp dans $H^\sigma(\Gamma_\sharp)$ et θ_\star dans $H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)$, si la fonction $\mathbf{f}(\cdot)$ est de classe \mathcal{C}^2 de dérivées bornées et si l'Hypothèse 3.4.1 a lieu, alors on a la majoration*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_N(U_N^\diamond)\|_{L^3(\Omega)^d \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)} &\leq c N^{\frac{d}{6}-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + c N^{-s} (\|p\|_{H^{s+1}(\Omega)} + \|\theta\|_{H^{s+1}(\Omega)}) \\ &\quad + c N^{-\sigma} (\|h\|_{H^\sigma(\Omega)} + \|\theta_\sharp\|_{H^\sigma(\Gamma_\sharp)} + \|\theta_\star\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}), \end{aligned} \quad (3.43)$$

Preuve. De (3.28) on déduit l'expression

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N(U_N^\diamond) &= -(U - U_N^\diamond) + \begin{pmatrix} \mathcal{T} - \mathcal{T}_N & 0 \\ 0 & \mathcal{L} - \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U) \\ \mathcal{G}^2(U) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \mathcal{T}_N & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U) - \mathcal{G}^1(U_N^\diamond) \\ \mathcal{G}^2(U) - \mathcal{G}^2(U_N^\diamond) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \mathcal{T}_N & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U_N^\diamond) - \mathcal{G}_N^1(U_N^\diamond) \\ \mathcal{G}^2(U_N^\diamond) - \tilde{\mathcal{G}}_N^2(U_N^\diamond) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tel que $\tilde{\mathcal{G}}_N^2 = (\mathcal{G}_N^2, \tilde{\theta}_\sharp, \theta_\star)$. Commençons par le premier terme. Par définition,

$$\|U - U_N^\diamond\|_{L^3(\Omega)^d \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)} = (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N^\diamond\|_{L^3(\Omega)^d}^2 + \|p - p_N^\diamond\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\theta - \theta_N^\diamond\|_{H^1(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On utilise l'injection de l'espace $H^\ell(\Omega)$ dans $L^3(\Omega)$ pour $\ell = \frac{d}{6}$, on voit que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N^\diamond\|_{L^3(\Omega)^d} \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^\ell(\Omega)^d}.$$

Combinons avec (3.38) on obtient

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N^\diamond\|_{L^3(\Omega)^d} \leq c N^{\frac{d}{6}-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d}.$$

On déduit de (3.39) et (3.40) que

$$\|U - U_N^\diamond\|_{\mathbb{W}} \leq c N^{\frac{d}{6}-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + c N^{-s} (\|p\|_{H^{s+1}(\Omega)} + \|\theta\|_{H^{s+1}(\Omega)}).$$

Le deuxième terme est majoré dans (3.34) et (3.36). Pour évaluer le troisième terme on considère V_N dans la sphère unité de \mathcal{X}_N , on écrit

$$\langle \mathcal{G}^1(U) - \mathcal{G}^1(U_N^\diamond), V_N \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(\theta) - \mathbf{f}(\theta_N^\diamond)) \cdot \mathbf{v}_N \, d\mathbf{x}.$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (3.17), ce qui donne

$$\langle \mathcal{G}^1(U) - \mathcal{G}^1(U_N^\diamond), V_N \rangle \leq \|\theta - \theta_N^\diamond\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\theta - \theta_N^\diamond\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^2(U) - \mathcal{G}^2(U_N^\diamond), \varphi_N \rangle &= \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \varphi_N \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_N^\diamond \cdot \nabla) \theta_N^\diamond \varphi_N \, d\mathbf{x} \\ &\leq (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N^\diamond\|_{L^3(\Omega)^d} \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla(\theta - \theta_N^\diamond)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_N^\diamond\|_{L^3(\Omega)^d}) \|\varphi_N\|_{L^6(\Omega)}. \end{aligned}$$

Comme $H^\ell(\Omega)$ s'injecte dans $L^3(\Omega)$ pour $\ell = \frac{d}{6}$, on déduit de (3.38) et (3.40) que

$$\langle \mathcal{G}^2(U) - \mathcal{G}^2(U_N^\diamond), \varphi_N \rangle \leq c(N^{\frac{d}{6}-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + N^{-s} \|\theta\|_{H^{s+1}(\Omega)}) \|\varphi_N\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour évaluer le quatrième terme, on a pour tout \mathbf{f}_{N-1} dans \mathbb{X}_{N-1} ,

$$\langle \mathcal{G}^1(U_N^\diamond) - \mathcal{G}_N^1(U_N^\diamond), V_N \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(\theta_N^\diamond) - \mathbf{f}_{N-1}) \cdot \mathbf{v}_N \, d\mathbf{x} + (\mathbf{f}(\theta_N^\diamond) - \mathbf{f}_{N-1}, \mathbf{v}_N)_N.$$

On sait que,

$$(\mathbf{f}(\theta_N^\diamond), \varphi_N)_N = (\mathcal{I}_N(\mathbf{f}(\theta_N^\diamond)), \varphi_N)_N.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^1(U_N^\diamond) - \mathcal{G}_N^1(U_N^\diamond), V_N \rangle &\leq (\|\mathbf{f}(\theta_N^\diamond) - \mathbf{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + 3^d \|\mathcal{I}_N(\mathbf{f}(\theta_N^\diamond)) - \mathbf{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité triangulaire, on déduit que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^1(U_N^\diamond) - \mathcal{G}_N^1(U_N^\diamond), V_N \rangle &\leq c(\|\mathbf{f}(\theta) - \mathbf{f}(\theta_N^\diamond)\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \inf_{\mathbf{f}_{N-1} \in \mathbb{X}_{N-1}} \|\mathcal{I}_N(\mathbf{f}(\theta)) - \mathbf{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

En prenant \mathbf{f}_{N-1} égal à l'image de $\mathbf{f}(\theta)$ par l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)^d$ sur \mathbb{X}_{N-1} (voir [22, Chap. III]), on obtient

$$\langle \mathcal{G}^1(U_N^\diamond) - \mathcal{G}_N^1(U_N^\diamond), V_N \rangle \leq cN^{-s} \|\theta\|_{H^{s+1}(\Omega)} \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

D'autre part, sous les mêmes arguments on voit que

$$\int_{\Omega} h \varphi_N d\mathbf{x} - (h, \varphi_N)_N \leq cN^{-\sigma} \|h\|_{H^\sigma(\Omega)} \|\varphi_N\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\langle \theta_{\sharp}, \varphi_N \rangle_{\Gamma_{\sharp}} - (\theta_{\sharp}, \varphi_N)_{\Gamma_{\sharp}}^N \leq cN^{-\sigma} \|\theta_{\sharp}\|_{H^\sigma(\Gamma_{\sharp})} \|\varphi_N\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}_N^{\diamond} \cdot \nabla) \theta_N^{\diamond} \varphi_N d\mathbf{x} + ((\mathbf{u}_N^{\diamond} \cdot \nabla) \theta_N^{\diamond}, \varphi_N)_N \leq c(N^{\ell-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + N^{-s} \|\theta\|_{H^{s+1}(\Omega)}) \|\varphi_N\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mettant bout-à bout ces trois dernières estimations, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^2(U_N^{\diamond}) - \mathcal{G}_N^2(U_N^{\diamond}), \varphi_N \rangle &\leq c(N^{\frac{d}{6}} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + N^{-s} \|\theta\|_{H^{s+1}(\Omega)}) \|\varphi_N\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + cN^{-\sigma} (\|h\|_{H^\sigma(\Omega)} + \|\theta_{\sharp}\|_{H^\sigma(\Gamma_{\sharp})}) \|\varphi_N\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Grâce à la stabilité des opérateurs \mathcal{T}_N (3.33) et \mathcal{L}_N (3.35), on obtient l'estimation souhaitée.

3.4.3 Résultat et conclusion

On déduit des Lemmes 3.4.4 à 3.4.6 que toutes les hypothèses pour appliquer le théorème de Brezzi, Rappaz et Raviart [28] sont satisfaites, on est en position d'énoncer le théorème principal de cette section.

Théorème 3.4.7 *Soit (\mathbf{u}, p, θ) une solution du problème (3.9)-(3.10)-(3.11) vérifiant l'Hypothèse 3.4.1. On suppose que la fonction $\mathbf{f}(\cdot)$ est de classe \mathcal{C}^2 et ses dérivées sont bornées. Pour tout h dans $H^\sigma(\Omega)$, θ_{\sharp} dans $H^\sigma(\Gamma_{\sharp})$ et θ_{\star} dans $H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})$, $\sigma \geq 2$, il existe un voisinage de (\mathbf{u}, p, θ) dans $L^3(\Omega)^d \times H_{\diamond}^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et un entier positif N_{\diamond} , tels que pour tout $N \geq N_{\diamond}$, le problème (3.24) admette une solution unique $(\mathbf{u}_N, p_N, \theta_N)$ dans ce voisinage. De plus, il existe une constante positive telle que cette solution vérifie*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{L^3(\Omega)^d} + \|p - p_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\theta - \theta_N\|_{H^1(\Omega)} \\ \leq cN^{\frac{d}{6}-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + cN^{-s} (\|p\|_{H^{s+1}(\Omega)} + \|\theta\|_{H^{s+1}(\Omega)}) \\ + cN^{-\sigma} (\|h\|_{H^\sigma(\Omega)} + \|\theta_{\sharp}\|_{H^\sigma(\Gamma_{\sharp})} + \|\theta_{\star}\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}). \end{aligned} \quad (3.44)$$

L'estimation (3.44) est quasi-optimale et les hypothèses nécessaires mises sur la solution (\mathbf{u}, p, θ) sont pas restrictives.

3.5 Simulation numérique

L'objectif de cette section est d'effectuer des simulations numériques du couplage Darcy/chaueur que nous avons étudié dans les sections précédentes. On va proposer un algorithme itératif non linéaire,

que nous avons associé au problème (3.2) à (3.5). Puis, on traite un cas réel et on propose le problème de Horton-Rogers-Lapwood à simuler. Comme dans le Chapitre 2, les calculs sont effectués sur un code FreeFem3D, version spectrale, voir D. Yakoubi [82] en collaboration avec S. Del Pino [42].

3.5.1 Schéma itératif

Pour résoudre le système non linéaire couplé, nous adoptons la procédure itérative suivante basée sur un calcul découplé des équations de Darcy et de la chaleur que nous présentons dans le cas continu pour la simplicité : Nous choisissons θ^0 comme une solution de problème

$$\begin{cases} -\lambda\Delta\theta^0 = h^0 & \text{dans } \Omega, \\ \theta^0 = \theta_\star & \text{sur } \Gamma_\star, \quad \frac{\partial\theta^0}{\partial\mathbf{n}} = \theta_\sharp & \text{sur } \Gamma_\sharp. \end{cases}$$

On considère le schéma suivant

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}^n, p^n, \theta^n) \in L^3(\Omega)^d \times H_\diamond^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \text{ tel que } \theta - \tilde{\theta}_\star \in H_\star^1(\Omega) \text{ et} \\ & \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \alpha \int_\Omega \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla p^n \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}(\theta^{n-1}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}; \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\forall q \in H_\diamond^1(\Omega), \quad \int_\Omega \mathbf{u}^n \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} = 0, \quad (3.46)$$

$$\forall \varphi \in H_\star^1(\Omega), \quad \lambda \int_\Omega \nabla \theta^n \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \theta^n \varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega h^n \cdot \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (3.47)$$

On va montrer que ce schéma converge sous certaines contraintes, plus précisément on exhibe les conditions pour que la suite $(\theta^{n+1} - \theta^n)_n$ soit contractante et que la suite $(\mathbf{u}^n)_n$ vérifie

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq K \|\theta^n - \theta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.48)$$

Théorème 3.5.1 *Pour tout h dans $L^2(\Omega)$, θ_\sharp dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp))'$ et θ_\star dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)$ vérifiant*

$$\frac{c_{2CR}}{\lambda} (\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_\sharp\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)'} + \|\theta_\star\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}) < 1, \quad (3.49)$$

les suites $(\mathbf{u}^n)_n$ et $(\theta^n)_n$ convergent, en outre

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|\theta^n - \theta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.50)$$

$$\|\theta^{n+1} - \theta^n\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c_{2CR}}{\lambda} (\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_\sharp\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)'} + \|\theta_\star\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}) \|\theta^n - \theta^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.51)$$

Preuve. 1) On choisit $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n$ et l'injecte dans (3.45) aux étapes n et $n+1$. La différence des deux équations obtenues donne

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 &= \gamma \int_\Omega (\mathbf{f}(\theta^n) - \mathbf{f}(\theta^{n-1})) \cdot (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \, d\mathbf{x} \\ &\leq \gamma \|\mathbf{f}(\theta^n) - \mathbf{f}(\theta^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|\theta^n - \theta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

2) De la même façon, on choisit $\varphi = \theta^{n+1} - \theta^n$, on trouve

$$\begin{aligned} \lambda \|\nabla(\theta^{n+1} - \theta^n)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \cdot \nabla) \theta^{n+1} (\theta^{n+1} - \theta^n) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) (\theta^{n+1} - \theta^n) (\theta^{n+1} - \theta^n) d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne

$$\lambda \|\nabla(\theta^{n+1} - \theta^n)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^3(\Omega)^d} \|\theta^{n+1}\|_{L^6(\Omega)}.$$

Grâce à l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$, on a

$$\lambda \|\nabla(\theta^{n+1} - \theta^n)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^3(\Omega)^d} \|\theta^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Comme la suite $(\theta^n)_n$ est bornée

$$\|\theta^n\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 (\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_{\sharp}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'} + \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}),$$

on trouve

$$\lambda \|\nabla(\theta^{n+1} - \theta^n)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c_2 (\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_{\sharp}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'} + \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}) \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^3(\Omega)^d}.$$

Nous rappelons du Théorème 3.2.6 que pour $s = 1$ ou $\frac{1}{2}$ dépendant de la géométrie du domaine

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{H^s(\Omega)^d} \leq c_R \|\theta^n - \theta^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par conséquent,

$$\lambda \|\nabla(\theta^{n+1} - \theta^n)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{(c_2 c_R)}{\lambda} (\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta_{\sharp}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\sharp})'} + \|\theta_{\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star})}) \|\theta^n - \theta^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Finalement, grâce à (3.49) la suite $(\theta^{n+1} - \theta^n)_n$ est contractante.

Théorème 3.5.2 *Sous les hypothèses du théorème précédent, la limite (\mathbf{u}, p, θ) de la suite $((\mathbf{u}_n, p_n, \theta_n))_n$ est une solution du problème (3.9)-(3.10)-(3.11).*

3.5.2 Précision spatiale

Nous nous intéressons à la convergence de la solution (\mathbf{u}, p, T) de (3.2)-(3.3)-(3.4)-(3.5) par rapport au degré de polynôme N basée sur une solution analytique en dimension 2 définie dans un carré $\Omega =]-1, 1[^2$ par

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= -\sin(\pi x) \cos(\pi y), & u_2(x, y) &= \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ p(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \cos(\pi y), & T(x, y) &= 2 \cos(\pi x) \sin(\pi y). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Nous avons choisi le coefficient α non constant et dépendant de la température comme suit

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{T^2(x, y) + 1}$$

mais la conductivité thermique λ est prise égale à 1. Numériquement, la fonction α a été remplacée par son image par l'opérateur d'interpolation de Lagrange et l'intégrale $\alpha \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$ a été remplacée par $\int_{\Omega} (I_N \alpha) \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$. Les données correspondantes à cette solution sont données par

$$\begin{aligned} F_1(T) &= \frac{-1}{T^2 + 1} \sin(\pi x) \cos(\pi y) - \cos(\pi x) \cos(\pi y) \\ F_2(T) &= \frac{1}{T^2 + 1} \cos(\pi x) \sin(\pi y) + \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\ h &= 4\pi^2 \cos(\pi x) \sin(\pi y) + 2\pi \cos(\pi y) \sin(\pi y). \end{aligned}$$

Nous traçons dans la Figure 3.1 l'erreur de vitesse, pression et température en norme L^2 et dans la Figure 3.2 l'erreur de la pression et température en norme H^1 , entre la solution exacte et la solution approchée en fonction du degré de polynôme entre 5 et 25.

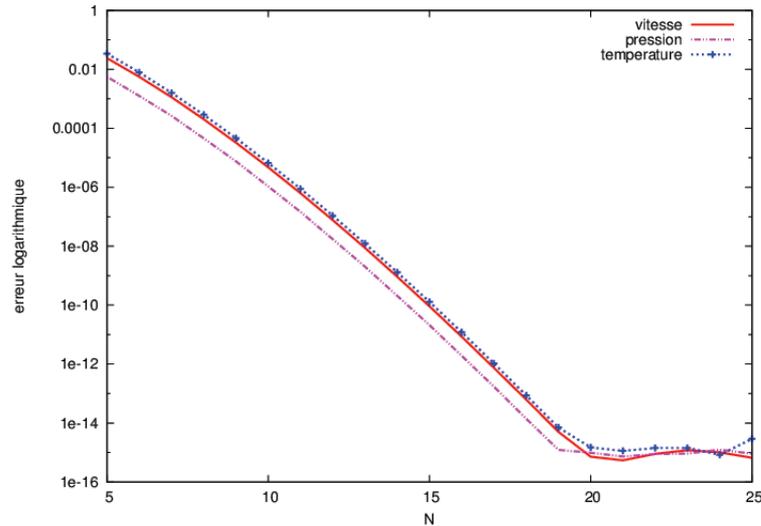


FIGURE 3.1 – Convergence en norme $L^2(\Omega)$ par rapport au degré de polynôme

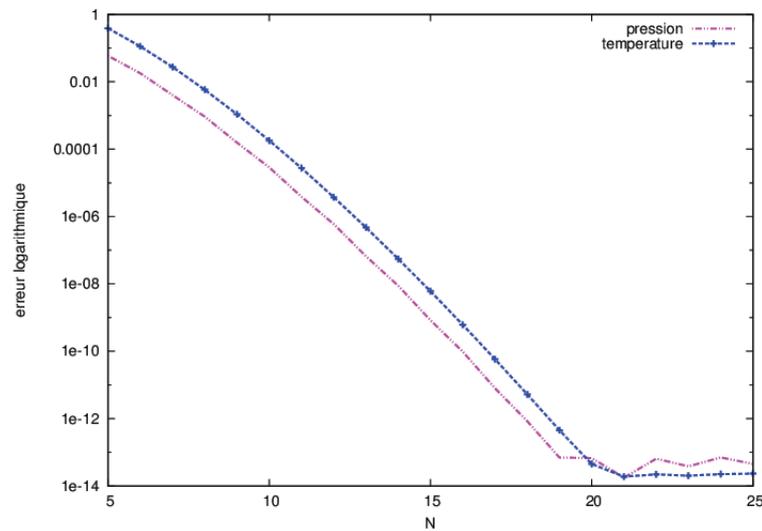


FIGURE 3.2 – Convergence en norme $H^1(\Omega)$ par rapport au degré de polynôme

Ces résultats confirment les taux attendus de convergence. Donc la convergence spectrale pour toutes les inconnues est obtenue qui est compatible avec l'estimation d'erreur (3.44). Nous observons qu'au-delà de degré 20, l'erreur principale est due à la précision de la machine, de sorte que la courbe s'arrête de décroître.

Dans la figure 3.3, nous présentons successivement la vitesse, la pression, la température, telles que les solutions exactes sont dans le panneau de gauche. et les solutions discrètes sont dans celui de droite issue de (3.52), où les solutions discrètes sont calculées pour $N = 17$. Les résultats dans les deux parties de la figure ne peuvent pas être distingués.

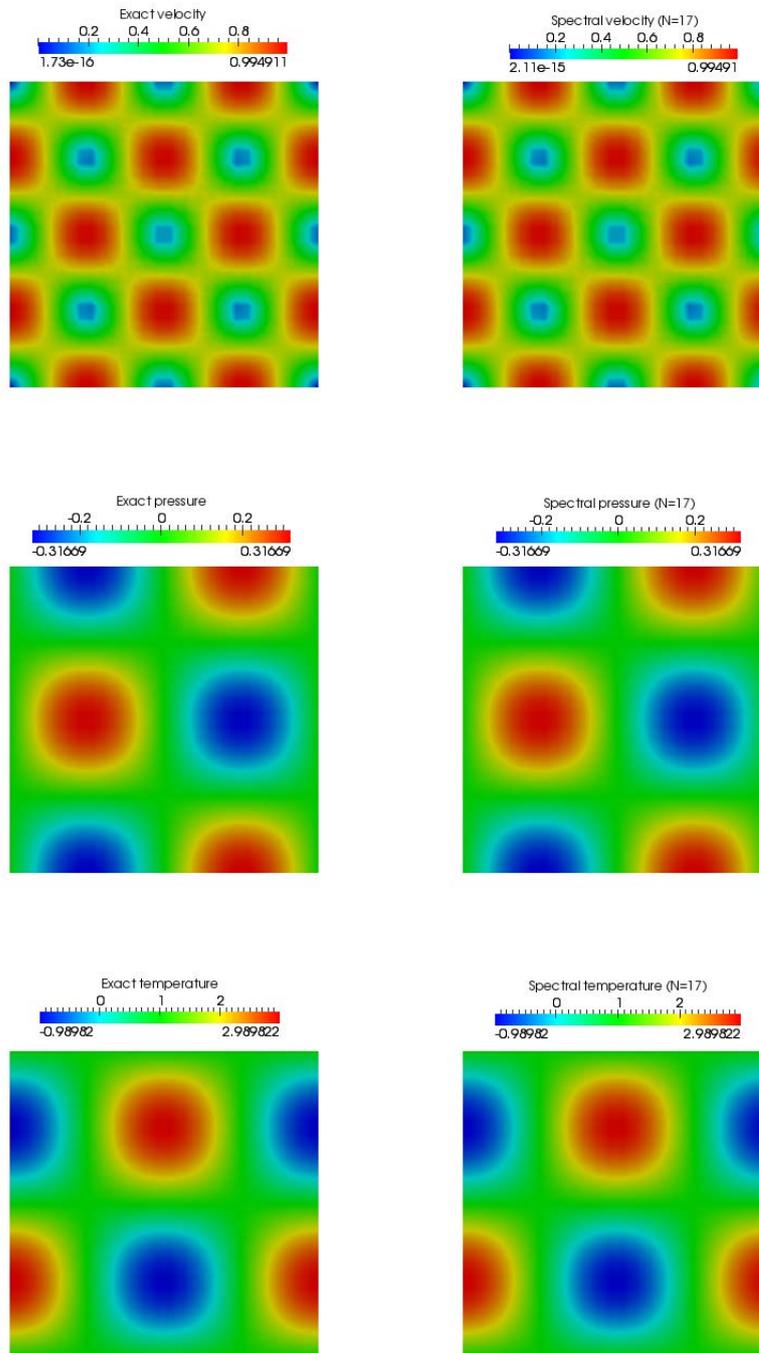


FIGURE 3.3 – Solution exacte (Gauche) vers solution spectrale pour $N = 17$ (Droite)

3.5.3 Problème de Horton-Rogers-Lapwood

Cette section traite les simulations de problème de Horton-Rogers-Lapwood (HRL), qui a été étudié en premier par Horton et Rogers [56] et par la suite par Lapwood [59] (pour une synthèse, voir par exemple [67, Chap. 6]), lorsque le milieu poreux saturé de fluide présente une géométrie de la couche horizontale, et est chauffé de manière uniforme à partir du fond de la couche, comme il est expliqué dans la figure 3.4. Par conséquent, il peut exister une différence de température entre les limites supérieure et inférieure de la couche. Comme la direction positive du gradient de température due à cette différence de température est opposée à celle de l'accélération de la gravité, il n'y a pas de convection naturelle pour un petit gradient de température dans le milieu poreux. Dans ce cas, l'énergie thermique est transférée uniquement à partir de la région à haute température (au bas de la couche horizontale) de la région à basse température (en haut de la couche horizontale) par conduction thermique. Cependant, si la différence de température est suffisamment grande, elle peut déclencher une convection naturelle dans le milieu poreux saturé d'un fluide.

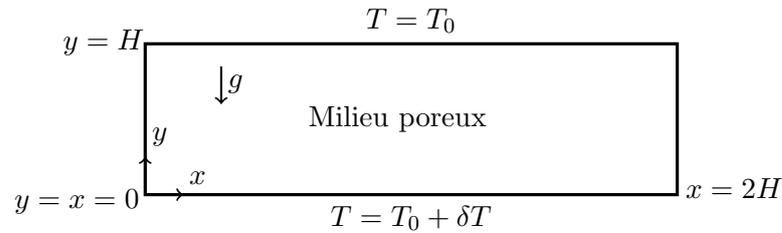


FIGURE 3.4 – Convection Naturelle : Chauffage par le bas

Les équations sont appropriées dans la configuration simple :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \frac{\mu}{K} \mathbf{u} + \nabla p &= \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \Delta T &= 0, \end{aligned} \tag{3.53}$$

où ρ_0 et μ sont la densité et la viscosité de fluide, K est la perméabilité, β le coefficient d'expansion thermique, $\mathbf{g} = (0, g)$ l'accélération gravitationnelle. Le système (3.53) a une solution en état stationnaire, qui satisfait les conditions aux bords $T|_{y=0} = T_0 + \delta T$ et $T|_{y=H} = T_0$:

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \delta T \left(1 - \frac{y}{H}\right) \\ \mathbf{u} &= (0, 0), \quad p = P_0 - \rho_0 g \left(y + \frac{1}{2} \beta \delta T \left(\frac{y^2}{H} - 2y\right)\right). \end{aligned} \tag{3.54}$$

Cette solution décrit l'état de la conduction, celui dans lequel le transfert de chaleur est uniquement par conduction thermique, c'est à dire quand δT est assez petit.

La procédure itérative proposée (3.45), (3.47) associée à la méthode spectrale pour la résolution du problème HRL dans un milieu poreux saturé d'un fluide est validée par deux réalisations. Le domaine rectangulaire $\Omega =]0, 2[\times]0, 1[$ est considéré dans le calcul. Dans le premier test, les paramètres physiques sont pris comme suit : $\delta T = 1$, $\beta = 0, 1$, $g = 10$, $\mu = K = 1$. Comme il est montré dans la figure 3.5, la convergence de schéma itératif (3.45), (3.47) est confirmée, il est clair aussi que l'erreur $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2}$ est inférieur à l'erreur $\|T^n - T^{n-1}\|_{L^2}$, ce qui est compatible avec l'estimation (3.50).

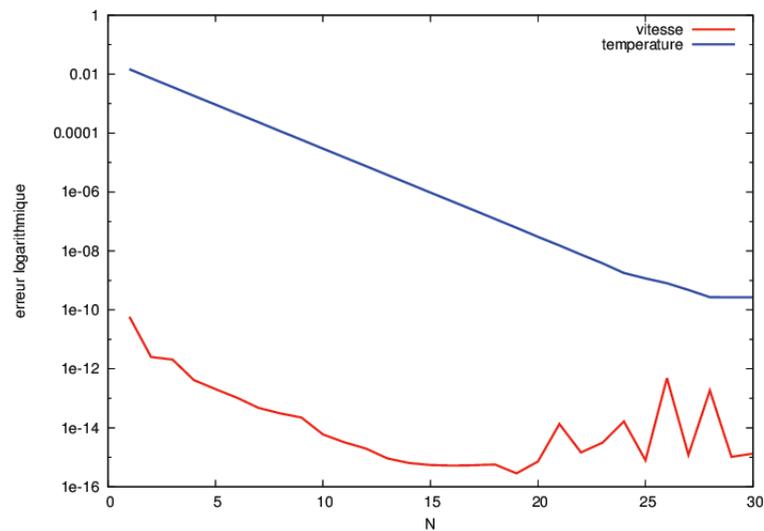


FIGURE 3.5 – Convergence par rapport à l'iteration de point fixe

Dans le second test, nous augmentons la différence de température $\delta T = 100$ entre le haut et le bas du domaine. La Figure 3.6 montre que lorsque δT est plus élevé, l'instabilité apparaît sous la forme d'un mouvement cellulaire.

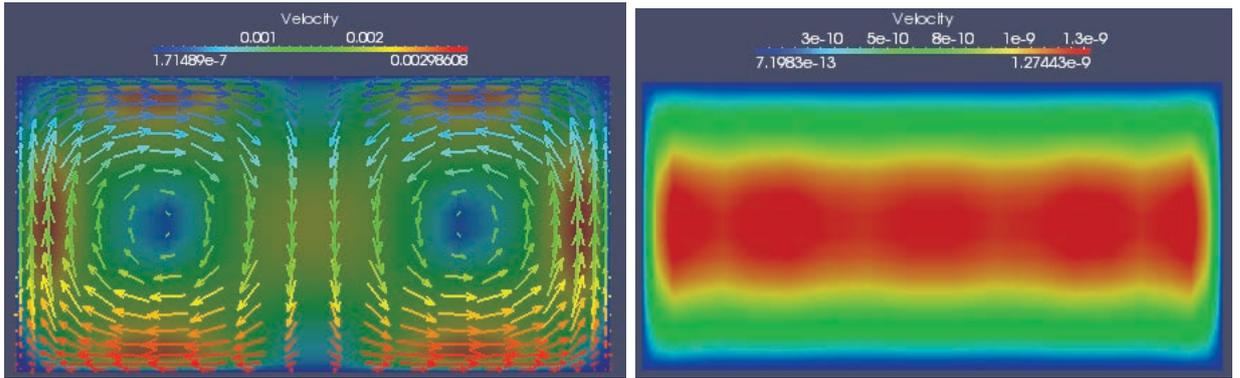


FIGURE 3.6 – Solution vitesse quand $\delta T = 100$ (Gauche) solution vitesse de (3.54) quand $\delta T = 1$ (Droite)

3.5.4 Simulation numérique de l'équation de réaction-diffusion couplée avec l'équation de Darcy

L'objectif de cette section est d'effectuer des simulations numériques sur les interactions de la convection naturelle dans un milieu poreux. Le modèle consiste à l'équation de réaction-diffusion couplée avec la loi de Darcy comme il est décrit dans (3.1) dont la première équation soit remplacée par

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \lambda \Delta T + qK(T),$$

où q est le dégagement de la chaleur et $K(T)$ est la dépendance en température de la vitesse de réaction donnée par la loi d'Arrhenius :

$$K(T) = k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right),$$

où E représente l'énergie d'activation, R la constante de gaz universelle et k_0 le facteur pré-exponentiel. Le domaine Ω considéré ici est le carré $]0, 2[^2$. On effectue le changement de variable

$$\theta = \frac{E(T - T_0)}{RT_0^2}$$

on obtient le nouveau système

$$\begin{aligned} \partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= \Delta T + F_K \exp(\theta) \\ \mathbf{u} + \nabla p &= R_p \theta \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{3.55}$$

tel que F_K s'appelle le paramètre de Frank-Kamenetskii (voir [48]), et R_p le nombre de Rayleigh. Le problème (3.55) est complété par les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \theta &= 0 \quad \text{sur }]0, 2[\times \{0, 2\}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \{0, 2\} \times]0, 2[. \end{aligned}$$

On réfère à Allali et al. [6] pour la figure 3.7, telle qu'elle explique la relation entre les paramètres F_K et R_p .

Pour mettre le problème (3.55) en œuvre, on a écrit un code encore en FreeFem3d, en utilisant le

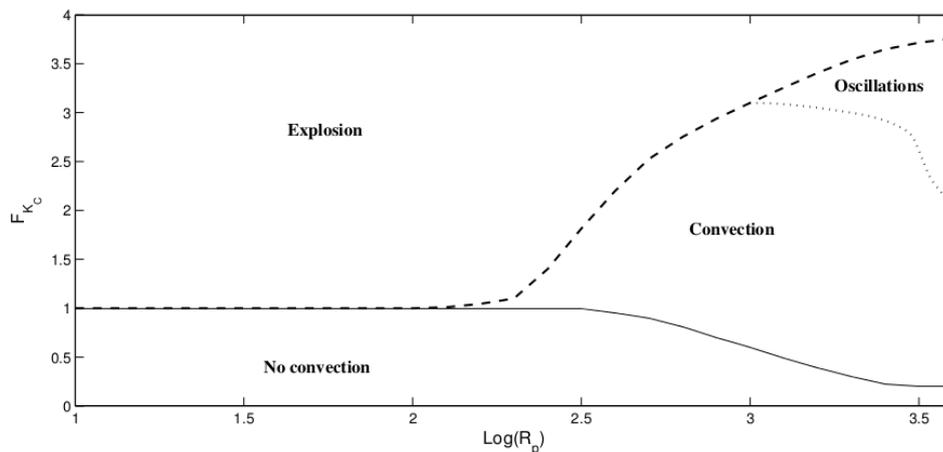


FIGURE 3.7 – Simulations numériques montrent quatre régions différentes dans le plan (R_p, F_K)

schéma d'Euler implicite en temps pour la première équation de (3.55) en prenant le pas du temps égal à 5×10^{-3} , et discrétisation par méthode spectrale pour un degré de polynôme N égal à 30. On choisit les paramètres (F_K, R_p) égaux à $(1, 100)$.

La figure 3.8 illustre les champs de vecteurs de la vitesse, on voit deux tourbillons situés près de la limite supérieure du domaine.

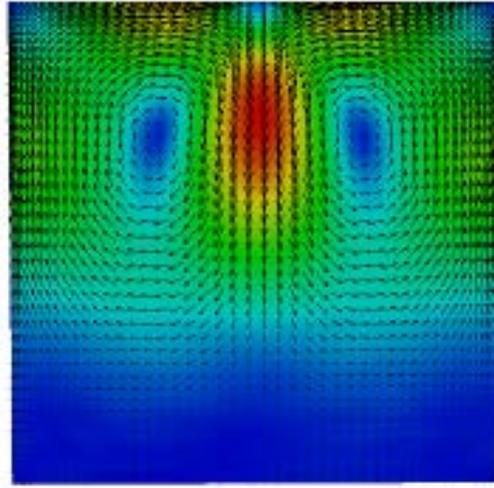


FIGURE 3.8 – Champ de vecteurs de vitesse de (3.55) pour $F_K = 1$ et $R_p = 100$

La figure 3.9 montre la solution température en haut et pression en bas de (3.55) pour les mêmes valeur de F_K et R_p .

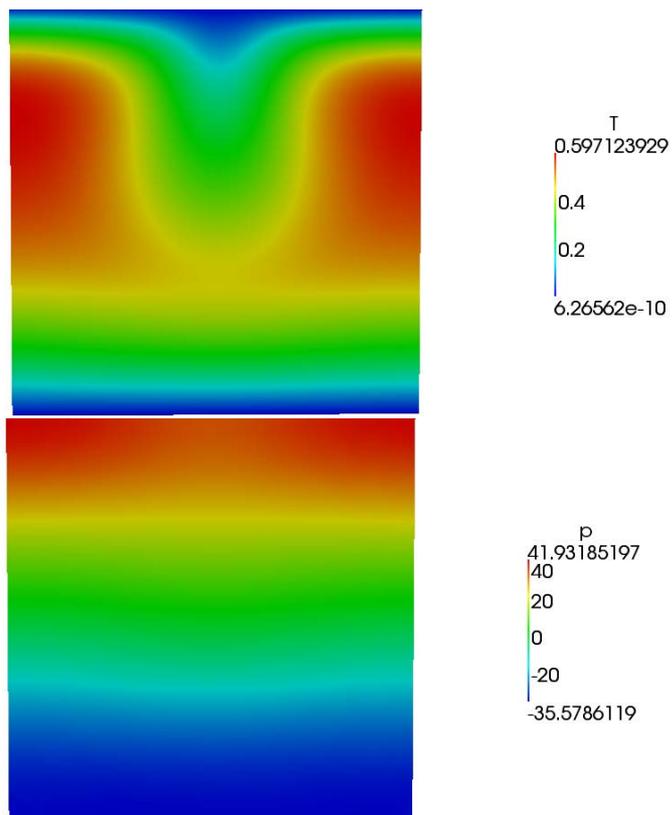


FIGURE 3.9 – Solution température (en haut) et pression (en bas) de (3.55)

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité la discrétisation par méthode spectrale du couplage de l'équation de la chaleur avec les équations de Darcy dans le cas stationnaire. Nous avons montré que les deux problèmes continus et discrets admettent au moins une solution dans les espaces appropriés. Les estimations a priori sont ensuite établies dans les normes appropriées. Le problème de couplage n'est pas linéaire, nous introduisons un système itératif basé sur l'algorithme de point fixe dont la convergence est établie. Des tests numériques confirment ces résultats théoriques.

En outre, nous avons simulé le problème bien connu que l'on appelle Horton-Rogers-Lapwood, où les résultats obtenus sont en concordance totale avec les résultats usuels : la convection naturelle est observée lorsque la différence de la température δT est plus élevée. Un autre problème a été mis en œuvre sur les interactions naturelles dans un milieu poreux.

Chapitre 4

Discrétisation spectrale des équations de Darcy couplées avec l'équation de la chaleur et de la masse

Ce chapitre consiste à un article en préparation.

Sommaire

4.1	Introduction	112
4.2	Problème continu	113
4.2.1	Formulation variationnelle	114
4.2.2	Estimations a priori	115
4.2.3	Résultats d'existence	117
4.3	Problème discret	119
4.3.1	Discrétisation temporelle	120
4.3.2	Discrétisation spatiale	122
4.4	Analyse d'erreur a priori	123
4.4.1	Estimation d'erreur en temps	123
4.4.2	Estimation d'erreur en espace	125
4.4.3	Lemmes techniques	127
4.4.4	Résultat et conclusion	129
4.5	Résultats numériques	130
4.5.1	Précision temporelle	130
4.5.2	Précision spatiale	133
4.5.3	Problème de Horton-Rogers-Lapwood	137
4.7	Conclusion	141

4.1 Introduction

Le terme “transfert de masse” est utilisé ici dans un sens spécialisé, à savoir le transport d’une substance qui est impliquée en tant que composant (constituant, espèces) dans un mélange fluide, par exemple, le transport de sel dans l’eau saline. Comme nous le verrons ci-dessous, le transfert de masse convective est analogue aux convection et transfert de chaleur.

Le couplage de transfert de chaleur et de masse par la convection naturelle dans un fluide saturant un milieu poreux, a reçu une grande attention au cours des dernières années due à l’importance de ce processus qui se produit dans des nombreux phénomènes en ingénierie et géophysique, stockage de l’énergie thermique et des systèmes récupérables et des réservoirs pétroliers. Plusieurs recherches sur ce sujet sont effectuées par Nield et Bejan [67], Ingham et Pop [58, 69], Vafai [81], Vadasz [80] et Moorthy et Senthilvadivu [63].

Dans les circonstances survenant le plus souvent les transports de chaleur et de masse (par exemple, le sel) ne sont pas directement couplés, et la première équation de (3.1) et l’équation (1.6) (qui sont clairement découplées) ont lieu sans changement. Dans la convection à double diffusion (par exemple, thermohaline) le couplage a lieu parce que la densité du fluide dépend à la fois de la température T et de la concentration C . Dans ce cas la loi de Darcy s’écrit sous l’approximation de Bousinesq dans le cas non stationnaire par

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{F}(T, C), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dans certaines circonstances, on a un couplage direct entre l’équation de la chaleur et l’équation de masse. C’est alors que le phénomène appelé cross-diffusion (les effets de Soret et Dufour) n’est pas négligeable (voir Eckert et Drake [45]). L’effet de Soret se réfère au flux massique produit par un gradient de température et l’effet de Dufour se réfère au flux de la chaleur produit par un gradient de concentration. Si on note h_1 la source de chaleur et h_2 la source de masse, nous avons mis en place de la première équation de (3.1) et l’équation (1.6),

$$\partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T - \nabla \cdot (\lambda_{11} \nabla T) - \nabla \cdot (\lambda_{12} \nabla C) = h_1,\tag{4.2}$$

$$\partial_t C + (\mathbf{u} \cdot \nabla)C - \nabla \cdot (\lambda_{22} \nabla C) - \nabla \cdot (\lambda_{21} \nabla T) = h_2,\tag{4.3}$$

où λ_{11} et λ_{22} sont respectivement, les coefficients de la diffusivité thermique et massique et λ_{12} et λ_{21} sont respectivement, les coefficients de Dufour et Soret du milieu poreux (voir par exemple [5, 10, 46, 64, 70]).

4.2 Problème continu

On considère un ouvert borné connexe Ω de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , à frontière lipschitzienne $\partial\Omega$. On suppose que la frontière $\partial\Omega$ est divisée en deux parties $\Gamma_\star, \Gamma_\sharp$ de la façon suivante

$$\Gamma_\star \cap \Gamma_\sharp = \emptyset \quad \text{et} \quad \bar{\Gamma}_\star \cup \bar{\Gamma}_\sharp = \partial\Omega,$$

telle que Γ_\star est de mesure positive dans $\partial\Omega$ et $\partial\Gamma_\star$ est une sous-variété lipschitzienne de $\partial\Omega$. Soit \tilde{T} un nombre réel positif. On s'intéresse dans ce chapitre aux équations couplées (4.1)-(4.2)-(4.3) définies dans $\Omega \times]0, \tilde{T}[$, munies de conditions aux limites suivantes

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0, \tilde{T}[, \quad (4.4)$$

$$T = T_\star \quad \text{sur} \quad \Gamma_\star \times]0, \tilde{T}[, \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \theta_\sharp \quad \text{sur} \quad \Gamma_\sharp \times]0, \tilde{T}[, \quad (4.5)$$

$$C = C_\star \quad \text{sur} \quad \Gamma_\star \times]0, \tilde{T}[, \quad \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = \xi_\sharp \quad \text{sur} \quad \Gamma_\sharp \times]0, \tilde{T}[, \quad (4.6)$$

et les conditions initiales

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0, \quad T(\cdot, 0) = T_0 \quad \text{et} \quad C(\cdot, 0) = C_0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (4.7)$$

Dans ce qui suit, on suppose que :

- Les fonctions λ_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$, sont positives continues sur Ω et bornées, i.e. il existe deux constantes positives λ_1, λ_2 telles que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \lambda_1 \leq \lambda_{ij}(\mathbf{x}) \leq \lambda_2.$$

On pose

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

et on suppose la propriété de coercivité suivante

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^2, \quad \zeta \Lambda \zeta^t \geq \beta |\zeta|^2, \quad (4.8)$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 .

- La fonction \mathbf{F} est assez régulière de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^d

- elle est continuellement dérivable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à dérivée bornée ;
- il existe un couple de réel (T_b, C_b) où la fonction \mathbf{F} s'annule.

On effectue le même raisonnement que dans le Chapitre 3, on introduit la constante

$$\gamma = \sup_{\zeta, \eta \in \mathbb{R}} |\nabla \mathbf{F}(\zeta, \eta)|.$$

Puis on pose $\theta = T - T_b$ et $\xi = C - C_b$ et on définit la fonction $\mathbf{f}(\theta, \xi) = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}(T, C)$. Cette fonction s'annule en $(0, 0)$, est continuellement dérivable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la norme de son gradient ≤ 1 .

Afin de poser les conditions et les hypothèses nécessaires, on écrit un autre système équivalent au système d'équations (4.1) à (4.7) sur lequel on va effectuer notre étude dans la suite

$$\partial_t \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} + \nabla p = \gamma \mathbf{f}(\theta, \xi) \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, \tilde{T}[\quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, \tilde{T}[\quad (4.10)$$

$$\partial_t \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta - \nabla \cdot (\lambda_{11} \nabla \theta) - \nabla \cdot (\lambda_{12} \nabla \xi) = h_1 \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, \tilde{T}[\quad (4.11)$$

$$\partial_t \xi + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \xi - \nabla \cdot (\lambda_{22} \nabla \xi) - \nabla \cdot (\lambda_{21} \nabla \theta) = h_2 \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, \tilde{T}[. \quad (4.12)$$

Ce système des équations est muni de conditions aux limites

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega \times]0, \tilde{T}[\quad (4.13)$$

$$\theta = \theta_\star = T_\star - T_b \quad \text{et} \quad \xi = \xi_\star = C_\star - C_b \quad \text{sur} \quad \Gamma_\star \times]0, \tilde{T}[\quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \theta_\# \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} = \xi_\# \quad \text{sur} \quad \Gamma_\# \times]0, \tilde{T}[, \quad (4.15)$$

et les conditions initiales

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0 = T_0 - T_b(\cdot, 0) \quad \text{et} \quad \xi(\cdot, 0) = \xi_0 = C_0 - C_b(\cdot, 0) \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (4.16)$$

4.2.1 Formulation variationnelle

On suppose désormais que

$$\begin{aligned} h_1, h_2 &\in L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)), \quad \theta_\star, \xi_\star \in L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)), \\ \theta_\#, \xi_\# &\in L^2(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)'), \quad \mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^d \quad \text{et} \quad \theta_0, \xi_0 \in L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (4.17)$$

On note $\tilde{\theta}_\star, \tilde{\xi}_\star$ les relèvements de θ_\star, ξ_\star dans $H^1(\Omega)$.

La formulation variationnelle s'écrit

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \cap L^2(0, \tilde{T}; L^3(\Omega)^d)$, $p \in L^2(0, \tilde{T}; H^1_\diamond(\Omega))$,
 $\theta \in L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))$ et $\xi \in L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))$,

tels que

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0 \quad \text{et} \quad \xi(\cdot, 0) = \xi_0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

et pour tout t , $0 \leq t \leq \tilde{T}$,

$$\theta = \theta_\star \quad \text{et} \quad \xi = \xi_\star \quad \text{sur} \quad \Gamma_\star,$$

$$\forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla p \, d\mathbf{x} = \gamma \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta, \xi) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (4.18)$$

$$\forall q \in H^1_\diamond(\Omega), \quad \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} = 0, \quad (4.19)$$

$$\forall \varphi \in H^1_\star(\Omega), \quad \int_{\Omega} \partial_t \theta \, \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \, \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{11} \nabla \theta \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \lambda_{12} \nabla \xi \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} h_1 \, \varphi \, d\mathbf{x} + \langle (\lambda_{11} \theta_\# + \lambda_{12} \xi_\#), \varphi \rangle_{\Gamma_\#}, \quad (4.20)$$

$$\forall \psi \in H^1_\star(\Omega), \quad \int_{\Omega} \partial_t \xi \, \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \xi \, \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{22} \nabla \xi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \lambda_{21} \nabla \theta \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} h_2 \, \psi \, d\mathbf{x} + \langle (\lambda_{22} \xi_\# + \lambda_{21} \theta_\#), \psi \rangle_{\Gamma_\#}. \quad (4.21)$$

Sous des arguments usuels, les problèmes (4.18) à (4.21) et (4.1) à (4.7) sont équivalents.

4.2.2 Estimations a priori

Proposition 4.2.1 *Pour tout*

$$h_1, h_2 \in L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)), \quad \theta_\star, \xi_\star \in H^1(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)),$$

$$\theta_\#, \xi_\# \in L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}_0(\Gamma_\#)'), \quad \mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^d \quad \text{et} \quad \theta_0, \xi_0 \in L^2(\Omega),$$

toute solution $(\mathbf{u}, \theta, \xi)$ du problème (4.18) à (4.21) vérifie pour tout t , $0 \leq t \leq \tilde{T}$,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)}^2 \leq \frac{\gamma^2}{\alpha} (\|\theta\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\xi\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2) + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2, \quad (4.22)$$

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\xi(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \|\nabla \theta\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)}^2 + \beta \|\nabla \xi\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)}^2 \leq \mathcal{P}, \quad (4.23)$$

telle que

$$\mathcal{P} = \|h_1\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|h_2\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + 2\lambda_2 (\|\theta_\#\|_{L^2(0,t;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)')}^2 + \|\xi_\#\|_{L^2(0,t;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)')}^2) \\ + (\lambda_2 + c_0) (\|\theta_\star\|_{H^1(0,t;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))}^2 + \|\xi_\star\|_{L^2(0,t;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))}^2) + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\xi_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Preuve. 1) Selon les mêmes arguments de preuves que pour la Proposition 3.2.4 et le Lemme 2.2.4 on trouve (4.22).

2) On pose $\tilde{\theta} = \theta - \tilde{\theta}_*$ et $\tilde{\xi} = \xi - \tilde{\xi}_*$. De (4.20) et (4.21) on voit que

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H_*^1(\Omega), \quad & \int_{\Omega} \partial_t \tilde{\theta} \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{\theta} \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{11} \nabla \tilde{\theta} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \lambda_{12} \nabla \tilde{\xi} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} H_1 \varphi \, d\mathbf{x}, \\ \forall \psi \in H_*^1(\Omega), \quad & \int_{\Omega} \partial_t \tilde{\xi} \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{\xi} \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{22} \nabla \tilde{\xi} \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \lambda_{21} \nabla \tilde{\theta} \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} H_2 \psi \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H_1 \varphi \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} h_1 \varphi \, d\mathbf{x} + \langle (\lambda_{11} \theta_{\#} + \lambda_{12} \xi_{\#}), \varphi \rangle_{\Gamma_{\#}} \\ &\quad - \int_{\Omega} \partial_t \tilde{\theta}_* \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{\theta}_* \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \lambda_{11} \nabla \tilde{\theta}_* \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \lambda_{12} \nabla \tilde{\xi}_* \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H_2 \psi \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} h_2 \psi \, d\mathbf{x} + \langle (\lambda_{22} \xi_{\#} + \lambda_{21} \theta_{\#}), \psi \rangle_{\Gamma_{\#}} \\ &\quad - \int_{\Omega} \partial_t \tilde{\xi}_* \psi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{\xi}_* \psi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \lambda_{22} \nabla \tilde{\xi}_* \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \lambda_{21} \nabla \tilde{\theta}_* \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On prend $\varphi = \tilde{\theta}$ et $\psi = \tilde{\xi}$ et on combine les deux équations, on voit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \tilde{\theta} \tilde{\theta} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_t \tilde{\xi} \tilde{\xi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{11} (\nabla \tilde{\theta})^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{22} (\nabla \tilde{\xi})^2 \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} \lambda_{12} \nabla \tilde{\xi} \cdot \nabla \tilde{\theta} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{21} \nabla \tilde{\theta} \cdot \nabla \tilde{\xi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} H_1 \tilde{\theta} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} H_2 \tilde{\xi} \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

On fait appel à la propriété de coercivité (4.8),

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\xi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \beta \|\nabla \tilde{\xi}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \|H_1\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} + \|H_2\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\xi}\|_{L^2(\Omega)},$$

On utilise l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Young pour obtenir

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{dt} \|\tilde{\xi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \beta \|\nabla \tilde{\xi}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \frac{c_p^2}{\beta} \|H_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c_p^2}{\beta} \|H_2\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Puis on intègre sur t et on utilise le lemme de Hopf [51, Chap. IV, Lem. 2.4], on obtient (4.23).

4.2.3 Résultat d'existence

Le problème (4.18) – (4.19) est un cas particulier du problème (2.1) quand la perméabilité ne dépend pas de la pression et quand on s'intéresse seulement à la condition au bord sur la vitesse. Ce problème est aussi déjà étudié par Bernardi et al. [16] muni de la condition de Dirichlet sur la pression p . On en rappelle le résultat suivant.

Théorème 4.2.2 *Pour tout θ, ξ dans $L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))$ et pour tout \mathbf{u}_0 dans $L^2(\Omega)^d$, le problème (4.18) – (4.19) a une solution unique (\mathbf{u}, p) dans l'espace*

$$H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1_\diamond(\Omega)).$$

De plus, cette solution vérifie l'estimation a priori

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)} + \|p\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \leq c(\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\theta\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))} + \|\xi\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))}). \quad (4.24)$$

On réfère à [16, Prop. 1.5] pour la preuve de la proposition suivante.

Proposition 4.2.3 *Soit s un nombre réel égal à 1 si Ω est convexe, à $\frac{1}{2}$ sinon. On suppose que*

- (i) θ et ξ appartiennent à $L^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega))$ et tels que $\nabla \cdot \mathbf{f}(\theta, \xi)$ appartient à $L^2(\Omega \times]0, \tilde{T}[)$,
- (ii) la vitesse initiale \mathbf{u}_0 appartient à $H^s(\Omega)^d$.

Alors, la solution (\mathbf{u}, p) du problème (4.18)-(4.19) est dans l'espace

$$H^1(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega)).$$

Le théorème suivant donne le résultat fondamental du paragraphe.

Théorème 4.2.4 *On suppose que le domaine Ω est ou bien un ouvert borné de dimension $d = 2$, ou bien un convexe ou polyèdre de dimension $d = 3$. Pour tous $h_1, h_2, \theta_\star, \xi_\star, \theta_\sharp, \xi_\sharp$ et θ_0, ξ_0 vérifiant (4.17) et toute solution \mathbf{u} dans $H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \cap L^2(0, \tilde{T}; L^3(\Omega)^d)$ de (4.18) – (4.19), le problème variationnel (4.18) – (4.19) – (4.20) – (4.21) admet au moins une solution $(\mathbf{u}, p, \theta, \xi)$.*

Preuve. On considère l'application \mathcal{F} qui associe à chaque (θ, ξ) la solution \mathbf{u} de (4.18) – (4.19). Cette application est continue de $L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ dans $L^2(0, \tilde{T}; L^3(\Omega)^d)$. L'application

$$(\theta, \xi) \longmapsto \begin{pmatrix} h_1 - \partial_t \theta - (\mathcal{F}(\theta, \xi) \cdot \nabla) \theta + \nabla \cdot (\lambda_{11} \nabla \theta) + \nabla \cdot (\lambda_{12} \nabla \xi) \\ h_2 - \partial_t \xi - (\mathcal{F}(\theta, \xi) \cdot \nabla) \xi + \nabla \cdot (\lambda_{22} \nabla \xi) + \nabla \cdot (\lambda_{21} \nabla \theta) \end{pmatrix}$$

est lipschitzienne sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Grâce à la densité de $\mathcal{D}(\Omega \cup \Gamma_\sharp)$ dans $H^\star_1(\Omega)$, (ceci requiert l'hypothèse de régularité sur Γ_\star fourni au début de la Section 4.2, voir [14]), il existe une suite

croissante $(\mathbb{W}_n)_n$ des sous-espaces de dimension finie de $H_\star^1(\Omega)$ tels que $\bigcup_n \mathbb{W}_n$ soit dense dans $H_\star^1(\Omega)$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une suite $((\theta_n, \xi_n))_n$ dans $\mathbb{W}_n \times \mathbb{W}_n$ solution de

$$\begin{aligned} \forall \varphi_m \in \mathbb{W}_m, \quad & \int_{\Omega} \partial_t \theta_n \varphi_m \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathcal{F}(\theta_n, \xi_n) \cdot \nabla) \theta_n \varphi_m \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{11} \nabla \theta_n \cdot \nabla \varphi_m \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \lambda_{12} \nabla \xi_n \cdot \nabla \varphi_m \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} h_1 \varphi_m \, d\mathbf{x} + \langle (\lambda_{11} \theta_{\sharp} + \lambda_{12} \xi_{\sharp}), \varphi_m \rangle_{\Gamma_{\sharp}}, \\ \forall \psi_m \in \mathbb{W}_m, \quad & \int_{\Omega} \partial_t \xi_n \psi_m \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathcal{F}(\theta_n, \xi_n) \cdot \nabla) \xi_n \psi_m \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{22} \nabla \xi_n \cdot \nabla \psi_m \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \lambda_{21} \nabla \theta_n \cdot \nabla \psi_m \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} h_2 \psi_m \, d\mathbf{x} + \langle (\lambda_{22} \xi_{\sharp} + \lambda_{21} \theta_{\sharp}), \psi_m \rangle_{\Gamma_{\sharp}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Comme la suite $((\theta_n, \xi_n))_n$ vérifie (4.23), on peut extraire une sous-suite que l'on note encore $((\theta_n, \xi_n))_n$ qui converge faiblement dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et vérifie (4.25). En passant à la limite sur n , on a la convergence des termes linéaires. Comme la fonction \mathcal{F} est continue de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)^d$, tel que s dépend de la géométrie de domaine (voir la Proposition 4.2.3), combinée avec l'injection compacte de $H^s(\Omega)$ dans $L^3(\Omega)$ (voir Amrouche et al. [9, Prop. 3.7]), il existe une sous-suite $((\theta_n, \xi_n))_n$ qui converge faiblement vers (θ, ξ) dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et telle que la suite $(\mathcal{F}(\theta_n, \xi_n))_n$ converge fortement dans $L^3(\Omega)^d$ vers $\mathcal{F}(\theta, \xi)$. Par conséquent, les suites $(\mathcal{F}(\theta_n, \xi_n) \cdot \nabla \theta_n)_n$ et $(\mathcal{F}(\theta_n, \xi_n) \cdot \nabla \xi_n)_n$ convergent vers $\mathcal{F}(\theta, \xi) \cdot \nabla \theta$ et $\mathcal{F}(\theta, \xi) \cdot \nabla \xi$ respectivement. On en déduit que (θ, ξ) solution du problème (4.18) à (4.21) dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$. Finalement grâce à l'injection de $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ dans $L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ la solution (θ, ξ) est dans $L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$.

Proposition 4.2.5 *On suppose que le problème (4.18) à (4.21) admet une solution $(\mathbf{u}, p, \theta, \xi)$ telle qu'il existe une constante positive μ pour laquelle le couple (θ, ξ) appartient à $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ et vérifie*

$$\|\theta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mu. \quad (4.26)$$

Alors, cette solution est unique.

Preuve. Soient $(\mathbf{u}_1, p_1, \theta_1, \xi_1)$ et $(\mathbf{u}_2, p_2, \theta_2, \xi_2)$ deux solutions du problème (4.18) à (4.21) telles que (θ_1, ξ_1) appartient à $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ et vérifie (4.26). On pose

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \quad p = p_1 - p_2, \quad \theta = \theta_1 - \theta_2, \quad \xi = \xi_1 - \xi_2.$$

On procède deux étapes :

1) On prend $\varphi = \theta$ et $\psi = \xi$ dans (4.20) et (4.21) puis en sommant les deux équations, on voit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2) + \beta (\|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\nabla \xi\|_{L^2(\Omega)^d}^2) \\ \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} (\|\theta_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\xi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \xi\|_{L^2(\Omega)^d}). \end{aligned}$$

On fait appel à l'inégalité de Young, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq \frac{1}{2\beta} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 (\|\theta_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|\xi_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2),$$

comme θ_1 et ξ_1 vérifie (4.26)

$$\frac{d}{dt} (\|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\xi\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq \frac{\mu^2}{\beta} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On intègre sur t , on en déduit que

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\xi(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\mu^2}{\beta} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)}^2. \quad (4.27)$$

2) D'autre part, on prend $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans (4.18), on trouve

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \alpha \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \gamma (\|\theta\|_{L^2(\Omega)} + \|\xi\|_{L^2(\Omega)}) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Encore l'inégalité de Young combinée avec (4.27) donne

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \frac{\mu^2 \gamma^2}{\alpha \beta} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)}^2.$$

En utilisant le lemme de Grönwall, on déduit que \mathbf{u} égal à 0. Par conséquent, d'après (4.27), θ et ξ sont nuls.

4.3 Problème discret

Le but de ce paragraphe est de proposer une discrétisation des équations (4.18) à (4.21) et d'en effectuer l'analyse numérique.

4.3.1 Discrétisation temporelle

Dans cette partie nous conservons les mêmes notations que dans la Section 2.3.1. La discrétisation en temps repose sur le schéma d'Euler implicite. Le schéma itératif considéré s'écrit

Trouver $(\mathbf{u}^m, p^m, \theta^m, \xi^m) \in L^3(\Omega)^d \times H_\diamond^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, tel que

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0, \quad \theta^0 = \theta_0 \quad \text{et} \quad \xi^0 = \xi_0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

et pour tout $m, 1 \leq m \leq M$,

$$\begin{aligned} \theta^m &= \theta_\star^m \quad \text{et} \quad \xi^m = \xi_\star^m \quad \text{sur} \quad \Gamma_\star, \\ \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad & \int_\Omega \frac{\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}}{\tau_m} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \alpha \int_\Omega \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla p^m \, d\mathbf{x} \\ &= \gamma \int_\Omega \mathbf{f}(\theta^m, \xi^m) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\forall q \in H_\diamond^1(\Omega), \quad \int_\Omega \mathbf{u}^m \cdot \nabla q \, d\mathbf{x} = 0, \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H_\star^1(\Omega), \quad & \int_\Omega \frac{\theta^m - \theta^{m-1}}{\tau_m} \varphi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \theta^m \varphi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda_{11} \nabla \theta^m \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} \\ & + \int_\Omega \lambda_{12} \nabla \xi^m \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega h_1^m \varphi \, d\mathbf{x} + \langle (\lambda_{11} \theta_\sharp^m + \lambda_{12} \xi_\sharp^m), \varphi \rangle_{\Gamma_\sharp}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \forall \psi \in H_\star^1(\Omega), \quad & \int_\Omega \frac{\xi^m - \xi^{m-1}}{\tau_m} \psi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \xi^m \psi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda_{22} \nabla \xi^m \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} \\ & + \int_\Omega \lambda_{21} \nabla \theta^m \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega h_2^m \psi \, d\mathbf{x} + \langle (\lambda_{21} \xi_\sharp^m + \lambda_{22} \theta_\sharp^m), \psi \rangle_{\Gamma_\sharp}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

tel que $h_1^n = h_1(\cdot, t_n)$, $h_2^n = h_2(\cdot, t_n)$, $\theta_\sharp^n = \theta_\sharp(\cdot, t_n)$, $\theta_\star^n = \theta_\star(\cdot, t_n)$, $\xi_\sharp^n = \xi_\sharp(\cdot, t_n)$, $\xi_\star^n = \xi_\star(\cdot, t_n)$.

Comme pour le cas continu, on peut démontrer que le problème semi-discret est bien posé.

Proposition 4.3.1 *Pour tout*

$$\begin{aligned} h_1, h_2 &\in \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)), \quad \theta_\star, \xi_\star \in \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)), \\ \theta_\sharp, \xi_\sharp &\in \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)'), \quad \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^d \quad \text{et} \quad \theta_0, \xi_0 \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

le problème (4.28) à (4.31) admet une solution $(\mathbf{u}^m, p^m, \theta^m, \xi^m)$ dans $L^3(\Omega)^d \times H_\diamond^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

De plus cette solution vérifie les majorations suivantes, pour tout $m, 0 \leq m \leq M$

$$\|\mathbf{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\nabla p^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq c \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|\theta^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\xi^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d},$$

et

$$\begin{aligned}
& \|\theta^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\xi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|\theta^j\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\xi^j\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\
& \leq \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\xi_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|h_1^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|h_2^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\theta_\#^j\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\xi_\#^j\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\theta_\star^j\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\xi_\star^j\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\theta_\star^j - \theta_\star^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\xi_\star^j - \xi_\star^{j-1}}{\tau_m} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)}^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Preuve. 1) Il est clair que pour tout (θ^m, ξ^m) dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $1 \leq m \leq M$, le problème (4.28)-(4.29) admet une solution (\mathbf{u}^m, p^m) dans $L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$ (voir Proposition 3.2.5), de plus si le couple (θ^m, ξ^m) est dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ la solution (\mathbf{u}^m, p^m) est dans $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$, telle que s égal à 1 si Ω est convexe, ou $\frac{1}{2}$ sinon, voir la Proposition 3.2.6, et on a

$$\|\mathbf{u}^m\|_{L^3(\Omega)^d} \leq c_R (\|\theta^m\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\xi^m\|_{H^1(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.33}$$

D'autre part, pour tout \mathbf{u}^m dans $\mathbf{V}(\Omega) \cap L^3(\Omega)^d$ solution de (4.28)-(4.29), en appliquant le théorème de point fixe de Brouwer, le problème (4.30)-(4.31) admet une solution (θ^m, ξ^m) dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

2) La première estimation est établie dans (2.30) et (2.36). Pour établir l'estimation (4.32), on effectue le changement de variable $\tilde{\theta}^m = \theta^m - \tilde{\theta}_\star^m$ et $\tilde{\xi}^m = \xi^m - \tilde{\xi}_\star^m$ dans (4.30) et (4.31), puis on met bout à bout les deux équations en prenant $\varphi = \tilde{\theta}^m$ et $\psi = \tilde{\xi}^m$, on voit

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\tau_m} (\|\tilde{\theta}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\tilde{\theta}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{\theta}^m - \tilde{\theta}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{\xi}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\tilde{\xi}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{\xi}^m - \tilde{\xi}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
& \quad + \int_{\Omega} \lambda_{11} (\nabla \tilde{\theta}^m)^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{22} (\nabla \tilde{\xi}^m)^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{12} \nabla \tilde{\xi}^m \cdot \nabla \tilde{\theta}^m \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{21} \nabla \tilde{\theta}^m \cdot \nabla \tilde{\xi}^m \, d\mathbf{x} \\
& = \int_{\Omega} h_1^m \tilde{\theta}^m \, d\mathbf{x} + \langle (\lambda_{11} \theta_\#^m + \lambda_{12} \xi_\#^m), \tilde{\theta}^m \rangle_{\Gamma_\#} + \int_{\Omega} h_2^m \tilde{\xi}^m \, d\mathbf{x} + \langle (\lambda_{21} \xi_\#^m + \lambda_{22} \theta_\#^m), \tilde{\xi}^m \rangle_{\Gamma_\#} \\
& \quad - \int_{\Omega} \frac{\tilde{\theta}_\star^m - \tilde{\theta}_\star^{m-1}}{\tau_m} \tilde{\theta}^m \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \tilde{\theta}_\star^m \tilde{\theta}^m \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \lambda_{11} \nabla \tilde{\theta}_\star^m \cdot \nabla \tilde{\theta}^m \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lambda_{12} \nabla \tilde{\xi}_\star^m \cdot \nabla \tilde{\theta}^m \, d\mathbf{x} \\
& \quad - \int_{\Omega} \frac{\tilde{\xi}_\star^m - \tilde{\xi}_\star^{m-1}}{\tau_m} \tilde{\xi}^m \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \tilde{\xi}_\star^m \tilde{\xi}^m \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \lambda_{22} \nabla \tilde{\xi}_\star^m \cdot \nabla \tilde{\xi}^m \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \lambda_{21} \nabla \tilde{\theta}_\star^m \cdot \nabla \tilde{\xi}^m \, d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Ensuite on utilise la propriété de coercivité (4.8) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\tau_m} (\|\tilde{\theta}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\tilde{\theta}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{\theta}^m - \tilde{\theta}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{\xi}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\tilde{\xi}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{\xi}^m - \tilde{\xi}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
& \quad + \beta (\|\nabla \tilde{\theta}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\nabla \tilde{\xi}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2) \\
& \leq \left(\|h_1^m\|_{L^2(\Omega)} + \lambda_2 (\|\theta_\#^m\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)'} + \|\xi_\#^m\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)'}) \right) + \left\| \frac{\tilde{\theta}^m - \tilde{\theta}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)} + \lambda_2 \|\nabla \xi_\star^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\tilde{\theta}^m\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + \left(\|h_2^m\|_{L^2(\Omega)} + \lambda_2 (\|\theta_\#^m\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)'} + \|\xi_\#^m\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)'}) \right) + \left\| \frac{\tilde{\xi}^m - \tilde{\xi}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)} + \lambda_2 \|\nabla \theta_\star^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\tilde{\xi}^m\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + (\|\mathbf{u}^m\|_{L^3(\Omega)^d} \|\tilde{\theta}_\star^m\|_{L^6(\Omega)} + \lambda_2 \|\nabla \tilde{\theta}_\star^m\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\nabla \tilde{\theta}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \\
& \quad + (\|\mathbf{u}^m\|_{L^3(\Omega)^d} \|\tilde{\xi}_\star^m\|_{L^6(\Omega)} + \lambda_2 \|\nabla \tilde{\xi}_\star^m\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\nabla \tilde{\xi}^m\|_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

En multipliant par τ_m et en sommant sur m on obtient l'estimation souhaitée.

4.3.2 Discrétisation spatiale

Dans ce paragraphe, on considère que Ω est le carré ou le cube $] - 1, 1[^d$, $d = 2$ ou 3 . On s'intéresse à l'approximation du problème (4.28) à (4.31). Comme précédemment, la discrétisation repose sur l'utilisation de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto (1.13). On suppose maintenant que les fonctions h_1, h_2 sont continues sur $\bar{\Omega} \times [0, \tilde{T}]$, θ_\star, ξ_\star sont continues sur $\bar{\Gamma}_\star \times [0, \tilde{T}]$ et $\theta_\#, \xi_\#$ sont continues sur $\bar{\Gamma}_\# \times [0, \tilde{T}]$.

On considère les espaces discrets suivants

$$\mathbb{X}_N = \mathbb{P}_N(\Omega)^d, \quad \mathbb{Y}_N = \mathbb{P}_N(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathbb{Y}_N^\circ = \mathbb{Y}_N \cap H_\diamond^1(\Omega).$$

Le problème discret s'écrit : Trouver $(\mathbf{u}_N^m, p_N^m, \theta_N^m, \xi_N^m) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N^\circ \times \mathbb{Y}_N \times \mathbb{Y}_N$, tel que

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_N^0 = \mathcal{I}_N \mathbf{u}_0, \quad \theta_N^0 = \mathcal{I}_N \theta_0, \quad \xi_N^0 = \mathcal{I}_N \xi_0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\
& \theta_N^m = i_N^{\Gamma_\star} \theta_\star^m, \quad \xi_N^m = i_N^{\Gamma_\star} \xi_\star^m \quad \text{sur} \quad \Gamma_\star, \\
& \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad \left(\frac{\mathbf{u}_N^m - \mathbf{u}_N^{m-1}}{\tau_m}, \mathbf{v}_N \right)_N + \alpha (\mathbf{u}_N^m, \mathbf{v}_N)_N + (\mathbf{v}_N, \nabla p_N^m)_N = \gamma (\mathbf{f}(\theta_N^m, \xi_N^m), \mathbf{v}_N)_N, \\
& \forall q_N \in \mathbb{Y}_N^\circ, \quad (\mathbf{u}_N^m, \nabla q_N)_N = 0, \\
& \forall \varphi_N \in \mathbb{Y}_N^\star, \quad \left(\frac{\theta_N^m - \theta_N^{m-1}}{\tau_m}, \varphi_N \right)_N + ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \theta_N^m, \varphi_N)_N \\
& \quad + (\lambda_{11} \nabla \theta_N^m, \nabla \varphi_N)_N + (\lambda_{12} \nabla \xi_N^m, \nabla \varphi_N)_N = (h_1^m, \varphi_N)_N + ((\lambda_{11} \theta_\#^m + \lambda_{12} \xi_\#^m), \varphi_N)_N^{\Gamma_\#}, \\
& \forall \psi_N \in \mathbb{Y}_N^\star, \quad \left(\frac{\xi_N^m - \xi_N^{m-1}}{\tau_m}, \psi_N \right)_N + ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \xi_N^m, \psi_N)_N \\
& \quad + (\lambda_{22} \nabla \xi_N^m, \nabla \psi_N)_N + (\lambda_{21} \nabla \theta_N^m, \nabla \psi_N)_N = (h_2^m, \varphi_N)_N + ((\lambda_{22} \xi_\#^m + \lambda_{21} \theta_\#^m), \psi_N)_N^{\Gamma_\#},
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Les arguments de la preuve du résultat suivant sont les mêmes que pour la Proposition 4.3.1.

Proposition 4.3.2 *Pour toutes fonctions h_1, h_2 continues sur $\bar{\Omega} \times [0, \tilde{T}]$, θ_*, ξ_* continues sur $\bar{\Gamma}_* \times [0, \tilde{T}]$ et $\theta_{\sharp}, \xi_{\sharp}$ continues sur $\bar{\Gamma}_{\sharp} \times [0, \tilde{T}]$, le problème (4.34) admet une solution.*

4.4 Analyse d'erreur a priori

Comme le problème qu'on a considéré dans ce chapitre est non linéaire, l'analyse d'erreur a priori mène à utiliser le théorème de Brezzi, Rappaz et Raviart [28].

On considère l'opérateur \mathcal{T} défini dans le paragraphe 2.4 tel que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ est égale à 0 sur $\partial\Omega \times]0, \tilde{T}[$. Dans un premier temps, on note (ω_1, ω_2) le couple (θ, ξ) pour simplifier. On introduit l'opérateur \mathcal{L} associé à chaque $h_i, \omega_{i*}, \omega_{i\sharp}, \omega_{i0}$, $i = 1, 2$, la solution ω_i du problème

$$\begin{aligned} \partial_t \omega_i - \nabla \cdot (\lambda_{ii} \nabla \omega_i) - \nabla \cdot (\lambda_{ij} \nabla \omega_j) &= h_i \\ \omega_i &= \omega_{i*} \quad \text{sur } \Gamma_* \quad \text{et} \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial \mathbf{n}} = \omega_{i\sharp} \quad \text{sur } \Gamma_{\sharp}, \\ \omega_i(\cdot, 0) &= \omega_{i0}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= (\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \cap L^2(0, \tilde{T}; L^3(\Omega)^d)) \times L^2(0, \tilde{T}; H_{\diamond}^1(\Omega)) \\ &\quad \times (\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))) \times (\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))). \end{aligned}$$

En notant $(\mathbf{u}, p, \theta, \xi)$ par U , le problème (4.18) à (4.21) est équivalent à trouver la solution de l'équation

$$\mathcal{F}(U) = U - \begin{pmatrix} \mathcal{T} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U) \\ \mathcal{G}^2(U) \end{pmatrix} = 0 \tag{4.36}$$

telle que

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U) \\ \mathcal{G}^2(U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\omega_1, \omega_2) \\ (h_i - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega_i, \omega_{i*}, \omega_{i\sharp}, \omega_{i0}) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

4.4.1 Estimation d'erreur en temps

On considère les fonctions affines $\mathbf{u}_{\tau}, p_{\tau}$ définies dans le paragraphe 2.4.1. On définit de plus les fonctions affines $\theta_{\tau}, \xi_{\tau}$ sur chaque intervalle $[t_{m-1}, t_m]$ égales à θ^m, ξ^m respectivement à chaque instant t_m , $0 \leq m \leq M$. On considère l'opérateur semi-discret \mathcal{T}_{τ} défini dans le paragraphe 2.4.1. Cet opérateur vérifie la propriété de stabilité (2.49), l'estimation (2.59) et la propriété de convergence (2.60).

On définit l'opérateur semi-discret \mathcal{L}_τ pour toute donnée $(h_i, \omega_{i\star}, \omega_{i\#}, \omega_{i0})$, $i = 1, 2$, dans

$$\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)') \times L^2(\Omega),$$

la fonction $\omega_{i\tau}$ associée à ω_i^m dans $H^1(\Omega)$ solution de :

$$\begin{aligned} \omega_i^m &= \omega_{i\star}^m \quad \text{sur } \Gamma_\star \quad \text{et} \quad \omega_i^0 = \omega_{i0} \quad \text{dans } \Omega, \\ \forall \varphi \in H_\star^1(\Omega), \quad & \int_\Omega \frac{\omega_i^m - \omega_i^{m-1}}{\tau_m} \varphi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda_{ii} \nabla \omega_i^m \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda_{ij} \nabla \omega_j^m \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega h_i^m \varphi \, d\mathbf{x} + \langle \lambda_{ii} \omega_{i\#}^m + \lambda_{ij} \omega_{j\#}^m, \varphi \rangle_{\Gamma_\#}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

On a la propriété de stabilité suivante.

Proposition 4.4.1 *Pour toutes données h_1, h_2 dans $\mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$, on a*

$$\sum_{i=1}^2 \|\mathcal{L}_\tau(h_i, 0, 0, 0)\|_{\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \leq c \sum_{i=1}^2 \|\pi_\tau^+ h_i\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))} \leq c \sum_{i=1}^2 \|h_i\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))}.$$

Dans le théorème suivant, nous allons prouver une estimation d'erreur entre la solution du problème (4.35) et la solution du problème (4.37).

Théorème 4.4.2 *Pour toutes données $h_i, \omega_{i\star}, \omega_{i\#}, \omega_{i0}$, $i = 1, 2$, dans*

$$\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\#)') \times L^2(\Omega),$$

on a

$$\sum_{i=1}^2 \|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_\tau)(h_i, \omega_{i\star}, \omega_{i\#}, \omega_{i0})\|_{\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \leq c|\tau| \sum_{i=1}^2 \|\omega_i\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))}. \quad (4.38)$$

Preuve. La formulation variationnelle du problème (4.35) s'écrit

$$\begin{aligned} \omega_i(\cdot, 0) &= \omega_{i0} \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \omega_i = \omega_{i\star} \quad \text{sur } \Gamma_\star \times]0, \tilde{T}[, \\ \forall \varphi \in H_\star^1(\Omega), \quad & \int_\Omega \partial_t \omega_i \varphi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda_{ii} \nabla \omega_i \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda_{ij} \nabla \omega_j \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega h_i \varphi \, d\mathbf{x} + \langle \lambda_{ii} \omega_{i\#} + \lambda_{ij} \omega_{j\#}, \varphi \rangle_{\Gamma_\#}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

On soustrait cette dernière équation à l'instant t_m de (4.37). La suite définie par $e_{\omega_i}^m = \omega_i(\cdot, t_m) - \omega_i^m$ et satisfait $e_{\omega_i}^0 = 0$ et pour tout m , $0 \leq m \leq M$,

$$\forall \varphi \in H_\star^1(\Omega), \quad \int_\Omega \frac{e_{\omega_i}^m - e_{\omega_i}^{m-1}}{\tau_m} \varphi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda_{ii} \nabla e_{\omega_i}^m \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda_{ij} \nabla e_{\omega_j}^m \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \varepsilon_{\omega_i}^m \varphi \, d\mathbf{x} \quad (4.40)$$

tel que l'erreur de consistance $\varepsilon_{\omega_i}^m$ est donnée par

$$\varepsilon_{\omega_i}^m = \frac{\omega_i(\cdot, t_m) - \omega_i(\cdot, t_{m-1})}{\tau_m} - \partial_t \omega_i(\cdot, t_m), \quad i = 1, 2.$$

Prenons $\varphi = e_{\omega_i}^m$ puis en sommant sur i et utilisant (4.8), on voit que

$$\frac{1}{2\tau_m} \sum_{i=1}^2 (\|e_{\omega_i}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e_{\omega_i}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_{\omega_i}^m - e_{\omega_i}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) + \beta \sum_{i=1}^2 \|\nabla e_{\omega_i}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \sum_{i=1}^2 \|e_{\omega_i}^m\|_{L^2(\Omega)} \|e_{\omega_i}^m\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, puis multipliant par τ_m et sommant sur m , on trouve

$$\sum_{i=1}^2 \|e_{\omega_i}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \sum_{j=1}^m \tau_j \|e_{\omega_i}^j\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On utilise (2.54) pour conclure.

Il en résulte la propriété de convergence suivante.

Corollaire 4.4.3 *Pour tout h_i , $i = 1, 2$ dans $C^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))$*

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_\tau)(h_i, 0, 0, 0)\|_{C^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} = 0.$$

4.4.2 Estimation d'erreur en espace

Nous ré-utilisons les notations de la Section 2.4.2 ainsi l'opérateur $\mathcal{T}_{N\tau}$ tel que la troisième et la quatrième équations de (2.1) sont remplacées par (3.4). On note de plus par $\omega_{iN\tau}$, $i = 1, 2$, la fonction affine sur chaque intervalle $[t_{m-1}, t_m]$ et égal à ω_{iN}^m à chaque instant t_m . On introduit l'opérateur $\mathcal{L}_{N\tau}$ qui associe pour toute donnée

$$(h_i, \omega_{i\star}, \omega_{i\sharp}, \omega_{i0}) \in C^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)) \times C^0(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)) \times C^0(0, \tilde{T}; H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\sharp)') \times L^2(\Omega),$$

la partie $\omega_{iN\tau}$ associée à la solution ω_{iN}^m du problème

$$\begin{aligned} \omega_{iN}^0 &= \mathcal{I}_N \omega_{i0} \quad \text{dans } \Omega, \quad \omega_{iN}^m = i_{N\star}^{\Gamma_\star} \omega_i^m \quad \text{sur } \Gamma_\star, \\ \forall \varphi_N \in \mathbb{Y}_N^\star, \quad &\left(\frac{\omega_{iN}^m - \omega_{iN}^{m-1}}{\tau_m}, \varphi_N \right)_N + (\lambda_{ii} \nabla \omega_{iN}^m, \nabla \varphi_N)_N + (\lambda_{ij} \nabla \omega_{jN}^m, \nabla \varphi_N)_N \\ &= \int_{\Omega} h_i^m \varphi_N d\mathbf{x} + \langle (\lambda_{ii} \omega_{i\sharp}^m + \lambda_{ij} \omega_{j\sharp}^m), \varphi_N \rangle_{\Gamma_\sharp}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

On note $\tilde{U}_{N\tau}$ le couple $(\mathbf{u}_{N\tau}, p_{N\tau})$ et $U_{N\tau}$ le triplet $(\tilde{U}_{N\tau}, \theta_{N\tau}, \xi_{N\tau})$. Le problème (4.34) s'écrit d'une manière équivalente comme suit

$$\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}) = U_{N\tau} - \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{N\tau} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{N\tau}^1(U_{N\tau}) \\ (\mathcal{G}_{N\tau}^2(U_{N\tau}), \omega_{i\star}, \tilde{\omega}_{i\sharp}, \omega_{i0}) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.42)$$

tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad &\langle \mathcal{G}_{N\tau}^1(U_{N\tau}), \mathbf{v}_N \rangle = (\mathbf{f}(\theta_{N\tau}, \xi_{N\tau}), \mathbf{v}_N)_N, \\ \forall \varphi_N \in \mathbb{Y}_N^\star, \quad &\langle \tilde{\mathcal{G}}_{N\tau}^2(U_{N\tau}), \varphi_N \rangle = (h_i, \varphi_N)_N - ((\mathbf{u}_{N\tau} \cdot \nabla) \omega_{iN\tau}, \varphi_N)_N, \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \langle \tilde{\omega}_{i\sharp}, \varphi_N \rangle = (\lambda_{ii}\omega_{i\sharp} + \lambda_{ij}\omega_{j\sharp}, \varphi_N)_{N^{\Gamma_{\sharp}}}.$$

Sous les mêmes techniques que celles utilisées pour la Proposition 2.4.10, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.4.4 *On suppose la solution ω_i^m , $i = 1, 2$, du problème (4.37) dans $H^{s+1}(\Omega)$, $s \geq 0$, la solution discrète ω_{iN}^m , $i = 1, 2$, vérifie la majoration suivante*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \|\omega_i^m - \omega_{iN}^m\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq c \left(N^{-(s+1)} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{\omega_i^j - \omega_i^{j-1}}{\tau_j} \right\|_{H^{s+1}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + N^{-s} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \|\omega_i^j\|_{H^{s+1}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Preuve. On introduit les familles des polynômes $(\psi_{iN}^m)_{0 \leq m \leq M}$, $i = 1, 2$, de \mathbb{Y}_N , telles que pour tout m , $0 \leq m \leq M$, ψ_{iN}^m est égal à $i_{N^{\Gamma_{\star}}}^{\Gamma_{\star}} \omega_i^m$ sur Γ_{\star} . Exactement par les mêmes arguments que pour la démonstration de la Proposition 2.4.10, on vérifie que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2\tau_m} (\|\omega_{iN}^m - \psi_{iN}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\omega_{iN}^{m-1} - \psi_{iN}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) + \|(\omega_{iN}^m - \psi_{iN}^m) - (\omega_{iN}^{m-1} - \psi_{iN}^{m-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & + \beta \|\nabla(\omega_{iN}^m - \psi_{iN}^m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq c \sum_{i=1}^2 \left(\left\| \frac{(\omega_i^m - \psi_{iN}^m) - (\omega_i^{m-1} - \psi_{iN}^{m-1})}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_2 \|\nabla(\omega_i^m - \psi_{iN}^m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|\nabla(\omega_i^m - \mathcal{I}_{N-1}\omega_i^m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \left\| \left(\frac{\omega_i^m - \omega_i^{m-1}}{\tau_m} \right) - \mathcal{I}_{N-1} \left(\frac{\omega_i^m - \omega_i^{m-1}}{\tau_m} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

En multipliant par τ_m et en sommant sur m , on en déduit

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left(\|\omega_{iN}^m - \psi_{iN}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \sum_{j=1}^m \tau_j \|\nabla(\omega_{iN}^j - \psi_{iN}^j)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) \\ & \leq \|\omega_{iN}^0 - \psi_{iN}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \frac{(\omega_i^j - \psi_{iN}^j) - (\omega_i^{j-1} - \psi_{iN}^{j-1})}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\nabla(\omega_i^j - \psi_{iN}^j)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^m \tau_j \|\nabla(\omega_i^j - \mathcal{I}_{N-1}\omega_i^j)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{j=1}^m \tau_j \left\| \left(\frac{\omega_i^j - \omega_i^{j-1}}{\tau_m} \right) - \mathcal{I}_{N-1} \left(\frac{\omega_i^j - \omega_i^{j-1}}{\tau_m} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Combinant ceci avec une inégalité triangulaire et prenant ψ_{iN}^m l'image de ω_i^m par l'opérateur de projection orthogonale de $H^1(\Omega)$ sur \mathbb{Y}_N , on utilise [22, Chap. III, Th. 2.9].

On déduit du théorème précédent le corollaire suivant.

Corollaire 4.4.5 *Si $\mathcal{L}_{\tau}(h_i, \omega_{i\star}, \omega_{i\sharp}, \omega_{i0})$ est dans $H^{s+1}(\Omega)$, on a l'estimation suivante*

$$\sum_{i=1}^2 \|(\mathcal{L}_{\tau} - \mathcal{L}_{\tau N})(h_i, \omega_{i\star}, \omega_{i\sharp}, \omega_{i0})\|_{C^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \leq cN^{-s} \sum_{i=1}^2 \|\mathcal{L}_{\tau}(h_i, \omega_{i\star}, \omega_{i\sharp}, \omega_{i0})\|_{H^1(0, \tilde{T}; H^s(\Omega))}. \quad (4.44)$$

4.4.3 Lemmes techniques

On introduit l'approximation $U_{N\tau}^\diamond = (\mathbf{u}_{N\tau}^\diamond, p_{N\tau}^\diamond, \theta_{N\tau}^\diamond, \xi_{N\tau}^\diamond)$ de U dans l'espace

$$\mathcal{X}_{N\tau} = \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; \mathbb{X}_N) \times L^2(0, \tilde{T}; \mathbb{Y}_N^\diamond) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; \mathbb{Y}_N) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; \mathbb{Y}_N),$$

qui satisfait pour tous entiers ℓ, s , $0 \leq \ell \leq s$, les relations (2.74), (2.75) et pour tout t , $0 \leq t \leq \tilde{T}$

$$\|\theta(\cdot, t) - \theta_{N\tau}^\diamond(\cdot, t)\|_{H^{\ell+1}(\Omega)} \leq cN^{\ell-s} \|\theta(\cdot, t)\|_{H^{s+1}(\Omega)}, \quad (4.45)$$

$$\|\xi(\cdot, t) - \xi_{N\tau}^\diamond(\cdot, t)\|_{H^{\ell+1}(\Omega)} \leq cN^{\ell-s} \|\xi(\cdot, t)\|_{H^{s+1}(\Omega)}. \quad (4.46)$$

Hypothèse 4.4.6 La solution $(\mathbf{u}, p, \theta, \xi)$ du problème (4.18) à (4.21)

(i) appartient à $H^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega)) \times H^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega)) \times H^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))$ pour $s > \frac{d}{6}$,

(ii) est telle que $D\mathcal{F}(U)$ est un isomorphisme de \mathcal{X}

Les arguments de la preuve du lemme suivant sont les mêmes que pour les Lemmes 2.4.16 et 3.4.4.

Lemme 4.4.7 Si la fonction \mathbf{f} est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 et ses dérivées sont bornées, il existe un entier et un réel positifs N_0, τ_0 tels que, pour tout $N \geq N_0$ et $\tau \leq \tau_0$, l'opérateur $D\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^\diamond)$ est un isomorphisme de $\mathcal{X}_{N\tau}$. De plus, la norme de son inverse est bornée indépendamment de N .

Preuve. On écrit

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^\diamond) &= D\mathcal{F}(U) + \begin{pmatrix} \mathcal{T} - \mathcal{T}_{N\tau} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} - \mathcal{L}_{N\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\mathcal{G}^1(U) \\ D\mathcal{G}^2(U) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{N\tau} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\mathcal{G}^1(U) - D\mathcal{G}^1(U_{N\tau}^\diamond) \\ D\mathcal{G}^2(U) - D\mathcal{G}^2(U_{N\tau}^\diamond) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{N\tau} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D\mathcal{G}^1(U_{N\tau}^\diamond) - D\mathcal{G}_{N\tau}^1(U_{N\tau}^\diamond) \\ D\mathcal{G}^2(U_{N\tau}^\diamond) - D\mathcal{G}_{N\tau}^2(U_{N\tau}^\diamond) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

On a vu dans la démonstration du Lemme 3.4.4 que les trois derniers termes tendent vers 0 quand N tend vers ∞ et τ tend vers 0. On déduit de l'Hypothèse 4.4.6-(ii) que $D\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^\diamond)$ est un isomorphisme de \mathcal{X}_N avec la norme de son inverse est bornée indépendamment de N et τ , pour N assez grand et $|\tau|$ assez petit.

Avec les mêmes techniques que pour les Lemmes 2.4.17 et 3.4.5, on obtient le lemme suivant.

Lemme 4.4.8 Si la fonction \mathbf{f} est de classe \mathcal{C}^2 et si l'Hypothèse 4.4.6 est vérifiée, il existe un voisinage de $U_{N\tau}^\diamond$ dans $\mathcal{X}_{N\tau}$ et une constante positive c tels que l'opérateur $D\mathcal{F}_{N\tau}$ satisfait la propriété de Lipschitz, pour tout Z_N dans ce voisinage

$$\|D\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^\diamond) - D\mathcal{F}_{N\tau}(Z_N)\|_{\mathcal{E}} \leq c\mu(N) \|U_{N\tau}^\diamond - Z_N\|_{\mathcal{X}}, \quad (4.48)$$

avec $\mu(N)$ est égal à N en dimension $d = 3$ et à $(\log N)^{\frac{1}{2}}$ en dimension $d = 2$.

Lemme 4.4.9 Pour tout h_1, h_2 dans $L^2(0, \tilde{T}; H^\sigma(\Omega))$, $\theta_{\sharp}, \xi_{\sharp}$ dans $L^2(0, \tilde{T}; H^\sigma(\Gamma_{\sharp}))$ et $\theta_{\star}, \xi_{\star}$ dans $L^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star}))$, si la fonction \mathbf{f} est de classe \mathcal{C}^2 de dérivées bornées et si l'Hypothèse 4.4.6 a lieu, alors on a la majoration

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^{\circ})\|_{\mathcal{X}} &\leq c\{(|\tau| + N^{\frac{d}{6}-s})\|\mathbf{u}\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d)} + (|\tau| + N^{-s}) \sum_{i=1}^2 \|\omega_i\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))} \\ &+ N^{-s}\|p\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))} + N^{-\sigma} \sum_{i=1}^2 (\|h_i\|_{C^0(0, \tilde{T}; H^\sigma(\Omega)^d)} + \|\omega_{i\star}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_{\star}))} + \|\omega_{i\sharp}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^\sigma(\Gamma_{\sharp}))})\}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Preuve. On écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^{\circ}) &= -(U - U_{N\tau}^{\circ}) + \begin{pmatrix} \mathcal{T} - \mathcal{T}_{N\tau} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} - \mathcal{L}_{N\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U) \\ \mathcal{G}^2(U) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{N\tau} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U) - \mathcal{G}^1(U_{N\tau}^{\circ}) \\ \mathcal{G}^2(U) - \mathcal{G}^2(U_{N\tau}^{\circ}) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{N\tau} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U_{N\tau}^{\circ}) - \mathcal{G}_{N\tau}^1(U_{N\tau}^{\circ}) \\ \mathcal{G}^2(U_{N\tau}^{\circ}) - \tilde{\mathcal{G}}_{N\tau}^2(U_{N\tau}^{\circ}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tel que $\tilde{\mathcal{G}}_{N\tau}^2 = (\mathcal{G}_{N\tau}^2, \xi_{i\star}, \tilde{\xi}_{i\sharp}, \xi_{i0})$. Le premier terme est majoré dans (3.38), (3.39), (4.45) et (4.46). Évaluons le deuxième terme, on a

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_{N\tau})(\mathcal{G}^1(U))\|_{C^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} &\leq \|(\mathcal{T} - \mathcal{T}_{\tau})(\mathcal{G}^1(U))\|_{C^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \\ &+ \|(\mathcal{T}_{\tau} - \mathcal{T}_{N\tau})(\mathcal{G}^1(U))\|_{C^0(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \\ &\leq c|\tau|\|\mathbf{u}\|_{H^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))} + cN^{-s}\|\mathbf{u}_{\tau}\|_{H^1(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d)} + N^{-s}\|p_{\tau}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))}, \\ &\leq c(|\tau| + N^{-s})\|\mathbf{u}\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d)}. \end{aligned}$$

Similairement,

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_{N\tau})(\mathcal{G}^2(U))\|_{C^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} &\leq \|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_{\tau})(\mathcal{G}^2(U))\|_{C^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} + \|(\mathcal{L}_{\tau} - \mathcal{L}_{N\tau})(\mathcal{G}^2(U))\|_{C^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \\ &\leq c(|\tau| + N^{-s})(\|\theta\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))} + \|\xi\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))}). \end{aligned}$$

L'estimation du troisième terme s'obtient de (2.64) combiné avec (3.38), (4.45) et (4.46), ce qui donne

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{N\tau} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U) - \mathcal{G}^1(U_{N\tau}^{\circ}) \\ \mathcal{G}^2(U) - \mathcal{G}^2(U_{N\tau}^{\circ}) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{X}} &\leq c(N^{\frac{d}{6}-s}\|\mathbf{u}\|_{C^0(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d)} \\ &+ N^{-s}(\|\theta\|_{C^0(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))} + \|\xi\|_{C^0(0, \tilde{T}; H^{s+1}(\Omega))}). \end{aligned}$$

Enfin le dernier terme se majore en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du Lemme 3.4.6, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{N\tau} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}^1(U_{N\tau}) - \mathcal{G}_{N\tau}^1(U_{N\tau}^\diamond) \\ \mathcal{G}^2(U_{N\tau}) - \mathcal{G}_{N\tau}^2(U_{N\tau}^\diamond) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{X}} &\leq c N^{\frac{d}{6}-s} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{C}^0(0,\tilde{T};H^s(\Omega)^d)} \\ &+ c N^{-s} (\|\theta\|_{\mathcal{C}^0(0,\tilde{T};H^{s+1}(\Omega))} + \|\xi\|_{\mathcal{C}^0(0,\tilde{T};H^{s+1}(\Omega))}) \\ &+ c N^{-\sigma} (\|h_1\|_{L^2(0,\tilde{T};H^\sigma(\Omega))} + \|h_2\|_{L^2(0,\tilde{T};H^\sigma(\Omega))} \\ &\quad + \|\theta_\# \|_{L^2(0,\tilde{T};H^\sigma(\Gamma_\#))} + \|\theta_\star \|_{L^2(0,\tilde{T};H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))} \\ &\quad + \|\xi_\# \|_{L^2(0,\tilde{T};H^\sigma(\Gamma_\#))} + \|\xi_\star \|_{L^2(0,\tilde{T};H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))}). \end{aligned}$$

On met bout à bout ces estimations, ce qui donne l'estimation souhaitée.

4.4.4 Résultat et conclusion

Toutes les hypothèses du théorème dû à Brezzi, Rappaz, Raviart, sont maintenant vérifiées. On en déduit le résultat suivant.

Théorème 4.4.10 *On suppose que pour tout $s > \frac{d}{6}$ la solution du problème (4.18) à (4.21) est dans*

$$H^2(0,\tilde{T};H^s(\Omega)^d) \times L^2(0,\tilde{T};H^{s+1}(\Omega)) \times H^2(0,\tilde{T};H^{s+1}(\Omega)) \times H^2(0,\tilde{T};H^s(\Omega))$$

et que pour tout $\sigma \geq \frac{1}{2}$,

$$h_1, h_2 \in L^2(0,\tilde{T};H^\sigma(\Omega)), \quad \theta_\star, \xi_\star \in L^2(0,\tilde{T};H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star)), \quad \theta_\#, \xi_\# \in \mathcal{C}^0(0,\tilde{T};H^\sigma(\Gamma_\#)).$$

De plus on suppose que la fonction \mathbf{f} est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à dérivées bornées. Alors, il existe un voisinage de $(\mathbf{u}, p, \theta, \xi)$, un réel positif τ_0 et un entier positif N_0 tels que pour tout τ , $|\tau| \leq \tau_0$ et $N \geq N_0$, le problème (4.34) admette une solution unique $(\mathbf{u}_{N\tau}, p_{N\tau}, \theta_{N\tau}, \xi_{N\tau})$ dans ce voisinage. De plus, il existe une constante positive c telle que cette solution vérifie

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\|_{\mathcal{C}^0(0,\tilde{T};L^3(\Omega)^d)} + \|p - p_{N\tau}\|_{L^2(0,\tilde{T};H^1(\Omega))} + \|\theta - \theta_{N\tau}\|_{\mathcal{C}^0(0,\tilde{T};H^1(\Omega))} + \|\xi - \xi_{N\tau}\|_{\mathcal{C}^0(0,\tilde{T};H^1(\Omega))} \\ &\leq c (|\tau| + N^{\frac{d}{6}-s}) \|\mathbf{u}\|_{H^2(0,\tilde{T};H^s(\Omega)^d)} + c N^{-s} \|p\|_{L^2(0,\tilde{T};H^{s+1}(\Omega))} \\ &\quad + (|\tau| + N^{-s}) (\|\theta\|_{H^2(0,\tilde{T};H^{s+1}(\Omega))} + \|\xi\|_{H^2(0,\tilde{T};H^{s+1}(\Omega))}) \\ &\quad + c N^{-\sigma} (\|h_1\|_{L^2(0,\tilde{T};H^\sigma(\Omega))} + \|h_2\|_{L^2(0,\tilde{T};H^\sigma(\Omega))} + \|\theta_\# \|_{\mathcal{C}^0(0,\tilde{T};H^\sigma(\Gamma_\#))} \\ &\quad + \|\xi_\# \|_{\mathcal{C}^0(0,\tilde{T};H^\sigma(\Gamma_\#))} + \|\theta_\star \|_{L^2(0,\tilde{T};H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))} + \|\xi_\star \|_{L^2(0,\tilde{T};H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Gamma_\star))}). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Remarque 4.4.11 *Si l'on suppose les données régulières (c'est-à-dire σ est grand), l'erreur se comporte en $|\tau| + N^{\frac{d}{6}-s}$ et est donc optimale en temps et quasi-optimale en espace.*

4.5 Résultats numériques

Cette section est consacrée à l'exploitation des résultats numériques obtenus avec notre code qui s'est écrit en FreeFem3d (voir [42, 82]), dont l'objectif est de vérifier numériquement les résultats théoriques présentés auparavant.

Après avoir discrétisé le problème en utilisant le schéma d'Euler implicite en temps et méthode spectrale en espace, le problème est toujours nonlinéaire. Pour le résoudre numériquement nous proposons le schéma itératif linéaire suivant

Connaissions $\theta^{m+1,k}, \xi^{m+1,k}$ et calculons $(\mathbf{u}^{m+1,k+1}, p^{m+1,k+1})$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{m+1,k+1} - \mathbf{u}^{m,k+1}}{\tau_m} + \alpha \mathbf{u}^{m+1,k+1} + \nabla p^{m+1,k+1} &= \mathbf{f}(\theta^{m+1,k}, \xi^{m+1,k}), \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{m+1,k+1} &= 0. \end{aligned}$$

Ensuite, étant donné $\mathbf{u}^{m+1,k+1}$, on obtient $\theta^{m+1,k+1}$ et $\xi^{m+1,k+1}$ tels que

$$\begin{aligned} \frac{\theta^{m+1,k+1} - \theta^{m,k+1}}{\tau_m} + (\mathbf{u}^{m+1,k+1} \cdot \nabla) \theta^{m+1,k+1} - \nabla \cdot (\lambda_{11} \nabla \theta^{m+1,k+1}) - \nabla \cdot (\lambda_{12} \nabla \xi^{m+1,k+1}) &= h_1^{m+1}, \\ \frac{\xi^{m+1,k+1} - \xi^{m,k+1}}{\tau_m} + (\mathbf{u}^{m+1,k+1} \cdot \nabla) \xi^{m+1,k+1} - \nabla \cdot (\lambda_{22} \nabla \xi^{m+1,k+1}) - \nabla \cdot (\lambda_{21} \nabla \theta^{m+1,k+1}) &= h_2^{m+1}. \end{aligned}$$

On réfère à la Section 3.5.1 pour montrer la convergence de la solution de ce problème vers la solution du problème (4.28) à (4.31).

4.5.1 Précision temporelle

Afin de confirmer nos résultats théoriques, on s'intéresse à calculer l'erreur due à la discrétisation en temps. Pour cela nous construisons le problème en dimension 3 où la solution exacte est donnée dans $]0, 1[^3$ par

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos(t)y - \sin(\pi + t)z^2, & p &= \sin(t)x + \cos(t)(y + z^2), \\ u_2 &= \sin(t)(x - 1) + \cos(\pi t), & T &= \cos(t)(x^2 + 2y^2 - z), \\ u_3 &= -2tx, & C &= \sin(t)(-x + y^3). \end{aligned} \tag{4.51}$$

On choisit les coefficients α et les λ_{ij} , $i, j = 1, 2$ comme suit

$$\begin{aligned} \alpha &= T^2 + C^2 + 2, \\ \lambda_{11} &= T + C + 10, & \lambda_{12} &= 0, \\ \lambda_{22} &= T^2 + C^2 + 2, & \lambda_{21} &= T + C. \end{aligned}$$

Nous avons effectué plusieurs simulations en divisant le pas de temps δt par 2 à chaque fois et on calcule l'erreur suivante

$$\mathcal{E}_{\delta t} = \left(\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_N)(\cdot, 1)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|(p - p_N)(\cdot, 1)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|(T - T_N)(\cdot, 1)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|(C - C_N)(\cdot, 1)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

à T égal à 1. Puis, on calcule l'ordre

$$\mathcal{O}_{\frac{\delta t}{2}} = \frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}_{\delta t}}{\mathcal{E}_{\frac{\delta t}{2}}}\right)}{\log(2)}$$

Le tableau 4.1 résume les résultats obtenus pour la solution choisie (4.51). Nous remarquons que l'ordre de la convergence est 1 ce qui confirme les résultats théoriques.

δt	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2}$	$\ p - p_{N\tau}\ _{H^1}$	$\ T - T_{N\tau}\ _{H^1}$	$\ C - C_{N\tau}\ _{H^1}$	$\mathcal{E}_{\delta t}$	$\mathcal{O}_{\frac{\delta t}{2}}$
1/10	0.0857566	0.012930528	0.00149140204	0.0023221721	0.0867699	—
1/20	0.0439146	0.00661327073	0.00075938369	0.00125394449	0.044434	0.96553064622
1/40	0.0222392	0.00324639697	0.0003825345	0.00077868898	0.0224916	0.98227772553
1/80	0.0111938	0.00181925399	0.00019111449	0.00061733036	0.0113591	0.98553776243
1/160	0.00561677	0.00115276401	0.9449217×10^{-4}	0.00057960169	0.00576384	0.97874633927
1/320	0.00281525	0.00112413206	0.4616398×10^{-4}	0.00057479041	0.00308575	0.90140910492

Tableau 4.1 – Estimation de l'ordre de convergence en temps

La figure 4.1 correspond aux courbes d'erreurs données dans le tableau précédent,

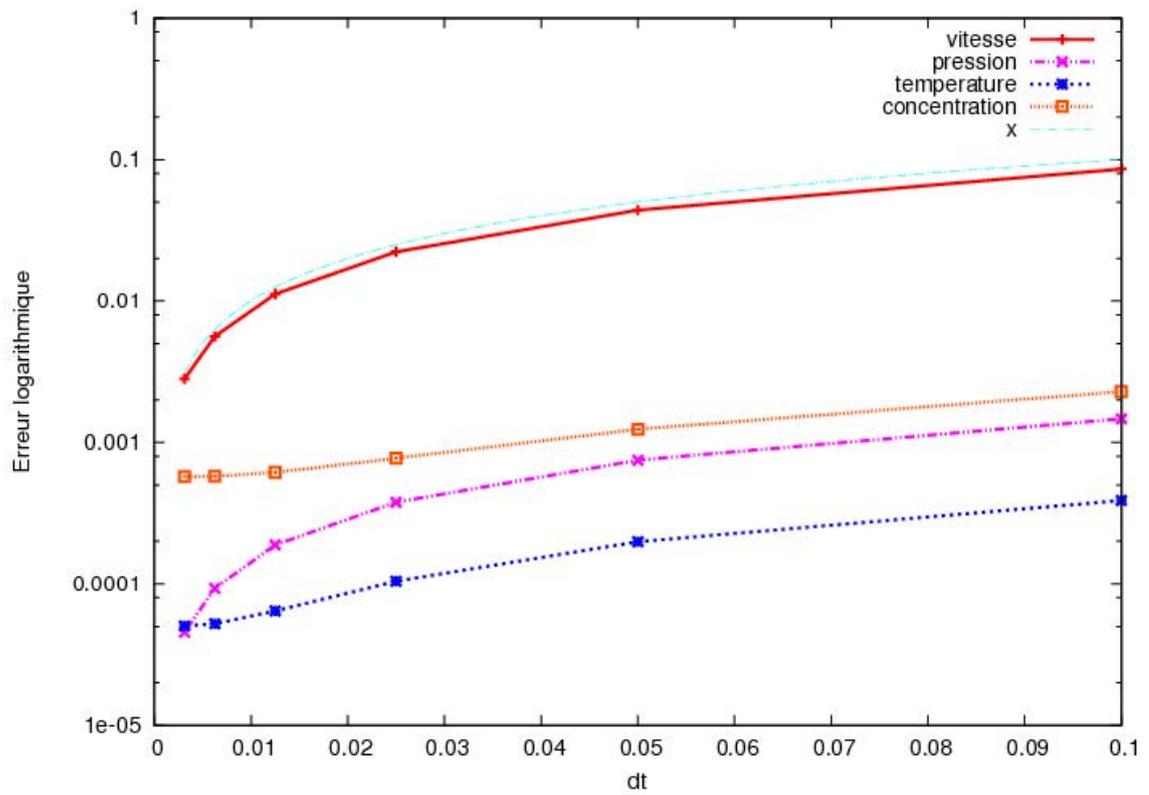


FIGURE 4.1 – Convergence en norme $H^1(\Omega)$ par rapport au pas du temps

4.5.2 Précision spatiale

Pour illustrer maintenant la convergence due à la discrétisation en espace dans le carré $] - 1, 1[^2$, on choisit une solution test d'ordre 1 en temps pour que l'erreur en temps soit nulle,

$$\begin{aligned} u_1 &= -t \sin(\pi x) \cos(\pi y) + t + 1, & u_2 &= t \cos(\pi x) \sin(\pi y) + 2t + 1, \\ p &= \frac{-1}{\pi} \sin(\pi x) \cos(\pi y), \\ T &= t(2 \cos(\pi x) \sin(\pi y) + 1), & C &= t \sin(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi(x + y)) + t - 1. \end{aligned} \quad (4.52)$$

On prend les coefficients de perméabilité et conductivités comme suit

$$\begin{aligned} \alpha(T, C) &= \frac{1}{T^2 + C^2 + 1}, \\ \lambda_{ii} &= \lambda_{21} = T^2 + C^2 + 2, \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad \lambda_{12} = 0. \end{aligned}$$

On fixe le pas du temps δt égal à 0,1. Nous mesurons les erreurs entre la solution exacte et la solution discrète. Ensuite, nous résumons tous les résultats dans le tableau suivant

N	5	10	15	20	25
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2}$	0.0239346	4.72296×10^{-6}	9.10166×10^{-11}	1.71384^{-15}	1.98557×10^{-15}
$\ p - p_{N\tau}\ _{L^2}$	0.00556962	1.06304×10^{-6}	2.10295×10^{-11}	9.99812×10^{-16}	9.21327×10^{-16}
$\ \nabla(p - p_{N\tau})\ _{L^2}$	0.0585162	2.87076×10^{-5}	8.31959×10^{-10}	6.45834×10^{-14}	4.9804×10^{-14}
$\ T - T_{N\tau}\ _{L^2}$	0.0338487	6.67927×10^{-6}	1.28717×10^{-10}	1.31802×10^{-15}	3.20228×10^{-15}
$\ \nabla(T - T_{N\tau})\ _{L^2}$	0.388367	0.000180375	6.00755×10^{-9}	4.30229×10^{-14}	2.3475×10^{-14}
$\ C - C_{N\tau}\ _{L^2}$	0.221504	0.0013004	1.6752×10^{-6}	1.37947×10^{-10}	1.00214×10^{-14}
$\ \nabla(C - C_{N\tau})\ _{L^2}$	2.05033	0.0372901	7.73926×10^{-5}	9.69389×10^{-9}	9.57486×10^{-13}

Tableau 4.2 – Estimation de l'ordre de convergence en espace

Nous traçons dans les Figures 4.2 et 4.3 le comportement de la norme de l'erreur en échelle logarithmique, en fonction du paramètre N . Nous remarquons que l'erreur décroît rapidement quand N croît.

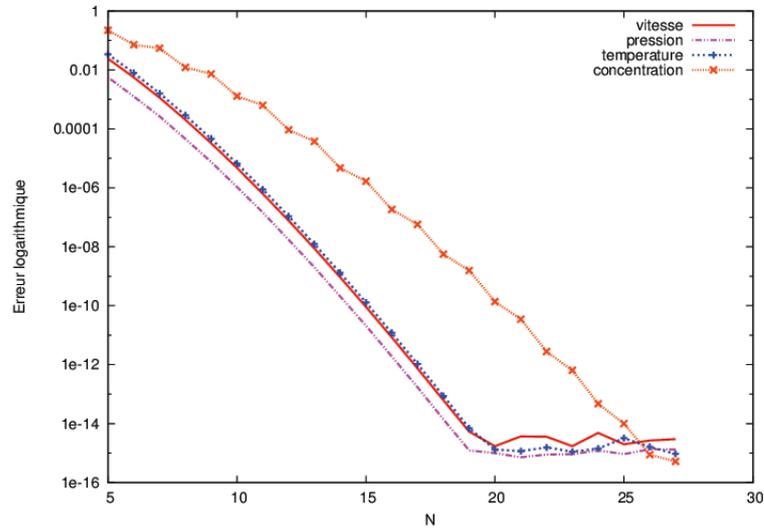


FIGURE 4.2 – Convergence en norme $L^2(\Omega)$ par rapport au degré de polynôme

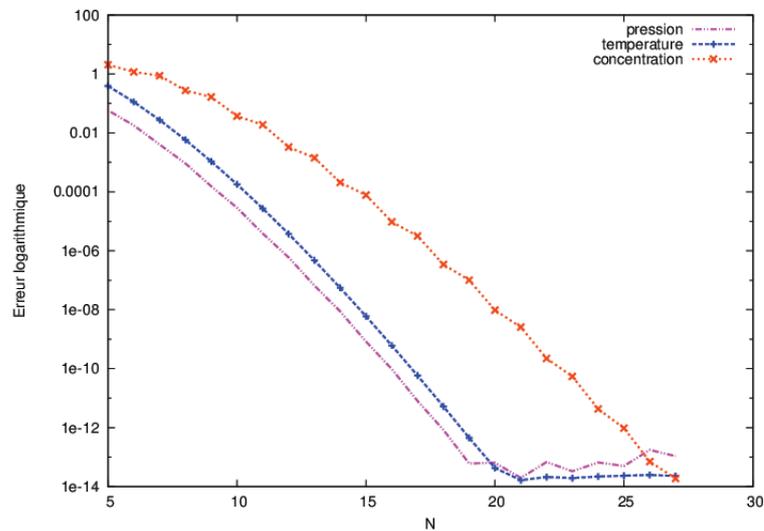


FIGURE 4.3 – Convergence en norme $H^1(\Omega)$ par rapport au degré de polynôme

Nous présentons dans les figures 4.4 et 4.5 la solution analytique donnée dans (4.52) et la solution approchée calculée pour $N = 16$.

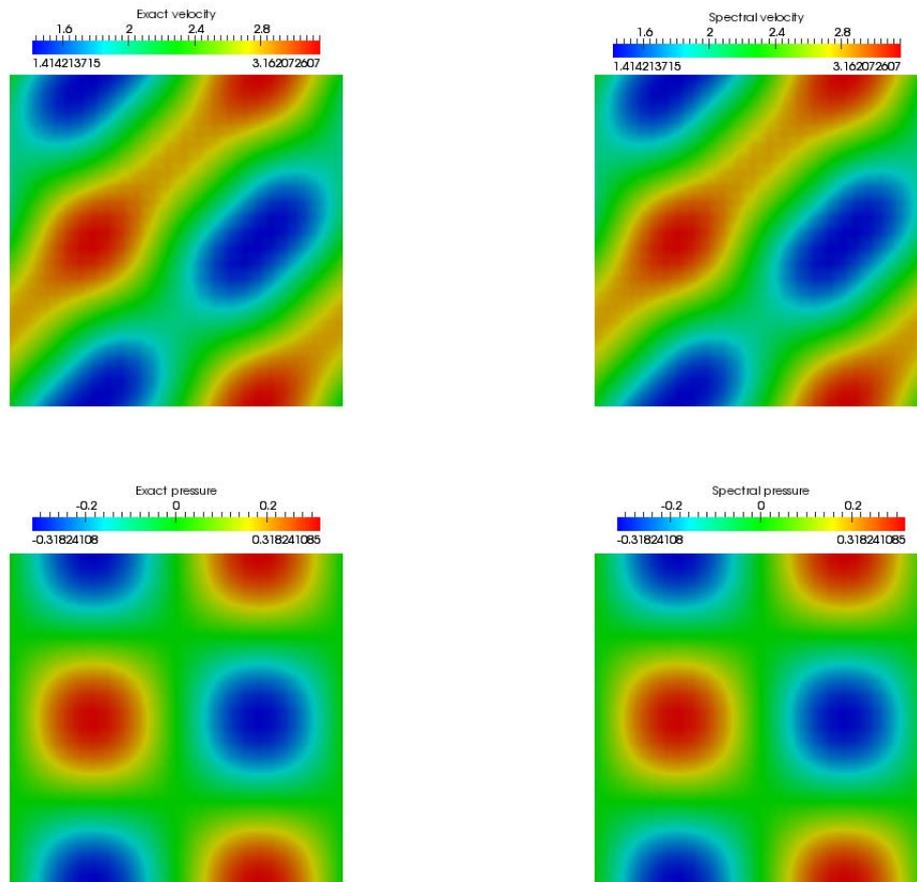


FIGURE 4.4 – Solution exacte (Gauche) vers solution spectrale pour $N = 16$ (Droite) :

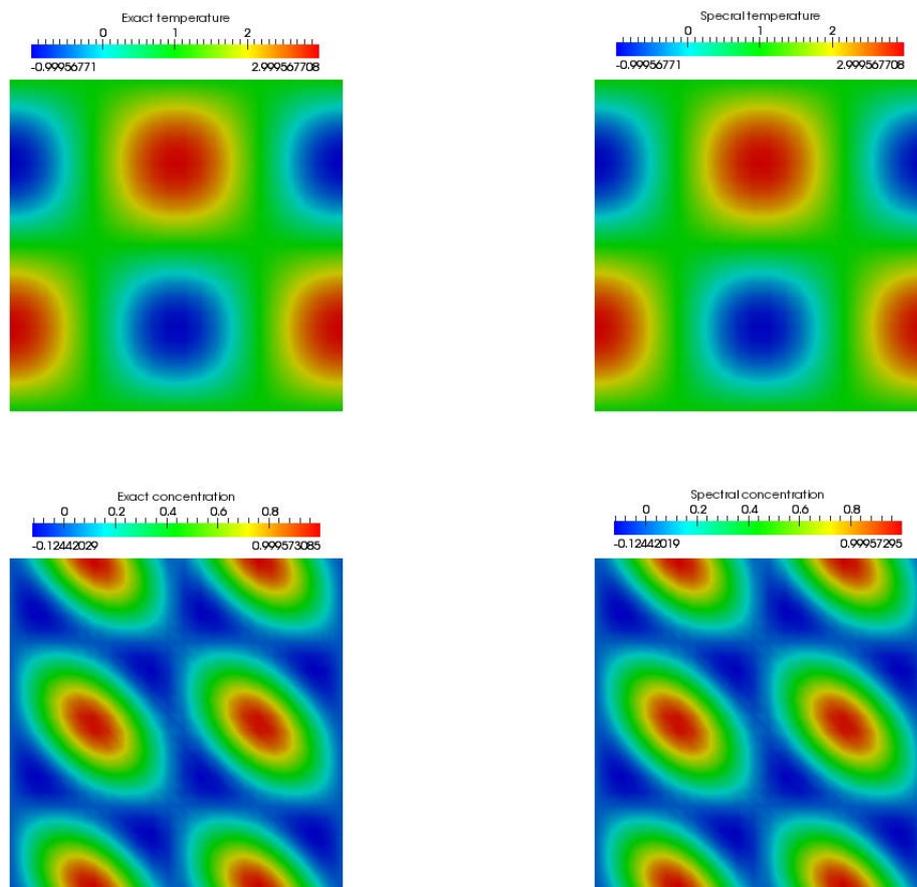


FIGURE 4.5 – Solution exacte (Gauche) vers solution spectrale pour $N = 16$ (Droite) :

Vue la précision avec laquelle est calculée la solution, il n'y a presque pas de différence entre les figures. Quand nous connaissons la solution et pour un choix judicieux des solutions exactes, la méthode converge rapidement vers la solution cherchée.

4.5.3 Problème de Horton-Rogers-Lapwood

Dans cette partie, nous avons choisi de présenter les simulations numériques du problème de Horton-Rogers-Lapwood (HRL) qu'on a considéré dans la Section 3.5.3 tel que la concentration de masse est prise en compte, voir [67, Chap. 9]. En l'absence de simulation numérique de ce type de problème dans la littérature, nous avons effectué une série de tests tridimensionnels, cherchant à modéliser le transfert de chaleur et de la concentration de masse dans un milieu poreux.

Même si les paramètres physiques considérées dans ce travail ne sont pas réalistes, néanmoins notre but est d'illustrer l'impact de la concentration de masse sur le problème de couplage Darcy-chaleur.

Pour ceci, on se place dans le domaine $]0, 2[\times]0, 1[\times]0, 1[$ et on résout le problème suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} + \nabla p &= \rho_0 (1 - \beta_T (T - T_b) - \beta_s (C - C_b)) \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T - \nabla \cdot (\lambda_{11} \nabla T) - \nabla \cdot (\lambda_{12} \nabla C) &= 0 \\ \partial_t C + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C - \nabla \cdot (\lambda_{22} \nabla C) - \nabla \cdot (\lambda_{21} \nabla T) &= 0, \end{aligned}$$

tel que $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ est l'accélération gravitationnelle, β_T , β_s sont respectivement les coefficients d'expansion thermique et massique, ρ_0 représente la densité du fluide.

Le fluide est chauffé par le bord inférieur (le bas) qui contient plus de masse afin de générer une convection naturelle due entre autres aux gradients de température et de concentration de masse. Pour cela nous allons effectuer des expériences où ces gradients vont augmenter jusqu'au déclenchement de rouleaux (Rayleigh-Bernard).

Les conditions aux limites sont prises comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \\ T = T_b + \delta T, \quad C = C_b + \delta C & && \text{sur } z = 0 \\ T = T_b, \quad C = C_b & && \text{sur } z = 1 \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0 & && \text{sur }]0, 2[\times]0, 1[. \end{aligned}$$

Nous fixons les paramètres physiques

$$\rho_0 = \beta_T = \beta_s = 1$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1, \quad \lambda_{12} = 0.03, \quad \lambda_{21} = 1.$$

Nous prenons T_b et C_b égaux à 0. Pour tous ces tests, on fixe le pas du temps à $\delta t = 0.1$ et on cherchera la solution spectrale avec des degrés de polynômes égaux à : $N_x = 20, N_y = 10$ et $N_z = 10$ afin de respecter la longueur qui est deux fois la largeur (et hauteur) du domaine.

Test 1

Dans ce premier test, on fixe le gradient de température à 100 et on fait augmenter celui de concentration dans le but de mesurer l'impact de cette dernière sur la formation ou non de rouleaux. Nous avons donc réalisé quatre calculs avec δC égal à 100, 200, 300 et 500.

La figure 4.6 : (a) et (b) montre bien que pour des valeurs $\delta C = 100$ et $\delta C = 200$, la formation d'un

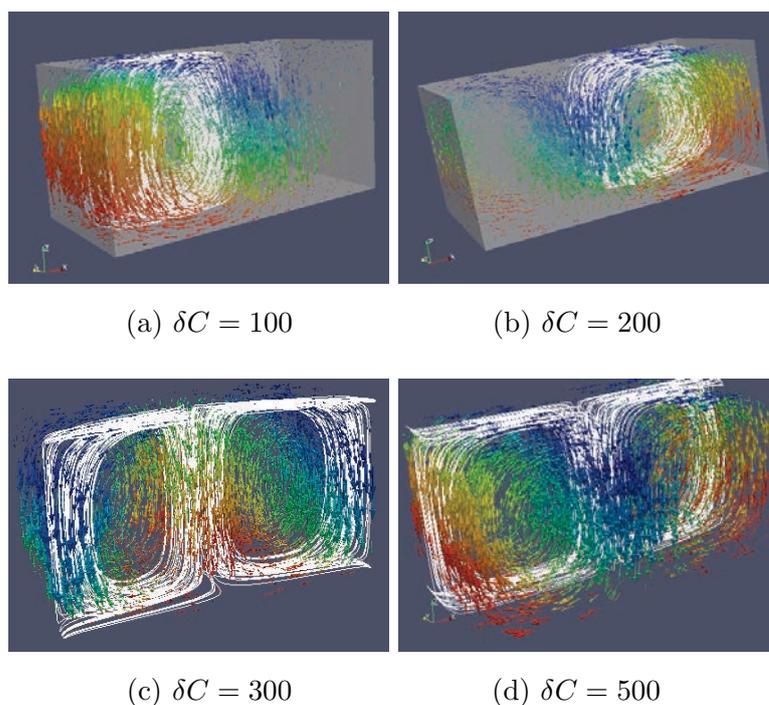
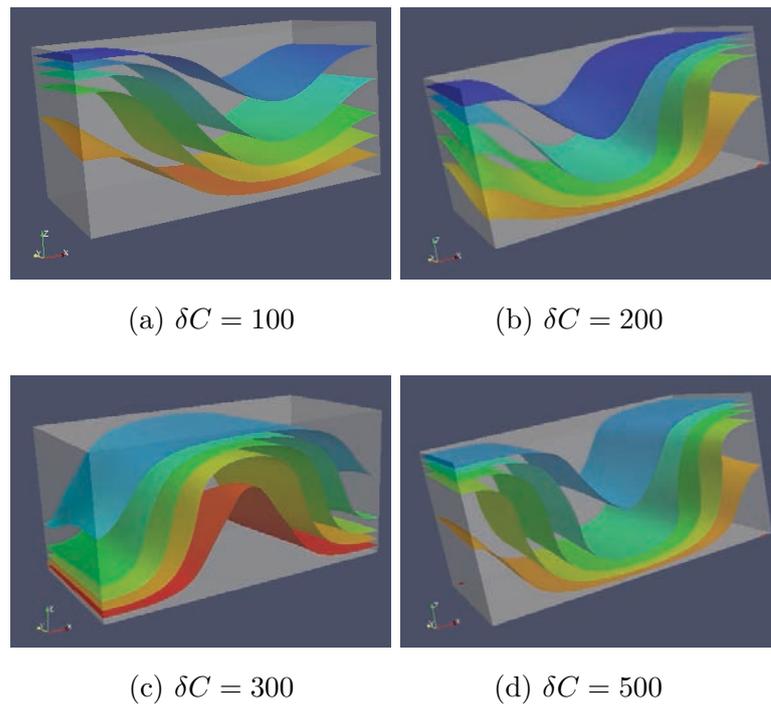


FIGURE 4.6 – Champ de vecteur de vitesse quand $\delta T = 100$

rouleau dominant est établie alors que l'on peut observer la formation d'un autre plus petit (faible). Ceci est illustré aussi par les "Stream lines" (ligne de courant).

À noter que pour des raisons que l'on ignore la formation de ce rouleau dominant passe du côté droit au côté gauche entre les deux simulations. Ces résultats sont confirmés par la figure 4.7 (a) et (b) qui représente les iso-surfaces de la température. En effet la forme de ces iso-surfaces ne sont pas "symétriques" par rapport au plan $x = 1$ et donc il y a plus de froid que de chaud dans un côté par rapport à l'autre.

Tandis que dans les figures 4.6 et 4.7 : c et d, on observe la formation de deux rouleaux de même "taille".

FIGURE 4.7 – Iso-surfaces de la température quand $\delta T = 100$

Notre conclusion est donc pour provoquer la formation de deux rouleaux avec un gradient de température égal à 100, il fallait un gradient de concentration proche de 300 ou supérieur.

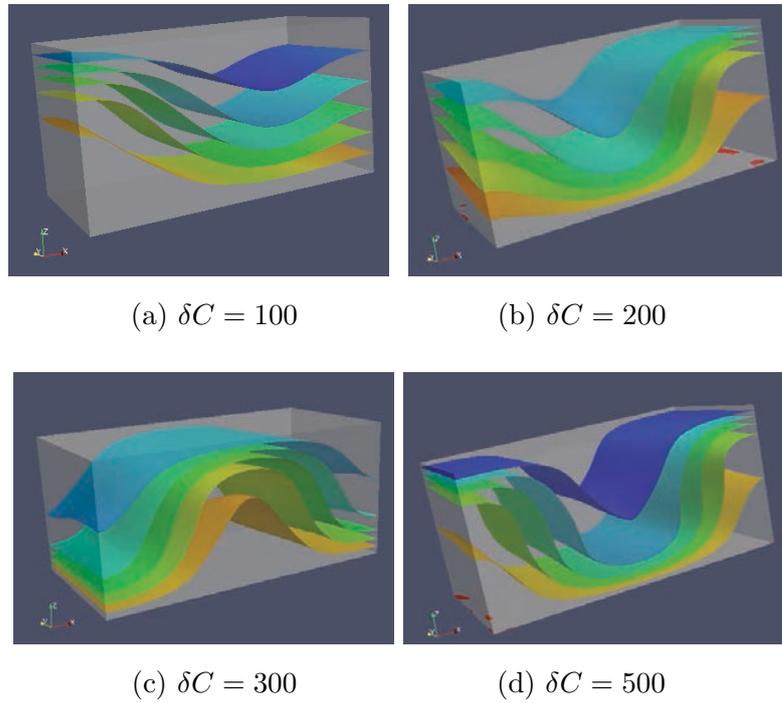
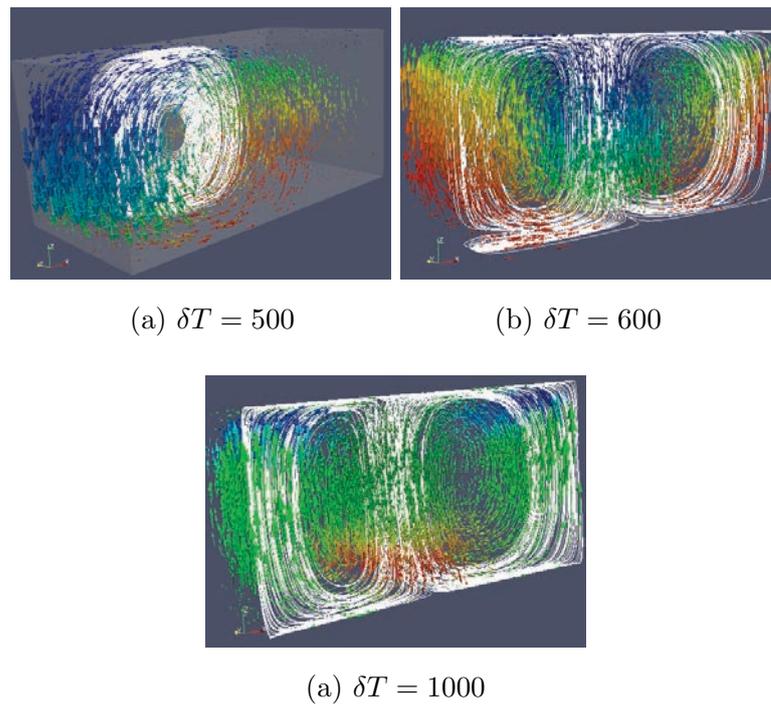


FIGURE 4.8 – Iso-surface de la concentration quand $\delta T = 100$

Test 2

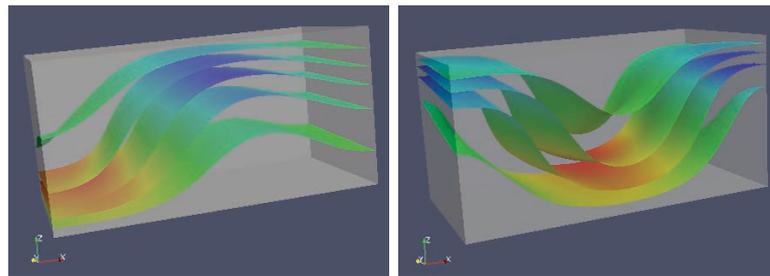
Dans le test suivant, nous allons chercher à quelle valeur de gradient de température δT , la formation de ces deux rouleaux va se réaliser en fixant le gradient de concentration à 10.

On observe que la formation de deux rouleaux de même taille s'effectue à partir de $\delta T = 600$. Ceci est illustré par les figures 4.9 (b et c) où le champs de vitesses et le "Stream lines" montrent bien ce phénomène. La figure 4.10, présente les iso-surfaces de la température et la figure 4.11 représente celles de la concentration.

FIGURE 4.9 – Champs de vecteurs de vitesse pour $\delta C = 10$

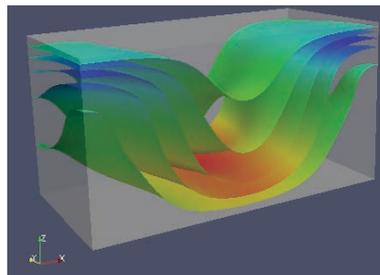
4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit le problème aux limites qui modélise le transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux. Nous avons établi l'existence de la solution. Ensuite, nous avons proposé une discrétisation en temps et en espace du système complet en utilisant le schéma d'Euler implicite et les méthodes spectrales. Des estimations d'erreur optimales ont été prouvées et à la fin nous avons présenté quelques expériences numériques qui confirment l'intérêt de la discrétisation.



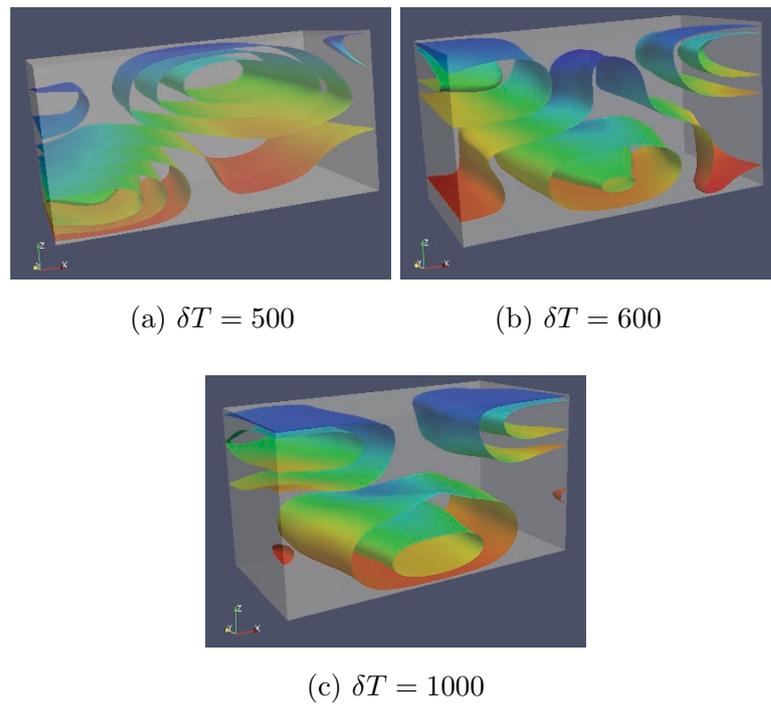
(a) $\delta T = 500$

(b) $\delta T = 600$



(c) $\delta T = 1000$

FIGURE 4.10 – Iso-surfaces de la température pour $\delta C = 10$

FIGURE 4.11 – Iso-surfaces de la concentration pour $\delta C = 10$



Conclusion générale et perspectives

Conclusion

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'analyse des problèmes issus de milieu poreux, tant du point de vue mathématique (existence de solution) que du point de vue numérique (discrétisation en temps et en espace).

Au cours de cette thèse nous avons étudié trois problèmes sur les milieux poreux :

- Discrétisation spectrale des équations de Darcy instationnaires non linéaires.
- Discrétisation spectrale des équations de Darcy écrites sous l'approximation de Boussinesq couplées avec l'équation de la chaleur.
- Discrétisation spectrale des équations de Darcy écrites sous l'approximation de Boussinesq couplées avec les équations de chaleur et de masse.

Perspectives

Plusieurs perspectives de développement sont envisageables.

Les méthodes spectrales sont des méthodes d'ordre élevé en espace. Une difficulté est qu'une partie de cette précision spatiale est inutile par une discrétisation temporelle dont l'ordre serait moins élevé. Cette précision temporelle est souvent, au mieux, d'ordre 1 ou 2 et peut donc dégrader la précision globale de ces méthodes. Un défi est donc de construire une méthode précise à la fois temporellement et spatialement.

Nous avons ouvert une voie originale à la résolution spectrale des équations de Darcy–Forchheimer. Ces dernières modélisent l'écoulement d'un fluide monophasique dans un milieu poreux. La loi de Forchheimer est une loi non linéaire qui généralise la loi de Darcy. Elle est valable quand l'écoulement

est lent ou rapide. Les équations de Darcy–Forchheimer s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\rho}K^{-1}\mathbf{u} + \frac{\beta}{\rho}|\mathbf{u}|\mathbf{u} + \nabla p &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= g \quad \text{sur } \partial\Omega,\end{aligned}$$

où ρ est la densité de fluide, μ représente sa viscosité, β est la viscosité dynamique et K la perméabilité. Nous supposons que les données f et g sont positives. Cette base de travail ainsi que la référence où le problème de Darcy–Forchheimer est abordé par les éléments finis [52] représentent cependant un socle important pour la résolution par les méthodes spectrales.

Bibliographie

- [1] Y. Achdou and C. Bernardi. Un schéma de volumes ou éléments finis adaptatif pour les équations de Darcy à perméabilité variable. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(7) :693–698, 2001.
- [2] Y. Achdou, C. Bernardi, and F. Coquel. A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy’s equations. *Numer. Math.*, 96(1) :17–42, 2003.
- [3] R.A. Adams and J. Fournier. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2003.
- [4] E. Ahusborde, M. Azaïez, F. Ben Belgacem, and C. Bernardi. Automatic simplification of Darcy’s equations with pressure dependent permeability. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 47(6) :1797–1820, 2013.
- [5] M. S. Alam and M. M. Rahman. Dufour and Soret effects on mixed convection flow past a vertical porous flat plate with variable suction. *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, 11(1) :3–12, 2006.
- [6] K. Allali, F. Bikany, A. Taik, and V. Volpert. Numerical simulations of heat explosion with convection in porous media. *Preprint arXiv* :1309.2837, 2013.
- [7] Y. Amirat. Écoulements en milieu poreux n’obéissant pas à la loi de Darcy. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 25(3) :273–306, 1991.
- [8] K. Amoura, C. Bernardi, and S. Saadi. Mortar finite element discretization of the time dependent nonlinear Darcy’s equations. Technical report, June 2013.
- [9] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 21(9) :823–864, 1998.
- [10] M. Anghel, H. S. Takhar, and I. Pop. Dufour and Soret effects on free convection boundary-layer over a vertical surface embedded in a porous medium. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Mathematica*, 45(4) :11–21, 2000.
- [11] M. Azaïez, F. Ben Belgacem, C. Bernardi, and N. Chorfi. Spectral discretization of Darcy’s equations with pressure dependent porosity. *Appl. Math. Comput.*, 217(5) :1838–1856, 2010.
- [12] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Publisher Dover Publications, INC, 1988.

-
- [13] K. Bellalouna. *Résolution d'EDP par méthode spectrale sur un réseau de cylindres*. PhD thesis, Paris 6, 2007.
- [14] J.-M. Bernard. Density results in Sobolev spaces whose elements vanish on a part of the boundary. *Chin. Ann. Math. Ser. B*, 32(6) :823–846, 2011.
- [15] C. Bernardi, M. Dauge, and Y. Maday. *Spectral Methods for Axisymmetric Domains*, volume 3 of *Series in Applied Mathematics (Paris)*. Gauthier-Villars, Éditions Scientifiques et Médicales Elsevier, Paris ; North-Holland, Amsterdam, 1999. Numerical algorithms and tests due to Mejdí Azaïez.
- [16] C. Bernardi, V. Girault, and K. Rajagopal. Discretization of an unsteady flow through porous solid modeled by Darcy's equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(12) :2087–2123, 2008.
- [17] C. Bernardi, F. Hecht, and Z. Mghazli. Mortar finite element discretization for the flow in a nonhomogeneous porous medium. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(8) :1554–1573, 2007.
- [18] C. Bernardi, S. Maarouf, and D. Yakoubi. Spectral discretization of an unsteady flow through a porous solid. March 2014.
- [19] C. Bernardi, S. Maarouf, and D. Yakoubi. Spectral discretization of Darcy's equations coupled with the heat equation. November 2014.
- [20] C. Bernardi and Y. Maday. *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, volume 10 of *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, Paris, 1992.
- [21] C. Bernardi and Y. Maday. *Spectral Methods*. In *Handbook of Numerical Analysis, Vol. V*, 209 – 485. North-Holland, Amsterdam, 1997.
- [22] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, volume 45 of *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, Paris, 2004.
- [23] C. Bernardi, B. Métivet, and B. Pernaud-Thomas. Couplage des équations de Navier-Stokes et de la chaleur : le modèle et son approximation par éléments finis. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 29(7) :871–921, 1995.
- [24] P.-A. Bois. *Introduction à la mécanique théorique des fluides*. Ellipses, 2000.
- [25] J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, second edition, 2001.
- [26] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Collection “Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise”, Masson, 1983.
- [27] H. Brezis and P. Mironescu. Gagliardo-Nirenberg, composition and products in fractional Sobolev spaces. *J. Evol. Equ.*, 1(4) :387–404, 2001. Dedicated to the memory of Tosio Kato.

-
- [28] F. Brezzi, J. Rappaz, and P.-A. Raviart. Finite-dimensional approximation of nonlinear problems. I. Branches of nonsingular solutions. *Numer. Math.*, 36(1) :1–25, 1980/81.
- [29] J. C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2003.
- [30] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [31] P. G. Ciarlet. Basic error estimates for elliptic problems. In *Handbook of Numerical Analysis, Vol. II*. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [32] P. G. Ciarlet. *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2013.
- [33] M. Combarous and S. Bories. Modélisation de la convection naturelle au sein d’une couche poreuse horizontale à l’aide d’un coefficient de transfert solide-fluide. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 17(4) :505–515, 1974.
- [34] M. Costabel. A remark on the regularity of solutions of Maxwell’s equations on Lipschitz domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 12(4) :365–368, 1990.
- [35] W. Couzy. *Spectral element discretization of the unsteady Navier-Stokes equations and its iterative solution on parallel computers*. Thesis, num. 1380, EPFL, Lausanne, 1995.
- [36] M. Crouzeix and A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1984.
- [37] M. Daadaa. *Discrétisation spectrale et par éléments spectraux des équations de Darcy*. Thesis, Paris 6, 2009.
- [38] H. Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris, 1856.
- [39] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 1*. Masson, Paris, 1987.
- [40] G. De Marsily. *Quantitative hydrology : Groundwater hydrology for engineers*, 1986.
- [41] S. Del Pino and O. Pironneau. A fictitious domain based general PDE solver. In *Numerical methods for scientific computing. Variational problems and applications*, pages 20–30. Internat. Center Numer. Methods Eng. (CIMNE), Barcelona, 2003.
- [42] S. Del Pino and D. Yakoubi. A fictitious-domain like spectral method in complex geometries. *In preparation*.
- [43] A. Delache. *Etude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieu poreux : comparaison avec l’expérience*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologie de Lille-Lille I, 2005.

-
- [44] M. Dubiner. Spectral methods on triangles and other domains. *J. Sci. Comput.*, 6(4) :345–390, 1991.
- [45] E. R. G. Eckert and R. M. Drake. *Analysis of Heat Transfer and Mass Transfer*. McGraw-Hill New York, USA, 1972.
- [46] H. A. M. El-Arabawy. Soret and Dufour effects on natural convection flow past a vertical surface in a porous medium with variable surface temperature. *Journal of Mathematics and Statistics*, 5(3) :190–198, 2009.
- [47] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [48] D.A. Frank-Kamenetskii. *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*. Plenum Press, New York, 1969.
- [49] D. Funaro. *Polynomial Approximation of Differential Equations*, volume 8 of *Lecture Notes in Physics. New Series m : Monographs*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [50] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, volume 749 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- [51] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [52] V. Girault and M. F. Wheeler. Numerical discretization of a Darcy-Forchheimer model. *Numer. Math.*, 110(2) :161–198, 2008.
- [53] D. Gottlieb and S. A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1977. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 26.
- [54] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [55] F. Hecht. New development in Freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4) :251–265, 2012.
- [56] C.W. Horton and F.T. Rogers. Convection currents in a porous medium. *Journal of Applied Physics*, 16(6) :367–370, 1945.
- [57] A. Houpeurt. *Mécanique des fluides dans les milieux poreux : critiques et recherches*. Editions Technip, 1974.
- [58] D. B. Ingham and I. Pop. *Transport Phenomena in Porous Media III*, volume 3. Elsevier, Oxford, UK, 2005.

-
- [59] E.R. Lapwood. Convection of a fluid in a porous medium. *Proceedings of the Cambridge*, 44 :508–521, 1948.
- [60] P. D. Lax and A. N. Milgram. Parabolic equations. In *Contributions to the theory of partial differential equations*, Annals of Mathematics Studies, no. 33, pages 167–190. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.
- [61] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1. Dunod, Paris, 1968.
- [62] B. Mercier. *An Introduction to the Numerical Analysis of Spectral Methods*, volume 318 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989. Translated from the French, edited and with a preface by Nessian Mac Giolla Mhuiris and Mohammed Yousuff Hussaini.
- [63] M. B. K. Moorthy and K. Senthilvadivu. Soret and Dufour effects on natural convection flow past a vertical surface in a porous medium with variable viscosity. *J. Appl. Math.*, pages 06–15, 2012.
- [64] P. A. L. Narayana. Soret and Dufour effects on free convection heat and mass transfer in a doubly stratified darcy porous medium. *Journal of Porous Media*, 10(6), 2007.
- [65] J. Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris ; Academia, Éditeurs, Prague, 1967.
- [66] J.-C. Nédélec. Éléments finis mixtes incompressibles pour l'équation de Stokes dans \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 39(1) :97–112, 1982.
- [67] D. A. Nield and A. Bejan. *Convection in Porous Media*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1999.
- [68] S. A. Orszag. Comparison of pseudospectral and spectral approximation. *Studies in Applied Mathematics*, 51(3) :253, 1972.
- [69] I. Pop and D. B. Ingham. *Convective Heat Transfer : Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Media*. Elsevier, 2001.
- [70] A. Postelnicu. Heat and mass transfer by natural convection at a stagnation point in a porous medium considering Soret and Dufour effects. *Heat and mass transfer*, 46(8-9) :831–840, 2010.
- [71] A. Quarteroni. Some results of Bernstein and Jackson type for polynomial approximation in L^p -spaces. *Japan J. Appl. Math.*, 1(1) :173–181, 1984.
- [72] M.H. Rahimian and A. Pourshaghaghay. Direct simulation of forced convection flow in a parallel plate channel filled with porous media. *International communications in heat and mass transfer*, 29(6) :867–878, 2002.
- [73] K. R. Rajagopal. On a hierarchy of approximate models for flows of incompressible fluids through porous solids. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17(2) :215–252, 2007.

-
- [74] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [75] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, Philadelphia, 2003.
- [76] M. Schatzman. *Analyse numérique*. InterEditions, Paris, 1991. Cours et exercices pour la licence. [Course and exercises for the bachelor's degree].
- [77] A. E. Scheidegger. Physics of flow through porous media. In *Physics of flow through porous media*. University of Toronto, 1963.
- [78] S. J. Sherwin, T. C. E. Warburton, and G. E. Karniadakis. Spectral/*hp* methods for elliptic problems on hybrid grids. In *Domain decomposition methods, 10 (Boulder, CO, 1997)*, volume 218 of *Contemp. Math.*, pages 191–216. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [79] G. Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 110 :353–372, 1976.
- [80] P. Vadász. *Emerging Topics in Heat and Mass Transfer in Porous Media : From Bioengineering and Microelectronics to Nanotechnology*, volume 22. Springer Science & Business Media, 2008.
- [81] K. Vafai. *Handbook of Porous Media*. Taylor and Francis, New York, USA, 2005.
- [82] D. Yakoubi. *Analysis and Development of New Algorithms in Spectral Methods*. Thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, December 2007.